

LEÇON

SUITES NUMÉRIQUES

- ▶ Calculer la limite d'une suite ;
- ▶ Montrer qu'une suite est convergente en utilisant les calculs des limites, et les théorèmes de convergence des suites ;
- ▶ Montrer qu'une suite u définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ est convergente en utilisant les inégalités des accroissements finis.

1. CALCULS DES LIMITES DES SUITES : SUITES CONVERGENTES



Prendre un bon départ

a) Chacune des suites suivantes est définie par son terme général :

$$u_n = \frac{n^2 + n - 1}{4n + 3}; v_n = \frac{\ln(n+2)}{n}; w_n = e^{-n^2+3}; T_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n;$$

$$x_n = n(e^{\frac{1}{n}} - 1); y_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Calculer la limite de chacune de ces suites quand n tend vers $+\infty$.

Citer celles dont les limites sont des nombres réels.

b) u est une suite numérique et l un réel.

Montrer que si $|u_n - l|$ converge vers 0, alors u converge vers l .

Soit une suite v telle que $|u_n - l| \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

Montrer que si v converge vers 0, alors u converge vers l .



Retenir

- Une suite de terme général u_n est convergente lorsque la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$ est un nombre réel. Si le réel l est cette limite, alors on dit que la suite u converge vers l .
- Si une suite admet une limite qui n'est pas un réel ou si elle n'admet pas de limite, alors on dit que cette suite diverge.
- Si α est la limite de la suite u , alors on note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$ ou $u \rightarrow \alpha$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exemple

Soit $u_n = e^{-n+1}$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n+1) = -\infty$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

La suite u est convergente et converge vers 0.

La suite v telle que $v_n = \ln(n^2 + n - 1)$ a pour limite $+\infty$.

La suite v est donc divergente.

La suite w telle que $w_n = a^n$ pour $a \leq -1$ n'admet pas de limite en $+\infty$. Elle prend en effet des valeurs alternées quand n change de parité.

w est ainsi une suite divergente.

si $0 \leq a \leq 1$, alors w converge et converge vers 0.

Remarque

Les propriétés sur les limites des fonctions restent valables pour les limites des suites. En effet,

- la limite d'une suite lorsqu'elle existe est unique.
- Soient u et v deux suites convergentes qui convergent respectivement vers ℓ et ℓ' alors, les suites $u + v$ et uv sont convergentes et convergent respectivement vers $\ell + \ell'$ et $\ell\ell'$;
- si $\ell' \neq 0$, alors la suite u/v converge vers ℓ/ℓ' ;
- si $u_n \leq v_n$ pour tout entier $n \geq n_0$ où n_0 est un entier naturel donné, alors $\ell \leq \ell'$;
- si w est une suite telle que $u_n \leq w_n \leq v_n$ et si $\ell = \ell'$, alors w est convergente et converge vers ℓ .
- Toute suite convergente est bornée.

u est une suite numérique et l un réel.

Si $|u_n - l|$ converge vers 0, alors u converge vers l .

Soit une suite v telle que $|u_n - l| \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

Si v converge vers 0, alors u converge vers l .

En conséquence, une suite qui n'est ni majorée, ni minorée est divergente.

S'exercer

Étudier la convergence de chacune des suites u définie par :

$$u_n = \frac{e^n + n}{e^n - n^2} ; u_n = \frac{n + \ln 2n}{\ln 3^n - n^2} ; u_n = n \left(1 + \cos n \frac{\pi}{12} \right) ; u_n = \frac{2n}{\sqrt{n^2 + n} - n\sqrt{2}} ;$$

$$u_n = \sqrt{2n^2 + 5n + 1} - n\sqrt{2} ; u_n = \frac{2n + 3n}{2n - 3n} ; u_n = \frac{n^5 + e^n}{n^5 - e^n}.$$

La suite u est définie pour tout entier naturel non nul n par :

$$u_n = \frac{n}{n^2} + \frac{n}{n^2 + 1} + \dots + \frac{n}{n^2 + 2n} + \frac{n}{n^2 + 2n + 1}.$$

(i) Calculer les trois premiers termes de la suite u .

(ii) Combien y a-t-il de termes dans l'expression de u_n ?

(iii) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{2n}{n+1} \leq u_n \leq \frac{2(n+1)}{n}$.

(iv) En déduire que la suite u converge, puis calculer sa limite.

2. CONVERGENCE DE LA SUITE (a^n) OÙ a EST UN NOMBRE RÉEL DONNÉ



Prendre un bon départ

1) Soit t un nombre réel donné, u la suite définie par $u_n = t^n$.

Justifier que si $t > 0$, alors pour tout entier naturel n , $u_n = e^{n \ln t}$.

Montrer que si $0 < t < 1$, alors u_n a pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$.

Justifier que si $t > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2) Soit a un nombre réel de l'intervalle $]-1; 0]$ et n un entier naturel quelconque.

Montrer que $|a|$ appartient à l'intervalle $[0; 1[$.

En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (|a^n|) = 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a^n) = 0$.

Calculer alors les limites des suites x , y , z et t suivantes :

$$x_n = \left(\frac{-2}{3}\right)^n ; y_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n ; z_n = \left(\frac{5}{4}\right)^n ; t_n = \left(\frac{e-1}{e}\right)^{n+3} + 7.$$



Retenir

• Soit a un nombre réel. La suite (a^n) converge dans le seul cas où $-1 < a \leq 1$.

si $-1 < a < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a^n) = 0$;

si $a = 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a^n) = 1$;

si $a > 1$, alors la limite de (a^n) est $+\infty$.

si $a \leq -1$, alors (a^n) n'admet pas de limite.

Exemple

a) Soit la suite u définie par $u_n = \frac{e^n}{3^n} + 1$. Déterminons la limite éventuelle de la suite u .

Soit n un entier naturel, $u_n = \left(\frac{e}{3}\right)^n + 1$.

On sait que $e < 3$; et alors $0 < \frac{e}{3} < 1$. Il vient que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{e}{3}\right)^n = 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{e}{3}\right)^n + 1 = 1$.

La suite u est convergente et converge vers 1.

b) v est la suite définie par $v_n = \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$. Calculons la limite de la suite v .

Pour tout entier naturel n , $v_n = \frac{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right]}{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right]}$.

Comme $0 \leq \frac{2}{3} < 1$, $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ converge vers 0 et ainsi (v_n) converge vers $\frac{1}{-1} = -1$.

On définit la suite u par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ 4u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$ pour tout entier naturel n .

(i) Calculons u_1 et u_2 .

De la relation de définition de la suite u , on a $4u_1 = u_0 + 5$ et $4u_2 = u_1 + 5$.

Donc $u_1 = 2$ et $u_2 = \frac{7}{4}$.

(ii) Soit a un réel et v la suite définie par $v_n = u_n + a$. Déterminons la valeur du réel a pour que v soit une suite géométrique.

Soit n un entier naturel quelconque.

$$v_{n+1} = u_{n+1} + a = \frac{1}{4}u_n + \frac{5}{4} + a = \frac{1}{4}(v_n - a) + \frac{5}{4} + a = \frac{1}{4}v_n - \frac{a}{4} + \frac{5}{4} + a$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n + \frac{3a+5}{4}.$$

v est une suite géométrique si et seulement si $\frac{3a+5}{4} = 0$; soit $a = -\frac{5}{3}$.

Dans ce cas, v est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

(iii) Exprimons v_n , puis u_n en fonction de n .

$$v_0 = u_0 - \frac{5}{3} = 3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3}.$$

$$v_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n \times v_0 = \left(\frac{1}{4}\right)^n \times \frac{4}{3} \text{ et } u_n = v_n - a = \left(\frac{1}{4}\right)^n \times \frac{4}{3} + \frac{5}{3}.$$

Puisque $\frac{1}{4}$ est dans l'intervalle $] -1; 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{5}{3}$. Les suites u et v sont ainsi convergentes.

(iv) On pose $V = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ et $U = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

$$V = \frac{4}{3} \times \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{4}{3} \times \left(-\frac{4}{3}\right) \times \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1\right) = -\frac{16}{9} \times \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1\right).$$

$$\begin{aligned}
 \text{Par ailleurs, } U &= \left(v_0 - \frac{5}{3}\right) + \left(v_1 - \frac{5}{3}\right) + \dots + \left(v_n - \frac{5}{3}\right) \\
 &= (v_0 + v_1 + \dots + v_n) - \left(\frac{5}{3} + \frac{5}{3} + \dots + \frac{5}{3}\right) \\
 &= V - \frac{5}{3} \times (n+1) = -\frac{7}{3} \times \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n \times \frac{1}{4} - 1\right) - \frac{5}{3} \times (n+1)
 \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} V = \frac{16}{9}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U = -\infty$.

Remarque

Une suite géométrique est convergente si et seulement si sa raison appartient à l'intervalle $] -1; 1]$.



S'exercer

1.c Soient les suites v et w définies par :

$$\begin{cases} v_0 = -\frac{3}{2} \\ v_n = \frac{2}{3} v_{n-1} - 1 \end{cases} \quad w_n = 2v_n + 6.$$

- Démontrer que la suite w est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
- Donner les expressions de w_n et de v_n en fonction de n .
- Calculer les limites des suites v et w .
- Calculer $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n = \sum_{k=0}^n w_k$ et calculer la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

1.d On considère la suite u définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier non nul n , $u_n = 2u_{n-1} - \frac{1}{3}$.

Déterminer le réel a de façon que la suite v définie par $v_n = u_n + a$ soit une suite géométrique.

Exprimer v_n en fonction de n et calculer : $V_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ et $U_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

Calculer les limites des suites u, v, U et V .

3. SUITES CROISSANTES ET MAJORÉES OU DÉCROISSANTES ET MINORÉES.



Prendre un bon départ

Soit la suite u définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n}$.

- Montrer par récurrence que la suite u est croissante et majorée par 4.

Montrer que la suite u est minorée par 0.

On définit la suite v par $v_n = 4 - u_n$.

Montrer que pour tout entier naturel n , $v_{n+1} < \frac{1}{4} v_n$.

Montrer que pour tout entier naturel n , $0 < v_n < \left(\frac{1}{4}\right)^n \times v_0$.

Déduire les limites des suites v et u .

Retenir

On admettra la propriété suivante :

Toute suite croissante et majorée ou décroissante et minorée est convergente.

Exemple

La suite u est définie par :

$u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$.

Montrons par récurrence que u est strictement croissante et majorée par 3.

Montrons que u est strictement croissante. Montrons que pour tout entier naturel n , $u_n < u_{n+1}$.

$u_0 = \sqrt{6 + u_0} = \sqrt{6}$; $u_0 = 0$. Donc $u_0 < u_1$.

Soit k un entier naturel quelconque tel que $u_{k-1} < u_k$ ($k \geq 1$).

Montrons que $u_k < u_{k+1}$.

Puisque $u_{k-1} < u_k$, on a $6 + u_{k-1} < 6 + u_k$ et donc $\sqrt{6 + u_{k-1}} < \sqrt{6 + u_k}$. Soit $u_k < u_{k+1}$.

D'après le principe de la preuve par récurrence, pour tout entier naturel n , $u_n < u_{n+1}$.

La suite u est donc croissante.

Montrons par récurrence que u est majorée par 3. Montrons que pour tout entier naturel n , $u_n < 3$.

$u_0 = 0$ et $u_0 < 3$.

Soit un entier naturel k tel que $u_k < 3$. Montrons que $u_{k+1} < 3$.

De $u_k < 3$, on a $6 + u_k < 6 + 3$; $6 + u_k < 9$.

Donc $\sqrt{6 + u_k} < \sqrt{9} = 3$. Soit $u_{k+1} < 3$.

La suite u est donc majorée par 3.

La suite u étant croissante et majorée, on peut conclure qu'elle est convergente.

Montrons que pour tout entier naturel n , $3 - u_{n+1} < \frac{3 - u_n}{3}$.

$$\begin{aligned}
 3 - u_{n+1} &= 3 - \sqrt{6 + u_n} = \frac{(3 - \sqrt{6 + u_n})(3 + \sqrt{6 + u_n})}{3 + \sqrt{6 + u_n}} \\
 &= \frac{9 - (6 + u_n)}{3 + \sqrt{6 + u_n}} = \frac{3 - u_n}{3 + \sqrt{6 + u_n}} = \frac{1}{3 + \sqrt{6 + u_n}} (3 - u_n) < \frac{3 - u_n}{3}.
 \end{aligned}$$

Car $3 + \sqrt{6 + u_n} > 3$, d'où $3 - u_{n+1} \leq \frac{3 - u_n}{3}$.

c) Calculons la limite de la suite u .

Soit n un entier naturel. $3 - u_n \leq \frac{3 - u_{n-1}}{3} \leq \frac{3 - u_{n-2}}{3^2} \leq \frac{3 - u_{n-3}}{3^3} \leq \dots \leq \frac{3 - u_0}{3^n}$.

Finalement, $3 - u_n \leq \frac{3}{3^n}$.

Puisque u est majorée par 3, $0 \leq 3 - u_n \leq 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (0) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (3 - u_n) = 0 \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 3$$

Remarque

- Si une suite est croissante et non majorée, alors sa limite est $+\infty$.
- Si une suite est décroissante et est non minorée, alors sa limite est $-\infty$.



S'exercer

1.e La suite u est définie par $u_0 = -2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

(i). Calculer les cinq premiers termes de la suite u .

(ii). Montrer par récurrence que la suite u est croissante et majorée par 6

(iii). Conclure.

(iv). Montrer que la suite v définie par $v_n = u_n - 6$ est une suite géométrique dont on précise le premier terme et la raison.

(v). Exprimer v_n et u_n en fonction de n . Calculer les limites de v , puis de u .

1.f Soit f définie sur $] -\infty; 6[$ par $f(x) = \frac{2x-16}{x-6}$.

(ii). Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $] -\infty; 6[$.

(iii). Donner l'image de l'intervalle $] -\infty; 6[$ par f .

On définit la suite u par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel non nul n , $u_{n+1} = \frac{2u_n - 16}{u_n - 6}$

- Calculer u_1 et u_2 .
- Montrer que la suite u est strictement croissante
- Montrer que la suite u est majorée par 4. Que peut-on en déduire pour la suite u ?
- La suite v définie par $v_n = \frac{1}{u_n - 4}$.
- Montrer que la suite v est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
- Exprimer pour tout entier naturel n , v_n , u_n en fonction de n . Calculer alors la limite de la suite u .

4. SUITES DÉFINIES PAR UNE RELATION DE LA FORME $u_{n+1} = f(u_n)$ où f EST UNE FONCTION NUMÉRIQUE.

Prendre un bon départ

- La suite u est définie par : $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$.
- La fonction f définie en x par $f(x) = \sqrt{6 + x}$.
- Remarquant que $u_{n+1} = f(u_n)$, représenter les cinq premiers termes de la suite u sur l'axe des ordonnées d'un repère orthonormé du plan.
- Pour-on conjecturer graphiquement sur la convergence de la suite u ? Donner une valeur approchée de cette limite si elle existe, par rapport à l'abscisse d'un des points communs à la courbe de f et la droite d'équation $y = x$.
- Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = x$.
- Quelle est graphiquement la limite de la suite u ?

Retenir

- Soit u la suite définie par la donnée de u_0 et de la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n .
- Si la suite u est convergente et converge vers a , et si f est continue en a , alors a est une solution de l'équation $f(x) = x$.

Exemple

- Admettant que la suite u définie par $u_0 = 2$ et $3u_{n+1} = u_n + 6$ est convergente, calculons la limite de la suite u . $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.
- La fonction pour laquelle u_{n+1} est l'image de u_n , est la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$.

La limite de u est solution de l'équation $f(x) = x$. Cette équation a pour solution 3.

La suite u converge vers 3.

Exercice résolu

Énoncé :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)e^{-x}$

1) Étudier les variations et dresser le tableau des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2) Soit I l'intervalle $\left[1; \frac{5}{4}\right]$.

a) Montrer que $f(I) \subset I$.

b) Montrer que pour tout réel x de I , $|f'(x)| \leq \frac{3}{2e}$.

c) En étudiant les variations de la fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$, montrer que $f(x) = x$ admet une seule solution a dans I .

d) Montrer que si x et y deux réels quelconques de I ,

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{3}{2e} |x - y|.$$

e) En déduire que pour tout réel x de I , $|f(x) - a| \leq \frac{3}{2e} |x - a|$.

3) On définit la suite u par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \in I$.

b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n ,

$$(i) |u_{n+1} - a| \leq \frac{3}{2e} |u_n - a|;$$

$$(ii) |u_n - a| \leq \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2e}\right)^{n+1}.$$

c) En déduire que la suite u converge vers a .

d) Déterminer alors le plus petit entier naturel p tel que u_p soit la limite de u à 10^{-4} près.

Solution.

1) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x ,

$$f'(x) = 2e^{-x} - e^{-x}(2x+1) = e^{-x}(2 - (2x+1)) = (1-2x)e^{-x}.$$

Puisque e^{-x} est toujours positif, $f'(x)$ est du signe de $1-2x$.

f est croissante sur $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$ et décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2e^{-\frac{1}{2}} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2xe^{-x} + e^{-x}) = 0 + 0 = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x+1)e^{-x} = -\infty$$

$$2) I = \left[1; \frac{5}{4}\right].$$

Puisque l'intervalle I est contenu dans $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$, f est décroissante sur I et ainsi,

$$f(I) = \left[f\left(\frac{5}{4}\right); f(1) \right]. \text{ Or } f(1) = 3e^{-1} = \frac{3}{e}; f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{7}{2}e^{-\frac{5}{4}} = \frac{7}{2}e^{-1,25}.$$

et $f\left(\frac{5}{4}\right)$ sont tous dans l'intervalle I ; donc, $f(I) \subset I$.

Montrons que $|f'(x)| \leq \frac{3}{2e}$ sur I .

$$\text{Si } 1 \leq x \leq \frac{5}{4}, \text{ on a : } -\frac{5}{2} \leq -2x \leq -2; -\frac{3}{2} \leq 1-2x \leq -1;$$

$$\text{donc } -\frac{3}{2}e^{-x} \leq (1-2x)e^{-x} \leq -e^{-x}$$

$$-\frac{5}{4} \leq -x \leq -1 \Rightarrow -\frac{3}{2}e^{-\frac{5}{4}} \geq -\frac{3}{2}e^{-x} \geq -\frac{3}{2}e^{-1} \text{ et } -e^{-\frac{5}{4}} \geq -e^{-x} \geq -e^{-1}.$$

$$\text{Finalement } -\frac{3}{2}e^{-1} \leq f'(x) \leq -e^{-\frac{5}{4}} \Rightarrow |f'(x)| \leq \max\left(\frac{3}{2}e^{-1}; e^{-\frac{5}{4}}\right) = \frac{3}{2}e^{-1} = \frac{3}{2e};$$

$$\text{donc, } |f'(x)| \leq \frac{3}{2e} \text{ avec } 3 < 2e \text{ et } 0 < \frac{3}{2e} < 1.$$

Considérons la fonction g définie en x par $g(x) = f(x) - x$.

$g'(x) = f'(x) - 1$. Puisque $f'(x) \leq 0$ sur I (car f décroissante), $g'(x) \leq 0$.

g est donc décroissante sur I . g est une bijection de I sur $g(I)$.

$$g(1) = f(1) - 1 = \frac{3}{e} - 1 = \frac{3-e}{e}; g\left(\frac{5}{4}\right) = f\left(\frac{5}{4}\right) - \frac{5}{4} = \frac{7}{2}e^{-1,25} - 1,25 \approx -0,247.$$

$$g(1) \geq 0; g\left(\frac{5}{4}\right) \leq 0. \text{ L'intervalle } g(I) \text{ contient } 0 \text{ et donc l'équation } g(x) = 0$$

admet une unique solution dans l'intervalle I .

f est continue et dérivable sur l'intervalle I et à dérivée bornée par $\frac{3}{2e}$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout couple $(x; y)$ de réels

$$\text{de } I, |f(x) - f(y)| \leq \frac{3}{2e} |x - y|. (1)$$

$$\text{En remplaçant dans l'inégalité (1) } y \text{ par } a, \text{ on a } |f(x) - a| \leq \frac{3}{2e} |x - a|. (2)$$

On définit la suite u par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Montrons par récurrence que $u_n \in I$.

$$\bullet u_0 \in I;$$

$$\bullet \text{ Soit } n \text{ un entier naturel tel que } u_n \in I. \text{ Montrons que } u_{n+1} \in I.$$

On sait que l'image par f d'un élément de I appartient à I .

Par hypothèse $u_n \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. D'où $u_{n+1} \in I$.

D'après le principe de démonstration par récurrence, $u_n \in I$, pour tout entier naturel n .

f) En utilisant l'inégalité (2) et en remplaçant x par u_n , on a $|u_{n+1} - a| \leq \frac{3}{2e} |u_n - a|$. (3)

g) Montrons par récurrence que $|u_n - a| \leq \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2e} \right)^n$, pour tout entier naturel n .

$$\bullet |u_0 - a| = |1 - a| \leq \left| \frac{5}{4} - 1 \right| ; |u_0 - a| \leq \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2e} \right)^0.$$

$$\bullet \text{ Soit } n \text{ un entier naturel tel que } |u_n - a| \leq \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2e} \right)^n.$$

$$\text{Montrons que } |u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2e} \right)^{n+1}. \quad (4)$$

D'après l'inégalité (3), $|u_{n+1} - a| \leq \frac{3}{2e} |u_n - a|$ et d'après l'hypothèse de récurrence,

$$|u_n - a| \leq \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2e} \right)^n. \text{ Il vient que } |u_{n+1} - a| \leq \frac{3}{2e} \times \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2e} \right)^n ;$$

soit $|u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2e} \right)^{n+1}$. D'après le principe de démonstration par récurrence,

$|u_n - a| \leq \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2e} \right)^n$, pour tout entier naturel n . L'inégalité (4) est équivalente aux inégalités

$$-\frac{1}{4} \left(\frac{3}{2e} \right)^n \leq u_n - a \leq \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2e} \right)^n \text{ et donc } a - \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2e} \right)^n \leq u_n \leq a + \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2e} \right)^n. \text{ De plus, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2e} \right)^n = 0$$

$$\text{car } \frac{3}{2e} \in]0; 1[.$$

$$\text{De } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(a - \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2e} \right)^n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(a + \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2e} \right)^n \right), \text{ la suite } (u_n) \text{ a pour limite } a.$$

Cette suite est donc convergente et converge vers a .

Déterminons alors le plus petit entier naturel p tel que u_p est la limite de u à 10^{-4} près.

Dire que u_p est la limite de u à 10^{-4} près, c'est aussi dire que a est une valeur approchée de

$$u_p \text{ à } 10^{-4} \text{ près. Ainsi, } |u_p - a| \leq 10^{-4}. \text{ Or } |u_p - a| \leq \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2e} \right)^p.$$

$$\text{Il suffit que } \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2e} \right)^p \leq 10^{-4} ; \text{ soit } 4 \times \left(\frac{2e}{3} \right)^p \geq 10^4.$$

$$\ln \left(4 \times \left(\frac{2e}{3} \right)^p \right) \geq \ln(10^4) \Leftrightarrow \ln(4) + p \ln \left(\frac{2e}{3} \right) \geq 4 \ln(10) ;$$

$$\text{soit } p(\ln(2e) - \ln(3)) \geq 4 \ln(10) - \ln(4) ; p\left(1 + \ln\left(\frac{2}{3}\right)\right) \geq 4 \ln(10) - \ln(4) ;$$

$$\frac{4 \ln 10 - \ln 4}{1 + \ln\left(\frac{2}{3}\right)} ; \text{ soit } \geq 5,35 .$$

Le plus petit entier naturel plus grand que 5,35 est 6.

Tous les u_p où $p \geq 6$ sont les valeurs approchées de la limite de la suite u

avec une incertitude de 0,0001.

On peut calculer u_6 de proche en proche, plus rapidement par une programmation

sur certains logiciels à l'instar de «sinéquanon».

S'exercer

Soit f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}$.

Étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.

Étudier les variations de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ pour $x \in [0; +\infty[$.

Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution α dans $[0; +\infty[$ et que $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{4}$.

$$J = \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right] .$$

Montrer que $f(J) \subset J$.

Montrer que pour tout réel x de J , $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

Déduire que pour tout réel x de J , $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$.

On définit la suite u par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

Démontrer par récurrence que u_n est un élément de J .

Démontrer que pour tout entier naturel n , $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$.

Déduire que pour tout entier naturel n , $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+2}}$.

Montrer que la suite u est convergente et converge vers α .

Déterminer un entier naturel n_0 pour que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Calculer cette valeur approchée.

1.h On considère la suite u définie par $u_0 = 9$, et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{8u_n - 6}{u_n + 1}$.

1. Etudier graphiquement la monotonie et la convergence de la suite u (On représentera la courbe de la fonction $f: x \rightarrow \frac{8x-6}{x+1}$).

2. Démontrer que la suite u est décroissante et minorée par 6.

3. En utilisant les propriétés de la fonction f , montrer que $|u_{n+1} - 6| \leq \frac{2}{7} |u_n - 6|$,

$|u_n - 6| \leq 3 \times \left(\frac{2}{7}\right)^n$, puis montrer que la suite u est convergente et converge vers 6.

4. Soit v la suite définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \frac{u_n - 6}{u_n - 1}$.

a) Montrer que la suite v est géométrique.

b) Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n .

Démontrer alors que la suite u converge vers 6.

S'ENTRAÎNER

SUITES ARITHMÉTIQUES ET SUITES GÉOMÉTRIQUES

1. Calculer le premier terme d'une progression arithmétique est -11 , sa raison est 13 . Calculer les termes compris entre 1983 et 2050 .

2. Calculer la somme d'une progression arithmétique de 80 termes a pour premier terme 360 et pour dernier terme -402 . Calculer le premier terme et la raison de cette progression.

3. Soient a, b deux réels, (u_n) une suite réelle définie par :
 $u_{n+1} = p(u_n + b)$.
 Montrer que la suite u est arithmétique.
 Calculer le premier terme et la raison de la suite.

4. Calculer une suite de cinq termes sachant que leur somme est 285 , leur produit est 20 , et que leur raison r est comprise entre 10 et 20 .

5. Calculer la suite géométrique u telle que $u_1 \times u_3 = 144$ et $u_2 = 63$, et donc tous les termes sont réels.

6. Calculer la suite géométrique v est telle que :

$$v_1 = 27, \text{ et } v_2 = \frac{20}{9}.$$

Calculer v_n , la raison de v et

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n.$$

7

Les réels a, b, c vérifient les conditions suivantes :

a, b, c sont dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une progression arithmétique.

b, c, a sont dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une progression géométrique.

$$a + b + c = 12.$$

Calculer a, b, c .

8

Une personne a placé une somme S auprès d'une banque. À la fin de chaque année,

l'intérêt de ce placement est égal au $\frac{1}{25}$ ième de la somme placée en début d'année.

Les intérêts ne sont pas retirés et produisent eux-aussi les autres intérêts.

a. Quelle est la somme due à ce placement à la fin de la n -ième année ?

b. Pendant combien de temps au moins devra durer ce placement pour que la somme due soit supérieure à $2S$?

9

u est une progression géométrique.

a. Montrer que $u_1 \times u_5 = (u_3)^2$.

b. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 sachant que :

$$\begin{cases} u_3 > 0 \\ u_1 \times u_5 = 81 \\ u_2 + u_3 + u_4 = 39 \end{cases}$$

10

Soient x, y, z trois réels distincts deux à deux

tels que $\begin{cases} x \neq 0; \\ (x, y, z) \text{ est géométrique.} \\ (3x, 2y, z) \text{ est arithmétique.} \end{cases}$

Calculer la raison de la suite géométrique.

11

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$; $u_1 = 4$;
pour tout entier naturel n , $u_{n+2} = -3u_{n+1} + 4u_n$.

a. Montrer que la suite v , définie par

$v_n = u_{n+1} - u_n$ est une suite géométrique.

b. Calculer v_n en fonction de n . (On évaluera d'abord $s_n = v_{n-1} + v_{n-2} + \dots + v_0$ en fonction de n , puis en fonction de $u_n - u_0$ et en déduire l'expression de u_n en fonction de n).

12

Un litre de super coûtait 375 francs cfa au premier janvier 1987.

a. En supposant une augmentation régulière de 10% par an, calculer le prix du litre de super au premier janvier 1990.

b. En quelle année le prix du litre de super sera-t-il au moins le double de ce qu'il était au premier janvier 1987 ?

13

Soient les suites définies par :

$a_0 = 2$; $b_0 = 3$; et pour tout entier naturel n ,

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{5}(2a_n + 3b_n) \end{cases}$$

1. Soit u définie par $u_n = a_n + b_n$.

a. Pour tout entier naturel n , exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

b. Calculer u_n .

2. Soit v la suite définie par $v_n = a_n - b_n$.

a. Calculer v_{n+1} en fonction de v_n .

b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n .

c. Exprimer a_n et b_n en fonction de n , puis calculer les limites si elles existent des suites (a_n) et (b_n) .

14

1. n étant un entier naturel, résoudre l'équation $\ln(7^n x) = 2n$.

2. On considère la suite v définie par

$$\ln(7^n v_n) = 2n.$$

a. Calculer v_0 .

b. Montrer que la suite v est géométrique et déterminer sa raison. Calculer la limite de la suite v .

c. Déterminer un entier n_0 tel que, pour tout entier $n > n_0$, $v_n > 100$.

15

La suite u est définie par $u_0 = -2$ et pour tout

entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

Soit a un réel et v la suite définie par

$$v_n = u_n - a.$$

a. Déterminer la valeur de a pour que la suite soit géométrique, puis préciser sa raison.

On pose $w_n = u_n - 6$.

b. Montrer que la suite w est géométrique puis préciser son premier terme et sa raison.

c. Exprimer w_n et u_n en fonction de n .

d. Calculer les limites des suites w , u , S et T où $S = w_0 + w_1 + \dots + w_n$ et

$T = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. (On exprimera S et T en fonction de n).

SUITES DÉFINIES PAR UNE RELATION DE RÉCURRENCE DU TYPE $u_{n+1} = f(u_n)$

16

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = 4x + 1 - xe^x.$$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une

unique solution β dans l'intervalle $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$.

2. Soit h la fonction définie sur $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ par

$$h(x) = \ln\left(4 + \frac{1}{x}\right).$$

Montrer que β est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$.

Étudier les variations de la fonction h

$$\left[\frac{3}{2}; 2\right].$$

Montrer que l'image de $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$ est une partie

$$\left[\frac{3}{2}; 2\right] \text{ et que pour tout réel } x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right],$$

$$\left| h(x) - \frac{1}{10} \right| \leq \frac{1}{10}.$$

Déduire que pour tout réel x de $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$,

$$|h(x) - \beta| \leq \frac{1}{10} |x - \beta|.$$

Soit la suite définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et pour tout

entier naturel $n, u_{n+1} = h(u_n)$.

Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$u_n \in \left[\frac{3}{2}; 2\right];$$

$$|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{10} |u_n - \beta|;$$

$$|u_n - \beta| \leq \frac{1}{2 \times 10^n}.$$

Montrer que la suite u converge vers β .

Déterminer le plus petit entier naturel n_0

tel que pour tout entier naturel $n \geq n_0, u_n$ est

approchée de β à 10^{-6} près.

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{x + \frac{3}{4}} \text{ et la suite } u \text{ définie par } u_0 = 0$$

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + \frac{3}{4}}; \text{ pour tout entier naturel } n$$

En utilisant la courbe représentative de la

fonction f , conjecturer que u est croissante

et converge vers un réel de $\left[0; \frac{3}{2}\right]$.

2. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

3. Montrer que pour tout réel x de $\left[0; \frac{3}{2}\right]$,

$$\frac{1}{3} \leq f'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

4. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout réel x de

$$\left[0; \frac{3}{2}\right], \left| f(x) - \frac{3}{2} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \left| x - \frac{3}{2} \right|.$$

5. Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$\bullet u_n \in \left[0; \frac{3}{2}\right];$$

$$\bullet \left| u_{n+1} - \frac{3}{2} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \left| u_n - \frac{3}{2} \right|;$$

$$\bullet \left| u_n - \frac{3}{2} \right| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^n \times \frac{3}{2}.$$

6. Montrer que la suite u converge vers $\frac{3}{2}$.

18

On se propose d'étudier la suite u définie par

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et } u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{u_n + 2}.$$

1. Soit f l'application définie dans $] -2; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{e^x}{x + 2}.$$

a) Étudier les variations de f , puis donner l'image de $[0; 1]$ par la fonction f .

b) Démontrer que : pour tout réel de $[0; 1]$,

$$\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}.$$

c) Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0; 1]$.

2. Démontrer que pour tout entier naturel n ,

$$\bullet u_n \in [0; 1];$$

$$\bullet |u_{n+1} - a| \leq \frac{2}{3} |u_n - a| ;$$

$$\bullet |u_n - a| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

• En déduire que la suite est convergente, puis calculer sa limite.

19

Soit f est la fonction définie par :

$$f(x) = 2e^{-x} - e^{-2x}.$$

1.a. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

b. Construire la courbe (C) de f , la droite d'équation $y = x$, et la tangente en (C) au point d'abscisse 0.

2.a. Montrer que la fonction $g : x \rightarrow f(x) - x$ est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

b. En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution positive notée b telle que $\frac{1}{2} < b < 1$.

3. a. Montrer que pour tout réel x de

$$\left[\frac{1}{2}; 1\right], f(x) \in \left[\frac{1}{2}; 1\right].$$

b. Montrer que sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right], |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

4. Soit (u_n) la suite définie par

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ et } u_0 = \frac{1}{2}.$$

a. Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$\bullet u_n \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] ;$$

$$\bullet |u_{n+1} - b| \leq \frac{1}{2} |u_n - b| ;$$

$$\bullet |u_n - b| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

b. Montrer que la suite u converge vers b .

c. Déterminer le plus petit entier k , tel que u_k soit une valeur approchée de b à 10^{-3} près.

AUTRES SUITES.

20

Pour chaque suite (u_n) , étudier la convergence ou la divergence.

$$1) u_n = \sqrt{\frac{2n+3}{7n+5}} ; 2) u_n = \exp \frac{2n}{7n^2+n}$$

$$3) u_n = \frac{n^2-n}{n-2} ; 4) u_n = \exp(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$$

$$5) u_n = \ln(\sqrt{n^2+4n}-n) ; 6) u_n = \frac{2n+1}{4n+1}$$

$$7) u_n = \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{3} ; 8) u_n = \ln \left| n \sin \frac{1}{n} \right|$$

21

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

1) Démontrer que pour tout entier naturel non nul, on a l'encadrement :

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

2) En déduire que la suite (u_n) converge.

22

La suite u est définie par :

$$u_n = \frac{n}{n^2} + \frac{n}{n^2+1} + \dots + \frac{n}{n^2+2n} + \frac{n}{n^2+2n-1}$$

a. Donner le nombre de termes de u_n .

b. Démontrer que pour tout entier naturel non nul, on a l'encadrement :

$$\frac{2n}{n+1} \leq u_n \leq \frac{2(n+1)}{n}.$$

c. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.

considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\frac{1}{\sqrt{2 \times 3}}$$

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}} \text{ si } n > 0.$$

calculer une valeur approchée à 10^{-4} près
des termes u_1, u_2 et u_3 .

Montrer que $u_{n+1} - u_n$ est égal à

$$\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+3}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n+4}} \right) \text{ et}$$

montrer que la suite (u_n) est strictement
croissante.

Montrer que pour tout entier naturel n non

$$\frac{n}{\sqrt{2n(2n+1)}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}.$$

En déduire que la suite (u_n) est majorée par 1.

Étudier la convergence de la suite (u_n) .

Pourrait-on dire de sa limite ?

Calculer la limite de chacune des suites

suivantes comme suit :

$$a_n = \frac{\sin n}{n^2}; b_n = \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2}; c_n = n\sqrt{n};$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n; e_n = \left(\frac{n}{n+3}\right)^n; d_n = n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right);$$

$$\frac{3^n - 3^n}{3^n + 3^n}.$$

On définit la suite u par :

$$u_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \text{ et la fonction } f \text{ par :}$$

$$f(x) = e^x \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right).$$

1.a. Montrer que $f'(x) = -e^{-x} \times \frac{x^n}{n!}$ sur $[0;1]$.

b. En déduire que, pour tout réel x de $[0;1]$,

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{n!}.$$

c. En appliquant l'inégalité des accroissements

finis sur $[0;1]$, montrer que $\left| \frac{1}{e} u_n - 1 \right| \leq \frac{1}{n!}$.

d. En déduire que la suite (u_n) converge et
calculer sa limite.

2. La suite v est définie par : $v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$

a. Montrer que la suite v converge vers e .

b. Montrer que la suite u est croissante et la
suite v est décroissante.

c. En déduire que pour tout entier naturel
 $n, u_n < e < v_n$.

26

Soit la suite (u_n) définie par la donnée de u_0
tel que $0 < u_0 < 1$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}.$$

a. Montrer par récurrence que pour tout entier
naturel $n, 0 < u_n < 1$.

b.(i) Étudier le signe du polynôme

$$x \rightarrow -2x^2 + x + 1 \text{ pour } x \in [0;1].$$

(ii). Exprimer $u_{n+1}^2 - u_n^2$ en fonction de u_n .

(iii). En déduire la monotonie de la suite u .

(iv). En déduire que la suite u est convergente,
puis calculer sa limite.

27

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \ln x.$$

a. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle
 $[n; n+1]$ où n est un entier naturel non nul,

$$\frac{1}{n+1} \leq f'(x) \leq \frac{1}{n}.$$

b. En déduire que pour tout entier naturel non

$$\text{nul } n, \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}.$$

On définit la suite u par : $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

c. Montrer par récurrence que

$$\frac{1}{n} + \ln(n) \leq u_n \leq 1 + \ln(n).$$

d. En déduire les limites de u_n et de $\frac{u_n}{\ln(n)}$.

28

On donne deux suites u et v telles que

$u_0 = 5$ et $v_0 = 1$, et pour tout entier naturel

$$n, u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \frac{2u_n \times v_n}{u_n + v_n}.$$

a. Démontrer que la suite u est strictement croissante

b. Démontrer que la suite v est strictement décroissante.

c. Montrer que pour tout entier naturel

$$n, v_n < u_n.$$

d. En déduire que les suites u et v sont convergentes.

e. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

f. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (u_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (v_n)$.

Vocabulaire : Lorsque deux suites vérifient a), b), c) et e), alors elles sont dites adjacentes.

29

Soit la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et par tout entier naturel n non nul, par

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{n}.$$

1) On suppose que l'on a $u_1 > 0$.

a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et minorée.

b) Montrer que pour tout entier naturel n non

nul, on a : $0 \leq u_n \leq \frac{u_1}{n}$.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

2) On suppose que l'on a $u_1 < 0$.

S'inspirer de la question 1) pour étudier la convergence de la suite (u_n) .

30

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{2n}{(n-1)^2}$.

1) Calculer les six premiers termes de la suite.

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N} - \{0, 1\}$.

3) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

4) Montrer que pour tout entier naturel n

distinct de 1, on a $0 < u_n \leq \frac{2n}{(n-1)^2}$.

5) En déduire la limite de la suite (u_n) .

31

On considère les deux suites u et v définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \\ v_1 = 12 \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

1) On pose $w_n = v_n - u_n$.

a) Montrer que (w_n) est une suite géométrique.

b) Exprimer pour tout entier naturel n non nul w_n en fonction de n .

c) En déduire la limite de la suite (w_n) .

2) Montrer que la suite u est croissante et majorée par v_1 et la suite v est décroissante et minorée par u_1 .

3) Que peut-on déduire des questions précédentes des suites u et v ?

4) On pose : $t_n = 3u_n + 8v_n$.

Montrer que la suite (t_n) est stationnaire.

En déduire la limite de u et de v .

On considère la suite (u_n) de nombres réels

définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$u_n = e^{\frac{1}{n}}$ et pour tout entier naturel n non nul,

$$u_{n+1} = e \cdot u_n.$$

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$v_n = \frac{1 + \ln u_n}{2}.$$

Pour tout entier naturel n non nul, exprimer

v_n en fonction de $\ln u_n$ puis en fonction de v_n .

En déduire que (v_n) est une suite

géométrique dont on déterminera le premier

terme et la raison. Exprimer v_n , puis u_n en

fonction de n .

Déterminer la limite de chacune des suites

(v_n) et (u_n) .

On considère la suite (u_n) définie par son

premier terme $u_0 > 2$ et par $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

Démontrer que la suite (u_n) est minorée

par 2.

Montrer que pour tout entier naturel,

$$u_{n+1} - 2 = \frac{u_n - 2}{\sqrt{2 + u_n} + 2}.$$

En déduire que : $u_n - 2 \leq \frac{u_0 - 2}{4^n}$.

Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$u_n - 2 \leq \frac{u_0 - 2}{4^n}.$$

En déduire que la suite (u_n) converge vers 2.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{u_n + 3}.$$

1) Montrer que pour tout entier naturel n , u_n est positif.

2) Montrer que si la suite (u_n) admet une limite l , alors on a $l = 2$.

3) On pose $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$.

Montrer que (v_n) est une suite géométrique

dont on déterminera le premier terme et la

raison. Est-elle convergente ?

4) Exprimer u_n en fonction de n et en déduire que (u_n) est convergente.

35

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$

$$\text{et } u_{n+1} = u_n^2 + \frac{3}{16}.$$

1) Tracer la courbe C d'équation $y = x^2 + \frac{3}{16}$

et la droite (D) d'équation $y = x$.

Construire géométriquement les cinq premiers

termes de la suite (u_n) . Quelle conjecture

peut-on énoncer de cette construction ?

2) Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$\text{on a } \frac{1}{4} \leq u_n \leq \frac{3}{4}.$$

3) Montrer que pour tout entier naturel n ,

non nul $u_{n+1} - u_n$ et $u_n - u_{n-1}$ sont de même

signe. Déduire le sens de variation de la

suite (u_n) .

4) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

Chapitre 11

CALCUL INTÉGRAL

LEÇON 1 CALCUL PRATIQUE DES INTÉGRALES

1.1. PRÉSENTATION-NOTATION.

1.2. PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES.

1.2.1 Linéarité.

1.2.2 Relation de Chasles.

1.2.3 Autres propriétés des intégrales.

1.2.4 Fonction définie à l'aide d'une intégrale.

1.3. CHANGEMENT DE VARIABLE AFFINE.

1.4. INTÉGRALES DES FONCTIONS AYANT UNE PARITÉ OU DE FONCTIONS PÉRIODIQUES.

1.5. INTÉGRATION PAR PARTIES.

LEÇON 2 QUELQUES APPLICATIONS DU CALCUL INTÉGRAL.

2.1. CALCUL D'AIRES.

2.1.1 Généralités

2.1.2 Aires des portions du plan délimitées par des courbes simples.

2.2. CALCUL DE VOLUMES.

2.3. CALCUL APPROCHÉ D'UNE INTÉGRALE PAR LA MÉTHODE DES RECTANGLES, SUITES INTÉGRALES.

S'ENTRAÎNER

LEÇON 1

CALCUL PRATIQUE DES
INTÉGRALES.

Remarque

Calculer les intégrales en utilisant :

- Les primitives des fonctions usuelles ;
- La linéarité ou la relation de Chasles ;
- Une intégration par parties ;
- Un changement de variable affine ;
- La parité ou la périodicité d'une fonction.

Établir les inégalités en utilisant les propriétés des intégrales.

Étudier les fonctions ou les suites définies à l'aide d'une intégrale.

PRÉSENTATION-NOTATION.

Prendre un bon départ

Soit f une fonction continue sur intervalle I de $\mathbb{R}$. Soient F et G sont deux primitives de f sur I .
 Alors pour tout x , élément de I une relation entre $F(x)$ et $G(x)$.

Soient a et b deux éléments quelconques de I . Comparer $F(b) - F(a)$ et $G(b) - G(a)$, puis en déduire que le réel $F(b) - F(a)$ est indépendant de la primitive de f considérée.

Retenir

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, F une primitive de f sur I ; a et b deux éléments de I .

Alors $F(b) - F(a)$ est indépendant de la primitive de f considérée. Ce réel est appelé l'intégrale de a à b de f .

Notation

L'intégrale de a à b de f se note $\int_a^b f(t) dt$ et se lit aussi « somme de a à b de $f(t) dt$ ».

Dans cette notation, le réel t est la variable d'intégration. Une intégrale est indépendante

de la variable d'intégration ainsi : $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du = \dots$

Si F est une primitive de f , $\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Remarque

- Pour tout élément a de I , on a $F(a) - F(a) = 0$. D'où $\int_a^a f(t) dt = 0$.
- Pour tous a et b de I , $F(a) - F(b) = -[F(b) - F(a)]$. Par suite $\int_b^a f(t) dt = -\int_a^b f(t) dt$.
- Soit a un élément de I . Pour tout x de I , $\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$.

Soit G l'application de I vers $\mathbb{R}$ définie par $G(x) = F(x) - F(a)$.

G est dérivable sur I et $G'(x) = F'(x) = f(x)$ et $G(a) = 0$.

G est donc une primitive de f sur I telle que $G(a) = 0$.

Si f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un élément de I , la fonction

Idans $\square$; telle que $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a .

Exemple

- 1) Calculons l'intégrale $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$.

La fonction $f : x \mapsto \cos^2 x$ est continue sur $\mathbb{R}$. 0 et $\frac{\pi}{2}$ étant des éléments de $\mathbb{R}$, l'intégrale A est définie.

D'autre part, $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$; par suite $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right] dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

- 2) Calculons $B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x \cos^2 x dx$. B est définie car $x \mapsto \sin^3(x) \cos^2(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.

$$\begin{aligned} \sin^3 x \cos^2 x &= \sin^2 x (\sin x) (\cos^2 x) = (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \sin x \\ &= \cos^2 x (\sin x) - \cos^4 x (\sin x) \end{aligned}$$

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x \sin x - \cos^4 x \sin x) dx = \left[-\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$B = \left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right] - \left[-\frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^5 \right] = \left[-\frac{2}{15} - \frac{1}{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{5} \times \frac{4\sqrt{2}}{32} \right] = -\frac{2}{15} - \frac{7\sqrt{2}}{120}$$

- 3) $C = \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \tan x dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\sin x}{\cos x} dx = [-\ln |\cos x|]_{\frac{\pi}{4}}^0 = [-\ln(\cos 0)] + \left[\ln \left(\cos \frac{\pi}{4} \right) \right]$

$$C = \ln \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \left[\ln(2)^{\frac{1}{2}} - \ln 2 \right] = \left(\frac{1}{2} \ln 2 - \ln 2 \right) = -\frac{1}{2} \ln 2.$$

Exercice Résolu

Calculer $I = \int_0^{\pi} (\cos t - t \sin t) dt$.

Posons $f(t) = t$ et $g(t) = \cos t$, on a $f'(t) = 1$ et $g'(t) = -\sin t$.

$$\cos t - t \sin t = f'(t)g(t) + f(t)g'(t) = (fg)'(t).$$

Une primitive de $t \mapsto \cos t - t \sin t$ est la fonction $t \mapsto t \cos t$. Par suite

$$\int_0^{\pi} (\cos t - t \sin t) dt = [t \cos t]_0^{\pi} = [\pi \cos \pi - 0 \cos 0] = -\pi.$$

Calculer $J = \int_1^x t \sqrt{1-t^2} dt$ pour tout x de $[-1; 1]$.

Posons $u(t) = 1 - t^2$; $u'(t) = -2t$; $t = -\frac{1}{2}u'(t)$ $t \sqrt{1-t^2} = -\frac{1}{2}u'(t)(u(t))^{\frac{1}{2}}$. Une primitive de la

fonction $t \mapsto -\frac{1}{2}u'(t)(u(t))^{\frac{1}{2}}$ est la fonction $t \mapsto -\frac{1}{3}[u(t)]^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}[1-t^2]^{\frac{3}{2}}$.

$$J = \int_1^x t \sqrt{1-t^2} dt = -\frac{1}{3}[1-x^2]^{\frac{3}{2}}.$$

S'exercer

Vérifier l'existence de chacune des intégrales ci-dessous et la calculer :

$$A = \int_{-\infty}^0 e^{-2x} dx ; B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx ; C = \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \sin^4 x dx ; D = \int_{-2}^1 \frac{4x-3}{2x^2-3x+1} dx.$$

Calculer les intégrales suivantes :

$$i) \int \frac{e^x}{e^x+1} du ; ii) \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx ; iii) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx.$$

Calculer les intégrales suivantes :

$$i) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^2 x dx ; ii) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx ; iii) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x e^{3 \cos x} dx ; iv) \int_1^2 \frac{x-2}{x^2-4x+1} dx.$$

Calculer les intégrales suivantes :

$$i) \int \frac{x}{x+1} dx ; ii) \int_0^1 x e^{-x^2} dx ; iii) \int_{-2}^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx ; iv) \int_{-1}^2 (x-1)^2 dx.$$

1.2. PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES

1.2.1 Linéarité



Prendre un bon départ

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a et b deux éléments de I . F et G sont des primitives respectives de f et g .

1) Montrer que
$$\int_a^b [f(t) + g(t)] dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt.$$

2) Soit α un réel quelconque. Montrer que
$$\int_a^b \alpha f(t) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt.$$



Retenir

Si α est un réel, f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a et b deux éléments de I , alors :

- $$\int_a^b [f(t) + g(t)] dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt.$$
- $$\int_a^b \alpha f(t) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt.$$
- Si α et β deux réels, alors
$$\int_a^b [\alpha f(t) + \beta g(t)] dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt.$$

Exemple

1)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{4}$$
 d'après l'exemple 1. du paragraphe 1.1 Déduisons l'intégrale de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

2)
$$J = \int_{-2}^1 \frac{x+3}{x+1} dx = \int_{-2}^1 \frac{(x+1)+2}{x+1} dx = \int_{-2}^1 1 dx + \int_{-2}^1 \frac{2}{x+1} dx = [x]_{-2}^1 + 2 [\ln|x+1|]_{-2}^1$$

3)
$$\int_0^{\pi} \left(2x - \frac{1}{\cos^2(x)} \right) dx = \int_0^{\pi} 2x dx - \int_0^{\pi} \frac{1}{\cos^2(x)} dx = [x^2]_0^{\pi} - [\tan x]_0^{\pi} = (\pi^2 - 0) - (\tan \pi - \tan 0) = \pi^2 - 0 = \pi^2.$$



S'exercer

Calculer les intégrales suivantes $H = \int_{-1}^2 \left(e^{\frac{x}{2}} + 2x - 1 \right) dx$; $K = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x) \sin(x) dx$

Relation de Chasles.



Prendre un bon départ

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soient a, b, c trois éléments de I , F une primitive de f sur I .

Montrer que $\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt$.



Retenir

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. a, b, c trois éléments de I , alors

$\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt$. (relation de chasles).

Exemple 1

$$I = \int_0^2 |x-1| dx = \int_0^1 (-x+1) dx + \int_1^2 (x-1) dx = \left[-\frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^2 = 1.$$

$$II = \int_0^3 |x-2| dx = \int_0^2 (-x+2) dx + \int_2^3 (x-2) dx.$$

$$II = \left[-\frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^2 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^3 = (-2+4) + \left(\frac{9}{2} - 6 - 2 + 4 \right) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

Exercice Résolu 1 : Calculons $\int_0^2 \frac{2x^2+3x-5}{x+2} dx$

La fonction $f : x \mapsto \frac{2x^2+3x-5}{x+2}$ est continue sur l'intervalle $[0;2]$. Écrivons $f(x)$ sous forme

à l'aide de la division euclidienne, on a : $f(x) = 2x - 1 - \frac{3}{x+2}$. Ainsi :

$$\int_0^2 \frac{2x^2+3x-5}{x+2} dx = \int_0^2 \left(2x - 1 - \frac{3}{x+2} \right) dx = \left[x^2 - x - 3 \ln(x+2) \right]_0^2 = 2 - 3 \ln 2.$$

Exercice Résolu 2:

1) On donne $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2x \, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x \, dx$. Calculons $I+J$, $I-J$ et déduisons I et J .

$$* \quad I+J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2x \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 2x + \sin^2 2x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx ; \text{ donc } I+J = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

$$* \quad I-J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) \, dx ; I-J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4x \, dx = \left[\frac{1}{4} \sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

$$\text{On a } \begin{cases} I+J = \frac{\pi}{2} \\ I-J = 0 \end{cases} \text{ et donc } I = J = \frac{\pi}{4}.$$

2) Calculons $\int_1^e \ln x \, dx + \int_1^e \left(x + \ln \frac{1}{x} \right) dx$.

D'après la linéarité de l'intégrale on a: $\int_1^e \ln x \, dx + \int_1^e \left(x + \ln \frac{1}{x} \right) dx = \int_1^e (\ln x + x - \ln x) \, dx = \int_1^e x \, dx$

$$\int_1^e \ln x \, dx + \int_1^e \left(x + \ln \frac{1}{x} \right) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}.$$

3) n étant un entier naturel, calculons en utilisant la relation de Chasles

$$I_n = \int_{-1}^2 (1 - |x-1|)^n \, dx.$$

$$\int_{-1}^2 (1 - |x-1|)^n \, dx = \int_{-1}^1 (1 - (1-x))^n \, dx + \int_1^2 (1 - (x-1))^n \, dx.$$

$$= \int_{-1}^1 x^n \, dx + \int_1^2 (2-x)^n \, dx = \frac{1}{n+1} [x^{n+1}]_{-1}^1 - \frac{1}{n+1} [(2-x)^{n+1}]_1^2$$

$$= \frac{1}{n+1} [1 - (-1)^{n+1}] - \frac{1}{n+1} [0 - 1] = \frac{1}{n+1} [1 - (-1)^{n+1} + 1] = \frac{1}{n+1} [2 - (-1)^{n+1}].$$

• Si n est pair, $n+1$ est impair et $(-1)^{n+1} = -1$; par suite $I_n = \frac{3}{n+1}$.

• Si n est impair, $n+1$ est pair et $(-1)^{n+1} = 1$; par suite $I_n = \frac{1}{n+1}$.



S'exercer

1.f Calculer $\int_{-1}^3 |(x-1)^3| \, dx$.

1.g Calculer au moyen de la relation de Chasles les intégrales suivantes:

i) $\int_{-1}^2 (|x| - |x-1|) \, dx$; ii) $\int_0^{\pi} |\cos 2x| \, dx$; iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \cos x| \, dx$

Autres propriétés des intégrales

Prendre un bon départ

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. a et b deux réels tels que $a \leq b$.

On suppose que pour tout x de I , $f(x) \geq 0$. Soit F une primitive de f sur I .

Donner le sens de variation de F et comparer $F(a)$ et $F(b)$. Déduire le signe de $\int_a^b f(t) dt$.

Donner le sens de variations de F et comparer $F(a)$ et $F(b)$ si pour tout x de I , $f(x) \leq 0$.

Obtenir les mêmes résultats si $b \leq a$

Retenir

Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$; f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$.

Si pour tout x de $[a; b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Si pour tout x de $[a; b]$, $f(x) \leq 0$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq 0$.

Si pour tout x de $[a; b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Remarque 1

Soient a et b deux réels tels que: $a \leq b$ et f une fonction continue sur $[a; b]$. Soient m et M deux réels tels que, pour tout x de $[a; b]$, on a $m \leq f(x) \leq M$. On a $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$.

Des inégalités $m \leq f(x) \leq M$ sur $[a; b]$, on déduit $\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$ et par

suite $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$.

Si f est une fonction continue sur $[a; b]$ telle que pour tout x de $[a; b]$, $|f(x)| \leq M$, alors

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M(b-a).$$

Remarque 2

- Soient a et b deux réels tels que : $a < b$ et f une fonction continue sur $[a; b]$. Il existe un réel c de $[a; b]$ tel que l'on ait $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.
- Le réel $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ est appelé **valeur moyenne de f sur $[a; b]$** .
En effet f étant une fonction continue sur $[a; b]$, elle est bornée. Il existe donc deux réels m et M tels que pour tout x de $[a; b]$, $m \leq f(x) \leq M$. D'après la remarque 1, on a $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$. Comme $a < b$, on peut écrire $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$.
Par suite Il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Exemple

- 1) Soient α, β deux réels et f la fonction définie sur $[a; b]$ par $f(x) = \alpha x + \beta$.
Déterminons la valeur moyenne de f sur $[a; b]$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \int_a^b (\alpha x + \beta) dx &= \frac{1}{b-a} \left[\alpha \frac{x^2}{2} + \beta x \right]_a^b = \frac{1}{b-a} \left[\left(\alpha \frac{b^2}{2} + \beta b \right) - \left(\alpha \frac{a^2}{2} + \beta a \right) \right] \\ &= \frac{1}{b-a} \left[\alpha \frac{b^2}{2} - \alpha \frac{a^2}{2} + \beta b - \beta a \right] = \alpha \left(\frac{a+b}{2} \right) + \beta. \end{aligned}$$

La valeur moyenne de l'application affine f sur $[a; b]$ est le réel $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, c'est la valeur de f en $\frac{a+b}{2}$ qui est le centre de l'intervalle $[a; b]$.

- 2) Calculons la valeur moyenne de la fonction : $x \mapsto \sin x$ sur $[0; \pi]$.

$$\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos \pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$$

La valeur moyenne de la fonction : $x \mapsto \sin x$ sur $[0; \pi]$ est $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x dx = \frac{2}{\pi}$.

Exercice Résolu :

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$.

- 1) Montrer que pour que la suite (u_n) est minorée par 0.
- 2) Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
- 3) a) Montrer que la suite (u_n) est convergente.
b) Montrer que pour tout $t \in [0; 1]$, on a $0 \leq \frac{t^n}{1+t^2} \leq t^n$ et en déduire la limite de (u_n) .

Solution :

- 1) La fonction $f_n : t \mapsto \frac{t^n}{1+t^2}$ est continue sur $[0; 1]$, pour tout t de $[0; 1]$, on a $f_n(t) \geq 0$.

Il résulte $\int_0^1 f_n(t) dt \geq 0$ car $0 < 1$. Par suite $u_n \geq 0$ pour tout entier naturel n non nul. La suite (u_n) est donc minorée par 0.

Étudions le sens de variation de la suite (u_n) .

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^2} dt - \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} (t-1) dt.$$

Pour $t \in [0, 1]$, $t-1 \leq 0$ et $\frac{t^n}{1+t^2} \geq 0$. Par conséquent, $\frac{t^n}{1+t^2} (t-1) \leq 0$ et comme $0 < 1$,

$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} (t-1) dt \leq 0$. Par suite $u_{n+1} - u_n \leq 0$ et la suite (u_n) est décroissante.

La suite (u_n) est décroissante et minorée. Elle est donc convergente.

Pour $t \geq 1$, $1+t^2 \geq 1$; on a alors $\frac{1}{1+t^2} \leq 1$ et $\frac{t^n}{1+t^2} \leq t^n$ et $0 \leq \frac{t^n}{1+t^2} \leq t^n$. Il en résulte que

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 t^n dt. \text{ D'où } 0 \leq u_n \leq \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1; \text{ soit } 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Montrons par $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. La suite (u_n) est encadrée par deux suites qui convergent vers 0. On

conclut que la suite (u_n) converge vers 0.

S'exercer

Calculer la valeur moyenne de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué.

a) $f : x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$ sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$; b) $g : x \mapsto \sin x - 2 \cos x$ sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right]$;

c) $h : x \mapsto \frac{1}{x^3}$ sur $[1; 2]$; d) $k : x \mapsto \frac{\sin x}{\cos^3 x}$ sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

12. Fonction définie par une intégrale

Prendre un bon départ

Soit la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ où f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un élément de I .

1. Montrer que F est dérivable sur I . Exprimer $F(x)$ en fonction de $G(x)$.

2. Montrer que F est dérivable sur I et donner l'expression de $F'(x)$ pour tout x élément de I .



Retenir

Si f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, pour tout a élément de I ,

- La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur I et pour tout x de I , $F'(x) = f(x)$.
- Pour étudier le sens de variation de F il suffit de connaître le signe de f .

Exemple

Soit la fonction $F : x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.

a) Donnons le domaine de définition de F .

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car pour tout t de $\mathbb{R}$, $1+t^4 > 0$. Donc f est définie sur $\mathbb{R}$, puis dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer la dérivée de F et donner le sens de variation de F .

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$ et $F'(x) > 0$.

F est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice Résolu: Fonction définie à l'aide d'une intégrale

F est la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $F(x) = \int_0^x \frac{t^2+1}{t^2+t+1} dt$.

- 1) Donner l'ensemble de définition de F , puis donner son sens de variation sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
- 2) On définit sur l'intervalle $[0; +\infty[$ les fonctions G et H par $G(x) = F(x) - x$ et $H(x) = F(x) - \frac{3}{2}x$.
 - a) Étudier sur l'intervalle $[0; +\infty[$, les variations des fonctions G et H .
 - b) En déduire que pour tout réel $x \geq 0$, on a : $\frac{2}{3}x \leq F(x) \leq x$.
 - c) En déduire la limite de F en $+\infty$.
- 3) Dresser le tableau de variation de F sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
- 4) a) Démontrer que l'équation $F(x) = \pi$ admet une solution unique dans $[0; +\infty[$.
 - b) Montrer que $\pi \leq \alpha \leq \frac{3}{2}\pi$.

Solution

1) Variation de F

La fonction $t \mapsto \frac{t^2+1}{t^2+t+1}$ est continue sur $[0; +\infty[$

F est par définition la primitive de : $t \mapsto \frac{t^2+1}{t^2+t+1}$ sur $[0; +\infty[$ s'annulant en 0

F est donc dérivable sur $[0; +\infty[$ et $F'(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$,

Pour $x \geq 0, F'(x) \geq 0$ donc F est croissante sur $[0; +\infty[$

variations de G et H

G et H sont dérivables sur l'intervalle $[0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Pour tout réel x de l'intervalle $[0; +\infty[$ $G'(x) = F'(x) - 1 = f(x) - 1$.

$$G'(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1} - 1 = \frac{-x}{x^2+x+1} \quad G'(x) \leq 0 \text{ car } x \geq 0$$

$$H'(x) = F'(x) - \frac{2}{3} = f(x) - \frac{2}{3} = \frac{x^2+1}{x^2+x+1} - \frac{2}{3} = \frac{(x-1)^2}{3(x^2+x+1)}$$

$H'(x) \geq 0$ pour tout réel x , donc H est décroissante sur

La fonction G est décroissante sur $[0; +\infty[$ et pour tout réel $x \geq 0, G(x) \leq G(0)$.

On a $F(x) - x \leq 0$ et alors $F(x) \leq x$. La fonction H est décroissante sur $[0; +\infty[$

et pour tout réel $x \geq 0, H(x) \geq H(0) = 0$, d'où $F(x) - \frac{2}{3}x \geq 0$.

On déduit que pour tout $x \geq 0, \frac{2}{3}x \leq F(x) \leq x$.

Calcul de la limite de en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}x \right) = +\infty. \text{ De la propriété des comparaisons, } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$$

Tableau de variation de F

x	0	$+\infty$
$F'(x)$		+
$F(x)$	0	$+\infty$

F est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$; donc F réalise une bijection de $[0; +\infty[$ vers

$[0; +\infty[$; $\pi \in [0; +\infty[$; ainsi admet un unique antécédent α dans l'intervalle $[0; +\infty[$

$$\frac{2}{3}\pi \leq F(\pi) \leq \pi. \text{ Donc } \frac{2}{3}\pi \leq F(\pi) \leq \pi \text{ et } \frac{2}{3} \times \frac{3}{2}\pi \leq F\left(\frac{3}{2}\pi\right) \leq \frac{3}{2}\pi.$$

$$\frac{2}{3}\pi \leq F(\pi) \leq \pi \text{ et } \pi \leq F\left(\frac{3}{2}\pi\right) \leq \frac{3}{2}\pi. \text{ D'où } F(\pi) \leq \pi \leq F\left(\frac{3}{2}\pi\right) \text{ et donc } \alpha \in \left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right].$$

S'exercer

Étudier les variations de la fonction $f: x \mapsto \frac{x}{\ln x}$ sur $[e; 2e]$; donner un encadrement de

$$I = \int_e^{2e} \frac{x}{\ln x} dx$$

- 1.j** On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{x^2+1} dx$
- Calculer u_0
 - Préciser le sens de variation (u_n)
 - En déduire que (u_n) est convergente.
 - Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$, $0 \leq \frac{x^{2n+1}}{x^2+1} \leq x^{2n+1}$ et en déduire la limite de la suite (u_n) .

- 1.k** On considère la suite (I_n) définie par $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$.

- Calculer I_0 et I_1 .
- Établir la relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} , puis calculer I_2 et I_3 .
- Préciser le sens de variation de la suite (I_n) .
- Établir que pour tout entier naturel n , on a : $\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$
En déduire la limite de la suite (I_n) .

- 1.l** (u_n) est la suite définie par $u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$.

- Préciser le sens de variation de la suite (u_n) .
- Établir que pour tout réel t de l'intervalle $[0;1]$, on a : $(1-t)^n \leq (1-t)^n e^t \leq (1-t)^n e$.
- En déduire la limite de la suite (u_n) .

- 1.m** Dans chacun des cas suivants, justifier que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$.

- a) $F: x \mapsto \int_{-x}^x \frac{1}{1+t^2} dt$ b) $F: x \mapsto \int_{-x}^x t^3 \sqrt{1+t^3} dt$ c) $F: x \mapsto \int_{-x}^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt$ d) $F: x \mapsto \int_{x+1}^{x+2} \frac{1}{\sqrt{1+t}} dt$

- 1.n** On considère sur l'intervalle $]0; +\infty[$ la fonction $F: x \mapsto \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$

- a) Montrer que pour tout $x \geq 1$: $\frac{e^x - e}{x} \leq F(x) \leq e^x - e$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x^n}$ étant un entier naturel.

- b) Montrer que pour tout x tel que $0 \leq x \leq 1$, $-e^x \ln x \leq \int_x^1 \frac{e^t}{t} dt \leq -e \ln x$. En déduire

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x)}{\ln x}$$

- c) Dresser le tableau de variation de F sur l'intervalle $]0; +\infty[$

- d) Donner l'allure de la représentation graphique de F

1- Établir les inégalités suivantes sans calculer les intégrales :

- a) $\frac{1}{5} \leq \int_1^2 \frac{1}{1+t^2} dt \leq \frac{1}{2}$; b) $\frac{\ln 2}{2} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos t}{t} dt \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \ln 2$; c) $\frac{\ln 2}{\sqrt{2}} \leq \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin t}{t} dt \leq \ln 2$

12 Soit la fonction numérique de la variable réelle : $F : x \mapsto \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de F .

b) Déterminer la dérivée de F et donner le sens de variation de F sur son ensemble de définition.

13 CHANGEMENT DE VARIABLE AFFINE



Prendre un bon départ

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, φ une fonction affine non constante définie sur I et f une fonction continue sur l'intervalle ouvert $\varphi(I)$.

Soit F une primitive de f sur I . On considère la fonction $G : t \mapsto F(\varphi(t))$ définie sur I .

1) Donner l'expression de $G'(t)$ pour tout t élément de I .

2) Soit la fonction $g : t \mapsto f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)$. Que représente G pour la fonction g ?

3) Montrer que pour tout a, b de I , $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$.

4) Définir que $\int_a^b f(\varphi(t)) \times \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du$.



Retenir

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, φ une fonction affine non constante définie sur I et f une fonction continue sur l'intervalle ouvert $\varphi(I)$.

Pour tout couple $(a; b)$ d'éléments de I , on a : $\int_a^b f(\varphi(t)) \times \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du$.

Remarque

En posant $u = \varphi(t)$, on a $du = \varphi'(t) dt$; soit $\frac{du}{dt} = \varphi'(t)$. L'égalité $du = \varphi'(t) dt$ permet de retrouver la formule du changement de variable affine.

Exemple

Calculons l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{1}{(2t+1)^3} dt$.

Posons $u = 2t+1$. $du = 2dt$; $dt = \frac{du}{2}$.

Pour $t=0$, $u=1$ et pour $t=1$, $u=3$.

$$\int_0^1 \frac{1}{(2t+1)^3} dt = \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{1}{u^3} du = \frac{1}{2} \int_1^3 u^{-3} du = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2u^2} \right]_1^3 = \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{9} + 1 \right] = \frac{1}{4} \times \frac{8}{9} = \frac{2}{9}.$$

Exercice Résolu : Calculer l'intégrale $K = \int_0^{-1} \frac{t^2 + t - 1}{(3t - 2)^2} dt$. Par un changement de variable affine. Posons $u = 3t - 2$.

$$t = \frac{u+2}{3}; du = 3dt; dt = \frac{du}{3}.$$

$$t^2 + t - 1 = \frac{1}{9}(u+2)^2 + \frac{1}{3}(u+2) - 1 = \frac{1}{9}(u^2 + 7u + 1).$$

Pour $t = 0, u = -2$ et pour $t = -1, u = -5$.

$$K = \int_0^{-1} \frac{t^2 + t - 1}{(3t - 2)^2} dt = \int_{-2}^{-5} \frac{1}{3} \times \frac{1}{9} \frac{u^2 + 7u + 1}{u^2} du = \frac{1}{27} \int_{-2}^{-5} \left(1 + \frac{7}{u} + \frac{1}{u^2} \right) du;$$

$$K = \frac{1}{27} \left[u + 7 \ln|u| - \frac{1}{u} \right]_{-2}^{-5} = \frac{1}{27} \left[\left(-5 + 7 \ln 5 + \frac{1}{5} \right) - \left(-2 + 7 \ln 2 + \frac{1}{2} \right) \right]$$

$$K = \frac{1}{27} \left(-5 + 7 \ln 5 + \frac{1}{5} - 2 - 7 \ln 2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{27} (7 \ln 5 - 7 \ln 2 - 3,3).$$

Exercice Résolu 2 : Changement de variable affine

1) Calculer $\int_0^1 \sin \pi(t-1) dt$ en posant $u = t-1$.

2) Soit F et G les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_x^x e^t dt$ et $G(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

a) En posant $u = -t$, montrer que $F(x) = 2 \int_{-x}^x e^t dt$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que G est une fonction impaire.

Solution

1) Calculons $\int_0^1 \sin \pi(t-1) dt$

Posons $u = t-1$, $\frac{du}{dt} = 1$ dont $du = dt$

Pour $t = 0, u = -1$ et pour $t = 1, u = 0$

$$\text{On a alors } \int_0^1 \sin \pi(t-1) dt = \int_{-1}^0 \sin(\pi u) du = \left[-\frac{1}{\pi} \cos \pi u \right]_{-1}^0 = -\frac{1}{\pi} (1+1) = -\frac{2}{\pi}.$$

$$2) F(x) = \int_{-x}^x e^t dt + \int_0^x e^t dt$$

Posons $u = -t$; $t = -u$ et $dt = -du$

$$\int_{-x}^0 e^t dt = \int_{-(-x)}^0 e^{(-u)} (-du) = -\int_x^0 e^{-u} du = \int_0^x e^{-u} du = \int_0^x e^t dt, \text{ d'où } F(x) = \int_0^x e^t dt + \int_0^x e^t dt = 2 \int_0^x e^t dt.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$; $G(-x) = \int_0^{-x} e^{-t^2} dt$. Posons $u = -t$; $t = -u$ d'où $dt = -du$

$$G(-x) = \int_0^{-(-x)} e^{-(u)^2} (-du) = -\int_0^x e^{-u^2} du = -\int_0^x e^{-t^2} dt = -G(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}; \text{ d'où } G \text{ est impaire}$$

14 INTÉGRALES DES FONCTIONS AYANT UNE PARITÉ OU DES FONCTIONS PÉRIODIQUES.

Prendre un bon départ

Propriété 1

Soit f une fonction continue sur $[-a; a]$ et paire avec $a > 0$. D'après la relation de Chasles, on

peut écrire pour tout x de $[-a; a]$, $\int_{-a}^a f(t) dt = \int_{-a}^0 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt$.

Montrer que $\int_{-a}^0 f(t) dt = \int_{-a}^0 f(-t) dt$.

On pose $u = -t$. Montrer que $\int_{-a}^0 f(-t) dt = -\int_a^0 f(u) du$.

En déduire que $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$.

Propriété 2

Soit f une fonction continue sur $[-a; a]$ et impaire avec $a > 0$.

Montrer que $\int_{-a}^a f(t) dt = -\int_{-a}^0 f(-t) dt + \int_0^a f(t) dt$.

En posant $u = -t$, montrer que $\int_{-a}^a f(t) dt = \int_a^0 f(u) du + \int_0^a f(t) dt$.

En déduire que $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$.

Propriété 3

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique, de période T .

Utiliser la relation de Chasles pour montrer que pour tout réel a ,

$$\int_0^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx - \int_0^a f(x) dx + \int_a^{a+T} f(x) dx.$$

Utiliser le changement de variable $u = x + T$ et la périodicité de f pour montrer que

$$\int_0^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(u) du.$$

En déduire que $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$.

Retenir

Soit f une fonction continue sur $[-a; a]$ avec $a > 0$.

Si f est paire, alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$.

Si f est impaire, alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T .

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt.$$

Exemple

1) Calculons $\int_{-1}^1 \frac{x}{|x|-3} dx$.

La fonction : $x \rightarrow \frac{x}{|x|-3}$ est impaire sur $[-1,1]$ donc $\int_{-1}^1 \frac{x}{|x|-3} dx = 0$.

2) Soit l'intégrale $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$.

Soit la fonction f définie par $f(x) = x \sin x$. Pour tout réel x , $f(-x) = -x \sin(-x) =$

car $\sin(-x) = -\sin x$. f est donc paire. Par suite, $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$.

3) Soit l'intégrale $\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin 4x dx$. La fonction $f : x \mapsto \sin 4x$ est périodique de période $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

D'autre part $\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{4}$. On en déduit que $\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin 4x dx = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}} \sin 4x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x dx$.



S'exercer

1.q Sans calculer les intégrales, justifier les égalités suivantes :

i $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = 0$; ii) $\int_{-1}^1 \frac{x^3}{x^4 - x^2 + 3} dx = 0$; iii) $\int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2} = 2 \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$; iv) $\int_{-1}^2 \frac{xdx}{1+|x|} = \int_{-1}^2 \frac{xdx}{1+x}$

v) $\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} (\sin 2x - \cos 2x) dx = -2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 2x dx$.

1.r Calculer $\int_{-1}^1 t^3 \sqrt{1+t^2} dt$.

1.5. INTÉGRATION PAR PARTIES.



Prendre un bon départ

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On sait que $(uv)' = u'v + v'u$.

a) Que représente la fonction (uv) pour la fonction $u'v + v'u$.

b) Soient a et b deux éléments de I . Montrer que $[u(t)v(t)]_a^b = \int_a^b u'(t)v(t) dt + \int_a^b v'(t)u(t) dt$.

déduire que $\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b v'(t)u(t) dt$.



Retenir

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, dont les fonctions u' et v' sont continues sur I . Pour tous réels a et b de I , on a : $\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b v'(t)u(t)dt$.

Cette méthode de calcul des intégrales s'appelle une intégration par parties.

Exemple

1) Calculons au moyen d'une intégration par parties $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$.

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \sin x$. Ainsi $u'(x) = 1$ et $v(x) = -\cos x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = [-x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

2) Calculons au moyen de deux intégrations par parties $F(x) = \int_0^x e^t \sin t dt$

Posons $u(t) = e^t$ et $v_1'(t) = \sin t$, on a $u'(t) = e^t$ et $v_1(t) = -\cos t$

$$\text{D'où } F(x) = [-e^t \cos t]_0^x + \int_0^x e^t \cos t dt$$

Posons $u_2(t) = e^t$ et $v_2'(t) = \cos t$, on a : $u_2'(t) = e^t$ et $v_2(t) = \sin t$

$$\text{Donc } \int_0^x e^t \cos t dt = [e^t \sin t]_0^x - \int_0^x e^t \sin t dt = e^x \cos x - 1 + e^x \sin x - F(x)$$

$$\text{D'où } 2F(x) = e^x (\cos x + \sin x) - 1 \text{ c'est-à-dire } F(x) = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) - \frac{1}{2}$$

Exercice Résolu 1

On pose : $I_n = \int_0^1 t^n e^t dt$ où n est un entier naturel.

Calculer I_0 et I_1 en utilisant une intégration par parties.

Montrer que pour tout entier naturel $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.

Réponse :

$$I_0 = \int_0^1 t^0 e^t dt = \int_0^1 e^t dt = [e^t]_0^1 = [e^1 - e^0] = e - 1.$$

$$I_1 = \int_0^1 t e^t dt = \int_0^1 t e^t dt. \text{ Posons } u(t) = t \text{ et } v'(t) = e^t; \text{ on a } u'(t) = 1 \text{ et } v(t) = e^t.$$

$$I_1 = \int_0^1 u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_0^1 - \int_0^1 u'(t)v(t)dt$$

$$= [te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt = e - [e^t]_0^1 = e - (e - 1) = 1.$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$; $I_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1} e^t dt$

posons $\begin{cases} t^{n+1} = u(t) \\ e^t = v'(t) \end{cases}$; on a $\begin{cases} u'(t) = (n+1)t^n \\ v(t) = e^t \end{cases}$

donc, $I_{n+1} = \left[t^{n+1} e^t \right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)t^n e^t dt = e - 0 - (n+1) \int_0^1 t^n e^t dt$ or $\int_0^1 t^n e^t dt = I_n$
 $= e - (n+1)I_n$

Exercice Résolu 2 :

Déterminer la primitive de la fonction : $t \mapsto \ln t$ qui s'annule en 1.

Solution :

Calculons l'intégrale $F(x) = \int_1^x \ln t dt$.

Posons $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln t$. On a $u(t) = t$ et $v'(t) = \frac{1}{t}$.

$$F(x) = \int_1^x \ln t dt = \int_1^x u'(t) v(t) dt = \left[u(t) v(t) \right]_1^x - \int_1^x u(t) v'(t) dt.$$

$$F(x) = \left[t \ln t \right]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t} dt = x \ln x - x + 1.$$

La primitive de la fonction $t \mapsto \ln t$ s'annulant en 1 est la fonction : $x \mapsto x \ln x - x + 1$.



S'exercer

1.s Par une intégration par parties, calculer chacune des intégrales:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$; b) $\int_{-1}^2 x e^{-x} dx$; c) $\int_1^e x^3 \ln(x) dx$; d) $\int_e^3 x^r \ln(x) dx$ ou $r \in \mathbb{Q}$

1.t En utilisant la méthode d'intégration par parties, calculer les intégrales:

a) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 x dx$; b) $\int_0^1 x^2 e^x dx$; c) $\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} x \sin^3(x) dx$;

EÇON 2 QUELQUES APPLICATIONS DU CALCUL INTÉGRAL.

Utiliser l'outil intégral pour calculer les aires des surfaces planes, des volumes des solides, en particulier des solides de révolution.

Donner une valeur approchée d'une intégrale par l'une des méthodes médiane, trapèze ou rectangle.

CALCUL D'AIRES

Généralités

Supposons le plan muni d'un repère orthogonal.

Prendre un bon départ

Soit h un réel strictement positif et $0 < x_0 \leq x_1 < a$. On se propose de calculer l'aire du trapèze de sommets $A(x_0, h)$, $B(0; 0)$, $C(a; 0)$ et $D(x_1; h)$.

Montrer que les droites (AB) , (AD) et (DC)

ont pour équations cartésiennes:

$$y = \frac{h}{x_0}x ; y = h \text{ et } y = \frac{h(x-a)}{x_1-a}, \text{ respectivement.}$$

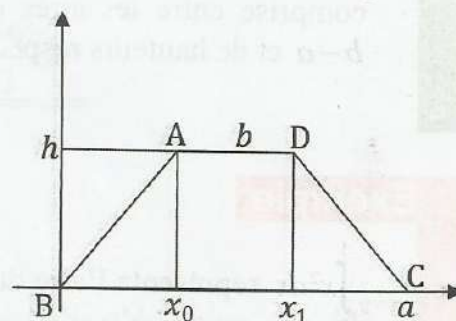
$$\text{Calculer } A = \int_0^{x_0} \frac{h}{x_0}x dx + \int_{x_0}^{x_1} h dx + \int_{x_1}^a \frac{h(x-a)}{x_1-a} dx.$$

En utilisant le fait que $AD = x_1 - x_0 = b$ et $BC = a$, vérifier que

$$A = \int_0^{x_0} \frac{h}{x_0}x dx + \int_{x_0}^{x_1} h dx + \int_{x_1}^a \frac{h(x-a)}{x_1-a} dx = \frac{a+b}{2}h.$$

Comparer A et l'aire du trapèze $ABCD$.

Vérifier que si $x_1 = x_0$, on obtient un triangle ABC et son aire est $\frac{ah}{2}$.



Retenir

Si f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$

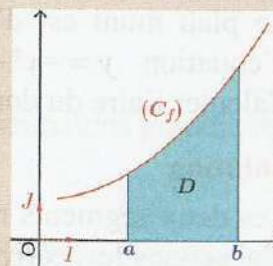
on (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère

orthogonal $(O; I, J)$, $\int_a^b f(t) dt$ est l'aire du domaine D limité par les

droites d'équations $x = a$, $x = b$, la courbe (C_f) et l'axe des abscisses.

L'unité d'aire est l'aire du rectangle de dimensions respectives OI et

OJ respectivement.



Remarque

1) Soit M un réel positif tel que, pour tout réel x de l'intervalle I alors on a :

$$|f(x)| \leq M. \quad |f(x)| \leq M \text{ équivaut à pour tout } a, b \in I \quad -M \leq f(x) \leq M$$

. D'après l'inégalité de la moyenne, on a : $-M(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$. D'où

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M(b-a)$$

2) L'inégalité de la moyenne appliquée à f sur l'intervalle $[a, b]$ est

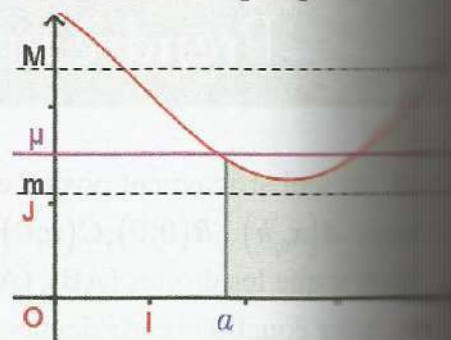
l'inégalité des accroissements finis appliquée à une primitive de f sur $[a; b]$.

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \text{ équivaut à } m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

3) Le réel $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ est **la valeur moyenne** de f sur l'intervalle $[a; b]$

Interprétation graphique de μ

Graphiquement lorsque m est positif, l'aire du domaine plan délimité par les droites d'équations $x=a$, $x=b$, l'axe de abscisses et la courbe représentative de f est comprise entre les aires des rectangles de même base $b-a$ et de hauteurs respectives m et M respectivement

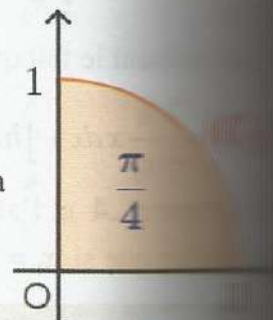


Exemple

• $\int_0^1 x^2 dx$ représente l'aire du domaine délimité par les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$, l'axe des abscisses et la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2$.

• Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. La courbe de la f est un quart de cercle de centre O et de rayon 1. D'où

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{4} \times \pi \times r^2 \text{ où } r=1; \quad \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4} \text{ u.a}$$



Exercice Résolu

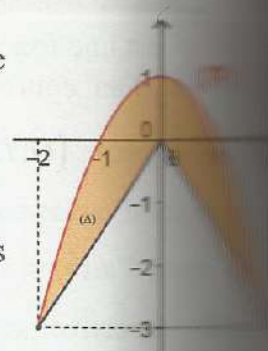
Le plan muni est d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, (P) est la parabole d'équation $y = -x^2 + 1$. Unité graphique : 2 cm.

Calculer l'aire du domaine colorié.

Solution

Les deux segments représentés sur la figure coupent la parabole aux points d'abscisses respectives -2 et 2 et ont l'origine comme extrémité commune.

Notons (Δ) celui dont une extrémité est $(-2; -3)$.



Equation de (Δ) est sous la forme : $\begin{cases} y = ax \\ x \in [-2, 0] \end{cases}$

$a = -2$; donc $a = \frac{3}{2}$ et (Δ) est la droite d'équation $y = \frac{3}{2}x$ avec $x \in [-2, 0]$. On démontre de même que l'autre segment (Δ') a pour équation $y = -\frac{3}{2}x$ avec $x \in [0, 2]$.

(D) l'ensemble des points M du plan de coordonnées $(x; y)$ tels que $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ -\frac{3}{2}x \leq y \leq -x^2 + 1 \end{cases}$ et (D')

ensemble des points M du plan de coordonnées $(x; y)$ tels que $\begin{cases} -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{3}{2}x \leq y \leq -x^2 + 1 \end{cases}$. Le domaine

est la réunion des deux domaines (D) et (D'). (D) et (D') sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées et par conséquent ont la même aire. D'où l'aire $\mathcal{A}$ du domaine hachurée est :

$\mathcal{A} = 2 \int_0^2 \left[(-x^2 + 1) - \left(-\frac{3}{2}x \right) \right] dx \times u.a$; où $u.a$ représente l'unité d'aire égale à $2\text{cm} \times 2\text{cm} = 4\text{cm}^2$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= 2 \times 4\text{cm}^2 \times \int_0^2 \left(-x^2 + 1 + \frac{3}{2}x \right) dx = 8 \left[-\frac{1}{3}x^3 + x + \frac{3}{4}x^2 \right]_0^2 \text{ cm} \\ &= 8 \times \left[-\frac{8}{3} + 2 + \frac{3 \times 4}{4} - 0 \right] \text{ cm}^2 = \underline{\underline{\frac{56}{3} \text{ cm}^2}} \end{aligned}$$

S'exercer

Déterminer la valeur de l'intégrale $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$ en utilisant la courbe d'équation $y = \sqrt{4-x^2}$.

Par une interprétation graphique, déterminer l'aire de la portion du plan délimités par les courbes d'équations $y = \sqrt{1-x^2}$ et $y = x$ sur l'intervalle $[0; 1]$.

Représenter sur l'intervalle $[0; 1]$ la courbe de la fonction $f: x \mapsto |2x-1|$.

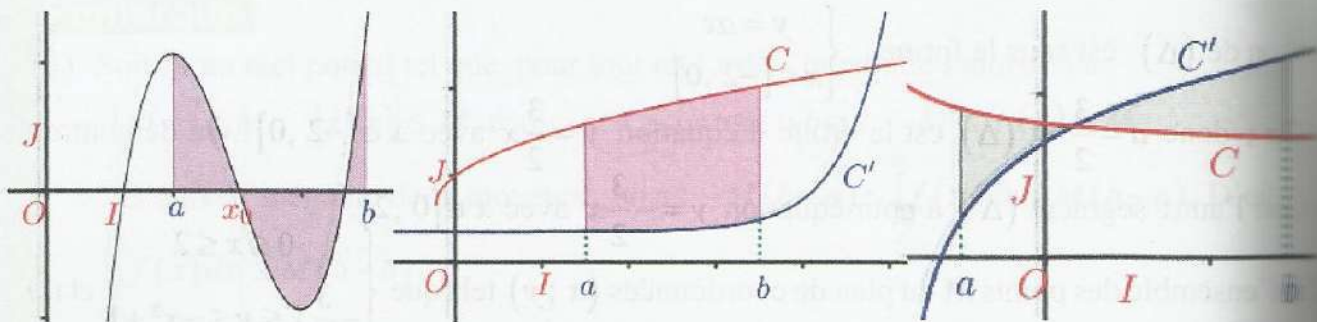
Déterminer l'aire de la portion du plan délimitée par la courbe représentative de f sur l'intervalle $[0; 1]$ et l'axe des abscisses géométriquement.

Aires des portions du plan délimitées par des courbes simples

Prendre un bon départ

Sont deux fonctions définies continues sur $[a; b]$. On connaît leurs représentations graphiques notées C et C' .

Chacun des cas suivants, donner à l'aide d'une intégrale, l'expression de l'aire de la portion du plan hachurée



Retenir

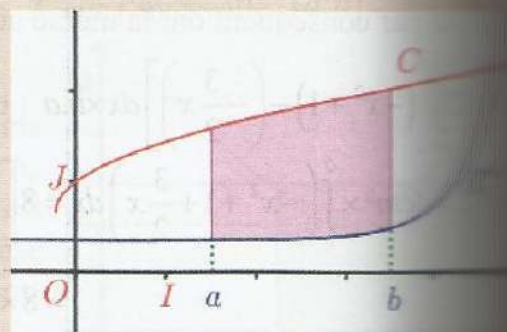
Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

(1) f et g deux fonctions définies continues sur $[a; b]$.

- Si $f \geq g$ sur $[a; b]$ (la courbe de f est au dessus de celle de g sur $[a; b]$) alors l'aire de la portion du plan délimitée par les droites $x=a, x=b$ les

courbes représentatives des fonctions f et g est

$$\left[\int_a^b (f(x) - g(x)) dx \right] u.a..$$



Exemple

$A(a)$ et l'aire de la partie du plan contenant les points $M(x; y)$ tels que $0 \leq y \leq 2x^2 + e^{-x}$ où a est un nombre réel positif donné.

$$A(a) = \int_0^a [(2x^2 + e^{-x}) - 2x^2] dx u.a. = \int_0^a e^{-x} dx u.a.$$

$$A(a) = [-e^{-x}]_0^a u.a. = (1 - e^{-a}) u.a.; \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} A(a) = 1.$$

• $f : x \mapsto e^{2x} - 3e^x + 2$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x ,

$$f'(x) = 2e^{2x} - 3e^x = e^x(2e^x - 3).$$

$f'(x) = 0$ équivaut à $x = \ln \frac{3}{2}$. Le tableau des variations de f est donné ci-contre.

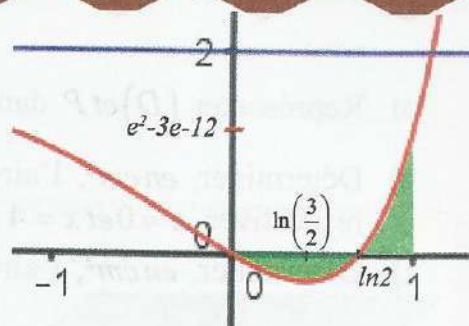
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^x(e^x - 3) + 2 = +\infty$$

x	$-\infty$	$\ln\left(\frac{3}{2}\right)$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	2	$\frac{5}{4}$	$+\infty$

$f(x) = 0$ équivaut $e^x = 1$ ou $e^x = 2$. D'où $x = 0$ ou $x = \ln 2$.

Unité d'axe 2cm.

Calculons l'aire de la portion du plan délimitée par les droites $x = 0, x = 1$, la courbe de f et l'axe des abscisses



$$\int_0^1 f(x) dx \times u.a. = \left(\int_0^{\ln 2} f(-x) dx + \int_{\ln 2}^1 f(x) dx \right) \times u.a. = \left[- \int_0^{\ln 2} (e^{2x} - 3e^x + 2) dx + \int_{\ln 2}^1 (e^{2x} - 3e^x + 2) dx \right] \times u.a.$$

$$= \left[- \left(\frac{1}{2} e^{2x} - 3e^x + 2x \right) \right]_0^{\ln 2} + \left[\left(\frac{1}{2} e^{2x} - 3e^x + 2x \right) \right]_{\ln 2}^1 \times 4 \text{ cm}^2$$

$$= \left[- \left(\frac{1}{2} \times 4 - 3 \times 2 + 2 \ln 2 - \left(\frac{1}{2} - 3 \right) \right) + \left(\frac{1}{2} e^2 - 3e + 2 - \left(\frac{1}{2} \times 4 - 3 \times 2 + 2 \ln 2 \right) \right) \right] \times 4 \text{ cm}^2$$

$$= \left(-3e - 4 \ln 2 + \frac{15}{2} \right) \times 4 \text{ cm}^2 = (2e^2 - 12e - 16 \ln 2 + 30) \text{ cm}^2$$

Résolu :

La fonction $f : x \mapsto 2x + 1 + \frac{1}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Calculer l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C) de f , son asymptote oblique et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

Réponse :

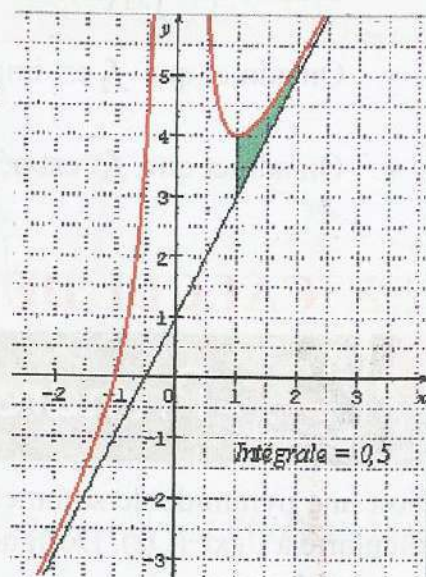
Le graphique de f dans un repère orthonormé est donné ci-contre.

La zone demandée est celle de la partie hachurée en vert.

Calculons cette aire.

$$\int_1^2 [f(x) - (2x + 1)] dx \text{ u.a.}$$

$$\text{u.a.} = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 = \left[-\frac{1}{2} + 1 \right] \text{ u.a.} \quad \mathcal{A} = 0,5 \text{ u.a.}$$



S'exercer

Soient $f : x \mapsto \frac{x^3 - x + 4}{x + 1}$ et $g : x \mapsto x^2 - x$

Montrer que sur l'intervalle $[0; 3]$, $f \geq g$.

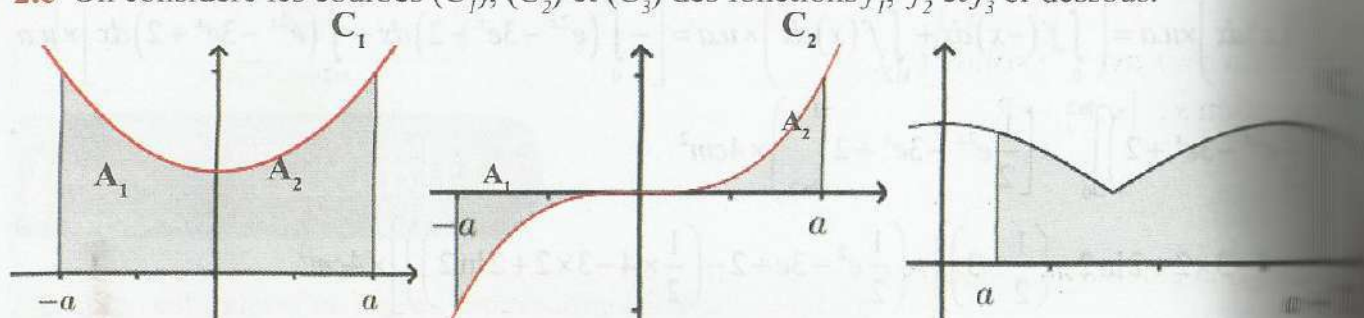
Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$.

À l'aide des questions précédentes l'aire de la partie délimitée par les courbes des fonctions f et g sur l'intervalle $[0; 3]$.

Soit la parabole d'équation $y = x^2 - 4x + 3$; (D) la droite d'équation $y = \frac{4}{3}x$ (unité d'axe

- Représenter (D) et P dans un repère orthonormal.
- Déterminer, en cm^2 , l'aire de la portion du plan délimitée par P , les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=4$, et l'axe des abscisses.
- Déterminer, en cm^2 , l'aire de la portion du plan délimitée par P et (D) .

2.c On considère les courbes (C_1) , (C_2) et (C_3) des fonctions f_1 , f_2 et f_3 ci-dessous.



- On admet que f_1 est paire et positive sur $[0, a]$. Montrer que les aires A_1 et A_2 sont égales. En déduire que $\int_{-a}^a f_1(x) dx = 2 \int_0^a f_1(x) dx$ où $A_1 = \int_{-a}^0 f_1(x) dx$ et $A_2 = \int_0^a f_1(x) dx$.
- On admet que f_2 est impaire sur $[-a, a]$. Montrer que $A_1 - A_2 = 0$ et donc $\int_{-a}^a f_2(x) dx = 0$.
- On admet que f_3 est périodique de période T . Montrer que : $\int_a^{a+T} f_3(x) dx = \int_0^T f_3(x) dx$.

2.2. CALCUL DE VOLUMES



Prendre un bon départ

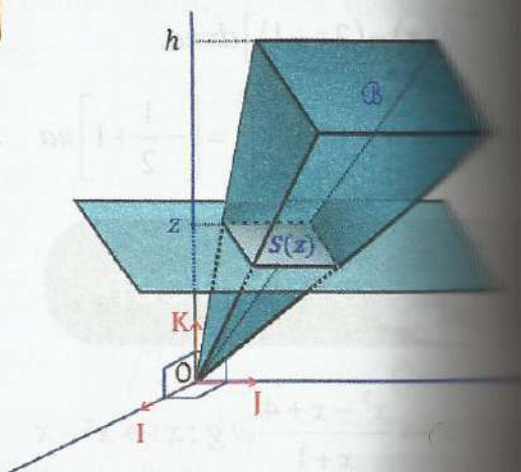
Soit une pyramide de sommet O , dont la base est perpendiculaire à l'axe (Oz) . Désignons par B l'aire de sa base et par h sa hauteur.

Soit z un réel de $]0; h[$. En utilisant l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{z}{h}$, montrer que l'intersection de la pyramide et du plan de cote z est un polygone d'aire $B \times \frac{z^2}{h^2}$.

Soit S , l'application de $[0; h]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $S(z) = B \times \frac{z^2}{h^2}$.

S est une fonction continue. Calculer $\int_0^h S(z) dz$.

Que représente cette intégrale pour la pyramide ?



Retenir

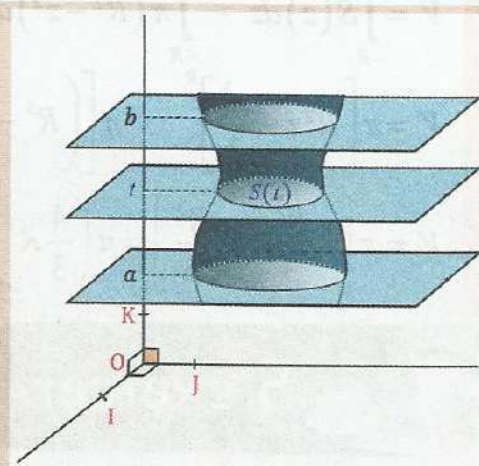
L'espace est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$;
 Soit un solide délimité par deux plans parallèles
 d'équations $z = a$ et $z = b$ ($a < b$). Pour tout $t \in \mathbb{R}$,
 entre a et b , on note $S(t)$ l'aire de la section du plan
 d'équation $z = t$ avec le solide (S) .

Application $s: [a, b] \mapsto \mathbb{R}$

$$t \mapsto s(t)$$

s est continue (pour un solide régulier en particulier) et

son intégrale est le volume du solide (S) .



Si aucune précision n'est faite sur les unités sur les axes, alors ce volume est exprimé
 en unités de volume $(u.v)$. Une unité de volume est le volume du pavé droit de

dimension $\|\vec{i}\|$, $\|\vec{j}\|$ et $\|\vec{k}\|$. $1 u.v = \|\vec{i}\| \cdot \|\vec{j}\| \cdot \|\vec{k}\|$

Remarque

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

f est une fonction définie et continue sur $[a; b]$.

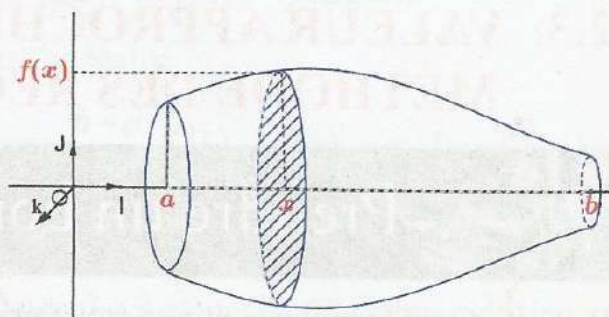
Le solide de révolution est engendré par la rotation
 autour de l'axe (O, I) d'une courbe simple (C)

d'équation $y = f(x)$ dans le plan (xOy) .

La section de ce solide par un plan perpendiculaire
 à l'axe (O, I) est un disque de rayon $|f(x)|$ et d'aire

$$S(x) = \pi (f(x))^2.$$

Donc le volume $v(S)$ du solide de révolution (S) est égal à $\left(\int_a^b S(x) dx \right) u.v = \left(\int_a^b \pi (f(x))^2 dx \right) u.v$



Exemple

f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$, a est un réel positif. (D) est l'ensemble
 des points $M(x; y)$ tels que $0 \leq x \leq a$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

On fait tourner (D) autour de l'axe (OI) . On obtient un solide de ré-
 volution comme indiqué sur la figure ci-après.

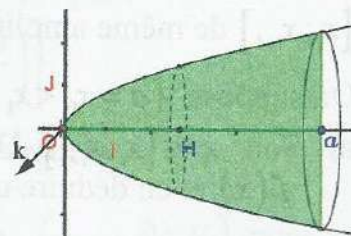
Prenons $OH = x$ le volume du solide est :

$$V(x) = \int_0^a \pi (HM)^2 dx = \int_0^a \pi (\sqrt{x})^2 dx = \int_0^a \pi x dx = \left[\frac{\pi}{2} x^2 \right]_0^a = \frac{\pi}{2} a^2 u.v.$$

Calculons le volume d'une boule sphérique de centre O et de rayon R . On pose $OK = z$.

Le rayon du cercle intersection du plan qui coupe la sphère est $r = \sqrt{R^2 - z^2}$.

$$S(z) = \pi (R^2 - z^2).$$

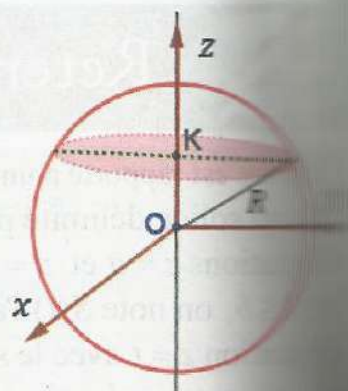


Le volume de la sphère est $V = \int_{-R}^R S(z) dz$.

$$V = \int_{-R}^R S(z) dz = \int_{-R}^R \pi(R^2 - z^2) dz = \pi \int_{-R}^R (R^2 - z^2) dz$$

$$V = \pi \left[R^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{-R}^R = \pi \left[\left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) - \left(-R^3 + \frac{R^3}{3} \right) \right]$$

$$V = \pi \left[2\frac{R^3}{3} + 2\frac{R^3}{3} \right] = \pi \left(\frac{4}{3} R^3 \right) = \frac{4}{3} \pi R^3.$$



S'exercer

- 2.c** Retrouver en utilisant le calcul intégral la formule permettant de calculer le volume d'un cylindre dont une base a pour rayon r et de hauteur h .
- 2.d** Déterminer le volume du solide obtenu par rotation autour de l'axe $[Ox]$ du domaine délimité par l'axe des abscisses, les droites d'équation $x=0$ et $x=\frac{\pi}{2}$ et la courbe de la fonction $y=\sin(x)$.

