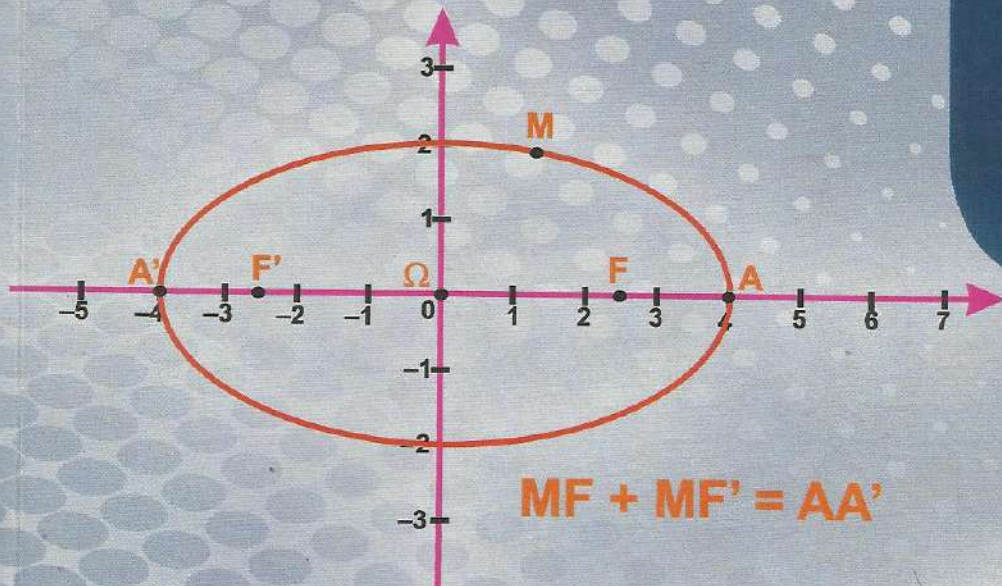


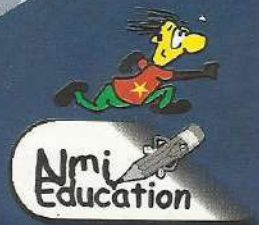
# Mathématiques



$$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}; F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\text{PGCD}(a;b) \times \text{PPCM}(a;b) = |a| \times |b|$$

## LIVRE DE L'ÉLÈ

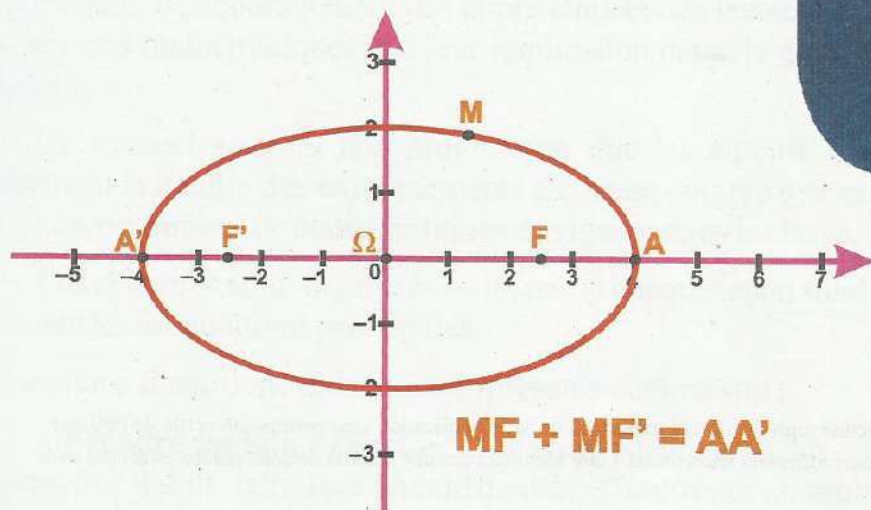


Valentin TEGNI  
Damase SIELIN  
Albert BOUDA  
Roger POKAM  
Raoul BOUDY  
Chamberlain FO



# Mathématiques

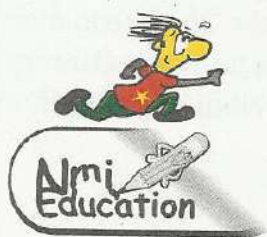
C &



$$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}; F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\text{PGCD}(a;b) \times \text{PPCM}(a;b) = |a| \times |b|$$

## LIVRE DE L'ÉLÈVE



Valentin TEGNINK  
Damase SIELINO  
Albert BOUDA  
Roger POKAM  
Raoul BOUDY  
Chamberlain FOUO



Tous droits de production réservés. Aucune reproduction ni traduction de cette publication sans permission écrite de l'éditeur ni des auteurs ne sera permise. Les auteurs affirment leurs droits à être identifiés comme auteurs de cette œuvre en accord avec les lois sur les droits d'auteurs.

Première édition 2014

© Nmi Education

B.P. 31267

Yaoundé - Cameroun

Email : [frontdesk@nmieducation.org](mailto:frontdesk@nmieducation.org)

Site Web : [www.nmieducation.org](http://www.nmieducation.org)

Conception maquette : Raymond Ndjofang Bagzé

Responsable éditoriale : Mela Fokam Gisèle

Assistante éditoriale : Makowo Momo Solange

Infographie : Raymond Ndjofang Bagzé

Illustrations : Nmi Education



ISBN: 9956-802-93-x



## Avant-propos

Le développement des trois éléments clés que sont les savoirs, les savoir faire et les savoir être a été la préoccupation de tous les instants dans le présent ouvrage.

La procédure d'acquisition des savoirs a privilégié la capacité de tout apprenant à pouvoir mobiliser des connaissances nécessaires aux fins d'acquérir les connaissances nouvelles qui représentent une portion très réduite pour tout apprentissage qu'il soit théorique ou pratique. Considérer un apprenant comme un spectateur au sens large du terme des étapes du processus d'apprentissage serait une bévue pédagogique et didactique qui enfreindrait à l'efficacité et à l'efficience des résultats attendus. Ce manuel s'inscrit dans la logique d'accompagnement, d'encadrement, d'encouragement des apprenants et des lecteurs de manière générale sur l'accès aux connaissances mathématiques et à leur implication dans la gestion des problèmes de la vie courante.

Ce manuel suggère une progression que les auteurs estiment être à même de fluidifier efficacement la qualité des enseignements en tenant compte des exigences à court, à moyen et à long terme des programmes de mathématiques en vigueur dans la classe.

Les chapitres sont organisés en leçons et chaque leçon subdivisée en unités didactiques qui en constituent les articulations principales.

L'ossature d'une unité didactique se présente comme suit :

- a) « **Prendre un bon départ** » : Une ou plusieurs activités sont proposées à l'apprenant, dans lesquelles il doit faire face aux difficultés, s'interroger et mobiliser ses connaissances et autres moyens pour répondre aux différentes interrogations posées.
- b) « **Retenir** » : Cette partie très courte, dégage les principales recommandations assorties des activités menées dans « **Prendre un bon départ** » .
- c) « **Exemples et exercices résolus** » : Des exemples diversifiés, liés à une capacité donnée y sont traités et largement commentés, parfois consolidés par des exercices résolus. On voudrait que ce manuel soit aussi une espèce d'annales et donc de repère pour les utilisateurs.
- d) « **S'exercer** » : Des évaluations directes des capacités des apprenants à la mise en œuvre des savoirs sont proposées dans cette partie. Les éventuelles difficultés devraient être résolues en recourant aux commentaires faits dans les exemples traités.

A la fin d'un chapitre, est proposé un nombre assez important et diversifié d'exercices, regroupés en thèmes, pour faciliter l'exploitation du manuel, reprenant de manière directe ou indirecte des capacités acquises tout au long du chapitre.

Le souci d'avoir une forte culture de rigueur et une simplicité dans le raisonnement, celui d'amélioration de la communication (qualité de la rédaction des productions des élèves), le renforcement des capacités de muter les connaissances savantes en puissants outils de résolution des problèmes de la vie et le décloisonnement des enseignements disciplinaires sont des extrants impératifs pour tout apprenant d'une série scientifique qui rêve d'une insertion réussie dans le circuit de développement individuel et sociétal.

Les auteurs.



# Sommaire

| Chapitres                                                            | Contenu d'apprentissage                                                                                                       | Pages |
|----------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| 1- Calculs vectoriels                                                | 1- Calculs barycentriques                                                                                                     | 8     |
|                                                                      | 2- Lignes de niveau et surfaces de niveau                                                                                     | 14    |
|                                                                      | 3- Produit vectoriel                                                                                                          | 23    |
| 2- Divisibilité dans $\mathbb{Z}$                                    | 1- Ensemble des entiers naturels                                                                                              | 43    |
|                                                                      | 2- Divisibilité dans $\mathbb{Z}$                                                                                             | 58    |
| 3- Limites et continuité                                             | 1- Limites et continuité                                                                                                      | 75    |
|                                                                      | 2- Fonctions continues et strictement monotones                                                                               | 87    |
|                                                                      | 3- Branches infinies de la courbe d'une fonction                                                                              | 93    |
| 4- Nombres complexes                                                 | 1- Étude algébrique de $\mathbb{C}$                                                                                           | 106   |
|                                                                      | 2- Forme trigonométrique et forme exponentielle d'un nombre complexe non nul                                                  | 118   |
|                                                                      | 3- Équations dans $\mathbb{C}$                                                                                                | 134   |
| 5- PGCD et PPCM de deux entiers non nuls                             | 1- PGCD et PPCM de deux entiers non nuls                                                                                      | 152   |
|                                                                      | 2- Nombres premiers et équations dans $\mathbb{Z}^2$ du type $ax + by = c$                                                    | 166   |
| 6- Dérivation – primitives sur un intervalle d'une fonction continue | 1- Dérivation                                                                                                                 | 180   |
|                                                                      | 2- Étude et représentation de quelques fonctions                                                                              | 194   |
|                                                                      | 3- Primitives sur un intervalle d'une fonction continue                                                                       | 200   |
| 7- Espaces vectoriels et applications linéaires                      | 1- Espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$                                                                                        | 216   |
|                                                                      | 2- Applications linéaires                                                                                                     | 221   |
| 8- Fonctions logarithmes                                             | 1- Fonction logarithme neperien                                                                                               | 237   |
|                                                                      | 2- Logarithme de base quelconque                                                                                              | 253.  |
| 9- Fonctions exponentielles                                          | 1- Fonction exponentielle népérien                                                                                            | 263   |
|                                                                      | 2- Fonction exponentielle de base quelconque                                                                                  | 273   |
|                                                                      | 3- Fonctions puissances $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ où $x$ est un réel strictement positif et $\alpha$ est un nombre réel | 278   |



|                                                |                                                           |     |
|------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|-----|
| 10- Suites numériques                          | Suites numériques                                         | 294 |
| 11- Calcul intégral                            | 1- Calculs pratiques des intégrales                       | 315 |
|                                                | 2- Quelques applications du calcul intégral               | 333 |
| 12- Isométries et similitudes directes du plan | 1- Isométries du plan                                     | 353 |
|                                                | 2- Similitudes directes du plan                           | 374 |
| 13- Applications affines                       | 1- Généralités sur les applications affines               | 398 |
|                                                | 2- Projections, symétries et affinité d'un espace affine. | 413 |
| 14- Équations différentielles                  | Équations différentielles                                 | 435 |
| 15- Applications affines dans l'espace         | 1- Applications affines dans l'espace                     | 452 |
|                                                | 2- Homothéties – Translations                             | 467 |
| 16- Coniques                                   | 1- Généralités sur les coniques                           | 479 |
|                                                | 2- Étude analytique des paraboles                         | 490 |
|                                                | 3- Étude analytique des ellipses et des hyperboles        | 497 |
| 17- Calculs des probabilités                   | 1- Résolution de certains problèmes de dénombrement       | 520 |
|                                                | 2- Probabilité d'un événement                             | 527 |
|                                                | 3- Variables aléatoires                                   | 537 |

Sujets de synthèse..... 560



# Chapitre 1

## CALCULS VECTORIELS

### LEÇON 1 CALCULS BARYCENTRIQUES

1.1 BARYCENTRE DES POINTS PONDÉRÉS.

1.2 BARYCENTRES PARTIELS-ENSEMBLE DES  
BARYCENTRES DE POINTS PONDÉRÉS

### LEÇON 2 LIGNES DE NIVEAU ET SURFACES DE NIVEAU

2.1 LIGNES DE NIVEAU - SURFACES DE NIVEAU DE

L'APPLICATION  $M \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2$

2.2 LIGNES DE NIVEAU DE L'APPLICATION

$M \mapsto \text{Mes}(\widehat{\vec{MA}, \vec{MB}})$ .

### LEÇON 3 PRODUIT VECTORIEL

3.1 ORIENTATION DE L'ESPACE : BASES  
ORTHONORMÉES DIRECTES OU INDIRECTES.

3.2 PRÉSENTATION DU PRODUIT VECTORIEL

3.3 PROPRIÉTÉS ET EXPRESSIONS ANALYTIQUES DU PRODUIT  
VECTORIEL

3.4 CALCULS DES DISTANCES, D'AIRES ET DES VOLUMES

**S'ENTRAÎNER**



# LEÇON 1 CALCULS BARYCENTRIQUES

## ► Manipuler les barycentres dans l'espace

Dans tout le chapitre, nous désignerons par  $\mathcal{P}$  l'ensemble des points du plan et par  $\mathcal{E}$  celui des points de l'espace ;  $\mathcal{V}$  l'ensemble des vecteurs du plan et  $\mathcal{W}$  celui des vecteurs de l'espace.

## 1.1 BARYCENTRE DES POINTS PONDÉRÉS.



### Prendre un bon départ

1) Soit ABCD un tétraèdre et M un point de  $\mathcal{E}$

• Montrer que pour tout point O de  $\mathcal{E}$  on a :

$$2\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} - 2\overrightarrow{CM} + 3\overrightarrow{DM} = 2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{CO} + 3\overrightarrow{DO}.$$

• Soit I le point de  $\mathcal{E}$  tel que  $-\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{ID} = \vec{0}$ . Montrer que :

$$2\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} - 2\overrightarrow{CM} + 3\overrightarrow{DM} = 2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{AI} + 3\overrightarrow{DI}.$$

• Construire le point M tel que  $2\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} - 2\overrightarrow{CM} + 3\overrightarrow{DM} = \vec{0}$

2) Soit A, B, C, D et E cinq points de  $\mathcal{E}$  et le vecteur

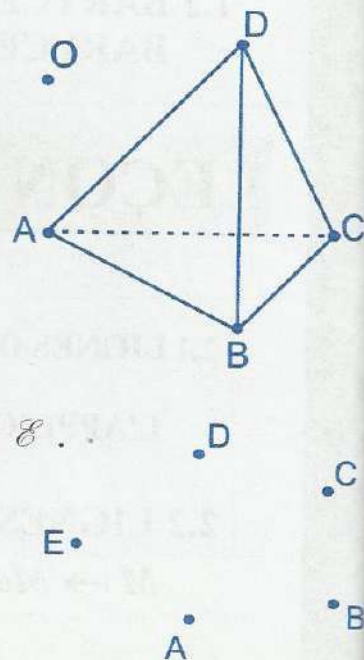
$$\vec{u} = 2\overrightarrow{AN} - 3\overrightarrow{BN} - 2\overrightarrow{CN} + 4\overrightarrow{DN} - \overrightarrow{EN} \text{ où N est un point quelconque de } \mathcal{E}.$$

• Montrer que le vecteur  $\vec{u}$  ne dépend pas du point N.

• Vérifier que  $\vec{u} = 2\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{JB}$

où J est un point tel que  $4\overrightarrow{DJ} - \overrightarrow{EB} = \vec{0}$ .

• Construire le vecteur  $\vec{u}$



### Notations

• L'ensemble des  $n$  points pondérés  $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), (A_3, \alpha_3), \dots, (A_n, \alpha_n)$  est noté  $\{(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}\}$ .

• La somme  $\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \alpha_3 \overrightarrow{MA_3} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n}$  est notée  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ .

• L'égalité  $2\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} - 2\overrightarrow{CM} + 3\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{EM} = \vec{0}$  est notée  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{A_i M}$ .

$(A_1, \alpha_1) = (A, 2)$  ;  $(A_2, \alpha_2) = (B, -1)$  ;  $(A_3, \alpha_3) = (C, -2)$ ,  $(A_4, \alpha_4) = (D, 3)$  et  $(A_5, \alpha_5) = (E, 1)$ .



### Retenir

Soit  $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ ,  $n$  points pondérés

(1) Si  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$  alors il existe un unique point G tel que  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$ .



• Cet unique point G est barycentre des points pondérés  $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$  et est noté

$$G = \text{bar} \{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$$

• Si les  $\alpha_i$  sont tous égaux, G est appelé isobarycentre des points  $A_i$

**(2) Le barycentre de plusieurs points pondérés ne change pas lorsqu'on multiplie tous les coefficients par un même nombre réel non nul :**

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \lambda \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}, \forall \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

**(3) Pour tout point M, on a :**

• Si  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$ , alors  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \overrightarrow{MG}$  où  $G = \text{bar} \{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$

• Si  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$ , alors  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$  ne dépend pas du point M. Pour tout point O on a :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i}.$$

### Se convaincre

Soit O un point du plan  $\overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i}$  donc  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i}) = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \overrightarrow{MO} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$

a) Si  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$  alors  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$ .

b) Si  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$  alors  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \overrightarrow{MO} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i} = \vec{0}$  et en particulier si l'on

remplace O par  $A_1$  on a :  $\left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \overrightarrow{MA_1} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{A_1 A_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1 M} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \sum_{i=2}^n \alpha_i \overrightarrow{A_1 A_i}$ .

Le point M ne dépend que des points pondérés  $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$  c'est leur barycentre G.

c) Par ailleurs :  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \overrightarrow{MO} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i} \Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \overrightarrow{MG}$  en remplaçant O par G.

### Remarque

Dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de  $\mathcal{E}$ , si  $G = \text{bar} \{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$  et  $(x_i, y_i, z_i)$  les coordonnées du point  $A_i$ , alors

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i} \Leftrightarrow G \left( \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}; \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}; \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \right)$$



### Exemple

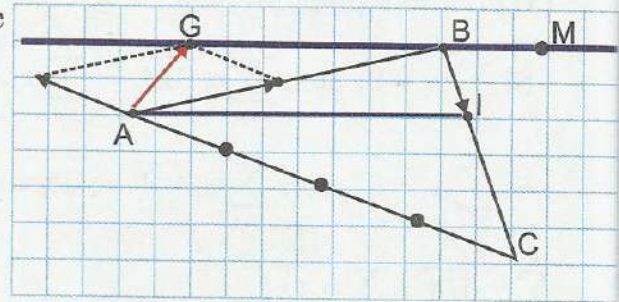
1) A, B et C sont trois points non alignés de  $\mathcal{E}$ . Déterminons l'ensemble des points M de  $\mathcal{E}$  tels que les vecteurs  $3\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}$  et  $3\vec{MA} - 2\vec{MB} - \vec{MC}$  soient colinéaires.

• Puisque  $3 + 2 - 1 = 4$ , notons G le barycentre des points pondérés (A, 3) ; (B, 2)

et (C, -1). On a :  $3\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC} = (3 + 2 - 1)\vec{MG} = 4\vec{MG}$ .

•  $3\vec{MA} - 2\vec{MB} - \vec{MC} = (3 - 2 - 1)\vec{MA} - 2\vec{AB} - \vec{AC} = -3\vec{AI}$  où I est le barycentre de points pondérés (B, 2) et (C, 1).

Ces deux vecteurs sont colinéaires si les droites dirigées par  $4\vec{MG}$  et  $-3\vec{AI}$  sont parallèles donc l'ensemble des points M cherchés est la droite passant par G et parallèle (AI).



2) Soit ABCD un tétraèdre. On considère le repère  $(A, \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$ .

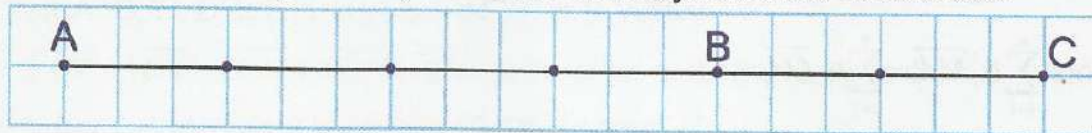
Soit G son centre de gravité; on a :

$$\vec{AG} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC} + \frac{1}{4}\vec{AD} \text{ donc } G\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right).$$



### S'exercer

1.a Écrire chacun des points A, B et C comme barycentre des deux autres.



1.b ABCD est un carré, E le milieu de [BD]. Construire le barycentre des points pondérés dans chaque cas.

a) (A, 2), (B, 2), (C, 4) et (E, -4)

c) (A, -1), (B, 2), (C, 4) et (E, -2)

b) (A, 1), (B, -1), (C, 1) et (E, -2)

d) (A, 1), (B, 1), (C, -2) et (E, -2)

1.c ABCD est un parallélogramme.

• Réduire le vecteur  $\vec{u} = \vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC} - 4\vec{MD}$ .

• Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que  $\vec{u}$  et  $\vec{v} = 2\vec{MA} - 3\vec{MB} + 3\vec{MD}$  soient colinéaires.

1.d Soit A, B et C trois points non alignés. On désigne par A', B' et C' les milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB] ; D le point du plan (ABC) tel que  $\vec{AD} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ .

Démontrer que les droites (AA'), (B'C') et (CD) sont concourantes.

1.e Soit ABCD un tétraèdre. On désigne par G le barycentre des points pondérés

(A, 2), (B, -3), (C, 1) et (D, 4). A tout point M de l'espace, on associe le vecteur  $\vec{u}$  tel que :

$$\vec{u} = 2\vec{MA} - 3\vec{MB} + \vec{MC} + 4\vec{MD}.$$

a) Démontrer que  $\vec{u} = 4\vec{MG}$ .

b) Déterminer les coordonnées de G dans le repère (A, B, C, D).



## 1.2 BARYCENTRES PARTIELS-ENSEMBLE DES BARYCENTRES DE POINTS PONDÉRÉS



### Prendre un bon départ

#### Activité 1

Soient  $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ ,  $n$  points pondérés tels que  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$ . Soit  $p \in \mathbb{N}$ ,  $1 < p < n$

tels que  $\sum_{i=1}^p \alpha_i \neq 0$  et  $\sum_{i=p+1}^n \alpha_i \neq 0$ .

Soient  $G$  et  $K$  les barycentres respectifs des points pondérés  $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq p}$  et  $(A_i, \alpha_i)_{p+1 \leq i \leq n}$ .

• Montrer que  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA} = 0 \Leftrightarrow \left( \sum_{i=1}^p \alpha_i \right) \overrightarrow{GK} + \sum_{i=p+1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$

• En déduire que  $G$  est le barycentre du système des points pondérés

$\left( K, \sum_{i=1}^p \alpha_i \right), (A_{p+1}, \alpha_{p+1}), (A_{p+2}, \alpha_{p+2}), \dots, (A_n, \alpha_n)$ .

#### Activité 2

Soit  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points non alignés de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{B}$  l'ensemble des barycentres des points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

• Soit  $I$  le centre de gravité du triangle  $ABC$ . Justifier que  $I \in \mathcal{B}$ .

• Soit  $G$  le barycentre des points pondérés  $(A, \alpha), (B, \beta)$  et  $(C, \gamma)$ . Montrer que  $G$  appartient au plan  $(ABC)$ . En déduire que  $\mathcal{B} \subset (ABC)$ .

• Soit  $M$  un point du plan  $(ABC)$ , on sait qu'il existe deux réels  $x$  et  $y$  tels que  $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ .

Écrire  $M$  comme barycentre des points  $A$ ,  $B$  et  $C$ . En déduire que  $(ABC) \subset \mathcal{B}$ .

• Déduire de ce qui précède l'ensemble des barycentres des points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .



### Retenir

(1) Le barycentre d'un système de  $n$  points pondérés ( $n \geq 3$ ) ne change pas si l'on remplace un sous-système par son barycentre lorsque c'est possible en lui affectant la somme des coefficients associés aux points du sous-système

• Si  $\sum_{i=1}^p \alpha_i \neq 0$  alors

$\text{bar} \{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$

$= \text{bar} \left\{ \left( K, \sum_{i=1}^p \alpha_i \right), (A_{p+1}, \alpha_{p+1}), (A_{p+2}, \alpha_{p+2}), \dots, (A_n, \alpha_n) \right\}$  où  $K = \text{bar} \{(A_1, \alpha_1), \dots, (A_p, \alpha_p)\}$  et  $\sum_{i=p+1}^n \alpha_i \neq 0$

(2) L'ensemble des barycentres de deux points distincts  $A$  et  $B$  est la droite  $(AB)$ .

(3) L'ensemble des barycentres de trois points non alignés  $A$ ,  $B$  et  $C$  est le plan  $(ABC)$ .



**Exemple**

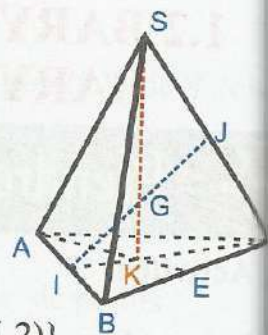
- Construisons le centre de gravité  $G$  du tétraèdre  $SABC$ .

Soit  $K$  le centre de gravité du triangle  $ABC$ . On a :

$$G = \text{bar}\{(S,1), (A,1), (B,1), (C,1)\} = \text{bar}\{(S,1), (K,3)\} \text{ donc } \overrightarrow{SG} = \frac{3}{4} \overrightarrow{SK}.$$

- Soit  $I$  le milieu de  $[AB]$  et  $J$  le milieu de  $[SC]$ . Alors

$G$  est le milieu de  $[IJ]$  car  $G = \text{bar}\{(S,1), (C,1), (A,1), (B,1)\} = \text{bar}\{(I,2), (J,2)\}$


**Remarque**

L'ensemble des barycentres de quatre points non coplanaires de  $\mathcal{E}$  est l'espace  $\mathcal{E}$ .

**Exercice résolu**

$A, B, C, D$  sont quatre points non coplanaires,  $E$  est le milieu de  $[AB]$  ;  $F$  est un point tel que

$$\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC} \text{ et } G = \text{bar}\{(C,1); (D,3)\}.$$

Montrons qu'il existe un unique point  $H$  de la droite  $(AD)$  tel que les droites  $(HF)$  et  $(EG)$  soient sécantes.

**Solution**
**Détermination de  $H$ .**

Si un tel point  $H$  existe alors il est un barycentre des points  $A$  et  $D$  car  $(AD)$  est l'ensemble des barycentres de  $A$  et  $D$ .

$$\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC} \Rightarrow F = \text{bar}\{(B,1); (C,2)\} ; \text{ et } E = \text{bar}\{(A,1); (B,1)\}$$

$$G = \text{bar}\{(C,1); (D,3)\} = \text{bar}\{(C,2); (D,6)\} \text{ car le barycentre est homogène.}$$

$$\text{Soit } K = \text{bar}\{(A,1); (B,1); (C,2); (D,6)\}.$$

$$\bullet \text{ On a : } K = \text{bar}\{(E,2); (G,8)\} \Rightarrow K \in (EG)$$

$$\bullet \text{ Par ailleurs, } K = \text{bar}\{(B,1); (C,2); (A,1); (D,6)\} = \text{bar}\{(F,3); (A,1); (D,6)\}$$

En posant  $H = \text{bar}\{(A,1); (D,6)\}$ , on a  $K = \text{bar}\{(F,3); (H,7)\}$ , c'est-à-dire  $K \in (FH)$ .

L'unique point  $H$  cherché est  $H = \text{bar}\{(A,1); (D,6)\}$


**S'exercer**

1.  $f$   $ABCDE$  est une pyramide de sommet  $A$ ,  $I$  et  $J$  les centres de gravité respectifs des faces  $ABC$  et  $ADE$ ,  $G$  est le barycentre des points pondérés  $(A,3); (B,2); (C,2); (D,1); (E,1)$ .

- Démontrer que les points  $G$ ,  $I$  et  $J$  sont alignés.
- En déduire une construction du point  $G$ .

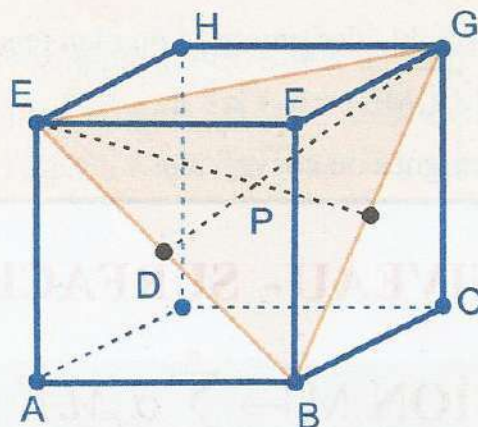


**1.g** Soit ABCD un tétraèdre, G le centre de gravité de la face BCD. On note I, J et K les points définis par :  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AG}$  ;  $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ .

Démontrer que les points I, J, K et D sont coplanaires.

**1.h** Sur la figure ci-dessous ABCDEFGH est un cube de centre de gravité K.

Soit P le centre de gravité du triangle EBG. On considère le repère orthonormé (A, B, D, E).



- Calculer les coordonnées de P et K.
- Les points F, P et D sont-ils alignés ? En est-il de même pour les points D, K, P et F ?
- Le plan (EBF) est-il orthogonal à la droite (DF) ?
- Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG).
- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DF).



# LEÇON 2 LIGNES DE NIVEAU ET SURFACES DE NIVEAU

- Consolider les lignes de niveau définies par une fonction scalaire dans le plan.
- Déterminer les surfaces de niveau associées à des fonctions scalaires définies dans l'espace.
- Déterminer et construire l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \alpha + k \times 2\pi$  ou  $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \alpha + k \times \pi$  ;
- Montrer que des points sont alignés ou cocycliques.

## 2.1 LIGNES DE NIVEAU - SURFACES DE NIVEAU DE

$$L'APPLICATION M \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2$$



### Prendre un bon départ

#### Activité 1

1. Soit  $A$  un point de  $\mathcal{E}$  et  $r$  un réel. Déterminer suivant les valeurs de  $r$  l'ensemble  $(S)$  des points  $M$  de  $\mathcal{E}$  tels que  $AM = r$ .
2. Soit  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère orthonormé de  $\mathcal{E}$ ,  $A(-1; 1; 2)$  et  $M(x; y; z)$ .  
Déterminer la relation qui lie  $x, y$  et  $z$  pour que  $AM = \sqrt{2}$
3. Soit  $\lambda$  un réel. Déterminer suivant les valeurs de  $\lambda$ , l'ensemble  $(S')$  des points  $M(x; y; z)$  de  $\mathcal{E}$  tels que  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z + \lambda = 0$ .

#### Activité 2

Soient  $ABC$  un triangle équilatéral de côté  $\sqrt{3}$  et  $\lambda$  un réel.

1. Soit  $(\Gamma_1)$  l'ensemble des points  $M$  tels que :  $2MA^2 + MB^2 - MC^2 = \lambda$ .
  - a) Démontrer que  $2MA^2 + MB^2 - MC^2 = 2MG^2 + 2GA^2 + GB^2 - GC^2$  où  $G$  est un point à déterminer.
  - b) En déduire suivant les valeurs de  $\lambda$  l'ensemble  $(\Gamma_1)$ .
2. a) Démontrer que :
 
$$2MA^2 + MB^2 - 3MC^2 = 2\overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}) + AB^2 - 3AC^2$$
  - b) En déduire que  $M \in (\Gamma_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AG_1} = \frac{\lambda+6}{2}$  où  $G = \text{bar}\{(B, 1); (C, -3)\}$ .
  - c) Pour  $\lambda = -6$ , déterminer  $(\Gamma_1)$ .



- d) Pour  $\lambda = 2$ ,
- Démontrer que  $M \in (\Gamma_1) \Leftrightarrow AH \cdot AG_1 = 2$   
où H est le projeté orthogonal de M sur la droite  $(AG_1)$
  - Calculer  $AG_1$
  - En déduire que  $(\Gamma_1)$  est le plan passant par H et de vecteur normal  $\overline{AG_1}$ .

### Vocabulaire

Soit  $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$  deux applications. Soit  $k$  un réel.

- L'ensemble des points M du plan  $\mathcal{P}$  tel que  $f(M) = k$  est appelé **ligne de niveau  $k$  de  $f$** .
- L'ensemble des points M de l'espace  $\mathcal{E}$  tels que  $g(M) = k$  est appelé **surface de niveau  $k$  de  $g$** .

## Retenir

(1) Soit  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère orthonormé de  $\mathcal{E}$ ,  $A(a; b; c)$  un point de  $\mathcal{E}$  et  $r$  un réel strictement positif.

- L'ensemble des points  $M(x; y; z)$  de tels que  $AM = r$  est la sphère d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$  où  $d = a^2 + b^2 + c^2 - r^2$ .
- L'ensemble des points  $M(x; y; z)$  de l'espace tels que  $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$  peut-être  $\emptyset$  ou le singleton  $\{A\}$  ou une sphère de centre  $A(a; b; c)$ .

(2) Soit  $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ ,  $n$  points pondérés tels que  $\sum_{i=p+1}^n \alpha_i \neq 0$ .

- Pour tout point M, on a  $\sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2 = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) MG^2 + \sum_{i=1}^n \alpha_i GA_i^2$  où G est le barycentre des points pondérés  $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ .

- Si les points  $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont dans le plan  $\mathcal{P}$ , alors la ligne de niveau  $k$  de l'application

$M \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2$  est  $\emptyset$ ,  $\{G\}$  ou un cercle de centre G.

- Si les points  $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont dans l'espace  $\mathcal{E}$ , alors la surface de niveau  $k$  de l'application  $M \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2$  peut-être  $\emptyset$ ,  $\{G\}$  ou une sphère de centre G.

(3) Soit  $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ ,  $n$  points pondérés tels que  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$  et O un point.

- Pour tout point M, on a  $\sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i OA_i^2 - 2\vec{u} \cdot \overline{OM}$  où le vecteur  $\vec{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{OA_i}$  et est indépendant de M.



- Dans le plan  $\mathcal{P}$ , la ligne des niveau  $k$  de l'application  $M \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2$  est :
  - $\emptyset$  ou le plan  $\mathcal{P}$  si  $\vec{u} = \vec{0}$ .
  - Une droite de vecteur normal  $\vec{u}$ , si  $\vec{u} \neq \vec{0}$ .
- Dans l'espace  $\mathcal{E}$ , la surface de niveau  $k$  de l'application  $M \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2$  est :
  - $\emptyset$  ou l'espace  $\mathcal{E}$  si  $\vec{u} = \vec{0}$ .
  - Un plan de vecteur normal  $\vec{u}$ , si  $\vec{u} \neq \vec{0}$ .

### S'en convaincre

(2) Soit  $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ ,  $n$  points pondérés tels que  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$ . Soit  $G$  est le barycentre des points pondérés  $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ .

Pour tout  $i$ , on a :  $\alpha_i MA_i^2 = \alpha_i (\vec{MG} + \vec{GA})^2 = \alpha_i MG^2 + 2\alpha_i \vec{MA} \cdot \vec{GA} + \alpha_i GA_i^2$  donc

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2 = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) MG^2 + 2\vec{MG} \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{GA}_i = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) MG^2 + \sum_{i=1}^n \alpha_i GA_i^2 \quad \text{car } \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{GA}_i = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i GA_i^2 = k \Leftrightarrow MG^2 = \frac{k - \sum_{i=1}^n \alpha_i GA_i^2}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} = \lambda \quad \text{car } \sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$$

Si  $k = \sum_{i=1}^n \alpha_i GA_i^2$  c'est-à-dire  $\lambda = 0$  alors  $M = G$ . Si  $\lambda < 0$  alors on a  $\emptyset$  et si  $\lambda > 0$  alors  $MG = \sqrt{\lambda}$ .

Ainsi l'ensemble cherché est  $\emptyset$ , le singleton  $\{G\}$  ou le cercle  $C(G, \sqrt{\lambda})$  dans le plan  $\mathcal{P}$  ou bien la sphère  $S(G, \sqrt{\lambda})$  dans l'espace  $\mathcal{E}$ .

(3) Soit  $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ ,  $n$  points pondérés tels que  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$ . Soit  $O$  un point quelconque.

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2 = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) MO^2 + 2\vec{MO} \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{OA}_i + \sum_{i=1}^n \alpha_i OA_i^2 = 2\vec{MO} \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{OA}_i + \sum_{i=1}^n \alpha_i OA_i^2$$

$$\text{car } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 0.$$

$$\text{Donc } \sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2 = k \Leftrightarrow 2\vec{MO} \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{OA}_i + \sum_{i=1}^n \alpha_i OA_i^2 = k \Leftrightarrow 2\vec{OM} \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i OA_i^2 \quad \text{où } \vec{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{OA}_i$$

Si  $\vec{u} = \vec{0}$  et  $\sum_{i=1}^n \alpha_i OA_i^2 = 0$ , alors tout point  $M$  satisfait à l'égalité encadrée ci-dessus.

Si  $\vec{u} = \vec{0}$  et  $\sum_{i=1}^n \alpha_i OA_i^2 \neq 0$ , il n'existe pas un tel point  $M$ .



Si  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et  $\sum_{i=1}^n \alpha_i OA_i^2 = 0$ , alors  $\vec{OM} \cdot \vec{u} = 0$  et l'ensemble des points M cherché est :

- dans le plan  $\mathcal{P}$ , la droite passant par O et de vecteur normal  $\vec{u}$ .
- dans l'espace  $\mathcal{E}$ , le plan passant par O et de vecteur normal  $\vec{u}$ .

### Exemple

ABCD est un tétraèdre régulier d'arête 1.

1) Soit  $(\Gamma)$  l'ensemble des points M de tels que  $3MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 3$ .

• Montrons que  $A \in (\Gamma)$ .

$$3AA^2 + AB^2 + AC^2 + AD^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3 \text{ donc } A \in (\Gamma)$$

• Détermination et construction de  $(\Gamma)$ .

Soit  $G = \text{bar}\{(A,3), (B,1), (C,1), (D,1)\}$

$$3MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 6MG^2 + 3GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$$

$$3MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 6MG^2 + 3GA^2 + 3GH^2 + HB^2 + HC^2 + HD^2 \text{ où H est le centre de gravité du triangle BCD.}$$

$G = \text{bar}\{(A,3), (B,1), (C,1), (D,1)\} = \text{bar}\{(A,3), (H,3)\}$  donc G est le milieu de [AH] c'est-à-dire que  $GA = GH$ .

$$\text{Par ailleurs, } HB = HC = HD = \frac{2}{3} \times DI = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{car } DI = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ La droite (AH) est orthogonale au plan (BCD),}$$

$$\text{donc } AH^2 = AD^2 - HD^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}$$

$$\text{donc } GA^2 = \left(\frac{1}{2} AH\right)^2 = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}.$$

$$3MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 6MG^2 + 6GA^2 + 3HB^2 = 6MG^2 + 6 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{3} = 6MG^2 + 2$$

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow 6MG^2 + 2 = 3 \Leftrightarrow MG = \frac{\sqrt{6}}{6}. \text{ Ainsi } (\Gamma) \text{ est la sphère de centre G et de rayon } \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

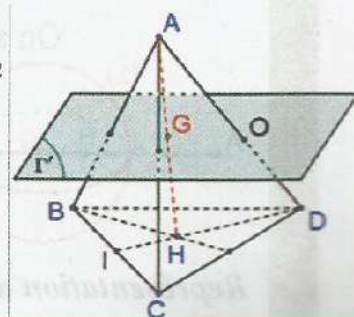
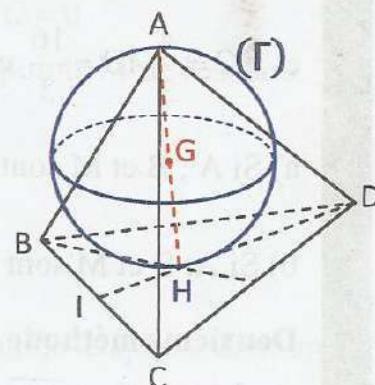
2) Soit  $(\Gamma')$  l'ensemble des points M de  $\mathcal{E}$  tels que :  $-3MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 1$ .

Déterminons et construisons  $(\Gamma')$ .

$$-3MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2\vec{MA} \cdot (\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}) + AB^2 + AC^2 + AD^2$$

or H est le centre de gravité du triangle BCD. Donc

$$-3MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 1 \Leftrightarrow 6\vec{MA} \cdot \vec{AH} + 3 = 1 \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{AH} = -\frac{1}{3}$$





Soit P le projeté orthogonal de M sur la droite (AH) alors

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AH} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AH} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3\overrightarrow{AH}} = -\frac{\sqrt{6}}{6}$$

donc  $(\Gamma')$  est le plan passant par P tel que  $\overrightarrow{AP} = -\frac{\sqrt{6}}{6}$  et de vecteur normal  $\overrightarrow{AH}$ . En effet P est confondu avec G.

(3) L'intersection de  $(\Gamma)$  et  $(\Gamma')$  est le cercle de centre G et de rayon  $\frac{\sqrt{6}}{6}$

### Exercice résolu

Soit A et B deux points tels que  $AB = 4$  cm. Déterminer et construire l'ensemble  $(\Sigma)$  des points M tels que  $\frac{MA}{MB} = 2$ .

- a) A, B et M sont des points du plan  $\mathcal{P}$ .
- b) A, B et M sont des points de l'espace  $\mathcal{E}$ .

#### Solution

Détermination de  $(\Sigma)$  :  $\frac{MA}{MB} = 2 \Leftrightarrow MA^2 - 4MB^2 = 0$

#### Première méthode

$MA^2 - 4MB^2 = -3MG^2 + GA^2 - 4GB^2$  où G est le barycentre des points pondérés (A,1) et (B,3) et  $AG = \frac{4}{3}AB = \frac{16}{3}$  et  $BG = \frac{1}{3}AB = \frac{4}{3}$ . Ainsi  $M \in (\Sigma) \Leftrightarrow MG^2 = 4 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2$

- a) Si A, B et M sont des points du plan  $\mathcal{P}$  alors  $(\Sigma)$  est le cercle de centre G et de rayon  $\frac{8}{3}$
- b) Si A, B et M sont des points de l'espace  $\mathcal{E}$  alors  $(\Sigma)$  est la sphère de centre G et de rayon  $\frac{8}{3}$

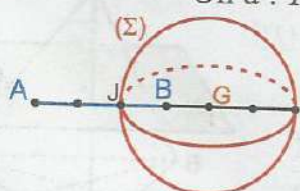
#### Deuxième méthode

$MA^2 - 4MB^2 = (\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) = -3\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ}$  où  $I = \text{bar}\{(A,1);(B,-2)\}$  et  $J = \text{bar}\{(A,1);(B,2)\}$ . Ainsi  $M \in (\Sigma)$  si et seulement si  $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$ .

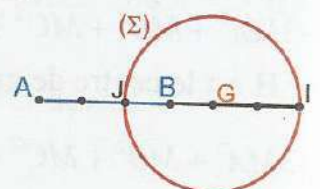
- c) Si A, B et M sont des points du plan  $\mathcal{P}$  alors  $(\Sigma)$  est le cercle diamètre [IJ].
- d) Si A, B et M sont des points de l'espace  $\mathcal{E}$  alors  $(\Sigma)$  est la sphère dont un diamètre est [IJ].

Montrons que G est le milieu du segment [IJ].

$$\text{On a : } \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB} \text{ car } \overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$$



$$\begin{aligned} \overrightarrow{IG} &= \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AI} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} \\ &= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \text{ car } \overrightarrow{AG} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$



Représentation dans  $\mathcal{E}$

Donc  $\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{IG}$  : G est milieu de [IJ]

Représentation dans  $\mathcal{P}$



### Remarque

Soit  $k$  un nombre réel strictement positif et différent de 1. Soient A et B deux points distincts,  $I = \text{bar}\{(A,1);(B,-k)\}$ ,  $J = \text{bar}\{(A,1);(B,k)\}$  et  $G = \text{bar}\{(A,1);(B,-k^2)\}$ . L'ensemble des points M tels que  $\frac{MA}{MB} = k$  est :

- Dans le plan  $\mathcal{P}$ , le cercle de diamètre [IJ] ou de centre G et de rayon  $\frac{k}{|1-k^2|} AB$ .
- Dans l'espace, la sphère de diamètre [IJ] ou de centre G et de rayon  $\frac{k}{|1-k^2|} AB$ .
- Le milieu de [IJ] est le barycentre G des points pondérés (A,1) et (B,-k<sup>2</sup>).

### S'exercer

**2a** ABC est un triangle équilatéral tel que  $AB = 12$  cm.

a) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que les vecteurs  $\vec{u} = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$  et  $\vec{v} = \vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC}$  soient colinéaires.

b) Déterminer et construire l'ensemble (E') des points M du plan tels que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  aient même norme.

**2b** ABC est un triangle isocèle tel que :  $AB = AC = 6$  et  $BC = 4$ .

Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que  $-2MA + MB + MC = 0$

**2c** Soit SABC un tétraèdre régulier d'arête  $a$ . Soit (F) l'ensemble des points M de l'espace tels que  $MS^2 + 2MA^2 + 3MB^2 - 6MC^2 = 6a^2$ .

a) Montrer que  $C \in (F)$  et  $S \notin (F)$ . En déduire que  $(F) \neq \emptyset$  et  $(F) \neq \mathcal{E}$ .

b) Déterminer et construire (F).

**2d** L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

a) Soient les points  $A(3; -5; 7)$  et  $B(1; -3; 9)$ . Déterminer une équation de la sphère dont un diamètre est [AB].

b) Déterminer suivant les valeurs de  $a$  l'ensemble (H) des points  $M(x; y; z)$  de  $\mathcal{E}$  tels que :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3y + 4z = \frac{29}{4} a.$$

## 2.2 LIGNES DE NIVEAU DE L'APPLICATION

$$M \mapsto \widehat{(\vec{MA}, \vec{MB})}$$

### Prendre un bon départ

Soit A et B deux points distincts du plan.



**Activité 1**

a) Représenter sur une même figure, l'ensemble des points :

• P tels que  $\text{Mes}(\widehat{PA, PB}) = 0$ .

• N tels que  $\text{Mes}(\widehat{NA, NB}) = \pi$ .

b) En déduire l'ensemble des points M tels que  $\text{Mes}(\widehat{MA, MB}) = k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

c) A et B font-ils partie de cet ensemble ? Justifier.

**Activité 2**

a) Construire l'ensemble des points M du plan tel que  $\text{mes}(\widehat{AMB}) = 60^\circ$ .

b) Représenter sur la même figure, l'ensemble des points :

• P tels que  $\text{Mes}(\widehat{PA, PB}) = \frac{\pi}{3} + k(2\pi)$

• N tels que  $\text{Mes}(\widehat{NA, NB}) = -\frac{2\pi}{3} + k(2\pi)$

• Les points A, B, P et N sont-ils cocycliques ? Si oui caractériser ce cercle.

c) En déduire l'ensemble des points M tels que  $\text{Mes}(\widehat{MA, MB}) = \frac{\pi}{3} + k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$

d) A et B font partie de cet ensemble ? Justifier.

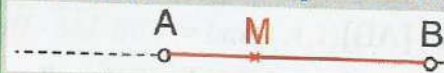

**Retenir**

(1) Soit A et B deux points distincts du plan.

• L'ensemble des points M tels que  $\text{Mes}(\widehat{MA, MB}) = 0$  est la droite (AB) privée du segment [AB].



• L'ensemble des points M tels que  $\text{Mes}(\widehat{MA, MB}) = \pi$  est le segment [AB] privé des points A et B.



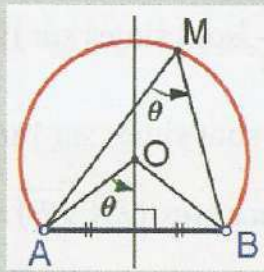
• L'ensemble des points M tels que  $\text{Mes}(\widehat{MA, MB}) = 0[\pi]$  est la droite (AB) privée des points A et B.



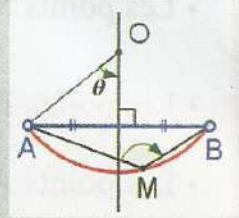
(2) Soit A et B deux points distincts et  $\theta$  un élément de  $] -\pi; 0[ \cup ]0, ; \pi[$ . On note O le point de la médiatrice de [AB] tel que  $\text{Mes}(\widehat{MA, MB}) = 2\theta$  et (C) le cercle de centre O et passant par A et B.



- Si  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0[ \cup ]0, \frac{\pi}{2}\right]$  alors l'ensemble des points M tels que  $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 2\theta$  est l'arc  $\widehat{AB}$  de cercle (C).



- Si  $\theta \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  alors l'ensemble des points M tels que  $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 2\theta$  est l'arc  $\widehat{AB}$  de cercle (C).



- L'ensemble des points M du plan tels que  $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv 2\theta [\pi]$  est le cercle (C) privé des points A et B.

(3) Quatre points A, B, C et D du plan sont *alignés* ou *cocycliques* si et seulement si :  $Mes(\widehat{CA}, \widehat{CB}) \equiv Mes(\widehat{DA}, \widehat{DB}) [\pi]$ .

### S'en convaincre

Soit A, B et M trois points du plan,

$$(1) A, B \text{ et } M \text{ alignés} \Leftrightarrow 2(\widehat{MA}, \widehat{MB}) = 0 \Leftrightarrow 2 \times Mes(\widehat{MA}, \widehat{MB}) = k \times 2\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Dans l'intervalle  $]-\pi, \pi]$  on a :  $Mes(\widehat{MA}, \widehat{MB}) = 0$  ou  $Mes(\widehat{MA}, \widehat{MB}) = \pi$

(2) Soit  $\theta \in ]-\pi, 0[ \cup ]0, \pi[$ , soit (C) le cercle de centre O et passant par A et B tel que  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2\theta$ .

$$M \in (C) \setminus \{A, B\} \Leftrightarrow 2(\widehat{MA}, \widehat{MB}) = (\widehat{OA}, \widehat{OB}) = 2\theta$$

$$\Leftrightarrow 2 \times Mes(\widehat{MA}, \widehat{MB}) = 2 \times \theta + k \times 2\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow Mes(\widehat{MA}, \widehat{MB}) = \theta + k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ c'est-à-dire } Mes(\widehat{MA}, \widehat{MB}) \equiv \theta [\pi].$$

• Comme  $\theta \in ]-\pi, 0[ \cup ]0, \pi[$  alors  $\theta$  est une mesure principale de  $Mes(\widehat{MA}, \widehat{MB})$ .

•  $\theta \in ]-\pi, 0[ \Leftrightarrow \theta + \pi \in ]0, \pi[$  donc  $Mes(\widehat{MA}, \widehat{MB}) = \theta + \pi$  si  $\theta \in ]-\pi, 0[$ .

•  $\theta \in ]-\pi, 0[ \Leftrightarrow \theta - \pi \in ]-\pi, 0[$  donc  $Mes(\widehat{MA}, \widehat{MB}) = \theta - \pi$  si  $\theta \in ]0, \pi[$ .

### Exemple

Soit A et B deux points distincts du plan

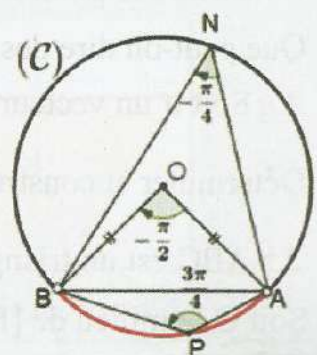
Déterminons et construisons l'ensemble des points M tels que :

$$a) Mes(\widehat{MA}, \widehat{MB}) = -\frac{\pi}{4} [\pi].$$

$$\text{On a : } Mes(\widehat{MA}, \widehat{MB}) = -\frac{\pi}{4} \text{ ou } Mes(\widehat{MA}, \widehat{MB}) = \frac{3\pi}{4}.$$

Soit OAB le triangle rectangle isocèle en O et (C) le cercle

de centre O et passant par A et B on a :  $Mes(\widehat{OA}, \widehat{OB}) = -\frac{\pi}{2}$





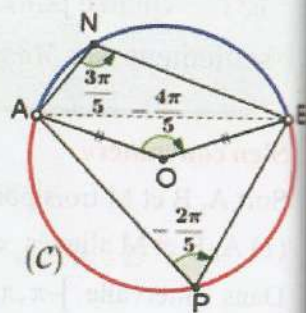
- Les points N tels que  $\text{Mes}(\widehat{NA, NB}) = -\frac{\pi}{4}$  sont situés sur l'arc  $\widehat{AB}$  privé de A et B.
- Les points P tels que  $\text{Mes}(\widehat{PA, PB}) = \frac{3\pi}{4}$  sont situés sur l'arc  $\widehat{AB}$  privé de A et B.
- Les points A, B, P et N sont cocycliques car  $\text{Mes}(\widehat{PA, PB}) \equiv \text{Mes}(\widehat{NA, NB})[\pi]$

b)  $\text{Mes}(\widehat{MA, MB}) \equiv \frac{3\pi}{5}[\pi]$ .

On a :  $\text{Mes}(\widehat{MA, MB}) = \frac{3\pi}{5}$  ou  $\text{Mes}(\widehat{MA, MB}) = -\frac{2\pi}{5}$ .

Soit OAB le triangle isocèle en O tel que  $\text{Mes}(\widehat{OA, OB}) = -\frac{4\pi}{5}$

qui est la mesure principale de  $2 \times \frac{3\pi}{5}$  et (C) le cercle de centre O et passant par A et B.



- Les points N tels que  $\text{Mes}(\widehat{NA, NB}) = \frac{3\pi}{5}$  sont situés sur l'arc  $\widehat{AB}$  privé de A et B.
- Les points P tels que  $\text{Mes}(\widehat{PA, PB}) = -\frac{2\pi}{5}$  sont situés sur l'arc  $\widehat{AB}$  privé de A et B.
- Les points A, B, P et N sont cocycliques car  $\text{Mes}(\widehat{PA, PB}) \equiv \text{Mes}(\widehat{NA, NB})[\pi]$



## S'exercer

2.e A et B sont deux points distincts du plan.

Déterminer et construire l'ensemble des points N du plan tels que :

a)  $\text{Mes}(\widehat{NA, NB}) \equiv \frac{2\pi}{5}[2\pi]$  ;      b)  $\text{Mes}(\widehat{NA, NB}) \equiv -\frac{5\pi}{6}[2\pi]$

c)  $\text{Mes}(\widehat{NA, NB}) \equiv -\frac{\pi}{6}[\pi]$  ;      d)  $\text{Mes}(\widehat{NA, NB}) \equiv \frac{3\pi}{4}[\pi]$

2.f A, B, C et D quatre points distincts du plan tels que  $\text{Mes}(\widehat{CA, CB}) \not\equiv 0[\pi]$ .

Construire le point D sachant que  $\text{Mes}(\widehat{DA, DB}) \equiv \text{Mes}(\widehat{CA, CB})[\pi]$ .

Que peut-on dire des points A, B, C, et D ?

2.g Soit  $\vec{u}$  un vecteur non nul et O un point fixé.

Déterminer et construire l'ensemble des points P du plan tels que  $\text{Mes}(\widehat{OP, \vec{u}}) \equiv \frac{\pi}{3}[\pi]$

2.h ABC est un triangle rectangle en A tels que  $\text{mes}(\widehat{CA, CB}) \equiv \alpha[2\pi]$ .

Soit O le milieu de [BC] et E le point du plan tel que  $\vec{OE} = \vec{CA}$ . Exprimer la mesure de l'angle  $(\vec{OA}, \vec{OB})$  en fonction de  $\alpha$ .



# LEÇON 3 PRODUIT VECTORIEL

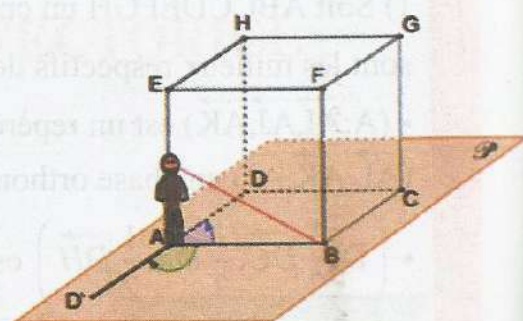
- Comprendre l'orientation de l'espace ;
- Déterminer le produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace orienté ;
- Déterminer le produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace orienté, relativement à une base orthonormée directe ;

## 3.1 ORIENTATION DE L'ESPACE : BASES ORTHONORMÉES DIRECTES OU INDIRECTES.

### Prendre un bon départ

Sur la figure ci-contre, ABCDEFGH est un cube d'arête 1 et D' est le symétrique de D par rapport à A. On considère dans  $\mathcal{E}$  les repères  $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$  et  $(A, \vec{AB}, \vec{AD}', \vec{AE})$ . Un observateur placé en A et la tête sur la demi-droite  $[AE)$  observe le point B.

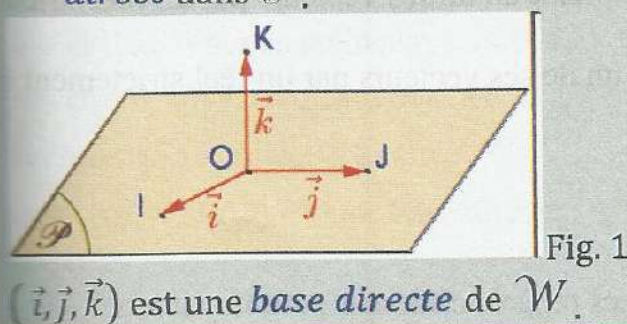
- Justifier que  $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$  est repère orthonormé de  $\mathcal{E}$ .
  - Le point D se trouve-t-il à gauche ou à droite de l'observateur ?
  - Nommer un point qui se trouve à droite de l'observateur lorsqu'il regarde le point B.
  - Y-a-il des points de l'espace, non situés sur les droites  $(AB)$  et  $(AE)$  qui ne se trouvent ni à gauche, ni à droite de l'observateur ?
- On convient que le repère  $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$  est direct de l'espace et que  $(A, \vec{AB}, \vec{AD}')$  est direct du plan  $(\mathcal{P})$ .



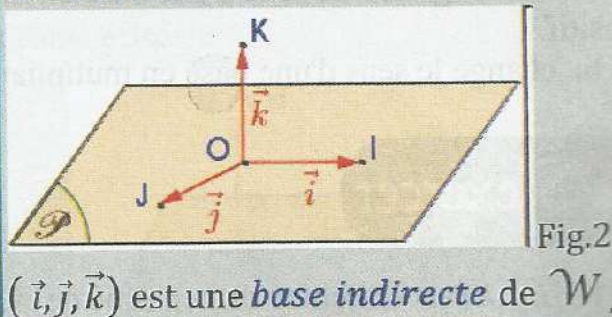
### Retenir

Soit  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère de l'espace  $\mathcal{E}$  et les points I, J et K tels que  $\vec{i} = \vec{OI}$ ,  $\vec{j} = \vec{OJ}$  et  $\vec{k} = \vec{OK}$ . On note  $(\mathcal{P})$  le plan (OIJ).

- le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est de sens *direct* dans  $\mathcal{E}$ .



Le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de sens *indirect* dans  $\mathcal{E}$ .





### • Orientation de l'espace $\mathcal{E}$

Orienter l'espace  $\mathcal{E}$ , c'est choisir l'un des deux types de repères ou de bases.

### • Orientation d'un plan de $\mathcal{E}$

$(O; \vec{i}, \vec{j})$  est un repère *direct* de  $(\mathcal{P})$  si et seulement si  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est un repère *direct* de  $\mathcal{E}$ . Un plan de  $\mathcal{E}$  est *orienté* par le choix d'un de ses vecteurs normaux.

- $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est un repère orthogonal si et seulement si  $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \vec{i} \cdot \vec{k} = 0$  et  $\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$ .
- $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est un repère orthonormé si et seulement si  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est un repère orthogonal et  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ .

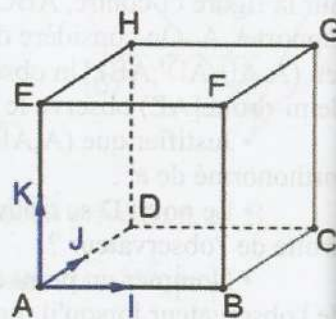
### Exemple

1) Soit ABCDEFGH un cube d'arête 2cm. I, J et K sont les milieux respectifs de  $[AB]$ ,  $[AD]$ , et  $[AE]$

- $(A; \vec{AI}, \vec{AJ}, \vec{AK})$  est un repère orthonormé direct de  $\mathcal{E}$ .
- $(\vec{AI}, \vec{AK}, \vec{AJ})$  une base orthonormée indirecte de  $\mathcal{W}$ .

- $\left(D, \frac{1}{2}\vec{DC}, \frac{1}{2}\vec{DA}, \frac{1}{2}\vec{DH}\right)$  est un repère orthonormé indirect de  $\mathcal{E}$  ( $\vec{DC}, -\vec{DA}, \vec{DH}$ ) une base directe de  $\mathcal{W}$ .

2) Dans le repère ci-dessus, le plan  $(\mathcal{P})$  est orienté direct dans la figure 1 et indirect dans la figure 2.



### Remarque

- Si on intervertit deux vecteurs d'une base, alors on change de sens de l'orientation de cette base.
- Si on remplace un vecteur d'une base par son opposé, alors on change l'orientation de cette base.
- On ne change pas le sens d'une base en effectuant entre ses vecteurs une permutation circulaire.
- On ne change pas de sens d'une base en multipliant un de ses vecteurs par un réel strictement positif.
- On change le sens d'une base en multipliant un de ses vecteurs par un réel strictement négatif.



### S'exercer

3.a  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est un repère orthonormé de  $\mathcal{E}$ . Les repères ci-dessus sont-ils directs ?

- a)  $(O, -\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  b)  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  c)  $(O, -\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  d)  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  e)  $(O, -\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$



1b  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est une base orthonormée de  $\mathcal{W}$ . On considère les vecteurs

$$\vec{u} = \frac{1}{9}(-7\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}), \quad \vec{v} = \frac{1}{9}(4\vec{i} - \vec{j} - 8\vec{k}) \quad \text{et} \quad \vec{w} = \frac{1}{9}(4\vec{i} + 8\vec{j} + \vec{k}).$$

Montrer que  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est une base orthonormée de  $\mathcal{W}$ .

3c ABCDEFG est un pavé droit tel que  $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AE}$  et  $AB = 3$ .

L'unité de mesure est la longueur du segment  $[AC]$

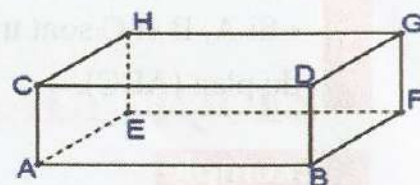
Soit  $\vec{i} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{j} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AE}$  et  $\vec{k} = \overrightarrow{AC}$ .

i) Montrer que  $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est un repère orthonormé direct de  $\mathcal{E}$ .

Déterminer l'orientation de chacune des bases suivantes de  $\mathcal{W}$ :

ii)  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HC}, \overrightarrow{BD})$ ; ii)  $(\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{EH}, \overrightarrow{BF})$ .

Ces bases sont-elles orthogonales ? Orthonormées ?



## 3.2 PRÉSENTATION DU PRODUIT VECTORIEL

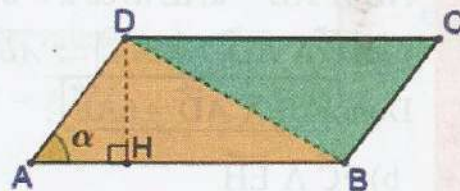
### Prendre un bon départ

Sur la figure ci-contre, ABCD est un parallélogramme de  $\mathcal{E}$ .

• Démontrer que l'aire de ce parallélogramme

est  $A = AB \times AD \times \sin \alpha$ .

• Placer sur la figure un point E tel que la base  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$  est une base directe de  $\mathcal{W}$ .



### Retenir

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $\mathcal{W}$ . Soient A, B et C des points de  $\mathcal{E}$  tel que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ .

On appelle **produit vectoriel des vecteurs**  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , le vecteur noté  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  défini par :

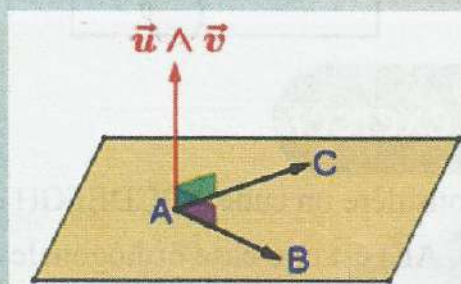
• Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires alors  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ .

• Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires alors  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  est caractérisé par :

- Direction :  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  est orthogonal à  $\vec{u}$  et à  $\vec{v}$ ,

- Norme :  $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin \widehat{BAC}$ ;

- Sens :  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$  est une base directe.





### Remarque et vocabulaire

- $\vec{u} \wedge \vec{v}$  se lit « $\vec{u}$  vectoriel  $\vec{v}$ » et sa définition ne dépend pas du point A.
- Pour tout vecteur  $\vec{u}$  on a :  $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$  ;  $\vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0}$  et  $\vec{0} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ .
- Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont des vecteurs unitaires et orthogonaux, alors  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$  est une base orthonormale directe de  $\mathcal{W}$ .
- Si A, B et C sont trois points non alignés de l'espace  $\mathcal{E}$ , alors  $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$  est un vecteur normal au plan (ABC).

### Exemple

(1) Soit  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base orthonormée de  $\mathcal{W}$ . On a :

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} ; \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} , \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} , \vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k} , \vec{i} \wedge (-\vec{j}) = -\vec{k} , \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j} \text{ et } -\vec{i} \wedge \vec{k} = \vec{j}$$

(2) On considère un pavé droit ABCDEFGH.

1) Déterminons les produits vectoriels suivants :

a)  $\vec{AB} \wedge \vec{AD}$

• C'est un vecteur orthogonal à  $\vec{AB}$  et à  $\vec{AD}$  donc dirigé par la droite (AE).

•  $(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AB} \wedge \vec{AD})$  est une base directe donc il a même sens que le vecteur  $\vec{AE}$ . Ainsi,  $\vec{AB} \wedge \vec{AD} = k\vec{AE}$  avec  $k > 0$ .

$$\|\vec{AB} \wedge \vec{AD}\| = \|k\vec{AE}\| \Rightarrow \vec{AB} \times \vec{AD} \sin 90^\circ = k\vec{AE} \Rightarrow 4 \times 3 = k \times 2 \Rightarrow k = 6.$$

$$\text{Donc } \boxed{\vec{AB} \wedge \vec{AD} = 6\vec{AE}}.$$

b)  $\vec{FC} \wedge \vec{EH}$

$$\vec{FC} \wedge \vec{EH} = \vec{FC} \wedge \vec{FG} \text{ car } \vec{EH} = \vec{FG}.$$

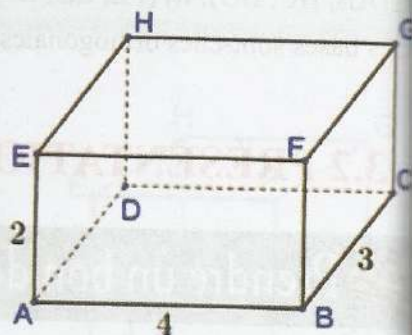
En suivant toutes les étapes du a), on aboutit à  $\vec{FC} \wedge \vec{FG} = k\vec{FE}$ .

L'observateur, couché sur [EF] les pieds en F et la tête vers E, regardant le point C tourne sa tête vers la main droite (sens indirect) pour regarder le point G donc  $k < 0$ .

$$\|\vec{FC} \wedge \vec{FG}\| = \|k\vec{FE}\| \Rightarrow \vec{FC} \times \vec{FG} \sin \widehat{CFG} = |k| \times \vec{FE}.$$

$$\text{Or } FC = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \text{ et } \sin \widehat{CFG} = \frac{CG}{FG} = \frac{2}{\sqrt{13}} \text{ donc } \sqrt{13} \times \frac{2}{\sqrt{13}} = 4|k| ; \text{ ainsi } k = -\frac{1}{2}$$

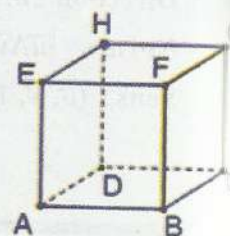
$$\text{Finalement } \boxed{\vec{FC} \wedge \vec{EH} = -\frac{1}{2}\vec{FE}}.$$



### S'exercer

3.d On considère un cube ABCDEFGH d'arête  $a$  tel que  $(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$  est une base orthogonale directe de  $\mathcal{W}$ .

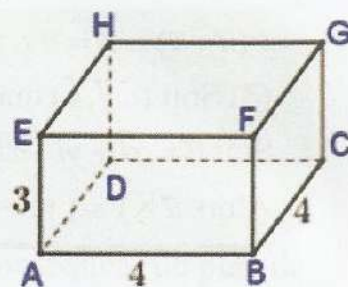
Déterminer les vecteurs  $\vec{AD} \wedge \vec{AB}$  ;  $\vec{AH} \wedge \vec{BF}$  et  $\vec{EG} \wedge \vec{AB}$  ;  $\vec{EH} \wedge \vec{BC}$ .





**Ex** On considère le pavé droit ABCDEFG ci-contre.

- Déterminer les vecteurs suivants :  $\vec{AC} \wedge \vec{AB}$  ;  $\vec{AH} \wedge \vec{GH}$ .
- Démontrer que la droite (BD) est orthogonale au plan (EAC).
- Déterminer les vecteurs  $\vec{AE} \wedge \vec{AC}$  et  $\vec{HF} \wedge \vec{AC}$ .



## 3.3 PROPRIÉTÉS ET EXPRESSIONS ANALYTIQUES DU PRODUIT VECTORIEL

### Prendre un bon départ

#### Activité 1

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $\mathcal{W}$ .

- Montrer que si  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$  alors  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.
- On suppose que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires. Soit A, B, C des points de  $\mathcal{W}$  tels que  $\vec{u} = \vec{AB}$ ,  $\vec{v} = \vec{AC}$ .
  - Justifier que les vecteurs  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  et  $\vec{v} \wedge \vec{u}$  ont même direction et même norme.
  - Soit le point E tel que  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{AE}$ . À l'aide de la règle d'observateur (l'Ampère), placer sur la figure ci-contre le point E' tel que  $\vec{v} \wedge \vec{u} = \vec{AE'}$ . Justifier alors que  $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ .



#### Activité 2

On admet que pour tous vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  de  $\mathcal{W}$  et pour tout nombre réel  $k$  on a :

- $(k\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (k\vec{v}) = k(\vec{u} \wedge \vec{v})$ .
  - $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$  et  $\vec{w} \wedge (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \wedge \vec{u} + \vec{w} \wedge \vec{v}$ .
- Soit  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base orthonormée directe de  $\mathcal{W}$ . Soit  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  et  $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ .
- Démontrer que  $\vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - zy')\vec{i} + (zx' - xz')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k}$ .

### Retenir

- Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $\mathcal{W}$ .
  - $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si et seulement si  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ .
  - $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ .
- Soit  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  des vecteurs de  $\mathcal{W}$ . Soit  $\lambda$  un nombre réel.
  - $(\lambda\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$ .



$$\bullet (\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w} \text{ et } \vec{w} \wedge (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \wedge \vec{u} + \vec{w} \wedge \vec{v}.$$

(3) Soit  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base orthonormée directe,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $W$ .

$$\text{Soit } \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \text{ et } \vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}.$$

$$\text{Alors } \vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - zy')\vec{i} + (zx' - xz')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k}.$$

### Remarque et notation

- Trois points A, B et C de  $\mathcal{E}$  sont alignés si et seulement si  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ .
- La formule de calcul du produit vectoriel dans une base orthonormée est plus facile à retenir à l'aide des déterminants ci-dessous :

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  étant une base orthonormée directe de  $W$ , soit  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  et  $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ .

$$\text{On a : } \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & y' & z & z' \\ z & z' & x & x' \\ x & x' & y & y' \end{vmatrix}.$$

### Exemple

1) Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $W$ .

$$(\vec{u} + 2\vec{v}) \wedge (\vec{u} - 3\vec{v})$$

$$= \vec{u} \wedge (\vec{u} - 3\vec{v}) + (2\vec{v}) \wedge (\vec{u} - 3\vec{v})$$

$$= \vec{u} \wedge \vec{u} + \vec{u} \wedge (-3\vec{v}) + (2\vec{v}) \wedge \vec{u} + (2\vec{v}) \wedge (-3\vec{v})$$

$$= \vec{0} - 3\vec{u} \wedge \vec{v} + 2\vec{v} \wedge \vec{u} - 6\vec{v} \wedge \vec{v} \text{ car } \vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0} \text{ et } \vec{u} \wedge (-3\vec{v}) = -3\vec{u} \wedge \vec{v}.$$

$$= -5\vec{u} \wedge \vec{v}.$$

2) Soit A et B deux points distincts de  $\mathcal{E}$ .

L'ensemble des points M de  $\mathcal{E}$  tels que  $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0}$  est la droite (AB).

3) Soit  $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$  et  $\vec{v} = \vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$  où  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est une base orthonormée directe de  $W$ .

$$\text{On a : } \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & -4 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -4 & -3 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -17\vec{i} - 13\vec{j} - 7\vec{k}$$

### Exercice résolu 1

L'espace  $\mathcal{E}$  est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère les points A(-3, 0, 1), B(-2, 5, 1) et C(1, -1, 2).

Démontrer que les points A, B et C définissent un plan dont on donnera une équation cartésienne.



### Solution

• Déterminons les coordonnées de  $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ .

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} \left( \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \right); \vec{AB} \wedge \vec{AC} (5, -1, -21)$$

$\vec{AB} \wedge \vec{AC} \neq \vec{0}$  donc les points ne sont pas alignés, ils déterminent par conséquent un plan de vecteur normal  $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ .

• Équation du plan (ABC)

Soit  $M(x; y; z)$  un point de l'espace.

$M \in (ABC) \Leftrightarrow 5x - y - 21z + k = 0$ , or le point A est sur ce plan donc

$5 \times (-3) - 0 - 21 \times 1 + k = 0$  c'est-à-dire que  $k = 36$  donc le plan (ABC) a pour équation cartésienne :

$$5x - y - 21z + 36 = 0.$$

### Exercice résolu 2

$\mathcal{E}$  est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soient les plans (P) et (P') d'équations respectives  $2x - 3y + 2z = -1$  et  $x + 2y + 4z = 2$ .

Les plans (P) et (P') sont-ils parallèles ? Sinon déterminer un vecteur directeur  $u$  de leur droite d'intersection.

### Solution

Un vecteur normal de (P) est  $\vec{n} (2, -3, 2)$  et celui de (P') est  $\vec{n}' (1, 2, 4)$ .

$$\vec{n} \wedge \vec{n}' \left( \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \right); \vec{n} \wedge \vec{n}' (-16, -6, 7).$$

$\vec{n} \wedge \vec{n}' \neq \vec{0}$  donc  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  ne sont pas colinéaires et par conséquent (P) et (P') ne sont pas parallèles.

Un vecteur directeur de leur droite d'intersection est  $\vec{u} = \vec{n} \wedge \vec{n}'$ .

### S'exercer

**Ex 1** Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $\mathcal{W}$ . Développer et réduire les vecteurs suivants :

a)  $((-2\vec{u} + \vec{v}) \wedge (\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v}))$ ; b)  $((-3\vec{u} + 2\vec{v}) \wedge (-\vec{u} + 4\vec{v}))$ ; c)  $((\vec{u} + \vec{v}) \wedge (\vec{u} - \vec{v}))$ .

**Ex 2** Soit A, B et C trois points non alignés de  $\mathcal{E}$ . Déterminer et construire l'ensemble des points M de  $\mathcal{E}$  tels que  $\vec{AM} \wedge \vec{BC} = \vec{0}$ .

**Ex 3**  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est une base orthonormée directe de  $\mathcal{W}$ . Vérifier dans chacun des cas ci-dessous si le triplet  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est une base orthonormée.

a)  $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$ ;  $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}$  et  $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{k}$ .

b)  $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}$ ;  $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}$  et  $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$ .



3.i L'espace  $\mathcal{E}$  est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère les points  $A(-1, 1, 1)$ ,  $B(-1, -1, 1)$  et  $C(1, 1, -1)$ .

Démontrer que les points A, B et C définissent un plan dont on donnera une équation cartésienne.

## 3.4 CALCULS DES DISTANCES, D'AIRES ET DES VOLUMES



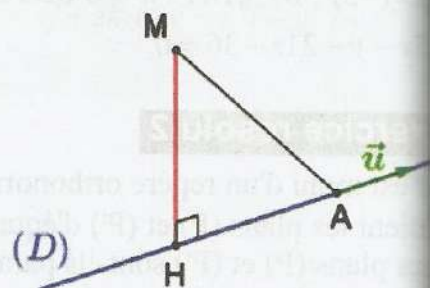
### Prendre un bon départ

#### Activité 1

1. Sur la figure ci-contre, (D) est une droite passant par A et dirigée par  $\vec{u}$  et M un point de  $\mathcal{E}$ .

H est le projeté orthogonal de M sur (D).

- Justifier que  $\vec{HA} \wedge \vec{u} = \vec{0}$
- Montrer que  $\vec{MA} \wedge \vec{u} = \vec{MH} \wedge \vec{u}$ .
- En déduire que  $MH = \frac{\|\vec{MA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$ .



2. Montrer que l'aire d'un triangle ABC de  $\mathcal{E}$  est égale à  $\frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$ .

#### Activité 2

1. Soit (Π) un plan passant par A et dirigé par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Le point P est le projeté orthogonal de M sur le plan (Π).

- Justifier que  $\vec{PA} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$ .
- Montrer que  $\vec{MA} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{MP} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$ .
- En déduire que  $MP = \frac{|\vec{MA} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$ .

2. Démontrer que le volume d'un tétraèdre ABCD est égale à  $\frac{1}{6} |\vec{AD} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC})|$ .



### Retenir

Dans l'espace  $\mathcal{E}$ ,

- Soit (D) une droite passant par A et dirigée par un vecteur  $\vec{u}$ , M un point de  $\mathcal{E}$  et H son projeté orthogonal sur (D).

La **distance de M à la droite** (D) est  $MH = \frac{\|\vec{MA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$ .

- Soit (Π) un plan passant par A et dirigée par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , M un point de  $\mathcal{E}$  et P son projeté orthogonal sur (Π).



La **distance du point M au plan**  $(\Pi)$  est  $MP = \frac{|\vec{MA} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$ .

• L'**aire d'un triangle ABC** est  $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$ .

• Le **volume d'un tétraèdre ABCD** est  $V = \frac{1}{6} |\vec{AD} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC})|$ .

### Notations

- La distance d'un point M à une droite (D) est aussi notée  $d(M, (D))$ .
- La distance d'un point M à un plan  $(\Pi)$  est aussi notée  $d(M, (\Pi))$ .

### Remarque

Si l'espace  $\mathcal{E}$  est rapporté à un repère orthonormé direct dans lequel le plan  $(\Pi)$  a pour équation  $ax + by + cz + k = 0$  alors la distance d'un point  $M(x_0, y_0, z_0)$  au plan  $(\Pi)$  est

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + k|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

### S'en convaincre

Soit  $\mathcal{R}$  un repère orthonormé direct dans lequel on a  $(\Pi) : ax + by + cz + k = 0$ .

Notons  $\vec{n}(a, b, c)$  un vecteur normal à  $(\Pi)$ , comme  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  est aussi un vecteur normal de  $(\Pi)$  alors

il existe  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  tel que  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \lambda \vec{n}$ . Notons  $A(\alpha, \beta, \gamma)$  dans le repère  $\mathcal{R}$ .

D'après le retenu ci-dessus  $d = \frac{|\vec{MA} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|} = \frac{|\vec{MA} \cdot \lambda \vec{n}|}{\|\lambda \vec{n}\|} = \frac{|\vec{MA} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}.$

Notons  $A(\alpha, \beta, \gamma)$  dans le repère  $\mathcal{R}$  le point de  $(\Pi)$ , on a :

$$|\vec{MA} \cdot \vec{n}| = |(\alpha - x_0)a + (\beta - y_0)b + (\gamma - z_0)c| = |ax_0 + by_0 + cz_0 + k| \text{ car}$$

$$A \in (\Pi) \Rightarrow a\alpha + b\beta + c\gamma = -k \text{ donc } d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + k|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

### Exemple

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points  $A(-4, 6, -1)$ ;  $B(1, 2, 2)$ ;  $C(-1, 4, 3)$  et  $D(-5, 7, 0)$ .

a) Démontrons que ABCD est un tétraèdre.

Il suffit de démontrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} \left( \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} \right); \vec{AB} \wedge \vec{AC}(-10, -11, 2);$$

$$(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AD} = 10 - 11 + 2 = 1. (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AD} \neq 0; \text{ donc D n'appartient pas au plan}$$

(ABC) et par conséquent, ABCD est un tétraèdre.

b) Calculons la distance de D à la droite (AB) et la distance de D au plan (ABC).

$$d(D, (AB)) = \frac{|\vec{DA} \wedge \vec{AB}|}{\|\vec{AB}\|} \text{ et } \vec{DA} \wedge \vec{AB}(-7, -8, 7) \text{ donc } d(D, (AB)) = \frac{\sqrt{57}}{\sqrt{22}}.$$



$$d(D, (ABC)) = \frac{|\vec{DA} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC})|}{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|}; \quad \vec{DA} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = 1 \times (-10) + (-1) \times (-11) + (-1) \times 2 = -1.$$

$$\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = \sqrt{(-10)^2 + (-11)^2 + 2^2} = \sqrt{225} = 15. \text{ Donc } d(D, (ABC)) = \frac{|-1|}{15} = \frac{1}{15}$$

c) Calculons l'aire  $\mathcal{A}$  du triangle ABC et le volume  $V$  du tétraèdre ABCD.

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = \frac{15}{2} \text{ et } V = \frac{1}{6} |\vec{DA} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC})| = \frac{1}{6}.$$

### Exercice résolu 1

$\mathcal{E}$  est muni d'un repère orthonormé direct.

Soit A, B, C et D quatre points de  $\mathcal{E}$  tels que A, B et C ne sont pas alignés.

Montrer que A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si  $(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AD} = 0$ .

#### Solution

Soit A, B, C et D quatre points de  $\mathcal{E}$  tels que A, B et C ne sont pas alignés.

• Si A, B, C et D sont coplanaires alors  $D \in (ABC)$ .

Donc  $\vec{AD}$  est un vecteur du plan (ABC) et  $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$  est un vecteur normal du même plan d'où  $(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AD} = 0$ .

• Réciproquement si  $(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AD} = 0$  alors D appartient au plan passant par A et de vecteur normal  $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$  qui n'est autre que le plan (ABC).

### Remarque

$\mathcal{W}$  est muni d'une base orthonormée directe.

Trois vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires si et seulement si  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0$ .

### Exercice résolu 2

L'espace  $\mathcal{E}$  est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère la sphère (S) d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 2 = 0$  et le plan  $(P_\lambda)$  d'équation  $-x + 4y - z + \lambda = 0$ .

Étudions suivant les valeurs de  $\lambda$  les positions relatives de (S) et  $(P_\lambda)$ .

#### Solution

Déterminer  $(S) \cap (P_\lambda)$  suivant les valeurs de  $\lambda$ .

• Déterminons le centre  $\Omega$  et le rayon de (S).

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 12$$

Donc le centre de (S) est  $\Omega(1, -2, 3)$  et son rayon est égal  $2\sqrt{3}$ .

• Calculons la distance  $d_\lambda$  de  $\Omega$  à  $(P_\lambda)$ .

$$d_\lambda = \frac{|-1 \times 1 + 4(-2) + 1 \times 3 + \lambda|}{\sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 1^2}} = \frac{|-6 + \lambda|}{\sqrt{18}} = \frac{|-6 + \lambda|}{3\sqrt{2}}.$$



$d_\lambda = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow |-6 + \lambda| = 6\sqrt{6} \Leftrightarrow \lambda = 6\sqrt{6} + 6$  ou  $\lambda = 6 - 6\sqrt{6}$  dans ce cas  $(S)$  et  $(P_\lambda)$  ont un seul point d'intersection donc  $(S)$  et  $(P_\lambda)$  sont tangents.

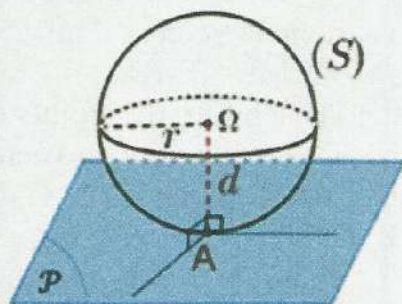
$d_\lambda < 2\sqrt{3} \Leftrightarrow |-6 + \lambda| < 6\sqrt{6} \Leftrightarrow -6\sqrt{6} + 6 < \lambda < 6\sqrt{6} + 6$ .  $(S) \cap (P_\lambda)$  est un cercle.

Si  $\lambda \in ]-\infty, -6\sqrt{6} + 6[ \cup ]6\sqrt{6} + 6, +\infty[$  alors  $d_\lambda > 2\sqrt{3}$  et  $(S) \cap (P_\lambda) = \emptyset$

### Remarque

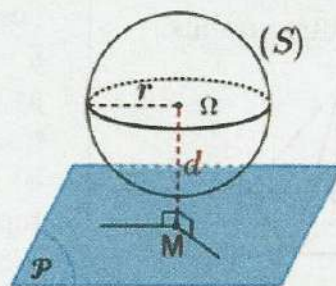
Soit  $(S)$  une sphère de centre  $\Omega$  et de rayon  $r$ ,  $(\mathcal{P})$  un plan et  $d$  la distance de  $\Omega$  au plan.

Si  $d = r$  alors  $(S) \cap (\mathcal{P})$  est un singleton  $\{A\}$ . On dit que  $(S)$  et  $(\mathcal{P})$  sont tangents au point  $A$ .



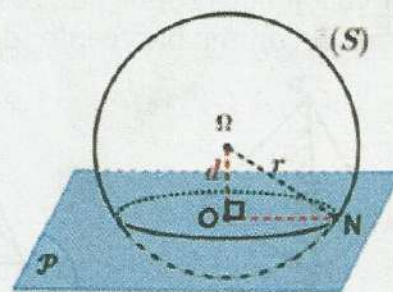
$A \in (\mathcal{P})$  et  $A\Omega = d$ .

Si  $d > r$  alors  $(S) \cap (\mathcal{P}) = \emptyset$ . On dit que  $(S)$  et  $(\mathcal{P})$  sont disjoints



$\Omega M = d$ .

Si  $d < r$  alors  $(S) \cap (\mathcal{P})$  est un cercle  $(C)$ . On dit que  $(S)$  et  $(\mathcal{P})$  sont sécants.



$(C)$  est de centre  $O$  et de rayon  $\sqrt{r^2 - d^2}$ .  $(\mathcal{P}) \perp (O\Omega)$  et  $(\mathcal{P}) \cap (O\Omega) = \{O\}$ .

### S'exercer

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  dans les exercices 3.j et 3.k.

**3.j** Soit les points  $A(-1, 1, 3)$ ,  $B(2, 1, 0)$  et  $C(4, -1, 5)$

- Déterminer la distance du point  $C$  à la droite  $(AB)$ .
- En déduire qu'il existe un plan contenant les points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .
- Montrer que le point  $H(-2, -1, -2)$  n'appartient pas au plan  $(ABC)$ .
- Calculer le volume du tétraèdre  $ABCH$ .

**3.k** On considère le plan  $(\mathcal{P})$  d'équation  $2x - 2y + z = 2$  et le point  $A(1, -2, 1)$ . On note  $S(A, 2)$  la sphère de centre  $A$  et de rayon 2.

- Calculer la distance du point  $A$  au plan  $(\mathcal{P})$ .
- En déduire la position relative du plan  $(\mathcal{P})$  et de la sphère  $(S)$ .
- Écrire une représentation paramétrique de la droite  $(D)$  passant par  $A$  et orthogonale au plan  $(\mathcal{P})$ .
- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $(\mathcal{P}) \cap (S)$ .

**3.l**  $ABCD$  est un tétraèdre régulier d'arête  $a$ .

Calculer la distance du point  $A$  au plan  $(BCD)$ .

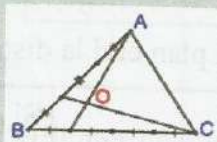
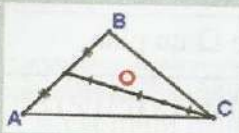


# S'ENTRAÎNER

## CALCULS BARYCENTRIQUES

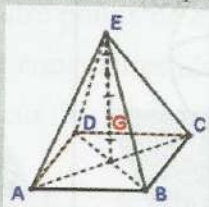
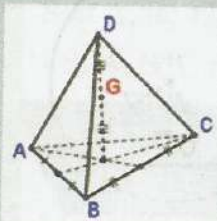
1

Ecrire O comme barycentre des points A, B et C.



2

Sur chacun des solides de l'espace ci-dessous, écrire G comme barycentre des autres points.



3

ABCD est un parallélogramme de centre O, construire le barycentre des points pondérés dans chaque cas.

- $(A, -1), (B, 2), (C, 2)$  et  $(O, -2)$  ;
- $(A, -1), (B, 1), (C, 2)$  et  $(O, -1)$  ;
- $(A, 1), (B, 1), (C, 2)$  et  $(O, -2)$  ;
- $(A, 2), (B, 4), (C, -2)$  et  $(O, -2)$ .

4

ABC est un triangle du plan.

Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que les vecteurs  $2\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC}$  et  $2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}$  soient colinéaires.

5

Soit ABC un triangle du plan.

Construire les points O, P et Q tels que

$$\vec{BO} = \frac{3}{5}\vec{BC}, \vec{CP} = \frac{1}{2}\vec{AC} \text{ et } \vec{AQ} = 2\vec{AB}.$$

Démontrer que les droites (AO), (BP) et (CQ) sont concourantes.

6

Soit ABCD un tétraèdre. On note I et J les centres respectifs des faces ABD et BDC. Démontrer que les droites (IJ) et (AC) sont parallèles.

7

Soit ABCD un tétraèdre. On désigne par G barycentre des points pondérés  $(A, 1), (B, 3), (C, 1)$  et  $(D, -3)$ . À tout point M de l'espace, on associe le vecteur  $\vec{u}$  tels que :  $\vec{u} = \vec{MA} + 3\vec{MB} + \vec{MC} - 3\vec{MD}$ .

- Déterminer l'ensemble des points M tels que le vecteur  $\vec{u}$  est colinéaire au vecteur  $\vec{AG}$ .
- Déterminer les coordonnées de G dans le repère (A, B, C, D).

8

L'espace  $\mathcal{E}$  est muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

les points A  $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ , B  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ , C  $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et D  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

- Montrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
- Déterminer les coordonnées du point G, barycentre des points pondérés  $(A, -1)$  ;  $(B, 2)$  ;  $(C, 3)$  et  $(D, -2)$ .

9

Soit ABC un triangle du plan. À tout nombre réel  $a$  on associe le barycentre  $G_a$  lorsqu'il existe des points pondérés  $(A, 2)$ ,  $(B, a-1)$  et  $(C, a+1)$ .

- Calculer les coordonnées de  $G_a$  dans le repère  $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$ .
- Déterminer l'ensemble des points  $G_a$ .

10

Soit ABC un triangle équilatéral ; I milieu de [AB] et J le point tel que  $\vec{CJ} = \frac{1}{3}\vec{CA}$ . Soit G le



NER

BCD un tétraèdre. On note I et J les milieux respectifs des faces ABD et BDC. Montrer que les droites (IJ) et (AC) sont parallèles.

BCD un tétraèdre. On désigne par G le barycentre des points pondérés (B,3), (C,1) et (D,-3). À tout point M de l'espace, on associe le vecteur  $\vec{u}$  tels que :  $\vec{u} = \vec{MA} + 3\vec{MB} + \vec{MC} - 3\vec{MD}$ . Déterminer l'ensemble des points M tels que le vecteur  $\vec{u}$  est colinéaire au vecteur  $\vec{AG}$ . Déterminer les coordonnées de G dans le repère (A, B, C, D).

l'espace  $\mathcal{E}$  est muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soient A  $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ , B  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ , C  $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et D  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ . Montrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

Déterminer les coordonnées du point G, barycentre des points pondérés (A,-1); (B,2) et (D,-2).

ABC un triangle du plan. À tout nombre réel  $a$ , on associe le barycentre  $G_a$  lorsqu'il existe des points pondérés (A,2), (B,a-1) et (C,a+1).

Calculer les coordonnées de  $G_a$  dans le repère (A,  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$ ).

Déterminer l'ensemble des points  $G_a$ .

ABC un triangle équilatéral ; I milieu de [BC] et J le point tel que  $\vec{CJ} = \frac{1}{3}\vec{CA}$ . Soit G le

point d'intersection de (CI) et (BJ).

Déterminer trois réels  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  tels que G soit barycentre des points pondérés (A, $\alpha$ ); (B, $\beta$ ) et (C, $\gamma$ ).

ABC est un triangle. D et E sont des points tels que  $\vec{AD} = \frac{1}{3}\vec{AC}$  et  $\vec{BE} = \frac{1}{2}\vec{BA}$ .

Les droites (BD) et (EC) se coupent en F.

Déterminer les réels  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  tels que F soit le barycentre des points pondérés (A, $\alpha$ ); (B, $\beta$ ) et (C, $\gamma$ ).

Montrer que si ABC est un triangle équilatéral alors (ED)  $\perp$  (AC) et (AF)  $\perp$  (AC).

ABCD est un tétraèdre. E, F, G, H, J, K sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [AC], [BD], [AD], [BC].

Démontrer que les droites (EF) et (GH) se coupent en I, isobarycentre des points A, B, C et D.

Soit P le centre de gravité de la face ABC. Montrer que les points P, I et D sont alignés.

Montrer que I est le milieu de [JK].

ABCD est un tétraèdre. I, J et K sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC] et [CD].

Montrer que  $\vec{AI} = 2\vec{IB}$ ,  $\vec{CJ} = \vec{JD}$  et  $\vec{BK} = 3\vec{KC}$ .

Déterminer le point P de (AD) tels que les droites (KP) et (BJ) soient sécantes.

A, B, C et D sont quatre points de l'espace  $\mathcal{E}$ . Soit  $\lambda$  un réel ; I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [CD] ; R et S sont définis par  $\vec{AR} = \lambda\vec{AD}$  et  $\vec{BS} = \lambda\vec{BD}$ . G est le milieu de [RS]. Montrer que les points I, S et G sont alignés.

15

A, B, C et D sont des points de  $\mathcal{E}$  et  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda$  sont des réels non nuls dont la somme est nulle. Soit M un point de  $\mathcal{E}$  et le vecteur  $\vec{U} = \alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} + \gamma\vec{MC} + \delta\vec{MD} + \lambda\vec{MD}$ . Démontrer que si  $\vec{U} = \vec{0}$  alors M est le barycentre des points pondérés (A, $\alpha$ ); (B, $\beta$ ); (C, $\gamma$ ) et (D, $\lambda$ ).

16

ABCD est un tétraèdre de centre de gravité G. Soit P le barycentre des points pondérés (A,1) et (B,1). On se propose de préciser la position de la droite (PG) par rapport au plan (BCD). d'intersection K de la droite (PG) avec le plan (BCD).

1. Soit O le centre de gravité du triangle ABC, I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [CD].

Montrer que G est le barycentre des points pondérés (A,1) et (O,3) et que G est le milieu de [IJ].

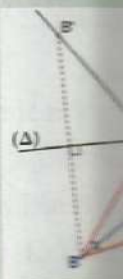
2. Montrer que la droite (PG) est incluse dans le plan (ABJ) et que le point K est l'intersection des droites (PG) et (BJ).

3. On considère le repère (B;  $\vec{BA}$ ,  $\vec{BJ}$ ,  $\vec{BC}$ ).  
a) Calculer les coordonnées des points P, G et K.  
b) En déduire une représentation paramétrique de la droite (PG).

4. Démontrer alors que  $\vec{BK} = \frac{4}{5}\vec{BJ}$ .

17

Soit ABC un triangle. (AD) et (BE) sont les bissectrices internes respectives des angles  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$ . On note G le point d'intersection de (AD) et (BE).





point d'intersection de (CI) et (BJ).

Déterminer trois réels  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  tels que G soit barycentre des points pondérés  $(A, \alpha)$ ;  $(B, \beta)$  et  $(C, \gamma)$ .

ABC est un triangle. D et E sont des points

tels que  $\vec{AD} = \frac{1}{3} \vec{AC}$  et  $\vec{BE} = \frac{1}{2} \vec{BA}$ .

Les droites (BD) et (EC) se coupent en F.

Déterminer les réels  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  tels

que F soit le barycentre des points pondérés  $(A, \alpha)$ ;  $(B, \beta)$  et  $(C, \gamma)$ .

Montrer que si ABC est un triangle équilatéral alors  $(ED) \perp (AC)$  et  $(AF) \perp (AC)$ .

ABCD est un tétraèdre. E, F, G, H, J, K sont les milieux respectifs des segments [AB], [CD], [AC], [BD], [AD], [BC].

Démontrer que les droites (EF) et (GH) se coupent en I, isobarycentre des points A, B, C et D.

Soit P le centre de gravité de la face ABC.

Montrer que les points P, I et D sont alignés.

Montrer que I est le milieu de [JK].

ABCD est un tétraèdre. I, J et K sont les points de  $\mathcal{E}$  tels que :

$\vec{AI} = 2\vec{IB}$ ,  $\vec{CI} = \vec{JD}$  et  $\vec{BK} = 3\vec{KC}$ .

Déterminer le point P de (AD) tels que les droites (KP) et (BJ) soient sécantes.

A, B, C et D sont quatre points de l'espace  $\mathcal{E}$ .

Soit  $\lambda$  un réel ; I et J sont les milieux

respectifs des segments [AB] et [CD] ; R et S

sont définis par  $\vec{AR} = \lambda \vec{AD}$  et  $\vec{BS} = \lambda \vec{BD}$ . G

est le milieu de [RS]. Montrer que les points R, S et G sont alignés.