2.3. VALEUR APPROCHÉE D'UNE INTÉGRALE PAR LA MÉTHODE DES RECTANGLES

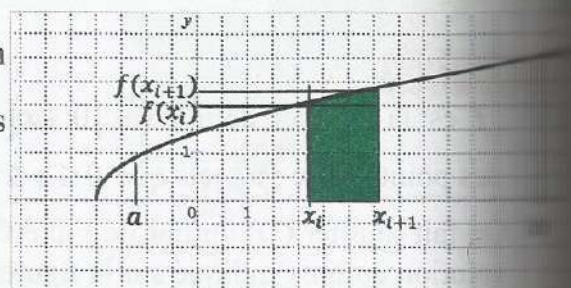


Prendre un bon départ

- 1) Soit f une fonction continue croissante sur $[a; b]$ n'ayant pas de primitive qui soit une fonction régulière sur $[a; b]$.

Soit Δ l'ensemble des points $M(x; y)$ dans un repère orthogonal tels que $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$

Notons $\mathcal{A}(\Delta) = \int_a^b f(x) dx$. Soit n un entier naturel non nul. On subdivise l'intervalle $[a; b]$ en n intervalles $[x_i; x_{i+1}]$ de même amplitude $\frac{b-a}{n}$.



On suppose $(a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b)$.

- a) Soit $x \in [x_i; x_{i+1}]$. Donner un encadrement de $f(x)$ et en déduire que $(x_{i+1} - x_i) f(x_i) \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \leq (x_{i+1} - x_i) f(x_{i+1})$.

- b) On note E_i la portion du plan représentée en vert sur le graphique.

Donner les dimensions de chacun des deux rectangles dont les aires encadrent l'aire de E_i .

- c) En déduire que $\frac{b-a}{n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \right) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \frac{b-a}{n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) \right)$. Puis encadrer $\int_a^b f(x) dx$.

Donner un encadrement de $\int_a^b f(x) dx$ dans le cas où f est décroissante.



Retenir

Soient f une fonction continue et monotone sur $[a; b]$ et n un entier naturel non nul. On divise l'intervalle $[a; b]$ en n intervalles $[x_i; x_{i+1}]$ de même amplitude $\frac{b-a}{n}$ tels que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.

- Si f est croissante sur $[a; b]$, alors $\frac{b-a}{n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \right) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \frac{b-a}{n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) \right)$.
- Si f est décroissante sur $[a; b]$, alors $\frac{b-a}{n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) \right) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \frac{b-a}{n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \right)$.

Remarque

$$\left| \frac{b-a}{n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \right) - \frac{b-a}{n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) \right) \right| = \frac{b-a}{n} |f(b) - f(a)|.$$

Quand n croît, $\frac{b-a}{n} |f(b) - f(a)|$ décroît. De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} |f(b) - f(a)| = 0$.

Ainsi pour un réel ε strictement positif, pour avoir l'inégalité

$\left| \frac{b-a}{n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \right) - \frac{b-a}{n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) \right) \right| < \varepsilon$, il suffit d'avoir $\frac{b-a}{n} |f(b) - f(a)| < \varepsilon$. Donc choisir un entier naturel n tel que $n > \frac{b-a}{\varepsilon} |f(b) - f(a)|$.

Cet encadrement de l'intégrale est faite par la méthode des rectangles. Elle permet de donner

une valeur approchée à ε près de $\left| \int_a^b f(t) dt \right|$ pour une fonction f , monotone sur $[a; b]$.

Le réel $\frac{1}{2} \left[\frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) + \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \right]$ est une valeur approchée de $\int_a^b f(t) dt$ à $\frac{b-a}{2n} |f(b) - f(a)|$ près.

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \left[\frac{1}{n} f(a) + f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + 2 \frac{b-a}{n}\right) + \dots + f\left(a + (n-1) \frac{b-a}{n}\right) \right].$$

La suite (u_n) converge vers la valeur moyenne $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$ de f sur $[a; b]$.

Les suites définies par $u_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)$; $v_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)$ pour

une fonction monotone f sur $[a; b]$ convergent vers $\int_a^b f(t) dt$

Exemple

- Déterminons par la méthode des rectangles, une valeur approchée de l'intégrale $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^6}} dx$ à 10^{-1} près.

Considérons la fonction : $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^6}}$.

$f'(x) = \frac{-6x^5}{2\sqrt{1+x^6}} = -\frac{3x^5}{\sqrt{1+x^6}}$. Pour tout x de $]0; +\infty[$, $f'(x) \leq 0$. La fonction f est

décroissante sur $]0; +\infty[$, donc décroissante sur $[0; 2]$. Choisissons $a = 0$ et $b = 2$.

Cherchons un entier naturel n tel que un entier naturel n tel que $n > \frac{2}{2 \times 10^{-1}} |f(2) - f(0)|$

Soit $n > 10 \left| 1 - \frac{1}{\sqrt{1+2^6}} \right|$; soit $n > 9,84$. On peut prendre $n = 10$.

On subdivise $[0; 2]$ par des intervalles d'amplitude 0,2.

Nous avons $x_0 = 0; x_1 = 0,2; x_2 = 0,4; \dots; x_9 = 1,8; x_{10} = 2$.

Posons $s_{10} = 0,2(f(0) + f(0,2) + f(0,4) + \dots + f(1,8))$ et

$S_{10} = 0,2(f(0,2) + f(0,4) + f(0,6) + \dots + f(1,8) + f(2))$.

f étant décroissante on a $S_{10} < \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^6}} dx < s_{10}$; soit $1,189 < \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^6}} dx < 1,365$.

Une valeur approchée de $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^6}} dx$ à 10^{-1} près est $\frac{1,189 + 1,365}{2} = 1,28$.

- Déterminons une valeur approchée de $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$. En subdivisant $[0; 1]$ en 5 intervalles de même amplitude $S_5 = \frac{1}{5} \left(f(0) + f\left(\frac{1}{5}\right) + \dots + f\left(\frac{4}{5}\right) \right)$ où $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

On obtient par calcul $S_5 \approx 0,83$.

- On pose $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \sin\left(\frac{i\pi}{n}\right)$. Étudions la convergence de la suite (S_n) .

f est la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \sin(\pi x)$. Subdivisons l'intervalle $[0; 1]$ en

intervalles de même amplitude $\frac{1}{n}$. $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right)$.

(S_n) converge vers $\int_0^1 \sin(\pi x) dx = \frac{-1}{\pi} [\cos \pi x]_0^1 = \frac{2}{\pi}$. (S_n) converge vers $\frac{2}{\pi}$.

- On donne $I = \int_{3/5}^{4/5} \sqrt{1-x^2} dx$

On subdivise l'intervalle $\left[\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right]$ en n intervalles de même amplitude. Déterminons par la méthode des rectangles le nombre d'intervalles nécessaires pour obtenir un encadrement d'amplitude inférieure à 10^{-3} .

Soit $f: x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ sur $\left[\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right]$

f est dérivable sur $] -1; 1[$ et $\left[\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right]$ est contenu dans cet intervalle, donc f est dérivable sur $\left[\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right]$.

On a : $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$; f'' est dérivable sur $\left[\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right]$;

$f''(x) = \frac{-1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ et $f'' \leq 0$ sur $\left[\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right]$, donc f' décroît sur l'intervalle

$$f'\left(\left[\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right]\right) = \left[f'\left(\frac{4}{5}\right); f'\left(\frac{3}{5}\right)\right] = \left[-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right]. \text{ Donc } |f'(x)| \leq \frac{4}{5}.$$

L'erreur commise est de $\frac{4}{5 \times 2n} \times \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{2}{125n}$.

On a $\frac{2}{125n} < 10^{-3}$ d'où $n \geq \frac{2 \times 1000}{125} \approx 16,3$. On prend $n = 17$



S'exercer

On donne $I = \int_{-\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1+x^2} dx$.

En subdivisant $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ en 5 intervalles de même amplitude, déterminer, un encadrement de I .

Déterminer la limite de la suite (S_n) définie par $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \right)$

i) À l'aide de la méthode des rectangles, justifier que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} \leq \int_1^2 \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k+1}$$

ii) Dédire de l'inégalité précédente que $0 \leq \int_1^2 \frac{1}{t} dt - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{2n}$.

iii) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

S'ENTRAÎNER

TECHNIQUE DU CALCUL INTÉGRAL

« INTÉGRALE ET PRIMITIVE »

Dans les exercices de 1 à 10 calculer les intégrales.

1. a) $\int_0^1 e^{1-t} dt$; b) $\int_1^{-1} (e^{-2t} - e^{-t}) dt$;
2. a) $\int_0^1 \frac{e^u}{2+e^u} du$; b) $\int_{\frac{\pi}{2}}^1 e^{-2t+3} dt$;
3. a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x (\cos x)^5 dx$;
4. a) $\int_1^e x \cos x^2 dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos x} dx$;
5. a) $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$; b) $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$;
6. a) $\int_1^2 \frac{x-2}{x^2-4x+1} dx$; b) $\int_{-1}^1 \frac{x}{(x^2-4)^2} dx$;
7. a) $\int_1^3 \left(t+1 - \frac{1}{1+t} \right) dt$; b) $\int_{-1}^0 \frac{x}{x-1} dx$;
8. a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(3x - \sin \frac{x}{2} + 2 \cos 2x \right) dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 2x dx$;
9. a) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2t - \sin 3t + \tan^2 5t) dt$; b) $\int_0^1 (2^x - 3^x) dx$;
10. a) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$; b) $\int_2^{\pi} (1 + \cos t + \cos^2 t) dt$;

INTÉGRATIONS PAR PARTIES

Pour les exercices de 11 à 14 calculer en utilisant une intégration par parties

11. a) $\int_0^{\pi} x \cos x dx$; b) $\int_0^{\pi} x \sin x dx$;
12. a) $\int_0^1 t e^{2t} dt$; b) $\int_0^1 (t+1) e^{2t} dt$;
13. a) $\int_1^e \ln t dt$; b) $\int_1^e t \ln t dt$;
14. a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$; b) $\int_1^e x^2 \ln x dx$;

Pour les exercices de 15 à 18 calculer en intégrant deux fois par parties.

15. a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$;
16. a) $\int_0^x (1+t)^2 e^{-t} dt$; b) $\int_0^x t^2 e^{1-t} dt$;
17. a) $\int_0^x e^t \sin t dt$; b) $\int_0^x e^t \cos t dt$;
- 18.

On donne $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x dx$

- 1) Calculer $I + J$ et $I - J$ à l'aide d'une intégration par parties.

en déduire I et J.

$$\text{Donner } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx ; K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx.$$

Calculer I - J

Calculer I + J + K

En déduire la valeur de I + J + 3K puis celles de I, J et K

Calculer au moyen de la relation de Chasles

$$\int_0^1 (1 - |x-1|)^3 dx ;$$

$$\int_0^1 (x|2x-5| - x|x-3|) dx.$$

INTEGRALES DES FONCTIONS PAIRES, IMPAIRES OU PÉRIODIQUES

Montrer les égalités suivantes

$$\int_0^{\pi} (x - \sin x) dx = 0 ;$$

$$\int_0^{\pi} (x \cos x - x^3) dx = 0 ;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x dx ;$$

$$\int_0^{\pi} |\sin x| dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx.$$

Changement de variable affine

Par un changement de variable, démontrer

Si f est une fonction continue et paire sur un intervalle [a, b], alors

$$\int_0^a f(t) dt = 2 \int_0^{\frac{a}{2}} f(t) dt \quad a > 0$$

b) Si f est une fonction continue et impaire sur un intervalle $[-a, a]$ alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 0 \quad a > 0$

c) Si f est une fonction continue et périodique de période T alors $\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$.

23.

$$\text{On pose } I = \int_7^9 \frac{du}{5-6u+u^2}.$$

a) Vérifier que $u^2 - 6u + 5 = (u-3)^2 - 4$.

b) On pose $t = u - 3$; Montrer que $I = \int_4^6 \frac{dt}{t^2 - 4}$
Déterminer deux réels a et b tels que :

$$\frac{1}{t^2 - 4} = \frac{a}{t-2} + \frac{b}{t+2} ;$$

c) Calculer I.

INTÉGRALE DES FONCTIONS RATIONNELLES ET DES POLYNÔMES TRIGONOMÉTRIQUES

24.

1) Déterminer trois réels a, b et c tels que

$$\text{pour tout } x \neq -3, \frac{x^2 + 2x - 1}{x + 3} = ax + b + \frac{c}{x + 3}$$

$$\text{Calcule alors } \int_{-2}^2 \frac{x^2 + 2x - 1}{x + 3} dx$$

2) Déterminer deux réels a et b tels que

$$\text{pour tout } x \neq -2 : \frac{x}{(x+2)^2} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2}$$

$$\text{Calculer } \int_{-1}^0 \frac{x}{(x+2)^2} dx.$$

3) Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout réel $x \neq 0$ et $x \neq -1$

$$\frac{1}{x(1+x)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2}$$

$$\text{Calculer } \int_1^2 \frac{dx}{x(1+x)^2}$$

25.

Calculer chacune des intégrales suivantes après avoir linéarisé la fonction à intégrer :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 3x dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos 3x dx$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cos 3x \cos 4x dx$; d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 3x \sin 4x dx$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$; f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$ g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx$;

h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx$

INTEGRALES ET INEGALITES

26.

Trouver un encadrement pour chacune des intégrales suivantes après avoir déterminé les extrêmes de la fonction à intégrer sur l'intervalle considéré.

$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos t} dt$; $J = \int_e^{2e} \frac{1}{\ln t} dt$.

27.

On admet que $\sin x \leq x$ pour $x \geq 0$. Montrer par plusieurs intégrations successives, les inégalités suivantes :

a) $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1$; b) $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$;

c) $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

28.

On donne $I = \int_0^1 \ln(1+x) dx$

a) Établir que pour tout $t \in [0;1]$,

$\frac{t^2}{1+t} = 1 - t + \frac{1}{1+t}$ et calculer $\int_0^1 \frac{t^2}{1+t} dt$.

b) Montrer que pour tout $t \in [0;1]$, $\frac{t^2}{2} \leq \frac{t^2}{1+t}$ en déduire un encadrement de $\ln 2$.

29.

Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n et pour tout réel x positif, on a :

$e^x \geq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$.

30.

1) Calculer $I = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$ au moyen de deux intégrations par parties.

2) On pose $J = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2 e^{-x}} dx$.

a) Montrer que pour tout x de l'intervalle $[0;1]$, $0 \leq x^2 e^{-x} \leq 1$.

b) Vérifier que pour tout u de l'intervalle $[0;1]$, $1-u \leq \frac{1}{1+u} \leq 1 + \frac{u}{2}$.

c) En déduire que $1-I \leq J \leq 1 + \frac{I}{2}$ et donner un encadrement de J à 10^{-1} près.

31.

p est un entier naturel non nul, (U_n) est la suite définie par : $U_n = 1^p + 2^p + \dots + n^p$.

1) Montrer que pour $k \geq 1$,

$\int_{k-1}^k t^p dt \leq k^p \leq \int_k^{k+1} t^p dt$.

2) En déduire que $\int_0^n t^p dt \leq U_n \leq \int_1^{n+1} t^p dt$.

3) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n}{n^{p+1}}$

est un réel strictement positif.

Montrer que pour tout entier naturel

$$n \geq 2, \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^n \frac{dx}{x^\alpha}$$

On pose $S_n = \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha}$. Montrer que

(S_n) est croissante et que $\int_1^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha} \leq S_n \leq \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha}$, pour $n \geq 1$

En déduire que pour $\alpha \geq 1$, la suite (S_n)

converge et pour $0 \leq \alpha \leq 1$, la limite de S_n en $+\infty$ est $+\infty$

FONCTIONS ET SUITES DÉFINIES À L'AIDE D'UNE INTÉGRALE

est une suite définie par $U_n = \int_0^n \frac{dt}{1+t^3}$

Déterminer le sens de variation de la suite (U_n)

Montrer que $U_1 \leq 1$ et $\int_1^n \frac{dt}{1+t^3} \leq \int_1^n \frac{dt}{t^3}$

En déduire que (U_n) est convergente et donner un encadrement de sa limite.

est une suite définie par : $U_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^x} dx$

Montrer que pour tout x de l'intervalle $[0,1]$,

$$\frac{e^{-nx}}{1+e^x} \leq \frac{e^{-nx}}{e^x + 1} \leq \frac{e^{-nx}}{2}$$

Déterminer un encadrement de U_n

En déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{e^n}$

est la suite définie par : $U_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$

Montrer que (U_n) est croissante et majorée par 1.

Montrer que $1 - U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$

Déduire des questions précédentes que :

$$0 \leq 1 - U_n \leq \frac{1}{n+1}$$

Déduire la limite de la suite (U_n).

36.

Soit (I_n) la suite définie par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+x)^n} dx \quad n \geq 2$$

1) Montrer que (I_n) est décroissante et qu'elle converge.

2) Établir l'encadrement :

$$\frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \leq I_n \leq \frac{e}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

3) Soit f_n la fonction définie sur l'intervalle

$$[0, +\infty[\text{ par } f_n(x) = \frac{e^x}{(1+x)^n}$$

a) Exprimer f'_n en fonction de $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$

b) En déduire une relation entre I_{n+1} et I_n

c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (nI_{n+1}) = 1$

d) En déduire que la suite de terme général (nI_n) converge vers une limite que l'on précisera.

37.

Soit $U_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 x^n e^x dx \quad n \geq 1$

1) A l'aide d'une intégration par partie calculer

$$U_1 \text{ et établir que } U_n = \frac{e}{n!} - U_{n-1}$$

2) En déduire à l'aide d'un raisonnement par récurrence que l'on a :

$$U_n = (-1)^n \left[e \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{2}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right) - 1 \right]$$

3) Montrer que : $0 \leq U_n \leq \frac{e}{(n+1)!}$

4) En déduire que la suite (S_n) telle que

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \text{ converge vers } \frac{1}{e}.$$

38.

Soit (I_n) une suite définie par : $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

a. Calculer I_0 .

b. Pour n entier naturel, exprimer I_{n+1} en

fonction de I_n , à l'aide d'une intégration par parties.

c. En déduire la valeur de I_4 .

d. Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$\frac{1}{e(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

e. Montrer que (I_n) est convergente, puis calculer sa limite.

39.

Soit n un entier naturel, on pose :

$$I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx.$$

a. Calculer I_n à l'aide de deux intégrations par parties successives.

b. Montrer que la suite (I_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

40.

Pour tout entier non nul n , on définit la suite

$$(I_n) \text{ par : } I_n = \int_1^e (\ln x)^n \, dx.$$

1. a. Justifier l'existence de cette intégrale.

b. Calculer I_1 .

c. Démontrer que : pour tout entier naturel $n > 2$, $I_{n+1} = e - nI_n$.

2. Pour tout entier naturel non nul n , on note F_n une primitive de la fonction $x \rightarrow (\ln x)^n$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

a. Démontrer que la fonction H définie par $H(x) = F_n(e^x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $H'(x)$.

b. Montrer que $I_n = F_n(e) - F_n(1) = \int_0^1 F_n(t) \, dt$.

c. En déduire que $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$.

d. Montrer alors que la suite I est convergente, puis calculer sa limite.

41.

F est la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$

$$\text{par } F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}.$$

1) Préciser le sens de variation de F .

2) Démontrer que pour tout réel $t \geq 1$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \leq \frac{1}{t^2} \text{ et en déduire que pour tout réel } x \geq 1,$$

$$\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \leq 1$$

3) Démontrer que pour tout réel $x \geq 0$, on a

$$F(x) \leq F(1) + 1. \text{ En déduire que } F \text{ admet une limite } l \text{ en } +\infty.$$

4) Dresser le tableau de variation de F .

Donner l'allure générale de la courbe C de F en prenant $l = 1,8$.

42.

F est la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$

$$\text{par } F(x) = \int_0^x e^{-t^2} \, dt$$

1. Déterminer le sens de variation de F sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

2. Démontrer que pour tout $t \geq 1$, on a

$$e^{-t^2} \leq e^{-1} \text{ en déduire que pour tout nombre réel } x \geq 1, \int_1^x e^{-t^2} \, dt \leq \frac{1}{e}$$

3. Démontrer que pour tout nombre réel positif x , on a : $F(x) \leq F(1) + \frac{1}{e}$. En déduire que F admet une limite finie l .

4. Dresser le tableau de variation de F et donner l'allure générale de la courbe de F . Prendre $l = 0,89$.

43.

F est la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$

$$\text{par } F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t+t^2}}.$$

1- Démontrer que pour tout réel $t \geq 0$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{1+t+t^2}} \geq \frac{1}{1+t} \text{ et en déduire que pour tout réel } x \text{ positif, } F(x) \geq \ln(1+x)$$

a) Calculer la limite de F en $+\infty$.

b) Étudier la variation de F et dresser le tableau de variation.

Démontrer que pour tout réel t , positif on a :

$$\frac{1}{\sqrt{1+t+t^2}} \leq 1 \text{ et en déduire que pour tout réel } x \text{ on a } F(x) \leq x.$$

c) Démontrer que pour tout réel t de

$$\text{l'intervalle } [1, +\infty[, \frac{1}{\sqrt{1+t+t^2}} \leq \frac{1}{t}$$

En déduire que pour tout réel $x \geq 1$, on a

$$F(x) \leq \int_0^1 f(t) dt + \ln x \text{ où } f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t+t^2}}$$

Démontrer que la courbe C de F admet une branche parabolique de direction (OI).

Traçer la droite $(D) : y = x$ et donner l'allure générale de (C)

Considère la fonction F de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

$$\text{définie par } F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}.$$

Démontrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que F est une fonction impaire (on pourra utiliser un changement de variable).

Démontrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser sa fonction dérivée.

Étudier le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$

On se propose dans cette question d'étudier le comportement de F au voisinage de $+\infty$.

$$\text{Soit la fonction } f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}.$$

Étudier le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$.

b) Soit x un réel strictement positif.

Utiliser la question 4)a) pour montrer

que, pour tout t de $[x; 2x]$, on a

$$0 \leq f(t) \leq f(x).$$

$$\text{Déduire que } 0 \leq F(x) \leq \frac{x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}.$$

c) Donner la limite de F en $+\infty$.

5) Avec la méthode des rectangles, déterminer

une valeur approchée du réel $F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ à 10^{-1} près.

6) Donner l'allure de la courbe représentative de F dans un repère orthonormé.

CALCULS D'AIRES ET VOLUMES

45.

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J)

1. Étudier et représenter la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1+x)e^{-2x}$. Unité d'axe 2cm

2. Soit a un réel plus grand que -1

a) Calculer en fonction de a l'Aire $A(a)$ la portion délimitée par les droites d'équations $x=0, x=a$, l'axe des abscisses et la courbe (C) de f

b) Déterminer la limite de $A(a)$ quand a tend vers $+\infty$.

46.

1) Étudier sur $]0, +\infty[$ la fonction $f : x \rightarrow \frac{1}{x}e^{-x}$ et dresser son tableau de variations.

2) a) trouver une équation de la tangente à la courbe (C) de f au point A d'abscisse 1 notée (T) .

b) (T) coupe l'axe des abscisses au point (C) , préciser l'abscisse de (C) .

3) Construire la courbe (C) .

4) Calculer l'aire du domaine (D) délimité par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les

droites d'équations $x=1$ et $x=3$.

- 5) On désigne par B le point (C) d'abscisse 3. Calcul l'aire (D'), le domaine délimité par (C) et les droites (AC) et (BC).

47.

- Démontrer que la courbe (T) de la fonction $x \rightarrow e^x$ coupe la droite (D) : $y=3x$ en deux points A et B. d'abscisses respectives α et β ($\alpha < \beta$).
- Calculer l'aire du domaine délimité par les droites d'équations $x=\alpha$, $x=\beta$, la droite (D) et la courbe (T) et montrer que cette aire est égale à $\frac{3}{2}(\beta-\alpha)(\beta+\alpha-2)$.

48.

- Étudier et représenter la fonction $f : x \rightarrow x \ln x$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Unité d'aire 5cm.
- Soit $A(\alpha)$ l'aire du domaine délimité par la courbe (C) de f , l'axe des abscisses et les droites $x=\alpha$ et $x=1$.
- Déterminer la limite de $A(\alpha)$ quand α tend vers 0.

49.

Déterminer le volume du solide de révolution obtenu en tournant autour de l'axe (OY) le domaine du plan délimité par les axes (OX), (OY), la droite $y=2$ et la courbe d'équation $y=\ln x$.

50.

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité de mesure 1Cm.

- Étudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - x - 1$.
- Démontrer que la droite d'équation $f(x) = \alpha$ est asymptote à (C_f) en $-\infty$.
- Construire (C_f).

- Démontrer que l'équation $f(x) = \alpha$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.
- Calculer l'aire du domaine (D) délimité par les droites d'équations $x=0$, $x=\alpha$, des abscisses et la courbe (C_f).
- On fait tourner (D) autour de l'axe des abscisses. Calculer en cm³ le volume du solide ainsi obtenu.

51.

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$). Unité d'axe; 1cm.

- Construire la courbe de la fonction $f : x \rightarrow \sin^2 x$ sur l'intervalle $[0, \pi]$.
- Déterminer l'aire du domaine plan délimité par les droites d'équations $x=0$, $x=\pi$, la courbe (C) de f et l'axe des abscisses.
- On fait tourner le domaine (D) autour de l'axe des abscisses. On obtient un solide de révolution. Calculer son volume.

CALCULS APPROCHÉS

52.

Soit f une fonction continue et croissante sur

l'intervalle $[0, 1]$ on pose : $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $S'_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$.

- Interpréter graphiquement S_n et S'_n en termes d'aires de rectangles.
- Justifier que $S_n \leq \int_0^1 f(t) dt \leq S'_n$.
- Montrer que pour tout entier naturel non nul, l'amplitude de cet encadrement est $\frac{1}{n}(f(1) - f(0))$.

Applications:

En subdivisant l'intervalle $[0, 1]$ en cinq intervalles de même amplitude, donner un encadrement de $\int_0^1 e^{t^2} dt$ et préciser l'amplitude.

admet un encadrement.

2) Soit la fonction définie sur l'intervalle

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Montrer que f est décroissante sur l'intervalle $[0, 1]$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $0 \leq p \leq n-1$

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right). \text{ Montrer que}$$

$$\frac{f(0)}{n} \leq \int_0^1 f(t) dt \leq U_n - f\left(\frac{1}{n}\right)$$

Déterminer un encadrement de $\int_0^1 f(t) dt$

pour $n=10$ et déterminer un encadrement

$$\int_0^1 f(t) dt \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

En utilisant la méthode des rectangles, calculer pour chacun des cas la limite de la suite (U_n) :

$$a) u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}} \quad b) u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

Soit la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$

$$f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln x$$

Étudier les variations de f et tracer sa

courbe. Unité graphique: 5 cm.

Montrer qu'il existe un réel strictement positif.

Calculer un moyen d'une intégration par parties

$$\int_0^1 f(x) dx. \text{ Déterminer } \lim_{\lambda \rightarrow 0} I(\lambda)$$

3) Pour tout $n \geq 2$, on pose $S_n = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} f\left(\frac{p}{n}\right)$.

a) Montrer que pour tout entier naturel p , tel que $1 \leq p \leq n-1$ on a :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{p+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{p}{n}\right)$$

b) Dédire que $S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n$.

$$\text{puis que } I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

c) En déduire que la limite de (S_n) en $+\infty$ est $\frac{1}{3}$

Chapitre 12

ISOMÉTRIES ET SIMILITUDES DIRECTES DU PLAN.

LEÇON 1 ISOMÉTRIES DU PLAN.

- 1.1. COMPOSITION DE SYMÉTRIES ORTHOGONALES DES TRANSLATIONS.
 - 1.1.1 Composée de symétries orthogonales.
 - 1.1.2 Composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation
- 1.2. COMPOSITION DE ROTATIONS ET DE TRANSLATIONS.
 - 1.2.1 Composée d'une rotation et d'une symétrie orthogonale.
- 1.3. CLASSIFICATION DES ISOMÉTRIES DU PLAN.
 - 1.3.1 Décomposition d'une isométrie.
 - 1.3.2 isométries et points invariants.
 - 1.3.3 Déplacements et antidéplacements

LEÇON 2 SIMILITUDES DIRECTES DU PLAN.

- 2.1. GÉNÉRALITÉS SUR LES SIMILITUDES PLANES.
- 2.2. SIMILITUDES DIRECTES DU PLAN.
 - 1.2.1 Écritures complexes des similitudes directes du plan.
 - 1.2.2 Composée de similitudes directes – réciproque d'une similitude directe.
 - 1.2.3 Caractérisation géométrique d'une similitude directe.
- 2.3. DÉTERMINATION DES SIMILITUDES DIRECTES - UTILISATIONS DANS LA RÉOLUTION DES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE.

S'ENTRAÎNER

LEÇON 1 ISOMÉTRIES DU PLAN.

- Consolider les compositions des translations, des rotations, des symétries orthogonales du plan.
- Donner la nature de la composée d'une réflexion et d'une translation ;
- Caractériser une isométrie à partir de l'ensemble de ses points invariants.

COMPOSITION DE SYMÉTRIES ORTHOGONALES ET DES TRANSLATIONS.

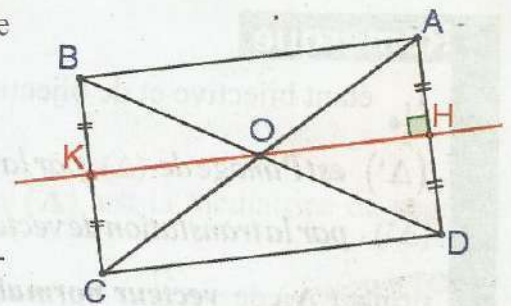
COMPOSÉE DE SYMÉTRIES ORTHOGONALES.

Prendre un bon départ

Exercice 1

ABCD est un rectangle de sens direct et de centre O et tel que $OC = 2AD$.

- Préciser la nature du triangle OAD.
- Déterminer deux isométries f et g qui transforment chacune D en A et B en C.
- Caractériser f^{-1} et g^{-1} , transformations réciproques respectives de f et de g .
- Donner la nature et les éléments caractéristiques des applications $S_{(AB)} \circ S_{(HK)}$ et $S_{(AB)} \circ S_{(CD)}$.
- Donner la nature les éléments caractéristiques des applications $S_{(OA)} \circ S_{(HK)}$ et $S_{(HK)} \circ S_{(OC)}$.



Exercice 2

- Déterminer une droite (Δ') telle que $S_{\Delta'} \circ S_{(AD)} = t_{\overline{AB}}$ (translation de vecteur $\overline{AB}$).
- Déterminer une droite (Δ) telle que $S_{(BD)} \circ S_{\Delta} = r_{(O, -\frac{\pi}{3})}$ (rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$).

Retenir

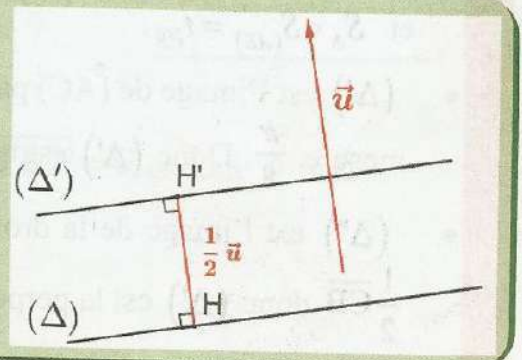
Soient (Δ) et (Δ') deux droites

parallèles du plan ; la composée d $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ ($S_{\Delta'}$ suivie de S_{Δ})

est égale à la translation de vecteur $2\overline{HH'}$ où H est un point

arbitraire de (Δ) et H' est le projeté orthogonal de H sur (Δ') .

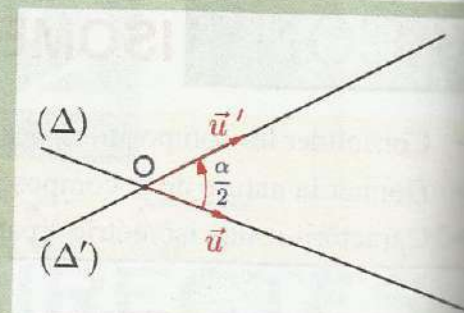
$$S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} = t_{2\overline{HH'}}.$$



(2) Soit (Δ) une droite de vecteur normal $\vec{u}$.

(3) Il existe une unique droite (Δ') parallèle à (Δ) telle que

$S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} = t_{\frac{1}{2}\vec{u}}$. (Δ') est l'image de (Δ) par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$.



(3) Soient (Δ) et (Δ') deux droites sécantes en O et de vecteurs directeur respectif $\vec{u}$ et $\vec{u}'$. La

composée de S_{Δ} suivie de $S_{\Delta'}$ est égale à la rotation de centre O et d'angle $2(\vec{u}, \vec{u}')$.

$$S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} = r_{(O, \alpha)} \text{ avec } \alpha = 2\text{mes}(\vec{u}, \vec{u}')$$

(4) Soit $r_{(O, \alpha)}$ la rotation de centre O et d'angle α . Pour toute droite (Δ) passant par O, il existe une seule droite (Δ') telle que $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} = r_{(O, \alpha)}$.

(Δ') est l'image de (Δ) par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\alpha}{2}$.

Remarque

$t_{\frac{1}{2}\vec{u}}$ étant bijective et de bijection réciproque $t_{-\frac{1}{2}\vec{u}}$, (Δ') est l'image de (Δ) par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$ si et seulement si (Δ) est l'image de (Δ') par la translation de vecteur $-\frac{1}{2}\vec{u}$. Cette équivalence permet de déterminer l'unique droite (Δ) de vecteur normal $\vec{u}$ telle que $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} = t_{\vec{u}}$ avec (Δ') et $\vec{u}$ connus.

Exemple

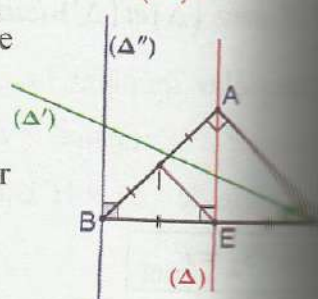
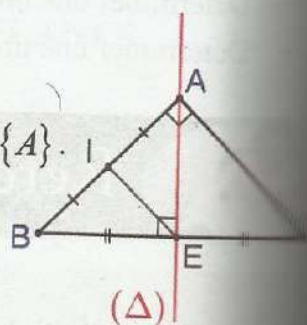
Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle et isocèle en A et de sens direct.

a) Déterminons les transformations $S_{(AC)} \circ S_{(IE)}$ et $S_{(AC)} \circ S_{\Delta}$. On a :

- $S_{(AC)} \circ S_{(IE)} = t_{2\vec{IA}} = t_{\vec{BA}}$ car $(AC) \parallel (IE)$.
- $S_{(AC)} \circ S_{\Delta} = r_{(A, \frac{\pi}{2})}$ car $2(\vec{AE}, \vec{AC}) = 2 \times \frac{\pi}{4} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ et $(AC) \cap (\Delta) = \{A\}$.

b) Déterminons les droites (Δ') et (Δ'') telles que $S_{(AC)} \circ S_{\Delta'} = r_{(C, -\frac{\pi}{4})}$ et $S_{\Delta} \circ S_{(AE)} = t_{\vec{CB}}$.

- (Δ') est l'image de (AC) par la rotation de centre C et d'angle de mesure $\frac{\pi}{8}$. Donc (Δ') est la bissectrice de l'angle $\hat{C}$.
- (Δ'') est l'image de la droite (AE) par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{CB}$ donc (Δ'') est la perpendiculaire à (BC) passant par B.





S'exercer

ABCD est un losange de sens direct tel que $\text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{3}$.

- a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :

$$f = S_{(BC)} \circ S_{(AD)} \text{ et } g = S_{(CD)} \circ S_{(AB)}$$

- b) Déterminer et comparer $f \circ g$ et $g \circ f$.

- c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations $S_{(AC)} \circ S_{(AD)}$, $S_{(BD)} \circ S_{(CB)}$ et $S_{(AC)} \circ S_{(BD)}$.

ABCD est un carré de sens direct de centre O. Dans chacun des cas suivants, déterminer la droite

$$(\Delta) \text{ telle que : } S_{(\Delta)} \circ S_{(OC)} = r_{(C, \frac{\pi}{2})} ; S_{(AB)} \circ S_{(\Delta)} = t_{\overrightarrow{DA}} ; S_O = S_{(\Delta)} \circ S_{(BD)} ; t_{\overrightarrow{BA}} = S_{(AD)} \circ S_{(\Delta)}.$$

COMPOSÉE D'UNE SYMÉTRIE ORTHOGONALE ET D'UNE TRANSLATION



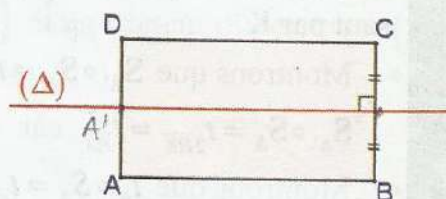
Prendre un bon départ

$$S_{AC} \quad (S_O \circ t_{\vec{u}})$$

Activité 1

La figure ci-contre ABCD est un rectangle de sens direct et (Δ) est la médiatrice du segment

- Déterminer l'application $S_{(\Delta)} \circ S_{(AB)} = t_{\overrightarrow{AA'}} = t_{\overrightarrow{AD}}$.
- En déduire que $t_{\overrightarrow{AD}} \circ S_{(AB)} = S_{(\Delta)}$.
- Déterminer les images de A par $t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(\Delta)}$ puis par $S_{(\Delta)} \circ t_{\overrightarrow{AB}}$.



Activité 2

(Δ) une droite dirigée par un vecteur $\vec{u}$.

M un point du plan. On note $P = S_{(\Delta)}(M)$, $N = t_{\vec{u}}(M)$ et $M' = S_{(\Delta)}(N)$.

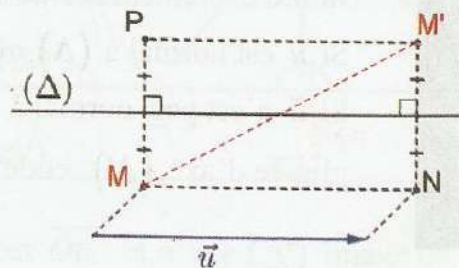
- Vérifier que $\overrightarrow{PM'} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM'}$.
- Montrer que $M' = t_{\vec{u}}(P)$.
- En déduire que pour tout point M du plan, $(S_{(\Delta)} \circ t_{\vec{u}})(M) = (t_{\vec{u}} \circ S_{(\Delta)})(M)$.

On suppose qu'il existe un point Ω tel que $\Omega = (S_{(\Delta)} \circ t_{\vec{u}})(\Omega)$.

- Montrer que $S_{(\Delta)}(\Omega) = t_{\vec{u}}(\Omega)$.

On pose $\Omega' = S_{(\Delta)}(\Omega) = t_{\vec{u}}(\Omega)$, justifier que $\overrightarrow{\Omega\Omega'} \perp \vec{u}$, $\overrightarrow{\Omega\Omega'} = \vec{u}$ et donc $\vec{u} = \vec{o}$.

- En déduire $S_{(\Delta)} \circ t_{\vec{u}}$ n'admet pas de point invariant.





Retenir

(1) Soit (Δ) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.

- On appelle *symétrie glissée d'axe (Δ) et de vecteur $\vec{u}$* , la composée de la symétrie orthogonale d'axe (Δ) et de la translation de vecteur $\vec{u}$. $S_{\Delta} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}$
- Une symétrie glissée **n'admet pas** de point invariant.

(2) Soit (Δ) une droite et $\vec{u}$ un vecteur non nul, du plan vectoriel.

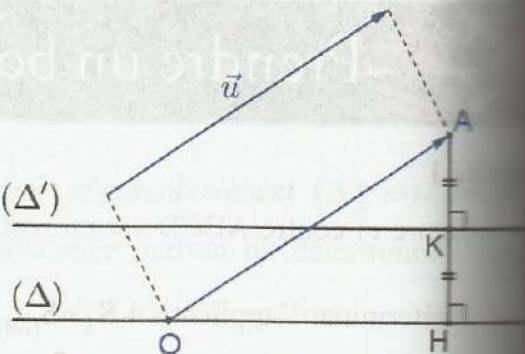
- Si $\vec{u}$ est un vecteur normal à (Δ) alors la composée de la translation $t_{\vec{u}}$ et de la symétrie orthogonale $S_{(\Delta)}$ est une symétrie orthogonale d'axe parallèle à (Δ) .
- Si $\vec{u}$ n'est pas un vecteur normal à (Δ) alors $t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}$ est une symétrie glissée.

S'en Convaincre

Soit (Δ) une droite et $\vec{u}$ un vecteur non nul. Soit O un point de (Δ) et A un point tel que $\vec{u} = \vec{OA}$.

Désignons par H le projeté orthogonal de A sur (Δ) , (Δ')

K le milieu de [AH] et (Δ') la parallèle à (Δ) passant par K.



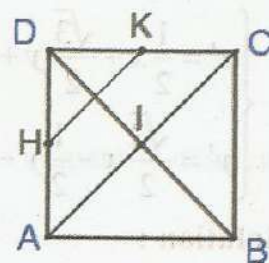
- Montrons que $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} = t_{\vec{HA}}$.
 $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} = t_{2\vec{HK}} = t_{\vec{HA}}$ car $(\Delta) // (\Delta')$, $H \in (\Delta)$, $K \in (\Delta')$ et (HK) est orthogonale à (Δ) .
- Montrons que $t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta} = t_{\vec{OH}} \circ S_{\Delta'}$.
 $t_{\vec{OH}} \circ S_{\Delta} = t_{\vec{OH}} \circ t_{\vec{HA}} \circ S_{\Delta}$
 $= t_{\vec{OH}} \circ S_{\Delta'}$ car $t_{\vec{AH}} \circ S_{\Delta} = S_{\Delta'}$.
- Nature et éléments caractéristiques de $t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}$.
 - Si $\vec{u}$ est normal à (Δ) alors $O = H$ et $S_{\Delta} = t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}$ car $t_{\vec{OH}} = t_{\vec{OO}}$ est l'identité du plan.
 - Si $\vec{u}$ n'est pas normal à (Δ) alors $O \neq H$; donc $t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta} = t_{\vec{OH}} \circ S_{\Delta'}$ est une symétrie glissée d'axe (Δ') et de vecteur $\vec{OH}$.

Remarque

Soit (Δ) une droite du plan, et $\vec{u}$ un vecteur non nul, qui n'est ni un vecteur normal ni un vecteur directeur à (Δ) . La composée de la translation $t_{\vec{u}}$ et de la symétrie orthogonale est une symétrie glissée dont on peut déterminer l'axe et le vecteur.

Exemple

Sur la figure ci-contre, ABCD est un carré de sens direct et de centre I.



- $S_{(HK)} \circ t_{\overline{AC}}$ est la symétrie glissée d'axe (HK) et de vecteur $\overline{AC}$.
- $t_{\overline{AC}} \circ S_{(AB)}$ est la symétrie glissée de vecteur $\overline{AB}$ et d'axe la médiatrice de [BC].
- $S_{(HK)} \circ t_{\overline{ID}}$ est une symétrie orthogonale car $(HK) \perp (ID)$

$$\begin{aligned} S_{(HK)} \circ t_{\overline{ID}} &= S_{(HK)} \circ (S_{(HK)} \circ S_{(AC)}) \text{ car } t_{\overline{ID}} = S_{(HK)} \circ S_{(AC)} \\ &= (S_{(HK)} \circ S_{(HK)}) \circ S_{(AC)} = S_{(AC)}. \end{aligned}$$

- $t_{\overline{HK}} \circ S_{(AB)}$ est la symétrie glissée de vecteur $\frac{1}{2} \overline{AB}$ et d'axe (Δ) , la médiatrice de [AH]. En effet : $t_{\overline{HK}} \circ S_{(AB)} = (t_{\overline{HD}} \circ t_{\overline{DK}}) \circ S_{(AB)} = t_{\overline{DK}} \circ (t_{\overline{AH}} \circ S_{(AB)})$

Le vecteur $\overline{AH}$ est normal à la droite (AB) et ainsi $t_{\overline{AH}} \circ S_{(AB)}$ est une symétrie orthogonale.

Posons $t_{\overline{AH}} \circ S_{(AB)} = S_{\Delta}$. On a $t_{\overline{AH}} = S_{\Delta} \circ S_{(AB)}$; d'où (Δ) est l'image de (AB) par la translation

de vecteur $\frac{1}{2} \overline{AH}$ c'est-à-dire la médiatrice de [AH]. Ainsi

$$\text{car } \frac{1}{2} \overline{AB} = \overline{DK}$$

$$t_{\overline{HK}} \circ S_{(AB)} = t_{\overline{DK}} \circ S_{\Delta} = t_{\frac{1}{2} \overline{AB}} \circ S_{\Delta}$$

Exercice Résolu 1

Soit (Δ) une droite, $\vec{u}$ un vecteur non nul qui n'est ni normal à (Δ) ni un vecteur directeur de (Δ) . Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $S_{\Delta} \circ t_{\vec{u}}$.

Réponse

On détermine la nature et les éléments caractéristiques de $S_{\Delta} \circ t_{\vec{u}}$.

Soit O un point de (Δ) et A l'unique point du plan tel que $\vec{OA} = \vec{u}$. Soit K le projeté orthogonal de A sur (Δ) .

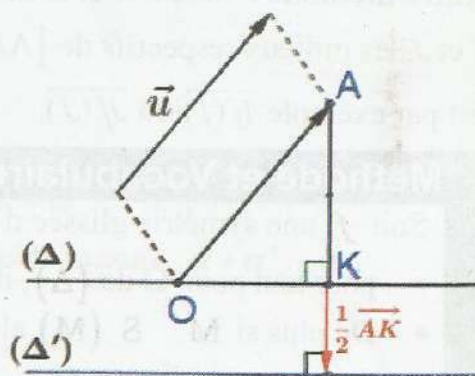
$$\begin{aligned} S_{\Delta} \circ t_{\vec{u}} &= S_{\Delta} \circ t_{\overline{OA}} = S_{\Delta} \circ (t_{\overline{OK}} \circ t_{\overline{KA}}) \\ &= (S_{\Delta} \circ t_{\overline{KA}}) \circ t_{\overline{OK}} \text{ car } t_{\overline{OK}} \circ t_{\overline{KA}} = t_{\overline{KA}} \circ t_{\overline{OK}}. \end{aligned}$$

$S_{\Delta} \circ t_{\overline{KA}}$ est la symétrie orthogonale $S_{\Delta'}$.

$$S_{\Delta} \circ t_{\overline{KA}} = S_{\Delta'} \text{ et } t_{\overline{KA}} = S_{\Delta} \circ S_{\Delta'}.$$

Ainsi, (Δ') est l'image de (Δ) par $t_{\frac{1}{2} \overline{KA}} = t_{\frac{1}{2} \overline{AK}}$.

$S_{\Delta} \circ t_{\vec{u}} = S_{\Delta'} \circ t_{\overline{OK}} = t_{\overline{OK}} \circ S_{\Delta'}$ est la symétrie glissée de vecteur $\overline{OK}$ et d'axe (Δ') image de (Δ) par la translation de vecteur $\frac{1}{2} \overline{AK}$.



Exercice Résolu 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit f la symétrie glissée dont l'expression analytique est :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - 1 \end{cases} \text{ Déterminer l'axe et le vecteur de } f$$

Solution :

Déterminons l'axe (Δ) de f .

Soit $\Omega(a; b)$ un point du plan, $\Omega(a; b) \in \Delta$, il existe un point $M(x, y)$ tel que Ω soit le milieu du segment $[Mf(M)]$; $a = \frac{x+x'}{2}$ et $b = \frac{y+y'}{2}$. On obtient de ces deux égalités :

$$2a = x + x' = x + \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 = \frac{3}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1$$

$$2b = y + y' = y + \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - 1$$

$$2\sqrt{3}b = \frac{3}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \sqrt{3} = 2 - 1 - \sqrt{3}; \text{ donc } (\Delta): 2x - 2\sqrt{3}y - 1 - \sqrt{3} = 0.$$

Déterminons le vecteur $\vec{u}$ de f .

- Déterminons le point $I = s_{\Delta}(O)$.

$I = s_{\Delta}(O) \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \alpha \vec{n}$ et le milieu de $[OI]$ appartient à (Δ) où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\vec{n}(2; -2\sqrt{3})$ est un vecteur normal de (Δ) .

le point $I \notin (\Delta)$ mais le milieu de $[OI]$ est sur (Δ) et on a $2\alpha + 6\alpha - 1 - \sqrt{3} = 0$; soit $\alpha = \frac{1+\sqrt{3}}{8}$

Par ailleurs, $\vec{u} = \overrightarrow{If(O)} \vec{u} \left(\frac{3-\sqrt{3}}{4}; \frac{\sqrt{3}-1}{4} \right)$

Autre méthode : Soient A et B deux points arbitraires distincts du plan; $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$. I et J les milieux respectifs de $[AA']$ et $[BB']$. L'axe de f est la droite (IJ) et de vecteur directeur est par exemple $\overrightarrow{If(I)}$ ou $\overrightarrow{Jf(J)}$.

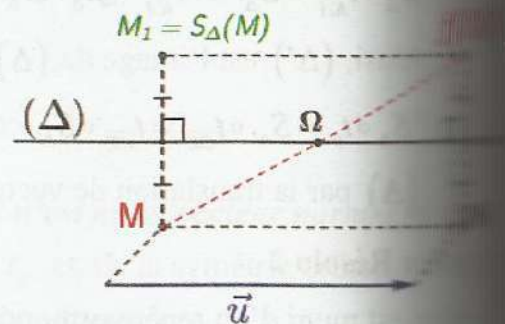
Méthode et Vocabulaire

Soit f une symétrie glissée d'axe (Δ) et de vecteur $\vec{u}$ alors :

- pour tout point Ω de (Δ) , il existe au moins un point M tel que Ω soit le milieu de $[Mf(M)]$
- De plus si $M \in S(\Delta)$ alors $\overrightarrow{f(M)} = \vec{u}$.
- Cette procédure permet de déterminer (Δ) et $\vec{u}$ lorsqu'on connaît l'expression analytique de f .

L'écriture $f = S_{\Delta} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}$ est appelée **forme canonique de f** .

- $f \circ f = t_{2\vec{u}}$ ceci permet de déterminer le vecteur de translation et l'axe de f , qui doit passer par le milieu de $[of(o)]$ de vecteur directeur $\vec{u}$





S'exercer

1. ABCD est un rectangle de sens direct et de centre O. I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [DC].

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations :

$$t_{\overline{AB}} \circ S_{(AD)} ; S_{(IJ)} \circ t_{\overline{DA}} ; t_{\overline{DB}} \circ S_{(AD)} ; S_{(AD)} \circ t_{\overline{DB}} .$$

2. ABC est un triangle équilatéral de sens direct. I et J sont les milieux respectifs des côtés [BC] et [AC]. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :

$$t_{\overline{BC}} \circ S_{(AI)} ; t_{\overline{IJ}} \circ S_{(AB)} \text{ et } t_{\overline{BA}} \circ S_{(BC)}$$

3. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'application $f = t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}$ dans chacun des cas suivants :

a) $\vec{u}(1;1)$ et $\Delta : x - y - 2 = 0$; b) $\vec{u}(1;1)$ et $\Delta : x + y + 3 = 0$; c) $\vec{u}(1;1)$ et $\Delta : x - 2 = 0$.

4. $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.

On considère le vecteur $\vec{u}(-2, 3)$ et la droite $(\Delta) : x + y - 2 = 0$.

Déterminer l'expression analytique de la symétrie glissée de vecteur $\vec{u}$ et d'axe (Δ) .

12 COMPOSITION DE ROTATIONS ET DE TRANSLATIONS.



Prendre un bon départ

Soient r et r' deux rotations d'angles de mesure respectives α et α' , soit t une translation du plan.

Activité 1

Supposons que r et r' ont même centre O.

Soit M un point du plan. On note $N = r(M)$ et $M' = r'(N)$.

• Vérifier que $M' = (r' \circ r)(M)$.

• Démontrer que $OM = ON = OM'$ et $\text{mes}(\widehat{OM, OM'}) = \alpha + \alpha'$.

• En déduire que $r' \circ r$ est la rotation de centre O et d'angle de mesure $\alpha + \alpha'$.

Activité 2

Supposons que r et r' ont des centres O et O' respectivement.

Soient A et B deux points du plan. On note $A_1 = r(A)$ et $B_1 = r(B)$ puis $A' = r'(A_1)$ et $B' = r'(B_1)$.

• Vérifier que $A' = (r' \circ r)(A)$ et $B' = (r' \circ r)(B)$.

• Montrer que $AB = A_1B_1 = A'B'$ et $\widehat{AB, A'B'} = \widehat{AB, A_1B_1} + \widehat{A_1B_1, A'B'} = \alpha + \alpha'$.

• En déduire que :

– Si $\alpha + \alpha' = 0$ alors $\overline{A'B'} = \overline{AB}$. Donner alors la nature de $r' \circ r$.

– Si $\alpha + \alpha' \neq 0$ alors $r' \circ r$ est une rotation d'angle $\alpha + \alpha'$.

Activité 3

Soient A, B deux points du plan.

- On note $A_1 = r(A)$ et $B_1 = r(B)$. Justifier que $A_1B_1 = AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_1B_1}) = \hat{\alpha}$.
- On note $A' = t(A_1)$ et $B' = t(B_1)$. Justifier que $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A_1B_1}$.
- Montrer que $A'B' = AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_1B_1}) + (\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A'B'}) = \hat{\alpha}$.
- Vérifier que : $A' = (r \circ t)(A)$ et $B' = (r \circ t)(B)$ puis en déduire que $r \circ t$ est une rotation d'angle de mesure α .
- De façon analogue, montrer que $t \circ r$ est aussi une rotation d'angle de mesure α .



Retenir

Soient r et r' deux rotations du plan d'angles de mesures respectives α et α' . Soit t une translation.

(1) Composée de deux rotations de même centre.

- La composée de deux rotations r et r' de même centre O et d'angles de mesures respectives α et α' est la rotation de centre O et d'angle $\alpha + \alpha'$ si $\alpha + \alpha' \neq 0$.
- $r' \circ r = r \circ r'$ et est l'application identique si $\alpha + \alpha' = 0$.

(2) Composée de deux rotations de centres distincts.

- La composée de deux rotations de centres distincts O et O' , et d'angles de mesures respectives α et α' est :
 - une translation si $\alpha + \alpha' = 0$
 - une rotation d'angle $\alpha + \alpha'$ si $\alpha + \alpha' \neq 0$.

(3) Composée d'une rotation et d'une translation.

- La composée d'une rotation r d'angle α et d'une translation t est une rotation d'angle α .

Remarque

Soient r et r' deux rotations et t une translation du plan. En général,

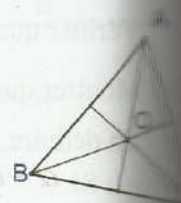
- Lorsque r et r' sont de centres distincts, $r' \circ r \neq r \circ r'$.
- $t \circ r \neq r \circ t$.

Exemple 1

Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre O .
Déterminons la nature et les éléments caractéristiques des applications ci-dessous :

a) $f = r_{\left(B, \frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(A, -\frac{\pi}{3}\right)}$

- $\frac{\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{3}\right) = 0 = 0 \times 0 \times \pi$. f est donc translation.



Activité 3

Soient A, B deux points du plan.

- On note $A_1 = r(A)$ et $B_1 = r(B)$. Justifier que $A_1B_1 = AB$ et $(\widehat{AB, A_1B_1}) = \hat{\alpha}$.
- On note $A' = t(A_1)$ et $B' = t(B_1)$. Justifier que $\overline{A'B'} = \overline{A_1B_1}$.
- Montrer que $A'B' = AB$ et $(\widehat{AB, A'B'}) = (\widehat{AB, A_1B_1}) + (\widehat{A_1B_1, A'B'}) = \hat{\alpha}$.
- Vérifier que : $A' = (r \circ t)(A)$ et $B' = (r \circ t)(B)$ puis en déduire que $r \circ t$ est une rotation d'angle de mesure α .
- De façon analogue, montrer que $t \circ r$ est aussi une rotation d'angle de mesure α .



Retenir

Soient r et r' deux rotations du plan d'angles de mesures respectives α et α' . Soit t une translation.

(1) Composée de deux rotations de même centre.

- La composée de deux rotations r et r' de même centre O et d'angles de mesures respectives α et α' est la rotation de centre O et d'angle $\alpha + \alpha'$ si $\alpha + \alpha' \neq 0$.
- $r' \circ r = r \circ r'$ et est l'application identique si $\alpha + \alpha' = 0$.

(2) Composée de deux rotations de centres distincts.

- La composée de deux rotations de centres distincts O et O' , et d'angles de mesures respectives α et α' est :
 - une **translation** si $\alpha + \alpha' = 0$
 - une **rotation** d'angle $\alpha + \alpha'$ si $\alpha + \alpha' \neq 0$.

(3) Composée d'une rotation et d'une translation.

- La composée d'une rotation r d'angle α et d'une translation t est une rotation d'angle α .

Remarque

Soient r et r' deux rotations et t une translation du plan. En général,

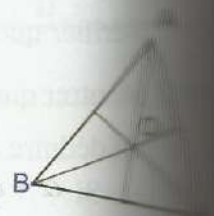
- Lorsque r et r' sont de centres distincts, $r' \circ r \neq r \circ r'$.
- $t \circ r \neq r \circ t$.

Exemple 1

Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre O .

Déterminons la nature et les éléments caractéristiques des applications ci-dessous :

- a) $f = r_{\left(B, \frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(A, -\frac{\pi}{3}\right)}$
- $\frac{\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{3}\right) = 0 = 0 \times 0 \times \pi$. f est donc translation.



Il suffit de chercher $f(C) = r_{(B, \frac{\pi}{3})}(B) = B$; ainsi $\boxed{f = t_{\overline{CB}}}$.

b) $g = r_{(B, \frac{\pi}{3})} \circ r_{(C, \frac{\pi}{3})}$

$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Comme $\frac{2\pi}{3} \neq k2\pi$ pour tout entier k de mesure $\frac{2\pi}{3}$ g est une rotation.

Considérons la droite (BC) et déterminons deux droites (Δ) et (Δ') telles que $r_{(B, \frac{\pi}{3})} = S_{\Delta'} \circ S_{(BC)}$ et $r_{(C, \frac{\pi}{3})} = S_{(BC)} \circ S_{\Delta}$.

– (Δ') est l'image de la droite (BC) par $r_{(B, \frac{\pi}{6})}$ c'est-à-dire la droite (BO) .

– (Δ) est l'image de la droite (BC) par $r_{(C, -\frac{\pi}{6})}$ c'est-à-dire la droite (CO) .

On peut remarquer que $g(C) = A$ et $g(A) = B$. Donc le centre de g est l'intersection des médiatrices de $[AC]$ et $[AB]$

Donc $g = S_{(BO)} \circ S_{(BC)} \circ S_{(BC)} \circ S_{(CO)} = S_{(BO)} \circ S_{(CO)}$. Finalement $\boxed{g = r_{(O, \frac{2\pi}{3})}}$.

c) $h = r_{(C, \frac{\pi}{3})} \circ r_{(O, \frac{2\pi}{3})}$

$\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$ donc h est une symétrie centrale.

Soit $O' = h(O)$ on a $O' = r_{(C, \frac{\pi}{3})}(O)$ donc $CO = CO'$ et $\text{mes}(\widehat{CO, CO'}) = \frac{\pi}{3}$.

Ainsi le triangle COO' est équilatéral de sens direct. Finalement le centre de h est le milieu de $[OO']$ c'est-à-dire milieu K de $[BC]$.

On pouvait aussi remarquer juste que $h(B) = C$ et avoir le même résultat.

Méthode

Soient r et r' deux rotations d'angles respectifs α et α' , de centres respectifs et distincts O et O' .

Si $\alpha + \alpha' = \hat{0}$ alors pour déterminer le vecteur de la translation $t = r' \circ r$, il est judicieux de déterminer l'image par t d'un point connu, de préférence le centre O de r .

Si $\alpha + \alpha' \neq \hat{0}$ alors pour déterminer le centre de la rotation $r' \circ r$ on peut Déterminer deux droites (Δ) et (Δ') telles que $r' = S_{\Delta'} \circ S_{(OO')}$ et $r = S_{(OO')} \circ S_{\Delta}$. On a alors $r' \circ r = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ et le centre cherché est le point d'intersection de (Δ) et (Δ') .

Exemple 2

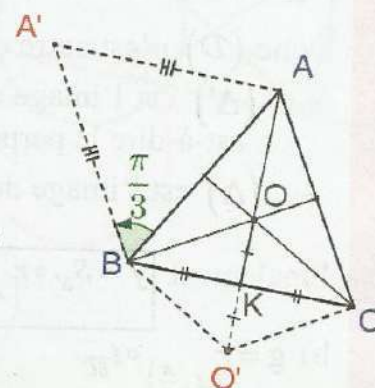
$\triangle ABC$ est un triangle équilatéral de sens direct et de centre O . Déterminons les applications suivantes :

a) $f = t_{\overline{BC}} \circ r_{(A, \frac{\pi}{3})}$

f est une rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.

Détermination du centre :

Déterminons trois droites (Δ) , (D) et (Δ') tels que $t_{\overline{BC}} = S_{\Delta} \circ S_D$ et $r_{(A, \frac{\pi}{3})} = S_D \circ S_{\Delta'}$.



$$t_{\overline{BC}} = S_{\Delta'} \circ S_D \Rightarrow (D) \perp (BC) \text{ et } r_{\left(A, \frac{\pi}{3}\right)} = S_D \circ S_{\Delta'} \Rightarrow A \in (D)$$

Donc (D) n'est autre que la droite (OA) .

- (Δ') est l'image de (OA) par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overline{BC}$ c'est-à-dire la perpendiculaire à (BC) passant par C .
- (Δ) est l'image de (OA) par $r_{\left(A, -\frac{\pi}{6}\right)}$ c'est-à-dire (BA) .

$$\text{Finalement } f = S_{\Delta'} \circ r_{\left(A, \frac{\pi}{3}\right)} = S_{\Delta'} \circ S_{(OA)} \circ S_{(OA)} \circ S_{(BA)} = S_{\Delta'} \circ S_{(BA)} = r_{\left(O, \frac{\pi}{3}\right)}$$

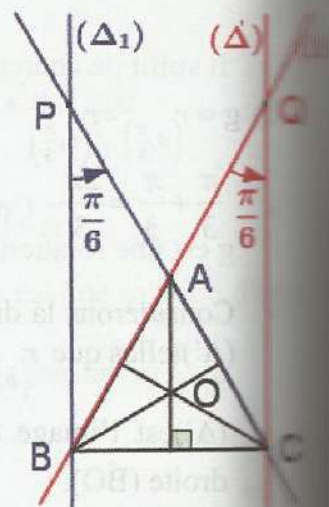
$$\text{b) } g = r_{\left(A, \frac{\pi}{3}\right)} \circ t_{\overline{BC}}$$

Déterminons (Δ_1) , (D') et (Δ'') telles que $r_{\left(A, \frac{\pi}{3}\right)} = S_{\Delta'} \circ S_{D'}$ et

$$t_{\overline{BC}} = S_{D'} \circ S_{\Delta_1}$$

- $A \in (D')$ et $\overline{BC}$ est un vecteur normal à (D') donc $(D') = (OA)$.
- (Δ_1) est l'image de (OA) par la translation $t_{\frac{1}{2}\overline{BC}}$ donc (Δ_1) est la perpendiculaire à (BC) passant par B .
- (Δ'') est l'image de (OA) par la rotation $r_{\left(A, \frac{\pi}{6}\right)}$ c'est-à-dire la droite (AC) .

$$\text{Finalement } g = S_{(AC)} \circ S_{(OA)} \circ S_{(OA)} \circ S_{\Delta_1} = S_{(AC)} \circ S_{\Delta_1} = r_{\left(P, \frac{\pi}{3}\right)}$$



Méthode

Soit t est une translation de vecteur $\vec{u}$ et r une rotation de centre O .

1) Pour déterminer le centre de $t \circ r$, on peut déterminer trois droites (Δ) , (D) et (Δ') que :

- $(\Delta') \parallel (D)$ et $(D) \cap (\Delta) = \{O\}$
- $t = S_{\Delta'} \circ S_D$ et $r = S_D \circ S_{\Delta}$.

Il est judicieux et important de commencer par la droite (D) : elle passe par O et a pour vecteur normal $\vec{u}$.

- $t \circ r = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ le centre de $t \circ r$ est le point d'intersection de (Δ) et (Δ') .

2) Pour $r \circ t$, procéder façon analogue pour déterminer son centre.

Exercice Résolu 1

Soit (C) un cercle. Soit A un point extérieur à (C) , P un point de (C) et B tel que ABP est un triangle équilatéral de sens direct.

Soit (Δ) la perpendiculaire à (AB) passant par A et M le point de (Δ) tel que $AB = AM$ et le triangle ABM est de sens direct.

Déterminer et construire le lieu des points M lorsque P décrit le cercle (C) .

Solution

Considérons les rotations $r_{\left(A, -\frac{\pi}{3}\right)}$ et $r'_{\left(A, \frac{\pi}{2}\right)}$.

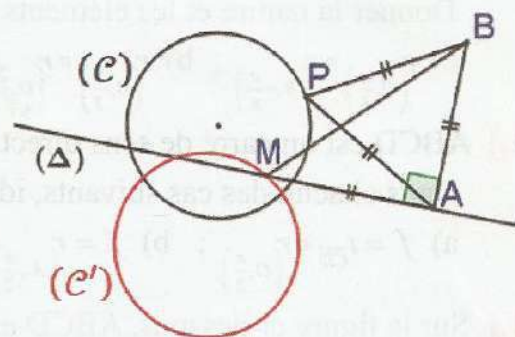
$$\left(r'_{\left(A, \frac{\pi}{2}\right)} \circ r_{\left(A, -\frac{\pi}{3}\right)}\right)(P) = r'_{\left(A, \frac{\pi}{2}\right)}(B) = M$$

Donc M est l'image de P par la rotation de centre A et d'angle

$$\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Lieu des points M lorsque P décrit le cercle (C) est le cercle

(C') image de (C) par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{6}$.



Exercice Résolu 2

Soit (Γ) un cercle de centre O. A et B deux points extérieurs à (Γ) . Soit M un point de (Γ) .

On considère le parallélogramme ABMP et le point N tel que APN soit un triangle équilatéral direct.

Déterminer le lieu géométrique des points N lorsque M décrit (Γ) .

Solution

Déterminons le lieu géométrique du point N lorsque M décrit (Γ)

Sur la figure ci contre les objets géométriques qui ne se déplacent sont les points A, B et le cercle (Γ) .

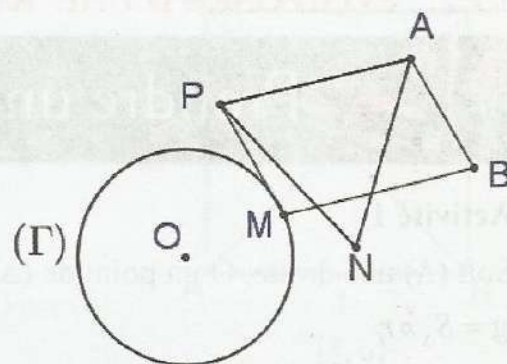
ABMP étant un parallélogramme, $\overline{MP} = \overline{BA}$ et quel que soit le mouvement effectué par le point M le vecteur

$\overline{MP}$ reste constant d'où $P = t_{\overline{BA}}(M)$. Par ailleurs

$$N = r_{\left(A, \frac{\pi}{3}\right)}(P) \text{ donc } N = r_{\left(A, \frac{\pi}{3}\right)} \circ t_{\overline{BA}}(M).$$

Le lieu des points N lorsque M décrit (Γ) est le cercle

(Γ') image de (Γ) par $r_{\left(A, \frac{\pi}{3}\right)} \circ t_{\overline{BA}}$.



S'exercer

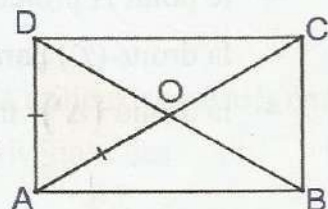
A et B sont deux points distincts du plan. Soit r et r' les rotations de centres A et B et d'angles de mesures $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{3\pi}{4}$ respectivement.

montrer que $r' \circ r$ est une rotation, puis construire son centre Ω .

Soit A et B deux points distincts du plan. Soit r et r' les rotations de centres respectifs A et B et d'angles de mesures $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$ respectivement

montrer que $r' \circ r$ est une translation, puis déterminer son vecteur d'origine A.

Sur la figure ci-contre, ABCD est un rectangle de sens direct et de centre O. Quel que $OA = AD$.



Donner la nature et les éléments caractéristiques les applications suivantes :

- a) $r_{(O, \frac{\pi}{6})} \circ r_{(B, -\frac{\pi}{6})}$; b) $r_{(B, \frac{\pi}{3})} \circ r_{(O, \frac{2\pi}{3})}$; c) $r_{(A, \frac{\pi}{3})} \circ r_{(O, -\frac{2\pi}{3})}$; d) $r_{(A, -\frac{\pi}{3})} \circ r_{(C, \frac{2\pi}{3})}$.

1.j ABCD est un carré de sens direct de centre O.

Dans chacun des cas suivants, identifier complètement la transformation f .

- a) $f = t_{\overline{CD}} \circ r_{(O, \frac{\pi}{2})}$; b) $f = r_{(A, \frac{\pi}{2})} \circ t_{\overline{CB}}$; c) $f = t_{\overline{CB}} \circ r_{(O, \frac{\pi}{2})}$; d) $f = s_{(BD)} \circ s_{(OC)} \circ t_{\overline{BD}}$.

1.j Sur la figure ci-dessous, ABCD est un quadrilatère convexe de sens direct.

On construit les triangles équilatéraux de sens directs AGB, BCF, CED et DAH.

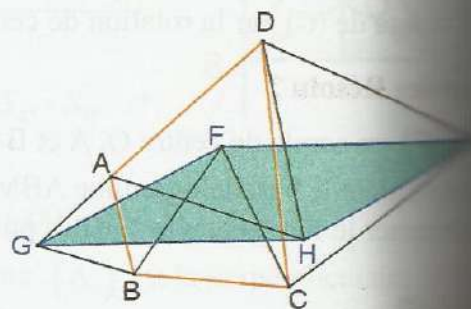
On considère les rotations :

- r de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.
- r' de centre C et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{3}$.

a) Montrer que $r' \circ r = t_{\overline{GF}}$.

b) Déterminer l'image de H par $r' \circ r$.

c) En déduire que le quadrilatère EFGH est un parallélogramme.



1.2.2 COMPOSÉE D'UNE ROTATION ET D'UNE SYMÉTRIE ORTHOGONALE



Prendre un bon départ

Activité 1

Soit (Δ) une droite, O un point de (Δ) . On considère les applications $f = r_{(O, \frac{\pi}{3})} \circ S_{\Delta}$ et $g = S_{\Delta} \circ r_{(O, \frac{\pi}{3})}$.

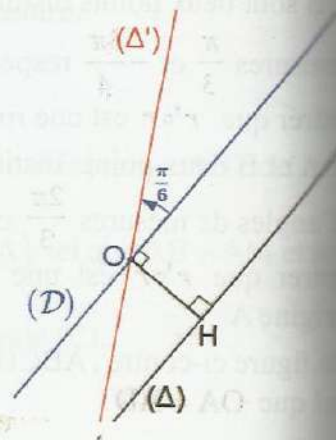
- Construire la droite (Δ') image de (Δ) par la rotation $r_{(O, \frac{\pi}{6})}$. Vérifier que $O \in (\Delta')$.
- Déterminer $S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)}$ et en déduire que $f = S_{(\Delta')}$.
- Construire la droite (Δ'') image de (Δ) par la rotation $r_{(O, -\frac{\pi}{6})}$. Vérifier que $O \in (\Delta'')$.
- Déterminer $S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta'')}$ puis en déduire que $g = S_{(\Delta')}$.

Activité 2

Soit (Δ) une droite, O un point n'appartenant pas à (Δ) et considérons l'application $r_{(O, \frac{\pi}{3})} \circ S_{\Delta}$.

On construit :

- le point H projeté orthogonal de O sur (Δ) ;
- la droite $(\mathcal{D})$ parallèle à (Δ) et passant par O ;
- la droite (Δ') image de $(\mathcal{D})$ par la rotation $r_{(O, \frac{\pi}{6})}$.



- Vérifier que $r_{(O, \frac{\pi}{3})} = S_{\Delta} \circ S_D$.
- Montrons que $r_{(O, \frac{\pi}{3})} \circ S_{\Delta} = S_{\Delta} \circ t_{2\overline{HO}}$.
- En déduire la nature de $r_{(O, \frac{\pi}{3})} \circ S_{\Delta}$.

Retenir

Soit (Δ) une droite, O un point du plan.

La composée d'une rotation de centre O et de la symétrie orthogonale d'axe (Δ) est :

- Une symétrie orthogonale si $O \in (\Delta)$.
- Une symétrie glissée si $O \notin (\Delta)$.

Exemple

ABCD est un carré de sens direct et de centre O. I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA]. Donnons la nature de $r_{(A, \frac{\pi}{2})} \circ S_{(AC)}$ et $r_{(O, \frac{\pi}{2})} \circ S_{(BC)}$.

$r_{(A, \frac{\pi}{2})} \circ S_{(AC)}$ est une symétrie orthogonale. En effet

$$r_{(A, \frac{\pi}{2})} = S_{(AD)} \circ S_{(AC)} \text{ donc}$$

$$r_{(A, \frac{\pi}{2})} \circ S_{(AC)} = S_{(AD)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(AC)} = S_{(AD)}.$$

$r_{(O, \frac{\pi}{2})} \circ S_{(BC)}$ est une symétrie glissée car $O \notin (BC)$.

On peut caractériser cette symétrie glissée.

J est le projeté orthogonal de O sur (BC) et la droite (IK) est parallèle à (BC); de plus, $r_{(O, \frac{\pi}{2})} = S_{(BD)} \circ S_{(IK)}$; donc

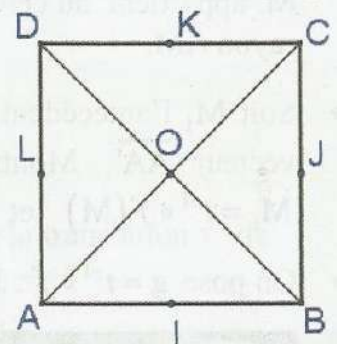
$$r_{(O, \frac{\pi}{2})} \circ S_{(BC)} = S_{(BD)} \circ S_{(IK)} \circ S_{(BC)} = S_{(BD)} \circ t_{2\overline{JO}} = S_{(BD)} \circ t_{\overline{BA}} = S_{(BD)} \circ t_{(\overline{BO} + \overline{OA})} = S_{(BD)} \circ t_{\overline{OA}} \circ t_{\overline{BO}}.$$

Comme $(OA) \perp (BD)$ posons alors $S_{\Delta} = S_{(BD)} \circ t_{\overline{OA}}$ on a $S_{(BD)} \circ S_{\Delta} = t_{\overline{OA}}$ d'où $(\Delta) = (IK)$.

Ainsi $r_{(O, \frac{\pi}{2})} \circ S_{(BC)} = S_{(JK)} \circ t_{\overline{BO}}$ est la symétrie glissée d'axe (JK) et de vecteur $\overline{BO}$.

On peut aussi avoir $r_{(O, \frac{\pi}{2})} \circ S_{(BC)} = S_{(OD)} \circ S_{(OK)} \circ S_{(BC)} = S_{(OD)} \circ t_{\overline{CD}}$ or $\overline{CD} = \overline{CO} + \overline{OD}$

$$\begin{aligned} &= S_{(OD)} \circ t_{\overline{CO}} \circ t_{\overline{OD}} = S_{(OD)} \circ S_{(OD)} \circ S_{(JK)} \circ t_{\overline{OD}} \\ &= S_{(JK)} \circ t_{\overline{OD}} \end{aligned}$$



S'exercer

Soit ABCD un carré tel que $\text{Mes}(\widehat{ABAD}) = \frac{\pi}{2}$. I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA]. Donner la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :

a) $S_{(BD)} \circ r_{\left(B, \frac{\pi}{2}\right)}$; b) $r_{\left(O, \frac{\pi}{2}\right)} \circ S_{(AB)}$; c) $S_{(BC)} \circ r_{\left(O, \frac{\pi}{2}\right)}$.

1.1 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Donner la nature et les éléments caractéristiques $f = r_{(\Omega, \theta)} \circ s_{\Delta}$ dans chacun des cas.

a) $\Omega(1;1)$; $\theta = \frac{\pi}{3}$ et $(\Delta) : 2x - y - 1 = 0$; b) $\Omega(1;1)$; $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $(\Delta) : x + y + 3 = 0$.

1.3. CLASSIFICATION DES ISOMÉTRIES DU PLAN

1.3.1 DÉCOMPOSITION D'UNE ISOMETRIE



Prendre un bon départ

Soit f une isométrie et A un point du plan.

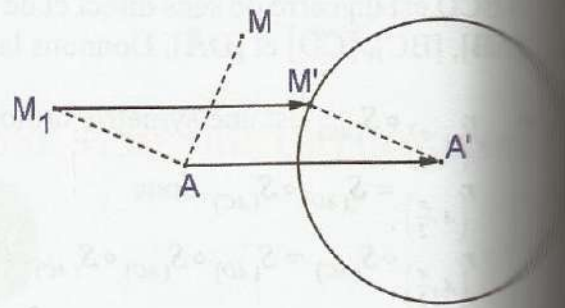
On note $A' = f(A)$.

- Justifier que pour tout point M du plan, son image M' appartient au cercle (C) de centre A' et de rayon AM .

- Soit M_1 l'antécédent M' par la translation t de vecteur $\overrightarrow{AA'}$. Montrer que :

$$M_1 = t^{-1} \circ f(M) \quad \text{et} \quad t^{-1} \circ f(A) = A.$$

- On pose $g = t^{-1} \circ f$. Montrer que g est une isométrie qui laisse invariant le point A .



Retenir

Soit f une isométrie plane et A un point. Alors il existe une unique translation t et une unique isométrie g du plan telles que $f = t \circ g$ et $g(A) = A$.

S'en Convaincre

L'existence de g est mise en évidence dans l'activité ci-dessus. Il reste à prouver l'unicité.

Supposons qu'il existe une translation t' et une isométrie g' telle que $f = t' \circ g'$ et $g'(A) = A$.

$$\text{On a } \left. \begin{array}{l} f(A) = t' \circ g'(A) = t'(A) \\ f(A) = t \circ g(A) = t(A) \end{array} \right\} \Rightarrow t'(A) = t(A) \text{ donc } t' = t \text{ et par conséquent } g = g'.$$

Exemple

Soit f une symétrie glissée de vecteur $\vec{u}$ et d'axe (Δ) et A un point du plan.

Déterminons une isométrie g et une translation t telles que $f = t \circ g$ avec $g(A) = A$.

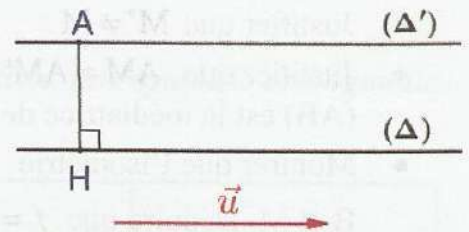
- Si $A \in (\Delta)$, alors on prend $t = t_{\vec{u}}$ et $g = S_{\Delta}$.
- Si $A \notin (\Delta)$ alors :

Soit H le projeté orthogonal de A sur (Δ) .

Soit (Δ') la parallèle à (Δ) passant par A.

On a : $S_{\Delta} \circ S_{\Delta'} = t_{2\overline{AH}}$ donc $S_{\Delta} = t_{2\overline{AH}} \circ S_{\Delta'}$.

$f = t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta} = (t_{\vec{u}} \circ t_{2\overline{AH}}) \circ S_{\Delta'}$, on peut alors prendre $t = t_{\vec{u}} \circ t_{2\overline{AH}}$ et $g = S_{\Delta'}$.



S'exercer

Exercice 1 Soit A un point du plan. Pour chacune des isométries f suivantes, déterminer une translation t et une isométrie g laissant invariant le point A telles que $f = t \circ g$.

- a) $f = t_{\vec{u}}$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$; b) S_{Δ} symétrie orthogonale d'axe (Δ) .

Exercice 2 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

f est une application du plan P dans lui-même dont l'expression analytique est suivante :

$$x' = \frac{1}{5}(3x + 4y + 4)$$

$$y' = \frac{1}{5}(-4x + 3y)$$

- Démontrer que f est une isométrie.
- Soit O' l'image de O par f . Déterminer l'expression analytique de la translation t de vecteur $\overline{OO'}$.
- Justifier que $t^{-1} \circ f$ est une isométrie qui laisse le point O invariant.

ISOMÉTRIES ET POINTS INVARIANTS



Prendre un bon départ

Exercice 1 Soit f une isométrie du plan.

Activité 1

On suppose qu'il existe trois points non alignés A, B et C invariants par f .

Soit M un point du plan et M' son image par f .

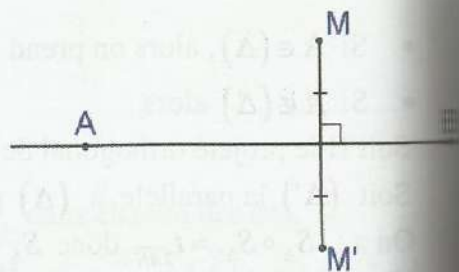
- Justifier que $AM = AM'$, $BM = BM'$ et $CM = CM'$.
- Montrer que si $M \neq M'$, alors les points A, B et C sont alignés.
- En déduire que $M = M'$, puis déterminer f .

Activité 2

On suppose que $f \neq \text{id}_P$ et il existe deux points A et B invariants par f .

Soit M un point du plan n'appartenant pas à la droite (AB) et M' son image par f .

- Justifier que $M' \neq M$.
- Justifier que $AM = AM'$ et $BM = BM'$. En déduire que (AB) est la médiatrice de $[MM']$.
- Montrer que l'isométrie $S_{(AB)} \circ f$ laisse invariants A , B et M . Déduire que $f = S_{(AB)}$.



Retenir

Soit f une isométrie du plan.

- (1) Si f laisse invariants **trois points non alignés** alors f est l'application **identique**.
- (2) Si f laisse invariants **deux points**, et n'est pas l'application identique alors f est une **symétrie orthogonale** d'axe passant par ces deux points.
- (3) Si f laisse invariant un **seul point**, alors f est une **rotation**, de centre ce point.
- (4) Si f n'admet pas **aucun point invariant** alors f est une **translation** ou une **symétrie glissée**.

S'en Convaincre

Les activités 1 et 2 ci-dessus aboutissent respectivement à la démonstration de (1) et de (2).
Démontrons (2) et (3).

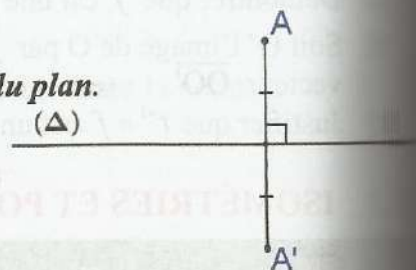
1)

Soit f une isométrie qui laisse invariant un seul point I du plan.

Montrons que f est une rotation de centre I .

Soit A un point du plan distinct de I . Notons A' l'image de A par f .

- $A' \neq A$ car f a un seul point invariant. Par ailleurs, $IA = IA'$; donc I appartient à la médiatrice (Δ) de $[AA']$.
- $(S_{\Delta} \circ f)(A) = S_{\Delta}(A') = A$ et $S_{\Delta} \circ f(I) = S_{\Delta}(I) = I$. $S_{\Delta} \circ f$ laisse invariant A et I c'est-à-dire que $S_{\Delta} \circ f = S_{(AI)}$ d'après (2).
- $S_{\Delta} \circ f = S_{(AI)} \Leftrightarrow f = S_{\Delta} \circ S_{(AI)}$ et $(\Delta) \cap (AI) = \{I\}$. f est une rotation de centre I .



2) **Soit f une isométrie n'admettant aucun point invariant.**

Soit A un point du plan. D'après le *retenir* 1.3.1, il existe une unique translation t et une unique isométrie g telle que $g(A) = A$ et $f = t \circ g$.

- g n'est pas une rotation car sinon f admet un point invariant donc A n'est pas le seul point invariant de g .
- D'après les propriétés (1) et (2), g est soit $\text{id}_{\mathcal{P}}$ soit une symétrie orthogonale.
 - Si $g = \text{id}_{\mathcal{P}}$ alors f est égale à la translation t .
 - Si g est une symétrie orthogonale alors f est une symétrie glissée.

Remarque

- Toute **isométrie** du plan est soit une translation, une rotation, une symétrie orthogonale ou une symétrie glissée

Nombre de points invariants	Trois points non alignés	Deux points distincts A et B	Un seul point A	Aucun point
Isométrie	Id_P	$S_{(AB)}$	Rotation de centre A	Translation ou symétrie glissée

- Toute isométrie est :

- soit une translation ;
- soit la composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation ;
- soit la composée d'une rotation et d'une translation.

Exemple

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$

telles que
$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \sqrt{3} \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 1 \end{cases}$$
 Déterminons la nature de f .

Soient M, N deux points du plan et M', N' leurs images respectives par f .

$$\begin{aligned} x_{M'} - x_M &= -\frac{1}{2}x_N - \frac{\sqrt{3}}{2}y_N + \sqrt{3} + \frac{1}{2}x_M + \frac{\sqrt{3}}{2}y_M - \sqrt{3} \\ &= -\frac{1}{2}(x_N - x_M) - \frac{\sqrt{3}}{2}(y_N - y_M) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{M'} - y_M &= -\frac{\sqrt{3}}{2}x_N + \frac{1}{2}y_N + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_M - \frac{1}{2}y_M - 1 \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}(x_N - x_M) + \frac{1}{2}(y_N - y_M) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MN'^2 &= \left(-\frac{1}{2}(x_N - x_M) - \frac{\sqrt{3}}{2}(y_N - y_M) \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}(x_N - x_M) + \frac{1}{2}(y_N - y_M) \right)^2 \\ &= (x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2 = MN^2 ; \text{ donc } f \text{ est une isométrie.} \end{aligned}$$

$$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \sqrt{3} \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \sqrt{3} = 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 1 = 0 \end{cases} ; \text{ en multipliant les membres de}$$

la deuxième équation par $\sqrt{3}$, on trouve que les deux équations du système sont équivalentes ; donc l'en

semble des points invariants par f est la droite (Δ) d'équation $-\frac{3}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \sqrt{3} = 0$
 $f = s_{\Delta}$.



S'exercer

1.o $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ définies par $\begin{cases} x' = 1 + y \\ y' = 1 - x \end{cases}$.

Montrer que f est une isométrie. En déduire sa nature et les éléments caractéristiques.

1.p Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ définies par $\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x + 1 \end{cases}$. Déterminer la nature de f et ses éléments caractéristiques.

1.q Soit D un point du plan.

Déterminer toutes les isométrie f du plan telles que $f(D) = D$.

1.3.3 DÉPLACEMENTS ET ANTIDÉPLACEMENTS



Prendre un bon départ

Activité 1

Dans le plan orienté on considère un angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Compléter le tableau ci-dessous par $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ ou $-(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Isométrie f	Translation	Rotation	Symétrie orthogonale	Symétrie glissée
Image de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ par f .				

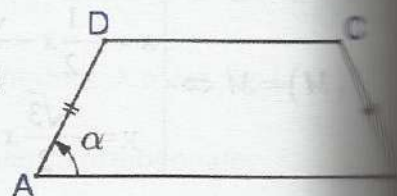
Activité 2

Sur la figure ci-contre, ABCD est un trapèze isocèle de sens direct tel que (AB) parallèle à (DC) .

1) Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{DC}$.

- Construire le point A' image de A par t .
- Démontrer que B est l'image de A' par la rotation de centre C et d'angle $\hat{\alpha}$.
- Déterminer alors une isométrie f qui conserve les angles orientés et telle que $f(A) = B$ et $f(D) = C$.

2) Déterminer une autre isométrie g distincte de f telle que $g(A) = B$ et $g(D) = C$. g conserve-t-elle les angles orientés ?





Retenir

Soit f une isométrie du plan

- Si f conserve les angles orientés, alors f est appelée **déplacement**.
- Si f transforme les angles orientés en leurs opposés alors f est appelée **antidéplacement**.

Toute isométrie est soit **un déplacement** soit **un antidéplacement**.

Isométrie	Avec point invariant	Sans point invariant
Déplacement	Rotation	Translation
Antidéplacement	Symétrie orthogonale	Symétrie glissée

Composée et réciproque de déplacements et d'antidéplacements.

Composée	Déplacement	Antidéplacement
Déplacement	Déplacement	Antidéplacement
Antidéplacement	Antidéplacement	Déplacement

- La réciproque d'un déplacement est un déplacement.
- La réciproque d'un antidéplacement est un antidéplacement.

Détermination d'une isométrie

Soit A, B, A' et B' des points du plan tels que $AB = A'B'$ et $A \neq B$. Alors :

- Il existe **un unique déplacement** qui transforme A en A' et B en B' .
- Il existe **un unique antidéplacement** qui transforme A en A' et B en B' .

Se convaincre

Soit A, B, A' et B' des points du plan tels que $AB = A'B'$ et $A \neq B$.

Existence et unicité d'un déplacement.

Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ et $C = t(B)$.

- $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BC}$ et donc le quadrilatère $AA'CB$ est un parallélogramme d'où $A'C = AB = A'B'$.

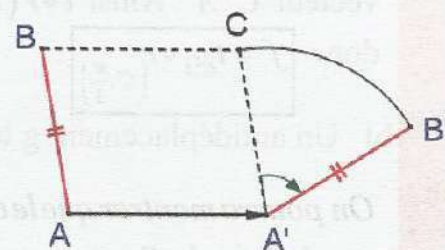
- De plus, $(\widehat{AB, A'B'}) = (\widehat{A'C, A'B'})$ car $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'C}$ et

donc B' est l'image de C par la rotation r de centre A' et d'angle $(\widehat{AB, A'B'})$.

- Posons $f = r \circ t$. On a $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$ et f est un déplacement car elle est la composée de deux déplacements.

Unicité : Supposons qu'il existe un autre déplacement g tel que $g(A) = A'$ et $g(B) = B'$

Alors $f^{-1} \circ g(A) = f^{-1}(A') = A$ et $f^{-1} \circ g(B) = f^{-1}(B') = B$; donc $f^{-1} \circ g$ est un



déplacement qui laisse invariants deux points distincts d'où $f^{-1} \circ g = \text{Id}_P$ c'est-à-dire $f = g$.

b) Existence et unicité d'un antidéplacement.

La symétrie orthogonale d'axe $(A'B')$ laisse invariants les points A' et B' .

Considérons la transformation $h = S_{(A'B')} \circ f$ où f est le déplacement déterminé en a). h est un antidéplacement car composée d'un déplacement et d'un antidéplacement.

$$h(A) = S_{(A'B')} \circ f(A) = A' \text{ et } h(B) = S_{(A'B')} \circ f(B) = B'.$$

Unicité : Supposons que k est un autre antidéplacement tel que $k(A) = A'$ et $k(B) = B'$.

Alors $(h^{-1} \circ k)(A) = A$ et $(h^{-1} \circ k)(B) = B$, donc $h^{-1} \circ k = \text{Id}_P$ car $h^{-1} \circ k$ est un déplacement d'où $k = h$.

Remarque

Soit A, B, A' et B' des points du plan tels que $AB = A'B'$ et $A \neq B$. Notons f le déplacement tel que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.

- Si $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ alors le déplacement f est une translation.
- Si $\overline{AB} \neq \overline{A'B'}$ alors le déplacement f est une rotation.

Exemple

ABC est un triangle équilatéral de sens direct. A', B' et C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

- a) Démontrons qu'il existe un déplacement f tel que $f(B) = B'$ et $f(C') = A$.

- f existe car $BC' = B'A$. De plus $\overline{BC'} \neq \overline{B'A}$; donc f est une rotation.
- Soit r la rotation de centre C' et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.

On a $r(B) = A'$. D'autre part $\overline{A'B'} = \overline{C'A}$ et donc B' est l'image de A' par la translation t de vecteur $\overline{C'A}$. Ainsi $t \circ r(B) = t(A') = B'$ et $t \circ r(C') = t(C') = A$. Le déplacement cherché est donc

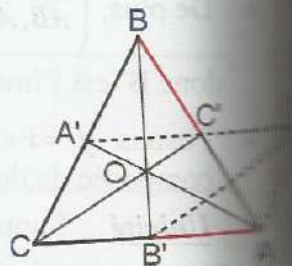
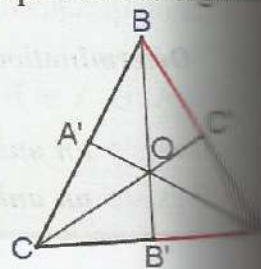
$$f = t_{\overline{C'A}} \circ r_{\left(C', \frac{\pi}{3}\right)}.$$

- b) Un antidéplacement g tel que $g(B) = B'$ et $g(C') = A$ est

$$g = S_{(AB')} \circ t_{\overline{C'A}} \circ r_{\left(C', \frac{\pi}{3}\right)}.$$

On pourra montrer que le centre D de f est le symétrique de A' par rapport à C' puis en déduire

$$\text{que } f = r_{\left(D, \frac{\pi}{3}\right)} \text{ et } g = S_{(AB')} \circ r_{\left(D, \frac{\pi}{3}\right)}.$$





S'exercer

Exercice 1 ABCD est un trapèze isocèle de sens direct tel que (AB) parallèle à (DC).

Démontrer qu'il existe un antidéplacement f et un déplacement g tels que :

a) $f(A) = C$ et $f(D) = B$; b) $g(A) = C$ et $g(D) = B$.

Exercice 2 ABC est un triangle équilatéral de sens direct. A' , B' et C' les milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB].

Déterminer un déplacement f et un antidéplacement g tels que :

a) $f(C) = B$ et $f(B') = A'$; b) $g(C) = B$ et $g(B') = A'$.

Exercice 3 Soit A et B deux points distincts, r une rotation d'angle $\hat{\alpha}$ avec $\alpha \neq k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

On pose $r(A) = C$ et $r(B) = D$. Montrer qu'il existe un unique déplacement d qui transforme A en D et B en C.

LEÇON 2 SIMILITUDES DIRECTES DU PLAN.

- Reconnaître une similitude, puis sa classification.
- Caractériser par une écriture complexe une similitude directe du plan ;
- Donner les éléments caractéristiques d'une similitude directe du plan.

2.1. GÉNÉRALITÉS SUR LES SIMILITUDES PLANES.



Prendre un bon départ

Activité 1

ABC est un triangle équilatéral de centre de gravité O. A', B' et C' les milieux respectifs des côtés [BC], [AC] et [AB].

Démontrer que : $\frac{OC}{AB} = \frac{OA'}{AB'} = \frac{A'C}{BB'}$.

Activité 2

Soit h une homothétie de rapport k et f une isométrie plane. A et B deux points distincts du plan.

- On pose $A_1 = f(A)$ et $B_1 = f(B)$, puis $A' = h(A_1)$ et $B' = h(B_1)$.

Montrer que $A'B' = |k|AB$.

- On pose $A_1 = h(A)$ et $B_1 = h(B)$, puis $A' = f(A_1)$ et $B' = f(B_1)$.

Montrer que $A'B' = |k|AB$.

- Montrer que si l'isométrie f est un déplacement alors $h \circ f$ et $f \circ h$ conservent les angles orientés.
- Montrer que si $k \in \{-1; 1\}$ alors $h \circ f$ et $f \circ h$ sont des isométries.



Retenir

(1) Soit k un nombre réel *strictement positif*.

On appelle **similitude de rapport k** toute application du plan dans lui-même telle que pour deux points M et N d'images M' et N', on ait $M'N' = kMN$.

(2) Toute similitude est **la composée** d'une **isométrie** et d'une **homothétie**.

- La composée d'une homothétie et d'un **déplacement** est appelée **similitude directe**.
- La composée d'une homothétie et d'un **antidépacement** est appelée **similitude indirecte**.

(3) **Propriétés de conservation et de proportionnalité**

Toute similitude conserve :

- L'alignement des points,

Toute similitude transforme :

- Les droites en droites

- Le parallélisme des droites,
- L'orthogonalité,
- La mesure des angles non orientés
- Le barycentre des points pondérés

- Les demi-droites en demi-droites.
- Les segments en segments
- Les cercles en cercles

Toute similitude de rapport k multiplie

- Les longueurs par k .
- Les aires par k^2 .

Exemple

- Toute **isométrie** est une similitude de **rapport 1**.
- Toute **homothétie** de rapport k est une similitude de **rapport $|k|$** .
- La composée d'une isométrie et d'une homothétie de rapport k est une similitude de **rapport $|k|$** .
- Toute homothétie, toute translation, toute rotation est une similitude directe.
- Toute symétrie orthogonale glissée, est une similitude indirecte.

S'exercer

Sur la figure ci-contre ABC et EFG sont deux triangles semblables. On peut alors écrire

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

a) Construire le point :

- $E \in [A'B']$ tel que $A'E = AB$.
- $F \in [A'C']$ tel que $A'F = AC$.

b) Justifier que les triangles ABC et A'EF sont isométriques.

c) On pose $k = \frac{AB}{A'B'}$, justifier que A'B'C' est l'image de A'EF par une homothétie h .

d) En déduire qu'il existe une similitude S qui transforme A en A', B en B' et C en C'.

e) A et B sont deux points tels que : $AB = 7$; σ est la symétrie de centre A et h est l'homothétie de centre B et de rapport -3 . On pose : $f = h \circ \sigma$; $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$. Déterminer A'B'.

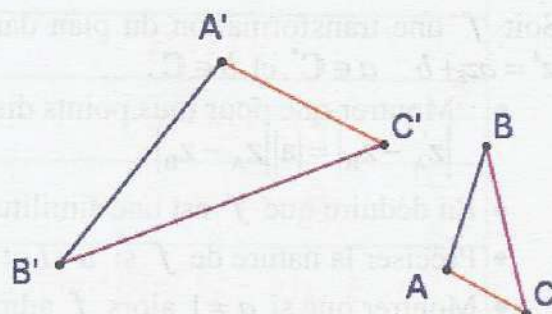
f) Recopier et compléter l tableau suivant par "similitude directe" ou "similitude indirecte" :

	Identité	Réflexion	Translation	Rotation
Homothétie				

g) Soit S une similitude admettant trois points fixes A, B et C.

a) Démontrer que le rapport de la similitude S est 1.

b) En déduire que S est une isométrie et que S est l'identité.



1.e Soit S une similitude admettant deux points invariants A et B .

- Démontrer que le rapport de la similitude S est 1.
- En déduire que S est la symétrie orthogonale d'axe (AB) .

2.2. SIMILITUDES DIRECTES DU PLAN

2.2.1 ÉCRITURES COMPLEXES DES SIMILITUDES DIRECTES DU PLAN



Prendre un bon départ

Activité 1

Soit S une similitude directe, alors $S = h \circ d$ où h est une homothétie et d un déplacement.

L'expression complexe de h est : $z' = kz + b$ avec $k \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

L'expression complexe de d est : $z' = e^{i\alpha}z + c$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $c \in \mathbb{C}$ si d est une rotation d'angle α .

- Montrer que l'expression complexe de S est sous la forme : $z' = az + p$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $p \in \mathbb{C}$.
- Déterminer l'expression complexe de $d \circ h$.

Activité 2

Soit f une transformation du plan dans lui-même dont l'expression complexe est sous la forme $z' = az + b$, $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

- Montrer que pour tous points distincts A et B d'affixes respectives z_A et z_B , on a $|z'_A - z'_B| = |a||z_A - z_B|$.
- En déduire que f est une similitude de rapport $k = |a|$.
- Préciser la nature de f si $a = 1$ et l'élément caractéristique de f .
- Montrer que si $a \neq 1$ alors f admet un seul point invariant Ω dont on exprimera l'affixe en fonction de a et de b .
 - Soit α un argument de a . Montrer que $z' - \omega = |a|e^{i\alpha}(z - \omega)$.
 - En déduire que $f = h \circ r = r \circ h$ où h est l'homothétie de centre Ω et de rapport $k = |a|$ et r est la rotation de centre Ω et d'angle α .



Retenir

- Toute similitude **directe** du plan a une écriture de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.
- Toute application S du plan dans lui-même dont l'écriture complexe est de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ est une **similitude directe** du plan.
 - Si $a = 1$, alors S est **une translation** de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b .
 - Si $|a| \neq 1$ alors :
 - S admet **un seul point invariant** Ω qui a pour affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$.

- $S = h \circ r = r \circ h$ où r est la rotation de centre Ω et d'angle de mesure $\alpha = \arg a$ et h est l'homothétie de centre Ω et de rapport $k = |a|$

Notation et Vocabulaire

Soit S une similitude directe.

- Si S admet un point invariant Ω alors l'écriture de S sous la forme $S = h \circ r = r \circ h$ est appelée **forme réduite** de S .
- S est appelée similitude directe de centre Ω , de rapport $|k|$ et d'angle de mesure α avec $\hat{\alpha}$ l'angle de la rotation r et k le rapport de l'homothétie h .
- On la note souvent $S_{(\Omega, |k|, \alpha)}$.
- Si S n'admet pas de point invariant, alors la translation S est appelée **similitude de rapport 1 et d'angle nul**.

Remarque

- Toute similitude directe conserve les angles orientés.
- Traduction de S à l'aide de la forme réduite

Nature exacte de S	Écriture complexe réduite
La translation de vecteur non $\vec{u}$ d'affixe b	$z' = z + b$
L'homothétie de centre Ω et de rapport k	$z' - \omega = k(z - \omega)$
La rotation de centre Ω et d'angle α	$z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$
La similitude directe de centre Ω , d'angle α et de rapport $ k $	$z' - \omega = k e^{i\alpha}(z - \omega)$ si $k > 0$
	$z' - \omega = k e^{i(\alpha+\pi)}(z - \omega)$ si $k < 0$

Exemple

- 1) Déterminons une expression complexe de la similitude directe f de centre $\Omega(1 ; 2)$, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport 3.

- 2) f a une écriture complexe de la forme : $z' = az + b$ où a et b sont deux complexes à déterminer.

Les module et argument de a sont respectivement le rapport 3 et l'angle $\frac{\pi}{2}$ de la similitude.

Donc $a = 3e^{i\frac{\pi}{2}} = 3i$.

- 3) Ω étant le centre de f , et ω l'affixe de Ω on a :

$$f(\Omega) = \Omega \Leftrightarrow 3i\omega + b = \omega \Leftrightarrow 3i \cdot (1 + 2i) + b = 1 + 2i \Leftrightarrow 3i - 6 + b = 1 + 2i \Leftrightarrow b = 7 - i$$

Finalement, l'écriture complexe de la similitude directe f est : $z' = 3iz + 7 - i$.

- 4) Déterminons les éléments caractéristiques de la similitude directe g de forme complexe

$$z' = (1 + i\sqrt{3})z + 2 - i.$$

- Rapport et angle: $|1 + i\sqrt{3}| = 2$, $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

Ainsi, une mesure de l'angle de g est $\frac{\pi}{3}$ et son rapport 2.

- Soit ω l'affixe du centre de g . On a :

$$g(\omega) = \omega \Leftrightarrow \omega[1 - (1 + i\sqrt{3})] = 2 - i \Leftrightarrow \omega = \frac{2 - i}{-i\sqrt{3}} = \frac{i(2 - i)}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} + i\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Ainsi g est la similitude directe de centre $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ de rapport 2 et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.

Exercice Résolu

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$

$$\text{que : } \begin{cases} x' = -x + y\sqrt{3} - \sqrt{3} \\ y' = -x\sqrt{3} - y + 2\sqrt{3} \end{cases}$$

- Déterminer l'écriture complexe de f .
- En déduire que f est une similitude directe.

Solution

- Écriture complexe de f .

Notons z et z' les affixes de M et M' respectivement.

$$\begin{aligned} z' = x' + iy' &= -x + y\sqrt{3} - \sqrt{3} + i(-x\sqrt{3} - y + 2\sqrt{3}) \\ &= (-x - iy) + (y\sqrt{3} - xi\sqrt{3}) - \sqrt{3} + 2i\sqrt{3} \\ &= -(x + iy) + (-i^2 y\sqrt{3} - xi\sqrt{3}) - \sqrt{3} + 2i\sqrt{3} \text{ car } -i^2 = 1 \\ &= -(x + iy) - i\sqrt{3}(x + iy) - \sqrt{3} + 2i\sqrt{3} \\ &= (-1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} + 2i\sqrt{3} \end{aligned}$$

- f a une écriture complexe de la forme $z' = az + b$. Donc f est une similitude directe.

Méthode

En général, pour déterminer l'écriture complexe d'une application affine dont on connaît

l'expression analytique, on peut utiliser les formules complexes ci-dessous : $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$

$$y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$



S'exercer

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est un repère orthonormé direct du plan.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes du plan définies par leurs expressions complexes.

a) $z' = -2z + 3 - 2i$; b) $z' = \frac{\sqrt{3}}{2}z + 2i - 2$; c) $z' = z - \frac{2}{3} + \frac{4}{5}i$;

d) $z' = (2 - 2i)z + 3i$; e) $z' = -\left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}\right)z + 1 + i$; f) $z' = -3e^{i\frac{\pi}{3}}z + 3 - 6i$.

Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe de centre Ω , de rapport k et d'angle de mesure α .

a) $\Omega(2, -1)$; $k = \frac{2}{3}$ et $\alpha = \frac{\pi}{3}$; b) $\Omega(1, -2)$; $k = 1$ et $\alpha = \frac{\pi}{4}$;

c) $\Omega(0, -1)$; $k = 2$ et $\alpha = -\frac{2\pi}{3}$; d) $\Omega(1, 1)$; $k = \sqrt{2}$ et $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe $S = r \circ h$ où r est la rotation de centre Ω et d'angle α , h l'homothétie de rapport k et de centre Ω .

a) $\Omega(2, -1)$; $k = -\frac{2}{3}$ et $\alpha = \frac{\pi}{3}$; b) $\Omega(1, -2)$; $k = -1$ et $\alpha = \frac{\pi}{4}$;

c) $\Omega(0, -1)$; $k = 2$ et $\alpha = \frac{2\pi}{3}$; d) $\Omega(1, 1)$; $k = -\sqrt{2}$ et $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$;

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$

tel que :
$$\begin{cases} x' = x + y - 2 \\ y' = -x + y + 1 \end{cases}$$

Déterminer l'écriture complexe de f .

En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f .

COMPOSÉE DE SIMILITUDES DIRECTES – BIJECTION RÉCIPROQUE D'UNE SIMILITUDE DIRECTE



Prendre un bon départ

Soient S et S' deux similitudes directes d'écriture complexes respectives $z' = ke^{i\alpha}z + b$ et $z'' = k'e^{i\alpha'}z + b'$.

Montrer que $S' \circ S$ a pour écriture complexe $z'' = k'ke^{i(\alpha'+\alpha)}z + (k'be^{i\alpha'} + b')$.

Conclure que $S' \circ S$ est une similitude directe de rapport kk' et d'angle de mesure $\alpha + \alpha'$.

Montrer que pour tout point $M(z)$ d'image $M'(z')$ par S , $z = \frac{1}{k}e^{-i\alpha}z' - \frac{b}{k}e^{-i\alpha}$.

Conclure que S^{-1} est une similitude directe de rapport $\frac{1}{k}$ et d'angle de mesure $-\alpha$.



Retenir

Soit S une similitude plane directe de rapport k et d'angle de mesure α , S' une similitude plane directe de rapport k' et d'angle de mesure α' .

- La bijection **réciroque** de la similitude S est une similitude plane directe de rapport $\frac{1}{k}$ et d'angle de mesure $-\alpha$.
- La **composée** $S' \circ S$ est une similitude plane directe de rapport kk' et d'angle de mesure $\alpha + \alpha'$.
 - Si $\alpha + \alpha' \equiv 0[2\pi]$ et $kk' \neq 1$ alors $S' \circ S$ est une homothétie de rapport kk' .
 - Si $kk' = 1$ alors $S' \circ S$ est une translation ou une rotation.

Exemple

Soient S et S' les similitudes planes directes d'expressions complexes

$$z' = -\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}z + 2i \text{ et } z' = 2e^{i\frac{\pi}{6}}z + 1 - i \text{ respectivement.}$$

- **Déterminons le rapport et une mesure de l'angle de S^{-1} .**

$$-\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i\pi}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \text{ car } -1 = e^{i\pi}.$$

Donc $M' = S(M) \Leftrightarrow z' = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}z + 2i$. S^{-1} est donc la similitude directe de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle de mesure $-\frac{3\pi}{4}$.

- **Déterminons le rapport et une mesure de l'angle de $S' \circ S$.**

Le rapport de $S' \circ S$ est $2\sqrt{2}$ et une mesure de son angle est $\theta = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{12}$.

- **Comparons $S' \circ S$ et $S \circ S'$.**

Déterminons leurs écritures complexes :

Cas de $S' \circ S$

$$z' = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \left(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}z + 2i \right) + 1 - i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}z + 4i \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) + 1 - i. \text{ soit}$$

$$z' = 2\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}z - 1 + i(2\sqrt{3} - 1).$$

Cas de $S \circ S'$:

$$\begin{aligned} z' &= \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}z + 1 - i \right) + 2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}z + \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) (1 - i) + 2i \\ &= 2\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}z + \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2} + i \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right) \right) + 2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}z + \left[\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} + i \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6} + 4}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

$S' \circ S \neq S \circ S'$.



S'exercer

222 Soit S et S' les similitudes directes d'expressions complexes respectives $z' = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}z + 2i$ et $z' = 3e^{i\frac{\pi}{6}}z - 4 + i$.

- Déterminer les éléments caractéristiques de S^{-1} .
- Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de $S \circ S'$.
- Comparer $S \circ S'$ et $S' \circ S$.

223 CARACTÉRISATION GÉOMÉTRIQUE D'UNE SIMILITUDE DIRECTE PLANE



Prendre un bon départ

Activité 1

Soit $S = h \circ d$ une similitude directe de rapport $k > 0$, h étant une homothétie et d un déplacement.

Soient A et B deux points distincts du plan. On note $A' = S(A)$ et $S(B) = B'$. Montrer que :

- Si d est une translation, alors $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \hat{0}$.
- Si d est une rotation d'angle $\hat{\theta}$ alors $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \hat{\theta}$.
- En déduire qu'il existe un nombre réel α tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \hat{\alpha}$.

Activité 2

Soit f une transformation du plan, $k \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tels que pour tous points distincts A et B images respectives A' et B' par f , on a $A'B' = kAB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \hat{\alpha}$.

Soit S la similitude directe de rapport k et d'angle $\hat{\alpha}$. On note $A_1 = S^{-1}(A')$ et $B_1 = S^{-1}(B')$.

- Justifier que $A_1B_1 = \frac{1}{k}A'B'$ et $\text{mes}(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A_1B_1}) = -\alpha$.
- Montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$.
- Vérifier que $A_1 = (S^{-1} \circ f)(A)$ et $B_1 = (S^{-1} \circ f)(B)$ et en déduire que $S^{-1} \circ f$ est une translation qu'on notera t .
- Montrer que f est une similitude directe plane.



Retenir

Soit f une application du plan dans lui-même, $k \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. f est une similitude directe de rapport k et d'angle α si et seulement si pour tous points M et N d'images respectives M' et N'

$$M'N' = kMN \text{ et } \text{mes}(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = \alpha$$

Remarque

- Soit S une similitude directe de centre Ω d'affixe ω , de rapport $k > 0$ et d'angle de mesure α . Soit M un point d'affixe z et M' d'affixe z'
- $M' = S(M) \Leftrightarrow z' - \omega = ke^{i\alpha}(z - \omega) \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = k\Omega M \\ \text{mes}(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha \end{cases}$

Note: $z' - \omega = ke^{i\alpha}(z - \omega)$ est l'écriture exponentielle de S

Exemple

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$

$$\text{tel que } \begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$$

Démontrons que f est une similitude directe dont on donnera le rapport et le centre.

- **Nature et rapport**

Soit $M(x, y)$, $N(a, b)$ deux points du plan et $M'(x', y')$, $N'(a', b')$ leurs images respectives par f .

$$a' - x' = a - b + 1 - x + y - 1 = (a - x) - (b - y)$$

$$b' - y' = a + b - 1 - x - y + 1 = (a - x) + (b - y)$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } M'N'^2 &= ((a - x) - (b - y))^2 + ((a - x) + (b - y))^2 \\ &= 2[(a - x)^2 + (b - y)^2] = 2MN^2 \end{aligned}$$

Ainsi $M'N' = \sqrt{2}MN$ donc f est une similitude de rapport $\sqrt{2}$.

- **Centre**

$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = x - y + 1 \\ y = x + y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$; f a le seul point $\Omega(1; 1)$ invariant. Donc $\Omega(1; 1)$ est le centre de la similitude f .

- **Angle**

Soit $O' = f(O) = O'(1; -1)$, on a $\overrightarrow{O'\Omega}(0; 2)$ et $\cos(\overrightarrow{O'\Omega}, \overrightarrow{O'\Omega'}) = \frac{\overrightarrow{O'\Omega} \cdot \overrightarrow{O'\Omega'}}{O'\Omega \times O'\Omega'} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\sin(\overrightarrow{O'\Omega}, \overrightarrow{O'\Omega'}) = \frac{\det(\overrightarrow{O'\Omega}, \overrightarrow{O'\Omega'})}{O'\Omega \times O'\Omega'} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Ainsi, } \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ radian.}$$

Note: On peut chercher l'écriture complexe de f afin de répondre aux questions posées

**S'exercer**

2.f Soit S une similitude de centre Ω , de rapport k et d'angle de mesure α .

Soit M un point et M' son image par S , montrer que :

- Si $k = \sqrt{2}$ et $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ alors $\Omega MM'$ est un triangle rectangle isocèle en M de sens direct.
- Si $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$ et N le symétrique de M par rapport à la droite $(\Omega M')$ alors ΩMN est un triangle équilatéral de sens direct.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

12 Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$

$$\text{définies par } \begin{cases} x' = 2x + 3 \\ y' = 2y + 1 \end{cases}$$

Déterminer la nature et l'élément caractéristique de f .

13 Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$

$$\text{définies par } \begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y \end{cases}$$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .

DÉTERMINATION DES SIMILITUDES DIRECTES- UTILISATIONS DANS LA RÉOLUTION DES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE

Prendre un bon départ

Unité 1

Soient Ω, A et A' trois points du plan tels que $A \neq \Omega$ et $A' \neq \Omega$.

Détermination d'une similitude directe de centre Ω qui transforme A en A' .

On pose $k = \frac{\Omega A'}{\Omega A}$, $\alpha = \text{mes}(\widehat{\Omega A, \Omega A'})$. On considère la similitude directe S de centre Ω , de rapport k et d'angle de mesure α .

- Vérifier que $S(\Omega) = \Omega$.
- Soit $B = S(A)$. Montrer que $\Omega B = \Omega A'$ et $\widehat{\Omega A, \Omega B} = \hat{\alpha}$.
- En déduire que $A' = B = S(A)$.
- En remarquant que $S = h(\Omega, k) \circ r(\Omega, \alpha)$, justifier que S est unique.

Unité 2

Soient $k \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$, A et A' deux points du plan.

Détermination d'une similitude directe de rapport k et d'angle de mesure α qui transforme A en A' .

Considérons la transformation du plan qui à tout point $M(z)$, associe le point $M'(z')$ tel que $z' = kz + b$.

- Déterminer b pour que A' soit l'image de A .
- En déduire que l'unique similitude directe de rapport k et d'angle de mesure α qui transforme A et A' est $S : M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = ke^{i\alpha}(z - z_A) + z_A$.



Retenir

- (1) Soit Ω , A et A' trois points du plan tels que $A \neq \Omega$ et $A' \neq \Omega$.

Il existe une unique similitude directe plane de centre Ω qui transforme A en A' .

- (2) Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$, A et A' deux points du plan.

Il existe une unique similitude directe plane de rapport k et d'angle α qui transforme A en A' .

- (3) Soit A, B, A' et B' quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$.

Il existe une unique similitude directe plane qui transforme A en A' et B en B' .

S'en Convaincre

Soit A, B, A' et B' quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont tous non nuls.

Posons $k = \frac{A'B'}{AB}$ et $\alpha = \text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$.

D'après (2), il existe une seule similitude S de rapport k et d'angle de mesure α qui transforme A en A' . Soit $C = S(B)$, d'après la propriété caractéristique on a : $A'C = kAB$ et $\text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C}) = \alpha$.

On a donc : $A'C = kAB = A'B'$ et $\text{mes}(\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{A'B'}) = \text{mes}(\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{AB}) + \text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = -\alpha + \alpha = 0$.

$\left. \begin{array}{l} A'C = A'B' \\ \text{mes}(\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{A'B'}) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{A'B'} \Leftrightarrow C = B'$. Ainsi $B' = S(B)$ et S transforme B en B' .

Exemple

ABC est un triangle rectangle isocèle en A et de sens direct. D est le symétrique de A par rapport à BC .

- a) Déterminons le rapport et une mesure de l'angle de la similitude directe S qui transforme A en C et C en B .

$$\left. \begin{array}{l} S(D) = C \\ S(C) = B \end{array} \right\} \Rightarrow k = \frac{CB}{DC} \text{ et } \text{mes}(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{4}.$$

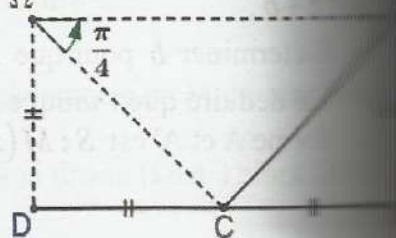
$$CB^2 = 2CA^2 = 2DC^2; \text{ donc } CB = DC\sqrt{2}; \text{ soit } k = \sqrt{2}.$$

- b) Construisons le centre Ω de S .

$$S(D) = C \Rightarrow \Omega C = \sqrt{2}\Omega D \text{ et } \text{mes}(\overrightarrow{\Omega D}, \overrightarrow{\Omega C}) = \frac{\pi}{4}; \frac{\Omega D}{\Omega C} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4}; \Omega DC \text{ est un}$$

triangle rectangle ayant un angle de mesure $\frac{\pi}{4}$ dont l'hypoténuse est $[\Omega C]$ et un côté de l'angle droit est $[\Omega D]$. Il

est donc rectangle isocèle en D et est de sens direct.



Méthode

Éléments caractéristiques de S dans le cas (3).

a) Les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles

- Si $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ alors S est la translation de vecteur $\overline{AA'}$.

- Si $\overline{AB} \neq \overline{A'B'}$ alors S est une homothétie de rapport $\frac{A'B'}{AB}$.

- Le centre Ω de S est le point d'intersection de (AA') et (BB') si $(AA') \neq (BB')$.

- Si les droites (AA') et (BB') sont confondues alors $\Omega \in (AA')$.

b) Les droites (AB) et $(A'B')$ sont sécantes en un point P .

Dans ce cas, S n'est ni une translation, ni une homothétie. Son

rapport est $k = \frac{A'B'}{AB}$ et son angle $\alpha = \text{mes}(\widehat{AB, A'B'})$. Son

centre Ω étant invariant, on a : $(\widehat{\Omega A, \Omega A'}) = (\widehat{\Omega B, \Omega B'}) = (\widehat{AB, A'B'})$.

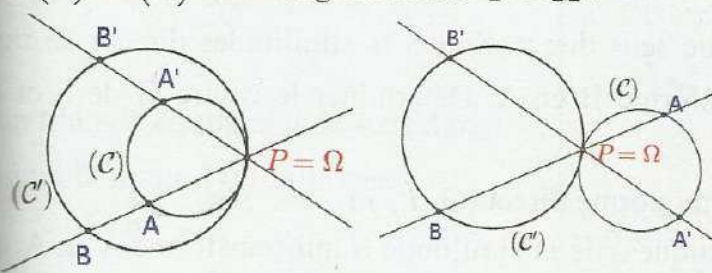
Si P est distinct de chacun des points A, B, A' et B' , alors les points P, A et B sont alignés. Il en est de même des points P, A' et B' .

Donc $2(\widehat{AB, A'B'}) = 2\text{mes}(\widehat{PA, PA'}) = 2\text{mes}(\widehat{PB, PB'})$ et par conséquent $2(\widehat{\Omega A, \Omega A'}) = 2(\widehat{PA, PA'})$

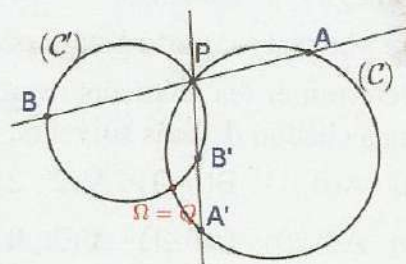
et $2(\widehat{\Omega B, \Omega B'}) = 2(\widehat{PB, PB'})$.

Ainsi, Ω appartient aux cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ respectivement circonscrits aux triangles PAA' et PBB' .

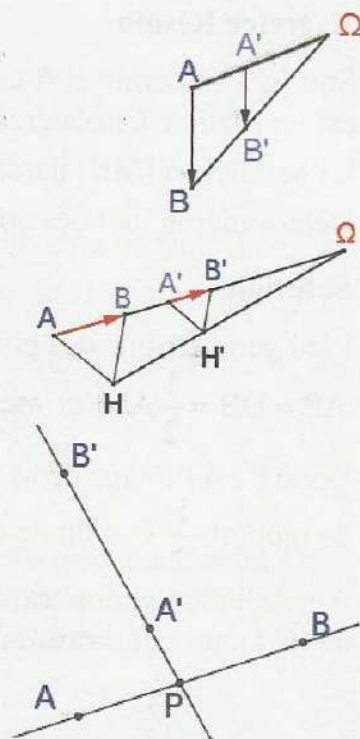
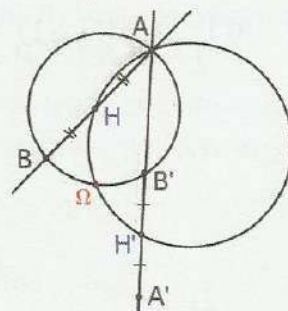
- Si $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ sont tangents alors $P = \Omega$.



Si $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ sont sécants en P et Q alors $\Omega = Q$.



Supposons que P est l'un des points A, B, A' ou B' . Par exemple pour $P = A$, on a la configuration ci-contre.



Exercice Résolu

Soit (C) un cercle et A un point extérieur à (C) . Soit M un point et B le point du plan tel que AMB est un triangle équilatéral de sens direct. On note D le milieu $[MB]$.

La parallèle à (MB) passant par A et la parallèle à (AD) passant par B se coupent en P .

Déterminer le lieu des points P lorsque M décrit le cercle (C) .

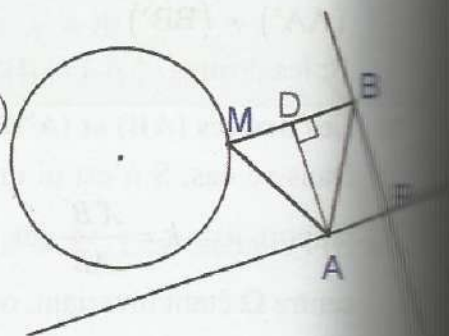
Solution

Lieu géométrique des points P lorsque M décrit le cercle (C) .

$$AP = DB = \frac{1}{2} AM \text{ et } \text{mes}\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AP}\right) = -\frac{2\pi}{3}$$

Donc P est l'image de M par la similitude directe de centre A (C) de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle de mesure $-\frac{2\pi}{3}$.

Ainsi, le lieu géométrique cherché est le cercle (C') image de (C) par cette similitude.

**S'exercer**

2.i ABCD est un carré de côté 1 et de sens direct, I le milieu de $[CD]$.

Déterminer la similitude directe S telle que $S(I) = B$ et $S(D) = C$.

2.j Soit (C) un cercle de centre O et A un point de (C) . Soit M un point de (C) . On considère un point P tel que $AMNP$ soit un carré de sens direct.

Déterminer le lieu du centre H de ce carré lorsque M décrit le cercle (C) .

2.k Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct. Soit S la similitude directe de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{3}$ qui transforme B en A . Déterminer le centre Ω de S et l'image C' de C par S .

2.l Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude S qui transforme A en A' et B en B' dans chacun des cas suivants;

a) $A(0, 1)$ $B(0, 3)$ $A'(2, 2)$ et $B'(-1, -1)$.

b) $A(1, 0)$ $B(0, 1)$ $A'(3, 0)$ et $B'(0, 3)$.

c) $A(1, 2)$ $B(3, -1)$ $A'(0, -3)$ et $B'(1, 1)$.

S'ENTRAÎNER

ISOMÉTRIES DU PLAN

ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre O.

Déterminer les transformations suivantes :

a) $s_{(AC)} \circ s_{(AB)}$; b) $s_{(OC)} \circ s_{(BO)}$;

ABCD est un carré de sens direct de centre O. I, J et L sont les milieux respectifs de [AB], [BC] et [DA].

Dans chacun des cas suivants, donner la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f.

a) $f = s_{(ID)} \circ s_{(AC)}$; c) $f = s_{(AB)} \circ s_{(AO)}$;

b) $f = s_{(AC)} \circ s_{(IJ)}$; d) $f = s_{(LJ)} \circ s_{(AB)}$.

ABCD est un rectangle de sens direct.

Déterminer les droites (Δ) et (Δ') tels que :

a) $s_{(AD)} = s_{(Δ)} \circ s_{(Δ')}$; b) $t_{\overline{AD}} = s_{(AB)}$.

ABC est un triangle équilatéral de sens direct.

Déterminer la droite (Δ) telle que

$s_{(Δ)} = s_{(Δ)} \circ s_{(AB)}$.

Déterminer la droite (Δ') telle que

$s_{(Δ')} = s_{(AB)} \circ s_{(Δ')}$.

Déduire la nature et les éléments caractéristiques la transformation $f = r_{(A, \frac{2\pi}{3})} \circ r_{(B, \frac{2\pi}{3})}$.

ABCD est un carré de sens direct de centre O.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques

des applications $t_{\overline{AC}} \circ r_{(A, \frac{\pi}{2})}$ et $s_C \circ t_{\overline{AC}} \circ r_{(A, \frac{\pi}{2})}$.

6.

ABC est un triangle équilatéral de sens direct.

Donner la forme réduite de l'application $f =$

$r_{(C, \frac{\pi}{3})} \circ t_{\overline{BC}} \circ r_{(B, \frac{\pi}{2})}$ et en déduire sa nature et ses éléments caractéristiques.

7.

ABCD est un carré de sens direct de centre O.

Dans chacun des cas suivants, donner la nature et les éléments caractéristiques de f.

a) $f = r_{(O, -\frac{\pi}{2})} \circ r_{(C, \frac{\pi}{2})}$; b) $f = r_{(A, \frac{\pi}{2})} \circ t_{\overline{CB}}$;

c) $f = s_{(BD)} \circ s_{(OCJ)} \circ t_{\overline{BD}}$, $f = r_{(O, \frac{\delta}{2})} \circ t_{\overline{BC}}$ et $f = t_{\overline{BC}} \circ r_{(O, \frac{\delta}{2})}$.

8.

ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre O. I, J et K sont les milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB].

a) Déterminer les transformations suivantes :

$r_{(B, \frac{\delta}{3})} \circ r_{(C, \frac{\delta}{3})}$; $r_{(C, \frac{\delta}{3})} \circ r_{(O, \frac{2\delta}{3})}$;
 $r_{(B, \frac{\delta}{3})} \circ r_{(A, -\frac{\delta}{3})}$ et $r_{(A, \frac{\delta}{3})} \circ r_{(B, \frac{\delta}{3})} \circ r_{(C, \frac{\delta}{3})}$.

b) Déterminer les droites (Δ) et (Δ') telles que :

i) $r_{(A, \frac{\pi}{3})} = s_{(Δ')} \circ s_{(AB)}$; ii) $r_{(O, \frac{2\pi}{3})} = s_{(OA)} \circ s_{(Δ)}$.

9.

ABCD est un carré de sens direct et de centre O.

I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de chacune des transformations suivantes :

$t_{\overline{AB}} \circ r_{(B, \frac{\pi}{4})}$, $t_{\overline{AB}} \circ s_{(LJ)}$, $t_{\overline{AB}} \circ s_{(AC)}$, $t_{\overline{AD}} \circ r_{(B, \frac{\pi}{4})}$,
 $r_{(O, \frac{\pi}{4})} \circ s_{(BD)}$, $r_{(A, \frac{\pi}{4})} \circ s_{(IK)}$, $t_{\overline{AB}} \circ r_{(B, \frac{\pi}{2})} \circ t_{\overline{BA}}$.

10.

Soit ABC un triangle, O le centre du cercle (C) circonscrit au triangle ABC.

A' et B' sont les milieux respectifs des segments [BC] et [AC].

1) On définit le point H par :

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

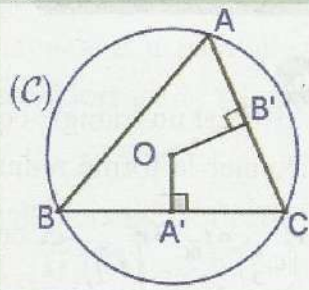
a) Montrer que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$ et $\overrightarrow{BH} = 2\overrightarrow{OB'}$.

b) En déduire que H est l'orthocentre du triangle ABC.

2) Soit (D) la parallèle à (BC) passant par O, t la translation de vecteur $\overrightarrow{HA}$.

Déterminer la composée $s_{(D)} \circ t$.

3) Montrer que les symétriques de H par rapport aux côtés du triangle sont sur le cercle (C) .



11.

Soit ABC un triangle rectangle en A.

On désigne par H le pied de la hauteur issue de A et par I le milieu de [BC].

Soit K et J les projetés orthogonaux de H sur [AC] et [AB] respectivement.

La droite (AI) coupe (HK) au point L.

Soit (Δ) la médiatrice de [AJ] et (Δ') celle de [AB].

a) Démontrer que (Δ') est la médiatrice de [LH].

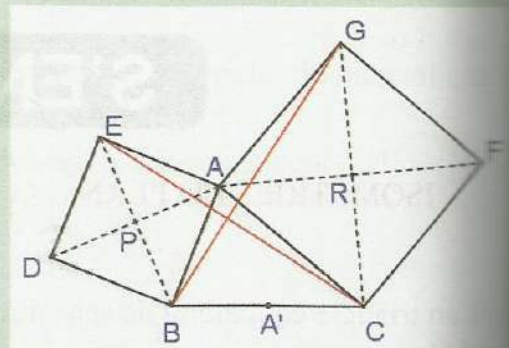
b) Déterminer l'image de la droite (JK) par $s_{(\Delta)} \circ s_{(\Delta')}$.

c) En déduire que les droites (KJ) et (BL) sont parallèles.

12.

On considère un triangle ABC de sens direct.

On construit à l'extérieur de ce triangle, les carrés AEDB et ACFG de centre P et R respectivement.



1) En utilisant une transformation appropriée, démontrer que $EC = BG$ et déterminer la mesure de l'angle $(\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{BG})$.

2) Soit A' le milieu de [BC].

Démontrer que $\overrightarrow{PA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$.

3) Déduire de 1) et 2) que :

$$A'P = A'R \text{ et } \text{mes}(\overrightarrow{A'R}, \overrightarrow{A'P}) = \frac{\pi}{2}.$$

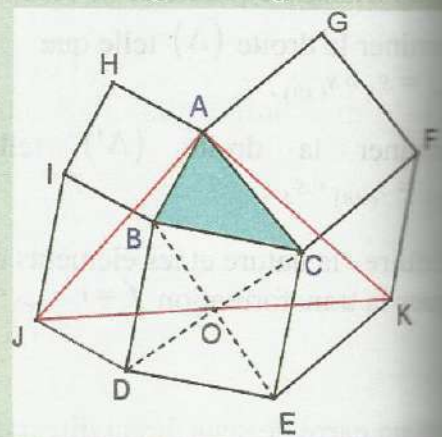
4) Soit le point Q tel que BQC soit un triangle rectangle isocèle en Q et de sens direct.

Quelle est l'image de Q par $r_{(A', \frac{\pi}{2})}$?

Montrer que $(RQ) \perp (PC)$.

13.

On considère un triangle ABC. On construit à l'extérieur de ce triangle les carrés ABDE et ACFG, les points J et K tels que BJDE et CEKF sont des parallélogrammes.



On considère les transformations $r_{(B, \frac{\pi}{2})}$ et $r_{(C, \frac{\pi}{2})}$.

1) Déterminer l'image de A par $t_{BD} \circ r_{(B, \frac{\pi}{2})}$.



On suppose que $\vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{AC}$ et $\vec{AF} = \frac{1}{2}\vec{AC}$.

1) Montrer que $\vec{AB} = \vec{AF}$.

2) Montrer que $\vec{AB} = \vec{AF}$.

3) Montrer que $\vec{AB} = \vec{AF}$.

4) Montrer que $\vec{AB} = \vec{AF}$.

5) Montrer que $\vec{AB} = \vec{AF}$.

On considère un triangle ABC et un point K tel que $\vec{AK} = \frac{1}{2}\vec{BC}$.

1) Montrer que $\vec{AK} = \frac{1}{2}\vec{BC}$.

2) Montrer que $\vec{AK} = \frac{1}{2}\vec{BC}$.

3) Montrer que $\vec{AK} = \frac{1}{2}\vec{BC}$.

4) Montrer que $\vec{AK} = \frac{1}{2}\vec{BC}$.

5) Montrer que $\vec{AK} = \frac{1}{2}\vec{BC}$.

6) Montrer que $\vec{AK} = \frac{1}{2}\vec{BC}$.

7) Montrer que $\vec{AK} = \frac{1}{2}\vec{BC}$.

8) Montrer que $\vec{AK} = \frac{1}{2}\vec{BC}$.

9) Montrer que $\vec{AK} = \frac{1}{2}\vec{BC}$.

10) Montrer que $\vec{AK} = \frac{1}{2}\vec{BC}$.

a) À l'aide de la décomposition de $t_{\vec{BD}}$ et $r_{\left(B, \frac{\pi}{2}\right)}$ en composée de symétries orthogonales, montrer que $t_{\vec{BD}} \circ r_{\left(B, \frac{\pi}{2}\right)} = r_{\left(O, \frac{\pi}{2}\right)}$.

b) En déduire que $OA = OJ$ et $\arg(\vec{OA}, \vec{OJ}) = \frac{\pi}{2}$.

c) Déterminer l'image de K par $r_{\left(C, \frac{\pi}{2}\right)} \circ t_{\vec{KF}}$.

d) Démontrer que $r_{\left(C, \frac{\pi}{2}\right)} \circ t_{\vec{KF}} = r_{\left(O, \frac{\pi}{2}\right)}$.

e) En déduire que $OA = OK$ et $\arg(\vec{OK}, \vec{OA}) = \frac{\pi}{2}$.

f) Dédurre des questions 2) et 3) que :

a) O est le milieu de [JK].

b) le triangle AJK est rectangle isocèle.

Dans les exercices de 14 à 17

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\vec{i}, \vec{j})$. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x; y)$ associe le point $M'(x'; y')$ définies par son expressions analytiques :

Montrer que f est une isométrie et donner sa nature et ses éléments caractéristiques.

a) $x' = y - 2$

b) $x' = -x$

c) $x' = y - 1$

d) $x' = x - 1$

e) $x' = y + 2$

f) $x' = x - 3$

g) $x' = y - 2$

h) $x' = x - 2$

Donner la nature et les éléments caractéristiques de f pour deux points distincts du plan.

1) Montrer qu'un point M du plan appartient au segment [AB] si et seulement si $\vec{AM} + \vec{MB} = \vec{AB}$.

2) Soit f une isométrie. A', B' et M' les images respectives de A, B et M par f . Montrer que M appartient à [AB] si et seulement si M' appartient à [A'B'].

3) Soit (D) la demi-droite d'origine A, de support (AB) et ne contenant pas le point B. Montrer que M appartient à (D) si et seulement si $\vec{AB} = \vec{MB} - \vec{AM}$.

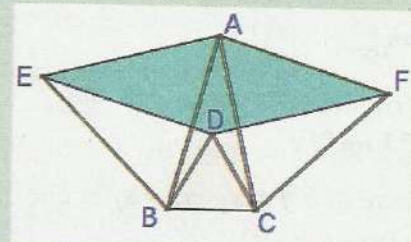
Quelle est l'image de (D) par f ?

4) Dédurre de ce qui précède que l'image par une isométrie :

- d'un segment est un segment;
- d'une droite est une droite;
- d'une demi-droite est une demi-droite.

19.

Dans la figure ci-après, les triangles AEB, ACF et CDB sont équilatéraux de sens direct. On pose $f = r_{\left(C, \frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(A, \frac{\pi}{3}\right)}$.



Quelles sont les images par f de E et de A ? Préciser la nature de f et en déduire la nature du quadrilatère AEDF.

20.

Donner la nature et les éléments caractéristiques de $f = t_{\vec{u}} \circ s_A$ (axe et vecteur si f est une symétrie glissée) dans chacun des cas suivants :

a) $\vec{u}(-1; 2)$ et $\Delta : 2x + y - 2 = 0$;

b) $\vec{u}(2; -3)$ et $\Delta : 2x - 3y + 3 = 0$;

c) $\vec{u}(3; 0)$ et $\Delta : x + y - 2 = 0$.

21.

Donner la nature et les éléments géométriques

a) À l'aide de la décomposition de $t_{\overline{BD}}$ et $r_{\left(B, \frac{\pi}{2}\right)}$ en composée de symétries orthogonales, montrer que : $t_{\overline{BD}} \circ r_{\left(B, \frac{\pi}{2}\right)} = r_{\left(O, \frac{\pi}{2}\right)}$.

b) En déduire que $OA = OJ$ et

$$\text{mes}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OJ}) = \frac{\pi}{2}.$$

c) Déterminer l'image de K par $r_{\left(C, \frac{\pi}{2}\right)} \circ t_{\overline{KF}}$.

d) Démontrer que $r_{\left(C, \frac{\pi}{2}\right)} \circ t_{\overline{KF}} = r_{\left(O, \frac{\pi}{2}\right)}$.

e) En déduire que $OA = OK$ et

$$\text{mes}(\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{2}.$$

f) Déduire des questions 2) et 3) que :

- O est le milieu de [JK].
- le triangle AJK est rectangle isocèle.

Dans les exercices de 14 à 17

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\vec{i}, \vec{j})$. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x; y)$ associe le point $M'(x'; y')$ définies par son expressions analytiques.

Montrer que f est une isométrie et donner sa nature et ses éléments caractéristiques.

$$x' = -y - 2$$

$$y' = -x$$

$$x' = -y - 1$$

$$y' = -x - 1$$

$$x' = -y + 2$$

$$y' = -x - 3$$

$$x' = -y - 2$$

$$y' = -x - 2$$

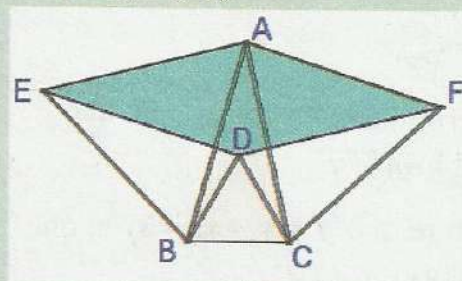
g) Deux points distincts du plan.

- Montrer qu'un point M du plan appartient au segment [AB] si et seulement si $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$.
- Soit f une isométrie. A', B' et M' les images respectives de A, B et M par f . Montrer que M appartient à [AB] si et seulement si M' appartient à [A'B'].
- Soit (D) la demi-droite d'origine A, de support (AB) et ne contenant pas le point B. Montrer que M appartient à (D) si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AM}$.
Quelle est l'image de (D) par f ?
- Déduire de ce qui précède que l'image par une isométrie :
 - d'un segment est un segment;
 - d'une droite est une droite;
 - d'une demi-droite est une demi-droite.

19.

Dans la figure ci-après, les triangles AEB, ACF et CDB sont équilatéraux de sens direct. On

pose $f = r_{\left(C, \frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(A, \frac{\pi}{3}\right)}$.



Quelles sont les images par f de E et de A? Préciser la nature de f et en déduire la nature du quadrilatère AEFD.

20.

Donner la nature et les éléments caractéristiques de $f = t_{\vec{u}} \circ s_{\Delta}$ (axe et vecteur si f est une symétrie glissée) dans chacun des cas suivants:

- $\vec{u}(-1; 2)$ et $\Delta : 2x + y - 2 = 0$;
- $\vec{u}(2; -3)$ et $\Delta : 2x - 3y + 3 = 0$;
- $\vec{u}(3; 0)$ et $\Delta : x + y - 2 = 0$.

21.

Donner la nature et les éléments géométriques

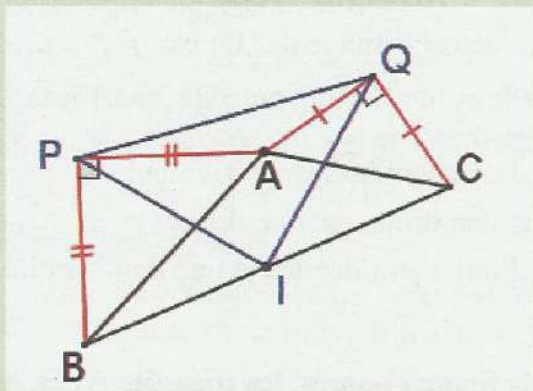
de $f = r_{(\Omega, \theta)} \circ s_{\Delta}$ (axe et vecteur si f est une symétrie glissée) dans chacun des cas suivants

a) $\Omega(-1; 2)$; $\theta = \frac{\pi}{4}$ et $\Delta : 2x - y - 1 = 0$;

b) $\Omega(2; -1)$; $\theta = \frac{\pi}{6}$ et $\Delta : x - y + 3 = 0$.

22.

Soit ABC un triangle quelconque. Les triangles PAC et QAB sont rectangles isocèles directs, et I désigne le milieu de [BC].



1) Démontrer que $r_{(P, \frac{\pi}{2})} \circ r_{(Q, \frac{\pi}{2})} = s_I$.

2) a) Déterminer la droite Δ telle que

$$r_{(P, \frac{\pi}{2})} = s_{\Delta} \circ s_{(PQ)}.$$

b) Déterminer la droite Δ' telle que

$$r_{(Q, \frac{\pi}{2})} = s_{(PQ)} \circ s_{\Delta'}.$$

c) Dédire que $f = s_{\Delta} \circ s_{\Delta'} = s_I$ et que $\Delta = (IP)$; $\Delta' = (IQ)$

3) a) De $r_{(P, \frac{\pi}{2})} = s_{(IP)} \circ s_{(PQ)}$, déduire que

$$\text{mes}(\widehat{PQ, PI}) = \frac{\pi}{4}$$

b) De $r_{(Q, \frac{\pi}{2})} = s_{(PQ)} \circ s_{(QI)}$, déduire que

$$\text{mes}(\widehat{QI, QP}) = \frac{\pi}{4}$$

c) Dédire sur la nature du triangle IPQ

Dans les exercices de 23 à 26

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ définies par par son expression analytique.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .

23.

$$\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2 \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 1 \end{cases}$$

24.

$$\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{10}{3} \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{5}{3} \end{cases}$$

25.

$$\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 2 \\ y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 3 \end{cases}$$

26.

$$\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{5}{3} \\ y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{7}{3} \end{cases}$$

27.

On donne $A(0; \sqrt{3})$ et $B(1; 0)$.

1) Déterminer la nature et l'élément caractéristique de l'application $f = r_{(B, \frac{\pi}{3})} \circ r_{(A, \frac{\pi}{3})}$.

2) Soit $A' = f(A)$; $B' = f(B)$. Démontrer que $(A'B')$ est la médiatrice de $[AB]$.

28.

Soit A et B deux points distincts du plan. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application : $f =$

$$r_{(B, \frac{\pi}{3})} \circ r_{(A, \frac{\pi}{2})}.$$

29.

Démontrer que si $\vec{u}$ est un vecteur non nul du plan, alors la translation de vecteur $\vec{u}$ peut être considérée comme la composée de deux

isations et ceci d'une infinité de manières.

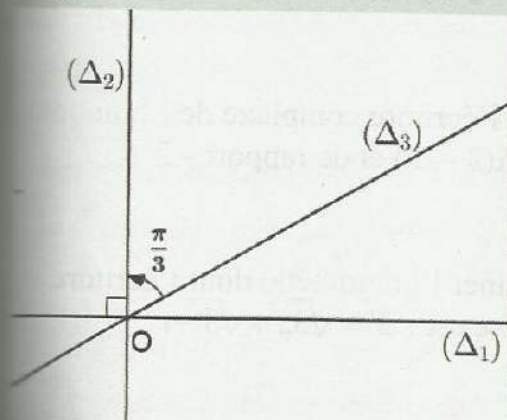
ABCD est un carré de sens direct et de centre O. On note (Δ) et (Δ') les médiatrices des côtés [AB] et [BC] respectivement.

Déterminer toutes les isométries qui laissent invariant le carré ABCD. [On pourra dresser une table de composition].

ABC est un triangle équilatéral de sens direct ; O est le point d'intersection de la hauteur issue de A et du cercle circonscrit au triangle ABC. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application

$$f = s_{(BD)} \circ s_{(DC)} \circ s_{(CA)} \circ s_{(AB)}$$

(Δ_1) , (Δ_2) et (Δ_3) sont trois droites du plan concourantes en O telles que l'indique la figure ci-dessous :



Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application $f = s_{\Delta_3} \circ s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1}$

Déterminer la nature de l'application $f' = s_{\Delta_1} \circ f$

A-t-on $s_{\Delta_1} \circ f = f \circ s_{\Delta_1}$?

(Δ) et (Δ') sont deux droites du plan.

Montrer que $s_{\Delta} \circ s_{\Delta'} = s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}$ si et seulement si $(\Delta) \perp (\Delta')$ ou (Δ) et (Δ') sont confondues

(Δ) et (Δ') sont deux droites du plan sécantes en A.

Déterminer toutes les isométries laissant invariant l'ensemble constitué des droites (Δ) et (Δ') ; distinguer le cas où $(\Delta) \perp (\Delta')$ et celui où les deux droites ne sont pas perpendiculaires.

35.

Soit ABC un triangle quelconque, on construit les triangles équilatéraux directs AEB, ACF et CDB.

On désigne par r_1 la rotation de centre C et angle de mesure $-\frac{\pi}{3}$. On désigne par r_2 la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$; on note

$$f = r_1 \circ r_2.$$

- Quelles sont les images par f de E et de A ?
- Quelle est la nature de f ?
- Quelle est la nature du quadrilatère AEDF ?

36.

On se donne 3 droites (D_1) , (D_2) et (D_3) concourantes en O ; on note s_1 , s_2 et s_3 les réflexions par rapport à ces droites et $f = s_3 \circ s_2 \circ s_1$.

On cherche à construire un triangle ABC tel que D_1 , D_2 et D_3 soient les médiatrices de [BC], [CA] et [AB] respectivement.

- Si ABC est un tel triangle, alors B est fixe par f .
- Si B est un point fixe de f , construire un triangle ABC comme souhaité.
- Étudier f et donner une construction géométrique de l'ensemble de ses points fixes.

37.

On considère un parallélogramme ABCD de sens indirect et de centre O. On construit à l'extérieur de ce parallélogramme des triangles équilatéraux ABE, BCF, CDG et ADH et on note I, J, K et L les centres respectifs de ces triangles.

- On désigne par r_B la rotation de centre B et

d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$:

On désigne par r_D la rotation de centre D et

d'angle de mesure $-\frac{\pi}{3}$.

On note s_O la symétrie de centre O.

Quelles sont les images de B et E par r_B , par $s_O \circ r_B$ et par $r_D \circ s_O \circ r_B$?

Montrer que $r_D \circ s_O \circ r_B = s_O$ et en déduire que O est le milieu de [EG].

b) Montrer que EFGH est un parallélogramme.

c) Montrer que IJKL est un parallélogramme

SIMILITUDES DIRECTES DU PLAN

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

38.

Soit S une similitude plane, A et B deux points distincts, A', B' les images respectives de A et B par S . Démontrer que l'image par S du segment [AB] est le segment [A'B'].

39.

Soit S une similitude plane, A et B deux points distincts, A', B' les images respectives de A et B par S . Démontrer que l'image par S de la demi-droite [AB) est la demi-droite [A'B').

40.

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x, y)$ associe le point

$$M'(x', y') \text{ tel que } \begin{cases} x' = -3x + 1 \\ y' = -3y - 1 \end{cases}$$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .

41.

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$

$$\text{tel que } \begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} + 1 \\ y' = x\sqrt{3} + y \end{cases}$$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .

42.

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$

$$\text{tel que } \begin{cases} x' = x\sqrt{2} + y\sqrt{2} + 1 \\ y' = -x\sqrt{2} + y\sqrt{2} \end{cases}$$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .

43.

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$

$$\text{tel que } \begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = x - y - 1 \end{cases}$$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .

44.

Donner l'écriture complexe de la translation de vecteur d'affixe $2 - i$.

45.

Donner la translation dont l'écriture complexe est : $z' = z + 1 + i$.

46.

Donner l'écriture complexe de l'homothétie de centre $A(3 - 2i)$ et de rapport -2 .

47.

Déterminer l'homothétie dont l'écriture complexe est : $z' = \sqrt{3}z + \sqrt{3} - i$.

48.

Déterminer l'écriture complexe de la rotation de centre $A(-1 + 2i)$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

49.

Déterminer les éléments caractéristiques de la rotation d'écriture complexe :

$$z' = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) z + i + 3$$

50.

On considère les applications planes f et g d'écritures $z' = -2z + 3$ et $z' = 3z + 2$ respectivement.

1) Démontrer que f et g sont des transformations affines et déterminer leurs transformations réciproques.

2) Déterminer les écritures complexes de $f \circ g$ et de $g \circ f$.

3) Démontrer que $f^{-1} \circ g^{-1}$ est la bijection réciproque de $g \circ f$.

4) On considère les applications du plan dans lui-même f et g d'écritures complexes respectives :

$$f(z) = (1+i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i\sqrt{3} \text{ et } g(z) = 2i\bar{z} - 3 + 3i.$$

5) Donner les points fixes de f et de g .

6) Déterminer les écritures complexes respectives de $f \circ g$ et de $g \circ f$.

7) Soit A et B les points d'affixes respectives $1+i$ et $1-i$. Déterminer $f(A)$ et $g(B)$.

8) Soit S l'application du plan dans lui-même,

d'écriture complexe : $z' = (1-i)z - 2 + i$.

9) Déterminer la nature et les éléments

caractéristiques de S.

10) Déterminer l'écriture complexe de la similitude

directe de centre $\Omega(1+2i)$, de rapport $\sqrt{2}$ et

d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

11) Soit la similitude directe plane de centre $\Omega(\omega)$

de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

12) Le point A(z_A) a pour image par S le point

B(z_B). Démontrer que le triangle ΩAB est un triangle isocèle en A et de sens direct.

13) Soit la similitude directe plane de centre $\Omega(\omega)$

de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$. On pose :

14) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .

15) On considère les points A(-1) et B(1+i).

16) Déterminer l'écriture complexe de la réflexion, d'axe (AB).

56.

Soit S l'application du plan dans lui-même d'écriture complexe :

$$z' = \left(\frac{5}{13} + \frac{12}{13}i \right) \bar{z} - \frac{12}{13} + \frac{18}{13}i$$

1) Montrer que S est un antidéplacement.

2) Déterminer $S \circ S$.

3) On considère les points A(i) et B(-1-4i). Déterminer les images de A et B par S et en déduire deux points fixes de S.

4) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S.

57.

Dans le plan orienté, on considère ABCD un carré de sens direct. Soit M un point du segment [DC]. La perpendiculaire à (AM) passant par A coupe la droite (BC) au point N. On note I le milieu de [MN].

a) Montrer que le triangle rectangle AMN est isocèle en A.

b) Déterminer une application du plan qui transforme M en I.

c) Quel est le lieu géométrique des points I lorsque M décrit (BC).

58.

(C) est un cercle et A un point extérieur à (C).

Pour tout point M de (C), on construit le point C tel que MAC soit un triangle équilatéral de sens direct.

On note I le milieu de [MC], N celui de [AI] et P le point du plan tel que le triangle NAP soit un triangle rectangle isocèle en A et de sens direct.

Déterminer le lieu :

a) (Γ_1) des points N lorsque M décrit le cercle (C).

b) (Γ_2) des points P lorsque M décrit le cercle (C).

c) (Γ_1) est-il l'image de (Γ_2) par une isométrie ?

59.

ABC est un triangle équilatéral de sens direct et D le point tel que $\overline{CD} = 2\overline{AC}$.

Soit S la similitude directe qui transforme A en

C et B en D.

- 1) Déterminer le rapport de S.
- 2) Soit O le centre de S. Exprimer OA et OC en fonction de AC.
- 3) Démontrer que le triangle OAC est rectangle en A, puis placer O.
- 4) Soit $H = S(C)$. Montrer que :

$$\text{Mes}(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CH}) = \frac{\pi}{3}$$
 ; le triangle CDH est équilatéral puis construire le point H.

60.

Dans le plan orienté, ABCD est un carré direct de côté 1 et de centre O tel que I est le milieu du segment [AO].

- 1) Justifier qu'il existe une similitude directe et une seule telle que $S(A) = O$ et $S(B) = I$
- 2) Déterminer le rapport et l'angle de S.
- 3) Donne une écriture complexe de S dans le repère orthonormé direct $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.
- 4) On note Ω le centre de S. Démontrer que les droites (ΩA) et (ΩD) sont perpendiculaires.

61.

Soit f la transformation du plan complexe qui à $M(z)$ associe $M'(z')$ tel que $z' = az + 3i$

- 1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f lorsque $a = 2$ puis $a = -i$.
- 2) On donne $A(1)$, $B(2+i)$, $A'(2i)$ et $B'(1+i)$
 Démontrer qu'il existe une unique rotation r telle que $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$. La déterminer.

62.

Le plan P est rapporté au repère ortho normal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par T l'application de P dans P qui, à tout point d'affixe z , associe le point M' d'affixe $z' = (1+i)z - i$.

- 1) Montrer que T est une similitude directe de P dont on donnera les éléments caractéristiques.
 On notera A le point invariant de T.
 Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'})$, en supposant que $M \neq A$.
- 2) a. Construire $M' = T(M)$ pour un point M donné.

b. Déterminer l'image de D' par T de la droite D d'équation $y = x$. Construire D'.

- 3) a. Montrer qu'il existe un point B du plan distinct de A et un seul tel que les affixes z_0 de B et z'_0 de $B' = T(B)$ soient liées par la relation $z_0 z'_0 = 1$.

Construire les points B et B'.

b. Soit A' le symétrique de A par rapport à O. Montrer que les points A, A', B et B' sont cocycliques.

63.

Dans le plan orienté, on considère un carré direct ABCD de centre O.

Soit P un point du segment [BC] distinct de B. On note Q l'intersection de (AP) avec (CD). La perpendiculaire (Δ) à (AP) passant par A coupe (BC) en R et (CD) en S.

- 1) Faire une figure.
- 2) Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
 a. Préciser, en justifiant la réponse, l'image de la droite (BC) par la rotation r .
 b. Déterminer les images de R et de P par r .
 c. Quelle est la nature de chacun des triangles ARQ et APS ?

- 3) On note N le milieu du segment [PS] et M celui du segment [QR].
 Soit s la similitude de centre A, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

- a. Déterminer les images respectives de R et de P par s .
- b. Quel est le lieu géométrique du point N quand P décrit le segment [BC] privé de B ?
- c. Démontrer que les points M, B, N et D sont alignés.

64.

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par s l'application qui à tout point M de P de coordonnées (x, y) associe le point M' de coordonnées (x', y') tel que :

$$\begin{cases} x' = -x - y - 2 \\ y' = x - y - 2 \end{cases}$$

- 1) Déterminer l'affixe z' de M' en fonction de l'affixe z de M .
- 2) Démontrer que s est une similitude directe plane.
Préciser son angle, son rapport et son centre I .
- 3) Soit g l'application qui à tout point M de P associe l'isobarycentre G des points $M, M' = s(M)$ et $M'' = s(M')$.
 - a. Calculer, en fonction de l'affixe z de M , les affixes des points M'' et G .
 - b. Démontrer que g est une similitude plane directe. Quel est son centre ?
 - c. Déterminer l'affixe du point M_0 tel que $g(M_0)$ soit le point O .

Placer dans le repère les points M_0, M'_0, M''_0 correspondants, ainsi que le point I , centre de la similitude s .

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Partie I

Soient A, B, C, D quatre points du plan ; on suppose que les points A et C sont distincts et que les points B et D sont distincts.

Démontrer qu'il existe une unique similitude directe s telle que $s(A) = B$ et $s(C) = D$.

Partie II

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$. On considère le point C tel que $ABCD$ est un carré.

Soit E le milieu du segment $[AD]$, on considère

l'arc $EDGF$ tel que $(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF}) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.

- a. Faire une figure en plaçant les points A, B, C, D, E, F, G . On complètera la figure progressivement.
- b. Préciser les nombres complexes a, b, c, d, e, f, g , affixes respectives des points A, B, C, D, E, F et G .
- c. Montrer qu'il existe une unique similitude directe S du plan telle que $S(D) = F$ et $S(B) = D$.

On se propose de préciser les éléments ca-

ractéristiques de la similitude directe s .

- a. Déterminer son rapport k et son angle θ .
- b. Donner l'expression complexe de S .
- c. Déterminer le centre Ω de la similitude directe s .

66.

Dans tout l'exercice, $(O; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan complexe (unité graphique : 4 cm).

On désigne par A le point d'affixe $z_A = 1$.

- 1) On considère la transformation T du plan qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe $z' = -\bar{z} + 2$.
 - a. Déterminer les images par la transformation T du point A et du point Ω d'affixe $1 + 3i$.
 - b. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation T .
 - c. Déterminer l'image par la transformation T du cercle C de centre O et de rayon 1.
- 2) C' désigne le cercle de centre O' d'affixe 2 et de rayon 1.
 - a. Construire le point A' appartenant au cercle C' tel que : $\text{mes}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O'A'}) = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$.
 - b. À tout point M du cercle C d'affixe z , on associe le point M' du cercle C' d'affixe z' tel que : $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}) = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$.

Déterminer le module et un argument de $\frac{z' - 2}{z}$.

En déduire que $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z + 2$.

- c. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de la transformation r qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z + 2$.
- 3) À tout point M du plan, on associe le point M_1 milieu du segment $[MM']$. Quel est le lieu géométrique du point M_1 lorsque M décrit le cercle C ?

67.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique

1 cm, on considère les points A, B, C, M, N et P d'affixes respectives : $a=1+i$,

$$b=-1+2i ; c=2+3i ; m=5-i$$

$$n=7-5i ; p=9+i.$$

- 1) a. Placer les points A, B, C, M, N et P dans le repère.
- b. Calculer les longueurs des côtés des triangles ABC et NMP.
- c. En déduire que ces deux triangles sont semblables.

Dans la suite de l'exercice, on se propose de mettre en évidence deux similitudes qui transforment le triangle ABC en le triangle MNP.

- 2) Soit s la similitude directe qui transforme le point A en N et le point B en P.
 - a. Montrer qu'une écriture complexe de la similitude s est : $z' = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i\right)z + \left(\frac{23}{5} + \frac{9}{5}i\right)$.
 - b. Déterminer le rapport, la valeur de l'angle arrondi au degré, ainsi que le centre de la similitude s .
 - c. Vérifier que la similitude transforme le point C en M.
- 3) Soit s' la similitude dont l'écriture complexe est : $z' = 2iz + 3 - 3i$.
 - a. Vérifier que $s'(A) = N$, $s'(B) = M$, $s'(C) = P$.
 - b. Démontrer que s' admet un unique point invariant K d'affixe $k = 1 - i$.
 - c. Soit h l'homothétie de centre K et de rapport $\frac{1}{2}$ et J le point d'affixe 2.

$$\text{On pose : } f = s' \circ h.$$

Déterminer les images des points K et J par la transformation f . En déduire la nature précise de la transformation f .

- d. Démontrer que la similitude s' est la composée d'une homothétie et d'une réflexion.

68.

On considère un triangle OA_0B_0 rectangle isocèle en O et tel que la distance A_0B_0 soit égale à $4\sqrt{2}$. On précise de plus que l'angle

$(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OB_0})$ est un angle droit direct.

On définit alors pour tout entier naturel n les points A_{n+1} et B_{n+1} de la façon suivante :

- A_{n+1} est le milieu du segment $[A_n B_n]$;
- B_{n+1} est le symétrique du point A_{n+1} par rapport à la droite (OB_n) .

- 1) Représenter le triangle OA_0B_0 , puis construire les points $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$.
- 2) a. Démontrer qu'il existe une similitude directe et une seule qui transforme A_0 en A_1 et B_0 en B_1 .
- b. Soit S cette similitude. Préciser son angle et son rapport, puis vérifier que son centre est O.

Démontrer que, pour tout entier naturel n , la similitude S transforme A_n en A_{n+1} et B_n en B_{n+1} .

- 3) a. Démontrer que les points O, A_n et A_{n+1} sont alignés si et seulement si les entiers n et $n+1$ sont congrus l'un à l'autre modulo 4.
- b. On désigne par Ω le point d'intersection des droites $(A_0 B_4)$ et $(B_0 A_4)$. Démontrer que le triangle $\Omega A_0 B_0$ est isocèle en Ω .
- c. Calculer la distance $A_0 B_4$.
- d. Démontrer que $\Omega A_0 = 4\Omega B_4$.
- e. En déduire l'aire du triangle $A_0 \Omega B_0$.

Chapitre 13

APPLICATIONS AFFINES.

LEÇON 1 GÉNÉRALITES SUR LES APPLICATIONS AFFINES.

- 1.1. CONSERVATION DU COEFFICIENT DE COLINÉARITÉ ET DES BARYCENTRES.
- 1.2. ENDOMORPHISME ASSOCIÉ À UNE APPLICATION AFFINE.
- 1.3. EXPRESSIONS ANALYTIQUES D'UNE APPLICATION AFFINE DANS UN REPÈRE DONNÉ.
- 1.4. APPLICATIONS AFFINES BIJECTIVES.
- 1.5. COMPOSÉE DE DEUX APPLICATIONS AFFINES.
- 1.6. IMAGE DE L'ESPACE D'UN PLAN OU D'UNE DROITE PAR UNE APPLICATION AFFINE

LEÇON 2 PROJECTIONS, SYMÉTRIES ET AFFINITÉS D'UN ESPACE AFFINE.

- 2.1. PROJECTIONS AFFINES.
- 2.2. SYMÉTRIES AFFINES.
- 2.3. AFFINITÉS.

S'ENTRAÎNER

LEÇON 1 GÉNÉRALITES SUR LES APPLICATIONS AFFINES.

- Reconnaître une application affine ;
- Définir analytiquement une application affine ;
- Écrire une équation de la transformée d'une courbe par une application affine ;
- Justifier qu'une application affine est une transformation

1.1. CONSERVATION DU COEFFICIENT DE COLINÉARITÉ ET DES BARYCENTRES.



Prendre un bon départ

Activité 1

f est une application du plan dans lui-même. A, B et C et trois points 2 à 2 distincts du plan. α est un nombre réel tel que $\overrightarrow{AC} = \alpha \overrightarrow{AB}$. On désigne par A', B' et C' les images des points A, B et C par f .

a) Montrer que si f est une translation, alors $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AC}$. En déduire que $\overrightarrow{A'C'} = \alpha \overrightarrow{A'B'}$.

b) Montrer que si f est une homothétie de rapport k , alors $\overrightarrow{A'C'} = \alpha \overrightarrow{A'B'}$.

c) Supposons que f est une réflexion d'axe (Δ) .

(i) Montrer que les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont parallèles.

(ii) En déduire que $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$, et $\overrightarrow{A'C'} = \alpha \overrightarrow{A'B'}$.

Activité 2

1) Soit f une application du plan qui transforme le barycentre du système

$\{(A_1, a_1); (A_2, a_2); \dots; (A_n, a_n)\}$ en le barycentre de $\{(A'_1, a_1); (A'_2, a_2); \dots; (A'_n, a_n)\}$ (On dit que f conserve les barycentres).

Soit A, B et C trois points distincts du plan ; A', B' et C' leurs images respectives par f .

On suppose qu'il existe un réel α tel que $\overrightarrow{AC} = \alpha \overrightarrow{AB}$.

a) Montrer que $\alpha \neq 1$ et A est le barycentre des points C et B affectés des coefficients à préciser.

b) En déduire que $A' = \text{bar}\{(B', -\alpha); (C', 1)\}$.

c) Montrer alors que $\overrightarrow{A'C'} = \alpha \overrightarrow{A'B'}$.

2) Soit f une application du plan telle que pour tout triplet $(A; B; C)$ de points distincts d'un plan, $(A'; B'; C')$ par f , s'il existe un réel α tel que $\overrightarrow{AC} = \alpha \overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{A'C'} = \alpha \overrightarrow{A'B'}$.

Soit G le barycentre du système $\{(A, a); (B, b)\}$ et G' l'image de G par f .

a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AG}$ en fonction $\overrightarrow{AB}$.

b) En déduire l'expression du vecteur $\overrightarrow{A'G'}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{A'B'}$.

c) En déduire que le point G' est le barycentre des points A' et B' et affectés des coefficients qu'on précisera.



Retenir

- Soit f une application du plan $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$; A, B, C trois points distincts du plan tels qu'il existe un réel α vérifiant l'égalité $\overline{AC} = \alpha \overline{AB}$. On dit que f conserve le coefficient de colinéarité si les images des points A, B et C notées respectivement par A', B' et C' vérifient l'égalité $\overline{A'C'} = \alpha \overline{A'B'}$.
- Si f est une application du plan dans lui-même, alors les assertions suivantes sont équivalentes :
 - f conserve le coefficient de colinéarité ;
 - f conserve les barycentres.
- Une application affine du plan est une application qui conserve le coefficient de colinéarité ou les barycentres.
- Les translations, les homothéties, les rotations, les réflexions sont des exemples d'applications affines.

Remarque

- La définition donnée à une application affine dans le plan est valable dans l'espace ou dans tout autre espace des points.
- Les images respectives des points alignés par une application affine sont aussi alignées.
- L'image par une application affine d'un système de quatre points coplanaires de l'espace est un système de quatre points coplanaires. On dit aussi qu'une application affine conserve la coplanarité des points.
- Les images de deux droites parallèles sont des droites parallèles.

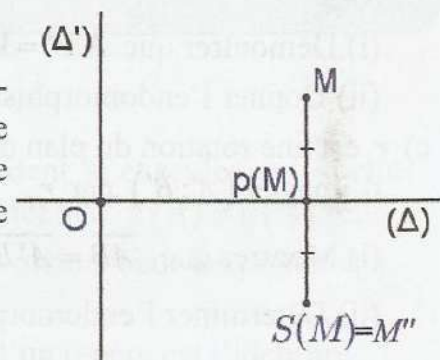
Exemple

- (Δ) et (Δ') sont deux droites sécantes en O .

La projection p sur (Δ) parallèlement à (Δ') est l'application du plan $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M du plan associe le point $p(M)$, point d'intersection de la droite (DM) et de la parallèle à la droite (Δ') passant par le point M ; $s(M)$ le point tel que $p(M)$ soit le milieu de $[Ms(M)]$.

Justifions que p et s sont des applications affines.

Soit A', B', C' les images respectifs de A, B, C par p .



- Les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont parallèles ; Supposons qu'il existe un réel t tel que $\overline{AC} = t \overline{AB}$.
- En appliquant la propriété de Thalès, on peut écrire $\frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{A''C''}}{\overline{A''B''}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = t$ où A', B' et C' sont les images respectives de A, B et C par p et A'', B'' et C'' les images de A, B et C par s .
- Par conséquent, $\overline{A'C'} = t \overline{A'B'}$ et $\overline{A''C''} = t \overline{A''B''}$.
- Les applications p et s sont des applications affines du plan.



S'exercer

- 1.a** h est une homothétie de rapport k et t une translation. f est l'application du plan qui à tout point M associe le point M' milieu du segment $[h(M)t(M)]$. Démontrer que f est une application affine.
- 1.b** (Δ) et (Δ') deux droites orthogonales en O , pour tout point M du plan on désigne par H_M le projeté orthogonal de M sur (Δ) et par K_M le projeté orthogonal de M sur (Δ') . M' désigne le milieu du segment $[H_M K_M]$. f l'application du plan qui à M associe M' . Justifier que f est une application affine.

1.2. ENDOMORPHISME ASSOCIÉ À UNE APPLICATION AFFINE



Prendre un bon départ

Activité 1

- a) t est une translation du plan. Soit un couple $(A; B)$ de points d'image $(A'; B')$ par t .
- Montrer que $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$.
 - Nommer l'endomorphisme de V_2 qui transforme $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{A'B'}$. où V_2 est l'ensemble des vecteurs du plan.
- b) h est une homothétie du plan de rapport k ($k \neq 0$). Soit un couple $(A; B)$ de points d'image $(A'; B')$ par h .
- Démontrer que $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.
 - Donner l'endomorphisme de V_2 qui transforme $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{A'B'}$.
- c) r est une rotation du plan de centre O et d'angle de mesure α ; Soit un couple $(A; B)$ des points d'images $(A'; B')$ par r .
- Montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ et $\text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \alpha$.
 - Déterminer l'endomorphisme de V_2 qui transforme $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{A'B'}$.

Activité 2

- 1) Soit f une application transformant le point M en le point M' ; O un point du plan, d'image O' par f ; $\varphi: \overrightarrow{OM} \rightarrow \overrightarrow{O'M'}$.
- a) On suppose que f est une application affine; $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs du plan V_2 ; t une translation.
- Soient les points M, N, P tels que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$, $\overrightarrow{ON} = \vec{v}$, $\overrightarrow{OP} = \vec{u} + \vec{v}$.
- Montrer que $O = \text{bar}\{(P, 1); (M, -1); (N, -1)\}$.
 - Justifier que $O' = \text{bar}\{(P', 1); (M', -1); (N', -1)\}$.
 - En déduire que $\overrightarrow{O'P'} = \overrightarrow{O'M'} + \overrightarrow{O'N'}$.
 - On suppose que $\overrightarrow{OM} = t\overrightarrow{ON}$.

Montrer que $\overrightarrow{O'M'} = t\overrightarrow{O'N'}$ et donc $\varphi(t\overrightarrow{ON}) = t\varphi(\overrightarrow{ON})$.

(v). Que dire de l'application φ ?

(vi). Sachant que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$, montrer que $\overrightarrow{M'N'} = \varphi(\overrightarrow{MN})$.

b) On suppose que φ est linéaire. M, N et P trois points d'images respectives M', N' et P' . Montrer que s'il existe un réel a tel que $\overrightarrow{MP} = a\overrightarrow{MN}$, alors $\overrightarrow{M'P'} = a\overrightarrow{M'N'}$.

En déduire que f est affine.

Activité 3

Soient A, B, M trois points du plan, f une application affine du plan; A', B' , les images respectives de A, B par f ; N et P deux points du plan tels que $\varphi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{A'N}$ et $\varphi(\overrightarrow{BM}) = \overrightarrow{B'P}$.

a) Montrer que $\overrightarrow{NP} = \varphi(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM})$.

b) En déduire que $N=P$.

c) L'image d'un point quelconque N dépend-elle du choix de A ou de celui de B?

Retenir

Soit f une application du plan; A un point quelconque du plan et M' l'image d'un point M par f .

- f est une application affine si et seulement si l'application $\varphi: \overrightarrow{AM} \rightarrow \overrightarrow{A'M'}$ est linéaire. φ est l'endomorphisme ou l'application linéaire associée à l'application affine f .
- Si φ est l'application linéaire associée à l'application affine f , alors pour tout bipoint $(M; N)$ de $\mathcal{P}^2$, $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \varphi(\overrightarrow{MN})$.

Remarque

- Deux applications affines f et g sont égales ou encore coïncident si et seulement si elles ont le même endomorphisme associé et s'il existe un point A tel que $f(A) = g(A)$.
- Deux applications affines sont égales si et seulement si elles coïncident sur les points qui constituent un repère affine.
- Une application affine qui laisse invariant chacun des points d'un repère est l'identité.

Exemple

- L'endomorphisme associé à une translation est I_{V_2} ;
- L'endomorphisme associé à une homothétie de rapport k est l'application: $\vec{u} \rightarrow k\vec{u}$. On l'appelle homothétie vectorielle de rapport k , notée hId_{V_2} .
- L'endomorphisme associé à une rotation d'angle de mesure α est la rotation vectorielle d'angle de mesure α ;
- L'endomorphisme associé à une projection affine (respectivement une symétrie affine) est une projection vectorielle (respectivement une symétrie vectorielle) de l'espace vectoriel associé.

Exemple

- f est une application affine du plan, (O, I, J) un repère du plan. On donne $f(O) = O$; $f(I) = I$ et $f(J) = O$. Déterminons la matrice de l'endomorphisme associé à φ dans la base $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$

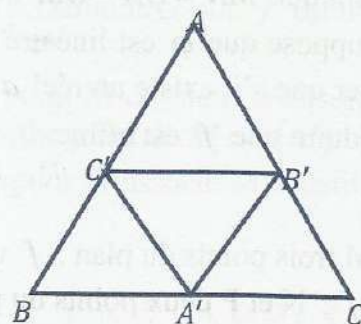
$$\varphi(\overrightarrow{OI}) = \overrightarrow{f(O)f(I)} = \overrightarrow{OI}$$

$$\varphi(\overrightarrow{OJ}) = \overrightarrow{f(O)f(J)} = \overrightarrow{OO} = \vec{0}$$

$$\varphi(\overrightarrow{OI}) = \overrightarrow{OI} + 0\overrightarrow{OJ}$$

$$\varphi(\overrightarrow{OJ}) = 0\overrightarrow{OI} + 0\overrightarrow{OJ}$$

$$M(\varphi, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



ABC est un triangle; A', B' et C' les milieux respectifs des segments $[BC]$; $[AC]$ et $[AB]$.
l'application affine du plan telle que $f(A) = A$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$.

Déterminons la matrice de l'endomorphisme associé à f

dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{AB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$$\varphi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{f(A)f(C)} = \overrightarrow{AC'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\varphi(\overrightarrow{AB}) = 0\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\varphi(\overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AC}$$

$$M(\varphi, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$



S'exercer

1.c $ABCD$ est un carré de centre O et de sens direct ($AB = 1$). Dans chacun des cas suivants, déterminer la matrice de l'endomorphisme φ associé à l'application affine f dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

i) f est l'homothétie de centre A qui transforme O en C .

ii) f la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

iii) r est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

iv) r' est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

1.d $ABCD$ est un losange de centre O . Dans chacun des cas suivants, déterminer dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ la matrice de l'endomorphisme associé à l'application affine f .

a) $f(A) = A$; $f(B) = D$ et $f(C) = D$

b) $f(A) = B$; $f(B) = A$ et $f(C) = C$

13. EXPRESSIONS ANALYTIQUES D'UNE APPLICATION AFFINE DANS UN REPÈRE DONNÉ.



Prendre un bon départ

Activité 1

Soit $\mathcal{P}$ rapporté à un repère $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$; A le point de coordonnées $(2; -1)$; A' le point de coordonnées $(-1; 3)$; φ l'endomorphisme de V_2 défini par $\varphi(\vec{i}) = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ et $\varphi(\vec{j}) = -\sqrt{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$.

Soit f l'application affine du plan, transformant le point A en A' , d'endomorphisme associé φ ; $M'(x'; y')$ l'image du point $M(x; y)$ par f .

1. Écrire la matrice A de φ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

2. Donner une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{A'M'}$ et $\overrightarrow{AM}$.

3. Donner un système d'expressions de x' et de y' en fonction de x et de y .

4. Déterminer par leurs coordonnées :

(i) l'image du point de coordonnées $(1; 0)$;

(ii) le point ayant pour image le point de coordonnées $(-2; 3)$;

(iii) le point invariant (ou bien fixe) par f .

Activité 2

Soit g l'application d'écriture analytique : $\begin{cases} x' = ax + by + \alpha \\ y' = cx + dy + \beta \end{cases}$ dans le repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$

1. Déterminer les coordonnées de O' , image du point O par f .

2. Soit $\sigma: \overrightarrow{OM} \rightarrow \overrightarrow{O'M'}$ où M et M' sont les points de coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$ tels que $M' = f(M)$.

3. Montrer que σ est linéaire.

4. Écrire la matrice de σ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.



Retenir

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine, $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère quelconque de $\mathcal{P}$.

1. Toute application affine du plan a pour expressions analytiques $\begin{cases} x' = ax + by + \alpha \\ y' = cx + dy + \beta \end{cases}$ dans $\mathcal{R}$ où a, b, c, d, α et β sont des réels.

2. Toute application du plan $\mathcal{P}$ d'expressions analytiques $\begin{cases} x' = ax + by + \alpha \\ y' = cx + dy + \beta \end{cases}$ dans $\mathcal{R}$ est une

application affine. L'endomorphisme qui lui est associé a pour matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Exemple

1) L'application h d'expressions analytiques $\begin{cases} x' = 2x - y + 1 \\ y' = 3x + 2y - 1 \end{cases}$ dans le repère $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ est une application affine dont l'endomorphisme a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

2) $A(1;1), A'(3;4), B(0;2), B'(1;-1), C(-1;2)$ et $C'(0;3)$ sont six points du plan.

Soit g l'application affine telle que $g(A) = A', g(B) = B'$ et $g(C) = C'$.

Soit φ l'endomorphisme associé à g .

a) Déterminons la matrice de φ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

On peut écrire : $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$ et $\varphi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{A'C'}$ (D'autres relations vectorielles peuvent être utilisées).

Or $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{A'B'} \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'C'} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$. $\varphi(-\vec{i} + \vec{j}) = -2\vec{i} - 5\vec{j}$; $\varphi(-2\vec{i} + \vec{j}) = -3\vec{i} -$

Puisque φ est linéaire, $\begin{cases} -\varphi(\vec{i}) + \varphi(\vec{j}) = -2\vec{i} - 5\vec{j} \\ -2\varphi(\vec{i}) + \varphi(\vec{j}) = -3\vec{i} - \vec{j} \end{cases}$. Après calculs, $\varphi(\vec{i}) = \vec{i} - 4\vec{j}$ et

$\varphi(\vec{j}) = -\vec{i} - 9\vec{j}$. La matrice de φ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & -9 \end{bmatrix}$.

b) Déterminons les expressions analytiques de g dans le repère $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$.

Si $(x'; y')$ est le couple des coordonnées de l'image M' du point M de coordonnées $(x; y)$ par g , alors $\varphi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{A'M'}$.

On peut écrire : $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & -9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'-3 \\ y'-4 \end{pmatrix}$.

On obtient $\begin{cases} x'-3 = (x-1) - (y-1) \\ y'-4 = -4(x-1) - 9(y-1) \end{cases}$. D'où $\begin{cases} x' = x - y + 3 \\ y' = -4x - 9y + 17 \end{cases}$.

Autre méthode :

L'écriture analytique de l'application g est de la forme $\begin{cases} x' = x - y + a \\ y' = -4x - 9y + b \end{cases}$.

Puisque $g(A) = A'$, on peut écrire : $x_{A'} = x_A - y_A + a$ et $y_{A'} = -4x_A - 9y_A + b$.

$3 = 1 - 1 + a$ et $4 = -4 - 9 + b$. D'où, $a = 3$ et $b = 17$.

L'écriture analytique de g est donc donnée par le système $\begin{cases} x' = x - y + 3 \\ y' = -4x - 9y + 17 \end{cases}$.

**S'exercer**

1.e Donner dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, les expressions analytiques de l'application affine qui associe au point A de coordonnées $(1; -2)$ le point B de coordonnées $(2; 4)$ et dont

l'endomorphisme associé a pour matrice $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

13 ABC est un triangle et I est le milieu du segment $[BC]$. f est l'application affine du plan telle que $f(A) = A$; $f(I) = I$ et $f(B) = C$.

Soit P le point du plan tel que I soit le milieu du segment $[AP]$.

- Montrer que P est invariant par f .
- Déterminer la matrice de l'endomorphisme associé à f dans la base $(\overline{AB}, \overline{AC})$.
- Donner l'expression analytique de f dans le repère $(A, \overline{AB}, \overline{AC})$.
- Quelle est la matrice de f ?

14 $ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = BD$; f l'application affine du plan telle que : $f(A) = B$; $f(B) = D$ et $f(D) = C$; t la translation de vecteur $\overline{AB}$ et g est l'application affine du plan dans lui-même définie par $g = t^{-1} \circ f$.

- Montrer que g est une application affine du plan
- Préciser la nature et les éléments géométriques de g
- Donner le programme de construction de l'image M' d'un point M du plan par g .

15 Le plan est muni d'un repère (O, I, J) , f est l'application affine du plan qui transforme (O, I, J) en (O', I', J') où $O'(0, -2)$; $I'(1, -1)$ et $J'(-1, -1)$. Déterminer les expressions analytiques de f dans le repère (O, I, J) .

16 Soit $\mathcal{E}$ l'espace rapporté à un repère $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; A, B, C, D, A', C', D' les points de coordonnées respectives $(1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1), (1; 1; 1), (0; 2; 1), (-1; 0; 0), (0; -1; -1)$ et $(2; 0; 3)$.

Déterminer les expressions analytiques de l'application affine g qui associe aux points A, B, C et D respectivement les points A', B', C' et D' .

14 APPLICATIONS AFFINES BIJECTIVES.



Prendre un bon départ

f une application affine d'endomorphisme associé φ ; A et A' deux points tels que $f(A) = A'$.

Activité 1

On suppose que f est injective.

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\varphi(\vec{u}) = \varphi(\vec{v})$.

a) Montrer qu'il existe deux points M et N tels que $\vec{u} = \overline{AM}$ et $\vec{v} = \overline{AN}$.

b) Montrer alors que $f(M) = f(N)$.

c) En déduire que $M = N$ et alors $\vec{u} = \vec{v}$. Que peut-on en déduire pour φ ?

On suppose que φ injective. Soient M et N deux points tels que $f(M) = f(N)$.

a) Déduire que $\overline{A'f(M)} = \overline{A'f(N)}$.

b) En déduire que $\varphi(\overline{AM}) = \varphi(\overline{AN})$.

c) Montrer alors que $M = N$, puis conclure.

Activité 2

- 1) On suppose que f est surjective. Soit $\vec{v}$ un vecteur.
- Montrer qu'il existe un unique point N tel que $\vec{v} = \overrightarrow{AN}$.
 - Montrer qu'il existe un point M tel que $f(M) = N$.
 - En déduire que $\vec{v} = \varphi(\overrightarrow{AM})$. Justifier que φ est surjective.

2. On suppose que φ est surjective. Soit N un point.

- Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{u}$ tel que $\varphi(\vec{u}) = \overrightarrow{AN}$.
- Après avoir montré qu'il existe un point M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$, montrer que $f(M) = N$.
Déduire que f est surjective.



Retenir

- Si f est une application affine d'endomorphisme associé φ , alors il y a équivalence entre :
 - « f est injective » et « φ est injective » ;
 - « f est surjective » et « φ est surjective » ;
 - « f est bijective » et « φ est bijective ».
- Une transformation d'un espace affine est une application qui est affine et bijective de cet espace affine.

Remarque

- Une application affine d'un espace affine est une transformation si et seulement si par cette application, les points associés aux points d'un repère forment aussi un repère.
- Une application affine définie sur une droite $(\mathcal{D})$ est une transformation de $(\mathcal{D})$ si et seulement si à un bipoint de points distincts, est associé un bipoint des points distincts.
- Une application affine d'un plan affine $\mathcal{P}$ est une transformation de $\mathcal{P}$ si et seulement si trois points non alignés ont pour images respectives par cette application, trois points non alignés ;
- Une application affine de l'espace $\mathcal{E}$ est une transformation de $\mathcal{E}$ si et seulement si quatre points non coplanaires de $\mathcal{E}$ ont pour images respectives par cette application, quatre points non coplanaires.
- Une application affine est une transformation si et seulement si son endomorphisme est un automorphisme.

Exemple

- 1) V_2 est le plan vectoriel de base $(\vec{i}, \vec{j})$; $\mathcal{P}$ un plan affine rapporté à un repère $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$.
 l'application affine dont l'endomorphisme est défini par : $\psi(\vec{i}) = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ et $\psi(\vec{j}) = 5\vec{i} - \vec{j}$.
 Montrons que f est une transformation du plan $\mathcal{P}$.
 Il suffit de montrer que ψ est bijectif. $\det(\psi(\vec{i}); \psi(\vec{j})) = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 - (-3) \times 5 = 17$.
 Puisque $\det(\psi(\vec{i}); \psi(\vec{j})) \neq 0$, ψ est bijectif.

f est par conséquent une transformation du plan $\mathcal{P}$.

- 2) Soit g une application affine d'écriture analytique $\begin{cases} x' = mx - (5m-4)y + 3 \\ y' = x + (m-2)y - 1 \end{cases}$ où m est un réel indépendant de x et de y .

Examinons suivant les valeurs du réel m , le caractère bijectif de g .

La matrice de l'application g est $A(m) = \begin{pmatrix} m & -5m+4 \\ 1 & m-2 \end{pmatrix}$.

$$\text{Dé } A(m) = \begin{vmatrix} m & -5m+4 \\ 1 & m-2 \end{vmatrix} = m(m-2) - (-5m+4) \\ = m^2 - 2m + 5m - 4 = m^2 + 3m - 4.$$

Déterminons les racines du polynôme $m \rightarrow m^2 + 3m - 4$.

Son discriminant est $\Delta = 3^2 - 4(-4) = 25$. Les racines de ce polynôme sont 1 et -4 .

Conclusion. Pour $m=1$ ou $m=-4$, g n'est pas bijective.

Pour $m \in \mathbb{R} - \{1; -4\}$, g est bijective.

- 3) Soit $\mathcal{E}$ l'espace rapporté à un repère cartésien $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère l'application

$$\text{affine } h \text{ de } \mathcal{E}, \text{ d'écriture analytique : } \begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x - y + 2 \\ z' = y + z - 3 \end{cases}$$

Montrons que h est une transformation de l'espace $\mathcal{E}$. Soit φ l'endomorphisme associé à h . Il suffit de montrer que $\ker \varphi = \{\vec{0}\}$.

La matrice de φ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur du noyau de

$$\varphi \text{ de } \varphi(\vec{u}) = \vec{0} \text{ on a } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ D'où, } \begin{cases} y = 0 \\ x - y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \text{ Par suite, } x = y = z = 0.$$

Ainsi, le vecteur nul est le seul vecteur du noyau de φ .

φ est injectif et comme φ est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie non nulle, φ est aussi bijectif. f est donc une transformation de l'espace $\mathcal{E}$.



S'exercer

Montrer que l'application affine d'expressions analytiques : $\begin{cases} x' = 2x - y + 1 \\ y' = 3x + 5y - 2 \end{cases}$ est une transformation du plan.

ABC est un triangle isocèle de sommet principal A . f est l'application affine du plan telle que $f(A) = A, f(B) = C$ et $f(C) = B$.

i) Montrer que f est une transformation affine du plan.

ii) Montrer que $f \circ f = Id_p$ et en déduire f^{-1} .

1.l $ABCD$ est un parallélogramme de centre O . g est l'application affine du plan définie par $g(A) = O, g(B) = B$ et $g(D) = D$.

- Montrer que $g(C) = O$.
- g est-elle une transformation affine du plan ?
- Vérifier que $g \circ g = g$.

1.m $ABCD$ est un losange tel que $OA = 2OB$. A' désigne le symétrique de A par rapport à D et A'' le symétrique de A par rapport à B . f est l'application affine du plan définie par $f(B) = A'', f(D) = A'$ et $f(A) = A$.

- Justifier que f est une transformation affine du plan.
- Justifier l'existence d'une homothétie h telle que $f = h \circ S_{(BD)}$.

En déduire la construction de l'image M' d'un point M du par f .

1.n Montrer que l'application affine de l'espace d'expressions analytiques :
$$\begin{cases} x' = 3x + 2y - 2z \\ y' = 2x + 3y - 2z \\ z' = 2x + 2y - z \end{cases}$$
 le repère $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une transformation de l'espace.

Soit σ l'endomorphisme défini sur la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par $\sigma(\vec{i}) = -\vec{i} + \vec{k}$; $\sigma(\vec{j}) = \vec{j} + \vec{k}$ et $\sigma(\vec{k}) = \vec{i} + \vec{j}$.

Montrer que $\sigma(\vec{j})$ s'exprime comme combinaison linéaire de $\sigma(\vec{i})$ et de $\sigma(\vec{k})$. Une application affine d'endomorphisme associé σ peut-elle être bijective? Justifier votre réponse.

1.5. COMPOSÉE DE DEUX APPLICATIONS AFFINES



Prendre un bon départ

Activité 1

Soient deux applications affines f et g d'un espace affine X , d'endomorphismes associés respectifs φ et ψ .

- Soit G le barycentre d'un système des points pondérés $\{(A_1, a_1); (A_2, a_2); \dots; (A_n, a_n)\}$.

Montrer que $(g \circ f)(G)$ est le barycentre du système

$\{((g \circ f)(A_1), a_1); ((g \circ f)(A_2), a_2); \dots; ((g \circ f)(A_n), a_n)\}$. En déduire que l'application $g \circ f$ est une application affine.

- Soit A un point; A' son image par f et A'' l'image de A' par g .

On suppose que le point M' est l'image d'un point M par f , M'' l'image de M' par g .

Montrer que $A''(g \circ f)(M) = (\psi \circ \varphi)(\overrightarrow{AM})$.

En déduire l'endomorphisme associé à l'application affine $g \circ f$.

Activité 2

Soit f une transformation d'endomorphisme φ ; A un point d'image B par f et M un point d'image N par f .

- Montrer que $\varphi^{-1}(\overrightarrow{BN}) = \overrightarrow{AM}$.

- En déduire que f^{-1} est une application affine, puis préciser l'endomorphisme associé à f^{-1} .

Retenir

- Si g et f sont deux applications affines d'endomorphismes associés φ et ψ respectivement, alors $g \circ f$ est une application affine d'endomorphisme associé $\varphi \circ \psi$.
- Si f est une transformation affine d'endomorphisme associé φ , alors f^{-1} est aussi une transformation affine. Son endomorphisme associé est φ^{-1} .
- L'ensemble G des bijections affines de l'espace affine X muni de la composition des applications est un groupe appelé groupe affine de X .

Exemple

Si t est une translation, l'endomorphisme associé à $t \circ f$ est celui de l'endomorphisme associé à f car l'endomorphisme associé à t est l'identité.

Si h est une homothétie de rapport k , f une application affine d'endomorphisme associé φ , alors $h \circ f$ et $f \circ h$ sont affines d'endomorphisme associé $k\varphi$. Ces deux applications sont égales s'il existe un point A tel que $(f \circ h)(A) = (h \circ f)(A)$.

S'exercer

- f et g sont deux applications affines d'écritures analytiques respectives :
- $$\begin{cases} x' = x + y - 1 \\ y' = 3x + 2y + 2 \end{cases}$$
- Montrer que les applications $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bijectives.
 - Définir analytiquement $f \circ g$ et $g \circ f$.
 - Définir analytiquement f^{-1} et g^{-1} .

16. IMAGE DE L'ESPACE, D'UN PLAN OU D'UNE DROITE PAR UNE APPLICATION AFFINE.

Soit X un espace affine qui peut être une droite, un plan ou l'espace ; f une application affine de X dans lui-même.

Soit $\mathcal{R} = (A_0, A_1, A_2, \dots, A_n)$ ($n \geq 2$) un repère affine de X .

On sait que pour tout point M de X , il existe n nombres réels $x_1, x_2, \dots, x_n$ tels que :

$$\vec{OM} = x_1 \vec{OA_1} + x_2 \vec{OA_2} + \dots + x_n \vec{OA_n}.$$

Comment appelle-t-on le n -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pour le point M ?

Montrer que si $f(A_i) = A_i$, pour tout $0 \leq i \leq n$, alors $f(M) = M$.

Montrer que si $f(\mathcal{R})$ est un repère de X , alors f est bijective et $f(X) = X$.

Montrer que si $f(\mathcal{R})$ n'est pas un repère de X , alors il existe un repère $\mathcal{R}'$ de $f(X)$ ayant moins de points que $\mathcal{R}$.



Retenir

Soit X un espace affine ; $\mathcal{R}=(A_0, A_1, A_2, \dots, A_n)$ ($n \geq 2$) un repère affine de X ; f une application affine de X dans lui-même.

si f est bijective, alors $f(X) = X$

Si f n'est pas bijective, alors tout repère de $f(X)$ est formé d'au plus n points.

Remarque

- Une application affine d'un plan $\mathcal{P}$ dans lui-même, transforme :
 - $\mathcal{P}$ en $\mathcal{P}$ si elle est bijective ;
 - $\mathcal{P}$ en une droite, ou en un point sinon.
 - une droite en une droite ou en un point
- Une application de l'espace $\mathcal{E}$ dans lui-même, transforme :
 - $\mathcal{E}$ en $\mathcal{E}$ si elle est bijective ;
 - $\mathcal{E}$ en un plan, ou en une droite, ou en un point.
 - un plan en un plan, une droite ou en un point.
 - une droite en une droite ou en point

Exemple

1) Soit f l'application affine du plan affine $\mathcal{P}$ dont l'écriture analytique est : $\begin{cases} x' = x + y - 1 \\ y' = x + y - 3 \end{cases}$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

a) Déterminons les coordonnées du point invariant par f . $(x; y)$ sont les coordonnées du point invariant par f si et seulement si $x = x + y - 1$ et $y = x + y - 3$. On a ainsi $x = 3$. f admet un unique point invariant, qui a pour coordonnées $(3; 1)$.

b) Donnons la nature de $f(\mathcal{P})$, image de $\mathcal{P}$ par f .

La matrice de l'endomorphisme associé à f est $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\text{Det}(M) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. M n'est pas inversible et donc f n'est pas bijective.

$f(\mathcal{P})$ est soit une droite, soit un point de $\mathcal{P}$.

Soit I et J deux points tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$.

(O, I, J) est un repère affine du plan $\mathcal{P}$. Soient $O' = f(O)$; $I' = f(I)$; $J' = f(J)$.

$O'(-1; -3)$; $I'(0; -2)$; $J'(0; -2)$.

$I' = J'$ et alors $(O'; I')$ est un repère de $f(\mathcal{P})$. Puisque $O' \neq I'$, $f(\mathcal{P})$ est la droite de repère $(O'; I')$. (Si O', I' et J' avaient été distincts deux à deux, ils seraient alignés et on aurait retenu deux points parmi ces trois).

Déterminons dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D} = f(\mathcal{P})$.

$M(x; y)$ est un point de $\mathcal{D}$ si et seulement si $\begin{vmatrix} x+1 & 1 \\ y+3 & 1 \end{vmatrix} = 0$. D'où, $x - y - 2 = 0$.

Autre méthode Soit $(x'; y')$ le couple des coordonnées du point image d'un point de coordonnées $(x; y)$ par f .

On a $\begin{cases} x' = x + y - 1 \\ y' = x + y - 3 \end{cases}$. En utilisant la première équation pour trouver l'expression de x , et en remplaçant dans la deuxième équation, x par cette expression, on trouve $x' - y' - 2 = 0$ qui est une équation que doivent vérifier les coordonnées $(x'; y')$ d'un point de $\mathcal{D}$. On a trouvé $x - y - 2 = 0$ parce qu'on a supposé que le point de $\mathcal{D}$ a pour coordonnées $(x; y)$.

Dans l'espace $\mathcal{E}$, on définit une application affine g de définition analytique

$$x' = y' = z' = \frac{1}{4}(x + 2y + z).$$

Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équations catésiennes : $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+3}{1}$.

Déterminons l'image $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$ par g .

La droite $\mathcal{D}$ passe par le point A de coordonnées $(1; -2; -3)$ et de vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = -3 + t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$

Pour $t = -1$, $x = 0, y = 0$ et $z = -4$, le point B de coordonnées $(0; 0; -4)$ est un autre point de l'espace. Soient A' et B' les images respectives de A et de B par g .

$A' \left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}; -\frac{3}{2} \right)$ et $B'(-1; -1; -1)$. Puisque $A' \neq B'$, (A', B') est un repère affine de $\mathcal{D}'$. $\mathcal{D}'$ est la droite $(A'B')$. Elle passe par exemple par le point A' et a pour vecteur directeur est $\overrightarrow{A'B'} \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right)$.

S'exercer

ABC est un triangle d'un plan affine $\mathcal{P}$, f est l'application affine telle que $f(A) = B$ et $f(B) = A$, $f(C) = C$.

- Justifier que f est une transformation affine $\mathcal{P}$.
- On désigne par C' le milieu du segment $[AB]$. Montrer que (CC') est invariante point par point par f .
- Démontrer que la droite (AB) est globalement invariante par f .

ABC est un triangle d'un plan affine $\mathcal{P}$, D est le symétrique de B par rapport à C . f est l'application affine du plan telle que $f(A) = A$, $f(B) = D$ et $f(C) = B$.

- Montrer que f est une transformation affine de $\mathcal{P}$.
- Déterminer l'ensemble des points invariants par f .

Le plan affine $\mathcal{P}$ est muni d'un repère (O, I, J) . Montrer qu'une application qui laisse un repère invariant point par point est l'application identité.

g une application affine de $\mathcal{P}$ dans lui-même dont l'écriture analytique est $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y \end{cases}$.

- Montrer que f est bijective.
- Déterminer l'ensemble des points M tels que O, M, M' soient alignés.
- Déterminer les droites :

- parallèles à leurs images par f ;
- confondues à leurs images par f .

1.r Soit $\mathcal{E}$ l'espace rapporté à un repère $\mathcal{R}=(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère l'application f définie de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ par :

$$f \text{ par : } \begin{cases} x' = 3x - 4y - 4 \\ y' = 2x - y - 2z - 2 \\ z' = 2x - 3z - 4 \end{cases}$$

- L'application f est-elle bijective ?
- Donner la nature et une équation cartésienne dans le repère $\mathcal{R}=(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, de l'image par f de la droite passant par le point $A(1; 0; 2)$ et de vecteur $\vec{u}(1; 2; 3)$.
- Donner la nature et une équation cartésienne de l'image du plan P dont une équation cartésienne dans le repère $\mathcal{R}=(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est $x - z + 2 = 0$.

LEÇON 2

PROJECTIONS, SYMÉTRIES ET AFFINITÉS D'UN ESPACE AFFINE.

Reconnaitre et caractériser une projection, une symétrie et une affinité.

11. PROJECTIONS AFFINES.

Dans toute cette leçon, Y est un espace affine qui peut être réduit à un point, une droite, un plan ou l'espace physique. $\vec{Y}$ est l'ensemble des vecteurs formés à partir des bipoints de $Y \times Y$. $\vec{Y}$ est encore appelé direction de Y . X est un sous-espace affine de Y , de direction $\vec{X}$ et E un sous-espace vectoriel de $\vec{Y}$.



Prendre un bon départ

Activité 1

Soit X un espace qui peut être réduit à un point, une droite du plan, un plan de l'espace ou l'espace physique; $\vec{X}$ l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ tels que M et N décrivent X ; E un espace vectoriel tel que $\vec{X}$ et E sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Soit M un point quelconque.

Montrer que l'ensemble des points N tels que $\overrightarrow{MN} \in E$ a un seul point M_1 en commun avec X .

Soit $p: M \rightarrow M_1$. Montrer que :

- $p \circ p = p$;
- si $M \in X$, alors $p(M) = M$;
- si M est tel que $p(M) = M$, alors $M \in X$.

Soient M et N deux points d'images respectives M_1 et N_1 par p .

Montrer que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M_1N_1} + (\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{N_1N})$

Vérifier que $\overrightarrow{M_1N_1}$ est un vecteur de $\vec{X}$, tandis que $\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{N_1N}$ est un vecteur de E .

Montrer que $\pi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M_1N_1}$ où π est la projection vectorielle sur $\vec{X}$, de direction E .

En déduire que p est une application affine, puis nommer l'endomorphisme qui lui est associé.

Activité 2

Soit f une application affine de X vérifiant $f^2 = f \circ f = f$; φ l'endomorphisme associé à f .

Justifier que $\varphi \circ \varphi = \varphi$.

Donner la base et la direction de φ .

Montrer que $f(X)$ est l'ensemble des points invariants par f .

En déduire que f est la projection sur l'ensemble $f(X)$, de direction $\ker \varphi$.

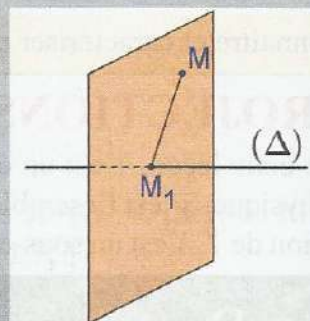
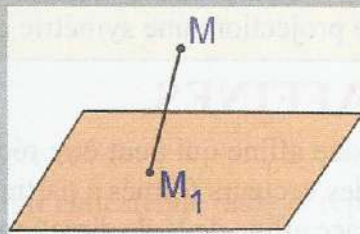
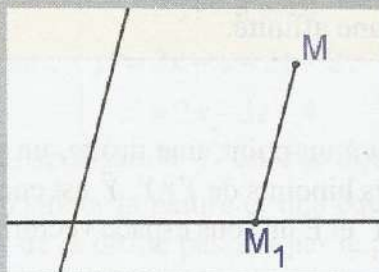


Retenir

On appelle projection sur X , de direction E , l'application p qui à un point quelconque M , associe le point M' , intersection de X et de l'ensemble des points N , tels que $\overrightarrow{MN} \in E$.

Si p est une projection, alors $p \circ p = p$.

Si une application affine f vérifie $f \circ f = f$, alors f est une projection. Sa base est l'ensemble des points invariants par f et sa direction est l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{Mf(M)}$ lorsque M varie.



Remarque

- ♣ Dans le plan, on peut avoir une projection sur une droite (D) parallèlement à une autre droite (D') lorsque (D) et (D') ne sont pas parallèles, une projection sur $\{A\}$ est l'application constante $M \rightarrow A$, ou l'identité.
- ♣ Dans l'espace, on peut avoir :
 - L'identité ;
 - la projection sur un plan (P) parallèlement à une droite (D) lorsque (P) et (D) ne sont pas parallèles ;
 - la projection sur (D) et de direction (P) . $((D)$ et (P) ont des directions supplémentaires) ;
 - la projection sur $\{A\}$ qui est l'application constante $M \rightarrow A$.
- ♣ Toute projection est une application affine
- ♣ Une projection qui n'est pas l'identité n'est pas une transformation.

Exemple

1) Soit une application f définie dans un plan $\mathcal{P}$, rapporté à un repère $\mathcal{R}=(O ; \vec{i}, \vec{j})$, de

$$\text{tion analytique } \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(4x + 2y - 1) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x - y + 2) \end{cases}$$

a) Déterminons l'ensemble des points invariants par f .

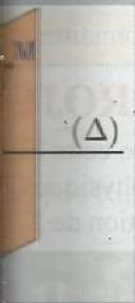
$$\text{Un point de coordonnées } (x; y) \text{ est invariant si et seulement si } \begin{cases} x = \frac{1}{3}(4x + 2y - 1) \\ y = \frac{1}{3}(-2x - y + 2) \end{cases}$$

On a : $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -2x - 4y = -2 \end{cases}$. D'où $x + 2y = 1$ car la deuxième équation est équivalente à la première.

L'ensemble des points invariants par f est la droite (D) dont une équation cartésienne est $x + 2y = 1$.

b) Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ appartiennent à une même direction, lorsque M varie.

La base est l'en-
semble $Mf(M)$



est à une autre
l'application
(P) et (D) ne sont
supplémentaires

$(O; \vec{i}, \vec{j})$, de défini-
 $(4x+2y-1)$
 $(-2x-y+2)$
est équivalente à la

équation cartésienne
lorsque M varie

En effet, $\overrightarrow{MM'} = (x' - x)\vec{i} + (y' - y)\vec{j} = \left(\frac{1}{3}(x + 2y - 1)\right)\vec{i} + \left(\frac{1}{3}(-2x - 4y + 2)\right)\vec{j}$
 $\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{3}(x + 2y - 1)(\vec{i} - 2\vec{j})$.

Nous constatons que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}(1; -2)$.

Toutes les droites (MM') lorsque $M \neq M'$ sont parallèles.

On pouvait aussi montrer que $\frac{y' - y}{x' - x} = -2$.

c) Montrons que M' appartient à une droite fixe quelque soit le point M d'image M' par f .

Du système $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(4x + 2y - 1) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x - y + 2) \end{cases}$, $\begin{cases} 3x' = 4x + 2y - 1 \\ 3y' = -2x - y + 2 \end{cases}$; soit $4x + 2y = 3x' + 1$ et
 $-2x - y = 3y' - 2$.

On en déduit que $3x' + 1 = -2(3y' - 2)$. D'où, $3x' + 6y' - 3 = 0$.

Le point M' est toujours situé sur la droite (D') d'équation : $x + 2y - 1 = 0$.