15

A, B, C et D sont des points de  $\mathcal{E}$  et  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  et  $\lambda$  sont des réels non nuls dont la somme est nulle. Soit M un point de  $\mathcal{E}$  et le vecteur  $\vec{U}$  tel que  $\vec{U} = \alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} + \delta \vec{MC} + \lambda \vec{MD}$ . Démontrer que si  $\vec{U} = \vec{0}$  alors M est le barycentre des points pondérés  $(A, \alpha)$ ;  $(B, \beta)$ ;  $(C, \delta)$  et  $(D, \lambda)$ .

16

ABCD est un tétraèdre de centre de gravité G. Soit P le barycentre des points pondérés  $(A, 2)$  et  $(B, 1)$ . On se propose de préciser le point d'intersection K de la droite (PG) avec le plan (BCD).

1. Soit O le centre de gravité du triangle BCD, I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [CD].

Montrer que G est le barycentre des points pondérés  $(A, 1)$  et  $(O, 3)$  et que G est le milieu de [IJ].

2. Montrer que la droite (PG) est incluse dans le plan (ABJ) et que le point K est l'intersection des droites (PG) et (BJ).

3. On considère le repère  $(B; \vec{BA}, \vec{BC}, \vec{BD})$ .

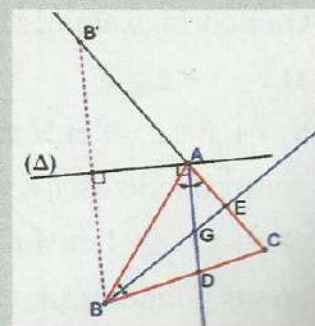
a) Calculer les coordonnées des points P et G.

b) En déduire une représentation paramétrique de la droite (PG).

4. Démontrer alors que  $\vec{BK} = \frac{4}{5} \vec{BJ}$ .

17

Soit ABC un triangle. (AD) et (BE) sont les bissectrices internes respectives des angles  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$ . On note G le point d'intersection de (AD) et (BE).





montrer que  $(AD) \perp (BC)$  et que le triangle est isocèle en A.

Justifier que  $\frac{DB}{DC} = \frac{AC}{AB}$ , puis en déduire que

le barycentre des points pondérés

(C) et (C, AB).

utilisant la même démarche, démontrer

est le barycentre des points pondérés

(B) et (A, BC).

Soit F le point d'intersection de (AB) avec

sectrice interne de l'angle  $\hat{C}$ .

montrer que G appartient à la droite (CF).

déduire que les bissectrices internes

triangle ABC sont concourantes et leur

de concours est le barycentre des points

et C affectés des coefficients que l'on

sera.

et C sont trois points non alignés de

pace  $\mathcal{E}$ . Soit H un point de  $\mathcal{E}$  et  $x, y$  et  $z$

réels.

terminer les points M de  $\mathcal{E}$  tels que

$(\vec{MA}, \vec{MB}, \vec{MC})$  soit un repère de  $\mathcal{E}$  dans

el  $x, y$  et  $z$  sont les coordonnées

ectives de H.

pourra examiner les cas suivants :

$x + y + z \neq 1$ .

$x + y + z = 1$  et H est barycentre des

ts pondérés  $(A, x)$ ,  $(B, y)$  et  $(C, z)$ .

$x + y + z = 1$  et H n'est pas barycentre des

ts pondérés  $(A, x)$ ,  $(B, y)$  et  $(C, z)$ .

pour les exercices du n° 19 au n° 24.

19

Soit  $A(-2, 3, 1)$  et  $B(1, 7, -2)$ .

Écrire une équation cartésienne de la sphère (S) dont un diamètre est [AB].

20

Soit  $A(0, 4, -1)$ ,  $B(-2, 4, -5)$ ;  $C(1, 1, -5)$  et  $D(1, 0, -4)$  des points de  $\mathcal{E}$ .

Écrire une équation cartésienne de la sphère ( $\Sigma$ ) passant par les points A, B, C et D.

21

Déterminer l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  tels que :

a)  $x^2 + y^2 + z^2 - x - 3y - 4z + \frac{13}{2} = 0$  ;

b)  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y - 6z + \frac{21}{2} = 0$  ;

c)  $2(x^2 + y^2 + z^2) + 6x - 2y + 8z + 1 = 0$ .

22

Soit A et B deux points distincts de  $\mathcal{E}$ .

Quel est l'ensemble des points M de  $\mathcal{E}$  tels que :

a)  $\vec{MA} \cdot \vec{AB} = 0$  ;  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$

23

Soit la sphère (S') d'équation :

$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 3 = 0$  et (D) la droite passant par le point  $A(1; 1; 1)$  et dirigée par le vecteur  $\vec{u}(1, -2, 1)$ .

Déterminer l'intersection de (S') et (D).

24

Montrer que la droite ( $\Delta$ ) passant par le point  $A(3; -3; 1)$  et dirigée par  $\vec{u}(-2; 1; 2)$  est tangente à la sphère d'équation

$x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y - 4z + 3 = 0$



ABC est un triangle rectangle en A tel que

$AB = 8$  et  $AC = 4$ . L'unité est le cm

1. Construire le barycentre G des points

A, B et C affectés des coefficients respectifs

3, -1 et 2.

2. Déterminer et construire l'ensemble

des points M tels que :

$$3MA^2 - MB^2 + 2MC^2 = -32$$

$$3\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC} = \vec{MB} + \vec{MC}$$

Soit ABC un triangle isocèle en A et G son

centre de gravité. Soit G' le symétrique de G

par rapport à la droite (BC).

1. Déterminer les nombres réels  $\alpha$  et  $\beta$

tels que G' soit le barycentre des points

pondérés (A, 1) ; (B,  $\alpha$ ) et (C,  $\beta$ ).

2. Déterminer l'ensemble ( $\Gamma$ ) des points M

tels que :

$$\vec{MA} - 2\vec{MB} - 2\vec{MC} = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}.$$

Vérifier que B et C appartiennent à ( $\Gamma$ )

Dans le plan, on considère les points A, B et C

tels que  $\|\vec{AB}\| = \|\vec{AC}\| = 4a$  et  $\|\vec{BC}\| = 2a$  où  $a$

est un nombre réel strictement positif.

Soit  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ , on note

$G_\alpha = \text{bar}\{(A, \alpha), (B, 1), (C, 1)\}$  et I le milieu du

segment [BC].

1. Démontrer que l'ensemble ( $\Gamma_\alpha$ ) des

points  $G_\alpha$  lorsque  $\alpha$  décrit  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$  est la

droite (AI).

2. Construire  $G_{-1}$ .

3. Déterminer l'ensemble  $\Gamma$  des points M tels

que  $MB^2 + MC^2 = MA^2$

28

Dans le plan  $\mathcal{P}$ , ABC est un triangle équilatéral de côté  $a$  avec  $a > 0$ .

Démontrer que pour tous réels  $\alpha$  et  $\beta$

le vecteur  $\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} - (\alpha + \beta)\vec{MC}$

est indépendant de M.

1. Soit  $G = \text{bar}\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$ .

On désigne ( $\Gamma$ ) l'ensemble des points M tels

que  $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = k$  et ( $\Sigma$ )

l'ensemble des points M tels que

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 - (\alpha + \beta)MC^2 = k'.$$

Pour chacun des cas ci-après déterminer et

construire les ensembles ( $\Gamma$  et ( $\Sigma$ ) :

a)  $\alpha = \beta = \gamma = 1$ ,  $k = 6a^2$  et  $k' = a^2$  ;

b)  $\alpha = 2$ ;  $\beta = -1$ ;  $\gamma = 1$ ;  $k = 4a^2$  et  $k' = -a^2$  ;

c)  $\alpha = 1$  ;  $\beta = -1$  ;  $\gamma = 1$ ,  $k = 16a^2$  et  $k' = 2a^2$  ;

d)  $\alpha = -2$ ;  $\beta = -1$ ;  $\gamma = 1$ ;  $k = -2a^2$  et  $k' = -4a^2$ .

29

Soit A et B deux points du plan  $\mathcal{P}$  tels que

$AB = 2a$ ,  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . Déterminer et construire

l'ensemble des points M de  $\mathcal{P}$  tels que :

$$\text{i) } \frac{MA}{MB} = 1 \quad ; \quad \text{ii) } \frac{MA}{MB} = 3 \quad ; \quad \text{iii) } \frac{MA}{MB} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

30

Soit A et B deux points du plan  $\mathcal{P}$  tels que

$AB = 2a$ ,  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . Déterminer et construire

l'ensemble des points M de  $\mathcal{P}$  tels que :

$$\text{i) } \frac{MA}{MB} = 1 \quad ; \quad \text{ii) } \frac{MA}{MB} = \sqrt{3} \quad ; \quad \text{iii) } \frac{MA}{MB} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

31

ABC est un triangle équilatéral de côté  $a$

avec  $a > 0$ .

1. Construire le point G barycentre des points

pondérés (A, 2), (B, 1) et (C, 1).



2. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

a)  $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2$  ;

b)  $2\vec{MA}^2 + \vec{MA} \cdot \vec{MB} + \vec{MA} \cdot \vec{MC} = \frac{3a^2}{2}$  .

32

Dans le plan  $\mathcal{P}$ , on considère un carré ABCD tel que  $AC = BD = a$  avec  $a > 0$ .

Soit  $t$  un réel.

1. Déterminer une condition sur  $t$  pour que les points pondérés  $(A, t)$  ;  $(B, 1 - 2t)$  ;  $(C, t)$  et  $(D, 3 - t)$  admettent un barycentre.

Déterminer la position de ce barycentre.

2. On désigne par  $(\Gamma_t)$  l'ensemble des points M du plan tels que

$$tMA^2 + (1 - 2t)MB^2 + tMC^2 + (3 - 4t)MD^2 = a^2(1 - t)$$

a) Vérifier que le centre du carré ABCD appartient à  $(\Gamma_t)$  .

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $(\Gamma_t)$ .

33

Soit ABC un triangle non équilatéral du plan.

On donne  $AB = c$  ,  $AC = b$  et  $BC = a$ .

On désigne par A', B' et C' les milieux respectifs des segments [BC] , [AC] et [AB].

1. Soit le vecteur  $\vec{u} = a^2\vec{BC} + b^2\vec{AC} + c^2\vec{AB}$

Montrer que  $\vec{u} = (a^2 - b^2)\vec{AC} + (c^2 - a^2)\vec{AB}$ .

En déduire que  $\vec{u}$  n'est pas le vecteur nul.

2. Pour tout point M du plan on pose :

$$f(M) = a^2\vec{BC} \cdot \vec{MA}' + b^2\vec{CA} \cdot \vec{MB}' + c^2\vec{AB} \cdot \vec{MC}'$$

a) On désigne par O le centre du cercle

Montrer que  $\vec{BC} \cdot \vec{GA} = \frac{1}{6}(b^2 - c^2)$  .

En déduire la valeur de  $f(G)$  .

c) Déterminer l'ensemble des points

M du plan tel que  $f(M) = 0$ .

34

Soit  $\vec{u}$  un vecteur non nul et O un point fixé.

Déterminer et construire l'ensemble des points

M du plan tels que  $\text{Mes}(\widehat{\vec{u}, \vec{OM}}) = -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

35

A et B sont deux points distincts du plan.

Déterminer et construire l'ensemble des points N du plan tels que :

a)  $\text{Mes}(\widehat{\vec{NA}, \vec{NB}}) = -\frac{3\pi}{5}[2\pi]$  ;

b)  $\text{Mes}(\widehat{\vec{NA}, \vec{NB}}) = \frac{7\pi}{8}[2\pi]$  ;

a)  $\text{Mes}(\widehat{\vec{NA}, \vec{NB}}) = \frac{\pi}{3}[\pi]$  ;

a)  $\text{Mes}(\widehat{\vec{NA}, \vec{NB}}) = -\frac{3\pi}{4}[\pi]$  .

36

Soit A et B deux points du plan  $\mathcal{P}$  orienté. À tout point M distinct de B d'un demi-cercle  $\mathcal{C}$  de diamètre [AB] on associe le point P de la demi-droite [AM] n'appartenant pas au segment [AM] tel que  $PM = MB$ .

a) Déterminer l'angle  $(\vec{PA}, \vec{PB})$ .

b) Où se trouve le point P lorsque M est confondu à A.

c) Déterminer le lieu géométrique des points P lorsque M décrit le demi-cercle  $\mathcal{C}$ .

37

Dans le plan orienté  $\mathcal{P}$ , on considère un triangle

ABC. Soit G le barycentre des points pondérés



Démontrer que les droites (BQ) et (CR) passent par G.

Soit P le milieu de [BC]. Démontrer que les points A, P et G sont alignés.

Exprimer  $\vec{PG}$  en fonction de  $\vec{PA}$ .

On suppose que B et C sont fixes et A décrit l'ensemble ( $\Gamma$ ) des points M du plan tels que

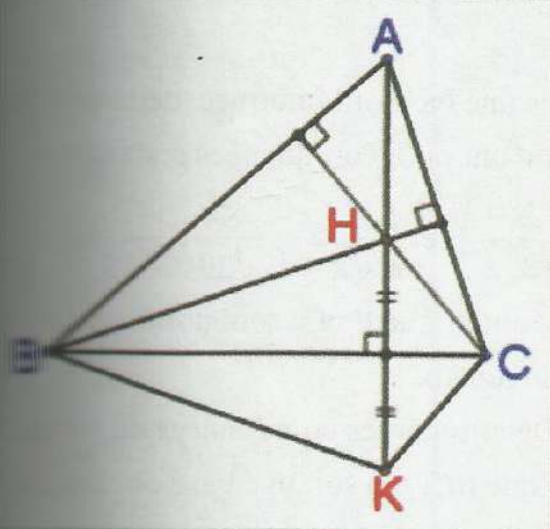
$$\widehat{(\vec{MB}, \vec{MC})} \equiv \frac{\pi}{2} [\pi].$$

Déterminer alors l'ensemble ( $\Gamma'$ ) décrit par le point G.

Soient A et B deux points distincts. ( $\mathcal{D}$ ) et ( $\mathcal{D}'$ ) sont deux droites dirigées respectivement par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

Déterminer l'ensemble des points N du plan passant par P tel que  $(\vec{NA}, \vec{u}) = (\vec{NB}, \vec{v})$ .

ABC est un triangle, H son orthocentre et K le symétrique de H par rapport à la droite (BC).



Démontrer que  $(\vec{KB}, \vec{KC}) = (\vec{HC}, \vec{HB})$ .

Démontrer que  $(\vec{HC}, \vec{HB}) = (\vec{AB}, \vec{AC})$  ou

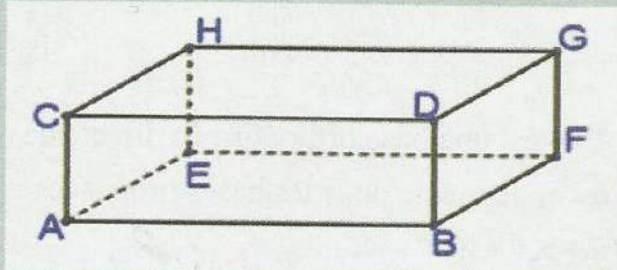
$$(\vec{HB}, \vec{HC}) = (\vec{AB}, \vec{AC}) + \pi.$$

En déduire que les points A, B, C et K sont cocycliques.

## PRODUIT VECTORIEL

40

Sur la figure ci-dessous ABCDEFGH est un pavé droit.



Donner l'orientation de chacune des bases orthogonales suivantes :

- a)  $(\vec{EF}, \vec{EH}, \vec{EA})$ ; b)  $(\vec{EA}, \vec{AC}, \vec{CD})$ ;  
c)  $(\vec{DB}, \vec{GH}, \vec{AE})$ .

41

SABCD est une pyramide régulière de sommet S et de base ABCD de sens direct tel que  $AB = AS = a$ .

Soit I le centre du carré ABCD.

a) Justifier que la droite (SI) est orthogonale au plan(ABC).

b) Déterminer les vecteurs  $\vec{AB} \wedge \vec{AD}$ ;  $\vec{AC} \wedge \vec{DB}$ .

c) On prend  $a = 1$ . Soit K le point de tel que  $\vec{AK} = \sqrt{2}\vec{IS}$ . Démontrer que  $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AK})$  est un repère orthonormé direct de  $\mathcal{E}$ .

42

ABCD est un tétraèdre régulier d'arête,  $a$  strictement positif, et qui repose sur sa base ABC de sens direct. I et J sont les milieux respectifs de [BC] et [AC].

Soit O l'isobarycentre des points A, B et C.

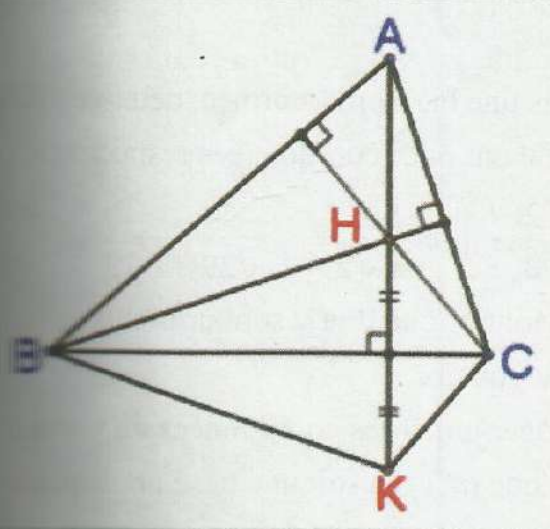
a) Justifier que la droite (OD) est orthogonale au plan (ABC).

b) Déterminer les vecteurs  $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$  et  $\vec{BJ} \wedge \vec{AI}$ .



1. Démontrer que les droites (BQ) et (CR) passent par G.
2. Soit P le milieu de [BC], Démontrer que les points A, P et G sont alignés.  
Exprimer  $\vec{PG}$  en fonction de  $\vec{PA}$ .
3. On suppose que B et C sont fixes et A décrit l'ensemble ( $\Gamma$ ) des points M du plan tels que  $\widehat{(\vec{MB}, \vec{MC})} = \frac{\pi}{2} [\pi]$ .
4. Déterminer alors l'ensemble ( $\Gamma'$ ) décrit par le point G.

5. Soient A et B deux points distincts. ( $\mathcal{D}$ ) et ( $\mathcal{D}'$ ) deux droites dirigées respectivement par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .  
Déterminer l'ensemble des points N du plan orienté  $\mathcal{P}$  tel que  $(\vec{NA}, \vec{u}) = (\vec{NB}, \vec{v})$ .
6. ABC est un triangle, H son orthocentre et K le symétrique de H par rapport à la droite (BC).

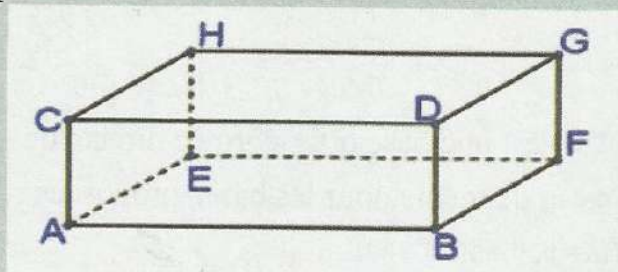


7. Démontrer que  $\widehat{(\vec{KB}, \vec{KC})} = \widehat{(\vec{HC}, \vec{HB})}$ .
8. Démontrer que  $\widehat{(\vec{HC}, \vec{HB})} = \widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})}$  ou  $\widehat{(\vec{HB}, \vec{HC})} = \widehat{(\vec{AC}, \vec{AB})} + \pi$ .
9. En déduire que les points A, B, C et K sont cocycliques.

## PRODUIT VECTORIEL

40

Sur la figure ci-dessous ABCDEHGH est un pavé droit.



Donner l'orientation de chacune des bases orthogonales suivantes :

- a)  $(\vec{EF}, \vec{EH}, \vec{EA})$  ; b)  $(\vec{EA}, \vec{AC}, \vec{CD})$  ;
- c)  $(\vec{DB}, \vec{GH}, \vec{AE})$ .

41

SABCD est une pyramide régulière de sommet S et de base ABCD de sens direct tel que  $AB = AS = a$ .

Soit I le centre du carré ABCD.

- a) Justifier que la droite (SI) est orthogonale au plan (ABC).
- b) Déterminer les vecteurs  $\vec{AB} \wedge \vec{AD}$  ;  $\vec{AC} \wedge \vec{DB}$ .
- c) On prend  $a = 1$ . Soit K le point de tel que  $\vec{AK} = \sqrt{2} \vec{IS}$ . Démontrer que  $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AK})$  est un repère orthonormé direct de  $\mathcal{E}$ .

42

ABCD est un tétraèdre régulier d'arête,  $a$  strictement positif, et qui repose sur sa base ABC de sens direct. I et J sont les milieux respectifs de [BC] et [AC].

Soit O l'isobarycentre des points A, B et C.

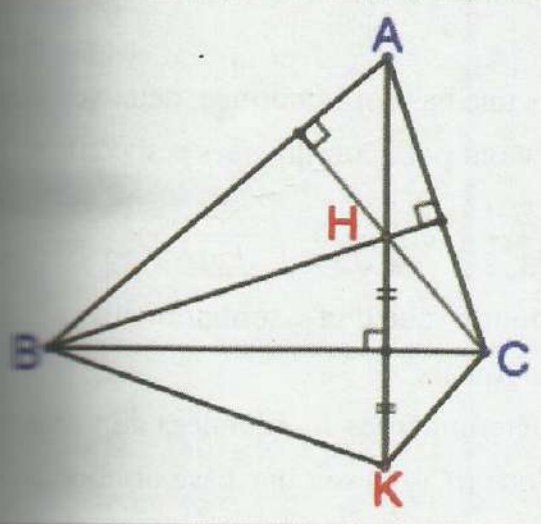
- a) Justifier que la droite (OD) est orthogonale au plan (ABC).
- b) Déterminer les vecteurs  $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$  et  $\vec{BJ} \wedge \vec{AI}$ .



- 11 Démontrer que les droites (BQ) et (CR) passent par G.
- 12 Soit P le milieu de [BC], Démontrer que les points A, P et G sont alignés.
- 13 Exprimer  $\vec{PG}$  en fonction de  $\vec{PA}$ .
- 14 On suppose que B et C sont fixes et A décrit l'ensemble  $(\Gamma)$  des points M du plan tels que  $\widehat{(\vec{MB}, \vec{MC})} = \frac{\pi}{2} [\pi]$ .
- 15 Déterminer alors l'ensemble  $(\Gamma')$  décrit par le point G.

- 16 Soit A et B deux points distincts.  $(\mathcal{D})$  et  $(\mathcal{D}')$  deux droites dirigées respectivement par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .
- 17 Déterminer l'ensemble des points N du plan passant par P tel que  $(\vec{NA}, \vec{u}) = (\vec{NB}, \vec{v})$ .

- 18 ABC est un triangle, H son orthocentre et K le symétrique de H par rapport à la droite (BC).

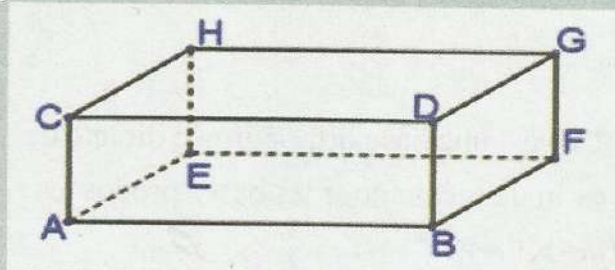


- 19 Montrer que  $\widehat{(\vec{KB}, \vec{KC})} = \widehat{(\vec{HC}, \vec{HB})}$ .
- 20 Montrer que  $\widehat{(\vec{HC}, \vec{HB})} = \widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})}$  ou  $\widehat{(\vec{HC}, \vec{HB})} = \widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} + \pi$ .
- 21 En déduire que les points A, B, C et K sont concycliques.

## PRODUIT VECTORIEL

40

Sur la figure ci-dessous ABCDEFGH est un pavé droit.



Donner l'orientation de chacune des bases orthogonales suivantes :

- a)  $(\vec{EF}, \vec{EH}, \vec{EA})$  ; b)  $(\vec{EA}, \vec{AC}, \vec{CD})$  ;  
c)  $(\vec{DB}, \vec{GH}, \vec{AE})$ .

41

SABCD est une pyramide régulière de sommet S et de base ABCD de sens direct tel que  $AB = AS = a$ .

Soit I le centre du carré ABCD.

- a) Justifier que la droite (SI) est orthogonale au plan(ABC).
- b) Déterminer les vecteurs  $\vec{AB} \wedge \vec{AD}$  ;  $\vec{AC} \wedge \vec{DB}$ .
- c) On prend  $a = 1$ . Soit K le point de tel que  $\vec{AK} = \sqrt{2}\vec{IS}$ . Démontrer que  $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AK})$  est un repère orthonormé direct de  $\mathcal{E}$ .

42

ABCD est un tétraèdre régulier d'arête,  $a$  strictement positif, et qui repose sur sa base ABC de sens direct. I et J sont les milieux respectifs de [BC] et [AC].

Soit O l'isobarycentre des points A, B et C.

- a) Justifier que la droite (OD) est orthogonale au plan (ABC).
- b) Déterminer les vecteurs  $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$  et  $\vec{BJ} \wedge \vec{AI}$ .



Soit le point H tel que  $\overrightarrow{AH} = \frac{a\sqrt{6}}{4} \overrightarrow{DO}$ .

La base  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH})$  est-elle orthogonale ?  
Préciser son orientation.

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est une base orthonormée directe de  $W$ .

Est-il de même pour les bases proposées :

$$(\vec{u} + \vec{v}, \vec{v} + \vec{w}, \vec{u} + \vec{w}) ;$$

$$(\vec{u} - \vec{v}, \vec{v} - \vec{w}, \vec{w} + \vec{u}) ;$$

$$\left( \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}), \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{u} - \vec{v}), -\vec{w} \right).$$

B, C et D sont quatre points de  $\mathcal{E}$ .

Soit le vecteur

$$\vec{u} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OA}$$

Montrer que :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC};$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA};$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}.$$

Donner une interprétation géométrique

de la norme de  $\vec{u}$ .

Soit  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base orthonormée directe

de  $W$ .

Calculer  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  dans chacun des cas ci-après :

$$\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k} \text{ et } \vec{v} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k};$$

$$\vec{u} = \vec{j} - 2\vec{k} \text{ et } \vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \frac{5}{2}\vec{k};$$

$$\vec{u} = \vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k} \text{ et } \vec{v} = \frac{1}{3}\vec{i} - \frac{4}{9}\vec{j} + \frac{1}{6}\vec{k}.$$

Calculer les coordonnées des vecteurs

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} \text{ et } \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}).$$

Que peut-on en déduire sur l'associativité du produit vectoriel

47

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est une base orthonormée directe de  $W$ .

Dans chacun des cas suivants, justifier sans

calculer les coordonnées de  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  que  $\vec{w} \neq \vec{u} \wedge \vec{v}$ .

$$a) \begin{cases} \vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} \\ \vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} \\ \vec{w} = \vec{i} - 3\vec{k} \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} \vec{u} = \vec{i} - \vec{k} \\ \vec{v} = \vec{i} + 2\vec{k} \\ \vec{w} = \vec{0} \end{cases};$$

$$c) \begin{cases} \vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \\ \vec{v} = \vec{i} - 4\vec{k} \\ \vec{w} = \vec{i} + \vec{k} \end{cases};$$

$$d) \begin{cases} \vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} \\ \vec{v} = \vec{j} + 2\vec{k} \\ \vec{w} = \vec{i} + \vec{j} \end{cases};$$

$$e) \begin{cases} \vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \\ \vec{v} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k} \\ \vec{w} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \end{cases}.$$

48

Dans une base orthonormée, deux vecteurs

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ont pour coordonnées respectives

$$\left( \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) \text{ et } \left( \frac{-3}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}}, \frac{-2}{\sqrt{29}} \right).$$

a) Montrer que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont normaux et orthogonaux.

b) Déterminer les coordonnées du vecteur  $\vec{w}$  tels que  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  soit une base orthonormée indirecte.

49

$\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  vecteurs de  $W$  tels que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires. Soit  $\vec{t} = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ .

1. Montrer que :



des vecteurs

1.

sur l'associativité du

normée directe de

ants, justifier sans

de  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  que  $\vec{w} \neq \vec{u}$

$$\begin{cases} \vec{u} = \vec{i} - \vec{k} \\ \vec{v} = \vec{i} + 2\vec{k} \\ \vec{w} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\vec{v} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\begin{cases} \vec{u} = \vec{j} + 2\vec{k} \\ \vec{w} = \vec{i} + \vec{j} \end{cases}$$

mée, deux vecteurs  
ées respectives

$$\left( \frac{4}{\sqrt{29}}, \frac{-2}{\sqrt{29}} \right)$$

ont normaux et

onnées du vecteur  $\vec{w}$   
e base orthonormée

els que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$$

0 :

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 ;$$

$$\text{et } \vec{w} = \vec{u}.$$

ont deux vecteurs de  $\mathcal{W}$ .

Montrer que si  $\vec{u} \perp \vec{v}$  alors le vecteur

$\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v})$  est colinéaire à  $\vec{v}$ .

déduire si  $\vec{u} \perp \vec{v}$  alors  $\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = -\|\vec{u}\|^2 \vec{v}$ .

ont  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $\mathcal{W}$ .

Montrer que :

$$\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2.$$

Exprimer cette relation à l'aide des

onnées.

ons un repère orthonormé direct, on

onsidère les points A(1 ; 2 ; 0), B(0 ; 0 ; 1) et

(0 ; 5 ; 5).

Montrer les points A, B et C définissent un

plan.

écrire une équation cartésienne de ce plan.

Mêmes questions qu'au 52 pour les points :

A(2\sqrt{5} ; 1 ; 3), B(2\sqrt{5} ; 0 ; 2) et

C(3\sqrt{3} ; -2).

(0 ; 5 ; 5) est un repère orthonormé direct de

onsidère la droite (D) dont une

entation paramétrique est

$$\begin{cases} x = t - 2 \\ y = -2t + 1 \\ z = 3t - 1 \end{cases}$$

, le plan (P) d'équation

$$x - 3y - 1$$

$x - 2y + 2z = -1$  et la sphère (S) d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 5y - 2z + 8 = 0.$$

Déterminer les ensembles (D) \cap (P),

(D) \cap (S) et (P) \cap (S).

55

(O ;  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ ) est un repère orthonormé direct de

l'espace  $\mathcal{E}$ .

On considère les points

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } D \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que les points A, B, C et D ne

sont pas coplanaires.

2. Calculer la distance :

a) du point C à la droite (AB) ;

b) du point D au plan (ABC) .

3. Calculer l'aire du triangle ABC et le volume

du tétraèdre ABCD.

56

A, B et C sont trois points non alignés de  $\mathcal{E}$ .

Dans chacun des cas suivants déterminer

l'ensemble des points M de  $\mathcal{E}$  tels que :

$$a) (\vec{MA} + \vec{MB}) \wedge \vec{AC} = \vec{0} ;$$

$$b) (2\vec{MA} + \vec{MB}) \wedge (\vec{MB} + 3\vec{MC}) ;$$

$$c) (2\vec{MA} + \vec{MB}) \wedge \vec{BC} = \vec{0} ;$$

$$d) (\vec{MA} + \vec{MB}) \wedge (2\vec{MA} + \vec{MC}) = \vec{0}.$$

57

Même question que dans l'exercice 56

$$a) (\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}) \wedge (3\vec{MA} + \vec{MB} - 4\vec{MC}) = \vec{0}$$

$$b) \vec{MA} \wedge (\vec{MB} \wedge \vec{MC}) = \vec{0} ; c) \vec{AB} \wedge \vec{AM} = \vec{AC}.$$

58

A, B, C et D sont quatre points coplanaires

de  $\mathcal{E}$  tels que les droites (AB) et (CD) soient

sécantes en un point O.

a) Montrer que

$$\vec{MA} \wedge \vec{MB} - \vec{MC} \wedge \vec{MD} = \vec{MO} \wedge (\vec{AB} + \vec{DC})$$

b) Déterminer l'ensemble des points M de

l'espace tels que :

$$\vec{MA} \wedge \vec{MB} = \vec{MC} \wedge \vec{MD}.$$



50

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs de  $W$ .

a) Montrer que si  $\vec{u} \perp \vec{v}$  alors le vecteur

$\vec{w} = \vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v})$  est colinéaire à  $\vec{v}$ .

b) En déduire si  $\vec{u} \perp \vec{v}$  alors  $\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = -\|\vec{u}\|^2 \vec{v}$ .

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $W$ .

a) Montrer que :

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2.$$

b) Exprimer cette relation à l'aide des coordonnées.

Dans un repère orthonormé direct, on considère les points  $A(1; 2; 0)$ ,  $B(0; 0; 1)$  et  $C(5; 5; 5)$ .

a) Montrer les points A, B et C définissent un plan.

b) Écrire une équation cartésienne de ce plan.

Mêmes questions qu'au 52 pour les points :

$A(2\sqrt{2}; 1; 3)$ ,  $B(2\sqrt{5}; 0; 2)$  et

$C(1; 3\sqrt{3}; -2)$ .

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est un repère orthonormé direct de l'espace  $\mathcal{E}$ .

On considère la droite (D) dont une représentation paramétrique est

$$x = t - 2$$

$$y = -2t + 1, \text{ le plan (P) d'équation}$$

$$z = 3t - 1$$

et la sphère (S) d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 5y - 2z + 8 = 0.$$

Déterminer les ensembles  $(D) \cap (P)$ ,

$(D) \cap (S)$  et  $(P) \cap (S)$ .

55

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est un repère orthonormé direct de l'espace  $\mathcal{E}$ .

On considère les points

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } D \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

2. Calculer la distance :

a) du point C à la droite (AB) ;

b) du point D au plan (ABC) .

3. Calculer l'aire du triangle ABC et le volume du tétraèdre ABCD.

56

A, B et C sont trois points non alignés de  $\mathcal{E}$ .

Dans chacun des cas suivants déterminer l'ensemble des points M de  $\mathcal{E}$  tels que :

a)  $(\vec{MA} + \vec{MB}) \wedge \vec{AC} = \vec{0}$  ;

b)  $(2\vec{MA} + \vec{MB}) \wedge (\vec{MB} + 3\vec{MC}) = \vec{0}$  ;

c)  $(2\vec{MA} + \vec{MB}) \wedge \vec{BC} = \vec{0}$  ;

d)  $(\vec{MA} + \vec{MB}) \wedge (2\vec{MA} + \vec{MC}) = \vec{0}$ .

57

Même question que dans l'exercice 56

a)  $(\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}) \wedge (3\vec{MA} + \vec{MB} - 4\vec{MC}) = \vec{0}$

b)  $\vec{MA} \wedge (\vec{MB} \wedge \vec{MC}) = \vec{0}$  ; c)  $\vec{AB} \wedge \vec{AM} = \vec{AC}$ .

58

A, B, C et D sont quatre points coplanaires de  $\mathcal{E}$  tels que les droites (AB) et (CD) soient sécantes en un point O.

a) Montrer que

$$\vec{MA} \wedge \vec{MB} - \vec{MC} \wedge \vec{MD} = \vec{MO} \wedge (\vec{AB} + \vec{DC})$$

b) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$\vec{MA} \wedge \vec{MB} = \vec{MC} \wedge \vec{MD}.$$



# Chapitre 2

## DIVISIBILITÉ DANS $\mathbb{Z}$

### LEÇON 1 ENSEMBLE DES ENTIERS NATURELS

1.1 QUELQUES PROPRIÉTÉS DE  $\mathbb{N}$

1.2 VALEUR DE VÉRITÉ D'UNE ASSERTION MATHÉMATIQUE,  
CARACTÈRE HÉRÉDITAIRE D'UNE ASSERTION MATHÉMATIQUE

1.3 PRINCIPE DE LA DEMONSTRATION  
PAR RÉCURRENCE

1.4 DIVISION EUCLIDIENNE DANS  $\mathbb{N}$

1.5 NUMÉRATION

### LEÇON 2 DIVISIBILITÉ DANS $\mathbb{Z}$

2.1 DIVISION EUCLIDIENNE DANS  $\mathbb{Z}$

2.2 CONGRUENCES

2.2.1 Présentation

2.2.2 Compatibilité de la relation de congruence avec  
l'addition et la multiplication dans  $\mathbb{Z}$

2.2.3 Critères de divisibilité par 2 ; 3 ; 5 ; 9 ; 11.



# LEÇON 1 ENSEMBLE DES ENTIERS NATURELS

- Faire une preuve par récurrence ;
- Écrire un entier dans une base donnée.

## 1.1 QUELQUES PROPRIÉTÉS DE $\mathbb{N}$

### Prendre un bon départ

Étant donné un entier naturel  $n$ , peut-on toujours trouver son suivant immédiat dans  $\mathbb{N}$  ? Peut-on toujours trouver un entier naturel qui le précède ? Sinon, quelle condition doit-on imposer à  $n$  pour que son prédécesseur existe ?  $\mathbb{N}$  admet-il un plus petit élément ? Un plus grand élément ? Peut-on compter tous les éléments de  $\mathbb{N}$  ?

### Retenir

- $\mathbb{N}$  admet un plus petit élément qui est 0.
- $\mathbb{N}$  n'admet pas de plus grand élément.
- Tout élément  $n$  de  $\mathbb{N}$  admet un suivant immédiat. (ce nombre est  $n+1$ )
- Tout élément  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  admet un prédécesseur dans  $\mathbb{N}$ . (ce prédécesseur est  $n-1$ )
- Toute partie non vide de  $\mathbb{N}$  admet un plus petit élément.
- Toute partie non vide et majorée de  $\mathbb{N}$  admet un plus grand élément.
- $\mathbb{N}$  est un ensemble infini.

### Remarque

- 0 n'a pas de prédécesseur dans  $\mathbb{N}$ .

### S'exercer

1.2 Pour chacun des nombres suivants, donner son suivant immédiat et son prédécesseur : 235 ; 11554 ; 2028 ; 554682 ; 89564896 ; 9654896544.



1.b soient  $E = \{n \text{ tel que } n \in \mathbb{N} \text{ et } n \geq 3\}$  et  $F = \{n \text{ tel que } n \in \mathbb{N} \text{ et } n < 10\}$ .

- (i) Donner lorsqu'il existe le plus petit élément de  $E$  et celui de  $F$ .  
 (ii) Donner lorsqu'il existe le plus grand élément de  $E$  et celui de  $F$ .

## 1.2 VALEUR DE VÉRITÉ D'UNE ASSERTION MATHÉMATIQUE, CARACTÈRE HÉRÉDITAIRE D'UNE ASSERTION MATHÉMATIQUE.



### Prendre un bon départ

Soient les affirmations  $A_1$ : « $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ » ;  $A_2$ : « $7^n - 1$  est divisible par 6» ;

$A_3$ : « $2 \geq n^n$ » ;  $A_4$ : « $\frac{n^2}{n+1}$  est une fraction irréductible » où  $n$  est un entier naturel.

#### Activité 1

a) Montrer que ces affirmations sont vraies pour  $n \in \{3; 4; 5; 8\}$ .

b) Justifier que l'affirmation : « $\frac{n}{2n+1} + (n+1)$  est un entier naturel » est fausse pour  $n \in \{11; 10; 4\}$ .

c) Soit  $n$  un entier naturel tel que l'affirmation  $A_1$  soit vraie.

- Justifier que  $1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$ .
- En déduire que  $1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}$ .
- L'affirmation  $A_1$  reste-t-elle vraie si on y remplace  $n$  par  $n+1$ ?

#### Activité 2



## Retenir

- **La valeur de vérité** d'une assertion mathématique exprimée à l'aide d'un entier naturel peut être donnée chaque fois qu'on connaît la valeur de l'entier naturel.
- **Le successeur d'un entier naturel**  $n$  est  $n + 1$ . Si  $p$  est un entier naturel non nul, alors le prédécesseur de  $p$  est  $p - 1$ .
- **Une propriété est héréditaire** si chaque fois qu'elle est vraie pour un entier naturel quelconque, alors elle est aussi vraie pour son successeur.

### Exemple

On considère l'assertion (P) : «  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  »

pour  $n \geq 2$  ».

a) Montrons que l'assertion (P) est vraie pour  $n = 2$  et  $n = 6$ .

Tout comme une fonction à variable réelle, l'assertion (P) est définie pour les entiers naturels au moins égaux à deux. On devra remplacer les pointillés par la somme des carrés des entiers commençant par celui qui succède à 3 et on s'arrête à celui qui précède  $n$ .

- Pour  $n = 2$  :  $1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$  et  $\frac{2(2+1)(2 \times 2 + 1)}{6} = 5$  donc  $1^2 + 2^2 = \frac{2(2+1)(2 \times 2 + 1)}{6}$ .

- Pour  $n = 6$  :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 6^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 91 \text{ et } \frac{6(6+1)(2 \times 6 + 1)}{6} = \frac{6 \times 7 \times 13}{6} = 7 \times 13 = 91.$$

Donc  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 6^2 = \frac{6(6+1)(2 \times 6 + 1)}{6}$

b) Montrons que cette assertion est héréditaire.

Soit  $n$  un entier naturel supérieur à 2, tel que  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  ;

Montrons que  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)[(n+1)+1](2(n+1)+1)}{6}$ .

Le terme qui précède le dernier de la somme est  $n^2$ . On a donc

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n+1)^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + (n+1)^2$$

Or on a supposé que  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  ;

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$





## Retenir

- **La valeur de vérité** d'une assertion mathématique exprimée à l'aide d'un entier naturel peut être donnée chaque fois qu'on connaît la valeur de l'entier naturel.
- **Le successeur d'un entier naturel**  $n$  est  $n + 1$ . Si  $p$  est un entier naturel non nul, alors le prédécesseur de  $p$  est  $p - 1$ .
- **Une propriété est héréditaire** si chaque fois qu'elle est vraie pour un entier naturel quelconque, alors elle est aussi vraie pour son successeur.

### Exemple

On considère l'assertion (P) :  $\ll 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

pour  $n \geq 2$  ».

a) Montrons que l'assertion (P) est vraie pour  $n = 2$  et  $n = 6$ .

Tout comme une fonction à variable réelle, l'assertion (P) est définie pour les entiers naturels au moins égaux à deux. On devra remplacer les pointillés par la somme des carrés des entiers en commençant par celui qui succède à 3 et on s'arrête à celui qui précède  $n$ .

• Pour  $n = 2$  :  $1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$  et  $\frac{2(2+1)(2 \times 2 + 1)}{6} = 5$  donc  $1^2 + 2^2 = \frac{2(2+1)(2 \times 2 + 1)}{6}$ .

• Pour  $n = 6$  :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 6^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 91 \quad \text{et} \quad \frac{6(6+1)(2 \times 6 + 1)}{6} = \frac{6 \times 7 \times 13}{6} = 7 \times 13 = 91.$$

Donc  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 6^2 = \frac{6(6+1)(2 \times 6 + 1)}{6}$

b) Montrons que cette assertion est héréditaire.

Soit  $n$  un entier naturel supérieur à 2, tel que  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ;

Montrons que  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)[(n+1)+1](2(n+1)+1)}{6}$ .

Le terme qui précède le dernier de la somme est  $n^2$ . On a donc

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n+1)^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + (n+1)^2$$

Or on a supposé que  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ;

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{(n+1)}{6} (2n^2 + n + 6n + 6) \\
 &= \frac{(n+1)}{6} (2n^2 + 7n + 6)
 \end{aligned}$$

Si on développe l'expression  $(n+1)(2n+3)$ , on trouve  $2n^2 + 7n + 6$  ou si on Cherche les racines du polynôme du second degré en  $n$  dans  $\mathbb{R} : 2n^2 + 7n + 6$ , on trouve  $-2$  et  $-\frac{3}{2}$ ; Ainsi,

$$2n^2 + 7n + 6 = 2(n+2)\left(n+\frac{3}{2}\right) = (n+2)(2n+3).$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}.$$

L'égalité (P) est donc héréditaire.



## S'exercer

**1.c**  $1+3+5+7=16$  ( $16=4^2$  et 4 est la moitié de 8, qui est le successeur de 7).

Conjecturer le résultat de la somme  $1+3+5+7+\dots+25$ .

Montrer que l'égalité  $1+3+5+\dots+(2p+1)=(p+1)^2$   $p \in \mathbb{N}^*$  est héréditaire.

**1.d** On définit une suite  $u$  par  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 9}$  et  $u_0 = 2$

- Calculer  $u_1, u_2, u_3, u_4$ .
- Soit l'affirmation : «  $u_n \leq u_{n+1}$  » pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que cette affirmation est vraie pour  $n \in \{0; 1; 2; 3\}$ .
- Montrer que si  $u_n \leq u_{n+1}$ , alors  $u_{n+1} \leq u_{n+2}$ .

## 1.3 PRINCIPE DE LA DÉMONSTRATION PAR RÉCURRENCE



### Prendre un bon départ

#### Activité 1

Soit  $P$  une assertion définie pour les entiers naturels supérieurs ou égaux à l'entier naturel  $n_0$  telle que :

- (1)  $P$  soit vraie pour  $n_0$  ;
  - (2) Si  $P$  est vraie pour un entier naturel quelconque  $n \geq n_0$ , alors  $P$  est vraie pour  $n+1$ .
- a) Supposons par exemple que  $n_0 = 0$ . Expliquer pourquoi  $P$  est-elle vraie pour les entiers 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.



- b) Peut-on trouver un entier naturel pour lequel P n'est pas vraie ?
- c) Supposons que Q est l'ensemble des entiers naturels  $n \geq n_0$  pour lesquels la propriété P est fautive. On suppose que Q n'est pas vide.
- d) Justifier pourquoi le plus petit élément noté q de Q existe.
- e) Montrer que  $q > n_0$  et donc  $q \neq n_0$ .
- f) En déduire que :
- $q \in Q$  ;
  - $q - 1 \notin Q$  ;
  - $q - 1 \geq n_0$  ;
  - P est vraie pour  $q - 1$  ;
  - P est vraie pour  $(q - 1) + 1 = q$ .
  - $q \notin Q$ .
- g) Déduire alors que Q est vide. Que peut-on en conclure ?

### Activité 2

Soit l'égalité  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  pour  $n$  entier naturel supérieur ou égal à 5.

- a) Donner la valeur de  $n_0$  (plus petit entier pour lequel l'assertion est vraie).
- b) Montrer que cette assertion vérifie a les propriétés (1) et (2).
- c) Que peut-on donc conclure pour cette égalité ?

## Retenir

Soit une l'assertion portant sur les entiers naturels consécutifs d'une partie non vide A de  $\mathbb{N}$  telle que :

- (I) L'assertion est vraie pour le plus petit élément de A;
- (ii) Si l'assertion est vraie pour un élément quelconque  $n$  de A, alors elle est aussi vraie pour l'entier  $(n + 1)$ .

**Alors l'assertion est vraie pour tout entier de A.**

Ce principe qui permet de montrer qu'une propriété est vraie sur une partie non vide constituée d'entiers naturels consécutifs est dit **de la démonstration par récurrence**.

### Exemple

- a) Montrer par récurrence que pour tout entier  $n \geq 2$ , on a :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- a) Considérons la proposition (P) définie par : P: " $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ "

pour tout  $n \geq 2$  Montrons que (P) est vraie.



Pour  $n = 2$ ,  $1 + 2 = 3$  et  $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2(2+1)}{2} = 3$ . (P) est donc vraie pour  $n = 2$ .

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2 tel que  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ . Montrons que

$$1 + 2 + \dots + (n+1) = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}$$

$$1 + 2 + \dots + (n+1) = (1 + 2 + \dots + n) + (n+1).$$

$$\text{Or } 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } (1 + 2 + \dots + n) + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{(n+1) + [(n+1)+1]}{2} \end{aligned}$$

On peut conclure d'après le principe de la démonstration par récurrence,

que pour tout entier naturel  $n \geq 2$ ,  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

b) Montrer par récurrence que pour tout entier  $n \geq 5$ , on a :

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n-1) = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}.$$

Désignons par (Q) la proposition :

« Pour tout entier naturel  $n \geq 5$ ,  $1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + (n-1)n = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}$  »

• Montrons que cette proposition est vraie pour  $n = 5$ .

Les termes du premier membre de cette égalité est le produit d'un entier par son suivant et le dernier terme est  $5 \times (5-1) = 20$ .

D'une part,  $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 = 2 + 6 + 12 + 20 = 40$  ;

$$\text{D'autre part, } \frac{n(n-1)(n+1)}{3} = \frac{5(5-1)(5+1)}{3} = \frac{5 \times 4 \times 6}{3} = \frac{120}{3} = 40$$

$$\text{donc } 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + 4 \times 5 = \frac{5(5-1)(5+1)}{3}.$$

L'égalité (Q) est vraie pour  $n = 5$ .

• Soit  $k$  un entier naturel supérieur ou égal à 5 tel que

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + (k-1)k = \frac{k(k-1)(k+1)}{3}.$$

$$\text{Montrons que } 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n+1) = (1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + (k-1)k) + k(k+1)$$

$$\text{Or } 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + (k-1)k = \frac{k(k-1)(k+1)}{3};$$

$$\text{d'où } 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + (k-1)k + k(k+1) = \frac{k(k-1)(k+1)}{3} + k(k+1)$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{k(k+1)[(k-1)+3]}{3} \\
 &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} \\
 &= \frac{(k+1)[(k+1)-1][(k+1)+1]}{3}
 \end{aligned}$$

Donc (Q) reste vraie si on remplace  $n$  par  $n+1$ .

Conclusion pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 5$  on a  $1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n-1) = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}$ .

1) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  non nul,

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1) = (n+1)^2.$$

Posons  $S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1)$ .

Notons  $p(n)$  la proposition  $S_n = (n+1)^2$ .

**Première étape :**  $(1+1)^2 = 4$  et  $1 + (2 \times 1 + 1) = 1 + 3 = 4$  donc  $S_1 = (1+1)^2$ .

**Deuxième étape :** Supposons que pour un entier naturel quelconque  $n$  non nul

$$S_n = (n+1)^2 \text{ et montrons que } S_{n+1} = [(n+1)+1]^2.$$

$$S_{n+1} = 1 + 3 + 5 + \dots + (2(n+1)+1).$$

$$S_{n+1} = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1) + (2n+3).$$

$$= [1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1)] + (2n+3)$$

$$= S_n + (2n+3)$$

$$= (n+1)^2 + (2n+3)$$

$$= n^2 + 2n + 1 + 2n + 3$$

$$= n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2 = [(n+1)+1]^2.$$

Donc pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , si  $p(n)$  est vraie alors  $p(n+1)$  est vraie.

**Conclusion :** pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1) = (n+1)^2$

(d'après le principe de la démonstration par récurrence).

2) Montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 4$ ,  $2^n \geq n^2$ .

**Première étape :**

$$2^4 = 16 \text{ et } 4^2 = 16 \text{ et } 16 \geq 16. \text{ Donc } 2^4 \geq 4^2.$$

**Deuxième étape :**

Supposons que pour un entier naturel quelconque  $n \geq 4$ ,  $2^n \geq n^2$ .

Montrons que  $2^{n+1} \geq (n+1)^2$ .

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n. \text{ Or } 2^n \geq n^2; \text{ donc } 2 \times 2^n \geq 2n^2.$$

Pour montrer que  $2^{n+1} \geq (n+1)^2$ , il suffit de montrer que  $2n^2 \geq (n+1)^2$  ; soit  $2n^2 - (n+1)^2 \geq 0$  ;

$$2n^2 - (n+1)^2 = 2n^2 - n^2 - 2n - 1 = n^2 - 2n - 1$$

Considérons le polynôme  $p : x \mapsto x^2 - 2x - 1$ .

Ses racines sont  $1+\sqrt{2}$  et  $1-\sqrt{2}$ .

$$p(x) \geq 0 \text{ si et seulement si } x \in ]-\infty; 1-\sqrt{2}] \cup [1+\sqrt{2}; +\infty[$$



Pour  $x \geq 4$ ,  $p(x) \geq 0$  (car  $4 \geq 1 + \sqrt{2}$ ).

On en déduit que pour tout entier naturel  $n \geq 4$ ,  $n^2 - 2n - 1 \geq 0$ , d'où  $2^{n+1} \geq (n+1)^2$ .

**Conclusion :** pour tout entier naturel  $n \geq 4$ , on a  $2^n \geq n^2$ .

3) Soit la suite  $(u_n)$  définie par 
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 35} \end{cases}$$

Montrons que la suite  $(u_n)$  est croissante et majorée par 7.

a) Montrons par récurrence que la suite  $(u_n)$  est croissante.

**Première étape :**  $u_0 = 0$  et  $u_1 = \sqrt{2u_0 + 35} = \sqrt{35}$ .  $u_0 \leq u_1$  car  $0 \leq \sqrt{35}$ .

**Deuxième étape :** Supposons pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $u_n \leq u_{n+1}$  et montrons que

$$u_{n+1} \leq u_{(n+1)+1}.$$

Considérons la fonction  $f : x \mapsto \sqrt{(2x+35)}$ .

Pour tout  $x \in [0; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+35}}$ ,  $f'(x) \geq 0$ ; donc  $f$  est croissante sur  $[0; +\infty[$ .

On a  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

Pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq 0$ ; donc  $u_n \in [0; +\infty[$ .

D'après l'hypothèse de récurrence,  $u_n \leq u_{n+1}$ . Or  $u_n$  et  $u_{n+1}$  sont tous dans l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

$f$  étant croissante sur  $[0; +\infty[$ ,  $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ . D'où  $u_{n+1} \leq u_{n+2} \Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_{(n+1)+1}$ .

La suite  $(u_n)$  est donc croissante.

b) Montrons que La suite  $(u_n)$  est majorée par 7.

**Première étape :**  $u_0 \leq 7$  car  $u_0 = 0$

**Deuxième étape :** Supposons que  $u_n \leq 7$  pour tout entier naturel  $n \geq 0$  et montrons que  $u_{n+1} \leq 7$ .

$u_n \leq 7 \Leftrightarrow 2u_n \leq 14 \Leftrightarrow 2u_n + 35 \leq 14 + 35 \Leftrightarrow 2u_n + 35 \leq 49$ . On en déduit que

$$\sqrt{2u_n + 35} \leq \sqrt{49} = 7 \text{ d'où } u_{n+1} \leq 7.$$

**Conclusion :** pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq 7$ .

La suite  $(u_n)$  est majorée par 7.

### Exercice résolu 1 :

1)  $n$  est un entier naturel non nul. On pose  $S_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{4n^2 - 1}$ .

a) Calculer  $S_1$ ;  $S_2$ ;  $S_3$ ;  $S_4$ .

$$S_1 = \frac{1}{4 \times 1^2 - 1} = \frac{1}{3}; \quad S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4 \times 2^2 - 1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5};$$



$$S_4 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{4 \times 4^2 - 1} = \frac{3}{7} + \frac{1}{63} = \frac{27+1}{63} = \frac{28}{63} = \frac{4}{9}.$$

On peut remarquer que :

$$S_1 = \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \times 1 + 1}; S_2 = \frac{2}{5} = \frac{2}{2 \times 2 + 1}; S_3 = \frac{3}{7} = \frac{3}{2 \times 3 + 1}; S_4 = \frac{4}{9} = \frac{4}{2 \times 4 + 1}.$$

On peut conjecturer que : pour tout entier naturel  $n \geq 1$  on a  $S_n = \frac{n}{2n+1}$ .

b) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a  $S_n = \frac{n}{2n+1}$ .

**Première étape :** On a d'après ce qui précède  $\frac{1}{2 \times 1 + 1} = \frac{1}{3}$  et  $S_1 = \frac{1}{3}$  donc  $S_1 = \frac{1}{2 \times 1 + 1}$ , donc, la proposition est vraie pour  $n = 1$ .

**Deuxième étape :** Supposons que pour un entier naturel  $n \geq 1$  quelconque,  $S_n = \frac{n}{2n+1}$  et

montrons que  $S_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}$ ; soit  $S_{n+1} = \frac{n+1}{2n+3}$ .

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{4n^2 - 1} + \frac{1}{4(n+1)^2 - 1} \\ &= S_n + \frac{1}{4(n+1)^2 - 1} \\ &= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3} \\ &= \frac{n+1}{2(n+1)+1}. \end{aligned}$$

$$\text{D'où } S_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}.$$

**Conclusion :** pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $S_n = \frac{n}{2n+1}$ .

### Exercice résolu 2 :

1) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul  $n$  on a :  $n! \geq 2^{n-1}$ .

- Pour  $n = 1$ ,  $1! = 1$  et  $2^{1-1} = 1$  et  $1 \geq 2^{1-1}$  donc  $1! \geq 1$  et la propriété est vraie au rang 1.

- Soit  $k$  un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Supposons  $k! \geq 2^{k-1}$  on a :  $(k+1)! = (k+1)k!$  et  $k+1 \geq 2$ .

Ainsi  $(k+1)k! \geq 2k! \geq 2 \times 2^{k-1}$ ; d'où  $(k+1)! \geq 2^k$ ; soit  $(k+1)! \geq 2^{(k+1)-1}$ .

La propriété est vraie au rang  $k+1$ .

On en déduit que pour tout entier naturel  $n$  non nul  $n! \geq 2^{n-1}$ .

d'après le principe de la démonstration par récurrence.

2)  $(V_n)$  est la suite définie par :  $V_1 = 1$  et la relation de récurrence  $V_n = V_{n-1} + \frac{1}{2^n}$  pour tout entier naturel  $n > 1$ .



a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $V_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2^n}$ .

• Pour  $n = 1$ ,  $V_1 = 1$ ;  $\frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{2}{2} = 1$ , d'où  $V_1 = \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^1$ ; donc la propriété est vraie pour  $n = 1$ .

• Supposons que pour  $n \geq 1$ , la propriété est vraie et montrons qu'elle est aussi vraie au rang  $n+1$ .

$$V_{n+1} = V_n + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} - \frac{2}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ ; Donc pour tout  $n \geq 1$ ,  $V_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2^n}$ .

D'après le principe de la démonstration par récurrence.

b) Soit  $(w_n)$  définie par  $w_1 = 1$  et  $w_n = w_{n-1} + \frac{1}{n^n}$  pour  $n > 1$ .

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $0 \leq w_n \leq V_n$ .

• Démontrons que pour  $n \geq 2$ ,  $0 \leq w_n \leq V_n$ .

Au rang  $n = 2$   $w_2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ ;  $V_2 = \frac{5}{4}$ ;  $0 \leq \frac{5}{4} \leq \frac{5}{4}$  et  $0 \leq w_2 \leq V_2$ ,

donc la proposition vraie pour  $n = 2$ .

• Supposons que  $0 \leq w_n \leq V_n$  pour  $n \geq 1$ .

$$V_{n+1} = V_n + \frac{1}{2^{n+1}}; \quad w_{n+1} = w_n + \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

Puisque  $0 \leq w_n \leq V_n$  ajoutons à chaque membre  $\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$

$$\frac{1}{(n+1)^{n+1}} \leq w_n + \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \leq V_n + \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \text{ or } \frac{1}{(n+1)^{n+1}} > 0$$

$$\text{donc } 0 < w_{n+1} \leq V_n + \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \text{ or } n \geq 2 \Leftrightarrow n+1 \geq 3 > 2$$

$$(n+1)^{n+1} > 2^{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)^{n+1}} < \frac{1}{2^{n+1}} \Leftrightarrow V_n + \frac{1}{(n+1)^{n+1}} < V_n + \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\text{par suite, } 0 < w_{n+1} < V_n + \frac{1}{2^{n+1}} = V_{n+1} \text{ d'où } 0 < w_{n+1} < V_{n+1}.$$

Ainsi la proposition est vraie au rang  $(n+1)$ .

Conclusion:  $0 < w_n < V_n$  pour tout  $(n \in \mathbb{N})$   $n \geq 2$ , d'après la démonstration par récurrence.

## S'exercer

e. Montrer par récurrence que :

a)  $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$ , pour  $n \geq 6$ ;



- b) Cette égalité reste-t-elle vraie pour  $n \geq 1$  ?
- c) Évaluer la somme des carrés des 99 premiers nombres entiers naturels non nuls.  
Donner sans aucun calcul la somme des 100 premiers nombres entiers naturels.
- d) a) Montrer par récurrence que  $2^n \geq n$ , pour  $n \geq 3$  ;  
b) Sans faire de calcul, comparer  $2^{2035}$  et 2034.
- e) a) Montrer par récurrence que :  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ , pour  $n \geq 4$   
b) En déduire que :  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2 = (1+2+3+\dots+n)^2$ .
- f) Évaluer la somme  $C = 1^3 + 2^3 + \dots + 49^3$ . Quelle est la somme des cubes des 50 premiers nombres entiers naturels ?
- g) Démontrer par récurrence les propositions suivantes :
- a) Pour tout entier naturel  $n \geq 4$ ,  $3^n > n^3$  ;  
b) Pour tout entier naturel  $p \geq 1$ ,  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + p^2 = \frac{1}{6} p(p+1)(2p+1)$ ;  
Pour tout entier naturel  $p \geq 1$ ,  $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + p(p+1) = \frac{1}{3} p(p+1)(p+2)$ .
- h)  $a$  est un réel strictement positif.  
Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  :  $(1+a)^n \geq 1+na$ .
- i) On définit une suite par  $u_0 = 2$  et pour tout entier naturel  $n$  :  $u_{n+1} = 2u_n - 3$ .  
Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 3 - 2^n$ .
- j) Démontrer par récurrence que  $3^{2n+1} + 2^{n+2}$  est divisible par 7, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- k) Démontrer par récurrence que  $\sum_{k=1}^n k 2^{k-1} = (n-1) 2^n + 1$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- l) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $\sum_{k=1}^n k(n-k) = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$ .

## 1.4 DIVISION EUCLIDIENNE DANS $\mathbb{N}$

### Prendre un bon départ

#### Activité 1

- a) Dresser la liste des multiples de 31 compris entre 50 et 250.  
b) Dresser la liste des diviseurs positifs des nombres 15, 30 et 60.  
c)  $a$  et  $b$  étant deux entiers naturels, dans chacun des cas écrire  $a$  sous la forme  $a = bq + r$   
où  $q$  est un entier naturel et  $r$  un entier naturel tel que  $0 \leq r < b$ .  
a)  $a = 2372$  et  $b = 44$  ; b)  $a = 235$  et  $b = 34$ .

#### Activité 2

Soient  $a$  un entier naturel et  $b$  un entier naturel non nul ;  $B$  l'ensemble des entiers naturels  $n$  tels que  $a < nb$ .

- a) Montrer que  $0 \notin B$  et  $a \in B$ .



b) En déduire que  $B$  admet un plus petit élément non nul  $p$ .

c) Soit  $q$  le prédécesseur de  $p$ . Montrer que  $q \notin B$ .

d) Montrer que  $0 \leq a - qb < b$ .

e) En posant  $r = a - qb$ , déduire que  $a = qb + r$  et  $0 \leq r < b$ .



## Retenir

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels,  $b$  non nul.

Il existe un unique couple  $(q, r)$  d'entiers naturels tels que :  $a = bq + r$  et  $0 \leq r < b$ .

$q$  est le quotient de la division euclidienne de  $a$  par  $b$  et  $r$  le reste.



## S'exercer

1.0 Dans chacun des cas suivants, effectuer la division euclidienne de  $a$  par  $b$ . Préciser dans chaque cas le quotient et le reste de cette division.

- $a = 1925$ ;  $b = 524$

- $a = 2014$ ;  $b = 192$ .

## 1.5 NUMÉRATION



### Prendre un bon départ

#### Activité 1

Dans le système décimal,

$$2125 = 2000 + 100 + 20 + 5 = 2 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 2 \times 10 + 5 \times 10^0 ;$$

En s'inspirant de l'écriture ci-dessus, écrire chacun des nombres suivants en fonction des puissances de 10 : 145654 ; 25487896 ; 3564895 ; 5428954765.

#### Activité 1

Dans le système de numération de base 2, on utilise uniquement les chiffres 0 et 1.

Exemple :  $15 = 2^3 + 2^2 + 2^1 + 1 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1$ .

15 s'écrit en base deux  $\text{IIII}$ .

$$19 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^1 + 1 \quad 83 = 2^6 + 2^4 + 2 + 1.$$

S'inspirer de l'exemple ci-dessus pour écrire chacun des nombres 19 et 83 dans le système de numération de base 2.



## Retenir



$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$  éléments de l'ensemble  $\{0; 1\}$ .

- Plus généralement,  $N$  s'écrit  $a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_0$  en base  $\alpha$  où  $\alpha$  est un entier naturel supérieur ou égal à 2 si et seulement si

$N = a_n \times \alpha^n + a_{n-1} \times \alpha^{n-1} + a_{n-2} \times \alpha^{n-2} + \dots + a_1 \times \alpha + a_0$  où  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$  sont des éléments de l'ensemble  $\{0; 1; 2; \dots; \alpha - 1\}$  et  $a_n \neq 0$

### Méthode

Le nombre qui s'écrit 97 dans le système décimal est égal à  $1 + 2^5 + 2^6$  qui peut encore s'écrire  $1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1$ .

97 s'écrit donc en base deux  $\overline{1100001}$ .

En effectuant les divisions successives, on peut écrire

$$97 = 2 \times 48 + 1; 48 = 2 \times 24 + 0; 24 = 2 \times 12 + 0; 12 = 2 \times 6 + 0$$

$$6 = 2 \times 3 + 0; 3 = 2 \times 1 + 1; 1 = 2 \times 0 + 1.$$

On effectue les divisions successives jusqu'à obtenir un quotient nul.

On retrouve l'écriture de 97 dans le système binaire en écrivant de la gauche vers la droite les différents restes successifs en partant du dernier reste.

Plus généralement lorsqu'un nombre  $N$  est écrit dans le système décimal, pour l'écrire en base  $a$ , on effectue les divisions successives par  $a$  comme l'exemple ci-dessus jusqu'à obtenir un quotient nul. L'écriture du Nombre  $N$  en base  $a$  est obtenue en écrivant de la gauche vers la droite les différents restes successifs en partant du dernier reste.

### Exemple 1

1) Écrire le nombre 473 en base dix dans le système de numération de base 4.

En effectuant les divisions successives par 4, on a :

$$473 = 4 \times 118 + 1$$

$$118 = 4 \times 29 + 2$$

$$29 = 4 \times 7 + 1$$

$$7 = 4 \times 1 + 3$$

$$1 = 4 \times 0 + 1$$

473 s'écrit en base quatre  $\overline{13121}$ .

2) Soit  $N = \overline{5243101201}$  en base 7. Écrire ce nombre dans le système décimal.

$N$  est écrit avec 10 chiffres.

$$N = 5 \times 7^9 + 2 \times 7^8 + 4 \times 7^7 + 3 \times 7^6 + 1 \times 7^5 + 0 \times 7^4 + 1 \times 7^3 + 2 \times 7^2 + 0 \times 7^1 + 1$$

$N = 136254791$  dans le système décimal.

3) Le nombre  $\overline{2131}$  est écrit en base quatre. Écrire ce nombre en base trois sans passer par le système décimal.

**Première solution**

On construit les tables d'addition et de multiplication en base 4.

| + | 0 | 1  | 2  | 3  |
|---|---|----|----|----|
| 0 | 0 | 1  | 2  | 3  |
| 1 | 1 | 2  | 3  | 10 |
| 2 | 2 | 3  | 10 | 11 |
| 3 | 3 | 10 | 11 | 12 |

| × | 0 | 1 | 2  | 3  |
|---|---|---|----|----|
| 0 | 0 | 0 | 0  | 0  |
| 1 | 0 | 1 | 2  | 3  |
| 2 | 0 | 2 | 0  | 12 |
| 3 | 0 | 3 | 12 | 21 |



Par division euclidienne:  $\overline{2131}^4 = 3 \times \overline{310}^4 + 1$

on a  $\overline{310}^4 = 3 \times \overline{101}^4 + 1$ ;  $\overline{101}^4 = 3 \times \overline{11}^4 + 2$ ;  $\overline{11}^4 = 3 \times 1 + 2$  et  $1 = 3 \times 0 + 1$

donc  $\overline{2131}^4 = \overline{12211}^3$

**Deuxième solution.**

$$4 = 3 + 1; 5 = 3 + 2; 6 = 2 \times 3$$

$$\begin{aligned}\overline{2131}^4 &= 2 \times 4^3 + 1 \times 4^2 + 3 \times 4 + 1 = 2(3+1)^3 + 1(3+1)^2 + 3(3+1) + 1 \\ &= 2(3^3 + 3 \times 3^2 + 3 \times 3 + 1) + (3^2 + 2 \times 3 + 1) + 3(3+1) + 1 \\ &= 2(2 \times 3^3 + 3^2 + 1) + 3^2 + 2 \times 3 + 1 + 3^2 + 3 + 1 \\ &= 4 \times 3^3 + 4 \times 3^2 + 3 \times 3 + 4 = (3+1)3^3 + (3+1)3^2 + 3^2 + 3 + 1 \\ &= 3^4 + 2 \times 3^3 + 2 \times 3^2 + 4 = 1 \times 3^4 + 2 \times 3^3 + 2 \times 3^2 + 1 \times 3 + 1 \\ &= \overline{12211}^3\end{aligned}$$

$\overline{2131}^4$  s'écrit 12211 en base trois.

4) 17315 est écrit dans le système décimal. Écrire ce nombre dans le système de base 12. Les chiffres utilisés en base 12 sont les éléments de l'ensemble  $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; \alpha; \beta\}$ .

$$17315 = 12 \times 1442 + 11$$

$$1442 = 12 \times 120 + 2$$

$$120 = 12 \times 10 + 0$$

$$10 = 12 \times 0 + 10.$$

Les différents restes successifs en partant du bas sont  $10 = \alpha$ ;  $0$ ;  $2$ ;  $11 = \beta$   
d'où  $\overline{17315}^{10} = (\overline{\alpha 20 \beta})^{12}$ .

Écrire le nombre  $\overline{1101010011}_2$  en base 8 (on remarquera que  $8 = 2^3$ ).

$$\begin{aligned}\overline{1101010011}^2 &= 1 \times 2^9 + 1 \times 2^8 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2 + 1 \\ &= (2^3)^3 + 4 \times (2^3)^2 + (2^3)^2 + 2 \times 2^3 + 3 \\ &= 1 \times 8^3 + 4 \times 8^2 + 1 \times 8^2 + 2 \times 8 + 3 \\ &= 1 \times 8^3 + 5 \times 8^2 + 2 \times 8 + 3 \\ &= 1523^8.\end{aligned}$$

### Exemple 2

1) Déterminer tous les entiers naturels compris entre 0 et 100 dont le reste dans la division euclidienne par 12 est 3.

On cherche  $a \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq a \leq 100$  tel que  $a = 12q + 3$  car  $0 \leq 3 \leq 12$

$$0 \leq a \leq 100 \Leftrightarrow 0 \leq 12q + 3 \leq 100 \Leftrightarrow -3 \leq 12q \leq 97 \Leftrightarrow 0 \leq q \leq 8 \quad (q \in \mathbb{N})$$

$$q \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \text{ d'où } a \in \{3, 15, 27, 39, 51, 63, 75, 87, 99\}$$

2) Déterminer l'entier naturel  $x$  tel que le reste dans la division euclidienne de 6425 par  $x$  soit 100.

$$6425 = qx + 100 \quad (q \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq x \leq 100), \text{ donc } qx = 6425 - 100 = 5425$$

ainsi  $x$  est un diviseur de 5425 compris entre 1 et 100 or  $5425 = 5^2 \times 7 \times 31$ ,

d'où  $x \in \{1, 5, 7, 25, 31, 35\}$ .



## S'exercer

**1p** Déterminer le nombre entier naturel qui s'écrit  $N = \overline{xyz}^7 = \overline{zyx}^{11}$

**1q** Utiliser les tables d'addition et de multiplication en base 5 pour écrire directement en base 3 le nombre  $N = \overline{24}^5$ .

**1r** Déterminer le nombre entier naturel  $1x$  tel que  $\overline{53}^x + \overline{46}^x = \overline{132}^x$

**1s** Calculer directement  $\overline{213}^5 \times \overline{41}^5$ .

**1t** Prouver que  $\overline{121}^x$  est le carré d'un nombre  $a$  ( $x > 2$ ). Donner  $a$  en base  $x$ .



## LEÇON 2 DIVISIBILITÉ DANS $\mathbb{Z}$

(Série C uniquement)

- ▶ Trouver le quotient et le reste de la division euclidienne d'un entier relatif par un autre.
- ▶ Utiliser les congruences pour montrer qu'un entier est divisible par un autre, ou pour déterminer le reste de la division euclidienne d'un entier par un autre.

### 2.1 DIVISION EUCLIDIENNE DANS $\mathbb{Z}$



#### Prendre un bon départ

##### Activité 1

- Dresser la liste des multiples de 31 compris entre 50 et 250.
- Combien y a-t-il de multiples de 47 compris entre  $-750$  et  $750$ .
- Dresser la liste des diviseurs positifs des nombres 15, 30 et 60.
- $a$  et  $b$  étant deux entiers relatifs, dans chacun des cas écrire  $a$  sous la forme  $a = bq + r$  où  $q$  est un entier relatif et  $r$  un entier naturel tel que :  $0 \leq r < |b|$ .

- $a = 2372$  et  $b = 44$  ;
- $a = 2372$  et  $b = -44$  ;
- $a = -2372$  et  $b = 44$  ;
- $a = -2372$  et  $b = -44$  .

##### Activité 2

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs avec  $b$  non nul.

- Montrer qu'il existe un unique couple  $(q; r)$  d'entiers naturels  $|a| = q \times |b| + r$  où  $0 \leq r < |b|$ .
- Montrer que :

- si  $a \geq 0$  et  $b > 0$ , alors  $a = bq + r$  ;
- si  $a \leq 0$  et  $b > 0$ , alors  $a = b(-q-1) + b - r$  ;
- si  $a \geq 0$  et  $b < 0$ , alors  $a = b(-q) + r$  ;
- si  $a \leq 0$  et  $b < 0$ , alors  $a = b(q+1) - b - r$ .



#### Retenir

- Soient  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs avec  $b \neq 0$ . Il existe un unique couple  $(q; r) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{N})$  tel que  $a = bq + r$  et  $0 \leq r < |b|$ . On dit que l'on a effectué la division euclidienne de  $a$  par  $b$ .  $q$  est le quotient et  $r$  le reste dans la division euclidienne de  $a$  par  $b$ .



**Remarque**

- L'ensemble des multiples d'un entier relatif  $a$  est noté  $a\mathbb{Z}$ .  $a\mathbb{Z} = (-a)\mathbb{Z} = |a|\mathbb{Z}$ .
- L'ensemble des diviseurs d'un entier relatif non nul  $b$  est souvent noté  $D(b)$ .
- Si  $a = kb$  ( $k \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathbb{N}$  et  $b \in \mathbb{N}^*$ ), on a aussi  $-a = (-k)b$ ; donc si  $b$  divise  $a$  alors  $b$  divise  $-a$ , et réciproquement.
- Deux entiers relatifs  $a$  et  $-a$  ont le même ensemble de diviseurs dans  $\mathbb{Z}$ .
- $a = a \times 1$ , donc  $a$  divise  $a$ .
- Soient  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs non nuls.

Si  $a$  divise  $b$  et  $b$  divise  $a$ , alors  $a = b$  ou  $a = -b$ ; soit  $|a| = |b|$ .

En effet  $a$  divise  $b$  si et seulement si, il existe un entier relatif  $k$  tel que  $b = ak$ .

De même  $b$  divise  $a$  si et seulement si, il existe un entier relatif  $k'$  tel que  $a = bk'$ .

$ba = (ak)(bk')$ ; soit  $ba = (ba)(kk')$ ;  $a$  et  $b$  n'étant pas nuls,  $ba$  ne l'est pas et par suite  $kk' = 1$ .

Donc  $k = k' = 1$  ou  $k = k' = -1$  car  $k$  et  $k'$  sont des entiers relatifs.

Si  $k = k' = 1$ , alors  $a = b$ . Si  $k = k' = -1$ , alors  $a = -b$ .

D'où  $a = b$  ou  $a = -b$ .

- Soient  $a, b$  et  $c$  trois entiers relatifs.

◀ Si  $a$  divise  $b$  alors  $a$  divise  $cb$ .

◀ Si  $a$  divise  $b$ ,  $ca$  divise  $cb$ .

◀ Si  $a$  divise  $b$  et  $a$  divise  $c$ , alors  $a$  divise  $b + c$  et  $b - c$ .

◀ Si  $a$  divise  $b$  et  $b$  divise  $c$ , alors  $a$  divise  $c$ .

En effet :

◀  $a$  divise  $b$ , donc il existe un entier relatif  $k$  tel que  $b = ka$ .

Alors  $cb = c(ka) = a(ck)$ , donc  $a$  divise  $cb$ .

De même  $cb = k(ca)$  et par conséquent  $ca$  divise  $cb$ .

◀  $a$  divise  $b$  et divise  $c$ , donc il existe un entier relatif  $k$  tel que  $b = ka$  et il existe un entier relatif  $k'$  tel que  $c = k'a$ .

De plus  $b + c = ka + k'a = a(k + k')$  et  $b - c = ka - k'a = a(k - k')$ .

$k + k'$  et  $k - k'$  sont des entiers relatifs. Donc  $a$  divise  $b + c$  et  $a$  divise  $b - c$ .

◀  $a$  divise  $b$  et  $b$  divise  $c$ , il existe un entier relatif  $k$  tel que  $b = ka$  et il existe un entier relatif  $k'$  tel que  $c = k'b$ . Alors  $c = k' b = k' (ka) = a(kk')$ .

Or  $kk'$  est un entier relatif comme produit de deux entiers relatifs. Donc  $a$  divise  $c$ .

**Exemple**

1)  $-88 = 11 \times (-8)$ , donc 11 divise  $-88$  et  $-8$  divise  $-88$ .

2) Pour tout entier naturel  $n$ ,  $n(n+1)$  est divisible par 2.

En effet si  $n$  est pair, alors 2 divise  $n$  et par conséquent  $n(n+1)$ .

Si  $n$  est impair, alors  $n+1$  est pair et 2 divise  $n+1$  et par conséquent  $n(n+1)$ .



3) Combien y a-t-il de multiples de 13 compris entre  $-500$  et  $500$ . Soit  $x$  un multiple de 13, il existe  $k$  élément de  $\mathbb{Z}$  tel que  $x = 13k$  et  $-500 < 13k < 500$  donc  $k$  est compris entre  $-38$  et  $38$ . Entre  $-38$  et  $38$  il y a  $38+38+1=77$  entiers relatifs.

4) Déterminer les couples  $(x, y)$  d'entiers relatifs tels que : 
$$\begin{cases} xy = 1 \\ x^2 + y = 2 \end{cases}$$

$xy = 1$  signifie que  $x$  et  $y$  divisent 1 et  $x$  et  $y$  sont de même signe et.

$x \in \{-1, 1\}$  et  $y \in \{-1, 1\}$  donc  $(x, y) \in \{(-1, -1); (-1, 1); (1, -1); (1, 1)\}$ .

Les couples vérifiant l'égalité  $x^2 + y = 2$  sont :  $(-1, 1)$  et  $(1, 1)$ . Or  $xy = 1$  donc  $(1, 1)$  est le seul couple solution de ce système.

5) Effectuons la division euclidienne de 3758 par 125 puis de  $-3758$  par 125.

$3758 = 125 \times 30 + 8$  et  $0 \leq 8 < 125$  ; donc le quotient de la division euclidienne de 3758 par 125 est 30 et le reste est 8.

D'autre part  $-3758 = 125 \times (-30) - 8 = 125 \times (-31) + 125 - 8$

D'où  $-3758 = 125 \times (-31) + 117$  et  $0 \leq 117 < 125$ .

Donc  $-31$  est le quotient de la division euclidienne de  $-3758$  par 125 et le reste est 117.

6) Effectuons la division euclidienne de 50764 par 327 puis  $-50764$  par 327.

$$50764 = 327 \times 155 + 79$$

$$-50764 = 327 \times (-155) - 79$$

$$-50764 = 327 \times (-156) + 327 - 79$$

$$-50764 = 327 \times (-156) + 248$$

$248 < 327$ . Le quotient de la division euclidienne de  $-50764$  par 327 est  $-156$  et le reste est 248.



## S'exercer

2.a Déterminer les couples  $(x, y)$  d'entiers relatifs tels que : 
$$\begin{cases} (x+2)(y-1) = 17 \\ 5x - y = 1 \end{cases}$$

2.b Déterminer les entiers naturels  $n$  dont la division euclidienne par 16 a un reste égal au carré du quotient.

2.c Dans chacun des cas suivants, effectuer la division euclidienne de  $a$  par  $b$  :

$$a = 6941 \text{ et } b = 358 ;$$

$$a = 6941 \text{ et } b = -358 ;$$

$$a = -6941 \text{ et } b = 358 ;$$

$$a = -6941 \text{ et } b = -318 .$$



## 2.2 CONGRUENCES

### 2.2.1 Présentation

#### Prendre un bon départ

Soient le couple d'entiers relatifs  $(a; b)$  et  $n$  un entier naturel non nul.  
Montrer dans chacun des cas ci-dessous que  $a - b$  est un multiple de  $n$ .

- $a = 4$  ;  $b = 1$  et  $n = 3$  ;
- $a = 2$  ;  $b = -1$  et  $n = 3$  ;
- $a = -4$  ;  $b = 6$  et  $n = 10$  ;
- $a = -2$  ;  $b = -24$  et  $n = 11$ .

#### Retenir

Soit  $n$  un entier naturel non nul ;  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs.

On dit que  $a$  est congru à  $b$  modulo  $n$ , lorsque  $a - b$  est un multiple de  $n$ . On note  $a \equiv b[n]$  et on lit " $a$  congru à  $b$  modulo  $n$ ". Cette relation est appelée relation de congruence.

#### Remarque

Soient  $n$  un entier naturel non nul,  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs.

- $a \equiv a[n]$ .
- Si  $a \equiv b[n]$  alors  $b \equiv a[n]$ .
- $a \equiv 0[n]$  équivaut à  $n$  divise  $a$ .
- Soit  $d$  un entier naturel, diviseur de  $n$ .

Si  $a \equiv b[n]$  alors  $a \equiv b[d]$ .

En effet

- $a - a = 0 = n \times 0$ , donc  $a \equiv a[n]$ .
- $a \equiv b[n]$  équivaut à il existe un entier relatif  $k$  tel que  $a - b = nk$ .

$b - a = n \times (-k)$  avec  $(-k)$  entier relatif. Donc  $b \equiv a[n]$ .

- $a \equiv 0[n]$  équivaut à il existe  $q \in \mathbb{Z}$  /  $a = qn$ , donc  $n$  divise  $a$ .
- $a \equiv b[n]$  équivaut à il existe un entier relatif  $k$  tel que  $a - b = nk$ .

$d$  étant un diviseur de  $n$ , il existe un entier relatif  $k'$  tel que  $n = k'd$ .

$a - b = nk = (k'd)n = d(k'n)$  et  $k'n$  est un entier relatif comme produit de deux entiers relatifs ;  $a - b$  est donc un multiple de  $d$  et par suite  $a \equiv b[d]$ .

- Soient  $a, b$  et  $c$  trois entiers relatifs.

Si  $a \equiv b[n]$  et  $b \equiv c[n]$ , alors

il existe un entier relatif  $k$  tel que  $a - b = nk$ .



il existe un entier relatif  $k'$  tel que  $b - c = nk'$ .

$(a - b) + (b - c) = nk - nk' = n(k - k')$  ; soit  $a - c = n(k - k')$  avec  $k - k'$  élément de  $\mathbb{Z}$ .

Donc  $a - c$  est un multiple de  $n$  et par suite  $a \equiv c[n]$ .

## S'exercer

2.d Montrer que  $-8 \equiv (-5)[3]$ ;  $-8 \equiv (+1)[3]$ ;  $-8 \equiv 4[3]$ ;  $-8 \equiv 7[3]$ .

## 2.2.2 Compatibilité de la relation de congruence avec l'addition et la multiplication dans $\mathbb{Z}$

## Prendre un bon départ

### Activité 1

Soient  $a, a', b, b'$  quatre entiers relatifs,  $n$  un entier naturel non nul tels que  $a \equiv b[n]$  et  $a' \equiv b'[n]$ . Montrer que :

- $a + a' \equiv (b + b')[n]$  ;
- $a \times a' \equiv (b \times b')[n]$  ;
- $a^p \equiv b^p [n]$ , pour tout entier naturel  $p$ .

### Activité 2

Soit  $p$  un entier naturel supérieur ou égal à 2 ;  $a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, b_2, \dots, b_p$  sont  $2p$  entiers relatifs tels que  $a_1 \equiv b_1 [n], a_2 \equiv b_2 [n], \dots, a_p \equiv b_p [n]$ .

- Montrer que  $a_1 + a_2 + \dots + a_p \equiv b_1 + b_2 + \dots + b_p [n]$ .
- Montrer que  $a_1 \times a_2 \times \dots \times a_p \equiv b_1 \times b_2 \times \dots \times b_p [n]$ .

## Retenir

Soient  $a, a', b, b'$  quatre entiers relatifs,  $n$  un entier naturel non nul.

- Si  $a \equiv b[n]$  et  $a' \equiv b'[n]$ , alors

$a + a' \equiv (b + b')[n]$  ; (on dit que la relation de congruence est compatible avec l'addition dans  $\mathbb{Z}$ )

$a \times a' \equiv b \times b'[n]$  ; (on dit que la relation de congruence est compatible avec la multiplication dans  $\mathbb{Z}$ )



Si  $a_1 \equiv b_1 [n], a_2 \equiv b_2 [n], \dots, a_p \equiv b_p [n]$ , alors

$$a_1 + a_2 + \dots + a_p \equiv b_1 + b_2 + \dots + b_p [n].$$

$$a_1 \times a_2 \times \dots \times a_p \equiv b_1 \times b_2 \times \dots \times b_p [n].$$

### Remarque

Si  $a$  et  $b$  sont deux entiers tel que  $b$  est non nul ;  $(q; r)$  l'unique couple d'entiers tel que  $a = bq + r$  avec  $0 \leq r < b$ , alors  $a \equiv r[b]$  et  $a \equiv b [n]$  équivaut à  $a \equiv r[n]$  pour tout entier naturel non nul.

### Exemple

1) Déterminons le reste dans la division euclidienne de  $2^{32}$  par 5

$$2 \equiv 2[5]$$

$$2^2 \equiv 4[5]$$

$$2^3 \equiv 2 \times 4[5], \text{ soit } 2^3 \equiv 3[5] \text{ car le reste de la division euclidienne de 8 par 5 est 3.}$$

Par suite  $2^4 \equiv 3 \times 2[5]$ , or le reste de la division euclidienne de 6 par 5 est 1 ;

$$\text{d'où } 2^4 \equiv 1[5].$$

$$(2^4)^8 \equiv 1^8[5] ; \text{ donc } 2^{32} \equiv 1[5] \text{ et } 0 \leq 1 < 5;$$

donc le reste dans la division euclidienne par 5 de  $2^{32}$  est 1.

2) Déterminer suivant les valeurs de  $n$  le reste dans la division euclidienne de  $5^n$  par 3.

$$5^0 \equiv 1[3]; 5^1 \equiv 2[3]; 5^2 \equiv 1[3] ; \text{ pour tout entier naturel } p, 5^{2p} \equiv 1[3].$$

$$5^{2p+1} \equiv 5[3] ; \text{ par suite } 5^{2p+1} \equiv 2[3] \text{ car } 5^1 \equiv 2[3]. \text{ Donc}$$

Si  $n$  est pair, alors  $5^n \equiv 1[3]$ . Si  $n$  est impair, alors  $5^n \equiv 2[3]$ . Par suite

le reste de la division euclidienne de  $5^n$  par 3 est 1, si  $n$  est pair et 2 si  $n$  est impair.

3) Démontrer que pour tout entier relatif  $n$ ,  $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 \equiv 0[9]$ .

Soit  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \equiv k[9]$  avec  $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ .

$$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 \equiv (k-1)^3 + k^3 + (k+1)^3[9]$$

$$\text{Si } k = 0 \text{ alors } (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 \equiv -1 + 1 \equiv 0[9]$$

$$\text{Si } k = 1 \text{ alors } (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 \equiv 0 + 1 + 8 \equiv 0[9]$$

$$\text{Si } k = 2 \text{ alors } (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 \equiv 1 + 8 + 27 \equiv 0[9]$$

$$\text{Si } k = 3, \text{ alors } (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 \equiv 8 + 27 + 16 \equiv 99[9] \equiv 0[9]$$

$$\text{Si } k = 4, \text{ alors } (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 \equiv 27 + 64 + 125 \equiv 0 + 1 + 8 \equiv 0[9]$$



Si  $k = 5$  alors  $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 \equiv 64 + 125 + 216 \equiv 1 + 8 + 0 \equiv 0[9]$

Si  $k = 6$  alors  $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 \equiv 125 + 216 + 343 \equiv 8 + 0 + 1 \equiv 0[9]$

Si  $k = 7$  alors  $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 \equiv 216 + 343 + 512 \equiv 0 + 1 + 8 \equiv 0[9]$

Si  $k = 8$  alors  $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 \equiv 343 + 512 + 0 \equiv 1 + 8 + 0 \equiv 0[9]$ .

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 \equiv 0[9]$ .

### Exercice résolu 1

- 1) a) Déterminer le reste de la division euclidienne de  $5^4$  par 13.
- b) Dédire que pour tous entiers naturels  $k$  et  $r$ , on a  $5^{4k+r} \equiv 5^r [13]$ .
- c) Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de  $5^n$  par 13?

2) Soit  $A_n$  l'entier défini par :  $A_n = 5^{3n} + 5^{2n} + 5^n + 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Montrer que  $A_n$  est divisible par 13 si, et seulement si,  $n$  n'est pas un multiple de 4.

**Solution :**

1) a)  $5 \equiv 5[13]$ ;  $5^2 = 25 \equiv -1[13]$ ;  $(5^2)^2 \equiv (-1)^2 [13]$ ;  $5^4 \equiv 1[13]$ .

Le reste de la division euclidienne de  $5^4$  par 13 est 1.

b)  $5^{4k} \equiv 1[13]$  d'où  $5^{4k+r} \equiv 5^r [13]$ .

c) Tout entier naturel  $n$  peut s'écrire sous la forme  $n = 4k + r$  avec  $r \in \{0; 1; 2; 3\}$ .

Pour  $n = 4k$ ,  $5^n \equiv 1[13]$ . Le reste de la division euclidienne de  $5^n$  par 13 est 1.

Pour  $n = 4k + 1$ ,  $5^{4k+1} \equiv 5[13]$ . Le reste de la division euclidienne de  $5^n$  par 13 est 5.

Pour  $n = 4k + 2$ ,  $5^{4k+2} \equiv 12[13]$ . Le reste de la division euclidienne de  $5^n$  par 13 est 12.

Pour  $n = 4k + 3$ ,  $5^{4k+3} \equiv -5[13]$  or  $-5 \equiv 8[13]$ ; Le reste de la division euclidienne de  $5^n$  par 13 est 8.

2)  $A_n = 5^{3n} + 5^{2n} + 5^n + 1$

**1er cas :**  $n = 4k$ ,  $A_n = 5^{3 \times 4k} + 5^{2 \times 4k} + 5^{4k} + 1 \equiv 1 + 1 + 1 + 1[13]$ ;  $A_n \equiv 4[13]$ .

**2ème cas :**  $n = 4k + 1$ ,  $A_n = 5^{3(4k+1)} + 5^{2(4k+1)} + 5^{4k+1} + 1$

$A_n = 5^{4 \times 3k+3} + 5^{4 \times 2k+2} + 5^{4k+1} + 1 = 5^3 + 5^2 + 5 + 1 \equiv -5 - 1 + 5 + 1[13]$

$A_n \equiv 0[13]$ .

**3ème cas :**  $n = 4k + 2$ ,

$A_n = 5^{3(4k+2)} + 5^{2(4k+2)} + 5^{4k+2} + 1 = 5^{4(3k+1)+2} + 5^{4(2k+1)} + 5^{4k+2} + 1 \equiv 5^2 + 1 + 5^2 + 1[13]$

$A_n \equiv -1 + 1 - 1 + 1[13]$  soit  $A_n \equiv 0[13]$ .

**4ème cas :**  $n = 4k + 3$ ,  $A_n = 5^{3(4k+3)} + 5^{2(4k+3)} + 5^{4k+3} + 1$ .

$A_n = 5^{4(3k+2)+1} + 5^{4(2k+1)+2} + 5^{4k+3} + 1 \equiv 5 - 1 - 5 + 1[13]$



S'exer

2.e Pour tout

2.f En utilis

2.g Démontre

2.h Détermi

### 2.2.3 C



Pren

Soit  $N = a_1 a_2 \dots a_n$

1) a) Ecrire  $N$

b) Montrer qu

c) En déduire

2) Montrer qu

3) Montrer qu



Ret

la somme de

la somme de

le chiffre des

la somme de

par 11.

Remarque

- Pour dé

- Pour dé

entier b



## S'exercer

- 2e Pour tout entier naturel  $n$ , déterminer le reste dans la division euclidienne de  $7^n$  par 6.  
 2f En utilisant les congruences, démontrer que  $3^{2^n} - 2^n$  est divisible par 7.  
 2g Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $n^7 - n$  est un multiple de 7.  
 2h Déterminer les entiers relatifs  $n$  tels que  $n^2 + 4n + 18 \equiv 0[7]$ .

## 2.2.3 CRITÈRES DE DIVISIBILITÉ PAR 2 ; 3 ; 5 ; 9 ; 11.

### Prendre un bon départ

Soit  $N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_0}^{10}$  un entier écrit en numération décimale.

- Ecrire  $N$  suivant les puissances de 10.
- Montrer que  $10^p \equiv 1[3]$  et  $10^p \equiv 1[9]$ , pour tout entier  $p$ .
- En déduire que  $N \equiv (a_n + a_{n-1} + \dots + a_0)[3]$  et  $N \equiv (a_n + a_{n-1} + \dots + a_0)[9]$ .
- Montrer que  $N \equiv a_0[2]$ ,  $N \equiv a_0[5]$  et  $N \equiv a_0[10]$ .
- Montrer que  $10 \equiv -1[11]$  et que  $(10)^n \equiv (-1)^n[11]$ .

### Retenir

- Un entier naturel  $N$  est divisible par 3 ou divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres dans le système décimal est divisible par 3 ou divisible par 9.
- Un entier naturel  $N$  est divisible par 2 ou divisible par 5 si et seulement si son chiffre des unités est divisible par 2 ou divisible par 5.
- Un entier naturel  $N$  est divisible par 11 si et seulement si la différence entre la somme de ses chiffres de rang pair et la somme de ses chiffres de rang impair est divisible par 11.

### Remarque

- Pour démontrer que  $a$  est un multiple de  $n$  dans  $\mathbb{Z}$ , il suffit de montrer que  $a \equiv 0[n]$ .
- Pour déterminer le reste dans la division euclidienne d'un entier naturel  $P(n)$  par un entier  $b$  ( $b > 1$ ) on peut distinguer les cas  $n \equiv 0[b]$ ,  $n \equiv 1[b]$ , ...,  $n \equiv (b-1)[b]$ .

### Exemple

#### Énoncé 1 :

- Montrer que  $C = \overline{xy}^{10} + \overline{yx}^{10}$  est divisible par 11.



2. Soient  $x, y, z$  trois entiers naturels, non nuls.  $B = \overline{xyz}^{10} + \overline{yzx}^{10} + \overline{zxy}^{10}$   
(ces nombres sont écrits en base 10).

Montrer que  $B$  est divisible par 111.

**Solution :**

$$1) C = \overline{xy}^{10} + \overline{yx}^{10} = 10x + y + 10y + x = 11x + 11y = 11(x + y).$$

$x$  et  $y$  étant des entiers naturels,  $x + y$  est un entier naturel.  $C$  est donc divisible par 11.

$$2) A = \overline{xyz}^{10} + \overline{yzx}^{10} + \overline{zxy}^{10} = (100x + 10y + z) + (100y + 10z + x) + (100z + 10x + y) \\ 111x + 111y + 111z = 111(x + y + z), \text{ or } x + y + z \text{ est un entier naturel. } A \text{ est donc divisible par 111.}$$

**Enoncé 2 :**

Soit  $A = 5x3y$  dans le système décimal. Déterminer les nombres  $A$  qui sont pairs et divisibles par 11.

$A$  est pair si, et seulement si  $y \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$ .

$A$  est divisible par 11 si, et seulement si  $x + y - (5 + 3)$  est divisible par 11. Soit  $x + y - 8$  divisible par 11, soit  $x + y \equiv 8[11]$ .

Or  $x$  et  $y$  appartiennent à  $\{0; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ .

Pour  $y = 0$ ,  $x \equiv 8[11]$  ;  $x = 8$  et  $A = 5830$ .

Pour  $y = 2$ ,  $x \equiv 6[11]$  ;  $x = 6$  et  $A = 5236$ .

Pour  $y = 4$ ,  $x \equiv 4[11]$  ;  $x = 4$  et  $A = 5434$ .

Pour  $y = 6$ ,  $x = 2$  et  $A = 5632$ .

Pour  $y = 8$ ,  $x = 0$  et  $A = 5038$ .

Les nombres cherchés sont donc 5038 ; 5236 ; 5830 ; 5434 ; 5632.

### Exercice résolu 2

1) Déterminer le chiffre des unités du nombre  $N = (3548)^9 \times (2537)^{37}$ .

$$3548 \equiv 8[10] ; (3548)^9 \equiv 8^9[10] ;$$

$$2537 \equiv 7[10] \text{ donc } (2537)^{37} \equiv 7^{37}[10] ;$$

$$(3548)^9 \times (2537)^{37} \equiv 8^9 \times 7^{37}[10] ;$$

$$7^1 \equiv 7[10] ; 7^2 \equiv 9[10] , 7^3 \equiv 3[10] ; 7^4 \equiv 1[10] ;$$

$$3^7 = 4 \times 9 + 1, \text{ donc } 7^{36} \equiv 1[10] ; \text{ d'où } 7^{37} \equiv 7[10]$$

$$8^1 \equiv 8[10] ; 8^2 \equiv 4[10] ; 8^3 \equiv 2[10] ; (8^3)^3 \equiv 8^9 \equiv 8[10]$$

$$8^9 \times 7^{37} \equiv 8 \times 7[10] \text{ et } 8^9 \times 7^{37} \equiv 6[10], \text{ d'où } N \equiv 6[10].$$



avec  $a > 3$  et  $b > 3$  et  $3a^2 = 3b + 3$ .

$3b = 3a^2 - 3$  ; or la plus petite valeur possible de  $a$  est 4 ; par conséquent la plus petite valeur de  $3b$  est  $3 \times 4^2 - 3 = 3 \times 16 - 3 = 45$ . La plus petite valeur de  $b$  donc 15.

Pour  $b = 15$ ,  $a^2 = 16$  et  $a = 4$  ;  $n = \overline{300}^4 = 3 \times 4^2 = 16 \times 3 = 48$ .

Le plus petit entier naturel cherché est  $n = 48$ .

3) Établir le caractère de divisibilité par 25 dans le système de numération décimale.

Soit  $x$  un entier naturel tel que  $x = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_0}$  en base 10.

$x = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_1 10^1 + a_0 \times 10^0$  ;  $10^0 \equiv 1[25]$  ;  $10^1 \equiv 10[25]$  ;  $10^2 \equiv 0[25]$ .

Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2,  $10^n \equiv 0[10]$  ; donc  $x \equiv a_0 + 10a_1 [25]$ .

Un nombre qui s'écrit  $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_0}$  en base 10 est divisible par 25 si le nombre  $\overline{a_1 a_0}$  est divisible par 25.

4) Soit  $x_n = 2^{n+1} \times 5^n + 1$ . Combien de chiffres a  $x_n$  en base dix ? déduire que  $x_n$  est divisible par 3.

$x_n = 2^n \times 5^n + 1 = 2 \times 10^n + 1$  ;  $x_n = \overline{200\dots 01}$  en base 10.

$x_n$  a  $n+1$  chiffres en base dix et la somme de ses chiffres est 3 donc  $x_n$  est divisible par 3.

5) Un entier naturel  $N$  s'écrit  $\overline{1x1yxy}^{dix}$ . Déterminer  $x$  et  $y$  pour qu'il soit divisible par 9 et par 5.

$N$  est divisible par 5 si et seulement si ( $y = 0$  ou  $y = 5$ ).

$N$  est divisible par 9 si et seulement si  $1 + x + 1 + y + x + y$  est divisible par 9 ;

soit  $2x + 2y + 2 \equiv 0[9]$  ;  $2(x + y) \equiv -2[9]$  ; soit  $2(x + y) \equiv 7[9]$ .

$N$  est divisible par 5 et par 9 si et seulement si  $y = 0$  ou  $y = 5$  et  $2(x + y) \equiv 7[9]$ .

Pour  $y = 0$ , on a  $2x \equiv 7[9]$ , soit  $x = 8$  car  $x \in \{0; 1; 2; \dots; 9\}$ .

Pour  $y = 5$ , on a  $2x + 10 \equiv 7[9]$  ; soit  $2x \equiv -3[9]$  ; soit  $2x \equiv 6[9]$ .

D'où  $x = 3$ . Les couples  $(x, y)$  cherchés sont  $(8, 0)$  et  $(3, 5)$ .

Les nombres entiers qui sont divisibles par 5 et par 9 sont 181080 et 131535.

### Exercice résolu 3

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $10^{3n} - 1$  est multiple de 37.

- Pour  $n = 0$ ,  $10^{3n} - 1 = 10^{3(0)} - 1 = 1 - 1 = 0 = 0 \times 37$

donc la proposition est vraie pour  $n = 0$ .

- Supposons que la proposition est vraie pour un entier naturel  $k$  quelconque et montrons qu'elle est vraie pour  $k + 1$ .

$10^{3(k+1)} - 1 = 10^{3k+3} - 1$  or par hypothèse de récurrence  $10^{3k} \equiv 1[37]$

donc  $10^{3k} \times 10^3 \equiv 10^3 [37]$  or  $1000 = 37 \times 27 + 1$

on a :  $1000 \equiv 1[37]$  donc  $10^{3k+3} \equiv 1[37]$  donc  $10^{3k+3} - 1 \equiv 0[37]$  d'où la proposition est vraie pour tout entier naturel  $n$  d'après le principe de la démonstration par récurrence.





## S'exercer

- i Établir le caractère de divisibilité par 99 dans le système de numération décimale.
- j Calculer  $x$  et  $y$  pour que le nombre qui s'écrit  $\overline{2xyy}^{\text{base dix}}$  soit divisible par 5 et par 11.
- k Déterminer le nombre entier naturel  $n$  pour que le nombre  $(275423)^n + (372121)^n$  soit divisible par 3.
- l Résoudre dans  $\mathbb{N}$  l'équation  $x^3(x^2 + (x+1)^2) = 18360$ .  
Déterminer alors l'entier naturel  $b$  tel que  $\overline{442003}^b = \overline{36723}^{\text{base dix}}$ .
- m Un entier naturel s'écrit  $\overline{xyz0}^{\text{cinq}}$  et  $\overline{xyz}^{\text{douze}}$ .  
  - n) Démontrer que  $19x - 13y = 4z$  ;
  - o) En déduire que  $3(x+y) \equiv 0[4]$  ;
  - p) Déterminer les nombres entiers naturels  $x, y$  et  $z$ .
- n Pour tout entier naturel  $n$ , déterminer le reste dans la division euclidienne de  $11^n$  par 4.
- p En utilisant les propriétés de la congruence, démontrer que  $3^{n+3} + 16^{2n+1}$  est divisible par 11.
- q Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $n^5 - n$  est un multiple de 5.
- r Déterminer les entiers relatifs  $n$  tels que  $n^2 + 3n + 25 \equiv 0[7]$ .

### Exercice résolu

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $10^n + 1$  est divisible par 11.

• Pour  $n = 0$ ,  $10^0 + 1 = 1 + 1 = 2$  n'est pas divisible par 11.

• Soit  $n \geq 1$ . On suppose que  $10^{n-1} + 1$  est divisible par 11. On écrit  $10^{n-1} + 1 = 11k$  pour un certain  $k \in \mathbb{Z}$ .

On a  $10^n + 1 = 10(10^{n-1}) + 1 = 10(11k - 1) + 1 = 110k - 10 + 1 = 110k - 9$ .

Or  $110k$  est divisible par 11. Il suffit donc de montrer que  $-9$  est divisible par 11, ce qui est faux.

Il y a donc une erreur dans l'énoncé ou dans la solution proposée.



# S'ENTRAÎNER

## NUMÉRATION ET DIVISIBILITÉ

1. Soit  $A$  l'ensemble des entiers naturels qui admettent  $\overline{xyxyxy}$  en base 10, avec  $x$  non nul.

a) Donner le nombre d'éléments de  $A$ .

b) Montrer que tout élément de  $A$  est multiple de 11101.

2. Déterminer les entiers naturels non nuls  $n$  dont la division euclidienne par 125 donne un reste égal au cube du quotient.

3. Un nombre s'écrit  $\overline{x43y}$  en base sept. Déterminer  $x$  et  $y$  pour que ce nombre soit divisible par 6.

4. Un nombre s'écrit  $\overline{x32y}$  en base cinq. Déterminer  $x$  et  $y$  pour que ce nombre soit divisible par 3 et par 4.

5. Un nombre s'écrit  $\overline{123456234}$  en base huit. Déterminer le reste de la division euclidienne de ce nombre par 7.

6. Déterminer le chiffre des unités de l'entier naturel  $(3548)^9 \times (2537)^{31}$ .

7. Pour tout entier naturel  $n$ , on considère l'entier naturel,  $A_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$ .

a) Déterminer le reste de la division euclidienne de  $2^n$  par 7.

b) En déduire l'ensemble des entiers naturels  $n$  tels que  $A_n$  soit divisible par 7.

8. Soit les nombres suivants dont l'écriture est donnée en base deux :  $A = \overline{1110}$  ;

$B = \overline{1010100}$  et  $C = \overline{1001001000}$ .

Les nombres sont-ils divisibles par 7 ?

9. Soit  $n$  un entier naturel quelconque.

a) Quel est le reste de la division euclidienne de  $10^{10n}$  par 37 ?

NB : On pourra remarquer que  $999 = 27 \times 37$ .

2. En déduire le reste dans la division euclidienne de  $10^{10} + 10^{20} + 10^{30}$  par 37.

3.  $b$  est un entier naturel supérieur à 3. On donne  $A = \overline{211}^b$  ;  $B = \overline{312}^b$  ;  $C = \overline{133032}^b$

a) Sachant que  $C = A \times B$ , démontrer que l'on a :  $b^3 - 3b^2 - 2b - 8 = 0$

b) En déduire que  $b$  divise 8 et en déduire  $b$ .

6

a) Trouver les entiers naturels dont le cube divise 18360.

b) Résoudre dans  $\mathbb{N}$  l'équation suivante :

$$b^3 [b^2 + (b+1)^2] = 18360$$

c) Déterminer l'entier naturel  $x$  tel que  $C = \overline{36723}^{10} = \overline{442003}^x$

7

$b$  est un entier naturel supérieur ou égal à  $b$ .

1. a) Établir que pour tout entier naturel  $n$

non nul, on a :  $\sum_{k=0}^{n-1} (b-1)b^k = b^n - 1$

b) En déduire que si  $N$  est un entier naturel supérieur ou égal à 2 dont l'écriture en base  $b$  comporte  $n$  chiffres, alors  $b^{n-1} \leq N < b^n$

2. le nombre 8842 (en base 10) s'écrit :

$\overline{21212}$  en base  $b$ .

a. Établir que  $8840 \equiv 0[b]$

b. Donner un encadrement de 8842 par des puissances de  $b$  et déterminer  $b$ .

8

1. Établir le critère de divisibilité par 99.

2. Donner le reste dans la division euclidienne de  $(10)^{100}$  par 99.

3. Un nombre s'écrit  $\overline{xxyy}^{10}$ .



Calculer  $x$  et  $y$  pour que ce nombre soit divisible par 99.

**9**

1. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel  $n$ , le reste dans la division euclidienne de  $4^n$  puis de  $5^n$  par 7.

2. Pour quelles valeurs de  $n$

$100+102^n+103^n$  est divisible par 7 ?

3. Pour quelles valeurs de  $n$

$n \times 4^n + 2n + 1$  est divisible par 7 ?

4. Démontrer en utilisant les résultats sur les congruences que :

$\forall n \in \mathbb{N}, 3^{2n+1} + 2 \times 4^{2n+1}$  est un multiple de 11.

**10**

Démontrer en utilisant les congruences, les propositions a, b, c et d.

a.  $\forall n \in \mathbb{N}, 17^{4n+1} + 3 \times 9^{2n+1}$  est un multiple de 11,

b.  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 3^{2n} - 2^n$  est un multiple de 7,

c.  $\forall n \in \mathbb{N}, 3^{2n+1} + 2^{n+2}$  est un multiple de 7,

d.  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$  est un multiple de 17,

e. Retrouver ces résultats en utilisant un raisonnement par récurrence.

**11**

1. Dans le système de numération décimal, on considère les nombres suivants :  $A = abc$  ;  $B = bca$  et  $C = cba$ . On admet que  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.

a. Démontrer que  $4(b-a) = 3(c-b)$ .

b. En déduire les valeurs possibles de  $b-a$  et de  $c-b$ .

c. Déterminer tous les triplets  $(a, b, c)$  et écrire tous les triplets  $(A; B; C)$ .

**12**

1. Déterminer la liste des diviseurs positifs de 81.

**13**

a. Démontrer par récurrence que

$$a^n - 1 = (a - 1)(1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1})$$

b. Écrire  $3^{16} - 1$  en base 9.

**14**

Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $4^n + 6^n - 1$  est divisible par 9.

**15**

1) Étudier les restes des divisions euclidiennes des puissances de 5, par 6.

2) Pour quelles valeurs de  $n$  (entier naturel), le nombre

$A = (153791)^n + 2753n + 1$  est divisible par 6 ?

**16**

Déterminer l'écriture en base cinq de :

a) 126 ; b) 221 ; c) 1000.

$a$  est un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Déterminer l'écriture en base  $a$  des nombres

1)  $a^2 + 2$  ; 2)  $(a+1)^2$  ; 3)  $(a-1)^2$ .

**17**

Un nombre  $N$  s'écrit  $\overline{xx}$  en base 11. ( les chiffres en base 11 sont notés 0, 1, 2, ..., 9,  $\alpha$  )  
Déterminer selon la valeur de  $x$  l'écriture du nombre  $N$  en base 10.

**18**

Calculer dans le système binaire  $\overline{110} \times \overline{11}$ ,  $(\overline{101})^2$  ;  $\overline{1001} \times \overline{101}$ .

**19**

Calculer, dans le système de numération binaire, la somme

$S = \overline{1101} + \overline{1011}$ , et la différence  $\overline{1101} - \overline{1011}$

**20**

Existe-t-il une base  $b$  de numération où le nombre 2600 s'écrit 40400 en base  $b$  ?



1. Vérifier que 999 est divisible par 27.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $10^n \equiv 1 [27]$ .
3.  $A = 10^{100} + 100^{10}$ . Quel est le reste dans la division euclidienne de  $A$  par 27 ?
4. Montrer que  $3^5 \equiv 1 [11]$ .
5. Démontrer que  $3^{5k+r} \equiv 3^r [11]$ .
6. Soit  $n$  un entier naturel. Quels sont les restes de la division de  $3^n$  par 11 ?
7. Déterminer les valeurs de  $n$  pour lesquels  $10^n - 7$  soit divisible par 11.

Soit  $n$  un entier naturel et  $P$  un nombre premier supérieur ou égal à 3.  $a$  et  $b$  sont les nombres définis par  $a = 2^n$  et  $b = a \times P$ .  $S(a)$  est la somme des diviseurs de  $a$  et  $S(b)$  la somme des diviseurs de  $b$ .

1. Déterminer les ensembles  $D(a)$  et  $D(b)$  des diviseurs de  $a$  et  $b$ .
2. Démontrer que  $S(a) - 1 = 1 + 2S(a)$  et calculer  $S(a)$ .
3. Exprimer  $S(b)$  en fonction de  $S(a)$  et calculer  $S(b)$ .

$p$  est un nombre premier.

1. Montrer que pour tout entier  $k$  tel que  $0 \leq k \leq p-1$ ,  $C_p^k$  est divisible par  $p$ .
2. Soit  $x, y$  deux entiers naturels non nuls, montrer que  $(x+y)^p \equiv x^p + y^p [p]$ .
3. Montrer par récurrence que pour tout entier  $n$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  non nuls, on a  $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^p \equiv x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p [p]$ .

On considère dans l'ensemble  $\mathbb{Q}$  des nombres rationnels l'équation

$$(E): x^2 - 48x - 2^{n-2} = 0 \text{ où } n \text{ est un nombre}$$

entier naturel et  $x$  un nombre rationnel inconnu.

1. Démontrer que  $(E_n)$  admet deux solutions rationnelles si,  $2^n + 48^2$  est un carré parfait.
2. Soit  $k$  l'entier naturel tel que :  $2^n + 48^2 = k^2$ .
  - a. Démontrer l'existence de deux nombres entiers naturels  $p$  et  $q$  tels que :  $k - 48 = 2^p$  ;  $k + 48 = 2^q$  ;  $p + q = n$  et  $96 = 2^p (2^{p-q} - 1)$ .
  - c. Décomposer 96 en produit des facteurs premiers et en déduire les valeurs de  $p, q$  et  $n$ .
3. Résoudre  $(E_n)$  pour la valeur de  $n$  ainsi trouvée.

## 26

On se propose de déterminer les couples  $(n; m)$  d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation :  $7^n - 3 \times 2^m = 1 (E)$ .

On suppose  $m \geq 5$

- a. Montrer que si  $(n; m)$  est solution de  $(E)$  alors  $7^n \equiv 1 [32]$ .
- b. En étudiant les restes dans la division par 32 des puissances de 7, montrer que si  $(n; m)$  est solution de  $(E)$ , alors,  $n$  est divisible par 4.
- c. En déduire que  $7^n \equiv 1 [5]$ .
- d. Résoudre  $(E)$  pour  $m \geq 5$ .
- e. Déterminer tous les couples solutions de  $(E)$ .

## 27

On considère dans  $\mathbb{N}^3$  le système

$$(S): \begin{cases} p^2 + q^2 = r^2 \\ q + p + r = 24. \\ r < p + q \end{cases}$$

1. Démontrer qu'un triplet  $(p; q; r)$  est solution de  $(S)$  si et seulement si  $r < 12$  et  $(p; q)$  sont les solutions de l'équation :  $n^2 - (24 - r)n + 24(12 - r) = 0$ , où  $n$  est l'inconnue.



2. Résoudre le système (S).  
 3. ABC est un triangle rectangle en A tel que les côtés AB, BC et AC soient des multiples de 12. On plante sur le périmètre triangulaire de ABC 24 arbustes de manière qu'à chaque sommet du triangle un arbre soit planté et que les arbres soient plantés et également espacés de 12m. Calculer AB, BC et AC.

**28**

P est un nombre premier supérieur ou égal à 7.

On veut démontrer que l'entier naturel

$$n = (P^2 + 1)(P - 1)(P + 1) \text{ est divisible par } 240$$

1. Montrer que  $P \equiv -1[3]$  ou  $P \equiv [3]$ .
2. En remarquant que P est impair, prouver qu'il existe un entier naturel k tel que
  - (i).  $P^2 - 1 = 4k(k + 1)$  ;
  - (ii). En déduire que n est divisible par 16.
3. En considérant tous les restes de la division euclidienne de P par 5, démontrer que 5 divise n.
4. En déduire que n divise 240
5. Existe-t-il quinze nombres premiers  $P_1, P_2, \dots, P_{15}$  supérieurs ou égaux à 7 tels que l'entier  $A = P_1^4 + P_2^4 + \dots + P_{15}^4$  soit un nombre premier ?

**29**

n est un entier naturel non nul

1. Donner la liste des diviseurs de  $7^n$ .
2. Calculer la somme  $S_n$  des diviseurs de  $7^n$  et montrer que  $6S_n + 1 = 7^{n+1}$
3. Déterminer suivant les valeurs de n le reste dans la division euclidienne de  $7^n$  par 10
4. Déterminer suivant les valeurs de n le chiffre des unités de  $S_n$

**30**

2. En déduire que :

$$\sum_{k=1}^n k(n-k) = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}$$

3. Calculer :

$$\sum_{k=100}^{2013} k(n-k)$$

**31**

- 1) Déterminer les diviseurs positifs de 28.
- 2) On appelle diviseur strict d'un entier naturel n tout diviseur positif de n différent de n.
  - a. Déterminer les diviseurs stricts de 28.
  - b. Montrer que 28 est égal à la somme de ses diviseurs stricts.
- 3) On appelle nombre parfait tout entier naturel égal à la somme de ses diviseurs stricts.

Montrer que 6 est le plus petit nombre parfait

**32**

1. Montrer que  $C = \overline{xy}^{10} + \overline{yx}^{10}$  est divisible par 11
2. Soient x, y, z trois entiers naturels, non nuls.

$$B = \overline{xyz}^{10} + \overline{yzx}^{10} + \overline{zxy}^{10}$$

(ces nombres sont écrits en base 10).

Montrer que B est divisible par 111.

**33**

Soit un entier naturel supérieur ou égal à 2.  
 $A = n^4 - 1$ .

- 1) Montrer que  $n - 1$ ,  $n + 1$ ,  $n^2 + 1$  sont des diviseurs de A.
- 2) Déterminer d'autres diviseurs de A que les précédents.

**34**

$$k \in \mathbb{Z}$$

- 1) Montrer que pour tout entier a et b,  $a/b$  équivaut à  $a/b - ka$
- 2) Trouver  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $n - 5/n + 7$ .



Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels.

Montrer que  $N = (a - b)ab(a + b)$  est un multiple de trois.

1) Déterminer les diviseurs de 25.

2) Déterminer les entiers naturels  $a$  et  $b$  tels que  $a^2 - b^2 = 25$ .

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels.

Montrer que, si 3 divise  $a^3 + b^3$ , alors 3 divise  $(a + b)^3$ .

1) Déterminer les diviseurs positifs de 98.

2) Déterminer les entiers naturels  $a$  et  $b$  tels que  $a^3 - b^3 = 98$ .

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1) Développer par la formule du binôme de Newton  $(n + 1)^n$ .

2) Soit  $A_n = (n + 1)^n - 1$ .

3) Montrer que  $n^2$  divise  $A_n$  et déterminer le quotient de la division euclidienne de  $A_n$  par  $n^2$ .

1) Montrer que, quels que soient les entiers naturels  $a$ ,  $b$ ,  $n$ ,  $a - b$  divise  $a^n - b^n$ .

2) En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ , 3 divise  $2^n - 1$ .

3) Montrer alors que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $A_n = \frac{2^{2^{n+1}} + 2^{2^n} + 1}{3}$  est un entier naturel.

41

1) Vérifier que 7 divise les nombres

$$2^6 - 1; 3^6 - 1; 4^6 - 1; 5^6 - 1.$$

2) Soit  $n$  un entier naturel, et

$$A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n.$$

Montrer que  $A_{n+6} - A_n$  est divisible par 7.

3) Soit  $n$ , un entier naturel,  $q$  et  $r$  son quotient et son reste dans la division euclidienne par 6.

4) Montrer que  $A_n$  et  $A_r$  ont le même reste dans la division euclidienne par 7.

5) Déterminer les valeurs de  $n$  pour lesquelles  $A_n$  est divisible par 7.

6) Soit  $B_n = 100^n + 101^n + 102^n + 103^n$ .

a. Montrer que  $A_n \equiv B_n [7]$ .

b. Déduire les valeurs de  $n$  pour lesquelles  $B_n$  est divisible par 7.

42

Soit  $a$  un entier naturel, non multiple de 3.

1) Montrer que  $a^3 \equiv -1[9]$  ou  $a^3 \equiv 1[9]$ .

2) Soient  $a, b$  et  $c$  trois entiers relatifs.

Déduire de 1) que si  $a^3 + b^3 + c^3 \equiv 0[9]$ , alors l'un des entiers  $a, b$  et  $c$  est divisible par 3.

3) Soit  $k$  un entier naturel. Justifier les congruences :

$$3^{2k} + 1 \equiv 2[8] \text{ et } 3^{2k+1} + 1 \equiv 4[8].$$

4) On considère l'équation (E), à inconnues les  $n$  et  $m$  :  $2^n - 3^m = 1$ .

a) Montrer qu'il n'y a pas de solution telle que  $m$  soit pair.

b) Déduire de la question 3) que la seule solution de (E) est le couple (2,1).



# Chapitre 3

## LIMITES ET CONTINUITÉ

### LEÇON 1 LIMITES ET CONTINUITÉ

1.1 LIMITES D'UNE FONCTION.

1.3 THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES.

### LEÇON 2 FONCTIONS CONTINUES ET STRICTEMENT MONOTONES

### LEÇON 3 BRANCHES INFINIES DE LA COURBE D'UNE FONCTION

**S'ENTRAÎNER**



# LEÇON 1 LIMITES ET CONTINUITÉ

- Consolider les notions sur les calculs des limites et sur la continuité d'une fonction ;
- Déterminer graphiquement ou à partir d'un tableau des variations l'image d'un intervalle par une fonction continue ;
- Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour justifier l'existence des solutions dans un intervalle des solutions de l'équation  $f(x) = a$ .

## 1.1 LIMITES D'UNE FONCTION.

### Prendre un bon départ

#### Activité 1

Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer son ensemble de définition et calculer les limites à ses bornes.

1)  $f(x) = -2x^3 + 6x^2 + 8$ ;

3)  $h(x) = \frac{3x-5}{-x^2-x+6}$ ;

2)  $g(x) = \frac{2x-3}{-5x+9}$ ;

4)  $l(x) = -2x+1 - \frac{x^2-3}{2x+4}$ .

#### Activité 2

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \sqrt{\frac{4x+3}{x+2}}$ . On pose  $u(x) = \sqrt{x}$  et  $v(x) = \frac{4x+3}{x+2}$ .

1) Vérifier que  $f(x) = u \circ v(x)$ .

2) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  définis par :  $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x+3}{x+2}$  et  $b = \lim_{X \rightarrow a} \sqrt{X}$  puis en déduire la

limite de  $f$  en  $-\infty$ .

3) Déterminer de la même manière les limites de  $f$  aux autres bornes de son ensemble de définition.

#### Activité 3

Soient  $f$  et  $g$  les fonctions définies par  $f(x) = 2x - \sqrt{x^2+1}$  et  $g(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$ .

1) Montrer que  $g(x) = \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}}$  et en déduire la limite de  $g$  en  $+\infty$ .

2) Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$



## Activité 4

Soient  $f$  et  $g$  les fonctions définies par  $f(x) = 2x - \cos(x^2 + 2)$  et  $g(x) = \frac{2 + \sin(x)}{x^2 + 3}$ .

1) Vérifier que pour tout réel  $x$ ,  $2x - 1 \leq f(x) \leq 2x + 1$ .

2) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 1$  et en déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

3) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 1$  et en déduire  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

4) Montrer que  $|g(x)| \leq \frac{3}{x^2 + 3}$ ; calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^2 + 3}$  et en déduire  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .



## Retenir

## Quelques limites de référence

Soit  $n$  un entier naturel.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

## Opérations sur les limites.

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions,  
 $\ell$  et  $\ell'$  deux réels;  $a$  un réel ou  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

|                          |                |           |           |           |           |                               |           |
|--------------------------|----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-------------------------------|-----------|
| limite de $f$ en $a$     | $\ell$         | $\ell$    | $\ell$    | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$                     | $-\infty$ |
| limite de $g$ en $a$     | $\ell'$        | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$                     | $+\infty$ |
| Limite de $f + g$ en $a$ | $\ell + \ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | On ne peut à priori conclure. |           |

|                                |                        |          |                      |          |                               |     |
|--------------------------------|------------------------|----------|----------------------|----------|-------------------------------|-----|
| limite de $f$ en $a$           | $\ell$                 | $\ell$   | $\ell (\ell \neq 0)$ | $\infty$ | $\infty$                      | $0$ |
| limite de $g$ en $a$           | $\ell' (\ell' \neq 0)$ | $\infty$ | $0$                  | $\ell'$  | $\infty$                      | $0$ |
| Limite de $\frac{f}{g}$ en $a$ | $\frac{\ell}{\ell'}$   | $0$      | $\infty$             | $\infty$ | On ne peut à priori conclure. |     |

|                              |              |                      |           |           |                               |           |          |
|------------------------------|--------------|----------------------|-----------|-----------|-------------------------------|-----------|----------|
| limite de $f$ en $a$         | $\ell$       | $\ell (\ell \neq 0)$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$                     | $+\infty$ | $0$      |
| limite de $g$ en $a$         | $\ell'$      | $\infty$             | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$                     | $-\infty$ | $\infty$ |
| limite de $f \cdot g$ en $a$ | $\ell \ell'$ | $\infty$             | $+\infty$ | $-\infty$ | On ne peut à priori conclure. |           |          |

Le signe précédant " $\infty$ " lorsqu'il n'est pas précisé va dépendre du signe de  $f$  et de celui de  $g$  au voisinage de  $a$ .



**Limite d'une fonction composée.**

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions numériques  $a$ ,  $b$  et  $c$  désignent des réels ou  $+\infty$  ou  $-\infty$

$$\text{si } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} v(x) = b \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow b} u(x) = c \end{cases} \quad \text{alors } \lim_{x \rightarrow a} u(v(x)) = c.$$

**Limite et comparaison.**

Soient  $f$ ,  $g$  et  $h$  trois fonctions numériques définies sur un même voisinage  $I$  de  $a$ ,  $a$  étant un réel ou  $+\infty$ , ou  $-\infty$ ;  $l$  est un réel.

♥ Si pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \leq g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ .

(Théorème de minoration)

♥ Si pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \leq g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ .

(Théorème de majoration)

♥ Si pour tout  $x \in I$ ,  $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ . Cette propriété est encore connue sous le nom de **théorème des gendarmes**.

♥ Si pour  $x \in I$ ,  $|f(x) - l| \leq g(x)$  et si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ .

♥ En particulier si pour  $x \in I$ ,  $|f(x)| \leq g(x)$  et si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ .

**Exemple 1**

1)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2 + 5) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 - 2x + 7}{3x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{3x^2} = -\frac{2}{3}$ .

3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -2x + 1 - \frac{3}{x+5} \right) = +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x + 1 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x+5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} = 0$ .

4)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-5}{x-2} = +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow 2^-} 2x-5 = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2^-} x-2 = 0$  et  $x-2 < 0$  lorsque  $x < 2$ .

5)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2)\sqrt{x} = +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x-2 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ .

**Exemple 2**

1) Calculons  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{2x}$ . On peut encore écrire  $\frac{\sin(3x)}{2x} = \frac{3x}{2x} \times \frac{\sin(3x)}{3x} = \frac{3}{2} \times \frac{\sin(3x)}{3x}$

$\lim_{x \rightarrow 0} 3x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin X}{X} = 1$ , par composition  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = 1$  et donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{2x} = \frac{3}{2}$

2) Calculons  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$ . Pour tout réel  $x$ ,  $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ . Si  $x > 0$ , en divisant par  $x$  on obtient

$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$ ; comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ , le théorème des gendarmes permet de conclure

que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ .



**Exemple 3**

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - \sqrt{x^2 + 3x - 1}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x - \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x - |x| \left(\sqrt{1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x - x \left(\sqrt{1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}\right) \text{ car } |x| = x \text{ quand } x \rightarrow +\infty \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(3 - \sqrt{1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}\right) = +\infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{x^2 - 1}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + |x| \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right) \text{ car } |x| = -x \text{ quand } x \rightarrow -\infty \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(2 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right) = +\infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 2x + 1} - 2x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + 2x + 1} - 2x)(\sqrt{4x^2 + 2x + 1} + 2x)}{\sqrt{4x^2 + 2x + 1} + 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + 2x + 1 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + 2x + 1} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{\sqrt{4x^2 + 2x + 1} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(2 + \frac{1}{x}\right)}{|x| \left(\sqrt{4 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}\right) + 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(2 + \frac{1}{x}\right)}{x \left(\sqrt{4 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{\sqrt{4 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2} = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**Exercice résolu**

soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{1}{3 - \sin x}$ .

1) Démontrer que  $f$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ .

2) En déduire les limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{3 - \sin x}$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - \sin x}{3 - \sin x}$ .

3) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1}-1}{x}$  puis en déduire les limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sqrt{2x+1}-1}$

et  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \sqrt{\frac{x+2}{x}} - 1 \right)$ .



**Solution**

1) Pour tout réel  $x$  on a :  $-1 \leq -\sin x \leq 1$  et donc  $2 \leq 3 - \sin x \leq 4$ ; par suite  $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{3 - \sin x} \leq \frac{1}{2}$ .

$f$  est donc bornée sur  $\mathbb{R}$

2)

• Lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ ,  $x > 1$  et donc  $x - 1 > 0$ .

L'inégalité  $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{3 - \sin x} \leq \frac{1}{2}$  implique donc  $\frac{x-1}{4} \leq \frac{x-1}{3 - \sin x} \leq \frac{x-1}{2}$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{4} = +\infty$ , par comparaison on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{3 - \sin x} = +\infty$ .

• Pour tout réel  $x$  on a :  $-1 \leq -\sin x \leq 1$  et donc  $3x - 1 \leq 3x - \sin x \leq 3x + 1$ .

Lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$ ,  $x < -\frac{1}{3}$  et donc  $3x + 1 < 0$ .

L'inégalité  $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{3 - \sin x} \leq \frac{1}{2}$  implique donc  $\frac{-(3x+1)}{4} \leq \frac{-(3x - \sin x)}{3 - \sin x} \leq \frac{-(3x-1)}{2}$

D'où  $\frac{(3x-1)}{2} \leq \frac{3x - \sin x}{3 - \sin x} \leq \frac{3x+1}{4}$ ; comme  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3x+1}{4} \right) = -\infty$ , par comparaison

on a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3x - \sin x}{3 - \sin x} \right) = -\infty$

3)

•  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2x+1}-1)(\sqrt{2x+1}+1)}{x(\sqrt{2x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{2x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{2x+1}+1} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sqrt{2x+1}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{\frac{\sqrt{2x+1}-1}{x}} = \frac{5}{1} = 5$ .

• Posons  $X = \frac{1}{x}$ ; alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} X = 0$ ;  $x \left( \sqrt{\frac{x+2}{x}} - 1 \right) = \frac{1}{X} \left( \sqrt{\frac{\frac{1}{X}+2}{\frac{1}{X}}} - 1 \right) = \frac{1}{X} (\sqrt{2X+1} - 1)$

Alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \sqrt{\frac{x+2}{x}} - 1 \right) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2X+1}-1}{X} = 1$ .

**Remarque**

Soit  $a$  un réel ou  $+\infty$  ou  $-\infty$ , et  $f$  une fonction définie dans le voisinage de  $a$ .

• Si  $f$  admet au voisinage de  $a$  une limite égale à  $+\infty$ , alors  $f$  n'est pas majorée dans le voisinage de  $a$ .

• Si  $f$  admet au voisinage de  $a$  une limite égale à  $-\infty$ , alors  $f$  n'est pas minorée dans le voisinage de  $a$ .





## S'exercer

**1.a** Dans chacun des cas suivants calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.

$$f(x) = \frac{x^2 - 2}{x\sqrt{x} - \sqrt{8}}; f(x) = \frac{-x^2 + x - 1}{(2-x)(x-1)}; f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1}; f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x+3} - 2}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{3x}}{x-1}; f(x) = \frac{3x^2 - x - 1}{3x^2 + 2x + 1}; f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x}}; f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2x}}{x-1}.$$

**1.b** Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2\cos(x) - 1}{x - \frac{\pi}{3}}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x + 1}}{x - 1}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{9x^2 + 3} - 3x; \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 3\sqrt{x^2 + 3}; \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{3}\right);$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x + 1}}{x - 1}; \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin(x) - 1}{x - \frac{\pi}{6}}; \lim_{x \rightarrow 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right); \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + 7} - 2x; \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - 5\sqrt{x^2 + 3}.$$

## 1.2 CONTINUITÉ

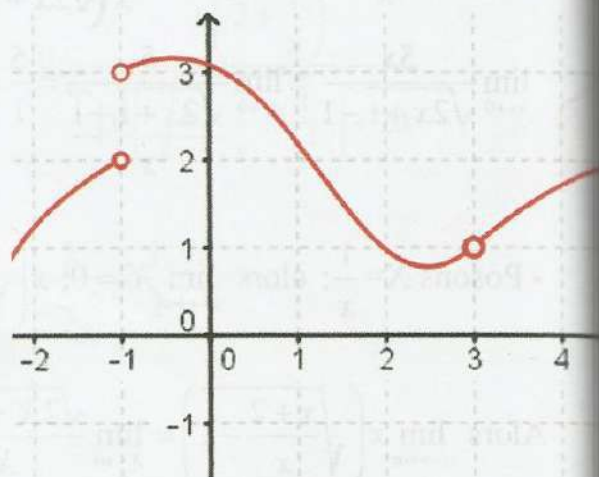


## Prendre un bon départ

## Activité 1

$f$  est une fonction numérique dont la représentation graphique est donnée ci-contre.

- 1) Citez deux réels en lesquels  $f$  est discontinue.
- 2) Donner un intervalle sur lequel  $f$  est continue.
- 3) Quelle modification apportée à la fonction  $f$  en  $x = 3$  pour qu'elle soit continue sur l'intervalle  $[0; 4]$ ? une telle modification est-elle possible en  $x = -1$  ?



## Activité 2

- 1) Étudier la continuité de la fonction  $f$  suivante en  $x_0$  et sur l'intervalle  $I$ .

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{2x - 1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}, x_0 = 1 \text{ et } I = [-5; 0].$$

$$2) \text{ On donne } g(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{2x-3} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{2x^2 + x - 1} & \text{si } x > 2 \end{cases}.$$



- Expliquer pourquoi  $g$  est continue sur chacun des intervalles suivants :  $]-\infty; 0[$ ;  $]0; 2[$  et  $]2; +\infty[$ .
- Étudier la continuité de  $g$  en 0 et en 2.
- $g$  est-elle continue sur  $\mathbb{R}$  ?

### Activité 3

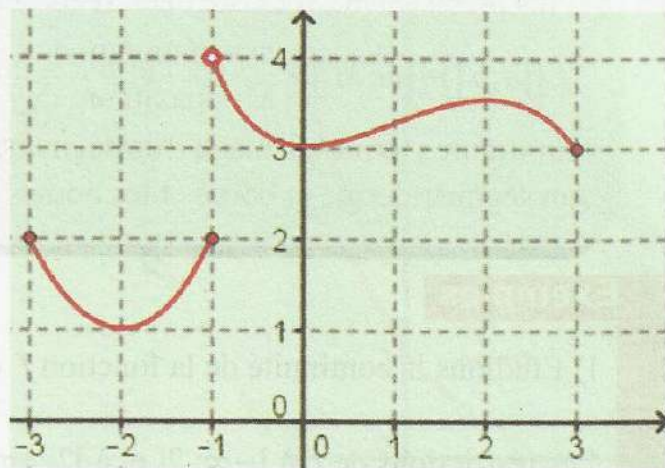
1)  $f$  est une fonction numérique dont la représentation graphique est donnée sur le graphique ci-contre.

Déterminer graphiquement les images par  $f$  des intervalles suivants :

$[-3; 3]$  ;  $]-2; 0]$  ;  $[-1; 3]$  ;  $[-3; -1]$ .

2) Dresser le tableau des variations de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^3 - 3x + 2$  ; en déduire les images par  $f$  des intervalles suivants :

$]-\infty; -1]$  ;  $[-1; 1]$  ;  $[1; +\infty[$  ;  $[-2; 1]$  ;  $[0; 2]$ .



## Retenir

### Définition et propriété

1) Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

• On dit que  $f$  est continue à gauche en un réel  $x_0$  de  $I$  si  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$ .

• On dit que  $f$  est continue à droite en un réel  $x_0$  de  $I$  si  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$ .

• On dit que  $f$  est continue en un réel  $x_0$  de  $I$  si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

• On dit que  $f$  est continue sur  $I$  si  $f$  est continue en tout réel  $x_0$  de  $I$ .

2) Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Alors,

• Les fonctions  $f + g$ ,  $\alpha f$ ,  $fg$  sont continues sur  $I$ .

• Si  $g$  ne s'annule pas sur  $I$ , alors les fonctions  $\frac{1}{g}$  et  $\frac{f}{g}$  sont continues sur  $I$ .

• Si  $f$  est positive sur  $I$ , la fonction  $\sqrt{f}$  est continue sur  $I$ .

3) Si  $f$  est continue sur  $I$ , et  $g$  continue sur  $J$ , si de plus  $f(I) \subset J$  alors  $g \circ f$  est continue sur  $I$ .

4) Les fonctions polynômes et rationnelles sont continues sur tout intervalle de leur ensemble de définition.

### Prolongement par continuité

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On dit qu'une fonction  $f$  définie sur  $I \setminus \{x_0\}$  est prolongeable par continuité en  $x_0$  si  $f$  admet une limite finie  $l$  en  $x_0$ . La fonction  $g$  définie par :

$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \setminus \{x_0\} \\ g(x_0) = l \end{cases}$  est appelée un **prolongement par continuité de  $f$  en  $x_0$** .



**Image d'un intervalle par une fonction continue.**

Soit  $f$  une fonction continue sur le segment  $[a; b]$ . Alors,  $f$  est bornée sur  $[a; b]$  et atteint ses bornes.

Plus précisément, il existe deux réels  $m$  et  $M$  tels que :

$$f([a; b]) = [m; M] \quad \begin{cases} m = \text{minimum de } f \text{ sur } [a; b] \\ M = \text{maximum de } f \text{ sur } [a; b] \end{cases}$$

En d'autres termes, l'image d'un segment fermé et borné par une fonction continue est un segment fermé et borné et les bornes sont atteintes.

**Exemples**

1) Étudions la continuité de la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \begin{cases} -2x+3 & \text{si } x < 2 \\ \frac{1}{2}x-2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Les restrictions de  $f$  à  $] -\infty; 2[$  et à  $]2; +\infty[$  sont respectivement définies par :

$f_1(x) = -2x + 3$  et  $f_2(x) = \frac{1}{2}x - 2$  ; ces restrictions sont des fonctions affines donc continues sur chaque intervalle de  $\mathbb{R}$ .  $f$  est donc continue sur  $] -\infty; 2[$  et sur  $]2; +\infty[$ . Il reste donc à étudier la continuité de  $f$  en 2.

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} -2x + 3 = -1$  et  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{2}x - 2 = -1$ , comme  $f(2) = \frac{1}{2}(2) - 2 = -1$  alors  $f$  est continue en 2. Par suite  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

2) Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}^*$   $g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  ; montrons que  $g$  est prolongeable par continuité en 0.

Pour tout réel  $x$  non nul on a :  $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$  ; d'où  $-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$ .  $\lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0$

et  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$  ; d'après le théorème des gendarmes,  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ . Un prolongement par continuité de  $g$  est donc possible en 0 ; ce prolongement par continuité est définie par :

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

**Exercice résolu****Énoncé**

Étudions sur  $\mathbb{R}$  la continuité de la fonction  $f$  définie par :

$f(x) = xE(x) - x + 2$  où  $E(x)$  désigne la partie entière de  $x$ .

**Solution**

soit  $n$  un entier relatif. Si  $x \in [n; n+1[$  alors  $E(x) = n$ .

ainsi  $\begin{cases} f(x) = xn - x + 2 = (n-1)x + 2 & \text{si } x \in [n; n+1[ \\ f(x) = x(n-1) - x + 2 = (n-2)x + 2 & \text{si } x \in [n-1; n[ \end{cases}$



La restriction de  $f$  à tout intervalle de la forme  $[n; n+1[$ , où  $n$  est un entier, est une fonction affine donc continue. Étudions la continuité de  $f$  en  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^-} (n-2)x + 2 = n^2 - 2n + 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^+} f(n-1)x + 2 = n^2 - n + 2.$$

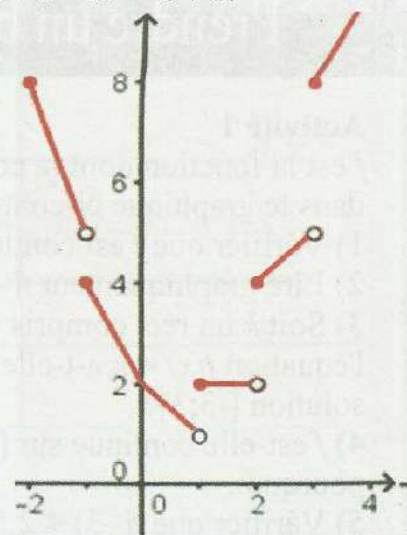
$f(n) = nE(n) - n + 2 = n^2 - n + 2$ .  $f$  est donc continue à droite en  $n$ .

Pour que  $f$  soit continue à gauche en  $n$  on doit avoir

$$n^2 - 2n + 2 = n^2 - n + 2 \text{ c'est-à-dire } n = 0.$$

$f$  est donc continue en tout  $x_0 \notin \mathbb{Z}^*$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$

ci-contre est un aperçu de la courbe de  $f$ .



## S'exercer

**1.1c** Indiquer si les fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définies ci-dessous sont continues sur  $\mathbb{R}$ .

$$f(x) = 2x - 3 + 5x\sqrt{x^2 + 1}; \quad g(x) = \frac{-3x + 5}{3x^2 + 2x + 4}; \quad h(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 1, \\ x - 1 & \text{si } x \geq 1, \end{cases}$$

$$k(x) = |x^2 - 3x| + 2x - 9; \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{2x+5} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{x-6}{x+1} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

**1.1d** Déterminer parmi les fonctions définies ci-dessous celles qui sont prolongeables par continuité en  $x_0$ , puis, définir un prolongement par continuité.

$$a(x) = \frac{1}{x}; \quad x_0 = 0; \quad b(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{2x + 1}; \quad x_0 = -\frac{1}{2}; \quad c(x) = \frac{x-1}{x^3 - x^2 - x + 1}; \quad x_0 = 1;$$

$$d(x) = \frac{\sqrt{2x} - 2}{\sqrt{x+7} - 3}; \quad x_0 = 2.$$

**1.1e** Déterminer les valeurs des réels  $a$  et  $b$  pour que  $f$  soit continue sur  $\mathbb{R}$ .

$$f(x) = \begin{cases} ax - 2 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x+3} & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \\ \frac{2x-b}{-x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



La restriction de  $f$  à tout intervalle de la forme  $[n; n+1[$ , où  $n$  est un entier, est une fonction affine donc continue. Étudions la continuité de  $f$  en  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^-} (n-2)x + 2 = n^2 - 2n + 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^+} f(n-1)x + 2 = n^2 - n + 2.$$

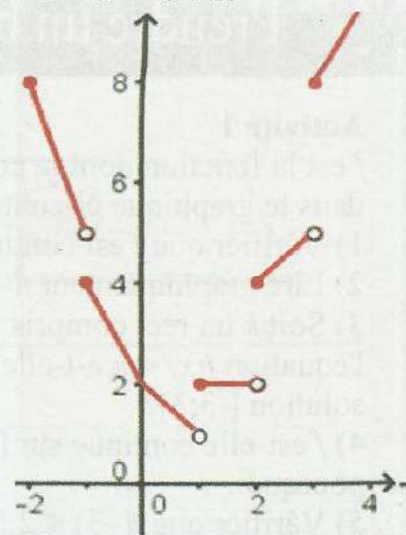
$f(n) = nE(n) - n + 2 = n^2 - n + 2$ .  $f$  est donc continue à droite en  $n$ .

Pour que  $f$  soit continue à gauche en  $n$  on doit avoir

$$n^2 - 2n + 2 = n^2 - n + 2 \text{ c'est-à-dire } n = 0.$$

$f$  est donc continue en tout  $x_0 \notin \mathbb{Z}^*$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$

ci-contre est un aperçu de la courbe de  $f$ .



## S'exercer

**1.1c** Indiquer si les fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définies ci-dessous sont continues sur  $\mathbb{R}$ .

$$f(x) = 2x - 3 + 5x\sqrt{x^2 + 1}; \quad g(x) = \frac{-3x + 5}{3x^2 + 2x + 4}; \quad h(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$k(x) = |x^2 - 3x| + 2x - 9; \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{2x+5} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{x-6}{x+1} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

**1.1d** Déterminer parmi les fonctions définies ci-dessous celles qui sont prolongeables par continuité en  $x_0$ , puis, définir un prolongement par continuité.

$$a(x) = \frac{1}{x}; \quad x_0 = 0; \quad b(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{2x + 1}; \quad x_0 = -\frac{1}{2}; \quad c(x) = \frac{x-1}{x^3 - x^2 - x + 1}; \quad x_0 = 1;$$

$$d(x) = \frac{\sqrt{2x} - 2}{\sqrt{x+7} - 3}; \quad x_0 = 2.$$

**1.1e** Déterminer les valeurs des réels  $a$  et  $b$  pour que  $f$  soit continue sur  $\mathbb{R}$ .

$$f(x) = \begin{cases} ax - 2 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x+3} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{2x-b}{-x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



# 1.3 THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES.

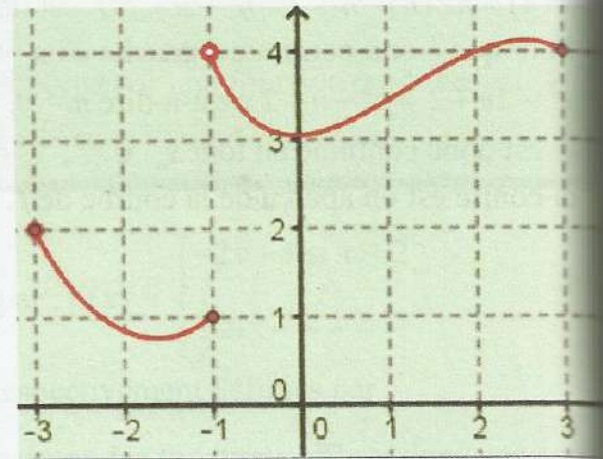


## Prendre un bon départ

### Activité 1

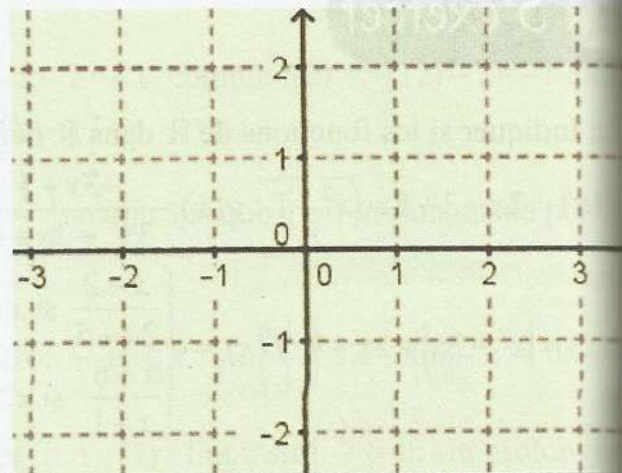
$f$  est la fonction dont la courbe est dessinée dans le graphique ci-contre.

- 1) Vérifier que  $f$  est continue sur  $[-2; -1]$ .
- 2) Lire graphiquement  $f(-3)$  et  $f(-1)$ .
- 3) Soit  $k$  un réel compris entre  $f(-3)$  et  $f(-1)$  ; l'équation  $f(x) = k$  a-t-elle toujours une solution  $[-3; 3]$ ?
- 4)  $f$  est-elle continue sur  $[-3; 3]$  ? expliquer pourquoi.
- 5) Vérifier que  $f(-3) < 2,5 < f(3)$ .
- 6) L'équation  $f(x) = 2,5$  a-t-elle une solution dans  $[-3; 3]$ ?



### Activité 2

- 1) Sur le graphique ci-contre construire la courbe d'une fonction  $f$  continue sur  $[-2; 3]$  et qui change de signe sur  $[-2; 3]$ .
- 2) Vérifier que l'équation  $f(x) = 0$  a au moins une solution dans  $[-2; 3]$ .
- 3) Construire la courbe d'une fonction  $g$  définie sur  $[-2; 3]$  et telle que l'équation  $g(x) = 0$  n'ait pas de solution.
- 4) Une telle fonction peut-elle être continue sur  $[-2; 3]$  ?



### Activité 3

Soit la fonction  $f$  dont le tableau des variations est donnée ci-dessous.

| $x$    | $-\infty$ | $-3$      | $2$       | $+\infty$ |
|--------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $f(x)$ | 1         | $+\infty$ | $+\infty$ | $-1$      |

Arrows indicate the direction of the function: from 1 to  $+\infty$  on  $]-\infty; -3[$ , from  $+\infty$  to  $+\infty$  on  $] -3; 2[$ , and from  $+\infty$  to  $-1$  on  $] 2; +\infty[$ .

- 1) Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  n'a pas de solution sur  $]-\infty; -3[$ .
- 2) Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  a au moins une solution sur  $] -3; 2[$ .
- 3) Démontrer que l'équation  $f(x) = \sqrt{2}$  a au moins une solution sur  $] -\infty; -3[$ .
- 4) Quelle est le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = 2$ .



**Exercice résolu 2**

Soit  $f_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , par  $f_n(x) = x^n + x - 1$ .

1) Montrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  a une unique solution dans l'intervalle  $]0;1[$ .

On note  $u_n$  la solution de l'équation  $f_n(x) = 0$  dans l'intervalle  $]0;1[$ .

Étude de la suite  $(u_n)$ .

2) Montrer que la suite  $(u_n)$  est majorée.

3) Démontrer que  $f_{n+1}(u_n) = (u_n)^n (u_n - 1)$

4) Déterminer le signe de  $f_{n+1}(u_n)$  puis montrer que  $(u_n)$  est croissante.

5) Démontrer que  $(u_n)$  est une suite convergente et converge vers une limite  $l \in ]0;1[$ .

6) Vérifier que  $l = 1$

**Solution**

1)  $f_n$  est une fonction polynôme de degrés  $n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , donc  $f_n$  est continue pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n(0) = -1$  et  $f_n(1) = 1$ . Le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure que  $f_n(x) = 0$  admet une solution dans l'intervalle  $]0;1[$ . De plus,  $f'_n(x) = nx^{n-1} + 1$ .

Cette dérivée étant strictement positive sur cet intervalle pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est strictement croissante sur  $[0;1]$  et la solution de l'équation est unique.

2) Par définition,  $u_n$  est dans l'intervalle  $]0;1[$ , donc  $(u_n)$  est bornée.

3)  $f_n(u_n) = 0$  est équivalent à  $(u_n)^n = -u_n + 1 = -(u_n - 1)$ .

Donc  $f_{n+1}(u_n) = (u_n)^{n+1} + u_n - 1 = (u_n)^{n+1} - (u_n)^n = (u_n)^n (u_n - 1)$ .

4) De ce qui précède, le signe de  $f_{n+1}(u_n)$  est celui de  $(u_n)^n (u_n - 1)$ .

Comme  $u_n \in ]0;1[$ ,  $f_{n+1}(u_n) \leq 0$ . Comme  $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ , on a  $f_{n+1}(u_n) \leq f_{n+1}(u_{n+1})$ . La fonction étant strictement croissante sur  $]0;1[$ , on obtient  $u_{n+1} \leq u_n$ , c'est à dire  $(u_n)$  est croissante.

5) La suite étant croissante et majorée par 1, elle converge vers une limite  $l$ .

Comme  $u_n \in ]0;1[$ , on a  $l \in ]0;1[$ .

**Remarque**

Par une fonction continue :

- L'image d'un intervalle borné n'est pas toujours un intervalle borné :

pour  $f(x) = \frac{1}{x}$  sur  $]0;1[$ , on a  $f(]0;1[) = ]1;+\infty[$ .

- L'image d'un ouvert n'est pas toujours un ouvert :

Pour  $f : x \mapsto \sin x$  sur  $\mathbb{R} = ]-\infty;+\infty[$  on a  $f(\mathbb{R}) = [-1;1]$  ou pour  $f : x \mapsto x^2$  sur  $] -1;1[$ ,

on a  $f(]-1;1[) = [0;1[$ .

**S'exercer**

1.f Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 10$ .

1) Justifier qu'il existe un réel  $c$  appartenant à  $[-3;0]$  tel que  $f(c) = 5$ .

2) Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet au moins une solution dans  $[3;4]$ .

3) Soit (C) la représentation graphique de  $f$  dans un repère. Démontrer que la droite (D) d'équation  $y = k$  ( $k \geq -10$ ) coupe au moins une fois la courbe (C) sur l'intervalle  $[-1;+\infty[$ .



# LEÇON 2

## FONCTIONS CONTINUES ET STRICTEMENT MONOTONES

- Montrer qu'une fonction réalise une bijection entre deux intervalles de  $\mathbb{R}$ .
- Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour déterminer le nombre de solutions dans un intervalle de  $\mathbb{R}$ , de l'équation  $f(x)=a$ .
- Donner un encadrement des solutions de l'équation  $f(x)=a$  par la méthode de dichotomie ou celle du balayage.
- Étudier la continuité et construire dans un plan rapporté à un repère orthonormé les courbes respectives d'une application bijective et de sa bijection réciproque.
- Utiliser les puissances rationnelles d'un nombre réel dans diverses opérations.

### Prendre un bon départ

#### Activité 1

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ . soient  $a$  et  $b$  deux réels distincts appartenant à  $I$ . on suppose  $a < b$ .

1) On suppose que  $f$  est strictement croissante sur  $I$ . Montrer que  $f(a) \neq f(b)$  et en déduire que  $f$  est injective sur  $I$ .

2) Montrer de même que si  $f$  est strictement décroissante sur  $I$ , alors  $f$  est injective sur  $I$ .

#### Activité 2

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  ; soit  $f(I)$  l'image de  $I$  par  $f$ . Montrer que  $f$  est une surjection de  $I$  vers  $f(I)$ .

#### Activité 3

$f$  est une fonction dont le tableau des variations est donnée ci-dessous.

| $x$    | $-\infty$ | $-3$       | $2$        | $+\infty$  |
|--------|-----------|------------|------------|------------|
| $f(x)$ | 1         | $+\infty$  | $+\infty$  | $-1$       |
|        |           | $\nearrow$ | $\searrow$ | $\nearrow$ |
|        |           |            | $-5$       |            |

- Montrer à l'aide des résultats des deux activités précédentes que la restriction de  $f$  à l'intervalle  $]-\infty; -3[$  est une bijection de  $]-\infty; -3[$  vers un intervalle à préciser.
- En déduire que l'équation  $f(x)=2$  a une unique solution dans l'intervalle  $]-\infty; -3[$ .
- Montrer de même que l'équation  $f(x)=0$  a une unique solution dans l'intervalle  $]-3; 2]$ .





## Retenir

### Théorème de la bijection

Si une fonction  $f$  est **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle  $I$ , alors :

- 1)  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur  $J = f(I)$ .
- 2) De plus, la bijection réciproque :  $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$  est continue et strictement monotone et varie dans le même sens que  $f$ .
- 3) Si  $f$  est dérivable en  $x_0 \in I$  et si  $f'(x_0) \neq 0$  alors  $f^{-1}$  est dérivable en  $f(x_0)$

$$\text{et } (f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

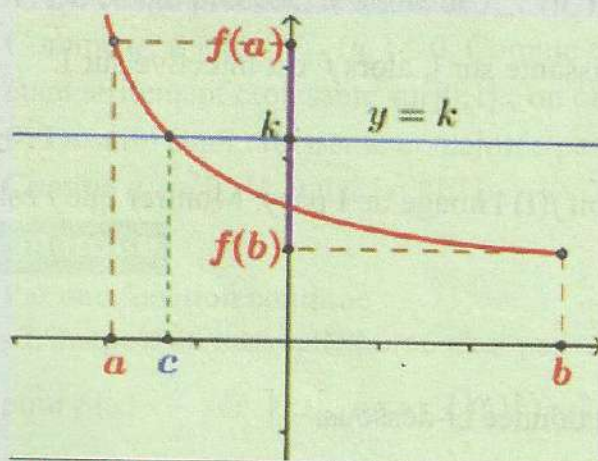
### Conséquence

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction **continue** et **strictement monotone** sur  $I$ . Soient  $a, b \in I$ ,  $a < b$ , alors :

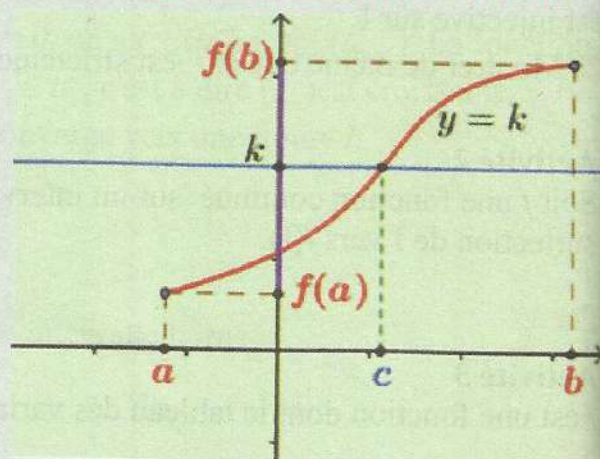
Pour tout réel  $k$  **compris entre**  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe un unique réel  $c$  appartenant à  $[a; b]$ , tel que  $f(c) = k$  ;

ainsi, pour tout réel  $k$  **compris entre**  $f(a)$  et  $f(b)$ , l'équation  $f(x) = k$  a une **unique solution** dans l'intervalle  $[a; b]$ .

#### Cas où $f$ est strictement décroissante



#### Cas où $f$ est strictement croissante



### Corollaire

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction continue et strictement monotone sur  $I$ . Soient  $a, b \in I$ ,  $a < b$ , tels que  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . Alors, l'équation  $f(x) = 0$  admet une **unique solution** dans l'intervalle  $[a; b]$ .

### Méthode

Lorsque qu'on étudie certaines fonctions, il est parfois difficile, voire impossible de donner les solutions exactes de certaines équations associées. Mais on peut avoir besoin (par exemple pour une représentation graphique plus précise) d'avoir une valeur approchée des solutions. La méthode de dichotomie et la méthode de balayage permettent d'en donner une valeur approchée.



**Exemple**

Montrons que l'équation  $(x-4)^3 + 3(x-4) + 2 = 0$  admet une unique solution dans  $\mathbb{R}$  puis donner un encadrement de cette solution à  $10^{-2}$  près.

Posons  $f(x) = (x-4)^3 + 3(x-4) + 2$ .

$f$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  car  $f$  est une fonction polynôme et sa fonction dérivée est définie par  $f'(x) = 3(x-4)^2 + 3$ . Le tableau de variation de  $f$  est :

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         |           |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $+\infty$ |

D'après le théorème de bijection,  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  vers  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ . Comme l'intervalle image contient 0, l'équation a donc une unique solution dans  $\mathbb{R}$ . Déterminons une valeur approchée à  $10^{-2}$  de cette solution.

**La méthode de balayage.**

On commence un balayage des valeurs de  $x$  par pas de 1 pour un encadrement à l'aide de deux entiers consécutifs;

|        |     |     |     |    |   |
|--------|-----|-----|-----|----|---|
| $x$    | 0   | 1   | 2   | 3  | 4 |
| $f(x)$ | -74 | -34 | -12 | -2 | 2 |

Comme  $f(3) < 0$  et  $f(4) > 0$  le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que  $3 < x_0 < 4$ . On fait un nouveau tableau qui commence par 3 par pas de 0,1 pour un encadrement à  $10^{-1}$  près;

|        |    |      |      |      |      |     |
|--------|----|------|------|------|------|-----|
| $x$    | 3  | 3,1  | 3,2  | 3,3  | 3,4  | 3,5 |
| $f(x)$ | -2 | -1,4 | -0,9 | -0,4 | -0,0 | 0,3 |
|        |    | 3    | 1    | 4    | 2    | 4   |

Comme  $f(3,4) < 0$  et  $f(3,5) > 0$  alors  $3,4 < x_0 < 3,5$ . On fait un nouveau tableau qui commence par 3,4 par pas de 0,01 pour un encadrement à  $10^{-2}$  près.

|        |       |      |      |
|--------|-------|------|------|
| $x$    | 3,4   | 3,41 | 3,42 |
| $f(x)$ | -0,02 | 0,02 | 0,06 |

Ce dernier tableau permet de conclure que  $3,40 < x_0 < 3,41$ .

3,40 et 3,41 sont donc des valeurs approchées de  $x_0$  à  $10^{-2}$  près.

**La méthode par dichotomie.**

Le balayage est une méthode efficace, mais laborieuse. On s'épargne de nombreux calculs intermédiaires en visant tout de suite le milieu de l'intervalle : c'est le principe de la dichotomie

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = x^n$ .

Dressons le tableau de variation de  $f$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

$f$  est dérivable et  $f'(x) = nx^{n-1}$ ; comme  $x \in [0; +\infty[$ ,  $f'(x) \geq 0$ .



D'où le tableau de variation.

|         |   |           |
|---------|---|-----------|
| $x$     | 0 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |   | +         |
| $f(x)$  | 0 | $+\infty$ |

$f$  est continue et strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ , alors  $f$  est une bijection de  $[0; +\infty[$  vers  $f([0; +\infty[) = [0; +\infty[$ .

Pour tout réel positif  $a$  l'équation  $x^n = a$  a donc une unique solution dans  $[0; +\infty[$ .

Cette solution est notée  $\sqrt[n]{a}$  (lire racine  $n^{\text{ième}}$  de  $a$ ) ou  $a^{\frac{1}{n}}$ .

Ainsi  $x^n = a$  équivaut à  $x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$  ( $a \geq 0$ )

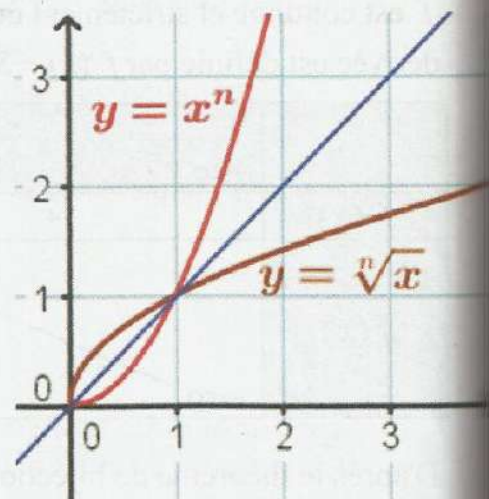
$$x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}.$$

$$x^3 = a \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}.$$

$$x^4 = a \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}.$$

Tout comme  $f$  la réciproque  $f^{-1}$  est continue et strictement croissante.

La courbe de  $f^{-1}$  et celle de  $f$  sont symétriques par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation  $y = x$ ).



### Remarque 1

La fonction  $f: x \rightarrow x^n$  est strictement monotone sur  $\mathbb{R}$  car  $f'(x) = nx^{n-1}$ .

Si  $n$  est impair,  $n-1$  est pair et  $x^{n-1} \geq 0$ .

$f$  est donc continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

De plus  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ .

La fonction:  $f: x \rightarrow x^n$  (pour  $n$  entier naturel impair) est une bijection de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ .

### Remarque 2

Quelques propriétés de la fonction  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$

- Pour tout réel positif ou nul  $x$ , on a  $(\sqrt[n]{x})^n = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x$ .
- Quels que soient les entiers naturels non nuls  $n$  et  $p$  et les réels positifs ou nuls  $a$  et  $b$ , on a :
  - $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$  équivaut à  $a = b$  et  $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$  équivaut à  $a > b$ .
  - $\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p}$ ;
  - $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$ ;
  - $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$ ;
  - $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ ;
  - $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ . ( $b > 0$ )



**Exemple 1**

1) Simplifions le réel  $A = \frac{\sqrt[3]{1024} \times \sqrt{\sqrt{64}}}{\sqrt[4]{256}}$ .

$$\sqrt[3]{1024} = \sqrt[3]{2^{10}} = 2^{\frac{10}{3}}; \quad \sqrt{\sqrt{64}} = \sqrt[4]{2^6} = 2^{\frac{6}{4}} = 2^{\frac{3}{2}};$$

$$\sqrt[4]{256} = \sqrt[4]{2^8} = 2^{\frac{8}{4}} = 2^2;$$

$$\text{On a donc } A = \frac{2^{\frac{10}{3}} \times 2^{\frac{3}{2}}}{2^2} = 2^{\frac{10}{3}} \times 2^{-\frac{4}{3}} \times 2^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{6}{3}} \times 2^{\frac{3}{2}} = 2^2 \times 2^{\frac{3}{2}} = 2^3 \times 2^{\frac{1}{2}} = 8\sqrt{2}.$$

2) Etudions le comportement de la fonction  $f: x \mapsto \sqrt[3]{x^4 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 + 3x}$  au voisinage de  $+\infty$ .

Pour tout réel strictement positif  $x$ , on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{x^4 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 + 3x} = \sqrt[3]{x^4 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} - \sqrt[3]{x^3 \left(1 + \frac{3}{x^2}\right)} \\ &= x^{\frac{4}{3}} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2}} - x \sqrt[3]{1 + \frac{3}{x^2}} = x^{\frac{4}{3}} \left( \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2}} - x^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{1 + \frac{3}{x^2}} \right). \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{4}{3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^4} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = 0.$$

De plus  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$ . Il en résulte que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

3) L'ensemble  $S$  des solutions de l'équation  $x^4 = 2$  est  $S = \{\sqrt[4]{2}; -\sqrt[4]{2}\}$ .

4) L'ensemble  $S$  des solutions de l'équation  $x^4 = -2$  est  $S = \emptyset$ .

5) L'ensemble  $S$  des solutions de l'équation  $x^3 = 2$  est  $S = \{\sqrt[3]{2}\}$ .

6) L'ensemble  $S$  des solutions de l'équation  $x^3 = -2$  est  $S = \{-\sqrt[3]{2}\}$ .

7) L'ensemble  $S$  des solutions de l'inéquation  $x^4 \geq 2$  est  $S = ]-\infty; -\sqrt[4]{2}] \cup [\sqrt[4]{2}; +\infty[$ .

8) L'ensemble  $S$  des solutions de l'inéquation  $x^3 \geq -2$  est  $S = [-\sqrt[3]{2}; +\infty[$ .

**Exercice résolu**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x^3 + x^2 - 1$ .

1) Dresser le tableau des variations de  $f$ .

2) En déduire que l'équation  $f(x) = 0$  admet dans  $\mathbb{R}$  une unique solution telle que  $0,65 < \alpha < 0,66$ .

3) Étudier le signe de  $f(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

**Solution**

1)  $f$  est une fonction polynôme donc continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$f'(x) = 6x^2 + 2x$ . D'où le tableau des variations.

|         |           |                           |               |            |           |
|---------|-----------|---------------------------|---------------|------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-\frac{1}{3}$            | $0$           | $+\infty$  |           |
| $f'(x)$ | $+$       | $\phi$                    | $-$           | $\phi$     | $+$       |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $\nearrow -\frac{26}{27}$ | $\searrow -1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |



2) Sur l'intervalle  $]-\infty; 0]$ , d'après le tableau des variations  $f(x) \leq -\frac{26}{27}$ .

Donc l'équation  $f(x) = 0$  n'a pas de solution dans cet intervalle.

Sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  la fonction  $f$  est continue et strictement croissante. Elle réalise donc une bijection de  $]0; +\infty[$  vers  $f(]0; +\infty[) = ]-1; +\infty[$ . Comme l'intervalle  $] -1; +\infty[$  contient 0 l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution et cette solution appartient à  $]0; +\infty[$ .

Ainsi l'équation  $f(x) = 0$  a une unique solution dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $\alpha$  cette solution.

$f(0,65) = -0,02825$  et  $f(0,66) = 0,010592$ ; comme  $f(0,65) \cdot f(0,66) < 0$ , d'après le théorème des valeurs intermédiaires,  $0,65 < \alpha < 0,66$ .

3) Signe de  $f(x)$ .

|        |           |          |           |
|--------|-----------|----------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $-$       | $0$      | $+$       |

On obtient le signe de  $f(x)$  en parcourant la troisième ligne du tableau de variation de  $f$ . (le principe suivant peut être appliqué à une fonction continue qui ne s'annule pas dans un intervalle ne change pas de

signe, dans cet intervalle et une fonction continue et strictement monotone change de signe au moment où elle s'annule dans un intervalle).



## S'exercer

2.a On considère l'équation (E):  $x^3 - 3x + 2 = 0$

1) Justifier que (E) admet deux solutions dans  $\mathbb{R}$  dont l'une est connue et l'autre notée  $\alpha$ .

2) Proposer un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-3}$ .

2.b Montrer que l'équation  $x^2 = x \sin x + \cos x$  admet deux solutions réelles.

2.c Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 3$ .

a) Dresser le tableau des variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

b) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet dans  $\mathbb{R}$  une unique solution que l'on notera  $\alpha$ .

c) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $f(x) > 0$ .

|         |           |      |               |           |
|---------|-----------|------|---------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$ | $1$           | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$  | $-$           | $0$       |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $0$  | $\frac{3}{2}$ | $0$       |

Déterminer en justifiant le nombre de solutions de chacune des équations suivantes.

a)  $f(x) = 1$ ;

b)  $f(x) = 2$ ;

c)  $f(x) = 0$ .

2.e Donner l'écriture simplifiée des expressions suivantes:

a)  $2\sqrt[4]{6561} - 5\sqrt[3]{27} - 3\sqrt{36}$ ; b)  $\frac{\sqrt[3]{a^5} \times (\sqrt[4]{a^7})^2}{(a^2)^2 \times \sqrt[5]{a^2} \times \sqrt[5]{a^3}}$ ; c)  $\frac{10^{\frac{3}{2}} \times 8^{\frac{4}{3}}}{5 \times 4^{\frac{7}{3}}}$ .

2.f Déterminer les limites éventuelles en 0 et en  $+\infty$  des fonctions suivantes :

$f: x \mapsto \frac{x^{\frac{2}{5}} + x^{\frac{4}{5}}}{x^{\frac{12}{5}}}$ ;  $g: x \mapsto \frac{x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{5}}}$ .



# LEÇON 3 BRANCHES INFINIES DE LA COURBE D'UNE FONCTION

Donner en fonction des limites, l'allure des branches infinies de la courbe d'une fonction dans un voisinage donné.

Dans cette partie nous considérons le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

## Prendre un bon départ

### Activité 1

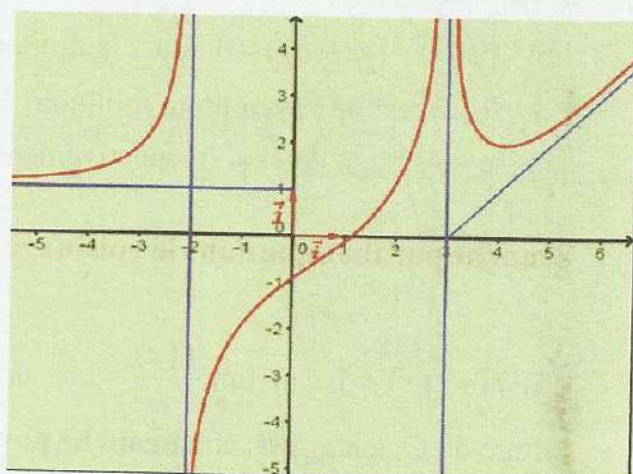
Soit  $f$  une fonction définie par  $f(x) = x - 2 - \frac{4}{x+1}$ .

- Déterminer les limites de la fonction  $f$  aux bornes de son ensemble de définition
- Donner une interprétation graphique des limites de  $f$  aux voisinages de  $-1$ .
- Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x-2))$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x-2))$ ; interpréter graphiquement les résultats obtenus.

### Activité 2

- $f$  est une fonction dont la représentation graphique est donnée dans le repère ci-contre.
- Ecrire les équations des asymptotes à la courbe représentative de  $f$ .
- Même question avec la fonction  $g$  dont le tableau des variations est donné ci-dessous.

| $x$    | $-\infty$ | $-3$      | $2$       | $+\infty$ |
|--------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $f(x)$ | $1$       | $+\infty$ | $+\infty$ | $-1$      |



### Activité 3

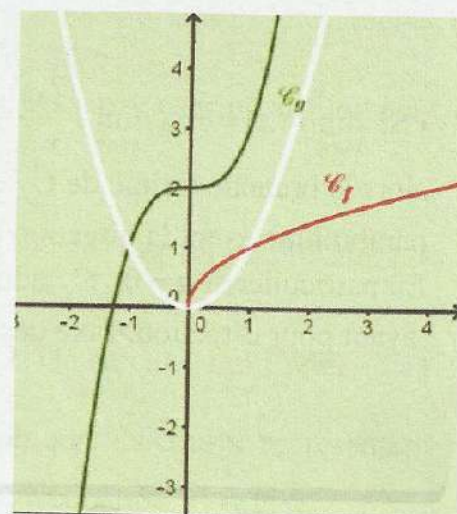
Soient  $f$  et  $g$  les fonctions définies par  $f(x) = \sqrt{x}$  et  $g(x) = x^3 + 2$ . La courbe de la fonction  $f$  et celle de  $g$  sont représentées dans le graphique ci-contre.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$$

Que constate-t-on ?

Donner les limites suivantes:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}.$$





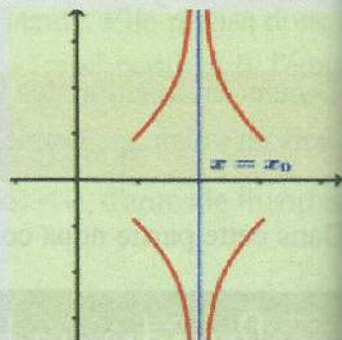


## Retenir

### Dans le voisinage d'un réel.

Soit  $f$  une fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $C_f$  la représentation graphique de  $f$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ .  
 si  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = +\infty$  ou  $-\infty$  (  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = +\infty$  ou  $-\infty$  ) alors la droite

d'équation  $x = x_0$  est une asymptote à  $C_f$ .

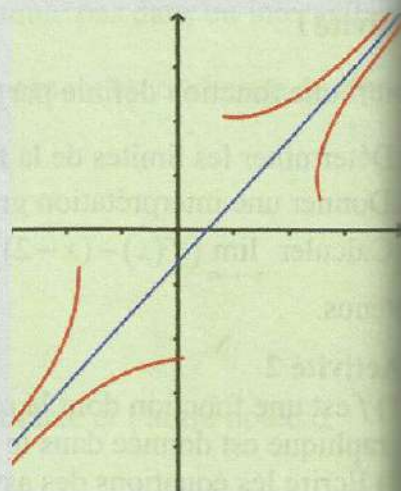


### Asymptote dans le voisinage de l'infini

Soit  $f$  une fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $C_f$  la représentation graphique de  $f$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1) Si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$  (respectivement  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ ) alors la droite d'équation  $y = b$  est une asymptote à  $C_f$  dans le voisinage de  $-\infty$  (respectivement  $+\infty$ ).

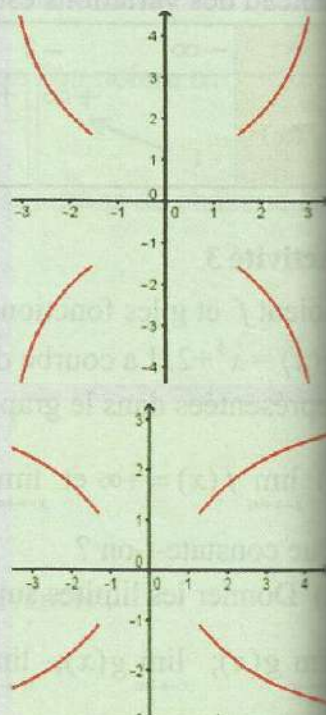
2) Si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$  (respectivement  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ ) alors la droite d'équation  $y = ax + b$  est une asymptote (oblique) à  $C_f$  dans le voisinage de  $-\infty$  (respectivement  $+\infty$ ).



### Branche parabolique dans le voisinage de l'infini : soit $x_0 \in \{-\infty; +\infty\}$

• Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$  alors la branche infinie de  $C_f$  en  $x_0$  est une **branche parabolique** ayant pour direction l'axe des ordonnées.

• Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$  alors la branche infinie de  $C_f$  en  $x_0$  est une branche parabolique ayant la direction de la droite d'équation  $y = ax$ . En particulier si  $a = 0$ ,  $C_f$  admet une branche parabolique ayant pour direction, l'axe des abscisses.





## Exemple

1) Étudions les branches infinies de la représentation graphique de la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{-2x^2 + 3x + 2}{x-1}$ .

L'ensemble de définition de  $f$  est :  $]-\infty; 1[ \cup ]1; +\infty[$ .

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{-2x^2 + 3x + 2}{x-1} = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 1} (-2x^2 + 3x + 2) = 3, \lim_{x \rightarrow 1} x-1 = 0 \\ \text{et } x-1 < 0 \text{ lorsque } x < 1.$$

de façon analogue,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left( \frac{-2x^2 + 3x + 2}{x-1} \right) = +\infty$ .

Interprétation graphique : la droite d'équation  $x = 1$  est une asymptote à la courbe de  $f$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x = +\infty \text{ on calcule alors } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2 + 3x + 2}{x(-x-1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2. \text{ On calcule } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (-2x).$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (-2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{x-1} = 1.$$

Interprétation graphique : la droite d'équation  $y = -2x + 1$  est une asymptote oblique à la courbe de  $f$  dans le voisinage de  $-\infty$ .

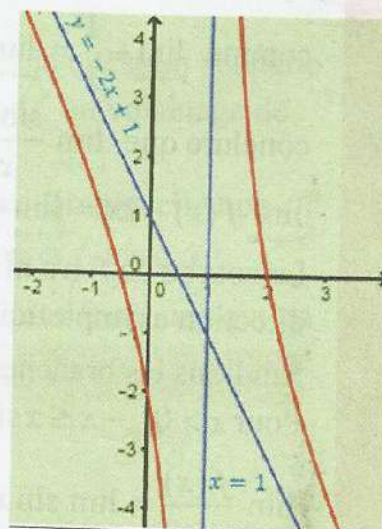
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x = -\infty. \text{ On calcule alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 + 3x + 2}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2.$$

On calcule  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (-2x)$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (-2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x-1} = 1.$$

Interprétation graphique : la droite d'équation  $y = -2x + 1$  est une asymptote oblique à la courbe de  $f$  dans le voisinage de  $+\infty$ . Ci-contre un aperçu de la courbe de  $f$



2) Soit la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = 2x - \sqrt{x+1}$ . Étudions les branches infinies de la courbe de  $f$ .

L'ensemble de définition de  $f$  est  $[-1; +\infty[$ . Lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ ,  $x$  est positif, on peut donc écrire :  $x = (\sqrt{x})^2$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2(\sqrt{x})^2 - \sqrt{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left( 2\sqrt{x} - \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right) = +\infty; \text{ on calcule alors}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \sqrt{\frac{x+1}{x^2}} = 2. \text{ On calcule } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\sqrt{x+1}) = -\infty. \text{ Interprétation graphique: La courbe représentative de } f \text{ à } +\infty \text{ a une branche parabolique de direction la droite d'équation } y = 2x.$$



Étudions les branches infinies de la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x + \sqrt{x}$ .

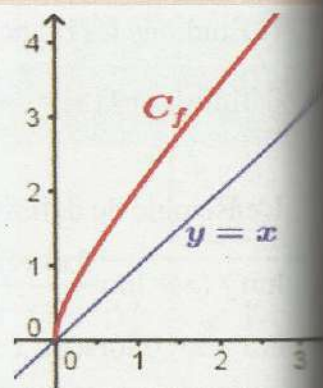
L'ensemble de définition de  $f$  est  $D_f = [0, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{x} = +\infty; \text{ on calcule } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = 1; \text{ on calcule ensuite}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x). \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

Interprétation : la courbe de  $f$  admet une branche parabolique de direction la droite d'équation  $y = x$ . Ci-contre est un aperçu de la courbe de  $f$ .



Étudions les branches infinies de la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = 2x - \sin x$ .

Pour tout réel  $x$ ,  $2x - 1 \leq 2x - \sin x \leq 2x + 1$ ; comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 1 = +\infty$  alors par comparaison

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \text{ on calcule } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{\sin x}{x} = 2.$$

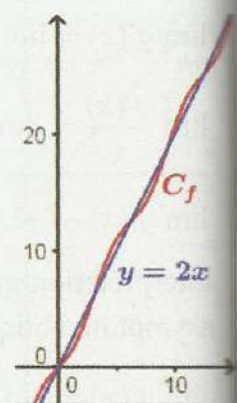
En effet lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ ,  $x > 0$  et donc  $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$ ;

comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  le théorème des gendarmes permet de

conclure que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ . On calcule ensuite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x)$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\sin x; \text{ cette dernière limite n'existe pas.}$$

La courbe de  $f$  n'a ni branche parabolique, ni asymptote. La droite d'équation  $y = 2x$  est une direction asymptotique pour la courbe de  $f$ . Ci-contre un aperçu de la courbe de  $f$ .



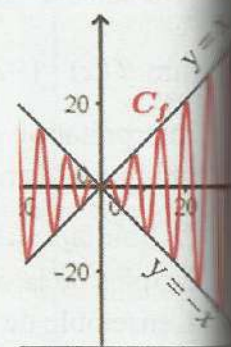
Étudions les branches infinies de la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x \sin x$ .

Pour  $x > 0$ ,  $-x \leq x \sin x \leq x$  d'où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  est comprise entre  $-\infty$  et  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x \text{ qui n'existe pas. La courbe de } f \text{ n'a donc}$$

ni direction asymptotique, ni branche parabolique, ni asymptote mais oscille entre les droites d'équations  $y = x$  et  $y = -x$ .

On a le même raisonnement à  $-\infty$



### Méthode

Soit  $x_0 \in \{-\infty; +\infty\}$ .

• Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  est un réel  $b$  alors la droite horizontale d'équation  $y = b$  est une asymptote à  $C_f$  en  $x_0$ .

• Sinon, si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty$  on calcule  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{x}$ .

♦ Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{x} = \pm \infty$  alors  $C_f$  a en  $x_0$  une branche parabolique ayant la direction de l'axe des ordonnées.



- ♦ Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{x} = 0$  alors  $C_f$  a en  $x_0$  une branche parabolique ayant pour direction l'axe des abscisses (qui est une direction asymptotique).
- ♦ Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{x}$  est un réel  $a$  différent de 0 alors  $C_f$  a une direction asymptotique qui est la droite d'équation  $y = ax$ . On calcule ensuite  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - ax$ .
  - ☞ Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - ax$  est un réel  $b$  alors la droite d'équation  $y = ax + b$  est une asymptote oblique en  $x_0$  à  $C_f$ .
  - ☞ Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - ax = \pm\infty$  alors  $C_f$  en  $x_0$  est une branche parabolique de direction la droite d'équation  $y = ax$ .
  - ☞ Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - ax$  n'existe pas alors  $C_f$  n'a ni branche parabolique, ni asymptote.
- ♦ Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{x}$  n'existe pas alors  $C_f$  n'a ni direction asymptotique, ni branche parabolique, ni asymptote.

### Remarque

L'étude des branches infinies d'une fonction  $f$  pourrait se résumer à la question suivante : "Existe-t-il une fonction plus simple que  $f$  qui se comporte comme  $f$  au voisinage de  $+\infty$  (ou de  $-\infty$ ) ?"

Pour répondre à cette question, on cherche donc une fonction  $g$  plus simple telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$ . Dans cette leçon, on s'est contenté de comparer  $f$  avec des fonctions affines (i.e. des droites). Mais on pourrait comparer  $f$  à des fonctions qui ne sont pas affines (racines carrées,  $\ln$ ...)

Exemple:

$$f(x) = \sqrt{x^4 + \cos x} \text{ et } g(x) = x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x^4 + \cos x} + x^2} = 0$$

$$\text{car } \left| \frac{\cos x}{\sqrt{x^4 + \cos x} + x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Note : La courbe  $C_g$  de  $g$  est une courbe asymptote à  $C_f$  à  $+\infty$

### S'exercer

Étudier les branches infinies si possible aux courbes des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définies par:

$$a(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 3}; \quad b(x) = \frac{x^2 + 1}{2\sqrt{x} - 3}; \quad c(x) = \frac{x^4 + 2x^3 - 1}{x^2 + 4}; \quad d(x) = \frac{x + x + 1}{x^2 + 4};$$

$$e(x) = x(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + 1}) \quad f(x) = \frac{\cos x}{x}; \quad g(x) = \frac{\sqrt{9x^4 + 3x^3 - 1}}{x^2 + 1}.$$



## S'ENTRAÎNER

## LIMITES DE FONCTIONS

Dans tous ces exercices, les fonctions sont définies de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$

**1**

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x - \sqrt{2x^2 + 3};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x - \sqrt{2x^2 + 3};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2x^2 - 3} + x.$$

**2**

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \sqrt{-1 + 5x^3};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2 - 2} + x;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{-2 + 3x^3}.$$

**3**

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 2x - 2};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2\sqrt{x}}{2 + 3x};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - 3x}{2x - 4};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 - x^2 + 3}{2 - x^2}.$$

**4**

Déterminer dans chaque cas les limites de la fonction  $f$  en  $x_0$ .

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x \cos x}; x_0 = 0; x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$f(x) = \frac{2 \cos x}{2 \sin x - 1}; x_0 = \frac{5\pi}{6}; x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$f(x) = \frac{-x^2 + 5x}{2x}; x_0 = 0; x_0 = -\infty.$$

$$f(x) = \frac{x-3}{5 \sin x}; x_0 = 0; x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{5x^2}; x_0 = 0; x_0 = \pi.$$

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{2x - \pi}; x_0 = 0; x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{\sin x}; x_0 = 0; x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

**5**

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1+x)^2}{x^2 - 2}.$$

**6**

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x+3} - 3}{2-x}; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-6}{\sqrt{x+1}-2};$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-4}{\sqrt{x+7}-3}.$$

**7**

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{x^2 + x - 6}{-3x^2 + 7x + 6};$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x^2 + 3x + 1}{1-x};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - x^2 + 1}{-3x^3 - x}.$$

**8**

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)^3}{x^2 - 3}; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{x^2 + 3}{2-x};$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x^2 - 5x + 6}{(2-x)^2}; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{-2x^2 - x + 6}{x^2 - 2x - 8}.$$



Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 2x}{x - 3}; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x - 3};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+5} - x}{\sqrt{x^2 - x}}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-1}{x+2};$$

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \frac{1}{x}}{2x^2 + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 4};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x} - 4}{\sqrt{x+1} - 3}; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cos \frac{1}{x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{1 - 3x^2};$$

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3x^2 + 7x - 5}{1 + x + x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-5x}{x + 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 5x}{x^2 + 4x + 3}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{1-x}{x+2}};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 4};$$

Calculer la limite de  $f$  en  $x_0$  dans les cas suivants :

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}, \quad x_0 = +\infty;$$

$$f(x) = x^3 \left( \cos \frac{1}{x} - 2 \right), \quad x_0 = +\infty;$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 3x - 10}, \quad x_0 \in \{2, 5, +\infty, -\infty\}.$$

Déterminer les limites éventuelles de :

$$f(x) = (x-2) \left( 1 + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2} \right)$$

respectivement en 2, en  $+\infty$  et en  $-\infty$ ;

$$b) f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} \text{ respectivement en 1, en } +\infty$$

et en  $-\infty$ ;

$$c) f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{ax}{(x^2-1)^2} \text{ respectivement}$$

en 1, en  $+\infty$ , et en  $-\infty$ . (on discutera éventuellement suivant les valeurs de  $a$ ).

14

Déterminer les limites éventuelles de :

$$a) \frac{\tan 3x}{\sin 3x} \text{ en } 0;$$

$$b) \frac{1 - \cotan x}{x - \frac{\pi}{2}} \text{ en } \frac{\pi}{2};$$

$$c) \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} \text{ en } 0;$$

$$d) \frac{2 \tan x + \sin x}{x} \text{ en } 0;$$

$$e) \frac{\sin 2x}{1 - \cos x} \text{ en } 0;$$

$$f) \frac{\sqrt{3} \cos x - \sin x}{x - \frac{\pi}{3}} \text{ en } \frac{\pi}{3};$$

$$g) (x+1) \tan \left( \frac{1}{x} \right) \text{ en } +\infty;$$

15

Déterminer les limites éventuelles respectives en 1 et en  $+\infty$  de la fonction  $f$  dans chaque cas :

$$a) f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 + x^2}}{x - 1};$$

$$b) f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^3 - x} - \sqrt[3]{x^3 - 7x + 6}}{x - 1};$$

$$c) f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^4 + x^3 + 2} - \sqrt[5]{x^2 + 2x}}{x^3 - x^2 + 5}.$$

16

Déterminer la limite éventuelle en  $-\infty$  de

$$f(x) = \sqrt[3]{-8x^3 - 8x + 16} + 2x.$$



**17**

Déterminer la limite éventuelle en 0 de

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}.$$

**18**

Déterminer la limite éventuelle en 2 de

$$h(x) = \sqrt{|x-2|} + 2.$$

**19**

Déterminer la limite éventuelle en 0 de

$$i(x) = \sqrt{|x|} - 4 - 2.$$

## LIMITES ET COMPARAISON

**20**

On considère la fonction

$$f : x \mapsto \frac{2x + \sin x}{x-1}.$$

1) Démontrer que pour tout  $x$ , on a :

$$-\frac{2x-1}{x-1} \leq f(x) \leq \frac{2x+1}{x-1}.$$

2) En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ .**21**

On considère la fonction

$$f : x \mapsto x^2 - 3 \sin x.$$

Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .**22**Soit une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  telle que pour tout réel  $x$ ,  $f(x) \geq x^2$ .Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .**23**

Calculer les limites suivantes.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x + 1}{1+x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x\sqrt{x}};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \cos x}{2+x}.$$

**24**Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par

$$f(x) = \frac{E(x)}{x} \text{ où } E \text{ désigne la fonction partie entière.}$$

1) Démontrer que pour tout réel  $x$ ,  $x-1 \leq E(x) \leq x$ .2) En déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ .**25**Déterminer la limite éventuelle en  $+\infty$  de la fonction  $f$  dans chacun des cas suivants :

$$1) f(x) = (2 - \sin x)x^2;$$

$$2) f(x) = \frac{3x}{\cos x - 3}.$$

**26**

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos x}{\pi - 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 - 2x) \tan x;$$

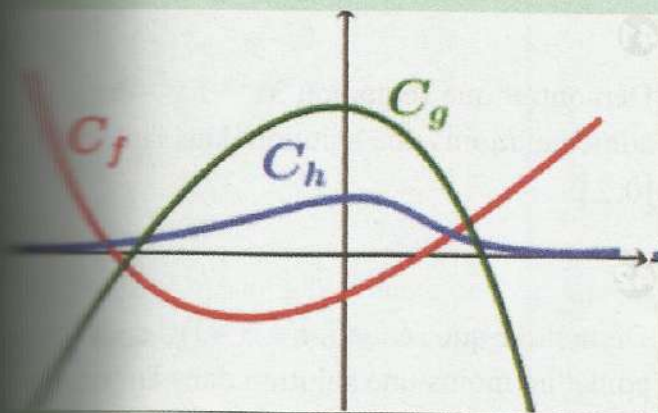
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos x}}.$$

## LECTURE GRAPHIQUE

**27**Le graphique donne les courbes de trois fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$  définies sur  $\mathbb{R}$ . Conjecturer si possibles sur les limites éventuelles à  $-\infty$  et à  $+\infty$  des fonctions :  $f+g$  ;

$$f-g; fg; fh; g-h; \frac{f}{g}; \frac{f}{h}; \frac{g}{h}; f \circ g$$





## CONTINUITÉ

Indiquer dans chaque cas si la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 6;$$

$$f(x) = \frac{-3x^2 + 6}{x^2 - 2x + 5};$$

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & \text{si } x < 2 \\ \frac{1}{2}x - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases};$$

$$f(x) = x|x - 3| + 2x - 9;$$

$$f(x) = \sqrt{4x^2 - 3x + 1};$$

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{x^2 - 1}{x + 1} & \text{si } x > -1 \end{cases}.$$

Même question avec la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Dans chaque cas, déterminer la valeur de  $m$  pour que  $f$  soit continue sur  $\mathbb{R}$ .

$$f(x) = \begin{cases} m & \text{si } x = -1 \\ \frac{x^2 - 1}{x + 1} & \text{si } x \neq -1 \end{cases};$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{x^2 + 1}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = m \end{cases}.$$

## PROLONGEMENT PAR CONTINUITÉ

31

Dire si les fonctions suivantes admettent un prolongement par continuité en  $x_0$ , si oui la définir.

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{3x}; \quad x_0 = 0.$$

$$f(x) = 2 \frac{\cos 2x - 1}{x}; \quad x_0 = 0.$$

32

Même question avec la fonction  $f$  dans chacun des cas suivants :

$$a) f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \text{ en } x_0 = 0.$$

$$b) f(x) = x \tan \frac{1}{x} \text{ en } x_0 = 0.$$

33

Déterminer le prolongement par continuité de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par

$$f(x) = \frac{1}{2x^2} [(1+x)^n - 1 - nx] \text{ où } n \geq 2.$$

34

Les fonctions  $f$  et  $g$  suivantes sont-elles prolongeables par continuité en 0 ?

$$f(x) = x \left| 1 + \frac{1}{x} \right|; \quad g(x) = \frac{x^2 - |x|}{x^2 + |x|}.$$

35

Étudier le prolongement par continuité de la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = x \cos \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0.$$

## FONCTIONS CONTINUES ET STRICTEMENT MONOTONES

36

Soit  $f$  une fonction continue sur  $I = [-1; 5]$ .

On suppose que  $f(-1) = -4$  ;  $f(5) = 3$ .



- 1) Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet au moins une solution dans  $I$ .  
 2) Quelle hypothèse supplémentaire faut-il faire pour que cette solution soit unique ?

**37**

Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  ;

on suppose que  $f(-5) = -1$  ;  $f(-3) = -2$  ;  
 $f(0) = 1$  ;  $f(2) = 4$  ;  $f(5) = -5$  ;  $f(6) = 1$ .

Recopier et compléter les phrases suivantes :

- L'équation  $f(x) = \frac{1}{2}$  admet au moins .... solution(s) dans  $\mathbb{R}$ .
- L'équation  $f(x) = 0$  admet au moins .... solution(s) dans  $\mathbb{R}$ .
- L'équation  $f(x) = 4,5$  admet .... solution dans  $\mathbb{R}$ .
- L'équation  $f(x) = 3$  admet au moins .... solution(s) dans  $\mathbb{R}$ .

**38**

On considère le polynôme  $p$  définie pour tout réel  $x$  par  $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$ .

- 1) Étudier les variations de  $p$ .
- 2) Montrer que l'équation  $p(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha \in ]1,6;1,7[$ .
- 3) Dresser le tableau de signe de  $p(x)$ .

**39**

On considère l'équation (E):  $x^3 + 3x - 2 = 0$ . Justifier que (E) admet une unique solution dans  $\mathbb{R}$ , puis donner un encadrement d'amplitude  $10^{-3}$  de cette solution.

**40**

On considère la fonction

$$f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x.$$

Démontrer, que l'équation  $f(x) = -1$  admet au moins une solution dans l'intervalle  $[-3;0]$ .

**41**

Démontrer que l'équation  $3x^4 - 8x^3 + 6x^2 = 3$  admet au moins une solution dans l'intervalle  $[0;2]$ .