On remarque que (D) et (D') sont confondues.

f est donc une projection. C'est la projection sur la droite (D) : $x + 2y - 1 = 0$ de direction la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{u}(1; -2)$.

d) Montrons que $f \circ f = f$

Première méthode : Écrire les expressions analytiques de $f \circ f$, puis les comparer à celles de f .

Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point quelconque du plan P; $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $M'' \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ deux points tels que

$M' = f(M)$ et $M'' = f(M')$. $M'' \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = (f \circ f)(M)$.

Puisque $M' = f(M)$, on a : $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(4x + 2y - 1) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x - y + 2) \end{cases}$; de $M'' = f(M')$, $\begin{cases} x'' = \frac{1}{3}(4x' + 2y' - 1) \\ y'' = \frac{1}{3}(-2x' - y' + 2) \end{cases}$

$x'' = \frac{1}{3}(4x' + 2y' - 1) = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}(4x + 2y - 1) + \frac{2}{3}(-2x - y + 2) - 1\right) = \frac{1}{3}(4x + 2y - 1) = x'$

$y'' = \frac{1}{3}(-2x' - y' + 2) = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}(4x + 2y - 1) - \frac{1}{3}(-2x - y + 2) + 2\right) = \frac{1}{3}(-2x - y + 2) = y'$

on a donc $(f \circ f)(M) = f(M)$. d'où $f \circ f = f$.

Deuxième méthode : Écrire la matrice A de l'endomorphisme de f , choisir un point quelconque (O par exemple), puis montrer que $A^2 = A$ et que $(f \circ f)(O) = f(O)$.

a. (D) est une droite du plan, d'équation cartésienne $x - 2y + 1 = 0$; $\vec{e}(2; 3)$ un vecteur du plan.

Montrons qu'on peut définir une projection sur la droite (D), de direction la droite vectorielle E, engendrée par $\vec{e}$.

Il suffit de vérifier que la direction F de (D) et E sont supplémentaires dans le plan.

En effet, $\overrightarrow{MM'} = (x' - x)\vec{i} + (y' - y)\vec{j} = \left(\frac{1}{3}(x + 2y - 1)\right)\vec{i} + \left(\frac{1}{3}(-2x - 4y + 2)\right)\vec{j}$
 $\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{3}(x + 2y - 1)(\vec{i} - 2\vec{j})$.

Nous constatons que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}(1; -2)$.

Toutes les droites (MM') lorsque $M \neq M'$ sont parallèles.

On pouvait aussi montrer que $\frac{y' - y}{x' - x} = -2$.

c) Montrons que M' appartient à une droite fixe quelque soit le point M d'image M' par f .

Du système $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(4x + 2y - 1) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x - y + 2) \end{cases}$, $\begin{cases} 3x' = 4x + 2y - 1 \\ 3y' = -2x - y + 2 \end{cases}$; soit $4x + 2y = 3x' + 1$ et
 $-2x - y = 3y' - 2$.

On en déduit que $3x' + 1 = -2(3y' - 2)$. D'où, $3x' + 6y' - 3 = 0$.

Le point M' est toujours situé sur la droite (D') d'équation : $x + 2y - 1 = 0$.

On remarque que (D) et (D') sont confondues.

f est donc une projection. C'est la projection sur la droite $(D) : x + 2y - 1 = 0$ de direction la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{u}(1; -2)$.

d) Montrons que $f \circ f = f$

Première méthode : Écrire les expressions analytiques de $f \circ f$, puis les comparer à celles de f .

Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point quelconque du plan P ; $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $M'' \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ deux points tels que

$M' = f(M)$ et $M'' = f(M')$. $M'' \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = (f \circ f)(M)$.

Puisque $M' = f(M)$, on a : $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(4x + 2y - 1) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x - y + 2) \end{cases}$; de $M'' = f(M')$, $\begin{cases} x'' = \frac{1}{3}(4x' + 2y' - 1) \\ y'' = \frac{1}{3}(-2x' - y' + 2) \end{cases}$

$x'' = \frac{1}{3}(4x' + 2y' - 1) = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}(4x + 2y - 1) + \frac{2}{3}(-2x - y + 2) - 1\right) = \frac{1}{3}(4x + 2y - 1) = x'$

$y'' = \frac{1}{3}(-2x' - y' + 2) = \frac{1}{3}\left(\frac{-2}{3}(4x + 2y - 1) - \frac{1}{3}(-2x - y + 2) + 2\right) = \frac{1}{3}(-2x - y + 2) = y'$

on a donc $(f \circ f)(M) = f(M)$. d'où $f \circ f = f$.

Deuxième méthode : Écrire la matrice A de l'endomorphisme de f , choisir un point quelconque (O par exemple), puis montrer que $A^2 = A$ et que $(f \circ f)(O) = f(O)$.

2) a. (D) est une droite du plan, d'équation catésienne $x - 2y + 1 = 0$; $\vec{e}(2; 3)$ un vecteur du plan.

Montrons qu'on peut définir une projection sur la droite (D) , de direction la droite vectorielle E , engendrée par $\vec{e}$.

Il suffit de vérifier que la direction F de (D) et E sont supplémentaires dans le plan.

Le vecteur $\vec{u}(2;1)$ est un vecteur de base de F . $\det(\vec{u}; \vec{e}) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4$.

$\vec{u}$ et $\vec{e}$ sont non colinéaires et alors E et F sont supplémentaires.

On peut donc définir une projection g (unique) de base (D) et de direction E .

- b) Soit $(x'; y')$ le couple des coordonnées du point M' , image d'un point $M(x; y)$ par g .

Le point M' est un point sur (D) et le vecteur $\overline{MM'}$ est colinéaire à E .

On a $x' - 2y' + 1 = 0$ et $x' - x = 2a, y' - y = 3a$.

D'où $\begin{cases} x' - 2y' = 1 \\ x' = 2a + x \\ y' = y + 3a \end{cases}$. En remplaçant dans la première équation x' et y' par leurs expressions

respectives, $2a + x - 2y - 3a = 1$. D'où, $a = x - 2y - 1$.

On a $\begin{cases} x' = 3x - 4y - 2 \\ y' = 3x - 5y - 3 \end{cases}$. Ce système est constitué des expressions analytiques de g dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On pouvait aussi utiliser les relations $x' - 2y' = 1$ et $\det(\vec{e}, \overline{MM'}) = 0$ pour avoir un système de deux équations linéaires aux inconnues x' et y' . Résoudre le système obtenu pour avoir les expressions respectives de x' et y' en fonction de x et de y .

- 3) L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. ; $(\mathcal{P})$ le plan de $\mathcal{E}$ dont une équation est $x + y - z + 2 = 0$; E la droite vectorielle dont une base est formée du vecteur $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; F la direction du plan $\mathcal{P}$.

- a) Montrons que E et F sont supplémentaires dans l'espace.

F est l'ensemble des vecteurs dont les composantes vérifient $x + y - z = 0$. $2 + 1 - 1 = 2 \neq 0$ donc le vecteur $\vec{u}$ n'appartient pas à F .

E et F sont donc supplémentaires dans l'espace.

- b) h est la projection sur $\mathcal{P}$, de direction E .

Soient $(x'; y'; z')$ les coordonnées du point M' image du point M de coordonnées $(x; y; z)$ par h .

On a : $M' \in \mathcal{P}$ et $\overline{MM'} \in E$

Puisque $\overline{MM'} \in E$, il existe un réel t tel que $\overline{MM'} = t\vec{u}$ $\begin{cases} x' + y' - z' = -2 \\ x' - x = 2t \\ y' - y = t \\ z' - z = t \end{cases}$. En reportant

expressions respectives de x', y' et z' dans la première équation, on trouve $t = -\frac{1}{2}(x + y - z - 2)$

Ainsi, $x' = x + 2t = -y + z - 2$; $y' = t + y = \frac{1}{2}(-x + y + z - 2)$ et $z' = t + z = \frac{1}{2}(-x - y + z + 2)$

$$\text{d'où } h(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -y + z - 2 \\ y' = \frac{1}{2}(-x + y + z - 2) \\ z' = \frac{1}{2}(-x - y + z + 2) \end{cases}$$



S'exercer

1. f est l'application définie du plan $\mathcal{P}$ de repère $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dans lui-même, par son écriture

$$\text{analytique} \begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x + y - 1) \\ y' = -\frac{1}{2}(x + y - 2) \end{cases}$$

dans le repère $\mathcal{R}$.

Déterminer l'ensemble des points invariants par f .

Montrer que les droites (MM') ont la même direction dont on donnera un vecteur de base.

Donner la nature et les éléments caractéristiques de f .

2. Soit g l'application de l'espace, de définition analytique $x' = y' = z' = \frac{1}{4}(x + 2y + z)$.

Déterminer l'ensemble des points invariants par g .

Montrer que les droites (MM') ont la même direction dont on donnera un vecteur de base.

Donner la nature et les éléments caractéristiques de f .

Peut-on prévoir les expressions analytiques de $f \circ f$?

3. Montrer l'existence et définir analytiquement :

la projection dans le plan sur la droite $(D) : 3x - y + 3 = 0$, dont la direction a pour vecteur de base, le vecteur de coordonnées $(3; -4)$;

la projection dans l'espace, sur le plan $(P) : x - 3y + z - 1 = 0$, dont la direction a pour vecteur de base, le vecteur de composantes $(2; -1; 1)$.

la projection orthogonale dans l'espace, sur la droite $(D) : x - 1 = \frac{-y - 2}{2} = z + 3$.

12. SYMÉTRIES AFFINES.



Prendre un bon départ

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$; f une application affine d'écriture analytique :

$$x' = \frac{1}{3}(-x - 2y + 2)$$

$$y' = \frac{1}{3}(-4x + y + 2)$$

Déterminer l'ensemble (D) des points fixes par f .

Montrer que pour tout point M , si $f(M) = M'$, alors $\overline{MM'}$ est colinéaire à un vecteur $\vec{u}$ indépendant de M .

Montrer qu'on peut définir une projection p sur (D) , de direction la droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$.

Donner l'écriture analytique de p dans le repère $\mathcal{R}$.

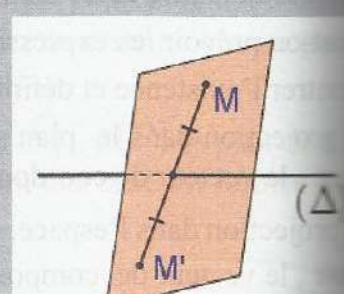
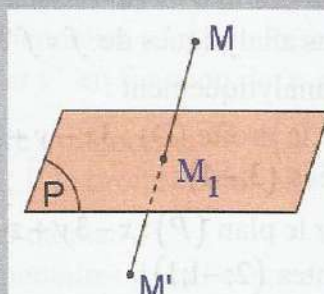
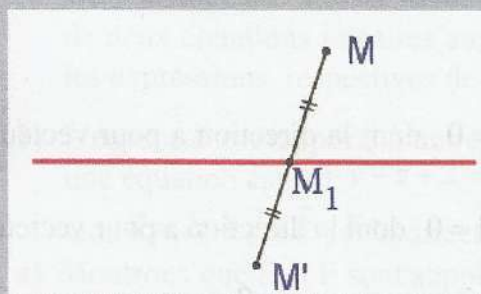
- e) Montrer que pour tout point M , $p(M)$ est le milieu de $[MM']$.
 f) Construire M' à partir d'un point M arbitrairement choisi.
 g) Conjecturer à partir de cette construction, la position de $(f \circ f)(M)$, puis confirmer cette conjecture à l'aide des expressions analytiques de $f \circ f$.



Retenir

Soit X un espace affine ayant pour direction le sous-espace vectoriel F , E un sous-espace vectoriel tel que E et F soient supplémentaires.

- L'application s qui à un point M associe le point M' tel que le projeté de M sur X , de direction E est le milieu du segment $[MM']$, est appelée symétrie de base X et de direction E .
 s est une application affine et $s \circ s = \text{identité}$. On dit que s est une application involutive ou encore que s est une involution.
- Toute application affine f telle que $f \circ f$ soit l'identité est une symétrie affine.
 sa base est l'ensemble des points invariants par f et sa direction est l'ensemble des vecteurs transformés en leurs opposés par l'endomorphisme associé à f .



Remarque

- ♠ Dans le plan, les symétries peuvent être :
 L'identité ;
 Les symétries centrales ;
 Les symétries par rapport à une droite de direction celle d' autre droite non parallèle à la première.
- ♠ Dans l'espace, les symétries peuvent être :
 L'identité ;
 Les symétries centrales ;
 Les symétries par rapport à une droite parallèlement à un plan tel que la droite ne soit pas parallèle au plan ;
 Les symétries par rapport à un plan et parallèlement à une droite telle que la droite ne soit pas parallèle au plan.
- ♠ Une symétrie par rapport à X est dite orthogonale lorsque le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est normal à quelque soit le point M d'image M' .
- ♠ Puisque toute symétrie s vérifie $s \circ s$ soit l'identité, s est bijective et $s^{-1} = s$.
 Toute symétrie est alors une transformation.

Exemple

Soit f une application affine du plan dans lui-même de définition analytique

$$\begin{cases} x' = 2x + 2y - 2 \\ y' = -\frac{3}{2}x - 2y + 3 \end{cases}$$

a) Déterminons l'ensemble des points fixes par f .

Les coordonnées $(x; y)$ de tels points vérifient :

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ -\frac{3}{2}x - 3y = -3 \end{cases}$$

Les deux équations du système sont équivalentes car la première s'obtient en multipliant les membres la deuxième par $-\frac{2}{3}$.

L'ensemble des points fixes par f est la droite d'équation $x + 2y = 2$.

b) Soit M' l'image d'un point quelconque M par f . Montrons que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MM'} &= (x' - x)\vec{i} + (y' - y)\vec{j} = (2x + 2y - 2 - x)\vec{i} + \left(-\frac{3}{2}x - 2y + 3 - y\right)\vec{j} \\ &= (x + 2y - 2)\vec{i} + \left(-\frac{3}{2}x - 3y + 3\right)\vec{j} \\ &= (x + 2y - 2)\left(\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j}\right) \end{aligned}$$

Tout vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire au vecteur $\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j}$.

c) Montrons que le milieu de $[MM']$ est situé sur l'ensemble des points fixes par f .

Soit I_M le milieu de $[MM']$. $x_{I_M} = \frac{x + x'}{2} = \frac{3}{2}x + y - 1$ et $y_{I_M} = \frac{y + y'}{2} = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$.

$$x_{I_M} + y_{I_M} = \frac{3}{2}x + y - 1 + 2\left(-\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}\right) = 2.$$

Conclusion : f est la symétrie par rapport à la droite d'équation $x + 2y = 2$, parallèlement à toute droite de vecteur directeur $\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j}$. f est une transformation du plan et $f^{-1} = f$.

S'exercer

Montrer que l'application affine g du plan $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ de définition analytique

$$\begin{cases} x' = x - y - 2 \\ y' = -y - 4 \end{cases}$$

est une symétrie dont on donnera les éléments qui la définissent. Est-elle orthogonale ?

Montrer que l'application affine h de l'espace dans lui-même de définition analytique

$$\begin{cases} x' = -y - z + 1 \\ y' = -2x - y - 2z + 2 \\ z' = x + y + 2z - 1 \end{cases}$$

est une symétrie dans l'espace, dont on déterminera les éléments qui la caractérisent. Est-elle une symétrie orthogonale ?

2.3. AFFINITÉS



Prendre un bon départ

Activité 1

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}=(O; \vec{i}, \vec{j})$; f une application affine d'écriture analytique :

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 4x - 3y \end{cases}$$

- Déterminer l'ensemble des (D) des points fixes par f .
- Montrer que pour tout couple $(M; M')$ tel que $f(M) = M'$, $\overline{MM'}$ est colinéaire à un vecteur $\vec{u}$ indépendant de M .
- Montrer qu'on peut définir une projection p sur (D), de direction la droite engendrée par $\vec{u}$.
- Donner l'écriture analytique de p dans le repère $\mathcal{R}$.
- Montrer qu'il existe un réel k tel que pour tout point M d'image M' par f , $\overline{M'p(M)} = k\overline{Mp(M)}$.
- Construire M' à partir d'un point M arbitrairement choisi.

Activité 2

Soit une application g , un réel a tels que pour tout couple des points $(M; M')$ tel que $M' = g(M)$; $p(M)$ le projeté du point M sur une droite (D) parallèlement à une droite (D'), on a

$$\overline{p(M)M} = a\overline{p(M)M'}$$

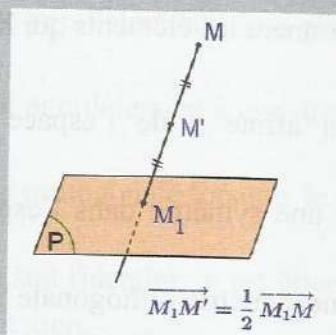
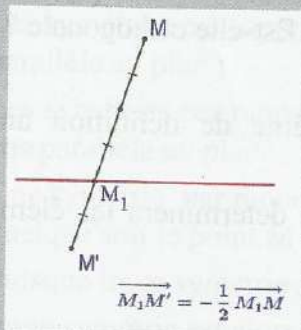
Donner la nature exacte de l'application g , dans chacun des cas : $a=0$; $a=1$; $a=-1$.

Donner une construction du point M' dans les cas : $a=2$; $a=-\frac{1}{2}$.



Retenir

- Soit p la projection sur un espace X de direction E ; a un nombre réel. L'application f qui à tout point M associe M' tel que $\overline{p(M)M'} = a\overline{p(M)M}$ est appelée affinité de base X , de direction E et son rapport a .
- Toute affinité est une application affine.
- Une affinité est une transformation si et seulement si son rapport est non nul. La réciproque de l'affinité de base X , de direction E et de rapport non nul a est l'affinité de base X , de direction E et de rapport $\frac{1}{a}$.



Remarque

- ★ L'affinité de rapport nul est une projection ; l'affinité de rapport -1 est une symétrie.
- ★ Si la projection associée à une affinité est orthogonale, alors cette affinité est dite orthogonale.
- ★ Si f est une affinité, alors sa base est l'ensemble des points invariants par f , la direction est la direction de l'ensemble des vecteurs $\overline{MM'}$ où $M' = f(M)$.

Exemple

- 1) Soit f une application affine du plan $\mathcal{P}$, d'expressions analytiques $\begin{cases} x' = x \\ y' = 3y - 1 \end{cases}$ dans un repère orthonormé $\mathcal{R}$ de $\mathcal{P}$.

- a) Cherchons l'ensemble des points invariants par f .

Les coordonnées $(x; y)$ d'un point fixe sont solution du système : $\begin{cases} x = x \\ y = 3y - 1 \end{cases}$. On obtient $y = \frac{1}{2}$.

L'ensemble des points invariants par f est la droite dont une équation cartésienne est $y = \frac{1}{2}$.

- b) Soit $M'(x'; y')$ l'image d'un point $M(x; y)$ par f .

$\overline{MM'} = (x' - x)\vec{i} + (y' - y)\vec{j} = 0\vec{i} + (2y - 1)\vec{j} = (2y - 1)\vec{j}$. Le vecteur $\overline{MM'}$ est colinéaire au vecteur $\vec{j}$.

- c) Soit M_1 le projeté du point M sur la droite d'équation (D) : $y = \frac{1}{2}$, parallèlement à l'axe des ordonnées (ou encore de direction $\vec{j}$).

Soit $(x_1; y_1)$ le couple des coordonnées du point M_1 .

On a $M_1 \in (D)$ et $\overline{MM_1}$ est colinéaire $\vec{j}$. $y_1 = \frac{1}{2}$ et il existe un réel t tel que $\overline{MM_1} = t\vec{j}$.

$x_1 - x = 0$, $y_1 - y = t$ et $y_1 = \frac{1}{2}$. $x_1 = x$ et $y_1 = \frac{1}{2}$.

- 2) Montrons qu'il existe un réel k tel que $\overline{M_1M'} = k\overline{M_1M}$.

$\overline{M_1M'} \left(0; 3y - \frac{3}{2} \right)$; $\overline{M_1M} \left(0; y - \frac{1}{2} \right)$. On constate que $\overline{M_1M'} = \frac{3}{2}\overline{M_1M}$.

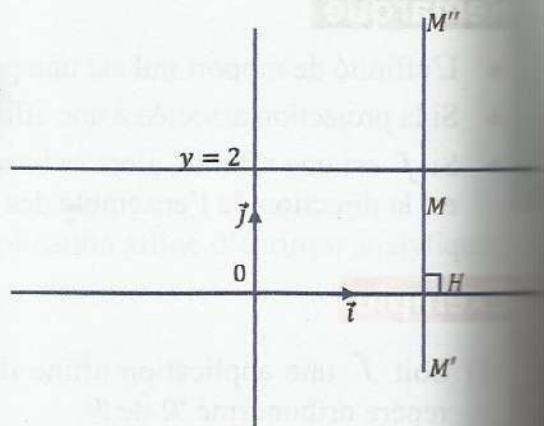
f est une affinité.

C'est l'affinité de base la droite (D) : $y = \frac{1}{2}$, de direction l'axe des ordonnées et de rapport $\frac{3}{2}$. f est une transformation du plan car son rapport est non nul.

f^{-1} est l'affinité d'axe la droite (D) : $y = \frac{1}{2}$, de direction l'axe des ordonnées et de rapport $\frac{2}{3}$. Puisque les droites (D) et l'axe des ordonnées sont perpendiculaires, f et f^{-1} sont des affinités orthogonales.

Exercice Résolu 1.

- Donnons les expressions analytiques de :
 - i. L'affinité orthogonale d'axe la droite de repère $(0, \vec{i})$ et de rapport k
 - ii. L'affinité orthogonale d'axe la droite de repère $(0, \vec{j})$ et de rapport k
 - iii. L'affinité orthogonale d'axe $(D): y = 2$ et de rapport -2



- Soit $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ l'image de M par l'affinité orthogonale d'axe la droite de repère $(0, \vec{i})$ et de rapport k .

$$\overrightarrow{HM'} = k \overrightarrow{HM} \text{ où } H \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{cases} x' - x = k(x - x) \\ y' - y = k(y - 0) \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} x' = x \\ y' = ky \end{cases}$$

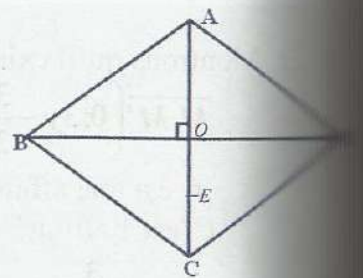
- L'expression analytique de l'application orthogonale d'axe la droite de repère $(0, \vec{j})$ est donnée par $\begin{cases} x' = kx \\ y' = y \end{cases}$.
- Soit $M(x, y)$ un point du plan et $M''(x'', y'')$ l'image du point M par l'affinité orthogonale d'axe $(D): y = 2$ et de rapport -2 .

$$\overrightarrow{KM''} = -2 \overrightarrow{KM} \text{ où } K \text{ est le projeté orthogonal } M \text{ sur } (D): y = 2. \quad K \begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' - x = -2(x - x) \\ y' - 2 = -2(y - 2) \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} x' = x \\ y' = -2y + 6 \end{cases}$$

- $(ABCD)$ est un losange de centre O . E est le milieu de $[OC]$, f est l'application affine du plan telle que : $f(O) = O$; $f(B) = B$ et $f(A) = E$.

$\overrightarrow{OE} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{OA}$. L'affinité orthogonale d'axe (BD) transforme O en O , B en B et A en E . donc f est l'affinité orthogonale d'axe (BD) et de rapport $-\frac{1}{2}$.

**Exercice Résolu 2 : Image d'un cercle par une affinité orthogonale.****Énoncé**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (C) est le cercle d'équation : $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0$. $\mathcal{A}(D; k)$ l'affinité orthogonale d'axe D la droite d'équation $x = 2$ et de rapport k .

- 1) Déterminer les expressions analytiques de $\mathcal{A}(D; k)$;
- 2) Déterminer l'image (C'_k) de (C) par $\mathcal{A}(D; k)$.

Résolution

- 1) Expressions analytiques de $\mathcal{A}(D; k)$.

Soit $M(x; y)$ un point du plan et H son projeté orthogonal sur (D) . H a pour coordonnées $(2; y)$.

Soit $M'(x'; y')$ l'image de M par $\mathcal{A}(D; k)$. On a : $\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}$.

D'où le système
$$\begin{cases} x' - 2 = k(x - 2) \\ y' - y = 0 \end{cases}$$

Ainsi
$$\begin{cases} x' = k(x - 2) + 2 \\ y' = y \end{cases}$$

- 2) Détermination de (C'_k) . (C) a pour équation $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 9$.

Définissons $\mathcal{A}^{-1}(D; k)$ Du système $\begin{cases} x' - 2 = k(x - 2) \\ y' - y = 0 \end{cases}$, on a :
$$\begin{cases} x = \frac{x' + 2k - 2}{k} \\ y = y' \end{cases}$$

Ainsi (C'_k) a pour équation $\left(\frac{x' + 2k - 2}{k} - 2\right)^2 + (y' - 2)^2 = 9$.

D'où $(C'_k) : \frac{(x' - 2)^2}{k^2} + (y' - 2)^2 = 9$

Par suite : $(C'_1) : \frac{(x' - 2)^2}{1} + (y' - 2)^2 = 9$; $(C'_2) : \frac{(x' - 2)^2}{4} + (y' - 2)^2 = 9$

Exercice Résolu 3 : Image d'une courbe par une application affine

Énoncé

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère $f : x \mapsto \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

- 1) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

- 2) En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J que l'on déterminera.

- 3) Exprimer $f^{-1}(x)$ pour tout x élément de J .

- 4) $\mathcal{L}(a; b)$ est l'ensemble des points M du plan de coordonnées $(x; y)$ telles que

$$y = b + \ln\left(\frac{1+x-a}{1-x+a}\right), (a; b) \in \mathbb{R}^2; C \text{ et } C^{-1} \text{ désignent respectivement les courbes représentatives des fonctions } f \text{ et } f^{-1}.$$

- a) Montrer que $\mathcal{L}(a; b)$ est l'image de C par une composée d'applications simples que l'on précisera.

- b) Donner un programme de construction de $\mathcal{L}(a; b)$

- 5) Construire C , C^{-1} et $\mathcal{L}(1; 1)$.

Résolution

1) Pour tout réel x , $f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$.

Résolution

1) Expressions analytiques de $\mathcal{A}(D; k)$.

Soit $M(x; y)$ un point du plan et H son projeté orthogonal sur (D) . H a pour coordonnées $(2; y)$.

Soit $M'(x'; y')$ l'image de M par $\mathcal{A}(D; k)$. On a : $\overline{HM'} = k\overline{HM}$.

D'où le système
$$\begin{cases} x' - 2 = k(x - 2) \\ y' - y = 0 \end{cases}$$

Ainsi
$$\begin{cases} x' = k(x - 2) + 2 \\ y' = y \end{cases}$$

2) Détermination de (C'_k) . (C) a pour équation $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 9$.

Définissons $\mathcal{A}^{-1}(D; k)$ Du système $\begin{cases} x' - 2 = k(x - 2) \\ y' - y = 0 \end{cases}$, on a :
$$\begin{cases} x = \frac{x' + 2k - 2}{k} \\ y = y' \end{cases}$$

Ainsi (C'_k) a pour équation
$$\left(\frac{x' + 2k - 2}{k} - 2 \right)^2 + (y' - 2)^2 = 9$$
.

D'où $(C'_k) : \frac{(x' - 2)^2}{k^2} + (y' - 2)^2 = 9$

Par suite : $\left(C'_{\frac{1}{2}} \right) : \frac{(x' - 2)^2}{\frac{1}{4}} + (y' - 2)^2 = 9$; $(C'_2) : \frac{(x' - 2)^2}{4} + (y' - 2)^2 = 9$

Exercice Résolu 3 : Image d'une courbe par une application affine

Énoncé

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère $f : x \mapsto \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

1) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

2) En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J que l'on déterminera.

3) Exprimer $f^{-1}(x)$ pour tout x élément de J .

4) $\mathcal{C}(a; b)$ est l'ensemble des points M du plan de coordonnées $(x; y)$ telles que

$$y = b + \ln \left(\frac{1 + x - a}{1 - x + a} \right), (a; b) \in \mathbb{R}^2 ; C \text{ et } C^{-1} \text{ désignent respectivement les courbes représentatives des fonctions } f \text{ et } f^{-1}.$$

a) Montrer que $\mathcal{C}(a; b)$ est l'image de C par une composée d'applications simples que l'on précisera.

b) Donner un programme de construction de $\mathcal{C}(a; b)$

5) Construire C , C^{-1} et $\mathcal{C}(1; 1)$.

Résolution

i) Pour tout réel x , $f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

On a le tableau de variation ci-contre:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	-1	1

- ii) Existence de f^{-1}
 f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$; donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R}) = J =]-1;1[$.

- iii) Expression $y = f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $e^x = \frac{1+y}{1-y}$. En posant $y \in]-1;1[$
 donc $\frac{1+y}{1-y} > 0$. $x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$. Donc $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, pour tout x de $]-1;1[$

iv) Recherche de la composée d'applications simples

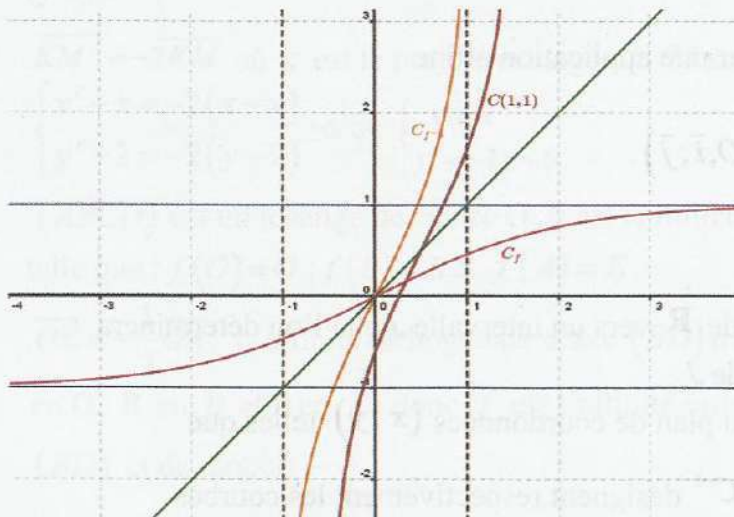
- 6) Soit $M(x; y) \in \mathcal{C}(a; b)$; on a $y = b + \ln\left(\frac{1+x-a}{1-x+a}\right)$, $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.

$$y = b + f^{-1}(x - a)$$

Soit T la translation de vecteur $a\vec{i} + b\vec{j}$. $\mathcal{C}(a; b) = T(C^{-1})$

Soit S la réflexion d'axe $(\Delta): y = x$. On a $C^{-1} = S(C)$

D'où $\mathcal{C}(a; b) = T(S(C)) = (T \circ S)(C)$.



S'exercer

2.f Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Dans chacun des cas suivants, déterminer les équations analytiques des applications affines :

- La translation de vecteur $-2\vec{j}$;
- La symétrie centrale de centre $A(-3, 2)$;
- La projection orthogonale sur la droite (D) d'équation $x - y + 1 = 0$;

iv) L'affinité orthogonale d'axe $(D): x = y$ et de rapport -2 .

Le plan est muni d'un repère (O, I, J) . f est l'application affine du plan d'expressions analytiques
$$\begin{cases} x' = -3x + 2y \\ y' = 2x \end{cases}$$

i) Déterminer l'ensemble (D) des points invariants par f noté (D) .

ii) Donner les expressions analytiques de la projection orthogonale P sur (D) .

iii) Exprimer $\overrightarrow{P(M)M'}$ à l'aide de $\overrightarrow{P(M)M}$ et en déduire la nature de f et les éléments caractéristiques

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne $A(-5; 2)$ et $A'(5; -2)$.

i) Quel l'ensemble C des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = 0$?

ii) Déterminer l'écriture analytique de l'affinité orthogonale f d'axe (AA') et de rapport $\frac{1}{2}$.

iii) Déterminer l'image C' de C par f .

Soit l'application affine g de définition analytique :
$$\begin{cases} x' = 5x + 2y - 2z + 2 \\ y' = -4x - y + 2z - 2 \\ z' = 8x + 4y - 3z + 4 \end{cases}$$
 dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace $\mathcal{E}$.

a. Déterminer l'ensemble des points invariants P par g .

b. Démontrer que si $M' = g(M)$, alors le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur $\vec{u}$ non nul et constant.

c. Soit $M_1(x_1; y_1; z_1)$ le projeté du point M sur P , parallèlement à une droite de vecteur directeur $\vec{u}$. Exprimer x_1, y_1 et z_1 en fonction de x, y et z .

Déterminer le réel a tel que $\overrightarrow{M_1M'} = a\overrightarrow{M_1M}$.

d. En déduire la nature de l'application affine g , ainsi que ses éléments caractéristiques.

e. Le vecteur $\vec{u}$ est-il normal au plan P ?

S'ENTRAÎNER

GÉNÉRALITÉS SUR LES APPLICATIONS AFFINES.

1.

Le plan est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Définir analytiquement l'application affine f du plan dans lui-même, qui au point I de coordonnées $(1; 2)$ associe le point $J(-1; 3)$ et d'endomorphisme associé de matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.
- Montrer que f est une transformation du plan
- Définir analytiquement la bijection réciproque f^{-1} de f .
- Donner par son équation cartésienne l'image de la droite dont une équation cartésienne est $x - 3y + 5 = 0$.
- Existe-t-il des droites du plan :
 - parallèles à leurs images par f ?
 - perpendiculaires à leurs images par f ?
 - globalement invariantes par f ?

2.

Soit $\mathcal{P}$ un plan rapporté à un repère cartésien $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui associe à tout point $M(x; y)$ le point $M'(x'; y')$ tel que : $\begin{cases} x' = x + y - 1 \\ y' = x - y + 2 \end{cases}$.

- Montrer que f est une application affine bijective.
Écrire la matrice de l'endomorphisme associé à f dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
- Déterminer l'ensemble des points invariants par f .
- Soit (D) la droite d'équation $ax + by + c = 0$; $(a; b) \neq (0; 0)$.
Déterminer par son équation cartésienne l'image (D') , de (D) par f .

- Quelles sont les droites (D) parallèles à (D') ?

3.

Soit $\mathcal{P}$ un plan rapporté à un repère cartésien $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui associe à tout point $M(x; y)$ le

point $M'(x'; y')$ tel que : $\begin{cases} x' = \frac{a+b}{2}x + \frac{a-b}{2} \\ y' = \frac{a-b}{2}x + \frac{a+b}{2} \end{cases}$

- Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles f est bijective.
- Déterminer l'ensemble des points M tels que O, M et M' sont alignés.
- Définir analytiquement f^{-1} quand f est bijective.

4.

Soit f une application affine du plan dans lui-même et A un point du plan; t la translation de vecteur $\vec{Af}(A)$.

- Montrer que $t^{-1} \circ f$ est affine.
- Montrer A est invariant par $t^{-1} \circ f$.
- En déduire que toute application affine peut s'écrire comme composée d'une translation et d'une application affine laissant A invariant.

5.

f est définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y + 2 \\ y' = 3x - \frac{1}{2}y \end{cases} \quad \text{dans un repère du plan}$$

- Montrer que f est bijective.
- Soit $(D) : ax + by + c = 0$; $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.
Donner une équation cartésienne de $f(D)$.
 D et $f(D)$ peuvent-elles être parallèles?
- En déduire que pour tout point M du plan, $M, f(M) = M_1, (f \circ f)(M) = M_2$ ne sont pas alignés si $M \neq M_1$.

Calculer les coordonnées $(x'; y')$ de l'isobarycentre G du système $\{M_1, M_2, M\}$.
Vérifier que le point G est le seul point invariant par f .

En déduire que f^3 est l'application identique du plan $\mathcal{P}$.

A, B, C, A', B', C' sont quatre points du plan de coordonnées respectives $(1; -1), (0; 2), (-1; -2), (4; -3), (-1; -1)$ et $(1; -6)$.
Définir analytiquement l'application f qui associe aux points A, B et C , les points A', B', C' respectivement.

Pour les exercices 7, 8, 9 le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

L'application g de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ associe au point $M(x; y)$, le point $M'(x'; y')$ tel que :

$$x' = y + 1$$

$$y' = 4x + 2$$

Montrer que l'application g est affine bijective.

Déterminer la matrice de l'endomorphisme associée à g dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$

Déterminer l'ensemble des points invariants par g .

Déterminer une équation cartésienne de l'image de la droite d'équation $4x - 5y + 1 = 0$ par g

Démontrer qu'il existe deux droites globalement invariantes par g .

L'application h est définie analytiquement dans un repère $\mathcal{R}$ d'origine O du plan par :

$$x' = x - y$$

$$y' = 2x - y$$

Montrer que h est bijective, puis définir analytiquement h^{-1} .

Déterminer l'ensemble des points invariants

par h .

- 3) Montrer que si s désigne la symétrie centrale de centre O , alors $h^{-1} = s \circ h = h \circ s$.
- 4) Déduire que $(h^{-1})^2 = h^2$

9.

Soit a un nombre réel. On définit l'application g_a du plan dans lui-même par :

$$\begin{cases} x' = \frac{a+1}{2}x + \frac{1-a}{2}y \\ y' = \frac{1-a}{2}x + \frac{a+1}{2}y \end{cases}$$

- 1) Déterminer les valeurs du réel a pour lesquelles g_a est une transformation du plan.

Définir analytiquement dans le même repère g_a^{-1} , la réciproque de g_a quand g_a est bijective

- 2) Déterminer suivant les valeurs de a , l'ensemble des points invariants par g_a .

Pour les exercices 10, 11 et 12 l'espace $\mathcal{E}$ est rapporté au repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

10.

On définit analytiquement une application affine f de l'espace dans lui-même par :

$$\begin{cases} x' = x + 2y + 3z \\ y' = x + 2z \\ z' = 2y + z \end{cases}$$

- 1) L'application f est-elle bijective ?
- 2) Déterminer l'image par f de :

- l'espace tout entier ;
- du plan dont une équation est : $x - 3y + z - 1 = 0$
- de la droite dont une représentation

$$\text{paramétrique est : } \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = -t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$$

11.

Soit une application affine H de l'espace $\mathcal{E}$, qui au point $M(x; y; z)$ associe le point

$$M'(x'; y'; z') \text{ tel que : } \begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x - y + 2 \\ z' = y + z - 3 \end{cases}$$

- Montrer que l'application H est bijective.
- Déterminer l'ensemble des points invariants par H .
- Déterminer par une équation cartésienne, l'image du plan $P : 2x - y + z - 5 = 0$, par H .
- Déterminer une représentation paramétrique de l'image par H de la droite de

$$\text{représentation paramétrique } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

HOMOTHÉTIES-TRANSLATIONS.

12.

Un triangle ABC est tel que A et B sont fixes et C décrit une droite ou un cercle.

Déterminer l'ensemble décrit par :

le milieu de $[BC]$;

le milieu de $[AC]$.

13.

- Un parallélogramme $ABCD$ est tel que A et B sont fixes et C décrit une droite (Δ) .

Déterminer la nature des ensembles décrits par :

- le point D ;
- le centre du parallélogramme.

- Construire le parallélogramme $ABCD$ sachant que les sommets A et B sont donnés et que les sommets C et D appartiennent respectivement à deux droites (D_1) et (D_2) d'un plan contenant A et B .

14.

Existe-t-il une translation de vecteur de coordonnées $(\alpha; -\alpha)$ qui transforme la droite $(D) : x + y - 1 = 0$ en la droite $(D') : x + y = -2$?

15.

Soit $\mathcal{E}$ l'espace, $H(I; k)$ l'homothétie de centre

I et de rapport $k \neq 1$, t la translation de vecteur $\vec{u}$ non nul.

- Montrer que $t^{-1} \circ H(I, k) \circ t$ est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.
- Démontrer que $H\left(I; \frac{1}{k}\right) \circ t \circ H(I, k)$ est une translation dont on déterminera le vecteur.

PROJECTIONS AFFINES ET SYMÉTRIES AFFINES.

16.

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère du plan $\mathcal{P}$

- Définir analytiquement la projection p sur la droite $(D) : x - y + 3 = 0$, de direction la droite vectorielle E engendrée par le vecteur $\vec{i} - 2\vec{j}$.
- En déduire les expressions analytiques de la symétrie de base la droite d'équation (D) de direction E .

17.

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace $\mathcal{E}$

Définir analytiquement la projection p et la symétrie s :

- de base le plan $(P) : 3x - 2y + z - 4 = 0$ parallèlement à la droite (D) d'équations $\frac{x+1}{2} = y-3 = \frac{z-3}{4}$;
- de base la droite (D) , parallèlement au plan (P) .

18.

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace $\mathcal{E}$

Définir analytiquement la projection orthogonale et la symétrie orthogonale

- de base le plan $(P) : 4x + 5y + z - 1 = 0$;
- de base la droite $(D) : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$.

$(\vec{i}, \vec{j})$ est un repère du plan affine $\mathcal{P}$

Soit f l'application affine définie

$$\text{analytiquement par : } \begin{cases} x' = x \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{3}+2}{6} \\ y' = \frac{1}{2}x - y \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6} \end{cases}$$

Montrer que f est involutive. En déduire qu'elle est bijective.

Déterminer l'ensemble (D) des points invariants par f .

Montrer que si f associe au point M, le point M' , alors le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur fixe. Ce vecteur est-il normal à (D) ?

Montrer que pour tout point M d'image M' par f , le milieu de $[MM']$ est un point de la droite (D).

En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f .

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace $\mathcal{E}$

Suivant la démarche exposée à l'exercice 19 précédent, déterminer les éléments qui définissent la symétrie s :

$$\begin{cases} x' = 2x - y + z + 2 \\ y' = 2x - y + 2z + 4 \\ z' = -x + y - 2 \end{cases}$$

Le plan étant rapporté à un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$;

une application affine définie analytiquement

$$\begin{cases} x' = 8x - 4y - 2 \\ y' = 8x - 4y - 1 \end{cases}$$

Démontrer que f n'est pas une transformation du plan.

Déterminer par les coordonnées, l'unique point invariant I par f .

Démontrer que l'image du plan est une droite (D) dont on déterminera une équation cartésienne.

Définir analytiquement la projection p sur (D) et de direction le noyau de φ ,

endomorphisme associé à h .

5) En déduire qu'il existe un réel k tel que $h = p \circ H(I, k) = H(I, k) \circ p$. $H(I, k)$ est l'homothétie de centre I et de rapport k

22

Montrer que l'application affine

$$f : \begin{cases} x' = -x - y + 2z - 1 \\ y' = -2x + 2y + 2z - 1 \\ z' = -2x - y + 3z - 1 \end{cases} \text{ est affine}$$

a) Déterminer l'ensemble des points fixes par f .

b) f est-elle bijective ?

c) Montrer que f est une projection dont on précisera les éléments caractéristiques.

d) Déterminer l'image par f des droites d'équations respectives :

$$\begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = 2 + s ; x - 1 = y - 2 = z - 3. \\ z = 3 + 2s \end{cases}$$

e) Déterminer l'image du plan : $3x - y - 2z + 2 = 0$ par f

23

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère

$\mathcal{R} = (O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; g l'application affine définie

$$\text{analytiquement par : } \begin{cases} x' = -x + z \\ y' = -2x + y + z + 2 \\ z' = z + 4 \end{cases}$$

Montrer que g est une symétrie de l'espace, puis préciser ses éléments caractéristiques. Est-elle une symétrie orthogonale ?

AFFINITÉS.

24

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

On donne les points A, B, C de coordonnées respectives $(0; -1), (-1; -2)$ et $(0; 1)$.

1) Montrer que (A, B, C) est un repère affine de $\mathcal{P}$.

2) On considère l'application affine f du plan dans lui-même telle que :

$$f(A) = B; f(C) = C \text{ et } f(B) = D \text{ où } D(-3; -4).$$

a) Montrer que f est bijective.

- b) Donner l'écriture analytique de f .
- 3) Déterminer l'ensemble des points invariants (D) par f .
- 4) Montrer que le vecteur $\overline{MM'}$ est colinéaire à un vecteur fixe $\vec{u}$, pour tout point M d'image M' par f .
- 5) Soit p, la projection sur (D), de direction la droite vectorielle engendrée par $\vec{v}$; l'image du point M par p.
- a) Comparer les vecteurs $\overline{IM}$ et $\overline{IM'}$.
- b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de f .
- c) Donner une construction géométrique du point M' à partir de M.

25.

Dans le plan affine de repère $\mathcal{R}=(O; \vec{i}, \vec{j})$, on définit l'application affine k analytiquement

$$\text{par : } \begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x+y-1) \\ y' = \frac{1}{2}(3x-y+3) \end{cases}$$

- a) Déterminer l'ensemble des points invariants par k .
- Soit $I(-1; 0)$; $\vec{e} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{e}' = \vec{i} - 3\vec{j}$;
 $\mathcal{R}'=(O; \vec{e}, \vec{e}')$.
- b) Montrer que $\mathcal{R}'$ est un repère du plan.
- c) Donner la définition analytique de l'application k dans le repère $\mathcal{R}'$.
- d) Donner la nature de k .

26.

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace

f est une application affine définie analytiquement

$$\text{par : } \begin{cases} x' = 3x - 4y + 2z - 2 \\ y' = 4x - 7y + 4z - 4 \\ z' = -x + 2y + 1 \end{cases}$$

- 1) Déterminer l'ensemble (P) des points invariants par f .
- 2) Montrer que le vecteur $\overline{MM'}$ admet une direction fixe dont on précisera un vecteur de base $\vec{v}$.
- 3) Soit I, le point d'intersection de la droite passant par M, de vecteur $\vec{v}$ avec (P).
 Montrer qu'il existe un réel m indépendant du point I, tel que $\overline{IM'} = m\overline{IM}$.
- 4) En déduire la nature et les éléments caractéristiques l'application f .

QUELQUES PROBLÈMES

27.

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère $\mathcal{R}=(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'application affine $f_{a,b}$ qui laisse le point O invariant et dont l'endomorphisme associé a pour matrice $\begin{pmatrix} a+b & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Tout point M de coordonnées $(x; y)$ dans le repère $\mathcal{R}$ a pour image le point $M'(x'; y')$.

- 1) a. Exprimer x', y' à l'aide de x et de y .
 b. Déterminer les valeurs du couple (a, b) pour lesquelles $f_{a,b}$ est bijective.
 c. $f_{a,b}$ peut-elle être une translation ? une homothétie ?
- 2) Pour cette question, on prend $a=0$ et $b=-1$.

Soit M_0 le point de coordonnées $(1; 0)$ dans le repère $\mathcal{R}$, $M_{n+1} = f_{0,-1}(M_n)$.

On appelle $(x_n; y_n)$ les coordonnées de M_n et on pose $u_n = x_n - ky_n$.

Montrer qu'il existe deux valeurs k' et k'' de k pour lesquelles la suite (u_n) est géométrique.

Calculer $x_n - k'y_n$ et $x_n - k''y_n$ en fonction de n . En déduire x_n, y_n , puis leurs limites respectives.

Calculer la limite de $\frac{y_n}{x_n}$ pour $x_n \neq 0$.

G_n est l'isobarycentre des points $M_0, M_1, \dots, M_n$. Calculer les coordonnées de G_n .

Calculer leur limite.

a et b sont à nouveau quelconques.

Déterminer l'ensemble des points M tels que les points O, M et M' soient alignés.

Montrer que pour $b \neq 0$, cet ensemble est la réunion de deux droites (D) et (D') , sécantes en O , de vecteurs respectifs $\vec{e} = \vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{e}' = 2\vec{i} + \vec{j}$, respectivement

Donner les restrictions respectives de $f_{a,b}$ respectivement à (D) et à (D') .

Montrer que $\mathcal{R}' = (O; \vec{e}, \vec{e}')$ est un repère du plan $\mathcal{P}$ et que dans le repère $\mathcal{R}'$, les expressions

analytiques de $f_{a,b}$, sont :
$$\begin{cases} X' = (a-b)X \\ Y' = (a+2b)Y \end{cases}$$

Pour quelles valeurs du couple $(a; b)$, $f_{a,b}$ est-elle involutive ?

Dans chaque cas, indiquer la nature de $f_{a,b}$ et préciser ses éléments caractéristiques..

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine rapporté au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Soit f l'application affine de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$, qui à un point $M(x; y)$ associe le point $M'(x'; y')$

tel que :
$$\begin{cases} x' = 3x + 5y \\ y' = -2x - 3y - 2 \end{cases}$$

a) Démontrer que f admet un seul point invariant.

b) Quelle est la matrice, dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ de l'endomorphisme associé à f ?

Donner la nature géométrique des applications $f^2 = f \circ f; f^4 = f^2 \circ f^2$.

Soit M un point quelconque de $\mathcal{P}$, on note :

$M_1 = f(M); M_2 = f(M_1); \dots; M_{n+1} = f(M_n)$.

Démontrer que l'isobarycentre des quatre points M, M_1, M_2, M_3 est invariant par f . Quel est ce point ?

Que peut-on dire du quadrilatère de sommets M, M_1, M_2, M_3 où $M(-4; 2)$?

Faire une figure.

Soit G l'ensemble des applications affines g de $\mathcal{P}$, telles que $g^4 = Id_{\mathcal{P}}$. On note φ l'endomorphisme associé à g .

Soit M un point quelconque de $\mathcal{P}$. On note $M_1 = g(M), M_2 = g(M_1), M_3 = g(M_2)$.

Démontrer que le point Ω isobarycentre du système $\{M, M_1, M_2, M_3\}$ est invariant par g ;

Quelle peut-être la nature de φ^4 ?

29.

Soit A, B, C trois points non alignés du plan $\mathcal{P}$; A', B', C' respectivement les milieux de $[BC], [AC]$ et $[AB]$. Soit M un point quelconque du plan, distinct de A, B, C . Montrer que la parallèle à (MA) passant par A' , la parallèle à (MB) passant par B' , la parallèle à (MC) passant par C' sont concourantes en un point M' .

30.

Soit (D) et (D') deux droites sécantes en I d'un plan affine $\mathcal{P}$.

On suppose que les droites (D) et (D') ne sont pas perpendiculaires. Soit A un point de $\mathcal{P}$, distinct de I .

Construire le ou les cercles centrés sur (D) , tangents à (D') et passant par A .

31.

Soit $\mathcal{P}$ un plan rapporté à un repère $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$

On considère l'application $f : \begin{cases} x' = 10x + 4y - 3 \\ y' = -8x - 2y + 1 \end{cases}$

1) Démontrer que f est une application affine et écrire la matrice de l'endomorphisme associé à f dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Démontrer que f est bijective.

2) Démontrer que f admet un seul point invariant A .

3) Montrer qu'il existe deux valeurs t' et t'' du réel t telles que l'ensemble $E(t)$ des vecteurs $\vec{u}$ vérifiant $\varphi(\vec{u}) = t\vec{u}$ contienne un vecteur non nul.

Montrer $E(t')$ et $E(t'')$ sont des droites vectorielles. Préciser un vecteur $\vec{I}$ de base de $E(t')$ et $\vec{J}$ de base de $E(t'')$.

4) Montrer que les droites passant par le point A , de vecteurs respectifs $\vec{I}$ et $\vec{J}$ sont invariantes par f .

Soit $\vec{e} = \vec{i} - 2\vec{j}$ et $\vec{e}' = \vec{i} - \vec{j}$.

- 5) Montrer que $(\vec{e}, \vec{e}')$ est une base du plan.
 a. Écrire la matrice de φ dans la base $(\vec{e}, \vec{e}')$.
 b. Donner les expressions analytiques de l'application f dans le repère $(A, \vec{e}, \vec{e}')$.

Montrer que f est la composée commutative d'une homothétie et d'une affinité dont on préservera les éléments caractéristiques.

32.

ABC est un triangle dans le plan. f est l'application affine de P dans P telle que $f(A) = A$, $f(C) = C$ et $f(B) = C$.

- 1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f . Soit φ l'endomorphisme associé à f

- a) Déterminer la matrice de φ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$
 b) Donner l'expression analytique de φ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et celle de f dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

33.

ABCD est un parallélogramme de centre O. f est l'application affine de P dans P telle que $f(A) = A$, $f(C) = C$ et $f(B) = D$.

- Déterminer $f(D)$
- Démontrer que $f \circ f$ est l'application identique du plan.
- Déterminer l'ensemble des points invariants par f .
- Donner la nature et les éléments caractéristiques de f .
- Déterminer la matrice de l'endomorphisme φ associé à f dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$
- Donner l'expression analytique de f dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

34.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points

$A(1+i)$; $B(-3+3i)$; $C(2+2i)$; $D(-4+4i)$.

E et F désignent les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BD]$.

- 1) Déterminer les affixes des points E et F .

Donner la matrice de la rotation vectorielle φ endomorphisme associé à la rotation affine qui transforme A en B et C en D dans $(\vec{u}, \vec{v})$.

- 2) Donner la matrice de la rotation vectorielle φ' endomorphisme associé à la rotation affine r' qui transforme A en D et C en B .

a) Donner l'expression analytique de r , r' , de $r \circ r'$ et de $r' \circ r$.

b) Quelle est la nature de $r \circ r'$? de $r' \circ r$?

35.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. (D) est la droite d'équation $y = x$ et (D') la droite d'équation $x - y + 1 = 0$.

- 1) Donner l'expression analytique de chacune des transformations suivantes :

a) la projection orthogonale sur (D)

b) la réflexion S_D d'axe (D) ;

c) la réflexion $S_{D'}$ d'axe (D') ;

d) l'affinité orthogonale d'axe (D) et de rapport -2

- 2) Donner les écritures complexes de S_D et $S_{D'}$ sous la forme $z' = p\bar{z} + q$

- 3) Déterminer la nature de $S_{D'} \circ S_D$ en composant les écritures complexes de $S_{D'}$ et S_D .

- 4) Retrouver géométriquement le résultat précédent.

36.

ABC est un triangle isocèle ($AB = AC$) tel que $\text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \theta$. k est un réel de l'intervalle $[0, 1[$. P et Q les points du plan définis par $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CQ} = k\overrightarrow{CA}$. La parallèle à (AC)

passant par P coupe (BC) en M.

- a) Faire une figure illustrant les données.
- b) Démontrer que $\overline{CM} = k\overline{CB}$. On pourra utiliser la projection sur (BC) parallèlement à (AC) .
- c) Soit R la rotation telle que $R(B) = A$; $R(A) = C$ et φ l'endomorphisme associé à R.
 - a) Déterminer les éléments caractéristiques de R. Démontrer que $\varphi(\overline{AP}) = \overline{CQ}$ et en déduire que $R(P) = Q$
 - b) Démontrer que la médiatrice de $[PQ]$ passe par un point fixe que l'on déterminera.

$ABCD$ est un carré de centre O et de sens direct. λ est le quart de tour direct de centre O, λ un réel de l'intervalle $[0,1]$. On définit le point M par l'égalité vectorielle $\overline{AM} = \lambda\overline{AB}$. On note P l'image de M par R.

Démontrer que $\overline{BD} = \lambda\overline{BC}$.

Soit A' le milieu de $[AB]$, B' le milieu de $[BC]$ et I le milieu de $[MP]$.

Démontrer l'égalité vectorielle $\overline{A'I'} = \lambda\overline{A'B'}$

- a) Déduire de ce qui précède le lieu géométrique du point I lorsque λ décrit l'intervalle $[0,1]$.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit l'application linéaire de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer $A^2 = A \times A$. Quelle est la nature de $\varphi \circ \varphi$?

f est l'application affine d'endomorphisme associé φ telle que $f(O) = O'$ où O' est le point de coordonnées $(0;2)$.

- a) Donner l'expression analytique de f et

en déduire la nature et les éléments caractéristiques de f .

- b) Donner l'expression analytique de $f \circ f$ et en déduire sa nature.
- 3) On définit la suite (B_n) par $B_0(\sqrt{2}i)$ et $B_{n+1} = f(B_n)$ pour tout entier naturel n
 - a) Déterminer les affixes de B_1 et B_2
 - b) u_n est la longueur de $[B_n B_{n+1}]$. Calculer u_0 et démontrer que (u_n) est une suite géométrique.
 - c) Exprimer u_n en fonction de n
 - d) Calculer $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ et déterminer la limite de S_n en $+\infty$. Soit $(ABCD)$ est un carré de sens direct et de centre I.

39.

Soit $ABCD$ un carré de sens direct et de centre I

I. Soit $r = R\left(A, \frac{\pi}{2}\right)$, $t = t_{AC}$ et $S = S_C$

- 1) a) Déterminer la droite Δ telle que $r = S_{\Delta} \circ S_{(AD)}$.

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de tor .

- II. a) Déterminer $(Sot \circ r)(A)$, $(Sot \circ r)(D)$.

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $Sot \circ r$.

Soit $M \in (DC)$, N le point d'intersection de la droite (BC) et de la perpendiculaire à la droite (AM) passant par A. J le milieu du segment $[MN]$ r' est la rotation de centre A telle que $B = r'(D)$; s la similitude directe de centre A telle que $I = s(D)$.

- 1) a) Montrer que $N = r'(M)$.
- b) En déduire la nature du triangle AMN.
- 2) a) Déterminer l'image de C par s.
- b) Démontrer que $J = s(M)$
- c) Déduire le lieu géométrique des points J, lorsque M décrit (DC) .

Chapitre 14

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

LEÇON 1

1. GÉNÉRALITÉS ET EXEMPLES.

2. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES de la forme : $y' = ay$

3. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SOUS LA FORME:

$ay'' + by' + cy = 0$ où a EST UN NOMBRE RÉEL NON NUL, b ET c DEUX NOMBRES RÉELS

3.1 Cas où $b^2 - 4ac = 0$

3.2 Cas où $b^2 - 4ac > 0$

3.3 Cas où $b^2 - 4ac < 0$

S'ENTRAÎNER

LEÇON ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

► Résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre et une équation linéaires du second ordre à coefficients constants.

1. GÉNÉRALITÉS ET EXEMPLES.

Prendre un bon départ

Situation 1 : Dans une culture bactérienne, le nombre de bactéries passe de 400 à 1000 en trois heures, et à tout instant, le taux de croissance est proportionnel au nombre de bactéries présentes.

Situation 2 : Un solide de masse m est accroché au bout d'un ressort vertical, de constante de raideur k et fixé à un point. Ce solide assimilé à un point matériel est tiré, puis relâché. Le solide effectue des mouvements verticaux.

Activité 1

(a) Montrer que si N désigne le nombre de bactéries présentes dans la culture à l'instant t ,

alors il existe un réel k tel que $\frac{\Delta N}{\Delta t} = kN(t)$.

(b) En déduire que, pour tout t , N vérifie $N'(t) = kN(t)$.

(c) Si t est exprimé en heures, alors donner les valeurs de $N(0)$ et de $N(3)$.

2. Soit (D) la droite confondue à l'axe du ressort et passant par le centre de la masse.

Soit O la position du solide au repos et I sa position au moment où il est lâché. On peut ainsi orienter la droite (D) par le repère (O, I) . On pose $OI = a$.

(a) En désignant par x l'abscisse du mobile dans le repère (O, I) à l'instant t , montrer que $m x''(t) + kx(t) = 0$.

(b) Donner la valeur de $x(0)$.

(c) Donner la valeur maximale et la valeur minimale de x .

Activité 2

(a) Montrer que la fonction : $x \rightarrow ae^{2x}$ vérifie l'égalité $(E_1) : f'(x) = 2f(x)$.

(b) Montrer que la fonction : $x \rightarrow \ln x$ vérifie l'égalité (E_2)

$$(E_2) : h''(x) + \frac{1}{x} h'(x) + xh(x) = x \ln x.$$

(c) Déterminer le polynôme du second degré P tel que :

$$(E_3) : 3P''(x) - 2P'(x) + \frac{5}{4} P(x) = x^2 + 1.$$



Retenir

- Une équation différentielle est une relation liant une fonction inconnue plusieurs fois dérivables et certaines de ses dérivées.
- Les expressions qui multiplient les différentes dérivées de la relation sont appelées coefficients de l'équation différentielle. Elles sont constantes pour certaines et variables d'autres.
- Le plus grand ordre de dérivation de la fonction inconnue, ayant un coefficient non nul dans une équation différentielle, est l'ordre de cette équation différentielle.

Remarque

- La notation $\frac{d^n f}{dx^n}$ est la dérivée d'ordre n de la fonction f considérée comme fonction de la variable x . Ainsi, $\frac{df}{dx} = f'$; $\frac{d^2 f}{dx^2} = f''$; $\frac{d^3 f}{dx^3} = f'''$; $f^{(3)} \dots \frac{d^n f}{dx^n} = f^{(n)}$
- Le plus souvent, on ne fait pas ressortir explicitement la variable de la fonction inconnue dans une équation différentielle mais elle est choisie par rapport au problème à résoudre. Si la fonction cherchée est une loi horaire, alors elle sera une fonction du temps.
- La fonction inconnue peut-être désignée par l'une des lettres f ; g ; x ; y ; α ; θ , etc.
- Si l'équation s'écrit $\sum_{i=0}^n a_i f^{(i)}(x) = g(x)$ alors $g(x)$ est le second membre. Une équation différentielle dont le second membre est nul est dite sans second membre ou équation homogène.
- Comme l'application $f \rightarrow \sum_{i=0}^n a_i f^{(i)}$ est linéaire, alors l'équation différentielle (E) est dite linéaire.
- L'équation différentielle $\sum_{i=1}^n a_i f^{(i)}(x) = g(x)$ est linéaire à coefficients constants lorsque a_i est constant pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Exemple

L'équation différentielle : $4y' + 7y = x + 2$ est du premier ordre, avec second membre et à coefficients constants.

L'équation différentielle : $mx''(t) + kx(t) = 0$ est du second ordre, à coefficients constants et sans second membre.

L'équation différentielle : $x^2 f'''(x) + f''(x) - 3f'(x) + f(x) = x$ est du troisième ordre, à coefficients variables et avec second membre.

Toutes les équations précédentes sont linéaires. Par contre, l'équation $f''(x) \times f'(x) + 2f(x) = x$ est une équation différentielle du second ordre, avec second membre et non linéaire.



S'exercer

- Montrer que la fonction $x \rightarrow 1 - x^2 e^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = -2e^{-x} + 1$.
- Soit l'équation différentielle (E) : $f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 8x^2 - 24x$.

Déterminer les trois nombres réels a, b, c pour que la fonction g définie par $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit une solution de (E).

c. Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (4-x)e^{\frac{1}{2}x}$ est une solution de l'équation différentielle $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$.

En déduire la forme générale des primitives de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

2. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES de la forme : $y' = ay$



Prendre un bon départ

Activité 1

Soit a un réel donné. On se propose de chercher les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f' = af$ (1), c'est-à-dire telles que, pour tout réel x , on $f'(x) = af(x)$. Soit S l'ensemble de telles fonctions.

- 1) Montrer que la fonction nulle appartient à S .
- 2) Soient α et β deux réels, f et g deux éléments de S .
- a) Montrer que $\alpha f + \beta g$ appartient à S .

Activité 2

Soit la fonction $f_1 : x \mapsto e^{ax}$.

- 1) a) Montrer que f_1 est un élément de S .
- b) Justifier que pour tout réel λ , λf_1 est aussi un élément de S .
- 2) Soit f un élément de S . Soit g la fonction définie par $f = gf_1$.
- a) Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$ et exprimer pour tout réel x , $g(x)$ en fonction de $f(x)$.

b) Montrer que pour tout réel x , on a $g'(x) = \frac{f'(x) - af(x)}{e^{ax}}$.

Utiliser le fait que $f' = af$ pour déduire que g est une fonction constante sur $\mathbb{R}$. Montrer alors qu'il existe un réel μ tel que $f = \mu f_1$.



Retenir

Soit a un réel.

L'ensemble S des solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R} : x \mapsto \lambda e^{ax}$, où λ est un réel arbitraire ne dépendant pas de x .

Remarque

1) S est le sous-espace vectoriel engendré par $f_1 : x \mapsto e^{ax}$.

S est une droite vectorielle de $\mathcal{F}$. (espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)

2) Si $a = 0$, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = 0$ est l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.

3) Soit a, x_0, y_0 trois réels. L'équation différentielle $y' = ay$ admet une seule solution qui prend la valeur y_0 en x_0 . C'est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto y_0 e^{a(x-x_0)}$.

En effet $f : x \mapsto \lambda e^{ax}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

$f(x_0) = y_0$ équivaut à $\lambda e^{ax_0} = y_0$ qui est équivalent à $\lambda = \frac{y_0}{e^{ax_0}}$; soit

$\lambda = y_0 e^{-ax_0}$. D'où pour tout réel x , $f(x) = y_0 e^{-ax_0} e^{ax} = y_0 e^{a(x-x_0)}$.

Exemple

Soit à résoudre l'équation différentielle $y' + 2y = 0$.

L'équation $y' + 2y = 0$ est équivalente à $y' = -2y$. Cette équation différentielle a pour solution $y = \lambda e^{-2x}$.

L'ensemble S des solutions de cette équation est l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \lambda e^{-2x}$.

Déterminons la solution de cette équation qui prend la valeur 2 en 0.

$f(0) = 2$ équivaut à $\lambda e^{-2 \cdot 0} = 2$; soit $\lambda = 2$.

La solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ qui prend la valeur 2 en 0 est la fonction $f_1 : x \mapsto e^{-2x}$.

Exercice résolu

Soit l'équation différentielle du premier ordre (1) : $2y' + 3y = 6x^2 - 7x + 2$.

1) Résolution de l'équation différentielle sans second membre.

(2) : $2y' + 3y = 0$ est une équation différentielle du premier ordre de la forme $y' = -\frac{3}{2}y$.

L'ensemble S_1 des solutions de cette équation est l'ensemble des fonctions définies sur

$\mathbb{R} : x \mapsto \lambda e^{-\frac{3}{2}x}$. (λ constante réelle)

2) Recherchons une solution particulière de l'équation (1), polynôme du second degré. Soit P cette solution, pour tout réel x , $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.

$P'(x) = 2ax + b$. P solution de (1) si et seulement si pour tout réel x ,

$$2P'(x) + 3P(x) = 6x^2 - 7x + 2.$$

$$2(2ax + b) + 3(ax^2 + bx + c) = 6x^2 - 7x + 2.$$

$$\text{Pour tout réel } x, 3ax^2 + (4a + 3b)x + 2b + 3c = 6x^2 - 7x + 2.$$

Par identification; on a :
$$\begin{cases} 3a = 6 \\ 4a + 3b = -7; \text{ c'est-à-dire } a = 2; b = -5; c = 4. \\ 2b + 3c = 2 \end{cases}$$

$$P(x) = 2x^2 - x + 4.$$

3) Résolution de l'équation différentielle avec second membre.

Déterminons l'ensemble S des solutions de l'équation (1).

$P \in S$, donc pour tout réel x , $2P'(x) + 3P(x) = 6x^2 - 7x + 2$.

Soit f une solution de (1).

Montrons f est solution de (1) si et seulement si $2f' + 3f = 2P' + 3P$.

$2f' + 3f = 2P' + 3P$ équivaut successivement à $2f' - 2P' = 3P - 3f$;

$2(f - P)' = 3(P - f)$; $2(f - P)' - 3(f - P) = 0$ où 0 désigne l'application nulle; $f - P \in S$.

f est solution de (1) si et seulement si $f = g + P$ où g est solution de l'équation (2).

L'ensemble S des solutions de l'équation $2y' + 3y = 6x^2 - 7x + 2$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R} : x \mapsto \lambda e^{-\frac{3}{2}x} + 2x^2 - 5x + 4$.

4) Déterminer la solution de l'équation (1) qui prend la valeur $\sqrt{2}$ en 0.

Soit f une solution de (1).

On a $f(x) = \lambda e^{-\frac{3}{2}x} + 2x^2 - 5x + 4$.

$f(0) = \sqrt{2}$ équivaut à $\lambda e^{-\frac{3}{2} \cdot 0} + 2 \times 0^2 - 5 \times 0 + 4 = \sqrt{2}$; Soit $\lambda = \sqrt{2} - 4$.

La solution de l'équation (1) qui prend la valeur $\sqrt{2}$ en 0 est la fonction f définie par : pour tout réel x , $f(x) = (\sqrt{2} - 4)e^{-\frac{3}{2}x} + 2x^2 - 5x + 4$.

S'exercer

2.a Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $3y' + 5y = 0$; b) $\frac{2}{3}y' - \frac{4}{5}y = 0$; c) $y' + 2y = 0$; d) $-2y' + 3y = 0$.

Déterminer pour chacune des équations ci-dessus la solution qui prend la valeur -1 en 0.

2.b En vous inspirant de l'exercice résolu ci-dessus, résoudre l'équation différentielle

$$5y' + 3y = 3x^2 - 2x - 4.$$

3. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SOUS LA FORME: $ay'' + by' + cy = 0$ où a EST UN NOMBRE RÉEL NON NUL, b ET c DEUX NOMBRES RÉELS

3.1 Cas où $b^2 - 4ac = 0$



Prendre un bon départ

Activité 1

Soit a un réel donné. On se propose de chercher les fonctions f au moins deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions de $ay'' + by' + cy = 0$ (1), c'est-à-dire telles que, pour tout réel x , $af''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0$. Soit S l'ensemble des solutions de cette équation.

- 1) Montrer que la fonction nulle appartient à S .
- 2) Soient α et β deux réels, f et g deux éléments de S .

Montrer que $\alpha f + \beta g$ appartient à S .

Activité 2

Soit r un réel et f la fonction : $x \mapsto e^{rx}$.

- a) Montrer que pour tout réel x , $af''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0$ est équivalent à $ar^2 + br + c = 0$.
- b) Supposons que $b^2 - 4ac = 0$.

L'équation $ar^2 + br + c = 0$ admet une seule racine réelle $r_0 = -\frac{b}{2a}$.

La fonction $f_1 : x \mapsto e^{r_0 x}$ est élément de S . D'après l'activité 1, quel que soit le réel λ , λf_1 est élément de S .

Soit f une fonction au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$; g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (gf_1)(x)$.

- Montrer que pour tout réel x , $f(x) = g(x) e^{r_0 x} \Leftrightarrow g(x) = f(x) \cdot e^{-r_0 x}$.
- Dédire que g est au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ et montrer que

$$af''(x) + bf'(x) + cf(x) = e^{r_0 x} (ag''(x) + (2r_0 a + b)g'(x) + (ar_0^2 + br_0 + c)g(x)).$$

Comme r_0 est solution de l'équation $ar^2 + br + c = 0$ et $r_0 = -\frac{b}{2a}$, déduire que

$$af''(x) + bf'(x) + cf(x) = e^{r_0 x} (ag''(x) + ae^{r_0 x} g''(x))$$

- Dédire que f appartient à S si et seulement si $g''(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Dédire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R} / g'(x) = \lambda$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

En déduire qu'il existe $\mu \in \mathbb{R} / g(x) = \lambda x + \mu$.

- En déduire qu'une solution f de $ay'' + by' + cy = 0$ est définie par : pour tout réel x ,

$$f(x) = (\lambda x + \mu) e^{r_0 x} \text{ où } (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Retenir

- Une équation de la forme $ay'' + by' + cy = 0$ où a est un réel non nul, b et c deux réels est appelée équation différentielle du second ordre homogène ou sans second membre.
- L'équation $ar^2 + br + c = 0$ est appelée équation caractéristique associée à l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$.
- Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ alors l'équation $ar^2 + br + c = 0$ admet une racine double $r_0 = -\frac{b}{2a}$, et l'ensemble S des solutions de cette équation est l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{r_0 x}$ où $(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Remarque

- S est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ (ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) engendré par les deux fonctions : $f_1 : x \mapsto e^{r_0 x}$ et $f_2 : x \mapsto x e^{r_0 x}$. S est un plan vectoriel de base $(f_1; f_2)$.
- Si l'on a $b = c = 0$, alors l'ensemble S des solutions de l'équation $y'' = 0$ est l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R} : x \mapsto \lambda x + \mu$ avec $(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, pour tout $(y_0, y'_0) \in \mathbb{R}^2$ l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ admet une unique solution g telle que $\forall x_0 \in Dg$ $g(x_0) = y_0$ et $g'(x_0) = y'_0$.

Exemple

1) Résolvons l'équation différentielle $4y'' - y + 1 = 0$.

L'équation caractéristique de cette équation est $4r^2 - 4r + 1 = 0$.

Son discriminant $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 4 \times 1 = 16 - 16 = 0$.

Le discriminant étant nul, l'équation $4r^2 - 4r + 1 = 0$ admet une racine double $r_0 = -\frac{(-4)}{2 \times 4} = \frac{1}{2}$.

L'ensemble S des solutions de l'équation différentielle $4y'' - 4y + 1 = 0$ est l'ensemble des

fonctions : $x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{\frac{1}{2}x}$.

2) Déterminons la solution g de cette équation qui vérifie $g(0) = 2$ et $g'(0) = -1$.

$$g(x) = (\lambda x + \mu) e^{\frac{1}{2}x}.$$

$$g'(x) = \lambda e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}(\lambda x + \mu) e^{\frac{1}{2}x} = \left[\lambda + \frac{1}{2}(\lambda x + \mu) \right] e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}(\lambda x + 2\lambda + \mu) e^{\frac{1}{2}x}.$$

$g(0) = 2$ équivaut à $\mu = 2$;

$g'(0) = -1$ équivaut à $2\lambda + \mu = -2$; soit $2\lambda = -2 - 2$; $\lambda = -\frac{2}{2}$ et $\mu = -2, \mu = 2$.

3) La solution g de l'équation différentielle $4y'' - 4y + 1 = 0$, qui vérifie $g(0) = 2$ et $g'(0) = -1$ est la fonction : $x \mapsto (-2x + 2)e^{\frac{1}{2}x}$.

Exercice résolu

Trouver la solution y de l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + y = 0$ telle que $\begin{cases} y(1) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$.

L'équation caractéristique de (E) est $r^2 + 2r + 1 = 0$; soit $(r + 1)^2 = 0$.

Cette équation admet une racine double qui est -1 .

Les solutions de l'équation $y'' + 2y' + y = 0$ sont les fonctions : $x \mapsto (\lambda + \mu x) e^{-x}$.

La dérivée de la fonction : $x \mapsto (\lambda + \mu x) e^{-x}$ est la fonction :

$x \mapsto \mu e^{-x} - (\lambda + \mu x) e^{-x}$; soit $x \mapsto (\mu - \lambda - \mu x) e^{-x}$.

La condition initiale $\begin{cases} y(1) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ permet d'écrire : $\begin{cases} (\lambda + \mu) e^{-1} = 0 \\ \mu - \lambda = 1 \end{cases}$; soit $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ -\lambda + \mu = 1 \end{cases}$;

ce qui donne $\mu = \frac{1}{2}$ et $\lambda = -\frac{1}{2}$.

La solution de $y'' + 2y' + y = 0$ avec $\begin{cases} y(1) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ est la fonction : $x \mapsto \frac{1}{2}(-1 + x) e^{-x}$.



S'exercer

3.a a) Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 4y' + 4y = 0$.

b) Déterminer la solution y qui satisfait aux conditions $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.

3.2 Cas où $b^2 - 4ac > 0$.



Prendre un bon départ

Soient $r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ et $r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

1) Montrer que $2r_1 + \frac{b}{a} = r_1 - r_2$, avec $r_1 - r_2 \neq 0$.

2) Soit à résoudre l'équation différentielle $g'' = (r_2 - r_1)g'$.

Posons $z = g'$.

a) Montrer que résoudre $g'' = (r_2 - r_1)g'$ équivaut à résoudre $z' = (r_2 - r_1)z$.

b) En déduire que $z = \lambda e^{(r_2 - r_1)x}$, ($\lambda \in \mathbb{R}$) et que $g(x) = \frac{\lambda}{r_2 - r_1} e^{(r_2 - r_1)x} + A$ où A est une constante.

3) La fonction $f_1 : x \mapsto e^{r_1 x}$ est un élément de S . D'après l'activité 1, quel que soit le réel λ , λf_1 est un élément de S .

• Soit f une fonction au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (gf_1)(x)$. D'après le même raisonnement qu'à l'activité 2 du 1.2, déduire que f est solution de $ay'' + by' + cy = 0$ si et seulement si pour tout réel x , $g''(x) + (r_1 - r_2)g'(x) = 0$.

Déduire de 2) b) que $f(x) = f_1(x)g(x) = e^{r_1 x} \left(\frac{\lambda}{r_2 - r_1} e^{(r_2 - r_1)x} + A \right)$ où A est une constante réelle.

• En posant $B = \frac{\lambda}{r_2 - r_1}$, montrer que les solutions de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ sont les

fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$. $(A, B) \in \mathbb{R}^2$



Retenir

Si l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ associée à l'équation différentielle du second ordre $ay'' + by' + cy = 0$ admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 , et l'ensemble S des solutions de cette équation est l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$, où A et B sont des constantes réelles.

Remarque

1) S est le sous espace vectoriel de $\mathcal{F}$ engendré par les fonctions :

$f_1 : x \mapsto e^{r_1 x}$ et $f_2 : x \mapsto e^{r_2 x}$. S est le plan vectoriel dont une base est $(f_1; f_2)$.

2) Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, alors $\forall (y_0, y'_0) \in \mathbb{R}^2$, l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ admet une unique solution f telle que $\forall x_0 \in Df : f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y'_0$.

Exemple

1) Résolvons l'équation différentielle (E) : $2y'' + y' - 6 = 0$.

(E) admet pour équation caractéristique $2r^2 + r - 6 = 0$.

Son discriminant est $\Delta = 1^2 - 4(2)(-6) = 49 = 7^2$.

Les racines de l'équation caractéristique sont $r_1 = \frac{-1-7}{4} = -2$ et $r_2 = \frac{-1+7}{4} = \frac{3}{2}$.

L'ensemble S des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions

$f : x \mapsto Ae^{-2x} + Be^{\frac{3}{2}x}$. A et B sont deux constantes réelles arbitraires.

2) Déterminons la solution de (E) qui vérifie $y(0) = -3$ et $y'(0) = 1$.

$$f(x) = Ae^{-2x} + Be^{\frac{3}{2}x}; f'(x) = -2Ae^{-2x} + \frac{3}{2}Be^{\frac{3}{2}x}.$$

$$f(0) = -3 \text{ équivaut à } Ae^{-2 \times 0} + Be^{\frac{3}{2} \times 0} = -3; \text{ soit } A + B = -3.$$

$$f'(0) = 1 \text{ équivaut à } -2Ae^{-2 \times 0} + \frac{3}{2}Be^{\frac{3}{2} \times 0} = 1; \text{ soit } -2A + \frac{3}{2}B = 1; \text{ ce qui revient à}$$

$$-4A + 3B = 2. \text{ On obtient le système : } \begin{cases} A + B = -3 \\ -4A + 3B = 2 \end{cases}$$

$$\text{La résolution de ce système donne } A = -\frac{11}{7} \text{ et } B = -\frac{10}{7}.$$

La solution de (E) qui vérifie $y(0) = -3$ et $y'(0) = 1$ est la fonction

$$f: x \mapsto -\frac{11}{7}e^{-2x} - \frac{10}{7}e^{\frac{3}{2}x}.$$

Exercice résolu

Déterminer la solution de l'équation différentielle (E) : $y'' - 3y' - 4y = 0$ telle que $\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$

L'équation caractéristique associée à (E) est $r^2 + 3r - 4 = 0$.

Son discriminant est $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 9 + 16 = 25$.

Cette équation admet deux solutions réelles $r_1 = \frac{3-5}{2} = -1$ et $r_2 = \frac{3+5}{2} = 4$.

Les solutions de l'équation $y'' + 3y' - 4y = 0$ sont les fonctions :

$x \mapsto Ae^{-x} + Be^{4x}$ où A et B sont des constantes réelles arbitraires.

La fonction : $x \mapsto Ae^{-x} + Be^{4x}$ a pour dérivée la fonction : $x \mapsto -Ae^{-x} + 4Be^{4x}$.

La condition initiale $\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$ permet d'avoir le système $\begin{cases} A + B = 2 \\ -A + 4B = 4 \end{cases}$.

$$\text{d'où } B = \frac{6}{5} \text{ et } A = \frac{4}{5}.$$

La solution y de l'équation différentielle (E) : $y'' - 3y' - 4y = 0$ telle que $\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$

est la fonction : $x \mapsto \frac{4}{5}e^{-x} + \frac{6}{5}e^{4x}$.



S'exercer

- d. 1) Résoudre l'équation différentielle $2y'' - 7y' - 4y = 0$.
- 2) Déterminer la solution y de cette équation qui vérifie $y(1) = -2$ et $y'(1) = 3$.

3.3 Cas où $b^2 - 4ac < 0$.

Prendre un bon départ

Montrer que l'équation caractéristique de $ar^2 + br + c = 0$ admet deux racines complexes conjuguées l'une de l'autre.

Retenir

Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, alors l'équation caractéristique de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ admet deux racines complexes conjuguées distinctes $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ où α est un réel et β un réel non nul et ainsi, l'ensemble S des solutions de cette équation est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto (A \cos \beta x + B \sin \beta x)e^{\alpha x}$ avec $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

Remarque

Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, alors $\forall (x_0, y_0, y'_0) \in \mathbb{R}^3$, $x_0 \in Df$ l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ admet une unique solution f telle que $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y'_0$. En d'autres termes, parmi les fonctions solutions de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$, il en existe une unique dont la courbe passe par le point de coordonnées $(x_0; y_0)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur y'_0 .

Exemple

1) Résolvons l'équation différentielle $y'' - 4y' + 7y = 0$.

Son équation caractéristique est $r^2 - 4r + 7 = 0$. Son discriminant est

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 7 = 16 - 28 = -12 = 12i^2 = (2i\sqrt{3})^2.$$

Ses racines sont $\frac{4 + 2i\sqrt{3}}{2} = 2 + i\sqrt{3}$ et $\frac{4 - 2i\sqrt{3}}{2} = 2 - i\sqrt{3}$.

L'ensemble S des solutions de l'équation différentielle $y'' - 4y' + 7y = 0$ est l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par :

Pour tout réel x , $f(x) = e^{2x} (A \cos \sqrt{3} x + B \sin \sqrt{3} x)$ ($A, B \in \mathbb{R}$)

2) Déterminons la solution y de cette équation qui vérifie :

$$y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = 1.$$

$$f'(x) = 2e^{2x} (A \cos \sqrt{3} x + B \sin \sqrt{3} x) + (-\sqrt{3} A \sin \sqrt{3} x + \sqrt{3} B \cos \sqrt{3} x) e^{2x}.$$

$$f(0) = 0 \text{ équivaut à } A = 0 ;$$

$$f'(0)=1 \text{ équivaut à } \sqrt{3}B=1 ; \text{ soit } B = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

La fonction $x \mapsto \frac{\sqrt{3}}{2} e^{2x} \sin \sqrt{3}x$ est l'unique solution de l'équation différentielle

$$y'' - 4y' + 7y = 0 \text{ qui vérifie : } y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = 1.$$

Exercice résolu

Déterminer la solution y de l'équation différentielle (E) : $4y'' + 4y' + 65y = 0$

telle que
$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

L'équation caractéristique de (E) est $4r^2 + 4r + 65 = 0$.

Son discriminant réduit est $\Delta = 4 - 4 \times 65 = -256 = 256i^2 = (16i)^2$.

Ses racines sont $r_1 = \frac{-2+16i}{4} = -\frac{1}{2} + 4i$ et $r_2 = \frac{-2-16i}{4} = -\frac{1}{2} - 4i$.

Les solutions de (E) sont les fonctions $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{2}x} (A \cos 4x + B \sin 4x)$.

$$f'(x) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} (A \cos 4x + B \sin 4x) + e^{-\frac{1}{2}x} (-4A \sin 4x + 4B \cos 4x).$$

$$f(0) = 1 \text{ équivaut à } A = 1 ;$$

$$f'(0) = -\frac{1}{2} \text{ équivaut à } -\frac{1}{2} A + 4B = -\frac{1}{2}.$$

On a donc le système
$$\begin{cases} A = 1 \\ -A + 8B = -1 \end{cases} ; \text{ soit } A = 1 \text{ et } B = 0.$$

La solution y de $4y'' + 4y' + 65y = 0$ telle que
$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$
 est la fonction : $x \mapsto -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} \cos 4x$.

3.c a) Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + 3y = 0$.

b) Déterminer la solution de $y'' + 2y' + 3y = 0$ qui satisfait aux conditions suivantes : $y'(0) = -2$ et $y(0) = 1$.



S'exercer

(i) Résoudre l'équation différentielle $4y'' + 9y = 0$, $y(\pi) = 2$ et $y'(\pi) = 0$

(ii) Résoudre l'équation différentielle $2y'' - y' + y = 0$, $y(1) = 0$ et $y'(1) = 4$

2) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

On pose $h = f - g$. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si h est solution de l'équation $y' - 5y = 0$.

3) Résoudre l'équation (E).

9

Soit (E) l'équation différentielle $y' + 2y = 3e^{-3x}$.

1) Démontrer que toute fonction u telle que la fonction $x \mapsto u(x)e^{-x}$, soit solution de (E), vérifie l'équation différentielle (E') : $y' - y = 3$.

2) a) Démontrer que la fonction constante $x \mapsto 3$ est solution de (E').

b) Démontrer qu'une f est solution de (E') si et seulement si la fonction $g : x \mapsto f(x) + 3$ est solution de l'équation $y' - y = 0$.

c) Résoudre l'équation différentielle $y' - y = 0$, puis l'équation (E').

d) Déterminer la solution de (E) qui s'annule en 0.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE

10

Déterminer y'' la solution particulière f de l'équation $4y'' - 12y' + 9y = 0$, qui satisfait aux conditions initiales suivantes : $f(0) = 5$ et $f'(0) = -2$.

Même question qu'au N° 10 pour les exercices de 11 à 17:

11

$$y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0 ;$$

$$f(0) = 0 \text{ et } f'(0) = 1.$$

12

$$y'' - 4y' + 3y = 0$$

$$f(0) = 2 \text{ et } f'(0) = -3.$$

13

$$y'' + 4y = 0 ; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \text{ et } f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

14

$$2y'' + y' - y = 0 ;$$

$$f(1) = 1 \text{ et } f'(1) = 0.$$

15

$$y'' - 2y' + 5y = 0 ;$$

$$f(\pi) = 0 \text{ et } f'(\pi) = -1.$$

16

$$(2 - \sqrt{3})y'' + 2y = 0 ;$$

$$f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = \sqrt{3}.$$

17

$$5y'' - 3y' = 0 \text{ et telle que}$$

$$f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = 1$$

18

1) Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = 0$.

2) Déterminer la solution particulière f de cette équation dont la courbe représentative dans un repère orthonormé, passe par le point de coordonnées $(0; 1)$ et admette en ce point une tangente de coefficient directeur nul.

19

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que, pour tout réel x , on ait

$$f'(x) + f(x) = x^3 + 2.$$

1) Démontrer qu'il existe une fonction polynôme f_0 de degré 3 qui appartient à $\mathcal{F}$.

2) Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = 0$.

3) Déduire l'ensemble $\mathcal{F}$.

4) Déterminer l'élément f_1 de $\mathcal{F}$ tel que $f_1(0) = 3$ et $f_1'(0) = -7$.

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que, pour tout réel x ,

$$f''(x) + 2f'(x) + f(x) = (x^2 + 1)e^{-x}.$$

Démontrer qu'il existe une fonction

polynôme P de quatrième degré tel que la

fonction $f_0 : x \mapsto P(x)e^{-x}$ appartient à $\mathcal{F}$.

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + y = 0 = 0.$$

Soit g une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Montrer que g appartient à $\mathcal{F}$ si et seulement

si $g - f_0$ est solution de (E).

En déduire l'ensemble $\mathcal{F}$.

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions définies et

dérivables deux fois sur $\mathbb{R}_+^*$, solutions de

l'équation différentielle (1) :

$$x^3 - 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2} e^{-x}.$$

Vérifier que la fonction

$f : x \mapsto e^{-x} \ln x$ appartient à $\mathcal{F}$.

Résoudre l'équation différentielle (2) :

$$x^3 - 3y' + 2y = 0.$$

Soit g la fonction deux fois dérivable

sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que g appartient à $\mathcal{F}$ si et

seulement si $g - f$ est solution de (2).

En déduire l'ensemble $\mathcal{F}$.

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + 5y = 30 \cos x.$$

Déterminer deux réels a et b tels que la

fonction $x \mapsto a \cos x + b \sin x$ soit une solution

de l'équation (E).

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + 5y = 0.$$

Résoudre l'équation (E).

23

Soit l'équation différentielle

$$(E) : 3y'' - 2y' - y = 2 \cos^2 x.$$

1) Déterminer trois réels a, b, c tels que la fonction $x \mapsto a \cos 2x + b \sin 2x + c$ soit une solution de (E).

2) Résoudre l'équation différentielle

$$3y'' - 2y' - y = 0.$$

3) Résoudre (E).

24

1) Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' + 16y = 0.$$

2) Déterminer la fonction f , solution de cette

équation, telle que $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2$ et $f'(\pi) = 8$.

3) Montrer que, pour tout réel x , cette solution particulière peut s'écrire :

$$f(x) = 2\sqrt{2} \cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right).$$

4) Résoudre dans $[0; \pi]$, l'équation $f(x) = \sqrt{2}$.

25

Soit (E) l'équation différentielle :

$$(E) : y'' + 4y = 0.$$

1) Résoudre l'équation (E).

2) Déterminer la fonction f , solution

particulière de (E), telle que $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$ et

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1.$$

3) Déterminer deux réels A et φ tels que, pour tout réel t , $f(t) = A \cos(2t + \varphi)$.

26

Une masse m , mobile sur un axe $(O, \vec{i})$, a sa position représentée sur cet axe par le point M .

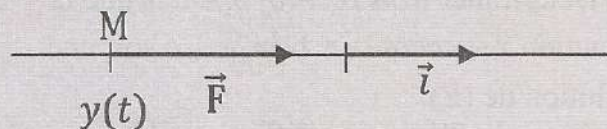
Cette masse est soumise à une force

d'attraction $\vec{F}$, telle que l'abscisse $y(t)$ du point

M en fonction de t vérifie l'équation

différentielle $y'' + \frac{\pi^2}{4}y = 0$.

1) Résoudre cette équation différentielle.



Pour la suite de l'exercice, on suppose que

$$y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = \frac{\pi}{2}.$$

2) a) Montrer que y s'exprime en fonction de t

pour $t \geq 0$, par $y(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.

b) Déterminer le réel α , compris entre 0 et 1,

tel que pour $t \geq 0$: $y(t) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}(t+\alpha)\right)$.

a) Donner la valeur positive de t pour laquelle le point M se trouve pour la première fois au point O.

c) Combien de fois le point M se trouve-t-il en O, dans l'intervalle $[0;6]$?

27

On se propose de chercher les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x , on ait:

$$(1) f''(x) - f'(x) + 3f(x) = 6x^2 + 5x.$$

1) On désigne par g une fonction polynôme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des réels.

Déterminer a, b, c pour que pour tout réel x ,

$$g''(x) - g'(x) + 3g(x) = 6x^2 + 5x.$$

2) On pose $F = f - g$.

a) Montrer que si f vérifie, pour tout réel x , la relation (1), alors F est solution de l'équation différentielle : (2) : $y'' - 4y' + 3y = 0$.

Réciproquement établir que si F est une solution de (2), f est définie par $f = F + g$ vérifie (1).

Résoudre l'équation (2) et en déduire les solutions de l'équation $y'' - 4y' + 3y = 6x^2 + 5x$.

28

1) Résoudre l'équation différentielle :

$$(1): y'' + 2y' + 2y = 0.$$

2) On considère l'équation différentielle :

$$(2) y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \left(-x + \frac{1}{2} \right).$$

a) Déterminer les réels a et b tels que la fonction g définie par : $g(x) = e^{-x}(ax + b)$ soit une solution de (2).

b) h désignant une solution quelconque de l'équation (1), montrer que la fonction f telle que $f(x) = g(x) + h(x)$ est solution de (2).

c) Déterminer parmi les fonctions f définies au 2) b) celle qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = -$

29

le but de l'exercice est l'étude de l'intensité i dans un circuit comprenant en série un générateur de force électromotrice E (en Volts) et une bobine de résistance R (en Ohms) et l'inductance L (en henrys). À l'instant t (en secondes), l'intensité i (en ampères) est solution de l'équation différentielle

$$(1) : Ly' + Ry = E.$$

On donne

$$E = 10 \text{ V}, R = 100 \text{ V}, L = 0,2 \text{ H}$$

1) Vérifier que l'équation (1) s'écrit :

$$y' + 500y = 50.$$

2) a) On pose pour tout t , $i(t) = I(t) + 0,1$.

Démontrer que la fonction I est solution de l'équation différentielle (2) : $y' + 500y = 0$.

b) Résoudre l'équation différentielle (2).

c) Déterminer alors la solution i de (1) telle que $i(0) = 0$.

3) Déterminer, à 1 milliseconde près par excès, l'instant t_0 à partir duquel l'intensité i est supérieure à 95 mA.

Chapitre 15

APPLICATIONS AFFINES DANS L'ESPACE.

LEÇON 1 APPLICATIONS DANS L'ESPACE.

- 1.1. PROJECTIONS.
- 1.2. EXPRESSIONS ANALYTIQUES D'UNE RÉFLEXION.
- 1.3. EXPRESSIONS ANALYTIQUES D'UN DEMI-TOUR.
- 1.4. COMPOSITIONS DE DEUX RÉFLEXIONS.
- 1.5. COMPOSITIONS DE DEUX DEMI-TOURS.
- 1.6. PLANS ET AXES DE SYMÉTRIE D'UN CUBE ET D'UN TÉTRAÈDRE.

LEÇON 2 HOMOTHÉTIES-TRANSLATIONS.

- 2.1. EXPRESSIONS ANALYTIQUES.
- 2.2. COMPOSÉES DE DEUX HOMOTHÉTIES, D'UNE HOMOTHÉTIE ET D'UNE TRANSLATION.

S'ENTRAÎNER

LEÇON 1 APPLICATIONS DANS L'ESPACE.

- Déterminer l'image d'un point par une réflexion ou par un demi-tour dont les plans et axes sont éléments d'une configuration de l'espace : cube, tétraèdre, etc.
- Écrire les expressions analytiques d'une réflexion et d'un demi-tour de l'espace.
- Composer deux réflexions par rapport aux plans parallèles ou aux plans orthogonaux.
- Composer deux demi-tours d'axes parallèles ou perpendiculaires.

1.1. PROJECTIONS

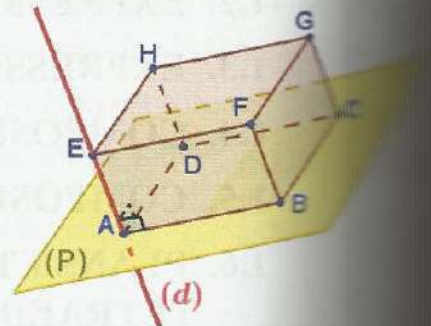


Prendre un bon départ

Activité 1

ABCDEF est un parallélépipède rectangle, (P) est le plan passant par les points A, B et C et (d) la droite (EA).

- 1) Justifier que les droites (HE), (GF), (FH) et (CA) sont parallèles au plan (P).
- 2) Déterminer le point G' de (d) tel que (GG') soit parallèle au plan (P).
- 3) Soit M un point de (P). Déterminer le point M' de (d) tel que (MM') soit parallèle à (d).
- 4) Soit N un point de (d). Déterminer le point N' de (P) tel que (NN') soit parallèle à (d) devient N' lorsque N vaut respectivement B, C, F, G et H ?



Activité 2

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit (P) le plan d'équation $x + y - 2z - 3 = 0$ et (d) la droite représentation paramétrique $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2t + 3 \\ z = -t + 1 \end{cases}; t \in \mathbb{R}.$

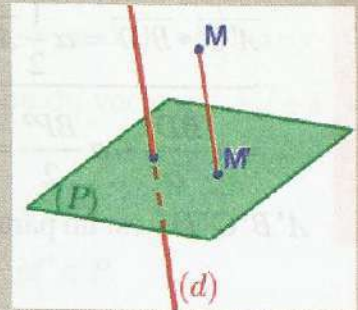
- 1) Vérifier que $\vec{n}(1; 1; -2)$ est un vecteur normal à (P) et $\vec{u}(1; 2; -1)$ est un vecteur directeur de (d).
- 2) Justifier que (P) et (d) ne sont pas parallèles.
- 3) Soient $M(x; y; z)$ un point de l'espace et $M'(x'; y'; z')$ le point de (P) tel que (MM') soit parallèle à (d).
 - a) Comme $(MM') // (d)$, montrer qu'il existe un réel α tels que $\begin{cases} x' = \alpha - x \\ y' = 2\alpha - y \\ z' = -\alpha - z \end{cases}$.
 - b) Comme $M' \in (P)$, montrer que $\alpha = \frac{1}{5}(x + y - 2z - 3)$.
 - c) En déduire que $\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(-4x + y - 2z - 3) \\ y' = \frac{1}{5}(2x - 3y - 4z - 6) \\ z' = \frac{1}{5}(-x - y - 3z + 3) \end{cases}$.

Retenir

Soit (P) un plan de l'espace et (d) une droite non parallèle à (P) .

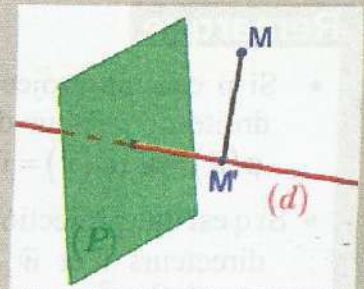
- On appelle projection sur (P) parallèlement à (d) l'application f de l'espace dans lui-même qui à tout point M associe le point M' ainsi défini.

- Si $M \in (P)$, $M' = M$.
- Si $M \notin (P)$, alors M' est le point de (P) tel que (MM') soit parallèle à (d) .



- On appelle projection sur (d) parallèlement à (P) l'application de l'espace dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que :

- Si $M \in (d)$, $M' = M$.
- Si $M \notin (d)$, M' est le point de (d) tel que (MM') soit parallèle à (P) .



- Lorsque (P) et (d) sont perpendiculaires, on parle de projection orthogonale.
- Les projections sont des applications affines, donc elles conservent le coefficient de colinéarité.

Exemple

$ABCD$ est un tétraèdre, I et J les milieux respectifs de $[AC]$ et $[BD]$. (P) un plan orthogonal à (IJ) . On désigne par A', B', C' et D' les images respectives de A, B, C et D par la projection orthogonale sur (P) .

- Déterminer la nature du quadrilatère $A'B'C'D'$.
- On suppose que $ABCD$ est un tétraèdre régulier. Quelle est la nature de $A'B'C'D'$?

Résolution .

Désignons par f la projection orthogonale sur (P) .

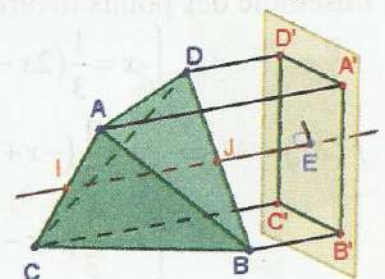
- Les points A', B', C' et D' sont coplanaires. (IJ) est orthogonal à (P) et donc $f(I) = f(J)$, or f conserve le milieu des segments donc $f(I)$ est le milieu des segments $[A'C']$ et $[B'D']$. Les diagonales $[A'C']$ et $[B'D']$ ont même milieu donc $A'B'C'D'$ est un parallélogramme.

- Nature de $A'B'C'D'$ lorsque le tétraèdre $ABCD$ est régulier.

$$\overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{A'C'} \cdot (\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DD'}) = \overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{BD} \text{ car}$$

$$\overrightarrow{A'C'} \perp \overrightarrow{B'B} \text{ et } \overrightarrow{A'C'} \perp \overrightarrow{DD'}.$$

$$\overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'}) \cdot \overrightarrow{BD}$$



$$\overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{B'D'} = (\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CC'} \cdot \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{BD} \text{ car } \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}, \text{ Or } \overrightarrow{AA'} \text{ et } \overrightarrow{CC'} \text{ sont colinéaires à } \overrightarrow{AC}$$

D'où $\overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{B'D'} = \alpha \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{BD}$ où α est un réel.

$$\overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{B'D'} = \alpha (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ}) \cdot \overrightarrow{BD} = \alpha \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{BD} + \alpha \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} + \alpha \overrightarrow{DJ} \cdot \overrightarrow{BD}$$

$$\overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{B'D'} = \alpha \underbrace{\frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \alpha \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB}}_0 - \alpha \frac{1}{2} BD^2 = \alpha DA \cdot B \times \frac{1}{2} - \alpha \frac{BP^2}{2}$$

$$= \alpha \frac{BD^2}{\alpha} - \alpha \frac{BP^2}{2} = 0.$$

$A'B'C'D'$ est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires ; c'est un losange.

Remarque

- Si p est une projection sur un plan (P) de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ parallèlement à une droite de vecteur directeur $\vec{w}$, alors l'endomorphisme φ de $\mathcal{W}$ associé à p est telle que : $\varphi(\vec{u}) = \vec{u}$; $\varphi(\vec{v}) = \vec{v}$ et $\varphi(\vec{w}) = \vec{0}$
- Si q est une projection sur une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ parallèlement à un plan de vecteurs directeurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$, alors l'endomorphisme π associé à q est tel que : $\pi(\vec{u}) = \vec{u}$; $\pi(\vec{v}) = \vec{0}$ et $\pi(\vec{w}) = \vec{0}$.

Exercice Résolu

Enoncé

Soit f la transformation de l'espace qui à tout point $M(x; y; z)$ associe le point $M'(x'; y'; z')$

$$\text{que } \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(2x - y - z) \\ y' = \frac{1}{3}(-x + 2y - z) \\ z' = \frac{1}{3}(-x - y + 2z) \end{cases}. \text{ L'espace étant muni du repère } (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}).$$

- 1) Déterminer l'ensemble des points invariants par f .
- 2) Montrer que pour tout point M , le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe que l'on précisera.
- 3) Montrer pour tout point M , M' est un point invariant.
- 4) En déduire la nature de f et les éléments caractéristiques de f .

Solution

Ensemble des points invariants. Soit $M(x; y; z)$ un point invariant.

$$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}(2x - y - z) \\ y = \frac{1}{3}(-x + 2y - z) \\ z = \frac{1}{3}(-x - y + 2z) \end{cases}; \text{ ce qui équivaut à } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}. \text{ L'ensemble des points}$$

invariants est donc le plan P d'équation $x + y + z = 0$.

Direction de $\overrightarrow{MM'}$.

Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ sont données par le système

$$\begin{cases} x' - x = \frac{1}{3}(2x - y - z) - x = \frac{1}{3}(-x - y - z) \\ y' - y = \frac{1}{3}(-x + 2y - z) - y = \frac{1}{3}(-x - y - z), \\ z' - z = \frac{1}{3}(-x - y + 2z) - z = \frac{1}{3}(-x - y - z) \end{cases}$$

d'où $\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{3}(-x - y - z)(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$. $\overrightarrow{MM'}$ a donc toujours la direction du vecteur $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ qui

est un vecteur normal au plan P .