**42**

Démontrer que l'équation  $(3x-1)\sqrt{x} = 1$  admet au moins une solution dans l'intervalle  $[0;1]$ .

**43**

Montrer que l'équation  $x^2 = x \sin x + \cos x$  admet deux solutions réelles.

**44**

Pour tout entier  $n \geq 2$ , on considère la fonction  $f_n$  définie sur par  $f_n(x) = x^3 - 2nx + 1$ .  
 Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ , l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une unique solution dans  $[0;1]$ .

**45**

Le tableau suivant est le tableau des variations d'une fonction  $f$  continue sur l'intervalle  $I = [-5;8]$ . Déterminer le nombre de solutions dans  $I$  de l'équation  $f(x) = 0$ .

| $x$    | -5 | 0 | 8  |
|--------|----|---|----|
| $f(x)$ | 1  | 2 | -6 |

**IMAGE D'UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION CONTINUE.**

**46**

Dans chacun des cas suivants déterminer  $f(K)$

•  $f(x) = x^2 - 3x + 2$   $K = [2,1]$ ;

•  $f(x) = \frac{-2x+5}{x-3}$   $K = [-4,-1]$ ;

•  $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$   $K = [0, +\infty[$ ;



$$1) f(x) = x^3 - 3x + 1 \quad K = [-4, 4];$$

$$2) f(x) = 2 \cos x \quad K = \mathbb{R};$$

$$3) f(x) = |3x^2 - 1| \quad K = ]-\infty, 0].$$



On donne ci-dessous le tableau des variations d'une fonction  $f$ .  $f$  est continue sur  $] -\infty; 8[$  et sur  $] 8; +\infty[$ .

| $x$    | $-\infty$ | 0 | 8         | $+\infty$ |
|--------|-----------|---|-----------|-----------|
| $f(x)$ | 1         | 2 | $-\infty$ | $+\infty$ |

1) Dans chacun des cas suivants déterminer  $f(I)$ .

a)  $I = ]-\infty; 0]$ ; b)  $I = [0; 8[$ ; c)  $I = ] 8; +\infty[$ ; d)  $I = ]-\infty; 8[$ ;

e)  $I = ] 8; +\infty[$ ; f)  $I = \mathbb{R}$ .

2) Montrer que la restriction de  $f$  à  $I = [0; 8[$  est une bijection de  $I$  vers un intervalle  $J$  que l'on précisera.

3) Donner en justifiant le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = 0$ .

4) Même question avec l'équation  $f(x) = 3$ .



Montrer que la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = x^3 - 3x + 2 \text{ est une bijection de } [1; +\infty[$$

vers un intervalle  $J$  à préciser.

Tracer le tableau de variation de  $f^{-1}$ .



1) Montrer que la fonction  $f: t \mapsto 1 - \cos t$  est une bijection de  $[0, \pi]$  vers  $[0; 2]$ .

2) Tracer les courbes représentatives de  $f$  et  $f^{-1}$ .



1) Montrer que la fonction  $f: x \mapsto \frac{x}{\sin x}$  réalise

une bijection de  $[0, \pi]$  vers un intervalle que l'on précisera.

2) Tracer les courbes représentatives de  $f$  et  $f^{-1}$ .

## ÉTUDE DES BRANCHES INFINIES.

51

Etudier le comportement asymptotique des fonctions suivantes définies par :

$$f(x) = \frac{\cos x}{x}; \quad f(x) = \frac{x^2 + \sin x}{x};$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{9x^4 + 3x^2 - 1}}{x^2 - 1}; \quad f(x) = \frac{2x^3 + x - 1}{x^2 + 1};$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^9 + 2x}}{x^2 + 1}; \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x}{|x - 1| + x}.$$

52

Etudier les branches infinies des fonctions suivantes définies par :

$$f(x) = x^2 + 2 \cos 2x; \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x}{|x - 1| + x};$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4}; \quad f(x) = \sqrt{|x^4 - x^2|}$$

$$f(x) = 2x - \sqrt{4x^2 - 3x + 2};$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} - \frac{1}{2}x.$$

53

Etudier les branches infinies des fonctions suivantes définies par :

$$f(x) = 2x - \sqrt{x}; \quad f(x) = x \sqrt{\frac{x+1}{x-2}};$$

$$f(x) = 2x - 2 + \frac{x-2}{x^2 + 2x + 5};$$

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 6}{x^2 + 1}$$

54

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x \left( \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right)$ .

On note  $C_f$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) Montrer que  $f$  est une fonction impaire.



- 2) Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son domaine de définition.
- 3)  $f$  admet-elle un prolongement par continuité en 0. Justifier votre réponse.
- 4) On désigne par  $g$  la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
  - a) Montrer que la droite  $(D): y = x$  est une asymptote à la courbe de  $g$ .
  - b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - 1}{x}$  et préciser l'allure de la courbe de  $g$  au voisinage du point  $A(0;1)$ .
  - c) Montrer que  $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  et dresser le tableau de variation de  $g$ .
- 5) Construire  $C_f$ .

**55**

Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = x^3 + 3x - 2.$$

- 1) Dresser le tableau de variation de  $g$ .
- 2) Montrer qu'il existe un réel  $\alpha$  unique tel que  $g(\alpha) = 0$ . Vérifier que  $0,59 < \alpha < 0,60$ .



# Chapitre 4

## NOMBRES COMPLEXES

### LEÇON 1 ÉTUDE ALGÈBRIQUE DE $\mathbb{C}$

1.1 INTRODUCTION AUX NOMBRES COMPLEXES-PRÉSENTATION

1.2 ÉGALITÉ ET OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES COMPLEXES SOUS FORME ALGÈBRIQUE

1.3 INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES NOMBRES COMPLEXES

1.3.1 Représentation

1.3.2 Nombres complexes conjugués

1.4 MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE

### LEÇON 2 FORME TRIGONOMÉTRIQUE ET FORME EXPONENTIELLE D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL.

2.1 ARGUMENT ET FORME TRIGONOMÉTRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

2.1.1 Présentation

2.1.2 Argument d'un produit et d'un quotient des nombres complexes.

2.3 TRIGONOMÉTRIE ET NOMBRES COMPLEXES.

2.4 RACINES  $n$ -IÈMES D'UN NOMBRE COMPLEXE

2.4.1 Racines  $n$ -IÈMES de l'unité.

2.4.2 Racines  $n$ -IÈME d'un nombre complexe non nul.

### LEÇON 3 ÉQUATIONS DANS $\mathbb{C}$

3.1 ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ ; SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES DANS  $\mathbb{C}$

3.1.1 Équations du type  $az + b = 0$ , où  $a$  et  $b$  sont des nombres complexes et systèmes d'équations linéaires dans  $\mathbb{C}$ .

3.2 ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ DANS  $\mathbb{C}$

3.2.1 Racines carrées d'un nombre complexe

3.2.2 Résolution des équations du second degré dans  $\mathbb{C}$ .

3.2.3 Somme et produit des racines

## S'ENTRAÎNER



# LEÇON 1 ÉTUDE ALGÈBRIQUE DE $\mathbb{C}$

- ▶ Reconnaître l'écriture algébrique d'un nombre complexe
- ▶ Effectuer l'addition, le produit, l'inverse, la puissance, le rapport de deux nombres complexes
- ▶ Donner une interprétation géométrique des nombres complexes.
- ▶ Déterminer le conjugué, le module d'un nombre complexe.
- ▶ Résoudre certains problèmes de lieux géométriques à l'aide des nombres complexes.

## 1.1 INTRODUCTION AUX NOMBRES COMPLEXES-PRÉSENTATION



### Prendre un bon départ

Dans l'ensemble  $\mathbb{R}$ , l'équation  $x^2 + 1 = 0$  n'a pas de solution, car  $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ .

Plus généralement on ne peut pas trouver un réel  $x$  tel que  $x^2 + b = 0$  avec  $b > 0$ .

On admet l'existence d'un nombre  $i$  appartenant à un nouvel ensemble  $\mathbb{C}$ , contenant  $\mathbb{R}$  tel que  $i^2 = -1$ .

Montrer que dans ce nouvel ensemble, en conservant les mêmes règles de calcul que dans  $\mathbb{R}$ , l'équation  $x^2 + 1 = 0$  admet deux racines et que plus généralement il en est de même de toute équation de la forme  $x^2 + b = 0$  avec  $b > 0$ .



### Retenir

- On appelle nombre complexe tout nombre qui peut s'écrire de la forme  $a + ib$  où  $a$  et  $b$  sont des nombres réels et  $i$  un nombre appelé imaginaire tel que  $i^2 = -1$ .
- L'ensemble des nombres complexes est noté  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{C} = \{a + ib, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$ .
- Pour tout nombre complexe  $z$  il existe un unique couple  $(a, b)$  de nombre réels tels que  $z = a + ib$
- L'écriture du nombre complexe  $z$  sous la forme  $a + ib$  est appelée forme algébrique (ou cartésienne) de  $z$ .
  - $a$  est la partie réelle de  $z$  notée  $\text{Re}(z)$ .
  - $b$  est la partie imaginaire de  $z$  notée  $\text{Im}(z)$ .



## Remarque

- Soit  $z = a + ib$  un nombre complexe.
  - Si  $b = 0$ , alors  $z$  est un réel. Donc  $\mathbb{R}$  est inclus dans  $\mathbb{C}$ .
  - Si  $a = 0$  et  $b \neq 0$ , alors  $z = ib$ ,  $z$  est appelé un imaginaire pur.
  - $z$  est nul si et seulement si  $\operatorname{Re}(z) = 0$  et  $\operatorname{Im}(z) = 0$ .
- Les parties réelles et imaginaires d'un nombre complexe sont des nombres réels.
- L'ensemble  $\mathbb{R}$  est une partie de  $\mathbb{C}$ .
- L'ensemble des imaginaires purs est noté  $i\mathbb{R}^*$ .

## Exemple

Considérons les nombres complexes suivants :

$$z_1 = -2i ; z_2 = -3 ; z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i ; z_4 = \cos\theta + i\sin\theta$$

$z_1$  est imaginaire pur car  $\operatorname{Im}(z_1) = -2$  et  $\operatorname{Re}(z_1) = 0$  ;

$z_2$  est réel car  $\operatorname{Im}(z_2) = 0$  ;  $\operatorname{Re}(z_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $\operatorname{Im}(z_3) = -\frac{1}{2}$  ;

$\operatorname{Re}(z_4) = \cos\theta$  et  $\operatorname{Im}(z_4) = \sin\theta$ .

- Considérons le nombre complexe  $z = x^2 - x + 2 + (x + 2)i$  où  $x$  est un réel.

-  $z$  est nul si et seulement si  $x^2 + x - 2 = 0$  et  $x + 2 = 0$ .

Or  $x + 2 = 0$  entraîne  $x = -2$  et  $(-2)^2 - (-2) - 2 = 4 - 4 = 0$

Donc  $z$  est nul si  $x = -2$ .

## S'exercer

a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous

| Nombre complexe $z$               | Partie réelle de $z$ , $\operatorname{Re}(z)$ | Partie imaginaire de $z$ , $\operatorname{Im}(z)$ |
|-----------------------------------|-----------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$   | $\frac{\sqrt{2}}{2}$                          | $\frac{\sqrt{2}}{2}$                              |
| $z = -\sqrt{3}$                   | $-\sqrt{3}$                                   | 0                                                 |
| $z = -\sqrt{3}i$                  | 0                                             | $-\sqrt{3}$                                       |
| $z = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}i$ | $-\frac{5}{2}$                                | $-\frac{3}{2}$                                    |

b) Existe-t-il un couple  $(x, y)$  de nombres réels tels que  $\left(\frac{1}{x} + y^2\right) + \left(\frac{3}{x} - 2y^2\right)i$  soit égal à  $1 + i$ ?

c) On considère le nombre complexe  $z = x^2 + x - 2 + (x + 2)i$ .

Existe-t-il des valeurs de  $x$  pour lesquelles  $z$  est un imaginaire pur ?



## 1.2 ÉGALITÉ ET OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES COMPLEXES SOUS FORME ALGÈBRIQUE

**N.B :** Les calculs se feront dans  $\mathbb{C}$  exactement comme dans  $\mathbb{R}$  mais en tenant compte du fait que  $i^2 = -1$ .



### Prendre un bon départ

Soient les nombres complexes  $z = a + ib$  et  $z' = a' + ib'$  où  $a, b, a'$  et  $b'$  sont des nombres réels.

1) Donner une condition sur  $a$  et  $a'$ ,  $b$  et  $b'$  pour que deux nombres complexes soient égaux.

1) Donner la forme algébrique de  $z + z'$ .

2) Donner la forme algébrique de  $z \times z'$ .

3) Montrer que  $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$ .

4) Soit  $z = a + ib$  un nombre complexe non nul. Montrer que l'inverse de  $z$  peut s'écrire  $\frac{a - ib}{a^2 + b^2}$ .



### Retenir

• Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

$z = z'$  si et seulement si  $\text{Re}(z) = \text{Re}(z')$  et  $\text{Im}(z) = \text{Im}(z')$ .

• Soient  $z = a + ib$  et  $z' = a' + ib'$ .

$$z + z' = (a + a') + i(b + b') ;$$

$$z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$$

•  $z = a + ib$  est un nombre complexe non nul.

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{(-b)}{a^2 + b^2}.$$

• Soient  $z = a + ib$  et  $z' = a' + ib'$ , tels que  $z' \neq 0$ ,

$$\frac{z}{z'} = \frac{a + ib}{a' + ib'} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + i \frac{a'b - ab'}{a'^2 + b'^2}.$$

### Remarque

$$i^2 = -1; (i^2)^2 = 1; \text{ soit } i^4 = 1.$$

$$\text{Pour tout entier naturel } p, i^{4p} = 1; i^{4p+1} = i; i^{4p+2} = -1; i^{4p+3} = -i$$



### S'exercer

**1.b** Déterminer la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

$$a = (2 + 3i)(1 - 2i); b = (2 - i\sqrt{3})(3 + 5i\sqrt{3}); c = (2 + 4i)(5 + 3i)^2; d = (5 + 4i)(3 + 5i)(2 - 3i)$$

$$e = \frac{4 - 5i}{6 + 5i}; g = \frac{(2 - 5i)(3 + 2i)}{3 - 2i}.$$



Donner la forme cartésienne de  $(2-i)^2$  ;  $(1+i)^7$  ;  $(2-i)^5$ .

## 1.3 INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES NOMBRES COMPLEXES

### 1.3.1 REPRÉSENTATION

#### Prendre un bon départ

Le plan  $\mathcal{P}$  est muni d'un repère orthonormé  $(o; \vec{u}, \vec{v})$ .  $\vec{P}$  le plan vectoriel associé à  $\mathcal{P}$ .

On considère les applications  $\varphi$  et  $\psi$  définies par :

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{C} &\longrightarrow \vec{P} & \text{et} & \quad \psi: \vec{P} \longrightarrow \mathcal{P} \\ a+ib &\longmapsto a\vec{u} + b\vec{v} & a\vec{u} + b\vec{v} &\longmapsto M(a; b) \end{aligned}$$

- a) La bijection  $\psi \circ \varphi$  permet de placer dans le plan  $\mathcal{P}$ , l'image du nombre complexe  $a+ib$ , puis de donner aussi l'image réciproque du point  $M(x; y)$ .
- i) Placer dans le plan  $\mathcal{P}$ , les images respectives des nombres complexes  $2-3i$ ;  $3+4i$ ;  $-5+2i$ .
- ii) Donner sous forme algébrique les nombres complexes dont les images sont respectivement les points  $A(2; -1)$ ;  $B(\sqrt{2}; 3)$ ;  $C(4; 0)$
- b) Montrer que  $\varphi(z+z') = \varphi(z) + \varphi(z')$  ;  $\varphi(xz) = x\varphi(z)$  où  $x$  est un nombre réel,  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes.



#### Retenir

Le nombre complexe  $z = a+ib$  est représenté dans le plan par le point  $M(z)$  de coordonnées  $(a; b)$ .  $z$  est appelée affixe du point  $M$ , tandis que  $M(z)$  est appelé point image du nombre complexe  $z$  dans le plan  $\mathcal{P}$ . On note aussi  $a+ib = z_M$ .

Le plan  $\mathcal{P}$  est appelé plan complexe ou encore plan de Cauchy. Les droites  $(o; \vec{u})$  et  $(o; \vec{v})$  sont respectivement l'axe des réels et l'axe des imaginaires du repère  $(o; \vec{u}, \vec{v})$ .

le vecteur  $\vec{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$  est le vecteur image du nombre complexe  $z$ .

On note aussi  $a+ib = z_{\vec{OM}}$ . Soient  $\vec{u}, \vec{v}$  deux vecteurs du plan, un nombre réel  $k$ .

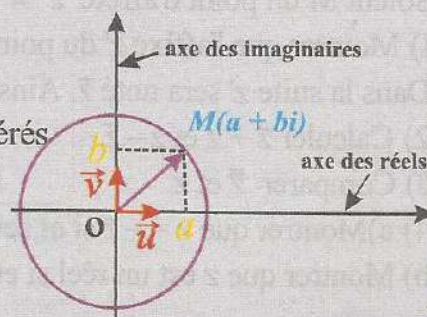
On a  $Z_{\vec{u}+\vec{v}} = Z_{\vec{u}} + Z_{\vec{v}}$  et  $Z_{k\vec{u}} = kZ_{\vec{u}}$ .

Pour tout bipoint  $(M; N)$ ,  $Z_{\vec{MN}} = Z_N - Z_M$ .

Si un point  $G$  est le barycentre d'un système des points pondérés

$\{(A_1, a_1); (A_2, a_2); \dots; (A_n, a_n)\}$  alors

$$Z_G = \frac{a_1 \times Z_{A_1} + a_2 \times Z_{A_2} + \dots + a_n \times Z_{A_n}}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$





**Exemple**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$

- 1) Déterminer les affixes des points A, B et C de coordonnées respectives  $(2, -2)$  ;  $(-3, 0)$  et  $\left(0, \frac{5}{2}\right)$ .

Désignons par  $z_A$ ,  $z_B$  et  $z_C$  les affixes des points A, B et C.

$$z_A = 2 - 2i ; z_B = -3 ; z_C = \frac{5}{2}i.$$

- 2) L'affixe du point A' symétrique à A par rapport à la droite de repère  $(O, \vec{u})$  est  $z_{A'} = 2 + 2i$   
 3) L'affixe du point A'' symétrique de A par rapport à O est  $z_{A''} = -2 + 2i$ .  
 4) L'affixe du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est le nombre complexe  $z_B - z_A = -3 - 2 + 2i$  ; soit  $-5 + 2i$ .

**S'exercer**

- 1.d On considère les nombres complexes  $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$  ;  $z_2 = 1 + 2i$  ;  
 $z_3 = -2 - 3i$  ;  $z_4 = -1 - 2i$ , affixes respectives des points A, B, C et D.

Déterminer les affixes des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{BD}$  et  $\overrightarrow{AC}$ .

- 1.e On donne les nombres complexes  $z = -2 + 3i$  et  $z' = 2 + i$ .

a) Donner l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes  $z + z'$ ,  $zz'$  et  $z^2$ .

b) Déterminer le nombre complexe  $z$  tel que  $3iz + \frac{2i-5}{3i} = -15 + 13i$ .

c) Déterminer les nombres complexes  $z$  et  $z'$  tels que  $\begin{cases} iz - z' = 2i \\ (1-i)z + (2+i)z' = 1 + 4i \end{cases}$ .

- 1.f Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe  $z$  tels que le nombre complexe  $Z = z^2 + 2z - 3$  soit un réel.

**1.3.2 NOMBRES COMPLEXES CONJUGUÉS****Prendre un bon départ**

Le plan  $\mathcal{P}$  est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

Soient M un point d'affixe  $z = a + ib$  et M' le symétrique de M par rapport à la droite de repère

- 1) Montrer que l'affixe  $z'$  du point M' est le nombre complexe  $z' = a - ib$ .

Dans la suite  $z'$  sera noté  $\bar{z}$ . Ainsi  $\bar{z} = a - ib$ .

2) Calculer  $\bar{z} + z$  et  $z - \bar{z}$ .

3) Comparer  $\bar{\bar{z}}$  et  $z$ .

4) a) Montrer que  $z = -\bar{z}$  si et seulement si,  $z$  est un imaginaire pur.

b) Montrer que  $z$  est un réel si et seulement si  $z = \bar{z}$ .

5) Comparer  $\overline{z+z'}$  et  $\bar{z} + \bar{z'}$ ,  $\overline{zz'}$  et  $\bar{z}\bar{z'}$ ,  $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}$  et  $\frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$  ( $z' \neq 0$ ).



## Retenir

- Soit  $z = a + ib$  un nombre complexe. Le nombre  $\bar{z} = a - ib$  est le conjugué de  $z$ .
- Quel que soit le nombre complexe  $z$  on a :  
 $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$ ;  $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$ .  
 $z = -\bar{z}$  si et seulement si  $z$  est un imaginaire.  
 $z = \bar{z}$  si et seulement si,  $z$  est un réel.
- Quels que soient les nombres complexes  $z$  et  $z'$  on a :  
 $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$ ;  $\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z}'$ .  
 $\left(\frac{z}{z'}\right) = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \quad (z' \neq 0)$ .

## Remarque

- Si  $z = a + ib$  ( $a \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{R}$  est un nombre complexe, alors  $z \times \bar{z} = a^2 + b^2$ .
- $M(z)$  et  $M'(\bar{z})$  sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

## Exemple

1) Mettons le nombre complexe  $\frac{3-2i}{2-i}$  sous la forme algébrique.

$$\frac{3-2i}{2-i} = \frac{(3-2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{4}{5} - \frac{7}{5}i.$$

2) Mettons  $\frac{z}{z'} = \frac{a+ib}{a'+ib'}$  sous la forme algébrique.

D'après la remarque ci-dessus  $z' \times \bar{z}' = a'^2 + b'^2$ .

$$\frac{z}{z'} = \frac{z\bar{z}'}{z'\bar{z}'} = \frac{(a+ib)(a'-ib')}{(a'+ib')(a'-ib')} = \frac{(aa'+bb') + i(a'b - b'a)}{a'^2 + b'^2}.$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{aa'+bb'}{a'^2 + b'^2} + i \frac{a'b - b'a}{a'^2 + b'^2}.$$

## S'exercer

1g On considère les nombres complexes  $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$  et  $z' = \frac{1}{2\sqrt{3}+2i}$ .

a) Calculer les conjugués des nombres complexes  $z$  et  $z'$ .

b) Calculer sous forme algébrique  $zz'$ ;  $\frac{z}{z'}$ ;  $z^3$ ;  $z^6 \times z'^{12}$ ;  $\frac{z^3}{z'^{13}}$ .



## 1.4 MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE



## Prendre un bon départ

Soit  $z = a + ib$  un nombre complexe.

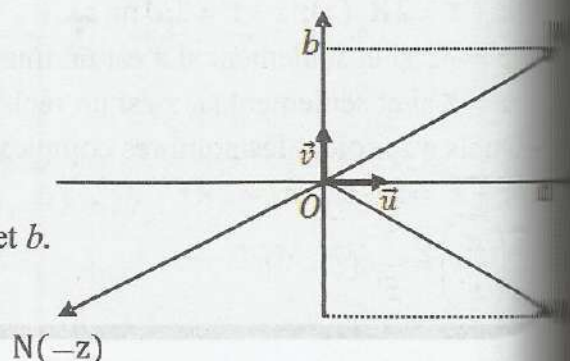
M son point image dans un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  du plan.

N le point d'affixe  $-z$  et M' d'affixe  $\bar{z}$ .

1) Calculer  $\|\vec{OM}\|$ ,  $\|\vec{ON}\|$  et  $\|\vec{OM'}\|$  en fonction de  $a$  et  $b$ .

2) Comparer  $\|\vec{OM}\|$ ,  $\|\vec{ON}\|$  et  $\|\vec{OM'}\|$ .

3) Montrer que  $OM^2 = z \cdot \bar{z}$ .



## Retenir

- Le module du nombre  $z = a + ib$  est le nombre réel positif ou nul  $\sqrt{z\bar{z}}$ .

On le note  $|z|$  et on le lit «module de  $z$ ».

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

- Pour tout nombre complexe  $z$ ,  $|z| = |-z| = |\bar{z}|$ .
- $(|z| = 0)$  équivaut à  $(z = 0)$ .
- Si M a pour affixe  $z$  et M' a pour affixe  $z'$  alors  $|z| = \|\vec{OM}\|$  et  $|z' - z| = \|\vec{MM'}\|$ .

## Remarque 1

- Quels que soient les nombres complexes  $z$  et  $z'$ ,

$$|zz'| = |z||z'|.$$

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \text{ avec } z' \neq 0.$$

En effet  $|zz'| = \sqrt{(zz')(\overline{zz'})} = \sqrt{z\bar{z}} \times \sqrt{z'\bar{z}'} = |z||z'|$ .

D'autre part si  $z' \neq 0$ ,  $z' \times \frac{1}{z'} = 1$ , d'où  $\left| z' \times \frac{1}{z'} \right| = 1$ ;  $|z'| \times \left| \frac{1}{z'} \right| = 1$ .

D'où  $\left| \frac{1}{z'} \right| = \frac{1}{|z'|}$ . Par suite  $\left| \frac{z}{z'} \right| = \left| z \times \frac{1}{z'} \right| = |z| \times \left| \frac{1}{z'} \right| = |z| \times \frac{1}{|z'|} = \frac{|z|}{|z'|}$ .

- Pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $|z^n| = |z|^n$ .

- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$  (inégalité triangulaire).

En effet  $\|\vec{OM} + \vec{OM'}\| \leq \|\vec{OM}\| + \|\vec{OM'}\|$ , par suite  $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ .



**Remarque 2**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . On considère les points A et B du plan d'affixes respectives  $a$  et  $b$ .

- L'ensemble des points M du plan d'affixe  $z$  tels que  $|z-a| = |z-b|$  est la médiatrice du segment  $[AB]$ .

En effet  $|z-a| = |z-b|$  est équivalent à  $\|\vec{MA}\| = \|\vec{MB}\|$  ou  $MA=MB$ .

- L'ensemble des points  $M(z)$  du plan tels que :  $|z-a| = r$  ( $r > 0$ ) est le cercle de centre A et de rayon  $r$ .

En effet  $|z-a| = r$  est équivalent à  $\|\vec{MA}\| = r$  ou  $MA = r$ .

- La recherche de l'ensemble des points  $M(z)$  du plan tels que :  $\frac{|z-a|}{|z-b|} = r$  ( $r > 0$ ) se ramène

à la ligne de niveau  $r$  de  $t \mapsto \frac{MA}{MB}$ .

**Exemple 1**

1) Déterminons l'ensemble  $(\Gamma)$  des points M d'affixe  $z$  tels que  $|z-1+i| = 2$ .

$|z-1+i| = 2$  équivaut à  $|z-(1-i)| = 2$ .

Soit A le point d'affixe  $z_A = 1-i$ .

$|z-(1-i)| = 2$  équivaut à  $|z-z_A| = 2$ , qui est équivalent à  $\|\vec{AM}\| = 2$ .

$(\Gamma)$  est le cercle de centre A(1; -1) et de rayon 2.

2) Déterminons l'ensemble (D) des points M d'affixe  $z$  tels que

$$|z+2+3i| = |z+1-2i|.$$

$$|z+2+3i| = |z+1-2i| \text{ équivaut à } |z-(-2-3i)| = |z-(-1+2i)|;$$

Soient A et B les points d'affixes respectives  $z_A = -2-3i$  et  $z_B = -1+2i$ .

$$|z-(-2-3i)| = |z-(-1+2i)| \text{ équivaut à } \|\vec{AM}\| = \|\vec{BM}\|.$$

$\|\vec{AM}\| = \|\vec{BM}\|$  signifie que M appartient à la médiatrice de  $[AB]$ .

(D) est donc la médiatrice du segment  $[AB]$ .

**Exemple 2**

1) Déterminons l'ensemble des points M d'affixe  $z$  tels que  $z\bar{z} + i(z-\bar{z}) - 3 = 0$ .

Posons :  $z = x + iy$

$$\text{On a } z \times \bar{z} = x^2 + y^2 \text{ et } z - \bar{z} = x + iy - x + iy = 2iy.$$

$$z\bar{z} + i(z-\bar{z}) - 3 = 0 \text{ équivaut à } x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0.$$

$x^2 + (y-1)^2 = 4$  est une équation cartésienne de l'ensemble cherché. C'est le cercle de centre  $(0; 1)$  et de rayon 2.

2) Déterminons l'ensemble des points  $M(z)$  tels que  $\frac{2z-1}{z^2}$  soit réel.



$\frac{2z-1}{z^2}$  est réel si et seulement si  $\frac{2z-1}{z^2} = \overline{\frac{2z-1}{z^2}}$ .

On a :  $\bar{z}^2(2z-1) = z^2(2\bar{z}-1)$  ;  $2z\bar{z}^2 - \bar{z}^2 = 2z^2\bar{z} - z^2$  ;

$2z\bar{z}(\bar{z}-z) = (\bar{z}-z)(\bar{z}+z)$  ;  $(\bar{z}-z)(2z\bar{z} - (z+\bar{z})) = 0$  ;

$z = \bar{z}$  ou  $2z\bar{z} - (z+\bar{z}) = 0$ .

Posons :  $z = x + iy$

On a :  $z \in \mathbb{R}$  ou  $2(x^2 + y^2) - 2x = 0$  ;

$z \in \mathbb{R}$  ou  $x^2 + y^2 - x = 0$  ;

$$z \in \mathbb{R} \text{ ou } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}.$$

L'ensemble cherché est la réunion de l'axe des réels et du cercle de centre

$\Omega\left(\frac{1}{2}\right)$  et de rayon  $\frac{1}{2}$  privé du point O.

3) Déterminons l'ensemble des points M du plan d'affixe  $z$  tels que :  $\frac{z+i}{z-i} = 3$ .

Considérons  $A(-i)$  ;  $B(i)$ .

L'ensemble cherché est l'ensemble des points M du plan tels que :  $\frac{MA}{MB} = 3$ .

$\frac{MA}{MB} = 3$  est équivalent successivement à  $MA^2 - 9MB^2 = 0$  ;

$$(\vec{MA} - 3\vec{MB}) \cdot (\vec{MA} + 3\vec{MB}) = 0.$$

Soit  $G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline \text{A} & \text{B} \\ \hline 1 & -3 \\ \hline \end{array}$  et  $H = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline \text{A} & \text{B} \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}$

On a :  $-2\vec{MG} \cdot 4\vec{MH} = 0$  ; soit  $\vec{MG} \cdot \vec{MH} = 0$

L'ensemble cherché est le cercle de diamètre [GH].

$$Z_G = \frac{-3Z_B + Z_A}{-2} = \frac{-3(i) + -i}{-2} = \frac{1i}{-2} = -\frac{1}{2}i$$

$$Z_H = \frac{3Z_A + Z_B}{4} = \frac{-i + 3i}{4} = \frac{1}{2}i$$

Soit I le centre de ce cercle :  $z_I = \frac{1}{2}\left(2i + \frac{1}{2}i\right) = \frac{5}{4}i$ .

Le rayon de ce cercle est  $\frac{GH}{2} = \frac{|Z_H - Z_G|}{2} = \frac{\left|2i - \frac{1}{2}i\right|}{2} = \frac{3}{4}$ .

### Exercice résolu

1) Déterminons l'ensemble (E) des points M du plan d'affixe  $z$  tels que le nombre complexe

$$\frac{2z-4}{z-i}$$
 soit un réel.



**1<sup>re</sup> méthode :**

$\frac{2z-4}{z-i}$  est défini si  $z \neq i$ . Ainsi le point  $A(0;1)$  ne peut pas appartenir à l'ensemble (E).

Posons  $z = x + iy$ .

$$\frac{2z-4}{z-i} = \frac{2(x+iy)-4}{x+iy-i} = \frac{(2x-4)+2iy}{x+(y-1)i} = \frac{[(2x-4)+2iy][x-(y-1)i]}{[x+(y-1)i][x-(y-1)i]}$$

$$\frac{2z-4}{z-i} = \frac{(2x^2-4x+2y^2-2y)}{x^2+(y-1)^2} + i \frac{2x+4y-4}{x^2+(y-1)^2}.$$

$\frac{2z-4}{z-i}$  est un réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle.

C'est-à-dire  $\frac{2x+4y-4}{x^2+(y-1)^2} = 0$ ; soit  $2x+4y-4=0$  avec  $(x,y) \neq (0;1)$ .

(E) est la droite d'équation  $x+2y-2=0$  privée du point  $A(0;1)$ .

**2<sup>de</sup> méthode :**

Posons  $Z = \frac{2z-4}{z-i}$ .

$Z$  est un réel si et seulement si  $Z = \bar{Z}$ .

Or  $Z = \bar{Z}$  si et seulement si  $\frac{2z-4}{z-i} = \frac{2\bar{z}-4}{\bar{z}+i}$ , soit successivement, avec  $z \neq i$ .

$$(2z-4)(\bar{z}+i) = (z-i)(2\bar{z}-4);$$

$$2z\bar{z} + 2iz - 4\bar{z} - 4i = 2z\bar{z} - 4z - 2i\bar{z} + 4i;$$

$$2(z+\bar{z}) + 4(z-\bar{z}) = 8i;$$

$$4\Re(z) + 4(2i\Im(z)) = 8i;$$

$$\Re(z) + 2\Im(z) = 2;$$

$$z = x + iy, \text{ alors } x + 2y = 2.$$

(E) est une droite d'équation  $x+2y=2$  privée du point  $A(0;1)$ .

**3<sup>de</sup> méthode :** Déterminons l'ensemble (F) des points M du plan d'affixe  $z$  tels que le nombre complexe

$\frac{2z-4}{z-i}$  soit un imaginaire pur.

**1<sup>re</sup> méthode :**

$\frac{2z-4}{z-i}$  soit un imaginaire pur si et seulement si  $\frac{(2x^2-4x+2y^2-2y)}{x^2+(y-1)^2} = 0$ .

$$\frac{2x^2-4x+2y^2-2y}{x^2+(y-1)^2} = 0 \text{ équivaut à } \begin{cases} 2x^2-4x+2y^2-2y = 0 \\ x^2+(y-1)^2 \neq 0 \end{cases}.$$

$$2x^2-4x+2y^2 = 0 \text{ équivaut à } x^2-2x+y^2-2y = 0.$$



$$x^2 - 2x + y^2 - y = 0 \text{ équivaut à } (x-1)^2 - 1 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0.$$

$$(x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}. \text{ Cette équation est l'équation du cercle de centre le point } B\left(1; \frac{1}{2}\right)$$

et de rayon  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .

(F) est le cercle de centre  $B\left(1; \frac{1}{2}\right)$  et de rayon  $\frac{\sqrt{5}}{2}$  privé du point  $A(0;1)$ .

### 2<sup>ème</sup> méthode :

$Z$  est un imaginaire pur si et seulement si  $Z = -\bar{Z}$ .

Or  $Z = -\bar{Z}$  si et seulement si  $\frac{2z-4}{z-i} = -\frac{2\bar{z}-4}{\bar{z}+i}$ , soit successivement, avec  $z \neq i$ .

$$(2z-4)(\bar{z}+i) = -(z-i)(2\bar{z}-4)$$

$$2z\bar{z} + i(z-\bar{z}) - 2(z+\bar{z}) = 0.$$

En posant  $z = x + iy$ .

$$2z\bar{z} + i(z-\bar{z}) - 2(z+\bar{z}) = 0 \text{ est équivalent à } 2(x^2 + y^2) + i(2iy) - 2(2x) = 0;$$

$$x^2 + y^2 - y - 2x = 0. \text{ On retrouve l'équation du cercle de la première méthode.}$$

(F) est le cercle de centre  $B\left(1; \frac{1}{2}\right)$  et de rayon  $\frac{\sqrt{5}}{2}$  privé du point  $A(0;1)$ .



## S'exercer

**1.h** Dans un plan rapporté à un repère orthonormé, on associe au point  $M$  d'affixe  $z = x + iy$  le point  $M'$  d'affixe  $z' = x' + iy'$  tel que  $z' = \frac{z+2i}{z-2}$ .

1) Déterminer l'ensemble des points  $M$  tels que  $z'$  soit un réel.

2) Déterminer l'ensemble des points  $M$  tels que  $z'$  soit un imaginaire pur.

**1.i** A tout nombre complexe  $z$  on associe, le nombre complexe  $z' = (1+i)z + 2$ .

On désigne par  $M$  le point d'affixe  $z$  et  $M'$  d'affixe de  $z'$ .

i. Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $O$  soit situé sur la médiatrice du segment  $[MM']$ .

ii. Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $\vec{OM} \cdot \vec{OM'} = 0$ .

**1.j** Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que :

$$|3z - 9 - 3i| = |z + 1 - i|.$$



**Ex 1** A tout nombre complexe  $z$  distinct de  $-1+2i$ , on associe le nombre complexe  $z' = \frac{z-2+4i}{z+1-2i}$ .

Déterminer dans chaque cas l'ensemble des points  $M$  d'affixes  $z$  vérifiant la condition exigée :

- a)  $z'$  est un nombre réel ;
- b)  $z'$  est un nombre imaginaire pur ;
- c)  $|z'|=1$  ;
- d)  $|z'|=2$  .

**Ex 2** Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  dans chacun des cas suivants :

- a)  $|z-1+2i| = 3$  ; b)  $|z-4| = |z+2i|$  ; c)  $|z-5+3i| = |z-4i|$  ;
- d)  $|z+5-i| = |z-4i|$  .

**Ex 3** Soient  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes non nuls. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait  $|z+z'| = |z|+|z'|$ .

## 1.1.1. Prendre un bon départ

Le plan complexe est muni d'un repère

orthogonal direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit  $M$  un point du plan d'affixe  $z$  non nulle

et de coordonnées  $(x, y)$ .

Soit  $\theta$  une mesure de l'angle  $(\vec{OM}, \vec{Ox})$ .

Soit  $r$  le point d'intersection de  $[O, M)$

et du cercle trigonométrique.

1) Montrer que l'affixe de  $M$  est  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ .

2) Montrer que les coordonnées de  $M$  sont  $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ .

3) En déduire que  $\frac{z}{r} = \cos \theta + i \sin \theta$ .



## LEÇON 2

FORME TRIGONOMETRIQUE ET  
FORME EXPONENTIELLE D'UN  
NOMBRE COMPLEXE NON NUL.

- ▶ Déterminer et interpréter graphiquement un argument d'un nombre complexe non nul ;
- ▶ Déterminer des arguments du conjugué et de l'opposé d'un nombre complexe non nul ;
- ▶ Déterminer des arguments d'un produit et d'un quotient de deux nombres complexes non nuls ;
- ▶ Montrer que :
  - trois points sont alignés ;
  - deux droites sont parallèles ;
  - deux droites sont perpendiculaires ;
  - quatre points sont cocycliques.
- ▶ Écrire sous forme trigonométrique et sous forme exponentielle un nombre complexe non nul ;
- ▶ Utiliser la formule de Moivre et les formules d'Euler pour faire des linéarisations et des développements.

2.1 ARGUMENT ET FORME TRIGONOMETRIQUE  
D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

## 2.1.1 PRÉSENTATION



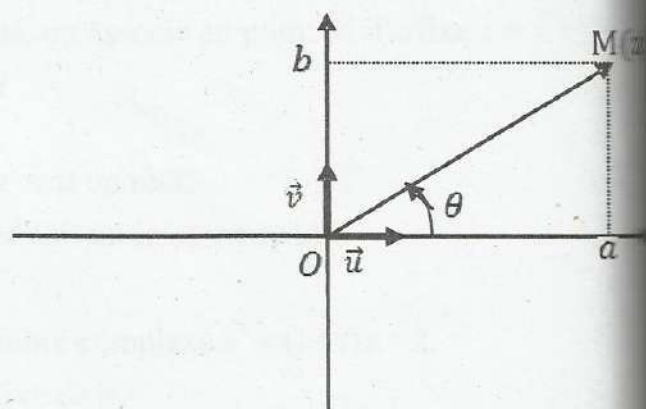
## Prendre un bon départ

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

Soit  $M$  un point du plan d'affixe  $z$  non nul et de coordonnées  $(a; b)$ .

Soit  $\theta$  une mesure de l'angle  $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$

Soit  $M'$  le point d'intersection de  $[O, M(z)]$  et du cercle trigonométrique.



1) Montrer que l'affixe de  $M'$  est  $\frac{z}{|z|}$ .

2) Montrer que les coordonnées de  $M'$  sont  $(\cos\theta, \sin\theta)$ .

3) En déduire que  $\frac{z}{|z|} = \cos\theta + i\sin\theta$ .

4) Exprimer  $\cos\theta$  et  $\sin\theta$  respectivement en fonction de  $a$  et  $b$ .



## Retenir

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

Soit  $M$  un point du plan d'affixe non nul  $z$ .

- Une mesure en radians de l'angle  $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$  est appelée argument du nombre complexe  $z$ .
- Le nombre complexe  $z$  peut s'écrire  $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ . Cette écriture est la forme trigonométrique du nombre complexe  $z$ .
- Un argument de  $z$  est noté  $\arg(z)$  alors que  $\text{Arg}(z)$  est la mesure principale de l'angle orienté  $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$ .

### Remarque 1

- 1) Si  $\theta$  est un argument d'un nombre complexe non nul  $z$ , tout autre argument de  $z$  est de la forme  $\theta + 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

En effet  $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|(\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi))$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

- 2) Lien entre la forme trigonométrique et la forme algébrique.

Soit  $z = a + ib$  la forme algébrique d'un nombre complexe non nul et  $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$  sa forme trigonométrique.

$$a = R_e(z) = |z| \cos\theta \text{ et } b = \text{Im}(z) = |z| \sin\theta.$$

$$\text{On a donc } |z| = \sqrt{a^2 + b^2}; \cos\theta = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \sin\theta = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

- 3) Deux nombres complexes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont même module et des arguments qui diffèrent d'un multiple de  $2\pi$ .

### Remarque 2

- 1) Un nombre complexe  $z$  est un réel si et seulement si  $z = 0$  ou  $\arg z = k\pi$ , avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

- 2) Soit  $z$  un nombre complexe non nul.  $z$  est un imaginaire pur si et seulement si

$$\arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

- 3)  $\arg \bar{z} = -\arg z + 2k\pi$ , avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

- 4)  $\arg(-z) = \arg z + \pi + 2k\pi$ , avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

- 5) Soient  $M$  et  $M'$  deux points d'affixes respectives  $z$  et  $z'$ .

L'affixe de  $\overrightarrow{MM'}$  est le nombre complexe  $z' - z$ . Donc un argument de  $z' - z$  est une mesure en radians de l'angle  $(\vec{u}; \overrightarrow{MM'})$ .

- 6) Deux nombres complexes  $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$  et  $\rho'(\cos\theta' + i\sin\theta')$  sont égaux si et seulement si  $(\rho = \rho' \text{ et } \theta \equiv \theta' [2\pi])$ , c'est-à-dire  $(\rho = \rho' \text{ et } \theta = \theta' + 2k\pi, k \in \mathbb{Z})$ .



## Notations

Si  $|z| = \rho$ ,  $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$  se note  $[\rho; \theta]$  où  $\rho$  et  $\theta$  désignent respectivement le module et un argument du nombre complexe  $z$ .

## Exemple

1) Posons  $z_1 = 2 - 2i$  et  $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ ;

$$|z_1| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ et } |z_2| = \sqrt{1+3} = 2$$

$$z_1 = 2\sqrt{2} \left( \frac{2}{2\sqrt{2}} - \frac{2}{2\sqrt{2}}i \right) = 2\sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = 2\sqrt{2} \left( \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right);$$

$$z_1 = \left[ 2\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4} \right].$$

$$z_2 = 2 \left( \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left( \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) = \left[ 2; -\frac{\pi}{3} \right].$$

2)  $\alpha$  est un réel de l'intervalle  $\left] -\frac{\pi}{2}; 0 \right]$ .

Posons  $z_1 = 1 + i \tan \alpha$  et  $z_2 = 1 - i \tan \alpha$ .

$$z_1 = 1 + i \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} (\cos \alpha + i \sin \alpha); \text{ comme } \alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}; 0 \right], \cos \alpha > 0 \text{ et } z_1 = \left[ \frac{1}{\cos \alpha}; \alpha \right].$$

$$z_2 = 1 - i \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} (\cos \alpha - i \sin \alpha) = \frac{1}{\cos \alpha} (\cos(-\alpha) - i \sin(-\alpha)) \text{ et } z_2 = \left[ \frac{1}{\cos \alpha}; -\alpha \right].$$

3) Prenons  $z = \left[ 2\sqrt{3}; -\frac{\pi}{3} \right]$

$$z = 2\sqrt{3} \left( \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) = 2\sqrt{3} \left( \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{3} - 3i.$$

$$4) \left[ 1; \pi \right] = \cos \pi + i \sin \pi = -1 \text{ et } \left[ 1; \frac{\pi}{2} \right] = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i.$$

## Exercice résolu

Déterminons en fonction de  $0 \leq \alpha < 2\pi$  et  $\alpha \neq \pi$ , le module et un argument du nombre complexe  $z = 1 + \cos \alpha + i \sin \alpha$ .

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1; \text{ soit } 1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha.$$

$$\text{Par suite } 1 + \cos \alpha = 1 + \cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2 \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

$$\text{D'autre part } \sin \alpha = \sin 2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2 \sin \left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos \left(\frac{\alpha}{2}\right).$$



$$z = 2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \left[ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right].$$

**Remarque :** Pour que cette forme soit la forme trigonométrique de  $z$  il faut que  $2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 0$  car le module d'un nombre complexe est toujours positif.

**1<sup>er</sup> cas :** Pour  $0 \leq \alpha < \pi$ ,  $0 \leq \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$  et  $2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 0$ , par suite :

$$|z| = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right); \arg z = \frac{\alpha}{2} + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}. z = \left[ 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right); \frac{\alpha}{2} \right].$$

**2<sup>ème</sup> cas :** Pour  $\pi < \alpha < 2\pi$ ,  $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \pi$  et  $2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) < 0$ ,

$$z = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \left[ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right]^2 = -2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \left[ -\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right].$$

$$z = -2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \left[ \cos\left(\pi + \frac{\alpha}{2}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{\alpha}{2}\right) \right] \text{ avec } -2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 0. \text{ Par suite, } |z| = -2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right);$$

$$\arg z = \pi + \frac{\alpha}{2} + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \text{ et } z = \left[ -2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right); \pi + \frac{\alpha}{2} \right].$$

## S'exercer

**2. a** Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants :

a) 8 ; b) -8 ; c)  $-4\sqrt{3} - 12i$  ; d)  $6 + i\sqrt{12}$ .

**2. b** Écrire sous forme algébrique chacun des nombres complexes suivants :

a)  $\left[ 1; \frac{\pi}{4} \right]$  ; b)  $\left[ 2; \frac{2\pi}{3} \right]$  ; c)  $\left[ \sqrt{3}; \frac{7\pi}{6} \right]$  ; d)  $\left[ 1; -\frac{\pi}{4} \right]$ .

**2. c** Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants :

a)  $\cos \alpha - i \sin \alpha$  ; b)  $-\sin \alpha + i \cos \alpha$  ; c)  $1 + \cos \alpha + i \sin \alpha$  où  $\alpha \in [0, \pi[$

(on discutera selon les valeurs de  $\alpha$ ).

**2. d** Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .

On considère les points A, B et C d'affixes respectives :  $2 + 2i$  ;  $2 - 2i$  et  $2 + 2i\sqrt{3}$ .

1) Écrire chacun des nombres complexes précédents sous forme trigonométrique.

2) Représenter avec précision les points A, B et C dans ce plan complexe.

**2. e**  $z$  est un nombre complexe d'argument  $\alpha$ .

Exprimer en fonction de  $\alpha$  un argument de chacun des nombres complexes suivants :

$\bar{z}$  ;  $-z$  et  $-\bar{z}$ .



## 2.1.2 ARGUMENT D'UN PRODUIT ET D'UN QUOTIENT DES NOMBRES COMPLEXES.



### Prendre un bon départ

Soient  $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$  et  $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ .

1) Montrer que  $zz' = rr'[\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')]$  ;

2) Montrer que  $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} [\cos(\theta - \theta') + i\sin(\theta - \theta')]$ .

3) Montrer par récurrence que quels que soient le réel  $\theta$  et l'entier naturel  $n$ ,  
 $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ .



### Retenir

Soient  $z = [r, \theta]$  et  $z' = [r', \theta']$  deux nombres complexes non nuls.

$$\bullet \quad zz' = [r, \theta] \times [r', \theta'] = [rr', \theta + \theta'];$$

$$\bullet \quad \frac{z}{z'} = \frac{[r, \theta]}{[r', \theta']} = \left[ \frac{r}{r'}, \theta - \theta' \right];$$

• Pour tout entier naturel  $n$  et pour tout nombre réel  $\theta$ ,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta). \text{ Cette formule est dite de Moivre.}$$

### Notation

Le nombre complexe de module 1 dont un argument est  $\theta$ , est noté  $e^{i\theta}$ .

L'écriture  $re^{i\theta}$  est une forme exponentielle du complexe  $z$  de module  $r$  et dont un argument est  $\theta$ .  $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

### Conséquences :

• Pour tout réels  $\theta$  et  $\theta'$  :

$$[\rho; \theta] = \rho e^{i\theta}; [\rho'; \theta'] = \rho' e^{i\theta'}; e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta + \theta')}; \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta - \theta')}.$$

$$\bullet \quad e^{i\pi} = -1; e^{i\frac{\pi}{2}} = i; e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i; e^{i0} = e^{2i\pi} = 1.$$

$$\bullet \quad \text{Pour tout entier naturel } n, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}.$$

### Exemple

1) Soit  $z = [r, \theta] = re^{i\theta}$ ;  $1 = [1; 0]$ .

$$\frac{1}{z} = \frac{[1, 0]}{[r, \theta]} = \left[ \frac{1}{r}, 0 - \theta \right] = \left[ \frac{1}{r}, -\theta \right] = \frac{1}{r} e^{i(-\theta)} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}.$$



$$1) -1 = e^{i\pi}, -z = -1 \times z = e^{i\pi} \times e^{i\theta} = e^{i(\pi+\theta)}.$$

$$(1+i)(-1+i\sqrt{3}) = -1 - \sqrt{3} + i(-1 + \sqrt{3}).$$

$$(1+i)(-1+i\sqrt{3}) = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} \times 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{11\pi}{12}\right)}.$$

$$-1 - \sqrt{3} + i(-1 + \sqrt{3}) = 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right).$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} 2\sqrt{2} \cos \frac{11\pi}{12} = -1 - \sqrt{3} \\ 2\sqrt{2} \sin \frac{11\pi}{12} = -1 + \sqrt{3} \end{cases};$$

d'où  $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$  et  $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}};$

soit  $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$  et  $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$

### Exercice résolu 1

Soit le nombre complexe  $z = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}.$

1) Mettre  $z$  sous la forme exponentielle.

2) Donner la forme algébrique de chacun des nombres complexes  $z^2, z^3.$

3) Soit  $p$  un entier naturel, donner la forme algébrique de chacun des nombres complexes  $z^{3p}, z^{3p+1}$  et  $z^{3p+2}.$

4) En déduire la forme algébrique de chacun des nombres complexes  $z^{2012}, z^{2013}$  et  $z^{2014}.$

Solution

$$1) z = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, |z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1.$$

Soit  $\theta$  un argument de  $z$ .  $\cos \theta = -\frac{1}{2}, \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$  d'où  $\theta = \frac{2\pi}{3}, z = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}.$

$$2) z^2 = \left( e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} \right)^2 = e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$z^2 = -\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$z^3 = \left( e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} \right)^3 = e^{i\left(2\pi\right)} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1.$$

3)  $p$  étant un entier naturel,

$$z^{3p} = 1^p = 1; z^{3p+1} = z^{3p} \times z = z = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2};$$



$$z^{3p+2} = z^{3p} \times z^2 = z^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$4) 2012 = 3 \times 370 + 2; 2013 = 3 \times 671; 2014 = 3 \times 671 + 1.$$

La question 3 permet d'écrire :

$$z^{2012} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}; z^{2013} = 1 \text{ et } z^{2014} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

### Exercice résolu 2

Soient A, B et C trois points distincts du plan d'affixes respectives  $a, b$  et  $c$ .

Soit le nombre complexe  $z = \frac{c-a}{c-b}$ .

- 1) Donner les affixes des vecteurs  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{BC}$ .
- 2) Donner le module de  $z$  en fonction de AC et BC.
- 3) Montrer qu'un argument de  $z$  est une mesure de l'angle  $(\widehat{BC, AC})$ .

**Solution :**

1) L'affixe de  $\overrightarrow{AC}$  est  $c-a$  et celui de  $\overrightarrow{BC}$  est  $b-c$ .

$$2) |z| = \left| \frac{c-a}{c-b} \right| = \frac{|c-a|}{|c-b|} = \frac{AC}{BC}.$$

$$3) \arg z = \arg(c-a) - \arg(b-c) = \text{mes}(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AC}}) - \text{mes}(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{BC}})$$

$$\arg z = \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{BC}, \vec{u}}) + \text{mes}(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AC}}) = \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}}).$$

### Remarque

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs non nuls du plan.  $z_u$  et  $z_v$  sont les affixes respectives des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .  
 $a, b, c$  et  $d$  sont les affixes respectives des points A, B, C et D.

$$\bullet \text{mes}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \arg \frac{z_v}{z_u};$$

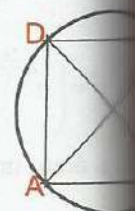
• Les points A, B et C sont alignés si et seulement si  $\frac{c-a}{b-a}$  est réel non nul.

• Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si  $\frac{c-a}{b-a}$  est un imaginaire pur.

• Le triangle ABC est rectangle et isocèle en A si et seulement si  $\frac{c-a}{b-a} = i$  ou  $\frac{c-a}{b-a} = -i$ .

• Le triangle ABC est équilatéral si et seulement si  $\frac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$  ou  $\frac{c-a}{b-a} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ .

• Les points A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si  $\frac{c-b}{c-a} : \frac{d-b}{d-a} \in \mathbb{R}^*$





**Exemple**

1. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$

On considère les points A, B, C d'affixes respectives  $a = 1 - i$  ;

$b = 3 + 2i$  ;  $c = -4 - i$  et  $d = 2 - 5i$ .

Montrons que les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{CD}$  sont orthogonaux

$$\frac{d-c}{b-a} = \frac{2-5i+4+i}{3-2i-1+i} = \frac{6-4i}{2+3i} = \frac{(6-4i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = -\frac{26i}{13} = -2i.$$

$\frac{d-c}{b-a} = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$ .  $\arg \frac{d-c}{b-a} = -\frac{\pi}{2}$  ; donc  $\text{mes}(\vec{AB}, \vec{CD}) = -\frac{\pi}{2}$  et les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{CD}$  sont orthogonaux.

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives

$a = 2 - 2i$  ;  $b = 2i$  ;  $c = -1 + i$  et  $d = -1 - i$ .

Montrons que les points A, B, C et D sont cocycliques.

$$\begin{aligned} \frac{c-b}{c-a} : \frac{d-b}{d-a} &= \left( \frac{-1+i-2i}{-1+i-2+2i} \right) : \left( \frac{-1-i-2i}{-1-i-2+2i} \right) = \frac{-1-i}{-3+3i} : \frac{-1-3i}{-3+i} = \frac{-1-i}{-3+3i} \times \frac{-3+i}{-1-3i} \\ &= \frac{(-1-i)(-3+i)}{(-3+3i)(-1-3i)} = \frac{3-i+3i+1}{3+9i-3i+9} = \frac{4+2i}{12+6i} = \frac{4+2i}{3(4+2i)} = \frac{1}{3} \in \mathbb{R}^*. \end{aligned}$$

$\frac{c-b}{c-a} : \frac{d-b}{d-a} \in \mathbb{R}^*$ . Donc  $\text{mes}(\widehat{AC}, \widehat{BC}) = \text{mes}(\widehat{AD}, \widehat{BD}) \quad [\pi]$  et les points A, B, C et D sont cocycliques.

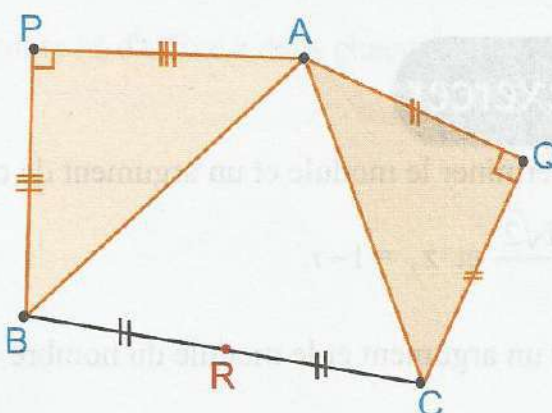
3.  $a$  est un nombre complexe non nul et  $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ .

Montrons que les points  $A(a)$  ;  $B(ja)$  et  $C(j^2a)$  sont les sommets d'un triangle équilatéral.

On pose  $b = ja$  et  $c = j^2a$

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{j^2a-a}{ja-a} = \frac{j^2-1}{j-1} = j+1 = \frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

- Le triangle ABC étant donné, on construit les points P et Q tels que les triangles APB et ACQ soient isocèles et rectangles directs de sommets respectifs P et Q. On désigne par R le milieu du segment [BC].





Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct. Démontrer que (PR) et (QR) sont orthogonales.

$$\text{On a } \frac{Z_C - Z_Q}{Z_A - Z_Q} = i \text{ et } \frac{Z_A - Z_P}{Z_B - Z_P} = i \text{ et } Z_R = \frac{Z_B + Z_C}{2}.$$

$$\frac{Z_C - Z_Q}{Z_A - Z_Q} = i \text{ entraîne } Z_C - Z_Q = i(Z_A - Z_Q); \text{ d'où } Z_Q = \frac{Z_A + Z_C}{2} + i \frac{Z_C - Z_A}{2}.$$

$$\frac{Z_A - Z_P}{Z_B - Z_P} = i \text{ entraîne } Z_P = \frac{Z_A + Z_B + i(Z_A - Z_B)}{2}.$$

$$Z_P - Z_R = \frac{Z_A + Z_B + i(Z_A - Z_B)}{2} - \frac{(Z_B + Z_C)}{2} = \frac{Z_A - Z_C + i(Z_A - Z_B)}{2}$$

$$Z_Q - Z_R = \frac{Z_A + Z_B + i(Z_C - Z_A)}{2} - \frac{Z_B + Z_C}{2} = \frac{Z_A - Z_B + i(Z_C - Z_A)}{2};$$

$$Z_P - Z_R = i \left[ \frac{(Z_A - Z_B) - i(Z_A - Z_C)}{2} \right] = i \left[ \frac{(Z_A - Z_B) + i(Z_C - Z_A)}{2} \right];$$

$$Z_P - Z_R = i[Z_Q - Z_R] \text{ donc } (Z_P - Z_R) / (Z_Q - Z_R) = i = e^{i\frac{\pi}{2}};$$

$$\arg (Z_P - Z_R) / (Z_Q - Z_R) = \frac{\pi}{2} \text{ donc } \widehat{(\vec{RQ}, \vec{RP})} = \frac{\pi}{2} \text{ et } (RQ) \perp (RP) \text{ et } \frac{PR}{QR} = 1.$$

4. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que le nombre complexe z défini par

$$z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z \text{ soit imaginaire pur.}$$

$$z' \text{ imaginaire pur si et seulement si } \arg z' = \frac{\pi}{2}[\pi] \quad (z' \neq 0) \text{ or } z' \neq 0 \text{ si } z \neq 0$$

$$\text{Pour } z \neq 0 \text{ posons } z = re^{+i\alpha}; z' = re^{i\frac{\pi}{3}} e^{i\alpha} = re^{i(\alpha + \frac{\pi}{3})}$$

$$\arg z' = \frac{\pi}{2}[\pi] \text{ si et seulement si } \alpha + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}[\pi]$$

$$\text{D'où } \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}[\pi]; \text{ mes}(\vec{e}_1, \vec{OM}) = \frac{\pi}{6}.$$

Le point M est situé sur la droite passant par O et de coefficient directeur  $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$  privée du point O.



## S'exercer

2.f a) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes :

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} \text{ et } z_2 = 1 - i.$$

b) Donner un argument et le module du nombre complexe  $z = \frac{z_1}{z_2}$ .



a) Déduire les valeurs exactes de  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$ .

1g b) Donner la forme exponentielle et la forme cartésienne de chacun des nombres complexes  $(1+i\sqrt{3})^5$  et de  $(1-i\sqrt{3})^5$ .

a) Donner la forme cartésienne de chacun des nombres complexes

$$u = (1+i\sqrt{3})^5 + (1-i\sqrt{3})^5 \text{ et } v = (1+i\sqrt{3})^5 - (1-i\sqrt{3})^5.$$

1h On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives

$$2+2i; \left(\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)i; -1 + \frac{1}{2}i \text{ et } -\frac{1}{4} + \frac{11}{4}i$$

• Montrer que les points A, B, C et D ne sont pas alignés.

• Montrer que D appartient au cercle de diamètre [AC].

2i Déterminer l'ensemble des points M d'affixe  $z$  tels que  $\frac{iz}{e^{\frac{i\pi}{6}}}$  soit réel.

2j Écrire sous forme exponentielle chacun des nombres complexes suivants:

$$a) (\sqrt{3}+i)(-1+i\sqrt{3}) ; b) (1+i)^4 ; c) (-1+i\sqrt{3})/(\sqrt{3}+i) ; d) \left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{-1+i}\right)^4.$$

2k Écrire sous forme exponentielle chacun des nombres complexes suivants :

$$a) -2ie^{-\frac{i\pi}{4}} ; b) \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} e^{-\frac{i\pi}{4}} ; c) \frac{10e^{-\frac{i\pi}{4}}}{5-5i} ; d) \frac{2e^{-\frac{i2\pi}{8}}}{1-i\sqrt{3}}.$$

2l On donne :  $z = (1+i\sqrt{3})(1+i)$ .

1) Écrire  $z$  sous forme algébrique.

2) Écrire  $1+i$  et  $1+i\sqrt{3}$  sous forme trigonométrique.

3) Déterminer les valeurs exactes de  $\cos \frac{7\pi}{12}$  et  $\sin \frac{7\pi}{12}$ .

4) Représenter dans le plan complexe les points M d'affixe  $z$  tels que  $|z|=2$

$$\arg(z+1) = \frac{\pi}{4} [\pi].$$

5) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe  $z$  dans chacun des cas suivants :

$$i. \arg(i-z) = 0[\pi];$$

$$ii. \arg(z+1-i) = \frac{\pi}{6} [2\pi];$$

$$iii. \arg\left(\frac{1}{z+1}\right) = \frac{\pi}{2} [\pi].$$



## 2.3 TRIGONOMETRIE ET NOMBRES COMPLEXES



## Prendre un bon départ

$n$  est un entier relatif.

On rappelle que  $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$  et  $e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha$

Pour tout entier naturel  $n$ ,  $e^{in\alpha} = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$  ;  $e^{-in\alpha} = \cos n\alpha - i \sin n\alpha$

a) Exprimer  $\cos \alpha$  et  $\sin \alpha$  en fonction de  $e^{i\alpha}$  et de  $e^{-i\alpha}$ .

b) Calculer  $e^{in\alpha} + e^{-in\alpha}$  ;  $e^{in\alpha} - e^{-in\alpha}$  ;  $e^{in\alpha} \times e^{-in\alpha}$ .



## Retenir

• Pour tout nombre réel  $\alpha$ ,  $\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$  et  $\sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$ .

Ces deux formules sont les formules d'Euler.

• Pour tout nombre réel  $\alpha$  et pour tout entier naturel  $n$ ,

$$\blacktriangleleft e^{in\alpha} + e^{-in\alpha} = 2 \cos(n\alpha) ; \quad e^{in\alpha} - e^{-in\alpha} = 2i \sin(n\alpha).$$

$$\blacktriangleleft e^{in\alpha} \times e^{-in\alpha} = 1.$$

## Exemple

1) Exprimons  $\cos 4x$  en fonction de  $\cos x$

$$\cos 4x + i \sin 4x = (\cos x + i \sin x)^4. \text{ Posons } A = (\cos x + i \sin x)^4$$

$$A = (\cos x)^4 + 4i \cos^3 x \sin x + 6 \cos^2 x (i \sin x)^2 + 4 \cos x (i \sin x)^3 + (i \sin x)^4;$$

$$A = (\cos^4 x - 6 \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x) + i(4 \cos^3 x \sin x - 4 \cos x \sin^3 x).$$

$$\text{D'où } \cos 4x = \cos^4 x - 6 \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x \text{ et } \sin 4x = 4 \cos^3 x \sin x - 4 \cos x \sin^3 x.$$

$$\cos 4x = \cos^4 x - 6 \cos^2 x (1 - \cos^2 x) + (1 - \cos^2 x)^2$$

$$\cos 4x = \cos^4 x - 6 \cos^2 x + 6 \cos^4 x + 1 - 2 \cos^2 x + \cos^4 x :$$

$$\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1.$$

2) Linéarisons :

a) On rappelle que  $\cos a = \left(\frac{1}{2}\right)(e^{ia} + e^{-ia})$ .

$$\cos a \cos b = \left(\frac{1}{2}\right)(e^{ia} + e^{-ia}) \times \left(\frac{1}{2}\right)(e^{ib} + e^{-ib})$$



$$\begin{aligned}\cos a \cos b &= \frac{1}{4} [e^{ia} e^{ib} + e^{ia} e^{-ib} + e^{-ia} e^{ib} + e^{-ia} e^{-ib}] \\ &= \frac{1}{4} [(e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)}) + (e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)})]\end{aligned}$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)].$$

$$\begin{aligned}\text{b) } \sin a \sin b &= \left(\frac{1}{2i}\right)(e^{ia} - e^{-ia}) \times \left(\frac{1}{2i}\right)(e^{ib} - e^{-ib}) \\ &= -\frac{1}{4} [e^{ia} e^{ib} - e^{ia} e^{-ib} - e^{-ia} e^{ib} + e^{-ia} e^{-ib}] \\ &= -\frac{1}{4} [(e^{i(a+b)} - e^{-i(a+b)}) - (e^{i(a-b)} - e^{-i(a-b)})] \\ &= -\frac{1}{4} [(e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)}) - (e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)})] \\ &= -\frac{1}{4} [2\cos(a+b) - 2\cos(a-b)] = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]\end{aligned}$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)].$$

$$\begin{aligned}\text{c) } \sin a \cos b &= \left(\frac{1}{2i}\right)(e^{ia} - e^{-ia}) \frac{1}{2}(e^{ib} + e^{-ib}) \\ &= \frac{1}{4i} (e^{ia} - e^{-ia})(e^{ib} + e^{-ib}) \\ &= \frac{1}{4i} [e^{ia} e^{ib} + e^{ia} e^{-ib} - e^{-ia} e^{ib} - e^{-ia} e^{-ib}] \\ &= \frac{1}{4i} [(e^{i(a+b)} - e^{-i(a+b)}) + (e^{i(a-b)} - e^{-i(a-b)})] \\ &= \frac{1}{4i} [2i \sin(a+b) + 2i \sin(a-b)].\end{aligned}$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)].$$

d) Linéarisons  $\cos^5 x$  et  $\sin^5 x$ .

$$\begin{aligned}\cos^5 x &= \frac{1}{2^5} (e^{ix} + e^{-ix})^5 \\ &= \frac{1}{2^5} [e^{5ix} + 5e^{4ix} e^{-ix} + 10e^{3ix} e^{-2ix} + 10e^{2ix} e^{-3ix} + 5e^{ix} e^{-4ix} + e^{-5ix}] \\ &= \frac{1}{2^5} [e^{5ix} + 5e^{3ix} + 10e^{ix} + 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} + e^{-5ix}] \\ &= \frac{1}{2^5} [(e^{5ix} + e^{-5ix}) + 5(e^{3ix} + e^{-3ix}) + 10(e^{ix} + e^{-ix})]\end{aligned}$$



$$= \frac{1}{2^5} (2 \cos 5x + 10 \cos 3x + 20 \cos x)$$

$$\cos^5 x = \frac{1}{16} (\cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x).$$

$$\text{e) } \sin^5 x = \frac{1}{2^5} (e^{ix} - e^{-ix})^5$$

$$= \frac{1}{(2i)^5} [e^{5ix} - 5e^{4ix} e^{-ix} + 10e^{3ix} e^{-2ix} - 10e^{2ix} e^{-3ix} + 5e^{ix} e^{-4ix} - e^{-5ix}]$$

$$= \frac{1}{(2i)^5} [e^{5ix} - 5e^{3ix} + 10e^{ix} - 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} - e^{-5ix}]$$

$$= \frac{1}{(2i)^5} [(e^{5ix} - e^{-5ix}) + 5(e^{3ix} - e^{-3ix}) + 10(e^{ix} - e^{-ix})]$$

$$= \frac{1}{(2i)^5} [(2i \sin 5x) + 5(2i \sin 3x) + 10(2i \sin x)]$$

$$\sin^5 x = \frac{1}{16} [\sin 5x + 5 \sin 3x + 10 \sin x].$$



## S'exercer

**2.o** À l'aide de la formule de Moivre justifier que le nombre  $(1+i\sqrt{3})^{2001}$  est un nombre réel.

**2.p** Calculer les valeurs exactes des produits

$$\cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{3\pi}{8}; \sin \frac{\pi}{8} \sin \frac{3\pi}{8}; \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{3\pi}{8}.$$

**2.q** On pose :  $j = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

a) Vérifier que  $1 + j + j^2 = 0$  ;

b) Écrire sous forme algébrique  $(1 + j)^{1995}$  et  $(1 + j^2)^{1995}$ .

**2.r** Linéariser :

a)  $\cos^3 x \sin^3 x$  ; b)  $\sin^5 x$  ; c)  $\cos^7 x$ .

## 2.4 RACINES n-ièmes D'UN NOMBRE COMPLEXE

### 2.4.1 Racines n-ièmes de l'unité.



## Prendre un bon départ

1) Déterminer les nombres complexes  $z$  tels que  $z^2 = 1$ . Écrire ces nombres sous la forme trigonométrique et la forme exponentielle.



- 2) a) Déterminer les nombres complexes  $z$  tels que  $z^3 = 1$ .  
 b) Écrire ces nombres sous la forme trigonométrique et la forme exponentielle et placer dans un repère orthonormé direct les images A, B, C de ces nombres.  
 c) Quelle est la nature du triangle ABC ?  
 3) Soit  $z$  un nombre complexe  $\neq 1$  tel que  $z = \rho e^{i\theta}$ .  
 a) Donner la forme trigonométrique  $z^n$ .  
 b) Dédire que si  $z^n = 1$  alors  $|z| = 1$  et  $z$  a pour argument  $2 \frac{k\pi}{n}$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .  
 c) Expliquer pourquoi il y a exactement  $n$  nombres complexes  $z$  tels que  $z^n = 1$  qui sont  $w_k = e^{2i \frac{k\pi}{n}}$  avec  $k \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\}$ .

## Retenir

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

• Tout nombre complexe  $z$  tel que  $z^n = 1$  est appelée racine  $n$ -ième de l'unité.

• Les racines  $n$ -ièmes de l'unité sont les nombres complexes  $w_k = e^{2i \frac{k\pi}{n}}$  avec  $k \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\}$  où  $k$  prenant tour à tour  $n$  valeurs consécutives entières.

• Si  $\omega = e^{2i \frac{\pi}{n}}$ , les  $n$  racines  $n$ -ièmes de l'unité sont  $\omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$ .

• La somme des  $n$  racines  $n$ -ièmes de l'unité est nulle.

$$\omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} = 0.$$

## S'exercer

Un Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes les équations suivantes :

$$z^4 = 1; \left( \frac{z-i}{z+i} \right)^4 = 1.$$

## 2.4.2 Racines $n$ -ièmes d'un nombre complexe non nul.

### Prendre un bon départ

On considère les nombres complexes  $z' = r e^{i\alpha}$  et  $z = \rho e^{i\theta}$ .

On suppose  $z^n = z'$ .



a) Utiliser l'égalité de deux nombres complexes écrits sous la forme trigonométrique pour trouver une relation entre  $\rho^n$  et  $r$ , puis entre  $n\theta$  et  $\alpha$ .

b) En déduire que 
$$\begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

c) Montrer qu'il y a exactement  $n$  nombres complexes tels que  $z^n = z'$ .



## Retenir

Tout nombre complexe  $z = re^{i\alpha}$  admet  $n$  racines  $n$ -ièmes distinctes; ce sont les nombres

$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \text{ où } k \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\}.$$

## Remarque

Les  $n$  racines  $n$ -ièmes d'un nombre complexe ont toutes le même module, et des arguments différents de  $\frac{2k\pi}{n}$ . Leurs images dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct sont les sommets d'un polygone régulier.

## Exemple

1) Déterminons les racines carrées de  $1+i\sqrt{3}$ .

$$1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Soit  $z = re^{i\alpha}$  où  $r > 0$ .

$z$  est une racine carrée de  $1+i\sqrt{3}$  si et seulement si  $(re^{i\alpha})^2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ .

$$r^2 e^{2i\alpha} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ équivaut } \begin{cases} r^2 = 2 \\ 2\alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}; \begin{cases} r^2 = \sqrt[3]{2} \\ \alpha = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Les racines carrées de  $1+i\sqrt{3}$  sont les nombres complexes

$$z_k = \sqrt{2} e^{i\left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right)} \text{ avec } k \in \{0; 1\}.$$

$$z_0 = \sqrt{2} e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt{2} \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_1 = \sqrt{2} e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right)} = \sqrt{2} \left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$



2) Déterminons les racines cubiques du nombre complexe  $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ .

$$1+i\sqrt{3} = \left[ 2; \frac{\pi}{3} \right] \text{ et } 1-i\sqrt{3} = \left[ 2; -\frac{\pi}{3} \right]; \text{ d'où } z = \frac{\left[ 2; \frac{\pi}{3} \right]}{\left[ 2; -\frac{\pi}{3} \right]} = \left[ \frac{2}{2}; \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \right] = \left[ 1; \frac{2\pi}{3} \right].$$

Déterminons les nombres complexes  $z = [r; \theta]$  tels que  $z^3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ .

$$z^3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \text{ équivaut à } [r^3; 3\theta] = \left[ 1; \frac{2\pi}{3} \right]; \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} r=1 \\ 3\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r=1 \\ \theta = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Les racines cubiques de  $z$  sont les nombres complexes  $z_k = \left[ 1; \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \right]; k \in \{0; 1; 2\}$ .

Ce sont donc les nombres complexes :

$$z_0 = \left[ 1; \frac{2\pi}{9} \right], z_1 = \left[ 1; \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} \right] = \left[ 1; \frac{8\pi}{9} \right], z_2 = \left[ 1; \frac{2\pi}{9} + \frac{4\pi}{3} \right] = \left[ 1; \frac{14\pi}{9} \right].$$

3) Recherchons les racines  $n$ -ièmes d'un nombre complexe  $Z$ .

Si  $z_k$  est l'une d'entre elles, on a  $z_k \neq 0$  d'où  $z_k^n = Z$ .

$$z^n = Z \text{ équivaut à } (z^n = z_k^n); \text{ soit } \left( \frac{z}{z_k} \right)^n = 1.$$

Autrement dit  $\frac{z}{z_k}$  est une racine  $n$ -ième de l'unité.

Par conséquent les racines  $n$ -ièmes de  $z$  s'obtiennent en faisant les produits de l'une d'entre elles par les  $n$  racines  $n$ -ième de 1.

**Exemple :** Cherchons à résoudre  $z^4 = (1+3i)^4$ .

$$z^4 = (1+3i)^4 \text{ équivaut à } \left( \frac{z}{1+3i} \right)^4 = 1.$$

$\frac{z}{1+3i}$  est une racine quatrième de 1. Or les racines quatrièmes de 1 sont, 1;  $i$ ;  $-1$ ;  $-i$ .

Donc les solutions de l'équation proposée sont :

$$1(1+3i) = 1+3i; i(1+3i) = i+3i^2 = -3+i; -1(1+3i) = -1-3i \text{ et } -i(1+3i) = 3-i.$$

Les racines quatrième de  $1+3i$  sont  $1+3i$ ;  $-3+i$ ;  $-1-3i$ ;  $3-i$ .



## LEÇON 3 ÉQUATIONS DANS $\mathbb{C}$ .

- ▶ Résoudre les équations du premier degré dans  $\mathbb{C}$  ;
- ▶ Résoudre les systèmes d'équations linéaires dans  $\mathbb{C}$  ;
- ▶ Résoudre les équations du second degré dans  $\mathbb{C}$  ;
- ▶ Déterminer les racines d'un polynôme de degré supérieur ou égal à trois.

### 3.1 ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ ; SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES DANS $\mathbb{C}$

#### 3.1.1 Équations du type $az + b = 0$ , où $a$ et $b$ sont des nombres complexes et système d'équations linéaires dans $\mathbb{C}$ .



#### Prendre un bon départ

1) Déterminer si possible le nombre complexe  $z$  dans chacun des cas suivants:

- a)  $(2 + 3i)z - 2 + 5i = 3$  ;
- b)  $(2 - 3i)z + 1 + 2i = 2z - 3iz - 2 + 5i$  ;
- c)  $(2 - i)z = 2(z + 1) - iz - 5i$ .

2) Déterminer les nombres complexes  $z$  et  $z'$  tels que:

$$\begin{cases} (1 + i)z + 2iz' = 1 + i \\ iz - (3 - 2i)z' = -i \end{cases}$$



#### Retenir

- Une équation de la forme  $az + b = 0$  où  $a$  et  $b$  sont des nombres complexes dans  $\mathbb{C}$  :  
admet une seule solution unique si  $a \neq 0$ . Cette solution est  $-\frac{b}{a}$ . Dans ce cas l'équation est dite du premier degré.
- admet une infinité de solutions si  $a = b = 0$ .
- n'admet aucune solution si  $a = 0$  et  $b \neq 0$ .
- Tout système de la forme  $\begin{cases} az + bz' = c \\ a'z' + b'z = c' \end{cases}$  où  $a, b, c, a', b'$  et  $c'$  ( $a$  et  $b'$  non tous nuls) sont des nombres complexes est un système d'équations linéaires à 2 inconnues dans  $\mathbb{C}$ .



## S'exercer

1. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations d'inconnues  $z$  suivantes :

a)  $(2+5i)z = 4-2i$ ; b)  $iz-2 = 2z+1+i$ ; c)  $(2+i)(z+3+i)\left(iz+\frac{1}{2i}\right) = 0$ ;

d)  $\frac{1-i}{1-2i}z = \frac{-1+3i}{2+i}$ ; e)  $(2+3i)z = (1+2i)^2$ .

2. Résoudre dans  $\mathbb{C}^2$  le système d'équations linéaires 
$$\begin{cases} (2+3i)z - 3iz' = 1-i \\ (-1+2i)z + (3-i)z' = i \end{cases}$$

3.2 ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ DANS  $\mathbb{C}$ 

## 3.2.1 Racines carrées d'un nombre complexe

## Prendre un bon départ

## Activité 1

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations :

a)  $z^2 = 16$ ; b)  $z^2 = -49$ ; c)  $z^2 = -3$ ; d)  $z^2 = -\sin^2 t$ .

## Activité 2

Soit le nombre complexe  $a = 3 - 4i$ .

Écrivons  $z = x + iy$  tel que  $z^2 = 3 - 4i$ .

1. Montrer que l'on a 
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \end{cases}$$

2. À partir de la deuxième équation du système, exprimer  $x$  en fonction de  $y$ .

3. Substituer dans la première équation. Résoudre l'équation bicarré obtenue d'inconnue  $y$ .

4. Déduire les solutions du système, puis les valeurs de  $z$ .

5. Calculer  $|a|$  et montrer que  $x^2 + y^2 = 5$ .

6. Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  le système 
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \\ 2xy = -4 \end{cases}$$
 et en déduire tous les nombres complexes dont

les carrés sont égaux à  $a$ .





## Retenir

Soit un nombre complexe  $Z = a + ib$  tel que  $|Z| = r$ .

• Un nombre complexe  $z = x + iy$  est une racine carrée de  $Z$  si et seulement si  $z^2 = Z$ .

• Pour déterminer les valeurs de  $x$  et  $y$  il suffit de résoudre le système 
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = r \\ 2xy = b \end{cases}$$

### Remarque

• Tout nombre complexe non nul admet toujours deux racines carrées opposées.

• Pour résoudre le système 
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = r \\ 2xy = b \end{cases}$$
, il suffit de résoudre les deux premières équations

ensuite tenir compte du signe de  $b$  pour choisir les couples  $(x; y)$ .

Si  $b > 0$ ,  $x$  et  $y$  sont de même signe.

Si  $b < 0$ ,  $x$  et  $y$  sont de signes contraires.

### Exemple

1) Déterminons les racines carrées du nombre complexe  $Z = -3 - 4i$ .

Soit  $z = x + iy$  une racine carrée de  $Z$ .

$z^2 = Z$  équivaut à  $(x + iy)^2 = -3 - 4i$  ;

$x^2 - y^2 + 2ixy = -3 - 4i$ . Cette égalité est réalisée si et seulement si 
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = -4 \end{cases}$$

D'autre part  $Z = z^2$  entraîne  $|Z| = |z^2|$ . Or  $|z^2| = (|z|)^2 = x^2 + y^2$ .

$| -3 - 4i | = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$ .

Réolvons le système 
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ x^2 + y^2 = 5 \\ 2xy = -4 \end{cases}$$

En additionnant membre à membre les deux premières équations on trouve  $2x^2 = 2$ ; soit  $x = 1$  ou  $x = -1$ .

En multipliant la première équation par  $-1$  et la deuxième par  $1$  et en additionnant membre à membre les équations obtenues on a  $2y^2 = 8$ ; soit  $y^2 = 4$ ; d'où  $y = 2$  ou  $y = -2$ .

$xy$  étant négatif,  $x$  et  $y$  sont de signes contraires.



Ainsi pour  $x = 1$ ;  $y = -2$  et pour  $x = -1$ ;  $y = 2$ .

Les racines carrées du nombre complexe  $-3-4i$  sont  $1-2i$  et  $-1+2i$ .

2) Déterminons les racines carrées de  $z = -\cos^2 \theta$  ( $\theta \in \mathbb{R}$ )

$$(-\cos^2 \theta) = (i^2 \cos^2 \theta) = (i \cos \theta)^2 = (-i \cos \theta)^2.$$

Les racines carrées de  $(-\cos^2 \theta)$  sont  $(i \cos \theta)$  et  $(-i \cos \theta)$ .

## S'exercer

1) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^2 = 48 + 14i$ .

2) Soit  $b$  un nombre réel strictement négatif. Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $z^2 = b$ .

## 3.2.2 Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$

### Prendre un bon départ

#### Activité 1

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  chacune des équations suivantes :

a)  $Z^2 + 3 = 0$  ; b)  $Z^2 + 4Z + 8 = 0$  ; c)  $Z^3 + 8 = 0$  et d)  $Z^3 - i = 0$

#### Activité 2

Soit à résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation du second degré à coefficients complexes  $az^2 + bz + c = 0$ .

1) Montrer que  $az^2 + bz + c = a \left[ \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$ .

2) Montrer que l'équation  $\left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$  admet dans  $\mathbb{C}$  soit une racine soit deux racines distinctes.

## Retenir

Pour résoudre une équation du second degré  $az^2 + bz + c = 0$  à coefficients complexes dans  $\mathbb{C}$ ,

On calcule le discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$

On détermine une racine carrée de  $\Delta$ .

si  $\Delta = 0$ , cette équation admet une racine qui est  $z_0 = \frac{-b}{2a}$  et

$$az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2 = a(z - z_0)(z - z_0).$$



- si  $\Delta \neq 0$ , alors cette équation admet deux racines distinctes

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b+\delta}{2a} \text{ où } \delta \text{ est une racine carrée du discriminant } \Delta.$$

Dans ce cas  $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$ .

### Exemple

1) Considérons l'équation  $2Z^2 + 2Z + 3 = 0$ , équivalente à  $z^2 + z + \frac{3}{2} = 0$ .

$$\text{On a : } \left[ \left( Z + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \right] = 0$$

$$\left( Z + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow \left( z + \frac{1}{2} \right)^2 - \left( i \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^2 = 0$$

$$\left( Z + \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{5}}{2} \right) \left( Z + \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{5}}{2} \right) = 0$$

$$Z = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{5}}{2} \text{ ou } Z = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{5}}{2}$$

L'équation admet deux racines complexes conjuguées  $Z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{5}}{2}$  et  $Z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{5}}{2}$ .

2) Considérons l'équation  $iz^2 + z - 3 + i = 0$ .

$$\Delta = 1^2 - 4i(-3 + i) = 1 + 12i + 4 = 5 + 12i.$$

Déterminons une racine carrée de  $\Delta$ .

Soit  $x + iy$  une racine carrée de  $\Delta$ .

$$\text{On a : } (x + iy)^2 = 5 + 12i$$

$$\text{D'où : } \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = 12 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \end{cases}$$

$$\text{D'où } x = 3 \text{ ou } x = -3 \text{ et } y = 2 \text{ ou } y = -2.$$

Or  $xy > 0$  donc  $x$  et  $y$  sont de même signe.

Les racines carrées de  $\Delta$  sont  $3 + 2i$  et  $-3 - 2i$ .

Choisissons  $\delta = 3 + 2i$  l'une de ces racines carrées.

$$z_1 = \frac{-1-\delta}{2i} = \frac{-1-3-2i}{2i} = \frac{-4-2i}{2i} = -1 + 2i$$

$$z_2 = \frac{-1+\delta}{2i} = \frac{-1+3+2i}{2i} = \frac{2+2i}{2i} = \frac{1+i}{i} = 1 - i.$$

Les solutions de cette équation sont :  $-1 + 2i$  et  $1 - i$ .

**Remarque :** En choisissant comme racine carrée du discriminant  $-3 - 2i$ , on trouve les mêmes solutions.



3) Soit l'équation (E):  $z^3 + (1-i)z^2 + (4-i)z - 4i = 0$

Cherchons une solution de cette équation de la forme  $ib$  ( $b \neq 0$ ) et ( $b \in \mathbb{R}$ )

On a :  $(ib)^3 + (1-i)(ib)^2 + (4-i)(ib) - 4i = 0$ ;

$$-ib^3 - b^2(1-i) + (4i+1)b - 4i = 0;$$

$$(-b^2 + b) + i(-b^3 + b^2 + 4b - 4) = 0.$$

$$\text{Donc } \begin{cases} -b^2 + b = 0 \\ -b^3 + b^2 + 4b - 4 = 0 \end{cases}; \begin{cases} b(-b+1) = 0 \\ -b^3 + b^2 + 4b - 4 = 0 \end{cases}; \begin{cases} b = 0 \text{ ou } b=1 \\ -b^3 + b^2 + 4b - 4 = 0 \end{cases}.$$

On ne vérifie pas l'équation  $-b^3 + b^2 + 4b - 4 = 0$ , par contre  $-1$  est solution de l'équation

$-b^3 + b^2 + 4b - 4 = 0$ . Le système ci-dessus a donc une seule solution qui est 1. Donc  $i$  est une solution de cette équation.

- Trouvons un polynôme  $\mathcal{P}$  du second degré tel que :  $z^3 + (1-i)z^2 + (4-i)z - 4i = (z-i)\mathcal{P}(z)$

Posons  $\mathcal{P}(z) = az^2 + bz + c$

On a :  $z^3 + (1-i)z^2 + (4-i)z - 4i = (z-i)(az^2 + bz + c)$ .

Par égalité de deux polynômes on obtient :  $\mathcal{P}(z) = z^2 + z + 4$ , soit  $a=1$ ,  $b=1$  et  $c=4$

- Résolvons (E).

(E) est équivalent à  $(z-i)(z^2 + z + 4) = 0$ .

Résolvons  $z^2 + z + 4 = 0$ .

Son discriminant est  $\Delta = 1 - 4 \times 4 = -15 = 15i^2 = (i\sqrt{15})^2$ .

Les solutions de l'équation (E) sont :  $i, \frac{-1-i\sqrt{15}}{2}$  et  $\frac{-1+i\sqrt{15}}{2}$ .

### Exercice résolu 1

1) Soit  $\theta$  un nombre réel. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) :  $z^2 - (2\cos\theta)z + 1 = 0$ .

Le discriminant de cette équation est  $\Delta = (2\cos\theta)^2 - 4 = 4\cos^2\theta - 4 = 4(\cos^2\theta - 1)$ .

Or  $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$  et  $\cos^2\theta - 1 = -\sin^2\theta = i^2\sin^2\theta$ . Donc  $\Delta = (2i\sin\theta)^2$ .

Une racine carrée de  $\Delta$  est  $2i\sin\theta$ .

Les solutions de l'équation (E) sont  $z_1 = \frac{2\cos\theta + 2i\sin\theta}{2} = \cos\theta + i\sin\theta$

et  $z_2 = \frac{2\cos\theta - 2i\sin\theta}{2} = \cos\theta - i\sin\theta$ .

2) Pour quelles valeurs de  $\theta$  ces solutions sont-elles des imaginaires purs ?

Ces solutions sont des imaginaires purs si et seulement si  $\cos\theta = 0$  ; soit  $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

3) Pour quelles valeurs de  $\theta$  ces solutions sont-elles des réels.

Ces solutions sont des réels si et seulement si  $\sin\theta = 0$  ; soit  $\theta = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .



## Exercice résolu 2

1) Soit  $P$  un polynôme dans  $\mathbb{C}$  tel que, pour tout nombre complexe  $z$  :

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \text{ avec } a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \text{ des réels.}$$

Démontrer que si  $z_0$  est une racine de  $P$ , alors  $\bar{z}_0$  est aussi une racine de  $P$ .

Supposons que  $z_0$  est une racine de  $P$ . On a  $P(z_0) = 0$ .

a) Démontrons que  $P(\bar{z}_0) = \overline{P(z_0)}$ .

$$\begin{aligned} P(\bar{z}_0) &= (a_n \bar{z}_0^n + a_{n-1} \bar{z}_0^{n-1} + \dots + a_1 \bar{z}_0 + a_0 = \bar{a}_n \bar{z}_0^n + \bar{a}_{n-1} \bar{z}_0^{n-1} + \dots + \bar{a}_1 \bar{z}_0 + \bar{a}_0. \text{ car } a_i = \bar{a}_i \\ &= \overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_1 z_0 + a_0} \text{ car le conjugué d'un nombre réel est égal à lui-même.} \end{aligned}$$

D'autre part ( $\bar{z}^n = \overline{z^n}$  pour tout entier naturel  $n$ ).

$$\text{On en déduit que } P(\bar{z}_0) = \overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_1 z_0 + a_0} = \overline{P(z_0)}.$$

b) Déduisons que  $z_0$  est aussi une solution de  $P(z) = 0$ .

D'après l'hypothèse  $z_0$  est une solution de l'équation  $P(z) = 0$ . Donc  $P(z_0) = 0$  et par suite

$$P(\bar{z}_0) = \overline{0} ; \text{ donc } P(\bar{z}_0) = 0. \text{ D'où } \bar{z}_0 \text{ est aussi une solution}$$

de  $P(z) = 0$  ;  $\bar{z}_0$  est donc une racine de  $P$ .

**Exemple :** Soit l'équation  $P(z) = z^4 - 6z^3 + z^2 + 10z - 18$ .

$$\begin{aligned} P(1+i) &= (1+i)^4 - 6(1+i)^3 + (1+i)^2 + 10(1+i) - 18 \\ &= (2i)^2 - 6(2i)(1+i) + 2i + 10 + 10i - 18 \\ &= -4 - 12i + 12 + 12i - 8 = 0. \end{aligned}$$

$P(1+i) = 0$ , donc  $1+i$  est une solution de  $P(z) = 0$ .

Comme  $1+i$  est solution de cette équation,  $1-i$  l'est aussi car tous les monômes de ce polynôme ont des coefficients réels.

$$P(z) = (z - (1+i))(z - (1-i))(az^2 + bz + c).$$

$$P(z) = (z^2 - 2z + 2)(az^2 + bz + c).$$

Développons  $(z^2 - 2z + 2)(az^2 + bz + c)$ .

$$(z^2 - 2z + 2)(az^2 + bz + c) = az^4 + (b - 2a)z^3 + (c - 2b + 2a)z^2 + (-2c + 2b)z + 2c$$

$$\text{Or } P(z) = z^4 - 6z^3 + z^2 + 10z - 18.$$

$$\text{Par identification, on a le système } \begin{cases} a = 1 \\ -2a + b = -6 \\ 2b - 2c = 10 \\ 2a - 2b + c = 1 \\ 2c = -18 \end{cases}$$

Soit  $a = 1$ ;  $b = -4$  et  $c = -9$ .

$$P(z) = (z^2 - 2z + 2)(z^2 - 4z - 9).$$

$$P(z) = 0 \text{ équivaut à } (z^2 - 2z + 2)(z^2 - 4z - 9) = 0, \text{ qui est équivalent à } z^2 - 2z + 2 = 0$$

$$\text{ou } z^2 - 4z - 9 = 0.$$



Résolvons l'équation  $z^2 - 4z - 9 = 0$ .

Le discriminant  $\Delta = 16 + 36 = 52 = (2\sqrt{13})^2$ .

Les solutions de cette équation sont  $\frac{4+2\sqrt{13}}{2}$  et  $\frac{4-2\sqrt{13}}{2}$ .

Les solutions de l'équation  $P(z) = 0$  sont  $1+i$ ;  $1-i$ ;  $2+\sqrt{13}$  et  $2-\sqrt{13}$ .

## S'exercer

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  chacune des équations suivantes :

a)  $z^2 + 9 = 0$  ; b)  $z^2 + 4z + 29 = 0$  ; c)  $z^2 - 2z + 3 = 0$ .

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  chacune des équations suivantes :

a)  $z^2 + 8 = 0$  ; b)  $z^4 - 16 = 0$  ; c)  $z^4 + 2z^2 = 0$ .

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  chacune des équations suivantes :

a)  $z^2 = -4i$  ; b)  $z^2 = 44 + 16i\sqrt{3}$  ; c)  $z^2 = 15 + 8i$ .

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  chacune des équations suivantes :

a)  $z^4 - 4iz^2 - 4 = 0$  ; b)  $z^4 + 6z^2 + 25 = 0$  ; c)  $z^4 - 10z^2 + 169 = 0$ .

$\mathcal{P}$  est le polynôme défini par :  $P(z) = z^3 - 3z^2 + (3-i)z - 2 + 2i$ .

i. Vérifier que  $\mathcal{P}$  admet une racine réelle  $\alpha$ .

ii. Déterminer les nombres complexes  $a$  et  $b$  tels que  $P(z) = (z - \alpha)(z^2 + az + b)$ .

iii. Résoudre alors l'équation  $P(z) = 0$  dans  $\mathbb{C}$ .

## 12.3 SOMME ET PRODUIT DES RACINES

### Prendre un bon départ

Soit l'équation  $az^2 + bz + c = 0$  à coefficients complexes ( $a \neq 0$ );

un nombre complexe tel que  $\delta^2 = b^2 - 4ac$ ,  $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$  et  $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$

sont les solutions de cette équation. Calculer  $z_1 + z_2$  et  $z_1 z_2$ .

Montrer que  $z_1$  et  $z_2$  deux nombres complexes tels que

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \\ z_1 z_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

soient un nombre complexe non nul).

Montrer que  $z_1$  et  $z_2$  sont les solutions de l'équation  $(z - z_1)(z - z_2) = 0$  et en déduire que  $z_1$  et  $z_2$

sont les solutions de l'équation  $az^2 + bz + c = 0$ .





## Retenir

Les solutions de l'équation  $az^2 + bz + c = 0$  à coefficients complexes ( $a \neq 0$ ) sont des nombres

complexes  $z_1$  et  $z_2$  tels que 
$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \\ z_1 z_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

### Remarque

Si  $S$  et  $P$  sont deux nombres complexes donnés, les nombres complexes  $z_1$  et  $z_2$  tels que

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = S \\ z_1 z_2 = P \end{cases}$$
 sont les solutions de l'équation  $Z^2 - SZ + P = 0$ .

### Exemple

1) Soit l'équation du second degré (E) :  $z^2 + (-5 + 2i)z + 9 - 7i = 0$ .

a) Montrons que  $3 + i$  est une solution de (E).

$$(3 + i)^2 + (-5 + 2i)(3 + i) + 9 - 7i = 9 + 6i - 1 - 15 - 5i + 6i - 2 + 9 - 7i = 0.$$

$3 + i$  est donc une solution de (E).

b) Sans calculer le discriminant, déterminons la deuxième solution de (E).

Soit  $z'$  l'autre racine de (E). On a  $z' + 3 + i = 5 - 2i$  et  $(3 + i)z' = 9 - 7i$  car la somme  $S$  des

de cette équation est  $\frac{-(-5 + 2i)}{1} = 5 - 2i$  et le produit est  $\frac{9 - 7i}{1} = 9 - 7i$ .

$z' + 3 + i = 5 - 2i$  ;  $z' = 2 - 3i$ . On peut aussi utiliser le fait que  $(3 + i)z' = 9 - 7i$  et en déduire

$$z' = \frac{9 - 7i}{3 + i} = \frac{(9 - 7i)(3 - i)}{9 + 1} = \frac{27 - 7 - 30i}{10} = 2 - 3i.$$

**Remarque :** l'expression du produit ou de la somme des racines peut permettre de trouver la deuxième racine connaissant la première. Mais il est préférable de choisir l'expression la plus simple.

Pour l'exemple ci-dessus l'expression de la somme permet de trouver plus facilement la deuxième racine.

2) Soit  $m$  un paramètre réel. A quelle condition nécessaire et suffisante existe-il deux réels  $x_1$  et  $x_2$  distincts tels que  $x_1 + x_2 = 2$  et  $x_1 x_2 = m^2$  ?

Il existe deux réels distincts  $x_1$  et  $x_2$  tels que  $x_1 + x_2 = 2$  et  $x_1 x_2 = m^2$  si et seulement si  $2^2 - 4m^2 > 0$ . C'est-à-dire  $4 - 4m^2 \geq 0$  ; soit  $m \in ]-1; 1[$ .

3) Soit  $m$  un paramètre réel. A quelle condition nécessaire et suffisante existe-il deux nombres complexes  $z_1$  et  $z_2$  distincts tels que  $z_1 + z_2 = 2$  et  $z_1 z_2 = m^2$  ?



**Exercice 1** Trouver deux réels distincts  $z_1$  et  $z_2$  tels que  $z_1 + z_2 = 2$  et  $z_1 z_2 = m^2$  si et seulement si  $m^2 - 4m^2 \neq 0$  ; soit  $m \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$ .

## S'exercer

**Exercice 2** Sans déterminer les racines de l'équation à coefficients complexes

$(z^2 - 2)z^2 + (-1 + 3i)z + 4 - 5i = 0$ , déterminer la somme et le produit des racines de cette équation.

**Exercice 3** Déterminer deux nombres complexes  $z_1$  et  $z_2$  tels que  $z_1 + z_2 = -4 + i$  et  $z_1 z_2 = 1 + 13i$ .



## S'ENTRAÎNER

## FORME ALGÈBRE D'UN NOMBRE COMPLEXE

1

Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{C}$  définie par :

$$f(z) = z^3 - 2iz^2 - (1-i)z - 2i.$$

Calculer et mettre sous forme algébrique :

$$f(1+i); f(i) \text{ et } f(2i).$$

2

Déterminer la forme cartésienne de  $z$  dans chacun des cas suivants :

a)  $z = \frac{2-3i}{1+i\sqrt{3}}$ ; b)  $z = (3-i)(5+2i)$ ;

c)  $z = (2-3i)^2$ ; d)  $z = (1+2i)^4$ ;

e)  $z = (2i-1)(2+5i)(2+3i)^2$ .

3

Écrire le nombre complexe  $z$  sous forme algébrique dans chacun des cas suivants :

a)  $z = -3(-2+3i)(5-2i)$ ;

b)  $z = \frac{\sqrt{3}+3i}{2+i}$ ; c)  $z = \frac{\sqrt{2}}{1-i}$ ; d)  $z = \frac{4}{1-i\sqrt{3}}$ .

4

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, on associe au point  $M$  d'affixe  $z$

le point  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que  $z' = \frac{z+3i}{z-4}$ .

1) Déterminer et construire l'ensemble des points  $M$  tels que  $z'$  soit un réel.

2) Déterminer et construire l'ensemble des points  $M$  tels que  $z'$  soit un imaginaire pur.

5

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, on associe au point  $M$  d'affixe  $z$  le point  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que  $z' = (z-3)(z-2i)$ .

1) Déterminer et construire l'ensemble des points  $M$  tels que  $z'$  soit un réel.

2) Déterminer et construire l'ensemble des points  $M$  tels que  $z'$  soit un imaginaire pur.

6

Soit le nombre complexe  $z = x + iy$  où  $x$  et  $y$  sont des réels, et  $M$  le point image de  $z$  dans le plan complexe. On considère le nombre

$$\text{complexe } Z = \frac{z+3}{\bar{z}+3}.$$

1. a) Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de  $Z$ .

b) Construire l'ensemble des points  $M$  dans le plan tels que  $Z$  soit un imaginaire pur.

7

Soit le nombre complexe  $z = x + iy$  où  $x$  et  $y$  sont des réels, et  $M$  le point image de  $z$  dans le plan complexe. On considère le nombre

$$\text{complexe } Z = \frac{iz^2}{\bar{z}+1}.$$

2.a) Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de  $Z$ .

b) Construire l'ensemble des points  $M$  dans le plan tels que  $Z$  soit un imaginaire pur.



## ÉCRITURE SOUS FORME TRIGONOMETRIQUE ET SOUS FORME EXPONENTIELLE D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL.

Écrire sous la forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

a)  $z = 1 - i\sqrt{3}$  ; b)  $z = \frac{1-i}{2i}$  ;

c)  $z = \frac{2-3i}{7+2i}$  ; d)  $z = \frac{(2-3i)(3+i)}{2i}$  ;

e)  $z = \frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta}$  ; f)  $z = \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta - i \sin \theta}$  .

g) Soit  $Z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$  et  $Z_2 = 1 - i$  .

h) Écrire  $Z_1$  et  $Z_2$  sous forme exponentielle.

i) Écrire  $\frac{Z_1}{Z_2}$  sous forme exponentielle.

j) En déduire  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$  .

k) Soit  $Z = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}(1+i)}$  .

l) Déterminer le module et un argument de  $Z$  .

m) Vérifier que le point  $M$  d'affixe  $Z$  est situé sur le cercle de centre  $O$  et de rayon 1 .

n) Pour quelles valeurs de l'entier naturel  $n$  a-t-on :

1)  $Z^n = 1$  ?

2) Pour quelles valeurs de l'entier naturel  $n$  a-t-on :

3)  $Z^n = -i$  ?

4) Déterminer l'entier naturel  $p$  tel que

5)  $Z^p = -Z^n$  .

6) Soit  $\theta$  un nombre réel de l'intervalle  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$  .

7) Déterminer le module et un argument de

8) des nombres complexes :

a)  $z = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}$  ; b)  $z = \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1}$  ; c)  $z = \frac{1+i \tan \theta}{1-i \tan \theta}$  .

12

On pose  $z = \sqrt{3} + i$  ,  $z' = i - 1$  et  $Z = \frac{z}{z'}$  .

1) Calculer les modules et les arguments de  $z$  et  $z'$  .

2) a) Déterminer l'écriture sous forme trigonométrique de  $z$  et  $z'$  .

b) Déterminer l'écriture sous forme trigonométrique et exponentielle de  $Z$  .

3) Déterminer l'écriture sous forme exponentielle, sous forme trigonométriques, et algébriques de  $Z^3$  .

13

Soit le nombre complexe :  $z = 1 + i\sqrt{3}$  ,

démontrer que les images dans le plan complexe

des nombres  $z$  ,  $-z$  ,  $z^2$  ,  $\frac{2}{z}$  sont cocycliques.

14

Soient les nombres complexes :

$$z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \text{ et } z_2 = \frac{i}{2i\sqrt{3}-2} .$$

Calculer  $z_1 + z_2$  ,  $z_1 \times z_2$  ,  $\frac{z_1}{z_2}$  ,  $z_1^6 \times z_2^{12}$

et  $\frac{z_1^8}{z_2^3}$  . (On donnera tous les résultats sous

la forme algébrique la plus simple).

15

Soit  $z$  un nombre complexe de module 1 et d'argument  $\alpha$  .

1) Calculer, en fonction de  $\alpha$  , le module et l'argument du nombre complexe  $Z = 1 + z + z^2$  .

2) Représenter dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  .

a. L'ensemble  $(E_1)$  des points  $M(z)$  tels que :

$$\arg Z = \left( \frac{\pi}{3} \right) (2\pi) .$$



b. L'ensemble  $(E_2)$  des points  $M(z)$  tels que :

$$\arg Z = \left(\frac{\pi}{6}\right)(\pi).$$

c. L'ensemble  $(E_3)$  des points  $M(z)$  tels que :

$$|Z| = 2 \text{ et } \operatorname{Re}(Z) = 1.$$

d. L'ensemble  $(E_4)$  des points  $M(z)$  tels que :

$$|Z| = 1 \text{ et } \arg Z = \left(\frac{2\pi}{3}\right)(\pi).$$

**16**

En utilisant l'égalité qui semble la plus adaptée, déterminer :

a. L'ensemble  $(F)$  des points  $M(z)$  tels que :

$$\frac{z+1}{z-1} \text{ soit un réel strictement positif.}$$

b. L'ensemble  $(G)$  des points  $M(z)$  tels que :

$$\frac{iz+1}{iz-1} \text{ soit imaginaire pur.}$$

c. L'ensemble  $(H)$  des points  $M(z)$  tels que :

$$\frac{iz}{e^{\frac{\pi}{6}}} \text{ soit imaginaire pur.}$$

**17**

$\alpha$  est un réel de l'intervalle  $]-\pi, \pi[$  et  $z$  le nombre complexe défini par :  $z = 1 + e^{-i\alpha}$ .

1. Calculer  $|z|$ ,  $\arg z$ ,  $\arg \frac{1}{z}$  en fonction de  $\alpha$ .

2. Soient les points  $M(z)$  et  $M'\left(\frac{1}{z}\right)$ .

Déterminer le lieu géométrique de  $M$  puis de  $M'$  lorsque  $\alpha$  décrit  $]-\pi, \pi[$ .

**18**

Calculer les racines cubiques du nombre

$$\text{complexe } z = \frac{1+i \tan \theta}{1-i \tan \theta}.$$

**19**

Calculer le module et l'argument du nombre

$$\text{complexe } z = \frac{1 - \cos \theta + i \tan \theta}{1 + \cos \theta - i \sin \theta} \quad (\pi < \theta < 2\pi).$$

**20**

Déterminer les racines cubiques du nombre

$$\text{complexe } 4\sqrt{2}(1+i).$$

**21**

Déterminer les racines quatrièmes du nombre

$$\text{complexe } 8\sqrt{2}(-1-i).$$

**22**

Déterminer les racines cinquièmes du nombre

$$\text{complexe } z = 32i.$$

**23**

Déterminer les racines sixièmes du nombre

$$\text{complexe } z = 32(i - \sqrt{3}).$$

**24**

1) Résoudre et discuter l'équation :

$$(E) : 2(1 + \cos 2\theta)z^2 - 2(\sin 2\theta)z + 1 = 0, \text{ où } \theta \text{ est un paramètre réel donné tel que } 0 \leq \theta \leq \pi.$$

2) Quel est, dans un plan rapporté à un repère orthonormé, l'ensemble des points images des solutions de cette équation quand  $\theta \in [0, \pi]$  ?

**25**

Donner la forme algébrique et la forme exponentielle de chacun des nombres complexes  $z$  suivant :

$$z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$z = (1 - i\sqrt{3})(1 + i); \quad z = 2i(\sqrt{3} - i); \quad z =$$

$$z = \frac{1}{2 + 2i}; \quad z = \frac{1 + i}{1 + i\sqrt{3}};$$

$$z = (\sqrt{3} + i)^2; \quad z = \left(\frac{1 - i}{\sqrt{3} + i}\right)^2.$$



l'argument du nombre

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (\pi < \theta < 2\pi)$$

les cubiques du nombre

les quatrièmes du nombre

les cinquièmes du nombre

les sixièmes du nombre

l'équation :

l'équation :

l'équation :

l'équation :

l'équation :

l'équation :

l'équation :

l'équation :

l'équation :

l'équation :

l'équation :

l'équation :

le nombre complexe  $z$  sous la forme

exponentielle.

$$a) z = \sqrt{3} + 3i;$$

$$b) z = \frac{4}{1+i\sqrt{3}}.$$

les points d'affixes  $z_1, z_2$  et  $z_3$  dans un

repère orthonormé direct du plan affine.

$$z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ et } z_2 = \sqrt{3}e^{-5i\frac{\pi}{6}}.$$

$$z_3 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}; z_4 = \frac{2}{1-i}.$$

$$z = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2}).$$

calculer  $z^2$ .

déterminer le module et un argument de  $z^2$ .

déterminer un module et un argument de  $z$ .

les exercices qui suivent le plan est

à un repère orthonormé direct

les points A, B, C trois points d'affixes respectives

$$A(-1-i), B(6+5i), C(1) \text{ le milieu de } [BC].$$

déterminer l'affixe de I.

calculer AB, BC, AC et AI.

$$\text{vérifier que } AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2.$$

l'ensemble des points M d'affixes  $z$

$$\left| \frac{2i-z}{z+1+i} \right| = 1.$$

31

Soient A, B, C les points d'affixes respectives

$$1+i, 1+\frac{1}{2}i, \frac{3}{2}+i.$$

a) Calculer une mesure de chacun des angles  $(\widehat{AB}, \widehat{AC})$  et  $(\widehat{BC}, \widehat{BA})$ .

b) Donner la nature du triangle ABC.

32

Soient A, B, C les points d'affixes respectives

$$1+2i, 2+i, (2+\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3}).$$

Calculer une mesure de chacun des angles  $(\widehat{AB}, \widehat{AC})$  et  $(\widehat{BC}, \widehat{BA})$ .

33

Soient A et B les points d'affixes  $\frac{1}{2}$  et  $-1$ .

Déterminer l'affixe  $z$  du point M tel que

$$\frac{MA}{MB} = 2 \text{ et } \text{mes}(\widehat{MA}, \widehat{MB}) = \frac{\pi}{4}.$$

34

Linéariser les expressions suivantes :

$$a) \cos^4 x \text{ et } \sin^4 x;$$

$$b) \sin^4 x + 3\sin^2 x \cos^2 x;$$

$$c) \cos^5 x \sin^3 x.$$

35

On considère le nombre complexe  $a = -\sqrt{3} + i$

1. déterminer de deux façons différentes les racines carrées de  $a$ .

2. En déduire les valeurs exactes de

$$\cos \frac{5\pi}{12} \text{ et } \sin \frac{5\pi}{12}.$$

3. Déterminer les entiers naturels  $n$  pour lesquels  $a^n$  est un nombre réel.

4. Déterminer les entiers naturels  $n$  pour lesquels  $a^n$  est un nombre imaginaire pur.



Exprimez le nombre complexe  $z$  sous la forme exponentielle.

a)  $z = \sqrt{3} + 3i$  ;

b)  $z = \frac{\sqrt{2}}{1-i}$  ; c)  $z = \frac{4}{1+i\sqrt{3}}$ .

Soient les points d'affixes  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$  dans un repère orthonormé direct du plan affine.

a)  $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$  ;  $z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$  et  $z_3 = \sqrt{3}e^{-5i\frac{\pi}{6}}$ .

b)  $z_1 = 1+i$  ;  $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$  ;  $z_3 = \frac{2}{1-i}$ .

Exprimez  $z = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ .

Calculer  $z^2$ .

Déterminer le module et un argument de  $z^2$ .

En déduire un module et un argument de  $z$ .

Les exercices qui suivent le plan est rapporté à un repère orthonormé direct

Soient A, B, C trois points d'affixes respectives  $1-i$ ,  $6+5i$ , I le milieu de [BC].

Déterminer l'affixe de I.

Calculer AB, BC, AC et AI.

Vérifier que  $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$ .

Déterminer l'ensemble des points M d'affixes  $z$

tel que :  $\left| \frac{2i-z}{z+1+i} \right| = 1$ .

31

Soient A, B, C les points d'affixes respectives

$1+i$ ,  $1+\frac{1}{2}i$ ,  $\frac{3}{2}+i$ .

a) Calculer une mesure de chacun des angles  $(\widehat{AB}, \widehat{AC})$  et  $(\widehat{BC}, \widehat{BA})$ .

b) Donner la nature du triangle ABC.

32

Soient A, B, C les points d'affixes respectives

$1+2i$ ,  $2+i$ ,  $(2+\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})$ .

Calculer une mesure de chacun des angles  $(\widehat{AB}, \widehat{AC})$  et  $(\widehat{BC}, \widehat{BA})$ .

33

Soient A et B les points d'affixes  $\frac{1}{2}$  et  $-1$ .

Déterminer l'affixe  $z$  du point M tel que

$\frac{MA}{MB} = 2$  et  $\text{mes}(\widehat{MA}, \widehat{MB}) = \frac{\pi}{4}$ .

34

Linéariser les expressions suivantes :

a)  $\cos^4 x$  et  $\sin^4 x$  ;

b)  $\sin^4 x + 3\sin^2 x \cos^2 x$  ;

c)  $\cos^5 x \sin^3 x$ .

35

On considère le nombre complexe  $a = -\sqrt{3} + i$

1. déterminer de deux façons différentes les racines carrées de  $a$ .

2. En déduire les valeurs exactes de

$\cos \frac{5\pi}{12}$  et  $\sin \frac{5\pi}{12}$ .

3. Déterminer les entiers naturels  $n$  pour lesquels  $a^n$  est un nombre réel.

4. Déterminer les entiers naturels  $n$  pour lesquels  $a^n$  est un nombre imaginaire pur.



ÉQUATIONS DANS  $\mathbb{C}$ 

36

Résoudre les systèmes d'équations suivants dans  $\mathbb{C}^2$ .

a)  $\begin{cases} z + z' = 3 \\ 2z - z' = i \end{cases}$  ; b)  $\begin{cases} 3z + z' = 5 + 2i \\ -z + z' = 1 - 2i \end{cases}$  ;

c)  $\begin{cases} z - 2iz' = 5i \\ 2z - (1+i)z' = -2 + 6i \end{cases}$  ;

d)  $\begin{cases} (1+i)z + (1-i)z' = 2 + i \\ 3z - 2iz' = 4 - i \end{cases}$  ;

37

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  chacune des équations suivantes :

a)  $z^2 + z + 1 = 0$  ; b)  $z^2 - 1 = 0$  ;

c)  $z^2 + 2z + 2 = 0$  ; d)  $(z+1)^3 = z^3$ .

e)  $z^3 - 1 = 0$  ; f)  $z^4 + z^2 + 1 = 0$ .

38

Soit  $P$  le polynôme défini dans  $\mathbb{C}$  par  $P(z) = z^3 + (6-3i)z^2 + (13-18i)z - 39i$ .

1. Démontrer que  $P$  admet une solution imaginaire  $z_0$ .

2. Démontrer l'existence de deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :  $P(z) = (z - z_0)(z^2 + \alpha z + \beta)$

3. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$ .

39

$P$  est le polynôme de variable complexe  $z$  défini par :  $P(z) = z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 2z + 5$

1. Établir que pour tout nombre complexe  $z$ ,  $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$ .

2. En déduire que si  $z_0$  est une racine de  $P$ , alors  $\bar{z}_0$  l'est aussi.

3. Calculer  $P(i)$  et résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$ .

40

On considère dans  $\mathbb{C}$  le polynôme  $P$  défini

$$P(z) = z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i.$$

1) Démontrer que l'équation  $P(z) = 0$  admet une solution réelle que l'on déterminera.

2) Résoudre l'équation  $P(z) = 0$ .

3) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . On donne :  $A(1-i)$  ;  $B(2+i)$  et  $C(-1)$ .

a) Démontrer que l'origine du repère est le barycentre des points  $A$ ,  $B$  et  $C$  affectés respectivement des coefficients 1, 1 et 3.

b) Déterminer et construire l'ensemble des points  $M$  du plan d'affixe  $z$  tels que :

$$|z - z_A|^2 + |z - z_B|^2 + 3|z - z_C|^2 = 55$$

41

$P$  est le polynôme défini dans  $\mathbb{C}$  par :

$$P(z) = z^4 + 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 + 3z + 1.$$

1. Montrer que  $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$  et en déduire si  $z_0$  est une solution de l'équation  $P(z) = 0$

alors  $\bar{z}_0$ ,  $\frac{1}{z_0}$ ,  $\frac{1}{\bar{z}_0}$  sont aussi des solutions

cette équation.

2. Montrer que l'équation  $P(z) = 0$  admet une solution de la forme  $a+i$  où  $a$  est réel à déterminer.

3. Résoudre alors dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$ .

42

1) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $\left(\frac{2Z+1}{Z-1}\right)^2 = 1$

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ . Pour tout point

$M$  du plan d'affixe  $z$  on pose  $Z' = \frac{z^2}{z+i}$

i) Déterminer et représenter l'ensemble



Montrer que  $M(z)$  tels que  $Z'$  soit imaginaire pur.

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation suivante :

$$z^2 - 2az = 0 \text{ où } a \text{ est un réel.}$$

Montrer que les points images des

de  $(E)$  sont les éléments de  $(\Gamma)$ .

Était-il prévisible ?

Considère les équations suivantes :

$$z^2 = \frac{1+ia}{1-ia}.$$

$$\left( \frac{1+iZ}{1-iZ} \right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}.$$

Montrer que toutes les solutions de

sont pour module 1.

Montrer que toutes les solutions de

sont des nombres réels.

Résoudre  $(E_2)$  pour  $a = 3$  et  $n = 4$ .

Le plan complexe est rapporté à un repère

orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On donne :

$A(1); C\left(\frac{1}{2}\right)$  et  $D(2)$ . À tout point

$M(z)$ , on associe le point  $M'(Z')$  tel que

$$\frac{Z'-1}{1-z}.$$

$$\text{Montrer que } |Z'| = \frac{2CM}{DM}.$$

Déterminer l'ensemble des points

tel que;  $|Z'| = 1$ .

Déterminer l'ensemble des points  $M(z)$

tel que  $Z'$  est un réel strictement positif.

Soit  $\theta$  un réel ; calculer  $z^n$  pour tout entier

n.

$$z = 1 + \cos \theta + i \sin \theta ;$$

$$z = 1 - \cos \theta + i \sin \theta.$$

45

Soit  $z$  un nombre complexe non réel ;  $A, B, C$  sont les points d'affixes  $z, z^2$  et  $z^3$ .

Trouver l'ensemble des points  $A$  tel que le triangle  $ABC$  soit rectangle en  $C$ .

46

$\theta$  désigne un réel appartenant à  $[0; 2\pi]$ .

a) Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation d'inconnue  $z$  :

$$z^2 - (2^{0+1} \cos \theta)z + 2^{20} = 0.$$

b) Donner chaque solution sous forme trigonométrique.

c) Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; u, v)$ , on considère les points  $A$  et  $B$  dont les affixes sont les solutions de l'équation précédente.

Déterminer  $\theta$  pour que  $OAB$  soit un triangle équilatéral.

47

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . On désigne par  $A, B$  et  $M$  les points d'affixes respectives  $1, -2$  et  $z$ , où  $z$  représente un nombre complexe différent

de 1 et de  $-2$ . On pose  $Z = \frac{z+2}{z-1}$ ;  $|Z|$  désigne

le module de  $Z$  et  $\arg Z$  désigne un argument de  $Z$  appartenant à  $[-\pi; \pi[$ .

1) Justifier que  $|Z| = \frac{BM}{AM}$  et que  $\arg Z$  est une mesure, en radians de l'angle orienté  $(\widehat{\vec{MA}, \vec{MB}})$ .

Utilise la question 1) pour déterminer

géométriquement les ensembles suivants :

(E) est l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  telle que  $Z$  est un réel.

(F) est l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  telle que  $Z$  est un imaginaire pur.



(G) est l'ensemble des points M d'affixe  $z$  telle que  $\arg Z = +\frac{\pi}{2}$ .

(H) est l'ensemble des points M d'affixe  $z$  telle que  $|Z| = 1$ .

48

On considère, dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue  $z$  :

$$z^3 - z^2 - (1+i)z - 2 + 2i = 0.$$

1) Sachant que (E) admet une solution réelle, la déterminer puis résoudre l'équation (E) dans  $\mathbb{C}$ .

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct, les trois points dont les affixes respectives sont les trois solutions de l'équation (E) définissent un triangle.

Démontrer que ce triangle est rectangle isocèle.

49

Soit dans  $\mathbb{C}$  le polynôme défini par :

$$P(z) = z^4 - 3z^3 + 9/2 z^2 - 3z + 1.$$

(E) désigne l'équation  $P(z) = 0$ .

1) Montrer que si un nombre complexe  $z$  est solution de (E), alors le conjugué de  $z$  et  $\frac{1}{z}$  sont aussi des solutions de (E).

2) Vérifier que  $1+i$  est une solution de (E), puis résoudre cette équation dans  $\mathbb{C}$ .

3) Écrire  $P(z)$  sous forme d'un produit de deux polynômes de deuxième degré à coefficients réels.

50

On donne  $z = -8(1+i\sqrt{3})$ .

1) Montrer que  $z_1 = \sqrt{3} - i$  est une racine quatrième de  $z$ .

2) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^4 + 8 + 8z = 0$ . Donner le module et un argument de chaque solution.

51

1) Déterminer, sous forme exponentielle, les solutions de l'équation  $z^3 = 4\sqrt{2}(-1+i)$ .

2) En utilisant les racines cubiques de l'unité, écrire les solutions de cette équation sous forme algébrique.

3) Dédire des questions précédentes les valeurs exactes de  $\cos \frac{11\pi}{12}$  et  $\sin \frac{11\pi}{12}$ .

52

1) Montrer que pour tout nombre complexe  $z$  différent de 1 on a l'égalité

$$\frac{z^4 - 1}{z - 1} = z^3 + z^2 + z + 1.$$

2) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^4 = 1$ .

3) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation dans  $\mathbb{C}$  de l'équation

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \frac{z+i}{z-i} + 1 = 0.$$



# Chapitre 5

## PGCD ET PPCM DE DEUX ENTIERES NON NULS

(Série C uniquement)

### LEÇON 1 PGCD ET PPCM DE DEUX ENTIERES NON NULS

#### 1.1 PGCD DE DEUX ENTIERES NON NULS

1.1.1 Détermination du pgcd de deux entiers non nuls.

1.1.2 Écriture du  $\text{pgcd}(a;b)$  comme combinaison linéaire de  $a$  et de  $b$ .

1.1.3 Relation entre  $\text{pgcd}(ka;kb)$  et  $\text{pgcd}(a;b)$ .

1.1.4 Identité de bezout et quelques unes de ses applications

#### 1.2 PPCM DE DEUX ENTIERES

1.2.1 Détermination du PPCM de deux entiers

1.2.2 Relation entre  $\text{PPCM}(ka;kb)$  et  $\text{PPCM}(a;b)$ .

1.2.3 Relation entre  $\text{PGCD}(a;b)$  et  $\text{PPCM}(a;b)$ .

### LEÇON 2 NOMBRES PREMIERS ET ÉQUATIONS DANS $\mathbb{Z}^2$ DU TYPE $ax + by = c$

2.1 ÉQUATIONS  $ax + by = c$  dans  $\mathbb{Z}^2$ .

2.2 EXISTENCE ET UNICITÉ DE LA DÉCOMPOSITION  
DE TOUT ENTIER EN PRODUIT DES PUISSANCES  
ENTIÈRES DES NOMBRES PREMIERS.

2.3 DIVISEURS D'UN ENTIER NON NUL.

**S'ENTRAÎNER**



# LEÇON 1 PGCD ET PPCM DE DEUX ENTIERS NON NULS

- ▶ Consolider la détermination du PGCD et du PPCM de deux entiers à partir de leurs décompositions en produit de puissances des nombres premiers
- ▶ Calculer le PGCD de deux entiers par l'algorithme d'Euclide ;
- ▶ Reconnaître deux entiers premiers entre eux et savoir mettre une fraction sous forme irréductible ;
- ▶ Utiliser l'identité de Bezout pour :
  - montrer que deux entiers sont premiers entre eux ;
  - déterminer une solution particulière de l'équation  $ax + by = 1$  dans  $\mathbb{Z}^2$ .

- ▶ Utiliser la relation  $\text{pgdc}(ka; kb) = |k| \text{pgcd}(a, b)$  pour résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$

les systèmes d'équations du type : 
$$\begin{cases} \text{pgdc}(x, y) = d \\ x + y = c \end{cases}$$

- ▶ Utiliser les relations  $\text{ppcm}(ka; kb) = |k| \text{ppcm}(a, b)$  et  $|ab| = \text{pgcd}(a, b) \times \text{ppcm}(a, b)$  pour résoudre des équations et système d'équations dans  $\mathbb{Z}$ .

## 1.1 PGCD DE DEUX ENTIERS NON NULS

### 1.1.1 Détermination du pgcd de deux entiers non nuls.



#### Prendre un bon départ

##### Activité 1 :

Déterminer les ensembles  $D^+(48)$  et  $D^+(18)$  de tous les diviseurs positifs de 48 et de 18.

Donner le plus grand des diviseurs positifs, communs à 48 et à 18.

Retrouver ce résultat en utilisant les écritures respectives de 48 et de 18 sous forme de produits de puissances entières de nombres premiers.

Calculer  $\text{PGCD}(1; n)$ ;  $\text{PGCD}(16; 32)$ ;  $\text{PGCD}(1024; 100)$ .

##### Activité 2 :

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers non nuls,  $d$  un entier.

Montrer que si  $d$  divise à la fois  $a$  et  $b$ , alors  $d$  divise  $a - b$

Montrer que si  $d$  divise  $a$  et  $a - b$ , alors  $d$  divise  $a$  et  $b$ .

Conclure que tout diviseur commun à  $a$  et à  $b$ , est aussi commun à  $a$  et à  $a - b$ .

En déduire que si  $r$  est le reste de la division euclidienne de  $a$  par  $b$ ,

alors  $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(b, r)$ .

Calculer  $\text{PGCD}(6300; 820)$ .



## Retenir

- Le plus grand commun diviseur de deux entiers relatifs non nuls  $a$  et  $b$  est l'entier naturel noté  $\text{PGCD}(a;b)$  ou  $\text{pgcd}(a;b)$  qui est le plus grand des diviseurs positifs de  $a$  et de  $b$ .
- Si  $r$  est le reste de la division euclidienne de  $a$  par  $b$ , alors  $\text{PGCD}(a;b) = \text{PGCD}(b;r)$ .
- $\text{PGCD}(a;b) = \text{PGCD}(b;a) = \text{PGCD}(|a|;|b|)$ ;
- $\text{PGCD}(1;a) = 1$ .
- $a$  divise  $b$  si et seulement si  $\text{PGCD}(a;b) = |a|$ .
- Deux entiers non nuls sont dits **premiers entre eux** ou encore **étrangers**, lorsque leur PGCD vaut 1.
- Si un entier  $d$  divise  $a$  et divise  $b$  alors  $d$  divise  $\text{pgcd}(a,b)$ .

## Exemple

Calculons  $\text{PGCD}(1250;80)$  par l'algorithme d'euclide.

On peut écrire :

$$1250 = 15 \times 80 + 50 ; 80 = 1 \times 50 + 30 ; 50 = 1 \times 30 + 20 ; 30 = 1 \times 20 + 10 ;$$

$$20 = 2 \times 10 + 0.$$

$$\text{PGCD}(1250;80) = \text{PGCD}(80;50) = \text{PGCD}(50;30) = \text{PGCD}(30;20) = \text{PGCD}(20;10) = 10$$

car 10 divise 20. Cette illustration du calcul du PGCD de deux entiers est l'algorithme

d'Euclide. Parmi les différents restes des divisions successives obtenues, on a retenu l'avant dernier, soit le dernier reste non nul.

Soit  $n$  un entier non nul. Montrons que  $\text{pgcd}(n;n+1) = 1$ .

$$n+1 = 1 \times n + 1. \text{pgcd}(n;n+1) = \text{pgcd}(n;1) = 1.$$

Deux entiers consécutifs sont premiers entre eux, et la fraction  $\frac{n+1}{n}$  est

irréductible.

Soient  $p$  et  $q$  deux entiers premiers distincts. Montrons que  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux.

Soit  $d$  un diviseur de  $p$  et de  $q$ .  $d \in \{1;p\} \cap \{1;q\}$ . Puisque  $p \neq q$ ,  $d = 1$ .  $p$  et  $q$  sont alors premiers entre eux.

## S'exercer

Calculer :  $\text{PGCD}(165;337)$ ;  $\text{PGCD}(1680;225)$ ;  $\text{PGCD}(-84;200)$ .

Montrer que  $\text{PGCD}(5n-3;n+1)$  est un diviseur de 8. Donner sa valeur dans les cas  $n$  pair ou impair.

Montrer que si  $p$  est un nombre premier et  $a$  un entier quelconque non nul, alors si  $p$  ne divise pas  $a$ , alors  $p$  est étranger avec  $a$ .

Montrer que si  $p$  est un entier premier tel que  $p$  divise  $a \times b$ , alors  $p$  divise  $a$  ou  $p$  divise  $b$ .



## 1.1.2 Écriture du $\text{pgcd}(a;b)$ comme combinaison linéaire de $a$ et $b$



### Prendre un bon départ

i) Utiliser l'algorithme d'Euclide pour calculer  $\text{PGCD}(1024;65)$ ;  $\text{PGCD}(750;60)$ .

Trouver dans chacun des cas suivants un couple  $(x;y)$  d'entiers.

a)  $1024x + 65y = 1$  ; b)  $1024x - 65y = 7$  ; c)  $750x - 60y = 30$  ; d)  $-750x + 60y = 0$ .

ii) Énoncer une conjecture sur l'existence d'un entier égal à la combinaison de deux entiers donnés.



### Retenir

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers non nuls et  $\delta = \text{pgcd}(a;b)$  tout multiple de  $\delta$  peut s'écrire comme combinaison linéaire de  $a$  et de  $b$  à coefficients entiers.

### Exemple

Prenons  $a = 300$  et  $b = 26$ . Recherchons leur PGCD par l'algorithme d'Euclide.

| Détermination du pgcd par divisions successives    | Présentation des restes dans les divisions successives | Détermination des coefficients de la combinaison donnant le pgcd |
|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| $300 = 26 \times 11 + 14$                          | $14 = 300 - 26 \times 11$                              | $14 = a - 11b$                                                   |
| $26 = 14 \times 1 + 12$                            | $12 = 26 - 14 \times 1$                                | $12 = b - (a - 11b) = -a + 12b$                                  |
| $14 = 12 \times 1 + 2$                             | $2 = 14 - 12 \times 1$                                 | $2 = a - 11b - (-a + 12b) = 2a - 23b$                            |
| $12 = 2 \times 6 + 0$<br>$\text{PGCD}(300,26) = 2$ | $0 = 12 - 6 \times 2$                                  |                                                                  |

On a donc  $\text{PGCD}(a;b) = 2a - 23b = a \times 2 + b \times (-23)$

2) Cherchons un couple  $(x;y)$  tels que  $13x - 17y = -6$ .

$17 = 1 \times 13 + 4$  ;  $13 = 3 \times 4 + 1$  ;  $4 = 4 \times 1 + 0$ .  $\text{pgcd}(17;13)=1$ .

$$1 = 13 - 3 \times 4$$

$$= 13 - 3 \times (17 - 1 \times 13)$$

$$= -3 \times 17 + 4 \times 13.$$

Ainsi,  $13 \times 4 - 17 \times 3 = 1$  et donc  $13 \times (4 \times (-6)) - 17 \times (3 \times (-6)) = -6$  ;

soit  $13 \times (-24) - 17 \times (-18) = -6$ .

On prend  $x = -24$  et  $y = -18$ . D'autres choix sont possibles !

Le couple  $(-24; -18)$  est une solution particulière de l'équation

$13x - 17y = -6$  dans  $\mathbb{Z}^2$ .

### S'en convaincre

Soit  $E$  l'ensemble des entiers naturels non nuls qui s'écrivent comme combinaisons linéaires à coefficients entiers des entiers  $a$  et  $b$ ,

$E$  est par définition une partie de  $\mathbb{N}$  ;



On suppose que  $a = a \times 1 + b \times 0$ ,  $a$  est un élément de  $E$ .  $E$  est non vide. Par conséquent,  $E$  admet un plus petit élément qu'on note  $p$ . Il existe deux entiers  $c$  et  $d$  tels que  $p = ca + db$ .  
 Soit  $m$  un multiple de  $\text{PGCD}(a;b)$ ;  $r$  le reste de la division euclidienne de  $m$  par  $p$ . On peut écrire  $m = pq + r$  où  $0 \leq r < p$ .  $r = m - pq = m - apc - bpd$ . Puisque  $m$  est multiple de  $a$ , il existe  $q' \in \mathbb{Z}$   $m = aq'$ . D'où,  $r = a(q' - pc) + b(-pd)$ . Ainsi,  $r \neq 0$ , et  $r$  est un élément de  $E$  et est plus petit que le plus petit élément  $p$  de  $E$ . Ce qui est absurde.

### Conséquence

Si un entier divise à la fois  $a$  et  $b$ , alors il divise  $\text{PGCD}(a;b)$ .

## S'exercer

Montrer que  $23 \times (-3) + 17 \times 4 = -1$ . En déduire que  $\text{PGCD}(23;17)=1$ .

On pose  $a = 200$  et  $b = 36$ . Déterminer  $\text{PGCD}(a;b)$  et l'écrire comme combinaison linéaire de  $a$  et  $b$ .

## 11.3 RELATION ENTRE $\text{PGCD}(ka;kb)$ et $\text{PGCD}(a;b)$ .

### Prendre un bon départ

Calculer  $\text{PGCD}(400;125)$ , puis  $\text{PGCD}(3 \times 125; 3 \times 400)$ .

Compléter  $\text{PGCD}(3 \times 125; 3 \times 400) = \dots \times \text{PGCD}(125; 400)$ .

Soit  $d' = \text{PGCD}(a;b)$  et  $d = \text{PGCD}(ka;kb)$  où  $k$  est un entier non nul.

Montrer que  $kd'$  divise  $d$ .

Montrer qu'il existe un entier non nul tel que  $d = k'd'$ .

Montrer qu'il existe deux entiers  $e$  et  $f$  tels que  $ka = de$  et  $kb = df$ .

En déduire que  $a = k'd'e$  et  $b = k'd'f$ , et que  $k'd'$  divise  $a$  et  $b$ .

Montrer que  $k'd'$  divise  $d'$  et donc que  $k'=1$ .

En déduire que  $d = kd'$ .

Soit  $a$  et  $b$  le pgcd des entiers non nuls  $a$  et  $b$ ; il existe deux entiers  $a'$  et  $b'$  tels que  $a = da'$  et  $b = db'$ .

Montrer que  $\text{PGCD}(a';b')=1$ .

## Retenir

Pour tous entiers non nuls  $a, b$  et  $k$ ,  $\text{PGCD}(ka;kb) = |k| \text{PGCD}(a;b)$

Si  $d = \text{PGCD}(a;b)$ , alors il existe  $a'$  et  $b'$  deux entiers tels que  $a = da'$  et  $b = db'$ , et  $\text{PGCD}(a';b')=1$ .

Si  $d$  divise  $a$  et  $d$  divise  $b$  alors,  $d$  divise toute combinaison  $ax + by$  de  $a$  et de  $b$  à coefficients  $x, y \in \mathbb{Z}$ .



**Exemple**

$$\text{PGCD}(100; 80) = \text{PGCD}(20 \times 5; 20 \times 4) = 20 \times \text{PGCD}(5; 4) = 20 \times 1 = 20$$

Déterminons tous les couples  $(x; y)$  d'entiers naturels tels que  $\text{PGCD}(x; y) = 10$  et  $x + y = 70$ .

Il existe  $x'$  et  $y'$  deux entiers tels que  $x = 10x'$  et  $y = 10y'$ .

$$\text{PGCD}(x'; y') = 1 \text{ et } x' + y' = 7.$$

|      |   |   |   |   |   |   |
|------|---|---|---|---|---|---|
| $x'$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $y'$ | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

d'où

|     |    |    |    |    |    |    |
|-----|----|----|----|----|----|----|
| $x$ | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 |
| $y$ | 60 | 50 | 40 | 30 | 20 | 10 |

Les couples demandés sont :  $(10; 60)$ ;  $(20; 50)$ ;  $(30; 40)$ ;  $(40; 30)$ ;  $(50; 20)$  et  $(60; 10)$ .

Du tableau on a éliminé les couples  $(x', y')$  tels que  $\text{PGCD}(x', y') \neq 1$ .

**S'exercer**

1.g Montrer que pour tout entier  $n$ ,

$$\text{PGCD}(n^2 + n - 2; 2n^2 - n - 1) = \text{PGCD}((n-1)(n+2), (1-1)(2n+1)) = |n-1| \text{PGCD}(n+2, 3)$$

1.h Résoudre dans  $\mathbb{N}^2$ , Chacun des systèmes (S)  $\begin{cases} \text{PGCD}(x; y) = 5 \\ x + y = 60 \end{cases}$ ; (S')  $\begin{cases} \text{PGCD}(x; y) = 182 \\ x + y = 182 \end{cases}$

### 1.1.4 IDENTITÉ DE BEZOUT ET QUELQUES UNES DE SES APPLICATIONS

**Prendre un bon départ**

a)

(i)  $a$  et  $b$  sont deux entiers étrangers. Montrer qu'il existe deux entiers  $u$  et  $v$  tels que  $au + bv = 1$ .

(ii) Montrer que si deux entiers  $a$  et  $b$  sont tels qu'il existe deux entiers  $u$  et  $v$  tels que  $au + bv = 1$ , alors  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux.

b) Soit  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois entiers tels que  $a$  divise  $bc$  et  $a$  premier avec  $c$ . Montrer qu'il existe deux entiers  $u$  et  $v$  tels que  $abu + bcv = b$ . En déduire que l'entier  $a$  divise  $b$ .

c) Soit  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois entiers tels que  $a$  soit premier avec  $b$  et avec  $c$ .

Montrer qu'il existe deux entiers  $A$  et  $B$  tels que  $aA + Bbc = 1$ .

En déduire que  $a$  est premier avec  $bc$ .

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , si  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux, alors  $a^n$  et  $b^n$  sont premiers entre eux et de même pour  $a$  et  $b^n$ .



## Retenir

### Identité de Bezout :

Deux entiers non nuls  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux si et seulement s'il existe un couple d'entiers relatifs  $(u, v)$  tels que  $au + bv = 1$ .

#### (i) Théorème de Gauss :

Soient  $a, b$  et  $c$  trois entiers non nuls. Si  $a$  divise  $bc$ , et si  $a$  est premier avec  $b$ , alors  $a$  divise  $c$ .

(ii) Soit  $a, b$  et  $c$  trois entiers non nuls. Si  $a$  est premier avec  $b$  et avec  $c$ , alors  $a$  est premier avec  $bc$ .

(iii) si  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux, alors  $a^n$  et  $b^m$  sont premiers entre eux, pour tout couple  $(n, m)$  d'entiers supérieurs à 1.

(iv)  $\text{PGCD}(a^n; b^n) = [\text{PGCD}(a; b)]^n$ , pour tout entier  $n \geq 1$ , pour tous les entiers  $a$  et  $b$ .  
 $\text{pgcd}(a, b, c) = \text{pgcd}(a, \text{pgcd}(b, c)) = \text{pgcd}[\text{pgcd}(a, b), c]$ .

### Exemple

$a$  et  $b$  sont deux entiers premiers entre eux. Montrons que  $a + b$  et  $ab$  sont premiers entre eux.

Il suffit de montrer que  $a + b$  est premier avec  $a$  et avec  $b$  et d'appliquer (ii).

En effet,  $a + b = 1 \times a + b$ . D'après l'algorithme d'Euclide,

$\text{PGCD}(a + b; a) = \text{PGCD}(a; b)$ . Or, par hypothèse,  $\text{PGCD}(a; b) = 1$ .

Donc,  $a + b$  et  $a$  sont étrangers.

De façon analogue on montre que  $a + b$  et  $b$  sont étrangers.

On conclut que les entiers  $a + b$  et  $ab$  sont premiers entre eux. Ainsi, la fraction  $\frac{a+b}{ab}$

et son inverse sont irréductibles. (si  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux)

$\text{PGCD}(a^2; b^2) = (\text{PGCD}(a; b))^2$ . Puisque  $\text{PGCD}(a; b) = 1$ ,  $\text{PGCD}(a^2; b^2) = 1$ .

$a^2$  et  $b^2$  sont aussi premiers entre eux.

### Exercice résolu 1

Dans un système de numération de base  $n$ , on considère les nombres

$A = 212$ ,  $B = 312$ ,  $C = 133032$ .

Sachant que  $C = AB$ , montrer que  $n$  divise huit. En déduire la valeur de  $n$ .

Ecrire  $A$ ,  $B$  et  $C$  dans le système décimal.

Déterminer les solutions dans  $\mathbb{Z}^2$ , de l'équation (E) :  $Ax + By = 1$ .

### Solution :

$A = 2n^2 + n + 1$ ,  $B = 3n^2 + n + 2$ ,  $C = n^5 + 3n^4 + 3n^3 + 3n + 2$ .

$AB = (2n^2 + n + 1)(3n^2 + n + 2) = 6n^4 + 2n^3 + 4n^2 + 3n^3 + n^2 + 2n + 3n^2 + n + 2$ .

$AB = 6n^4 + 5n^3 + 8n^2 + 3n + 2$ .

$AB = C$  équivaut à  $n^5 + 3n^4 + 3n^3 + 3n + 2 = 6n^4 + 5n^3 + 8n^2 + 3n + 2$  ; Soit



$n^5 - 3n^4 - 2n^3 - 8n^2 = 0$  ; l'entier  $n$  devant être strictement supérieur à 3, on a  $n^3 - 3n^2 - 2n = 8$  ; soit  $n(n^2 - 3n - 2) = 8$ .

$n$  et  $n^2 - 3n - 2$  sont des diviseurs strictement positifs de 8

L'ensemble des diviseurs de 8 est  $\{1; 2; 4; 8\}$ .  $n > 3$ . Les seuls diviseurs possibles sont 4 et 8.

Si  $n = 4$ ,  $n^2 - 3n - 2 = 16 - 12 - 2 = 2$ , donc 4 est une solution.

Par contre on ne peut pas trouver un entier naturel tel que  $n = 8$  et  $n^2 - 3n - 2 = 64 - 24 - 2 \neq 1$ . Donc 8 n'est pas solution

Conclusion : La seule valeur de  $n$  est 4.

2) Ecrivons A, B et C dans le système décimal.

$$A = 32 + 4 + 1 = 37, \quad B = 3n^2 + n + 2 = 48 + 4 + 2 = 54,$$

$$C = 1998.$$

3) Déterminons les solutions dans  $\mathbb{Z}^2$ , de l'équation (E) :  $37x + 54y = 1$ .

Par divisions successives, on a :

$$54 = 1 \times 37 + 17 ; \quad 37 = 2 \times 17 + 3 ; \quad 17 = 5 \times 3 + 2 ; \quad 3 = 1 \times 2 + 1$$

$$17 = B - A ; \quad 3 = A - 2 \times 17 = A - 2(B - A) = 3A - 2B ;$$

$$2 = 17 - 5 \times 3 = B - A - 5(3A - 2B) = -16A + 11B ;$$

$$1 = 3 - 1 \times 2 = 3A - B + 16A - 11B = 19A - 13B.$$

D'où  $37 \times 19 + 54 \times (-13) = 1$ . Une solution particulière de l'équation  $37x + 54y = 1$  est le couple  $(19; -13)$ .

(E) est équivalente à  $37x + 54y = 37 \times 19 + 54 \times (-13)$  ; soit  $37(x - 19) = 54(-y - 13)$ .

37 divise  $54(-y - 13)$  et  $\text{pgcd}(37; 54) = 1$ . D'après le théorème de Gauss, 37 divise  $-y - 13$ .

Il existe donc un entier relatif  $k$  tel que  $-y - 13 = 37k$ .

$$\text{D'où } y = -13 - 37k.$$

D'autre part  $37(x - 19) = 54(-y - 13)$  est équivalent à  $37(x - 19) = 57(37k)$ .

On a alors  $x - 19 = 57k$  ; soit  $x = 19 + 57k$ .

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est  $\{(19 + 54k; -13 - 37k), k \in \mathbb{Z}\}$ .

## Exercice résolu 2

Déterminer les couples d'entiers naturels tels que :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 405 \\ \text{pgcd}(a; b) = 3 \end{cases}$$

**Solution :**

$\text{pgcd}(a; b) = 3$ . Il existe deux entiers  $a'$  et  $b'$  premiers entre eux tels que  $a = 3a'$  et  $b = 3b'$

$a^2 - b^2 = 405$  équivaut à  $(a - b)(a + b) = 405$ , qui est équivalent à  $9(a' - b')(a' + b') = 405$



Soit  $(a'-b')(a'+b') = 45$ .  $a'-b'$  et  $a'+b'$  sont des diviseurs de 45.

On a  $1 \times 45 = 45$  ;  $3 \times 15 = 45$  ;  $5 \times 9 = 45$ .

On a donc les systèmes suivants :  $\begin{cases} a'-b'=1 \\ a'+b'=45 \end{cases}$  ;  $\begin{cases} a'-b'=3 \\ a'+b'=15 \end{cases}$  ;  $\begin{cases} a'-b'=5 \\ a'+b'=9 \end{cases}$  ; Les couples solutions

des systèmes sont :  $(23;22)$  ;  $(9;6)$  ;  $(7;2)$ .  $a'$  et  $b'$  étant premiers entre eux le couple  $(9;6)$  ne peut être solution.

Les couples  $(23;22)$  ;  $(7;2)$  sont solutions de  $a'^2 - b'^2 = 45$  et  $\text{pgcd}(a',b') = 1$ .

L'ensemble des solutions du système est  $S = \{(69;66) ; (21;6)\}$ .

### Exercice résolu 3

Soit  $n$  un entier naturel strictement supérieur à 1. On pose  $a = n-1$  et  $b = n^2 - 3n + 6$ .

1) Déterminer deux entiers  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $n^2 - 3n + 6 = (\alpha n + \beta)(n-1) + 4$  et déduire que tout diviseur de  $a$  et  $b$  est un diviseur de  $a$  et de 4.

2) Montrer que tout diviseur de  $a$  et de 4 est un diviseur de  $a$  et de  $b$  et en déduire que  $\text{PGCD}(a;b) = \text{PGCD}(a;4)$ .

3) Donner, suivant les valeurs de  $n$ , le PGCD de  $a$  et 4.

4) Pour quelles valeurs de  $n$  le nombre  $\frac{(n^2 - 3n + 6)(2n-1)}{n-1}$  est-il un entier ?

**Solution :**

1) En effectuant la division euclidienne de  $n^2 - 3n + 6$  par  $n-1$ , on trouve

$n^2 - 3n + 6 = (n-2)(n-1) + 4$ . Donc  $\alpha = 1$  et  $\beta = -2$ .

Soit  $d$  un diviseur commun à  $a$  et à  $b$ . C'est-à-dire que  $d$  divise  $n-1$  et  $d$  divise  $n^2 - 3n + 6$  ;

Si  $d$  divise  $n-1$ , alors  $d$  divise  $(n-2)(n-1)$  et par suite  $d$  divise  $n^2 - 3n + 6 - (n-2)(n-1)$  ;

donc  $d$  divise 4.  $d$  divise donc  $a$  et  $d$  divise 4.

Ainsi tout diviseur commun à  $a$  et  $b$  est un diviseur de  $a$  et 4.

2) Soit  $d$  un diviseur de  $a$  et 4.

$d$  divise  $(n-1)(n-2)$  et 4 ; donc  $d$  divise  $(n-1)(n-2) + 4$ . Par suite  $d$  divise  $b$ . D'où tout diviseur de  $a$  et 4 est un diviseur commun à  $a$  et à  $b$ .

L'ensemble des diviseurs communs à  $a$  et  $b$  est l'ensemble des diviseurs communs à  $a$  et 4.

Par suite  $\text{PGCD}(a;b) = \text{PGCD}(a;4)$ .

3) Donnons, suivant les valeurs de  $n$ , le PGCD de  $a$  et 4.  $\text{PGCD}(a;b) = \text{PGCD}(n-1;4)$ .

$\text{pgcd}(n-1, 4) \Rightarrow \begin{cases} \delta \in \mathbb{N}^* \\ \delta \text{ divise } 4 \text{ et } \delta \text{ divise } n-1 \end{cases} \text{ donc } \delta = 1 \text{ ou } \delta = 2 \text{ ou } \delta = 4.$

Si  $\delta = 2$ , alors 4 divise  $n-1$  équivaut à il existe  $q \in \mathbb{Z}/n-1 = 2q \Leftrightarrow n = 2q+1$  donc  $n$  impair

$\text{pgcd}(a,b) = 2 \text{ pgcd}(q,2) = \begin{cases} 2 \text{ si } q \text{ impair } (n = 4t+3) \\ 4 \text{ si } q \text{ pair } (n = 4t+1) \end{cases} \Leftrightarrow \text{pgcd}(a,b) = \begin{cases} 2 \text{ si } n = 4t+3 \\ 4 \text{ si } n = 4t+1 \\ 1 \text{ si } n \neq 4t+3 \text{ et } n \neq 4t+1 \end{cases}$



Si  $\delta = 4$ , alors 4 divise  $n-1$ , donc il existe  $k \in \mathbb{N}/n-1 = 4k \Leftrightarrow n = 4k+1$  alors  $\text{pgcd}(a; b) = 4$ .

Si 4 ne divise pas  $n-1$ , alors  $n-1 = 4k+1$  ou  $n-1 = 4k+2$  ou  $n-1 = 4k+3$ .

Si  $n = 4k'+1$  ou  $n = 4k'+3$ ,  $\text{PGCD}(a; b) = 2$ .

### Conclusion :

Pour  $n$  pair,  $n$  peut s'écrire  $n = 2(2k') = 4k$  ou  $n = 2(2k'+1) = 4k'+2$ .

Pour  $n = 4k$  avec  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\text{PGCD}(a; b) = 1$  ;

Pour  $n = 4k+1$  avec  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\text{PGCD}(a; b) = 4$  ;

Pour  $n = 4k+2$  avec  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\text{PGCD}(a; b) = 1$  ;

Pour  $n = 4k+3$  avec  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\text{PGCD}(a; b) = 2$  ;

4) Pour que  $\frac{(n^2 - 3n + 6)(2n - 1)}{(n - 1)}$  soit un entier naturel il faut que  $n-1$  divise  $(n^2 - 3n + 6)$ .

$2n - 1 = 2(n - 1) + 1$  ; soit  $1(2n - 1) + (-2)(n - 1) = 1$ .

D'après l'identité de Bézout  $2n - 1$  et  $n - 1$  sont premiers entre eux.

$n - 1$  divise  $n^2 - 3n + 6$ . Donc  $n - 1$  divise  $(n - 2)(n - 1) + 4$ . Par suite  $n - 1$  divise 4.

$n - 1 \in \{1; 2; 4\}$  ; ce qui donne  $n = 2$  ou  $n = 3$  ou  $n = 5$ .

Pour que  $\frac{(n^2 - 3n + 6)(2n - 1)}{(n - 1)}$  soit un entier naturel il faut que  $n \in \{2; 3; 5\}$ .



## S'exercer

1.i Montrer que  $17^{500}$  et  $13^{500}$  sont étrangers.

1.j Montrer que si  $\frac{a}{b}$  est irréductible, alors  $\frac{a^2 + b^2}{ab}$  est aussi irréductible.

1.k Montrer que si  $c$  est multiple de  $a$  et de  $b$ , et si  $a$  et  $b$  sont étrangers, alors  $c$  est multiple de  $ab$ .

1.l Déterminer tous les couples  $(x; y)$  d'entiers tels que l'entier qui s'écrit  $\overline{x357y}$  en base 10 soit divisible par 15.

1.m Montrer à l'aide de l'identité de Bézout que  $2n + 5$  et  $3n + 7$  sont premiers entre eux.

## 1.2 PPCM DE DEUX ENTIERS

### 1.2.1 Détermination du PPCM de deux entiers



## Prendre un bon départ

a) Dresser dans l'ordre croissant les listes de quelques multiples non nuls et positifs de 8 et de 3. Donner le premier entier naturel non nul figurant sur les deux listes.

b) En utilisant les écritures sous forme de produits de puissances entières des nombres premiers calculer :  $\text{PPCM}(75; 125)$  ;  $\text{PPCM}(4536; 251)$ .

c) Donner :  $\text{PPCM}(1; n)$  ;  $\text{PPCM}(a; b)$  si  $a$  divise  $b$ .



## Retenir

Le plus petit commun multiple de deux entiers naturels non nuls  $a$  et  $b$ , noté  $\text{PPCM}(a;b)$  ou  $\text{PPCM}(b;a)$ , est le plus petit multiple positif et non nul commun à  $a$  et à  $b$ .

- $\text{PPCM}(a;b) = \text{PPCM}(|a|;|b|)$ .
- $\text{PPCM}(1;a) = |a|$ .
- si  $a$  divise  $b$ , alors  $\text{PPCM}(a;b) = |b|$ .

## exemple

$$\text{PPCM}(1;-5) = 5 ; \text{PPCM}(8;-32) = 32.$$

## remarques

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers non nuls ;  $m$  leur PPCM et  $M$  un autre multiple de  $a$  et de  $b$ .

Par définition,  $M \geq m$ . Soit deux entiers  $q$  et  $r$  tels que  $M = mq + r$  et  $0 \leq r < m$ .

$M - mq$  est aussi multiple de  $a$  et de  $b$ . si  $r \neq 0$ , alors  $r$  doit être au moins égal à  $m$ . Comme  $r < m$ ,  $r = 0$  et donc  $M = mq$ .

Ainsi tout multiple commun à deux entiers est nécessairement multiple de leur PPCM.

Supposons  $a$  et  $b$  premiers entre eux. On sait que  $ab$  est multiple de  $m$  car  $ab$  est multiple de  $a$  et de  $b$ . Puisque  $a$  et  $b$  divisent  $m$ , et sont premiers entre eux,  $ab$  divise aussi  $m$ .

Ainsi,  $m = |ab|$  car  $m > 0$ . En conclusion, le PPCM de deux entiers premiers entre eux est égal à la valeur absolue de leur produit.

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers non nuls et distincts. Si  $d$  et  $m$  désignent respectivement leur PGCD et leur PPCM, alors  $d$  divise  $m$  et donc  $0 < d \leq m$ .

## S'exercer

Calculer  $\text{PPCM}(a;b)$  pour : (i)  $a = 15$  et  $b = 20$  ; (ii)  $a = 30$  et  $b = -90$  ;  
(iii)  $a = -1$  et  $b = -13$ .

## 2.2 Relation entre $\text{PPCM}(ka;kb)$ et $\text{PPCM}(a;b)$ .

### Prendre un bon départ

Calculer  $\text{PPCM}(15 \times 16; 15 \times 24)$  ;  $\text{PPCM}(16; 24)$ .

Compléter  $\text{PPCM}(15 \times 16; 15 \times 24) = \dots \times \text{PPCM}(16; 24)$ .

Soient  $a$ ,  $b$  et  $k$  trois entiers naturels non nuls.  $m = \text{PPCM}(a;b)$  et  $m' = \text{PPCM}(ka;kb)$ .

Montrer que  $km$  est multiple de  $ka$  et de  $kb$ .

En déduire que  $km$  est un multiple de  $m'$  et donc  $km \geq m'$ .

Montrer qu'il existe deux entiers  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $m' = ka\alpha = kb\beta$ .

En déduire que  $a\alpha$  est multiple commun à  $a$  et  $b$ .

Conclure que  $a\alpha \geq m$  et que  $m' \geq km$ . Déduire de (ii) et de (v) que  $m' = km$ .





## Retenir

Pour tout entier  $a, b$  et  $k$  non nul,  
 $\text{PPCM}(ka; kb) = |k| \text{PPCM}(a; b)$ .

### Exemple

$$\text{PPCM}(30; 70) = 10 \times \text{PPCM}(3; 7) = 10 \times 21 = 210.$$



## S'exercer

1.0 Calculer plus simplement  $\text{PPCM}(16 \times 15; 16 \times 17)$  et  $\text{PPCM}(200; -250)$ .

### 1.2.3 Relation entre PGCD( $a; b$ ) et PPCM( $a; b$ ).



## Prendre un bon départ

- 1- Calculer  $\text{PGCD}(16; 24) \times \text{PPCM}(16; 24)$  ; puis comparer le résultat obtenu au produit  $16 \times 24$ .
- 2- a)  $a$  et  $b$  sont deux entiers naturels premiers entre eux.  
 Montrer que  $\text{PGCD}(a; b) \times \text{PPCM}(a; b) = ab$ .
- b)  $a$  et  $b$  sont deux entiers naturels quelconques ;  $d$  leur PGCD ;  $a'$  et  $b'$  deux entiers tels que  
 $a = da'$  et  $b = db'$ .  
 Montrer que  $\text{PGCD}(a; b) \times \text{PPCM}(a; b) = a \times b$ .



## Retenir

Si  $a$  et  $b$  sont deux entiers non nuls, alors  $\text{PGCD}(a; b) \times \text{PPCM}(a; b) = |a \times b|$ .

### Exemple

1) Calculons  $\text{PPCM}(845; 220)$ .

Calculons d'abord  $\text{PGCD}(845; 220)$ .

$$845 = 3 \times 220 + 185; \quad 220 = 1 \times 185 + 35; \quad 185 = 5 \times 35 + 10;$$

$$35 = 3 \times 10 + 5; \quad 10 = 2 \times 5 + 0.$$

$$\text{PGCD}(220; 845) = 5.$$

On sait que  $\text{PGCD}(220; 845) \times \text{PPCM}(220; 845) = 220 \times 845$ .

D'où,  $5 \times \text{PPCM}(220; 845) = 185900$ . Ainsi,  $\text{PPCM}(220; 845) = 37180$ .



1) Déterminons tous les couples  $(a; b)$  d'entiers naturels tels que

$$\text{PGCD}(a; b) = 10$$

$$\text{PPCM}(a; b) = 280$$

Soient  $a'$  et  $b'$  deux entiers naturels tels que  $a = 10a'$  et  $b = 10b'$ .

La deuxième relation du système donne :  $10\text{PPCM}(a'; b') = 280$ . Or  $a'$  et  $b'$  étant premiers entre eux,  $\text{PPCM}(a'; b') = a'b'$ . D'où  $a'b' = 28$ .

$a'$  et  $b'$  sont des éléments de l'ensemble  $\{1; 2; 4; 7; 14; 28\}$  avec  $\text{pgcd}(a', b') = 1$ ; d'où  $(a'; b')$  est élément de l'ensemble  $\{(1; 28); (4; 7); (7; 4); (28; 1)\}$ .

$(a; b)$  est élément de l'ensemble  $\{(10; 280); (40; 70); (70; 40); (280; 10)\}$ .

### exercice résolu 1

Déterminer tous les couples d'entiers naturels  $(a; b)$  tels que 
$$\begin{cases} a - b = 22932 \\ \text{ppcm}(a; b) = 98280 \end{cases}$$

**Solution :**

Soit  $\delta = \text{pgcd}(a; b)$ . Il existe deux entiers premiers entre eux  $a'$  et  $b'$  tels que  $a = \delta a'$  et  $b = \delta b'$ .

Posons  $\mu = \text{ppcm}(a; b)$ .

$\mu = ab$ ; soit  $\mu\delta = (\delta a')(\delta b')$ . On en déduit que  $\mu = \delta a' b'$ .

$\text{pgcd}(a - b; \mu) = \text{pgcd}[\delta(a' - b'); \delta a' b'] = \delta \text{pgcd}(a' - b'; a' b')$ . Or  $\text{pgcd}(a'; b') = 1$  donc

$\text{pgcd}(a' - b'; a' b') = 1$ . Par suite  $\text{pgcd}(a - b; \mu) = \text{pgcd}(22932; 98280) = \delta$ .

Calculons  $\delta$ .

Par divisions successives, on a :

$$98280 = 4 \times 22932 + 6552 ;$$

$$22932 = 3 \times 6552 + 3276 ;$$

$$6552 = 2 \times 3276 + 0.$$

Par suite  $\delta = 3276$ .

Le système 
$$\begin{cases} a - b = 22932 \\ \text{ppcm}(a; b) = 98280 \end{cases}$$
 est équivalent à 
$$\begin{cases} 3276(a' - b') = 22932 \\ 3276a'b' = 98280 \\ \text{pgcd}(a'; b') = 1 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} a' - b' = 7 \\ a' b' = 30 \\ \text{pgcd}(a'; b') = 1 \end{cases}$$

Or  $1 \times 30 = 30$  ;  $2 \times 15 = 30$  ;  $3 \times 10 = 30$ .

$$\text{pgcd}(a'; b') = 1$$

$b' = 30$  et  $\text{pgcd}(a', b') = 1$ ,  $a' > b'$  équivaut à  $(a'; b') \in \{(15; 2); (30; 1); (10; 3), (6, 5)\}$ .

Le seul couple qui vérifie  $a' - b' = 7$  est le couple  $(10; 3)$ .

L'ensemble solution du système proposé est  $S = \{(32760; 9828)\}$ .



**Exercice résolu 2**

Calculer pour tout entier naturel  $n$ ,  $\text{ppcm}[n(n+2); (n+1)]$ , puis  $\text{ppcm}[n(n+1); (n+2)]$ .

**Solution :**

• Calculons  $\text{pgcd}(n(n+1); n+2)$ .

$n+2 = (n+1) + 1$ ; soit  $1 \times (n+2) + (-1)(n+1) = 1$ . On en déduit d'après l'identité de Bézout que  $n+2$  et  $n+1$  sont premiers entre eux.

Si  $d$  divise  $n$  et  $d$  divise  $n+2$ , alors  $d$  divise  $n+2-n$ , donc  $d$  divise 2.

Les seuls diviseurs positifs de 2 sont 1 et 2.

Si  $n$  est pair,  $n+2$  est pair et  $\text{pgcd}(n; n+2) = 2$  et  $\text{ppcm}[n(n+2); (n+1)] = \frac{n(n+1)(n+2)}{2}$ .

Si  $n$  est impair  $n+2$  est impair et  $\text{pgcd}(n; n+2) = 1$  et  $\text{pgcd}[n(n+2); (n+1)] = 1$ .

Par suite  $\text{ppcm}[n(n+1); (n+2)] = n(n+1)(n+2)$ .

•  $n(n+2) = (n+1)^2 - 1 \Leftrightarrow (-1) \cdot n(n+2) + (n+1) \times (n+1) = 1$ , donc  $\text{pgcd}(n(n+2), (n+1)) = 1$  d'où  $\text{ppcm}(n(n+2), n+1) = n(n+2)(n+1)$  pour tout entier naturel  $n$ .

**Exercice résolu 3**

Résoudre dans  $\mathbb{N}^2$  le système  $\begin{cases} a+b=84 \\ \text{ppcm}(a;b) = [\text{pgcd}(a;b)]^2 \end{cases}$ .

**Solution :**

Soit  $\delta = \text{pgcd}(a,b)$ . Il existe  $a'$  et  $b'$  deux entiers naturels tels que  $a = \delta a'$  et  $b = \delta b'$ .

D'où le système

$$\begin{cases} \delta(a'+b') = 84 \\ \delta a' b' = \delta^2 \\ \text{pgcd}(a'; b') = 1 \end{cases} ; \begin{cases} a' b' (a'+b') = 84 \\ a' b' = \delta \\ \text{pgcd}(a'; b') = 1 \end{cases} . 84 = 2^2 \times 3 \times 7. \delta \text{ est un diviseur de } 84.$$

Les diviseurs positifs de 84 sont 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84.

Décomposons 84 en produits de deux facteurs représentant  $a' b'$  et  $a'+b'$ .

|           |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|-----------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $a' b'$   | 1  | 2  | 3  | 4  | 6  | 7  | 12 | 14 | 21 | 28 | 42 | 84 |
| $a' + b'$ | 84 | 42 | 28 | 21 | 14 | 12 | 7  | 6  | 4  | 3  | 2  | 1  |

Or  $a'$  et  $b'$  étant premiers entre eux, il en est de même de  $a' b'$  et  $a'+b'$ .

Les couples  $(a' b', a'+b')$  solutions sont : (1;84) ; (3;28); (4;21); (7;12) ; (12;7) ; (21;4) et (84;1).

$\text{pgcd}(a'; b') = 1$  et connaissant la somme  $a'+b'$  et le produit  $a' b'$  on trouve

$(a'; b') \in \{(3;4); (4;3)\}$ . D'où  $\delta = a' b' = 12$  et L'ensemble des solutions proposées est  $S = \{(36;48); (48;36)\}$ .



## Exercice résolu 3

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls, tels que  $a < b$  et  $\text{PGCD}(a;b) = \delta$  et  $\text{PPCM}(a;b) = \mu$ .  
 Déterminer les couples  $(a;b)$  d'entiers naturels tels que  $2\mu + 3\delta = 78$ .

**Solution :**

$\text{PGCD}(a;b) = \delta$ . Il existe deux entiers naturels  $a'$  et  $b'$  premiers entre eux tels que  $a = \delta a'$  et  $b = \delta b'$ . De plus  $\mu\delta = ab = \delta^2 a' b'$ . D'où  $\mu = \delta a' b'$ .

$2\mu + 3\delta = 78$  peut donc s'écrire  $2\delta a' b' + 3\delta = 78$  ; soit  $\delta(2a' b' + 3) = 78$ .

De plus  $78 = 2 \times 3 \times 13$ . 78 peut donc s'écrire :  $1 \times 78$  ;  $2 \times 39$  ;  $6 \times 13$ .

Or  $2a' b' + 3$  est impair et n'est pas égal à 1. Donc  $2a' b' + 3 = 13$  ou  $2a' b' + 3 = 39$  ;

soit  $a' b' = 5$  ou  $a' b' = 18$ .

Si  $a' b' = 5$ , alors  $\delta = 6$ . Si  $a' = 1, b' = 5$  et  $(a;b) = (6;30)$ .

Si  $a' b' = 18$ ,  $\delta = 2$  et alors  $a' = 1$  et  $b' = 18$  ou bien  $a' = 2$  et  $b' = 9$  car  $a'$  et  $b'$  sont premiers entre eux et  $a$  plus petit que  $b$ .

Les couples d'entiers naturels demandés sont  $(6;30)$ ;  $(2;36)$  et  $(4;18)$ .

## S'exercer

Calculer  $\text{PGCD}(a;b)$ , puis  $\text{PPCM}(a;b)$  dans chacun des cas suivants :

(1)  $a = 3675$  et  $b = 5145$  ;

(2)  $a = 16$  et  $b = 16$  ;

(3)  $a = 151$  et  $b = 77$  ;

(4)  $a = 560$  et  $b = 200$  ;

(5)  $a = -51$  et  $b = -68$ .

Trouver tous les couples  $(a;b)$  d'entiers naturels, tels que 
$$\begin{cases} ab = 12950 \\ \text{ppcm}(a;b) = 2590 \end{cases}$$



# LEÇON 2 NOMBRES PREMIERS ET ÉQUATION

## DANS $\mathbb{Z}^2$ DU TYPE $ax + by = c$

- Utiliser le théorème de Gauss pour :
- résoudre des problèmes de divisibilité ;
  - résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$ , des équations linéaires  $ax + by = c$  dont les coefficients sont des entiers décomposés en produits de facteurs premiers ;
  - reconnaître si un nombre est premier ;
  - déterminer les diviseurs de l'entier  $p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_n^{\alpha_n}$  où les  $p_i$  sont des nombres premiers et les  $\alpha_i$  des entiers naturels non nuls.
- Déterminer des entiers connaissant leur pgcd et leur ppcm.

### 2.1 ÉQUATIONS $ax + by = c$ dans $\mathbb{Z}^2$ .



#### Prendre un bon départ

On considère les équations (E) :  $51x - 69y = 7$  et (E') :  $-4x + 46y = -10$ .

- a) Calculer PGCD(51 ; 69). Montrer que PGCD(51 ; 69) divise toujours  $51x - 69y$ , mais ne divise pas 7. En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution dans  $\mathbb{Z}^2$ .
- b) Calculer PGCD(34 ; 64), puis montrer que l'équation (E') est équivalente à  $17x - 23y = 5$ .
- c) (i) Montrer que le couple (3; 2) est une solution de l'équation  $17x - 23y = 5$ .

(ii) Soit  $(x; y)$  une solution de  $17x - 23y = 5$ . Du système  $\begin{cases} 17x - 23y = 5 \\ 17 \times 3 - 23 \times 2 = 5 \end{cases}$ , vérifier que

$$17(x - 3) - 23(y - 2) = 0.$$

(iii) Déduire que 17 divise  $23(y - 2)$  et donc qu'il existe un entier  $k$  tel que  $y = 17k + 2$ .

Déduire que  $x = 23k + 3$ .

(iv) Vérifier que tout couple de la forme  $(23k + 3; 17k + 2)$  est solution de  $17x - 23y = 5$ .

(v) Donner la forme générale des solutions de (E'). Peut-on avoir des couples d'entiers premiers entre eux, solutions de (E')?



#### Retenir

Soit (E) l'équation  $ax + by = c$  où  $a$  et  $b$  sont deux entiers tous non nuls et  $c \in \mathbb{Z}$ .

• Si PGCD( $a; b$ ) ne divise pas  $c$ , alors (E) n'a pas de solution dans  $\mathbb{Z}^2$ .

• Si PGCD( $a; b$ ) divise  $c$ , alors l'équation (E) est équivalente à  $a'x + b'y = c'$  où  $a'$  et  $b'$  sont premiers entre eux.  $a = \delta a'$ ,  $b = \delta b'$ ,  $c = \delta c'$  où  $\delta = \text{pgcd}(a, b)$ .

Soit  $(u; v)$  une solution particulière de  $a'x + b'y = c'$ . L'ensemble des solutions de  $a'x + b'y = c'$  est l'ensemble des couples qui s'écrivent  $(-b'k + u; a'k + v)$  où  $k$  est un entier arbitraire.



## Exemple

Réolvons dans  $\mathbb{Z}^2$ , les équations  $12x + 8y = -52$  (1) et  $12x - 8y = 35$  (2).

$$\text{PGCD}(12; 8) = 4.$$

Puisque 4 ne divise pas 35, l'équation (2) n'admet aucune solution dans  $\mathbb{Z}^2$ .

4 divise  $-52$  ( $-52 = 4 \times (-13)$ ) et donc l'équation (1) est équivalente à l'équation  $3x + 2y = -26$  (3).

$$3x = -2y - 26;$$

$$x = -\frac{2}{3}y - \frac{26}{3}.$$

Pour  $y = 26$ ,  $x = -\frac{2}{3} \times 26 - \frac{26}{3} = -\frac{52}{3} - \frac{26}{3} = -\frac{78}{3} = -26$ . Le couple  $(-26; 26)$  est une solution particulière de l'équation (3).

(3) est solution de (3) si et seulement si  $3x + 2y = -26$ .

$$3 \times (-26) + 2 \times (26) = -78 + 52 = -26. \text{ D'où } 3(x + 26) + 2(y - 26) = 0.$$

$$3(x + 26) = -2(y - 26). \text{ 2 divise } 3(x + 26) \text{ et 2 Premier avec 3. D'après le théorème de Gauss,}$$

2 divise  $x + 26$ . Il existe un entier  $k$  tel que  $x + 26 = 2k$ ;

$$x = 2k - 26 \text{ et donc } y = -3k + 26.$$

L'ensemble des solutions de (2) est l'ensemble des couples

$$(2k - 26; -3k + 26) \text{ où } k \text{ est un entier.}$$

Programme de la résolution de l'équation diophantienne  $ax + by = c$ ,

1) Voir si le PGCD( $a; b$ ) divise  $c$ , sinon pas de solutions;

2) Utiliser l'égalité de Bézout pour trouver une solution particulière;

3) Utiliser le théorème de Gauss pour écrire les solutions de l'équation.

Note : On peut résoudre l'équation  $ax + by = c$  par d'autres méthodes (dont celle des congruences).

En général, on utilise l'algorithme d'Euclide pour déterminer le pgcd de 2 entiers relatifs.

Déterminons les entiers  $x$  tels que  $x \equiv a(n)$  et  $x \equiv b(p)$  où  $a, b, n, p$  sont donnés.

$$\text{On peut écrire } x = nx' + a = py' + b. \text{ D'où } x' - py' = \frac{b-a}{n}.$$

C'est une équation diophantienne dont la valeur de  $x'$  ou celle de  $y'$  suffit pour déterminer

la valeur de  $x$ .

## S'exercer

Répondre dans  $\mathbb{Z}^2$  les équations :

$$\text{a) } 5x = 16y; \text{ b) } 151x - 77y = 1; \text{ c) } 151x - 77y = 7; \text{ d) } 195x + 48y = -9.$$

$$\text{Calculer le PGCD}(3675; 5145).$$

Répondre dans  $\mathbb{Z}^2$ , l'équation  $3675x - 5145y = 4410$ .

Déterminer les solutions  $(x, y)$  de cette équation;  $x$  et  $y$  premiers entre eux.

Déterminer les entiers  $x$  tels que  $x \equiv 3[5]$  et  $x \equiv (-2)[7]$ , par deux méthodes différentes.



## 2.2 EXISTENCE ET UNICITÉ DE LA DÉCOMPOSITION DE TOUT ENTIER EN PRODUIT DES PUISSANCES ENTIÈRES DES NOMBRES PREMIERS.



### Prendre un bon départ

Soit  $n$  un entier naturel non premier distinct de 0 et 1;  $D$  l'ensemble des diviseurs de  $n$  au moins égaux à deux.

(i) Donner un élément de  $D$  ;

(ii) Justifier que  $D$  admet un plus petit élément qu'on note  $p$ .

(iii) Soit  $q$  un diviseur de  $p$ , distinct de 1. Montrer que  $q$  est un élément de  $D$ . En déduire que  $p$  est premier.

(iv) Montrer qu'il existe un entier naturel  $k$  tel que  $n = k \times p$ . En déduire que  $k$  est un élément de  $D$  et déduire que  $p^2 \leq n$ .

(i) Ecrire 113 et 2700 comme produit des puissances entières des nombres premiers.

(ii) Soit  $P(n)$  la proposition :  $n$  peut se mettre sous forme d'un produit de facteurs du premier degré pour tout entier naturel  $n$ ,  $n \geq 2$ .

• Montrer que  $P(n)$  est vraie pour  $n = 2$  ; • Supposons que  $P(n)$  est vraie pour un entier  $n$ .

Montrer que  $P$  est vraie pour  $n + 1$  si  $n + 1$  est premier.

Si  $n + 1$  n'est pas premier, alors justifier qu'il existe un entier  $q$  premier tel que  $n + 1 = q \times k$ .

En déduire que la propriété est vraie en  $n$  et par suite en  $n + 1$ .



### Retenir

- Pour tout entier naturel  $n$  non nul et distinct de 1,
  - Soit  $n$  est un nombre premier,
  - Si  $n$  n'est pas un nombre premier et alors il existe un nombre premier  $p$  qui divise  $n$  avec  $p^2 \leq n$ .
- Tout entier naturel non nul et distinct de 1 peut s'écrire de manière unique comme produit fini des puissances entières des nombres premiers.
- $p \in \mathbb{Z}$  est un nombre premier si et seulement si  $p \notin \{-1, 0, 1\}$  et les seuls diviseurs de  $p$  sont  $-1, 1, -p$  et  $p$ .

### Remarque

Pour montrer qu'un nombre  $n$  est premier, il suffit de montrer que parmi tous les entiers premiers dont le carré est inférieur ou égal à  $n$ , aucun ne divise  $n$ .

### Exemple

Montrons que 101 est un nombre premier.

Cherchons tous les entiers premiers  $p$  tels que  $p^2 \leq 101$ .

On a  $p \leq \sqrt{101}$  et  $p$  premier.  $p \in \{2; 3; 5; 7\}$ . En utilisant les critères de divisibilité

par 2 ; 3 et 5, et la division de 101 par 7, aucun des nombres premiers inférieurs à  $\sqrt{101}$  ne divise 101.

Donc, 101 est un nombre premier.



## S'exercer

Montrer que 313 est un entier premier.

## 2.3 DIVISEURS D'UN ENTIER NON NUL.

### Prendre un bon départ

Déterminer tous les diviseurs positifs de 1.

Soit  $N$  un entier naturel non nul et distinct de 1,  $p_1, p_2, \dots, p_n$  des nombres premiers tels que  $p_1 < p_2 < \dots < p_n$  et  $N = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_n^{\alpha_n}$  où  $(\alpha_i)$  est une suite d'entiers naturels non nuls.

Soit  $q = q_1^{\beta_1} \times q_2^{\beta_2} \times \dots \times q_m^{\beta_m}$  un entier naturel, diviseur de  $N$ . Montrer que  $q_1^{\beta_1}$  est un diviseur de l'un des facteurs  $p_i^{\alpha_i}$  de  $N$ . En déduire que  $q_1 = p_i$  et ainsi,  $0 \leq \beta_1 \leq \alpha_i$ .

Soit  $E_1 = \{p_1^0; p_1^{\alpha_1}; \dots; p_1^{\alpha_1}\}$ ;  $E_2 = \{p_2^0; p_2^1; \dots; p_2^{\alpha_2}\}$ ; ...,  $E_n = \{p_n^0; p_n^1; \dots; p_n^{\alpha_n}\}$ .

Montrer que l'ensemble  $D_N^+$  des diviseurs positifs de  $N$  est l'ensemble des entiers naturels qui se décomposent en  $a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_n$  où  $a_i \in E_i$ . ( $1 \leq i \leq n$ )

Déduire que  $D_N^+ = \left\{ \prod_{i=1}^n a_i / a_1, \dots, a_n \in E_1 \times \dots \times E_n \right\}$

Déduire que  $\text{Card}(D_N^+) = (\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times (\alpha_3 + 1) \times \dots \times (\alpha_n + 1)$ .

### Retenir

Soit  $N$  un entier naturel non nul tel que  $N = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_n^{\alpha_n}$  où  $(\alpha_i)$  est une suite d'entiers naturels non nuls,  $p_1, p_2, \dots, p_n$  des entiers premiers tels que  $p_1 < p_2 < \dots < p_n$ .

Il y a  $(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times (\alpha_3 + 1) \times \dots \times (\alpha_n + 1)$  diviseurs positifs

Les diviseurs positifs de  $N$  sont les termes de la somme, du développement du produit :

$$(1 + p_1^1 + \dots + p_1^{\alpha_1}) \times (p_2^0 + p_2^1 + \dots + p_2^{\alpha_2}) \times \dots \times (p_n^0 + p_n^1 + \dots + p_n^{\alpha_n})$$

### Exemple

Déterminons les diviseurs positifs de 72.

$$72 = 2^3 \times 3^2.$$

Il y a  $(3 + 1) \times (2 + 1) = 12$  diviseurs positifs.

Les diviseurs positifs sont les termes de la somme  $S$ .

$$S = (1 + 2 + 2^2 + 2^3)(1 + 3 + 3^2).$$

$$S = (1 + 2 + 4 + 8)(1 + 3 + 9) = 1 + 3 + 9 + 2 + 6 + 18 + 4 + 12 + 36 + 8 + 24 + 72.$$

Les diviseurs positifs de 72 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 9 ; 12 ; 18 ; 24 ; 36 ; 72.



**Exercice résolu**

1. Déterminons les entiers naturels  $a$  et  $b$  tels que  $ab = 560$  et  $\text{PGCD}(a;b) = 4$ .  
Soient les entiers  $a'$  et  $b'$  tels que  $a = 4a'$  et  $b = 4b'$ .  $a'$  et  $b'$  sont premiers entre eux.  
De  $ab = 560$ , on a  $a'b' = 35$ .

Or  $35 = 5 \times 7$ . Les diviseurs de 35 sont les termes du développement  $(1+5)(1+7)$ .  
Les diviseurs positifs de 35 sont : 1 ; 5 ; 7 et 35.

Comme  $a'$  et  $b'$  sont premiers entre eux,  $a' = 1$  et  $b' = 35$  ;  $a' = 5$  et  $b' = 7$  ;  
 $a' = 35$  et  $b' = 1$  ;  $a' = 7$  et  $b' = 5$ .

Les couples  $(a;b)$  correspondants sont :  $(4;140)$ ;  $(20;140)$ ;  $(140;4)$ ;  $(20;28)$ .

2. Déterminons les entiers  $x$  et  $y$  tels que  $5x - 2y = 357$  et  $\text{PPCM}(x;y) = 119$ .

Soit  $d = \text{PGCD}(x;y)$ .  $d$  divise  $5x - 2y$ , donc 357.

On peut montrer que 119 est premier.

Or  $357 = 3 \times 119$ . 357 a pour diviseurs positifs 1 ; 3 ; 119 et 357.

$d$  est aussi un diviseur de 119.

$d$  peut prendre les valeurs 1 ou 119.

si  $d = 1$ , alors  $x$  et  $y$  sont premiers entre eux et  $xy = 119$ .

$x = 1$  et  $y = 119$  ou  $x = 119$  et  $y = 1$ .

Aucun des couples solutions correspondants n'est solution de l'équation  $5x - 2y = 357$ .

Si  $d = 119$ , alors en posant  $x = 119x'$  et  $y = 119y'$ ,  $5x' - 2y' = 3$ .

Un couple de solution particulière est  $(5;6)$ .

$x'$  et  $y'$  sont tels que  $5(x' - 5) - 2(y' - 6) = 0$ .

2 divise  $5(x' - 5)$ . Comme 2 divise  $5(x' - 5)$ , 2 et 5 premiers entre eux, 2 divise  $(x' - 5)$ .

$x' = 2a + 5$  et  $y' = 5a + 6$  avec  $a \in \mathbb{Z}$ .

Déterminons  $a$  tels que  $x'$  et  $y'$  sont premiers entre eux.

$y' = 2x' + a - 4$  ;  $x = 2(a - 4) + 4$ .

$\text{PGCD}(x';y') = \text{PGCD}(a - 4 ; 4)$  et  $\text{PGCD}(a - 4 ; 4) \in \{1;2;4\}$ .  $\text{PGCD}(a - 4 ; 4) = 1$

$a$  doit être impair. Par conséquent,  $x = 238a + 5$  et  $y = 590a + 6$ .

L'ensemble des couples  $(x;y)$  est l'ensemble des couples de la forme

$(238a + 5; 590a + 6)$  où  $a$  est un entiers naturel impair.

**S'exercer**

2.e a) Montrer que les entiers  $x - y$  et  $x + y$  sont de même parité.

b) En déduire la résolution dans l'ensemble  $\mathbb{Z}^2$  de l'équation  $x^2 - y^2 = 1969$ .

2.f Résoudre dans  $\mathbb{N}^2$ , l'équation  $9x^2 - (y+1)^2 = 32$ .

2.g Déterminer tous les couples d'entiers naturels  $(a;b)$  tels que  $a \times b = 12950$   
et  $\text{ppcm}(a;b) = 2590$ .

2.h Déterminer tous les couples d'entiers naturels  $(a;b)$  tels que  $\text{pgcd}(a;b) = 36$  et  $\text{ppcm}(a;b) = 1296$ .

2.i 1) Décomposer les nombres 720 ; 2860 ; 8040 et 1 323 en produit des facteurs premiers.  
Déterminer le nombre de diviseurs entiers relatifs de chacun d'eux.

2) Déterminer les expressions générales de la décomposition en produit de nombres premiers  
des entiers naturels qui ont 24 diviseurs positifs. Quel est le plus petit d'entre eux ?

3) Décomposer  $E = n + n^2 + 1$ ,  $n$  étant un entier positif et non nul, en produit de deux facteurs  
du second degré et démontrer que ces facteurs sont premiers entre eux.

Le nombre  $E$  peut-il être premier ?



# S'ENTRAÎNER

## PGCD ; PPCM

déduire les valeurs correspondantes de  $a, b, c$  et  $d$ .

**6**

Soit  $n$  un entier naturel non nul. On considère les nombres  $a$  et  $b$  définis par  $a = 2n + 3$  et  $b = 5n - 2$ .

- 1) Montrer que tout diviseur de  $a$  et  $b$  est un diviseur de 19.
- 2) En utilisant le théorème de Gauss, déterminer les entiers naturels  $n$  pour lesquels  $\text{pgcd}(a; b) = 19$ .

**7**

Soient  $n$  un entier naturel non nul et  $A$  le nombre défini par  $A = \frac{(2n-1)(2n^2+3n-1)}{n+2}$ .

- a) Déterminer deux entiers  $\alpha$  et  $\beta$  tels que, pour tout  $n$ , on ait:

$$2n^2 + 3n - 1 = (\alpha n + \beta)(n + 2) + 1.$$

- b) Que peut-on en déduire pour les nombres  $2n^2 + 3n + 1$  et  $n + 2$  ?

- 2) Déterminer  $n$  de façon que  $A$  soit un entier naturel.

**8**

Soit  $n$  un entier naturel non nul. On considère les nombres  $a$  et  $b$  définis par  $a = n^2 + 3$  et  $b = n + 2$ .

- 1) Vérifier que :  $n^2 + 3 - (n + 2)(n - 2) = 7$ .
- 2) Dédire que tout diviseur de  $a$  et  $b$  est un diviseur de 7.
- 3) Pour quelles valeurs de  $n$  la fraction  $\frac{n^2 + 3}{n + 2}$  est-elle irréductible ?

- 4) Déterminer  $n$  de façon que  $\frac{n^2 + 3}{n + 2}$  soit un entier naturel.



9

Résoudre dans  $\mathbb{Z}$ ,

- 1) l'équation (E) :  $3x \equiv 1[5]$  ;
- 2) l'équation (F) :  $5x \equiv 2[5]$  ;
- 3) le système  $\begin{cases} 3x \equiv 1[5] \\ 5x \equiv 2[5] \end{cases}$ .

10

- 1) Calculer le plus grand diviseur commun des nombres 5145 ; 4410 ; 3675.
- 2) Résoudre dans  $\mathbb{N}$  l'équation  $3675x - 5145y = 4410$ .

11

Déterminer tous les couples d'entiers naturels solutions de l'équation  $9y^2 - (x+1)^2 = 32$ .

12

Déterminer tous les couples de nombres entiers naturels  $(a; b)$  tels que

$$\begin{cases} ab = 12950 \\ \text{ppcm}(a; b) = 2590 \end{cases}$$

13

Déterminer les nombres entiers naturels  $a$  et  $b$

$$\text{tels que } \begin{cases} a + b = 182 \\ \text{ppcm}(a; b) = 13 \end{cases}$$

14

Soient deux entiers quelconques  $a$  et  $b$ .

On considère les nombres :

$$A = 5a + 4b \text{ et } B = 11a + 9b.$$

- 1) Démontrer que  $\text{pgcd}(a; b) = \text{pgcd}(A; B)$ .
- 2) On considère les nombres  $A'$  et  $B'$  tels que  $A' = pa + qb$  et  $B' = ra + sb$  avec  $ps - qr = 1$ .  
Montrer que  $\text{pgcd}(a; b) = \text{pgcd}(A'; B')$ .

15

Un nombre entier naturel  $N$  non nul s'écrit en base 7 et  $\overline{zyx}$  en base 9.

- 1) Montrer que  $y = 24x - 40z$ .
- 2) Dédire que  $y = 0$ .
- 3) Déterminer  $x$  et  $z$ .
- 4) Ecrire  $N$  dans le système décimal.

16

- 1) Déterminer les couples  $(a; b)$  d'entiers relatifs tels que  $3b - 3a = 1$ .
- 2) Un entier naturel  $A$  s'écrit  $\overline{b0a}$  dans le système de numération de base cinq et  $\overline{ab}$  dans le système de numération de base dix. Déterminer  $a, b$  etc, puis donner l'expression de  $A$  dans le système décimal.

17

Soit  $b$  un entier naturel, strictement supérieur à 1.

- 1) En remarquant que  $b^2 = (b-1)(b+1) + 1$ , déterminer le plus grand commun diviseur de  $b^2$  et  $b-1$ .
- 2) Déterminer les couples  $(x; y)$  d'entiers relatifs tels que  $b^2x + (b-1)y = 1$ .
- 3) Application numériques :
- 4) Déterminer les couples  $(x; y)$  d'entiers relatifs tels que  $1024x + 31y = 1$ , avec  $0 \leq y \leq 5000$ .

18

$x$  et  $y$  sont deux entiers relatifs, on considère l'équation

$$(E) : 324x - 245y = 7.$$

- 1) Montrer que, pour toute solution  $(x; y)$  de (E), l'entier  $x$  est multiple de 7.
- 2) Déterminer une solution particulière et en déduire toutes les solutions de (E).
- 3) Soit  $\delta$  le PGCD des éléments d'un couple  $(x; y)$  solution de (E). Quelles sont les valeurs possibles de  $\delta$  ? Déterminer les solutions telles que  $x$  et  $y$  soient premiers entre eux.



$$b) xy = 2\,352 \text{ et } ppcm(x; y) = 168.$$

1) Trouver les couples d'entiers naturels  $(a; b)$

$$\text{tels que : } \begin{cases} p \gcd(a; b) = 15 \\ ppcm(a; b) = 90 \end{cases}$$

2) Trouver les couples d'entiers naturels  $(a; b)$

$$\text{tels que : } \begin{cases} p \gcd(a; b) = 7 \\ ppcm(a; b) = 84 \end{cases}$$

a) Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation  $4x - 5y = 3$ .

b) Trouver le nombre  $N$  s'écrivant  $\overline{xy}$  en base

6,  $x, y$  vérifiant  $4x - 5y = 3$ .

3) Trouver le nombre  $N$  s'écrivant  $xy$  en base

10,  $x, y$  vérifiant  $4x - 5y = 3$ .

Déterminer tous les couples  $(a, b)$  d'entiers

naturels tels que :  $a + b = 70$  PGDC( $a, b$ ) = 7.

**23**

On veut comparer PGDC( $a, b$ ) et

PGDC( $7a + 2b, 17a + 5b$ ).

1. Soit  $d$  diviseur commun des deux nombre  $a$  et  $b$ .

a) Montrer  $d$  divise aussi  $7a + 2b$  et  $17a + 5b$ .

b) Dédire que :

$$\mathcal{D}(a, b) \subset \mathcal{D}(7a + 2b, 17a + 5b).$$

2. Posons  $A = 7a + 2b$  et  $B = 17a + 5b$

a) Exprimer  $a$  et  $b$  en fonction de  $A$  et  $B$ .

b) En déduire que tout diviseur  $d$  commun à  $a$  et  $b$  est un diviseur commun à  $A$  et  $B$ .

3. Conclure.

**24**

On considère la fraction rationnelle

$$R = \frac{5n^3 - n}{n + 2} \text{ où } n \text{ est un entier relatif distinct}$$

de  $-2$ .

1. a) Démontrer que :

$$PGCD(5n^3 - n, n + 2) = PGCD(n + 2, 38).$$

b) En déduire les valeurs possibles des

$$PGCD(5n^3 - n, n + 2).$$

2) Déterminer les valeurs de  $n$  pour les quelles

trouver tous les couples d'entiers naturels

dans chacun des cas suivants :

$$\begin{cases} a < b \\ a + b = 5664 \\ p \gcd(a; b) = 354 \end{cases} ; 2) \begin{cases} a < b \\ a + b = 5664 \\ p \gcd(a; b) = 354 \end{cases}$$

$$a^2 - b^2 = 7244$$

$$p \gcd(a; b) = 12$$

proposer de déterminer les entiers relatifs

$$\begin{cases} n \equiv 1[5] \\ n \equiv 5[7] \end{cases} (S).$$

Montrer que si  $n$  est solution du système (S)

$$4n + 1 \equiv 0[5]$$

$$4n + 1 \equiv 0[7]$$

Déduire que tout entier  $n$ , solution de (S)

satisfait la relation  $35k - 4n = 1(1)$ , où  $k \in \mathbb{Z}$ .

Déterminer les solutions de (1), puis celle

pour tout entier naturel non nul  $n$ , on pose

$$A = 2n^2 - 2n \text{ et } B = 2n^2 + n.$$

Déterminer  $\gcd(A; B)$ .

Trouver les couples d'entier naturels  $(a; b)$

$$2a^2 + b^2 = 16072 \text{ et } p \gcd(a; b) = 14.$$

Trouver deux entiers  $p$  et  $q$  dont le  $\gcd$

$$\text{est } \frac{7}{9}.$$

$$\text{Résoudre dans } \mathbb{Z}^2 : \begin{cases} x^2 - y^2 = 5\,440 \\ p \gcd(x; y) = 8 \end{cases}$$

Déterminer deux entiers naturels  $x$  et  $y$

tel que :

$$xy = 1\,350 \text{ et } ppcm(x; y) = 90 ;$$



a)  $\frac{5n^3 - n}{n+2}$  est un entier relatif.

b) la fraction  $\frac{5n^3 - n}{n+2}$  est irréductible.

$$\text{PGCD}(5n^3 - n, n+2) = 19.$$

**25**

Résoudre dans  $\mathbb{Z}$ ,

$$2x^2 - 2x + 1 \equiv 0[5].$$

1) Justifier que 503 est un nombre premier.

2) Déterminer deux entiers  $x$  et  $y$  tels que  $x^2 - y^2 = 503$ .

Deux entiers naturels  $a$  et  $b$  s'écrivent dans le système de numérotation de base  $n$ .

$$\text{On donne } a = \overline{2310} \text{ et } b = \overline{252}.$$

On pose :  $\text{PGCD}(a; b) = d$ .

1. a) Démontrer que  $2n+1$  divise  $a$  et divise  $b$ .

b) Montrer que si  $n$  est pair alors  $d = 2(2n+1)$ .

c) Montrer que si  $n$  est impair alors  $d = 2n+1$ .

2) On prend  $n = 6$

Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation  $ax + by = 26$ .

$$5a - 2b = 357 \text{ et } \text{PPMC}(a, b) = 119.$$

**26**

Déterminer tous les couples  $(a, b)$  d'entiers

naturels tels que : 
$$\begin{cases} \text{PGCD}(a, b) = 5 \\ \text{PPMC}(a, b) = 720 \end{cases}$$

$$\text{et } \exists r \in \mathbb{Z} / r^2 = \frac{a}{b}$$

## NOMBRES PREMIERS

**27**

$n$  est un entier naturel et  $P$  un nombre premier supérieur ou égal à 3.  $a$  et  $b$  sont les nombres définis par  $a=2^n$  et  $b=a \times P$ .  $S(a)$  est la somme des diviseurs de  $a$  et  $S(b)$  la somme des diviseurs de  $b$ .

1) Déterminer les ensembles  $D(a)$  et  $D(b)$  des diviseurs de  $a$  et  $b$ .

2) Démontrer que  $S(a) + 2^{n+1} = 1 + 2S(b)$  et calculer  $S(a)$ .

3) Exprimer  $S(b)$  en fonction de  $S(a)$  et calculer  $S(b)$ .

**28**

$p$  est un nombre premier.

1) Montrer que pour tout entier  $k$  tel que  $1 \leq k \leq p-1$ , alors  $C_p^k$  est divisible par  $p$ .

2) Soit  $x, y$  deux entiers naturels non nuls. Montrer que  $(x+y)^p \equiv x^p + y^p \pmod{p}$ .