Montrons que M' est un point invariant.

$x' + y' + z' = \frac{1}{3}(2x - y - z) + \frac{1}{3}(-x + 2y - z) + \frac{1}{3}(-x - y + 2z) = 0$. Alors $M' \in P$.

Nature de f .

f est la projection orthogonale sur le plan P .



S'exercer

$ABCDEFGH$ est un cube.

- f est la projection orthogonale sur le plan (HFC) . Démontrer que (AG) est orthogonale au plan (HFC) et en déduire que $f(A) = f(G)$.
- Soit g la projection orthogonale sur la droite (EC) . Démontrer que $g(A) = g(F) = g(H)$.
- On pose $AB = 1$ et on munit l'espace d'un repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Déterminer les expressions analytiques de f et g dans ce repère.
- (P) est le plan d'équation $x - 2y + z - 1 = 0$. (D) est la droite passant par $A(3, -1, -2)$ et orthogonale à (P) et B le point de coordonnées $(2, -3, 1)$.
 - Déterminer les coordonnées du point d'intersection I de (P) et (D)
 - Justifier que BB_1IB_2 est un rectangle; où B_1 est l'image de B par le demi tour d'axe (D) et B_2 l'image de I par la réflexion de plan (P) .
- Soit $ABCD$ un losange et (P) un plan non perpendiculaire au plan (ABC) , quelle est la condition pour que le projeté orthogonal de $ABCD$ sur (P) soit un losange ?

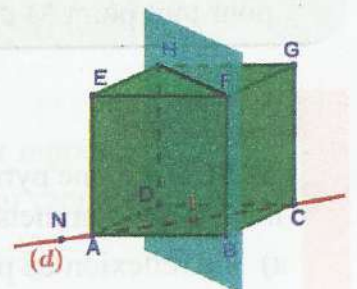
12. EXPRESSIONS ANALYTIQUES D'UNE RÉFLEXION.



Prendre un bon départ

Activité 1 :

$ABCDEFGH$ est un cube; I le centre du carré $ABCD$. On désigne par (P) le plan passant par les points A, B , et C ; (d) la droite (AC) .



- 1) Que représente le plan P pour le segment $[AC]$?
- 2) Citer un autre segment dont P est le plan médiateur.
- 3) Justifier que la droite (d) est perpendiculaire à (P) .
- 4) Soit N un point de (d) et N' le point de l'espace tel que (P) soit le plan médiateur de $[NN']$. Justifier que N' est le symétrique de N par rapport à I . Construire le point N' sur la figure ci-contre.

Activité 2

Les données sont celles de l'activité précédente. On considère l'espace muni d'un repère orthonormé $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel $B(4;0;0), C(4;4;0), D(0;4;0), E(0;0;4)$.

- 1) Déterminer les coordonnées des points F, G et H .
- 2) Vérifier qu'une équation du plan (P) est : $z = 0$ et qu'un vecteur normal à (P) est $\vec{n}(0;0;1)$.

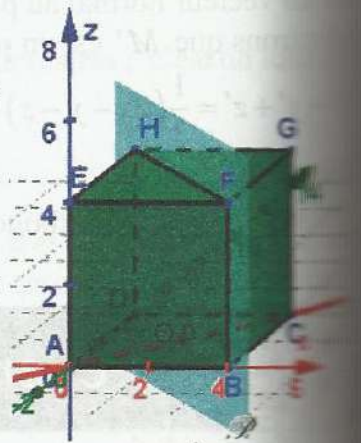
Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace et $M'(x'; y'; z')$ le point de l'espace tel que (P) soit le plan médiateur de $[MM']$.

- 3) Justifier que $\overrightarrow{MM'}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, et donc qu'il existe un réel k

$$\text{tel que } \begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = k + z \end{cases}.$$

- 4) Justifier que le milieu du segment $[MM']$ appartient à (P) et en déduire que $\frac{z+z'}{2} = 0$.

- 5) Déterminer alors la valeur du réel k et en déduire que $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = -z \end{cases}.$



Retenir

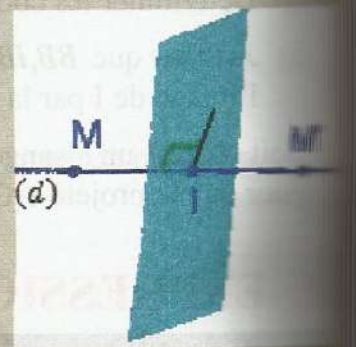
- 1) Soit π un plan de l'espace $\mathcal{E}$. On appelle réflexion de plan π , l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ notée S_π qui à tout point M associe le point M' tel que :

- Si $M \in \pi$, alors $M' = M$
- Si $M \notin \pi$, alors π est le plan médiateur de $[MM']$.

- 2) S_π est une application affine de l'espace.

- 3) π est l'ensemble des points invariants par S_π .

- 4) Si (d) est une droite perpendiculaire au plan π au point I alors pour tout point M de (d) , $S_\pi(M) = S_I(M)$.



Exemple

$SABCD$ est une pyramide régulière dont la base $ABCD$ est carrée et de centre O . Déterminer les images des sommets de $SABCD$ par :

- a) La réflexion de plan (SAC) .

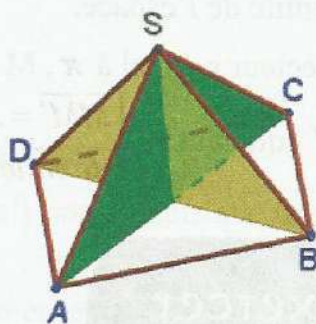
b) La réflexion de plan (SBD).

S	A	B	C	D
S	A	D	C	B

$\curvearrowright S_{(SAC)}$

S	A	B	C	D
S	C	B	A	D

$\curvearrowright S_{(SBD)}$



Montrer que par une réflexion, une droite et son image sont coplanaires.

Soit P un plan et (AB) une droite de l'espace ; posons $S_P(A) = A'$ et $S_P(B) = B'$. $(AA') \perp (P)$ et $(BB') \perp (P)$ donc $(AA') \parallel (BB')$. Les points A, B, A', B' sont coplanaires et par suite les droites (AB) et $(A'B')$ sont coplanaires.

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. P est le plan d'équation $x - y + z = 0$. Déterminer les expressions analytiques de S_P .

$\vec{n}(1; -1; 1)$ est un vecteur normal à P .

Soit $M(x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$ deux points de l'espace.

$S_P(M) = M'$ équivaut à $\begin{cases} (MM') \perp P \\ \text{le milieu de } [MM'] \in P \end{cases}$; $(MM') \perp P$ si et seulement si $\overline{MM'}$ est colinéaire à $\vec{n}$ et il existe un réel λ tel que $\overline{MM'} = \lambda \vec{n}$.

Le milieu de $[MM'] \in P$ si les coordonnées de celui-ci vérifient l'équation de P .

$$\text{Ainsi } S_P(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = \lambda \\ y' - y = -\lambda \\ z' - z = \lambda \\ \frac{x' + x}{2} - \frac{y' + y}{2} + \frac{z' + z}{2} = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x' = x + \lambda \\ y' = y - \lambda \\ z' = z + \lambda \\ \frac{2x + \lambda}{2} - \frac{2y - \lambda}{2} + \frac{2z + \lambda}{2} = 0 \end{cases}$$

$$2x + \lambda - 2y + \lambda + 2z + \lambda = 0; \quad 3\lambda = -2x + 2y - 2z; \quad \lambda = \frac{1}{3}(-2x + 2y - 2z)$$

$$\text{Ainsi, } \begin{cases} x' = x + \frac{1}{3}(-2x + 2y - 2z) \\ y' = y - \frac{1}{3}(-2x + 2y - 2z) \\ z' = z + \frac{1}{3}(-2x + 2y - 2z) \end{cases} \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} x' = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z \\ y' = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \\ z' = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \end{cases}$$

Remarque

- 1) Une réflexion de plan π est aussi appelée symétrie orthogonale par rapport à π .
- 2) Si $M' = S_\pi(M)$, alors $M = S_\pi(M')$. M et M' sont symétriques par rapport à π .
- 3) Si H est le projeté orthogonal de M sur P , alors $\overline{MM'} = 2\overline{MH}$.

4) $S_\pi \circ S_\pi = \text{Identité de l'espace.}$

5) Si $\vec{n}$ est un vecteur normal à π , M et M' deux points de l'espace,

$$S_\pi(M) = M' \text{ équivaut à } \begin{cases} \overrightarrow{MM'} = \lambda \vec{n}, \lambda \in \mathbb{R} \\ \text{le milieu de } [MM'] \in P \end{cases}$$



S'exercer

- 1a)** $ABCDEFGH$ est un cube. On note I le symétrique de H par rapport à la base $ABCD$. Tracer la section du cube par le plan de réflexion qui échange I en F.
- 1b)** $OABC$ est un tétraèdre tel que le triangle ABC soit équilatéral, le point O se projette orthogonalement au centre G du triangle équilatéral ABC. Quelle est l'image de O par la réflexion au plan (ABC)?
- 1c)** $ABCDEFGH$ est un cube d'arête $AB = 1$. L'espace est muni du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Déterminer les expressions analytiques de chacune des réflexions suivantes : $S_{(EFG)}$; $S_{(BDF)}$.
- 1d)** On considère un plan (P), un point O de P et $\vec{n}$ un vecteur normal de (P). S est l'application dans $\mathcal{E}$ qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} - 2(\overrightarrow{OM} \cdot \vec{n})$. Démontrer que S est la réflexion du plan (P).

1.3. EXPRESSIONS ANALYTIQUES D'UN DEMI-TOUR



Prendre un bon départ

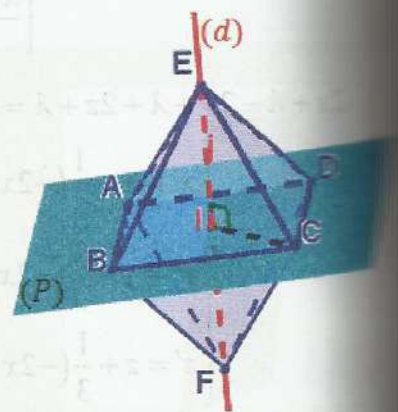
Activité 1

ABCDE et ABCDF sont deux pyramides régulières à bases carrées ; (d) est la droite (EF) et P le plan passant par les points A, B et C. Soit I le centre du carré ABCD.

- Justifier que (d) est orthogonale au plan P.
- Soit $S_{(d)}$ la symétrie orthogonale d'axe (d) . Vérifier le tableau de correspondance suivant.

E	A	B	C	I
S	C	B	A	D

$S_{(d)}$

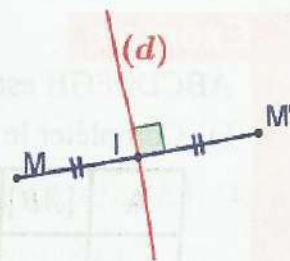


- Soit M un point du plan P. justifier que I est le projeté orthogonal de M sur (d) et en déduire que $S_{(d)}(M) = S_I(M)$.

Activité 2

On considère l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit (d) la droite d'équation

$$\text{paramétriques } \begin{cases} x' = t - 1 \\ y' = -t \\ z' = t \end{cases}$$



- Vérifier que $\vec{u}(1; -1; 1)$ est un vecteur directeur de la droite (d) .
- Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace et $M'(x'; y'; z')$ son symétrique par rapport à la droite (d) .
- Montrer que le milieu de $[MM']$ appartient à (d) si et seulement si il existe un réel t tel que

$$\begin{cases} x' = 2t - 2 - x \\ y' = -2t - y \\ z' = 2t - z \end{cases}$$

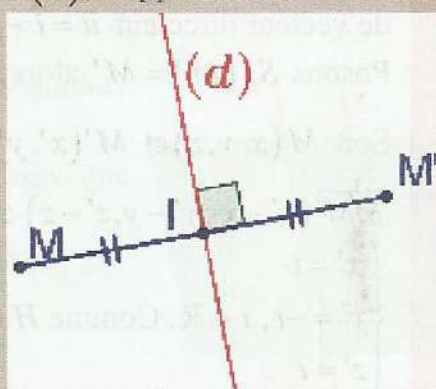
- Vérifier que $(MM') \perp (d)$ si et seulement si $(x' - x) - (y' - y) + (z' - z) = 0$.

En déduire que $t = \frac{1}{3}(x - y + z + 1)$ et que

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x - 2y + 2z + 2) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x - y - 2z - 2) \\ z' = \frac{1}{3}(2x - 2y - z + 2) \end{cases}$$

Retenir

- Soit (d) une droite de l'espace E . On appelle demi-tour d'axe (d) , l'application de E dans E notée $S_{(d)}$ qui à tout point M associe le point M' tel que :
- Si $M \in (d)$, alors $M' = M$
 - Si $M \notin (d)$, alors (d) est la médiatrice de $[MM']$.
- $S_{(d)}$ est une application affine de l'espace.
- (d) est l'ensemble des points invariants de $S_{(d)}$.
- Si π est un plan perpendiculaire à (d) au point I , alors pour tout point M de π , $S_{(d)}(M) = S_I(M)$.



Remarque

- Un demi-tour d'axe (d) est aussi appelée symétrie orthogonale d'axe (d) .
- Si $M' = S_{(d)}(M)$, alors $M = S_{(d)}(M')$. M et M' sont symétriques par rapport à (d) .
- Si H est le projeté orthogonal de M sur (d) , alors $\overline{MM'} = 2\overline{MH}$.
- $S_{(d)} \circ S_{(d)} = \text{identité de l'espace}$.
- Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (d) , M et M' deux points de l'espace,

$$S_{(d)}(M) = M' \text{ équivaut à } \begin{cases} \overline{MM'} \cdot \vec{u} = 0, \\ \text{le milieu de } [MM'] \in (d) \end{cases}$$

Exemple

ABCDEFGH est pavé droit ; O_1 et O_2 sont les centres des faces ABCD et EFGH.

1) Compléter le tableau de correspondance suivant :

A	[AB]	(GC)	O_2	(d)

$\swarrow S_{(d)}$

2) Justifier que (d) est orthogonale à (ABC).

3) Soit M un point du plan (ABC) construire le point M' image de M par $S_{(d)}$.

Solution

A	[AB]	(GC)	O_2	(d)
C	[DC]	(AE)	O_2	(d)

$\swarrow S_{(d)}$

1) (d) est parallèle à (FB) qui est orthogonale à (ABC) car (FB) orthogonale à deux droites sécantes de (ABC) que sont (AB) et (BC) ; par conséquent, (d) est orthogonale à (ABC).

2) Comme (d) est orthogonal à (ABC) en O_1 , pour tout point M de

(ABC), $S_{(d)}(M)$ est le symétrique de M par rapport à O_1 .

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit (D) la droite passant par O_1 de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. Déterminer les expressions analytiques de S_D .

Posons $S_D(M) = M'$ alors le milieu H de $[MM']$ appartenant à (D) et $MM' \perp \vec{u}$.

Soit $M(x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$.

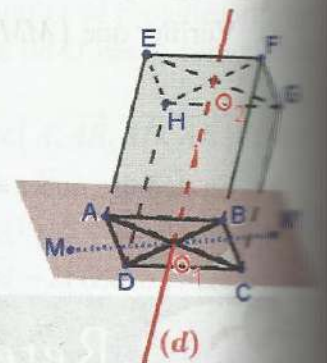
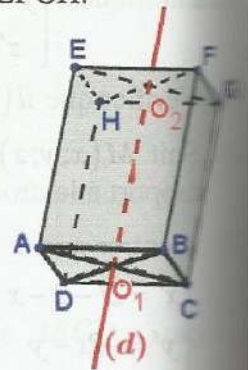
$\overrightarrow{MM'}(x' - x, y' - y, z' - z)$ et $H\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}, \frac{z+z'}{2}\right)$. Une représentation paramétrique de (D) est :

$$\begin{cases} x' = t \\ y' = -t, t \in \mathbb{R}. \text{ Comme } H \in (D), \text{ Il existe } t \in \mathbb{R}, \text{ tel que } \frac{x+x'}{2} = t ; \frac{y+y'}{2} = -t \text{ et } \frac{z+z'}{2} = t \\ z' = t \end{cases}$$

D'où $\begin{cases} x' = 2t - x \\ y' = -2t - y \\ z' = 2t - z \end{cases}$; $\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow (x' - x) - (y' - y) + z' - z = 0 \Leftrightarrow x' - y' + z' = x - y + z$

D'où $2t - x - (-2t - y) + (2t - z) = x - y + z$; $6t = 2x - 2y + 2z$; $t = \frac{1}{3}(x - y + z)$.

Par suite, $\begin{cases} x' = \frac{2}{3}(x - y + z) - x \\ y' = -\frac{2}{3}(x - y + z) - y \\ z' = \frac{2}{3}(x - y + z) - z \end{cases}$ et donc, $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z \\ y' = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z \\ z' = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z \end{cases}$.





S'exercer

1. $ABCDEFGH$ est un cube d'arête $AB = 1$. L'espace est muni du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Déterminer les expressions analytiques de chacun des demi-tours suivants : $S_{(AG)}$, $S_{(DH)}$.
2. $OABC$ est un tétraèdre tel que le triangle ABC soit équilatéral, le point O se projette orthogonalement au centre G du triangle équilatéral ABC . Déterminer les images de O , A , B et C par le demi-tour d'axe (OG) .

14. COMPOSITION DE DEUX RÉFLEXIONS.

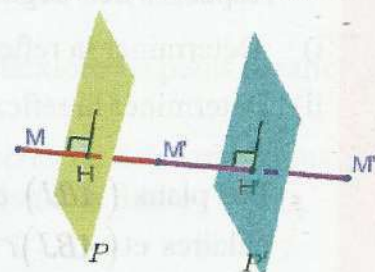


Prendre un bon départ

Activité 1

Soient P et P' deux plans parallèles. Soit $M' = S_P(M)$ et $M'' = S_{P'}(M')$; soient H et H' les projetés orthogonaux respectifs de M et M' , respectivement sur P et P' .

- Justifier que $\overline{MM''} = 2\overline{HH'}$.
- Justifier que le vecteur $\overline{HH'}$ est constant (ne dépend pas de M).
- On pose $\vec{u} = \overline{HH'}$. En déduire que $M'' = t_{2\vec{u}}(M)$.

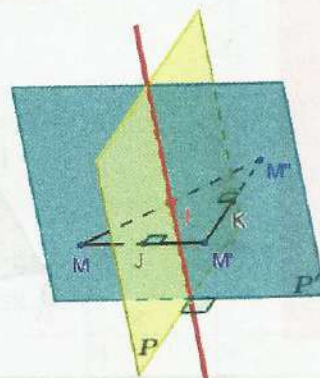


Activité 2

Soient P et P' deux plans perpendiculaires. On pose (d) la droite $P \cap P'$.

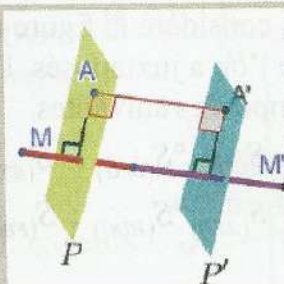
Soit $M' = S_P(M)$ et $M'' = S_{P'}(M')$; J et K les projetés orthogonaux respectifs de M et M' , respectivement sur P et P' .

- Justifier que $(d) \perp (MM')$ et que $(d) \perp (MM'')$, puis en déduire que $(d) \perp (MM'')$.
- Soit I le milieu de $[MM'']$. À partir de la nature du triangle $MM'M''$, montrer que $IM = IM' = IM''$, puis en déduire que $I \in P$ et $I \in P'$.
- En déduire que $I \in (d)$ et que (d) est la médiatrice de $[MM'']$.

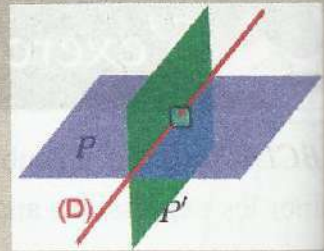


Retenir

1. La composée de deux réflexions de plans parallèles P et P' est une translation de vecteur un vecteur normal aux deux plans. Si A est un point de P et A' son projeté orthogonal sur le plan P' , alors $S_{P'} \circ S_P = t_{\overline{AA'}}$. Autrement dit $S_{P'} \circ S_P = t_{2\vec{u}}$ où $t_{\vec{u}}$ est la translation qui transforme P en P' .



- 2) La composée de deux réflexions de plans perpendiculaires suivant une droite (D) est un demi-tour d'axe (D) .



Exemple

- 1) $SAB CDEFGH$ est un cube. Déterminer la nature de chacune des composées :

- $S_{(EFG)} \circ S_{(ABC)} ; S_{(CGH)} \circ S_{(ADE)}$.

$S_{(EFG)} \circ S_{(ABC)}$ est une translation de vecteur $2\overline{AE}$

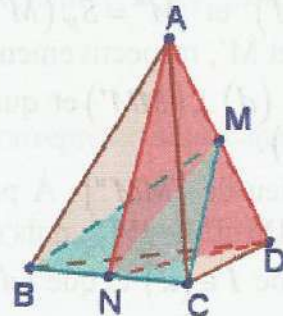
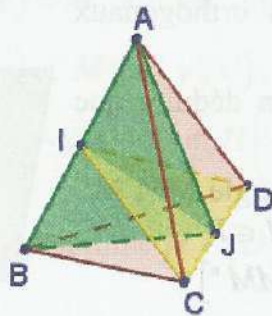
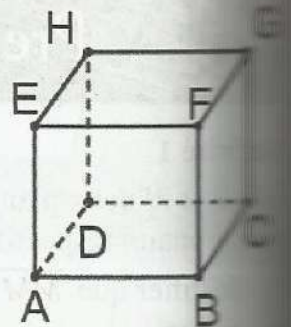
$S_{(CGH)} \circ S_{(ADE)}$ est le demi-tour d'axe (AD) car les plans (CGH) et (ADE) sont perpendiculaires suivant la droite (DH) .

- 2) $ABCD$ est un tétraèdre régulier I, J, K, L M et N les milieux respectifs des segments $[AB]; [CD]; [AC]; [BD]; [AD]$ et $[BC]$

- Déterminer la réflexion S_1 telle que $S_1 \circ S_{(ABJ)} = S_{(IJ)}$
- Déterminer la réflexion S_2 telle que $S_2 \circ S_{(ADN)} = S_{(MN)}$

Les plans (ABJ) et (CDI) sont perpendiculaires et $(ABJ) \cap (CDI) = (IJ)$ donc S_1 est la réflexion de plan (CDI) .

Les plans (ADN) et (BCM) sont perpendiculaires et $(ADN) \cap (BCM) = (MN)$ donc S_2 est la réflexion de plan (BCM) .

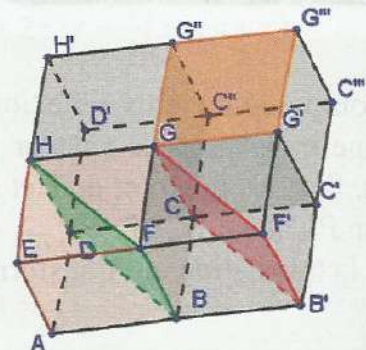


S'exercer

- 1.e) On considère la figure ci-contre composé de quatre cubes que l'on a juxtaposés. Donner la nature de chacune des composées suivantes.

1) $S_{(AED)} \circ S_{(BFG)} ; S_{(BFH)} \circ S_{(B'F'G)} ; S_{(HGC)} \circ S_{(H'G'C')}$.

2) $S_{(AED)} \circ S_{(HDC)} ; S_{(FBC)} \circ S_{(HGC)} ; S_{(FBD)} \circ S_{(GG'G'')}$.



1. $ABCDEFGH$ est un cube. (P) est le plan médiateur du segment $[AB]$. Déterminer la nature de chacune des composées suivantes : $S_{(ABE)} \circ S_{(ABC)}$; $S_{(AEG)} \circ S_{(BOF)}$; $S_{(P)} \circ S_{(AEG)}$.
2. $ABCD A' B' C' D'$ est un cube. S_1 est la réflexion de plan $AA' B$, S_2 est la réflexion de plan (BCB') , S_3 est la réflexion de plan (CCD') , S_4 est la réflexion de plan (BDA')
- Montrer que $r' = S_2 \circ S_1$ est un demi-tour que l'on précisera.
 - Déterminer la nature de $r' = S_4 \circ S_3$
 - On note S la réflexion de plan $(BB'D)$. Déterminer les réflexions S' et S'' telle que $r' = S' \circ S''$
 - En déduire que $t = r' \circ r''$ est une translation de vecteur $2\overline{BD}$
3. L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. P est le plan passant par O et de vecteur normal $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; (P') le plan d'équation $x + y - 2z = 0$.
- Déterminer les expressions analytiques de S_P et $S_{P'}$.
 - Quelle est la nature de $S_{P'} \circ S_P$? Donner son écriture analytique et son élément caractéristique.

REMARQUE

- Toute translation de vecteur $\vec{u}$ non nul est la composée de deux réflexions de plans parallèles ($\vec{u}$ étant un vecteur normal aux deux plans).
- Tout demi-tour d'axe (D) est la composée d'une infinité de manières de deux réflexions de plans perpendiculaires. (les deux plans étant perpendiculaires suivant la droite (D)).

15. COMPOSITIONS DE DEUX DEMI-TOURS.



Prendre un bon départ

Activité 1

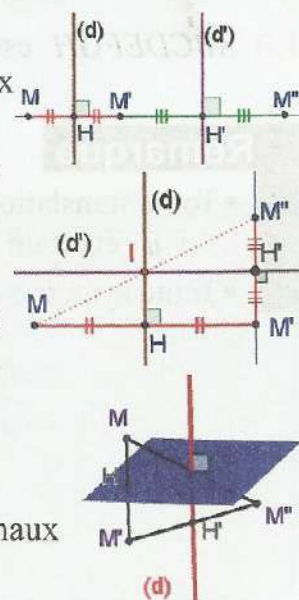
Soient (d) et (d') sont deux droites de l'espace.

Soient $M' = S_{(d)}(M)$ et $M'' = S_{(d')}(M')$; soient H et H' les projetés orthogonaux respectifs de M et M' , respectivement sur P et P' .

- On suppose $(d) \parallel (d')$. En s'inspirant de l'activité 1 du paragraphe 1.3 montrer que $S_{(d)} \circ S_{(d')} = t_{\vec{u}}$ où $\vec{u}$ est un vecteur que l'on précisera. (voir figure ci-contre).
- On suppose que (d) est perpendiculaire à (d') . En s'inspirant de l'activité 2 du paragraphe 1.3 montrer que $S_{(d)} \circ S_{(d')} = S_I$ où I est le point d'intersection des droites (d) et (d') . (voir figure ci-contre).

Activité 2

(d) et P sont respectivement une droite et un plan de l'espace qui sont orthogonaux en un point I . en s'inspirant de l'activité 1, montrer que $S_{(d)} \circ S_P = S_I$





Retenir

- 1) La composée de deux demi-tours d'axes parallèles est une translation de vecteur orthogonal à ces deux axes.
- 2) La composée de deux demi-tours dont les axes (D_1) et (D_2) sont perpendiculaires en un point O est un demi-tour dont l'axe (D) est la perpendiculaire commune à (D_1) et à (D_2) en O.
- 3) La composée d'un demi-tour d'axe (D) et d'une réflexion de plan (P) , tel que (D) est orthogonal à P et O, est la symétrie de centre O.

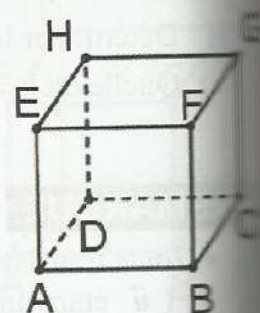
Exemple

$SABCEFGH$ est un cube. Déterminer la nature de chacune des composées :

- 1) $S_{(BF)} \circ S_{(AE)}$;
- 2) $S_{(AB)} \circ S_{(AD)}$;
- 3) $S_{(AB)} \circ S_{(BCG)}$.

Solution

- 1) $S_{(BF)} \circ S_{(AE)}$ est une translation de vecteur $2\overline{AB}$.
- 2) $S_{(AB)} \circ S_{(AD)}$ est le demi-tour d'axe (AE) .
- 3) $S_{(AB)} \circ S_{(BCG)}$ est la symétrie de centre B car $(AB) \perp (BCG)$.



S'exercer

1.i) $ABCEFGH$ est un cube. Démontrer que $S_{(AB)} \circ S_{(AD)} = S_{(AD)} \circ S_{(AB)} = S_{(AE)}$.

Remarque

- Toute translation de vecteur $\vec{u}$ non nul est la composée de deux demi-tours d'axes parallèles ($\vec{u}$ étant un vecteur normal aux deux droites).
- Toute symétrie centrale est la composée d'un demi-tour et d'une réflexion.

1.6. PLANS ET AXES DE SYMÉTRIE D'UN CUBE ET D'UN TÉTRAÈDRE.

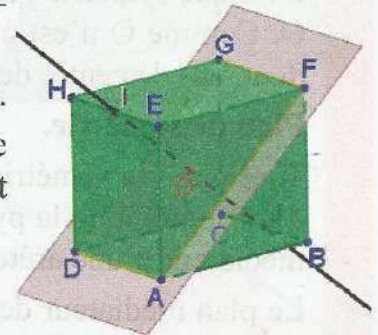


Prendre un bon départ

Activité

Soit $ABCDEFGH$ un cube de centre O .

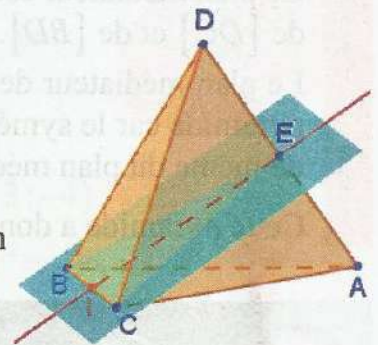
- 1) Comme O est l'isobarycentre des points $A, B, C, D, E, F, G,$ et H , justifier que l'image de O par toute symétrie de l'espace est le point O .
- 2) En déduire que tout axe de symétrie et tout plan de symétrie du cube passe par le point O .
- 3) Soit $S_{(D)}$ une symétrie d'axe (D) telle que (D) soit un axe de symétrie du cube.
 - a) Justifier que l'image d'un sommet du cube par $S_{(D)}$ est encore un sommet du cube.
 - b) En déduire que (D) est une médiatrice d'un segment ayant pour extrémités des sommets du cube.
 - c) En observant la figure ci-contre, citer les 9 axes de symétrie du cube.
 - d) Soit P un plan perpendiculaire à (D) en O . En remarquant que $S_P \circ S_{(D)} = S_O$, montrer que $S_P = S_O \circ S_{(D)}$, puis en déduire que P est un plan de symétrie du cube.
 - e) Citer alors les 9 plans de symétrie du cube.



Activité

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier. Soit E le milieu de $[AD]$.

- 1) Montrer que le plan (BEC) est le plan médiateur de $[AD]$.
- 2) En déduire que (BEC) est un plan de symétrie du tétraèdre $ABCD$.
- 3) Citer cinq autres plans de symétrie de $ABCD$.
- 4) Montrer que la droite (IE) est un axe de symétrie de $ABCD$ puis en déduire six autres axes de symétrie de $ABCD$.



Retenir

Plans de symétrie d'un cube et d'un tétraèdre régulier.

- 1) Un cube a neuf plans de symétrie dont :
 - Trois plans de symétrie qui sont des plans médiateurs des arêtes.
 - Six plans de symétrie qui sont des plans médiateurs des diagonales des faces du cube.
- 2) Un tétraèdre régulier possède six plans de symétrie qui sont les plans médiateurs des six arêtes du tétraèdre.

Axes de symétrie d'un cube et d'un tétraèdre régulier.

- 1) Un cube possède neuf axes de symétrie dont :

- Trois sont les axes passant par les centres de deux faces opposées.
 - Six sont des droites passant par les milieux de deux arêtes opposées.
- 2) Un tétraèdre possède six axes de symétrie qui sont les axes passant par les milieux de deux arêtes opposées.

Exemple

ABCD est un tétraèdre tel que les faces ABC, ABO, ACD sont des triangles rectangles et isocèles en A. Déterminer les plans de symétrie de ABCD.

Soit O l'isobarycentre de A, B, C et D. Toute symétrie qui laisse la pyramide ABCD globalement invariante transforme O en O car toute symétrie conserve le barycentre.

En outre BCD est un triangle équilatéral.

Centre de symétrie.

L'unique symétrie centrale qui transforme O en O est la symétrie de centre O. Comme O n'est évidemment pas un centre de symétrie de ABCD, la pyramide ABCD n'a donc pas de centre de symétrie.

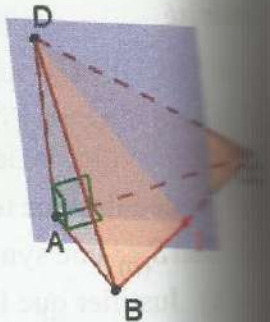
Plan de symétrie.

Tout plan de symétrie de ABCD passe par O. si P est un plan de symétrie de ABCD, l'image d'un sommet de la pyramide par S_P est encore un sommet de la pyramide. P est donc un plan médiateur d'une arête de la pyramide.

Le plan médiateur de $[BC]$ passe par A et D car ABC est isocèle en A et BCD est équilatéral. Ce plan médiateur est un plan de symétrie de la pyramide ; il en est de même du plan médiateur de $[DC]$ et de $[BD]$.

Le plan médiateur de $[AB]$ ne contient ni C, ni D. Ce plan n'est pas un plan de symétrie de la pyramide car le symétrique de C par rapport à ce plan n'appartient pas à la pyramide ; il en est de même du plan médiateur de $[AC]$ et de $[AD]$.

Cette pyramide a donc trois plans de symétrie.



S'exercer

- 1.j) Démontrer qu'un tétraèdre régulier n'admet pas de centre de symétrie.
- 1.k) Déterminer les plans et axes de symétries d'un prisme droit dont la base est un triangle équilatéral.
- 1.l) Déterminer les plans et axes de symétries d'une pyramide régulière SABCD dont la base est un carré ABCD.
- 1.m) Déterminer les plans et les axes de symétrie d'une pyramide régulière dont la base est un hexagone régulier, de centre O.

LEÇON 2 HOMOTHÉTIES-TRANSLATIONS.

- Reconnaître les expressions analytiques des homothéties et des translations.
- Donner la nature de la composée des homothéties, des translations ou d'une homothétie par une translation

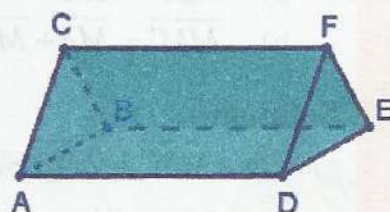
21. EXPRESSIONS ANALYTIQUES.



Prendre un bon départ

Activité 1

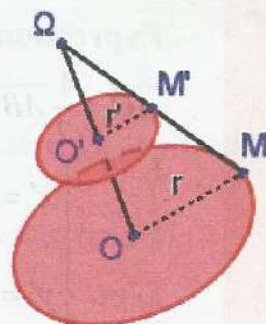
- On considère la figure ci-contre. ABCDEF est un prisme droit.
- Déterminer l'image de ABC par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.
- Construire l'image de cette figure par la translation de vecteur $\overrightarrow{FD}$.



Activité 2

Sur la figure ci-contre, C est le cercle de centre O et de rayon r; C' le cercle de centre O' et de rayon r'. On suppose que le plan contenant C est parallèle au plan contenant C'.

- Déterminer le rapport de l'homothétie de centre Ω qui transforme C en C'.
- Existe-t-il une autre homothétie qui transforme C en C', si oui donner ses éléments caractéristiques.



Activité 3

On suppose l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$; soit $\vec{u}(2:3:-4)$.

- Déterminer une écriture analytique de la translation de vecteur $\vec{u}$.
- Soit h la transformation de l'espace ayant pour écriture analytique
$$\begin{cases} x' = -2x + 3 \\ y' = -2y - 1 \\ z' = -2z + 5 \end{cases}$$
- Déterminer l'ensemble des points invariants de h .
- Montrer que h est une homothétie, préciser son centre et son rapport.



Retenir

- La translation de vecteur $\vec{u}$ est la transformation de l'espace qui à tout point M de E, associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.
- Soit O un point et k un réel non nul; L'homothétie de centre O et de rapport k est la transformation de l'espace qui à chaque point M, associe le M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.
- Soient M, N deux points de E et M', N' leurs images par une homothétie ou une translation $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$ dans une translation. $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ dans une homothétie de rapport k.

- ♣ Par une homothétie ou une translation, l'image d'une droite est une droite qui lui est parallèle.
- ♣ L'image d'un solide de l'espace par une translation ou une homothétie est un solide de l'espace de même nature.
- ♣ Les translations conservent les distances, les aires et les volumes.
- ♣ Les homothéties de rapport k multiplient les distances par $|k|$, les aires par k^2 et les volumes par $|k|^3$.

Exemple

- 1) $ABCD$ est un tétraèdre. Dans chacun des cas suivants, identifier la translation qui à M associe M' et donner l'écriture analytique de cette transformation dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

a) $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$

b) $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

Solution

- a) On a $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MO}$ où O est le milieu de $[BC]$. $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{OA}$.

D'où M est l'image de M' par la translation de vecteur $2\overrightarrow{OA}$.

Expressions analytiques.

$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ d'où $O\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$. $2\overrightarrow{AO}$ est un vecteur de coordonnées $(1, 1, 0)$.

D'où $\begin{cases} x' = x + \frac{1}{2} \\ y' = y + \frac{1}{2} \\ z' = z \end{cases}$ est l'écriture analytique de la translation de vecteur $2\overrightarrow{AO}$.

- b) Soit G le centre de gravité de ABC .

$\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MG}$ d'où $\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GM'} = 3\overrightarrow{MG}$

$\overrightarrow{GM'} = 2\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{GM'} = -2\overrightarrow{MG}$

M' est l'image de M par l'homothétie de centre G et de rapport -2 .

Expression analytique.

$A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $G\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$. De l'égalité $\overrightarrow{GM'} = -2\overrightarrow{MG}$ on a : $\begin{cases} x' - \frac{1}{3} = -2\left(x - \frac{1}{3}\right) \\ y' - \frac{1}{3} = -2\left(y - \frac{1}{3}\right) \\ z' - 0 = -2\left(z - \frac{1}{3}\right) \end{cases}$ d'où $\begin{cases} x' = -2x + 1 \\ y' = -2y + 1 \\ z' = -2z + \frac{2}{3} \end{cases}$

- 2) $ABCDEFGH$ est un cube. M décrit le plan (ADE) . Déterminer le lieu géométrique de M' dans chacun des cas suivants :

- a) $MAFM'$ est un parallélogramme.

- b) M' est le milieu du segment $[GM]$.

Solution

a) On a $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AF}$.

M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AF}$.

L'image de (ADE) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AF}$ est le plan passant par F et parallèle au plan (ADE) . C'est-à-dire le plan (BFG) .

b) $\overrightarrow{GM'} = \frac{1}{2} \overrightarrow{GM}$. M' est l'image de M par l'homothétie de centre G et de rapport $\frac{1}{2}$. C'est le plan passant par le milieu de

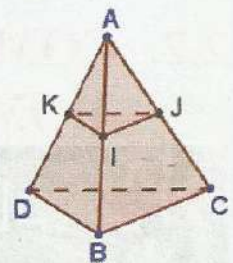
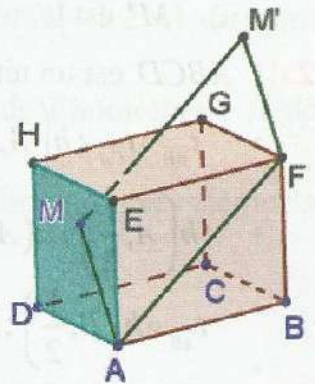
$[EG]$ et parallèle au plan (ADE) .

3) $ABCD$ est un tétraèdre et les arêtes $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$ ont pour milieux respectifs I, J, K . Exprimer l'aire du triangle IJK en fonction de l'aire de BCD .

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}; \quad \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}; \quad \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}.$$

IJK est l'image de BCD par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

$$\text{Aire}(IJK) = \frac{1}{4} \text{Aire}(BCD).$$

**Remarque**

- Une translation est une application affine dont l'endomorphisme associé est l'application identique de l'espace (I_d).
- Une homothétie de rapport k est une application affine d'endomorphisme associé kI_d .
- L'écriture analytique d'une translation est de la forme :
$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases}$$
- L'écriture analytique d'une homothétie de rapport k est de la forme :
$$\begin{cases} x' = kx + a \\ y' = ky + b \\ z' = kz + c \end{cases}$$

S'exercer

1a) $ABCD$ est un tétraèdre régulier de côté $AB = a$.

- Montrer que les centres des gravités des faces sont les sommets d'un tétraèdre homothétique au premier.
- Comparer les volumes des tétraèdres.

1b) $ABCDEFGH$ est un cube standard. On munit l'espace d'un repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ dans chacun des cas suivants, identifier la transformation qui transforme M en M' et donner son écriture analytique.

1) $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}$.

2) $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MG}$.

1c) $ABCDEFGH$ est un cube. M décrit la face $HGCD$. Représenter dans chacun des cas l'ensemble des points M' tels que :

- i) $MHEM'$ est un parallélogramme.
 ii) M' est le milieu de $[CM]$

2.d) $ABCD$ est un tétraèdre. Déterminer la nature de chacune des composées suivantes :

- $t_{\overline{AB}} \circ t_{\overline{CA}} ; h\left(A, \frac{1}{2}\right) \circ h(A, -2)$
- $h\left(A, \frac{1}{2}\right) \circ h(A, 2) ; h\left(B, \frac{1}{2}\right) \circ h\left(A, \frac{1}{2}\right)$
- $t_{\overline{AB}} \circ h\left(B, \frac{1}{2}\right) ; h_{B, \frac{1}{2}} \circ t_{\overline{AB}}$

2.e) Reconnaître et caractériser dans chacun des cas la transformation d'expression analytique indiquée

a) $\begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y - 2 \\ z' = z \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = -2x + 3 \\ y' = -2x + 7 \\ z' = -2x + 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x' = -x + 8 \\ y' = -y + 6 \\ z' = -z + 12 \end{cases}$

2.2. COMPOSÉES DE DEUX HOMOTHÉTIES, D'UNE HOMOTHÉTIE ET D'UNE TRANSLATION.



Prendre un bon départ

Activité 1

Soient h et h' deux homothéties de centres O et O' et de rapports k et k' .

- 1) On suppose $kk' = 1$. Soit le vecteur $\vec{u}$ défini par $\vec{u} = (1 - k')\overline{OO'}$. Soit M un point de l'espace.

Posons $h'(O) = O''$, $h(M) = M'$ et $h'(M') = M''$. on a : $h' \circ h(M) = M''$

$$\begin{aligned} \overline{MM''} &= \overline{MO} + \overline{OO'} + \overline{O'M''} \\ &= \frac{1}{k} \overline{M'O} + \overline{OO'} + k' \overline{O'M'}, \text{ car } \begin{cases} h(M) = M' \\ h'(M') = M'' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{OM'} = k \overline{OM} \\ \overline{O'M''} = k' \overline{O'M'} \end{cases} \\ &= \frac{\overline{M'O} + kk' \overline{O'M'}}{k} + \overline{OO'} = \frac{\overline{M'O} + \overline{O'M'}}{k} + \overline{OO'} \text{ car } kk' = 1. \\ &= \frac{1}{k} \overline{O'O} + \frac{1}{k'} \overline{O''O'} \text{ (car } h'(O) = O'' \Leftrightarrow \overline{O'O''} = k' \overline{O'O} \text{)} \\ &= \frac{k \overline{O''O'} + k' \overline{O'O}}{kk'} = k \overline{O''O'} + \overline{O'O''} \overline{MM''} = (1 - k) \overline{O'O''} = (1 - k) k' \overline{O'O} = (1 - k') \overline{OO'} = \vec{u}. \end{aligned}$$

Quelle est alors la nature de $h' \circ h$?

- 2) On suppose maintenant que $kk' \neq 1$.
 3) Soient A et B deux points de l'espace. On pose $(h' \circ h)(A) = A'$ et $(h' \circ h)(B) = B'$. Montrer que $\overline{A'B'} = kk' \overline{AB}$ et en déduire la nature de $h' \circ h$.
 4) Montrer que $h' \circ h$ admet un unique point invariant Ω défini par $\overline{O\Omega} = \frac{(1 - k')}{1 - kk'} \overline{OO'}$.
 5) Vérifier que si $O = O'$ alors $\Omega = O$.
 6) Donner alors les éléments caractéristique de $h' \circ h$.

Activité 2

On suppose l'espace muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit le vecteur $\vec{u}(1; 2; 3)$ et $\Omega(-1; 2; 4)$ un point de l'espace.

- 1) Donner les expressions analytiques de la translation t de vecteur $\vec{u}$ et de l'homothétie h de centre Ω et de rapport 3.
- 2) Montrer que $h \circ t$ et $t \circ h$ sont des homothéties. Préciser pour chaque transformation ses éléments caractéristiques.



Retenir

- 1) Soient h et h' deux homothéties de centres respectifs O et O' , et de rapports respectifs k et k' . On suppose k et k' tous différents de 1.

▲ Si $O = O'$ alors $h \circ h' = h' \circ h =$ homothétie de centre O et de rapport kk' .

▲ On suppose $O \neq O'$.

• Si $kk' = 1$ alors $h' \circ h$ est la translation de vecteur $(1-k)\overrightarrow{OO'}$.

• Si $kk' \neq 1$ alors $h' \circ h$ est l'homothétie de rapport kk' et de centre le point Ω défini par $\overrightarrow{O\Omega} = \frac{(1-k')}{1-kk'} \overrightarrow{OO'}$.

- 2) Soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$.

• $t_{\vec{u}} \circ h = t_{\vec{u}}$ si $k = 1$.

• Si $k \neq 1$, la composée $t_{\vec{u}} \circ h$ est une homothétie de centre Ω et de rapport k , avec $\overrightarrow{O\Omega} = \frac{1}{1-k} \vec{u}$.

De même la composée $h \circ t_{\vec{u}}$ est une homothétie de centre Ω' et de rapport k , avec $\overrightarrow{O\Omega'} = \frac{k}{1-k} \vec{u}$.

Exemple

Soit h la transformation de l'espace d'expressions analytiques $\begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = 2y + 1 \\ z' = 2z - 1 \end{cases}$. Soit h_1 l'homothétie de centre $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de rapport $\frac{1}{2}$. Soit h_2 l'homothétie de centre $B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de rapport 4.

Donner la nature et les éléments caractéristiques de chacune des transformations suivantes :

$$h; h \circ h_1; h \circ h_2; h \circ t_{\overrightarrow{AB}}.$$

Nature de h .

Au vu de l'écriture analytique de h , on conclut que h est une homothétie de rapport 2 et de centre le point C dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vérifient $\begin{cases} x = 2x - 1 \\ y = 2y + 1 \\ z = 2z \end{cases}$. D'où $C \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Nature de $h \circ h_1$.

Comme $2 \times \frac{1}{2} = 1$, $h \circ h_1$ est une translation de vecteur $\vec{u} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \overrightarrow{CA}$. Alors $h \circ h_1 = t_{\vec{u}}$ avec $\vec{u}(0; 2; 1)$.

Nature de $h \circ h_2$.

Comme $2 \times (-4) = -2 \neq 1$, $h \circ h_2$ est une homothétie de rapport -2 et de centre le point Ω défini

$$\text{par } \overrightarrow{B\Omega} = \frac{(1 - (-4))}{1 - (-2)} \overrightarrow{BC} = \frac{5}{3} \overrightarrow{BC}. \text{ D'où } \Omega \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

Nature de $h \circ t_{\overrightarrow{AB}}$.

Comme le rapport 2 de h est différent de 1 alors $h \circ t_{\overrightarrow{AB}}$ est une homothétie de centre Ω' et de

$$\text{rapport } 2, \text{ avec } \overrightarrow{C\Omega'} = \frac{2}{1-2} \overrightarrow{AB} = -2 \overrightarrow{AB}. \text{ D'où } \Omega' \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

N.B. Pour déterminer la nature de ses transformations on peut aussi déterminer leurs expressions analytiques et en déduire leur nature sur la base de celles-ci.

Remarque

En général $t_{\vec{u}} \circ h$ et $h \circ t_{\vec{u}}$ n'ont pas le même centre : la composée $t_{\vec{u}} \circ h$ n'est donc pas commutative



S'exercer

2.f) ABCDEFGH est un cube. h est l'homothétie de centre A et de rapport 2 et t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

- 1) Construire les images des points A, B, C et D par la composée $h \circ t$.
- 2) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $h \circ t$ et de $t \circ h$.

2.g) ABCDEFGH est un cube de centre O. h est l'homothétie de centre O et de rapport 2 et h' l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

- 1) Construire les images des points A, B, C et D par la composée $h \circ h'$.
- 2) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $h \circ h'$.

2.h) On considère les transformations f , g et t d'expressions analytiques respectives

$$\begin{cases} x' = 3x - 1 \\ y' = 3y + 1 \\ z' = 3z \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y - 1 \\ z' = z - 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x' = -2x + 1 \\ y' = -2y - 2 \\ z' = -2z + 3 \end{cases}$$

- 1) Déterminer la nature de f , g et t .
- 2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f \circ g$; $g \circ f$; $f \circ t$; $t \circ g$

S'ENTRAÎNER

Pour les exercices de 1 à 10, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Déterminer les expressions analytiques de :

- 1) la réflexion plane (XOY) ;
- 2) la réflexion plane (XOZ) ;
- 3) la réflexion plane (YOZ) .

2. Déterminer l'expression analytique du :

- 1) demi-tour d'axe $(O; \vec{i})$;
- 2) demi-tour d'axe $(O; \vec{j})$;
- 3) demi-tour d'axe $(O; \vec{k})$.

3. (P) est un plan d'équation $x + y + z = 0$.

4. (D) est la droite passant par O et d'un vecteur directeur $\vec{u}(1, 1, 1)$.

- 1) Vérifier que (P) et (D) sont orthogonaux ;
- 2) Déterminer l'expression analytique du demi-tour d'axe (D) noté $S_{(D)}$.
- 3) Déterminer l'expression analytique de la réflexion de plan (P) notée $S_{(P)}$.
- 4) Déterminer l'expression analytique de $S_{(P)} \circ S_{(D)}$.
- 5) Quelle est la nature de $S_{(P)} \circ S_{(D)}$?

4. (S) est la sphère de centre O et de rayon 2.

5. (P) est le plan d'équation $x = z + 2$.

- 1) Déterminer l'expression analytique de la réflexion de plan (P) notée $S_{(P)}$.
- 2) Déterminer l'image (S') de (S) par $S_{(P)}$.

5. (P) est le plan d'équation $2x - y + z - 2 = 0$.

A est le point de l'espace de coordonnées

$(-1, 0, 2)$.

- 1) Déterminer les coordonnées du point A' image de A par la projection orthogonale sur (P) .
- 2) En déduire les coordonnées du point A'' image de A par la réflexion d'axe (P) .

6.

On considère les points

$A(6; 0; 0)$, $B(0; 6; 0)$ et $C(0; 0; 6)$.

- 1) Déterminer l'expression analytique de la réflexion de plan (ABC) notée s .
- 2) On désigne par I le point de coordonnées $(2; 2; 2)$.
 - a) Vérifier que I est équidistant des points A, B et C .
 - b) Déterminer l'image J de I par s .
 - c) Justifier que J est équidistant des points A, B et C .

7.

On considère les points

$A(0; 1; 1)$, $B(1; 0; 1)$ et $C(1; 1; 0)$.

- a) Déterminer une équation de plan (ABC) ;
- b) Justifier que $OABC$ est un tétraèdre ;
- c) Déterminer l'écriture analytique de la réflexion de plan (ABC) notée s .
- d) Déterminer l'image O' de O par s .

8.

On considère dans l'espace les points

$A(2; 0; 4)$ et $B(-4; 2; 0)$.

S est la réflexion plane qui transforme A en B .

- 1) Justifier que O est invariant par S .
- 2) Déterminer une équation du plan P de la réflexion S .
- 3) Déterminer l'écriture analytique de S .

9.

A est le point de l'espace de coordonnées $(1; 2; 3)$.

- Déterminer les coordonnées des points B, C et D image de A par les réflexions d'axes $(O; \vec{i})$; $(O; \vec{j})$ et $(O; \vec{k})$.
- Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

10.

P est le plan d'équation $x - 3y + z - 1 = 0$.

(D) est la droite passant par A et d'un vecteur directeur $\vec{u}(1, -3, 2)$. On donne $B(2; -3; 1)$.

- Démontrer que (D) est orthogonale à P en un point I que l'on déterminera.
- Déterminer les coordonnées de B_1 image de B par le demi-tour d'axe (D).
- Déterminer les coordonnées de B_2 image de I par la réflexion de plan P.
- Quelle est la nature du quadrilatère BB_1IB_2 ?

Pour les exercices de 12 à 17 ABCDEFGH est un cube.

11.

- Déterminer les images des sommets du cube par la réflexion S_1 de plan (ABH) notée.
- Déterminer les images des sommets du cube par la réflexion S_2 de plan (EDF) notée.
- Justifier que $S_1 \circ S_2$ est un demi-tour que l'on caractérisera.

12.

S_1 est la réflexion de plan (ABE) ;

S_2 est la réflexion de plan (BFC) ;

S_3 est la réflexion de plan (HDC) ;

S_4 est la réflexion de plan (ADE) .

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de chacune des composées $S_2 \circ S_1$ et $S_4 \circ S_3$.

13.

En écrivant chacun des demi-tours

$S_{(AD)}$, $S_{(DC)}$ et $S_{(DH)}$ comme composée de réflexions par rapport à des plans bien choisis. Démontrer que : $S_{(AD)} \circ S_{(DC)} = S_{(DC)} \circ S_{(AD)} = S_{(DH)}$.

14.

S est la réflexion de plan (ADH) et S' le demi-tour d'axe (AB) . Déterminer $S' \circ S$.

15.

S est la réflexion de plan (ADH) et S' le demi-tour d'axe (AB) . Déterminer $S' \circ S$.

16.

S est la réflexion d'axe de plan (ABC) et S' la réflexion de plan (EFG) . Déterminer la nature et la composée $S' \circ S$.

17.

O_1 désigne le centre de la face $ADHE$, O_2 le centre de la face $BCGF$. N désigne le point de $[HF]$ et P le point de $[AC]$ tels que $\vec{AP} = k\vec{AC}$ et $\vec{HN} = k\vec{HF}$. Soit d le demi-tour d'axe (O_1O_2) .

- Déterminer les images par d des points A et P.
- I étant le milieu de $[NP]$, montrer que $\vec{HN} + \vec{AP} = 2\vec{OI}$ puis que $\vec{HF} + \vec{AC} = 2\vec{OO_1}$.
- En déduire que $\vec{OI} = k\vec{OO_1}$, $k \in [0; 1]$.
- Quel est l'ensemble des points I lorsque k décrit l'intervalle $[0; 1]$?

18.

1) Déterminer la nature de chacune des composées $S_{(ADH)} \circ S_{(ABF)}$ et $S_{(ABF)} \circ S_{(BCG)}$.

2) En déduire que la composée de $S_{(AE)} \circ S_{(BF)}$ est une translation de vecteur $2\vec{BA}$.

19.

Combien existe-il de demi-tour échangeant deux points?

On considère un tétraèdre $ABCD$ tel que $AB=AC$ et $DB=DC$.

1) Tracer la section de ce tétraèdre par le plan de la réflexion S qui échange B en C .

2) Soit I le milieu de $[AC]$ et J celui de $[CD]$. Expliquer le tracé de l'image de (IJ) par S .

3) Montrer que dans une réflexion, une droite et son image sont coplanaires.

4) Quelles sont les droites globalement invariantes par une réflexion ?

On considère un plan (P) et $\vec{n}$ un vecteur normal à (P) et unitaire. S est l'application de l'espace qui à tout point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} - 2(\overrightarrow{OM} \cdot \vec{n})\vec{n}$. Justifier que S est une réflexion de plan (P) .

$ABCD$ est un tétraèdre régulier. On désigne par I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des segments $[AD], [DC], [CB], [BA], [AC]$ et $[BD]$.

1) Réaliser la figure.

2) On pose $AB=1$.

a) Démontrer que $IJ = KJ = LI = KL = \frac{1}{2}$.

b) Démontrer que (AC) est orthogonale à (BD) et en déduire que $IJKL$ est un carré.

3) Démontrer que (MN) est orthogonale au plan (IJK) .

4) Soit (D_1) et (D_2) les demi-tours d'axes (IK) et (JL) , S la réflexion de plan (IJK) .

a) Déterminer les réflexions S_1 et S_2 telles que $S \circ S_1 = S_{(D_1)}$ et $S_2 \circ S = S_{(D_2)}$.

b) En déduire que $S_{(D_1)} \circ S_{(D_2)} \circ S_{(D_1)}$ est un demi-tour que l'on caractérisera.

On considère un tétraèdre $ABCD$ tels que

les faces ABC et ABD soient des triangles équilatéraux. On désigne par J le milieu du segment $[AB]$.

1) Démontrer que (AB) est perpendiculaire au plan (JCD) .

2) On désigne par S_1 la réflexion de plan (JCD) . Déterminer les images des sommets du tétraèdre par S_1 . Que représente (JCD) pour S_1 .

3) S_2 désigne la réflexion de plan (ABC) .

4) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $S_2 \circ S_1$.

HOMOTHÉTIES ET TRANSLATIONS

25.

Soit trois points A, B et C de l'espace $\mathcal{E}$.

Identifier la transformation qui à tout point M associe le point M' dans chacun des cas suivants :

1) $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$.

2) $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

26.

$ABCDEFGH$ est un cube. I désigne le milieu

du segment $[AG]$.

Représenter l'image du cube par :

- la translation de vecteur $\overrightarrow{GI}$;

- l'homothétie de centre A qui transforme G en I ;

- l'homothétie de centre A qui transforme I en G .

27.

Le point M décrit la face $ADHE$ d'un cube.

Représenter dans chacun des cas suivants, l'ensemble des points M' vérifiant :

1) $MAFM'$ est un parallélogramme ;

2) $MAM'G$ est un parallélogramme ;

3) M' est le milieu du segment $[GM]$.

28.

On considère un tétraèdre $ABCD$ et les milieux I, J, K des arêtes $[AB], [AC]$ et $[AD]$.

Exprimer l'aire du triangle IJK en fonction de

celle de BCD .

29.

Etablir les propriétés suivantes. Dans l'espace par une homothétie ou une translation,

- (1) l'image d'une droite est une droite parallèle à la droite initiale ;
- (2) l'image d'un plan est un plan parallèle au plan initial ;
- (3) l'image d'une sphère est une sphère.

30.

$ABCD$ est un tétraèdre P, Q, R et S sont les points définis par

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{CR} = \frac{1}{3} \overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CS} = \frac{1}{3} \overrightarrow{CD}.$$

On désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BD]$.

- 1) Démontrer que les droites (PS) , (QR) et (IJ) sont concourantes.
- 2) Démontrer que les centres de gravité des faces du tétraèdre $ABCD$ sont les sommets d'un tétraèdre homothétique au premier.

N.B : On pourra s'aider du l'isobarycentre O des sommets A, B, C et D .

31.

$ABCD$ est un tétraèdre.

- 1) Construire l'image $A_1B_1C_1D_1$ de $ABCD$ par l'homothétie h de centre A et de rapport 2.
- 2) Construire l'image $A_2B_2C_2D_2$ de $ABCD$ par l'homothétie h' de centre B et de rapport $-\frac{1}{2}$.
- 3) Quelle est la nature de hoh' ?

32.

$SABCD$ est une pyramide dont la base $ABCD$ est un carré. h est l'homothétie de centre S et de rapport 2; h' est l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$. Pour tout point M , on pose

$$h(M) = M_1, h'(M_1) = M_2.$$

- 1) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM_2}$ est un

vecteur constant (indépendant de M).

- 2) Construire l'image de $SABCD$ par $h'oh$.

33.

$ABCA'B'C'$ est un prisme droit dont la base est un triangle équilatéral de centre O .

t est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$. h est l'homothétie de centre O et de rapport -2 .

Déterminer la nature et les caractéristiques de $tohet$ et hot et construire l'image du prisme par $tohet$ et par hot .

N.B : on construira les centres de $tohet$ et hot .

Dans les exercices 38 à 44, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

34.

On considère les points

$$A(-2; 0; 1), B(0; 1; 2) \text{ et } C(0; 2; -1).$$

- 1) Déterminer les coordonnées du point E image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- 2) Déterminer les coordonnées du point F image de C par la symétrie de centre A .
- 3) Déterminer les coordonnées du F image du point B par l'homothétie de centre A et de rapport -2 .

35.

On considère les points

$$A(1; 0; 1), B(0; -1; 1), C(1; -1; 0) \text{ et } D(0, 0, 1).$$

- 1) Démontrer que A, B et C déterminent un plan et donner une équation de ce plan.
- 2) Justifier que $ABCD$ est un tétraèdre. Calculer son volume.
- 3) Soit h l'homothétie de centre A qui transforme D en J milieu de $[AD]$.
- 4) Déterminer les images A', B', C' et D' de A, B, C, D sommets du tétraèdre $ABCD$ par h .
- 5) Comparer le volume du tétraèdre $ABCD$ à celui de son image $A'B'C'D'$ par h .

36.

On considère les points

$$A(1; 1; 1), B(1; 0; 2), C(-1; -2; 1).$$

$$A_1(-1; -4; 3), A_2(0; 1; 3) \text{ et } B_2\left(0; \frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right).$$

- 1) Justifier l'existence d'une homothétie h_1 qui transforme A en A_1 et B en B_1 .
- 2) Justifier l'existence d'une homothétie h_2 qui transforme A en A_2 et B en B_2 .
- 3) Déterminer les expressions analytiques de h_1 et de h_2 .
- 4) Déterminer les expressions analytiques de $h_1 \circ h_2$ et $h_2 \circ h_1$. Quelle est la nature de $h_1 \circ h_2$? de $h_2 \circ h_1$?

(P_1) et (P_2) sont deux plans

d'équations respectives

$$-2y + 4z - 9 = 0 \text{ et } x - 2y + 4z - 9 = 0.$$

- 1) Vérifier que les plans (P_1) et (P_2) sont perpendiculaires.
- 2) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) intersection de (P_1) et (P_2) .
- 3) Soit t la translation de vecteur $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.. Déterminer les images $(P'_1), (P'_2)$ et (D') de $(P_1), (P_2)$ et (D) par t .
- 4) Justifier (P'_1) et (P'_2) sont perpendiculaires et que (D') est leur représentation paramétrique.

On considère les points

$$A(10; 5; -10), B(-1; -15; 17),$$

$$C(2; 20; 21) \text{ et } D(-10; 5).$$

- 1) Déterminer l'ensemble (E) des points de l'espace tels que : $(\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}) \cdot \vec{MB} = 0$.
- 2) Déterminer l'ensemble (F) des points M de l'espace tel que.

$$(\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}) \wedge \vec{MD} = 0.$$

- 3) Étudier $(E) \cap (F)$.
- 4) Soit h l'homothétie de centre O et de rapport 2.

a) Déterminer $(E') = h(E)$; $(F') = h(F)$

b) Étudier $(E') \cap (F')$.

39.

On considère les points

$$A(6; 0; 0), B(0; 6; 0) \text{ et } C(0; 0; 6).$$

G est le barycentre du système

$$(O; 1), (A; 2) \text{ et } (B; 3).$$

(S) est l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$(\vec{MO} + 2\vec{MA} + 3\vec{MB}) \cdot \vec{MC} = 0.$$

h est l'application de l'espace qui à tout

point M associe le point M' telle que

$$\vec{MM'} = \vec{MO} + 2\vec{MA} + 3\vec{MB}.$$

- 1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de h .
- 2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (S) .
- 3) Déterminer l'image (S') de (S) par h .
- 4) Soit (P) le plan d'équation $3x + 4y + \frac{17}{2} = 0$. Étudier $(P) \cap (S)$.
- 5) Déterminer l'image (P') de (P) par h et étudier $(P') \cap (S')$.

40.

(P) est le plan d'équation $x - y + z = 1$.

(D) est la droite passant par O et orthogonale au plan (P) .

- 1) Déterminer les expressions analytiques de la réflexion $S_{(P)}$ d'axe (P) et du demi-tour $S_{(D)}$ d'axe (D) .
- 2) Déterminer l'écriture analytique de $S_{(D)} \circ S_{(P)}$.
- 3) Démontrer $S_{(D)} \circ S_{(P)}$ que est une symétrie centrale que l'on caractérisera.
- 4) Déterminer les images de (D) et (P) par $S_{(D)} \circ S_{(P)}$.

Chapitre 16

CONIQUES

LEÇON 1 GÉNÉRALITÉS SUR LES CONIQUES

- 1.1 DÉFINITION MONOFOCALE D'UNE CONIQUE
- 1.2 SOMMETS SITUÉS SUR L'AXE FOCAL D'UNE CONIQUE
- 1.3 AXES DE SYMÉTRIE D'UNE CONIQUE
- 1.4 EFFET D'UNE SIMILITUDE SUR UNE CONIQUE
- 1.5 CONSTRUCTION D'UNE CONIQUE POINT PAR POINT : RÉGIONNEMENT DU PLAN PAR UNE CONIQUE
- 1.6 ÉQUATION CARTÉSIENNE D'UNE CONIQUE À PARTIR DE SA DÉFINITION MONOFOCALE

LEÇON 2 ÉTUDE ANALYTIQUE DES PARABOLES

- 2.1 ÉQUATION RÉDUITE D'UNE PARABOLE
- 2.2 TANGENTE EN UN POINT À UNE PARABOLE
- 2.3 REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE D'UNE PARABOLE

LEÇON 3 ÉTUDE ANALYTIQUE DES ELLIPSES ET DES HYPERBOLES

- 3.1 ÉQUATION RÉDUITE D'UNE HYPERBOLE OU D'UNE ELLIPSE
- 3.2 EFFET D'UNE AFFINITÉ ORTHOGONALE SUR UN CERCLE
- 3.3 TANGENTE À UNE CONIQUE À CENTRE EN UN DE SES POINTS
- 3.4 REPRÉSENTATIONS PARAMÉTRIQUES D'UNE CONIQUE À CENTRE
- 3.5 DÉFINITION BIFOCAL D'UNE CONIQUE À CENTRE

S'ENTRAÎNER

Chapitre 16

CONIQUES

LEÇON 1 GÉNÉRALITÉS SUR LES CONIQUES

- 1.1 DÉFINITION MONOFOCALE D'UNE CONIQUE
- 1.2 SOMMETS SITUÉS SUR L'AXE FOCAL D'UNE CONIQUE
- 1.3 AXES DE SYMÉTRIE D'UNE CONIQUE
- 1.4 EFFET D'UNE SIMILITUDE SUR UNE CONIQUE
- 1.5 CONSTRUCTION D'UNE CONIQUE POINT PAR POINT
RÉGIONNEMENT DU PLAN PAR UNE CONIQUE
- 1.6 ÉQUATION CARTÉSIENNE D'UNE CONIQUE À PARTIR
SA DÉFINITION MONOFOCALE

LEÇON 2 ÉTUDE ANALYTIQUE DES PARABOLES

- 2.1 ÉQUATION RÉDUITE D'UNE PARABOLE
- 2.2 TANGENTE EN UN POINT À UNE PARABOLE
- 2.3 REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE D'UNE PARABOLE

LEÇON 3 ÉTUDE ANALYTIQUE DES ELLIPSES ET DES HYPERBOLES

- 3.1 ÉQUATION RÉDUITE D'UNE HYPERBOLE OU D'UNE ELLIPSE
- 3.2 EFFET D'UNE AFFINITÉ ORTHOGONALE SUR UN CERCLE
- 3.3 TANGENTE À UNE CONIQUE À CENTRE EN UN DE SES POINTS
- 3.4 REPRÉSENTATIONS PARAMÉTRIQUES D'UNE CONIQUE À CENTRE
- 3.5 DÉFINITION BIFOCAL D'UNE CONIQUE À CENTRE

S'ENTRAÎNER

IÇON 1 GÉNÉRALITÉS SUR LES CONIQUES

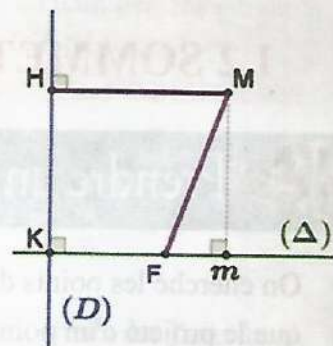
- Reconnaitre la nature de l'ensemble Γ des points M du plan tels que $MF = ed(M, (D))$ où F est un point, e un réel strictement positif et (D) une droite ne passant pas par F .
- Déterminer quelques axes de symétrie de Γ , ainsi que ses points d'intersection avec ces axes de symétrie.
- Connaitre l'effet d'une similitude sur Γ .
- Avoir une idée de la forme des différentes coniques par une représentation point par point.
- Caractériser de manière métrique une région du plan limitée par une conique.
- Ecrire une équation cartésienne d'une conique à partir de sa définition monofocale.

1.1 DÉFINITION MONOFOCALE D'UNE CONIQUE

Prendre un bon départ

- On donne un point F , une droite (D) ne passant pas par F et un réel strictement positif e .
- À tout point M du plan, on associe son projeté orthogonal H sur (D) .
- On propose d'étudier

l'ensemble (Γ) formé des points M du plan tels que $\frac{MF}{MH} = e$.



- Un point de (Γ) peut-il appartenir à (D) ?
- Soit (Δ) la droite passant par F et perpendiculaire à (D) , m le projeté orthogonal de M sur (Δ) .

- Montrer que $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{MF}{mK} = e$.
 - Montrer que $MF^2 = Mm^2 + mF^2$ (on pourra poser $MF^2 = (\overrightarrow{Mm} + \overrightarrow{mF})^2$ et remarquer que $\overrightarrow{Mm} \perp \overrightarrow{mF}$).
 - En déduire que $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow Mm^2 = e^2 mK^2 - mF^2 = (\overrightarrow{emK} + \overrightarrow{mF}) \cdot (\overrightarrow{emK} - \overrightarrow{mF})$.
- On suppose $e \neq 1$, soit $A = \text{bar} \{(F; 1); (K; e)\}$ et $A' = \text{bar} \{(F; 1); (K; -e)\}$. Montrer que
- $$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow Mm^2 = (e^2 - 1) \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'}$$



Retenir

Soit (D) une droite, F un point du plan n'appartenant pas à (D) ; soit e un réel strictement positif.

1) L'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $\frac{MF}{MH} = e$,

où H désigne le projeté orthogonal de M sur la droite (D) , est appelé conique de foyer F , de directrice (D) et d'excentricité e .

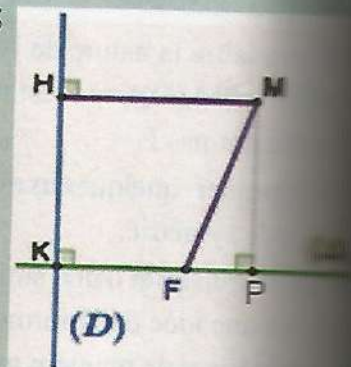
a) Si $e < 1$, (Γ) est une ellipse.

b) Si $e = 1$, (Γ) est une parabole.

c) Si $e > 1$, (Γ) est une hyperbole.

2) La droite (Δ) passant par le foyer F et perpendiculaire à la directrice (D) est appelée axe focal de la conique (Γ) .

3) Si P désigne le projeté orthogonal de M sur l'axe focal, alors (Γ) est encore l'ensemble des points M du plan tels que $MP^2 = (e^2 - 1)\vec{PA} \cdot \vec{PA'}$ où A et A' sont les points définis par $A = \text{bar} \{(F; 1); (K; e)\}$ et $A' = \text{bar} \{(F; 1); (K; -e)\}$.



1.2 SOMMETS SITUÉS SUR L'AXE FOCAL



Prendre un bon départ

On cherche les points du plan qui sont à la fois sur la conique (Γ) et sur l'axe focal (Δ) . On montre que le projeté d'un point M de $(\Delta) \cap (\Gamma)$ sur (D) est le point K .

Dans cette situation particulière, les points M , F et K sont alignés,

Activité

$$M \in (\Gamma) \cap (\Delta) \Leftrightarrow \frac{MF}{MK} = e \text{ car le projeté de } M \text{ sur } (D) \text{ est } K.$$

$$\Leftrightarrow MF = eMK.$$

1) Pour $e = 1$, montrer que K est indépendant du point M et que M est le milieu de $[FK]$.

2) On suppose maintenant que $e \neq 1$.

a. Montrer que $(\vec{MF} - e\vec{MK}) \cdot (\vec{MF} + e\vec{MK}) = 0$

b. Expliquer pourquoi $M \in (\Gamma) \cap (\Delta) \Leftrightarrow M = \text{bar} \{(F; 1); (K; -e)\}$ ou $M = \text{bar} \{(F; 1); (K; e)\}$.

- En déduire que dans ce cas (Γ) et (Δ) ont deux points d'intersection.
- On note $A = \text{bar} \{(F; 1); (K; e)\}$ et $A' = \text{bar} \{(F; 1); (K; -e)\}$. Justifier que $A \in [FK]$.
- Justifier que si $e < 1$ alors A et A' sont dans le même demi plan de frontière (D) ; et que
- si $e > 1$ alors A et A' sont situés de part et d'autre de (D) .

Retenir

Soit (Γ) une conique d'excentricité e .

- 1) Si $e = 1$ alors un seul point de (Γ) est situé sur l'axe focal (Δ) . On le notera S dans la suite.
 $S = \text{milieu } [FK]$.
- 2) Si $e \neq 1$ (cas d'une ellipse et d'une hyperbole) alors deux points de (Γ) sont situés sur l'axe focal (Δ) ; le point $A = \text{bar} \{(F; 1); (K; e)\}$ et le point $A' = \text{bar} \{(F; 1); (K; -e)\}$.
- 3) Les points d'intersection de la conique avec l'axe focal sont appelés les sommets de la conique situés sur l'axe focal.

Exemple

(d) est une droite du plan et F un point n'appartenant pas à (d) . Dans chacun des cas suivants construire l'axe focal et les sommets de la conique (Γ) de directrice (d) , de foyer F et d'excentricité e .

1^{er} cas : $e = 1$.

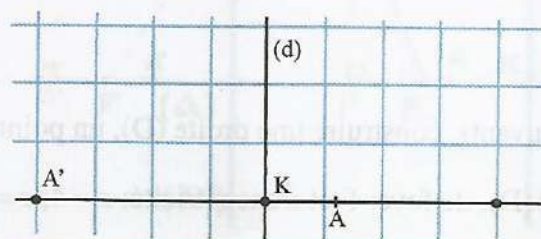
$e = 1$ donc (Γ) est une parabole. (Γ) a un seul sommet qui est le milieu de $[FK]$ où K désigne le projeté orthogonal de F sur (D) .

2^{ème} cas : $e = 2$.

$e = 2$ donc (Γ) est une hyperbole. (Γ) a deux sommets A et A' qui sont situés sur l'axe focal. Soit K le projeté orthogonal de F sur (D) .

Alors : $A = \text{bar} \{(F; 1); (K; 2)\}$ d'où $\vec{FA} = \frac{2}{1+2} \vec{FK} = \frac{2}{3} \vec{FK}$.

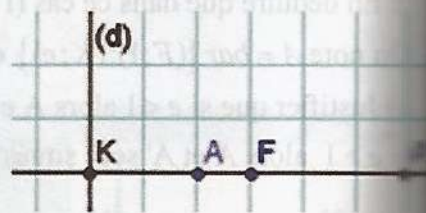
$A' = \text{bar} \{(F; 1); (K; -2)\}$ d'où $\vec{FA'} = \frac{-2}{1-2} \vec{FK} = 2 \vec{FK}$.



3^{ème} cas : $e = 0,5$.

$$A = \text{bar} \{(F; 1); (K; 0,5)\} \text{ d'où } \overrightarrow{FA} = \frac{0,5}{1+0,5} \overrightarrow{FK} = \frac{1}{3} \overrightarrow{FK}.$$

$$A' = \text{bar} \{(F; 1); (K; -0,5)\} \text{ d'où } \overrightarrow{FA'} = \frac{-0,5}{1-0,5} \overrightarrow{FK} = -\overrightarrow{FK}$$



Le plan est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on donne la droite $(d) : x = -2$ et le point F . Soit (Γ) la conique de foyer F de directrice (d) et d'excentricité 2.

Déterminer par leurs coordonnées les sommets A et A' de (Γ) situés sur l'axe focal.

Soit S le milieu de $[AA']$. Déterminer les coordonnées de A , A' et F dans le repère $(S; \vec{i}; \vec{j})$.

$e = 2 > 1$, (Γ) est donc une hyperbole. Le projeté orthogonal de F sur (d) est $K(-2; 2)$.

$$A = \text{bar} \{(F; 1); (K; 2)\} \text{ d'où } x_A = \frac{1(1) + 2(-2)}{1+2} = -1; \quad y_A = \frac{1(2) + 2(2)}{1+2} = 2;$$

$$\text{alors } A(-1; 2). \quad A' = \text{bar} \{(F; 1); (K; -2)\} \text{ d'où } x_{A'} = \frac{1(1) - 2(-2)}{1-2} = -5; \quad y_{A'} = \frac{1(2) - 2(2)}{1-2} = 2 \text{ alors } A'(-5; 2).$$

Le milieu S de $[AA']$ a donc pour coordonnées $S(-3; 2)$; soit M un point du plan. La relation vectorielle $\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OS}$ permet d'exprimer les coordonnées $(X; Y)$ du point M dans le repère $(S; \vec{i}; \vec{j})$ en fonction des coordonnées $(x; y)$ de M dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

$$\text{On a : } \begin{cases} X = x + 3 \\ Y = y - 2 \end{cases}$$

Dans le repère $(S; \vec{i}; \vec{j})$ on a donc : $A(2; 0)$; $A'(-2; 0)$; $F(4; 0)$.

Dans le repère $(S; \vec{i}; \vec{j})$ la droite (d) a pour équation $X = 1$.

Remarque

- Dans le cas d'une ellipse, les sommets situés sur l'axe focal sont dans le même demi-plan que la directrice.
- Dans le cas de l'hyperbole, les sommets situés sur l'axe focal sont situés de part et d'autre de la directrice.
- Soit $M(x; y)$ et $S(\alpha; \beta)$ deux points du plan dont les coordonnées sont exprimées dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Soit $(X; Y)$ les coordonnées du point M dans le repère $(S; \vec{i}; \vec{j})$.

$$\text{on a : } \begin{cases} X = x - \alpha \\ Y = y - \beta \end{cases}$$



S'exercer

1. a Dans chacun des cas suivants, construire une droite (D) , un point de $F \notin (D)$ et les sommets de la conique de directrice (D) , de foyer F et d'excentricité : $e = 4$; $e = \frac{3}{4}$; $e = 5$; $e = 1$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; i, j)$. Dans chacun des cas suivants, déterminer leurs coordonnées les sommets de la conique de directrice (D) , de foyer F et d'excentricité e .

a) $(D) : y = -3$; $F(-2; 3)$; $e = 1$.

b) $(D) : x = 2$; $F(0; 3)$; $e = 0,5$.

c) $(D) : y = 4$; $F(-2; -3)$; $e = 3$.

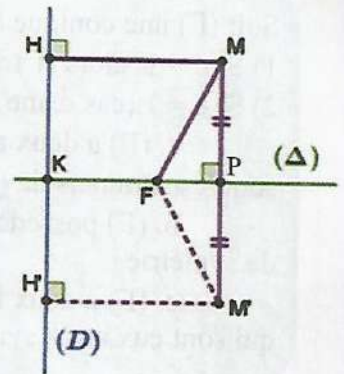
1.3 AXES DE SYMÉTRIE

Prendre un bon départ

Activité 1

(Γ) est la conique de foyer F , de directrice associée (D) et d'excentricité e .

Soit (Δ) la perpendiculaire à (D) passant par F et K le point d'intersection de (Δ) et de (D) . Soit M un point du plan. Montrer que si M appartient à (Γ) alors son symétrique M' par rapport à (Δ) appartiendra aussi à (Γ) . Que représente la droite (Δ) pour (Γ) ?

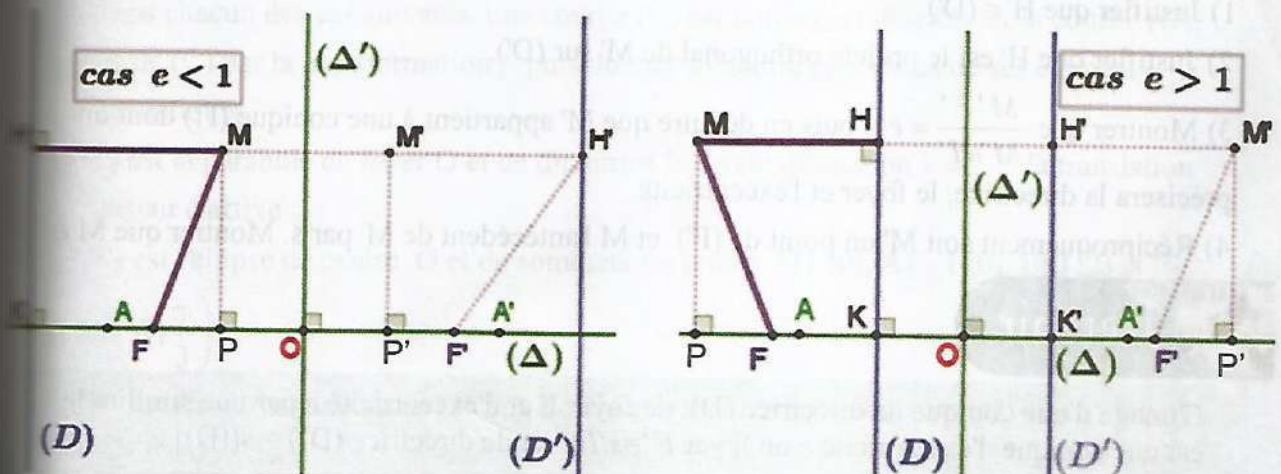


Activité 2

On suppose dans cette question que $e \neq 1$. Nous avons vu dans le paragraphe 1.2 que (Γ) et (Δ) ont deux points communs A et A' qui sont barycentres des points F et K . On sait aussi qu'un point M appartient à (Γ) si et seulement si $MP^2 = (e^2 - 1)\vec{pA} \cdot \vec{pA'}$. Soit (Δ') la médiatrice de $[AA']$.

Soit $M \in (\Gamma)$; montrer que le symétrique M' de M par rapport à (Δ') appartient à (Γ) .

On distinguera deux cas : $e < 1$ et $e > 1$. On cherchera à montrer que $M'P'^2 = (e^2 - 1)\vec{P'A} \cdot \vec{P'A'}$ en utilisant les propriétés de conservation de la réflexion d'axe (Δ') .



2) Soit O le point d'intersection de (Δ) et (Δ') : justifier que $S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta')} = S_O$ puis en déduire que O est un centre de symétrie de (Γ) .

3) Soient (D') et F' respectivement les symétriques de (D) et F par rapport à (Δ') .

Montrer que $\frac{MF}{MH} = e \Leftrightarrow \frac{M'F'}{M'H'} = e$; puis en déduire (Γ) est encore la conique de directrice de foyer F' et d'excentricité e .



Retenir

Soit (Γ) une conique d'excentricité e .

1) Si $e = 1$ alors (Γ) a un seul axe de symétrie : l'axe focal (Δ) .

2) Si $e \neq 1$ (cas d'une ellipse et d'une hyperbole) alors :

a. (Γ) a deux axes de symétrie : l'axe focal (Δ) et la médiatrice de $[AA']$ où A et A' sont les sommets de (Γ) situés sur l'axe focal.

b. (Γ) possède un centre de symétrie O qui est le point d'intersection des deux axes de symétrie.

c. (Γ) a deux foyers F et F' qui sont symétriques par rapport à O et deux directrices qui sont eux aussi symétriques par rapport à O .

1.4 EFFET D'UNE SIMILITUDE SUR UNE CONIQUE



Prendre un bon départ

Soit (Γ) une conique de directrice (D) , de foyer F et d'excentricité e . Soit s une similitude de rapport k . Soit M un point du plan, H son projeté orthogonal sur (D) . soient (D') , F' , M' et H' les images respectifs de (D) , F , M et H par la similitude s .

1) Justifier que $H' \in (D')$.

2) Justifier que H' est le projeté orthogonal de M' sur (D') .

3) Montrer que $\frac{M'F'}{M'H'} = e$, puis en déduire que M' appartient à une conique (Γ') dont on précisera la directrice, le foyer et l'excentricité.

4) Réciproquement soit M' un point de (Γ') et M l'antécédent de M' par s . Montrer que $M \in (\Gamma)$.



Retenir

L'image d'une conique de directrice (D) , de foyer F et d'excentricité e par une similitude s est une conique d'excentricité e de foyer $F' = s(F)$ et de directrice $(D') = s[(D)]$.

Exemple

On suppose le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit (D) la droite d'équation $y = 0$ et $F(0; 1)$.

Montrer qu'une équation cartésienne de la parabole $\mathcal{P}$ de foyer F et de directrice (D) est : $x^2 - 2y + 1 = 0$.

Soit (Γ) la courbe dont une équation cartésienne est $y^2 + 2x + 1 = 0$, soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Montrer que $r(\mathcal{P}) = \Gamma$ puis en déduire la nature de Γ .

Soit $M(x; y)$ un point du plan et $H(x; 0)$ son projeté orthogonal sur la droite (D) .

$$M \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow MF = MH$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2y + 1 = 0$$

Une équation de $\mathcal{P}$ est donc $x^2 - 2y + 1 = 0$.

Soit $M'(x'; y')$ l'image du point M par la rotation r . On a : $x' + iy' = i(x + iy)$. Par conséquent $x^2 = -y'^2$ et $y' = x$.

$$M \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow x^2 - 2y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow y'^2 - 2(-x') + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow y'^2 - 2x' + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow M' \in (\Gamma)$$

On a donc $r(\mathcal{P}) = \Gamma$. Comme $\mathcal{P}$ est une parabole, son image (Γ) est aussi une parabole. (Γ) a pour foyer $F' = r(F)$ et pour directrice $(D') = r(D)$; alors $F(-1; 0)$ et (D') pour équation $x = 0$.

S'exercer

1. Dans chacun des cas suivants, une courbe (C) est donnée, et déterminer la courbe (C') , l'image de (C) par la transformation f puis donner sa nature et certains de ses éléments caractéristiques.

1) (C) est la parabole de foyer O et de directrice la droite d'équation $x = 2$. f la translation de vecteur d'affixe $2i$.

2) (C) est l'ellipse de centre O et de sommets les points $A(1; 0)$, $A'(-1; 0)$, $B(0; 2)$ et $B(0; -2)$;

$$f = r\left(O; \frac{\pi}{3}\right).$$

3) (C) est l'hyperbole de foyer $F(1; 2)$, de directrice l'axe des ordonnées et d'excentricité 2;

$$f = h(O; -3).$$

1.5 CONSTRUCTION D'UNE CONIQUE POINT PAR POINT ; RÉGIONNEMENT DU PLAN PAR UNE CONIQUE

Prendre un bon départ

Activité 1

Soit (Γ) une conique de foyer F de directrice (D) et d'excentricité e .

Soit M un point du plan, H et m les projetés orthogonaux de M respectivement sur la directrice (D) et sur l'axe focal.

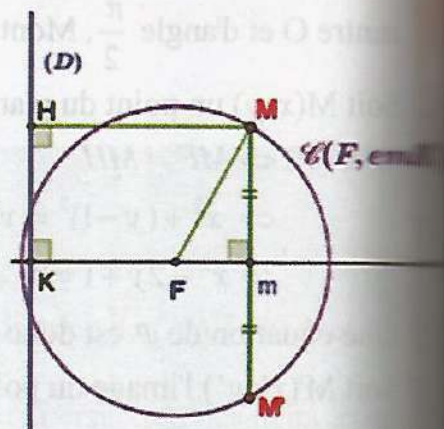
Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre F et de rayon emK .

1) Montrer que $M \in (\Gamma) \Rightarrow M \in \mathcal{C}$.

2) En déduire que tout point de (Γ) est l'intersection d'une perpendiculaire à l'axe focal et d'un cercle de centre F dont on précisera le rayon.

3) a. Pour chaque valeur de $e \in \left\{1; \frac{1}{2}; 2\right\}$, construire suivant ce procédé 4 points de (Γ) .

b. Placer un point M tel que $MF < eMH$ et un point N tel que $MF > eMH$.

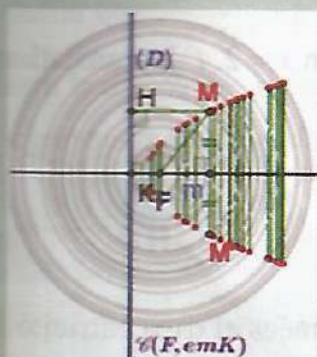


Retenir

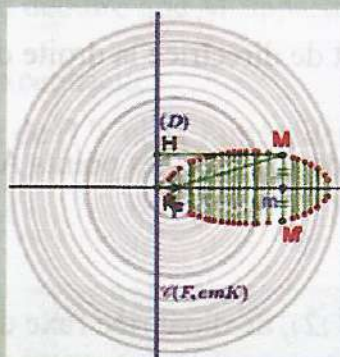
Pour construire une conique (Γ) de directrice (D) , de foyer F et d'excentricité e , on peut procéder de la manière suivante :

- On construit la directrice (D) , le foyer F et l'axe focal (FK) où K est le projeté orthogonal de F sur (D) .
- On choisit un point m sur l'axe focal et on construit le cercle de centre F et de rayon emK .
- Les points d'intersection de la perpendiculaire à l'axe focal passant par m appartiennent à (Γ) .

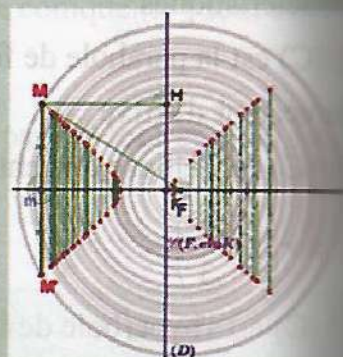
$e = 1$



$e < 1$



$e > 1$

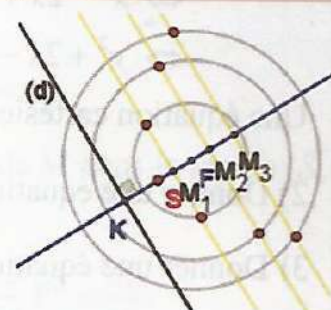


Exemple

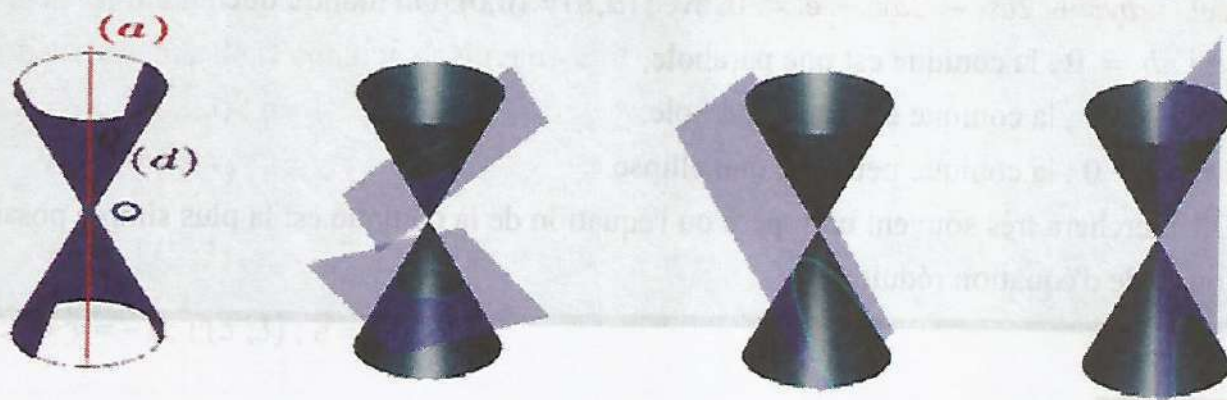
Soit (d) une droite et F un point n'appartenant pas à (d) . Construisons six points de la parabole de directrice (d) et de foyer F .

Un point particulier est le sommet S de la parabole qui est le milieu de $[FK]$ où K est le projeté orthogonal de F sur (d) .

Pour obtenir les autres points, on choisira 3 points M_1, M_2 et M_3 sur l'axe focal et on construira les cercles de centre F et de rayons respectifs FM_i . Les perpendiculaires à l'axe focal menées à partir des points M_i , nous donneront six autres points de la parabole.

**Remarque**

Soient (a) et (d) deux droites dans l'espace, sécantes en O et formant un angle aigu θ . En faisant tourner (d) autour de (a) (en gardant toujours le même angle θ) on obtient une surface dans l'espace appelée double cône infini d'axe (a) et de génératrice (d) . (voir figure). En coupant ce double cône avec un plan, on obtient (suivant la position du plan par rapport à la droite (a)) soit un cercle, une ellipse, une parabole ou une hyperbole.

**S'exercer**

1.6 (D) est une droite du plan, F un point n'appartenant pas à (D) . Dans chacun des cas suivants construire 8 points de la conique de foyer F , de directrice (D) et d'excentricité e .

- 1) $e = \frac{1}{2}$; b) $e = 2$; c) $e = 1$; d) $e = \sqrt{2}$.

1.6 ÉQUATION CARTÉSIENNE D'UNE CONIQUE À PARTIR DE SA DÉFINITION MONOFOCALE

Prendre un bon départ

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On donne le point $F(1; 2)$ et la droite (d) d'équation $x = 2$.

- 1) Donnons une équation cartésienne de la parabole (Γ) de foyer F et de directrice (d) . Soit $M(x, y)$ un point du plan. $H(2; y)$ son projeté orthogonal sur (d) .

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow MF^2 = MH^2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-2)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 4x + 4$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$$

Une équation cartésienne de (Γ) est donc $y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$.

2) Donner une équation de l'ellipse de foyer F de direction (d) et d'excentricité $\frac{1}{2}$.

3) Donner une équation de l'hyperbole de foyer F de direction (d) et d'excentricité 2.



Retenir

Dans tout repère orthonormé du plan l'équation d'une conique admet est de la forme :

$ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy + e = 0$, avec $(a, b) \neq (0; 0)$. On montre que :

- Si $ab = 0$, la conique est une parabole.
- Si $ab < 0$, la conique est une hyperbole.
- Si $ab > 0$, la conique peut être une ellipse.

On cherchera très souvent un repère où l'équation de la conique est la plus simple possible (on parle d'équation réduite).

Exemple

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne le point $F(-1; 3)$ et la droite (d) d'équation $y = -2$. Écrivons une équation de l'ellipse (Γ) de foyer F de directrice (d) et d'excentricité $e = 0,5$.

Soit $M(x, y)$ un point du plan. $H(x; -2)$ son projeté orthogonal sur (d).

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow MF^2 = \frac{1}{4}MH^2$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-3)^2 = \frac{1}{4}(y+2)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = \frac{1}{4}(y^2 + 4y + 4)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{3}{4}y^2 + 2x - 7y + 9 = 0$$

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow x^2 + \frac{3}{4}y^2 + 2x - 7y + 9 = 0 \quad (\text{en rouge le début de carrés parfait}).$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + \frac{3}{4}\left(y^2 - \frac{28}{3}y\right) + 9 = 0$$

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow (x+1)^2 - 1 + \frac{3}{4} \left[\left(y - \frac{14}{3} \right)^2 - \left(\frac{14}{3} \right)^2 \right] + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + \frac{3}{4} \left(y - \frac{14}{3} \right)^2 = \frac{25}{3}$$

Posons ensuite $\begin{cases} X = x+1 \\ Y = y - \frac{14}{3} \end{cases}$; $(X; Y)$ représente le couple de coordonnées de M dans le repère $(\vec{S}, \vec{i}, \vec{j})$

avec $S \left(-1; \frac{14}{3} \right)$ dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$. L'équation de (Γ) est donc : $X^2 + \frac{3}{4} Y^2 = \frac{25}{3}$.

2.1 ÉQUATION RÉDUITE D'UNE PARABOLE

S'exercer

Le Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Dans chacun des cas suivants, donner une équation cartésienne de la conique de directrice (d) , de foyer F et d'excentricité e .

- $(d) : x = -1$; $F(5; 3)$; $e = 1$.
- $(d) : y = -1$; $F(5; 3)$; $e = \sqrt{2}$.
- $(d) : x = -1$; $F(5; 3)$; $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- $(d) : x + y = -1$; $F(5; 3)$; $e = 1$.

1f Reprendre l'exercice précédent et donner dans un repère bien choisi une équation simple de la conique.

LEÇON 2 ÉTUDE ANALYTIQUE DES PARABOLES

- ▶ Reconnaître une équation d'une parabole ;
- ▶ Déterminer les éléments géométriques d'une parabole
- ▶ Construire une parabole
- ▶ Écrire une équation de la tangente à une parabole en un de ses points
- ▶ Écrire une équation paramétrique d'une parabole

2.1 ÉQUATION RÉDUITE D'UNE PARABOLE



Prendre un bon départ

Soit (Γ) une parabole de directrice (D) et de foyer F .

soit $p = FK$ et S le milieu de $[FK]$ (c'est le sommet de la parabole)

Soit $(S; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé tel que $\vec{KF} = p\vec{i}$

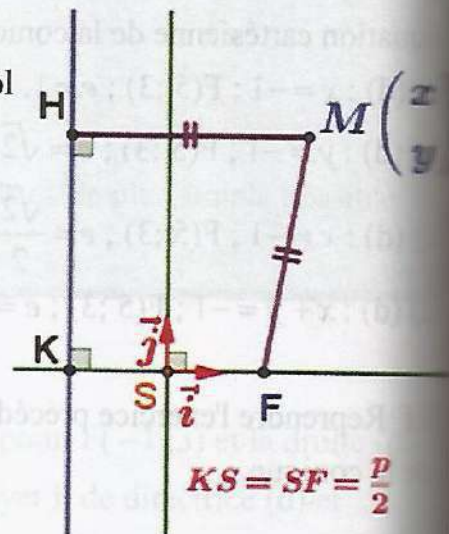
(par exemple $\vec{i} = \frac{\vec{SF}}{\|\vec{SF}\|}$). Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point de la parabole

et H son projeté orthogonal sur l'axe focal.

1) Déterminer les coordonnées des points K , F et H dans le repère $(S; \vec{i}, \vec{j})$.

2) Montrer que $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow y^2 = 2px$.

3) Montrer que dans le repère $(S; \vec{j}, \vec{i})$, $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{2p}$.

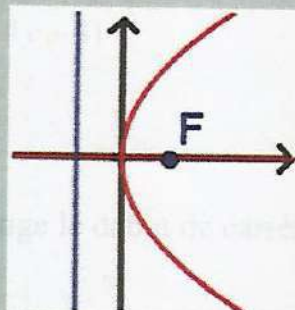


Retenir

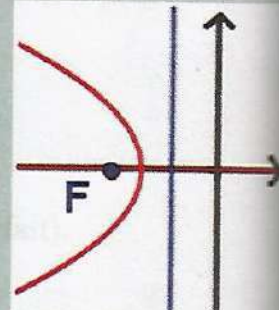
1) Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (Γ) d'équation $y^2 = 2px$ est une parabole de paramètre $|p|$, de sommet O , de foyer $F \left(\frac{p}{2}; 0 \right)$ et de direction

$$(D) : x = -\frac{p}{2}.$$

Si $p > 0$ la parabole a une concavité tournée vers les $x > 0$



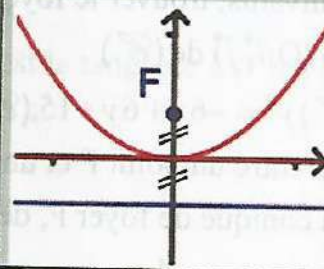
Si $p < 0$ la parabole a une concavité tournée vers les $x < 0$



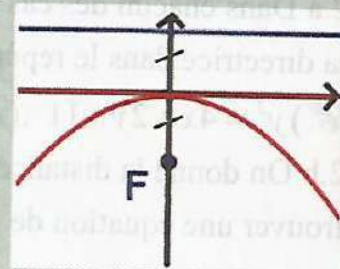
2) Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (Γ) d'équation $x^2 = 2py$ est une parabole de paramètre $|p|$ de sommet O , et de foyer $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$ et de direction

(D) : $y = -\frac{p}{2}$.

Si $p > 0$ la parabole a une concavité tournée vers les $y > 0$



Si $p < 0$ la parabole a une concavité tournée vers les $y < 0$



Exemple

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Nature et éléments caractéristiques de la courbe (Γ) d'équation : $y^2 = 2x$.

(Γ) est une parabole de paramètre $p = 1$; de foyer $F\left(\frac{1}{2}; 0\right)$; de sommet O et de directrice $x = -\frac{1}{2}$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Nature et éléments caractéristiques de la courbe (Γ) d'équation : $y^2 = -x$

$y^2 = -x \Leftrightarrow y^2 = 2\left(-\frac{1}{2}\right)x$. (Γ) est donc la parabole de paramètre $p = \frac{1}{2}$; de foyers $F\left(-\frac{1}{4}; 0\right)$;

de directrice (d) : $x = \frac{1}{4}$ de sommet O .

Nature et éléments caractéristiques de la courbe (Γ) d'équation : $x^2 = 3y$

$x^2 = 3y \Leftrightarrow x^2 = 2\left(\frac{3}{2}\right)y$; (Γ) est la parabole de paramètre $p = \frac{3}{2}$; de foyers $F\left(0; \frac{3}{4}\right)$;

de sommet O et de directrice $y = -\frac{3}{4}$.

Nature et éléments caractéristiques de la courbe (Γ) d'équation : $y^2 + 2y - x - 3 = 0$.

$$y^2 + 2y - x - 3 = 0 \Leftrightarrow (y+1)^2 - 1 - x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y+1)^2 = 2\left(\frac{1}{2}\right)(x+4)$$

Posons $\begin{cases} X = x+4 \\ Y = y+1 \end{cases}$, soit $S(-4; -1)$; dans le repère $(S; \vec{i}, \vec{j})$ une équation de (Γ) est donc :

$Y^2 = 2\left(\frac{1}{2}\right)X$. Dans le repère $(S; \vec{i}, \vec{j})$, (Γ) est la parabole de paramètre $p = \frac{1}{2}$; de foyer $F\left(\frac{1}{4}; 0\right)$;

de sommet S , de directrice (d) : $X = -\frac{1}{4}$.