3) Montrer par récurrence que pour tous entiers  $x_1, x_2, \dots, x_n$  non nuls, on a :

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^p \equiv x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p \pmod{p}$$

**29**

On considère dans l'ensemble  $\mathbb{Q}$  des nombres rationnels l'équation  $(E_n) x^2 - 48x - 2(n+48) = 0$  où  $n$  est un nombre entier naturel et  $x$  un nombre rationnel inconnu.

1) Démontrer que  $(E_n)$  admet deux solutions rationnelles si,  $2n+48^2$  est un carré parfait.

2) Soit  $k$  l'entier naturel tel que :  $2n+48^2 = k^2$

a. Démontrer l'existence de deux nombres entiers naturels  $p$  et  $q$  tels que :  $k-48 = 2p$  et  $k+48 = 2q$  ;  $p+q = n$  et  $96 = 2p(2(p-q))$

b. Décomposer 96 en produit des facteurs premiers et en déduire les valeurs de  $p$  et  $q$ .

3. Résoudre dans  $(E_n)$  pour la valeur de  $n$  trouvée.

**30**

On se propose de déterminer les couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation  $7^n - 3 \times 2^m = 1(E)$ .

1) Pour  $m \leq 4$ , montrer qu'il y a exactement 2 couples solutions.

2) On suppose  $m \geq 5$ .



Montrer que si  $(n, m)$  est solution de (E)  
 $7^n \equiv 1[32]$ .  
 Étudier les restes de la division de 32  
 par les puissances de 7, montrer que si  $(n, m)$   
 est solution de (E), alors,  $n$  est divisible par 4.  
 Déduire que  $7^n \equiv 1[5]$ .  
 Résoudre (E) pour  $m \geq 5$ .  
 Déterminer tous les couples solutions de (E).

Considère dans  $\mathbb{N}^2$  le système suivant :

$$\begin{cases} p^2 + q^2 = r^2 \\ p + q + r = 24. \\ p < q \end{cases}$$

Montrer qu'un triplet  $(p, q, r)$  est solution  
 si et seulement si  $r < 12$  et  $(p, q)$  sont les  
 racines de l'équation :

$$(4-r)n + 24(12-r) = 0, \text{ où } n \text{ est}$$

entier.

Résoudre le système (S)

ABC est un triangle rectangle en A tel que  
 les longueurs AB, BC et AC soient des multiples

de 24. On plante sur le périmètre triangulaire

24 arbustes de manière qu'à chaque

angle du triangle un arbre soit plantés et que

les arbustes soient plantés et également espacés

calculer AB, BC et AC.

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers premiers entre eux, on  
 cherche de montrer que  $a+b$  et  $a \times b$  sont  
 premiers entre eux.

Soient  $u$  et  $v$  deux entiers relatifs tels que

$$au + bv = 1 \quad (1)$$

Montrer que la relation (1) est équivalente

aux relations suivantes :

$$a + b(u+v) = 1 \quad (2)$$

$$(b-a)u + (b+a)v = 1 \quad (3).$$

b. Que traduisent les relations (2) et (3)

2) Justifier que si  $a$  est premier avec  $b$  et  $a$   
 premier avec  $c$ , alors  $a$  est premier à  $b \times c$ .

3) Démontrer alors que  $a+b$  et  $ab$  sont  
 premiers entre eux.

4) Application : démontrer que

$$\text{PGDC}(m^2 + m, 2m + 1) = 1.$$

**33**

1) Résoudre dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation suivante :

$$5x - y = -3.$$

NB : on remarquera que  $(1; 8)$  est une solution  
 particulière.

2) On considère deux suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$   
 définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = 4x_n + 2 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} y_0 = 8 \\ y_{n+1} = 4y_n + 1 \end{cases}$$

a) Démontrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, x_n, y_n \in \mathbb{N}$ .

b) Démontrer que  $(x_n, y_n)$  est solution de  
 l'équation  $5x - y = -3$ .

c) En déduire que si  $x_n$  et  $y_n$  ne sont pas  
 divisibles par 3, alors  $x_n$  et  $y_n$  sont premiers  
 entre eux.

3) On pose  $u_n = x_n + \frac{2}{3}$  et  $v_n = y_n + \frac{1}{3}$

a) Démontrer que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont des suites  
 géométriques et exprimer  $u_n$  et  $v_n$  puis  $x_n$  et  $y_n$   
 en fonction de  $n$ .

b) Étudier les convergences des suites  
 $(x_n)$  et  $(y_n)$ .

**34**

1) Résoudre dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation suivante :

$$(E): 35x - 27y = 2.$$

2) Un astronome a observé un jour  $j_0$  le corps  
 céleste A. si  $n$  jours plus tard il observe un  
 corps céleste B. la période d'apparition du  
 corps A est de 105 jours et la période de



l'apparition du corps B est de 81 jours. On désigne par  $j$ , le jour de l'apparition simultanée des objets A et B aux yeux de l'astronome. Soit  $u$  et  $v$  le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre  $j_0$  et  $j_1$ .

- Montrer que  $(u, v)$  est solution de (E).
- Déterminer la solution de  $(u, v)$  permettant de trouver  $j_1$ .
- Combien de jours s'écoulent entre  $j_0$  et  $j_1$  ?

**35**

Soit  $a, b$  deux entiers naturels et  $p$  un nombre premier tel que  $\text{PGDC}(a + b, ab) = p^2$ .

- Montrer que  $P^2$  divise  $a^2$ . (on pourra remarquer que  $a^2 = a(a + b) - ab$ .)
- En déduire que  $P$  divise  $a$ .
- Démontrer que  $P$  divise  $b$ .
- Démontrer que  $\text{PGDC}(a, b) \in \{P, P^2\}$ .

On cherche à déterminer les entiers naturels  $n$  tels que :  $\text{PGDC}(a + b, ab) = 49$  et  $\text{PPCM}(a, b) = 231$

Montrer que si  $(a, b)$  est une solution de ce problème, alors  $\text{PGDC}(a, b) = 7$

En déduire toutes les solutions du problème posé.

**36**

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels tels que  $a^2 - 2b^2 = 1$ .

- Démontrer que  $a$  est impair.
- Démontrer que  $b$  est pair

**37**

$n$  est un entier naturel non nul

- Donner la liste des diviseurs de  $7^n$ .
- Calculer la somme  $S_n$  des diviseurs de  $7^n$  et montrer que  $6S_n + 1 = 7^{n+1}$ .
- Déterminer suivant les valeurs de  $n$  le reste dans la division euclidienne de  $7^n$  par 10. Déterminer suivant les valeurs de  $n$  le chiffre des unités de  $S_n$ . Déterminer tous les couples  $(a, b)$  d'entiers naturels tels que :  $5a - 2b = 357$  et  $\text{PPCM}(a, b) = 119$ .

**38**

Déterminer tous les couples  $(a, b)$  d'entiers naturels tels que :  $a + b = 70$   $\text{PGDC}(a, b) = 1$

**39**

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $u_n = \frac{1}{n}$

1) Démontrer l'existence de deux entiers naturels  $a$  et  $b$  tels que  $au_{n+1} + bu_n = 1$ . Que peut-on dire de  $u_n$  et  $u_{n+1}$  ?

2)  $n$  et  $P$  étant deux entiers naturels distincts, on pose  $\delta = \text{PGDC}(n, P)$ .

3) Démontrer que  $u_\delta$  divise  $u_n$  et  $u_P$ .

NB : On rappelle que

$$a^n - 1 = (a - 1)(1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}).$$

4) Soit  $d$  un diviseur commun à  $u_n$  et  $u_P$ .

On admet l'existence de deux entiers naturels  $u$  et  $v$  tels que  $nu + pv = \delta$

4) Démontrer  $\delta = \text{PGDC}(u_n, u_P)$

5) Déterminer  $\text{PGDC}(22015 - 1 ; 2103 - 1)$

**40**

$$f(x) = \frac{-2}{3}x + \frac{1}{2} \text{ et } A = \{x \in \mathbb{Z} \text{ tel que } f(x) \in \mathbb{Z}\}$$

- a) Montrer que  $A$  n'est pas vide.
- b) Déterminer  $A$ .

2. Déterminer

$$B = \{x \in A \text{ tel que } 4x^2 - 9(f(x))^2 \equiv 0 [7]\}$$

**41**

$p$  est un nombre premier supérieur ou égal à 3. On veut démontrer que l'entier naturel  $n = (p^2 + 1)(p - 1)(p + 1)$  est divisible par 16.

- Montrer que  $p \equiv -1 [3]$  ou  $p \equiv 1 [3]$ .
- En remarquant que  $p$  est impair, prouver qu'il existe un entier naturel  $k$  tel que  $P^2 - 1 = 2k(k + 1)$  en déduire que  $n$  est divisible par 16.



considérant tous les restes de la division successive de  $p$  par 5, démontrer que 5 divise  $n$ .

d. En déduire que  $n$  divise 240.

e. Existe-t-il quinze nombres premiers

$P_1, \dots, P_{15}$  supérieurs ou égaux à 7 tels que  $A = P_1^4 + P_2^4 + \dots + P_{15}^4$  soit un nombre premier ?

Recherche tous les couples d'entiers naturels

non nuls tels que :  $a \leq b$  vérifiant la

condition (E) :  $m + 10d = 142$  où  $d = \text{PGDC}(a, b)$

et  $m = \text{PPMC}(a, b)$  on pose :  $a = da'$  et  $b = db'$

avec  $\text{PGDC}(a', b') = 1$ .

Démontrer que si  $(a, b)$  est un couple

de (E), alors  $d(a'b' + 10) = 142$ .

Déduire que les valeurs possibles de  $d$

sont 1 et 2.

Déterminer les valeurs possibles de  $a$  et  $b$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $F_n = 2^{2^n} + 1$ .

Démontrer par récurrence que pour tout

$n \geq 2$ ,  $2^n \equiv 6[10]$ . En déduire que pour tout

$n \geq 2$ , le chiffre des unités de  $F_n$  est en base dix

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  ;  $m \in \mathbb{N}^*$ .

Démontrer que  $\frac{x^{2^m} - 1}{x + 1}$  est un entier

En déduire que  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{F_{n+k} - 2}{F_n}$

est entier et que  $F_n$  divise  $F_{n+1}$ .

Démontrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$\text{PGDC}(F_{n+k}, F_n)$  divise 2.

En déduire que  $F_{n+k}$  et  $F_n$  sont premiers

Soient  $p$  et  $q$  deux nombres donnés.  $E$  est

l'ensemble des nombres premiers admettant

au moins deux diviseurs premiers positifs  $p$

1. Soit  $n$  un élément de  $E$ , justifier que

$n = p^\alpha q^\beta$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux entiers naturels.

2. Exprimer en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$  le nombre de diviseurs de  $n$ .

3. Soit  $x, y$  deux éléments de  $E$  tels que le nombre de diviseurs de  $x$  soit 21 et celui de  $y$  soit 11.

a) Donner toutes les formes de décompositions  $x$  et  $y$  en produit des facteurs premiers,

b) Déterminer  $x, y, a$  et  $b$  sachant que  $\text{PGDC}(x, y) = 18$ .

45

On pose  $A = 2013! + 1$ . ( $n!$  désigne factorielle  $n$ ).

1. Démontrer que pour  $k \in \mathbb{N}; 1 \leq k \leq 2013$ .

$A + k$  n'est pas un nombre premier.

2. En déduire 2013 entiers naturels consécutifs parmi lesquels aucun n'est premier.

3. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Construire  $n$  entiers consécutifs parmi lesquels aucun n'est premier.

46

On veut montrer que :

$\text{PGDC}(a, b) = \text{PGDC}(a, b + \lambda a)$ .  $\lambda \in \mathbb{Z}$ ,

$b + \lambda \in \mathbb{N}^*$  ;  $a \in \mathbb{N}^*$ .

1. Démontrer que  $D(a, b) \subset D(a, b + \lambda a)$ .

2. Démontrer que  $D(a, b + \lambda a) \subset D(a, b)$ .

3. Conclure.

47

$n$  est un entier naturel, on pose

$a = n^2 + n$  et  $b = n^2 - n$

a) Montrer que

$\text{PGDC}(a, b) = \text{PGDC}(n^2 + n, 2n)$

b) En déduire que

$\text{PGDC}(a, b) = n \text{ PGDC}(n + 1, 2)$

c) Donner suivant la parité de  $n$ ,  $\text{PGDC}(a, b)$ .



**48**

1) Soit  $p$  et  $q$  deux nombres réels. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1,

$$\text{on a : } p^{n+1} - q^{n+1} = (p - q)(p^n + p^{n-1}q + \dots + pq^{n-1} + q^n).$$

2) Soit  $n, a, b$  trois entiers relatifs non nuls.

Montrer que si  $n$  divise  $a$  et  $a - b$ , alors  $n$  divise  $b$ .

3) On pose  $a = 27^{n+1} - 26n - 27$  et

$$b = 27^{n+2} - 26(n+1) - 27.$$

- Montrer que 676 divise  $a - b$ .

4) En utilisant les questions précédentes, montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ , 676 divise  $a$ .

**49**

Soit l'équation (E) d'inconnue rationnelle  $x$  :

$$(E) \quad 78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0 \text{ où } u \text{ et } v \text{ sont des entiers relatifs.}$$

1. On suppose que  $\frac{14}{39}$  est solution de (E).

a) Prouver que les entiers  $u$  et  $v$  sont liés par la relation  $14u + 39v = 1129$ .

b) Utiliser l'algorithme d'Euclide pour trouver un couple  $(x, y)$  d'entiers relatifs vérifiant :  $14x + 39y = 1$ . Vérifier que  $(-25, 9)$  est solution de cette équation.

c) En déduire un couple  $(u_0, v_0)$  solution particulière de  $14u + 39v = 1129$ . Donner la solution générale de cette équation.

d) Déterminer parmi les couples  $(u, v)$  précédents, celui pour lequel le nombre  $u$  est le plus petit entier naturel.

2. a) Décomposer 78 et 14 en facteurs premiers.

En déduire dans  $\mathbb{N}$  l'ensemble des diviseurs de 78 et l'ensemble des diviseurs de 14.

b) Soit  $\frac{P}{Q}$  une solution rationnelle de

l'équation (E). Montrer que si  $P$  et  $Q$  sont des entiers relatifs premiers entre eux,  $P$  divise 14 et  $Q$  divise 78.

c) En déduire les nombres rationnels entiers, pouvant être solution de (E). Parmi ces rationnels, l'ensemble de ceux qui sont positifs.

**50**

On pose :  $u = 2 + \sqrt{3}$  et  $v = 2 - \sqrt{3}$ .

a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1, on peut écrire  $u^n = a_n + b_n\sqrt{3}$  et  $v^n = a_n - b_n\sqrt{3}$  où  $a_n$  et  $b_n$  sont des entiers naturels.

b. Exprimer  $a_{n+1}$  et  $b_{n+1}$  en fonction de  $a_n$  et  $b_n$ .

c. Établir les égalités :  $a_n^2 - 3b_n^2 = 1$  et  $a_nb_{n+1} - a_{n+1}b_n = 1$ .

En déduire que les entiers  $a_n$  et  $b_n$  sont premiers entre eux, qu'il est de même pour les deux entiers  $a_{n+1}$  et  $a_n$  puis pour l'entier  $b_{n+1}$  et  $b_n$ .

**51**

1) Résoudre dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation (E) :  $8x - 105y = 30$ .

2) Soit  $(x_0, y_0)$  un couple solution de (E) tel que  $y_0$  divise  $x_0$ . Démontrer que  $y_0$  divise 30 et en déduire les valeurs possibles de  $y_0$  puis de  $x_0$ .

3) Déterminer tous les couples  $(a, b)$  d'entiers naturels dont le plus grand commun diviseur  $d$  et le plus petit commun multiple  $m$  vérifient la relation  $8m = 105d + 30$ .

NB : on pourra utiliser la question précédente.



# Chapitre 6

## DÉRIVATION – PRIMITIVES SUR UN INTERVALLE D'UNE FONCTION CONTINUE

### LEÇON 1 DÉRIVATION

- 1.1 DÉRIVABILITÉ D'UNE FONCTION SUR UN INTERVALLE -  
CALCUL DES DÉRIVÉES.
- 1.2 DÉRIVÉES DES FONCTIONS COMPOSÉES - DÉRIVÉE DE LA  
BIJECTION RÉCIPROQUE D'UNE FONCTION BIJECTIVE.
- 1.3 DÉRIVÉES SUCCECIVES ET LEURS APPLICATIONS
- 1.4 INÉGALITÉS DES ACCROISSEMENTS FINIS

### LEÇON 2 ÉTUDE ET REPRÉSENTATION DE QUELQUES FONCTIONS

### LEÇON 3 PRIMITIVES SUR UN INTERVALLE D'UNE FONCTION CONTINUE

- 3.1 PRÉSENTATION ET DÉFINITION
- 3.2 RECHERCHE PRATIQUE DES PRIMITIVES SUR DES  
INTERVALLES DE CERTAINES FONCTIONS CONTINUES.

## S'ENTRAÎNER



# LEÇON 1 DÉRIVATION

- ▶ Étudier la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle.
- ▶ Calculer et utiliser la dérivée ou les dérivées successives d'une fonction.
- ▶ Calculer et utiliser la dérivée de la composée de deux fonctions et de la réciproque d'une fonction sur un intervalle.
- ▶ Connaître et savoir utiliser les égalités et inégalités des accroissements finis.

## 1.1 DÉRIVABILITÉ D'UNE FONCTION SUR UN INTERVALLE - CALCUL DES DÉRIVÉES.



### Prendre un bon départ

#### Activité 1

Soit  $f$  la fonction numérique définie par :  $f : x \mapsto \sqrt{1-|x|}$ .

- Vérifier que  $f$  est définie sur l'intervalle  $[-1 ; 1]$ .
- Montrer que  $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{-|x|}{x(\sqrt{1-|x|} + 1)}$ . En déduire que  $f$  n'est pas dérivable en 0.
- Étudier la dérivabilité de  $f$  à droite en  $-1$  et à gauche en  $1$ .
- Soit  $x_0 \in ]0 ; 1[$ , montrer que  $f$  est dérivable en  $x_0$ .
- Peut-on dire que  $f$  est dérivable en tout  $x_0 \in [0 ; 1[$  ?
- Déterminer  $f'(x)$  pour  $x \in ]0 ; 1[$ . ( $f'$  désigne la fonction dérivée de  $f$ ).

#### Activité 2

1) Pour chacune des fonctions ci-dessous, préciser le plus grand ensemble sur lequel elle est dérivable et y définir sa fonction dérivée.

$$x \mapsto \frac{1}{x} ; \quad x \mapsto \sqrt{x} ; \quad x \mapsto \cos x ; \quad x \mapsto \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).$$

2) Démontrer que pour tout entier naturel  $n \geq 2$ ,

- La dérivée sur  $\mathbb{R}$  de la fonction :  $x \mapsto x^n$  est la fonction :  $x \mapsto nx^{n-1}$ .
- La dérivée sur  $\mathbb{R}^*$  de la fonction :  $x \mapsto \frac{1}{x^n}$  est la fonction :  $x \mapsto \frac{-n}{x^{n+1}}$ .



## Retenir

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $[a ; b]$  où  $a$  et  $b$  sont deux réels tels que  $a < b$ .

- On dit que  $f$  est **dérivable sur l'intervalle  $]a ; b[$**  si  $f$  est dérivable en tout  $x_0 \in ]a ; b[$ .
- On dit que  $f$  est **dérivable sur l'intervalle  $[a ; b]$**  si  $f$  est dérivable sur  $]a ; b[$ , dérivable à droite en  $a$  et dérivable à gauche en  $b$ .
- On dit que  $f$  est **dérivable sur l'intervalle  $]a ; b]$**  si  $f$  est dérivable sur  $]a ; b[$  et dérivable à gauche en  $b$ . on dit que  $f$  est dérivable sur  $[a ; b[$  si  $f$  est dérivable sur  $]a ; b[$  et dérivable à droite en  $a$ .
- On dit qu'une **fonction est dérivable sur un intervalle  $K$**  si elle est dérivable en tout élément  $x_0$  de  $K$ .

### Exemple 1

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $[1 ; +\infty[$  par  $f(x) = (x-1)\sqrt{x-1}$ .

Étudions la dérivabilité de  $f$  sur l'intervalle  $[1 ; +\infty[$ .

a) Soit  $x_0 \in ]1 ; +\infty[$ .

$-1 \in ]0 ; +\infty[$  et la fonction  $: x \mapsto \sqrt{x}$  est dérivable sur  $]0 ; +\infty[$ . Donc la fonction  $x \mapsto \sqrt{x-1}$  est dérivable en  $x_0$ . Par ailleurs, la fonction  $: x \mapsto x-1$  est dérivable en  $x_0$ ; donc la fonction  $f$  est dérivable en  $x_0$  comme produit de fonctions dérivables en  $x_0$ . On en déduit que  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $]1 ; +\infty[$ .

b) Pour  $x \neq 1$  on a  $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \sqrt{x-1}$ ; donc  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 0$  et par conséquent  $f$  est dérivable à droite en 1.

Ainsi, d'après a) et b), la fonction  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $[1 ; +\infty[$ .

Soit  $h$  la fonction numérique définie sur  $]-\infty ; 3]$  par  $h(x) = \sqrt{3-x} + 1$ .

Étudions la dérivabilité de  $h$  sur l'intervalle  $]-\infty ; 3]$ .

De même qu'au 1. a), la fonction  $h$  est dérivable sur l'intervalle  $]-\infty ; 3[$ .

$$\frac{h(x)-h(3)}{x-3} = \frac{\sqrt{3-x}}{x-3} = \frac{-1}{\sqrt{3-x}} \text{ pour tout } x \neq 3; \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{h(x)-h(3)}{x-3} = -\infty$$

$h$  n'est pas dérivable en 3. Ainsi,  $h$  n'est pas dérivable sur  $]-\infty ; 3]$ .

La fonction  $f : x \mapsto \sqrt{1-|x|}$  est continue sur  $[-1 ; 1]$  mais n'y est pas dérivable car elle n'est pas dérivable en 0.



## Remarque 1

## • Dérivabilité sur un ensemble

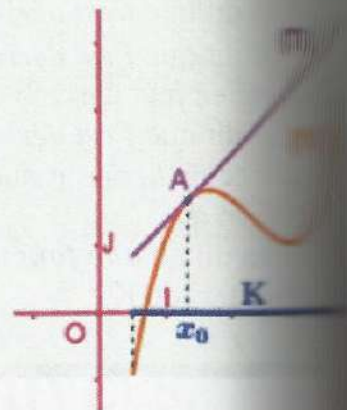
On dit qu'une fonction est dérivable sur un ensemble  $E$  si elle est dérivable en tout élément de  $E$ .  
Par exemple, la fonction  $f : x \mapsto (1 - |x|)$  de l'activité 1 ci-dessus est dérivable sur l'ensemble  $E = ]-1 ; 0[ \cup ]0 ; 1[$ .

## • Dérivabilité sur un intervalle et courbe représentative

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $K$  et de courbe représentative  $(\mathcal{C})$  dans un repère  $(O, I, J)$ .

a) Si  $f$  est dérivable sur un intervalle  $K$ , alors  $(\mathcal{C})$  admet en tout point d'abscisse  $x_0$  de  $K$  une tangente non parallèle à l'axe  $(OJ)$  des ordonnées.

b) On montre que si  $(\mathcal{C})$  admet au point d'abscisse  $x_0$  une tangente non parallèle à l'axe  $(OJ)$ , alors la fonction  $f$  est dérivable en  $x_0$ .



## 1) Tableau récapitulatif des dérivées et opérations sur les fonctions.

| Dérivée des fonctions usuelles                             |                                            |                                                                        | Dérivées et opérations sur les fonctions                       |                                 |                              |
|------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|---------------------------------|------------------------------|
| Fonction                                                   | Fonction dérivée                           | Ensemble de dérivabilité                                               | Fonctions $u$ et $v$ dérivables sur un intervalle $K$          | dérivée                         | Conditions                   |
| $x \mapsto c$<br>( $c$ , constante)                        | $x \mapsto 0$                              | $\mathbb{R}$                                                           | $u + v$                                                        | $u' + v'$                       |                              |
| $x \mapsto x$                                              | $x \mapsto 1$                              |                                                                        | $ku$                                                           | $ku'$                           |                              |
| $x \mapsto \sin x$                                         | $x \mapsto \cos x$                         |                                                                        | $u \times v$                                                   | $u'v + uv'$                     |                              |
| $x \mapsto \cos x$                                         | $x \mapsto -\sin x$                        |                                                                        | $x \mapsto u(ax + b)$                                          | $x \mapsto a \times u'(ax + b)$ | $ax + b$                     |
| $x \mapsto x^n$<br>( $n \in \mathbb{N}^*$ )                | $x \mapsto nx^{n-1}$                       |                                                                        | $u^n, n \in \mathbb{N} \text{ et } n \geq 2$                   | $nu'u^{n-1}$                    |                              |
| $x \mapsto \frac{1}{x}$                                    | $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$                 | $\mathbb{R}^*$                                                         | $\frac{1}{v}$                                                  | $-\frac{v'}{v^2}$               | $v$ est dérivable et non nul |
| $x \mapsto \frac{1}{x^n}$<br>$n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ | $x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$             |                                                                        | $\frac{1}{v^n}$<br>( $n \in \mathbb{N} \text{ et } n \geq 2$ ) | $-n \times \frac{v'}{v^{n+1}}$  |                              |
| $x \mapsto \tan x$                                         | $x \mapsto 1 + \frac{\tan^2 x}{\cos^2(x)}$ | $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ | $\frac{u}{v}$                                                  | $\frac{u'v - uv'}{v^2}$         |                              |
| $x \mapsto \sqrt{x}$                                       | $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$            | $]0 ; +\infty[$                                                        | $\sqrt{u}$                                                     | $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$          | $u$ strictement positif      |

1. Soit  $u$  une fonction dérivable sur un intervalle  $K$ . Montrons que : pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , la fonction  $u^n$  est dérivable sur  $K$  et sa fonction dérivée est  $nu'u^{n-1}$ .

Par récurrence sur  $n$ .

a) Pour  $n = 2$ , la fonction  $u^2 = u \times u$  est dérivable sur  $K$  comme produit des fonctions  $u$  et  $u$ .  
 $(u^2)' = u' \times u + u \times u' = 2u'u = 2u'u^{2-1}$ .



Soit  $k$  un entier naturel tel que  $k \geq 2$ . Supposons que la propriété est vraie au rang  $k$  et montrons qu'elle l'est au rang  $(k+1)$ .

On a  $u^{k+1} = u^k \times u$  et par hypothèse de récurrence  $u^k$  est dérivable sur  $K$  donc  $u^{k+1}$  est dérivable sur  $K$  comme produit de deux fonctions dérivables sur  $K$ .

$$\text{D'ailleurs } (u^{k+1})' = (u^k \times u)' = (u^k)' u + u^k u' = ku' u^{k-1} u + u^k u'$$

et par hypothèse on a  $(u^k)' = ku' u^{k-1}$ .

$$\text{Donc } (u^{k+1})' = ku' u^{k-1} u + u^k u' = ku' u^k + u' u^k = (k+1)u' u^{(k+1)-1}$$

et la propriété est vraie au rang  $(k+1)$ .

Dans le principe de la démonstration par récurrence, pour tout entier naturel  $n \geq 2$

la fonction  $u^n$  est dérivable sur  $K$  et sa fonction dérivée est  $nu' u^{n-1}$ .

Soit une fonction dérivable et non nulle sur  $K$ .  $v^n$  est dérivable et non nulle

et  $\frac{1}{v^n}$  est donc dérivable sur  $K$  et on a :

$$\left(\frac{1}{v^n}\right)' = \frac{0 \times v^n - 1(v^n)'}{(v^n)^2} = \frac{-nv' v^{n-1}}{v^{2n}} = \frac{-nv' v^{n-1}}{v^{(n+1)+(n-1)}} = \frac{-nv' v^{n-1}}{v^{(n+1)} \times v^{(n-1)}} = -n \times \frac{v'}{v^{n+1}}.$$

## Remarque 2

Si  $u$  est dérivable et non nul sur  $K$ , alors pour  $n \in \mathbb{Z}^*$ , la fonction  $u^n$  est dérivable sur  $K$  et sa dérivée est  $nu' u^{n-1}$ .

Si  $n \in \mathbb{Z}^-$ , on pose  $p = -n$  et  $u^n = \frac{1}{u^p}$  donc  $(u^n)' = \left(\frac{1}{u^p}\right)' = -p \times \frac{u'}{u^{p+1}} = nu' u^{n-1}$ .

## Exemple 2

Calculons la dérivée sur  $[1, +\infty[$  de la fonction dérivée de la fonction  $f : x \mapsto (x-1)\sqrt{x-1}$ .

$$f(x) = \sqrt{x-1} + (x-1) \times \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

$$= \sqrt{x-1} + \frac{(x-1)}{2\sqrt{x-1}} = \frac{3(x-1)}{2\sqrt{x-1}} = \frac{3}{2}\sqrt{x-1} \text{ avec } x \neq 1; f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x-1}$$

Définissons la dérivée sur  $E = ]-1, 0[ \cup ]0, 1[$  et sur  $F = [0, 1[$  de la fonction dérivée de la

$$f : x \mapsto \sqrt{1-|x|}.$$

Sur  $E = ]-1, 0[ \cup ]0, 1[$

$$\text{Sur } ]-1, 0[ : f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}; \text{ car } f(x) = \sqrt{1+x}.$$

$$\text{Sur } ]0, 1[ : f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}; \text{ car } f(x) = \sqrt{1-x}.$$

• Dérivée sur  $F = [0, 1[$ ,  $f(x) = \sqrt{1-x}$ , car  $x \geq 0$ .

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{-x}{x(\sqrt{1-x} + 1)} = \frac{-1}{\sqrt{1-x} + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\sqrt{1-x} + 1} = -\frac{1}{2} \in \mathbb{R}.$$



Donc sur E on a : 
$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \text{ si } x \in ]-1, 0[ \\ f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} \text{ si } x \in ]0, 1[ \end{array} \right. \quad \text{Donc } f \text{ est dérivable à droite en } 0. \text{ Ainsi } f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}.$$



## S'exercer

**1.a** On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = x^2 - 2|x| + 3$ .

- Déterminer l'ensemble de dérivabilité de  $f$ .
- Définir la fonction dérivée de  $f$  sur chacun des ensembles suivants :  $[0; +\infty[$  et sur  $]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$ .
- $f$  admet-elle une fonction dérivée sur  $\mathbb{R}$ ? Justifier.

**1.b** Dans chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité de la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  sur son ensemble de définition et définir sa dérivée.

a)  $f(x) = \sqrt{3-2x-x^2}$  ; b)  $f(x) = (x-3)\sqrt{3-x}$  ; c)  $f(x) = (x-1)\sqrt{x^2-1}$

d)  $f(x) = 2x^2 + |x| - 1$ , e)  $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{|x| - 1}$

**1.c** Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  ci-dessous :

$f(x) = x^3 + 2\sqrt{x^2+1}$  ;  $g(x) = \frac{1}{x^4+1}$  ;  $h(x) = \frac{1}{(x^2+1)^3}$  ;  $p(x) = (x^2-3x+2)^5$  ;

$t(x) = \cos\left(3x + \frac{2\pi}{5}\right)$  ;  $s(x) = \frac{x^2-4}{x^2+2x+3}$ .

## 1.2 DÉRIVÉES DES FONCTIONS COMPOSÉES - DÉRIVÉE DE LA BIJECTION RÉCIPROQUE D'UNE FONCTION BIJECTIVE.



## Prendre un bon départ

### Activité 1

Soit  $K$  un intervalle ;  $f$  une fonction dérivable sur  $K$  et  $g$  une fonction dérivable sur  $f(K)$ .

- Montrer que  $f(K)$  est un intervalle.
- Soit  $(x_0; x) \in K^2$  tels que  $x \neq x_0$ . Vérifier que si  $f(x) \neq f(x_0)$  alors :

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{f(x) - f(x_0)} \times \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

- Montrer que  $g$  est dérivable en  $f(x_0)$ .



Montrer que  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \times g'(f(x_0))$ .

En déduire que la fonction  $g \circ f$  est dérivable en  $x_0$  et que son nombre dérivé en  $x_0$  est :

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'[f(x_0)] .$$

## Activité 2

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ .

Montrer que  $f$  est continue et strictement monotone sur  $[0; +\infty[$ .

Déduire que  $f$  réalise une bijection de  $[0; +\infty[$  vers un intervalle  $J$  que l'on déterminera.

Montrer que la bijection réciproque de  $f$  est définie sur  $J$  par  $f^{-1}(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ .

Étudier la continuité et la dérivabilité de  $f^{-1}$  en 1.

## Retenir

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $K$  et  $g$  une fonction dérivable sur  $f(K)$ , alors  $g \circ f$  est dérivable sur  $K$  et pour tout  $x \in K$  on a :

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)) .$$

Soit  $f$  une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle  $K$ .

La fonction  $f$  réalise une bijection de  $K$  dans  $f(K)$ .

Soit  $a$  un réel de  $f(K)$ .  $f^{-1}$  est dérivable en  $a$  si et seulement si  $f'(f^{-1}(a)) \neq 0$ .

$$\text{Dans ce cas, on a : } (f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}$$

Soit  $r$  un nombre rationnel non nul;  $u$  une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle  $K$ .

La fonction  $x \mapsto x^r$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et sa dérivée est la fonction  $x \mapsto rx^{r-1}$ .

La fonction  $u^r$  est dérivable sur  $K$  et sa dérivée est la fonction  $ru'u^{r-1}$ .

## À convaincre

Soit  $f$  une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle  $K$ .

$f$  est continue et strictement monotone sur  $K$  et donc  $f$  réalise une bijection de  $K$  vers  $f(K)$ .

Supposons que pour tout  $x \in K$ , on a  $f'(x) \neq 0$  et montrons que  $f^{-1}$  est dérivable sur  $f(K)$  en  $y = f(x_0)$ .

Soient  $x_0$  et  $x$  deux réels distincts de  $K$ . Il existe  $(x_0; x) \in K^2$  tels que  $y_0 = f(x_0)$  et  $y = f(x)$ .

Comme  $y \neq y_0$ ,  $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(y_0)$  car  $f^{-1}$  est injective, c'est-à-dire que  $x \neq x_0$ .

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$



$f$  étant dérivable sur  $K$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ . De plus,  $f(x_0) \neq 0$  car  $x_0 \in K$ .

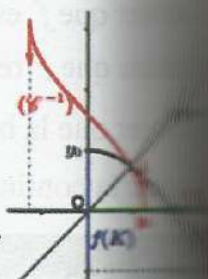
Donc  $\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$ . Ainsi, la fonction  $f^{-1}$  admet une limite finie en

$y_0$  de  $f(K)$  tel que  $y_0 = f(x_0)$  et  $f'(x_0) \neq 0$ .  $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

### Remarque

c) S'il existe  $y_0 \in K$  tel que  $f'(f^{-1}(y_0)) = 0$  alors  $f^{-1}$  n'est pas dérivable en  $y_0$  et sa courbe  $(C^{-1})$  admet au point d'abscisse  $y_0$  une tangente parallèle à l'axe des ordonnées dans un repère orthonormé.

La fonction  $x \mapsto x^r$  avec  $r \in \mathbb{Q}^*$  est dérivable en 0 si et seulement si  $r \geq 1$ .



### Exemple

1. Soit la fonction définie par  $f : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)$ .

Étudions la dérivabilité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  et déterminons sa fonction dérivée.

Posons  $u : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}$  et  $v : x \mapsto \sin x$  on a  $f = v \circ u$  et  $Df = \mathbb{R}$

$u$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \frac{1}{x^2 + 1} \leq 1$  donc  $u(\mathbb{R}) = ]0; 1]$ .

$v$  est dérivable sur  $]0; 1]$  ; donc  $f = v \circ u$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$$f'(x) = u'(x) \times v'(u(x)) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} \cos\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)$$

2. Soit la fonction  $g$  définie de  $[0; \pi]$  dans  $[-1; 1]$  par :  $g(x) = \cos x$ .

a. Démontrons que  $g$  admet une bijection réciproque.

$g$  est dérivable sur  $[0; \pi]$  et  $g'(x) = -\sin x \leq 0$  ; donc  $g$  est strictement décroissante sur

$g([0; \pi]) = [\cos \pi; \cos 0] = [-1; 1]$ . Ainsi,  $g$  est une bijection de  $[0; \pi]$  dans  $[-1; 1]$ .

donc admet une bijection réciproque.

b) Déterminer un ensemble  $J$  sur lequel  $g^{-1}$  est dérivable et déterminons  $(g^{-1})'(x)$  pour tout  $x \in J$ .

$$g'(x) = -\sin x, \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \pi \text{ car } x \in [0; \pi]$$

$g(0) = 1$  et  $g(\pi) = -1$ , donc  $g^{-1}$  n'est pas dérivable en 1 et -1 d'où  $g^{-1}$  est dérivable

$$\text{sur } J = ]-1; 1[ \text{ et } (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{-\sin[g^{-1}(x)]}.$$

$$\text{Par ailleurs, } \sin^2[g^{-1}(x)] = [\sin(g^{-1}(x))]^2 = 1 - [\cos(g^{-1}(x))]^2 = 1 - [g(g^{-1}(x))]^2 = 1 - x^2$$

$$\text{or } x \in ]-1; 1[ \Rightarrow 1 - x^2 > 0. \quad \sqrt{\sin^2[g^{-1}(x)]} = \sqrt{1 - x^2}. \text{ donc } \sin[g^{-1}(x)] = \sqrt{1 - x^2} \text{ car } g^{-1}$$



$$f^{-1}(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ pour tout } x \in J$$

Les fonctions  $u : x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$  et  $v : x \mapsto x^{\frac{2}{3}}$  sont dérivables sur  $]0; +\infty[$  et ont pour dérivées

respectivement les fonctions  $u' : x \mapsto \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$  et  $v' : x \mapsto \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ . La fonction  $w : x \mapsto x^{\frac{4}{3}}$  est dérivable

sur  $]0; +\infty[$  et sa dérivée est la fonction  $w : x \mapsto \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$ .

Soit  $f : x \mapsto (x^3 - 1)^{\frac{5}{4}}$ . Étudions la dérivabilité de  $f$  sur  $D_f$  et définissons sa fonction dérivée.

On a  $x^3 - 1 > 0$  car  $-\frac{5}{4} < 1$ . Ainsi,  $x > 1$  et donc  $D_f = ]1; +\infty[$ .

La fonction  $x \mapsto x^3 - 1$  est dérivable et est strictement positive sur  $D_f$ . Par conséquent,  $f$  est dérivable sur  $D_f$ .

$$f'(x) = \frac{5}{4}(u'(x))(x^3 - 1)^{\frac{5}{4}-1} = \frac{5}{4} \times 3x^2(x^3 - 1)^{\frac{1}{4}} \text{ où } u(x) = x^3 - 1.$$

$$f'(x) = \frac{15}{4}x^2(x^3 - 1)^{\frac{1}{4}}.$$

### Exercice résolu

Soit la fonction  $f$  de  $[0; +\infty[$  dans  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = x^n$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Montrer que  $f$  est une bijection et déterminer l'ensemble de dérivabilité  $J$  de  $f^{-1}$ .

Définir  $f^{-1}$  et déterminer sa fonction dérivée sur  $J$ .

Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = x^r$  avec  $r \in \mathbb{Q}^*$ .

Écrire  $g$  comme composée de deux fonctions puis en déduire que  $g$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

Déterminer la dérivée de  $g$  sur  $]0; +\infty[$ .

Soit  $r$  un nombre rationnel non nul,  $u$  une fonction dérivable et strictement

positive sur un intervalle  $K$ . Démontrer que la fonction  $u^r$  est dérivable sur  $K$  et que sa dérivée

$$\text{est } r u^{r-1} u'.$$

**Démonstration**

Soit  $f(x) = x^n$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Montrons que  $f$  est une bijection dans  $[0; +\infty[$  et déterminons l'ensemble de dérivabilité  $J$

de  $f^{-1}$ .

$f$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  et  $f'(x) = nx^{n-1}$ , donc  $f$  est strictement

croissante sur  $[0; +\infty[$ .



si  $n \geq 2$ , alors  $n-1 \geq 1$  et donc  $f'(0) = 0$ .  $f^{-1}$  n'est pas dérivable en 0  
d'où  $J = ]0; +\infty[$ .

b) Définition de  $f^{-1}$  et calcul de  $(f^{-1})'(x)$  pour tout  $x \in J$ .

Soit  $y \in [0; +\infty[$  cherchons  $x \in [0; +\infty[$  tel que  $y = f(x)$ .

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = x^n \Leftrightarrow y^{\frac{1}{n}} = x. f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \text{ sur } [0; +\infty[.$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}. (f^{-1})'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ .

2.a Écriture de  $g$  comme composée de deux fonctions et dérivabilité sur  $]0; +\infty[ = J$ .

Comme  $r \in \mathbb{Q}^*$ ,  $r = \frac{p}{q}$  avec  $p \in \mathbb{Z}^*$  et  $q \in \mathbb{N}^*$

$$g(x) = x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p = v(u(x)) \text{ où } u(x) = x^{\frac{1}{q}} \text{ et la fonction } v \text{ telle que } v(x) = x^p \text{ est dérivable}$$

sur  $]0; +\infty[$  et  $u(]0; +\infty[) = ]0; +\infty[$ , donc  $g$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  comme composée de fonctions dérivables.

b) Dérivée de  $g$  sur  $]0; +\infty[$ .

$$g'(x) = u'(x) \times v'(u(x)) = \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1} \times p \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p-1} = \frac{p}{q} x^{\frac{1}{q}-1+\frac{p-1}{q}} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}. g'(x) = rx^{r-1}$$

3. On peut écrire  $u^r = g \circ u$  et par ailleurs,  $u(K) \subset ]0; +\infty[$  et  $g$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$

$u^r$  est dérivable sur  $K$  et pour tout  $x \in K$ ,  $(u^r)'(x) = (g \circ u)'(x) = u'(x) \times g'(u(x)) = u'(x) \times r u^{r-1}(x)$

$$(u^r)' = ru' u^{r-1}$$



## S'exercer

1.d Étudier la dérivabilité de la fonction  $f$  sur son ensemble de définition et déterminer sa fonction dérivée dans chacun des cas suivants:.

a)  $f: x \mapsto \cos(x^3 + 2x)$  ; b)  $f: x \mapsto x^{\frac{4}{3}}$  ; c)  $f: x \mapsto \sqrt[3]{x^4}$  ; d)  $x \mapsto (x-1)^{\frac{3}{2}}$  ; e)  $f: x \mapsto (1-x)$

1.e Montrer que la fonction  $f: x \mapsto \tan\left(\frac{1}{x}\right)$  est dérivable sur l'intervalle  $\left]-\frac{2}{\pi}; \frac{2}{\pi}\right[$ .

1.f Soit  $f$  la fonction définie de  $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$  vers  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \tan(x)$ .

a) Montrer que  $f$  admet une bijection réciproque.

b) Montrer que  $f^{-1}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

c) Démontrer que  $\forall x \in \mathbb{R}$ , on a  $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ .



Soit la fonction numérique  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = x\sqrt{x}$ .

Montrer que  $g$  admet une bijection réciproque  $g^{-1}$  dont on déterminera l'ensemble de définition.

Déterminer l'ensemble  $J$  sur lequel  $g^{-1}$  est dérivable.

Calculer de deux façons différentes, le nombre dérivée  $(g^{-1})'(x)$ , pour tout  $x \in J$ .

## 13 DÉRIVÉES SUCCECIVES ET LEURS APPLICATIONS

### Prendre un bon départ

Exercice 1

Soit la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = x^{\frac{5}{2}} + x^3 + 2x + 1$

Déterminer les fonction dérivées  $f'$ ,  $f''$ ,  $f^{(3)}$  et  $f^{(4)}$  de  $f$ . Justifier que chacune de ces fonctions est dérivable sur  $]0; +\infty[$  avant de calculer les dérivées précédentes.

Exercice 2

Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur un intervalle  $K$ . Soit  $x_0 \in K$  et

$T_{x_0}(f) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$  la tangente à la courbe  $(C_f)$  de  $f$  au point  $M_0$  d'abscisse  $x_0$ .

Soit la fonction  $h: x \mapsto f(x) - [f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)]$ .

Montrer que  $h$  est dérivable sur  $K$  et vérifier que  $\forall x \in K$ ,  $h'(x) = f'(x) - f'(x_0)$  et calculer  $h'(x_0)$ .

Supposons que  $f''$  est strictement négative sur  $K$ .

Montrer que  $f'$  est décroissante sur  $K$ .

Soit  $x \in K$ , Montrer que :  $x > x_0 \Rightarrow h'(x) < 0$  et  $x < x_0 \Rightarrow h'(x) > 0$ . Dresser un tableau des variations de  $h$  sur  $K$ .

Déduire que sur  $K$ ,  $(C_f)$  est en dessous de  $(T)$ .

Supposons que  $f''$  est strictement positive sur  $K$ . Montrer que  $(C_f)$  est au dessus de  $(T)$ .

Conclure de b) et c) que si  $f''$  s'annule en  $x_0$  en changeant de signe alors  $M_0$  est un point d'inflexion à la courbe  $(C_f)$ .

### Retenir

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $K$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

Si  $f$  est dérivable sur  $K$ , alors sa fonction dérivée  $f'$  est appelée dérivée première de  $f$  sur  $K$  et on la note aussi  $f^{(1)}$ .

Si  $f'$  est dérivable sur  $K$ , alors sa dérivée  $f''$  est appelée dérivée seconde de  $f$  sur  $K$  et on la note aussi  $f^{(2)}$ .



- De façon récurrente, la dérivée  $n$ -ième de  $f$  sur  $K$ , ou la fonction dérivée d'ordre  $n$  sur  $K$ , notée  $f^{(n)}$  si elle existe est la fonction dérivée de la fonction dérivée d'ordre  $n-1$  de  $f$  sur  $K$ .

On note aussi  $\frac{d^n f}{dx^n} = f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$  pour tout  $n \geq 1$  et  $f^{(0)} = f$ .

- (2) Si  $f''$  s'annule en changeant de signe en  $x_0$ , alors le point d'abscisse  $x_0$  est un point d'inflexion à la courbe représentative de  $f$ .

### Exemple

1) Soit  $f : x \mapsto \sin x$ .

$$f'(x) = \cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right); f''(x) = -\sin(x) = \sin(\pi + x) = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$f^{(3)}(x) = -\cos(x) = \sin\left(3 \times \frac{\pi}{2} + x\right), f^{(4)}(x) = \sin(x) = \sin\left(4 \times \frac{\pi}{2} + x\right).$$

Démontrons par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f^{(n)}(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$ .

Soit la proposition : «  $f^{(n)}(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$  » pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

- Pour  $n = 1, 2$  et  $3$  la proposition est vraie d'après les calculs ci-dessus.
- Supposons la proposition vraie au rang  $k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  et  $k \geq 1$ .

Montrons qu'elle est aussi vraie au rang  $k+1$ .

D'après l'hypothèse de récurrence  $f^{(k)}(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{2} + x\right)$ .

$$f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)})'(x) = \cos\left(\frac{k\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \left(\frac{k\pi}{2} + x\right)\right).$$

d'où  $f^{(k+1)}(x) = \sin\left(\frac{(k+1)\pi}{2} + x\right)$ ; donc la proposition est vraie au rang  $k+1$ .

En conclusion,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f^{(n)}(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$ .

### Exercice résolu

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$  par  $f : x \mapsto \frac{1}{2x-1}$ . Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$f$  est  $n$  fois dérivable sur  $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$  et que  $f^{(n)}(x) = \frac{n!(-2)^n}{(2x-1)^{n+1}}$ .



### Solution

Designons par  $\mathcal{P}(n)$  la proposition: " La fonction  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$

et pour tout  $x > \frac{1}{2}$ ,  $f^{(n)}(x) = \frac{n!(-2)^n}{(2x-1)^{n+1}}$  ".

Pour  $n = 1$ ,  $f$  est dérivable sur  $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$  car  $2x - 1 \neq 0$

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = \frac{-2}{(2x-1)^2} = \frac{1!(-2)^1}{(2x-1)^{1+1}}$$

Donc  $\mathcal{P}(1)$  est vraie.

Supposons que la proposition soit vraie au rang  $k$  ( $k \geq 1$ ) et montrons qu'elle l'est au rang  $(k+1)$ .

D'après l'hypothèse de récurrence,  $f$  est  $k$  fois dérivable sur  $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!(-2)^k}{(2x-1)^{k+1}} = k!(-2)^k \times \left( \frac{1}{2x-1} \right)^{k+1}$$

La fonction  $u : x \mapsto \frac{1}{2x-1}$  est dérivable sur  $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$  et  $u\left(\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[ \right) = ]0; +\infty[$

La fonction  $v : x \mapsto x^{k+1}$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  donc  $v \circ u$  est dérivable et comme

$f^{(k)} = k!(-2)^k v \circ u$  alors  $f^{(k)}$  est dérivable sur  $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$  on a alors

$$f^{(k+1)}(x) = k!(-2)^k (k+1) \frac{-2}{(2x-1)^{k+1+1}} = \frac{(k+1)!(-2)^{k+1}}{(2x-1)^{(k+1)+1}}. \text{ D'où } \mathcal{P}(k+1) \text{ est vraie.}$$

En conclusion, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  la fonction  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$  et

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!(-2)^n}{(2x-1)^{n+1}}, \text{ pour tout } x > \frac{1}{2}; \text{ d'après le principe de démonstration par récurrence.}$$

### S'exercer

$n \in \mathbb{N}^*$  Soit la fonction  $g : x \mapsto \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x + 1$ .

Montrer que la courbe représentative de la fonction  $g$  admet deux points d'inflexion.

Définir la dérivée d'ordre 5 de la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{x}$  sur  $\mathbb{R}^*$ .



Montrer pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  que  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $] -\infty; 0[$  et que sa fonction dérivée d'ordre  $n$  est définie sur  $] -\infty; 0[$  par  $f^{(n)}: x \mapsto \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ .

1.g Soit la fonction  $h: x \mapsto \cos(x)$

- Donner l'expression de  $h'$ ,  $h''$ ,  $h^{(3)}$  et  $h^{(4)}$  à l'aide de la fonction cosinus (ou  $h$ ).
- En déduire une expression de la dérivée  $n^{\text{ième}}$  de  $h$  en fonction de  $n$ .

## 1.4 INÉGALITÉS DES ACCROISSEMENTS FINIS



### Prendre un bon départ

#### Activité 1

Le débit d'un robinet est compris entre 15 l/min et 20 l/min. Déterminer en litres les volumes minimal et maximal d'eau qui s'écoule de ce robinet en 1 heures.

#### Activité 2

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $K$ ,  $f'$  bornée sur  $K$ .

Soient  $a$  et  $b$  deux éléments de  $K$  tels que  $a < b$ ;  $m$  et  $M$  deux nombres réels tels que pour tout  $x \in [a; b]$ ,  $m \leq f'(x) \leq M$ .

On considère les fonctions  $g$  et  $h$  définies par  $u: K \rightarrow \mathbb{R}$  et  $v: K \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto mx - f(x)$  et  $x \mapsto Mx - f(x)$

- Montrer que  $u$  est dérivable sur  $K$  et que  $u'(x) = m - f'(x)$  pour tout  $x \in K$ .
- En déduire que  $u$  est décroissante sur  $K$  et que  $m(b-a) \leq f(b) - f(a)$ .
- Montrer de façon analogue que  $f(b) - f(a) \leq M(b-a)$ .
- En déduire que :  $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$ .



### Retenir

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $K$ . Soient  $a$  et  $b$  deux éléments de  $K$  tels que  $a < b$ .

- S'il existe deux nombres réels  $m$  et  $M$  tels que pour tout  $x \in [a; b]$ ,  $m \leq f'(x) \leq M$  alors on a l'inégalité :  $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$ .

Ces dernières inégalités sont dites des accroissements finis.

- Autre version

S'il existe un nombre réel  $A$  positif tel que pour tout  $x \in [a; b]$ ,  $|f'(x)| \leq A$ , alors on a :  $|f(b) - f(a)| \leq A|b - a|$  (Inégalité des accroissements finis).



# à convaincre

Soit  $x \in [a ; b]$ ,  $|f'(x)| \leq A$  alors  $-A \leq f'(x) \leq A$  et d'après l'inégalité des accroissements finis :  $-A(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq A(b-a)$  d'où  $|f(b) - f(a)| \leq A|b-a|$ .

## Exemple

Montrons que  $\forall x \in [1 ; 2]$  on a :

$$\sqrt{5}(x-2) \leq \sqrt{x^2+1} - \sqrt{5} \leq \frac{\sqrt{5}}{5}(x-2) ; \quad \text{b) } \left| \sqrt{x^2+1} - \sqrt{2} \right| \leq \sqrt{2}(x-1).$$

Considérons la fonction  $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ .  $f$  est dérivable sur  $[1 ; 2]$  et Pour tout  $x \in [1 ; 2]$ ,

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}. \text{ En encadrant } f'(x), \text{ on a } \frac{1}{\sqrt{5}} \leq f'(x) \leq \sqrt{2}.$$

Soit  $x \in [1 ; 2]$

Soit l'intervalle  $[x ; 2] \subset [1 ; 2]$ . Ainsi, pour tout  $a \in [x ; 2]$  on a  $\frac{1}{\sqrt{5}} \leq f'(a) \leq \sqrt{2}$ .

En appliquant les inégalités des accroissements finis sur l'intervalle  $[x ; 2]$ , on a :

$$\sqrt{5}(2-x) \leq f(2) - f(x) \leq \sqrt{2}(2-x) \text{ d'où } \sqrt{2}(x-2) \leq \sqrt{x^2+1} - \sqrt{5} \leq \frac{\sqrt{5}}{5}(x-2).$$

Soit l'intervalle  $[1 ; x] \subset [1 ; 2]$  ; donc pour tout  $a \in [1 ; x]$  on a  $-\sqrt{2} \leq f'(a) \leq \sqrt{2}$ .

Ainsi  $|f'(a)| \leq \sqrt{2}$  pour tout  $a \in [1 ; x]$ . En appliquant l'inégalité des accroissements finis sur  $[1 ; x]$  on a  $|f(x) - f(1)| \leq \sqrt{2}(x-1)$  :

$$\text{c'est-à-dire } \left| \sqrt{x^2+1} - \sqrt{2} \right| \leq \sqrt{2}(x-1) \text{ d'où b).}$$

## S'exercer

Montrer que pour tout nombre réel  $x \in [0 ; 1]$  on a :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \leq \sqrt{x+1} \leq \frac{x}{2} + 1 ; \quad \text{b) } \left| \sqrt{x+1} - 1 \right| \leq \frac{x}{2}$$

Soit la fonction  $f : x \mapsto \sin x$ .

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ , en appliquant les inégalités des accroissements finis sur l'intervalle  $[-\alpha ; \alpha]$ , montrer que :  $-\alpha \leq \sin \alpha \leq \alpha$ .

Montrer que pour tout couple  $(a ; b)$  de réels, on a :  $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$ .



# LEÇON 2 ÉTUDE ET REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DE QUELQUES FONCTIONS

- ▶ Utiliser les résultats sur la notion de continuité pour mieux représenter une fonction et utiliser la fonction dérivée sur un intervalle pour y étudier les variations d'une fonction.
- ▶ Utiliser les branches infinies pour donner l'allure de la courbe d'une fonction.



## Prendre un bon départ

On considère les fonctions  $f : x \mapsto \sin|x| - \frac{1}{2}x^2 + 1$  et  $g : x \mapsto \cos(x) - x$ . On note  $(\mathcal{C}_f)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

### Activité 1

Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .

- Vérifier que  $\alpha \in \left] \frac{1}{2} ; 1 \right[$ , puis en déduire le signe de  $g$  dans l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .

### Activité 2

- Étudier la branche infinie de la courbe représentative de  $f$  en  $+\infty$ .
- Étudier la dérivabilité de  $f$  en 0.
- Montrer que  $f$  est une fonction paire.
- Dresser le tableau des variations de  $f$  sur  $[0 ; +\infty[$  puis sur son ensemble de définition.
- Représenter la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  dans un repère orthonormé. On prendra  $\alpha \approx 0,73$  et  $f(0,73) \approx 1,1$ .



## Retenir

Soit  $f$  une fonction, d'ensemble de définition  $D_f$  et de courbe  $(\mathcal{C}_f)$  dans un repère du plan.

- (1) Pour étudier les variations de la fonction  $f$  et dresser son tableau des variations, il faut :
  - étudier éventuellement la parité, la périodicité de  $f$  sur  $D_f$ ,
  - étudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  sur chaque intervalle de  $D_f$ ,
  - étudier le signe de  $f'$ ,
  - calculer les limites aux bornes du domaine d'étude, puis dresser le tableau des variations de  $f$ .
- (2) Pour représenter la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ , il est nécessaire :
  - d'étudier éventuellement les branches infinies à  $(\mathcal{C}_f)$ ,
  - de déterminer les points particuliers de  $(\mathcal{C}_f)$  : les extréma, les points d'intersection avec les axes et les positions relatives avec les tangentes.



considérons et représentons la fonction  $f : x \mapsto -x^4 + 2x^2 + 2x + 2$ .

ensemble de définition et limites aux bornes.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^4) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4) = -\infty$$

Continuité et dérivabilité de  $f$  sur  $D_f$ .

$f$  est dérivable sur  $D_f$  donc continue, car fonction polynôme et  $f'(x) = -4x^3 + 4x + 2$

signe de  $f'$  et tableau des variations de  $f$  :

$$f'(x) = -12x^2 + 4 \text{ et } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ou } x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f'\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{-8\sqrt{3}+18}{9} \approx 0,46 ; f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{8\sqrt{3}+18}{9} \approx 3,54 \text{ et } \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,58$$

| $x$      | $-\infty$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $+\infty$ |
|----------|-----------|-----------------------|----------------------|-----------|
| $f''(x)$ | -         | 0                     | +                    | -         |
| $f'(x)$  | $+\infty$ | $0,46$                | $3,54$               | $-\infty$ |

$f$  est continue et strictement décroissant de  $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right[$

sur  $]-\infty; 3,54[$

$f$  réalise une bijection  $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right[$  vers  $]-\infty; 3,54[$ .

| $x$     | $-\infty$ | $\alpha$    | $+\infty$ |
|---------|-----------|-------------|-----------|
| $f'(x)$ | +         | 0           | -         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $f(\alpha)$ | $-\infty$ |

Donc  $0 \in ]-\infty; 3,54[$ , il existe un unique  $\alpha \in ]3,54; +\infty[$  tel que  $f'(\alpha) = 0$ .

$$\left] -\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty \right[ = ]0,46; +\infty[ \text{ qui ne contient pas } 0.$$

l'équation  $f'(x) = 0$  n'a aucune solution dans  $\left] -\infty; \frac{\sqrt{3}}{3} \right[$ . Par conséquent,  $\alpha$  est l'unique réel

$$\text{tel que } f'(\alpha) = 0.$$

$$f'(x) \geq 0 \text{ si } x \in ]-\infty; \alpha] \text{ et } f'(x) \leq 0 \text{ si } x \in [\alpha; +\infty[$$

représentation graphique

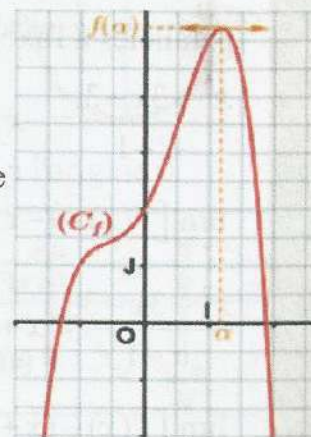
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \text{ la courbe représentative de } f \text{ admet une}$$

branche parabolique de direction (OJ).

D'après le théorème des valeurs intermédiaires on montre que

$$\alpha \in ]1,5; 2[ \text{ et que } \alpha \approx 1,19 \text{ à } 10^{-2} \text{ près. De même, on}$$

détermine les points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.



### exercice résolu 1

étudier les variations et représenter graphiquement la courbe de la fonction  $f : x \mapsto \frac{x^2 + 3x - 3}{|x| - 1}$



**Solution****• Ensemble de définition de la fonction  $f$ .**

Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x)$  existe si et seulement si  $|x| - 1 \neq 0$  c'est-à-dire  $x \neq -1$  et  $x \neq 1$

$$D_f = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 1[ \cup ]1; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2}{-x} \right) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{x} \right) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{x^2 + 3x - 3}{-x - 1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{x^2 + 3x - 3}{-x - 1} \right) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^2 + 3x - 3}{x - 1} \right) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty.$$

**• Continuité et dérivabilité de  $f$ .**

Sur  $]-\infty, -1[ \cup ]-1, 0[$  on a  $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 3}{-x - 1}$  et sur  $]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$  on a  $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 3}{x - 1}$

Donc  $f$  est dérivable sur  $D_f - \{0\}$  comme fonction rationnelle.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3 = f(0), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 6}{-x - 1} = -6 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x - 1} = 0$$

donc  $f$  est continue sur  $D_f$ , dérivable à gauche et à droite en 0 mais pas en 0.

**• Dérivée et tableau des variations**

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x - 6}{(x - 1)^2} \quad \text{si } x \in ]-\infty, -1[ \cup ]-1, 0[$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} \quad \text{si } x \in [0, 1[ \cup ]1, +\infty[$$

| $x$     | $-\infty$ | $-1$      | $0$ | $1$       | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----------|-----|-----------|-----------|
| $f'(x)$ | -         | -         | -6  | 0         | -         |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $-\infty$ | 3   | $-\infty$ | $+\infty$ |

**• Représentation graphique de  $f$ .**

D'après le calcul des limites, les droites d'équation respectives  $x = -1$  et  $x = 1$  sont les asymptotes à  $(\mathcal{C}_f)$  parallèles à l'axe des ordonnées.

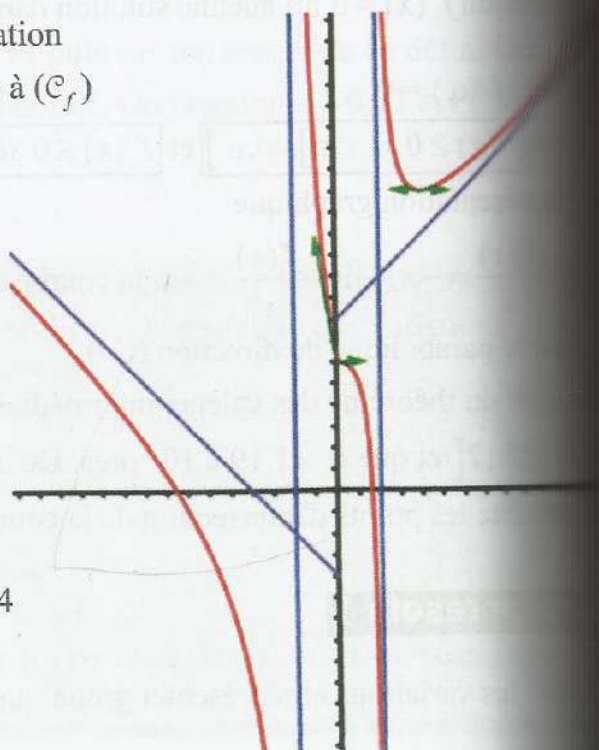
$$\frac{x^2 + 3x - 3}{-x - 1} = -x - 2 + \frac{5}{x + 1} \quad \text{donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x - 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{5}{x + 1} \right) = 0$$

$$\frac{x^2 + 3x - 3}{x - 1} = x + 4 + \frac{1}{x - 1} \quad \text{donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 4)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x - 1} \right) = 0.$$

Les droites d'équations  $y = -x - 2$  et  $y = x + 4$  sont les asymptotes à  $(\mathcal{C}_f)$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .





# Exercice résolu 2

Étudier les variations et représenter la courbe de la fonction  $f : x \mapsto \sin(2x) - 2\sin x$

Ensemble de définition de  $f : D_f = \mathbb{R}$ .

Parité et périodicité de  $f$  :

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in D_f \text{ on a } x + 2\pi \in D_f \text{ et } f(x + 2\pi) &= \sin[2(x + 2\pi)] - 2\sin(x + 2\pi) \\ &= \sin(2x) - 2\sin x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$f$  est périodique et de période  $2\pi$ . On peut donc réduire l'ensemble d'étude de  $f$  à un intervalle de longueur  $2\pi$  (par exemple  $D = [-\pi ; \pi]$ ).

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in D \text{ on a } -x \in D \text{ et } f(-x) &= \sin(-2x) - \sin(-x) = -(\sin(2x) + 2\sin x) \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

$f$  est impaire. Son ensemble d'étude peut être réduit à  $D_e = [0 ; \pi]$ .

Continuité, dérivabilité et tableau des variations sur  $[0 ; \pi]$

Les fonctions  $x \mapsto \sin(2x)$  et  $x \mapsto -2\sin x$  sont continues et dérivables sur  $\mathbb{R}$  ; donc la fonction  $f$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme somme de fonctions continues et dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

$$f'(x) = 2\cos(2x) - 2\cos x.$$

$$f'(x) = 4\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 4\left(\cos x + \frac{1}{2}\right)(\cos x - 1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x = 0 \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3}\right) \text{ dans } [0 ; \pi].$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\cos x - 1 \leq 0$  et le cercle ci-dessous permet de déterminer le signe de

$$\cos x + \frac{1}{2}.$$

$$\text{Sur } \left[0 ; \frac{2\pi}{3}\right] \text{ alors } f'(x) \leq 0 \text{ et si } x \in \left[\frac{2\pi}{3} ; 0\right] \text{ alors } f'(x) \geq 0$$

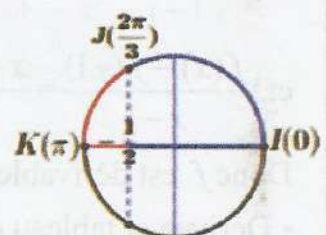
Tableau des variations et représentation graphique de la courbe de  $f$ .

Sur l'intervalle  $[-\pi ; 0]$  le morceau de  $(C_f)$  est le symétrique par rapport à l'origine 0

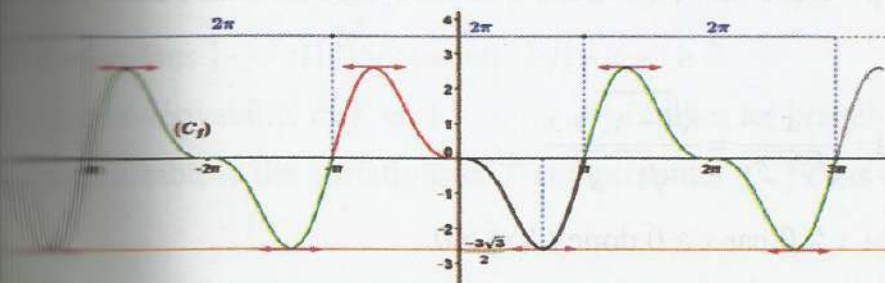
de celui de l'intervalle  $[0 ; \pi]$  car la fonction  $f$  est impaire.

La courbe  $(C_f)$  est complétée sur  $\mathbb{R}$  par les translations successives

de  $2\pi\mathbb{Z}$  et  $-2\pi\mathbb{Z}$  car  $f$  est périodique de période  $2\pi$ .



| $x$     | 0 | $\frac{2\pi}{3}$      | $\pi$ |
|---------|---|-----------------------|-------|
| $f'(x)$ | 0 | -                     | 0     |
| $f(x)$  | 0 | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 0     |





## Exercice résolu 3

Étudier ses variations et représenter graphiquement la fonction  $f : x \mapsto x - \sqrt{x^2 - 1}$

- Ensemble de définition et limites aux bornes.

$D_f = \mathbb{R}$  car pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|x^2 - 1| \geq 0$ .

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1} \text{ si } x \in ]-\infty; 1] \cup [1; +\infty[ \text{ et } f(x) = x - \sqrt{1 - x^2} \text{ si } x \in [-1, 1]$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 - 1}) = -\infty$$

$$x - \sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \right) = 0.$$

- Continuité et dérivabilité de  $f$  sur  $D_f$ .

La fonction  $x \mapsto |x^2 - 1|$  est continue et positive sur  $\mathbb{R}$  donc la fonction  $x \mapsto (|x^2 - 1|)$  est continue sur  $\mathbb{R}$  comme composée de fonctions continues donc la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  comme somme de fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ .

La fonction  $x \mapsto x - \sqrt{x^2 - 1}$  est dérivable sur  $] -\infty; -1[ \cup ] 1; +\infty[$  car  $x^2 - 1 > 0$ .

La fonction  $x \mapsto x - \sqrt{1 - x^2}$  est dérivable sur  $] -1; 1[$  car  $1 - x^2 > 0$ .

Sur  $] -\infty; -1[$  on a  $\frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \frac{x - \sqrt{x^2 - 1} + 1}{x + 1} = 1 - \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$  donc  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} =$

Sur  $] 1; +\infty[$  on a :  $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x - \sqrt{x^2 - 1} - 1}{x - 1} = 1 - \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$  donc  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} =$

Sur  $] -1; 1[$  on a :  $\frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \frac{x - \sqrt{1 - x^2} + 1}{x + 1} = 1 - \frac{1 - x}{\sqrt{1 - x^2}}$  donc  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} =$

et  $\frac{f(x) - f(+1)}{x - 1} = \frac{x - \sqrt{1 - x^2} - 1}{x - 1} = 1 + \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x^2}}$  donc  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(+1)}{x - 1} = +\infty$

Donc  $f$  est dérivable sur l'ensemble  $] -\infty; -1[ \cup ] -1; 1[ \cup ] 1; +\infty[$ .

- Dérivée et tableau des variations.

Sur  $] -\infty; -1[ \cup ] 1; +\infty[$  on a :  $f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\sqrt{x^2 - 1} - x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

- si  $x \in ] -\infty; -1[$  alors  $\sqrt{x^2 - 1} - x > 0$  car  $-x > 0$  donc  $f'(x) > 0$

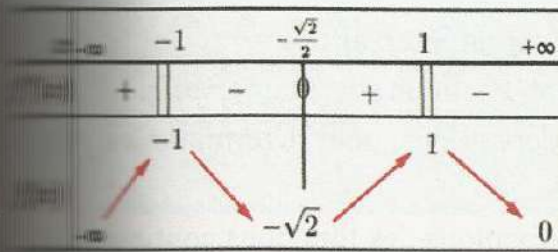
- si  $x \in ] 1; +\infty[$  alors  $\sqrt{x^2 - 1} - x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 1} \geq x \Leftrightarrow -1 \geq 0$  ceci est faux e donc pour  $x \in ] 1; +\infty[$  on a  $f'(x) < 0$ .

Sur  $] -1; 1[$  on a :  $f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\sqrt{1 - x^2} + x}{\sqrt{1 - x^2}}$

- Si  $x \in [0; 1[$  alors  $\sqrt{1 - x^2} + x > 0$  car  $x \geq 0$  donc  $f'(x) > 0$ .



$$\text{Si } x \in ]-1; 0[ \text{ alors } \sqrt{1-x^2} - x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} \geq -x \Leftrightarrow 1-2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right]$$



Représentation graphique de  $(\mathcal{C}_f)$ .

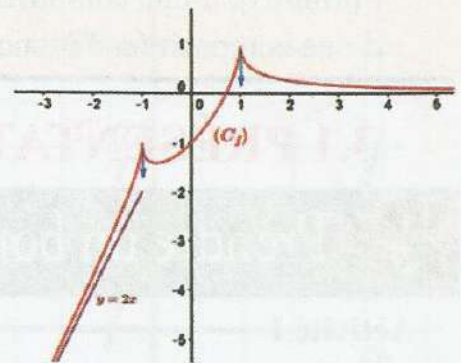
Pendant le calcul des limites, la droite d'équation  $y = 0$

est asymptote horizontale à  $(\mathcal{C}_f)$  en  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{-x + \sqrt{x^2 - 1}} \right) = 0$$

la droite d'équation  $y = 2x$  est asymptote à  $(\mathcal{C}_f)$  en  $-\infty$



## S'exercer

1. Etudier et représenter graphiquement la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{2}x^4 + x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x - 1$ .

2. On considère la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = \frac{x^2 - 2|x - 2|}{x^2 - 1}$ .

3. Etudier la dérivabilité de  $g$  en 2.

4. Etudier les variations de  $g$  et représenter sa courbe  $(\mathcal{C}_g)$  dans un repère orthonormé.

5. On considère la fonction  $h : x \mapsto \cos(2x) - 2\cos(x)$

6. Résoudre dans l'intervalle  $[-\pi; \pi]$  l'inéquation  $\sin(2x) - \sin(x) \geq 0$ .

7. Etudier et représenter graphiquement la fonction  $h$ .

8. Soit  $f$  la fonction numérique définie par  $f(x) = x + 1 + \sqrt{|x - 1|}$

9. Résoudre dans  $]-\infty; 1]$  l'inéquation  $2\sqrt{1-x} - 1 \geq 0$ .

10. Etudier la dérivabilité de  $f$  en 1.

c) Etudier les branches infinies de  $(\mathcal{C}_f)$ .

11. Dresser le tableau des variations de  $f$  et représenter  $(\mathcal{C}_f)$  dans un repère orthonormé.



# LEÇON 3 PRIMITIVES D'UNE FONCTION

- Déterminer les primitives d'une fonction continue sur un intervalle.
- Déterminer l'ensemble des primitives d'une fonction continue sur un intervalle.
- Mobiliser les connaissances sur les opérations de dérivations, pour déterminer les primitives de certaines fonctions continues sur des intervalles.
- Maîtriser les propriétés sur les opérations de primitivations des fonctions continues (primitive d'une combinaison linéaire des fonctions, d'un produit de fonctions, d'une composition de fonctions,...)

## 3.1 PRÉSENTATION ET DÉFINITION



### Prendre un bon départ

#### Activité 1

Pour chacune des fonctions  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  ci-dessous déterminer une fonction  $F$  dérivable sur un intervalle  $K$  que l'on déterminera et ayant pour fonction dérivée  $f$ :

$$f : x \mapsto 5; f : x \mapsto 2x; f : x \mapsto 5x^2; f : x \mapsto -\frac{1}{x^2}; f : x \mapsto -\sin x; f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

#### Activité 2

- Déterminer la fonction dérivée de la fonction  $F : x \mapsto x + \tan x$  sur l'intervalle  $K = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .
- On définit les fonctions  $G$  et  $H$  sur  $K$  par :  $H(x) = F(x) + 1$  et  $G(x) = F(x) - 2$ .

Déterminer les fonctions dérivées  $G'$  et  $H'$  sur  $K$ . En déduire trois fonctions dérivables sur  $K$  et ayant toutes pour dérivée la fonction  $x \mapsto 2 + \tan^2 x$ .

- Déterminer une isométrie du plan qui transforme la courbe de  $G$  en celle de  $H$  dans un même repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .
- Soit la fonction  $P : x \mapsto F(x) + k$ . Déterminer  $k$  pour que la courbe de  $P$  passe par le point d'abscisse  $\frac{\pi}{4}$  et d'ordonnée 1.



### Retenir

(1) soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $K$ .

• On appelle primitive de  $f$  sur  $K$ , toute fonction  $F$  dérivable sur  $K$  et telle que : Pour tout  $x \in K$ , on ait :  $F'(x) = f(x)$ .

• Si  $f$  est une fonction continue sur  $K$  alors  $f$  admet une primitive sur  $K$ . La continuité est suffisante mais pas nécessaire c'est-à-dire qu'une fonction peut admettre une primitive sur  $K$  sans être continue sur  $K$ .



Soit  $f$  une fonction admettant une primitive  $F$  sur un intervalle  $K$ .

- Pour tout nombre réel  $m$  indépendant de  $x$ , toute fonction:  $x \mapsto F(x) + m$  est une primitive de  $f$  sur  $K$ .
- Toute primitive de  $f$  sur  $K$  est sous la forme  $x \mapsto F(x) + m$  où  $m$  est une constante réelle.
- Soit  $x_0 \in K$  et  $y_0$  un nombre réel. Il existe une unique primitive  $F$  de  $f$  sur  $K$ , prenant la valeur  $y_0$  en  $x_0$ , c'est-à-dire telle que  $F(x_0) = y_0$ .

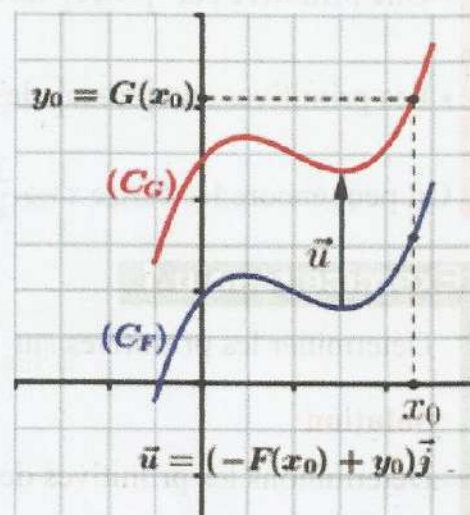
### Remarque 1

Soit  $f$  une fonction admettant une primitive  $F$  sur un intervalle  $K$ . Si  $G$  est une autre primitive de  $f$  sur  $K$ , alors il existe un réel  $c$  tel que  $G(x) = F(x) + c$ .

Dans le même repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  la courbe de  $G$  est l'image de celle de  $F$  par la translation de vecteur  $c\vec{j}$ .

Si  $x_0 \in K$  et  $y_0 = G(x_0)$  alors  $c = -F(x_0) + y_0$ .

Si  $x_0$  est fixé dans  $K$  et la translation étant bijective, la fonction  $x \mapsto F(x) - F(x_0) + y_0$  est l'unique primitive de  $f$  sur  $K$  qui prend la valeur  $y_0$  en  $x_0$ .



### Exemple 1

La fonction  $F : x \mapsto x^2 + \sin x$  est une primitive de la fonction  $f : x \mapsto 2x + \cos x$  sur  $\mathbb{R}$ .

L'ensemble des primitives de  $f$  est l'ensemble des fonctions  $G : x \mapsto x^2 + \sin x + c$  avec  $c \in \mathbb{R}$  (constante).

Soit  $H$  la primitive de  $f$  qui prend la valeur 1 en  $\frac{\pi}{2}$ .

$$H\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \sin \frac{\pi}{2} + c = 1 \Leftrightarrow c = -\frac{\pi^2}{4} \text{ donc } H(x) = x^2 + \sin x - \frac{\pi^2}{4}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Les fonctions  $x \mapsto x^2 + \sin x - 3$  et  $x \mapsto x^2 + \sin x + \sqrt{2}$  sont aussi des primitives de  $f$ .

À partir des dérivées des fonctions élémentaires vues à la leçon 1, on peut dresser le tableau des primitives de chacune d'elles.  $c$  est une constante réelle.

| Fonction $f$                                                      | Primitives de $f$                       | Sur l'intervalle                                                                                 |
|-------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $x \mapsto a$ avec $a \in \mathbb{R}$                             | $x \mapsto ax + c$                      | $\mathbb{R}$                                                                                     |
| $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$                           | $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$     | $\mathbb{R}$                                                                                     |
| $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ | $x \mapsto -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$ | $] -\infty; 0[$ ou $] 0; +\infty[$                                                               |
| $x \mapsto x^r$ où $r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$            | $x \mapsto \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$     | $\begin{cases} [0; +\infty[ \text{ si } r \geq 0 \\ ] 0; +\infty[ \text{ si } r < 0 \end{cases}$ |
| $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$                                    | $x \mapsto 2\sqrt{x} + c$               | $] 0; +\infty[$                                                                                  |



|                                               |                         |                                                           |
|-----------------------------------------------|-------------------------|-----------------------------------------------------------|
| $x \mapsto \sin x$                            | $x \mapsto -\cos x + c$ | $\mathbb{R}$                                              |
| $x \mapsto \cos x$                            | $x \mapsto \sin x + c$  | $\mathbb{R}$                                              |
| $x \mapsto 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ | $x \mapsto \tan x + c$  | $\left] (2k-1)\frac{\pi}{2}; (2k+1)\frac{\pi}{2} \right[$ |

**Exemple 2**

- Une primitive sur  $] -\infty; 0[$  de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x^7}$  est la fonction  $x \mapsto -\frac{1}{6x^6}$ .
- Les primitives sur  $[0; +\infty[$  de la fonction  $x \mapsto x^{\frac{2}{3}}$  sont les fonctions  $x \mapsto \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + c$  avec  $c \in \mathbb{R}$ .

On peut encore les écrire  $x \mapsto \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + c, c \in \mathbb{R}$ .

**Exercice résolu 1**

Déterminer les primitives sur  $]0; +\infty[$  de la fonction  $f : x \mapsto \frac{\cos x + x \sin x}{x^2}$ .

**Solution**

Déterminons les primitives de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

Cherchons une primitive de  $f$  sous la forme  $\frac{u}{v}$ . Or  $\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$

On voudrait que  $\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = f(x)$ . Il suffit de prendre  $v : x \rightarrow x$  et  $u(x) = -\cos x$ .

On a donc les primitives de  $f$  sur  $]0; +\infty[$  sont les fonctions  $F : x \mapsto \frac{-\cos x}{x} + c$

avec  $c$  une constante réelle.

**Exercice résolu 2**

On considère les fonctions  $F$  et  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} F(x) = x^2 \cos \frac{1}{x} - x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} f(x) = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} - 2x & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que  $F$  est dérivable en 0. En déduire que  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
2. Démontrer que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. Montrer que  $f$  n'est pas continue en 0.
4. Donner l'exemple d'une fonction non continue sur  $\mathbb{R}$  et admettant une primitive sur  $\mathbb{R}$ .

**Solution**

1. Démontrons que  $F$  est dérivable en 0, puis sur  $\mathbb{R}$ .

$$\frac{F(x) - F(0)}{x} = x \cos \frac{1}{x} - x \text{ et } 0 \leq \left| x \cos \frac{1}{x} - x \right| \leq |x| \left| \cos \frac{1}{x} \right| + |x| \leq 2|x| \text{ car } \left| \cos \frac{1}{x} \right| \leq 1,$$



pour tout  $x \neq 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} 2|x| = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = 0$  donc  $F$  est dérivable en 0 et  $F'(0) = 0$ .

La fonction  $x \mapsto \cos \frac{1}{x}$  est dérivable sur chacun des intervalles  $] -\infty; 0[$  et  $] 0; +\infty[$  comme

composée de fonctions dérivables donc la fonction :  $x \mapsto x^2 \cos \frac{1}{x}$  est dérivable sur  $\mathbb{R} - \{0\}$

comme produit de fonctions dérivables. On en déduit que  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$

comme somme de fonction dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

Démontrons que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

Étant dérivable sur  $\mathbb{R}$ , on a :

$$\text{Pour } x \neq 0 \quad F'(x) = 2x \cos x \frac{1}{x} + x^2 \left( -\frac{1}{x^2} \right) \left( -\sin \frac{1}{x} \right) - 2x = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} - 2x = f(x)$$

$$F'(0) = f(0).$$

$$\begin{cases} F'(x) = f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ F'(0) = f(0) \end{cases} \quad \text{donc } F \text{ est une primitives de } f \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$F' = f.$$

Montrons que  $f$  n'est pas continue en 0.

Supposons que  $f$  continue en 0, alors on a  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ . Or

$$\text{Pour } x \neq 0, f(x) = 2x \cos \left( \frac{1}{x} \right) - 2x + \sin \left( \frac{1}{x} \right) \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \left( 2x \cos \left( \frac{1}{x} \right) - 2x \right) = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left( x \cos \left( \frac{1}{x} \right) - x \right) = 0$$

$$\text{Mais aussi } \sin \left( \frac{1}{x} \right) = f(x) - \left( 2x \cos \frac{1}{x} - 2x \right). \text{ Donc } f \text{ est continue en 0 si la}$$

$$\text{fonction } x \mapsto \sin \left( \frac{1}{x} \right) \text{ admet une limite en 0, ce qui est absurde car } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

la fonction sinus n'admet pas de limite en  $\infty$ .

$f$  est une fonction discontinue sur  $\mathbb{R}$  et admet une primitive  $F$  sur  $\mathbb{R}$ .

## Exercer

Déterminer les primitives  $F$  de  $f$  sur les intervalles  $K$  indiqués dans chacun des cas suivants:

$$K = \mathbb{R}; \quad \text{d) } x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{x}} \quad K = ]0; +\infty[;$$

$$K = \mathbb{R}; \quad \text{e) } x \mapsto x^{\frac{3}{4}} \quad K = ]0; +\infty[;$$

$$K = ]-\infty; 0[; \quad \text{f) } x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x} \quad K = \left] \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right[.$$



3.b On considère la fonction  $f : x \mapsto x \tan^2 x + \tan x + x$  et  $g : x \mapsto x \tan x$ .

a) Montrer que la fonction  $f$  admet une primitive sur l'intervalle  $I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ .

b) Calculer la dérivée de  $g$  sur  $I$ . En déduire une primitive de  $f$  sur  $I$ .

c) Déterminer la primitive de  $f$  qui prend la valeur 0 en  $-\frac{\pi}{4}$ .

### 3.2 RECHERCHE PRATIQUE DES PRIMITIVES SUR DES INTERVALLES DE CERTAINES FONCTIONS CONTINUES.



#### Prendre un bon départ

##### Activité 1

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions admettant pour primitives sur un intervalle  $K$ , les fonctions  $F$  et  $G$  respectivement.

a. Déterminer la dérivée  $(F+G)'$  sur  $K$ . En déduire une primitive de  $f + g$  sur  $K$ .

b. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ ; déterminer la dérivée  $(\lambda F)'$  sur  $K$ . En déduire une primitive de  $\lambda f$  sur  $K$ .

##### Activité 2

a. Déterminer les réels  $a$  et  $a'$  pour que les fonctions  $F : x \mapsto a \cos(7x + \pi)$  et

$G : x \mapsto a' \sin(-3x + 2)$  soient des primitives des fonctions

$f : x \mapsto 3 \sin(7x + \pi)$  et  $g : x \mapsto 5 \cos(-3x + 2)$  respectivement.

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $K$  et  $g$  une fonction dérivable sur  $f(K)$ .

b. Déterminer la dérivée  $(g \circ f)'$  sur  $K$ . En déduire une primitive sur  $K$  de la fonction  $f \circ g$ .

c. Soit la fonction  $h : x \mapsto 2x \cos(x^2 + 3)$ .

(i) Vérifier que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $h(x) = u'(x) \times \sin'(u(x))$  où  $u$  est une fonction à déterminer.

(ii) Déterminer une fonction  $H$  dérivable sur  $\mathbb{R}$ , telle que pour tout réel  $x$ ,  $H'(x) = h(x)$ .

En déduire une primitive de  $h$  sur  $\mathbb{R}$ .

##### Activité 3

Déterminer une primitive sur  $\mathbb{R}$ , de la fonction  $f : x \mapsto \frac{4x+2}{(x^2+x+1)^7}$ .

On peut écrire  $f(x) = (4x+2) \times (x^2+x+1)^{-7}$ . Soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $u$  une fonction dérivable telle que  $F = au^r$  où  $r$  est un nombre rationnel distinct de  $-1$ .

a) Calculer la dérivée  $F'$  de  $F$  en fonction de  $u$ .

b) Déterminer les réels  $r$  et  $a$ , et la fonction  $u$  pour que la fonction  $F$  soit une primitive de  $f$ .

c) Donner alors une primitive de la fonction  $x \mapsto 3 \cos(x)(\sin x)^4$ .



# Retenir

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions admettant pour primitives sur un intervalle  $K$ , les fonctions  $F$  et  $G$  respectivement.

La fonction  $f + g$  admet pour primitive sur  $K$ , la fonction  $F + G$ .

Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , la fonction  $\lambda f$  admet pour primitive sur  $K$  la fonction  $\lambda F$ .

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $K$  et  $g$  une fonction dérivable sur  $f(K)$ .

La fonction  $f' \times g \circ f$  admet pour primitive sur  $K$ , la fonction  $g \circ f$ .

Pour tout triplet  $(A; a; b)$  de réels tels que  $a \neq 0$ ,

une primitive de la fonction  $x \mapsto A \cos(ax + b)$  est la fonction :  $x \mapsto \frac{A}{a} \sin(ax + b)$ ;

une primitive de la fonction  $x \mapsto A \sin(ax + b)$  est la fonction :  $x \mapsto -\frac{A}{a} \cos(ax + b)$ .

Si  $r$  est un nombre rationnel distinct de  $-1$ , alors une primitive de  $au'u^r$  est  $\frac{a}{r+1}u^{r+1}$ .

## Exemple 1

Les primitives de la fonction  $x \mapsto -5x^6$  sur  $\mathbb{R}$  sont les fonction  $F$  dérivables sur  $\mathbb{R}$  et définies

$$\text{par : } F(x) = -5 \times \frac{1}{6+1} x^{6+1} + c = -\frac{5}{7} x^7 + c \text{ avec } c \in \mathbb{R}.$$

Les primitives sur  $]0; +\infty[$  de la fonction  $x \mapsto : -\sqrt{x} + \frac{3}{x^5} + \frac{5}{4}x^2 - \sqrt{7}$  sont les fonctions

$$\text{définies par : } G(x) = -\frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} - 3 \frac{1}{(5-1)x^{5-1}} + \frac{5}{4} \times \frac{1}{2+1} x^{2+1} - x\sqrt{7} + c \text{ avec } c \in \mathbb{R} \text{ soit}$$

$$\text{simplement } G(x) = -\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4x^4} + \frac{5}{12} x^3 - x\sqrt{7} + c \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

## Remarque

Les (2), (3) et (4) du retenir ci-dessus permettent de déterminer des primitives de certaines fonctions particulières.

| Forme de la fonction                                    | Une primitive             | Contraintes                                                                                 |
|---------------------------------------------------------|---------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
| $u'u^n$ avec $n \in \mathbb{N}$                         | $\frac{u^n}{n+1}$         | Sur tout intervalle où $u$ est dérivable                                                    |
| $u'u^r$ avec $r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$        | $\frac{u^r}{r+1}$         | Sur tout intervalle où $u$ est dérivable et positive. [Si $r < 0$ , on doit avoir $u > 0$ ] |
| $\frac{1}{u^n}$ avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ | $-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$ | Sur tout intervalle où $u$ est dérivable et non nulle                                       |
| $\frac{u}{\sqrt{u}}$                                    | $2\sqrt{u}$               | Sur tout intervalle où $u$ est dérivable et strictement positive.                           |



|             |           |                                        |
|-------------|-----------|----------------------------------------|
| $u' \cos u$ | $\sin u$  | Sur tout intervalle où $u$ est définie |
| $u' \sin u$ | $-\cos u$ |                                        |

**Exemple 2**

• Les primitives sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $h : x \mapsto 2x \cos(x^2 + 3)$  sont les fonctions  $H : x \mapsto \sin(x^2 + 3) + c$  avec  $c \in \mathbb{R}$  car  $h(x) = (u'(x)) \cos(u(x))$  où  $u(x) = x^2 + 3$ .

• Soit la fonction  $f : x \mapsto \frac{2x+3}{(x^2+3x-4)^3}$ .  $f$  est définie et continue sur l'ensemble

$Df = ]-\infty; -4[ \cup ]-4; 1[ \cup ]1; +\infty[$  et par conséquent admet des primitives sur chacun

des trois intervalles. Notons les  $F$ . On peut écrire  $f(x) = \frac{u'(x)}{(u(x))^3}$  où  $u(x) = x^2 + 3x - 4$

donc  $F(x) = -\frac{1}{(3-1)(x^2+3x-4)^{3-1}} + c = -\frac{1}{2(x^2+3x-4)^2} + c$  où  $c \in \mathbb{R}$ .

• Soit la fonction  $g : x \mapsto \frac{3x}{\sqrt{4-x^2}}$ .  $g$  est continue sur  $] -2; 2[$  donc  $g$  admet des primitives

On peut écrire  $g(x) = (3x)(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ . Posons  $u(x) = 4-x^2$ ;  $u'(x) = -2x$ . D'où  $x = \frac{u'(x)}{-2}$

$g(x) = \frac{-3}{2} \times u'(x) [u(x)]^{-\frac{1}{2}}$ ;  $\frac{-1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$ ; Une primitive de  $g$  est la fonction  $G$  définie par

$$G(x) = \frac{2}{1} \left[ \frac{1}{2} (4-x^2)^{\frac{1}{2}} \right] + c = (-3)(4-x^2)^{\frac{1}{2}} + c = -3\sqrt{4-x^2} + c \text{ où } c \in \mathbb{R}$$

Les primitives de  $g$  sur  $] -2; 2[$  sont les fonctions  $G$  telles que pour tout  $x \in ] -2; 2[$

$G(x) = -3\sqrt{4-x^2} + c$  avec  $c$  une constante réelle.

**Méthode**

Pour déterminer une primitive d'une fonction  $f$  continue sur un intervalle  $K$ , un chemin consiste à l'identifier :

- soit à la dérivée d'une fonction élémentaire,
- soit à la dérivée d'une fonction composée,
- ou encore à la dérivée d'une somme, d'un quotient ou d'un produit de deux fonctions.

Dans certains cas une réorganisation préalable de l'expression de  $f$  est nécessaire pour une éventuelle identification.

**Exercice résolu 1**

Soit la fonction  $f : x \mapsto x \sin x$ . Déterminer les primitives  $F$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

**Solution**

déterminons les primitives  $F$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

Posons les fonctions  $u : x \mapsto x$  et  $v' : x \mapsto \sin x$ , on a  $u'(x) = 1$  et  $v(x) = -\cos x$



$f(x) = u(x)v'(x) = [uv]'(x) - u'(x)v(x) = [uv]'(x) + \cos x$ . Or la fonction  $x \mapsto \cos x$  a pour primitive la fonction  $x \mapsto \sin x$ .

Donc, les primitives de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  sont les fonctions  $F : x \mapsto -x \cos x + \sin x + c$  avec  $c \in \mathbb{R}$ .

## Exercice résolu 2

Déterminer les primitives sur  $\mathbb{R}$  de chacune des fonctions  $f : x \mapsto \cos^2 x \sin^4 x$  et  $g : x \mapsto \cos 5x \sin 3x$ .

Solution

Déterminons les primitives de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

$$f(x) = \cos^2 x \sin^4 x = (\sin x \cos x)^2 \sin^2 x = \frac{1}{4} (2 \sin x \cos x)^2 \times \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$$

$$= \frac{1}{8} (\sin 2x)^2 (1 - \cos 2x)$$

$$= \frac{1}{8} [(\sin 2x)^2 - \cos 2x (\sin 2x)^2] = \frac{1}{8} \left[ \frac{1}{2} (1 - \cos 4x) - \cos 2x (\sin 2x)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{16} [1 - \cos 4x - 2 \cos 2x (\sin 2x)^2]$$

$[1 - \cos 4x - (u'(x) \times (u(x))^2)]$ ; ( $u(x) = \sin(2x)$ ) donc les primitives de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  sont les

$$\text{fonctions } F : x \mapsto \frac{1}{16} \left[ x - \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{3} (\sin 2x)^3 \right] + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

Déterminons les primitives de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

$$g(x) = \frac{1}{2} [\sin(5x + 3x) - \sin(5x - 3x)] = \frac{1}{2} [\sin(8x) - \sin(2x)].$$

$$\text{Une primitive sur } \mathbb{R} \text{ de } g \text{ est la fonction } x \mapsto \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{8} \sin(8x) + \frac{1}{2} \cos(2x) \right].$$

L'ensemble des primitives de  $g$  sur  $\mathbb{R}$  est l'ensemble des fonctions  $G_k$  définies:

$$G_k(x) = -\frac{1}{16} \cos(8x) + \frac{1}{4} \cos(2x) + k \text{ où } k \text{ est une constante}$$

## Autre méthode

$$\cos 3x = \frac{e^{i3x} + e^{-i3x}}{2} \text{ et } \sin 3x = \frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i}.$$

$$\text{On montre que } g(x) = \frac{1}{2} [\sin(8x) - \cos(2x)]$$

## Méthode

Pour calculer une primitive d'une fonction trigonométrique  $f$  du type  $x \mapsto \sin^p x \cos^n x$  avec  $p, n \in \mathbb{N}$  on peut procéder comme ci-dessous :



- Si  $p = n = 0$  alors  $f$  se ramène à une fonction constante.
- Si  $p = 1$  ou  $n = 1$  alors on peut écrire  $f$  sous la forme  $u'u^q$  où  $q$  est un entier naturel.
- Si  $p \neq 1$  et  $n \neq 1$  alors on peut écrire  $f(x)$  sous la forme d'une somme dont les termes sont de la forme  $a \sin kx$  ou  $a \cos kx$  en utilisant les formules trigonométriques ou les relations

$$\text{d'Euler. } \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \text{ et } \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Dans ce dernier cas on pourra alors écrire  $f(x) = \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^p \left( \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^n$  et utiliser alors les binômes de Newton ou d'autres techniques pour le développement, puis la réduction.



## S'exercer

**3.c** Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes sur les intervalles indiqués

$$f(x) = -3 \sin\left(3x + \frac{\pi}{7}\right), K = \mathbb{R}; \quad g(x) = 2\sqrt{2x+1}, K = \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

$$u(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}, K = \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[; \quad v(x) = (1 + \tan^2 x) \tan x, K = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$$

$$s(x) = \frac{3}{\sqrt{3x-3}}, K = ]1; +\infty[; \quad r(x) = (2x-1)(x^2-x+1)^3, K = \mathbb{R}$$

**3.d** Déterminer les primitives sur les intervalles indiqués de chacune des fonctions suivantes

$$\text{a) } f(x) = -x \sin(x^2 + 1) \quad K = \mathbb{R} \quad ; \quad \text{d) } t(x) = 3x^2 \sqrt{x^3 + 1} \quad K = ]-1; +\infty];$$

$$\text{b) } g(x) = \frac{-x-2}{(x^2+4x-1)^3} \quad K = ]1; +\infty[ \quad ; \quad \text{e) } p(x) = \frac{3}{(2x+3)^2} \quad K = \left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[;$$

$$\text{c) } h(x) = (2x-1)^{-\frac{2}{3}} \quad K = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[ \quad ; \quad \text{f) } q(x) = 2 + 2 \tan^2(2x) \quad K = \left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right[.$$

**3.e** Déterminer la primitive  $F$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  et satisfaisant à la condition indiquée.

$$\text{a) } f(x) = \sin x \cos 3x \text{ et } F(\pi) = 2; \quad \text{c) } f(x) = \cos 4x, \quad F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$$

$$\text{b) } f(x) = -2x(x+2)^2, \text{ et } F(0) = 3; \quad \text{d) } f(x) = \sin^5 x, \quad F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1.$$



# S'ENTRAÎNER

## DÉRIVABILITÉ D'UNE FONCTION SUR UN INTERVALLE - DÉTERMINATION DES DÉRIVÉES-DÉRIVÉES DES FONCTIONS COMPOSÉES

Considérer la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$

$$f(x) = x^2 + 3|x - 1| - 2.$$

Déterminer l'ensemble de dérivabilité de  $f$ .

Déterminer la fonction dérivée de  $f$  sur les ensembles suivants :

$$]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[.$$

Est-elle une fonction dérivée sur  $\mathbb{R}$  ?

Dans les cas suivants, étudier la dérivabilité de la fonction  $f$  sur son ensemble de définition et définir sa fonction dérivée.

$$a) f(x) = \sqrt{2+x-x^2};$$

$$b) f(x) = (x-2)\sqrt{2-x};$$

$$c) f(x) = (x-4)\sqrt{x^2-4};$$

$$d) f(x) = 2x^2 + |x-2|; e) f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{|x| - 1};$$

$$f) f(x) = 2\left|x - \frac{1}{2}\right| + 2.$$

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions ci-dessous définies :

$$a) f(x) = \sqrt{x^2+1}; g(x) = \frac{1}{x^6+1};$$

$$b) f(x) = \frac{1}{(x^2+9)^2}; p(x) = (x^3-3x-2)^4;$$

$$c) f(x) = \left(\frac{2\pi}{3}x + \frac{\pi}{5}\right); s(x) = \frac{x^3-4}{x^2+3}.$$

4

Étudier la dérivabilité de  $f$  sur son ensemble de définition et déterminer sa fonction dérivée.

$$a) f: x \mapsto \sin(x^4 + 2x^2 + 3); b) f: x \mapsto (2x)^{\frac{4}{3}};$$

$$c) f: x \mapsto \sqrt[3]{x^4}; d) f: x \mapsto (1-x^2)^{\frac{2}{3}};$$

$$e) f: x \mapsto (-2x+1)^{\frac{2}{3}}.$$

5

Montrer que la fonction  $f: x \mapsto 1 + \tan 2\left(\frac{1}{x}\right)$

n'est pas dérivable sur l'intervalle  $\left]-\frac{2}{\pi}; \frac{2}{\pi}\right[$ .

Pour chacun des exercices de 6 à 9, étudier la continuité et la dérivabilité de  $h$  sur son ensemble de définition. ( $h$  fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ )

6

$$h(x) = \sqrt{x-1} - x;$$

7

$$h(x) = \sqrt{2-x} + x;$$

8

$$h(x) = \sqrt{|x-2|} + 2;$$

8

$$h(x) = \sqrt{|x|-4} - 2;$$

10

On considère la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \sqrt{2-|x|}.$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  sur son ensemble de définition.

2. Déterminer la fonction dérivée de  $f$  sur chacun des intervalles  $]-2; 0[$  et  $[0; 2[$ .



## DÉRIVÉS DES FONCTIONS RÉCIPROQUES

**11**

Soit  $g$  la fonction définie de  $]0; +\infty[$  vers  $\mathbb{R}$

par :  $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ .

a) Montrer que  $g$  est une bijection de  $]0; +\infty[$  vers  $]1; +\infty[$ .

b) Montrer que  $\forall x \in ]1; +\infty[, g^{-1}(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ .

c)  $g^{-1}$  est-elle dérivable sur  $]1; +\infty[$ ?

**12**

Soit  $h$  la fonction définie de  $]-\infty; 0]$  vers  $\mathbb{R}$

par :  $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ .

a) Montrer que  $h$  est une bijection de  $]-\infty; 0]$  vers  $[1; +\infty[$ .

b) Montrer que  $\forall x \in [1; +\infty[, h^{-1}(x) = -\sqrt{x^2 - 1}$ .

c)  $h^{-1}$  est-elle dérivable sur  $[1; +\infty[$ ?

**13**

Soit  $f$  la fonction définie de  $[0; \pi]$  vers  $[-1; 1]$

par  $f(x) = \cos(x)$ .

a) Montrer que  $f$  réalise une bijection  $g$  de  $[0; \pi]$  dans  $[-1; 1]$ .

( $\forall x \in [0; \pi], g(x) = f(x)$ ).

b) Justifier que  $g^{-1}$  est dérivable sur  $] -1; 1[$ .

c) Démontrer que  $\forall x \in ] -1; 1[, on a$

$$(g^{-1})'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

**14**

Soit la fonction numérique  $g$  définie de

$[1; +\infty[$  dans  $[0; +\infty[$  par :  $g(x) = (x-1)\sqrt{x-1}$ .

a) Montrer que  $g$  admet une bijection réciproque  $g^{-1}$  dont on déterminera l'ensemble de définition.

c) Déterminer l'ensemble  $J$  sur lequel  $g^{-1}$  est dérivable.

d) Déterminer  $g^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$ .

Déterminer de deux façons différentes

$(g^{-1})'(x)$  pour tout  $x \in J$ .

## DÉRIVÉES SUCCESSIVES

**15**

Soit la fonction  $g : x \mapsto \frac{1}{6}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 - 12x + 10$ .

a) Montrer que la fonction  $g$  admet deux points d'inflexion sur son ensemble de définition.

b) Calculer la dérivée d'ordre 10 de  $g$ .

**16**

a) Déterminer la dérivée d'ordre 5 de la fonction  $f : x \mapsto \sin x$ .

b) Vérifier que  $f^{(5)}(x) = \sin\left(x + 5\frac{\pi}{2}\right)$ .

c) Montrer pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  que  $f$  est  $n$ -ième dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que sa dérivée d'ordre  $n$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f^{(n)} : x \mapsto \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ .

**17**

a) déterminer les dérivées d'ordre 1, 2 et 3 de la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ .

b) Montrer pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  que  $f$  est  $n$ -ième dérivable sur  $]0; +\infty[$  et que sa dérivée d'ordre  $n$  est définie sur  $]0; +\infty[$

par  $f^{(n)} : x \mapsto \frac{(-1)^n n(n+1)!}{x^{n+2}}$ .

**18**

Soit la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{x+1}$ .

a) Démontrer que  $f$  est dérivable sur  $] -1; +\infty[$ .

b) Définir  $f^{(1)}; f^{(2)}; f^{(3)}$  et  $f^{(4)}$ .

c) Conjecturer en fonction de  $n$  et en justifier.



une expression de  $f^{(n)}(x)$  pour tout

$$n \in [-1; +\infty[.$$

Démontrer cette conjecture par récurrence

$$(n \geq 1)$$

### INÉGALITÉS DES ACCROISSEMENTS FINIS

Considère la fonction  $f : x \mapsto \sqrt{x} + x$

Démontrer que pour tout  $t \in [1, 4]$ ,

$$\frac{5}{4} \leq f'(t) \leq \frac{3}{2}.$$

Pour tout  $x \in [1, 4]$ , en appliquant :

les inégalités des accroissements finis sur

l'intervalle  $[1, x]$  en déduire que

$$-1 \leq f(x) - f(1) \leq \frac{3}{2}(x-1).$$

Dresser alors un encadrement de  $x$  par deux

fonctions affine sur  $[1, 4]$ .

Applique l'inégalité des accroissements finis

sur l'intervalle  $[x, 4]$ , en déduire que

$$|x-6| \leq \frac{3}{2}|x-4|.$$

Considère la fonction  $f : x \mapsto \cos x$ .

Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ , en appliquant les inégalités

des accroissements finis à  $f$  sur l'intervalle

$[0, \alpha]$  montrer que :  $-\alpha \leq \cos \alpha - 1 \leq \alpha$ .

Dresser que pour tout  $(a, b)$  de  $\mathbb{R}^2$ ,

$$|a - \cos b| \leq |a - b|.$$

Considère la fonction  $f$  définie de  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  vers  $\mathbb{R}$  par

$$f(t) = t - \sin t.$$

Montrer que  $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  on a  $f'(t) \geq 1$ .

Considère la fonction  $\phi$  définie de

$$\text{vers } \mathbb{R} \text{ par } \phi(t) = t - f(t).$$

Montrer que  $\phi$  est décroissante sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

c) En déduire que pour tout  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$\text{on a } 0 \leq \tan x \leq x.$$

### ÉTUDES ET REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES DES FONCTIONS

Pour chacun des exercices de 22 à 27,

étudier les variations de  $f$  et tracer sa

courbe représentative dans un repère

orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan.

22

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 + 1;$$

23

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 3}{x^2 - 1};$$

24

$$f(x) = 1 + 2\sqrt{x^2 - 1};$$

25

$$f(x) = \sqrt[3]{|x-3|};$$

26

$$f(x) = \cos x - \frac{1}{2} \sin 2x;$$

27

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 - \cos x}.$$

28

$$g(x) = \frac{x^2 + 2|x-2|}{x^2 - 2}.$$

a) Étudier la continuité et la dérivabilité de  $g$  en 2.

b) Étudier les branches infinies de  $(C_g)$ , courbe représentative de  $g$ .

c) Dresser le tableau des variations de  $g$ .

d) Construire la courbe de  $(C_g)$ .



**29**

Soit la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

- Étudier les branches infinies de  $(\mathcal{C}_g)$ ,  
courbe représentative de  $g$ .
- Déterminer la dérivée de  $g$  et dresser son  
tableau des variations.
- Construire la courbe  $(\mathcal{C}_g)$  de  $g$ .

**30**

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \cos x + \frac{1}{2}x^2 - 2.$$

- Étudier la parité de  $f$ .
- Dresser le tableau des variations de  $f$ .  
En déduire le signe de  $f'(x)$ .
- Dresser le tableau des variations de  $f$  et  
tracer la courbe représentative de  $f$ .

**31**

On considère la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  de  
courbe représentative  $(\mathcal{C}_f)$  dans un repère

orthonormé, définie par :  $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 3}{x^2 - 2x + 2}$ .

- Déterminer la fonction dérivée de  $f$  et écrire  
l'équation de la tangente  $(\mathcal{D})$  à la courbe de  $f$   
au point d'abscisse 1.
- Étudier les positions relatives de la droite  
 $(\mathcal{D})$  et de la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ . En déduire que  $(\mathcal{C}_f)$   
admet un point d'inflexion dont on déterminera  
les coordonnées.
- Démontrer que le point de coordonnées  
(1; 2) est un centre de symétrie à  $(\mathcal{C}_f)$ .
- Dresser le tableau des variations de  $f$  et  
tracer  $(\mathcal{C}_f)$  et la tangente  $(\mathcal{D})$ .

**32**

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 4}$  de courbe  $(\mathcal{C}_f)$  dans un  
repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- Étudier la continuité et la dérivabilité de  $f$   
aux points d'abscisses  $-4$  et  $1$  respectivement.
- Étudier les branches infinies de la courbe  
représentative  $(\mathcal{C}_f)$  de  $f$ .

- Montrer que la droite  $\Delta : x = -\frac{3}{2}$  est  
l'axe de symétrie à  $(\mathcal{C}_f)$ .

- Déterminer la fonction dérivée de  $f$ .
- Dresser le tableau des variations de  $f$ .

- On considère le point  $A\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$ .

- Soit  $M(x; y)$  un point de  $(\mathcal{C}_f)$  tel que  
 $x \in [-4; 1]$ . Montrer que  $AM = 2,5$ .
- Soit  $g$  la fonction définie par :  
 $g(x) = -f(x)$ .

Montrer que  $(\mathcal{C}_g)$  est l'image de  $(\mathcal{C}_f)$  par la  
symétrie de centre  $A$ .

- Tracer la courbe  $(\mathcal{C}_g)$  dans le même  
repère que  $(\mathcal{C}_f)$ .
- En déduire la construction de l'ensemble  
des points du plan de coordonnées  
 $(x; y)$  tels que :  $y^2 - |x^2 + 3x - 4| = 0$ .

**33**

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$f(x) = x + \sqrt{1 - x^2}$  de courbe représentative  $(\mathcal{C}_f)$   
dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- Étudier la continuité et la dérivabilité de  $f$   
aux points d'abscisses respectives  $-1$  et  $1$ .
- Étudier les branches infinies de la courbe  
représentative  $(\mathcal{C}_f)$  de  $f$ .

- Résoudre dans  $]0; 1[$  l'inéquation

$$\sqrt{1 - x^2} - 2x > 0 \text{ et l'inéquation}$$

$$\sqrt{x^2 - 1} + 2x > 0 \text{ dans l'intervalle } ]-\infty; -1[$$



- Déterminer la fonction dérivée de  $f$ .
- Tracer le tableau des variations de  $f$ .
- Soit  $g$  la fonction numérique définie par :
- $$g(x) = x - \sqrt{1-x^2}.$$
- Montrer que  $(C_g)$  est l'image de  $(C_f)$  par la symétrie de centre  $O$ .
- Tracer la courbe  $(C_g)$  dans le même repère que  $(C_f)$ .

## PRIMITIVES D'UNE FONCTION

Déterminer les primitives  $F$  de  $f$  sur les intervalles  $K$  indiqués dans chacun des cas :

- $f : x \mapsto 5x^3$   $K = \mathbb{R};$
- $f : x \mapsto -\pi$   $K = \mathbb{R};$
- $f : x \mapsto -\frac{2}{x^6}$   $K = ]-\infty; 0[;$
- $f : x \mapsto -\frac{2}{3\sqrt{x}}$   $K = ]0; +\infty[;$
- $f : x \mapsto 8x^{-\frac{3}{2}}$   $K = ]0; +\infty[;$
- $f : x \mapsto -\frac{4}{5\cos^2 x}$   $K = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[.$

On considère la fonction

$$f : x \mapsto \cos x - x \sin x; \quad g : x \mapsto x \cos x.$$

Justifier que la fonction  $f$  admet une primitive sur  $\mathbb{R}$ .

Déterminer la dérivée de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

En déduire une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

Déterminer la primitive de  $f$  qui prend

la valeur 1 en  $-\frac{\pi}{3}$ .

36

Soient  $f$  et  $g$  les fonctions définies par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} g(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( x \sin \frac{1}{x} \right) = 0$ .

En déduire que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

2. Montrer par l'absurde que  $g$  n'est pas continue en 0.

3. Calculer la dérivée de  $g$  et en déduire que  $f$  est une fonction non continue sur  $\mathbb{R}$  qui admet une primitive sur  $\mathbb{R}$ .

37

Pour chacune des fonctions  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  suivantes, déterminer un intervalle  $K$  sur lequel  $f$  admet une primitive puis calculer les primitives de  $f$  sur  $K$ .

$$f : x \mapsto (x-1)^4; \quad f : x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{x-3}};$$

$$f : x \mapsto -\sqrt{2} + \frac{1}{x}; \quad f : x \mapsto \left( x + \frac{1}{2} \right)^{\frac{3}{4}};$$

$$f : x \mapsto -\frac{1}{(x+2)^5}; \quad f : x \mapsto -\frac{1}{\cos^2(x+4)};$$

$$f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}; \quad f : x \mapsto \frac{x^2}{(x^3+27)^4};$$

$$f : x \mapsto \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}.$$

38

Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes sur les intervalles indiqués.

$$f(x) = (2x+1)\cos(x^2+x), \quad K = \mathbb{R};$$

$$g(x) = 2\sqrt{(2x-1)^3}, \quad K = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$$



$$u(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}, K = ]0; \pi[;$$

$$v(x) = (1 + \tan^2 2x) \tan 2x, K = ]-1; 1[$$

$$s(x) = \frac{x}{(2x^2 - 2)^{\frac{2}{3}}}, K = ]-1; 1[;$$

$$r(x) = (2x - 1)(x^2 - x + 1)^3, K = \mathbb{R}$$

**39**

Déterminer sur les intervalles indiqués une primitive de chacune des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  suivantes :

$$a) f(x) = \left(x^2 + \frac{1}{3}\right) \sin(x^3 + x) \quad K = \mathbb{R};$$

$$b) g(x) = \frac{4x^3 - 2x}{(x^4 - x^2 + 1)^3} \quad K = \mathbb{R};$$

$$c) h(x) = (2x + 3)(x^2 + 3x + 2)^{\frac{4}{3}} \quad K = ]-\infty; -1[;$$

$$d) t(x) = x^2(x^3 - 1)^{-\frac{2}{3}} \quad K = ]1; +\infty[;$$

$$e) p(x) = \frac{4x + 3}{(2x^2 + 3x - 5)^3} \quad K = ]1; +\infty[;$$

$$f) q(x) = (1 + \tan^2 x) \tan^3 x \quad K = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[.$$

**40**

Déterminer la primitive  $F$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  et satisfaisant à la condition indiquée.

$$a) f(x) = \cos x \sin^3 x \text{ et } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2;$$

$$b) f(x) = \sin^4 x, F(\pi) = 0;$$

$$c) f(x) = -2x^2(x + 2)^2, F(0) = -1;$$

$$d) f : x \mapsto \cos^4 x \sin 2x, F(\pi) = 0;$$

$$e) f(x) = \cos^5 x, F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

**41**

Soit  $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ . En remarquant que

$\tan^2 x = -1 + (1 + \tan^2 x)$ , déterminer la primitive de la fonction  $x \mapsto \tan^2 x$  qui prend

la valeur 0 en  $\frac{\pi}{4}$ .

**42**

Soit la fonction  $g : x \mapsto \frac{1}{1 - \sin x}$ .

a) Vérifier que pour tout  $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

$$\frac{1}{1 - \sin x} = \frac{1 + \sin x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}.$$

b) En déduire les primitives de  $g$  sur

**43**

Déterminer les primitives des fonctions ci-dessous :

$$1) x \mapsto (x - 1)\sqrt{x - 1} \text{ sur } ]1; +\infty[;$$

$$2) x \mapsto \sin x + x \cos x \text{ sur } \mathbb{R};$$

$$3) x \mapsto x \cos x \text{ sur } \mathbb{R};$$

$$4) x \mapsto \sin^2 x \cos^3 x \text{ sur } \mathbb{R};$$

$$5) x \mapsto \frac{2}{(x - 1)^2} + \frac{3}{(x - 2)^3} \text{ sur } ]1; 2[;$$

$$6) x \mapsto \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x} \text{ sur } ]0; \pi[.$$

**44**

Soit la fonction  $f : x \mapsto \frac{x^3 + x^2 - 5x - 1}{(x - 1)^2}$

1. Déterminer trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$ .

2. En déduire les primitives de  $f$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

**45**

Soit  $g$  la fonction définie dans l'intervalle

$$\text{par : } g(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}.$$

1. Détermine deux réels  $a$  et  $b$  indépendants

$$\text{de } x \text{ tels que } g'(x) = \frac{a}{\cos^4 x} + \frac{b}{\cos^2 x}$$

la dérivée de  $g$ .

2. En déduire la primitive  $G$  de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{\cos^4 x} \text{ qui prend la valeur 1 en } \frac{\pi}{4}.$$



# Chapitre 7

## ESPACES VECTORIELS ET APPLICATIONS LINÉAIRES

### LEÇON 1 ESPACES VECTORIELS SUR $\mathbb{R}$

1.1 SOUS-ESPACES VECTORIELS D'UN ESPACE VECTORIEL SUR  $\mathbb{R}$ .

1.2 BASES ET DIMENSION D'UN ESPACE VECTORIEL.

1.3 SOUS-ESPACES VECTORIELS SUPPLÉMENTAIRES D'UN ESPACE VECTORIEL.

### LEÇON 2 APPLICATIONS LINÉAIRES

2.1 APPLICATIONS LINÉAIRES

2.2 NOYAU ET IMAGE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

2.3 MATRICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

2.4 PROJECTIONS ET SYMÉTRIES VECTORIELLES.

## S'ENTRAÎNER



# LEÇON 1 ESPACES VECTORIELS SUR $\mathbb{R}$

► Consolider les méthodes pour :

- montrer qu'une partie d'un espace vectoriel est sous espace vectoriel;
- montrer qu'une famille de vecteurs d'un espace vectoriel est libre ou génératrice;
- déterminer une base et la dimension d'un espace vectoriel .

► Montrer que deux sous espaces vectoriels sont supplémentaires.

## 1.1 SOUS-ESPACES VECTORIELS D'UN ESPACE VECTORIEL SUR $\mathbb{R}$ .



### Prendre un bon départ

Montrer que :

- Dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ , l'ensemble  $F$  des triplets  $(x; y; z)$  tels que  $2x - y + 3z = 0$  est un sous-espace vectoriel ;
- Dans l'ensemble  $V_2$  des vecteurs du plan de base  $(\vec{i}, \vec{j})$ , l'ensemble des vecteurs qui s'écrivent  $x(2\vec{i} + 3\vec{j})$  est un sous espace vectoriel ;
- Dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ , l'ensemble  $F$  des triplets  $(x; y; z)$  tels que  $2x - y + 3z = -1$  n'est pas un sous-espace vectoriel ;
- Dans l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2, l'ensemble des matrices inversibles n'est pas un sous-espace vectoriel.



### Retenir

Une partie  $H$  d'un espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{R}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si :

- $H$  est non vide ;
- la somme de deux vecteurs de  $H$  est un vecteur de  $H$ ; (partie stable pour +)
- le produit d'un vecteur de  $H$  par un réel est un vecteur de  $H$ . (partie stable pour  $\cdot$ )

### Remarque

- L'intersection de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel ;
- La réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas toujours un sous-espace vectoriel.



**Exemple**

Montrons que dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$ , l'ensemble  $E$  des triplets  $(x; y; z)$  tels que  $x - 2y + z = 0$  est un sous-espace vectoriel.

1.  $(0; 0; 0)$  est un élément de  $E$ .  $E$  est non vide.

2. Soient  $(x; y; z)$  et  $(a; b; c)$  deux éléments de  $E$ .

$$(x; y; z) + (a; b; c) = (x + a; y + b; z + c).$$

$$(x + a) - 2(y + b) + (z + c) = (x - 2y + z) + (a - 2b + c) = 0 + 0 = 0.$$

3.  $(x; y; z) + (a; b; c)$  est vecteur de  $E$ .  $E$  est stable pour l'addition des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ .

4. Soient  $(x; y; z)$  un vecteur de  $E$  et  $a$  un nombre réel.

$$a(x; y; z) = (ax; ay; az).$$

$$ax - 2(ay) + (az) = a(x - 2y + z) = a \times 0 = 0.$$

5.  $a(x; y; z)$  est un vecteur de  $E$  :  $E$  est stable pour le produit d'un vecteur par un réel.

6.  $E$  est donc un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

**NOTE.** On aurait du montrer que  $E$  est stable pour les combinaisons linéaires.

7. Soient  $(x; y; z)$  et  $(a; b; c)$  sont deux éléments quelconques de  $E$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres réels quelconques, alors le vecteur  $\alpha(x; y; z) + \beta(a; b; c)$  est aussi un vecteur de  $E$ .

8. Étant donné qu'un sous-espace vectoriel doit nécessairement contenir le vecteur nul, l'ensemble des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  qui s'écrivent  $(a; b; c)$  tels que  $a + b + c = 7$  n'est pas un sous-espace vectoriel car  $(0; 0; 0)$  n'est pas un vecteur de cet ensemble. En effet,  $0 + 0 + 0 = 0$  et  $0 \neq 7$ .

**S'exercer**

1. Dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre deux, montrer que l'ensemble des matrices de la

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{ est un sous-espace vectoriel.}$$

2. Dans l'ensemble des vecteurs du plan, montrer que l'ensemble des vecteurs dont les coordonnées dans une base donnée vérifient  $3x - 4y = 0$  est un sous-espace vectoriel.

**12 BASES ET DIMENSION D'UN ESPACE VECTORIEL.****Prendre un bon départ**

1. Donner des bases canoniques respectives de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{R}^4$ .

2. Comment détermine-t-on la dimension lorsqu'elle existe d'un espace vectoriel ?

3. Quelles sont alors les dimensions respectives de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$  ?

4. Soit  $E$  l'ensemble des vecteurs  $(x; y; z)$  de  $\mathbb{R}^3$  tels que  $x - 2y + 5z = 0$ .



(i) Déterminer une famille génératrice et libre de  $E$ .

(ii) Déduire la dimension de  $E$ .

e) Dans l'ensemble  $V_3$  des vecteurs dont une base est  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on pose  $u = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ ,  $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ .

Montrer que la famille  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est une base de  $V_3$ .

Déterminer les coordonnées des vecteurs  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  et  $\vec{T} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$  dans la base  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ .

Donner une équation cartésienne du plan engendré par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .



## Retenir

- Une base d'un espace vectoriel  $E$  est une famille libre et génératrice de  $E$ .
- Si une base d'un espace vectoriel a  $n$  vecteurs, alors toute autre base de cet espace vectoriel a aussi  $n$  vecteurs.
- La dimension d'un espace vectoriel  $E$  est l'entier naturel noté  $\dim E$ , qui est 0 si  $E = \{\vec{0}\}$  et le nombre de vecteurs dans une base de  $E$  si  $E \neq \{\vec{0}\}$ .
- Dans un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ , si  $B$  est une famille de  $n$  vecteurs distincts, alors les affirmations suivantes sont équivalentes :
  - a)  $B$  est une famille libre de  $E$ ;
  - b)  $B$  est partie génératrice de  $E$ ;
  - c)  $B$  est une base de  $E$ .

## Exemple

1) Montrons que la famille  $((1; 2; -1); (1; 1; 2); (3; -1; 2))$  est une base de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$ .  
Puisque  $\mathbb{R}^3$  est de dimension 3, et la famille est formée de trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ , il suffit de montrer que la famille  $((1; 2; -1); (1; 1; 2); (3; -1; 2))$  est libre.

Soit  $x, y, z$  trois réels tels que  $x(1; 2; -1) + y(1; 1; 2) + z(3; -1; 2) = (0; 0; 0)$ .

$$\text{On a : } \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ -x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \quad \text{qui peut être résolu par substitution ou par la méthode du pivot de Gauss}$$

De la deuxième équation,  $z = 2x + y$  et les deux autres équations donnent le système :

Le déterminant de ce dernier système est 16 qui est non nul. On a  $x = y = 0$ ; et donc  $z = 0$ .

La famille  $((1; 2; -1); (1; 1; 2); (3; -1; 2))$  est une base de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$ .

2) La famille  $((2; 1); (5; 2); (7; -1))$  n'est pas une base de  $\mathbb{R}^2$  car elle contient trois vecteurs distincts, alors qu'une base de  $\mathbb{R}^2$  doit avoir exactement deux vecteurs distincts.

3) La famille  $((2; 1); (5; 2); (0; 0))$  n'est pas une base de  $\mathbb{R}^2$  car elle contient le vecteur nul, donc liée.



## S'exercer

1. Déterminer les valeurs du réels  $m$  pour que les vecteurs  $(m-2)\vec{i} + (m+3)\vec{j}$  et  $(2m)\vec{i} + (m+1)\vec{j}$  forment une base du plan dont une base est  $(\vec{i}, \vec{j})$ .
2. Montrer que les fonctions affines  $f : x \mapsto 3x+1$  et  $g : x \mapsto 2x+7$  forment une base de l'espace des applications affines définies de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Déterminer les coordonnées du vecteur  $F : x \mapsto 11x-4$  dans cette base.

## 13 SOUS-ESPACES VECTORIELS SUPPLÉMENTAIRES D'UN ESPACE VECTORIEL.

### Prendre un bon départ

1. Soient  $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j}$  et  $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$  deux vecteurs du plan vectoriel  $V_2$  de base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .
2. Montrer que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  forment une base de  $V_2$ .
3. En déduire que tout vecteur de  $V_2$  s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur colinéaire à  $\vec{u}$  et d'un vecteur colinéaire à  $\vec{v}$ .
4.  $E$  désigne le sous-espace vectoriel des vecteurs colinéaires à  $\vec{u}$  et  $E'$  le sous-espace vectoriel des vecteurs colinéaires à  $\vec{v}$ .
5. Montrer que  $E \cap E' = \{\vec{0}\}$ .

### Retenir

Deux sous-espaces vectoriels  $H$  et  $F$  d'un espace vectoriel  $E$  sont supplémentaires si et seulement si tout vecteur de  $E$  s'écrit de manière unique comme somme de deux vecteurs dont l'un appartient à  $H$  et l'autre à  $F$ . On note  $E = H \oplus F$ .

#### Exemple

1.  $E = E \oplus \{\vec{0}\}$
2.  $E \oplus F = F \oplus E$
3. Dans  $V_3$ , on considère le plan  $E$  dont une équation est  $x - 2y - z = 0$  et  $F$  la droite dont une base est  $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ .
4. Montrons que le vecteur  $\vec{u}$  n'est pas un élément de  $E$ .
5. Les coordonnées de  $\vec{u}$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  sont  $(1; 1; 1)$ .
6.  $1 - 2(1) - 1 = 1 - 2 - 1 = -2$  et  $-2 \neq 0$ . D'où le vecteur  $\vec{u}$  n'est pas élément du plan  $E$ .
7.  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est une base de  $E$ , alors les vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  forment une base de  $V_3$ .



Soit en effet trois réels  $x, y$  et  $z$  tels que  $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0}$ .

Supposons  $x$  non nul, alors  $\vec{u} = -\frac{y}{x}\vec{v} - \frac{z}{x}\vec{w}$  et  $\vec{u}$  est un vecteur de  $E$  car il s'écrit comme

combinaison linéaire des vecteurs d'une base de  $E$ . Ce qui contredit la proposition ci-dessus.

$\vec{u}$  n'est pas élément de  $E$ . D'où  $x = 0$  et alors  $y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow y = z = 0$  car  $(\vec{v}, \vec{w})$  est une base de  $E$  et sont donc linéairement indépendants.

Tout vecteur de  $V_3$  s'écrit de manière unique comme  $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$ . Or  $b\vec{v} + c\vec{w} \in E$  et  $a\vec{u} \in E$ .

On peut conclure que  $E$  et  $F$  sont des sous-espaces supplémentaires de  $V_3$ .

### Remarque

- Deux sous-espaces vectoriels propres  $F$  et  $G$  d'un espace vectoriel de dimension finie  $E$  sont supplémentaires si et seulement si la réunion des vecteurs d'une base de  $F$  avec ceux d'une base de  $G$  constituent une base de  $E$ .

- Si deux sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  d'un espace vectoriel de dimension finie sont supplémentaires, alors  $\dim F + \dim G = \dim E$ .

- Un plan et une droite sont supplémentaires si et seulement si un vecteur non nul de la droite n'est pas un vecteur du plan.



### S'exercer

**1.e** Montrer que les droites vectorielles du plan vectoriel  $P$  engendrées par les vecteurs  $3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{j}$  sont supplémentaires.

**1.f** Montrer que la droite de l'espace vectoriel de dimension 3  $V_3$  dont un vecteur directeur est  $\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$  et le plan d'équation  $3x - y + 7z = 0$  sont supplémentaires.

**1.g** L'ensemble  $F$  des fonctions numériques munies de l'addition et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . Soient  $P$  l'ensemble des fonctions paires et  $I$  l'ensemble des fonctions impaires de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

1) Montrer que  $P$  et  $I$  sont des sous-espaces vectoriels de  $F$ .

2) Soit  $f$  une fonction appartenant à  $F$ . On définit les fonctions  $g$  et  $h$  par :

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

a) Montrer que  $g$  est paire et  $h$  impaire.

b) Montrer que  $f = g + h$ .

c) En déduire que  $F = P \oplus I$ .



## LEÇON 2 LES APPLICATIONS LINÉAIRES

- Montrer qu'une application d'un espace vectoriel dans un espace vectoriel est linéaire ;
- Déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire ;
- Utiliser la composition des applications linéaires pour des démonstrations ;
- Montrer qu'une application linéaire est injective, surjective ou bijective ;
- Représenter et utiliser la matrice d'une application linéaire relativement à une base donnée.
- Connaitre les propriétés et savoir les utiliser des projections, symétries et homothéties vectorielles.

### 11 APPLICATIONS LINÉAIRES

#### Prendre un bon départ

- Montrer que l'application  $f$  définie de  $\mathbb{R}^2$  vers  $\mathbb{R}$  par :  $f((x; y)) = 3x + 3y$  est linéaire.
- Soit l'application  $g$  de  $V_2$  dans  $V_2$  par :  $g(x\vec{i} + y\vec{j}) = (x - 2y)\vec{i} + (2x - 3y)\vec{j}$ .
- Montrer que  $g$  est linéaire
- Donner l'écriture analytique de  $g$
- Déterminer les images par  $g$  des vecteurs  $3\vec{i} - 5\vec{j}$  et  $2\vec{i} + 6\vec{j}$ .
- Déterminer l'antécédent du vecteur  $7\vec{i} - 4\vec{j}$  par  $g$ .
- Montrer que  $g$  est bijective, puis donner les expressions analytiques de  $g^{-1}$ , l'application réciproque de  $g$ .

#### Retenir

- Une application  $f$  d'un espace vectoriel  $E$  dans un espace vectoriel  $F$  est linéaire si et seulement si :
  - Pour deux vecteurs quelconques  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de  $E$ ,  $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$
  - Pour tout vecteur  $\vec{u}$  de  $E$  et tout réel  $x$ ,  $f(x\vec{u}) = xf(\vec{u})$ .
- Toute application linéaire de l'espace vectoriel  $E$  dans  $\mathbb{R}$  est appelée une forme linéaire de  $E$ .
- Toute application linéaire d'un espace vectoriel  $E$  dans  $E$  est appelée un endomorphisme de  $E$ .
- Une application linéaire bijective de  $E$  dans  $F$  est un isomorphisme de  $E$  dans  $F$ .
- Une application linéaire bijective de  $E$  dans  $E$  est un automorphisme de  $E$ .



**Exemple**

Montrons que l'application définie par  $f(x\vec{i} + y\vec{j}) = (x - 2y)\vec{i} + (3x - 5y)\vec{j}$  est un automorphisme de  $V_2$ .

Montrons d'abord que  $f$  est linéaire.

Soient  $x\vec{i} + y\vec{j}$  et  $x'\vec{i} + y'\vec{j}$  deux vecteurs de  $V_2$ .

$$x\vec{i} + y\vec{j} + x'\vec{i} + y'\vec{j} = (x + x')\vec{i} + (y + y')\vec{j}.$$

$$\begin{aligned} f(x\vec{i} + y\vec{j} + x'\vec{i} + y'\vec{j}) &= f[(x + x')\vec{i} + (y + y')\vec{j}] \\ &= [(x + x') - 2(y + y')]\vec{i} + [3(x + x') - 5(y + y')]\vec{j} \\ &= [(x - 2y) + (x' - 2y')]\vec{i} + [(3x - 5y) + (3x' - 5y')]\vec{j} \\ &= [(x - 2y)\vec{i} + (3x - 5y)\vec{j}] + [(x' - 2y')\vec{i} + (3x' - 5y')\vec{j}] \\ &= f(x\vec{i} + y\vec{j}) + f(x'\vec{i} + y'\vec{j}). \end{aligned}$$

$f$  est linéaire par rapport à l'addition de vecteurs dans  $V_2$ .

De même on montre que  $f[a(x\vec{i} + y\vec{j})] = af(x\vec{i} + y\vec{j})$ .

$f$  est donc un endomorphisme de  $V_2$ .

Montrons que  $f$  est bijective.

Soit  $a\vec{i} + b\vec{j}$  un vecteur de  $V_2$ ; on cherche  $(x\vec{i} + y\vec{j}) \in V_2$  tel que  $f(x\vec{i} + y\vec{j}) = a\vec{i} + b\vec{j}$ .

$x$  et  $y$  vérifient:  $(x - 2y)\vec{i} + (3x - 5y)\vec{j} = a\vec{i} + b\vec{j}$ .

De l'unicité de l'écriture d'un vecteur dans une base, on a (S) : 
$$\begin{cases} x - 2y = a \\ 3x - 5y = b \end{cases}$$

$$\det(S) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -5 + 6 = 1 \text{ et } 1 \neq 0. \text{ Donc (S) admet un unique couple solution par } x \text{ et } y.$$

soit un unique vecteur  $x\vec{i} + y\vec{j}$ . D'où  $f$  est bijective.  $f$  est donc un automorphisme de  $V_2$ .

**Remarques :**

$f(\vec{i}) = f(1\vec{i} + 0\vec{j}) = \vec{i} + 3\vec{j}$  et  $f(\vec{j}) = (-2)\vec{i} + (-5)\vec{j}$ . Nous remarquons que  $\det(S) = \det$

Calculons  $x$  et  $y$  en fonction de  $a$  et de  $b$ .

$$D_x = \begin{vmatrix} a & -2 \\ b & -5 \end{vmatrix} = -5a + 2b \text{ d'où } x = -5a + 2b. D_y = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 3 & b \end{vmatrix} = -3a + b \text{ d'où } y = -3a + b.$$

Ainsi  $\begin{cases} x = -5a + 2b \\ y = -3a + b \end{cases}$  est l'écriture analytique de  $f^{-1}$ .

**Remarque**

- Une application linéaire d'un espace vectoriel  $E$  dans un espace vectoriel  $F$ ,  $E$  et  $F$  de dimension finies, est un isomorphisme si et seulement si l'image de toute base de  $E$  est une base de  $F$ .

- Une application  $f$  de  $E$  dans  $F$  est linéaire si et seulement si pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de  $E$  et pour tous réels  $a$  et  $b$ ,  $f(a\vec{u} + b\vec{v}) = af(\vec{u}) + bf(\vec{v})$ .

- La somme, la composée de deux applications linéaires et le produit d'une application linéaire par un réel, sont des applications linéaires.



## S'exercer

1.  $E_1$  et  $E_2$  sont des espaces vectoriels sur  $\mathbb{R}$  de base respectives  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et  $(\vec{i}, \vec{j})$

2. Montrer que l'application  $\phi$  de  $E_1$  vers  $E_2$  définies par

$$\phi(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3) = (2x - y + z)\vec{i} + (x + y + 5z)\vec{j} \text{ est linéaire.}$$

3. Montrer que  $\phi$  n'est pas bijective.

## 12 NOYAU ET IMAGE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

### Prendre un bon départ

1. Soient les applications linéaires  $f$  et  $g$  définies par :

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 ; f((x; y)) = (2x + 3y; 5x - y).$$

$$g: V_2 \rightarrow V_2 ; g(\vec{i}) = \vec{i} - 4\vec{j} \text{ et } g(\vec{j}) = \frac{1}{2}\vec{i} + 2\vec{j} \text{ où } (\vec{i}, \vec{j}) \text{ est une base de } V_2.$$

2. Déterminer le noyau de  $f$  puis celui de  $g$ .

3. Déterminer l'image de  $f$  puis celui de  $g$ .

4. Vérifier que  $\dim(\ker f) + \dim(\text{Im } f) = \dim(\mathbb{R}^2)$  et  $\dim(\ker g) + \dim(\text{Im } g) = \dim(V_2)$ .

### Retenir

Soit une application linéaire de l'espace vectoriel  $E$  dans  $F$ .

- Le noyau de  $f$  noté  $\ker f$  ou  $N(f)$  est l'ensemble des vecteurs de  $E$ , ayant pour image le vecteur nul de  $F$ .  $(\{\vec{u} \in E / f(\vec{u}) = \vec{0}_F\})$

- L'image de  $f$  notée  $\text{Im } f$  ou  $f(E)$  est l'ensemble des vecteurs de  $F$  admettant chacun un antécédent dans  $E$  ou encore l'ensemble des images respectives de tous les vecteurs de  $E$  par  $f$ .  $(\{\vec{u}' \in F / \exists \vec{u} \in E, \vec{u}' = f(\vec{u})\})$

- $N(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $\text{Im } f$  un sous-espace vectoriel de  $F$ .

- Si  $E$  est de dimension finie, alors  $\dim(\ker f) + \dim(\text{Im } f) = \dim E$ .

### Exemple

Soit  $f$  un endomorphisme du plan vectoriel  $E_2$ , défini sur les vecteurs de base par

$$f(\vec{i}) = 2\vec{i} + \vec{j} \text{ et } f(\vec{j}) = 4\vec{i} + 2\vec{j}.$$

Déterminons  $\ker f$  et  $\text{Im } f$ .

Soit  $(x; y)$  un vecteur de  $\ker f$ .  $f(\vec{u}) = \vec{0}$ .

$$f(\vec{u}) = xf(\vec{i}) + yf(\vec{j}) = x(2\vec{i} + \vec{j}) + y(4\vec{i} + 2\vec{j}) = (2x + 4y)\vec{i} + (x + 2y)\vec{j}.$$

$$f(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + 2y = 0$$



D'où  $\ker f$  est la droite vectorielle d'équation  $x + 2y = 0$ .

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} \in \ker f \Leftrightarrow x = -2y \text{ et } \vec{u} = y(-2\vec{i} + \vec{j})$$

une base de  $\ker f$  est  $(-2\vec{i} + \vec{j})$ .  $\dim(\ker f) = 1$ .

Soit  $\vec{v}(a; b)$  un vecteur de  $\text{Im} f$ .

Il existe un vecteur  $\vec{u}(x; y) \in E / v = f(\vec{u})$ .

$$f(x\vec{i} + y\vec{j}) = a\vec{i} + b\vec{j} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y = a \\ x + 2y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x + 2y) = a \\ x + 2y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = x + 2y \\ 2b = a \end{cases} \text{ soit } a - 2b = 0$$

Ainsi  $\vec{v}(a; b) \in \text{Im} f \Leftrightarrow a - 2b = 0$ . Donc  $\text{Im} f$  est la droite vectorielle d'équation  $a - 2b = 0$ .

$$\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} \in \text{Im} f \Leftrightarrow a = 2b \Leftrightarrow \vec{v}' = b(2\vec{i} + \vec{j}). \text{ Une base de } \text{Im} f \text{ est } (2\vec{i} + \vec{j}).$$

D'où  $\dim \text{Im} f = 1$ .

Après avoir déterminé le noyau d'une application linéaire de  $E$  dans  $F$ , on peut utiliser la relation  $\dim E = \dim(\ker f) + \dim(\text{Im} f)$ .

Pour déterminer la dimension de l'image.  $\dim(\ker f) + \dim(\text{Im} f) = 2$ . Or  $\dim(\ker f) = 1$ , alors  $\dim(\text{Im} f) = 1$ .  $\text{Im} f$  est donc une droite vectorielle.

$\text{Im} f$  est engendrée par les images des vecteurs d'une base de l'espace vectoriel de départ.

$$\text{Exemple: } f(\vec{i}) = 2\vec{i} + \vec{j}; f(\vec{j}) = 4\vec{i} + 2\vec{j} = 2(2\vec{i} + \vec{j}) = 2f(\vec{i})$$

D'où une base de  $\text{Im} f$  est  $f(\vec{i}) = 2\vec{i} + \vec{j}$ .

### Remarque

- Une application linéaire est injective si et seulement si son noyau n'a que le vecteur nul.
- Une application linéaire est surjective si et seulement si son image est l'espace vectoriel d'arrivée.
- Si  $f$  application linéaire de l'espace vectoriel dans l'espace vectoriel  $F$ ,  $\dim E = \dim F$ , alors les assertions suivantes sont équivalentes :  
(a)  $f$  est injective ; (b)  $f$  est surjective ; (c)  $f$  est bijective ;  
(d)  $f$  transforme une base de  $E$  en une base de  $F$ .



### S'exercer

2.b Soit  $\phi$  un endomorphisme de  $E_3$  ;  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  une base de  $E_3$ .

$$\phi(\vec{i}) = -\vec{i} + \vec{k}, \phi(\vec{j}) = \vec{j} + \vec{k}, \phi(\vec{k}) = \vec{i} + \vec{j}.$$

Donner les expressions analytiques de  $\phi$ .

Déterminer  $\ker \phi$ , ainsi qu'une base de ce sous-espace.

Déduire que  $\text{Im} \phi$  est un plan vectoriel de  $E_3$ . Déterminer une base de  $\text{Im} \phi$ .

Les sous-espaces vectoriels  $\ker \phi$  et  $\text{Im} \phi$  sont-ils supplémentaires ?



# 13 MATRICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

## Prendre un bon départ

$E_2$  est un plan vectoriel dont une base est  $(\vec{i}, \vec{j})$  ;  $E_3$  est un espace vectoriel dont une base est  $(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ .

$f$  est un endomorphisme de  $E_2$  tel que  $f(\vec{i}) = 3\vec{i} - 2\vec{j}$  et  $f(\vec{j}) = \vec{i} - 3\vec{j}$ .

Écrire la matrice  $A$  de  $f$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

Montrer que  $f$  est un automorphisme de  $E_2$ , puis écrire la matrice de  $f^{-1}$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

Donner l'écriture analytique de  $f^{-1}$ .

Soit  $g$  une application linéaire de  $E_2$  dans  $E_3$  telle que:  $g(\vec{i}) = 2(\vec{e}_1) + 5(\vec{e}_2) - 3(\vec{e}_3)$

$$g(\vec{j}) = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \frac{3}{5}\vec{e}_3.$$

Écrire la matrice  $B$  de  $g$  relativement aux bases  $(\vec{i}, \vec{j})$  et  $(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ .

Est-elle une matrice carrée ?

Écrire au moins de deux façons différentes la matrice de  $g \circ f$

relativement aux bases  $(\vec{i}, \vec{j})$  et  $(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ .

Pouvons-nous calculer le produit  $A \times B$ ? Justifier votre réponse.

## Retenir

Soit une application linéaire définie d'un espace vectoriel  $E$  de dimension  $p$  vers un espace vectoriel  $F$  de dimension  $n$  ;  $B$  une base de  $E$  et  $B'$  celle de  $F$ .

- La matrice  $M$  de  $f$  relativement aux bases  $B$  et  $B'$  est un tableau de  $p$  colonnes et de  $n$  lignes dont les colonnes sont constituées des composantes des images des vecteurs de  $B$  exprimées dans la base  $B'$ .

- $M$  est une matrice carrée si le nombre de ses colonnes est égal au nombre de ses lignes.

- Le produit  $M \times N$  n'est possible que si le nombre de colonnes de  $M$  est égal au nombre de lignes de  $N$ .

- $M$  est inversible si et seulement si  $f$  est bijective et  $M^{-1}$  est la matrice de  $f^{-1}$  relativement aux bases  $B'$  et  $B$ .

- Si  $M$  est carrée d'ordre 2, alors  $f$  est bijective si et seulement si  $\det(M) \neq 0$

## Exemple

$(\vec{i}, \vec{j})$  est une base de  $E_2$ ,  $f$  est un endomorphisme de  $E_2$  par  $\vec{u}'(x', y')$ ,  $\vec{u}(x, y) \begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$

Écrivons la matrice  $M$  de  $f$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

$f(\vec{i}) = 2\vec{i} + 3\vec{j}$  et  $f(\vec{j}) = -\vec{i} + 4\vec{j}$  Car  $\vec{i}(1, 0)$  et  $\vec{j}(0, 1)$

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \det(M) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - (-1) \times 3 = 11.$$



Puisque  $\det(M) \neq 0$ ,  $M$  est inversible, donc  $f$  est bijective.

Soit  $M^{-1}$  l'inverse de la matrice  $M$ .

$$D_x = \begin{bmatrix} x' & -1 \\ y' & 4 \end{bmatrix} = 4x' + y' \text{ et } D_y = \begin{bmatrix} 2 & x' \\ 3 & y' \end{bmatrix} = -3x' + 2y', \quad D = 11$$

$$\begin{cases} x = \frac{4}{11}x' + \frac{1}{11}y' \\ y = -\frac{3}{11}x' + \frac{2}{11}y' \end{cases} \text{ d'où } M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{3}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

b) Calculons à l'aide de  $M$  les coordonnées de l'image  $\vec{u}'$  du vecteur  $\vec{u} = 4\vec{i} - 5\vec{j}$  par  $f$ .

$$\vec{u}'(x', y'), \vec{u}(4, -5), \text{ matriciellement, } \vec{u}' = f(\vec{u}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M(f) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M \times \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 4 + (-1) \times (-5) \\ 3 \times 4 + 4 \times (-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -8 \end{bmatrix} \text{ d'où } \begin{cases} x' = 13 \\ y' = -8 \end{cases}$$

d'où  $\vec{u}'(13; -8)$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

2)  $E_3$  et  $E_2$  sont des deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{R}$ ,  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  une base de  $E_3$  et  $(\vec{i}, \vec{j})$  une base de  $E_2$ .

L'application  $\varphi$  est linéaire de  $E_3$  dans  $E_2$  définie par:

$$\varphi(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3) = (2x - y + z)\vec{i} + (x + 2y + 5z)\vec{j}.$$

Écrivons la matrice de  $\varphi$  relativement aux bases  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et  $(\vec{i}, \vec{j})$ . avec

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0); \vec{e}_2 = (0, 1, 0); \vec{e}_3 = (0, 0, 1)$$

$$\varphi(\vec{e}_1) = \varphi(1\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3) = (2 - 0 + 0)\vec{i} + (1 + 0 + 0)\vec{j} = 2\vec{i} + \vec{j}.$$

$$\varphi(\vec{e}_2) = \varphi(0\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3) = (0 - 1 + 0)\vec{i} + (0 + 2 + 0)\vec{j} = -\vec{i} + 2\vec{j}.$$

$$\varphi(\vec{e}_3) = \vec{i} + 5\vec{j}.$$

D'où par la matrice  $B$  de  $\varphi$  relativement aux bases  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

$$\text{et } (\vec{i}, \vec{j}) \text{ est } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$\varphi$  n'est pas bijective car  $\dim E_3 \neq \dim E_2$ , puisque  $\dim E_3 = 3$  et  $\dim E_2 = 2$ .



## S'exercer

2.c  $f$  est un endomorphisme du plan vectoriel  $E_2$  muni d'une base  $(\vec{i}, \vec{j})$  défini par :

$$f(\vec{i}) = 10\vec{i} - 8\vec{j} \text{ et } f(\vec{j}) = 4\vec{i} - 2\vec{j}; \vec{w} = 2\vec{i} + 3\vec{j}.$$

a) Écrire la matrices  $A$  de  $f$  puis de  $f \circ f$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

b) Calculer les coordonnées de  $f(\vec{w})$  et de  $(f \circ f)(\vec{w})$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

c) Soit  $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j}$  et  $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$ . Montrer que  $(\vec{u}, \vec{v})$  est une base de  $E_2$  et écrire la matrice de  $f$  dans cette base.

d) Montrer que  $f$  est un automorphisme  $E_2$ , puis écrire la matrice de la bijection réciproque dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .



Écrire la matrice  $P$  de l'application linéaire  $g$  telle que  $g(\vec{i}) = \vec{u}$  et  $g(\vec{j}) = \vec{v}$ .

Montrer que  $C = P^{-1}AP$ .

Soit à résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  le système (S) : 
$$\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 5x + y\sqrt{2} = 4 \end{cases}$$

Trouver une matrice carrée  $A$  d'ordre 2, telle que  $(S) \Leftrightarrow A \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

Montrer que  $A$  est inversible, puis déterminer la matrice  $A^{-1}$ .

Montrer que  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \times \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$ . Déduire la solution  $(x; y)$  de (S).

Résoudre le système (S) avec une autre méthode.

## 24 PROJECTIONS ET SYMÉTRIES VECTORIELLES.

### Prendre un bon départ

Soient  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ ,  $H$  et  $F$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ . Soit  $\vec{u}$  un vecteur de  $E$ .

Montrer qu'il existe un unique vecteur  $\vec{v}$  de  $H$  et  $\vec{w}$  de  $F$  tels que  $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ .

Soient  $f$  et  $g$  deux applications telles que :  $f(\vec{u}) = \vec{v}$  et  $g(\vec{u}) = \vec{v} - \vec{w}$ .

Montrer que  $f$  et  $g$  sont deux endomorphismes de  $E$ .

Étudier les cas :  $H = E$  et  $F = \{\vec{0}\}$  ;  $H = \{\vec{0}\}$  et  $F = E$ .

Montrer que  $f \circ f = f$  et  $g \circ g = Id_E$ .

### Retenir

Soient  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ ;  $H$  et  $F$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans  $E$ .

L'application  $p$  qui à tout vecteur  $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$  avec  $(\vec{v}; \vec{w}) \in H \times F$ , associe le vecteur  $\vec{v}$  est la projection vectorielle ou encore projecteur de base  $H$  et de direction  $F$ .

$p(\vec{u}) = \vec{u}$  et  $p(\vec{v}) = 0$ .  $p \circ p = p$ .

L'application  $s$  qui à tout vecteur  $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$  avec  $(\vec{v}; \vec{w}) \in H \times F$ , associe le vecteur  $\vec{v} - \vec{w}$  est la symétrie vectorielle de base  $H$  et de direction  $F$ .

$s(\vec{u}) = \vec{u}$  et  $s(\vec{v}) = -\vec{v}$ .  $s \circ s = Id_E$ . •  $p$  et  $s$  sont des endomorphismes de  $E$ .

### Exemple

Dans le plan vectoriel  $V_2$  muni d'une base  $(\vec{i}, \vec{j})$ , on considère les vecteurs  $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$  et  $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$ ;  $D_1$  et  $D_2$  les droites vectorielles engendrées par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

Montrons que  $V_2 = D_1 \oplus D_2$ .

Montrons que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont linéairement indépendants.



$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

donc,  $(\vec{u}, \vec{v})$  est une base de  $V_2$  et ainsi,  $V_2 = D_1 \oplus D_2$  car  $\{\vec{u}\} \cup \{\vec{v}\} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$  est une base.

b) Écrivons la matrice de la projection  $p$  de base  $D_1$  et de direction  $D_2$  base la  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

$$\begin{cases} P(\vec{u}) = \vec{u} \\ P(\vec{v}) = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2P(\vec{i}) + P(\vec{j}) = 2\vec{i} + \vec{j} \quad (1) \\ P(\vec{i}) + P(\vec{j}) = \vec{0} \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) - (2) \Leftrightarrow P(\vec{j}) = -2\vec{i} - \vec{j}$$

$$\text{d'où } M(p) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Autre solution**

$$\begin{cases} \vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} \quad (1) \\ \vec{v} = \vec{i} + \vec{j} \quad (2) \\ P(\vec{u}) = \vec{u} \quad (3) \\ P(\vec{v}) = \vec{0} \quad (4) \end{cases} \begin{cases} (1) - (2) \Leftrightarrow \vec{i} = \vec{u} - \vec{v} \\ (2) \Leftrightarrow \vec{j} = \vec{v} - \vec{i} = \vec{v} - \vec{u} + \vec{v} = -\vec{u} + 2\vec{v} \\ \text{d'où } p(\vec{i}) = P(\vec{u}) - P(\vec{v}) = \vec{u} \Leftrightarrow p(\vec{i}) = 2\vec{i} + \vec{j} \\ p(\vec{j}) = -P(\vec{u}) + 2P(\vec{v}) = -P(\vec{u}) = -\vec{u} = -(2\vec{i} + \vec{j}) = (-2)\vec{i} + (-1)\vec{j} \end{cases}$$

$$\text{d'où } M(p) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Note: On vérifie que  $M(p) \times M(p) = M(p)$ .

c) Soit  $s$  la symétrie vectorielle de base  $D_1$  et de direction  $D_2$ .

$$\text{on a } \begin{cases} S(\vec{u}) = \vec{u} \\ S(\vec{v}) = -\vec{v}, S \text{ linéaire} \end{cases}$$

$$\text{comme } \vec{i} = \vec{u} - \vec{v}, S(\vec{i}) = S(\vec{u}) - S(\vec{v}) = \vec{u} - (-\vec{v}) = \vec{u} + \vec{v} = (2\vec{i} + \vec{j}) + (\vec{i} + \vec{j})$$

$$S(\vec{i}) = 3\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\text{comme } \vec{j} = -\vec{u} + 2\vec{v}, S(\vec{j}) = S(-\vec{u}) + 2S(\vec{v}) = -\vec{u} - 2\vec{v} = -(2\vec{i} + \vec{j}) - 2(\vec{i} + \vec{j}) = -(4\vec{i} + 3\vec{j})$$

$$\text{d'où } M(S) = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

**Autre solution**

$$\text{on a } \begin{cases} S(\vec{u}) = \vec{u} \\ S(\vec{v}) = -\vec{v} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2S(\vec{i}) + S(\vec{j}) = 2\vec{i} + \vec{j} \quad (1) \\ S(\vec{i}) + S(\vec{j}) = -\vec{i} - \vec{j} \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) - (2) \Leftrightarrow S(\vec{i}) = 3\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$(2) \Leftrightarrow S(\vec{j}) = -\vec{i} - \vec{j} - S(\vec{i}) = -\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{i} - 2\vec{j} = -4\vec{i} - 3\vec{j}$$

$$S(\vec{j}) = -4\vec{i} - 3\vec{j}$$

$$\text{d'où } M(S) = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{On peut vérifier que } M(s) \times M(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



### Remarque

- Soient  $E_1$  et  $E_2$  sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel  $E = E_1 \oplus E_2$ .
- Si  $P$  est la projection de  $E$  de base  $E_1$  et de direction  $E_2$  alors  $E_2 = \ker P$
- $E_1 = \{\vec{u} \in E / P(\vec{u}) = \vec{u}\}$  (ensemble des vecteurs invariants par  $P$ )
- Si  $S$  est la symétrie de base  $E_1$  et de direction  $E_2$ , alors
- $E_2 = \{\vec{u} \in E / S(\vec{u}) = -\vec{u}\}$  et  $E_1 = \{\vec{u} \in E / S(\vec{u}) = \vec{u}\}$  (ensemble des vecteurs invariants par  $S$ )
- Tout endomorphisme  $f$  de  $E$  tel que  $f \circ f = f$  est un projecteur de  $E$  sur  $\text{Im } f$  suivant  $\ker f$ .
- Tout endomorphisme  $f$  de  $E$  tel que  $f \circ f = \text{Id}_E$  est une symétrie de  $E$  de base
- $E_1 = \{\vec{u} \in E / f(\vec{u}) = \vec{u}\}$  et de direction  $E_2 = \{\vec{u} \in E / f(\vec{u}) = -\vec{u}\}$
- Éléments géométriques d'une projection ou d'une symétrie: base et direction.

### S'exercer

- $E$  et  $E'$  sont deux droites vectorielles du plan  $V_2$ , de bases  $\vec{u} = 5\vec{i} + 3\vec{j}$  et  $\vec{w} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$  respectivement.
- Montrer que  $E$  et  $E'$  sont supplémentaires.
- $p$  la projection de base  $E$  et de direction  $E'$ ;  $s$  la symétrie de base  $E$  et de direction  $E'$ .
- Écrire la matrice  $A$  de  $p$  et la matrice  $B$  de  $s$  dans la base  $(i, j)$ .
- Montrer que  $2A = B + I$  où  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  = matrice unité carrée d'ordre 2.
- Donner les écritures analytiques respectives de  $p$  puis de  $s$ .
- $V_3$  est un espace vectoriel dont une base est  $(i, j, k)$ ;  $D$  la droite vectorielle de  $V_3$ , de vecteur de base  $\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$  et  $P$  le plan d'équation  $x + 2y - z = 0$ .
- Montrer que  $V_3 = \vec{D} \oplus \vec{P}$ .
- $p$  est la projection de base  $\vec{P}$  et de direction  $\vec{D}$ ;  $p'$  la projection de base  $\vec{D}$  et de direction  $\vec{P}$ .
- $s$  est la symétrie de base  $\vec{P}$  et de direction  $\vec{D}$ ;  $s'$  la symétrie de base  $\vec{D}$  et de direction  $\vec{P}$ .
- Écrire les matrices de  $p, p', s, s'$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .
- Donner les expressions analytiques des endomorphismes de  $p, p', s, s'$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .



# S'ENTRAÎNER

## ESPACES VECTORIELS

1

On définit, dans un espace vectoriel  $E$  de base  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ , les ensembles :

$$F = \left\{ \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ tel que } \begin{cases} x - y - z = 0 \\ -x + 3y + z = 0 \end{cases} \right\} \text{ et}$$

$$G = \left\{ \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ tel que } \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases} \right\}$$

- 1) Montrer que  $F$  et  $G$  sont des droites vectorielles et donner une base de chacune.
- 2) Déterminer  $F + G$ ; Donner sa dimension, une base et une équation cartésienne.
- 3) La somme  $F + G$  est-elle directe ?
- 4) Les sous espaces vectoriels  $F$  et  $G$  sont-ils supplémentaires ?
- 5) Montrer que le plan vectoriel d'équation  $x = 0$  est supplémentaire de  $F$ .

2

On définit un espace vectoriel  $E$  de base  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ , les ensembles :

$$P = \left\{ u \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ tel que } 5x + y + z = 0 \right\}$$

$$Q = \left\{ u \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ tel que } x - 3y + 5z = 0 \right\}$$

- a) Montrer que  $P$  et  $Q$  sont deux

sous-espaces vectoriels de  $E$  et donner une base de chacun d'eux.

- b) Déterminer le sous-espace vectoriel  $P \cap Q$ .
- c) La somme  $P + Q$  est-elle directe ?
- d) Les sous-espaces vectoriels  $P$  et  $Q$  sont-ils supplémentaires ?
- e) Montrer que la droite vectorielle  $D$  d'équations  $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$  est supplémentaire de  $F$ .

3

On définit l'application linéaire  $f_m$  de l'espace vectoriel  $E$  de base  $(\vec{i}; \vec{j})$  dans l'espace vectoriel  $F$  de base  $(\vec{i}'; \vec{j}')$  par :

$$f_m(\vec{i}) = (1+m)\vec{i}' - \vec{j}' \text{ et } f_m(\vec{j}) = 3\vec{i}'(1-m)$$

Déterminer suivant les valeurs de  $m$ , le noyau et l'image de  $f_m$ .

4

Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes d'un espace vectoriel  $E$ .

- a) Montrer que si  $(\text{Im } f \subset \text{Ker } g)$  alors  $g \circ f$  est égale à l'application nulle.
- b) Montrer que si  $f \circ g = g \circ f$ , alors  $\text{Im } f$  et  $\text{Ker } g$  sont stables par  $f$ .

5

Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$ . On note  $f^2 = f \circ f$ .

- a) Prouver que  $\text{Im } f^2 \subset \text{Im } f$ .
- b) Montrer que la proposition  $\text{Im } f^2 = \text{Im } f$  est équivalente à pour tout vecteur  $\vec{u}$  de  $E$ , il existe  $\vec{u}_1 \in \text{Ker } f$  et  $\vec{u}_2 \in \text{Im } f$  tels que  $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ .



# IMAGINE ET NOYAU D'UN ENDOMORPHISME AUTOMORPHISME D'UN ESPACE VECTORIEL.

Soit l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  rapporté à sa base

canonique  $\vec{e}_1 = (1; 0; 0)$  ;

$\vec{e}_2 = (0; 1; 0)$  et  $\vec{e}_3 = (0; 0; 1)$ .

On définit l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  défini par

$\varphi(\vec{e}_1) = (1; 1; 0)$ ;  $\vec{e}'_2 = \varphi(\vec{e}_2) = (1; 2; 0)$ ;

$\varphi(\vec{e}_3) = (1; -1; 0)$ .

Montrer que  $(\vec{e}'_1; \vec{e}'_2)$  est une base de  $\text{Im} \varphi$ .

Déterminer une base de  $\text{Ker} \varphi$ .

Montrer que  $\text{Im} \varphi$  et  $\text{Ker} \varphi$  sont deux

espaces vectoriels supplémentaires

Montrer la restriction de  $\varphi$  à  $\text{Im} \varphi$ . Montrer

que  $\varphi|_{\text{Im} \varphi}$  est un automorphisme de  $\text{Im} \varphi$ .

Déterminer la matrice de  $\sigma^{-1}$  dans la

base  $(\vec{e}'_1; \vec{e}'_2)$ .

Soit un endomorphisme d'un espace vectoriel E.

Montrer que  $\text{Ker} f \cap \text{Im} f = f(\text{Ker} f \circ f)$ .

Montrer cette égalité dans le cas de

un endomorphisme de matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

rapportée à une base  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  de l'espace vectoriel E.

Soit un plan vectoriel et  $f$  un endomorphisme

tel que l'on ait  $\text{Im} f = \text{Ker} f$ .

Que peut-on déduire des dimensions de

$\text{Im} f$  et  $\text{Ker} f$  ?

Montrer qu'il existe un vecteur non nul de  $\text{Ker} f$ .

Montrer qu'il existe un vecteur  $j$  non nul tel que

$f(j) = \vec{i}$ .

Montrer que  $(\vec{i}; \vec{j})$  est une base de P et

déterminer la matrice de  $f$  dans cette base.

d) Montrer que  $f \circ f$  est l'endomorphisme nul de P.

e) Réciproquement, que peut-on dire d'un

endomorphisme  $f$  de P tel que  $f \circ f$  soit

l'endomorphisme nul ?

9

Soit E, un espace vectoriel de dimension 2,

rapporté à une base  $(\vec{i}; \vec{j})$ . Soit  $f$

l'endomorphisme de E, dont la matrice, dans la

base  $(\vec{i}; \vec{j})$  est  $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ .

Pour tout réel  $\lambda$ , on note  $E_\lambda$  l'ensemble des

vecteurs  $\vec{u}$  de E tels que  $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$ .

a) Montrer que  $f$  est un automorphisme

involutif de E ( $f \circ f = id_E$ ).

b) Montrer que si  $\lambda$  est distinct de  $-1$  et de  $1$

$E_\lambda$  est réduit au vecteur nul.

c) Déterminer  $E_1$  et  $E_{-1}$  en donnant une base

de chacun d'eux. Prouver qu'ils sont

supplémentaires. En déduire une nouvelle base de

E constituée des vecteurs non nuls de  $E_1$  et de  $E_{-1}$ .

d) Déterminer la matrice de  $f$  dans cette

nouvelle base.

10

L'espace vectoriel E est muni d'une base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit  $f$  l'endomorphisme de E qui à tout vecteur

$\vec{u}(x; y; z)$  associe le vecteur  $\vec{u}'(x'; y'; z')$  tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z \\ y' = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z \\ z' = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \end{cases}$$

a) Déterminer le noyau de  $f$ .

b) Que peut-on dire de l'application  $f$  ?

c) Déterminer l'ensemble des vecteurs

invariants par  $f$ .



d) Soit  $\vec{u}'$  l'image d'un vecteur  $\vec{u}$  de  $E$ . Déterminer  $f(\vec{u}')$ . En déduire la nature de  $f$  et déterminer ses éléments caractéristiques.

11

Déterminer la matrice de la projection vectorielle  $p$  de l'espace vectoriel  $E$  de base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  sur le plan vectoriel  $P$  d'équation  $x + y + z = 0$ , suivant la droite vectorielle dont un vecteur non nul est  $\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ .

12

Soit  $E$  un plan vectoriel de base  $(\vec{i}, \vec{j})$  et  $f$  l'endomorphisme de  $E$  ayant pour matrice

$$\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Montrer que  $f$  est une projection vectorielle, dont on déterminera la base et la direction.

13

Le plan vectoriel  $V$  est muni d'une base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .  $f$  est l'endomorphisme de  $V$  qui à tout vecteur  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$  associe le vecteur  $\vec{v} = (x + 2y)(\vec{i} + \vec{j})$ .

a) Déterminer  $f(\vec{i})$  et  $f(\vec{j})$ , puis écrire la matrice de  $f$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

b) Démontrer que  $\ker f$  et  $\operatorname{Im} f$  sont des droites vectorielles de  $V$  et déterminer une base de  $\ker f$  puis une base de  $\operatorname{Im} f$ .

14

$V$  est l'ensemble des vecteurs du plan,  $\varphi$  est un endomorphisme de  $V$ .

$$E = \{(\vec{u}) \in V ; \varphi(\vec{u}) = -3\vec{u}\}$$

$$F = \{(\vec{u}) \in V ; \varphi(\vec{u}) = 2\vec{u}\}$$

1. Démontrer que  $E$  et  $F$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $V$ .

2. Soit  $(\vec{i}, \vec{j})$  une base de  $V$ , on pose  $\varphi(\vec{i}) = \vec{i} + 4\vec{j}$  et  $\varphi(\vec{j}) = \vec{i} - 2\vec{j}$

a. Démontrer que  $E$  et  $F$  sont des droites vectorielles. Déterminer une base de  $E$  puis une base de  $F$ .

b. On pose  $\vec{e}_1 = \vec{i} + \vec{j}$  et  $\vec{e}_2 = \vec{i} - 4\vec{j}$ .

Démontrer que  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  est une base de  $V$  et la matrice de  $\varphi$  dans cette base.

15

$f$  est un endomorphisme du plan vectoriel vérifiant l'égalité  $f \circ f = -Id_V$ .

1. Démontrer que  $f$  est un isomorphisme et exprimer  $f^{-1}$  en fonction de  $f$ .

2. Démontrer que  $\vec{0}$  est le seul vecteur nul par  $f$ .

3. Soit  $\vec{u}$  un vecteur non nul de  $V$ . Démontrer que  $(\vec{u}, f(\vec{u}))$  est une base de  $V$  et écrire la matrice de  $f$  relativement à cette base.

16

$W$  est l'espace vectoriel dont une base est  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .  $f$  est une application linéaire de  $W$  dans  $W$ .

On donne  $f(\vec{i}) = -3\vec{i}$  ;  $f(\vec{j}) = 2\vec{j}$  ;  $f(\vec{k}) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ .

Soit  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  un vecteur  $W$ .

1. Démontrer que  $f(\vec{u}) = -3x\vec{i} + 2y\vec{j} + (x + y + z)\vec{k}$ .

2. Démontrer que  $\ker(f)$  est un plan vectoriel et déterminer une base de  $\ker f$ .

3. Démontrer que  $\operatorname{Im} f = \mathbb{R} \cdot \vec{k}$ .

17

$W$  est l'espace vectoriel dont d'une base est  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .  $\varphi$  est l'endomorphisme de  $W$  tel que

$$\varphi(\vec{i}) = \vec{i} + \vec{j}, \varphi(\vec{j}) = \vec{j} - \vec{k} \text{ et } \varphi(\vec{k}) = \vec{i} - \vec{j}.$$

1. Démontrer que le système  $(\varphi(\vec{i}), \varphi(\vec{j}), \varphi(\vec{k}))$  est un système lié.

$\varphi$  est-il un isomorphisme de  $W$  ?

2. Déterminer l'expression analytique de  $\varphi$ .



déterminer  $\ker(\varphi)$  et donner un vecteur

montrer que  $(\varphi(\vec{i}), \varphi(\vec{j}))$  est une base  $\text{Im } \varphi$ .

montrer que  $(\vec{e}_1, \varphi(\vec{i}), \varphi(\vec{j}))$  est une base

la matrice de  $\varphi$  relativement à

vectoriel de dimensions 3.

endomorphisme de  $W$  tel que pour tout  $u$

$$f(f(u)) = 0$$

montrer que l'on a  $\text{Im } f \subset \ker f$ .

pose  $\dim \text{Im } f = i$  et  $\dim \ker f = k$

montrer que  $i \leq k$  et calculer  $i + k$

montrer que  $i = 0$  ou  $i = 1$ .

cas où  $i = 0$  déterminer  $\ker f$

pose  $i = 1$ , soit  $u$  un vecteur non nul

montrer qu'il existe un vecteur  $\vec{v}$  de  $\ker f$

$(\vec{u}, \vec{v})$  soit une base de  $\ker f$  et un

non nul  $w$  tel que  $f(w) = \vec{u}$

montrer que  $(\vec{u}, \vec{v}, w)$  est une base de  $W$ .

la matrice de  $f$  dans la base

triangle du plan affine  $P$  de

$I$  est le milieu de  $[BC]$ ,  $G$

centre du système  $\{(A, 2); (B, 1); (C, 1)\}$ .

endomorphisme de  $V$  tel que

$$f(\vec{AB}) = 2\vec{AC} \text{ et } \varphi(\vec{AC}) = 2\vec{BC}.$$

déterminer  $\varphi(AI)$  puis  $\varphi(AG)$ ,  $\varphi$  est-il un

de  $V$  ?

déterminer la matrice de  $\varphi$  dans la base

déterminer  $\ker \varphi$  et  $\text{Im } \varphi$ . On déterminera

de  $\ker \varphi$  et une base  $\vec{e}_2$  de  $\text{Im } \varphi$ .

la matrice de  $\varphi$  dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .

20

Le plan vectoriel  $V$  est muni d'une

base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .  $f$  est l'endomorphisme

de  $V$  tel que :  $f(\vec{i}) = \vec{i} - \vec{j}$  et  $f(\vec{j}) = \vec{i} + \vec{j}$ .

1. Démontrer que  $f$  est un isomorphisme de  $v$

et écrire la matrice de  $f^{-1}$  dans la base  $(i, j)$

2. Soit  $E = \{\vec{u} \in v, f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}\}$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$

a) Caractériser  $E_0$

b) Caractériser  $E_1$

3. Démontrer que pour tout réel  $\lambda$ ,  $E_\lambda$  est

réduit au vecteur  $\vec{0}$ .

21

Dans le plan vectoriel  $v$  muni d'une base

$B = (\vec{i}, \vec{j})$ . On considère l'ensemble

$E_\alpha = \{\vec{u} \in V, f(\vec{u}) = \alpha \vec{u}\}$  où  $\alpha$  est un réel et  $f$

un endomorphisme de  $V$ .

1. Montrer que  $E_\alpha$  est un sous-espace vectoriel de  $V$ .

2. On pose :  $f(\vec{i}) = (\vec{i} - \vec{j})$  et  $f(\vec{j}) = -2\vec{i} + 2\vec{j}$ .

a) Écrire la matrice de  $f$  relativement à la base  $(\vec{i}, \vec{j})$

b) Montrer qu'il existe deux valeurs réelles

$\alpha_1$  et  $\alpha_2$  de  $\alpha$  et  $V$  est la somme directe des

deux droites  $E_{\alpha_1}$  et  $E_{\alpha_2}$  dont on précisera

les bases  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$  respectivement.

c. Montrer que  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  est une base de  $V$  et

écrire la matrice de  $f$  relativement à cette base.

22

$V$  est le plan vectoriel muni d'une base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

Quatre entiers naturels  $a, b, c$  et  $d$  forment

dans cet ordre une progression géométrique

de raison  $q$ ,  $q$  premier avec  $a$ .

$f$  est l'endomorphisme de  $V$  tel que :

$$f(\vec{i}) = 5a\vec{i} + \vec{j} \text{ et } f(\vec{j}) = (b-d)\vec{i} + 2a\vec{j}.$$



1. Calculer  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  sachant que  $f$  n'est pas bijectif.

2. On prend  $a = 12$

a) Déterminer  $\ker f$  et  $\operatorname{Im} f$  : on donnera une base de  $\ker f$  puis une base de  $\operatorname{Im} f$ .

b) On pose  $\vec{e}_1 = 24\vec{i} - \vec{j}$  et  $\vec{e}_2 = 60\vec{i} + \vec{j}$ , montrer que  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  est une base de  $V$  et écrire la matrice de  $f$  relativement à cette base.

23

$V$  est le plan vectoriel muni d'une base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

$f$  l'endomorphisme de  $V$  tel que  $f \circ f = -f$ .

On pose  $f^2 = f \circ f$ .

1. Démontrer que  $\ker f = \ker f^2$  et

$\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$

2. Démontrer que  $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$ .

3. Soit  $\vec{u}$  un vecteur de  $V$ . démontrer que  $\vec{u}$  s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de  $\operatorname{Im} f$  et d'un vecteur de  $\ker f$ .

4. Dans cette question, on suppose que la matrice de  $f$  relativement à la  $(\vec{i}, \vec{j})$  est donnée

par  $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$  où  $a$  et  $b$  sont deux nombres réels.

a) Sachant que  $f \circ f = -f$ . Calculer les valeurs possibles de  $a$  et  $b$  et déterminer les matrices correspondantes dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

b) On prend  $a = -\frac{1}{2}$  et  $b = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$  déterminer

$\ker f$  et  $\operatorname{Im} f$

c) On pose  $\vec{e}_1 = \vec{i} - \sqrt{2}\vec{j}$  et  $\vec{e}_2 = \vec{i} + \sqrt{2}\vec{j}$ .  
Démontrer que  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  est une base de  $V$  et écrire la matrice de  $f$  dans cette base.

24

OABC est un tétraèdre tel que OAB, OAC, OBC sont des triangles rectangles et on pose  $\|\vec{OB}\| = 1$ .

1. Démontrer que  $(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$  est une base orthonormée de la direction  $W$  de l'espace engendré par O, A, B et C.

2. (D) est la droite vectorielle engendrée par le vecteur :  $\vec{e}_1 = \vec{OA} + \vec{OB} - 2\vec{OC}$  ; (P) est le plan vectoriel engendré par les vecteurs  $\vec{e}_2 = 2\vec{OA} + \vec{OB}$  et  $\vec{e}_3 = \vec{OA} - \vec{OC}$

a) Démontrer que  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  est une base

b) En déduire que tout vecteur de  $W$  peut s'écrire de façon unique comme somme d'un vecteur de (D) et d'un vecteur (P)

3. Pour tout vecteur  $\vec{u}$  de  $W$ , on pose  $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$  avec  $\vec{u}_1 \in D$  et  $\vec{u}_2 \in P$ .  $\phi$  est l'application de  $W$  dans  $W$  défini par  $\phi(\vec{u}) = 2(\vec{u}_1 - \vec{u}_2)$ .

a) Démontrer que  $\phi$  est linéaire

b) Démontrer que (D) est l'ensemble des vecteurs  $u$  de l'espace tels que  $\phi(\vec{u}) = 2\vec{u}$

c) Démontrer que (P) est l'ensemble des vecteurs  $u$  de l'espace tels que  $\phi(\vec{u}) = -2\vec{u}$

25

$W$  est l'espace vectoriel muni d'une base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .  
 $f$  l'endomorphisme de  $W$  tel que :

$$f(\vec{i}) = f(\vec{j}) = f(\vec{k}) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

1. Déterminer l'image et le noyau de  $f$ .

2. Démontrer que  $f \circ f = 3f$ .

3. Démontrer que  $\operatorname{Im} f$  est l'ensemble des vecteurs  $\vec{u}$  de  $W$  tels que  $f(\vec{u}) = 3\vec{u}$ .



Soit  $\alpha$  un réel  $g$  l'endomorphisme de

$$g(\vec{u}) = \alpha f(\vec{u}) - \vec{u}$$

Montrer que pour tout  $\vec{u}$  de  $W$ ,

$$g(\vec{u}) = \vec{u} \text{ si et seulement si } \alpha = \frac{2}{3}$$

Écrire la matrice de  $g$  dans la base

$$\text{pour } \alpha = \frac{2}{3}.$$

Montrer que  $\text{Im } f$  est l'ensemble des  
invariants par  $g$ .

Un plan vectoriel muni d'une base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

endomorphisme de  $V$  donc la matrice

$$\text{relativement à la base } (\vec{i}, \vec{j}) \text{ est } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer  $A^2, A^3, A^4$ .

Exprimer sur l'expression  $(n \in \mathbb{N})$  de  $A^n$

montrer le résultat par récurrence.

Soit  $\vec{u}_0 = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j}$  un vecteur de  $V$

Calculer  $\vec{u}_1 = f(\vec{u}_0)$  ;  $\vec{u}_2 = f(\vec{u}_1)$  ;

Exprimer  $\vec{u}_n$  en fonction de  $x_0$  et  $y_0$

Calculer les coordonnées  $x_n$  et  $y_n$  de

$\vec{u}_n$  en fonction de  $x_{n-1}$  et

$y_{n-1}$  et en fonction  $x_0, y_0$  et de  $n$ .

Prendre  $x_0 = 0, y_0 = -1$

Exprimer  $x_n$  et  $y_n$  en fonction de  $n$

Un espace vectoriel muni d'une base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ,

endomorphisme de  $W$  donc la matrice

relativement à la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que  $\ker f$  est un plan vectoriel dont on déterminera une équation cartésienne et une base.

2. Déterminer  $\text{Im } f$  et une base de cet espace.

3. On pose  $\vec{e}_1 = \vec{i} - \vec{k}$  ;  $\vec{e}_2 = \vec{j}$  et  $\vec{e}_3 = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

a) Montrer que  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  est une base de  $W$ .

b) Écrire la matrice de  $f$  dans cette base

4.  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites définies par :

$$u_1 = 2 ; u_{n+1} = 3u_n + 2 ; v_{n+1} = u_n + 1$$

montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique et exprimer  $u_n$  et  $v_n$  en fonction de  $n$ .

a) Calculer  $A^2$  et comparer  $A^2$  et  $A$

b) On pose  $H = 2A + I$ .

Démontrer par récurrence que  $H^n = a_n A + I$ .

Exprimer  $a_{n+1}$  en fonction de  $a_n$

c) Exprimer  $H^n$  en fonction de  $A, I$  et  $n$ .

28

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer  $A^2, A^3$  et montrer par récurrence

$$\text{que } A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Montrer que l'on a  $(A - I)^2 = 0$ ,  $I$  et  $0$  désignent respectivement la matrice unité et la matrice nulle. En déduire  $A^{-1}$ .



# Chapitre 8

## FONCTIONS LOGARITHME

### LEÇON 1 FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

#### 1.1 PRÉSENTATION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS DU LOGARITHME NÉPÉRIEN.

##### 1.1.1 Présentation

##### 1.1.2 Propriétés essentielles du logarithme (néperien).

##### 1.1.3 Limites des expressions comportant $\ln$ ; courbe de $\ln$ .

##### 1.1.4 Étude et représentation graphique de quelques fonctions comportant le logarithme néperien.

### LEÇON 2 LOGARITHME DE BASE QUELCONQUE

#### PRÉSENTATION ET QUELQUES PROPRIÉTÉS

### S'ENTRAÎNER



# LEÇON 1 FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

- Savoir mobiliser et utiliser les propriétés de la fonction logarithme neperien dans diverses opérations et démonstrations (en particulier: le logarithmes du produit d'expressions positives est la somme de leurs logarithmes).
- Résoudre des équations et inéquations avec des expressions comportant une fonction logarithme.
- Déterminer l'ensemble de dérivation, calculer la dérivée et étudier les variations des fonctions comportant une fonction logarithme (En particulier la fonction  $\ln(|u|)$  où  $u$  est une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ); Déterminer sur des intervalles appropriés une primitive de  $\frac{u'}{u}$ .
- Connaître et savoir utiliser les limites et les limites classiques sur les fonctions logarithmes.
- Savoir étudier et représenter graphiquement les fonctions dont les expressions comportent le logarithme( $\ln$ ).

## 1.1 PRÉSENTATION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS DU LOGARITHME NÉPÉRIEN.

### 1.1.1 Présentation

#### Prendre un bon départ

Compétence 1

Justifier que la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  admet des primitives sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

Combien de ces primitives s'annulent-elles en 1?

Compétence 2

Soit  $F$  la primitive la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  qui s'annule en 1.

Donner l'expression de  $F'(x)$  et en déduire le sens de variation de  $F$  sur  $]0; +\infty[$ .

Donner le signe de  $F(x)$  sur chacun des intervalles  $]0; 1[$ ,  $]1; +\infty[$ .

#### Retenir

On appelle fonction logarithme népérien et on la note  $\ln$  ou  $\text{Log}$ , la primitive de la fonction

$\frac{1}{x}$  sur  $]0; +\infty[$ , qui s'annule en 1.

$\ln : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto \ln x.$



- $\ln$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$ ,  $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$ .
- $\ln$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$  ;
- $\ln(1) = 0$  et pour tout réel  $x$  de  $]0; 1[$ ,  $\ln x < 0$  et pour tout réel  $x$  de  $]1; +\infty[$ ,  $\ln x > 0$ .

### Remarque

- La fonction  $\ln$  est continue sur  $]0; +\infty[$  car elle est dérivable sur cet intervalle.
- La fonction  $\ln$  est une bijection de  $]0; +\infty[$  vers un intervalle  $J$  ( $\ln$  est continue et strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ ).
- $J$  contient  $\ln 2,5 \approx 0,91$  et  $\ln 3 \approx 1,09$  ; donc  $J$  contient 1.
- Le réel  $e$  est l'antécédent de 1 par la fonction  $\ln$ . On a donc  **$\ln e = 1$** .
- Quels que soient les réels strictement positifs  $a$  et  $b$ 
  - $\ln a = \ln b$  équivaut à  $a = b$ .
  - $\ln a < \ln b$  équivaut à  $a < b$ .
- Soit  $u$  une fonction numérique d'une variable réelle et  $f$  la fonction :  $x \mapsto \ln(u(x))$ .  
 $f$  est définie si et seulement si,  $u$  est définie et  $u(x) > 0$ .

### Exemple

1) Déterminons l'ensemble de définition de chacune des fonctions définies ci-dessous :

$$f(x) = \ln(x^2 - 4) ; g(x) = \ln(2 - x^2) ; h(x) = \ln |9x^2 - 4| ;$$

$$k(x) = \ln\left(\frac{3+x}{5-2x}\right) ; l(x) = \ln \sqrt{1-2x^2} ; i(x) = \ln(2x^2 - x + 5).$$

#### Solution :

a)  $f(x)$  est définie si et seulement si  $x^2 - 4 > 0$  ;

soit  $x \in ]-\infty; -2[ \cup ]2; +\infty[$ . L'ensemble de définition de  $f$  est

$$Df = ]-\infty; -2[ \cup ]2; +\infty[.$$

b)  $g(x)$  est définie si et seulement si  $2 - x^2 > 0$  ; soit  $x \in ]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$ .

L'ensemble de définition de  $g$  est  $Dg = ]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$ .

c)  $h$  est définie si et seulement si  $|9x^2 - 4| > 0$  ; or une valeur absolue est toujours positive

Donc  $|9x^2 - 4| > 0$  équivaut à  $9x^2 - 4 \neq 0$  ;

$$9x^2 - 4 \neq 0 \text{ équivaut à } (3x - 2)(3x + 2) \neq 0; \text{ soit } x \neq \frac{2}{3} \text{ et } x \neq -\frac{2}{3}.$$

L'ensemble de définition de  $h$  est  $Dh = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{2}{3}; \frac{2}{3} \right\}$ .



d)  $\ln\left(\frac{3+x}{5-2x}\right)$  n'a de sens que si  $\begin{cases} 5-2x \neq 0 \\ \frac{3+x}{5-2x} > 0 \end{cases}$  soit  $\begin{cases} x \neq \frac{5}{2} \\ x \in \left]-3; \frac{5}{2}\right[ \end{cases}$ .

L'ensemble de définition de  $k$  est  $D_k = \left]-3; \frac{5}{2}\right[$ .

e)  $\ln\sqrt{1-2x^2}$  est définie si et seulement si  $\begin{cases} 1-2x^2 \geq 0 \\ \sqrt{1-2x^2} > 0 \end{cases}$  ;

soit  $1-2x^2 > 0$  et alors  $x \in \left]-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ .

L'ensemble de définition de  $l$  est  $D_l = \left]-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ .

f)  $\ln(2x^2 - x + 5)$  est définie si et seulement si  $2x^2 - x + 5 > 0$ .

Le discriminant de  $2x^2 - x + 5$  est  $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 5 = -19$ . Ce discriminant étant strictement négatif, pour tout réel  $x$ ,  $2x^2 - x + 5 > 0$ .

L'ensemble de définition de  $i$  est  $D_i = \mathbb{R}$ .

## S'exercer

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$  :

a)  $f(x) = \ln(11-x)$  ; b)  $g(x) = \ln(x^2 + 5x + 6)$  ;

c)  $h(x) = \frac{1}{2}x + 2 + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$  ;  $k(x) = \ln(x^2)$  ;  $w(x) = \ln\sqrt{x}$  ;  $L(x) = \ln|x^2 - 4x + 3|$ .

Résoudre les équations ou inéquations suivantes.

a)  $\ln(x-1) \geq \ln(-x+2)$  ; b)  $\ln(x^2 - 1) < 0$  ; c)  $\ln(-x-1) = \ln(x^2 + x + 2)$  ; d)  $\ln(-3x+4) \geq 1$ .

## 11.2 Propriétés essentielles du logarithme (néperien).

### Prendre un bon départ

Soit  $a$  un réel strictement positif.  $g$  la fonction :  $x \mapsto \ln(ax)$ .

Montrer que  $g$  est la composée de deux fonctions à préciser.

Montrer que pour tout réel  $x$  strictement positif,  $g'(x) = \frac{1}{x}$ .

En déduire qu'il existe une constante réelle  $k$ , telle que pour tout réel  $x$  strictement



positif,  $\ln(ax) = \ln x + k$ .

c) Sachant que  $\ln 1 = 0$ , déterminer la valeur de la constante  $k$ .

d) En déduire que quels que soient les réels strictement positifs  $a$  et  $x$ , on a  $\ln(ax) = \ln a + \ln x$ .

4) Soient  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs

a) De l'égalité  $b \times \frac{1}{b} = 1$ , déduire que  $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$ , puis que  $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ .



## Retenir

Soient  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs et  $n$  un entier relatif.

- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$  ;
- $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$  ;
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$  ;
- $\ln(a^n) = n \ln(a)$  ;
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$  ;
- Pour tout  $r$  élément de  $\mathbb{Q}$ ,  $\ln(a^r) = r \ln a$ .

### S'EN CONVAINCRE :

1) Les trois premières propriétés ont été établies dans l'activité.

2) a) Montrons que pour tout entier naturel,  $\ln(a^n) = n \ln(a)$ .

Raisonnons par récurrence.

$a$  étant strictement positif,  $a^0 = 1$  et  $\ln a^0 = \ln 1 = 0 = 0 \times \ln(a)$ .

Soit  $n$  un entier naturel quelconque. Supposons  $\ln(a^n) = n \ln(a)$ .

$$\ln(a^{n+1}) = \ln(a^n \times a) = \ln(a^n) + \ln(a) = n \ln(a) + \ln(a) = (n+1) \ln(a).$$

On déduit donc que pour tout entier naturel  $n$ ,  $\ln(a^n) = n \ln(a)$ .

On peut aussi écrire  $\ln(a^{-n}) = \ln\left(\frac{1}{a^n}\right) = -\ln(a^n) = -n \ln(a)$ .

Donc Pour tout entier relatif  $n$ , pour tout nombre réel strictement positif  $a$ ,  $\ln(a^n) = n \ln(a)$ .

a)  $(\sqrt{a})^2 = a$  ;  $\ln(\sqrt{a})^2 = 2 \ln(\sqrt{a}) = \ln(a)$ . Donc  $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$ .

b) Si  $p$  est un entier relatif et  $q$  un entier naturel non nul,

$$\ln\left(a^{\frac{p}{q}}\right) = \ln\left(\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p\right) = p \ln\left(a^{\frac{1}{q}}\right) \text{ or } \ln(a) = \ln\left(\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q\right) = q \ln\left(a^{\frac{1}{q}}\right) \Leftrightarrow \ln\left(a^{\frac{1}{q}}\right) = \frac{1}{q} \ln(a)$$

d'où  $\ln\left(a^{\frac{p}{q}}\right) = p \times \frac{1}{q} \ln(a) = \frac{p}{q} \ln(a)$ . En posant  $r = \frac{p}{q}$ , on a pour tout nombre réel

strictement positif  $a$ ,  $\ln(a^r) = r \ln(a)$ , pour tout rationnel  $r$ .



**Exemple**

1) Donnons l'écriture simplifiée des expressions suivantes :

$$a = \ln e^5; \quad b = \ln \left( \frac{\sqrt{e}}{4} \right); \quad c = \ln e^2 + \ln \sqrt{e}.$$

**Solution :**

$$a = \ln e^5 = 5 \ln e = 5;$$

$$b = \ln \left( \frac{\sqrt{e}}{4} \right) = \ln \sqrt{e} - \ln 4 = \frac{1}{2} \ln e - \ln 2^2 = \frac{1}{2} - 2 \ln 2;$$

$$c = \ln e^2 + \ln \sqrt{e} = 2 \ln e + \frac{1}{2} \ln e = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

2) Résolvons dans  $\mathbb{R}$  l'équation:  $\ln(x+5) = 3 + \ln x$ .

**Contraintes sur l'inconnue:**  $\ln x$  est définie si et seulement si  $x > 0$ ; donc l'équation

$\ln(x+5) = 3 + \ln x$  n'a de sens que si  $x+5 > 0$  et  $x > 0$ ; soit  $x > 0$ .

$$\ln(x+5) = 3 + \ln x \text{ équivaut à } \ln(x+5) = 3 \ln e + \ln x = \ln e^3 + \ln x = \ln(e^3 x);$$

$$\text{donc } \ln(x+5) = \ln(xe^3) \text{ équivaut à } x+5 = xe^3 \Leftrightarrow 5 = x(e^3 - 1) \Leftrightarrow x = \frac{5}{e^3 - 1}.$$

$$\text{Or } \frac{5}{e^3 - 1} > 0, \text{ donc l'ensemble des solutions de l'équation}$$

$$\ln(x+5) = 3 + \ln x \text{ est } S = \left\{ \frac{5}{e^3 - 1} \right\}.$$

3) Résolvons dans  $\mathbb{R}$  l'équation:  $\ln(x^2 + 5x + 6) = \ln(x + 3)$ .

**Contraintes sur l'inconnue:**  $x^2 + 5x + 6 > 0$  et  $x + 3 > 0$ .

Les racines de  $x^2 + 5x + 6$  sont  $-3$  et  $-2$ ; donc

$$x^2 + 5x + 6 > 0 \text{ équivaut à } x \in ]-\infty; -3[ \cup ]-2; +\infty[.$$

$$x + 3 > 0 \text{ équivaut à } x > -3.$$

$$\text{donc } x^2 + 5x + 6 > 0 \text{ et } x + 3 > 0 \text{ équivaut à } x \in ]-2; +\infty[.$$

$$\ln(x^2 + 5x + 6) = \ln(x + 3) \text{ équivaut à}$$

$$x^2 + 5x + 6 = x + 3 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = -3.$$

$$\text{Or } -3 \notin ]-2; +\infty[ \text{ et } -1 \in ]-2; +\infty[. \text{ Donc } S = \{-1\}.$$

4) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation :  $(\ln x)^2 + \ln x - 6 > 0$ .

**Solution :**

**Contraintes sur l'inconnue:**  $x > 0$

**Résolution**

$$\text{On pose } X = \ln x, \text{ il vient } X^2 + X - 6 > 0.$$

$$\text{L' trinôme } X^2 + X - 6 \text{ a pour racines } -3 \text{ et } 2 \text{ donc}$$



L'inéquation  $X^2 + X - 6 > 0$  est équivalente à  $X \in ]-\infty; -3[ \cup ]2; +\infty[$  ;  
 soit  $X < -3$  ou  $X > 2$   
 $\ln x < -3$  ou  $\ln x > 2 \Leftrightarrow \ln x < -3 \ln e$  ou  $\ln x > 2 \ln e$  ;  
 $\ln x < \ln e^{-3}$  ou  $\ln x > \ln e^2 \Leftrightarrow x < e^{-3}$  ou  $x > e^2 \Leftrightarrow x \in ]0; e^{-3}[ \cup ]e^2; +\infty[$ .  
 $S = ]0; e^{-3}[ \cup ]e^2; +\infty[$ .

### Exercice résolu 1

$f$  est la fonction définie sur  $] -3, 3[$  par  $f(x) = \ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)$ . Etudier la parité de  $f$ .

#### Solution

Soit  $x \in ] -3, 3[$  ;  $-x \in ] -3, 3[$  car  $] -3, 3[$  est centré en 0. De plus

$$f(-x) = \ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right) = \ln\left(\frac{1}{\frac{3-x}{3+x}}\right) = -\ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right) = -f(x).$$

Donc  $f$  est impaire

### Exercice résolu 2

1) Soit la fonction  $f : x \mapsto \ln(2x-1)^2$ . Déterminer l'ensemble de définition de  $f$  et montrer que  $f(x) = 2 \ln |2x-1|$ .

L'ensemble de définition de  $f$  est  $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$  car  $(2x-1)^2 \geq 0$

Pour tout réel  $x$  de  $D$ ,  $(2x-1)^2 = |2x-1|^2$  et  $|2x-1| > 0$ .

Donc Pour tout réel  $x$  de  $D$ ,  $\ln(2x-1)^2 = \ln |2x-1|^2 = 2 \ln |2x-1|$ .

2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation (1) :  $\ln(4x+2) - \ln(x-1) = 2 \ln x$ .

Cette équation n'a de sens que si 
$$\begin{cases} 4x+2 > 0 \\ x-1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \text{ qui est équivalent à } \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x > 1 \\ x > 0 \end{cases} ; \text{ soit } x > 1.$$

L'ensemble des solutions cette équation est inclus dans  $D = ]1; +\infty[$ .

Pour tout  $x$  appartenant à  $D$ , l'équation  $\ln(4x+2) - \ln(x-1) = 2 \ln x$  est équivalente à



$$\ln \frac{4x+2}{x-1} = \ln x^2 ; \text{ soit } \frac{4x+2}{x-1} = x^2 \text{ qui équivaut à}$$

$$x^2(x-1) = 4x+2, \text{ et donc à } x^3 - x^2 - 4x - 2 = 0.$$

Soit  $P$  le polynôme défini par  $P(x) = x^3 - x^2 - 4x - 2$ .