S'exercer

2.a Dans chacun des cas suivants, trouver le foyer, le paramètre, le sommet et une équation de la directrice dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ de $(\mathcal{C})$.

$$(\mathcal{C}) y^2 = 4x + 2y + 11; (\mathcal{C}) y^2 = -6x + 6y + 15; (\mathcal{C}) x^2 + 4x + 13 = 0; (\mathcal{C}) -x^2 - 3x + 2y - 5 = 0$$

2.b On donne la distance d entre un point F et une droite (D) , et un réel e . Choisir un repère et trouver une équation de la conique de foyer F , de directrice (D) et d'excentricité e dans ce repère.

a) $d = 4; e = 1;$ b) $d = 9; e = \frac{4}{5};$ c) $d = 9; e = \frac{5}{4}.$

2.2 TANGENTE EN UN POINT À UNE PARABOLE



Prendre un bon départ

Activité 1

On considère (Γ) une parabole de directrice (D) , de foyer F et de paramètre p ; $(S; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé dans lequel une équation réduite de (Γ) est $y^2 = 2px$ et la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{2px}$, C_f sa représentation graphique dans le repère $(S; \vec{i}, \vec{j})$. Soit C'_f le symétrique de C_f par rapport à l'axe focal.

1) Montrer que $(\Gamma) = C_f \cup C'_f$.

2) Soit $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ un point de C_f . On suppose $x_0 \neq 0$. Montrer que f est dérivable en x_0 et qu'une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse x_0 s'écrit : $yy_0 = p(x + x_0)$.

3) Montrer que f n'est pas dérivable en 0 et qu'une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0 peut s'écrire encore $y \times 0 = p(x + 0)$.

En déduire qu'en tout point $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ de la parabole, une équation de la tangente est :

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

Activité 2

Soit (Γ) une parabole de directrice (D) , de foyer F et M_0 un point de (Γ) , H_0 son projeté orthogonal sur (D) .

1) Justifier que $M_0H_0 = M_0F$ puis en déduire que M_0 appartient à la médiatrice (d) de $[FH_0]$.

2) Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point de (d) et I le milieu de $[FH_0]$.

a) Montrer que I a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{y_0}{2} \end{pmatrix}$.

b) Montrer que $M \in (d) \Leftrightarrow yy_0 = p(x + x_0)$.

c) En déduire que la médiatrice de $[FH_0]$ est la tangente à (Γ) en M_0 .

Retenir

Tangente à une parabole

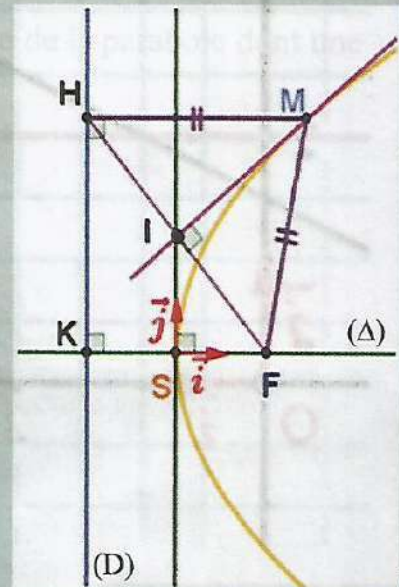
Soit (Γ) une parabole de directrice (D) , de foyer F et de paramètre p ($S; \vec{i}; \vec{j}$) un repère orthonormé dans lequel une équation réduite de (Γ) est $y^2 = 2px$. Une équation de la tangente

au point $M \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ de (Γ) est $yy_0 = p(x + x_0)$.

Construction d'une parabole point par point

Le résultat précédent fournit une méthode de construction de la parabole points par points et des tangentes, à partir de sa directrice (D) et de son foyer F.

- 1) On construit l'axe focal (Δ) et le point K.
- 2) On place le sommet S de la parabole, qui est le milieu de $[FK]$.
- 3) On se donne ensuite un point H sur la directrice; (D) puis on trace (en trait léger) la perpendiculaire à (D) passant par H (le point M de la parabole dont le projeté orthogonal est H est sur cette droite).
- 4) On trace aussi (en trait léger) la médiatrice du segment $[FH]$.
- 5) Le point M est l'intersection de ces deux droites, et de plus, la tangente en M à la parabole est la médiatrice qui a servi à construire M.



Exemple

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Soit (Γ) la courbe d'équation

$$y^2 - 4y - 2x + 10 = 0.$$

Vérifier que le point $M(5;4)$ est un point de (Γ) .

$$4^2 - 4(4) - 2(5) + 10 = 0. \text{ M}(5;4) \text{ est donc un point de } (\Gamma).$$

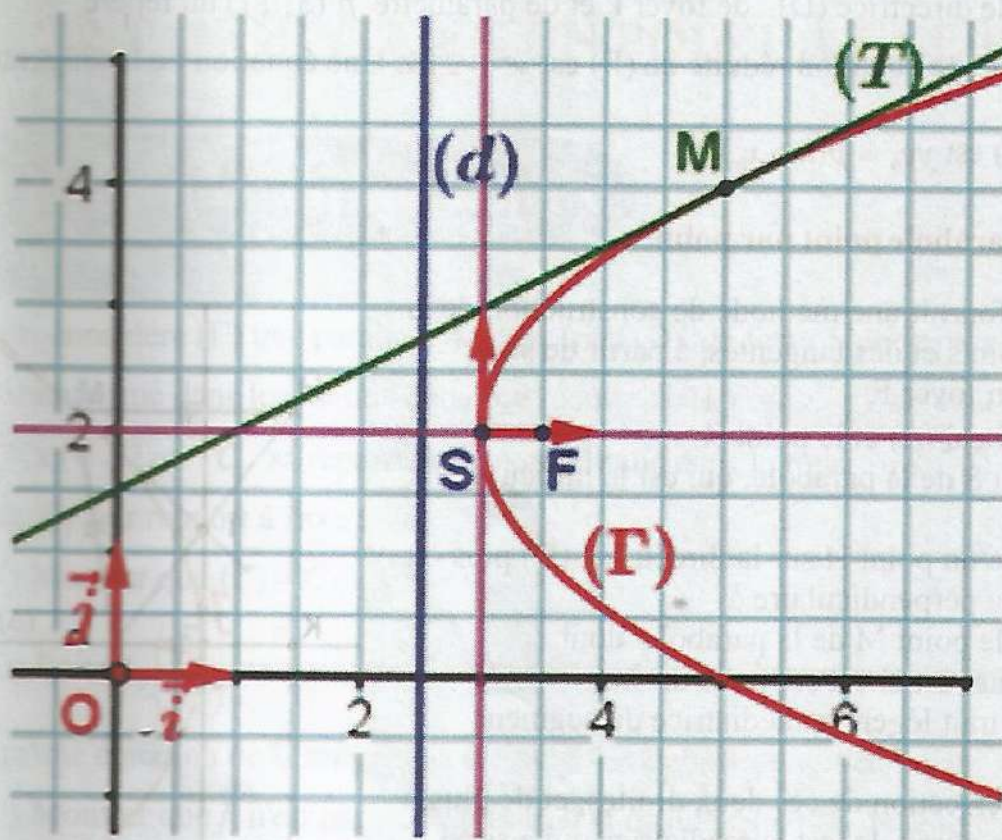
Vérifier que (Γ) est une parabole et construire (Γ) et la tangente à (Γ) en M.

$$y^2 - 4y - 2x + 10 = 0 \Leftrightarrow (y - 2)^2 = 2(x - 3); \text{ posons ensuite } \begin{cases} X = x - 3 \\ Y = y - 2 \end{cases} \text{ et } S(3;2).$$

Dans le repère $(S; \vec{i}; \vec{j})$, (Γ) a pour équation $Y^2 = 2X$; (Γ) est donc la parabole de sommet S de paramètre $p=1$, de directrice $(d) : X = -\frac{1}{2}$ et de foyer $F\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

Dans le repère $(S; \vec{i}; \vec{j})$, M a pour coordonnées $M(2; 2)$. Une équation de la tangente (T) en M dans $(S; \vec{i}; \vec{j})$ est donc : $2Y = 1(X+2)$ qui s'écrit encore $Y = \frac{1}{2}X + 1$. Dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$:

la directrice a pour équation $(d) : x - 3 = -\frac{1}{2}$ soit $(d) : x = \frac{5}{2}$, le foyer a pour coordonnées $\left(\frac{7}{2}; 2\right)$ et la tangente (T) en M pour équation $y - 2 = \frac{1}{2}(x - 3) + 1$ soit $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.



S'exercer

2.c Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Dans chacun des cas suivants une parabole $\mathcal{P}$ est donnée par une équation cartésienne. Déterminer son équation réduite et ses éléments caractéristiques; donner une équation de la tangente à $\mathcal{P}$ en M_0 puis tracer $\mathcal{P}$ et la tangente.

1) $y^2 - 2x - 2y + 3 = 0$; $M_0(-1; 1)$

2) $y = 3x^2 + x - 4$; $M_0(0; -4)$

3) $y^2 = 6x + 3$; $M_0(1; 3)$

4) $\frac{x^2}{4} - x - y + 1 = 0$; $M_0(2; 0)$

2.3 REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE D'UNE PARABOLE

Prendre un bon départ

1) Soit (P) une parabole de paramètre p dont une équation cartésienne dans un repère est $y^2 = 2px$.

Soit t un réel. Montrer que le point $M\left(\frac{t^2}{2p}; t\right)$ appartient à (P).

3) Réciproquement, soit $M(x; y)$ un point de (P). Montrer qu'il existe un réel t tel que
$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases}$$

En déduire un système d'équation paramétriques de la parabole (P).

4) Montrer que le système $\begin{cases} x = 2pt^2 \\ y = 2pt \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ est une autre représentation paramétrique de (P).

5) Déterminer de la même manière une représentation paramétrique de la parabole dont une équation cartésienne dans un repère est : $x^2 = 2py$.

Retenir

1) Une représentation paramétrique de la parabole d'équation cartésienne $y^2 = 2px$ est

$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases} t \in \mathbb{R} \text{ ou } \begin{cases} x = 2pt^2 \\ y = 2pt \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

2) Une représentation paramétrique de la parabole d'équation cartésienne $x^2 = 2py$ est

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{t^2}{2p} \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ ou } \begin{cases} x = 2pt \\ y = 2pt^2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Exemple

1) Une représentation paramétrique de la parabole d'équation cartésienne $y^2 = -3x$ est

$$\begin{cases} x = -3t^2 \\ y = -3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

2) Une représentation paramétrique de la parabole d'équation cartésienne $x^2 = \frac{3}{2}y$ est

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{2t^2}{3}, t \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = \frac{3}{2}t \\ y = \frac{3}{2}t^2, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

3) Une représentation d'une parabole dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est :

$$\begin{cases} x = -2t^2 \\ y = -2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}; \text{ déterminer une équation réduite de cette parabole et ses éléments}$$

caractéristiques. $\begin{cases} x = -2t^2 \\ y = -2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2\left(-\frac{1}{2}y\right)^2 \\ t = -\frac{1}{2}y \end{cases}$. Une équation réduite de cette parabole

donc : $y^2 = -2x$.

C'est la parabole est de sommet O, de paramètre $p = 1$, de foyer $F\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ et de directrice

(d): $x = \frac{1}{2}$



S'exercer

2.c Donner dans chacun des cas suivants une équation paramétrique de la parabole dont l'équation réduite est donnée par :

1) $x^2 = 5y$; 2) $x^2 = -7y$; 3) $y^2 = 5x$; 4) $2y^2 = -3x$

2.d Donner dans chacun des cas suivants une représentation paramétrique de la parabole dont l'équation réduite est donnée par :

1) $\begin{cases} x = 7t^2 \\ y = 7t \end{cases}, t \in \mathbb{R} ;$

2) $\begin{cases} x = \frac{t^2}{5} \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R} ;$

3) $\begin{cases} y = -4t^2 \\ x = -4t \end{cases}, t \in \mathbb{R} ;$

1) $\begin{cases} y = -\frac{2}{5}t^2 \\ x = t \end{cases}, t \in \mathbb{R} .$

LEÇON 3 ÉTUDE ANALYTIQUE DES ELLIPSES ET DES HYPERBOLES

- Reconnaître une équation d'une ellipse ou d'une hyperbole.
- Déterminer les éléments géométriques et numériques d'une conique à centre.
- Construire une ellipse et une hyperbole.
- Écrire une équation de la tangente à une parabole en un des points d'une ellipse et d'une hyperbole.
- Écrire une représentation paramétrique d'une hyperbole et d'une ellipse.
- Reconnaître la nature et les éléments de l'ensemble des points M tels que $MF - MF' = k$ ou $MF + MF' = k$ où F, F' et k sont donnés.

3.1 ÉQUATION RÉDUITE D'UNE HYPERBOLE OU D'UNE ELLIPSE

Prendre un bon départ

On considère (Γ) une conique à centre de foyer F , d'excentricité e ($e \neq 1$), de directrice (D) , les points A et A' les sommets de (Γ) situés sur l'axe focal; O le milieu de $[AA']$, F' et (D') les symétriques respectifs de F et (D) par rapport à O . Nous avons observé dans le leçon 1 que F' était un autre foyer de (Γ) associé à la directrice (D') .

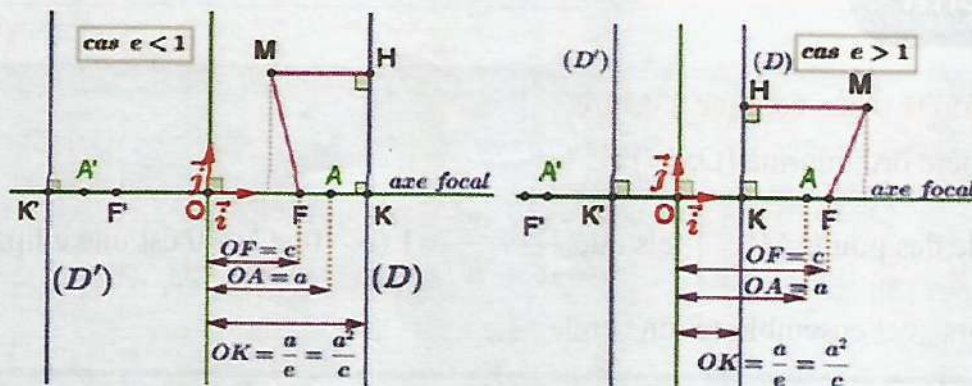
Choisissons un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan tel que l'axe des abscisses soit l'axe focal orienté de O vers F , et l'axe des ordonnées soit parallèle à la directrice (D) passant par O .

Posons $OF = c$, $OA = a$; alors $AA' = 2a$ et $FF' = 2c$.

$$\begin{cases} A = \text{bar} \{(F; 1); (K, e)\} \\ A' = \text{bar} \{(F'; 1); (K', -e)\} \end{cases} \text{ implique } \begin{cases} \overrightarrow{AF} + e\overrightarrow{AK} = 0 \\ \overrightarrow{A'F'} - e\overrightarrow{A'K'} = 0 \end{cases} \text{ D'où } \begin{cases} \overrightarrow{OF} + e\overrightarrow{OK} = (1+e)\overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OF'} - e\overrightarrow{OK'} = (1-e)\overrightarrow{OA'} \end{cases} \text{ et}$$

$$\text{alors } \begin{cases} 2\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA'} + e(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA'}) = 2e\overrightarrow{OA} \\ 2e\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA'} + e(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA'}) = 2\overrightarrow{OA} \end{cases} \text{ car } O \text{ est le milieu de } [AA'].$$

$$\text{On en déduit que } \begin{cases} \overrightarrow{OF} = e\overrightarrow{OA} \\ e\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} \end{cases} \text{ et donc } e = \frac{OF}{OA} = \frac{c}{a} \text{ et } OK = \frac{OA}{e} = \frac{a^2}{c}.$$



2) Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du plan. On rappelle que $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow MH^2 = (e^2 - 1) \vec{HA} \cdot \vec{HA}'$, où H est le projeté orthogonal de M sur l'axe focal.

Montrer que $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$.

3) Dans cette question on suppose que $e < 1$; (Γ) est donc une ellipse.

a) Vérifier que $a > c$. On pose $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

b) Vérifier que $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et en déduire les coordonnées des points d'intersection de (Γ) avec l'axe des ordonnées.

c) Soit $f : x \mapsto f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ définie sur $[-a; a]$, C_f sa représentation graphique dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Montrer que (Γ) est la réunion de C_f et du symétrique de C_f par rapport à l'axe focal.

d) Construire (Γ) pour $a = 3$ et $c = 2$.

4) Dans cette question on suppose que $e > 1$; (Γ) est donc une hyperbole et $c > a$, on pose $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

a) Vérifier que $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ et en déduire les coordonnées des points d'intersection de (Γ) avec l'axe des ordonnées.

b) Soit $f : x \mapsto f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ définie sur $] -\infty; -a] \cup [a; +\infty[$, C_f sa représentation graphique dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Montrer que (Γ) est la réunion de C_f et du symétrique de C_f par rapport à l'axe focal.

c) $f(x) + \frac{b}{a}x = \frac{b}{a} \left(\frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} - x} \right)$ et $f(x) - \frac{b}{a}x = \frac{b}{a} \left(\frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} \right)$. En déduire que les droites d'équations $y = -\frac{b}{a}x$ et $y = \frac{b}{a}x$ sont asymptotes à C_f respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.

d) Construire (Γ) pour $a = 2$ et $c = 3$.



Retenir

Équation réduite d'une conique à centre

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$:

- L'ensemble des points $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$ et $b > 0$) est une ellipse si $a \neq b$.

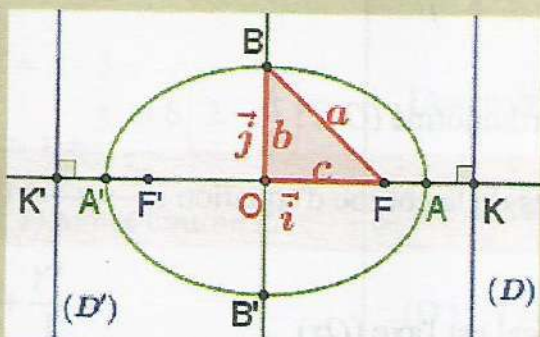
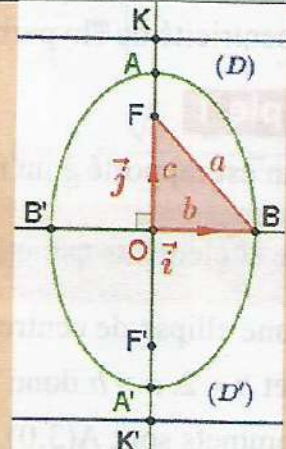
Si $a = b$ alors, cet ensemble est un cercle.

- L'ensemble des points $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ou $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$) ($a > 0$ et $a > 0$)

est une hyperbole.

- Une hyperbole est équilatère si et seulement si ses asymptotes sont perpendiculaires.

Éléments caractéristiques d'une ellipse.

	$0 < b < a$	$0 < a < b$
Demi distance focale.	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$	$c = \sqrt{b^2 - a^2}$
Excentricité e	$e = \frac{c}{a}$	$e = \frac{c}{b}$
Foyers.	$F(c;0)$ et $F'(-c;0)$	$F(0;c)$ et $F'(0;-c)$
Directrices.	$(D): x = \frac{a^2}{c}$ et $(D'): x = -\frac{a^2}{c}$	$(D): y = \frac{b^2}{c}$ et $(D'): y = -\frac{b^2}{c}$
sommets	$A(a;0); A'(-a;0); B(0;b); B'(0;-b)$	
Allure de l'ellipse.	 	

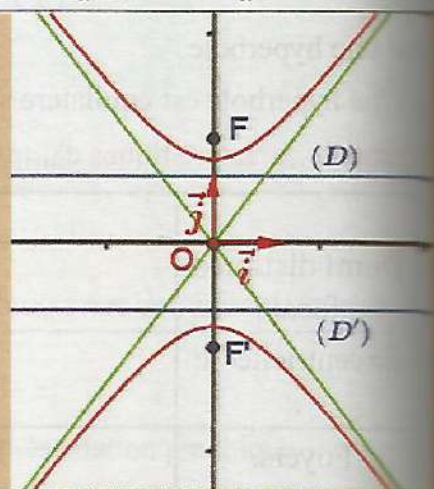
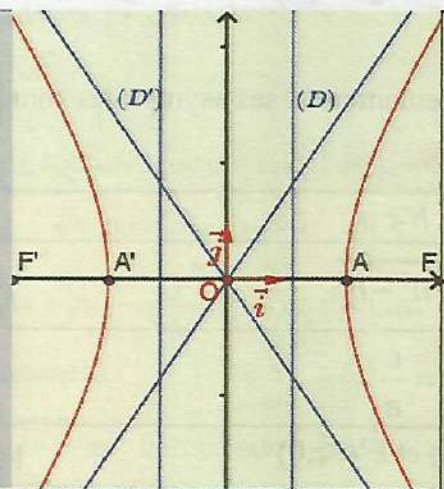
Éléments caractéristiques d'une hyperbole

Équation.	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Demi distance focale.	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	
Excentricité.	$e = \frac{c}{a}$	$e = \frac{c}{b}$
Foyers.	$F(c;0)$ et $F'(-c;0)$	$F(0;c)$ et $F'(0;-c)$
Directrices.	$(D): x = \frac{a^2}{c}$ et $(D'): x = -\frac{a^2}{c}$	$(D): y = \frac{b^2}{c}$ et $(D'): y = -\frac{b^2}{c}$

Asymptotes.

Les droites d'équations $\frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$

Allure de l'hyperbole



- L'hyperbole est équilatère si et seulement si $a = b$. (C'est le cas où le produit des coefficients directeurs des asymptotes vaut -1 .)
- L'excentricité de l'hyperbole équilatère vaut $\sqrt{2}$.

Exemple 1Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.Nature et éléments caractéristiques de la courbe d'équation : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

C'est une ellipse de centre O.

 $a = 3$ et $b = 2$, $a > b$ donc l'axe focal est l'axe (Ox) .Les sommets sont $A(3;0)$, $A'(-3;0)$, $B(0;2)$, et $B'(0;-2)$. $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5}$; alors les foyers sont $F(\sqrt{5};0)$ et $F(-\sqrt{5};0)$.L'excentricité est $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$. $\frac{a^2}{c} = \frac{9}{\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{5}$. Les directrices sont : $(D) : x = \frac{9\sqrt{5}}{5}$ et $(D') : x = -\frac{9\sqrt{5}}{5}$.Nature et éléments caractéristiques de la courbe d'équation : $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$.

C'est une ellipse de centre O.

 $a = 1$ et $b = 2$, $a < b$ donc l'axe focal est l'axe (Oy) .Les sommets sont $A(1;0)$, $B(0;2)$, $B'(0;-2)$, $A'(-1;0)$. $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{3}$; alors les foyers sont $F(0;\sqrt{3})$ et $F(0;-\sqrt{3})$.L'excentricité est $e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

$$\frac{b^2}{c} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}. \text{ Les directrices sont : (D) : } y = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ et (D') : } y = -\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Nature et éléments caractéristiques de la courbe d'équation : $2x^2 + 3y^2 - 12x + 9y + 24 = 0$

$$2x^2 + 3y^2 - 12x + 9y + 24 = 0$$

$$2x^2 - 12x + 3y^2 + 9y + 24 = 0$$

$$2(x^2 - 6x) + 3(y^2 + 3y) + 24 = 0$$

$$2\left[(x-3)^2 - 9\right] + 3\left[\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right] + 24 = 0$$

$$2(x-3)^2 + 3\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$\frac{(x-3)^2}{\frac{3}{8}} + \frac{\left(y + \frac{3}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}} = 1$$

Posons ensuite $\begin{cases} X = x-3 \\ Y = y + \frac{3}{2} \end{cases}$ et $S\left(3; -\frac{3}{2}\right)$

Dans le repère $(S; \vec{i}, \vec{j})$, notre courbe a

pour équation $\frac{X^2}{\frac{3}{8}} + \frac{Y^2}{\frac{1}{4}} = 1.$

C'est donc une ellipse de sommet S.

$$a = \sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{6}}{4} > \frac{1}{2} = b, \text{ l'axe focal est donc (SX).}$$

Les sommets sont $A\left(\frac{\sqrt{6}}{4}; 0\right)$, $A'\left(-\frac{\sqrt{6}}{4}; 0\right)$,

$B\left(0; \frac{1}{2}\right)$ et $B'\left(0; -\frac{1}{2}\right).$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}; \text{ alors les foyers sont}$$

$F\left(\frac{\sqrt{2}}{4}; 0\right)$ et $F'\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}; 0\right).$

L'excentricité est $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. $\frac{a^2}{c} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$

Les directrices sont : (D) : $X = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ et

(D') : $X = -\frac{3\sqrt{2}}{4}.$

Exemple 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Nature et éléments caractéristiques de la courbe d'équation : $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1.$

C'est une hyperbole de centre O. L'axe focal est (Ox).

$a = 3$ et $b = 2$. Les sommets sont $A(3, 0)$, $A'(-3, 0)$.

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$ et donc foyers $F(\sqrt{13}, 0)$ et $F'(-\sqrt{13}, 0)$

Excentricité $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3}.$

$\frac{a^2}{c} = \frac{9\sqrt{13}}{13}$ et donc, les directrices sont (D) : $x = \frac{9\sqrt{13}}{13}$ et (D') : $x = -\frac{9\sqrt{13}}{13}.$

Asymptotes : $y = \frac{2}{3}x$ et $y = -\frac{2}{3}x.$

Nature et éléments caractéristiques de la courbe d'équation : $-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

C'est une hyperbole de centre O. L'axe focal est (Oy).

$a = 4$ et $b = 3$. Les sommets sont A(0,3), A'(0,-3).

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$ et donc, foyers F(0,5) et F'(0,-5).

Excentricité $e = \frac{c}{b} = \frac{5}{3}$.

$\frac{a^2}{c} = \frac{16}{5}$ et donc, les directrices sont (D): $y = \frac{16}{5}$ et (D'): $y = -\frac{16}{5}$.

Asymptotes : $y = \frac{3}{4}x$ et $y = -\frac{3}{4}x$.

Nature et éléments caractéristiques de la courbe d'équation : $x^2 - 9y^2 - 2x + 36y - 44 = 0$.

$$x^2 - 9y^2 - 2x + 36y - 44 = 0$$

$$(x-1)^2 - 1 - 9[y^2 - 4y] - 44 = 0$$

$$(x-1)^2 - 1 - 9[(y-2)^2 - 4] - 44 = 0$$

$$(x-1)^2 - 9(y-2)^2 = 9$$

$$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{1} = 1$$

On pose $\begin{cases} X = x-1 \\ Y = y-2 \end{cases}$ et S(1;2); dans le repère $(S; \vec{i}, \vec{j})$ notre courbe a pour équation

$\frac{X^2}{9} - \frac{Y^2}{1} = 1$: c'est donc une hyperbole. Son axe focal est l'axe (S).

$a = 3$ et $b = 1$. Les sommets sont A(3,0), A'(-3,0).

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{10}$ et donc, foyers F($\sqrt{10}$,0) et F'(- $\sqrt{10}$,0).

Excentricité $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{10}}{3}$.

$\frac{a^2}{c} = \frac{9\sqrt{10}}{10}$ et donc, les directrices sont (D): $x = \frac{9\sqrt{10}}{10}$ et (D'): $x = -\frac{9\sqrt{10}}{10}$.

Les asymptotes sont : $y = \frac{1}{3}x$ et $y = -\frac{1}{3}x$.

Exercice résolu (extrait Baccalauréat C 2013 - Cameroun)

Dans un plan orienté et muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les vecteurs

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j} \text{ et } \vec{e}_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$$

1) Démontrer que $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est un repère orthonormé du plan.

Une conique (Γ) dans le repère $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ a pour équation cartésienne $13X^2 + 7Y^2 + 6\sqrt{3}XY = 16$.

2) Écrire une équation cartésienne réduite de cette conique dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

3) En déduire sa nature et son excentricité.

Solution

1) $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$ et $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = 1$; $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ est donc un repère orthonormé.

2) Equation de (Γ) dans $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Soit $(x; y)$ et $(X; Y)$ les coordonnées respectives d'un point M respectivement dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ et dans le repère $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$.

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j} \\ \vec{e}_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{i} = \frac{1}{2}\vec{e}_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_2 \\ \vec{j} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 \end{cases}$$

$$3) \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = x\left(\frac{1}{2}\vec{e}_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_2\right) + y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2\right) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)\vec{e}_1 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)\vec{e}_2.$$

On a aussi $\overrightarrow{OM} = X\vec{e}_1 + Y\vec{e}_2$ d'où $X = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y$ et $Y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y$.

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow 13X^2 + 7Y^2 + 6\sqrt{3}XY = 16$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 13\left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2 + 7\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)^2 + 6\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right) = 16 \\ &\Leftrightarrow \frac{13(x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2)}{4} + \frac{7(3x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2)}{4} + \frac{6\sqrt{3}(-\sqrt{3}x^2 + xy - 3xy + \sqrt{3}y^2)}{4} = 16 \\ &\Leftrightarrow \frac{16x^2 + 64y^2}{4} = 16 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{aligned}$$

L'équation cartésienne de (Γ) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est donc $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(Γ) est donc une ellipse de centre O.

Ses sommets sont les points A(2 ; 0), A'(-2 ; 0) B(0 ; 1) et B'(0 ; -1).

$a = 2$ et $b = 1$. La demi-distance focale est $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$.

Son excentricité est $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Remarque

Soit (C) la courbe dont une équation cartésienne est $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Une équation de (C) peut encore s'écrire $\frac{(x+a')^2}{\alpha} + \frac{(y+b')^2}{\beta} - 1 = 0$.

- Si α et β sont tous négatifs, alors (C) est vide.
- Si α et β sont tous positifs, alors (C) est une ellipse
- Si α et β sont de signes contraires, alors (C) est une hyperbole.
- De manière générale, (C) a pour :
 - Centre le point de coordonnées $(-a'; -b')$;
 - Pour axes de symétrie, les droites d'équations respectives $x = -a'$ et $y = -b'$;
 - Pour sommets, les points communs à la conique et aux différents axes de symétrie ;
 - Pour axe focal, l'axe de symétrie sur lequel sont situés les sommets les plus distants de l'autre (dans le cas d'une ellipse) ou les deux sommets pour une hyperbole.
- La demi-distance focale est la distance entre le centre et un foyer situé sur l'axe focal.
- Les directrices sont perpendiculaires à l'axe focal, et ne peuvent avoir des points communs avec la conique.
- Dans le cas d'une hyperbole, les asymptotes sont constitués des points dont les coordonnées (x, y) vérifient $\frac{(x+a')^2}{\alpha} + \frac{(y+b')^2}{\beta} = 0$ (on remplace dans l'équation réduite 1 par 0).

L'excentricité d'une conique de centre Ω , dont un foyer est F et dont un sommet situé sur l'axe focal est A, vaut $e = \frac{\Omega F}{\Omega A}$.



S'exercer

3.1 Dans chacun des cas suivants une courbe C est donnée par son équation cartésienne dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Donner une équation réduite de cette courbe et ses éléments caractéristiques, et dessiner cette courbe.

- 1) $x^2 + 4y^2 + 6y = 0$; 2) $x^2 - y^2 = -1$; 3) $6x^2 + 2y^2 - 12x + 8y + 9 = 0$; 4) $2x^2 - y^2 = 3 - 4x$

3.2 EFFET D'UNE AFFINITÉ ORTHOGONALE SUR UN CERCLE

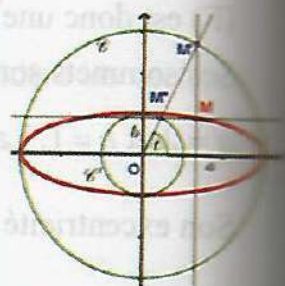


Prendre un bon départ

Soit $\mathcal{E}$ une ellipse dont une représentation paramétrique dans un repère

orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est : $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, t \in]-\pi; \pi]$. Soit $\mathcal{C}$ le cercle

de centre O et de rayon a et $\mathcal{C}'$ le cercle de centre O et de rayon b .



Soit M un point de l'ellipse $\mathcal{E}$.

a. Montrer que $M(x; y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow M'\left(x; \frac{b}{a}y\right) \in \mathcal{C}$.

b. En déduire que $\mathcal{E}$ est l'image de $\mathcal{C}'$ par l'affinité orthogonale d'axe (O, i) et de rapport $\frac{b}{a}$.

a. Montrer que $M(x; y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow M''\left(\frac{a}{b}x; y\right) \in \mathcal{C}$.

b. En déduire que $\mathcal{E}$ est l'image de $\mathcal{C}'$ par l'affinité orthogonale d'axe (O, j) et de rapport $\frac{a}{b}$.

Retenir

L'image d'un cercle par une affinité orthogonale dont l'axe est un diamètre du cercle est une ellipse.

En particulier dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, l'image du cercle de centre O et de rayon

a par l'affinité orthogonale d'axe (Ox) et de rapport $\frac{b}{a}$ est l'ellipse dont une représentation

paramétrique est $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, t \in]-\pi; \pi]$.

Exemple

Construisons l'ellipse dont une représentation paramétrique est

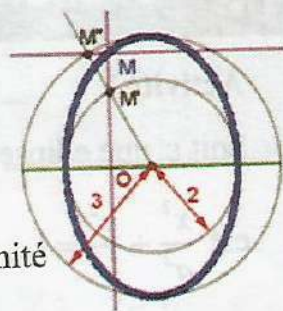
$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases}, t \in]-\pi; \pi]$$

On construit pour cela l'image du cercle de centre O et de rayon 2 par l'affinité

orthogonale d'axe un diamètre de ce cercle et de rapport $\frac{3}{2}$ ou bien

on construit pour cela l'image du cercle de centre O et de rayon 3 par l'affinité

orthogonale d'axe un diamètre de ce cercle et de rapport $\frac{2}{3}$.



S'exercer

Construire l'ellipse dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}, t \in]-\pi; \pi]$

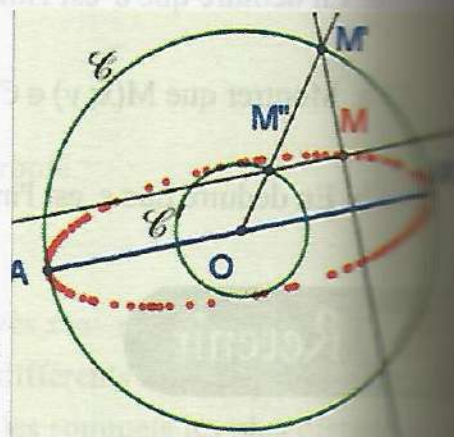
2) Construire l'ellipse dont une équation paramétrique est $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}, t \in]-\pi; \pi]$

Remarque

Pour construire un point de l'ellipse ε dont une équation paramétrique est $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, t \in]-\pi; \pi]$ on peut procéder de la manière suivante :

- On construit les cercles de centre O et de rayons respectifs a et b .
- On construit un diamètre $[AA']$ du cercle ayant le plus grand rayon.
- On construit une demi-droite d'origine O. Elle coupe les deux cercles en M' et en M'' . (on suppose que M' est situé sur le cercle de rayon a et M'' situé sur le cercle de rayon b).

La perpendiculaire à $[AA']$ passant par M' et la parallèle à $[AA']$ passant par M'' se coupe en un point M de l'ellipse ε .



3.3 TANGENTE À UNE CONIQUE À CENTRE EN UN DE SES POINTS

Prendre un bon départ

Activité 1

Soit ε une ellipse dont une équation cartésienne dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

est $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ et C_f sa représentation graphique dans le repère

$(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit C'_f le symétrique de C_f par rapport à l'axe focal.

1) Montrer que $\varepsilon = C_f \cup C'_f$.

2) Soit $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ un point de C_f . On suppose $x_0^2 \neq a^2$. Montrer que f est dérivable en x_0 et qu'une

équation de la tangente à C_f en x_0 s'écrit $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$

3) Montrer que si $x_0^2 = a^2$, f n'est pas dérivable en x_0 et qu'une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse x_0 peut s'écrire encore $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

4) En déduire qu'en tout point $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ de la parabole, une équation de la tangente est :

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Activité 2

Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole dont une équation cartésienne dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

est $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Montrer en s'inspirant de l'activité précédente qu'en tout point $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

de l'hyperbole, la tangente a une équation de la forme $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$



Retenir

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, une équation de la tangente au point de coordonnées $(x_0; y_0)$:

À l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est : $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

À l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ est : $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

À l'hyperbole d'équation $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est : $-\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

Exemple

1) Une équation de la tangente à l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ au point $T\left(\frac{3}{2}; 2\sqrt{3}\right)$ est :

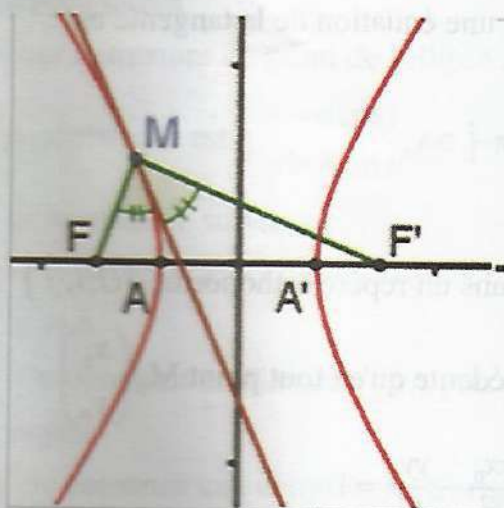
$$\frac{3}{9}x + \frac{2y\sqrt{3}}{16} = 1 \text{ soit encore } 4x + 3y\sqrt{3} = 24.$$

2) Une équation de la tangente à l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ au point $N(4; 3\sqrt{3})$ est :

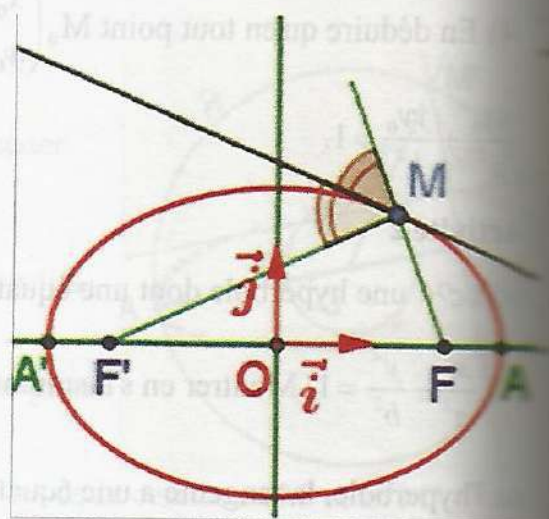
$$\frac{4x}{4} + \frac{3y\sqrt{3}}{9} = 1 \text{ soit encore } x + y\frac{\sqrt{3}}{3} = 1.$$

Remarque

La tangente à l'hyperbole en M_0 est
bissectrice intérieure de l'angle $(\vec{M_0F}; \vec{M_0F'})$



La tangente à l'ellipse en M_0 est
bissectrice extérieure de l'angle $(\vec{M_0F}; \vec{M_0F'})$



S'exercer

3.b Dans chacun des cas suivants, une courbe $\mathcal{C}$ est donnée par son équation cartésienne dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Vérifier que M_0 appartient à $\mathcal{C}$, puis donner une équation de la tangente en M_0 à $\mathcal{C}$.

a) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$, $M_0(0;2)$

b) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$, $M_0(0;2)$

3.c Même question avec :

a) $x^2 + y^2 - x + 1 = 0$; $M_0(1; -1)$ b) $x^2 - 9y^2 - 2x + 36y - 44 = 0$ $M_0(4; 2)$

3.4 REPRÉSENTATIONS PARAMÉTRIQUES D'UNE CONIQUE À CENTRE



Prendre un bon départ

Activité 1

Soit ε une ellipse dont une équation cartésienne dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

- 1) Soit t un réel, montrer que le point $M(a \cos t; b \sin t)$ appartient à ε .
- 2) Réciproquement soit $M(x; y)$ un point de ε . Montrer que le point $N\left(\frac{x}{a}; \frac{y}{b}\right)$ appartient à un cercle trigonométrique.

En déduire qu'il existe un réel t tel que $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$.

Activité 2

Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole dont une équation cartésienne dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \text{ On pose pour tout réel } \begin{cases} x = \frac{a}{\cos t} \\ y = b \tan t \end{cases}, t \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[.$$

1) Montrer que pour tout $t \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, $M\left(\frac{a}{\cos t}; b \tan t\right)$ appartient à $\mathcal{H}$.

2) Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{a}{\cos t}$ est une bijection de $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ vers $\mathbb{R}$.

3) Soit $M(x; y)$ un point de $\mathcal{H}$. Montrer qu'il existe $t \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ tel que $\begin{cases} x = \frac{a}{\cos t} \\ y = b \tan t \end{cases}$.

Retenir

Équations paramétriques d'une ellipse

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, une représentation paramétrique de l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ est } \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, t \in]-\pi; \pi]. \text{ plus généralement une représentation}$$

paramétrique de l'ellipse de centre $\Omega(x_0; y_0)$ d'équation $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ est

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cos t \\ y = y_0 + b \sin t \end{cases}, t \in]-\pi; \pi].$$

Équations paramétriques d'une hyperbole

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ une représentation paramétrique de l'hyperbole

$$\text{d'équation } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ est } \begin{cases} x = \frac{a}{\cos t} \\ y = b \tan t \end{cases}, t \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[.$$

Exemple

1) Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, une équation paramétrique de l'ellipse dont une équation

$$\text{réduite est } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1 \text{ est } \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = \sqrt{5} \sin t \end{cases}, t \in [-\pi; \pi].$$

2) Dans un repère orthonormé $(O; i; j)$, une représentation paramétrique de l'hyperbole dont

équation réduite est $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{3} = 1$ est $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{7}}{\cos t} \\ y = \sqrt{3} \tan t \end{cases}, t \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[.$



S'exercer

3.c Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole dont une équation cartésienne dans un repère orthonormé $(O; i; j)$ est

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. On pose pour tout réel t , $\begin{cases} ch(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ sh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases}$.

1) Montrer que $ch^2(t) - sh^2(t) = 1$.

2) Montrer que pour tout réel t , $M(ch(t); sh(t))$ appartient à $\mathcal{H}$.

3)a. Montrer que la fonction $t \mapsto sh(t)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, puis en déduire que pour tout réel x , il existe un unique réel t tel que $y = bsh(t)$.

b. En déduire que si $M(x; y) \in \mathcal{H}$ et $a > 0$ alors, il existe un réel t tel que $\begin{cases} x = ach(t) \\ y = bsh(t) \end{cases}$.

3.d Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 2 \sin^2 t \\ y = \sin t \cos t \end{cases}, t \in [0; \pi]$. Démontrer que $\mathcal{C}$ est une ellipse que l'on construira.

Remarque

Il existe plusieurs façons de paramétrer une courbe.

3.5 DÉFINITION BIFOCAL D'UNE CONIQUE À CENTRE



Prendre un bon départ

Activité 1

Soit ε une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit

$(\Gamma) = \{M \in \text{plan} / MF + MF' = 2a\}$

1) Soit M un point de ε .

$$MF + MF' = eMH + eMH' = e(MH + MH') = eHH' = eKK' = \frac{c}{a} \times 2 \frac{a^2}{c} = 2a$$

Tout point de l'ellipse appartient donc à (Γ) .

2) Soit $M(x; y)$ un point du plan. Montrons que $MF + MF' = 2a \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$(MF + MF')(MF - MF') = MF^2 - MF'^2 = [(x-c)^2 + y^2] - [(x+c)^2 + y^2] = -4cx$$

$$MF + MF' = 2a \Rightarrow MF - MF' = \frac{-4cx}{MF + MF'} = \frac{-4cx}{2a} = -2ex$$

$$\Rightarrow MF = a - ex$$

$$\Rightarrow MF^2 = (a - ex)^2$$

$$\Rightarrow (x-c)^2 + y^2 = a^2 - 2aex - e^2x^2$$

$$\Rightarrow x^2(1 - e^2) + y^2 = b^2 \quad \text{car } ec = a \text{ et } a^2 - b^2 = c^2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$MF + MF' = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\Leftrightarrow (x-c)^2 + y^2 + (x+c)^2 + y^2 + 2\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a^2 - x^2 - y^2 - c^2$$

$$\Leftrightarrow ((x-c)^2 + y^2)((x+c)^2 + y^2) = (2a^2 - x^2 - y^2 - c^2)^2 \text{ et } 2a^2 - x^2 - y^2 - c^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + c^2 - 2cx)(x^2 + y^2 + c^2 + 2cx) = (2a^2 - x^2 - y^2 - c^2)^2$$

$$\text{et } 2a^2 - x^2 - y^2 - c^2 \geq 0$$

$$MF + MF' = 2a \Leftrightarrow -4c^2x^2 = -4a^2(x^2 + y^2 + c^2) + 4a^4 \text{ et } 2a^2 - x^2 - y^2 - c^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \text{ et } 2a^2 - x^2 - y^2 - c^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ et } x^2 + y^2 \leq a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Activité 2

Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Soit $(\Gamma) = \{M \in \text{Plan} / |MF - MF'| = 2a\}$

Soit M un point de $\mathcal{H}$.

Si M est situé sur la branche de $\mathcal{H}$ la plus proche de F ,

On a : $MF' - MF = eMH' - eMH = e(MH' - MH) = eHH' = eKK' = \frac{c}{a} \times 2 \frac{a^2}{c} = 2a$.

Si M est situé sur la branche de $\mathcal{H}$ la plus proche de F' , on a :

On a : $MF - MF' = eMH - eMH' = e(MH - MH') = eHH' = eKK' = \frac{c}{a} \times 2 \frac{a^2}{c} = 2a$.

Dans tous les cas on a $|MF - MF'| = 2a$.

2) Soit $M(x; y)$ un point du plan. Montrer que $|MF - MF'| = 2a \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.



Retenir

Définition bifocale d'une ellipse

Soient F et F' deux points distincts du plan ; a un réel strictement positif.

Soit ε l'ensemble des points M du plan tels que $MF + MF' = 2a$.

- Si $FF' > 2a$ alors $\varepsilon = \emptyset$.
- Si $FF' = 2a$ alors ε est le segment $[FF']$.
- Si $FF' < 2a$ alors ε est l'ellipse de foyers F et F' , dont la distance entre le centre et un des sommets situés sur l'axe focal est a .

Définition bifocale d'une hyperbole

Soient F et F' deux points distincts du plan ; a un réel strictement positif.

Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des points M du plan tels que $|MF - MF'| = 2a$.

- Si $FF' < 2a$ alors $\mathcal{H} = \emptyset$.
- Si $FF' = 2a$ alors $\mathcal{H}$ est la droite (FF') privée de $[FF']$.
- Si $FF' > 2a$ alors $\mathcal{H}$ est l'hyperbole de foyers F et F' , dont la distance entre le centre et un des sommets est a .

Exemple

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ on donne les points $F(-2; 2)$ et $F'(4; 2)$.

1) Déterminons une équation de l'ensemble (E) des points M tels que : $MF + MF' = 10$.

Soit S le milieu de $[FF']$ on a $S(1; 2)$; $FF' = 6$;

$FF' < 10$, E est donc une ellipse de foyers F et F' et dont la distance entre le centre et un sommet de l'axe (FF') est $a = \frac{10}{2} = 5$;

La distance focale est $2c = 6$; d'où $c = 3$. Dans le repère $(S; \vec{i}; \vec{j})$, une équation réduite de (E)

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1, \text{ avec } c^2 = a^2 - b^2 \text{ ; d'où } b^2 = a^2 - c^2 = 16.$$

Une équation réduite de (E) est donc $\frac{X^2}{25} + \frac{Y^2}{16} = 1$. Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, une équation de ε s'écrit : $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$ soit $16x^2 + 25y^2 - 32x - 100y - 284 = 0$.

2) Déterminons une équation de l'ensemble $\mathcal{H}$ des point M tels que $|MF - MF'| = 4$. $FF' > 4$, H est donc une hyperbole de foyers F et F'.

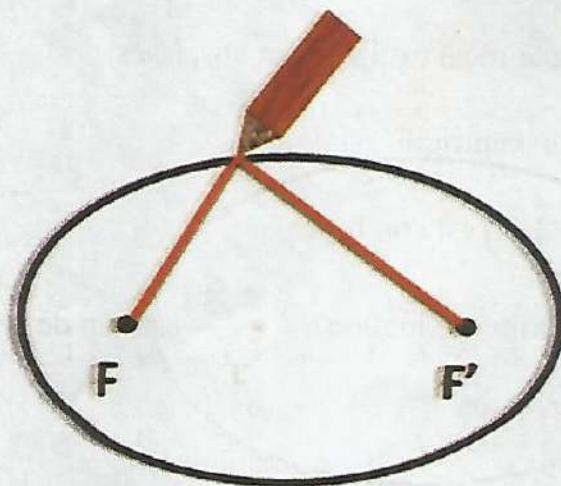
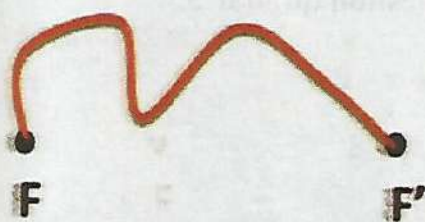
La demi distance focale est $c = 3$, $c^2 = a^2 - b^2$; d'où $b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$.

Dans le repère $(S; \vec{i}, \vec{j})$, une équation réduite de ε est donc $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ soit $\frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{5} = 1$.

Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ cette équation s'écrit : $5x^2 - 4y^2 - 10x + 16y - 31 = 0$.

Remarque CONSTRUCTION D'UNE ELLIPSE

La définition bifocale $MF + MF' = 2a$ fournit la construction du jardinier. On veut planter un parterre de fleurs de forme elliptique et d'abord le dessiner au sol. On plante deux pieux, distants l'un de l'autre de $2c$, puis on attache à chacun des deux pieux une corde de longueur $2a > 2c$. À l'aide d'un troisième bâton, on tend la corde et on déplace ce bâton, la corde restant tendue. Dans son déplacement, ce bâton dessine sur le sol une ellipse de foyers les deux pieux et de grand axe $2a$.



S'exercer

1. F et F' sont deux point du plan tels $FF' = 3$. Déterminer dans une repère convenablement choisi, l'ensemble des points M du plan tels : a) $MF + MF' = 8$; b) $|MF - MF'| = 2$

On traitera les cas : (FF') est parallèle aux axes du repère et (FF') non parallèle aux axes du repère).

S'ENTRAÎNER

Dans chacun des exercices 1 à 4 suivants, indiquer la (les) réponses exactes.

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1

La parabole (P) a pour équation $y^2 = -2x + 1$.

Son axe focal est l'axe des abscisses.

(i) Son sommet est $S\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

(ii) Son foyer est $F\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

(iii) Sa directrice est (D) d'équation $x = 1$.

(iv) Son excentricité est $e = 1$.

2

L'ellipse (E) a pour équation $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$.

(i) Son axe focal est l'axe des abscisses.

(ii) Son excentricité est $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(iii) $F(\sqrt{3}; 0)$ est son foyer.

(iv) La droite d'équation $x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ est une de ses directrices.

3

L'hyperbole (H) a pour équation $4x^2 - y^2 = 1$.

(i) Son excentricité est $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

(ii) $F(\sqrt{5}; 0)$ est un de ses foyers.

(iii) La droite d'équation $y = 2x$ est une de ses asymptotes.

(iv) La droite d'équation $y = 2\sqrt{5}$ est une de ses directrices.

L'axe des abscisses est un axe de symétrie de (H).

4

Répondre par vrai ou faux

La courbe d'équation $x^2 - 4y^2 + 2x = 0$:

i- est une ellipse.

ii- est une hyperbole.

iii- a pour centre le point $\Omega(-1; 2)$.

iv- a pour axe focal la droite d'équation

v- a pour excentricité $\sqrt{5}$.

5

Trouver le foyer et la directrice de la parabole d'équation donnée.

a) $y^2 = 4x + 2y + 11$.

b) $y^2 = -6x + 6y + 15$.

c) $x^2 + 4y + 13 = 0$.

6

Même question qu'au n°5.

$y = \frac{1}{4}x^2 + x + 2$.

$y = 3x^2 + x - 3$.

$y^2 = 6x + 3$.

$y^2 = -4x + 1$.

$y = -\frac{1}{2}x^2 + x$.

$y^2 - 2y - x - 2 = 0$.

7

On donne la distance d entre un point F et une droite (D), et un réel e strictement positif.

Choisir un repère et trouver une équation

de la conique de foyer F , de directrice (D) et d'excentricité e . $d = 4$; $e = 1$.

$$f = 9; \quad e = \frac{4}{5};$$

$$f = 9; \quad e = \frac{5}{4};$$

$$f = 1; \quad e = 2;$$

$$f = 1; \quad e = \frac{1}{2}.$$

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, trouver l'équation de la parabole de foyer F et de directrice (D).

$$F(3; 2); (D): x = 1.$$

$$F(1; 4); (D): x = 3.$$

$$F(1; 4); (D): y = 4.$$

$$F(-2; 1); (D): y = -1.$$

Dans les exercices suivants le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

EQUATION RÉDUITE D'UNE CONIQUE.

Déterminer les éléments caractéristiques des coniques dont une équation dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est la suivante.

$$a) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

$$b) \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

$$c) \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

$$d) 25x^2 + 9y^2 = 225.$$

$$e) 4x^2 + y^2 = 4.$$

$$f) \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

$$g) \frac{y^2}{12} - \frac{x^2}{9} = 1.$$

$$h) \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1.$$

10

Dans chacun des cas suivants, la courbe (C) est donnée par une équation cartésienne. Déterminer l'équation réduite de la courbe (C) et dessiner cette courbe.

$$a) x^2 - 4y^2 = 9.$$

$$b) 4x^2 - 9y^2 = 1.$$

$$c) 9y^2 - 4x^2 = -1.$$

$$d) 16x^2 + 3y^2 = 48.$$

$$e) x^2 + 2x = 2y.$$

$$f) 3x^2 + 2x + 3y^2 - 6y = 0.$$

$$g) 4(x+2)^2 - 25(y-2)^2 = 1.$$

$$h) 9(x-2)^2 - 16(y+1)^2 + 1 = 0.$$

$$i) 2y + 3x^2 = 0.$$

11

Même question qu'à l'exercice précédent.

$$a) x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 17 = 0.$$

$$b) x^2 - 9y^2 - 2x + 36y - 44 = 0.$$

$$c) x^2 + y^2 - x + 2y + 1 = 0.$$

$$d) \frac{x^2}{4} - x - y + 1 = 0.$$

$$e) y^2 + 2x - 2y + 3 = 0.$$

$$f) 3x^2 + 2y^2 + 8y + 2 = 0.$$

Pour les exercices 12 et 13 suivants, une droite (D) est donnée et un point F n'appartenant pas à (D). construire cinq points de la conique de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité e .

12

$$a) e = 2 \quad ; \quad b) e = 3$$

13

$$a) e = \frac{1}{2} \quad ; \quad b) e = \frac{1}{4} \quad ; \quad c) e = \frac{3}{2}$$

14

Démontrer que la courbe d'équation $4y^2 = |9x^2 - 36x|$ est la réunion de deux coniques que l'on construira.

15

On désigne par (H) et (E) les ensembles des points M dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient :

$$(H) : 4x^2 - 9y^2 + 8x + 54y - 113 = 0.$$

$$(E) : 16x^2 + 9y^2 + 32x - 54y - 47 = 0.$$

- 1) Déterminer les équations réduites de (H) et (E). En déduire la nature de ces courbes.
- 2) Déterminer les éléments caractéristiques de ces deux courbes.
- 3) Les construire sur un même graphique.

16

Même exercice que le précédent avec :

$$(H) : 16x^2 - 25y^2 + 96x - 256 = 0.$$

$$(E) : 16x^2 + 25y^2 + 96x - 256 = 0.$$

En déduire la construction de la courbe (C) d'équation

$$416x|x| - 25|y|y + 96x - 256 = 0.$$

17

On considère l'ensemble (Γ) des points M dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient

$$\frac{y^4}{16} = x^4 - 2x^2 + 1.$$

Démontrer que (Γ) est la réunion de deux coniques. Construire (Γ) .

18

Trouver l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient :

$$16x^4 - 72x^2y^2 + 81y^4 = 1.$$

19

Trouver l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient : $x|x| + 4y|y| = 1$.

PARAMÉTRAGE D'UNE CONIQUE.

Pour les exercices de 20 à 21 préciser l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient :

20

$$a) \begin{cases} x = e^t + e^{-t} \\ y = 2(e^t - e^{-t}) \end{cases}, t \in \mathbb{R};$$

$$b) \begin{cases} x = -2(e^t + e^{-t}) \\ y = e^t - e^{-t} \end{cases}, t \in \mathbb{R};$$

$$c) \begin{cases} x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = \frac{t}{1+t^2} \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

21

$$a) \begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}; \quad b) \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin t \cos t \end{cases}$$

22

Soit (C) la courbe d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ y = \cos t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

En exprimant $\cos t$ en fonction de $\sin\left(\frac{t}{2}\right)$

montrer que (C) est une portion d'une parabole que l'on construira.

23

Soit (C) la courbe d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = 3 \sin t - 1 \\ y = 4 \cos t + 2 \end{cases}, t \in [0; 2\pi[. \text{ Démontrer que (C) est une ellipse que l'on construira.}$$

24

Soit (C) la courbe d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \\ y = 2 \left(t - \frac{1}{t} \right) \end{cases}, t \in [1; +\infty[.$$

Démontrer que (C) est une portion d'hyperbole que l'on construira.

la courbe d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\cos 2t} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \tan 2t \end{cases}, t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right].$$

Démontrer que (C) est une portion d'hyperbole et la construire.

NOMBRES COMPLEXES ET CONIQUES

Soit l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $|z + 2\bar{z} + 1| = 3 |z + \bar{z}|$.

À tout nombre complexe z on associe le nombre complexe Z tel que $Z = z^2 - (9 - 2i)z + 26$.

Déterminer l'ensemble (Γ_1) des points M tels que Z soit réel. Préciser sa nature et ses éléments caractéristiques.

Déterminer l'ensemble (Γ_2) des points M tels que Z soit nul ou imaginaire pur.

Précisez sa nature et ses éléments caractéristiques.

Construire (Γ_1) et (Γ_2) sur le même graphique et préciser les coordonnées de leurs points d'intersection.

À tout point M du plan d'affixe z on associe le point M' d'affixe Z tel que $Z = (3 + 2i)z + 3iz - 1$.

Démontrer que l'ensemble (Γ) des points M tels que O, M et M' soient alignés est une conique.

Déterminer la nature de (Γ) et ses éléments caractéristiques.

29

On pose $z = \frac{z - 2 + i}{z + 4 - i}$ un nombre complexe différent de $-4 + i$.

1) Démontrer que l'ensemble (Γ) des points M tels que z soit imaginaire pur est une partie d'une conique (E).

2) Déterminer la nature de (E) et ses éléments caractéristiques.

30

Déterminer l'ensemble (Γ) des points M d'affixe $z = x + iy$ vérifiant :

$$\arg z + \arg(z - 1) = (2k + 1)\frac{\pi}{2} \text{ et justifier que}$$

(Γ) est contenue dans une hyperbole, puis construire (Γ) en rouge.

FAMILLE DE CONIQUES.

31

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on définit la famille de courbes (C_m) d'équation : $(m + 1)x^2 - (m - 1)y^2 - 8 = 0$ où m est un nombre réel.

1) Étudier suivant les valeurs de m la nature de la courbe (C_m) .

2) Tracer sur le même graphique les courbes (C_{-1}) , (C_0) , (C_1) et (C_3) .

32

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on définit la famille de courbes (C_m) d'équation :

$$(m - 2)x^2 - y^2 - 2(m + 3)x + 5m = 0$$

où m est un nombre réel.

1) Déterminer m pour que (C_m) soit une parabole. Préciser dans ce cas son foyer et son excentricité.

2) Déterminer m pour que (C_m) soit une hyperbole équilatère.

Tracer cette hyperbole.

3) Étudier suivant les valeurs de m la nature de la courbe (C_m).

IMAGE D'UNE CONIQUE PAR UNE TRANSFORMATION

33

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, unité : 4cm. Soit A le point de coordonnées $(-1; 0)$. Soit f la fonction définie de l'intervalle $[-1; 1]$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

1) Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (S_1). Préciser les tangentes ou demi-tangentes aux points A et O.

2) Soit (S_2) l'image de (S_1) par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses. Donner une équation de (S_2).

3) Vérifier que (S) = (S_1) $\cup$ (S_2) a une équation $y^2 - y^2|x| - |x| - 1 = 0$. Tracer (S).

34

Soit (E) l'ellipse d'équation $4x^2 + y^2 = 36$ et les points A(3;0) et B(0;6). Soit M un point de (E) et M' l'isobarycentre de A, B et M.

1) Démontrer que M' est l'image de M par une transformation que l'on précisera.

2) En déduire une équation de l'ensemble (E') des points M' lorsque M décrit (E).

3) Tracer (E) et (E') dans le même graphique.

35

Soit (H) l'hyperbole d'équation

$$-x^2 + 4y^2 = 16.$$

1) Déterminer une équation de (H'), image

de (H) par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (H').

3) Tracer (H) et (H') dans le même graphique.

DÉFINITION BIFOCAL D'UNE CONIQUE

36

Un jardinier souhaite créer un parterre de forme elliptique dont la grande dimension est 20 m et la plus petite 10 m. Pour cela il plante deux piquets fixes M et P dans le sol auxquels il attache les deux bouts d'une ficelle rigide d'une certaine longueur. Il tend cette ficelle par un piquet mobile R qu'il garde toujours vertical tout en le déplaçant de telle façon que la corde reste bien tendue. Justifier pourquoi le piquet R décrit de cette façon une ellipse. Comment faut-il choisir la distance entre les piquets fixes et la longueur de la ficelle pour obtenir l'ellipse souhaitée ?

37

Soient A et B deux points fixes avec $AB = 8$. Déterminer la nature, donner une équation cartésienne et une équation focale des lieux suivants puis les construire :

$$S = \{M \text{ tel que } MA + MB = 10\};$$

$$T = \{M \text{ tel que } |MA - MB| = 4\}$$

TANGENTES À UNE CONIQUE

38

Déterminer les équations des tangentes à l'ellipse d'équation $9x^2 + 16y^2 = 144$ aux points d'abscisse 2 et aux points d'ordonnée 3.

39

Soit l'ellipse d'équation cartésienne $4x^2 + 9y^2 = 36$. Déterminer les équations des tangentes à cette ellipse passant par le point P(4;0) ainsi que les coordonnées de leurs points de contact.

41

Soit l'hyperbole d'équation cartésienne $x^2 - 4y^2 - 4 = 0$. Déterminer les équations des tangentes à cette hyperbole passant par le point P(1;1). Faire une figure.

Chapitre 17

CALCULS DES PROBABILITÉS

LEÇON 1 RÉSOLUTION DE QUELQUES PROBLÈMES DE DÉNOMBREMENT

1.1 UTILISATION DES DIAGRAMMES ET DES TABLEAUX.

1.2 ARBRES DE CHOIX : NOTION DE LISTES

LEÇON 2 PROBABILITÉ D'UN ÉVÉNEMENT

2.1 INTRODUCTION DE LA PROBABILITE D'UN ÉVÉNEMENT

2.1.1 Vocabulaire en probabilité.

2.1.2 Probabilité d'un événement.

2.2 QUELQUES PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION "PROBABILITÉ"

2.3 PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

LEÇON 3 VARIABLES ALÉATOIRES.

3.1 PRÉSENTATION

3.2 LOI DE PROBABILITÉ ET FONCTIONS ASSOCIÉES À UNE VARIABLE ALÉATOIRE

3.3 FONCTION DE RÉPARTITION D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

3.4 ÉPREUVES RÉPÉTÉES DE BERNOULLI.

3.4.1 Présentation.

3.4.2 Espérance mathématique et variance de la variable aléatoire associée à une épreuve répétée de Bernoulli.

S'ENTRAÎNER

LEÇON 1 **RÉSOLUTION DE QUELQUES PROBLÈMES DE DÉNOMBREMENT.**

► Résoudre quelques problèmes de dénombrement en utilisant des diagrammes ou des tableaux ou des arbres.

1.1 UTILISATION DES DIAGRAMMES ET DES TABLEAUX.



Prendre un bon départ

Activité 1

Un magasin souhaite faire une promotion sur des lampes de bureau et des lampes de salon. Ces lampes sont de trois couleurs : blanche, noire ou rouge.

Sur ces 200 lampes, 25 % sont des lampes de salon ; 30 % des lampes sont blanches ; 60 lampes rouges et parmi elles, 20 % sont des lampes de salon. Le quart des lampes noires sont des lampes de salon.

- 1) Représenter les données de cet énoncé dans un diagramme de " CARROLL ".
- 2) Calculer le nombre de lampes noires.
- 3) Déterminer le nombre de lampes de bureau ayant la couleur blanche.

Activité 2

1. Dans un groupe d'individus, 45 aiment le cinéma, 30 le sport, 10 à la fois le cinéma et le sport, 5 n'aiment ni le cinéma, ni le sport. Calculer le nombre total d'individus.

2. L'exploitation des relevés des notes d'un jury de baccalauréat littéraire comptant 108 candidats tous présents a donné les informations suivantes :

37 candidats ont eu la moyenne en anglais, 25 en deuxième langue vivante et 26 en mathématiques. 5 ont eu la moyenne dans les trois matières, 6 en maths et en deuxième langue vivante, 7 en maths et en anglais, 10 en anglais et en deuxième langue.

- a) Utiliser un diagramme pour illustrer la situation décrite dans l'énoncé précédent.
- b) Déterminer le nombre de candidats n'ayant pas eu la moyenne en anglais, en mathématiques et en deuxième langue vivante.

Activité 3

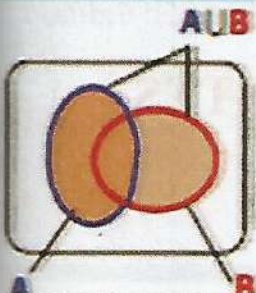
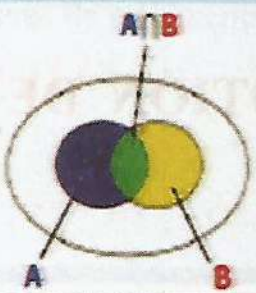
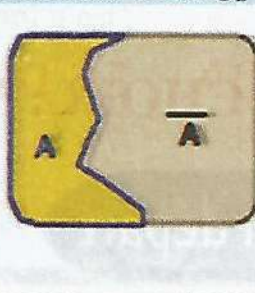
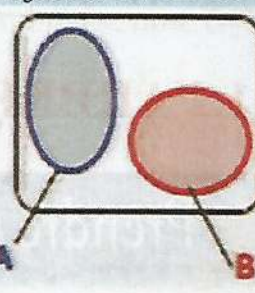
1. On lance simultanément une pièce de monnaie et un dé cubique dont les faces portent respectivement les numéros 1 ; 2 ; 3 ; ... ; 6. On relève à la face supérieure de la pièce de monnaie et le numéro de la face supérieure du dé apparu. Donner le nombre total des résultats éventuels.

2. Lors d'une rentrée parlementaire, les 180 députés qui constituent la chambre doivent se saluer indépendamment de leurs chapelles politiques.

- a. Déterminer le nombre de poignées de mains qu'un député pris au hasard doit passer avec les autres.
- b. Déterminer le nombre total de poignées que doivent se donner tous ces députés.

Retenir

- Pour résoudre certains problèmes de dénombrement, on peut utiliser les tableaux, les diagrammes ou les arbres.

Réunion de A et B	Intersection de A et B	Complémentaire de A dans E est noté $\bar{A}$ ou C_E^A	A et B sont disjoints $A \cap B = \emptyset$
			

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B);$$

$$\text{Card}(A) + \text{Card}(\bar{A}) = \text{Card}(E).$$

On utilise un tableau à double entrée dans le cas où on veut avoir un résultat composé de deux éléments appartenant respectivement à deux ensembles.

$A \times B$ est l'ensemble des éléments $(a; b)$ où $a \in A$ et $b \in B$.

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$$

Exemple

Huit amis vont à une soirée et devraient être normalement accompagnés chacun de son épouse. À la dernière minute, une des femmes est indisponible et ne peut accompagner son mari à cette soirée. À l'ouverture de la soirée dansante, ils forment des couples (composés d'un homme et d'une femme) pour danser.

Combien de possibilités a-t-on de former des couples ?

Combien de possibilités a-t-on de former des couples tels qu'aucun homme ne danse avec sa femme ?

Solution.

Un couple est un élément de $H \times F$ où H est l'ensemble des hommes et F celui des femmes.

$$\text{Card}(H \times F) = 8 \times 7 = 56.$$

Il ya $56 - 7 = 49$ possibilités de former un couple dont l'homme n'est pas le mari de la femme.

On devrait avoir ces résultats à partir d'un tableau à double entrées dont une entrée est formée des hommes et une autre des femmes.

S'exercer

Exercice 1 On interroge 50 enfants à propos du sport qu'ils pratiquent. 25 enfants pratiquent le football, 22 le tennis et 16 le basketball. 5 pratiquent les trois sports; 12 pratiquent le football et le basketball, 8 pratiquent le tennis et le football, 7 pratiquent le tennis et le basketball.

Peut-on affirmer que chacun de ces enfants pratique au moins un de ces trois sports ?

Déterminer le nombre d'enfants

- a) qui pratiquent uniquement le football ;
- b) qui ne pratiquent pas le football ;
- c) qui pratiquent le tennis et le basketball, mais ne pratiquent pas le football ;
- d) qui pratiquent uniquement le tennis, uniquement le basketball.

1.b Dans un camp de vacances hébergeant 80 personnes, 55 personnes aiment la lecture, 33 les voyages et 16 n'aiment aucun des deux loisirs. Combien de personnes aiment-ils à la fois le voyage et la lecture ?

1.2 ARBRES DE CHOIX : NOTION DE LISTES



Prendre un bon départ

1. Un buffet est composé de trois entrées, de 5 résistances et de 4 desserts.
Combien de plats différents comportant une entrée, une résistance et un dessert peut-on constituer à partir de ce buffet ?
2. Dix huit chevaux sont au départ d'une course.
 - a) On s'intéresse aux quatre premiers chevaux ayant franchi la ligne d'arrivée.
Déterminer le nombre total possible de quartés dans l'ordre à l'issue de cette course.
 - b) Déterminer le nombre possible de quartés dans l'ordre comportant le cheval numéro «11».
3. Un sac contient 10 boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 10, dont 4 rouges, 5 vertes et une noire.
 - a. On effectue quatre tirages successifs d'un jeton, en remettant chaque fois le jeton tiré dans le sac avant le tirage suivant.
 - (i) Calculer le nombre de résultats possibles.
 - (ii) Déterminer le nombre total de résultats lorsque le jeton tiré n'est plus remis dans le sac.
 - b. On tire simultanément 4 jetons de ce sac. Calculer le nombre total de résultats possibles.



Retenir

Soit E un ensemble non vide ayant n éléments ; p un entier naturel non nul.

Une **p -liste** ou **p -uplet** d'éléments de E un élément de l'ensemble

$E^p = \underbrace{E \times E \times E \times \dots \times E}_p$; soit une famille $(n_1, n_2, \dots, n_p)$ d'éléments de E .

Le nombre de p -listes de E est n^p .

Un **arrangement de p** ($p \leq n$) éléments de E est une p -listes d'éléments distincts de E , soit une famille $(n_1, n_2, \dots, n_p)$ d'éléments de E . Le nombre d'arrangements

de p éléments de E est : $\underbrace{n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1)}_{p \text{ facteur}} = \frac{n!}{(n-p)!}$. Ce nombre est noté A_n^p .

• Par convention $A_n^0 = 1$.

Une permutation d'éléments de E est un arrangement de n éléments de E , si $\text{card}E = n$.

Le nombre de permutations d'éléments d'un ensemble ayant n élément est $n!$.

Une combinaison de p éléments pris parmi n éléments d'un ensemble E ($0 \leq p \leq n$) est une partie à p éléments de E ; $\{n_1, n_2, \dots, n_p\}$, $n_i \in E$ et $\text{card}E = n$

Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n est : $\frac{n!}{(n-p)!p!}$ ce nombre est noté C_n^p .

$$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{A_n^p}{p!}$$

$$C_n^0 = 1; C_n^1 = n; C_n^n = 1; C_n^{n-p} = C_n^p; C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$$

Méthode de dénombrement

Comment dénombrer les tirages de p éléments d'un ensemble E fini à n éléments.

	Conditions	Le nombre de tirages possibles est :	Exemple usuel
$P \geq 1$	Les p éléments ne sont pas nécessairement tous distincts mais sont ordonnés.	Le nombre de p listes d'un ensemble E à n éléments soit n^p	Tirage successif avec remise de p objets parmi n .
$P \leq n$	Les p éléments sont tous distincts et ordonnés.	Le nombre d'arrangements de p élément d'un ensemble E à n éléments soit $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	Tirage successif sans remise de p objets parmi n .
$P = n$	Les n éléments sont tous distincts et ordonnés.	Le nombre de permutations des éléments d'un ensemble E à n éléments. Soit: $n!$	Anagramme d'un mot formé de n lettres toutes distinctes.
$P < n$	Les p éléments sont tous distincts et non ordonnés.	Le nombre de combinaisons de p élément d'un ensemble E à n éléments soit $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$	Tirages simultanés de p objets parmi n objets.

Remarque

Savoir quand additionner ou multiplier

Présentation	Opération	Observation
$x \in A_1$ ou $x \in A_2$. équivalent à $x \in A_1 \cup A_2$.	Addition. $\text{card}(A_1 \cup A_2) = \text{card}A_1 + \text{card}A_2 - \text{card}(A_1 \cap A_2)$ $= \text{card}A_1 + \text{card}A_2$ si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.	on peut avoir $A_1 \cap A_2 = \emptyset$
$x = (x_1; x_2; \dots; x_p)$ avec $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2$ et... et $x_p \in A_p$, équivalent à $x \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_p$	Multiplication $\text{card}(A_1 \times A_1 \times \dots \times A_p) =$ $\text{card}A_1 \times \text{card}A_2 \times \dots \times \text{card}A_p$ $\text{card}(E^n) = (\text{card}E)^n$	Un résultat est la composition des éléments pris de plusieurs ensembles : tirages dans la même urne plusieurs fois de suite.

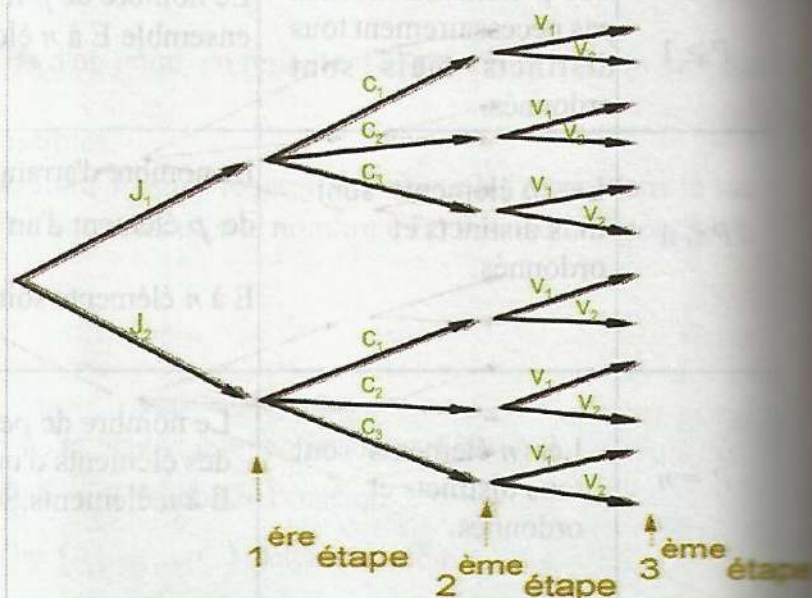
Exemple

Énoncé 1 :

Une femme a dans sa garde-robe 2 jupes, 3 chemisiers et 2 vestes. Elle choisit au hasard une jupe, un chemisier et une veste. Enumérer (à l'aide d'un arbre), puis dénombrer les différentes façons de s'habiller ?

Solution 1 :

Un habillement de la femme comporte 3 étapes (choix de la jupe, du chemisier, et de la veste) offrant 2 possibilités à la 1^{ère} étape, 3 possibilités à la 2^{ème} étape puis 2 possibilités à la 3^{ème} étape. On illustre à l'aide de l'arbre ci-contre. On a $2 \times 3 \times 2 = 12$ possibilités d'habillement de la femme.



Énoncé 2 :

Un code comporte deux lettres distinctes de l'alphabet français, suivies d'un chiffre non nul. Combien peut-on former de codes distincts ?

Solution 2 :

Les trois étapes : choix de la première lettre, de la deuxième, puis du chiffre offrent respectivement 26, 25 et 9 possibilités à chaque étape. Le nombre cherché est donc $26 \times 25 \times 9 = 5850$ codes distincts.

Enoncé 3:

1) Au loto sportif, on coche l'une des trois cases

1	N	2
---	---	---

 pour chacun des 18 matches sélectionnés.

Dénombrer les grilles distinctes.

2) Combien y a-t-il de numéros de téléphone à 8 chiffres commençant chacun par 9 ?

Solution :

1) Il y en a autant que de 18-listes de l'ensemble $\{1 ; N ; 2\}$

soit $3^{18} = 387\,420\,489$

2) Les 7 numéros qui suivent sont des 7-listes de l'ensemble $\{0 ; 1 ; \dots ; 9\}$. Il y en a $10^7 = 10\,000\,000$.

Enoncé 4:

1) Une course de chevaux comporte 20 partants. Combien peut-il y avoir de résultats possibles de tiercés dans l'ordre ?

2) De combien de façons peut-on faire asseoir 7 personnes sur 7 chaises ?

3) Combien de mots (ayant un sens ou non) de 5 lettres distinctes peut-on écrire en utilisant les lettres de l'alphabet français ?

4) Une urne contient 10 boules numérotées respectivement 1, ..., 10. On en tire successivement trois sans remise. Combien de possibilités différentes peut-on obtenir ?

Solution :

1) Soit E l'ensemble des numéros des chevaux. On a $\text{Card}(E) = 20$. Un tiercé correspond à un arrangement de 3 éléments de E , il y en a $A_{20}^3 = 6840$.

2) Désignons par $p_1, p_2, \dots, p_7$ les 7 personnes et posons $E = \{p_1, p_2, \dots, p_7\}$. Une répartition peut se voir comme un arrangement des 7 éléments de E c'est-à-dire une permutation de E , il y en a $7! = 5040$.

3) A_{26}^5

4) A_{10}^3

Enoncé 5:

1) On tire au hasard 6 boules parmi 49. Combien de tirages possibles (on ne tient pas compte du numéro complémentaire) peut-on avoir ?

2) Dans un jeu de 32 cartes, on choisit 5 cartes au hasard (l'ensemble de ces 5 cartes s'appellent une "main").

a) Nombre de mains au total

b) Nombre de mains qui contiennent exactement 3 as

c) Nombre de mains qui contiennent au moins 3 as :

3) Nombre de comités de 3 personnes que l'on peut élire dans une assemblée de 20 personnes.

Solution :

1) C'est le nombre de façons de choisir 6 objets parmi 49, soit

$$C_{49}^6 = \frac{49!}{6!43!} = 13\,983\,816.$$

2) a) Nombre de mains au total : $C_{32}^5 = \frac{32!}{5!27!} = 201\,376$

b) Nombre de mains qui contiennent exactement 3 as : le nombre de façons de choisir 3 as parmi 4 est C_4^3

le nombre de façons de choisir 2 cartes parmi 28 "où il n'y a aucun as" est :

C_{28}^2 On applique le principe multiplicatif car on prend une main de 3 as et une main de deux cartes «non as». $C_4^3 \times C_{28}^2 = 1\,512$

4) Nombre de mains qui contiennent au moins 3 as :

$$C_4^3 \times C_{28}^2 + C_4^4 \times C_{28}^1 = 1540$$

$$3) C_{20}^3 = 1140.$$



S'exercer

1.c Une série de dix affirmations est proposée à un candidat à un concours. Le candidat doit répondre par "oui" ou "non" à une affirmation. Combien de réponses différentes peut-il donner à de cette interrogation ?

1.d Un park automobile a 20 parkings. De combien de possibilités peut-on disposer 14 voitures dans ce park ?

1.e On tire au hasard une main de 6 cartes d'un jeu de 32 cartes.

(i) Donner le nombre de mains possibles.

(ii) Donner le nombre de mains ayant exactement deux piques.

(iii) Donner le nombre de mains ayant les quatre "as".

(iv) Donner le nombre de mains ayant au moins deux trèfles.

1.f Huit athlètes prennent le départ d'une course et franchissent tous la ligne d'arrivée ;

Calculer le nombre de classements possibles à l'issue de cette course en supposant qu'il n'y a pas d'ex aequo.

1.g En utilisant un arbre de choix, déterminer le nombre de parties qu'on peut former avec 4 éléments.

1.h On lance cinq fois de suite une pièce de monnaie. Donner le nombre de résultats possibles à l'issue de ces lancers.

Calculer le nombre de résultats possibles ayant trois fois "pile".

LEÇON 2 PROBABILITÉ D'UN ÉVÉNEMENT

- Connaître et savoir manipuler le langage des probabilités.
- Savoir choisir la méthode appropriée en fonction de la situation proposée pour effectuer le calcul de probabilité de la réalisation d'un événement d'une épreuve aléatoire.

2.1 INTRODUCTION DE LA PROBABILITE D'UN ÉVÉNEMENT

2.1.1 Vocabulaire en probabilité.



Prendre un bon départ

On lance un dé parfaitement équilibré à six faces numérotées de 1 à 6 et on note le nombre apparu sur la face supérieure du dé.

- Peut-on être fixé sur le résultat avant que le dé ne se stabilise complètement ? Une telle expérience est dite aléatoire.
- Citer trois exemples d'expériences aléatoires dans la vie courante ?
- Donner l'ensemble Ω des résultats possibles.
- Donner les résultats qui sont favorables aux contraintes suivantes :
 A : « Le chiffre obtenu est pair » ; B : « Le chiffre obtenu est inférieur à 5 » ;
 C : « Le chiffre obtenu est supérieur ou égal à 5 » ;



Retenir

Une expérience ou épreuve aléatoire, est une expérience dont on ignore le résultat à obtenir avant que l'expérience ne soit totalement réalisée ou faite.

Un résultat possible à l'issue d'une expérience est appelée une éventualité liée à cette expérience.

L'univers associé à une expérience aléatoire est l'ensemble formé de toutes les éventualités de cette expérience.

Un événement d'une expérience aléatoire est une partie de l'univers.

Un événement A est réalisé si le résultat obtenu à l'issue de l'expérience est une éventualité de A.

L'événement certain d'une expérience aléatoire est son univers.

L'événement impossible est l'événement qui n'est pas réalisé à l'issue de l'expérience.

on le note $\emptyset$ ou $\{ \}$.

Un événement élémentaire est un événement formé d'une unique éventualité de l'épreuve.

- On dit que A est inclus dans B et on note $A \subset B$, si toutes les éventualités qui réalisent A , réalisent aussi B .
- On note par $A \cap B$ l'ensemble des éventualités qui réalisent à la fois A et B .
- On note par $A \cup B$ l'ensemble des éventualités qui réalisent A ou B .
- On dit que A et B sont deux événements **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$.
- On dit que A et B sont deux événements **contraires** si B est l'ensemble des éventualités de l'univers qui ne réalisent pas A . On note $B = A^c$ ou $B = C_\Omega^A$.
- Deux événements sont indépendants si la réalisation de l'un n'est pas liée ou conditionnée par celle de l'autre.

Exemple

- On lance une fois un dé et on s'intéresse au numéro sur la face supérieure du dé. L'univers est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
 - « Obtenir un nombre pair » est un événement. Il est réalisé par les éventualités 2, 4 et 6. On écrit $A = \{2; 4; 6\}$. $B = \{1; 3; 5\}$. A et B sont incompatibles.
 - « Obtenir un nombre à deux chiffres » est un événement impossible car il n'est réalisé par aucune des éventualités « obtenir le chiffre 7 » est aussi impossible
 - « Obtenir un nombre inférieur à 10 » est un événement certain.
 - « obtenir un nombre premier et pair » n'est satisfait que par l'éventualité 2. C'est donc un événement élémentaire.
- Si on lance deux dés, alors les résultats obtenus sur chacun de ces dés sont indépendants. En revanche si on effectue deux tirages successifs sans remise des objets, le premier tirage influence le second tirage puisque la configuration des objets est modifiée d'un tirage à l'autre.
- Remarque.** L'univers est toujours lié à l'expérience aléatoire, et n'est connu qu'à l'issue de la description de réalisation de l'expérience à partir des données.
- Tout dé n'a pas nécessairement 6 faces ; les faces d'un dé peuvent porter d'autres numéros en dehors de ceux qu'on connaît d'un dé usuel.

- On lance un dé et on s'intéresse à la parité du nombre obtenu : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- On lance une pièce de monnaie : $\Omega = \{P; F\}$
- On lance deux fois de suite une pièce de monnaie : $\Omega = \{PP; PF; FP; FF\} = \{P, F\} \times \{P, F\}$
- On lance deux dés et on s'intéresse à la somme des numéros obtenus.

$\Omega_s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), \dots, (6, 6)\}$. $\text{card}\Omega_s = 36$

A : « Obtenir 3 » ; $A = \{(1, 1), (2, 1)\}$ $\text{card}A = 2$.



S'exercer

2a On tire simultanément et au hasard 4 jetons d'un sac opaque contenant 32 jetons indiscernables au toucher, numérotés de 1 à 32.

Soit Ω l'univers associé à cette épreuve. Calculer $\text{Card}\Omega$.

Soit l'événement A : « tirer exactement trois jetons dont les numéros sont inférieurs ou égaux à 9 ». Calculer $\text{Card}(A)$.

B : « Obtenir des jetons ayant des nombres de même parité. » Calculer $\text{card}(B)$.

2.1.2 Probabilité d'un événement.

Prendre un bon départ

On lance un dé parfaitement équilibré à six faces numérotées de 1 à 6 et on relève le nombre figurant sur la face supérieure du dé.

a) Quel est le nombre total de possibilités ?

b) Avec l'univers Ω lié à cette épreuve, on vient de constituer une population statistique et un événement est assimilé à une modalité. Désignons par $p(E)$ la fréquence de réalisation de l'événement E .

(i). Donner comme en statistique le mode de calcul de $p(E)$ sachant que l'effectif de la modalité A est $\text{card}A$.

B : « le numéro obtenu est inférieur à 4 »

A : « le numéro obtenu est impair et divise 10 »

(ii). Mettre sous forme de fractions irréductibles, $p(A)$; $p(B)$, $p(A \cap B)$,

$p(A \cup B)$, $p(\bar{A})$, $p(\Omega)$, $p(\emptyset)$.

Retenir

Soit une expérience aléatoire dont l'univers est fini et est noté Ω .

En supposant que tous les résultats ont la même chance d'être obtenus ou encore que le poids d'un événement ne dépend que de l'effectif des éventualités qui le réalisent, sa fréquence de réalisation est encore appelée « probabilité de sa réalisation ».

Si $p(A)$ désigne la probabilité de réalisation de l'événement A ,

$$\text{alors } p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}.$$

$$p(\Omega) = 1 \text{ et } p(\emptyset) = 0$$

Remarque

- On reconnaît qu'il y a équiprobabilité par l'emploi des expressions telles que : « **parfaitement équilibré** » ; « **non truquée** » ; « **indiscernables au toucher** » ; « **au hasard** », ...
- Pour dénombrer **les cas favorables ou les cas possibles**, on peut utiliser **des arbres**, **des tableaux ou des diagrammes**.
- Si une éventualité peut être obtenue plusieurs fois, dans le langage ensembliste elle s'écrit une seule fois, mais dans le calcul de probabilité de l'obtention de cette éventualité, on tiendra compte du nombre d'apparition de cette éventualité.

Exemples

- Pour un dé bien équilibré, il y a 6 événements élémentaires qui ont tous la même probabilité.

La probabilité d'apparition d'un numéro est $\frac{1}{6}$. Si A est l'événement : « le numéro obtenu est pair »,

les éventualités qui réalisent A sont 2, 4 et 6. On a : $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$.

- Deux des 6 faces d'un dé équilibré portent le numéro 1, une porte le numéro 2 et trois portent le numéro 3. On lance une fois le dé et on s'intéresse au numéro obtenu.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir 1 ? ; 2 ? ; 3 ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un numéro impair ?

Solution :

1. Soit $p(1)$ la probabilité d'obtenir le numéro 1. Il y a en réalité 6 éventualités avec répétition de certaines on a : 1,1,2,3,3.

Ainsi, $p(1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $p(2) = \frac{1}{6}$; $p(3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

2. L'événement A : «le résultat obtenu est impair ». $p(A) = \frac{5}{6}$.

- On tire au hasard une main de 4 cartes d'un jeu de 32 cartes indiscernables au toucher. Calculons la probabilité de l'événement A : " Obtenir exactement deux as "

$$\text{Card}(\Omega) = C_{32}^4 ; \text{Card}(A) = C_4^2 \times C_{28}^2 ; p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_4^2 \times C_{28}^2}{C_{32}^4}.$$

On pourra mettre l'expression de $p(A)$ sous forme de fraction irréductible.



S'exercer

2.g Sur 27 convives, 10 ont apprécié l'entrée et le plat de résistance, 11 ont apprécié l'entrée et la sortie et 12 ont apprécié le plat de résistance et la sortie. Par ailleurs, 6 ont apprécié uniquement l'entrée, 3 ont apprécié uniquement le plat de résistance et 1 a apprécié uniquement la sortie.

Déterminer :

- a) Le nombre de convives qui ont apprécié :

- i. L'entrée ;
- ii. Le plat de résistance ;
- iii. La sortie ;
- iv. rien du tout.

- b) Le pourcentage des convives qui ont apprécié :

- i. L'entrée ; ii. Le plat de résistance ; iii. La sortie ; iv. Le menu tout entier ; v. Deux des composants du menu ; vi. Un seul des composants du menu ; vii. Rien du tout du menu

2.h Une urne contient 5 boules rouges, 4 noires, 5 vertes.

A) On tire de cette urne, successivement et sans remise trois boules.

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Calculer la probabilité :
 - a) d'obtenir trois boules rouges ; b) d'obtenir deux boules rouges exactement ;
 - c) d'obtenir au moins une boule rouge ; d) d'obtenir deux boules vertes et une noire ;
 - e) d'obtenir trois boules de la même couleur ;
 - f) d'obtenir trois boules de trois couleurs différentes.

B) Répondre aux questions précédentes sachant qu'on tire simultanément trois boules de cette urne.

2.2 QUELQUES PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION "PROBABILITÉ"



Prendre un bon départ

Activité 1

Soit p une probabilité sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire; A et B deux événements de Ω .

a. Exprimer $\text{Card}(\bar{A})$ en fonction de $\text{Card}(A)$; $\text{Card}(A \cup B)$ en fonction des cardinaux des ensembles A ; B et $A \cap B$.

b. En déduire que $p(A) + p(\bar{A}) = 1$; $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

c. Montrer alors que si A et B sont incompatibles alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Activité 2

Un sac opaque contient huit boules indiscernables au toucher, dont 4 sont rouges, 3 vertes et une jaune. On tire trois fois de suite une boule de ce sac sans remettre la boule tirée avant d'effectuer le tirage suivant.

Soit Ω l'univers associé à cette expérience aléatoire.

a. Calculer $\text{Card}(\Omega)$.

b. Calculer la probabilité de l'événement A : « Les trois boules tirées sont de même couleur ».

Soient B : « les trois boules tirées sont toutes vertes »; C : « les trois boules tirées sont de couleur rouge »; D : « les trois boules tirées sont toutes jaunes ».

c. Calculer $p(B)$; $p(C)$; $p(D)$.

d. Montrer que $p(A) = p(B) + p(C) + p(D)$.



Retenir

Soit p une probabilité sur l'univers Ω .

- Pour tout événement A de Ω , $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.
- Pour tous événements A et B de Ω , $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
- Si $A \cap B = \emptyset$, alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
- La probabilité d'un événement A notée $p(A)$, est la somme des probabilités des événements élémentaires contenus dans A .

En effet si $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s\}$ et $\{\omega_i\} \cap \{\omega_j\} = \emptyset$ pour $i \neq j$ alors,

$A = \{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \{\omega_3\} \cup \dots \cup \{\omega_s\}$ et $p(A) = p(\{\omega_1\}) + p(\{\omega_2\}) + \dots + p(\{\omega_s\})$

- La somme des probabilités de tous les événements élémentaires est égale à 1.

Exemple

- Si on lance un dé bien équilibré, chaque face a la probabilité $\frac{1}{6}$ de paraître.
- De même, si on lance une pièce non truquée, pile et face ont la même probabilité (soit $\frac{1}{2}$) de paraître.

- on tire une carte au hasard d'un jeu ordinaire de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir un as ?

Il y a 32 événements élémentaires donc $n = 32$. L'événement A : " tirer un as " est formé de 4 événements élémentaires dont $k = 4$. Donc : $p(A) = \frac{k}{n} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

Exercices résolus

Énoncé 1:

François a de 4 chemises bleues, 3 chemises rouges et 2 chemises vertes. Un matin, il choisit une chemise au hasard.

1. Quelle est la probabilité pour qu'il prenne une chemise rouge ?
2. S'apercevant que la chemise rouge qu'il a choisie a une tache, il décide d'en prendre une autre. Quelle est la probabilité pour que ce soit encore une chemise rouge ?

Solution 1:

1. François possède au total 9 chemises. Puisqu'il choisit au hasard, il y a équiprobabilité.

Puisqu'il a trois chemises rouges, la probabilité demandée vaut : $p = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

2. François choisit maintenant entre 8 chemises et il y a toujours équiprobabilité.

Puisqu'il y a deux chemises rouges, la probabilité cherchée vaut : $p = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Énoncé 2:

Une urne contient 2 boules rouges, 3 boules blanches et 5 boules noires, indiscernables au toucher. On en extrait au hasard et simultanément 2 boules.

Calculer la probabilité d'obtenir :

- a) A : « Deux boules de même couleur »
- b) B : « Au moins une boule noire ».

Solution 2:

Cardinal de l'univers, $\text{Card}(\Omega) = C_{10}^2 = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$

a) Probabilité d'obtenir deux boules de même couleur :

$$p(A) = \frac{(C_2^2 C_8^0 + C_3^2 C_7^0 + C_5^2 C_5^0)}{45}$$

b) $\bar{B}$ est : « Aucune boule tirée n'est noire ». $p(\bar{B}) = \frac{C_5^2 C_5^0}{45} = \frac{10}{45}$ et

$$p(B) = 1 - p(\bar{B}) = 1 - \frac{10}{45} = \frac{35}{45} = \frac{7}{9} \text{ ou } P(B) = \frac{C_5^1 \times C_5^2 + C_5^2 \times C_5^0}{C_{10}^2} = \frac{35}{45} = \frac{7}{9}$$

Énoncé 3:

Une urne contient 5 boules rouges, 4 noires, 5 vertes. On tire trois boules de cette urne, successivement, en remettant chaque boule tirée dans l'urne avant de prendre la suivante.

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Calculer la probabilité :

- a) d'obtenir trois boules rouges ; b) d'obtenir deux boules rouges exactement ;
 c) d'obtenir au moins une boule rouge ; d) d'obtenir deux boules vertes et une noire ; e)
 d'obtenir trois boules de la même couleur ;
 f) d'obtenir trois boules de couleurs différentes.

Solution 3 :

1) Puisque le tirage est successif avec remise, une éventualité de cette épreuve est une 3-listes d'un ensemble à 14 éléments. D'où le nombre de cas possibles est $14^3 = 2744$

2) a) Comme il y a équiprobabilité la probabilité d'un événement est égale au nombre de cas favorables à sa réalisation sur le nombre de cas possibles.

Un tirage de 3 boules rouges correspond à une 3 listes d'un ensemble à 5 éléments. Soit $5^3 = 125$.

$$\text{d'où : } p_a = \frac{5^3}{14^3} = \frac{125}{2744}$$

b) Pour obtenir deux boules rouges exactement, Il y a C_3^2 dispositions possible dans une éventualité et un choix de 2 boules rouges est une 2-listes d'un ensemble à 5 éléments, soit au total 5^2 , puis la 3^{ème} boule est choisie parmi les 9 boules restantes donc 9 choix possible;

$$\text{d'où le nombre de cas favorables. } C_3^2 \times 5^2 \times 9 = 675 \quad \text{d'où } p_b = \frac{C_3^2 \times 5^2 \times 9}{14^3} = \frac{675}{2744}$$

c) L'événement contraire est: "n'obtenir aucune boule rouge". Une éventualité est une 3-listes d'un ensemble à 9 éléments, soit $9^3 = 729$.

$$\text{Ainsi } P_c = \frac{9^3}{14^3} = \frac{729}{2744} \quad \text{et } P_c = 1 - P_c = 1 - \frac{729}{2744} = \frac{2015}{2744}$$

d) Cas possibles: $14^3 = 2744$

Cas favorables: $C_3^2 \times 5^2 \times 4 = 300$

$$\text{d'où } P_d = \frac{C_3^2 \times 5^2 \times 4}{14^3} = \frac{300}{2744}$$

e) Cas favorables: les 3 boules sont rouges ou noires ou vertes, soit $5^3 + 4^3 + 5^3$

$$\text{d'où } P_e = \frac{5^3 + 4^3 + 5^3}{14^3} = \frac{314}{2744}$$

f) On a 3! dispositions possibles des 3 boules dans une éventualité. Dans une éventualité il y a 5 choix possibles d'une boule rouge, pour chaque choix d'une boule verte et pour chaque cas 5 choix possible d'une boule noire.

Soit : $3! \times 5 \times 4 \times 5 = 600$ cas favorables.

$$\text{D'où } P_f = \frac{3! \times 5 \times 4 \times 5}{14^3} = \frac{600}{2744}$$



S'exercer

2.f

$y_i \backslash x_i$	6	10	14	18
2	21	24	18	0
3	12	15	12	3
4	0	9	27	9

Une boîte non transparente contient 150 boutons de 10 types différents, indiscernables au toucher, destinés à la confection de vêtements. Le tableau donne leur répartition en fonction du nombre de trous (x_i) et de leur diamètre en mm (y_i). On tire au hasard un bouton de la boîte. Calculer la probabilité d'obtenir :

- Un bouton à 3 trous de 10 mm de diamètre ;
- Un bouton de 14 mm de diamètre ;
- Un bouton à 2 trous ;
- Un bouton de diamètre égal à 6 ou à 10 mm.

2.h On suppose que l'univers est constitué de 5 événements élémentaires a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ayant

pour probabilités : $p_1 = \frac{1}{6}, p_2 = \frac{1}{6}, p_3 = \frac{1}{6}, p_4 = \frac{1}{4}, p_5 = \frac{1}{4}$.

Soit $A = \{a_1, a_3, a_4\}$. Calculer la probabilité de A.

2.g Dans un univers, on considère deux événements incompatibles A et B tels que $p(A) = 0,2$ et $p(B) = 0,7$.

Déterminer $p(A \cap B)$, $p(A \cup B)$, $p(\bar{A})$, $p(\bar{B})$.

2.3 PROBABILITÉS CONDITIONNELLES



Prendre un bon départ

Activité 1

Les statistiques des performances dans un jury de baccalauréat scientifique ont donné les résultats suivants par sexe.

	Garçons	Filles	Total
Admis	60	90	
Refusés	20	30	
Total			

- a) Compléter ce tableau, puis calculer le pourcentage de réussite des candidats pour ce jury.
 b) On choisit au hasard un candidat de ce jury. Calculer les probabilités des événements suivants :
 A : «le candidat est admis» ; B : «le candidat est une fille et est admis» ;
 C : «le candidat est un garçon et est refusé»
 c) On suppose que le candidat est admis. Calculer la probabilité qu'il soit un garçon.
 d) On suppose que le candidat est une fille. Calculer la probabilité qu'il soit refusé.

Activité 2

Un sac contient 8 jetons dont 3 portent le numéro 1 ; 4 le numéro 2 et le dernier porte le numéro 3.

On tire deux jetons du sac l'un après l'autre. Soient A : « le premier jeton porte le numéro 2 » et B : « le deuxième jeton porte le numéro 2 » deux événements de cette expérience aléatoire.

- a. À partir d'un tableau à double entrée, calculer les probabilités des événements A, B et $A \cap B$ en supposant que le tirage serait avec remise, puis dans le cas où le tirage se fait sans remise.
 b. Dans quel cas les événements A et B sont-ils indépendants ?
 c. Dans ce cas, montrer que $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.



Retenir

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire et p une probabilité définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$. Soit A un événement tel que $p(A) \neq 0$ et B un autre événement.

• L'événement noté (B/A) est l'ensemble des éventualités pour lesquels B est réalisé sachant que A est déjà réalisé. On l'appelle l'événement B conditionné par A et il se lit «B sachant A».

$$\bullet p(B/A) = \frac{\text{card}(B \cap A)}{\text{card}(A)} = \frac{p(B \cap A)}{p(A)}; p(A \cap B) = p(B/A) \times p(A)$$

• $p(B/A)$ est encore noté $p_A(B)$,

• A et B sont indépendants si et seulement si (B/A) et B sont réalisés par les mêmes éventualités et ainsi $p(B/A) = p(B)$; soit $p(B \cap A) = p(B) \times p(A)$.

Exemple

On tire d'un sac contenant dix jetons dont 4 sont de couleur rouge et 6 de couleur blanche, successivement deux jetons du sac, sans remise.

a) Calculons la probabilité de tirer un jeton rouge au premier tirage et un jeton blanc au deuxième tirage.

Si Ω est l'univers de toutes les éventualités liées à cette expérience aléatoire, alors

$$\text{card}(\Omega) = A_{10}^2 = 10 \times 9 = 90.$$

Soit les événements A : «le jeton tiré au premier tirage est rouge» et B : «le jeton tiré au deuxième tirage est blanc».

$$\text{Card}(A \cap B) = 4 \times 6 = 24 \quad , \quad p(A \cap B) = \frac{24}{90} = \frac{4}{15}.$$

Calculons autrement $p(A \cap B)$.

$$P(A \cap B) = p(B/A) \times p(A). \quad \text{Or } p(B/A) = \frac{6}{9} \text{ et } p(A) = \frac{4}{10}. \quad p(A \cap B) = \frac{6}{9} \times \frac{4}{10} = \frac{24}{90} = \frac{4}{15}$$

Le jeton tiré au deuxième tirage est blanc. Calculons la probabilité pour que le jeton tiré au premier tirage ait été rouge.

On demande de calculer la probabilité de l'événement (A/B) .

Soit e_1 l'ensemble des éventualités dont le deuxième tirage est un jeton blanc.

$\text{Card}(\Omega_1) = 24 + (6 \times 6 - 6) = 54$. Soit A l'événement formé des éventualités de Ω_1 telles que le jeton rouge soit tiré au premier tirage. $\text{Card}(A) = 24$.

$$p(A) = \frac{24}{54} = \frac{4}{9}. \quad \text{D'où } p(A/B) = \frac{4}{9}.$$

Si le tirage avait été avec remise, les événements A et B auraient été indépendants et alors

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B).$$

Remarque

• Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- (a) : A et B sont indépendants ; (b) : A et $\bar{B}$ sont indépendants ; (c) : $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants ; (d) : $\bar{A}$ et B sont indépendants.

• Si $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ est une partition de l'univers Ω d'une expérience aléatoire alors pour tout événement A ,

$$P(A) = P(E_1) \times p(A/E_1) + p(E_2) \times p(A/E_2) + \dots + p(E_n) \times p(A/E_n).$$

Cette relation est appelée formule des probabilités totales ou théorème des Bayes ou encore théorème des probabilités totales.



S'exercer

2.I Une urne contient 6 boules rouges et 4 boules blanches.

a) On tire au hasard et sans remise, 2 boules de l'urne.

b) Déterminer la probabilité d'obtenir deux boules rouges.

On tire au hasard deux boules et on constate qu'elles sont rouges.

Quelle est la probabilité de tirer à nouveau deux boules et d'obtenir deux boules rouges ?

2.j Une machine est constituée de deux éléments A et B . La défectuosité d'un seul élément suffit à mettre hors service la machine et on exclut toute éventualité de panne. Les avaries éventuelles relatives aux éléments A et B sont deux événements indépendants de probabilités respectives $a=0,1$ et $b=0,2$. Calculer la probabilité pour que la machine soit hors service.

2.k Un atelier de montage reçoit des pièces qui proviennent soit de l'usine A , soit de l'usine B , soit de l'usine C . Les proportions sont 45% pour A , 30% pour B , 25% pour C . Parmi les pièces provenant de A , il y en a 3% de défectueuses ; parmi celles provenant de B , il y en a 5% de défectueuses et parmi celles provenant de C , il y en a 2% de défectueuses. Calculer le pourcentage de pièces défectueuses dans l'ensemble des pièces reçues.

LEÇON 3 VARIABLES ALÉATOIRES.

- Savoir définir et utiliser la loi de probabilité d'une variable aléatoire;
- Savoir utiliser la loi d'une variable aléatoire pour le calcul des probabilité, de l'espérance mathématique de variance, de l'écart type; ;
- Maîtriser et se servir en particulier des résultats sur la variable aléatoire d'une épreuve répétée de Bernoulli et sa loi binomiale.

3.1 PRÉSENTATION

Prendre un bon départ

Un joueur jette trois fois de suite une pièce de monnaie parfaite et considère les faces apparues. Soit Ω l'univers associé à cette épreuve.

a) Donner cinq éventualités, puis donner le nombre de cas possibles de l'épreuve.

La sortie de « Face » fait gagner 1000 francs alors celle de « Pile » fait perdre 600 francs.

Soit X l'application définie sur Ω , qui à une éventualité fait correspondre le gain algébrique du joueur.

b) Calculer $X(FFF)$; $X(PFP)$; $X(FPP)$.

c) Écrire l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X sur Ω .

Retenir

Soit Ω l'univers de toutes les possibilités issues d'une épreuve aléatoire.

Toute relation X qui associe une valeur réelle à chacune des éventualités issue de l'épreuve est appelée variable aléatoire sur Ω .

L'ensemble des valeurs possibles de X sur Ω est appelé univers image de Ω par X et est noté $X(\Omega)$.

Exemple

Un sac contient 6 boules indiscernables au toucher dont 4 boules rouges et deux vertes.

Un joueur tire simultanément 3 boules du sac. L'obtention d'une boule rouge donne (-3) points et celle d'une boule verte donne 5 points.

Soit Y le gain algébrique du joueur.

Donner les valeurs possibles de Y .

Soit Ω l'univers associé à l'épreuve : $\text{Card}(\Omega) = C_6^3 = 20$ c'est le nombre de cas possibles.

Dans l'urne on a : R, R, R, R, V, V

À l'issue de cette épreuve, le joueur peut avoir :

- trois boules rouges $\{R, R, R\}$; $Y(\{R, R, R\}) = -9$
- deux boules rouges et une boule verte $\{R, R, V\}$; $Y(\{R, R, V\}) = -1$
- une boule rouge et deux boules vertes $\{R, V, V\}$; $Y(\{R, V, V\}) = 7$

Donc les valeurs prises par Y sont $-9; -1$ et 7 . Soit l'univers image $Y(\Omega) = \{-9, -1, 7\}$



S'exercer

3.a On lance deux fois de suite un dé normal dont les faces portent les numéros 1, 2, 3, 4, 5, 6. Soit X la variable aléatoire qui à une éventualité (a, b) , associe $|a - b|$ où a et b sont les numéros obtenus au premier et au deuxième lancé du dé. Donner l'ensemble des valeurs prises par X .

3.2 LOI DE PROBABILITÉ ET FONCTIONS ASSOCIÉES À UNE VARIABLE ALÉATOIRE



Prendre un bon départ

Un joueur tire au hasard et simultanément quatre cartes d'un jeu de 32. Soit X est la variable aléatoire donnant le nombre d'« as » contenus dans une main de 4 cartes tirées.

a) Déterminer l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X .

Soit a un réel quelconque. L'événement $(X = a)$ est constitué des éventualités ayant pour image par X .

b) Calculer la probabilité de chacun des événements :

$$(X = 2); (X < 3); (X \geq 3); (X = 7).$$

c) Calculer toutes les probabilités $p(X = a)$ où a décrit $X(\Omega)$.

d) Dresser et compléter un tableau à deux lignes dont la première est constituée des valeurs prise par X (classées par ordre croissant), et la deuxième, des probabilités

$p(X = a)$ où a est le nombre réel de la première ligne de la colonne correspondante.

e) Comme pour le tableau des fréquences d'une série statistique $(a, P(X = a))$, où

$P(X = a)$ est la fréquence de modalité $(X = a)$ liée à a .

Calculer la moyenne $\bar{X}$, la variance $V(X)$, l'écart-type $\sigma(X)$ de X .



Retenir

Soit X une variable aléatoire sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$; $x_1; x_2; \dots; x_n$ les valeurs possibles de X sur Ω ; $p_i = p(X = x_i)$.

- Déterminer la loi de probabilité ou encore la distribution de probabilité de la variable X est équivalent à déterminer les valeurs possibles de X et toutes les probabilités p_i .
- Après calculs, les résultats peuvent être consignés dans un tableau comme suit :

x_1	x_2	x_3					x_n
$p_i = p(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3				p_n

- $\bar{X} = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \dots + x_n \times p_n$; La moyenne $\bar{X}$ notée encore $E(X)$, de la série (x_i) , est appelée espérance mathématique de la variable aléatoire X .
- $V(X) = p_1 \times (x_1 - \bar{X})^2 + \dots + p_n \times (x_n - \bar{X})^2$;
- $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = (p_1 \times (x_1)^2 + \dots + p_n \times (x_n)^2) - (E(X))^2$. (Formule de KOENIG)
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarque

Soient X et Y deux variables aléatoires sur Ω , a un nombre réel.

$X+Y$ et aX sont aussi des variables aléatoires sur Ω et

- $E(a) = a$;
- $E(aX) = aE(X)$;
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$;
- $V(a) = 0$;
- $V(aX) = a^2V(X)$;

Si X et Y sont indépendantes, alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

Exemple

On tire simultanément et au hasard 4 boules d'un sac contenant 10 boules dont 4 sont de couleur verte et le reste de couleur rouge. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de boules vertes obtenues à l'issue de l'épreuve.

Si Ω est l'univers de toutes les possibilités, alors $\text{card}(\Omega) = C_{10}^4 = 210$.

et $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4\}$

$$p(X=0) = \frac{C_6^4}{C_{10}^4} = \frac{15}{210} = \frac{5}{70}; \quad p(X=1) = \frac{C_4^1 \times C_6^3}{C_{10}^4} = \frac{80}{210} = \frac{8}{21};$$

$$p(X=2) = \frac{C_4^2 \times C_6^2}{C_{10}^4} = \frac{90}{210} = \frac{3}{7}; \quad p(X=3) = \frac{C_4^3 \times C_6^1}{C_{10}^4} = \frac{24}{210} = \frac{8}{70};$$

$$p(X=4) = \frac{C_4^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{210}.$$

Tableau des valeurs de la distribution de probabilité P_x de X .

a	0	1	2	3	4
$P(x=a)$	$\frac{5}{70}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{8}{70}$	$\frac{1}{210}$

$$E(X) = 0 \times \frac{15}{210} + 1 \times \frac{80}{210} + 2 \times \frac{90}{210} + 3 \times \frac{24}{210} + 4 \times \frac{1}{210} = \frac{336}{210} = \frac{56}{35}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{15}{210} + 1^2 \times \frac{80}{210} + 2^2 \times \frac{90}{210} + 3^2 \times \frac{24}{210} + 4^2 \times \frac{1}{210} = \frac{660}{210} = \frac{22}{7}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{22}{7} - \left(\frac{56}{35}\right)^2 = \frac{22}{7} - \frac{3136}{1225} = \frac{22}{7} - 2,56 = 4,08/7$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{4,08}{7}}$$



S'exercer

3.b Une urne opaque contient 5 boules indiscernables au toucher : deux boules sont rouges et portent le chiffre 1, deux boules sont vertes et portent le chiffre 2 ; la dernière est blanche et porte le chiffre 3.

On tire simultanément trois boules de l'urne.

a) Déterminer le nombre de tirages possibles.

b) Calculer les probabilités des événements suivants:

A : " tirer exactement deux boules rouges " ;

B : " tirer trois boules de couleurs différentes " ;

C : " tirer une boule blanche ".

c) Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque éventualité, la somme des chiffres portés par les boules tirées.

(i) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X .

(ii) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

(iii) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de X .

3.c Une usine rectifie des pièces d'horlogerie. A l'issue du processus de fabrication, une pièce peut présenter 0, 1, 2 ou 3 défauts d'aspect.

3.d Soit X la variable aléatoire ayant pour valeur le nombre de défauts d'une pièce tirée au hasard dans un lot. La loi de X est définie par le tableau suivant :

a	0	1	2	3
$P(x=a)$	0,920	0,06	0,016	0,004

Calculer l'espérance mathématique de X .

Calculer la variance et l'écart type de X .

Le prix de vente d'une pièce dépend du nombre de défauts qu'elle présente.

Nombre de défauts	0	1	2	3
Prix de vente (en francs)	15 000	10 000	7 500	2 500

Soit Y la variable aléatoire prenant pour valeur le prix de vente d'une pièce choisie au hasard dans un lot.

Déterminer la loi de probabilité de Y .

Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de Y .

3.3 FONCTION DE RÉPARTITION D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE.

Prendre un bon départ

Soit X une variable aléatoire dont les valeurs de la loi de distribution de probabilité sont données dans le tableau ci-dessous:

a	0	1	2	3	4
$P(X=a)$	$\frac{5}{70}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{8}{70}$	$\frac{1}{210}$

a) Calculer les probabilités des événements suivants :

$(X \leq a)$ pour a pris dans l'ensemble $\{0;1;2;3;4\}$.

b) Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = p(X \leq x)$ est constante sur les intervalles $]-\infty; 0[; [0; 1[; [1; 2[; [2; 3[; [3; 4[; [4; +\infty[$. (On précisera la valeur de la constante sur chacun de ces intervalles).

c) Construire la représentation graphique de la fonction F dans un repère orthogonal (O, I, J) en prenant les unités convenables sur les axes de coordonnées.

Retenir

Soit X une variable aléatoire sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire telle que

$X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \dots < x_n$.

• La fonction de répartition de X est la fonction F de $\mathbb{R}$ dans $[0; 1]$ définie par :

$$F(x) = p(X \leq x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

• F est une fonction en escalier et croissante, sur $\mathbb{R}$.

• Si la distribution de probabilité de X a pour valeurs, celles du tableau ci-dessous

x_i	x_1	x_2	x_3					x_n
$p(x = x_i) = p_i$	p_1	p_2	p_3					p_n

alors, sur $]-\infty; x_1[$, $F(x) = 0$; sur $[x_1; x_2[$, $F(x) = p_1$;

sur $[x_2; x_3[$, $F(x) = p_1 + p_2; \dots$; sur $[x_i; x_{i+1}[$, $F(x) = p_1 + p_2 + \dots + p_i$

$[x_n; +\infty[$, $F(x) = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$.

Note: On peut dresser le tableau des valeurs de F

Exemple

Un sac contient 6 boules indiscernables au toucher dont 4 boules rouges et deux vertes.

Un joueur tire simultanément 3 boules du sac. L'obtention d'une boule rouge donne -3 points et celle d'une boule verte donne 5 points.

Soit Y le gain algébrique du joueur.

Y peut prendre les valeurs -9; -1 ou 7.

Déterminons la loi de probabilité de Y .

$$p(Y = -9) = p(\{R; R; R\}) = \frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}; \quad p(Y = -1) = p(\{R; R; V\}) = \frac{C_4^2 \times C_2^1}{C_6^3} = \frac{3}{5};$$

$$p(Y = 7) = p(\{R; V; V\}) = \frac{C_4^1 \times C_2^2}{C_6^3} = \frac{1}{5}.$$

Soit F la fonction de répartition de Y . F est définie par :

pour $x < -9$, $F(x) = 0$; pour $-9 \leq x < -1$, $F(x) = \frac{1}{5}$; pour $-1 \leq x < 7$,

$$F(x) = \frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5}; \quad \text{pour } x \geq 7, \quad F(x) = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1.$$

S'exercer

3.e Une boîte contient 4 ampoules de 40 watts, 6 ampoules de 60 watts et 10 ampoules de 100 watts. On tire au hasard une ampoule de la boîte. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe la puissance exprimée en watts de l'ampoule obtenue.

a) Donner sous forme d'un tableau la loi de probabilité de X .

b) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de X .

c) Définir, puis construire la représentation graphique la fonction de répartition de X dans un repère orthogonal.

3.f Le président d'un club décide d'organiser une Tombola. Tous les billets, au nombre 500, sont vendus.

L'un des billets permet de gagner un lot d'une valeur de 62 000 francs, 9 billets permettent de gagner 7 000 francs, 50 billets permettent d'être remboursé, les autres sont des billets perdants.

1. Un joueur achète un billet. Exprimer en pourcentages :

a) La probabilité de gagner un lot de 7000 francs ;

b) La probabilité d'avoir un billet perdant.

2. Des billets sont vendus 500 francs l'unité. Calculer le gain de la trésorerie du club.

3. Le gain du joueur est la différence entre le montant du lot et le prix d'achat du billet. Ainsi, pour des billets remboursés, le gain est nul et, pour un billet perdant, le gain est négatif.

Soit X le gain du joueur.

a) Donner les valeurs possibles de X .

b) Donner la loi de probabilité de X .

c) Définir la fonction de répartition de X et la représenter graphiquement.

3.4 ÉPREUVES RÉPÉTÉES DE BERNOULLI.

3.4.1 Présentation.

Prendre un bon départ

Soit A un événement issu d'une épreuve aléatoire, dont la probabilité pour que A soit réalisé est p .

- a) Calculer la probabilité de l'événement $\bar{A}$.
- b) On répète la même épreuve 7 fois de façon identique et indépendante.

Soit l'événement E : «réaliser trois fois l'événement A ».

Une possibilité est par exemple $\bar{A}\bar{A}\bar{A}A\bar{A}\bar{A}\bar{A}$ qui signifie que A a été réalisé aux lancers 1; 5 et 7.

(i) Donner cinq autres listes contenant trois fois A . Montrer qu'il y a autant de listes contenant trois A que d'anagrammes de « $\bar{A}\bar{A}\bar{A}A\bar{A}\bar{A}\bar{A}$ » et que le nombre de telles listes est C_7^3 .

(ii) En déduire que $p(E) = C_7^3 \times p(\bar{A}\bar{A}\bar{A}A\bar{A}\bar{A}\bar{A})$.

(iii) Les épreuves étant indépendantes, montrer que

$$p(\bar{A}\bar{A}\bar{A}A\bar{A}\bar{A}\bar{A}) = (p(A))^3 \times (p(\bar{A}))^4 = p^3 \times (1-p)^4.$$

(iv) En déduire que $p(E) = C_7^3 \times p^3 \times (1-p)^4$.

Retenir

Soit A un événement issu d'une épreuve aléatoire dont la probabilité de réalisation est p .

Si on répète cette épreuve n fois de suite, de manière indépendante et dans les mêmes conditions, alors la probabilité p_k de réaliser k fois l'événement A est

$$p_k = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{(n-k)} \text{ où } 0 \leq k \leq n.$$

Cette épreuve répétée est dite de Bernoulli, et le couple $(n; p)$ en est le paramètre.

Exemple

Un sac contient 8 jetons indiscernables au toucher dont 5 jetons de couleur noire. On tire simultanément 6 jetons du sac.

Calculons la probabilité d'obtenir exactement trois jetons noirs.

$$\text{Soit } p \text{ cette probabilité. } p = \frac{C_5^3 \times C_3^3}{C_8^6} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}.$$

On répète 10 fois de suite de façon identique et indépendante le triage simultané au hasard de 6 jetons du sac. Calculons la probabilité d'obtenir exactement 6 fois, 3 jetons noirs à l'issue de l'épreuve

On a ici une épreuve répétée de paramètre $\left(10; \frac{5}{14}\right)$. Le succès c'est obtenir 3 jetons noirs à l'issue d'une épreuve. la probabilité p d'avoir 6 fois " trois jetons noirs " est

$$p = C_{10}^6 \times \left(\frac{5}{14}\right)^6 \times \left(1 - \left(\frac{5}{14}\right)\right)^4 = C_{10}^6 \times \left(\frac{5}{14}\right)^6 \times \left(\frac{9}{14}\right)^4 \quad (\text{on peut écrire le résultat sous forme d'une fraction irréductible ou en donner une valeur approchée}).$$

On tire n fois de suite de façons identiques et indépendantes 6 jetons de l'urne.

Calculer la probabilité P_n de l'événement E

" obtenir au moins une fois trois jetons de couleur noire ".

L'événement contraire de E est $\bar{E}$ " obtenir zéro fois trois jetons de couleur noire ".

$$p(E) + p(\bar{E}) = 1. \text{ Or } p(\bar{E}) = C_n^0 \times \left(\frac{5}{14}\right)^0 \times \left(\frac{9}{14}\right)^n = \left(\frac{9}{14}\right)^n \text{ d'où } p(E) = 1 - \left(\frac{9}{14}\right)^n.$$

Déterminons le nombre minimum de fois pour répéter l'épreuve pour que la probabilité de E soit au moins égale à 0,95.

Pour avoir $p(E) \geq 0,95$, il faut que $1 - \left(\frac{9}{14}\right)^n \geq 0,95$; soit $\left(\frac{9}{14}\right)^n \leq 0,05$.

$$\text{D'où } \ln\left(\left(\frac{9}{14}\right)^n\right) \leq \ln(0,05) \text{ ou encore } n \times \ln\left(\frac{9}{14}\right) \leq \ln(0,05).$$

$$n \geq \frac{\ln(0,05)}{\ln\left(\frac{9}{14}\right)} ; \text{ soit } n \geq 6,78. \text{ La valeur minimale de } n \text{ est } 7.$$



S'exercer

3.e On tire simultanément au hasard quatre cartes d'un jeu de 32 cartes.

Calculer la probabilité d'obtenir au moins un as.

On répète cette expérience 5 fois de suite de façons identiques et indépendantes.

Calculer la probabilité d'avoir :

(i) exactement deux fois au moins un as.

(ii) au moins une fois, au moins un as.

(iii) aucune fois, au moins un as.

3.f On lance 10 fois de façons identiques et indépendantes de suite un dé cubique équilibré dont 2 faces portent le numéro 3.

Calculer la probabilité d'obtenir exactement trois fois une face portant le numéro 3.

3.g Un sac contient dix boules rouges et 2 boules blanches.

On tire simultanément trois boules du sac.

Calculer la probabilité d'avoir les boules de couleurs différentes.

On répète cette expérience trois fois de suite de façons identiques et indépendantes. Calculer la probabilité d'avoir exactement deux fois des boules de couleurs différentes.

3.h Combien de fois faut-il lancer de façons identiques et indépendantes un dé cubique, équilibré, dont une seule face porte le numéro 5 pour que la probabilité d'obtenir la face portant le numéro 5 au moins une fois soit supérieure ou égale à 0,9 ?

3.4.2 Espérance mathématique et variance de la variable aléatoire associée à une épreuve répétée de Bernoulli.



Prendre un bon départ

Soit A un événement d'une épreuve aléatoire, dont la probabilité pour qu'il soit réalisée est p .

On répète de façon identiques et indépendantes cette épreuve n fois.

Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois que

l'événement A a été réalisé à l'issue de l'épreuve..

a) Donner les valeurs de X .

b) Donner en fonction de k, n et p l'expression de la probabilité de l'événement ($X = k$)

où $0 \leq k \leq n$.

c) Soit X_i le nombre de fois que l'événement A a été réalisé à la i -ième épreuve.

(i) Montrer que les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots$ et X_n sont indépendantes.

(ii) Montrer que $E(X_i) = p$ et $V(X_i) = p(1 - p)$.

(iii) Montrer que $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

(iv) En déduire que $E(X) = n \times p$ et que $V(X) = n \times p \times (1 - p)$.



Retenir

Si une épreuve est répétée n fois de suite de façon identique et indépendante, A un événement de l'épreuve élémentaire dont la probabilité pour qu'il soit réalisé est p

X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois que

l'événement A a été réalisé à l'issue de l'épreuve répétée, alors

- X peut prendre les valeurs entières de l'intervalle $[0; n]$.
- Pour tout entier k de $[0; n]$, $p(X = k) = C_n^k \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$.
- La loi de probabilité de X est appelée loi de distribution binomiale de paramètre $(n; p)$.
- Si une variable aléatoire suit la loi binomiale de paramètre $(n; p)$, alors

$$E(X) = n \times p, \quad V(X) = n \times p \times (1 - p) \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \sqrt{n \times p \times (1 - p)}$$

Exemple

On lance un dé cubique, dont les faces portent respectivement les numéros 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 et tel que la probabilité d'obtenir un numéro k est proportionnelle à k .

a) Calculons la probabilité d'obtenir la face portant le numéro 5.

Notons par p_k la probabilité d'obtenir la face portant le numéro k .

On a $\frac{p_1}{1} = \frac{p_2}{2} = \dots = \frac{p_6}{6}$ et $p_1 + p_2 + \dots + p_6 = 1$.

On peut écrire aussi : $\frac{p_1}{1} = \frac{p_2}{2} = \dots = \frac{p_6}{6} = \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_6}{1+2+3+4+5+6} = \frac{1}{21}$.

Il vient que $p_5 = \frac{5}{21}$.

On lance ce dé 15 fois de suite et X est la variable aléatoire qui donne le nombre de fois que le nombre 5 est obtenu.

b) Calculons l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X .

X suit la loi binomiale de paramètre $\left(15; \frac{5}{21}\right)$.

$$E(X) = 15 \times \frac{5}{21} = \frac{75}{21}; V(X) = 15 \times \frac{5}{21} \times \frac{16}{21} = \frac{1200}{21^2}; \sigma(X) = \sqrt{\frac{1200}{21^2}} = \frac{20}{21} \times \sqrt{3}.$$



S'exercer

3.e À chaque tir, la probabilité qu'un joueur touche la cible est 0,7. Un joueur effectue 10 tirs successifs avec le même matériel. Soit X la variable aléatoire qui associe le nombre de fois qu'il atteint la cible.

(i) Donner les valeurs possibles de X .

(ii) Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de X .

3.f On a constaté que dans une famille monogame, la probabilité lors d'une naissance d'avoir un garçon est de $\frac{5}{9}$.

(i) Calculer la probabilité d'avoir trois garçons exactement après 6 naissances ;

(ii) Calculer le nombre moyen de filles que cette famille peut espérer avoir après 5 naissances (on suppose qu'il y a un seul nouveau né au cours d'une naissance).

S'ENTRAÎNER

PROBLÈMES DE DÉNOMBREMENT

1. Combien de manières peut-on garer 2 voitures dans un parking qui a 5 places ?
Combien de manières peut-on garer 3 voitures dans un parking qui a 5 places ?
2. Une commune compte 20 conseillers municipaux et on voudrait former un bureau comprenant un maire et ses trois adjoints. Sachant qu'il n'y a pas de cumul de postes, déterminer le nombre de possibilités qu'on a de constituer un tel bureau.
Combien de possibilités a-t-on de constituer un bureau dans lequel madame Koné est maire ?
3. Combien de nombres à quatre chiffres peut-on former avec les chiffres 2, 6, 7, 8, 9 ?
Combien de tels nombres sont pairs ?
4. Une marque d'automobiles produit 4 modèles A, B, C et D. Les modèles A et B se font en quatre carrosseries : berlines, coupé, cabriolet et utilitaire. Les modèles C et D se font en deux carrosseries : coupé et berlines. Chaque modèle est vendu en sept coloris. Calculer le nombre de choix qui s'offrent à un client désirant acheter une voiture de cette marque.
5. Un touriste doit visiter les villes B, C, D, E partant de la ville A.
1. Déterminer le nombre total de possibilités d'itinéraires pour ce touriste.
2. Combien a-t-il d'itinéraires s'il doit passer par la ville C avant la ville D ?

6. On tire au hasard une boule d'une urne contenant une boule jaune J, une boule verte V et une boule rouge R. On remet la boule tirée dans l'urne avant d'effectuer le tirage suivant. Un résultat est un couple dont le premier élément est la boule tirée au premier tirage et le deuxième celle tirée au deuxième tirage.
a. Déterminer le nombre de résultats possibles.
b. Enumérer tous ces résultats.
c. Le tirage d'une boule jaune fait perdre 300 francs, celui d'une boule verte fait gagner 100 francs et celui d'une boule rouge fait gagner 200 francs. Donner les différents gains possibles pour celui qui effectue ces tirages.
7. Combien de nombres à six chiffres peut-on former dans lequel figure 2 fois le chiffre 4, 3 fois le chiffre 7 et une fois le chiffre 1.
8. On tire simultanément 6 cartes parmi 32. Déterminer le nombre de mains qui contiennent au plus 3 as.
9. Un étudiant possède 14 livres de quatre matières différentes : 4 livres de mathématiques, 5 d'économie, 3 de philosophie, 2 d'anglais. Il veut ranger ces livres sur une étagère.
1) De combien de façon peut-il le faire s'il ne tient pas compte des matières ?
2) De combien de façon peut-il le faire s'il range d'abord les livres d'anglais, puis ceux d'économie, puis ceux de mathématiques, et enfin ceux de philosophie ?
3) De combien de façons peut-il le faire s'il range les livres par matière ?
10. Une urne contient 13 boules indiscernables au toucher dont 6 blanches et 7 noires. On tire

simultanément trois boules du sac.
Déterminer le nombre de possibilités d'obtenir:
a) 3 boules blanches ;
b) 2 boules noires ;
c) au moins une boule blanche ;
d) au plus deux boules noires.

11

Un chef d'entreprise doit choisir 4 employés parmi 20 candidats dont 13 femmes et 7 hommes.

- a) Combien de choix s'offrent à ce chef ?
b) De combien de manières peut-il faire son choix sachant qu'il doit choisir au moins un homme et au moins une femme ?

12

Une assemblée qui compte 20 hommes et 15 femmes veut élire un comité de six membres.

- a) Combien de comités peuvent-ils être constitués ?
b) Déterminer le nombre de comités possibles si Mme ADA refuse de siéger avec Mr Stephen dans un même comité.

13

De combien de façons peut-on ranger 4 livres dans 6 étagères sachant qu'une étagère peut avoir 0, 1, ..., 10 livres ?

14

Quatre personnes se donnent rendez-vous au café du quartier. Ce quartier compte malheureusement quatre cafés. Déterminer le nombre de possibilités qu'ont ces personnes d'aller chacun dans un café pour qu'aucune d'entre elle ne rencontre aucune autre.

15

Deux véhicules A et B se présentent à une aire de péage comportant trois voies de passage ouvertes numérotées 1, 2, 3 de la gauche à la droite.

Déterminer grâce à un arbre de choix, le nombre de possibilités de passage de ces deux voitures.

CALCULS DES PROBABILITÉS

16

On lance une fois deux dés cubiques normaux dont les faces sont numérotées de 1 à 6 : l'un est blanc et l'autre est vert.

Le résultat d'un lancer est un couple $(x; y)$ où x est le numéro apparu sur le dé vert et y celui apparu sur la face supérieure du dé blanc.

- a. Combien y-a-t-il de résultats possibles ?
b. Quelle est la probabilité d'obtenir une éventualité de chaque épreuve ?
c. Soit S la somme des numéros obtenus.
(i). Donner les valeurs possibles de S .
(ii). Calculer la probabilité pour que S soit égale à 7.

17

Dans un jeu de 32 cartes, on appelle "main" toute combinaison de 5 cartes. On tire simultanément cinq cartes parmi les 32.

- 1) Combien de mains contiennent 3 rois ?
2) Combien de mains contiennent 3 piques ?
4) Combien de mains contiennent 3 cartes de la même couleur ?
5) Calculer la probabilité d'avoir une main contenant au moins un as.
6) Calculer la probabilité d'avoir une main contenant exactement un as et un pique.

18

Le personnel d'un hôpital est réparti en trois catégories : les médecins, le personnel soignant, le personnel administratif et technique.

Parmi les 350 membres du personnel de cet hôpital, 70 sont des hommes, 28 sont des médecins. De plus il y a deux fois moins de femmes médecins que d'hommes médecins.

1. Recopier et compléter ce tableau.

	hommes	femmes	total
Médecins			
Personnel soignant		230	250
Personnel technique et administratif			
total			350

- On choisit un personnel au hasard. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
- A : " Il est un soignant " ;
 - B : " elle est une femme médecin " ;
 - C : " elle est une femme ou un médecin "

Un sac contient 5 jetons : un bleu, deux rouges et deux verts. Le jeton bleu vaut 3 points, le rouge 2 points et le vert 1 point.

On tire au hasard un jeton du sac.

- a) Calculer la probabilité de tirer un jeton rouge ;
- b) Calculer la probabilité d'avoir au moins deux points.

On tire un jeton, puis un deuxième sans remettre le premier jeton dans le sac.

- a) Calculer le nombre de cas possibles
- b) Calculer les probabilités de chacun des événements :

- A : " Obtenir deux jetons de couleurs différentes "
- B : " Obtenir 4 points "
- C : " Obtenir 4 points avec deux jetons de couleurs différentes "
- D : " Obtenir au moins 4 points "

Une urne contient des boules blanches, noires et rouges. On tire une boule de l'urne. On note :

- A : " obtenir une boule blanche "
- B : " obtenir une boule ni blanche, ni rouge "
- C : " obtenir une boule noire ou une boule rouge "

A et B sont-ils incompatibles ?

B et C sont-ils incompatibles ?

A et C sont-ils incompatibles ?

A et C sont-ils contraires l'un de l'autre ?

Traduire par une phrase ne comportant pas de négation $\bar{A}$ et $\bar{B}$

Dans une classe de terminale scientifique, 10 élèves ont les livres de Mathématiques et d'Anglais, 9 élèves ont uniquement le livre d'Anglais et 5 n'ont pas du tout de livre.

Déterminer :

- a) L'effectif de cette classe

- b) Le pourcentage des élèves qui n'ont que le livre d'Anglais
- c) Le pourcentage des élèves qui n'ont pas le livre d'Anglais
- d) Le pourcentage des élèves qui ont au moins un des deux livres

22

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie. Le résultat de cette expérience est égal au nombre de fois où la pièce tombe sur pile, moins le nombre de fois où elle tombe sur face. Exemple : si la pièce est tombée sur " pile " au premier et au troisième lancer et sur " face " au deuxième, le résultat est égal à : $2 - 1 = 1$.

1. Énumérer (à l'aide d'un arbre de choix), toutes les éventualités, puis déterminer le nombre total de cas possibles associés à cette épreuve ?
2. Pour chacune de ces éventualités, calculer le résultat de l'expérience.

On fait l'hypothèse que la pièce est bien équilibrée et que les huit éventualités trouvées ci-dessus ont la même probabilité.

3. Quelle est la probabilité pour que le résultat soit égal à +3 ?, +1 ?, -1 ?, -3 ?

4. Le joueur gagne si pile a apparu plus de fois que face. Quelle est la probabilité pour que le joueur gagne ?

23

Un dé est truqué. La probabilité d'apparition de chaque face est donnée par le tableau :

Numéro	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,4	0,15	0,15	0,05	a	b

1. Quelle est la probabilité de voir apparaître un nombre n inférieur ou égal à 4 ?

Un nombre n strictement supérieur à 4 ?

2. Calculer a et b, sachant que l'apparition du n° 5 est 4 fois plus probable que celle du n° 6.

24

Un objet en série a un coût de production de 950 francs. Il peut présenter, à l'issue de sa fabrication, un défaut A, un défaut B, ou en même temps les défauts A et B. La garantie permet de faire les réparations aux frais du fabricant avec les coûts suivants :

100 francs pour le défaut A,
150 francs pour le défaut B,
250 francs pour les deux défauts.

On prélève un lot de 200 objets. Le défaut A est observé sur 16 objets, le défaut B sur 12 et 180 n'ont aucun défaut. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Nombre d'objets	Avec défaut A	Sans défaut A	total
Avec défaut B			
Sans défaut B			
Total			

Calculer le prix de revient d'un objet selon ses défauts éventuels.

Calculer la probabilité pour que le prix de revient d'un objet soit de 1200 francs.

25

On a administré un vaccin aux souris et aux lapins. Ces cobailles sont au nombre de 100. La probabilité pour que le vaccin réussisse sur une souris est 0,65 ; la probabilité pour que le vaccin réussisse sur un lapin est 0,5 ; la probabilité pour que le vaccin réussisse sur les souris uniquement est 0,35 ; la probabilité pour que le vaccin réussisse uniquement sur les lapins est 0,2 ; par ailleurs la probabilité que le vaccin ne réussisse pas du tout est 0,15.

Déterminer :

- L'effectif de chaque espèce de cobaille.
- La probabilité pour que le vaccin réussisse sur les deux espèces de bêtes.
- La probabilité pour que le vaccin réussisse sur une seule espèce de cobaille.

26

Les 37 élèves d'une classe de Terminale se répartissent de la façon suivante :

	Filles	Garçons
Apprennent l'anglais	18	10
N'apprennent pas l'anglais	5	4

1. On choisit un élève de cette classe au hasard. Quelle est la probabilité pour que ce

soit un garçon ? Une fille ? Une fille apprenant l'anglais ?

2. L'élève choisie étant une fille, déterminer la probabilité qu'elle apprenne l'anglais.

27

Un lot de pièces fabriquées contient 5% de pièces défectueuses. Un contrôleur choisit au hasard une pièce dans le lot. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit en bon état ?

28

Les organisateurs d'une tombola émettent 200 billets indiscernables au toucher. Parmi ces billets, 2 donnent droit à un prix de 1000 francs, 100 à un prix de 200 francs, et 20 à un prix de 50 francs. Les autres ne rapportent rien. Le premier participant choisit au hasard un billet, parmi les 200.

- Quelle est la probabilité pour qu'il gagne un lot de 1000 francs ?
- Quelle est la probabilité pour qu'il ne gagne rien ?
- Sachant que le prix du billet est de 100 francs, Quelle est la probabilité pour que le joueur fasse un bénéfice ?

29

Le livreur d'une maison de vente par correspondance vous apporte un colis au 3^e étage. Vous fouillez dans votre poche et lui donnez une pièce au hasard. Sachant que votre poche contenait exactement 2 pièces de 200 F, 3 de 500 F, 6 de 1000 F, 3 de 2000 F, 2 de 5000 F et 2 de 10000 F, quelle est la probabilité que le livreur vous dise merci ? N.B. Le livreur ne remercie que si le pourboire est au moins égal à 2000 F.

30

On lance deux fois de suite un dé bien équilibré et on gagne si l'écart entre les points marqués est 1 ou 2. Quelle est la probabilité de gagner ?

31

Au restaurant du lycée, les tables sont rondes et ont 5 places chacune. Pierre et Jean,

choisissent leurs places au hasard autour d'une table. Quelle est la probabilité pour qu'ils soient assis l'un à côté de l'autre ?

Indication : on peut utiliser un tableau pour représenter les positions respectives de Pierre et Jean.

32

On jette trois fois de suite une pièce de monnaie. On note, à chaque jet, la face visible : P pour Pile, F pour Face. On obtient ainsi une suite de trois lettres, par exemple FPF ou PFF, ou bien d'autres...

1. Combien de suite de trois lettres peut-on obtenir ? Indication : on peut faire un arbre.

2. Calculer la probabilité des événements suivants :

A : "obtenir trois fois la même lettre".

B : "obtenir une seule fois la lettre P".

C : "obtenir la lettre P suivi de la lettre F".

33

Un enfant de 16 mois joue avec 5 cartes sur lesquelles sont écrites les lettres A, B, C, D, E. Il dispose trois de ces cartes devant lui, au hasard, formant ainsi un "mot" de trois lettres. Quelle est la probabilité pour que, pensant déjà à son avenir, il ait ainsi écrit le mot BAC ?

Suggestion : on peut construire un arbre (ou du moins en esquisser quelques branches...)

34

Fabrice, Sébastien, Stéphanie, Caroline et Clara passent 4 jours au camping. Chaque soir, on tire à pile ou face pour savoir qui fera la vaisselle : si on tire "pile", c'est les garçons qui feront la vaisselle et les filles feront la vaisselle si on tire "face".

Calculer la probabilité des événements suivants :

A : "les garçons font la vaisselle le premier soir" ;

B : "les garçons font la vaisselle trois fois durant le séjour" ;

C : "Aucun groupe ne fait la vaisselle deux soirs consécutifs".

35

Une urne contient trois boules : une rouge, une verte, une bleue. On tire successivement deux boules de l'urne. Avant de tirer la deuxième boule, on remet dans l'urne la première boule obtenue. On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1. Donner la liste de tous les tirages possibles.

2. Calculer la probabilité des événements suivants :

A : "obtenir deux boules rouges".

B : "obtenir deux boules de même couleur".

C : "obtenir deux boules de couleurs différentes".

36

Un jeu de construction est constitué de cubes et de cylindres de couleur rouge, bleue ou verte. Il y a en tout 80 pièces dont 25 cylindres ;

15% des pièces sont des cubes rouges.

20% des cylindres sont bleus.

Il y a 5 fois plus de cubes bleus que de cylindres bleus et deux fois moins de cylindres verts que de cubes verts.

1. Combien y a-t-il de cubes ?

2. Recopier et compléter ce tableau :

	Bleu	Rouge	Vert	Total
Cubes				
Cylindres				
Total				80

3. On tire au hasard une pièce du jeu de construction ; calculer la probabilité des événements suivants :

A : "la pièce est rouge",

B : "la pièce est cubique et verte".

37

Un sondage est effectué auprès de 1 200 personnes partant en vacances à propos du lieu de séjour qu'elles préfèrent : mer, campagne ou montagne. On distingue deux catégories d'âges : moins de 35 ans, 35 ans et plus.

45% des personnes interrogées ont moins de 35 ans ;

22% des personnes interrogées préfèrent la campagne.

Parmi les " moins de 35 ans ", 310 préfèrent la mer et 120 préfèrent la montagne.

Parmi les " 35 ans et plus ", 180 préfèrent la montagne.

1. Calculer le nombre de personnes interrogées ayant moins de 35 ans. Calculer le nombre de personnes interrogées qui préfèrent la campagne.

2. Reproduire et compléter le tableau suivant, en remplissant d'abord la dernière colonne.

	Mer	Campagne	Montagne	Total
Moins de 35 ans				
35 ans et plus				
Total				1200

1. On interroge une personne au hasard.

a) Calculer la probabilité p_1 qu'elle préfère la mer.

b) Calculer la probabilité p_2 qu'il s'agisse d'une personne de moins de 35 ans préférant la mer.

2. La personne interrogée déclare préférer la montagne. Calculer la probabilité p_3 qu'elle ait 35 ans et plus.

38

Dans un grand magasin, il y a 120 pantalons à vendre dans les quatre tailles : S, M, L ou XL et dans les trois coloris : vert, bleu ou rouge. 50% des pantalons sont bleus et 20% des pantalons sont de taille S.

En taille S, il y a le même nombre de pantalons dans les trois coloris.

Il y a trois fois plus de pantalons dans la taille S que dans la taille XL.

En taille XL, il n'y a que des pantalons bleus. D'autres informations figurent dans le tableau ci-dessous.

	S	M	L	XL	Total
Vert		10			
Bleu			20		
Rouge		12	15		
Total					120

1. Recopier et compléter le tableau en justifiant les résultats obtenus.

2. Dans cette question, les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Un pantalon étant pris au hasard, calculer la probabilité des événements suivants :

A : " le pantalon est vert ",

B : " le pantalon est de taille L ",

C : " le pantalon est vert et de taille L ".

On choisit un pantalon au hasard parmi les verts. Quelle est la probabilité pour qu'il soit de taille L ?

39

Une usine d'horlogerie fabrique une série de montres. Certaines montres peuvent présenter un défaut x ou un défaut y.

Des études statistiques menées sur 10000 montres ont donné les informations suivantes : 10% des montres ont le défaut x;

Parmi les montres ayant le défaut x, 12% ont le défaut y;

Parmi les montres ne présentant pas de défaut x, 5% présentent le défaut y.

1. Compléter le tableau suivant après l'avoir reproduit.

Nombre de montres	Ayant le défaut x	N'ayant pas le défaut x	totaux
Ayant le défaut y			
N'ayant pas le défaut y			
Totaux			

2. On choisit au hasard une de ces 10000 montres, chacune de ces montres ayant la même probabilité d'être choisie.

Déterminer la probabilité de chacun des événements :

A : " La montre choisie présente le défaut x "

B : " la montre a le défaut y "

C : " la montre est sans défaut "

$D = A \cup B$ et $E = A \cap B$

40

Dans une entreprise, le tableau suivant repartit des salaires mensuels.

Salaires	6000	7000	10000	20000	35000
Effectifs	300	100	50	40	10

1. Calculer le salaire mensuel moyen.

2. On interroge une personne au hasard cette entreprise.

Calculer la probabilité des événements :

A : " son salaire mensuel est de 6000 "

B : " elle gagne au moins 10000 "

C : " son salaire n'atteint pas le salaire moyen "

On interroge, au hasard une personne dont le salaire mensuel est supérieur à 10000 francs.

1. Calculer la probabilité de l'événement :

"elle ne fait pas partie des personnels les plus numérés ".

42 Dans un collège 600 élèves, chaque élève étudie comme première langue vivante soit l'anglais, soit l'allemand, soit l'espagnol. Dans ce collège, il n'y a pas d'internes mais exclusivement des externes et des demi-pensionnaires. La répartition de l'ensemble des élèves est la suivante :

- 20% étudient l'allemand en première langue et parmi eux le quart sont demi-pensionnaires ;
- 70% étudient l'anglais en première langue et parmi eux, un septième sont demi-pensionnaires ;

• Le reste des élèves sont des externes qui ont choisi l'espagnol pour première langue.

Recopier et compléter le tableau suivant :

Première langue vivante	Nombre d'externes	Nombre de demi-pensionnaires	Total
Anglais			
Allemand			
Espagnol			
Total			600

2. On prend au hasard un élève dans ce collège. Calculer la probabilité de chacun des événements :

A : " l'élève est demi-pensionnaire " ;

B : " l'élève est externe et apprend comme première langue vivante l'anglais ou l'espagnol "

C : " l'élève apprend comme première langue l'espagnol et est externe "

D : " l'élève apprend comme première langue l'anglais et est demi-pensionnaire ".

43

Dans un aquarium, on prend un premier poisson, puis un second sans remettre le premier pris.

1. L'aquarium contient 4 poissons rouges et 2

poissons noirs.

a. Combien de couples de poissons peut-on obtenir ?

b. Quelle est la probabilité de l'événement

A : " Obtenir deux poissons noirs ".

c. Calculer la probabilité de l'événement B : " Obtenir deux poissons noirs "

d. Calculer la probabilité des événements $A \cup B$.

e. En déduire la probabilité d'obtenir deux poissons de couleurs différentes.

2. Il y a maintenant dans l'aquarium 4 poissons rouges et x poissons noirs ($x \geq 2$).

Calculer la probabilité de chacun des événements :

A : " obtenir deux boules noires "

B : " obtenir deux boules rouges "

C : " obtenir deux boules de couleurs différentes "

$$\text{Montrer que } p(C) = \frac{8x}{(x+4)(x+3)}.$$

43

On lance un dé cubique équilibré dont les faces portent les numéros 1, 2, ..., 6 respectivement et on tire une carte parmi quatre qui sont différentes .

a. Déterminer le nombre de possibilités d'avoir une carte et un numéro provenant d'une face de dé.

b. Calculer la probabilité d'avoir une carte et un nombre supérieur ou égal à trois.

44

Une urne contient 12 boules indiscernables au toucher dont 4 boules rouges, 5 boules noires et 3 boules vertes. On tire simultanément trois boules de cette urne.

a. Calculer le nombre de résultats possibles de cette expérience .

b. Calculer la probabilité d'avoir :

(i) des boules de même couleur ;

(ii) des boules de couleurs distinctes deux à deux ;

(iii) des boules de couleurs différentes.

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

45

Une classe de 36 élèves âgés de 16, 17 ou 18 ans comprend 22 garçons dont 18 âgés de 17 ans et 3 âgés de 18 ans. Il y a dans cette classe 6 filles âgées de 18 ans et une fille âgée de 16 ans.

1. Mettre les informations ci-dessus dans un tableau dont les deux entrées sont constituées des âges et du sexe respectivement.

2. Un élève est choisi au hasard.

Calculer la probabilité que ce soit :

- un garçon ;
- un élève âgé de 16 ans ;
- une fille âgée de 17 ans ;

3. Sachant que l'élève choisi est un garçon.

Calculer la probabilité qu'il ait 16 ans ;

17 ans ? 18 ans ?

46

On lance trois fois une pièce de monnaie bien équilibrée.

1. Quelle est la probabilité d'avoir trois fois pile ?

2. Quelle est la probabilité d'avoir deux fois pile sachant qu'on a obtenu pile au premier lancer ?

47

Une urne contient trois boules vertes, 2 jaunes, et 4 bleues. On tire au hasard une boule de l'urne, que l'on ne remet pas dans l'urne, puis on tire au hasard une seconde boule.

1. Calculer la probabilité de tirer ainsi successivement :

- a) Deux boules vertes ;
- b) Une boule jaune, puis une boule verte ;
- c) Une boule bleue, puis une boule verte.

2. Calculer la probabilité de tirer une boule verte au second tirage.

3. Calculer la probabilité de tirer une boule jaune au second tirage.

4. Calculer la probabilité de tirer une boule bleue au second tirage.

48

On lance un dé non truqué.

Calculer la probabilité d'obtenir le chiffre :

- a) sachant que l'on a obtenu un résultat pair
- b) sachant que l'on a obtenu un multiple de 3

49

Un joueur lance un dé à six faces qui a été truqué. La probabilité de voir apparaître chacun des six faces est donnée par le tableau suivant :

numéro	1	2	3	4	5
probabilité	0,4	0,15	0,15	0,05	a

1. Calculer a et b , sachant que l'apparition du numéro 5 est quatre fois plus probable que celle du 6.

2. Calculer la probabilité de voir apparaître un numéro pair.

3. Calculer la probabilité de voir apparaître un numéro impair.

4. Calculer la probabilité que le numéro soit 5 sachant que c'est un numéro impair.

5. On considère les événements suivants :

A : "Obtenir un numéro pair".

B : "Obtenir un multiple de 3".

C : "Obtenir un nombre inférieur ou égal à 3".

Dire si les événements A et B d'une part, A et C d'autre part sont indépendants.

50

I) On tire au hasard et simultanément 4 cartes dans un jeu de 32.

Calculer la probabilité d'avoir exactement un pique, sachant qu'on a 3 cartes noires et une rouge.

II) On lance deux fois de suite un dé bien équilibré. Les événements A et B suivants sont-ils indépendants ?

a. A : "2 apparaît le premier" ; B : "3 apparaît en second".

b. A : "6 apparaît le premier" ; B : "6 apparaît deux fois".

c. A : "6 apparaît une fois" ; B : "1 apparaît une fois".

51

L'éclairage d'une pièce nécessite l'emploi de deux lampes A et B différentes. Les probabilités de défaillance de ces lampes pour

un laps de temps déterminé sont respectivement 0,12 pour A et 0,18 pour la lampe B.

On admet que ces événements sont indépendants.

1. Calculer la probabilité pour que les deux lampes tombent en panne.

2. En déduire la probabilité pour avoir au moins une lampe qui fonctionne.

3. Calculer la probabilité pour qu'une lampe, et une seule tombe en panne.

Les résultats seront donnés avec quatre décimales.

52

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes, puis, sans remettre, on en tire une seconde.

Soient A et B les événements :

A : " la première carte tirée est un pique "

B : " la seconde carte tirée est un pique "

C : " la seconde carte tirée est un cœur ".

Calculer les probabilités des événements

A, B, C, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$.

Les événements A et B, A et C, B et C sont-ils indépendants ?

53

Deux urnes A et B contiennent chacune 3 boules vertes et 2 jaunes.

1. On tire simultanément une boule de chaque urne. Calculer la probabilité de tirer deux boules vertes.

2. On tire une boule de l'urne A que l'on remet dans l'urne B, puis on tire une boule de l'urne B. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules vertes.

54

On tire une carte d'un jeu de 32 cartes. S'il s'agit d'un as, on la remet dans le jeu. S'il ne s'agit pas d'un as, on ne la remet pas dans le jeu.

On tire alors une seconde carte.

En utilisant la formule des probabilités totales, Calculer les probabilités des événements suivants :

A : " la première carte tirée est un as " ;

B : " la deuxième carte tirée est un as ".

55

Deux grossistes produisent des bulbes de tulipes ;

- Le premier, des bulbes à fleurs rouges dont 90% donnent une fleur ;

- Le second, des bulbes à fleurs jaunes dont 80% donnent une fleur.

Un horticulteur achète 70% des bulbes qu'il cultive au premier grossiste et le reste au second.

Un bulbe de tulipe donne au plus une fleur.

L'horticulteur plante un bulbe choisi au hasard.

Déterminer les probabilités des événements suivants :

a) obtenir une fleur rouge ;

b) obtenir une fleur jaune ;

c) ne pas obtenir de fleur.

VARIABLES ALÉATOIRES.

56

Une boîte contient six boules numérotées de 1 à 6. Une deuxième boîte contient quatre boules numérotées de 1 à 4.

1. On prélève au hasard une boule de la première boîte, puis une autre de la deuxième boîte. Calculer le cardinal de l'univers associé cette épreuve.

2. Soit X la variable aléatoire représentant la valeur absolue de la différence des numéros portés par les boules tirées des deux boîtes.

a. Donner la distribution des probabilités de X.

b. Calculer la probabilité pour que les deux numéros soient identiques.

c. Calculer l'espérance mathématique, la variance de X.

d. Définir, puis représenter graphiquement la fonction de répartition de X.

e. On prélève une boule de la première boîte; on note son numéro, puis on la remet dans la deuxième boîte. On tire ensuite une boule de la

deuxième boîte, et on note son numéro.

Calculer la probabilité pour que les deux numéros notés soient identiques.

57

On dispose de trois urnes opaques A, B et C contenant respectivement :

A : "une boule rouge, une boule bleue et une boule verte" ;

B : "une boule rouge et deux vertes" ;

C : "deux boules bleues et une boule verte".

On tire au hasard une boule de chaque urne ; si une boule est verte, on gagne un point ; si aucune boule n'est verte ou deux boules sont vertes, on perd deux points ; si les trois boules sont vertes, on gagne n points où n est un entier naturel non nul.

Le nombre de points obtenus définit une variable aléatoire X .

1. Donner dans un tableau, la loi de probabilité de X .

2. Construire la représentation graphique de la fonction de répartition de X pour $n = 5$.

3. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X .

4. Déterminer n pour que l'espérance mathématique soit nulle.

5. Calculer alors la variance et l'écart type de X .

58

Une cible circulaire est composée de 3 zones concentriques rapportant 5, 3, 1 points.

Les probabilités d'atteinte de ces trois zones

sont dans l'ordre $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$.

Les résultats de deux tirs sont indépendants.

On tire deux fois. On note X la variable aléatoire prenant pour valeur la somme des points obtenus.

a. Définir la loi de probabilité de X .

b. Calculer l'espérance et la variance de X .

59

On lance deux fois de suite un dé cubique parfait dont les faces portent respectivement les numéros 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Soit X la variable aléatoire qui donne 0 si les numéros obtenus sont identiques, et le plus grand de ces numéros sinon.

a. Donner les valeurs possibles de X .

b. Donner dans un tableau à double entrée, la loi de X .

c. Calculer l'espérance mathématique, la variance de X .

d. Calculer la probabilité de l'événement : $2 \leq X \leq 5$.

60

Au cours d'une expérience sur le comportement des animaux, des rats doivent choisir entre 4 portes d'apparence identique, dont l'une est dite bonne et trois autres dites mauvaises. Chaque fois qu'il choisit une porte mauvaise, il reçoit une décharge électrique désagréable et est ramené à son point de départ, et cela jusqu'à ce qu'il choisisse la bonne porte.

1. Le rat n'a aucune mémoire.

Il choisit à chaque essai de façon équiprobable entre 4 portes.

Déterminer la probabilité des événements :

a) Le rat sort au bout de trois essais ;

b) Le rat sort au bout de 7 essais ;

c) Le rat sort en moins de 8 essais.

2. Cette fois-ci le rat a une mémoire parfaite.

À chaque nouvel essai, il évite les mauvaises portes choisies précédemment et il choisit de façon équiprobable entre celles qu'il n'a pas encore choisies. Le nombre d'essais définit ainsi une variable aléatoire.

a) Déterminer les valeurs possibles de X .

b) Déterminer la loi de X .

c) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de X .

61

Un sac opaque contient dix boules indiscernables au toucher dont 3 bleues, deux vertes, cinq rouges. On tire 3 boules l'une après

autre, en remettant à chaque fois la boule tirée dans le sac.

Soit Y la variable aléatoire qui prend la valeur 2 si le tirage est unicolore, 1 s'il est bicolore et 0 s'il est tricolore.

Donner la loi de Y , puis calculer son espérance mathématique, sa variance et son écart type.

62

Une urne contient 4 boules bleues, 2 boules vertes et n boules rouges, indiscernables au toucher. On tire au hasard deux boules de manière simultanée.

On désigne par X la variable aléatoire prenant comme valeur le nombre de boules rouges tirées.

1. Déterminer la loi de probabilité de X

lorsque $n = 0$, puis lorsque $n = 1$.

2. On suppose désormais que $n \geq 2$.

Déterminer la loi de probabilité de X .

Montrer que l'espérance mathématique de X

$$\text{est : } E(X) = \frac{2n}{n+6}.$$

Déterminer n de façon à obtenir $E(X) = 1$.

63

X est une variable aléatoire ayant la loi de probabilité suivante :

a	0	1	2	3
$P(X = a)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	b	$\frac{3}{8}$

1. Montrer que $b = \frac{1}{8}$.

2. Définir, puis construire la représentation graphique de la fonction de répartition de X .

3. Calculer la probabilité de l'événement :

$$X < 1 \text{ ou } X \geq 3.$$

4. En déduire $p(1 \leq X < 3)$

5. Calculer $E(X)$, puis $E(X^2)$.

2. Soit Y une nouvelle variable aléatoire définie par $Y = 2X + 5$.

a) Donner la loi de probabilité de la variable Y .

b) Calculer $E(Y)$, $V(Y)$.

64

On considère un dé cubique dont les faces portent les nombres $-2; -2; 1; 1; 2; x$. Chaque face a la même probabilité d'apparition.

On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque lancer du dé fait correspondre le nombre apparu.

1. Donner la loi de probabilité de X en fonction de x .

2. Déterminer l'espérance mathématique de X . Pour quelle valeur de x , cette espérance est-elle nulle

65

Une partie de loterie consiste à lâcher une bille dans un appareil qui comporte six portes de sortie, numérotées de 1 à 6. Soit X la variable aléatoire égale au numéro de la porte de sortie franchie par la bille.

Sa loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

k	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

Un joueur mise 200 francs.

Il reçoit 1200 francs si la bille franchit les portes 1 ou 6 ; 200 francs si cette bille franchit les portes 3 ou 4. Les portes 2 et 5 ne rapportent rien.

Le gain d'un joueur est la différence entre sa mise et ce qu'il reçoit ; soit (ce qu'il reçoit sa mise).

Soit Y la variable aléatoire représentant le gain d'un joueur à l'issue d'une partie.

1. Donner les valeurs possibles de Y .

2. Déterminer la loi de Y .

3. Le jeu est dit équitable si l'espérance de Y est nulle. Ce jeu est-il équitable ?

66

Une boîte contient 6 boules vertes et x boules blanches.

Un jeu consiste à tirer simultanément deux boules de la boîte. Si deux boules sont de même couleur, le joueur gagne 100 francs ; si elles sont de couleurs différentes, le joueur perd 100 francs.

Calculer la probabilité d'obtenir :

- deux boules de même couleur ;
- deux boules de couleurs différentes.

On note par X la variable qui, à chaque tirage de deux boules, associe le gain algébrique du joueur.

Exprimer en fonction de x , les probabilités des événements ($X=100$) et ($X=-100$).

Exprimer l'espérance mathématique $E(X)$ à l'aide de l'entier x .

Existe-t-il des valeurs de x pour lesquelles le jeu est équitable ?

ÉPREUVES RÉPÉTÉES DE BERNOULLI.

67

À chaque tir, la probabilité pour que le tireur touche la cible est 0,7. Il tire trois fois de suite et les trois tirs sont supposés indépendants.

Calculer les probabilités :

- pour qu'il touche la cible trois fois ;
- pour qu'il touche la cible deux fois exactement.

68

On lance deux dés, puis on totalise les points marqués.

- Calculer la probabilité d'avoir un total de points supérieur ou égal à 8.
- Au bout de 20 lancers, calculer la probabilité d'avoir obtenu exactement 10 fois un total supérieur ou égal à 8.

69

Une urne contient trois boules blanches et trois boules noires. On tire deux boules simultanément.

- Calculer la probabilité de tirer deux boules

blanches.

2. On procède à cinq tirages consécutifs de deux boules, les boules étant remises dans l'urne après chaque tirage.

Calculer la probabilité de tirer une fois et une seule deux boules blanches.

70

On lance six fois un dé ; quelle est la probabilité d'obtenir au moins trois fois un 1 ?

71

Combien de fois faut-il lancer un dé (non pipé) pour obtenir un (ou plusieurs) six avec une chance sur deux au moins.

72

On jette une pièce de monnaie parfaite. 6 fois.

- Trouver la probabilité pour obtenir autant de faces que de piles.
- En déduire la probabilité pour obtenir plus de faces que de piles.

73

L'expérience prouve qu'un certain canon a une chance sur deux de toucher un objectif.

- On tire n coups de ce canon. Calculer la probabilité pour que l'objectif soit touché au moins une fois.
- Calculer le nombre de projectiles qu'il faut tirer afin que l'objectif soit touché au moins une fois avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.

74

On répartit au hasard n boules dans cinq urnes. On suppose que la probabilité que la boule aille dans une urne est la même quelle que soit la boule et quelle que soit l'urne.

Calculer la probabilité pour qu'une urne donnée reçoive deux boules.

- Calculer la probabilité pour qu'une urne donnée reçoive k boules ($0 \leq k \leq n$).

Une urne contient 7 boules noires et une boule blanche.

On répète n fois le tirage d'une boule en remettant à chaque fois cette boule dans l'urne.

Comment choisir n pour tirer au moins une boule blanche avec au moins une chance sur deux ?

Même question dans le cas où la boule tirée n'est pas remise dans l'urne.

Un jeu consiste à lancer six fois de suite un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

On suppose que chaque face a la même probabilité d'apparaître en position supérieure. On désigne par S la variable aléatoire égale à la somme des numéros sortis.

1. Calculer les probabilités des événements suivants :

A : " $S \geq 8$ "; B : "le numéro du premier lancer est 4".

2. Calculer la probabilité de l'événement (A/B).

3. Définir et représenter la fonction de répartition de S .

4. Le gain algébrique X de la partie est de :

500 francs si $S \leq 4$;

0 francs si $5 \leq S \leq 8$;

-500 francs si $S \geq 9$.

5. Déterminer l'entier relatif n sachant que l'espérance mathématique X est nulle.

6. Quelle est la probabilité qu'un joueur gagne 500 francs en jouant cinq parties consécutives.

On dispose de 3 dés cubiques vert, jaune et rouge.

Le dé vert est normal : ses faces sont

numérotées de 1 à 6 et elles ont la même probabilité d'apparition.

Le dé jaune porte sur deux faces le nombre 6,

sur les quatre autres le nombre 1 ; toutes les

faces ont la même probabilité d'apparition.

Le dé rouge est pipé, de façon que la probabilité d'apparition de chaque face soit proportionnelle au nombre marqué sur cette face : les faces sont numérotées de 1 à 6.

1. Calculer pour chacun des dés, les

probabilités d'apparition de chaque numéro.

2. On lance simultanément les trois dés.

a. Montrer que la probabilité d'obtenir

trois " 6 " est $\frac{1}{63}$.

b. Calculer les probabilités d'obtenir :

- les nombres 1,3,5 ;

- trois nombres deux à deux distincts.

3. On lance 4 fois de suite les trois dés

simultanément. Soit X la variable aléatoire

égale au nombre de fois où les trois dés ont

leur face apparente sur 6.

Déterminer la loi de X .

Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

78

Un sac contient 9 jetons indiscernables au toucher : ce qui rend les tirages équiprobables.

Quatre boules sont blanches et numérotées de 1 à 4 et cinq boules sont noires et numérotées de 1 à 5.

1. On tire simultanément trois boules du sac.

Calculer la probabilité de chacun des événements :

A : " Toutes les boules sont blanches " ;

B : " Les boules sont de couleurs différentes " ;

C : " Il y a plus de boules blanches que de boules noires " ;

D : " les numéros sont impairs " ;

E : " il y a au moins un numéro pair " ;

2. L'épreuve est maintenant la suivante :

Du sac qui contient les neuf boules, on en tire au hasard une et on la replace dans le sac. On effectue ainsi 7 tirages successifs.

Déterminer la probabilité pour qu'au cours d'un tirage, on ait un numéro pair.

En déduire la probabilité d'obtenir exactement deux fois une boule portant un numéro pair au cours des 7 tirages.

SUJETS DE SYNTHÈSE

SUJET 1

Exercice 1

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = x^2 + 1 + \frac{2}{x}.$$

- 1) Dresser le tableau des variations de f . On précisera les limites aux bornes du domaine de définition.
- 2) Montrer que $f(x) \geq 0$ sur $]-\infty; -1] \cup]0; +\infty[$.

Partie B

Soit la fonction g définie sur

$$D =]-\infty; -1] \cup]0; +\infty[\text{ par } g(x) = \sqrt{f(x)}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de g dans un repère orthonormal.

- 1) (a) Montrer que g est dérivable sur $]-\infty; -1] \cup]0; +\infty[$.
b) Étudier alors les variations de la fonction g sur $]-\infty; -1] \cup]0; +\infty[$.
- 2) (a) Montrer que, pour tout $x < -1$,

$$\frac{g(x) - g(-1)}{x + 1} = -\sqrt{\frac{x^2 - x + 2}{x(x+1)}}.$$
 b) En déduire que la fonction g n'est pas dérivable en -1 .
c) Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -1 .
- 3) (a) Montrer que, pour tout réel x de D :

$$g(x) - x = \frac{1 + \frac{2}{x}}{\sqrt{x^2 + 1 + \frac{2}{x} + x}}.$$

- b) En déduire que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
- c) Montrer de même que la droite Δ' d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

Exercice 2

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Un joueur achète à 200F un billet permettant de participer à un jeu constitué d'un grattage suivi d'une loterie.

Il gratte une case sur le billet. Il peut alors gagner 1500F avec une probabilité de $\frac{1}{50}$ ou ne rien gagner.

G désigne l'événement : « le joueur gagne au grattage »

Il participe ensuite à une loterie avec le même billet. À cette loterie, il peut gagner 1500F ou 3000F ou bien ne rien gagner.

L_1 désigne l'événement : « Le joueur gagne 1500F à la loterie »

L_2 désigne l'événement : « Le joueur gagne 3000F à la loterie »

P désigne l'événement : « Le joueur ne gagne rien à la loterie »

Si le joueur n'a rien gagné au grattage, la probabilité qu'il gagne 1500F à la loterie est $\frac{1}{70}$ et la probabilité qu'il gagne 3000F à la loterie est $\frac{1}{490}$.

- 1) a) Faire un arbre sur lequel on indiquera les renseignements qui précèdent.
b) Calculer la probabilité pour que le joueur ne gagne rien à la loterie, sachant qu'il n'a rien gagné au grattage. Compléter l'arbre obtenu avec cette valeur.
c) Au bout de chaque branche, indiquer le gain algébrique total du joueur, après grattage et loterie, déduction faite du prix du billet.
- 2) On note X la variable aléatoire qui représente le gain algébrique total du joueur après grattage et loterie, déduction faite du

prix du billet.

La probabilité de l'événement « $X = 1300$ » est $\frac{2}{125}$.

La probabilité de l'événement « $X = 2800$ » est $\frac{1}{250}$.

- Montrer que la probabilité que le joueur gagne 1500F à la loterie, sachant qu'il a gagné 1500F est égale à $\frac{1}{10}$.
- Calculer la probabilité que le joueur ne gagne rien à la loterie, sachant qu'il a gagné 1500F au grattage.
- Déterminer la loi de probabilité de X . Calculer l'espérance de X . Ce jeu est-il équitable ?

Exercice 3

- 1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 e^{1-x}$.

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

- Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$; quelle conséquence graphique pour $\mathcal{C}$ peut-on en tirer ?
 - Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer sa fonction dérivée f' .
 - Dresser le tableau des variations de f et tracer la courbe $\mathcal{C}$.
- 2) Soit n un entier naturel non nul. On considère l'intégrale I_n définie par

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$$

- Établir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n .
 - Calculer I_1 , puis I_2 .
 - Donner une interprétation graphique du nombre I_2 . On la fera apparaître sur le graphique de la question 1. c.
- a. Démontrer que pour tout nombre réel x de $[0 ; 1]$ et pour tout entier naturel n non nul, on a l'inégalité suivante :
- $$x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$$

- b) En déduire un encadrement de I_n puis la limite de n quand I_n tend vers $+\infty$.

PROBLÈME

ABCD est un carré de sens direct de centre I. Soit J le milieu du segment [CD].

On désigne par s la similitude directe qui transforme A en I et B en J.

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de la similitude s . Dans la partie A on utilisera des raisonnements géométriques et dans la partie B on utilisera les nombres complexes.

Partie A

- Déterminer le rapport et l'angle de la similitude s .
- On désigne par Ω le centre de cette similitude. Γ_1 est le cercle de diamètre [AI], Γ_2 est le cercle de diamètre [BJ]. Démontrer que Ω est l'un des points d'intersection de Γ_1 et Γ_2 . Placer Ω sur la figure.
- Donner l'image par s de la droite (BC). En déduire le point image par s du point C, puis le point K image par s du point I.
- On pose $h = s \circ s$.
 - Donner la nature de la transformation h (préciser ses éléments caractéristiques).
 - Trouver l'image du point A par h . En déduire que les points A, Ω et K sont alignés.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère $(A ; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormal direct, choisi de manière à ce que les points A, B, C et D aient comme affixes respectives 0, 2, $2+2i$ et $2i$.

- Démontrer que l'écriture complexe de la similitude s est $z' = \frac{1}{2}iz + 1 + i$.
- Calculer l'affixe du point Ω .
- Calculer l'affixe du point E tel que $s(E) = A$. Placer le point E sur la figure.

SUJET 2

Exercice 1

Soit la fonction f définie par $f(x) = xe^{-x}$ sur $[0; +\infty[$.

On note Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 10 cm).

Partie A

- 1) a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
b. Étudier les variations de f et dresser son tableau des variations.
c. Construire Γ .
- 2) a. Montrer que pour tout réel m de l'intervalle $\left]0; \frac{1}{e}\right]$, l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions.
b. Dans le cas où $m = \frac{1}{4}$, on nomme α et β ses solutions, (avec $\alpha < \beta$). Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α .
c. Résoudre l'équation $f(x) = m$ dans le cas $m=0$ et $m = \frac{1}{e}$.

Partie B

- 1) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}$ où α est le réel défini à la question A. 2. b.
a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.
b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
c. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.
- 2) On considère la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \ln u_n$.
a. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $u_n = w_n - w_{n+1}$.
b. On pose $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Montrer que $S_n = w_0 - w_{n+1}$.

c) En déduire la limite de la suite (S_n) .

- 3) On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $v_0, v_0 > 0$, et pour tout entier n , par $v_{n+1} = v_n e^{-v_n}$. Existe-t-il une valeur de v_0 différente de 0 telle que, pour tout entier n , on ait $u_n = v_n$? Si oui, préciser laquelle.

Exercice 2

Partie A :

Étude d'une fonction auxiliaire g :

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1+2e^x),$$

- 1) Calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x)$ est strictement négatif pour tout x de $\mathbb{R}$.
- 2) Déterminer la limite de g en $-\infty$.
- 3) Dresser le tableau des variations de la fonction g . En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B :

Étude de la fonction f .

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x} \ln(1+2e^x)$.

- 1) Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel x , $f'(x) = 2e^{-2x} g(x)$.
- 2) En posant $X = 1 + 2e^x$, montrer que

$$f(x) = \frac{4X \ln X}{(X-1)^2 X}.$$

En déduire la limite de f en $+\infty$.

- 3) En posant $h = 2e^x$, calculer la limite de f en $-\infty$.
- 4) Dresser le tableau des variations de f .
- 5) On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).

Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

Tracez la courbe $\mathcal{C}$ et la tangente T .

Exercice 3

On se propose de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système

$$(S) \begin{cases} n \equiv 13 & (19) \\ n \equiv 6 & (12) \end{cases}$$

- 1) Démontrer qu'il existe un couple $(u; v)$ d'entiers relatifs tel que : $19u + 12v = 1$ (On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple).
Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$ est une solution de (S).

- a) Soit n_0 une solution de (S), vérifier que le système (S) équivaut à
$$\begin{cases} n \equiv n_0 & (19) \\ n \equiv n_0 & (12) \end{cases}$$

- b) Démontrer que le système
$$\begin{cases} n \equiv n_0 & (19) \\ n \equiv n_0 & (12) \end{cases}$$
 équivaut à $n \equiv n_0 \pmod{12 \times 19}$.

- 2) a. Trouver un couple $(u; v)$ solution de l'équation $19u + 12v = 1$ et calculer la valeur de N correspondante.
b) Déterminer l'ensemble des solutions de (S) (on pourra utiliser la question 2. b.).
3) Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13. On divise n par $228 = 12 \times 19$. Quel est le reste r de cette division ?

PROBLÈME

Le but de cet exercice est d'étudier une même configuration géométrique à l'aide de deux méthodes différentes.

Partie 1

Utilisant des nombres complexes

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 1 cm.

- 1) On considère les points A et B d'affixes respectives 10 et $5i$.
a) Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s qui transforme O en A

et B en O.

- b) Déterminer les éléments caractéristiques de s . On note Ω son centre.
c) Déterminer le point $(s \circ s)(B)$; en déduire la position du point Ω par rapport aux sommets du triangle ABO.
2) On note $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x - 2y = 0$, puis A' et B' les points d'affixes respectives $8 + 4i$ et $2 + i$.
a) Démontrer que les points A' et B' sont les projetés orthogonaux respectifs des points A et B sur la droite $\mathcal{D}$.
b) Vérifier que $s(B') = A'$.
c) En déduire que le point Ω appartient au cercle de diamètre $[A'B']$.

Partie 2

Utilisation des propriétés géométriques des similitudes.

OAB est un triangle rectangle en O tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}$.

- 1) On note encore s la similitude directe telle que $s(O) = A$ et $s(B) = O$. Soit Ω son centre.
a) Justifier le fait que l'angle de s est égal à $\frac{\pi}{2}$.
b) Démontrer que Ω appartient au cercle de diamètre $[OA]$. (On admet de même que Ω appartient aussi au cercle de diamètre $[OB]$).

En déduire que Ω est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OAB.

- 2) On désigne par $\mathcal{D}$ une droite passant par O, distincte des droites (OA) et (OB).
On note A' et B' les projetés orthogonaux respectifs des points A et B sur la droite $\mathcal{D}$.
a) Déterminer les images des droites (BB') et $\mathcal{D}$ par la similitude s .
b) Déterminer le point $s(B')$.
c) En déduire que le point Ω appartient au cercle de diamètre $[A'B']$.

SUJET 3**Exercice 1**

Déterminer l'intersection du plan (P) et la sphère (Γ) dans chaque cas.

a) $(P) : z = 3 ;$

$$(\Gamma) : x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 10z + 22 = 0.$$

b) $(P) : y = 1 ;$

$$(\Gamma) : x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 6z + 14 = 0.$$

c) $(P) : x = 5 ;$

$$(\Gamma) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 4 = 0.$$

Exercice 2

On considère la suite numérique (v_n) définie

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ par } \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{9}{6 - v_n} \end{cases}.$$

Partie A

1) a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 < v_n < 3$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}.$$

La suite (v_n) est-elle monotone ?

2) Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

Partie B

Recherche de la limite de la suite (v_n)

On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par $w_n = \frac{1}{v_n - 3}$.

1) Démontrer que (w_n) est une suite

arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.

2) En déduire l'expression de w_n , puis celle de v_n en fonction de n .

3) Déterminer la limite de la suite (v_n) .

Exercice 3

Montrer que les vecteurs

$\{(1;1;1), (-1;1;0), (1;0;-1)\}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer les coordonnées respectives des

vecteurs $(1;0;0)$, $(1;0;1)$ et $(0;0;1)$ dans cette base.

PROBLÈME

Pour tout réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur

$[0; +\infty[$ par $f_k(x) = \ln(e^x + kx) - x$. Soit C_k la courbe représentative de f_k dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unités : 5 cm sur l'axe des abscisses, 10 cm sur celui des ordonnées).

Étude préliminaire

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = \ln(1+x) - x$.

Étudier le sens de variation de g .

En déduire que, pour tout réel a positif ou nul, $\ln(1+a) \leq a$.

Partie A :

Étude de f_1

1) Calculer $f_1'(x)$ et en déduire le sens de variation de f_1 .

2) Montrer que pour tout $x \in$ sur $[0; +\infty[$,

$$f_1(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right). \text{ En déduire la limite de } f_1 \text{ en } +\infty$$

3) Dresser le tableau de variation de f_1 .

Partie B :

Étude et propriétés de f_k .

1) Calculer $f_k'(x)$ et en déduire le sens de variation de f_k .

2) Montrer que pour tout $x \in [0; +\infty[$,

$$f_k(x) = \ln\left(1 + k \frac{1}{e^x}\right). \text{ En déduire la limite de } f_k \text{ en } +\infty$$

3) a) Dresser le tableau de variation de f_k .

b) Montrer que pour tout $x \in [0; +\infty[$,

$$f_k(x) \leq \frac{k}{e}.$$

Déterminer une équation de la tangente à C_k au point d'abscisse 0 de C_k .

Soit p et m deux réels strictement positifs tels que $p < m$. Étudier la position relative de C_p et C_m .

Tracer les courbes C_1 et C_2 ainsi que leurs tangentes en 0.

SUJET 4

Exercice 1

- 1) Montrer que l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ est

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 2) Résoudre $\begin{cases} x+3y=a \\ x+4y=b \end{cases}$, et en déduire l'inverse

$$\text{de } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

- 3) Résoudre $\begin{cases} x+2y-z=a \\ 2x-y+2z=c \\ x-3y+z=c \end{cases}$ et en déduire

$$\text{l'inverse de } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

$(O; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal direct du plan complexe (unité graphique 1 cm).

On considère le point A d'affixe $z_A = 1+i$.

On note S_1 la symétrie orthogonale par rapport à l'axe $(O; \vec{u})$ et h l'homothétie de centre O et de rapport 3. On pose $s = h \circ S_1$.

Partie A

- Placer le point A et compléter la figure au fur et à mesure.
- Quelle est la nature de la transformation s ? Justifier.
- Déterminer l'écriture complexe de la transformation s .
- a) Déterminer l'affixe z_B du point B image de A par s .
b) Montrer que $z_B = -3iz_A$. Déterminer une mesure de l'angle $(\vec{OA}, \vec{OB})$.

- 5) Soient M le milieu de $[AB]$ et P l'image de M par s . Montrer que la droite (OP) est perpendiculaire à la droite (AB).

Partie B

- On pose $C = s(B)$. Montrer que P est le milieu de $[BC]$.
- a) Déterminer l'écriture complexe de $s \circ s$ et en déduire sa nature.
b) Montrer que l'image de la droite (OP) par s est la droite (OM).
c) Que représente le point M pour le triangle OBP? Justifier.

PROBLÈME

Partie A

Résolution de l'équation différentielle (E) :

$$y' - 2y = xe^x.$$

- Détermination d'une solution particulière :
Montrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax+b)e^x$ est solution de (E) si et seulement si, pour tout x réel : $-ax+a-b=x$. Déterminer a et b .
- Résolution de l'équation (E_0) : $y' - 2y = 0$.
Donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_0) .
- Détermination de l'ensemble des solutions de (E) :
Montrer qu'une fonction v définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $v-u$ est solution de (E_0) .
En déduire l'ensemble des solutions de (E).
- Déterminer la solution de l'équation (E) qui s'annule en 0.

Partie B

Étude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x - x - 2$.

- Calculer la limite de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
- Étudier le sens de variation de g , puis dresser son tableau de variation.
- a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a

exactement deux solutions réelles.

- Vérifier que 0 est l'une de ces solutions.
- L'autre solution est appelée α . Montrer que $-1,6 < \alpha < -1,5$.
- Déduire de ce qui précède le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie C

Étude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$.

- Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- Calculer $f'(x)$. Montrer que f' est du signe de g sur $\mathbb{R}$.
- En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que $f(\alpha) = \frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$, en déduire un encadrement de $f(\alpha)$, en utilisant l'encadrement de α obtenu à Partie B 3) c).
- Représenter graphiquement la courbe de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2cm).

SUJET 5

Exercice 1

Soit ABCD un tétraèdre régulier d'arête a et soit O son centre (i.e. l'isobarycentre de ses sommets).

- Montrer que deux arêtes opposées sont orthogonales.
- Soit A' le centre de la face BCD.
 - Montrer que O appartient à la médiane $[AA']$.
 - Exprimer $\overline{AO}$ en fonction de $\overline{AA'}$.
 - Montrer que $\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD} = 3\overline{AA'}$.
 - En déduire que les médianes du tétraèdre régulier sont aussi les hauteurs.
- Montrer que le plan médiateur de $[AB]$ est (ICD) où I est le milieu de $[AB]$.
 - Montrer que O appartient à (ICD).
 - En déduire que O est aussi le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre régulier.

Exercice 2

Soit f , la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2 + \cos x)e^{1-x}$.

- Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $f(x) > 0$.
- Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$.
 - En déduire que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $2 + \cos x + \sin x > 0$.
 - Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$.
 - En déduire les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
 - Interpréter géométriquement le résultat obtenu lors du calcul de la limite de f en $+\infty$.
- Montrer que, sur l'intervalle $[0; \pi]$, l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution α .
 - Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

Exercice 3

- Montrer que les vecteurs $\mathbf{x}_1 = (0, 1, 1)$, $\mathbf{x}_2 = (1, 0, 1)$ et $\mathbf{x}_3 = (1, 1, 0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver dans cette base les composantes du vecteur $\mathbf{x} = (1, 1, 1)$.
- Donner, dans $\mathbb{R}^3$, un exemple de famille libre, qui n'est pas génératrice.
- Donner, dans $\mathbb{R}^3$, un exemple de famille génératrice, mais qui n'est pas libre.

PROBLÈME

Soit f l'application de $]0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x + \frac{1}{2} \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$; et g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = 2e^{2x} - 5e^x + 2$.

Partie A

- Montrer que, pour tout x de $]0; +\infty[$: $f(x) = 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 1}$.
- Montrer que, pour tout x de $]0; +\infty[$:

$$f(x) = 2x - \frac{1}{2} + \frac{e^x}{e^x - 1}.$$

Résoudre l'équation $g(x) = 0$ puis factoriser $g(x)$.

Partie B

- 1) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
- 2) a. Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x + \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe (C) représentative de f .
b. Étudier la position de (C) par rapport à (D).
- 3) Montrer que la fonction dérivée de f est du signe de la fonction g de la partie A et dresser le tableau de variation de f .
- 4) Représenter (C) et ses asymptotes dans un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm)
- 5) a. Étudier graphiquement suivant les valeurs du nombre réel m , l'intersection de (C) et de la droite (D_m) d'équation $y = 2x + m$.
b. Démontrer par le calcul ces résultats (on pourra utiliser le A.1.).

Partie C

- 1) En reconnaissant la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$, déterminer les primitives sur $]0; +\infty[$ de la fonction : $x \mapsto \frac{e^x}{e^x - 1}$.
- 2) En déduire en utilisant A.2, les primitives sur $]0; +\infty[$ de $f(x) - (2x + \frac{1}{2})$.
- 3) Calculer l'aire du domaine plan limité par (C), (D) et les droites d'équation $x = \ln 2$ et $x = \ln 4$.

SUJET 6

Exercice 1

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- 1) Soient A, B et C trois points non alignés de l'espace. Montrer que l'ensemble des points M vérifiant $\|3\vec{MA} + \vec{MB}\| = \|2\vec{MA} + \vec{MC}\|$ est un

plan que l'on précisera.

- 2) Soient A(6 ; 0 ; 0) et B(0 ; 6 ; 0).
a) Déterminer le barycentre G du système de points $\{(O, 1), (A, 2), (B, 3)\}$.
b) Soit C(0 ; 0 ; 4) et soit S l'ensemble des points M(x ; y ; z) vérifiant l'équation vectorielle $(\vec{MO} + 2\vec{MA} + 3\vec{MB}) \cdot \vec{MC} = 0$. Déterminer avec et sans coordonnées l'ensemble S.
c) Déterminer l'intersection de S avec le plan d'équation $x = 0$.
- 3) Déterminer l'équation de la sphère Σ tangente au plan $x + y + z = 6$ et de centre $\Omega(3, 4, 5)$.

Exercice 2

- 1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation suivante : $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$.
- 2) On désignera par z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et par z_2 l'autre solution.
a) Déterminer la forme exponentielle des complexes z_1 et z_2 .
b) En déduire que $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$ est un réel.
- 3) On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 1 cm) les points M_2 , et A d'affixes respectives : $\sqrt{2}(1+i)$, $\sqrt{2}(1-i)$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
a) Placer les points dans le repère puis compléter la figure progressivement.
b) Déterminer l'affixe du point image de M_2 par l'homothétie de centre A et de rapport -3 .
c) Déterminer l'affixe du point M_4 image de M_2 par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
d) Placer le point M_5 d'affixe $i\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$. Montrer que le quadrilatère $M_1M_3M_5M_4$ est un carré.

Exercice 3

- Montrer qu'on peut écrire le polynôme $F = 3X - X^2 + 8X^3$ sous la forme $F = a + b(1-X) + c(X-X^2) + d(X^2-X^3)$ (calculer a, b, c, d réels), et aussi sous la forme $F = \alpha + \beta(1+X) + \gamma(1+X+X^2) + \delta(1+X+X^2+X^3)$ (calculer $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ réels).
- Soit P_3 l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3 . Vérifier que les ensembles suivants sont des bases de P_3 :
 $B_1 = \{1, X, X^2, X^3\}$, $B_2 = \{1, 1-X, X-X^2, X^2-X^3\}$,
 $B_3 = \{1, 1+X, 1+X+X^2, 1+X+X^2+X^3\}$.

PROBLÈME

- On considère la fonction numérique f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}$.
On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
Pour tout réel $\alpha \geq 1$, on considère les intégrales : $J(\alpha) = \int_{\alpha}^{2\alpha} \frac{1}{x} dx$ et $K(\alpha) = \int_{\alpha}^{2\alpha} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} dx$.
Le but de l'exercice est d'étudier, sans chercher à la calculer, l'intégrale $K(\alpha)$.
 - Déterminer la limite de f en $+\infty$.
Interpréter graphiquement le résultat.
 - Montrer que la dérivée de f peut s'écrire $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \left(\frac{x+1}{x} \right) e^{\frac{1}{x}}$. En déduire le sens de variation de f .
 - Donner l'allure de la courbe C .
- Interpréter géométriquement le nombre $K(\alpha)$.
 - Soit $\alpha \geq 1$, montrer que $-e^{\frac{1}{\alpha}} \leq K(\alpha) \leq e^{\frac{1}{\alpha}}$.
 - En déduire que $\frac{1}{2} \leq K(\alpha) \leq e$.
 - Calculer $J(\alpha)$.
- Démontrer que pour tout réel $\alpha \geq 1$, $e^{\frac{1}{2\alpha}} \ln 2 \leq K(\alpha) \leq e^{\frac{1}{\alpha}} \ln 2$.

- Démontrer le théorème suivant : Soient u, v et w des fonctions définies sur $[1; +\infty[$ telles que pour tout réel $x \geq 1$, $u(x) \leq v(x) \leq w(x)$.

S'il existe un réel l tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} w(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = l$.

- Déduire de ce qui précède la limite $K(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

SUJET 7

Exercice 1

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et t, t' désignent des paramètres réels.

Le plan (P) a pour équation $x - 2y + 3z + 5 = 0$.

Le plan (S) a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -2 + t + 2t' \\ y = -t - 2t' \\ z = -1 - t + 3t' \end{cases}$$

La droite (D) a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

On donne deux points de l'espace

$M(-1; 2; 3)$ et $N(1; -2; 9)$.

- Déterminer une représentation paramétrique du plan (P).
- Démontrer que la droite (D) est une droite du plan (P).
- Démontrer que la droite (MN) et la droite (D) sont orthogonales.
 - La droite (MN) et la droite (D) sont-elles sécantes.
- Démontrer que la droite (Δ) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = -2 - t \\ z = -3 - t \end{cases}$ est la droite intersection des plans (P) et (S).
 - Les plans (P) et (S) sont-ils perpendiculaires ?

Exercice 2

- Montrer que les vecteurs $w_1 = (1, 1, 1)$, $w_2 = (-1, i, 1)$, $w_3 = (i, 1, -1)$ forment une base de $\mathbb{C}^3$.
- Calculer les composantes de $w = (1+i, 1-i, i)$ dans cette base.

Exercice 3

Dans tout le problème $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan P.

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1}$; On appelle C la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

- Étude de f :
 - Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$. Justifier vos calculs.
 - Préciser les équations des asymptotes à la courbe (C_f) .
 - Donner l'expression de $f'(x)$ où f' est la dérivée de f . Dresser le tableau de variation de f . Préciser $f(0)$.
 - Déterminer une équation de la tangente à C au point d'abscisse $x = 0$; on note T_0 cette tangente.
- Courbe de f .
 - Soit x un réel quelconque. Calculer $f(x) + f(-x)$.
 - Quelle propriété de symétrie peut-on déduire de la question précédente ?
 - Tracer C, ses asymptotes et la tangente T_0 .

Partie B

- Soit $u(x) = 1 + e^{-x}$. Calculer $u'(x)$.
 - En déduire la primitive F de f qui prend la valeur $-\ln 2$ en 0.
- On pose $A = \int_0^1 f(x) dx$. Calculer A.
 - Déterminer le réel c tel que $A = \ln c$.
- Pour tout entier naturel n non nul on pose

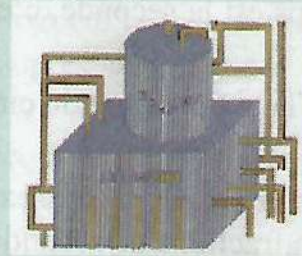
$$v_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1+\frac{1}{n}} f(x) dx.$$

- Exprimer v_n en fonction de n .
- Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$.

PROBLÈME

Circuit de refroidissement.

Le système de refroidissement par eau d'une machine est constitué d'un circuit de contenance 20 litres, rafraîchi en de multiples points par un courant d'eau froide à 16°C dès que l'eau dans le circuit atteint 80°C .



Il entre très rapidement autant d'eau qu'il n'en sort à raison de 2 litres par seconde et le grand nombre de points de rafraîchissements permet de considérer que, toutes les secondes, 18 litres du circuit sont mélangés de façon homogène à 2 litres d'eau froide. (On considère donc que la température est la même en chaque endroit du circuit.)

On considère comme négligeable l'apport de chaleur dans le circuit dû au fonctionnement de la machine pendant le rafraîchissement. On veut déterminer le temps, exprimé en secondes, qu'il faut pour que la température de l'eau du circuit tombe à 40°C .

Les calculs seront basés sur un résultat barycentrique intuitif selon lequel x litres d'eau à u degrés mélangés à y litres d'eau à v degrés donnent $x+y$ litres d'eau à $\frac{x \cdot u + y \cdot v}{x+y}^\circ \text{C}$.

Partie 1

Solution au moyen des suites numériques : schéma « discret », ou encore « discontinu » : l'unité de temps est la seconde, c'est un nombre entier.

On note T_n la température du circuit au bout de n secondes de rafraîchissement.

- 1) Montrer que la suite (T_n) est définie par $T_0 = 80$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $10T_{n+1} = 9T_n + 16$.
- 2) On pose $U_n = T_n - 16$.
 - a) Montrer que (U_n) est géométrique, déterminer son premier terme et sa raison.
 - b) En déduire U_n , puis T_n en fonction de n , pour tout n de $\mathbb{N}$.
 - c) Démontrer que (T_n) est convergente.
- 3) Déterminer le plus petit entier naturel n pour lequel $T_n \leq 40$. Conclure.

Partie 2

Solution différentielle : schéma « continu », l'unité de temps est la seconde, c'est un nombre réel.

On note $T(t)$ la température du circuit au temps t exprimé en secondes.

- 1) Soit Dt un laps de temps assez petit, exprimé en fractions de secondes.

- a) Montrer que la température du circuit à l'instant $t + Dt$ est :

$$T(t + Dt) = \frac{(20 - 2Dt) T(t) + 32Dt}{20}$$

- b) En déduire que :

$$\frac{T(t + Dt) - T(t)}{Dt} = -\frac{1}{10}T(t) + 1,6.$$

- c) Montrer alors que T est solution de l'équation différentielle :

$$T' = -\frac{1}{10}T + 1,6.$$

- 2) a. Résoudre l'équation différentielle :

$$T' = -\frac{1}{10}T + 1,6.$$

- b) Déterminer la solution de cette équation vérifiant la condition initiale $T(0) = 80$.
- c) Résoudre l'équation $T(t) = 40$, et conclure. (Comparer avec le résultat obtenu dans la première partie.)

SUJET 8

Exercice 1

On étudie l'évolution dans le temps du nombre de jeunes et d'adultes dans une population d'ani-

maux.

Pour tout entier naturel n , on note j_n le nombre d'animaux jeunes après n années

d'observation et a_n le nombre d'animaux adultes après n années d'observation.

Il y a au début de la première année de l'étude 200 animaux jeunes et 500 animaux adultes. Ainsi $j_1 = 200$ et $a_1 = 500$. On admet que pour tout

entier naturel n on a :
$$\begin{cases} j_{n+1} = 0,125j_n + 0,525a_n \\ a_{n+1} = 0,625j_n + 0,625a_n \end{cases}$$

On introduit les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix} \text{ et, pour tout entier naturel } n,$$

$$u_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}.$$

- 1) a. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = A \times u_n$.

- b) Calculer le nombre d'animaux jeunes et d'animaux adultes après un an d'observation puis après deux ans d'observation (résultats arrondis à l'unité près par défaut).

- c) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer u_n en fonction de A^n et de u_1 .

- 2) On introduit les matrices suivantes

$$Q = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -0,25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) On admet que la matrice Q est inversible

$$\text{et que } Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0,1 & -0,06 \\ 0,1 & 0,14 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $Q \times D \times Q^{-1} = A$.

- b) Montrer par récurrence sur n que pour tout entier naturel n non nul : $A^n = Q \times D^n \times Q^{-1}$.

- c) Pour tout entier naturel n non nul, déterminer D^n en fonction de n .

- 3) On admet que pour tout entier naturel n non nul,

$$A^n = \begin{pmatrix} 0,3 + 0,7 \times (-0,25)^n & 0,42 - 0,42 \times (-0,25)^n \\ 0,5 - 0,5 \times (-0,25)^n & 0,7 + 0,3 \times (-0,25)^n \end{pmatrix}$$

En déduire les expressions de j_n et a_n en fonction de n et déterminer les limites de ces deux suites.

Que peut-on en conclure pour la population d'animaux étudiée ?

Exercice 2

L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Calculer la distance entre les plans : $\pi_1 : 2x - y + z - 1 = 0$ et $\pi_2 : 2x - y + z - 5 = 0$.

Soit $\pi : 3x - y + z = 1$; $\pi' : 2x - z - 4 = 0$; $d = \pi \cap \pi'$; $\pi'' \perp \pi$ et $\pi'' \perp \pi'$

a) Déterminer les équations paramétriques de (d).

b) Déterminer l'équation cartésienne de π'' sachant que π'' contient A (-1, 2, 1).

c) Déterminer l'angle aigu de π et π' .

d) Déterminer m pour que le plan π :

$2x - y + mz = 1$ forme avec la droite (d) :

$$\begin{cases} x - 3y = 3 \\ y + z = 1 \end{cases} \text{ un angle de } 30^\circ.$$

e) Déterminer une équation du plan P tangent à la sphère $\Gamma : x^2 + y^2 + z^2 = 49$ au point M (6, -3, -2).

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.

Partie A

On appelle fonction cosinus hyperbolique (notée ch) la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

On appelle fonction sinus hyperbolique (notée sh)

la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

a) Étudier la parité des fonctions ch et sh .

b) Déterminer la fonction $ch + sh$.

c) Montrer que les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Déterminer les fonctions $(ch)'$ et $(sh)'$.

b) Calculer les limites des fonctions ch et sh en $-\infty$ et $+\infty$.

3) a) Étudier les variations des fonctions ch et sh .

b) Soit $f = ch - sh$; étudier le signe de f et sa limite en $+\infty$. Que peut-on en déduire en ce qui concerne les courbes représentatives de ch et sh dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$?

4) Tracer les courbes des deux fonctions ch et sh dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. La courbe de ch est appelée "chaînette".

Partie B

De façon analogue à la trigonométrie circulaire, on peut développer une trigonométrie hyperbolique.

Dans toute cette partie, a et b sont des réels quelconques.

1) Calculer $ch^2(a) + sh^2(a)$ et $ch^2(a) - sh^2(a)$.

2) Calculer $ch(a)ch(b)$, $ch(a)sh(b)$, $sh(a)ch(b)$, $sh(a)sh(b)$ et les exprimer en fonction de $ch(a+b)$; $sh(a+b)$; $ch(a-b)$; $sh(a-b)$.

En déduire $ch(a+b)$; $sh(a+b)$; $ch(a-b)$; $sh(a-b)$; $ch(2a)$ et $sh(2a)$ en fonction de $ch(a)$; $ch(b)$; $sh(a)$ et $sh(b)$. Comparer avec les formules de trigonométrie circulaire.

3) On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction tangente hyperbolique (notée th) par $th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}$.

a) Étudier la parité de la fonction h .

b) Étudier la dérivabilité de h . Déterminer la fonction $(th)'$, d'une part en fonction de ch d'autre part en fonction de sh .

c) Calculer les limites de th en $-\infty$ et en $+\infty$. Donner le tableau de variations de th et tracer sa courbe représentative dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

d) Exprimer $th(a+b)$; $th(a-b)$ et $th(2a)$ en fonction de $th(a)$ et $th(b)$.

SUJET 9

Exercice 1

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

On considère les points $A(0; 4; 1)$, $B(1; 3; 0)$, $C(2; -1; -2)$ et $D(7; -1; 4)$.

- 1) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
- 2) Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}(2; -1; 3)$.
 - a) Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).
 - b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
 - c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ .
 - d) Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
- 3) Soit P_1 le plan d'équation $x + y + z = 0$ et P_2 le plan d'équation $x + 4y + 2z = 0$.
 - a) Démontrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants.
 - b) Vérifier que la droite d, intersection des plans P_1 et P_2 , a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -4t - 2 \\ y = t \\ z = 3t + 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$
 - c) La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

Exercice 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 5 cm pour unité graphique.

Soit f la transformation qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right)z + 1$.

- 1) Justifier que f est une similitude directe dont on précisera le centre Ω (d'affixe ω), le rapport k et une mesure de l'angle θ .

- 2) On note A_0 le point O et, pour tout entier naturel n , on pose $A_{n+1} = f(A_n)$.

a) Déterminer les affixes des points A_1, A_2, A_3 puis placer les points A_0, A_1, A_2, A_3 .

b) Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \Omega A_n$. Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n.$$

c) À partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre Ω et de rayon 0,1 ?

- 3) a) Quelle est la nature du triangle $\Omega A_n A_{n+1}$. En déduire, pour tout entier naturel n , la nature du triangle $\Omega A_n A_{n+1}$.

b) Pour tout entier naturel n , on note ℓ_n la longueur de la ligne brisée

$$A_0 A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n.$$

On a ainsi : $\ell_n = A_0 A_1 + A_1 A_2 + \dots + A_{n-1} A_n$. Exprimer ℓ_n en fonction de n . Quelle est la limite de la suite (ℓ_n) ?

Exercice 2

- 1) Soit $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$, telle que

$$f(x, y, z) = (2x - y + z, x + y - z).$$

a) Donner la matrice A de f relativement aux bases canoniques b et c de $\mathbb{R}^3$ respectivement.

b) Donner la matrice A_1 de f relativement aux bases b et $c_1 = \{(1, 1), (-1, 1)\}$.

- 2) Soit g, une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement aux bases

$$\text{et b est } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer $g(x, y)$.

b) Donner la matrice B_1 de g relativement aux bases c_1 et b.

- 3) Après avoir montré que $g \circ f$ est bien définie, donner la matrice C de $g \circ f$ relativement aux bases c_1 et c_1 .

base canonique b de $\mathbb{R}^3$.

Montrer sans calcul que $BA = B_1A_1$.

PROBLÈME

On considère la famille de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = kx^2 + e^{-x}$ où k est un réel strictement positif quelconque et g_k la famille de fonctions également définies sur $\mathbb{R}$ par $g_k(x) = 2kx - e^{-x}$.

On note C_k la courbe représentative de f_k dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique :

Sens de variation de g_k .

a) Calculer la dérivée g'_k de g_k ; vérifier que $g'_k(x)$ est toujours strictement positif.

b) Calculer la limite de $g_k(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

c) Dédire de ce qui précède l'existence et l'unicité d'un nombre réel α_k tel que $g_k(\alpha_k) = 0$. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de α_1 et de α_2 .

d) Étudier le signe de $g_k(x)$ sur $[0; +\infty[$.

e) Montrer que $f'_k(x) = g_k(x)$; en déduire le sens de variation de f_k .

Comportement asymptotique de f_k en $+\infty$.

Déterminer la limite de $f_k(x)$ en $+\infty$.

Déterminer le signe de $f_k(x) - kx^2$ et sa limite en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat; on note P_k la courbe d'équation $y = kx^2$.

Construction de f_k .

a) Dresser le tableau des variations de f_k . Préciser le signe de f_k .

b) Préciser l'équation de la tangente T à C_k au point d'abscisse 0.

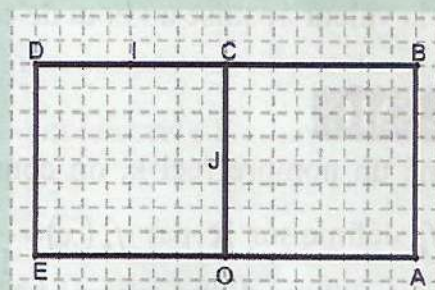
c) Prouver que $f_k(\alpha_k) = k\alpha_k(\alpha_k + 2)$.

d) On prend $k = 1$: montrer que le point de coordonnées $(\alpha_1; f_1(\alpha_1))$ appartient à une parabole Q_1 dont on donnera l'équation. Tracer dans le même repère T , P_1 , Q_1 et C_1 .

SUJET 10

Exercice 1

Sur la figure donnée ci-dessous, on considère les carrés $OABC$ et $OCDE$ tels que : $Mes(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = Mes(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OE}) = \frac{\pi}{2}$.



On désigne par I le milieu du segment $[CD]$, par J le milieu du segment $[OC]$ et par H le point d'intersection des segments $[AD]$ et $[IE]$.

- 1) Justifier l'existence d'une similitude directe s transformant A en I et D en E .
- 2) Déterminer le rapport de cette similitude s .
On admet que l'angle de la similitude s mesure $\frac{\pi}{2}$.
- 3) Donner, sans justifier, l'image de B par s .
- 4) Déterminer et placer l'image de C par s .
- 5) Soit Ω le centre de la similitude s .
a) Montrer que Ω appartient au cercle de diamètre $[AI]$ et à celui de diamètre $[DE]$.
b) Montrer que Ω ne peut être le point H .
c) Construire Ω .
- 6) On considère le repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$.
a) Déterminer l'écriture complexe de la similitude s .
b) En déduire l'affixe du centre Ω de s .

Exercice 2

On considère, dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs :

$$\mathbf{e}_1 = (1, 2, 3, 4), \mathbf{e}_2 = (1, 1, 1, 3), \mathbf{e}_3 = (2, 1, 1, 1) \\ \mathbf{e}_4 = (-1, 0, -0, 2) \text{ et } \mathbf{e}_5 = (2, 3, 0, 1).$$

Soient E l'espace vectoriel engendré par : $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ et F celui engendré par $\mathbf{e}_4$ et $\mathbf{e}_5$. Calculer les dimensions respectives de $E, F, E \cap F$ et $E + F$.

Exercice 3

Un capital de 100 000F est emprunté à intérêt (annuel) composé pendant 3 ans, à $i_1 = 10\%$ pendant 18 mois, à $i_2 = 12\%$ pendant les 8 mois suivants et à $i_3 = 13\%$ pendant les 10 mois suivants. Il est remboursé avec les intérêts au bout des 3 ans.

Quelle est la valeur acquise au bout de ces 3 ans.

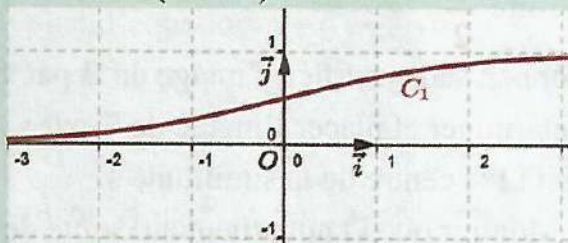
PROBLÈME

Étant donné un nombre réel k , on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = \frac{1}{1+e^{-kx}}$. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

Dans cette partie on choisit $k = 1$. On a donc, pour tout réel x , $f_1(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$.

La représentation graphique C_1 de la fonction f_1 dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est la suivante :



1) Déterminer les limites de $f_1(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2) Démontrer que, pour tout réel x ,

$$f_1(x) = \frac{e^x}{1+e^x}.$$

3) On appelle f'_1 la fonction dérivée de f_1 sur $\mathbb{R}$. Calculer, pour tout réel x , $f'_1(x)$.

En déduire les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

4) On définit le nombre $I = \int_0^1 f_1(x) dx$. Montrer

$$\text{que } I = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right).$$

Donner une interprétation graphique de I .

Partie B

Dans cette partie, on choisit $k = -1$ et on trace la courbe C_{-1} représentant la fonction f_{-1} . Pour tout réel x , on appelle P le point de C_{-1} d'abscisse x et M le point de C_{-1} d'abscisse $-x$. On note K le milieu du segment $[MP]$.

1) Montrer que, pour tout réel x ,

$$f_1(x) + f_{-1}(x) = 1.$$

2) En déduire que le point K appartient à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.

3) Tracer la courbe C_{-1} dans le même repère que C_1 .

4) En déduire l'aire, en unités d'aires, du domaine délimité par les courbes C_1, C_{-1} , l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=1$.

Partie C

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1) Quelle que soit la valeur du nombre réel k , la représentation graphique de la fonction f_k est strictement comprise entre les droites d'équations $y=0$ et $y=1$.

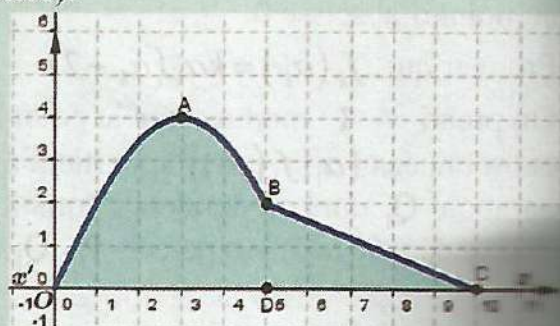
2) Quelle que soit la valeur du réel k , la fonction f_k est strictement croissante.

3) Pour tout réel $k \geq 10$, $f_k\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0,99$.

SUJET 11

Exercice 1 : Volume d'une toupie

Le but de cet exercice est de calculer le volume d'une toupie. On obtient un modèle réduit de cette toupie par rotation autour de l'axe des abscisses (xx') de la surface coloriée ci-après. Le modèle réduit représente la toupie en position couchée).



Unité graphique est de 1 cm.

On donne les quatre points $A(3 ; 4)$, $B(5 ; 2)$, $C(10 ; 0)$ et $D(5 ; 0)$.

La partie inférieure du modèle réduit est le cône de révolution engendré par le triangle BCD.

La partie supérieure du modèle réduit est engendrée par la surface limitée par une courbe (G) suivant l'allure générale du schéma et vérifiant les conditions suivantes :

- a) La courbe (G) passe par les points O, A et B
- b) La courbe (G) a une tangente horizontale au point A.

Vérifier que la courbe d'équation

$y = 4 \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)$ (x variant de 0 à 5) remplit ces conditions. On admet dans la suite que c'est la courbe (G).

a) En utilisant la formule donnant le volume d'un cône de révolution ou bien en introduisant la fonction dont la courbe représentative est le segment [BC], calculer le volume en cm^3 de la partie inférieure du modèle réduit.

b) Linéariser $\sin^2\left(\frac{\pi x}{6}\right)$, puis calculer le volume en cm^3 de la partie supérieure du modèle réduit.

Sachant que la hauteur OC de la toupie en vraie grandeur est de 30 cm, calculer la valeur exacte du volume en cm^3 de cette toupie, puis en donner une valeur approchée à $0,1 \text{ cm}^3$ près.

Exercice 2

Soit un espace vectoriel de base $B=(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Quel est la dimension de E ?

Soit f l'endomorphisme de E avec

$$f(\vec{i}) = \vec{i} + \vec{j}, f(\vec{j}) = -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \text{ et } f(\vec{k}) = 2\vec{k}.$$

a) Déterminer $f(2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k})$. Que dire de $2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$?

b) Donner l'écriture analytique de f .

c) Démontrer que $\ker f$ est une droite vectorielle de E. (dont on précisera un

vecteur de base e_1).

d) Démontrer que $\text{Im } f$ est engendré par $(\vec{i} + \vec{j}, \vec{k})$.

e) Démontrer que $(\ker f) + (\text{Im } f) = E$.

Exercice 3

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

On considère les points $A(5, 0, 0)$, $B(0, 5, 0)$, C

$(1, 1, \frac{\sqrt{17}}{2})$ et le cercle Γ donné par les équations

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{25}{4} \\ z = 0 \end{cases}$$

- 1) Trouver l'équation de la sphère Σ qui passe par C et qui contient le cercle Γ .
- 2) Trouver les équations des plans tangents à Σ et qui contiennent la droite (AB).

PROBLÈME

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}.$$

On désigne par C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

- 1) a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- b. Démontrer que la droite D_1 d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe C.
- c. Étudier la position de C par rapport à D_1 .
- 2) a. On note f' la fonction dérivée de f . Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout réel x , on a : $f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3}\right)^2$.
- b. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de la fonction f .
- 3) a. Que peut-on dire de la tangente D_2 à la courbe C au point I d'abscisse $\ln 3$?
- b. En utilisant les variations de la fonction f , étudier la position de la courbe C par rapport à D_2 .
- 4) a. Montrer que la tangente D_3 à la courbe

C au point d'abscisse 0 a pour équation

$$y = \frac{1}{4}x + 1.$$

- b) Étudier la position de la courbe C par rapport à la tangente D_3 sur l'intervalle $]-\infty; \ln 3]$. On pourra utiliser la dérivée seconde de f notée f'' définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par :

$$f''(x) = \frac{12e^x(e^x - 3)}{(e^x + 3)^3}.$$

On admet que le point I est centre de symétrie de la courbe C. Tracer la courbe C, les tangentes D_2 , D_3 et les asymptotes à la courbe C. On rappelle que l'unité graphique choisie est 2cm.

- 5) a. Déterminer une primitive de la fonction

$$g \text{ définie sur } \mathbb{R} \text{ par : } g(x) = \frac{e^x}{e^x + 3}$$

- b) Soit α un réel strictement négatif.

On note A_α l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par D_1 , C et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 0$. Montrer que

$$A_\alpha = 4\ln 4 - 4\ln(e^\alpha + 3).$$

- c) Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} A_\alpha$.

SUJET 12

Exercice 1

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé direct du plan.

Soit (E) l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que $y^2 + 6y + 4x - 3 = 0$.

- Déterminer la nature de (E) et donner son équation réduite dans un repère d'origine O dont on précisera les coordonnées dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- Déterminer, l'équation de la directrice et les coordonnées du foyer dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- Construire (E) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 2

Soit p le polynôme à variable complexe défini

$$\text{par : } p(z) = z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1.$$

- Montrer que si z est une racine de p , alors $\frac{1}{z}$ et $\bar{z}$ sont aussi racines de p .
- Vérifier que le nombre $1+i$ est une racine de p .
- Donner toutes les racines de p .

Exercice 3

ABCD est un rectangle de l'espace tel que $AD = 2AB$ et de centre O .

- On considère l'ensemble (Γ) l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que : $MA^2 + MB^2 - MC^2 - MD^2 = -2AD^2$
 - Montrer que A appartient à (Γ) .
 - Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (Γ) .
- Soit H le sommet d'une pyramide de base ABCD dont toutes les faces latérales sont des triangles isocèles et les plans (HAB) et (HCD) sont perpendiculaires.
- Montrer que la droite (OH) est orthogonale au plan (ABC) .
- Montrer que $OH = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$.
- Dans toute cette question on prend $AB = 1$ et on considère le repère orthonormé direct

$$R = (A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \text{ tel que } \vec{i} = \overrightarrow{AB} \text{ et } \vec{j} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

- Démontrer que dans le repère R , le sommet H a pour coordonnées

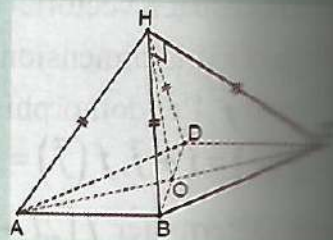
$$\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

- Déterminer les coordonnées des images des points A , B , C , D , O et H par $S_{(OH)}$ demi-tour d'axe (HO) .

- Déterminer

l'application $S_{(ABC)} \circ S_{(OH)}$ où $S_{(ABC)}$ est la réflexion de plan (ABC) .

- Déterminer la matrice dans la base



$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'endomorphisme φ associé à $S_{(\text{OH})}$. En déduire l'expression analytique de $S_{(\text{OH})}$.

PROBLÈME

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ Unités d'axes : 2 cm

PARTIE A

Soit f la fonction définie de $[0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = |x \ln x| - 1 & \text{si } x > 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

de courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$

- Démontrer que : $\begin{cases} f(x) = -x \ln x - 1 & \text{si } x \in]0; 1[\\ f(x) = x \ln x - 1 & \text{si } x \in]1; +\infty[\end{cases}$
- Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet deux demi-tangentes (T) et (T') au point d'abscisse 1. Préciser leurs équations et l'équation de la tangente au point d'abscisse 0.
- a) Dresser le tableau des variations de f
b) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule racine α telle que $\ln \alpha = \frac{1}{\alpha}$.
- a) Tracer $(\mathcal{C}_f)$; (T) et (T') sachant que $\alpha \in [1, 7; 2]$.
b) On note $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire du domaine D délimité par $(\mathcal{C}_f)$; l'axe $(O; \vec{i})$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$. Exprimer $\mathcal{A}(\alpha)$ comme un polynôme du second degré en α .

Partie B

On considère la fonction $g: x \mapsto f(x) + 1$ et la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \text{ et } u_0 \neq 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

- Déterminer u_0 pour que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit constante.
- Exprimer $g'(x)$ en fonction de $f'(x)$ et dresser le tableau des variations de g .
- On choisit $u_0 > e$, démontrer que :

- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.
- $\forall x \in]e; +\infty[$, $g'(x) \geq 2$
- La fonction $h: x \mapsto 2x - g(x)$ est décroissante. $\forall n \in \mathbb{N}^* u_{n+1} - u_n \geq 2(u_n - u_{n-1})$
et $\forall n \in \mathbb{N} u_{n+1} - u_n \geq 2^n(u_1 - u_0)$.
- En déduire la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

SUJET 13

Exercice 1

- $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan. On considère dans ce repère les points $F \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$ et $F' \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$. On pose $\vec{u} = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} - \frac{1}{2} \vec{j}$ et $\vec{v} = -\frac{1}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{j}$.
a) Déterminer dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ l'équation de l'ensemble (Γ) des points $M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ tels que $MF + MF' = 4\sqrt{2}$.
b) En déduire une équation de (Γ) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
c) Construire (Γ) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$
- On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = 2^n + 3 \times 7^n + 14^n - 1$.
a) Calculer u_3 .
b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est pair.
c) On note P l'ensemble des nombres premiers qui divisent au moins un terme de la suite (u_n) . Les entiers 2, 3, 5 et 7 appartiennent-ils à l'ensemble P ?
d) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 2

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé direct de l'espace E. Soit le plan (Π) d'équation $x - 2y + z = 1$ et la droite (Δ) de représentation

paramétrique $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ et le point

$$P \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- 1) Démontrer que (Π) est orthogonale à (Δ) en un point C dont on donnera les coordonnées.
- 2) Déterminer les images B et D par les projections orthogonales de P sur (Π) et sur (Δ) respectivement. Vérifier que le quadrilatère PBCD est un rectangle.
- 3) Déterminer l'expression analytique de la projection orthogonale sur (Π) .
- 4) Soit (S) la sphère de centre C et de rayon $\sqrt{6}$, déterminer $(S) \cap (\Pi)$.

PROBLÈME

On appelle espace vectoriel euclidien, tout espace vectoriel dans lequel est défini un produit scalaire. Lorsqu'un espace affine est associé à un espace vectoriel euclidien, on l'appelle espace affine euclidien.

Partie A

Soit P un plan affine euclidien de plan vectoriel associé V. Soit O un point de P.

Soit θ un élément de l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.

Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs unitaire de V tels que $\vec{i} \cdot \vec{j} = \sin \theta$.

- 1) Démontrer que le triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère $\mathcal{R}$ de P.
- 2) Déterminer l'ensemble des valeurs de θ pour lesquelles le repère $\mathcal{R}$ est orthonormé.

Dans toute la suite du problème, on suppose que $\mathcal{R}$ est un repère orthonormé.

unité = 1 cm

- 3) On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par $f(x) = \frac{1-2^x}{1+2^x}$ de courbe représentative $(\mathcal{C})$ dans le repère $\mathcal{R}$.

- a) Montrer que f est une fonction impaire.
 - b) Étudier les variations de f puis construire $(\mathcal{C})$ dans le repère $\mathcal{R}$.
 - c) Démontrer que O est un point d'inflexion à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
 - d) Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle K que l'on précisera.
 - e) Démontrer que $f^{-1}(x) = \frac{1}{\ln 2} \times \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right)$ pour tout $x \in K$.
- 4) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[-2; 0]$ et $(\mathcal{C}_g)$ sa courbe dans le repère $\mathcal{R}$. On note $\mathcal{D}$ le domaine plan limité par $(\mathcal{C}_g)$ et les droites d'équations $x = -2$, $x = 0$ et $y = 0$. Calculer le volume V de la portion de l'espace obtenue en faisant tourner le domaine $\mathcal{D}$ autour de l'axe des abscisses. On pourra remarquer que $(1-2^x)^2 = (1+2^x)^2 - 4 \times 2^x$.

Partie B

On considère la famille des courbes

$$(\mathcal{C}_{a,b}) \text{ d'équation } y = b + \log_2 \left(\frac{1-x+a}{1+x-a} \right)$$

avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. [on rappelle que :

$$\ln x = \log_a(x) \times \ln a \text{ pour tous } a, x \in \mathbb{R}]$$

- 1) a) Soit $M(x, y)$ un point de $(\mathcal{C}_{a,b})$. Exprimer y en fonction de $f^{-1}(x-a)$.
 - b) En déduire que $(\mathcal{C}_{a,b})$ est l'image de $(\mathcal{C})$ par une application $\varphi_{(a,b)}$ telle que $\varphi_{(a,b)} = T \circ S_\Delta$ où T est une translation de vecteur $\vec{u}$ et S_Δ une symétrie orthogonale. Préciser $\vec{u}$ et (Δ) .
 - c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que $\varphi_{(a,b)}$ soit une symétrie orthogonale.
- 2) On suppose que $a+b \neq 0$.
- a) Soient A et H deux points du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et H le projeté orthogonal de A sur (Δ) . Démontrer que $\varphi_{(a,b)}$ est la composée commutative de la translation

T_{OH} et d'une symétrie orthogonale que l'on précisera.

- Donner les éléments caractéristiques de $\varphi_{(3,1)}$ correspondant à $a=3$ et $b=1$.
- Construire soigneusement la courbe $(C_{3,1})$ dans le même repère que (C) .

SUJET 14

Exercice 1

- Calculer la primitive F sur $\left]-\infty; \frac{5}{3}\right[$ de

la fonction : $x \mapsto (5-3x)^{\frac{2}{5}}$ qui prend la valeur 1 en 1.

- Déterminer suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ les restes de la division euclidienne de 7^n par 10.

Exercice 2

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$U_0 = \lambda$$

$$4U_{n+1} = 3U_n^2 - 8U_n + 12, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

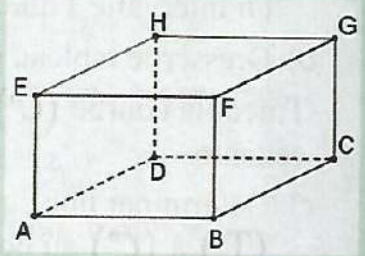
- Montrer que si $\lambda = 2$ alors la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.
- Dans toute cette question : $\lambda = 1$
 - Montrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
 - Déterminer l'image de l'intervalle $\left[\frac{2}{3}; 2\right]$ par la fonction $h: x \mapsto \frac{3}{4}x^2 - 2x + 3$.
 - En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{2}{3} < U_n < 2$.
 - Montrer que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3

Sur la figure ci-contre ABCDEFGH est un pavé droit tel que :

$$AB = 2AD = \frac{3}{2}AE$$

$AD=a$ où a est un réel



strictement positif.

- Exprimer AC en fonction de a puis déterminer $\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
 - Déterminer les vecteurs $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
- Reproduire la figure et construire le point P barycentre des points pondérés $(A, 1)$; $(B, -2)$ et $(E, 3)$.
 - Exprimer PA^2 , PB^2 et PE^2 en fonction de a .
 - Calculer les coordonnées de P dans le repère (A, B, D, E) .
- Déterminer l'ensemble (Γ_1) et (Γ_2) des points M de l'espace tels que :

$$(\Gamma_1): MA^2 - 2MB^2 + 3ME^2 = \frac{10}{3}a^2.$$

$$(\Gamma_2): -2MA^2 + MB^2 + ME^2 = \frac{13}{9}a^2.$$

PROBLÈME

Partie A

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = (x-1)\ln(x-1) + 1 & \text{si } x > 1 \\ f(x) = xe^{x-1} & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

- Étudier la continuité et la dérivabilité de f au point d'abscisse 1.
- Étudier les variations de la fonction f .
 - Tracer sa courbe représentative (C) dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ L'unité d'axes est de 2 cm.
- Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [-1; 1]$

- Montrer que g est une bijection de I vers un intervalle J que l'on précisera.
- Dresser le tableau de variation de g^{-1} .
Tracer la courbe (C') de g^{-1} sur la figure précédente.
- Déterminer une équation de la tangente (T') à (C') au point d'abscisse 0.
- Déterminer l'aire du domaine délimité par la courbe (C) et les droites d'équations :
 $x = -1$; $x = 1$ et $y = 0$.

Partie B

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = e^{-i\frac{\pi}{6}} \bar{z} + 2$.

- Démontrer que f est un antidéplacement.
- Déterminer l'écriture complexe de $f \circ f$.
En déduire la nature de $f \circ f$.
- Soit t la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $1 + e^{-i\frac{\pi}{6}}$, A et B les points d'affixes respectives 1 et i .
 - Vérifier que $\vec{u} = \vec{BA}$ et démontrer que $f(B) = A$. En déduire que $f(B) = t(B)$.
 - Démontrer que $f \circ f = t \circ t$. En déduire que $f(A) = t(A)$.
 - Démontrer que $t^{-1} \circ f = S_{(AB)}$ symétrie orthogonale d'axe (AB) .
 - Démontrer que $f(A)$ appartient à la droite (AB) .
- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .

SUJET 15

Exercice 1 :

On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^p}$$

$$\text{et } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = -\frac{1}{2} + \sum_{p=0}^n \frac{1}{2^p}$$

- Calculer le premier terme de chacune des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
 - Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$
$$u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n^n} \quad \text{et} \quad v_n = v_{n-1} + \frac{1}{2^n}.$$
- Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée.
 - Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq v_n$.
- Calculer la limite de la suite (v_n) .
 - Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 2 :

Soit A et B deux points du plan orienté P . À tout point M distinct de B d'un demi-cercle (C) de diamètre $[AB]$ on associe le point P de la demi-droite $[AM)$ n'appartenant pas au segment $[AM]$ tel que $PM = MB$.

- Déterminer l'angle $\left(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB} \right)$, puis exprimer BP en fonction de BM .
- Déterminer alors une similitude qui transforme M en P .
- Déterminer et construire le lieu géométrique des points P lorsque M décrit le demi-cercle (C) .

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{x - \ln x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- Étudier les variations de la fonction :
 $v: x \mapsto x - \ln x$.
 - En déduire que l'ensemble de définition de f est $[0; +\infty[$.
- Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0; +\infty[$.
- Étudier les variations de f .
- On considère la fonction g définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \int_x^{x^2} f(t) dt$
 - Démontrer que l'ensemble de définition de g est $[0; +\infty[$.

- b) Étudier le sens de variations de g .
 c) Donner le signe de g . Interpréter graphiquement.

PROBLÈME

Il comporte 2 parties obligatoires et indépendantes

Partie A

L'espace est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère l'ensemble (S) des points $M(x; y; z)$ vérifiant :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 10 = 0,$$

la droite (Δ) dont une représentation paramétrique est $(\Delta) : \begin{cases} x = 6 + t \\ y = -7 + t \\ z = 5 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

- 1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (S) .
- 2) Déterminer l'intersection de (S) et (Δ) .
- 3) On considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives $(-3, 0, -2)$; $(1, -2, -2)$; $(2, -1, -\frac{1}{2})$ et $(1, 2, -1)$.
 - a) Démontrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires, puis calculer le volume du tétraèdre ABCD.
 - b) Écrire une équation du plan (ABC).
 - c) Déterminer la nature de l'intersection de (S) et (ABC), puis le caractériser.

Partie B

$(O; \vec{i}; \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.

- 1) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan d'affixe z tels que $|(2+3i)z - 13| = 2\sqrt{13}$.
- 2) Soit f l'application affine du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \frac{2}{3}z + \frac{1}{3}\bar{z}$.
 - a) Montrer que l'ensemble des points invariants de f est l'axe réel.

- b) Soit z_0 un nombre complexe fixé. On pose $z = z_0 + iy$, $y \in \mathbb{R}$.

Montrer que si z_0 est un nombre réel alors $z' - z_0 = \frac{1}{3}(z - z_0)$.

- c) Montrer que pour tous nombres complexes z_1 et z_2 on a : $|z'_1 - z'_2| \leq |z_1 - z_2|$. Vérifier que pour $z_1 = 1$ et $z_2 = i$ cette inégalité est stricte. En déduire que f n'est pas une isométrie.

- 3) Soit φ l'endomorphisme associé à f . Déterminer la matrice de φ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. En déduire que f est bijective.
- 4) a) Déterminer une équation cartésienne de (Γ') image de (Γ) par f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (Γ') dans un repère $(\Omega; \vec{i}, \vec{j})$ où Ω est un point dont on donnera les coordonnées.
 c) Construire (Γ) et (Γ') dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- 5) Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de f ? Démontrer cette conjecture.

SUJET 16

Exercice 1

I. Soit r un entier relatif non nul

- a) Déterminer en fonction de r tous les entiers relatifs x tels que : $\begin{cases} x \equiv r[5] \\ x \equiv (r+1)[7] \end{cases}$

- b) En déduire les valeurs de r pour que tous ces entiers x soient multiples de 35.

II. Un sac contient dix jetons identiques, indiscernables au toucher et portant les numéros :

① ① ① ② ② ② ④ ④ ④ ④

On tire au hasard et simultanément deux jetons de ce sac.

- 1) Calculer la probabilité des événements suivants :

- a) A : "Les deux jetons portent le même numéro."
- b) B : "Les deux jetons portent des numéros distincts."
- 2) Soit X la variable aléatoire qui à toute paire $\{i, j\}$ associe la valeur $|i - j|$
- a) Donner la loi de probabilité de X .
- b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X .
- 3) On répète cinq fois de suite cette épreuve en remettant chaque fois les deux jetons tirés dans le sac.
- Calculer la probabilité à 10^{-4} près par excès d'obtenir exactement trois fois deux jetons portant le numéro 1.

Exercice 2

L'espace E est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points

$A(-1; 2; 1); B(-3; 4; 5)$ et $C(1; 2; 0)$

- Déterminer une équation cartésienne de (Π) plan médiateur du segment $[AB]$.
- Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par C et orthogonale au plan (Π) .
 - En déduire les coordonnées du point d'intersection H de (Π) et (Δ)
- Soit p la projection orthogonale sur (Π) . Déterminer $p(C)$ et l'ensemble des antécédents de H par p .
- Déterminer l'écriture analytique de p .
- Soit (Π') le plan passant par C et orthogonal à la droite (Δ) .

On note S_{Π} et $S_{\Pi'}$ les réflexions de plans (Π) et (Π') respectivement. Donner la nature et caractériser $S_{\Pi} \circ S_{\Pi'}$.

PROBLÈME

$\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan affine P . On note V le plan vectoriel associé à P . Soit A le point de coordonnées $(-1; 1)$. On note-

ra $M(z)$ un point M d'affixe z

Partie A

- On considère l'application $\varphi: V \rightarrow V$ qui à tout vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ associe le vecteur $\varphi(\vec{u}) = (-x + y)\vec{i} + 2x\vec{j}$.
Montrer que φ est un automorphisme de V .
- Soit $q: P \rightarrow P$ l'application affine d'endomorphisme associé φ et telle que $q(O) = A$.
 - Déterminer l'écriture analytique de q .
 - Déterminer l'ensemble $(\mathcal{H})$ des points invariants par q .
 - Démontrer que pour tout point M d'image M' par q , le vecteur $\vec{MM'}$ a une direction fixe dont précisera un vecteur directeur.
 - En déduire la nature et les éléments caractéristiques de q .
- Soit $h: P \rightarrow P$ l'application affine qui à un point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = iz + 1$.
 - Montrer que pour tout z_1 et z_2 dans $\mathbb{C}$, on a $|z'_1 - z'_2| = |z_1 - z_2|$.
 - En déduire que h est une isométrie de P .
 - Déterminer l'ensemble des points invariants par h puis donner la nature de h .
- On pose $g = h \circ q$. Montrer que l'écriture analytique de g est :
$$\begin{cases} x' = 2x + 2 \\ y' = -x + y - 1 \end{cases}$$

Partie B

On considère la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - 2\sqrt{x^2 + 1}$ de courbe représentative (C) .

(Γ) désigne l'ensemble des points des points $M(x; y)$ tels que : $-3x^2 + y^2 - 2xy - 4 = 0$.

- Étudier les variations de f et tracer (C) dans le repère $\mathcal{R}$. $1 \text{ unité} = 1 \text{ cm}$.
- Montrer que le point O est centre de symétrie à (Γ) .

b) Montrer que (Γ) est la réunion de (C) et d'une autre courbe (C') dont on donnera l'équation. Tracer (C') dans repère $\mathcal{R}$.

On note (Γ') l'image de (Γ) par l'application affine $g = h \circ q$

a) Montrer que (Γ') est une hyperbole équilatère dont on donnera l'axe focale et l'équation d'une directrice dans un repère que l'on précisera.

b) Tracer (Γ') dans le repère $\mathcal{R}$.

SUJET 17

Exercice 1

Déterminer tous les entiers relatifs x tels que

$$\begin{cases} x \equiv 1[7] \\ x \equiv 3[9] \end{cases}$$

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 2.

On pose $A = n^3 + 3n^2 - 7$ et $B = n + 1$

a) Montrer que tout diviseur commun de A et B est un diviseur de 5.

b) Déterminer n pour que $\text{pgcd}(A; B) = 5$

On considère les équations différentielles $(E_1): 3y''' + 2y'' - y' = 0$

et $(E_2): 3y'' + 2y' - y = 0$

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_2) puis en déduire les solutions de (E_1)

b) Déterminer la solution de (E_1) dont la courbe admet au point $A(0; -4)$ une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -x + 1$ et la courbe de sa dérivée seconde passe par le point $B(0; -2)$.

Exercice 2

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan. On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M'

d'affixe z' tel que : $z' = \frac{5}{4}z - \frac{1}{4}\bar{z} - i$.

On note (C) le cercle de centre $\Omega(-1 + 2i)$ et de rayon 2, (Γ_1) l'image de (C) par f .

1) Soit $z_1; z_2; z_3 \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que :

$$z_1 - z_3 = \lambda(z_1 - z_2).$$

$$z'_1 - z'_3 = \lambda(z'_1 - z'_2)$$

En déduire que f est une application affine.

2) Déterminer l'écriture analytique de f .

3) a) Déterminer une représentation paramétrique de (Γ_1) .

b) Donner dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$: une équation cartésienne de (Γ_1) , sa nature et ses éléments caractéristiques.

c) Construire (C) et (Γ_1) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

4) a) Déterminer l'ensemble des points invariants par f .

b) Montrer que tous les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ où $M' = f(M)$ ont une direction fixe que l'on précisera.

c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f .

PROBLÈME

Il comporte deux parties indépendantes

Partie A

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction numérique de la variable réelle x définie sur

$$D =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[\text{ par : } f_n(x) = \frac{e^x}{(x+1)^n}$$

$$\text{et on pose : } u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$$

1) Déterminer la dérivée f'_n de f_n et montrer que : $\forall x \in D, f'_n(x) = f'_n(x) - n f_{n+1}(x)$.

2) Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et qu'elle converge

3) a) Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$ on a :

$$\frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) \leq u_n \leq \frac{e}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right).$$

b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

4) a) En utilisant la question 1) montrer que :

$$\frac{e}{2^n} - 1 = u_n - n u_{n+1}.$$

SUJET 18

- b) En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (nu_{n+1}) = 1$
- c) Montrer que la suite $(nu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.

Partie B

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé de l'espace E, ABCD est un tétraèdre régulier d'arête $3\sqrt{2}$. On désigne par : B' le milieu du segment [CD], H le centre de gravité de la face BCD et G l'isobarycentre des points A, B, C et D.

- 1) a) Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AH}$.
b) Calculer les distances BB' ; BH et AH puis en déduire que : $AG = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.
- 2) Soit (Γ) l'ensemble des points M de E tels que : $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 54$.
a) Vérifier par calcul que (Γ) passe par les points A, B, C et D.
b) Montrer que (Γ) est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.
- 3) Soit (Π) l'ensemble des points M tels que : $3MA^2 - MB^2 - MC^2 - MD^2 = 18$.
a) Démontrer que (Π) est le plan passant par H et de vecteur normal $\overrightarrow{AH}$.
b) Montrer que (Π) passe par les points B, C et D.
- 4) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $(\Pi) \cap (\Gamma)$.
- 5) On donne $A(2; 3; -2)$; $B(-1; 0; -2)$; $C(2; 0; 1)$ et $D(-1; 3; 1)$ et ABCD est bien un tétraèdre régulier d'arête $3\sqrt{2}$.
a) Calculer les coordonnées de H.
b) Soit p la projection orthogonale sur le plan (BCD). Démontrer que l'ensemble des antécédents de H par p est la droite (AG).

Exercice 1

On lance n fois de suite un dé non pipé, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et on considère la variable aléatoire X, qui représente le nombre de fois où l'on obtient le chiffre 6.

- 1) Exprimer en fonction de n , la probabilité de chacun des événements suivants :
a) A : « le chiffre 6 n'apparaît aucune fois »
b) B : « le chiffre 6 apparaît une seule fois »
c) C : « le chiffre 6 apparaît au moins deux fois »
- 2) À tout entier naturel $n \geq 1$, on associe le nombre réel $p(n) = 1 - \frac{5^n + n5^{n-1}}{6^n}$.
a) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $p(n+1) > p(n)$.
b) Calculer $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$ et $p(4)$; puis déduire les valeurs de n pour lesquelles $p(n) > \frac{1}{10}$.
- 3) Déterminer la valeur de n pour que l'écart-type de X soit une solution de l'équation $x^2 - 25 = 0$.

Exercice 2

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On désigne par (P) le plan d'équation cartésienne $x + y + z - 3 = 0$ et par (D) la droite passant par le point A(0; 3; 0) et dirigée par le vecteur d'équation $\vec{j} - \vec{k}$.

- 1) Montrer que la droite (D) est incluse dans le plan (P).
- 2) Montrer qu'il existe un unique plan (Π) tel que le demi-tour d'axe (D) soit la composée de la réflexion S_P de plan (P) par la réflexion S_Π de plan (Π) .
- 3) Donner une équation cartésienne de (Π) .
- 4) Soit (P') le plan d'équation $2x - y - z + 3 = 0$. On considère le plan (Π') parallèle à (P') et passant par O.
a) Déterminer une équation cartésienne de (Π') .

- b) Vérifier que $A \in (P')$, puis déterminer les coordonnées de l'image de A par la projection orthogonale sur (Π') .
- c) Déterminer l'écriture analytique de $S_{\Pi'} \circ S_{P'}$ où $S_{\Pi'}$ et $S_{P'}$ sont respectivement les réflexions de plans (Π') et (P') .

Exercice 3

On pose

$$I(a, n) = \int_0^1 x^a (1-x)^n dx \quad \text{avec } a \in \mathbb{N}^* ;$$

$$n \in \mathbb{N}^* \text{ et } I(a, 0) = \int_0^1 x^a dx$$

Montrer, à l'aide d'une intégration par parties

$$I(a+1, n) = \frac{a+1}{n+1} I(a, n+1).$$

2. Établir que

$$I(a, n) - I(a, n+1) = I(a+1, n).$$

En déduire que

$$I(a, n+1) = \frac{n+1}{n+a+2} I(a, n).$$

Soit $a \in \mathbb{N}^*$, calculer $I(a, 0)$

et démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$I(a, n) = \frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n+1)}.$$

PROBLÈME

Partie A

Dans le plan P rapporté à un repère orthonormé (O, e_1, e_2) . On considère les points $A(1, 0)$ et $B(-1, 0)$. À tout point M du plan de coordonnées $(x; y)$; on associe le nombre complexe $z = x + iy$ affixe de M.

Soit f l'application de P dans P qui à tout point M associe le point M_1 l'affixe

$$z_1 = x_1 + iy_1 \text{ tel que } z_1 = iz - (1+i).$$

- a) Montrer que $\text{Mes}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM_1}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $BM_1 = AM$.

- b) Préciser la nature de f et donner ses éléments caractéristiques.
- c) Exprimer les coordonnées de M_1 en fonction de celles de M.
- d) Déterminer et représenter l'ensemble des points M_1 lorsque M décrit le cercle de diamètre $[AB]$.

- 2) Le nombre réel λ fixé. On considère l'application f_λ de P dans P qui à tout point M associe le point M' barycentre des points M, M_1 et A affectés des coefficients respectifs λ , $-\lambda$ et 1. On note $z' = x' + iy'$ l'affixe de M'.

- a) Établir que $z' = \lambda(1-i)z + \lambda(1+i)z + 1$.
- b) Déterminer la nature de f_λ et ses éléments caractéristiques.
- c) Préciser pour quelles valeurs de λ , l'application f_λ est une rotation et donner dans ce cas son angle et l'affixe de son centre.

Partie B

On considère la fonction numérique g de variable réelle x définie par :

$$g(x) = \left(\frac{x}{x+1} \right)^{\sqrt{x^2+x}}. \text{ Soit } f \text{ la fonction numérique d'une variable réelle définie par :}$$

$$f(x) = \ln \left(\frac{x}{x+1} \right) + \frac{2}{2x+1}.$$

- 1) a) Vérifier que l'ensemble de définition de f est $D_f =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$ puis calculer les limites de f aux bornes de D_f .
- b) Étudier les variations de f sur D_f puis dresser son tableau des variation.
- 2) a) Déterminer D_g l'ensemble de définition de la fonction g, puis calculer les limites de g aux bornes de D_g .
- b) Établir que $\forall x \in D_g$

$$g'(x) = \frac{(2x+1)f'(x)}{2\sqrt{x^2+x}} g(x).$$

En déduire les variations de g puis dresser son tableau des variation.

- c) Tracer la courbe (C_g) et ses asymptotes

dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
unité = 2 cm.

SUJET 19

Exercice 1

L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- On considère le plan (Π) d'équation cartésienne $2x - y + z = 1$.
 Déterminer l'expression analytique de la réflexion S de plan (Π) .

- Soit f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ dont l'expression analytique est

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x - 2y - 2z + 6) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x - y + 2z - 6) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x + 2y - z + 12) \end{cases}$$

Démontrer que f est un demi-tour dont on précisera l'axe (Δ) .

Exercice 2

A/- Répondre par vrai ou faux en justifiant à chaque fois.

- La fonction $x \mapsto (e^x - 1)\ln(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures.
- $z' = (1 - \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{6}} + 1 + \sqrt{2}$ est l'écriture complexe d'une similitude d'angle de mesure $\frac{\pi}{6}$.
- Le système $\begin{cases} x = -2\cos(\theta) + 1 \\ y = 3\sin(\theta) - 2 \end{cases} \theta \in \mathbb{R}$ est la représentation paramétrique d'une ellipse.
- Le domaine de définition de la fonction g définie par $g(x) = \int_x^{3x} e^{\frac{1}{2-t}} dt$ est $]-\infty; \frac{2}{3}[\cup]2; +\infty[$.

B/- On considère l'équation $(E): 13x - 84y = 7$

- Vérifier que le couple $(91; 14)$ est une solution de l'équation (E) .
- Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) .
- En déduire les solutions de (E) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
- Montrer que pour tout couple solution (x, y) de (E) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ on a :
 $\text{pgcd}(x, y) = 1$ ou $\text{pgcd}(x, y) = 7$.
- En déduire les solutions (x, y) de (E) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ telles que :
 - x et y sont premiers entre eux.
 - $\text{pgcd}(x, y) = 7$.

Exercice 3

Une urne contient 2 boules noires et 2 boules blanches. On tire successivement et sans remise toutes les boules.

- Déterminer tous les événements élémentaires liés à cette expérience aléatoire et calculer leur probabilité.
- Peut-on dire qu'il y a équiprobabilité.
- Soit X la variable aléatoire qui à chaque événement élémentaire associe le rang k de la dernière boule noire tirée.
 - Déterminer la loi de probabilité de X .
 - Calculer l'espérance mathématique et la variance de X .
 - En déduire son écart-type.

PROBLÈME

Partie A

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}. \text{ On note } (\Gamma) \text{ sa courbe représentative dans un repère orthonormé } (O, \vec{i}, \vec{j}) \text{ dans lequel l'unité graphique est de 3 cm.}$$

présentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel l'unité graphique est de 3 cm.

- Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f .
 - Calculer les limites de f aux bornes de D_f .
- Étudier la dérivabilité de f en -1 en la

interpréter graphiquement les résultats.

Dresser le tableau de variations de f .

Tracer (Γ) .

Déterminer une primitive G de la fonction g

définie par : $g(x) = \frac{x^2 + x^3}{1-x}$.

Soit D le domaine formé des points

$M(x, y)$ du plan tels que :
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{2}{3} \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

On fait tourner D autour de l'axe des abscisses. On obtient un solide (Σ) .

a) Représenter (Σ) .

b) On coupe le solide (Σ) par un plan perpendiculaire à l'axe (OI) en un point H

d'abscisse $\left(0 \leq x \leq \frac{2}{3}\right)$. On note $S(x)$

l'aire de l'intersection de (Σ) et de ce plan.

Calculer $S(x)$. En déduire que la fonction

$x \mapsto S(x)$ est continue sur $\left[0, \frac{2}{3}\right]$.

Calculer le volume V du solide (Σ) en cm^3 .

Partie B

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques définies par :

$$0 \leq u_0 \leq v_0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

Démontrer par récurrence que les suites (u_n) et (v_n) sont strictement positives.

a) Calculer $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2$ et en déduire que

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$.

b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que (v_n) est décroissante

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_0$, puis

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_0 \leq v_n.$$

Déduire la nature des suites (u_n) et (v_n) .

c) Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0).$$

d) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) ont

même limite.

SUJET 20

Exercice 1

1) Soit n un entier naturel non nul.

a) Quel est le nombre de diviseurs positifs de l'entiers 2^n ?

b) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n , les entiers naturels 2^n et 1365 sont premiers entre eux.

2) Démontrer que : $\int_0^2 x^{12} (2-x)^2 dx = \frac{2^{15}}{1365}$.

3) p et q sont deux entiers naturels non nuls. En utilisant un changement de variable affine, démontrer que

$$\int_0^2 x^p (2-x)^q dx = \int_0^2 x^q (2-x)^p dx.$$

4) En déduire sans calcul et sous forme d'une fraction irréductible la valeur de l'intégrale

$$\int_0^2 x^2 (2-x)^{12} dx.$$

5) Soit n un entier naturel non nul. On considère $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$.

a) Calculer I_0 .

b) En utilisant une intégration par parties, déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} . En déduire la valeur de I_5 .

Exercice 2

ABCD est un parallélogramme de sens indirect tel que $AB = BD$. Soit f l'application affine définie de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ lui-même par : $f(A) = B$, $f(B) = D$ et $f(D) = C$.

Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et l'application $g = t^{-1} \circ f$.

1) Justifier que g est une application affine du plan.

2) On note $B' = g(B)$.

a) Vérifier que $\overrightarrow{DB'} = -\overrightarrow{AB}$ et montrer que $\overrightarrow{BB'} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

b) Démontrer que la droite (AD) est invariante par g .

3) Déterminer l'écriture analytique de g dans le

repère (A, B, D).

- 4) Soit M un point du plan, $M' = g(M)$ et I le milieu de $[MM']$.
 - a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe que l'on précisera et que $I \in (AD)$.
 - b) Donner en justifiant, la nature exacte de g puis en déduire la nature de f.
- 5) Construire l'image M' d'un point quelconque M du plan par f.

Exercice 3

- 1) On lance trois fois de suite un dé non
- 2) pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
 - a) Calculer la probabilité d'obtenir à chaque lancer un multiple de 3.
 - b) On note X la variable aléatoire qui associe à ces trois lancers associe le nombre de multiples de trois obtenus. Déterminer la loi de probabilité de X.

PROBLÈME

Le problème comporte trois parties dépendantes A, B et C.

Partie A

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x).$$

- 1) Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- 2) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations. (Prendre : $1 - \ln 2 \approx 0,3$)
- 3) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]1; +\infty[$ une solution unique notée α et vérifier qu'une valeur approchée de α à 10^{-1} près est 3,9.
- 4) Calculer $f(0)$ et préciser, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$.

Partie B :

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$

$$\text{par } \begin{cases} g(0) = 0 \\ g(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} \text{ si } x > 0 \end{cases}.$$

- 1) Démontrer que g est continue sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
- 2) Étudier la dérivabilité de g en 0.
- 3) Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a : $g'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}} f(x)$.
- 4) a) Calculer la limite de g en $+\infty$.
Dresser le tableau des variations de g.
(On prendra $g(3,9) = 0,8$).
- 5) Le plan est rapporté au repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1cm sur l'axe $(O; \vec{i})$ et 10cm sur l'axe $(O; \vec{j})$.
Construire la courbe (Γ) représentative de g.

Partie C :

On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe (Γ) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

- 1) Démontrer que la fonction g_1 définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g_1(x) = \sqrt{x} \ln(1+x)$ est dérivable en 0.
 - a) Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $\varphi(x) = 2\sqrt{x} \ln(1+x) - \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt$.
Montrer que φ est dérivable en tout point de l'intervalle $[0; +\infty[$ et que $\varphi'(x) = g(x)$.

En déduire que : $\int_0^1 g(x) dx = 2\ln(2) - \int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt$

SUJET 21

Exercice 1

I/- Dans un système de numération de base a, on considère les nombres

$$A = \overline{211}, B = \overline{312} \text{ et } C = \overline{133032}.$$

- 1) Justifier que a est strictement supérieur à 3.
- 2) On suppose que $C = A \times B$.
 - i) Montrer que $a^3 - 3a^2 - 2a - 8 = 0$.
 - ii) En déduire que a divise 8.
 - iii) Déterminer alors a.

a) Démontrer que si k est un entier naturel pair, alors $2^{6k+4} + 3^{6k+4} \equiv 2[5]$

b) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que l'on ait :

$$5^n - 2 \equiv 0[7] \text{ et } 2^n + 3^n \equiv 2[5]$$

Exercice 2

Calculer :

a) La limite de la fonction $x \mapsto \frac{2\sin(3x)}{e^{2x} - 1}$

lorsque x tend vers 0.

b) La limite de la fonction $x \mapsto \frac{\ln(x) - 1}{x - e}$

lorsque x tend vers e .

Soit g la fonction définie dans l'intervalle

$$\left[0; \frac{\pi}{4}\right] \text{ par : } g(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}.$$

a) Déterminer les réels a et b

indépendants de la variable x tel que

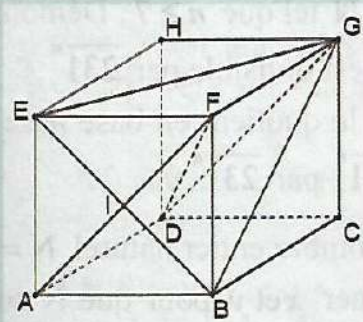
$$g'(x) = \frac{a}{\cos^4 x} + \frac{b}{\cos^2 x}.$$

b) En déduire la primitive F de la fonction

$$f: x \mapsto \frac{1}{\cos^4 x}, \text{ qui prend la valeur 1 en } \frac{\pi}{4}$$

Exercice 3

ABCDEFGH est un cube d'arête a et I est le centre de la face ABFE.



a) Justifier que la droite (AD) est orthogonale au plan (ABF).

b) En déduire que les droites (AD) et (BE) sont orthogonales.

c) Calculer les produits vectoriels :

$$\overrightarrow{BF} \wedge \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{IB} \wedge \overrightarrow{IF} \text{ et } \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AF}.$$

d) On considère les vecteurs $\vec{i} = \frac{1}{a} \overrightarrow{AB}$;

$$\vec{j} = \frac{1}{a} \overrightarrow{AD} \text{ et } \vec{k} = \frac{1}{a} \overrightarrow{AE}.$$

a) Vérifier que $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé de l'espace.

b) Montrer que la droite (DF) est orthogonale au plan (EBG).

c) Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG).

d) Calculer en fonction de a le volume du tétraèdre FEBG.

e) Soit O le point d'intersection de la droite (DF) et du plan (EBG).

Quelle est l'ensemble des antécédents de O par la projection orthogonale sur (DF) ?

PROBLÈME

Partie A

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. $1 \text{ unité} = 2 \text{ cm}$

Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives $-2i, 4-2i, 4+2i$ et 1 .

1) Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure.

Donner la nature du triangle ABC.

2) Soit f une application du plan dans lui-même qui à tout point $M \neq A$ et d'affixe

z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{z - 4 - 2i}{i}.$$

a) Déterminer les points B' et C' images respectives de B et C par f .

b) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z telle que $|z'| = 1$.

3) a) Montrer que pour tout nombre complexe z distinct de $-2i$ on a :

$$(z' - 1)(z + 2i) = -4 - 4i.$$

b) Montrer que pour tout point $M \neq A$ et d'image M' par f , on a :

$$i) \quad M' \neq D.$$

$$ii) \quad \overrightarrow{DM'} \times \overrightarrow{AM} = 4\sqrt{2}.$$

$$iii) \quad \text{Mes}(\vec{e}_1, \overrightarrow{DM'}) + \text{Mes}(\vec{e}_1, \overrightarrow{AM}) = \frac{5\pi}{4} [2\pi].$$

Partie B

Dans le plan P rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le cercle (C) de centre O et de rayon 1. On note A et B les points de coordonnées respectives $(1; 0)$ et $(-1; 0)$.

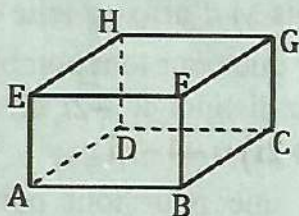
- 1) Pour tout point K d'abscisse x du segment $[AB]$ distinct de A et de B , soit (Δ) la perpendiculaire à (AB) passant par K . La droite (Δ) coupe le cercle (C) en deux points M et M' . Calculer en fonction de x l'aire du triangle AMM' .
- 2) Soit la fonction numérique f de courbe (C_f) définie par : $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$.
 - a) Étudier la dérivabilité de f en 1 et -1 . En déduire les tangentes à (C_f) à la courbe en 1 et -1 .
 - b) Calculer $f'(x)$ sur son ensemble de dérivabilité que l'on précisera. f' désigne la dérivée de la fonction f .
 - c) Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau des variations de f .
 - d) Calculer $f(0)$ et tracer (C_f) .
l'unité = 4cm.
- 3) Pour quelle valeur de x l'aire du triangle AMM' est-elle maximale ? En déduire que pour cette valeur x le triangle AMM' est équilatéral.

SUJET 22

Exercice 1

L'unité est le cm

ABCDEFGH est un pavé droit tel que :
 $AB = AD = 2$; $AE = \sqrt{2}$.



- 1) a) Calcule les produits vectoriels : $\overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{DG} \wedge \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{AF}$.
- b) Soit Γ l'ensemble des points M de l'espace E tels que : $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = 6$. Soit

le projeté orthogonal de H sur la droite (AB) .

Montrer que : $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MH} \wedge \overrightarrow{AB}$, puis déterminer (Γ) .

- 2) Déterminer l'ensemble (Γ') des points M de E tels que : $-2ME^2 + MB^2 + MH^2 = 12$.
- 3) On pose $\vec{i} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{j} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AE}$.
 - a) Vérifier que $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé direct de l'espace.
 - b) Écrire une équation cartésienne de (Γ') .
 - c) Soit (P) le plan d'équation cartésienne :

$$x + y + \frac{\sqrt{2}}{2}z + 1 = 0.$$

Montrer que $E \in (P)$. Déterminer l'ensemble des antécédents de E par la projection orthogonale sur (P) . Écrire une représentation paramétrique de cet ensemble.

Exercice 2

- 1) Tout nombre entier naturel x s'écrit $x = a_p a_{p-1} \dots a_1 a_0$ en base 10.
 - a) Démontrer que $x \equiv a_0 [10]$.
 - b) Déterminer le chiffre des unités du nombre $(2917)^{543}$.
- 2) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 7$. Démontrer que $\overline{46431}^n$ est divisible par $\overline{231}^n$.
Préciser le quotient en base n de la division de $\overline{46431}^n$ par $\overline{231}^n$.
- 3) Soit le nombre entier naturel $N = \overline{2x4y}^5$.
Déterminer x et y pour que N soit divisible par 8.
- 4) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, l'entier $31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par 13.

Exercice 3

- 1) Soit g la fonction numérique définie par :

$$g(x) = \int_2^{2x} e^{\left(\frac{t}{t-1}\right)} dt$$

- a) Démontrer que g est définie sur l'intervalle $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$
- b) Calculer $g(1)$ puis dresser le tableau de signe g .
- c) Calculer la dérivée de g et donner le sens de variation de g .
- 2) L'espace E est muni d'un repère orthonormé (O, I, J, K) **1 unité = 1 cm**
Représenter en perspective le solide (Σ) défini par :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \\ z \geq -1 \end{cases}$$
, puis calculer le volume de (Σ)

PROBLÈME

Partie : A

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan

- 1) Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par : $f(x) = \frac{x-1}{x-2} + \ln|x-2|$.
- a) Étudier et dresser le tableau des variations de f .
- b) Calculer $f(1)$ et en déduire le signe de f suivant les valeurs de x .
- c) Quelle est l'image par f de l'intervalle $]2; +\infty[$?
- d) Soit h la restriction de f à l'intervalle $] -\infty; 2[$.

Montrer que h est une bijection de l'intervalle $] -\infty; 2[$ vers un intervalle que l'on précisera.

Dresser le tableau des variations de h^{-1} bijection réciproque de h .

- 2) On définit la fonction numérique g par : $g(x) = (x-1)\ln|x-2|$ de courbe (C)
- a) Étudier les variations de g .
- b) Montrer que (C) coupe l'axe des abscisses en deux points distincts dont l'un est un point d'inflexion à (C) .
- c) Écrire une équation de la tangente (T) à (C) en ce point d'inflexion puis tracer (T) et (C) .

Partie : B

On définit une suite numérique (u_n) par : $u_0 = \frac{4}{5}$ et $u_{n+1} = \cos u_n + \frac{1}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et on pose

$$f(x) = \cos x + \frac{1}{4} \text{ et } K = \left[\frac{3}{4}; 1 \right]$$

- 1) Montrer que l'équation $\cos x = x - \frac{1}{4}$ admet une solution unique $\alpha \in K$
- 2) Montrer que $f(K) \subset K$ et $\forall x \in K, |f'(x)| \leq 0,9$.
- 3) a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in K$ et $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,9|u_n - \alpha|$.
- b) En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq (0,9)^n \left| \frac{4}{5} - \alpha \right|$$
- 4) Démontrer que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

SUJET 23

Exercice 1

- 1) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2^n par 7 pour tout entier naturel n appartenant à l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- 2) a) Montrer que $2^{n+3} - 2^n$ est divisible par 7.
- b) En déduire les valeurs de n pour lesquelles 2^n a pour reste 1 dans la division euclidienne par 7.
- 3) a) Montrer 2^n et 2^{4n+3} ont le même reste par la division euclidienne par 7.
- b) Quel est le reste de la division euclidienne de $2^{999} \times 9^{222}$ par 7.

Exercice 2

- 1) Soit le nombre complexe $z = 1 - \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$.
- a) Démontrer que
$$z = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \right)$$
- b) Déterminer le module et un argument de z .
- c) En déduire la valeur exacte de chacun des réels : $\sin \frac{\pi}{12}, \sin \frac{5\pi}{12}$ et $\cos \frac{5\pi}{12}$.

2) On considère le nombre complexe

$$z = e^{i\theta} - ie^{-i\theta}$$

a) Démontrer que $z = z_0 \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ où z_0 est un nombre complexe indépendant de θ .

b) Donner alors le module et l'argument de z pour $\theta \in]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$ et pour $\theta \in]\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}[$.

3) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

$$\arg(2z - 2 + 3i) \equiv \frac{\pi}{5} [\pi].$$

Exercice 3

L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(-3, 0, 1)$; $B(-2, 5, 1)$ et $C(1, -1, 2)$.

1) Démontrer que les points O, A, B et C ne sont pas coplanaires.

2) Calculer le volume du tétraèdre OABC.

3) Soit G l'isobarycentre des points A, B et C. On note (P) le plan médiateur du segment [OG].

a) Déterminer une équation cartésienne de (P).

b) Déterminer l'expression analytique de la réflexion $S_{(P)}$ de plan (P).

c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $S_{(P)} \circ S_{(OG)}$ où $S_{(OG)}$ est le demi-tour d'axe (OG).

PROBLÈME

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité d'axe 1 cm)

Partie A

Soit ϕ l'application affine du plan $\mathcal{P}$ qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = x - y \end{cases}$$

1) Montrer que $\phi \circ \phi = Id$ et que ϕ n'est pas une isométrie.

2) Déterminer l'ensemble (Δ) des points

invariants par ϕ .

3) Montrer pour tout point M du plan, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe.

4) En déduire la nature de ϕ et ses éléments caractéristiques.

Partie B

On considère la fonction $f: x \mapsto x + \sqrt{x^2 - 4}$ de courbe $(\mathcal{C}_f)$

1) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2) Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique en $+\infty$.

3) a) Résoudre dans $]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$

$$\text{l'inéquation : } x + \sqrt{x^2 - 4} > 0$$

b) Résoudre dans $]-2; 2[$ l'inéquation :

$$x - \sqrt{4 - x^2} \geq 0.$$

4) a) Étudier la dérivabilité de f en -2 et 2 . Interpréter graphiquement les résultats.

b) Calculer la dérivée de f sur son ensemble de dérivabilité.

c) Dresser le tableau des variations de f .

d) Tracer la courbe de f .

5) Soit g la fonction numérique définie par :

$$g(x) = x - \sqrt{x^2 - 4} \text{ de courbe } (\mathcal{C}_g).$$

a) Montrer que $(\mathcal{C}_g)$ et $(\mathcal{C}_f)$ sont symétriques par rapport au point O origine du repère.

b) Tracer $(\mathcal{C}_g)$ sur la même figure que $(\mathcal{C}_f)$.

6) Soit (Γ) l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tel que $y^2 - 2xy + 4 = 0$ avec $x \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$.

Montrer que (Γ) est la réunion des restrictions de $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ sur l'ensemble $]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$.

7) Montrer que l'image (Γ') de (Γ) par ϕ est une hyperbole équilatère dont on donnera une équation réduite.

SUJET 24

Exercice 1

1) On considère les fonctions suivantes :

$$g: x \mapsto \frac{x^2+3x}{x^2-1} \text{ et } t: x \mapsto \tan^2 x$$

a) Déterminer deux réels a et b tels

$$\text{que } \frac{1+3x}{x^2-1} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} \text{ pour tout}$$

$x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, puis calculer l'intégrale

$$I = \int_2^3 g(x) dx$$

b) Calculer la valeur moyenne μ de la

fonction t sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

Donner une interprétation graphique de μ .

2) L'espace E est muni du repère orthonormé (O, I, J, K) . $1 \text{ unité} = 2 \text{ cm}$

a) Représenter en perspective le solide (Σ)

$$\text{défini par : } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \\ -1 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

b) Calculer le volume de (Σ) .

Exercice 2

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère la base canonique définie par : $\vec{e}_1(1, 0, 0)$; $\vec{e}_2(0, 1, 0)$ et $\vec{e}_3(0, 0, 1)$.

Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini

$$\text{par : } g(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 ; g(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \text{ et}$$

$$g(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2.$$

a) Déterminer l'expression analytique de g .

b) Déterminer $N(g)$ le noyau de g . En déduire une base.

c) On note $\text{Im}(g)$ le sous espace vectoriel image de g .

d) Montrer que les vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ appartiennent à $\text{Im}(g)$.

e) Montrer que la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de $\text{Im}(g)$.

f) Démontrer que $\text{Im}(g) \oplus N(g) = \mathbb{R}^3$.

Exercice 3

Une urne contient 4 boules blanches et 5 boules noires indiscernables au toucher.

On tire au hasard et successivement quatre boules en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne.

Soit X la variable aléatoire qui à la fin de chaque expérience aléatoire associe le nombre de boules blanches obtenues.

1) Déterminer l'univers image Ω par X .

2) Calculer la probabilité de l'événement $\{1 \leq X < 3\}$.

3) Déterminer la loi de probabilité de X .

4) Définir et représenter la fonction de répartition de X .

PROBLÈME

On considère dans le plan $\mathcal{P}$ un triangle ABC rectangle isocèle en A et de sens direct tel que $AB = 1$.

Soit D le point du plan tel que C soit le milieu de [BD]. Soit f l'application affine de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ telle que : $f(A) = A$; $f(B) = D$; $f(C) = B$.

On considère le repère $(A ; B ; C)$. $1 \text{ unité} = 1,5 \text{ cm}$

Partie A

1) Déterminer les coordonnées du point D et écrire une équation de la droite (BC)

2) On note (x, y) et (x', y') les couples de coordonnées des points M et M' respectivement.

a) Soit φ l'endomorphisme associé à f . Montrer que φ est un automorphisme.

b) Montrer que $M' = f(M)$ si et seulement si
$$\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = 2x \end{cases}$$

c) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe que l'on précisera.

3) a) Déterminer l'ensemble $(\tilde{A})$ des point invariants par f .

b) Montrer que la droite (BC) est globalement invariante par f .

- c) En déduire qu'il existe un unique point K de la droite (BC) invariant par f .

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{KB}$ en fonction de $\overrightarrow{KC}$.

- 4) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f . Construire l'image M' d'un point quelconque M par f .

Partie B

La fonction g de la variable x est définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} & \text{si } x \leq 0 \\ g(x) = -x \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}; (\mathcal{C}) \text{ sa courbe dans}$$

un plan rapporté à un repère orthonormé ayant 2 centimètres comme longueur d'une unité sur ses axes.

- Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction g en 0.
- Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
- Justifier que l'équation $g(x) = -1$ admet une unique solution dans l'intervalle $]1,5; 2[$.
- a) Écrire une équation cartésienne de chaque demi-tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.
b) Déterminer les branches infinies de $(\mathcal{C})$.
c) Construire $(\mathcal{C})$.

- 5) a) Vérifier que pour tout $x \leq 0$,

$$g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \text{ puis calculer l'aire du}$$

domaine du plan limité par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$.

- b) Construire l'image $(\mathcal{C}')$ de $(\mathcal{C})$ par f .

SUJET 25

Exercice 1

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}$, développer et réduire

$$(n+1)^2 - (n-1)^2.$$

En déduire que pour $p \in \mathbb{N}$, si $p \equiv 0[4]$ alors p peut s'écrire comme différence des carrés d'entiers naturels.

- 2) ABCD est un carré de centre O et de sens

direct tel que $AB = 6$ cm.

Soit E le milieu du segment [CD] et DEFG le carré de sens direct de centre O'. Soit S la similitude directe de centre D qui transforme A en B.

- a) Déterminer les éléments caractéristiques de S . Préciser l'image de E par S .

En déduire la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{BF})$.

- b) On note (Γ) le cercle circonscrit au carré ABCD et M un point quelconque de (Γ) . Vérifier que $DO' = \frac{1}{2}DO$. En déduire qu'il existe une similitude directe S' qui transforme O en O'. Préciser ses caractéristiques.

Quel ensemble décrit l'image de M par S' lorsque M décrit (Γ) ?

- 3) Soit a un réel tel que $3 < a < 4$. On considère la fonction $f: x \mapsto \sqrt{a^2 - x^2}$ de courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ unité d'axes : 1 cm.

- a) Représenter graphiquement $(\mathcal{C}_f)$ puis montrer que pour tout point M de $(\mathcal{C}_f)$ on a : $OM = a$.
b) On fait tourner la courbe $(\mathcal{C}_f)$ autour de l'axe des abscisses. Calculer le volume du solide ainsi obtenu.

Exercice 2

Pour tout entier naturel non nul n , on pose

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx$$

- 1) a. Démontrer que : $0 \leq I_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$.

- b) En déduire que la suite (I_n) est convergente et donner sa limite.

- c) En remarquant que $\forall x \in [0; 1]$ on a

$$\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}, \text{ Calculer : } \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx$$

- 2) Pour tout x de $[0; 1]$ et pour tout $n \geq 2$, on pose : $S_n = 1 - x + \dots + (-1)^n x^n$.

- a) Démontrer que : $S_n = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$
- b) Démontrer que : $1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$.
- c) Démontrer que : $I_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1} \right) \right]$.
- d) En déduire la valeur exacte de : $\int_0^1 x^2 \ln(1+x) dx$.
- e) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \right)$

PROBLÈME

Partie A

Le Plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère l'application $f : P \rightarrow P$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'

$$\text{tel que } z' = \left(-\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i \right) \bar{z} + 1 + 3i.$$

a) Montrer que f est une application affine. Écrire la matrice A dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ de son endomorphisme associé φ .

b) Démontrer que f est une isométrie.

c) a) Déterminer l'ensemble des points invariants par f .

b) Montrer que $f \circ f = t_{2\vec{w}}$ ou $\vec{w}$ est un vecteur dont on précisera les coordonnées.

Soit $S = f \circ t_{-\vec{w}}$.

a) Démontrer que S est une symétrie orthogonale dont on précisera l'axe (Δ) .

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de f .

Partie B

On considère la fonction numérique F définie

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+|t|+t^2}} dt$$

On note f la fonction numérique définie par : $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+|t|+t^2}}$.

1) a) Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$. En déduire l'ensemble de définition de F .

b) Démontrer que f est une fonction paire.

c) En utilisant le changement de variable $u = -t$, démontrer que F est une fonction impaire.

2) On étudie désormais F sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

a) Démontrer que $\forall t \in [0; +\infty[$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{1+|t|+t^2}} \geq \frac{1}{1+t}.$$

b) En déduire que $\forall x \in [0; +\infty[$, on a $F(x) \geq \ln(x+1)$.

c) Déterminer la limite de F en $+\infty$.

3) a) Calculer $F'(x)$, pour tout $x \geq 0$ (F' est la dérivée de F).

b) Dresser le tableau des variations de F

4) a) Démontrer que $\forall t \in [0; +\infty[$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{1+|t|+t^2}} \leq 1.$$

b) En déduire que $\forall x \in [0; +\infty[$, on a $F(x) \leq x$. Donner la position de la courbe de F par rapport à la droite $(D) : y = x$.

5) a) Démontrer que $\forall t \in [1; +\infty[$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{1+|t|+t^2}} \leq \frac{1}{t}.$$

b) En déduire que $\forall x \in [1; +\infty[$, on a :

$$F(x) \leq \int_0^1 f(t) dt + \ln x \text{ et que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0.$$

6) Tracer (D) et donner l'allure générale de la courbe de F .

SUJET 26

Exercice 1

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(0, \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'application f du plan

dans lui-même qui à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe Z' telle que : $Z' = -(\sqrt{3} + i)z - 1 + (1 + \sqrt{3})i$.

- Justifier que f est une similitude directe et préciser son centre $\bar{U}$, une mesure de son angle et son rapport.
- M_0 est le point d'affixe $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i$.
Donner une mesure en radian de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{UM_0})$.
- On considère la suite des points (M_n) définie pour tout entier naturel n par : $M_{n+1} = f(M_n)$. On note z_n l'affixe de M_n .
 - Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, z_n - i = 2^n e^{i \frac{7n\pi}{6}} (z_0 - i)$.
 - $\forall n \in \mathbb{N}$, calculer ΩM_n puis déterminer le plus petit entier n tel que $\Omega M_n < 10^2$.
 - Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation diophantienne : $7x - 12y = 1$.
- Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite d'origine Ω dirigée par $\vec{u}$. Préciser son plus petit élément.

Exercice 2

Une urne contient dix boules indiscernables au toucher. Cinq boules portent le nombre -3, trois portent le numéro 1 et deux portent le numéro -1. Une épreuve consiste à extraire successivement et sans remise 3 boules de cette urne.

On désigne par « a » le nombre porté par la 1^{ère} boule extraite ; « b » le nombre porté par la 2^{ème} boule extraite et « c » le nombre porté par la 3^{ème} boule extraite. On construit alors :

L'équation différentielle (E) : $y' + by = -\frac{e^x}{x^2}$ où y est définie sur $]0; +\infty[$.

Les plans (P) et (P') d'équations respectives : $ax + cy + z = 0$ et $x + y + 2z = 0$ dans l'espace $\mathcal{E}$ rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. a, b et c étant les résultats des tirages.

- Déterminer la probabilité d'obtenir deux boules portant le nombre -3 et une portant

le nombre 1.

- a-) Pour quelle valeur de « b » la fonction h définie par $h(x) = \frac{e^x}{x}$ est solution de l'équation (E) ?
b) Déterminer la probabilité de l'événement A : « h est solution de (E) ».
- a) Calculer la probabilité de l'événement B : « (P) et (P') sont perpendiculaires ».
b) Justifier que l'événement C : « (P) et (P') sont parallèles » est impossible.
- On pose $(D) = (P) \cap (P')$.
 - Montrer que $O \in (D)$ et exprimer en fonction de a et c les coordonnées d'un vecteur directeur de (D) .
 - Calculer la probabilité de l'événement D .

dereprésentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

PROBLÈME

Ce problème comporte 3 parties indépendantes.

Partie A :

Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$I_n = \frac{1}{2^{n+1} n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}} dt$$

- À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 .
- Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2^{n+1} (n+1)!}$.
- En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1!} + \frac{1}{2^2} \times \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{n!}$.

Partie B :

(Γ) est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x; y)$ vérifiant :

$$x^2 - y^2 - 2\sqrt{3}xy + 2 = 0$$

- On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et on considère la transformation g qui à un point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = jz$.
Montrer que g est une rotation et préciser

ses éléments caractéristiques.

- 2) H désigne l'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant $\operatorname{Re}(z^2) = 1$.
Déterminer une équation cartésienne de H et le construire.
- 3) Montrer qu'un point M d'affixe z appartient à (Γ) si et seulement si $\operatorname{Re}[(jz)^2] = 1$.
- 4) Montrer que (H) est l'image de (Γ) par la transformation g . En déduire la nature de (Γ) et tracer (Γ) sur la figure précédente.

SUJET 27

Exercice 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (Unité graphique 1 cm). On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z suivante :

$$z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = 0$$

I. Résolution de l'équation (E)

- 1) Montrer que $-i$ est solution de (E) .
- 2) Déterminer les nombres réels a, b, c tels que $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z+i)(az^2 + bz + c)$

Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

II. On appelle A, B et C les points d'affixes respectives $4+i, 4-i, -i$.

- 1) Placer les points sur une figure que l'on complètera dans la suite de l'exercice.
- 2) Le point Ω est le point d'affixe 2.
On appelle S l'image de A par la rotation de centre Ω et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$. Calculer l'affixe de S .
- 1) Démontrer que les points B, A, S, C appartiennent à un même cercle (C) dont on déterminera le centre et le rayon.
Tracer (C) .
- 2) À tout point M d'affixe $z \neq 2$, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{iz + 10 - 2i}{z - 2}$.
- a) Déterminer les affixes des points A', B', C' associés respectivement aux points A, B et C .

B et C.

- b) Vérifier que A', B', C' appartiennent à un cercle (C') de centre P , d'affixe i .
Déterminer son rayon et tracer (C') .
- c) Pour tout nombre complexe $z \neq 2$,
montrer que $|z' - i| = \frac{10}{|z - 2|}$. Donner une interprétation géométrique de cette relation.
- d) Soit M un point d'affixe z appartenant au cercle (C) . Démontrer que $|z' - i| = 2\sqrt{5}$.
- e) En déduire à quel ensemble appartiennent les points M' associés aux points M du cercle (C) .

Exercice 2

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un entier naturel n dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009, c'est-à-dire tel que $n^3 \equiv 2009[10000]$.

Partie A

- 1) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2009^2 par 16.
- 2) En déduire que $2009^{8001} \equiv 2009[16]$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 2009^2 - 1 \\ u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1 \end{cases}$$

- 1) a. Démontrer que u_0 est divisible par 5.
b. Démontrer, en utilisant la formule du binôme de Newton, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $u_{n+1} = u_n [u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1)]$
- c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, u_n est divisible par 5^{n+1} .
- 2) a. Vérifier que $u_3 = 2009^{250} - 1$ puis en déduire que $2009^{250} \equiv 1[625]$
b. Démontrer alors que $2009^{8001} \equiv 2009[625]$.

Partie C

- 1) En utilisant le théorème de Gauss et les résultats établis dans les questions

précédentes, montrer que $2009^{8001} - 2009$ est divisible par 10000.

- 2) Déterminer alors un entier naturel dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009.

PROBLÈME

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Le but de cet exercice est de calculer une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin x \sin 2x$

- 1) À l'aide des formules d'Euler, démontrer que la fonction f peut s'écrire :

$$f(x) = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 3x)$$

- 2) Dédurre de ce qui précède la primitive F de f telle que $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

Partie B

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x}, \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) = -x + 2\sqrt{2 - \frac{1}{x}}, \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

(C) Désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

- 1) Étudier la dérivabilité de f en 0 et en 1.
- 2) Montrer que pour tout réel $x \in]1, +\infty[$, $f'(x) < 0$
- 3) Étudier les variations de f , puis dresser son tableau des variations.
- 4) a) Montrer que f réalise une bijection g de $]1, +\infty[$ dans un intervalle J que l'on précisera.
b) Montrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet une unique solution a dans $]1, +\infty[$ que l'on encadrera à 10^{-1} près.
c) Calculer $g^{-1}(\sqrt{6} - 2)$ et $(g^{-1})'(\sqrt{6} - 2)$
d) Montrer que la bijection réciproque de g est dérivable sur J et donner son sens de variation.
- 5) Tracer la courbe (C) de f .

- 6) Montrer que f réalise une bijection h de $[0; 1]$ dans un intervalle K que l'on précisera. Définir h^{-1} et construire la courbe (C') de h^{-1} .

SUJET 28

Exercice 1

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher et parmi lesquelles deux portent le nombre -1, une le nombre 1, trois le nombre 2 et quatre le nombre 2.

On extrait au hasard, successivement et sans remise deux boules de cette urne. On note « a » le résultat obtenu au premier tirage et « b » celui obtenu au second tirage. « a » et « b » étant les réels précédemment définis, on considère :

- l'équation (E) : $2ax - 3by = 1$, où les inconnues x et y sont des entiers relatifs ;
- le nombre complexe $z = a + ib$;
- l'équation différentielle (F) : $ay' + by = 0$, où y est une fonction définie sur $\mathbb{R}$;
- l'endomorphisme f d'un plan vectoriel $\mathbb{P}$ dont la matrice dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\mathbb{P}$ est $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$.

- 1) a-Déterminer tous les couples (a, b) pour lesquels le couple (1, 1) est solution de (E)
b) Quelle est la probabilité pour que le couple (1, 1) soit solution de (E) ?
- 2) a-Quelles sont sous forme algébrique, les racines carrées du nombre complexe $-3 + 4i$?
b) Quelle est la probabilité pour que le nombre z soit une racine carrée de $-3 + 4i$?
- 3) a-Quelle est la forme générale des solutions de l'équation différentielle (F) ?
b) Quelle est la probabilité pour que la fonction f définie par : $f(x) = e^{2x}$ soit solution de (F) ?
- 4) a-Quelle relation y a-t-il entre a et b

permettant que $\ker(f) = \{\vec{0}_P\}$?

- b) En déduire la probabilité de l'évènement « f est un automorphisme de P ».

Exercice 2

A. Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal direct de l'espace et $A(1; 2; 1)$, $B(1; 1; 0)$ deux points.

- 1) Pour tout point $M(x; y; z)$ on pose

$$\vec{u}(M) = \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OM}.$$

Déterminer l'ensemble D des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{OA}$ et $\vec{u}(M)$ soient colinéaires.

- 2) Déterminer l'ensemble S des points M de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\vec{u}(M)$ soient orthogonaux.

B. ABCDEFGH est un cube tel que

$(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormé direct, I le milieu de $[EG]$.

- 1) Préciser les coordonnées de chacun des points A, B, C, D, E, F, G, H, I dans ce repère.
- 2) a-Écrire les équations cartésiennes des plans (ACE) et (CFH).
b) Montrer que ces plans sont perpendiculaires et qu'ils contiennent chacun les points C et I.
- 3) Donner les expressions analytiques des réflexions s et s' par rapport aux plans respectifs (ACE) et (CFH).
- 4) En déduire l'expression analytique du demi-tour d'axe (CI).

PROBLÈME

(Ce problème comporte deux parties indépendantes)

Partie :A

Dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on définit l'application f par son ex-

pression analytique : $\begin{cases} x' = x + y + 3 \\ y' = -x + y - 1 \end{cases}$.

- 1) Montrer que f est bijective.
- 2) a-Donner l'écriture complexe de f .
b) En déduire sa nature et ses éléments caractéristiques.
- 3) Soit (Γ) l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que : $5x^2 + 5y^2 - 6xy - 16 = 0$.
a) Montrer qu'une équation de (Γ') image de (Γ) par f est : $x^2 + 4y^2 - 6x + 8y - 3 = 0$.
b) Quelle est la nature de (Γ') ? Donner ses éléments caractéristiques dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
c) Montrer que (Γ) est une conique dont on précisera la nature, les foyers et les sommets dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
d) Construire (Γ) puis (Γ') .

Partie :B

On désigne par g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{e^x}{1+e^x}.$$

On note (C) la courbe représentative de g dans un repère ortho normal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 4 cm).

- 1) a- Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
b) Construire la courbe (C) et ses asymptotes éventuelles.
- 2) On considère les points M et M' de la courbe (C) d'abscisses respectives x et $-x$.
a) Déterminer les coordonnées du point A milieu du segment $[MM']$.
b) Que représente le point A pour la courbe (C) ?
- 3) Soit n un entier naturel. On désigne par D_n le domaine du plan limité par la droite d'équation $y=1$, la courbe (C) et les droites d'équations $x=0$ et $x=n$, A_n désigne l'aire du domaine D_n exprimée en unité d'aire.
a) Calculer A_n .
b) Étudier la convergence de la suite (A_n) .
- 4) Soit λ un nombre réel négatif. D la portion

du plan délimitée la courbe (C) l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\lambda$ et $x=0$. On désigne par S le solide de l'espace engendré par la rotation de D autour de l'axe des abscisses.

- a) Déterminer les réels a et b tels que :

$$\frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2} = \frac{ae^x}{1+e^x} + \frac{be^x}{(1+e^x)^2}.$$

- b) Exprimer le volume $V(\lambda)$ du solide S en fonction de λ et calculer la limite de $V(\lambda)$ lorsque λ tend vers $-\infty$.

SUJET 29

Exercice 1

Partie A

Soit B une boîte en forme de pavé droit de hauteur L , à base carrée de côté l , où l et L sont des entiers naturels non nuls tels que $l < L$.

On veut remplir la boîte B avec des cubes tous identiques dont l'arête a est un entier naturel non nul (les cubes devant remplir complètement la boîte B sans laisser d'espace vide).

- 1) a) Dans cette question $l=882$ et $L=945$.

Quel est la plus grande valeur possible pour a ? Quels sont les valeurs possibles pour a ?

- b) Dans cette question le volume de la boîte B est $v = 77\,760$.

On sait que pour remplir la boîte B la plus grande valeur possible de a est 12.

Montrer qu'il y a exactement deux boîtes B possibles, dont on donnera les dimensions.

- 2) On veut remplir une caisse cubique C, dont l'arête c est un entier naturel non nul, avec des boîtes B toutes identiques telles que décrites dans la question 1. (Les boîtes B, empilées verticalement, doivent remplir complètement la caisse C sans laisser d'espace vide).

- a) Dans cette question, $l = 882$ et $L = 945$.

Quelle est la plus petite arête c pour la caisse C?

- b) Dans cette question, le volume de la boîte B est 15 435. On sait que la plus petite

arête possible pour la caisse C est 105. Quelles sont les dimensions l et L de la boîte B?

Partie B

Soit (E) l'ellipse d'équation réduite :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ dans un repère orthonormal}$$

$(O; \vec{i}, \vec{j})$. On appelle A le point de coordonnées $(2; 0)$ et B le point de coordonnée $(0; 3)$.

- a) Donner les éléments caractéristiques de (E).
b) M étant un point de (E), déterminer le lieu (E') des centres de gravité des triangles ABM quand M décrit (E).

Exercice 2

I/. ABCDEFGH est un cube de cotés 1 cm de centre O.

- 1) Montrer que l'ensemble des points M de l'espace vérifiant : $\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\| = 4$ est un cylindre infiniment long dont on précisera le rayon et l'axe de révolution.

- 2) I et J sont les milieux de $[EH]$ et $[AD]$; O_1 et O_2 les centres respectifs des carrés ADHE et BCGF.

- a) On désigne par I' le projeté orthogonal de I sur le plan (ABG); exprimer $\overrightarrow{AI'}$ en fonction de $\overrightarrow{AH}$.

- b) R est le demi-tour d'axe (OI). Déterminer le plan de la réflexion S_3 telle que $R = S_3 \circ S_1$, où S_1 est la réflexion de plan (EBH).

- c) On pose $f = S_1 \circ S_2$, où S_2 est la réflexion de plan (ABG). Justifier que f est une rotation et préciser son axe.

- d) On pose $g = R \circ f$; montrer que O_1 et O_2 sont invariants par g .

- e) Déterminer la nature puis les éléments caractéristiques de g .

- 3) On suppose l'espace rapporté au repère orthonormé direct $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

- Donner une équation cartésienne du plan (ABG).
- Donner l'écriture analytique de la projection p sur le plan (ABG).
- Vérifier que l'image de I par p est le point I' vérifiant la relation de la question 2. a-).

PROBLÈME

Ce problème comporte deux parties indépendantes.

Partie A :

Dans le plan complexe P rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 1cm, on considère les points A, B et E d'affixes respectives -4 ; 4 et $4i$. C et D sont des points tels que les quadrilatères AOEC et BOED soient des carrés.

- Placer les points C et D dans le repère.
- f est l'application de P dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = (1+i)z + 4 + 4i$.
 - Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .
 - Déterminer l'image par f de A, de O, de la droite (CA) et de la médiatrice du segment $[AO]$.
 - Exprimer, pour tout M d'affixe z , l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{MC}$ en fonction de z .
 - En déduire que $MM' = MC$, et pour tout point M distinct de C, montrer qu'une mesure de l'angle des vecteurs $(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MC})$ est $\frac{\pi}{2}$.

- J est le milieu du segment $[EB]$ et I est celui de $[AO]$. Déterminer l'image de J par la rotation de centre I et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

Partie B :

- Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, e^t \geq t+1$.
 - En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}, e^t > t$, que $-te^{-t} > -1$ et que pour tout réel $t > -1$, $\ln(1+t) \leq t$.

- En déduire que pour tout réel x , $\ln(1-xe^{-x}) \leq -xe^{-x}$.
- On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 2\ln(e^x - x)$. On admet que la limite de f en $-\infty$ est $+\infty$.
 - Montrer que $f(x) = x^2 - 2x - 2\ln(1 - xe^{-x})$ et déterminer la limite de f en $+\infty$.
 - Calculer $f'(x)$, montrer que $f'(x) = \frac{2(x-1)(e^x - x - 1)}{e^x - x}$ et dresser le tableau de variation de f .
 - Dans un repère orthonormal (unité : 3cm), on considère la parabole (P) d'équation $y = x^2 - 2x$ et (C) la courbe représentative de f . Montrer que (C) et (P) sont asymptotes et étudier leurs positions relatives.
 - Donner une équation de chacune des tangentes (D) et (D') respectivement aux courbes (P) et (C) au point d'abscisse 0.
 - Tracer dans le même repère (P) et (C) ainsi que leurs tangentes (D) et (D').
 - n étant un entier naturel, on pose $U_n = \int_0^n x e^{-x} dx$.
 - Montrer que la suite U de terme général U_n est croissante.
 - Calculer U_n à l'aide d'une intégration par parties.
 - Déterminer la limite de la suite U.
 - A_n désigne l'aire (en unités d'aire) de la partie du plan limitée par les droites d'équation $x=0, x=n$, la parabole (P) et la courbe (C).
 - Montrer, en utilisant la question 1.c-), que $A_n \geq 2U_n$.
 - On admet que la suite (A_n) converge vers un réel s . Montrer que $s \geq 2$.

SUJET 30

Exercice 1

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $f(x) = (2x+1)e^{3x}$. On suppose que pour tout entier naturel n non nul la dérivée $n^{\text{ième}}$ de

f existe et on la note $f^{(n)}$. On pose $f^{(0)} = f$.

- Déterminer les coefficients a et b pour que la fonction f vérifie l'équation différentielle du second ordre :
 $y'' + ay' + by = 0$ (1).
- Démontrer alors que toutes les fonctions dérivées $n^{\text{ième}}$ de f vérifie (1).
- Déterminer l'ensemble des primitives de f . Montrer qu'une et une seule primitive de f vérifie (1).
- Montrer que la fonction f est une solution de l'équation différentielle $y'' - 6y' + 9y = 0$.
- Démontrer par récurrence l'existence de deux suites (a_n) et (b_n) qui vérifient pour tout entier naturel n :
$$\begin{cases} f^{(n)} = a_n f' + b_n f \\ a_{n+1} = 6a_n + b_n \\ b_{n+1} = -9a_n \end{cases}$$

On définit deux suites (u_n) et (v_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n = a_n + b_n \\ v_n = -3^{-n-1} b_n \end{cases}$$

- Montrer que $(v_n) \in \mathbb{N}$ $a_0 = 0$; $b_0 = 1$,
 $a_{n+1} = (n+1)3^n$ et $b_{n+1} = -n3^{n+1}$.
- Calculer $f^{(n)}(x)$ en fonction de x et de n .

Exercice 2

Une variable aléatoire X prend les valeurs 1, -1 et 2 avec les probabilités respectives e^a, e^b, e^c où a, b et c sont en progression arithmétique. On suppose l'espérance mathématique $E(X)$ de X est égale à 1.

- Calculer a, b, c et la variance $V(X)$ de X .
- Soient A, B et C trois points d'abscisses respectives 1, -1 et 2 d'une droite graduée (D).
 - Calculer l'abscisse du point G barycentre de $\{(A, 1); (B, 2); (C, 4)\}$.
 - On pose : $\varphi(M) = \frac{1}{7}(MA^2 + 2Mb^2 + 4MB^2)$ où M est un point de (D). montrer que $\varphi(G) = V(X)$.

- Déterminer l'ensemble des point M de (D) tels que $\varphi(M) = 3$.

PROBLÈME

Partie A

On considère pour tout entier strictement positif n la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{1}{n}x^n + \ln|x-1|$$

Le plan affine euclidien est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique 2cm). On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans ce repère.

- Déterminer les limites de f_n aux bornes de son ensemble de définition de définition.
- Étudier les branches infinies de f_n . (on distinguera le cas $n=1$; n impair différent de 1 et n pair).
- Montrer que f_n est dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et

$$\text{que pour tout } x \neq 1, f'_n(x) = \frac{x^n}{x-1}.$$

- Étudier les variations de f_n et dresser le tableau de variation de f_n . (on distinguera les cas n impair et n pair).
- Calculer la dérivée seconde de f_n . Étudier l'ensemble des points d'inflexion de (C_n) . (on distinguera le cas $n=1$; n impair différent de 1 et n pair).

- Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2, on note T_n la tangente à (C_n) au point d'abscisse $\frac{n}{n-1}$. Tracer les courbes (C_2) et (C_3) ainsi les tangentes T_2 et T_3 .

- Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe un réel unique $\alpha_n > 1$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.
- Vérifier que pour tout entier $n > 1$ on a :
 $f_{n-1}(\alpha_n) = -\frac{1}{n}\alpha_n^n$ et $-\frac{1}{n}\alpha_n^n < f_{n-1}(\alpha_{n-1})$.
- En déduire que la suite (α_n) est monotone et convergente.
- Démontrer que pour tout entier naturel non nul p , on a :

$$\frac{1}{p+1} \leq \ln(p+1) - \ln(p) \leq \frac{1}{p}.$$

e) Vérifier alors que :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n) > 0.$$

f) En déduire que $\alpha_n < 1 + \frac{1}{n}$. Calculer alors la limite de la suite (α_n) .

Partie B

1) Montre que $\forall x < 1, f_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{t-1} dt$ et que

$$\forall x > 1, f_n(x) = \int_{\alpha_n}^x \frac{t^n}{t-1} dt.$$

2) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$|f_n(-1)| \leq \int_0^x (-t)^n dt; \text{ calculer alors}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(-1).$$

3) Déterminer la limite de la suite (v_n) définie

$$\text{par : } v_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

SUJET 31

Exercice 1

1) On considère le polynôme P défini par $P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16$. Trouver trois réels a, b et γ tels que pour tout complexe z ,

$$P(z) = (z-4)(az^2 + bz + \gamma).$$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal *direct* $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives : $a = 4$ $b = 1 + i\sqrt{3}$ $c = \bar{b}$.

a) Placer les points A, B et C sur une figure que l'on complétera au cours de l'exercice.

b) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

3) Soit K le point d'affixe $k = -\sqrt{3} + i$. On

appelle G l'image de K par la translation de vecteur $\vec{OB}$.

On appelle F l'image de K par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Calculer l'affixe g du point G sous forme algébrique.

b) Donner les écritures exponentielles de k et de l'affixe f de F .

c) Prouver que les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires.

4) On note H le point tel que le quadrilatère $COFH$ soit un parallélogramme.

a) Montrer que $COFH$ est un carré.

b) Calculer l'affixe du point H .

c) Démontrer que le triangle AGH est équilatéral de sens direct.

5) Pour tout entier naturel n , on note B_n le point d'affixe b^n . Déterminer les entiers naturels n pour lesquels le point B_n appartient à la droite (OC) .

Exercice 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; unité graphique : 2 cm.

Pour tout entier naturel $n > 3$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x^3 - nx + 1$.

On désigne par (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer les limites de f_n en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par un même point A dont on précisera les coordonnées.

a) Calculer $f'_n(x)$ pour tout réel x .

b) En déduire le sens de variations de la fonction f_n . Dresser son tableau des variations.

3) Démontrer que l'équation d'inconnue $x, f_n(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0; 1]$. Cette solution, qui dépend de n , sera notée u_n .

a) Tracer la courbe (C_3) .

b) Montrer que $0,34 \leq u_3 \leq 0,35$.

c) Prouver que pour tout entier $n \geq 3$,

$$u_n \leq \frac{2}{n}$$

d) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 3}$

4) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} mu_n$

PROBLÈME

Partie 1

Soit n un entier naturel supérieur à 1.

- 1) Pour chaque entier k tel que $1 \leq k \leq 3$, calculer le reste de la division euclidienne de 11^k par 7.
- 2) Montrer que pour tout réel a ,

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1).$$
- 3) En déduire que $11^{3n} - 1$ est un multiple de 7.
- 4) Déterminer le reste de la division euclidienne de 11^{2004} par 7.
- 5) Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $17x - 15y = -6$.
- 6) Zoé sait qu'elle a entre 300 et 400 jetons. Si elle fait des tas de 17 jetons, il lui en reste 9. Si elle fait des tas de 5 jetons, il lui en reste 3. Combien a-t-elle de jetons ?

Partie 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

[unité graphique : 6 cm]. On considère la suite (α_n) de nombre réels définie par $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ et pour

tout entier naturel n , $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \frac{5\pi}{6}$

Pour tout entier naturel n , on appelle M_n le point du cercle $\mathcal{C}$ de centre O de rayon 1 tel que l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM_n})$ ait pour mesure α_n .

- 1) Placer les douze points $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{11}$
- 2) On appelle z_n l'afixe de M_n . Montrer que pour tout entier naturel n , on a

$$z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6}\right)}$$
- 3) Montrer pour tout entier naturel n , les propriétés suivantes :
 - a) Les points M_n, M_{n+6} sont diamétralement opposés.

b) Les points M_n, M_{n+12} sont confondus.

4) Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$z_{n+4} = e^{\frac{2i\pi}{3}} z_n.$$

SUJET 32

Exercice 1 :

- 1) On considère un entier naturel x plus grand que 2. On pose $y = \overline{14643}^x$
 - a) Écrire y en base $(x+1)$
 - b) Déterminer y sachant que $y < 600$
- 2) Soit p un nombre premier.
 - a) Démontrer que pour tout entier k tel que $1 < k < p$, C_p^k est un multiple de p .
 - b) En déduire que pour tous entiers relatifs a et b on a $(a+b)^p \equiv a^p + b^p$
 - c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel a , $a^p \equiv a[p]$
 - d) En déduire que si a et p sont premiers entre eux, alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$

Exercice 2 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le plan (P) d'équation $x - 2y + z - 1 = 0$, la droite (D) passant par $A(1; -1; 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$ et S la symétrie orthogonale par rapport au plan (P) .

- 1) Démontrer que (D) et (P) sont perpendiculaires
- 2) a) Donner l'expression analytique de S puis donner les coordonnées de $A' = S(A)$
 b) Démontrer que les points $E(0; 0; 1)$, $F(1; 0; 2)$ et $G(2; 1; 1)$ déterminent le plan (P)
 c) Calculer alors le volume du tétraèdre $AEFG$

Exercice 3 :

- 1) E est un espace vectoriel de dimension 3.

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de E et f est un endomorphisme de E tel que $f(\vec{i}) = f(\vec{j}) = \frac{1}{2}(\vec{i} + \vec{j})$ et $f(\vec{k}) = \vec{k}$

- Déterminer une base de $\text{Ker } f$ et une base de $\text{Im } f$
 - Montrer que $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont deux sous-espaces supplémentaires de E
 - On pose $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$. Montrer que $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{k})$ est une base de E , puis donner la matrice de f dans la base B
- 2) a) F et G sont deux points tels que $FG = 10$. Dans un repère convenablement choisi, déterminer une équation réduite et construire l'ensemble des points M du plan tels que $|MF - MG| = 6$
- b) Démontrer le système
- $$\begin{cases} x = 3\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) \\ y = 2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) \end{cases} (\alpha \in \mathbb{R}) \text{ est une}$$
- représentation paramétrique d'une conique dont on déterminera la nature et l'équation réduite

PROBLÈME

le problème comporte trois parties A, B et C

Partie A :

On considère la fonction f_n ($n \in \mathbb{N}^*$) définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par $f_n = \frac{e^{x+1}}{(x+2)^n}$ et (C_n) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Calculer les limites de f_n en $+\infty$ et en $-\infty$.
 - Calculer les limites de f_n à gauche et à droite en -2 . On distinguera les cas n pair et n impair.
- Calculer $f_n'(x)$ et dresser le tableau de variation de f_n
- Démontrer que les courbes (C_n) passent par un point fixe A dont on déterminera les

coordonnées, puis écrire une équation de la tangente à (C_n) en A .

- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f_n(x)}{x} \right)$, puis donner une interprétation graphique du résultat.
 - Démontrer que : $f_n'(x) = f_n(x) - n f_{n+1}(x)$
 - En déduire les positions relatives de (C_1) et (C_2)
 - Construire (C_1) et (C_2) dans le même repère

Partie B :

On considère la suite (U_n) définie par

$$U_n = \int_{-1}^0 \frac{e^{x+1}}{(x+2)^n} dx$$

- Démontrer que (U_n) est décroissante et à termes positifs, puis conclure.
- Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, $\frac{1-2^{1-n}}{n-1} \leq U_n \leq \left(\frac{1-2^{1-n}}{n-1} \right) e$, puis déterminer la limite de la suite (U_n)
- Démontrer que pour $n \geq 2$, on a $n U_{n+1} = U_n + 1 - e 2^{-n}$.
 - En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-1}^0 \frac{n e^{x+1}}{(x+2)^{n+1}} dx = 1$

Partie C :

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = f_1(x-1)$ et (C) sa courbe dans le repère ci-dessus.

- Construire (C) dans le repère précédent
- On considère la fonction h définie sur $[0; +\infty[$ par $h(x) = 1 + \ln(1+x)$
 - Démontrer que $h(x) = x$ équivaut à $g(x) = e$, puis démontrer que l'équation $h(x) = x$ admet une unique solution α dans l'intervalle $I = [2; 3]$.
 - Démontrer que pour tout x de I , $|h'(x)| \leq \frac{1}{3}$ et $h(I)$ est inclus dans I .
- On considère la suite (V_n) définie par $V_0 = 2$ et $V_{n+1} = h(V_n)$.
 - Démontrer que (V_n) est une suite croissante.
 - Démontrer que pour tout entier naturel n

on a : $|V_n - \alpha| \leq \frac{1}{3^n}$.

- c) En déduire que la suite (V_n) est convergente et déterminer sa limite.

SUJET 33

Exercice 1 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

- 1) Placer les points A et B d'affixes respectives $1-i$ et $7+4i$.

- 2) On considère la transformation plane F d'écriture complexe

$$z' = (1-3i)z + (3+6i)$$

- a) Déterminer l'affixe du point C = F(A), puis construire C.
b) Déterminer l'affixe du point D antécédent par F de B, puis construire D.
c) Démontrer que F admet un unique point invariant Ω dont on précisera l'affixe w .
3) Montrer que pour tout nombre complexe z on a : $z' - z = -3i(z - w)$.

- 4) En déduire $\frac{MM'}{\Omega M}$ et une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MM'}\right)$.

- 5) En déduire une construction géométrique de M' image de M par F.

Exercice 2 :

On lance un dé tétraédrique dont les faces portent les numéros 1, 2, 3 et 4. On lit le numéro de la face cachée. Le dé est pipé de telle sorte que les probabilités P_1, P_2, P_3 et P_4 d'obtenir respectivement 1, 2, 3 et 4 sur la face cachée soient dans cet ordre les termes consécutifs d'une suite arithmétique.

- 1) Sachant que $P_4 = 0,4$, calculer P_1, P_2 et P_3 .
2) On lance n fois ce dé ($n \geq 1$). Les lancers sont supposés indépendants deux à deux et identiques. On note U_n la probabilité d'obtenir pour la première fois 4 au $n^{\text{ième}}$ lancer.

- a) Exprimer U_n en fonction de n .

- b) On pose $S_n = \sum_{i=1}^n U_i$

- i) Exprimer S_n en fonction de n puis calculer la limite de la suite (S_n) .
ii) Déterminer le plus petit entier n tel que $S_n > 0,999$.

Exercice 3 :

- 1) Calculer les limites : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln(x^2 + 3)}$$

- 2) Déterminer la primitive K de la fonction k définie sur $]1; +\infty[$ par $k(x) = \frac{1}{x-x^2}$ qui prend la valeur $\ln 4$ en 2.

- 3) Démontrer que la fonction ϕ définie par $\phi(x) = x + \ln \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction φ définie par

$$\varphi(x) = \frac{x^2 + 5x + 7}{x^2 + 4x + 5}$$

PROBLÈME

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Unité graphique 1cm. On considère la fonction g définie par $g(x) = x \ln x - x + 1$ et la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$

- 1) a) Étudier les variations de g puis donner le signe de $g(x)$ en fonction de x .
b) En déduire la primitive de la fonction $\ln$ qui prend la valeur 2 en 1.
c) Montrer que la courbe de g et celle de $\ln$ se coupent en deux points dont on déterminera les coordonnées.
2) Calculer les limites de f en 1 et en $+\infty$.
3) Montrer que f est dérivable sur $]1; +\infty[$ puis montrer que $f'(x) = \frac{-g(x)}{x(1-x)^2}$ pour tout x de $]1; +\infty[$ et dresser le tableau de variation de f .
4) Tracer la courbe de f .
5) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet

une unique solution α telle que $3,5 < \alpha < 3,6$.

6) On considère la fonction h définie par

$$h(x) = \ln x + \frac{x+1}{2}.$$

a) Montrer que $f(x) = \frac{1}{2}$ équivaut à $h(x) = x$.

b) Étudier les variations de h puis montrer que pour tout x de $[3; 4]$, $|h'(x)| \leq \frac{5}{6}$.

7) On définit la suite

$$(U_n) \text{ par } U_0 = 3 \text{ et } U_{n+1} = \ln(U_n) + \frac{1+U_n}{2}.$$

a) Montrer que pour tout entier naturel n , $3 \leq U_n \leq 4$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n , $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{5}{6} |U_n - \alpha|$.

c) En déduire que pour tout entier naturel n , $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$ et que la suite (U_n) est convergente et donner sa limite.

d) Déterminer un entier N tel U_N soit une valeur approchée de α à 10^{-6} près.

SUJET 34

Exercice 1 :

1) a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n ,

$$1 - 3 + 5 - 7 + \dots + (-1)^n (2n+1) = (n+1)(-1)^n$$

b) En déduire la valeur de :

$$A = 25 - 27 + 29 + \dots + 65.$$

2) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $2^{3n+1} + 3 \times 5^{2n+1}$ est un multiple de 17.

3) a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n , $n! \geq 2^{n-1}$.

b) Montrer que la suite (a_n) définie sur $\mathbb{N}^*$

$$\text{par } a_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \text{ est majorée par 3}$$

c) Montrer que la suite (a_n) est convergente

Exercice 2 :

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies par

$$U_0 = 2, V_0 = 2, U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} \text{ et } V_{n+1} = \frac{2U_n V_n}{U_n + V_n}.$$

1) Montrer que pour tout entier naturel n , $0 \leq V_n \leq U_n$.

2) Montrer que la suite (U_n) est décroissante et la suite (V_n) est croissante.

3) En déduire que pour tout couple (m, n) d'entiers naturels, $V_n \leq U_m$.

4) Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$U_{n+1} - V_{n+1} \leq \frac{1}{2} (U_n - V_n).$$

5) En déduire que pour tout entier naturel n ,

$$0 \leq U_n - V_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (\pi - 2).$$

6) En déduire que les suites (U_n) et (V_n) sont convergentes et convergent vers la même limite

Exercice 3 :

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^3 - (5-i)z^2 + (10-6i)z - 8 + 16i$.

1) Montrer que le polynôme P admet une racine imaginaire pure α .

2) Déterminer les nombres complexes a , b et c tels que $P(z) = (z - \alpha)(az^2 + bz + c)$.

3) En déduire toutes les racines du polynôme P

4) On considère les points A , B , C et D d'affixes respectives $-i$; $2+2i$; $-2i$ et $2i$

a) Étudier la nature du triangle ABC

b) Déterminer l'affixe du point E tel que $ABCE$ soit un parallélogramme

c) Déterminer l'affixe du point F , symétrique de A par rapport au milieu du segment $[BC]$

d) Démontrer que les points A , B , C et D appartiennent à un même cercle dont précisera le centre et le rayon.

Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist durch $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 4$ gegeben.

1) Untersuchen Sie f auf Monotonie und Extrema.

2) Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 f(x) dx$.

3) Skizzieren Sie den Graphen von f .

4) Bestimmen Sie die Nullstellen von f .

5) Untersuchen Sie f auf Wende- und Wendepunkte.

6) Berechnen Sie die Ableitung $f'(x)$.

7) Untersuchen Sie f auf Symmetrie.

8) Berechnen Sie die Ableitung $f''(x)$.

9) Untersuchen Sie f auf Asymptoten.

10) Berechnen Sie die Ableitung $f'''(x)$.

11) Untersuchen Sie f auf Nullstellen.

12) Berechnen Sie die Ableitung $f^{(4)}(x)$.

13) Untersuchen Sie f auf Wendepunkte.

14) Berechnen Sie die Ableitung $f^{(5)}(x)$.

15) Untersuchen Sie f auf Extrema.

Die Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist durch $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ gegeben.

1) Untersuchen Sie g auf Monotonie und Extrema.

2) Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 g(x) dx$.

3) Skizzieren Sie den Graphen von g .

4) Bestimmen Sie die Nullstellen von g .

5) Untersuchen Sie g auf Wende- und Wendepunkte.

6) Berechnen Sie die Ableitung $g'(x)$.

7) Untersuchen Sie g auf Symmetrie.

8) Berechnen Sie die Ableitung $g''(x)$.

9) Untersuchen Sie g auf Asymptoten.

10) Berechnen Sie die Ableitung $g'''(x)$.

11) Untersuchen Sie g auf Nullstellen.

12) Berechnen Sie die Ableitung $g^{(4)}(x)$.

13) Untersuchen Sie g auf Wendepunkte.

14) Berechnen Sie die Ableitung $g^{(5)}(x)$.

15) Untersuchen Sie g auf Extrema.

L'importance des Mathématiques exige une stricte conformation au système d'enchâssement logique et continu des connaissances à tous les niveaux d'apprentissage.

Cette exigence aura présidé à la conception et à l'élaboration des ouvrages de la collection « **L'Excellence en Mathématiques** », ouvrages rédigés dans l'esprit des principaux objectifs visés pour l'enseignement des Mathématiques, à savoir :

- Affirmer et affiner les facultés latentes d'ordre et de méthode inhérentes à chaque apprenant ;
- Favoriser le développement des capacités de travail individuel de l'élève, de son aptitude à la communication, à la créativité et à la gestion rationnelle du quotidien.

L'ordre des chapitres de chacun des ouvrages de la collection est en lui-même une suggestion d'un plan de progression dans le programme du niveau concerné, plan qui demeure cependant indicatif.

La pertinence du contenu des ouvrages de la collection « **L'Excellence en Mathématiques** » contribuera au bonheur des apprenants et à celui d'autres utilisateurs des ouvrages de l'Enseignement Secondaire.

La collection « **L'Excellence en Mathématiques** » est l'œuvre d'un groupe d'enseignants ayant une longue pratique de l'enseignement des Mathématiques, doublée d'une expérience appréciable dans la formation des formateurs.