$P(-1) = 0$  ;  $-1$  est donc une racine de  $P$ . Il existe trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que

$$P(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c).$$

$$(x+1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx + ax^2 + bx + c = ax^3 + (b+a)x^2 + (c+b)x + c.$$

$$ax^3 + (b+a)x^2 + (c+b)x + c = x^3 - x^2 - 4x - 2.$$

Identification on a 
$$\begin{cases} a = 1 \\ b + a = -1 \\ c + b = -4 \\ c = -2 \end{cases} ; \text{ soit } a = 1 ; b = -2 \text{ et } c = -2.$$

$$P(x) = (x+1)(x^2 - 2x - 2).$$

l'équation  $x^2 - 2x - 2 = 0$  admet deux solutions  $1 - \sqrt{3}$  et  $1 + \sqrt{3}$ .

l'équation  $x^3 - x^2 - 4x - 2 = 0$  est équivalente à  $x = -1$  ou  $x = 1 - \sqrt{3}$  ou  $x = 1 + \sqrt{3}$ .

Parmi ces solutions, seule  $1 + \sqrt{3}$  est un élément de  $D$ .

**Donc l'ensemble des solutions de l'équation (1) est  $S = \{1 + \sqrt{3}\}$ .**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , l'équation (2) :  $\ln \frac{4x+2}{x-1} = \ln x^2$ .

Cette équation n'a de sens que si 
$$\begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 0 \\ \frac{4x+2}{x-1} > 0. \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 0 \\ x \in ]-\infty; -\frac{1}{2}[ \cup ]1; +\infty[ \end{cases} \quad \text{d'où le domaine } D_2$$

l'ensemble des solutions de l'équation (2) est  $D_2 = ]-\infty; -\frac{1}{2}[ \cup ]1; +\infty[$

Pour tout  $x$  de  $D_2$ , (2) équivaut à  $x = -1$  ou  $x = 1 - \sqrt{3}$  ou  $x = 1 + \sqrt{3}$ .

Toutes ces solutions appartiennent à  $D_2$ .

**L'ensemble des solutions de l'équation (2) est  $S = \{-1; 1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}\}$ .**

**Remarque : Les équations (1) et (2) ne sont pas équivalentes.**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\ln(x^2 - 4) = 4$ .

Cette équation n'a de sens que si  $x^2 - 4 > 0$ , soit  $x \in ]-\infty; -2[ \cup ]2; +\infty[$ .



L'ensemble des solutions de cette équation est inclus dans  $D = ]-\infty; -2[ \cup ]2; +\infty[$ .

$\ln(x^2 - 4) = 4$  équivaut à  $\ln(x^2 - 4) = 4 \ln e$ , car  $\ln e = 1$ .

D'autre part  $4 \ln e = \ln e^4$ . D'où  $\ln(x^2 - 4) = \ln e^4$ ; soit successivement  $x^2 - 4 = e^4$ ;  $x^2 = 4 + e^4$

$x = \sqrt{4 + e^4}$  ou  $x = -\sqrt{4 + e^4}$ .

$\sqrt{4 + e^4}$  et  $-\sqrt{4 + e^4}$  sont tous des éléments de  $D$ .

L'ensemble des solutions de l'équation  $\ln(x^2 - 4) = 4$

est  $S = \left\{ \sqrt{4 + e^4}; -\sqrt{4 + e^4} \right\}$



## S'exercer

**1.b** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

- a)  $8(\ln x)^3 - (\ln x)^2 + \ln x = 0$ ; b)  $\ln(2x - 5) + \ln(3x + 7) = 4 \ln 2$ ;  
c)  $\ln(x + 3) + \ln(x + 2) = \ln(x + 11)$ ; d)  $\ln(x + 3)(x + 2) = \ln(x + 11)$ .

**1.c** Donner l'écriture simplifiée des expressions suivantes :

$$a = \ln e^2 \sqrt{e} \quad ; \quad b = \frac{1}{3} \ln e^{27} \quad ; \quad c = \ln e + \ln \frac{1}{e}$$

**1.d** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  chacune des équations suivantes :

- a)  $\ln x = 2$  ; b)  $\ln x^3 = 27$  ; c)  $\ln(3 - 5x) = 0$  ; d)  $3 \ln \frac{1}{5x - 1} = 7$  ;  
e)  $\ln(5 - 2x) + \ln(4 - 3x) = \ln(4) - \ln(3)$  ;  
f)  $\ln|x + 4| + \ln|x - 1| = \ln 6$ .

**1.e** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $(\ln(x))^2 - 4 \ln(x) - 77 = 0$ .

**1.f** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations : a)  $\ln\left(\frac{2x - 3}{5x + 1}\right) < 0$  ; b)  $\ln x - \frac{1}{\ln x} < \frac{3}{2}$ .

**1.g** Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $a$  un nombre réel strictement positif.

Calculer la somme :

$$S = \ln a^n + \ln a^{n-1} + \dots + \ln a + \ln 1 + \ln\left(\frac{1}{a}\right) + \ln\left(\frac{1}{a^2}\right) + \dots + \ln\left(\frac{1}{a^{n-1}}\right) + \ln\left(\frac{1}{a^n}\right).$$

## 1.1.3 LIMITES DES EXPRESSIONS COMPORTANT $\ln$ . COURBE de $\ln$ .



## Prendre un bon départ

On admet que  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$ .

- a. Posons  $t = \frac{1}{x}$  ; calculer la limite de  $t$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ ,



Exprimer  $\ln x$  en fonction de  $t$  et en déduire la limite de  $\ln x$  lorsque  $x$  tend vers 0, par valeurs supérieures.

En remarquant que  $\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \times \ln x$ , justifier que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ .

En posant  $X = \frac{1}{x}$ , démontrer que  $\frac{\ln x}{x} = -X \ln X$ . En déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ .

Montrer que  $\ln$  est dérivable en 1 et que le nombre dérivé de  $\ln$  en 1 est 1.

En déduire que  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$  et que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ .

Déterminer une équation de la tangente à la courbe de  $\ln$  au point d'abscisse 1.

Dresser le tableau de variation de  $\ln$ .

## Retenir

### Quelques limites classiques

$$\lim_{u \rightarrow 0^-} \ln u = -\infty ; \lim_{u \rightarrow 0^+} u \ln u = 0 ; \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1 ; \lim_{u \rightarrow 1} \frac{\ln u}{u-1} = 1 ;$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty ; \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0 ; \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln u}{u} = -\infty.$$

### Représentation graphique

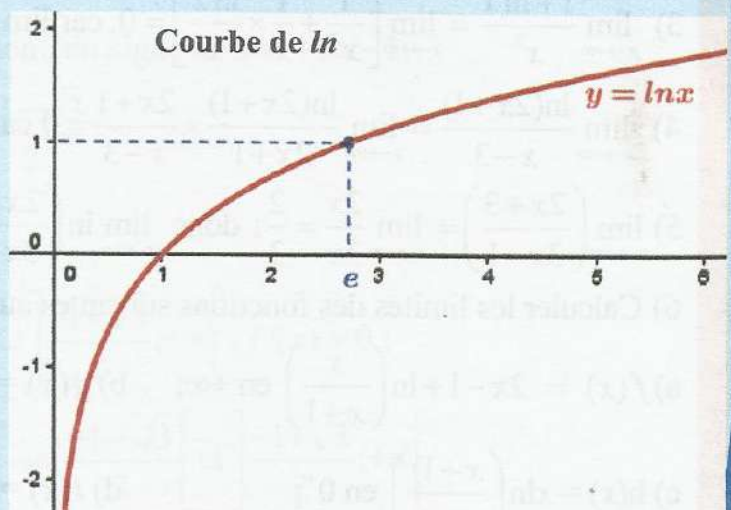
Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Tableau de variations de  $\ln$

| $x$     | 0         | 1 | $e$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|---|-----|-----------|
| $\ln x$ |           | + |     |           |
| $\ln x$ | $-\infty$ | 0 | 1   | $+\infty$ |

Une des ordonnées est asymptote à la courbe de  $\ln$ .

Une des abscisses est la direction de la branche parabolique de la courbe de  $\ln$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .



### Remarque

Si  $u$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  et ne s'annulant pas sur  $I$ , alors, la fonction  $g$

définie sur  $I$  par  $g(x) = \ln(|u(x)|)$  est dérivable sur  $I$  et on a pour tout  $x \in I$ ,  $g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ .



En effet :

Si  $u(x) > 0$ , alors  $g(x) = \ln(u(x))$ .

Pour tout  $x$  tel que  $u(x) > 0$ ,  $g(x) = \ln u(x)$ .

Et  $g'(x) = (\ln u)'(x) = (\ln)'(u(x)) \times u'(x)$ . Or pour tout réel  $x$ ,  $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$ .

$$\text{D'où } g'(x) = \frac{1}{u(x)} \times u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

De même Si  $u(x) < 0$ , alors  $g(x) = \ln(-u(x))$ .

Pour tout  $x$ ,  $-u(x) > 0$ ,  $g(x) = (\ln \circ u)(x)$

$$\text{et } g'(x) = (\ln \circ u)'(x) = (\ln)'(-u(x)) \times (-u'(x)) = \frac{1}{-u(x)} \times (-u'(x)) ;$$

$$g'(x) = \frac{-u'(x)}{-u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

• Si  $u$  ne s'annule pas sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , les primitives de la fonction  $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$

sont les fonctions  $x \mapsto \ln |u(x)| + k$ , où  $k$  est une constante réelle.

### Exemple 1

1) Calculons  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \ln x)$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 2 - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2 - \frac{\ln x}{x} \right) = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 (\ln x)^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} x (x \ln x)^2 = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{x} \right] = 0. \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x+1)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x+1)}{2x+1} \times \frac{2x+1}{x-3} = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x+1)}{2x+1} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-3} = 2$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x+3}{3x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}; \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{2x+3}{3x-1} \right) = \ln \left( \frac{2}{3} \right).$$

6) Calculer les limites des fonctions suivantes aux points indiqués:

$$\text{a) } f(x) = 2x - 1 + \ln \left( \frac{x}{x+1} \right) \text{ en } +\infty; \quad \text{b) } g(x) = \frac{2 \ln x + 1}{2x} \text{ en } +\infty;$$

$$\text{c) } h(x) = x \ln \left( \frac{x+1}{x} \right) \text{ en } 0^+; \quad \text{d) } l(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \text{ en } +\infty$$

**Solution :**

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1; \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{x}{x+1} \right) = \ln 1 = 0. \text{ De plus, } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1) = +\infty. \text{ D'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{b) } \frac{2 \ln x + 1}{2x} = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{2x}; \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{2x} \right) = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0$$



On a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln(x+1)) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 0$  car  $h(x) = x \ln(x+1) - x \ln x$  quand  $x > 0$ .

En posant  $X = \sqrt{x}$ ,  $l(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{\ln X^2}{X} = \frac{2 \ln X}{X}$ ; donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} l(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln X}{X} = 0$ .

## Exemple 2

Définir la fonction dérivée de la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = 2x + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

et étudier ses variations.

### Réponse

$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$  n'a de sens que si  $\begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{x+1}{x} > 0 \end{cases}$ ;

$\frac{x+1}{x} > 0$  si et seulement si  $x \in ]-\infty; -1[ \cup ]0; +\infty[$ .

Donc l'ensemble de définition de  $f$  est  $D_f = ]-\infty; -1[ \cup ]0; +\infty[$ .

La fonction  $x \mapsto \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$  est dérivable sur  $D_f$  comme composée de fonctions dérivables.

Posons  $u(x) = \frac{x+1}{x}$ . Pour tout  $x$  de  $]-\infty; -1[ \cup ]0; +\infty[$ ,  $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$ .

Pour tout  $x$  de  $D_f$ ,  $f'(x) = 2 + \frac{u'(x)}{u(x)} = 2 + \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} = 2 - \frac{1}{x^2} \times \frac{x}{x+1} = 2 - \frac{1}{x(x+1)}$ .

Pour tout  $x$  de  $D_f$ ,  $f'(x) = \frac{2x^2 + 2x - 1}{x(x+1)}$ .

Pour tout  $x$  de  $D_f$ ,  $x(x+1) > 0$ .  $f'(x)$  est donc du signe de  $2x^2 + 2x - 1$ .

$2x^2 + 2x - 1$  a pour racines  $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$  et  $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ .

$\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \in ]0; +\infty[$  et  $\frac{-1-\sqrt{3}}{2} \in ]-\infty; -1[$

Pour tout  $x$  appartenant à  $]-\infty; \frac{-1-\sqrt{3}}{2}[ \cup \left] \frac{-1+\sqrt{3}}{2}; +\infty[$ ,  $f'(x) > 0$ ;

Donc  $f$  est croissante sur les intervalles  $]-\infty; \frac{-1-\sqrt{3}}{2}[$  et  $\left] \frac{-1+\sqrt{3}}{2}; +\infty[$

Pour tout  $x$  appartenant à  $\left] \frac{-1-\sqrt{3}}{2}; -1[ \cup \left] 0; \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \right[$ ,  $f'(x) < 0$

Donc  $f$  est décroissante sur les intervalles  $\left] \frac{-1-\sqrt{3}}{2}; -1[$  et  $\left] 0; \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \right[$ .



**Exercice résolu**

Déterminer les primitives  $F$  de la fonction  $f$  définie sur  $]1; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

**Solution :**

$f$  est continue sur  $]1; +\infty[$ , donc admet des primitives sur  $]1; +\infty[$ .

Posons  $u(x) = x^2 - 1$ ,  $u'(x) = 2x$ , donc  $f(x) = \frac{1}{2} \frac{u'(x)}{u(x)}$ .

D'où les primitives de la fonction  $f$  sont les fonctions  $F$  définies sur  $]1; +\infty[$  par

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln |u(x)| + K = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 1| + k = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 1) + K \text{ où } K \text{ est une}$$

constante réelle qui ne dépend pas de  $x$  et dans  $]1; +\infty[$ ,  $x^2 - 1 > 0$ .

**S'exercer**

**1.h** Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$  définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  dans chacun des cas suivants.

calculer les limites aux bornes de son ensemble de définition, et définir sa fonction dérivée.

2 a)  $f(x) = 2x \ln(3 - x)$  ; b)  $f(x) = \ln(2x^2 - 3x)$  ; c)  $f(x) = x + 1 + \ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right)$ .

**1.i** Etudier les variations de la fonction  $f$  définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  dans chacun des cas suivants et dresser son tableau des variations

a)  $f(x) = \ln(-x + 3)$  ; b)  $f(x) = \ln \frac{3-x}{3+x}$  ; c)  $f(x) = 2 + \ln \frac{x-1}{x+1}$ .

**1.j** Définir la fonction dérivée de la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{x + \ln x}{x^2}$ .

**1.k** Déterminer les primitives de chacune des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  suivantes sur l'intervalle proposé :

a)  $f(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}$  sur  $]0; +\infty[$  ; b)  $f(x) = x - 1 + \frac{\ln x}{x}$  sur  $]1; +\infty[$  ; c)  $f(x) = \frac{4}{x} (\ln)^r$

où  $r \in \mathbb{Q} - \{-1\}$  ; d)  $f(x) = \frac{a}{bx+c}$  où  $a \neq 0$  et  $b \neq 0$ .

### 1.1.4 Étude et représentation graphique de quelques fonctions comportant le logarithme népérien.

**Exemple 1 :**  $f : x \mapsto x - 1 - \ln(2x - 1)$ .

**a) Ensemble de définition.**

$f(x)$  existe si et seulement si  $2x - 1 > 0$  ; soit  $x > \frac{1}{2}$ .

L'ensemble de définition de  $f$  est donc  $D_f = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$ .



Limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$ 

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} (x-1) = -\frac{1}{2} ; \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} (2x-1) = 0^+ \text{ donc } \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} \ln(2x-1) = -\infty; \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = +\infty.$$

$$\text{Pour } x \rightarrow +\infty; f(x) = -1 + x \left[ 1 - \frac{\ln(2x-1)}{x} \right] = -1 + x \left[ 1 - \frac{2x-1}{x} \times \frac{\ln(2x-1)}{2x-1} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x-1}{x} \right) = 2; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x-1)}{2x-1} = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-1) = +\infty.$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

## Étude des branches infinies

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

La droite d'équation  $x = \frac{1}{2}$  est asymptote verticale à la courbe représentative de  $f$ .

$$\text{Pour tout } x \text{ de } \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[, \frac{f(x)}{x} = \frac{x-1}{x} + \frac{\ln(2x-1)}{x} = \frac{x-1}{x} + \frac{\ln(2x-1)}{(2x-1)} \times \frac{2x-1}{x}.$$

$$\frac{x-1}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x} = 2, \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln(2x-1)}{2x-1} \right) = 0, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-1 - \ln(2x-1)) = -\infty.$$

La courbe représentative (C) de  $f$  admet une branche parabolique de direction la droite d'équation  $y = x$ .

## Dérivée et sens de variation

La fonction  $f$  est dérivable sur  $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$  comme somme de fonctions dérivables.

$$\text{Pour tout } x \text{ de } \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[ f'(x) = 1 - \frac{2}{2x-1} = \frac{2x-1-2}{2x-1} = \frac{2x-3}{2x-1}. \text{ Comme } 2x-1 > 0, \text{ le signe}$$

$$\text{de } f'(x) \text{ est celui de } 2x-3. \text{ Pour tout } x \text{ de } \left] \frac{3}{2}; +\infty \right[ f'(x) > 0, f \text{ est croissante sur } \left] \frac{3}{2}; +\infty \right[;$$

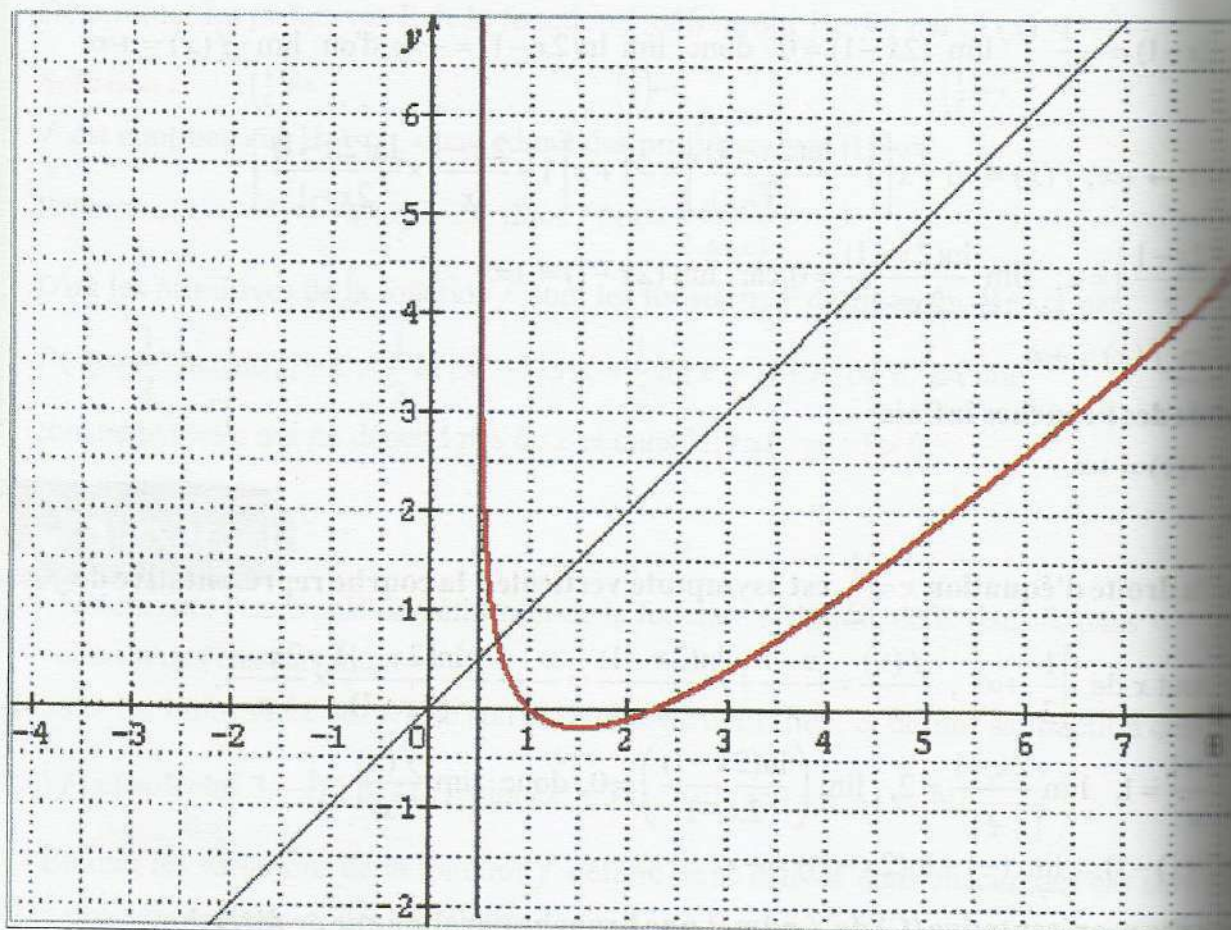
$$\text{Pour tout } x \text{ de } \left] \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right[ f'(x) < 0, f \text{ est décroissante sur } \left] \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right[.$$

## Tableau des variations

$$\frac{3}{2} = \frac{3}{2} - 1 + \ln(3-1) = \frac{1}{2} - \ln 2 \approx -0,19.$$

| $x$    | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$               | $+\infty$ |
|--------|---------------|-----------------------------|-----------|
| $f(x)$ |               | 0                           |           |
|        | -             |                             | +         |
| $f(x)$ | $+\infty$     | $f\left(\frac{3}{2}\right)$ | $+\infty$ |



c) Courbe représentative de  $f$ 

## Exercice résolu 1

Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \ln|2-5x|$ .

Etudier la fonction  $f$  et tracer sa courbe dans un repère orthonormé du plan.

**Solution**

Ensemble de définition  $D_f$  de  $f$ .

Pour réel  $x$ ,  $|2-5x| \geq 0$  donc  $\ln|2-5x|$  existe si et seulement si  $2-5x \neq 0$ ; c'est-à-dire

$$\text{D'où } D_f = \left]-\infty; \frac{2}{5}\right[ \cup \left]\frac{2}{5}; +\infty\right[ = \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{5}\right\}.$$

**Dérivée de  $f$ .**

$f$  est dérivable sur  $D_f$  comme la composée de deux fonctions dérivables sur leurs ensembles

$$\text{de définition; d'où pour tout } x \in \left]-\infty; \frac{2}{5}\right[ \cup \left]\frac{2}{5}; +\infty\right[, f'(x) = \frac{-5}{2-5x} = \frac{5}{5x-2}.$$

**Limites aux bornes de  $D_f$ .**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln|2-5x| = +\infty; \lim_{x \rightarrow \frac{2}{5}} f(x) = \lim_{X \rightarrow 0} \ln X = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln|2-5x| = +\infty$$



### Tableau des variations de $f$

$f'(x) = \frac{5}{5x-2} \cdot f'(x)$  a le signe de  $5x-2$ ; donc

pour  $x$  appartenant à  $]-\infty; \frac{2}{5}[$ ,  $f'(x) < 0$ ,

donc  $f$  est décroissante sur  $]-\infty; \frac{2}{5}[$ ;

pour  $x$  appartenant à  $]\frac{2}{5}; +\infty[$ ,  $f'(x) > 0$ ,

donc  $f$  est croissante sur  $]\frac{2}{5}; +\infty[$ .

### Courbe représentative de $f$ .

Dans un repère orthonormé,

la droite d'équation  $x = \frac{2}{5}$  est asymptote pour la courbe

représentative de  $f$ .

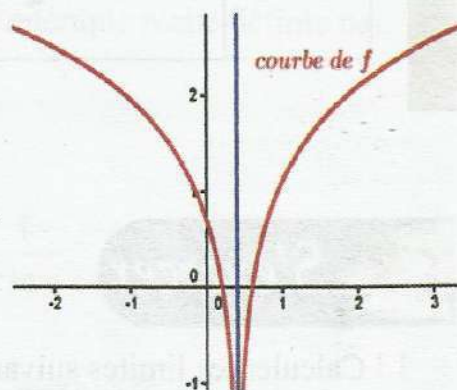
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(2-5x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{\ln(2-5x)}{2-5x} \times \frac{2-5x}{x} \right) = 0.$$

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{5 \ln X}{X} = 0; \text{ donc l'axe des abscisses est la direction}$$

de la branche parabolique de la courbe représentative de  $f$

$$\text{à } -\infty, \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

| $x$     | $-\infty$      | $\frac{2}{5}$ | $+\infty$      |
|---------|----------------|---------------|----------------|
| $f'(x)$ | -              |               | +              |
| $f(x)$  | $+\infty$<br>↘ | $-\infty$     | $+\infty$<br>↗ |



### exercice résolu 2

Étudier et représenter graphiquement la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^2}{4}(2 \ln x - 3)$ .

L'ensemble de définition de  $f$  est  $Df = ]0; +\infty[$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{4}(2 \ln x - 3) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{2} x(x \ln x) - \frac{3}{4} x^2 \right] = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^2}{4}(2 \ln x - 3) \right] = +\infty.$$

La fonction  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  comme produit de deux fonctions dérivables.

Pour tout  $x$  appartenant à  $]0; +\infty[$ ,

$$f'(x) = \frac{1}{2} x(2 \ln x - 3) + \frac{2}{x} \times \frac{x^2}{4} = x \ln x - \frac{3}{2} x + \frac{x}{2} = x \ln x - x = x(\ln x - 1).$$

Pour tout  $x$  appartenant à  $]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = 0$  si et seulement si  $\ln x - 1 = 0$ .

$\ln x = 1$  équivaut à  $x = e$ .

$f'(x) > 0$  est équivalent à  $\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow \ln x > \ln e \Leftrightarrow x > e$ .

Pour tout  $x$  appartenant à  $]0; e[$ ,  $f'(x) < 0$  et pour tout  $x$  appartenant

à  $]e; +\infty[$ ,  $f'(x) > 0$ .  $f$  est donc décroissante sur  $]0; e[$  et croissante sur  $]e; +\infty[$ .



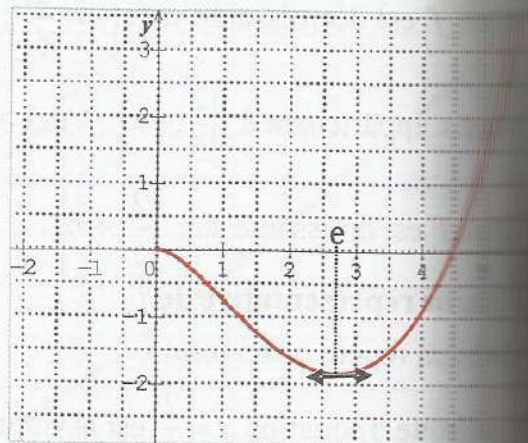
$$f(e) = \frac{e^2}{4}(2 \ln e - 3) = \frac{-e^2}{4}.$$

**Branches infinies :**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2}(2 \ln x - 3) = +\infty.$

La courbe de  $f$  admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

**Tableau des variations**

| $x$     | 0 | $e$              | $+\infty$ |   |
|---------|---|------------------|-----------|---|
| $f'(x)$ |   | -                | 0         | + |
| $f(x)$  | 0 | $-\frac{e^2}{4}$ | $+\infty$ |   |



## S'exercer

**1.1** Calculer les limites suivantes :

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x^2)$  ; b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$  ; c)  $\lim_{x \rightarrow -3} \ln(3-2x-x^2)$  ; d)  $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{2x+3}{x+1}\right)$  ;

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(\cos x)$  ; f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x+1}.$

**1.m** a) Soit  $f : x \mapsto \frac{5 \ln x}{x^2 + x + 1}$ . Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et étudier les branches infinies.

b) Soit  $g : x \mapsto x^2 - \ln(x)$ . Étudier la limite de  $g$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , puis la branche infinie.

**1.n**  $f$  est une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{3 \ln x + 1}{x}$ .

Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ , puis calculer les limites à ses bornes.

Préciser les asymptotes à la courbe représentative de  $f$ .



# LEÇON 2 LOGARITHME DE BASE QUELCONQUE

- Établir le lien entre « le logarithme népérien » et « le logarithme de base  $a$  » ( $a > 0$  et  $a \neq 1$ )
- Résoudre des équations et inéquations contenant «  $\log_a$  » et manipuler les expressions comportant  $\log_a$ .
- Déterminer les dérivées et les primitives des fonctions comportant «  $\log_a$  ».
- Calculer les limites des fonctions comportant «  $\log_a$  ».

## 21 PRÉSENTATION

### Prendre un bon départ

#### Activité 1

Soit  $a$  un réel strictement positif et différent de 1,  $f_a$  la fonction numérique réelle définie par

$$f_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Déterminer l'ensemble de définition de  $f_a$ .

Montrer que  $f_a$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et vérifier que  $f'_a(x) = \frac{1}{x \ln a}$ .

Déterminer suivant les valeurs de  $a$ , le signe de  $f'_a(x)$ .

En déduire que : 
$$\begin{cases} \text{si } 0 < a < 1, f_a \text{ est strictement décroissante sur } ]0; +\infty[. \\ \text{si } a > 1, f_a \text{ est strictement croissante sur } ]0; +\infty[. \end{cases}$$

Vérifier que  $f_a(1) = 0$  ;  $f_a(a) = 1$  et que  $f_e(x) = \ln x$ .

#### Activité 2

Soient  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs et tous différents de 1.

Démontrer que quels que soient les réels strictement positifs  $x$  et  $x'$ ,

$$\log_a(xx') = \log_a(x) + \log_a(x')$$

Montrer que pour tout réel  $x$  strictement positif,  $\log_a x = \frac{\ln b}{\ln a} \times \frac{\ln x}{\ln b}$ ;

En déduire que  $\forall x \in ]0; +\infty[ \quad \log_a x = \log_a b \times \log_b x$ .

### Retenir

Soit  $a$  un réel strictement positif et différent de 1.

On appelle fonction logarithme de base  $a$ , la fonction notée  $\log_a$

définie sur  $]0; +\infty[$  par  $\forall x \in ]0; +\infty[ \quad \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$ .



- La fonction  $\log_a$  est continue et strictement monotone sur  $]0; +\infty[$  ;  
 $\log_a$  est une bijection de  $]0; +\infty[$  sur  $\mathbb{R}$  ;
- La fonction  $\log_a$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et  $(\log_a)'(x) = \frac{1}{x \ln a} \quad \forall x \in ]0; +\infty[$  ;  
 si  $a > 1$  alors  $\log_a$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$  ;  
 si  $0 < a < 1$  alors  $\log_a$  est strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$  .
- Quels que soient les réels strictement positifs  $x$  et  $x'$ ,

|                                              |                                                            |
|----------------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| $\log_a(xx') = \log_a x + \log_a x'$         | $\log_a\left(\frac{x}{x'}\right) = \log_a x - \log_a x'$ ; |
| $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$ | $\forall r \in \mathbb{Q}, \log_a(x^r) = r \log_a x$ .     |

- Changement de base : soit  $a, b \in ]0; +\infty[ - \{1\}$ ,  
 $\forall x \in ]0; +\infty[$ ,  $\log_a x = \log_a b \times \log_b x$

### Remarque

- Le logarithme népérien est le logarithme de base  $e$  :  $\log_e(x) = \ln x$
  - Le logarithme de base 10 est appelé logarithme décimal et est noté  $\log$  :  $\log(x) = \log_{10}(x)$
- Le potentiel d'hydrogène d'une solution est donné par  $pH = -\log[H_3O^+]$  où  $[H_3O^+]$  est la concentration en ions  $H_3O^+$ .
- $\log_a 1 = 0$  et  $\log_a a = 1$ .

### Exemple 1

Calculons : a)  $\log_5 25$  ; b)  $\log_{\frac{3}{2}} \frac{27}{8}$  ; c)  $\log_{\frac{5}{2}} \frac{4}{25}$  ; d)  $\log 0,001$  ; e)  $\log_9 3$ .

#### Solution :

a)  $\log_5 25 = \log_5 5^2 = 2 \log_5 5 = 2$  ; car  $\log_a a = 1$ .

b)  $\log_{\frac{3}{2}} \frac{27}{8} = \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)^3 = 3 \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2}\right) = 3$  car  $\log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2}\right) = 1$  ;

c)  $\log_{\frac{5}{2}} \frac{4}{25} = \log_{\frac{5}{2}} \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 2 \log_{\frac{5}{2}} \left(\frac{2}{5}\right) = 2 \log_{\frac{5}{2}} \left(\frac{1}{\frac{5}{2}}\right) = -2 \log_{\frac{5}{2}} \left(\frac{5}{2}\right) = -2$  ; car  $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$

d)  $\log 0,001 = \log \frac{1}{10^3} = -\log 10^3 = -3 \log 10 = -3$  ; car  $\log(x) = \log_{10}(x)$ .

e)  $\log_9 3 = \log_9 \sqrt{9} = \log_9 \left(9^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \log_9 9 = \frac{1}{2}$  car  $\log_9(9) = 1$ .



## Exemple 2

Déterminer la valeur de  $x$  dans chacun des cas suivants :

a)  $\log_2 x = 3$  ; b)  $\log_{\frac{3}{4}}(x) = -1$  ; c)  $\log_x \frac{9}{4} = 2$  ; d)  $\log_x \frac{16}{25} = -2$  ; e)  $\log x = 1$ .

**Réponse :**

a)  $\log_2 x = 3$  équivaut à  $\log_2 x = 3 \log_2 2$

soit  $\log_2 x = \log_2 2^3$  ;  $x = 2^3 = 8$  donc  $x = 8$  ;

b)  $\log_{\frac{3}{4}}(x) = -1$  équivaut à  $\log_{\frac{3}{4}}(x) = -1 \log_{\frac{3}{4}} \left( \frac{3}{4} \right) = \log_{\frac{3}{4}} \left( \frac{3}{4} \right)^{-1}$

soit  $\log_{\frac{3}{4}} x = \log_{\frac{3}{4}} \left( \frac{3}{4} \right)^{-1} \Leftrightarrow x = \left( \frac{3}{4} \right)^{-1} = \frac{4}{3}$ .

c)  $\log_x \frac{9}{4} = 2$  est équivalent à  $\log_x \frac{9}{4} = 2 \log_x x$  et  $x > 0$  ;  $\log_x \frac{9}{4} = \log_x x^2$  et  $x > 0$  ;  $\frac{9}{4} = x^2$

et  $x > 0$  ;  $x = \frac{3}{2}$ .

d)  $\log_x \frac{16}{25} = -2$  est équivalent à  $\log_x \left( \frac{16}{25} \right) = -2 \log_x x$  et  $x > 0$  ;

$\frac{16}{25} = \log_x x^{-2}$  et  $x > 0$  ;  $\frac{16}{25} = x^{-2}$  et  $x > 0$  ;  $x^2 = \frac{25}{16}$  et  $x > 0$  ;  $x = \frac{5}{4}$ .

e)  $\log x = 1$  équivaut à  $\log x = \log 10 \Leftrightarrow x = 10$ .

## Exercice résolu

Soit la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$   $f(x) = \log_{\frac{3}{2}} x$ .

1. Donner l'ensemble de définition de  $f$ .

2. Étudier les variations de  $f$ .

3. Étudier le signe de  $\log_{\frac{3}{2}}(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

4. Étudier les branches infinies à la courbe de  $f$ .

5. Dans un repère orthonormé du plan, représenter la courbe de  $f$  et celle de  $g : x \mapsto \log_{\frac{2}{3}}(x)$ .

**Réponse :**

1. Ensemble de définition de  $D$  de  $f$ .

$D = ]0; +\infty[$ . En effet pour tout

$a > 0$  et  $a \neq 1$ ,  $\log_a$  est définie sur  $]0; +\infty[$

2. Variations de  $f : f = \log_a$ ,

$a = \frac{3}{2}$  et  $\frac{3}{2} > 1$  donc

$f$  est croissante sur  $]0; +\infty[$

c)  $f = \log_{\frac{3}{2}}$  est continue et strictement

croissante sur  $]0; +\infty[$  et  $f(1) = 0$

$$\begin{cases} 0 < x < 1, \log_{\frac{3}{2}}(x) < 0 \\ x > 1, \log_{\frac{3}{2}}(x) > 0 \end{cases}$$



d) Ensemble image  $J$  de  $f$ .

pour tout  $a > 1$   $\log_a$  est une bijection de  $]0; +\infty[$  sur  $\mathbb{R}$ ; donc l'ensemble image de  $]0; +\infty[$  par  $f$  est  $J = \mathbb{R}$ .

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f = -\infty$ , donc  $(y'oy): x = 0$  est

asymptote verticale à la courbe de  $f$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0, \text{ donc}$$

l'axe  $(x'ox)$  est la direction de la branche parabolique de la courbe de  $f$  à  $+\infty$

$$\log_{\frac{3}{2}} x = 0 \text{ équivaut à } x = 1$$

## 2. Représentons les courbes de $\log_{\frac{3}{2}}$ et $\log_{\frac{2}{3}}$

**Courbes.**

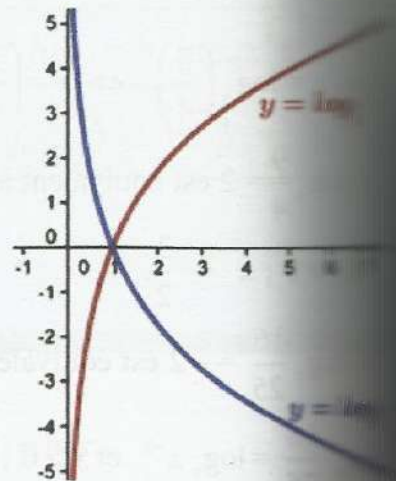
$$\log_a x = \log_a b \times \log_b x; \text{ donc}$$

$$\log_{\frac{2}{3}} x = \log_{\frac{2}{3}} \frac{3}{2} \times \log_{\frac{3}{2}} x = -\log_{\frac{2}{3}} \left( \frac{2}{3} \right) \log_{\frac{3}{2}} x = -\log_{\frac{3}{2}} x.$$

Comme  $\log_{\frac{2}{3}} x = -\log_{\frac{3}{2}} x$ , la courbe de  $\log_{\frac{2}{3}}$

est le symétrique de celle de  $\log_{\frac{3}{2}}$  par rapport

à l'axe des abscisses.



## S'exercer

**2.a** Donner l'expression simplifiée des réels suivants:

a)  $\log_2 8$ ; b)  $\log_{\frac{2}{3}} \frac{8}{27}$ ; c)  $\log_5 \frac{1}{125}$ ; d)  $\log_3 \sqrt[5]{3}$ ; e)  $\log_{\frac{2}{3}} \frac{9}{4}$ ;

f)  $\log_8 2$ ; g)  $\log 100$ ; h)  $\log 0,1$ ; i)  $\log 10^6$ ; j)  $\log_2 16\sqrt[3]{2}$ .

**2.b** Déterminer la valeur de  $x$  dans chacun des cas suivants :

a)  $\log_2 x = 0$ ; b)  $\log x = 1$ ; c)  $\log_5 x = 7$ ; d)  $\log_x e = 1$ ; e)  $\log x = -2$ .

**2.c** 1) Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \log x$  et la fonction

$$g: x \mapsto \log\left(\frac{1}{10}x\right).$$

Donner l'expression de  $g(x)$  en fonction de  $f(x)$ , pour tout  $x > 0$ .

2) Représenter dans un même repère orthonormé, la courbe de  $f$  et celle de  $g$ .



# S'ENTRAÎNER

## 1. FONCTION LOGARITHME NÉPERIEN

Écrire l'écriture simplifiée des suivants

$$a) \ln \frac{1}{3} = -\ln 3; \quad b) \ln e^{27} = 27;$$

$$c) \ln e^{-2} = -2.$$

Exprimer en fonction de  $\ln 2$  ou  $\ln 3$

les suivants :

$$a) \ln \frac{1}{3}; \quad b) \ln 256.$$

Exprimer en fonction de  $\ln 2$  ou  $\ln 5$

les suivants :

$$a) \ln 200; \quad b) \ln 1,25; \quad c) \ln 10^5$$

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

$$a) \ln x = 3;$$

$$b) \ln(2x+1) = \ln(-2x-3);$$

$$c) \ln(x+2) = 1 + \ln(x-3);$$

$$d) \ln(x+3) + \ln(x-2) = \ln(x+11);$$

$$e) \ln(x-4) + \ln(x-1) = \ln 6;$$

$$f) \ln(x-4) = \ln x - 2 \ln 2.$$

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations :

$$a) \ln x - 3 = 0;$$

$$b) \ln^2 x - \ln x - 2 = 0.$$

Résoudre les inéquations suivantes dans  $\mathbb{R}$

$$a) 2 \ln x - 1 < 5;$$

$$b) \ln(2x-1) - \ln(2x+1) \leq \ln(x+2).$$

6

Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  le système :

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ \ln x - \ln y = \ln 2 \end{cases}$$

7

Déterminer la fonction dérivée de la fonction  $f$  sur l'ensemble  $D$  dans chacun des cas suivants :

$$a) f(x) = \ln(-x); \quad D = ]-\infty; 0[.$$

$$b) f(x) = \ln \sqrt{x}; \quad D = ]0; +\infty[.$$

$$c) f(x) = \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right); \quad D = ]-\infty; -1[.$$

8

Déterminer une primitive de la fonction numérique  $f$  sur le plus grand intervalle  $I$  que l'on précisera dans chacun des cas suivants.

$$a) f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}; \quad b) f(x) = \frac{1}{x \ln x};$$

$$c) f(x) = 4 - \frac{2}{x-1}; \quad d) f(x) = \frac{x+2}{x+3};$$

$$e) f(x) = \frac{2x^2 + 5x - 1}{x+1};$$

$$f) f(x) = \frac{x^2 + x - 5}{x^3 + 3x^2 - 15x + 7};$$

$$g) f(x) = \frac{3}{(x+7) \ln(x+7)};$$

$$h) f(x) = \frac{(\ln x)^r}{x} \text{ où } r \in \mathbb{Q} - \{-1\}.$$

9

$f$  est la fonction définie sur  $] -3; 3[$  par

$$f(x) = \ln \left( \frac{3-x}{3+x} \right).$$

Étudier la parité de  $f$ .



**10**

On considère la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie sur  $] -\infty ; -1[ \cup ]1 ; +\infty[$  par

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 2 + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right).$$

1) Montrer que le point  $A(0;2)$  est un centre de symétrie de la courbe représentative de  $f$ .

2) Déterminer par son équation l'asymptote oblique de la courbe représentative de  $f$ .

**11**

Soit  $g$  la fonction définie sur

$$]0; +\infty[ \text{ par : } g(x) = 1 - x - \ln x.$$

1. Calculer la dérivée de la fonction  $g$  et étudier son signe. En déduire les variations de  $g$ .

2. Calculer  $g(1)$ . En déduire le signe de  $g(x)$  dans l'intervalle  $]0; +\infty[$  suivant les valeurs de  $x$ .

**12**

Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln^2 x}.$$

Etudier la fonction  $f$  (ensemble de définition, dérivée, limites, tableau des variations) et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

**13**

Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x \ln x - x$ .

Etudier la fonction  $f$  (ensemble de définition, dérivée, limites, tableau des variations) puis tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

**14**

Soit  $f$  la fonction numérique d'une variable réelle définie par  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

Etudier la fonction  $f$  (domaine, dérivée, limites, tableau des variations,) tracer sa courbe dans un repère orthonormé du plan.

**15**

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

1. Déterminer la limite en  $+\infty$  de la fonction

$$f_n : x \mapsto \frac{\ln x}{x^n}.$$

2. Déterminer la limite en 0 de la fonction

$$g_n : x \mapsto x^n \ln x.$$

3. Déterminer la limite en  $+\infty$  de la fonction

$$h_n : x \mapsto \frac{\ln x}{\frac{1}{x^n}}.$$

4. Déterminer la limite en 0 de la fonction

$$k_n : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x^n}.$$

**16**

On désigne par  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par :

$$f(x) = -x + (x+1) \ln x.$$

1. a) Étudier les variations de  $g$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $g(x) = x \ln x + 1$  ;

b) En déduire que

$$g(x) > 0 \text{ pour tout } x \in ]0, +\infty[.$$

2. a) Étudier les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition. Pour la limite en  $+\infty$ , vérifier que l'on peut écrire

$$f(x) \text{ sous la forme } f(x) = x(-1 + \ln x) + 1.$$

b) Montrer que  $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$  ;

en déduire les variations de  $f$ .

3. a) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $]0, +\infty[$ .

b) Déterminer un encadrement d'amplitude de  $\alpha$  en justifiant.

**17**

Soit la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = -x + 3 + \ln x.$$



1) Déterminer l'ensemble de définition de  $f$  et calculer les limites de  $f$  à ces bornes.

2) Étudier les variations de  $f$  puis dresser son tableau des variations.

3) Étudier les branches infinies de la courbe représentative de  $f$ .

4) Tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

5) Soit la fonction  $G$  définie par

$$G(x) = x - 1 + \ln x, \quad (x > 0)$$

6) Calculer la dérivée de  $G$  et en déduire une propriété de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

7) On considère la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x} + \ln x.$$

8) Calculer  $f(1)$ ;

9) Étudier les variations de  $f$  et déduire le signe de  $f(x)$  sur  $]0; +\infty[$  suivant les valeurs de  $x$ .

10) Soit la fonction  $g$  définie par

$$g(x) = x - 1 + \ln x.$$

11) Déterminer l'ensemble de définition de  $g$  et

12) Calculer les limites de  $g$  aux bornes de cet ensemble.

13) Étudier les variations de  $g$  et dresser son tableau des variations.

14) Tracer la courbe  $(C_g)$  dans un repère orthonormé du plan.

15) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $\ln |x| < 1$ .

16) On considère la fonction  $f$  définie par:

$$f(x) = 2x - x \ln |x| \text{ pour } x \neq 0$$

17) a) Calculer

b) Étudier la continuité et la dérivabilité de  $f$

b) Déterminer l'ensemble de définition de  $f$  et calculer les limites à ses bornes.

c) Étudier les variations de  $f$  et dresser son tableau des variations.

d) Construire la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé du plan.

20

On considère la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie

$$\text{par } f(x) = \frac{\ln x}{x - \ln x}.$$

1) Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $x \neq \ln x$ .

En déduire l'ensemble de définition de  $f$ .

2) Déterminer la limite de  $\frac{f(x)}{x-1}$  quand  $x$  tend vers 1.

3) Étudier les variations de  $f$  et dresser son tableau des variations.

4) a) Déterminer une équation de la tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse 1.

b) Préciser éventuellement les asymptotes à la courbe représentative de  $f$ .

5) Construire cette courbe dans un repère orthonormé du plan.

## FONCTION LOGARITHME DE BASE QUELCONQUE.

21

Donner l'écriture simplifiée des réels suivants:

a)  $\log_5 5$  ; b)  $\log_3 3^5$  ; c)  $\log_2 \frac{1}{2}$  ;

d)  $\log_2 32$  ; e)  $\log_2 \frac{1}{8}$  ; f)  $\log_{16} 4$  ;

g)  $\log_5 \frac{1}{25}$  ; h)  $\log 100$  ; i)  $\log_{\frac{3}{4}} \frac{16}{9}$ .



22

Déterminer la valeur de  $x$  dans chacun des cas suivants :

- a)  $\log_5 x = 2$  ;      b)  $\log_x 9 = 2$  ;  
 c)  $\log_x 2 = 2$  ;      d)  $\log_x 125 = 3$  ;  
 e)  $\log_x \frac{9}{16} = 2$  ;      f)  $\log x = -3$

23

Soit  $f$  la fonction numérique d'une variable réelle définie par  $f(x) = \log_5 x$ .

- Déterminer l'ensemble de définition de  $f$  et calculer les limites de  $f$  à ses bornes.
- Étudier les variations de  $f$  et dresser son tableau des variations.
- Dans un repère orthonormé, représenter la courbe de  $f$  et celle de  $g : x \mapsto \log_{\frac{1}{5}}(x)$ .

24

Dans chacun des cas suivants, le point A appartient à la courbe d'une fonction logarithme de base  $a$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 0$ ).

Déterminer pour chaque point A la base  $a$  de la fonction logarithme et dire si elle est croissante ou décroissante.

- a) A (4 ; 2) ; b) A (100 ; 2) ; c) A (8 ; 3) ;  
 d) A (5 ; 1) ; e) A  $\left(\frac{4}{9} ; 2\right)$  ;      f) A (e ; 1) ;  
 g) A (10 ; -1).

25

La courbe représentative d'une fonction

logarithme de base  $a$  passe par le point A  $\left(\frac{1}{3} ; -1\right)$ .

Quelle est l'ordonnée du point B appartenant à ce graphique si l'abscisse de B est 9 ?

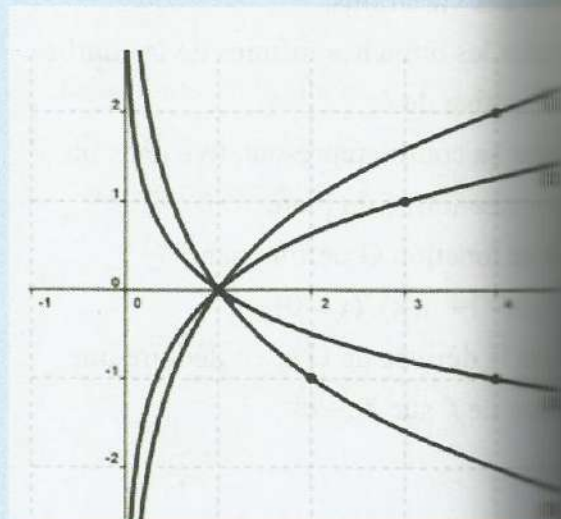
26

Déterminer dans chaque cas le signe de  $\log_a x$ .

- a)  $a > 1$  et  $x > 1$  ; b)  $a > 1$  et  $0 < x < 1$  ;  
 c)  $a < 1$  et  $x > 1$  ; d)  $a < 1$  et  $0 < x < 1$ .

27

Déterminer une équation de chacune des courbes des fonctions logarithmes de base du graphisme ci-dessous. (1), (2), (3) et (4).



28

- Montrer que  $\log_{\frac{1}{a}}(x) = -\log_a(x)$ .
- Comment peut-on déduire la courbe de la fonction  $\log_{\frac{1}{a}}$ , à partir de celle de  $\log a$  ?

29

Donner l'expression à l'aide d'un seul logarithme des expressions suivantes.

- $\log x + \log(x - 2)$  ;
- $2\log x - \log(x - 1) + \log(x + 3)$  ;
- $\log(x + 3) - 2\log x^2 - 5\log(x + 1)$  ;
- $\log(x^2 + 2x - 3) - \log(x + 3) - \log(x + 1)$ .

30

Soient  $a, b$  et  $M$  trois nombres réels strictement positifs et différents de 1.

Montrer que  $\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$

31

Déterminer l'ensemble des solutions des équations suivantes dans  $\mathbb{R}$ .

- a)  $\log_2 x = \log_2 3$  ; b)  $\ln(x + 1) = \log_2 3$ .



Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes.

$$\log x = \log 2 ;$$

$$\log x = \log 5 + \log 2 - \log 3 ;$$

$$\log x = 3 \log 2 - \log 5 ;$$

$$\log x = \frac{1}{2} \log 9 - \frac{2}{3} \log 8 ;$$

$$\log x = \frac{3}{2} \log 9 - \frac{2}{3} \log 8 + \frac{1}{4} \log 16 .$$

Considère l'équation:

$$\log(x-1) + \log(x-2) = \log 5 + \log 2. (1)$$

Déterminer l'ensemble des réels  $x$  pour

laquelle cette égalité est possible.

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation (1).

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

$$\log(2x+1) + \log(x-3) = 2 \log 3 ;$$

$$\log(x+1) = \log 3 + \log(x-2) ;$$

$$\log(x+1) = 2 \log(2x-3) ;$$

$$\log(x+1) = 4 ;$$

$$\log(x-3) + \log_2 x = 2$$

Déterminer les racines de chacune des

fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  suivantes:

$$f(x) = \log x - 2 ;$$

$$f(x) = \log(x+1) - \log(x-1) - \log 2 ;$$

$$f(x) = \log_2(x^2-9) - \log_2(x+3) ;$$

$$f(x) = \frac{\log(x^2-4)}{\log(x+2)} - 1$$

36

En chimie, le «pH» (potentiel d'hydrogène) est défini par :

$\text{pH} = -\log [\text{H}_3\text{O}^+]$  où  $[\text{H}_3\text{O}^+]$  est la concentration en ions  $\text{H}_3\text{O}^+$ , exprimée en mole. $\text{L}^{-1}$  d'une solution aqueuse.

La concentration en  $\text{H}_3\text{O}^+$  d'une solution aqueuse est  $2,4 \times 10^{-10}$  moles par litre.

Calculer le pH de cette solution. Arrondir à  $10^{-2}$ .

Le pH d'une solution est 3. Établir que la concentration en  $\text{H}_3\text{O}^+$  est  $10^{-3}$  mole par litre.

3. Démontrer que si la concentration d'une solution aqueuse est divisée par 100, son pH augmente de 2.

37

Résoudre dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  les systèmes :

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 65 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases} ; \text{ b) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 425 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases} ;$$

$$\text{b) } \begin{cases} \log x + \log y = \frac{3}{2} \\ \log x + \log y = \frac{1}{2} \end{cases} .$$



# Chapitre 9

## FONCTIONS EXPONENTIELLE

### LEÇON 1 FONCTION EXPONENTIELLE NÉPERIENNE

1.1 PRÉSENTATION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS DE  $\exp$

1.2 REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

1.3 ÉTUDE DES FONCTIONS COMPORTANT LA FONCTION EXPONENTIELLE "  $\exp$  ".

### LEÇON 2 FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE QUELCONQUE

2.1 PRÉSENTATION

2.2 QUELQUES PROPRIÉTÉS DE  $\exp_a$

### LEÇON 3 FONCTIONS PUISSANCES : $f_\alpha : x \rightarrow x^\alpha$ OÙ $x$ EST UN RÉEL STRICTEMENT POSITIF ET $\alpha$ EST UN NOMBRE RÉEL

3.1 PRÉSENTATION ET PROPRIÉTÉS DE  $f_\alpha$

3.2 CROISSANCES COMPARÉES DE  $x \mapsto x^\alpha$ ;  $\exp$  ET  $\ln$  EN  $+\infty$ . CALCULS DE CERTAINES LIMITES .

**S'ENTRAÎNER**



# LEÇON 1 FONCTION EXPONENTIELLE NÉPÉRIEN

- Représenter la fonction exponentielle ainsi que ses propriétés (en particulier l'image d'une somme et le produit des images).
- Utiliser les propriétés de la fonction exponentielle pour résoudre des équations et des inéquations comportant la fonction exponentielle
- Manipuler les fonctions dont les expressions comportent la fonction exponentielle : dérivabilité, sens des variations, connaître les limites et les limites classiques pour éviter des indéterminations
- Construire et représenter graphiquement des fonctions dont les expressions possèdent la fonction exponentielle.

## 21 PRÉSENTATION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS DE $\exp$

### Prendre un bon départ

- Montrer que la fonction logarithme népérien " $\ln$ " est une bijection de  $]0, +\infty[$  sur  $]-\infty, +\infty[$ .
- Dresser le tableau des variations de  $\ln^{-1}$  (bijection réciproque de  $\ln$ ).

### Retenir

- On appelle fonction exponentielle la fonction bijection réciproque de la fonction logarithme népérien et notée  **$\exp$**  ( **$\exp = \ln^{-1}$** ).
- Si  $u$  est une fonction numérique d'une variable réelle  $x$ , alors
  - $\exp(u(x))$  existe si et seulement si  $u(x)$  existe ;
  - $\exp(u(x))$  est toujours strictement positive.
- Pour tout réel  $x$  et pour tout réel strictement positif  $y$ , ( $y = \exp x$ ) équivaut à ( $\ln y = x$ ).
- La fonction  $\exp$  est une bijection croissante

### CONSEQUENCES

- Égalité  $\ln 1 = 0$ , il résulte que  $\exp 0 = 1$  ;
- Égalité  $\ln e = 1$ , il en résulte que  $\exp 1 = e$
- Pour tout réel  $u$ ,  $\ln(\exp u) = u$ .
- Pour tout réel  $v$  strictement positif,  $\exp(\ln v) = v$ .



- Quels que soient les réels  $a$  et  $b$ ,  $(\exp a = \exp b)$  équivaut à  $(a = b)$ .
- Quels que soient les réels  $a$  et  $b$ ,  $(\exp a < \exp b)$  équivaut à  $(a < b)$ .

Exemple :  $x > 0$  équivaut à  $\exp x > \exp 0$  qui est équivalent à  $\exp x > 1$ , puis  $x < 0$  équivaut à  $0 < \exp x < 1$ .

### Notations

Quel que soit le nombre rationnel  $r$ ,  $\ln e^r = r \ln e = r$ .

Or  $\ln e^r = r$  équivaut à  $\exp r = e^r$ .

Pour tout nombre rationnel,  $\exp r = e^r$ .

On convient que pour tout réel  $x$ ,  $\exp x = e^x$ .

### Exemple

1) Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$\text{a) } f(x) = e^{2x^2-3x+1} ; \text{ b) } g(x) = e^{\frac{x^2-2}{x}} ; \text{ c) } h(x) = e^{\sqrt{4-x^2}} ; \text{ d) } k(x) = e^{\ln(2x-1)} .$$

a) La fonction :  $x \mapsto 2x^2 - 3x + 1$  est définie sur  $\mathbb{R}$  car fonction polynôme. D'où l'ensemble de définition de  $f$  est  $\mathbb{R}$ .

b) La fonction  $k : x \mapsto \frac{x^2-2}{x}$  est définie sur  $\mathbb{R}^*$  ; d'où l'ensemble de définition de  $g$  est  $\mathbb{R}^*$ .

c) La fonction :  $x \mapsto \sqrt{4-x^2}$  est définie si  $4-x^2 \geq 0$  ; soit  $x \in [-2; 2]$ . D'où l'ensemble de définition de  $h$  est  $[-2; 2]$ .

d) La fonction :  $x \mapsto \ln(2x-1)$  est définie si  $2x-1 > 0$  ; soit  $x > \frac{1}{2}$ .

D'où l'ensemble de définition de  $k$  est  $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$ .

2) Résolvons dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes:

$$\text{a) } e^{2x} = e^{-3} ; \quad \text{b) } e^x = 2 ; \quad \text{c) } e^x = 0 .$$

### Solution :

a)  $(e^{2x} = e^{-3})$  équivaut  $(2x = -3)$  ; donc l'ensemble des solutions de l'équation  $e^{2x} = e^{-3}$  est

$$S = \left\{ -\frac{3}{2} \right\} .$$

b)  $(e^x = 2)$  équivaut à  $(e^x = e^{\ln 2})$  ; soit  $x = \ln 2$ . Donc l'ensemble des solutions de l'équation est  $S = \{\ln 2\}$ .

c) On ne peut pas trouver de réel  $x$  tel que  $e^x = 0$  car  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $e^x > 0$  ; l'ensemble solution de l'équation  $e^x = 0$  est  $S = \emptyset$ .



Exercice 1 Résolvons dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

a)  $e^x > 3$  ; b)  $e^x > -1$  ; c)  $e^{2x-\ln 5} < 5$ .

**Solution :**

Pour chacune des inéquations, nous noterons  $S$  l'ensemble des solutions.

a)  $(e^x > 3)$  équivaut successivement à  $(e^x > e^{\ln 3})$  ;  $x > \ln 3$  ; donc  $S = ]\ln 3; +\infty[$ .

b) Pour tout réel  $x$ , la proposition  $e^x > -1$  est toujours vraie car  $e^x > 0$ , donc  $S = \mathbb{R}$ .

c)  $e^{2x-\ln 5} < 5$  équivaut successivement à  $e^{2x-\ln 5} < e^{\ln 5}$  ;  $2x - \ln 5 < \ln 5$  ;

$2x < 2\ln 5$  ;  $x < \ln 5$  ; donc  $S = ]-\infty; \ln 5[$ .

Exercice 2 Étudions le signe de  $f(x) = e^{3x} - e^{2x}$  sur  $\mathbb{R}$ .

$e^{3x} - e^{2x} > 0$  équivaut successivement à  $e^{3x} > e^{2x}$  ;  $3x > 2x$  ;  $x > 0$ . Donc pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$

$f(x) > 0$  et pour tout  $x$  de  $] -\infty; 0[$ ,  $f(x) < 0$ .

### Exercice résolu

Exercice 3 Résoudre l'équation :  $e^{2x+5} = e^{\frac{3}{x}}$ .

**Solution**

L'expression  $2x+5$  est définie pour tout réel  $x$ , et l'expression  $\frac{3}{x}$  est définie pour  $x \neq 0$ .

Recherche les solutions de l'équation sur  $E = \mathbb{R}^*$ .

Sur  $E = \mathbb{R}^*$ ,  $e^{2x+5} = e^{\frac{3}{x}}$  est équivalent à  $2x+5 = \frac{3}{x}$  ; soit

$2x^2 + 5x - 3 = 0$  ; par suite  $x = -3$  ou  $x = \frac{1}{2}$ .

Les solutions  $-3$  et  $\frac{1}{2}$  appartiennent à  $E$ , donc l'ensemble

des solutions de l'équation  $e^{2x+5} = e^{\frac{3}{x}}$  est  $S = \left\{ -3 ; \frac{1}{2} \right\}$ .

### S'exercer

Exercice 4 Écrire plus simplement les nombres suivants :

a)  $e^{1+\ln 3} + e^{2\ln 3}$  ; b)  $e^{-2+3\ln 2}$  ; c)  $e^{1-2\ln 3} e^{1+2\ln 3}$ .

Exercice 5 Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 4$ .

Exercice 6 Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

a)  $e^{-3x^2} = 1$  ; b)  $e^{3x+\ln 2} = 2$  ; c)  $e^x = \ln \frac{1}{3}$ .



1.d Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes:

a)  $e^{2\cos x} > e^{\sqrt{3}}$ ;      b)  $e^{-x+3} > -e$ ;    c)  $e^{x^2-9} \leq 1$ .

1.e Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $e^{x^2-4} \leq e^{-3x}$ .

## 2.2 REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE



### Prendre un bon départ

1) Sachant que la fonction exponentielle est la bijection réciproque de la fonction  $\ln$ , donner la transformation qui permet de déduire la représentation graphique de la fonction  $\exp$  de celle de  $\ln$  dans un même repère orthonormé du plan ?

1) En utilisant le tableau des variations de la fonction  $\exp$  déduit de celui de  $\ln$ , déterminer justifiant les limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$ .

2) Construire dans un même repère orthonormé les courbes représentatives de  $\ln$  et de  $\exp$ .



### Retenir

• Représentation graphique.  
Le plan est muni d'un repère orthonormé.

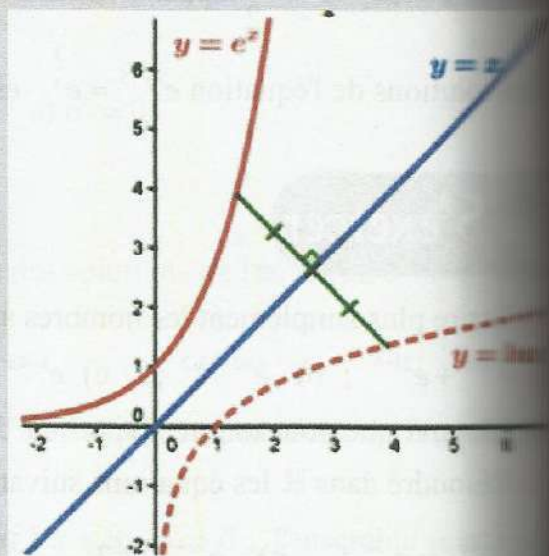
|            |           |           |
|------------|-----------|-----------|
| $x$        | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\exp'(x)$ |           | +         |
| $\exp(x)$  | 0         | $+\infty$ |

• L'axe des abscisses est asymptote à la courbe représentative de  $\exp$  à  $-\infty$ .

• L'axe des ordonnées est la direction de la branche parabolique pour la courbe représentative de  $\exp$  à  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

La courbe représentative de  $\exp$  est la symétrique de celle de  $\ln$  par rapport à la première bissectrice du repère, d'équation  $y = x$ .





## PROPRIÉTÉS

Quels que soient les réels  $a$  et  $b$ ,  $\exp(a+b) = (\exp a) \times (\exp b)$ . ( $e^{a+b} = e^a \times e^b$ )

Pour tout réel  $a$ ,  $\exp(-a) = \frac{1}{\exp a}$ . ( $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ )

Quels que soient les réels  $a$  et  $b$ ,  $\exp(a-b) = \frac{\exp a}{\exp b}$ . ( $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$ )

Pour tout réel  $a$  et pour tout nombre rationnel  $r$ ,

$(\exp a)^r = \exp(ra)$ . ( $(e^a)^r = (e^a)^r$ )

## Rappeler

$x = e^a$  équivaut à  $a = \ln x$  ;  $y = e^b$  équivaut à  $b = \ln y$ .

$\ln x + \ln y = \ln(xy)$ .

$\ln(xy)$  équivaut à  $xy = e^{a+b}$  ; soit  $(e^a) \times (e^b) = e^{a+b}$ .

$x = e^a$  équivaut à  $a = \ln x$  ;  $-a = -\ln x$  ;  $-a = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$  ;  $e^{-a} = \frac{1}{x}$  ;  $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ .

$e^{a+(-b)} = e^a \times e^{-b} = e^a \times \frac{1}{e^b} = \frac{e^a}{e^b}$ .

$x = e^a$  équivaut à  $\ln x = a$  ;  $r \ln x = ra$  ;  $\ln x^r = ra$  ;  $e^{ra} = x^r$ .

$e^{ra} = (e^a)^r$ .

## Exemple

Ecrire plus simplement les nombres suivants

$$e^{-\ln 3}$$

Solution

$$e^{-\ln 3} = 5 + \frac{1}{e^{\ln 3}} \text{ car } e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{16}{3}$$

$$b) e^{1+\ln 2}$$

$$b) e^{1+\ln 2} = e^1 e^{\ln 2}; \text{ car } e^{a+b} = e^a e^b$$

$$= 2e^1 = 2e; \text{ car } e^1 = e.$$

$$c) e^{-2\ln 3}$$

$$c) e^{-2\ln 3} = (e^{\ln 3})^{-2}; \text{ car } (e^a)^r = e^{ra}$$

$$= 3^{-2} = \frac{1}{9}.$$

Résolvons dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $2e^{2x} + 8e^x + 6 = 0$ .

Solution :

$2e^{2x} + 8e^x + 6 = 0$  équivaut à  $2(e^x)^2 + 8e^x + 6 = 0$ . En posant  $X = e^x$ , on obtient  $2X^2 + 8X + 6 = 0$   
Les solutions de cette nouvelle équation sont  $-1$  et  $-3$ .

Il n'y a donc pas de solution pour  $e^x = -1$  et  $e^x = -3$ , mais comme pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^x > 0$ , on en déduit



que les équations  $e^x = -1$  et  $e^x = -3$  n'ont pas de solution. D'où l'ensemble des solutions de l'équation  $2e^{2x} + 8e^x + 6 = 0$  est  $S = \emptyset$ .

3) Soit le polynôme  $p$  défini par  $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$ .

a) Montrer que 1 est une racine de  $p$ .

b) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$ .

c) Dédurre des questions a) et b) les solutions dans  $\mathbb{R}$  de l'équation  $2e^{3x} + 3e^{2x} - 3e^x - 2 = 0$ .

### Solution

$$p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2.$$

a)  $p(1) = 2 \times 1 + 3 - 3 - 2 = 0$ . 1 est donc une racine de  $p$ .

b)  $p(x)$  peut donc se mettre sous la forme  $p(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$ .

Après développement et identification, on a  $p(x) = (x-1)(2x^2 + 5x + 2)$ .

$$p(x) = 0 \text{ équivaut à } (x-1)(2x^2 + 5x + 2) = 0; \text{ soit } x = 1 \text{ ou } x = -2 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation  $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$  est  $\left\{-2; -\frac{1}{2}; 1\right\}$ .

c) Résolvons dans  $\mathbb{R}$  de l'équation  $2e^{3x} + 3e^{2x} - 3e^x - 2 = 0$ .

Posons  $X = e^x$ .

$2e^{3x} + 3e^{2x} - 3e^x - 2 = 0$  équivaut à  $2(e^x)^3 + 3(e^x)^2 - 3e^x - 2 = 0$  qui est équivalent à

$$2X^3 + 3X^2 - 3X - 2 = 0; \text{ soit } X = -2 \text{ ou } X = -\frac{1}{2} \text{ ou } X = 1.$$

$e^x = -2$  n'est pas possible car  $e^x > 0$ , pour tout réel  $x$ .

$e^x = -\frac{1}{2}$  n'est pas possible car  $e^x > 0$ , pour tout réel  $x$ .

$e^x = 1$  équivaut à  $x = 0$ . L'ensemble des solutions de l'équation  $2e^{3x} + 3e^{2x} - 3e^x - 2 = 0$  est  $\{0\}$ .



### S'exercer

1.f Écrire plus simplement les nombres suivants :

a)  $e^{-2\ln 5} + \frac{1}{3}e^{2\ln 3}$  ; b)  $\frac{2 - \ln(\sqrt[3]{e})}{1 + \ln(e^2)}$  ; c)  $e^{1+\ln 2} + e^{\ln 3 - 2}$ .

1.g Donner l'expression réduite de :  $A(x) = 2\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - 1$  et  $B(x) = 2\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 + 1$

1.h Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

a)  $e^{x^2} = \frac{1}{e^{-x-2}}$  ; b)  $e^{x+2} + e^{\frac{1}{x}} = e$  ; c)  $4^{-x} = 3$ .

1.i Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

a)  $e^{\sin(2x)} \geq e\sqrt{e}$  ; b)  $e^{3-2x} < e^{1-x}$  ; c)  $e^{x^2-1} \leq 1$ .



Résoudre les inéquations a)  $e^{6-x} \leq e^{x^2}$  et b)  $2e^{2x} - 3e^x + 1 > 0$ .

## 13 ÉTUDE DES FONCTIONS COMPORTANT LA FONCTION EXPONENTIELLE "exp".

### Prendre un bon départ

Rappel : si  $f$  réalise une bijection de  $K$  vers  $f(K)$  et si pour tout  $x \in K$  on a  $f'(x) \neq 0$ , alors

$f$  est dérivable sur  $f(K)$  et  $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(x)}$ .

Pour tout réel  $x$ , donner l'expression de  $\ln(e^x)$ .

En déduire que pour tout réel  $x$ ,  $(\exp)'(x) = \exp(x)$ .

Soit  $u$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ . Déterminer la dérivée de la fonction :  $x \mapsto e^{u(x)}$ .

### Retenir

La fonction  $x \mapsto e^x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et a pour fonction dérivée la fonction :  $x \mapsto e^x$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $u$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

La fonction :  $x \mapsto e^{u(x)}$  est dérivable sur  $I$  et sa dérivée est la fonction :  $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ .

La fonction  $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$  admet pour primitives les fonctions  $x \mapsto e^{u(x)} + k$  où  $k$  est un réel quelconque qui ne dépend pas de  $x$ .

### Remarque

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

### Exercice 1

$$\text{Posons } X = -x ; \lim_{x \rightarrow -\infty} X = +\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{X \rightarrow +\infty} (-Xe^{-X}) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left( -X \times \frac{1}{e^X} \right) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{\frac{e^X}{X}} \right) = 0 \text{ car } \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x - 0} = e^0 = 1 \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x - 0} \text{ est le nombre dérivé de } x \mapsto e^x \text{ en } 0.$$



**Exemple**

1) Déterminer l'ensemble des primitives de chacune des fonctions de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  sur un intervalle à préciser.

a)  $f(x) = xe^{x^2}$  ; b)  $g(x) = e^{\sin x} \cos x$  ; c)  $h(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$ .

**Solution :**

a) Posons  $u(x) = x^2$ .  $u'(x) = 2x$ , par suite  $f(x) = \frac{1}{2} u'(x) e^{u(x)}$ .

D'où les primitives de  $f$  sur  $] -\infty; +\infty[$  sont les fonctions  $F : x \mapsto \frac{1}{2} e^{u(x)} + K$ .

Donc  $F : x \mapsto \frac{1}{2} e^{x^2} + K$  où  $K$  est un réel qui ne dépend pas de  $x$ .

b) Posons  $v(x) = \sin x$ .  $v'(x) = \cos x$  ;  $g(x) = v'(x) e^{v(x)}$ .

Les primitives de  $g$  sur  $] -\infty; +\infty[$  sont les fonctions  $G : x \mapsto e^{v(x)} + K$  ; soit  $G : x \mapsto e^{\sin x} + K$  où  $K$  est un réel qui ne dépend pas de  $x$ .

c) Posons  $w(x) = \frac{1}{x}$  ; pour tout  $x$  de l'intervalle  $]0; +\infty[$ ,  $w'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$h(x) = -w'(x) e^{w(x)}$ .

Les primitives de  $h$  sur  $]0; +\infty[$  sont les fonctions  $G : x \mapsto -e^{w(x)} + K$  ; soit

$G : x \mapsto -e^{\frac{1}{x}} + K$  où  $K$  est un réel qui ne dépend pas de  $x$ .

2) Calculons  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 5e^x$

Pour tout réel  $x > 0$ ,  $2x - 5e^x = -e^x(2(-xe^{-x}) + 5)$ . or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{-x}) = 0$  ; donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-xe^{-x}) = 0$

d'où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 5e^x) = -\infty$ .

**Exercice résolu**

On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = (x+1)^2 e^{-x}$ .

Soit  $C$  la représentation graphique de la fonction  $g$  dans le repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Etudier les variations de  $g$  et dresser son tableau des variations.

2. Tracer la courbe  $C$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

**Solution**

1. Variations et tableau des variations de  $g$ .

La fonction  $x \mapsto e^{-x}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Car, elle est la composée des fonctions

$x \mapsto -x$  et  $x \mapsto e^x$  qui sont des fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ .  $x \mapsto (x+1)^2$  est dérivable car polynôme de degré 2.



Donc  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme produit de deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout réel  $x$ ,  $g'(x) = 2(x+1)e^{-x} - (x+1)^2 e^{-x} = (x+1)(2-(x+1))e^{-x}$ .

$$g'(x) = (x+1)(-x+1)e^{-x}.$$

Pour tout réel  $x$ ,  $e^{-x} > 0$ ; donc  $g'(x)$  a le signe de  $(x+1)(-x+1)$ ; qui est négatif pour  $x \in ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$  et positif pour  $x \in ]-1; 1[$ .

Donc  $g$  est décroissante sur les intervalles  $]-\infty; -1[$  et  $]1; +\infty[$ , puis croissante sur  $]-1; 1[$ .

**Limites aux bornes de  $Dg = \mathbb{R}$**

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)^2 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x}$ . Or  $\frac{x^2}{e^x} = \frac{1}{\frac{e^x}{x^2}} = \frac{1}{\left(\frac{e^{\frac{1}{2}x}}{\frac{1}{2}x}\right)^2 \times 4}$  comme  $X = \frac{1}{2}x \rightarrow +\infty$  quand  $x \rightarrow +\infty$

donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{e^x}\right) = 0$  d'où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ .

| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $1$           | $+\infty$ |
|---------|-----------|------|---------------|-----------|
| $g'(x)$ |           | 0    | 0             |           |
| $g(x)$  | $+\infty$ | $0$  | $\frac{4}{e}$ | $0$       |

**Branches infinies de (C)**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)^2 e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x} e^{-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$$

Donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = -\infty$ . Donc l'axe des ordonnées est une branche parabolique pour la courbe

de  $g$  à  $-\infty$ . D'autre par  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ , donc la droite d'équation  $y = 0$  est asymptote à la courbe de  $g$  à  $+\infty$ .

**Extréma de (C)**

Le point de coordonnées  $(-1; 0)$  est un minimum absolu

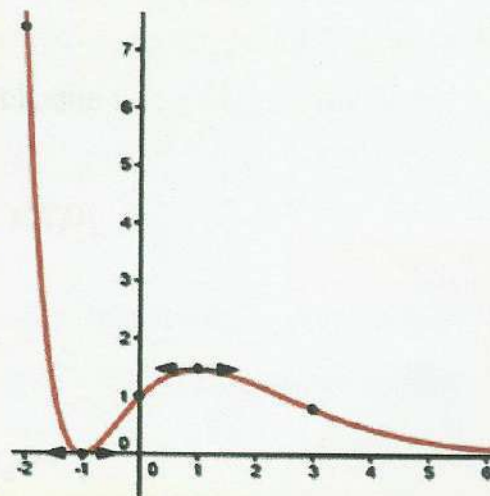
Le point d'abscisse 1 est un maximum relatif

**Quelques points de la courbe (C).**

$$g(-2) = e^2; \quad g(0) = 1; \quad g(3) = \frac{16}{e^3} :$$

(C) passe par les points

$$\text{de coordonnées } (-2; e^2), (0; 1) \text{ et } \left(3; \frac{16}{e^3}\right).$$







## S'exercer

**1.k** Calculer les limites suivantes :

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} x e^{\frac{1}{x}}$  ; b)  $\lim_{x \rightarrow 0} x e^{\frac{1}{x}}$  ; c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)e^x$  ; d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)e^x$  ;

**1.l** Soit  $f : x \mapsto \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$ . Donner l'ensemble de définition de la fonction  $f$ , puis calculer

limites à ses bornes.

Étudier les branches infinies de la courbe représentative de  $f$ .

**1.m** On considère la fonction  $f$  définie pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (1-x^2)e^x$ .

a) Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$  puis en  $-\infty$ .

b) Étudier les variations de  $f$ . Dresser son tableau des variations.

c) Étudier les branches infinies à la courbe représentative de  $f$ .

d) Tracer la courbe de  $f$  dans un repère orthonormal.

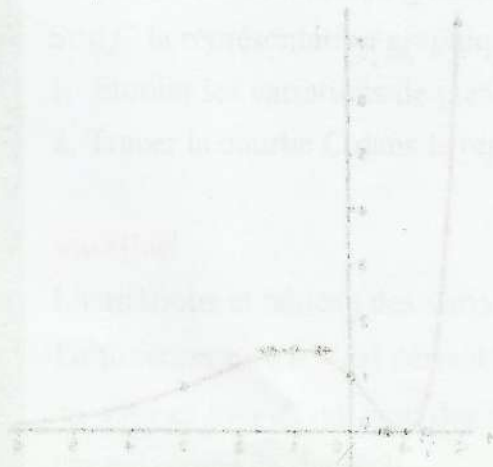
**1.n** Définie la fonction dérivée de  $f$  dans chacun des cas :

a)  $f(x) = e^{\tan x}$  ; b)  $f(x) = e^{\sqrt{x}}$  ; c)  $f(x) = e^{\frac{x+1}{x}}$  ; d)  $f(x) = e^{x^2 \ln x}$

**1.o** Déterminer une primitive  $F$  de  $f$  dans chacun des cas :

a)  $f(x) = 3e^{ux+4}$  ; b)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{x^3+1}$  ; c)  $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$  ; d)  $f(x) = \cos x$

e)  $f(x) = a e^{cx+d}$  où  $a \neq 0$  et  $c \neq 0$  ;  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$





## LEÇON 2 FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE QUELCONQUE

- Utiliser le lien entre « exponentielle de base  $e$  » ( $\text{Exp}$ ) et « exponentielle de base  $a$  » ( $\text{Exp}_a$ ) pour résoudre des équations et inéquations contenant «  $\text{exp}_a$  », manipuler les expressions contenant  $\text{Exp}_a$ .
- Déterminer des dérivées et des primitives des fonctions comportant «  $\text{exp}_a$  ».

### 21 PRÉSENTATION

#### Prendre un bon départ

Soit  $a$  un réel strictement positif et différent de 1.

- Montrer que  $\log_a$  admet une bijection réciproque  $(\log_a)^{-1}$ .
- Dresser le tableau des variations de  $\log_a^{-1}$  dans le cas  $a > 1$  et le cas  $0 < a < 1$ .

#### Retenir

Soit  $a$  un réel strictement positif et différent de 1. On appelle fonction exponentielle de base  $a$  la bijection réciproque de la fonction logarithme de base  $a$ . On la note  $\text{exp}_a$ . Elle est définie de  $\mathbb{R}$  vers  $]0; +\infty[$ . Pour tout réel  $x$ ,  $(y = \text{exp}_a x)$  équivaut à  $(x = \log_a y)$ .

#### Exemple

Soit  $a$  un réel strictement positif et différent de 1.

- $\log_a 0$  équivaut à  $\text{exp}_a 0 = 1$ .
- $\log_a 1$  équivaut à  $\text{exp}_a 1 = a$ .
- $\log_a 2$  équivaut à  $\text{exp}_a 2 = x$ .
- $\log_a (-1)$  équivaut à  $\text{exp}_a (-1) = x$ .

#### S'exercer

Déterminer si possible dans chaque cas le ou les réels  $x$  tels que :

- $x^2 = -2$  ;
- $\text{exp}_a 2 = x^2$  ;
- $\text{exp}_a (-x^2) = -3$ .

### 22 QUELQUES PROPRIÉTÉS DE $\text{exp}_a$

#### Prendre un bon départ

Soit  $a$  un réel strictement positif et différent de 1.

À partir de la relation  $x = \log_a(y) = \frac{\ln y}{\ln a}$ , montrer que  $y = e^{x \ln a}$ .



b) En déduire que pour tout réel,  $\exp_a x = e^{x \ln a}$ .

c) On pose  $\alpha = \log_a(x)$  ; Exprimer  $-\alpha$  comme  $\log_a y$  où  $y$  est à déterminer en fonction de  $x$ .

En déduire que  $\exp_a(-x) = \frac{1}{\exp_a x}$ .



## Retenir

Soit  $a$  un réel strictement positif et différent de 1.

- Pour tout réel  $x$ ,  $\exp_a x = e^{x \ln a}$ .
- Pour tout réel  $x$ ,  $\log_a(\exp_a x) = x$ .
- Pour tout réel  $x$  strictement positif,  $\exp_a(\log_a x) = x$ .
- $\exp_a 0 = 1$  et  $\exp_a 1 = a$ .
- Pour tout réel  $x$ ,  $\exp_a(-x) = \frac{1}{\exp_a x}$ .
- Pour tous réels  $x$  et  $y$ ,  $\exp_a(x+y) = (\exp_a x) \times (\exp_a y)$ .
- Pour tous réels  $x$  et  $y$ ,  $\exp_a(x-y) = \frac{\exp_a x}{\exp_a y}$ .

## S'en convaincre

Montrons que  $\exp_a(x+y) = (\exp_a x) \times (\exp_a y)$ .

Posons  $\alpha = \exp_a x$  et  $\beta = \exp_a y$ .

$\alpha = \exp_a x$  est équivalent à  $x = \log_a \alpha$ .

$\beta = \exp_a y$  est équivalent à  $y = \log_a \beta$ .

$x+y = \log_a \alpha + \log_a \beta = \log_a(\alpha\beta)$ .

$x+y = \log_a(\alpha\beta)$  équivaut à  $\alpha\beta = \exp_a(x+y)$  ;

Soit  $(\exp_a x)(\exp_a y) = \exp_a(x+y)$ .

D'autre part  $\exp_a(x-y) = \exp_a(x+(-y)) = (\exp_a x)(\exp_a(-y))$

$$= (\exp_a x) \times \frac{1}{(\exp_a y)} = \frac{(\exp_a x)}{(\exp_a y)}.$$

## Notations

Pour tout réel  $a$  strictement positif et différent de 1,

Pour tout  $r$  de  $\mathbb{Q}$ ,  $\log_a a^r = r \log_a a = r$  car  $\log_a a = 1$ , or  $\log_a(a^r) = r \Leftrightarrow a^r = \exp_a(r)$

Ainsi pour tout réel  $a$  strictement positif et différent de 1,



Pour tout  $r$  de  $\mathbb{Q}$ ,  $\exp_a r = a^r$ .

Par convention pour tout réel  $x$ , pour tout réel  $a$  strictement positif et différent de 1,

$\exp x = a^x$ . Ainsi pour tout réel  $x$ , pour tout réel  $a$  strictement positif et différent de 1,

$$\exp x = a^x = e^{x \ln a}.$$

### Remarque

Écriture ci-dessus nous permet d'écrire :

Pour tout réel  $a$  strictement positif et différent de 1,

$$a^0 = 1 ; a^1 = a.$$

Pour tous réels  $x$  et  $y$ ,

$$a^{x+y} = a^x \times a^y ;$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} ;$$

$$a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x} ;$$

$$(a^x)^y = a^{xy}.$$

Pour tout réel  $x$ ,  $a^x = e^{x \ln a}$ .

Par convention on admet que pour tout réel  $x$ ,  $1^x = 1$ .

### Exemple

$$\text{a) } \exp_2(3) = 2^3 = 8 ; \quad \text{b) } \exp_3(-2) = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} ;$$

$$\text{c) } \exp_{\frac{1}{2}}(3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} ; \quad \text{d) } \exp_{\frac{1}{2}}(-3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{2^{-3}} = 2^3 = 8.$$

Réolvons dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $3^x = 5 \times 2^x$ .

$3^x = 5 \cdot 2^x$  est équivalent successivement à

$$\ln 3^x = \ln(5 \cdot 2^x) ; x \ln 3 = \ln 5 + \ln 2^x \Leftrightarrow x \ln 3 = \ln 5 + x \ln 2 ;$$

$$x(\ln 3 - \ln 2) = \ln 5 ; x \ln \frac{3}{2} = \ln 5 ; x = \frac{\ln 5}{\ln \frac{3}{2}}. \quad S = \left\{ \frac{\ln(5)}{\ln(3) - \ln(2)} \right\}.$$

### Exercice résolu 1

#### ÉTUDE DE LA FONCTION $f : x \mapsto a^x$

Soit  $a$  un réel strictement positif et différent de 1. Désignons par  $(C_a)$  la courbe de  $f$  dans un

repère orthonormé du plan.  $f(x) = e^{x \ln a}$ .

$f$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme composée de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ .



Pour tout réel  $x$   $f'(x) = (\ln a) e^{x \ln a} = a^x \ln a$ .

Pour tout réel  $x$ ,  $a^x > 0$ ; donc  $f'(x)$  a le même signe que  $\ln a$ .

**Premier cas**  $0 < a < 1$ .

$\ln a < 0$ , Pour tout réel  $x$   $f'(x)$  est strictement négatif. La fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

Calculons les limites de  $f$  à  $-\infty$  et à  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln a = +\infty \text{ car } \ln a < 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln a} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln a = -\infty \text{ car } \ln a < 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln a} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x \ln a}}{x} = -\infty; \text{ car } \frac{e^{x \ln a}}{x} = \ln(a) \times \frac{e^{x \ln a}}{x \ln a}$$

La courbe de  $f$  admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées  
D'autre part  $a^0 = 1$ .

Dressons le tableau des variations de  $f$ .

**Deuxième cas** :  $a > 1$

$\ln a > 0$ . Pour tout réel  $x$ ,  $f'(x)$  est strictement positif. La fonction  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

Calculons les limites de  $f$  à  $-\infty$  et à  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln a = -\infty \text{ car } \ln a > 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln a} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln a = +\infty \text{ car } \ln a > 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln a} = +\infty$$

D'autre part  $a^0 = 1$ .

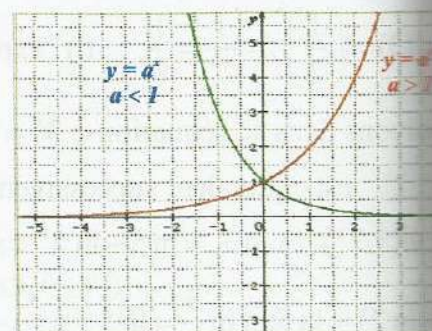
Dressons le tableau des variations de  $f$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \ln a}}{x} = +\infty; \text{ la courbe de } f$$

admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées

| $x$     | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----|-----------|
| $f'(x)$ |           | -   | -         |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $1$ | $0$       |

| $x$     | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----|-----------|
| $f'(x)$ |           | +   | +         |
| $f(x)$  | $0$       | $1$ | $+\infty$ |



### Exercice résolu 2

Étudier la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x2^x$ .

#### Solution

Pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = xe^{x \ln 2}$ .

La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ ,

$$f'(x) = e^{x \ln 2} + x \ln 2 e^{x \ln 2} = (1 + x \ln 2)2^x.$$

Or  $2^x > 0$  sur  $\mathbb{R}$ , et  $1 + x \ln 2 > 0$  lorsque  $x > -\frac{1}{\ln 2}$ .



Donc  $f'(x) > 0$  pour  $x > -\frac{1}{\ln 2}$  et  $f'(x) < 0$  pour  $x < -\frac{1}{\ln 2}$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln 2} = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  ;

En  $-\infty$ , on est en présence d'une forme indéterminée. En posant  $X = x \ln 2$ ,

on obtient  $xe^{x \ln 2} = \frac{X}{\ln 2} e^X = \frac{Xe^X}{\ln 2}$  or  $\lim_{x \rightarrow -\infty} X = -\infty$  et  $\lim_{X \rightarrow -\infty} Xe^X = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ .

Tableau de variation de  $f$ 

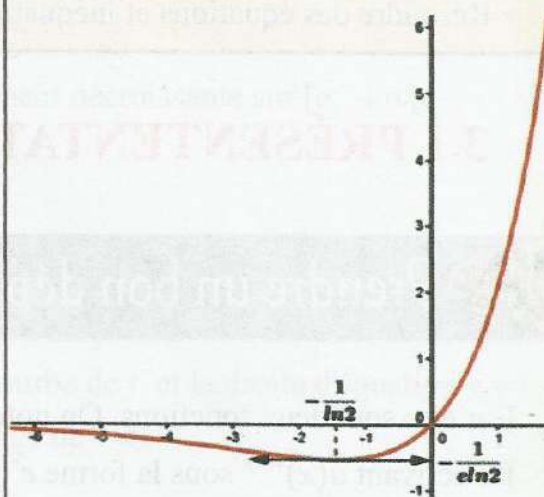
| $x$     | $-\infty$ | $-\frac{1}{\ln 2}$   | $+\infty$ |
|---------|-----------|----------------------|-----------|
| $f'(x)$ |           | $\circ$              |           |
| $f(x)$  | 0         | $-\frac{1}{e \ln 2}$ | $+\infty$ |

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = +\infty$  donc l'axe des ordonnées

est une direction de branche parabolique pour la

courbe de  $f$  à  $+\infty$ .  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  donc l'axe des

abscisses est asymptote à la courbe de  $f$ .

Courbe de  $f$ 

## S'exercer

Donner les nombres réels suivants sous forme simplifiée.

a)  $\exp_2(2)$  ; b)  $\exp_2(5)$  ; c)  $\exp_5(-2)$  ; d)  $\exp_2(-5)$  ; e)  $\exp_{\frac{1}{2}}(-5)$ .

Déterminer le réel  $x$  dans chacun des cas suivants :

a)  $\exp_2(x) = 8$  ; b)  $\exp_3(x) = \frac{1}{9}$  ; c)  $\exp_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{16}$  ; d)  $\exp_9(x) = 3$  ;

Déterminer la base  $a$  dans chacun des cas suivants :

a)  $\exp_2(2) = 16$  ; b)  $\exp_a(-3) = \frac{1}{125}$  ; c)  $\exp_a(-2) = \frac{1}{9}$ .

Déterminer la base de chacune des fonctions exponentielles suivantes, puis indiquer si elle

est croissante ou décroissante. a)  $y = \left(\frac{5}{2}\right)^x$  ; b)  $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$  ; c)  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$  ; d)  $y = \left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{x}{2}}$ .

Résoudre dans l'ensemble des nombres réels l'équation  $2^{x+3} = 3^{x-7}$ .

On donne une suite géométrique de raison  $q = 0,4$  ; son terme initial est

24.4140625 et le terme  $u_n = 0.0000262\ 144$ . Calculer  $n$ .



## LEÇON 3

FONCTIONS PUISSANCES :  $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$  OÙ  $x$  EST UN RÉEL STRICTEMENT POSITIF ET  $\alpha$  EST UN NOMBRE RÉEL

Utiliser le lien entre la fonction puissance et la fonction «exp» pour :

- Déterminer la dérivée et des primitives des fonctions  $x \mapsto x^\alpha$  ;
- Calculer les limites des fonctions comportant la fonction puissance  $\alpha$  ;
- Résoudre des équations et inéquations comportant des fonctions puissances.

3.1 PRÉSENTATION ET PROPRIÉTÉS DE  $f_\alpha$ 

## Prendre un bon départ

1.  $u$  et  $v$  sont deux fonctions. On note  $u^v$  la fonction :  $x \mapsto u(x)^{v(x)}$ .

En écrivant  $u(x)^{v(x)}$  sous la forme  $e^{v(x)\ln u(x)}$ ,

Donner les contraintes pour que  $u^v$  soit défini.



## Retenir

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions.

On note  $u^v$  la fonction :  $x \mapsto (u(x))^{v(x)}$ , c'est-à-dire la fonction :  $x \mapsto e^{v(x)\ln u(x)}$ .

Si  $D_v$  désigne l'ensemble de définition de  $v$  et  $D_u$  l'ensemble des réels  $x$  pour lesquels  $u$  est défini et strictement positif, alors l'ensemble de définition de  $u^v$  est  $D_u \cap D_v$ .

## Exemple

Étudions et représentons la fonction  $f : x \mapsto (x)^{\frac{1}{x}}$ .

L'ensemble de définition de  $f$  est  $]0; +\infty[$ .

Pour tout réel  $x$ , strictement positif  $(x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln x}$ ,

$f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

Posons pour tout réel  $x$ , strictement positif,  $v(x) = \frac{1}{x} \ln x$



$$u'(x) = \frac{-1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} (1 - \ln x).$$

Pour tout réel  $x$ , strictement positif,  $f'(x) = \frac{1}{x^2} (1 - \ln x) e^{\frac{1}{x}}$ .

$f'(x)$  a le signe de  $1 - \ln x$  car  $e^{\frac{1}{x}} > 0$  et  $\frac{1}{x^2} > 0$ .

$1 - \ln x > 0$  équivaut à  $\ln x < 1$  ; soit  $\ln x < \ln e$  et  $x < e$ ;  $x \in ]0; e[$ .

On en déduit que  $f'(x) > 0$  si et seulement si  $x \in ]0; e[$  ;

$f'(x) < 0$  si et seulement si  $x \in ]e; +\infty[$ .

$f$  est donc strictement croissante sur  $]0; e[$  et strictement décroissante sur  $]e; +\infty[$ .

$$f(e) = e^{\frac{1}{e}} = e^{\frac{1}{e}}.$$

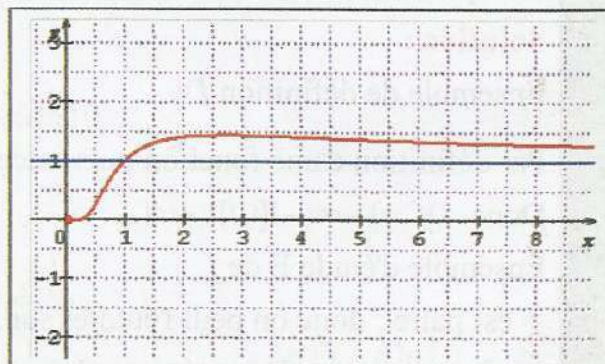
Calcul des limites :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \ln x = -\infty; \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = 0. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

Le point de coordonnées  $(0,0)$  est point d'arrêt à la courbe de  $f$  et la droite d'équation  $y = 1$  est asymptote horizontale à la courbe de  $f$  au voisinage de  $+\infty$ .

Tableau des variations de  $f$ .

| $x$     | 0 | $e$               | $+\infty$ |
|---------|---|-------------------|-----------|
| $f'(x)$ | + | 0                 | -         |
| $f(x)$  | 0 | $e^{\frac{1}{e}}$ | 1         |



### Exercice résolu 1

Exprimer plus simplement en fonction de  $e$ , le nombre :  $(ee^{\sqrt{2}})^{1-\sqrt{2}}$ .

$$(ee^{\sqrt{2}})^{1-\sqrt{2}} = (e^{1+\sqrt{2}})^{1-\sqrt{2}} = e^{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = e^{1-2} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Simplifier le nombre :  $\frac{\sqrt{9}\sqrt{27}(\sqrt[3]{9})^2}{\sqrt[3]{3}}$ .

$$\frac{\sqrt{9}\sqrt{27}(\sqrt[3]{9})^2}{\sqrt[3]{3}} = \frac{3\sqrt{3}(\sqrt[3]{3^2})^2}{\sqrt[3]{3}} = \frac{3(3^{\frac{1}{3}})^2}{\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{3 \cdot 3^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{1}{9}}} = 3^{1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{9}} = 3^{\frac{10}{9}}.$$



$$= \frac{3 \cdot 3^{\frac{3}{2}} \left(3^{\frac{2}{3}}\right)^2}{3^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}} = \frac{3^{1+\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3}}}{3^{\frac{1}{6}}} = \frac{3^{\frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3}}}{3^{\frac{1}{6}}} = 3^{\frac{5+4}{3} \cdot \frac{1}{6}} = 3^{\frac{29}{12}}.$$

2) Résoudre l'inéquation :  $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \frac{3}{2}$ .

$\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \frac{3}{2}$  est équivalente à l'inéquation  $x \ln \frac{1}{2} \geq \ln \frac{3}{2}$  et est équivalente à

$$x \leq \frac{\ln \frac{3}{2}}{\ln \frac{1}{2}} \text{ car } \ln\left(\frac{1}{2}\right) < 0. \text{ Or } \frac{\ln \frac{3}{2}}{\ln \frac{1}{2}} = \frac{\ln 3 - \ln 2}{-\ln 2} = 1 - \frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation  $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \frac{3}{2}$  est  $\left]-\infty; 1 - \frac{\ln 3}{\ln 2}\right]$ .

### Exercice résolu 2

Etudier et tracer la courbe représentative de la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R} : x \mapsto (x^2 - 1)^{-\pi}$  dans un repère orthonormé.

**Solution :**

Ensemble de définition  $D_f$

Par définition d'une fonction puissance,  $f(x) = e^{-\pi \ln(x^2 - 1)}$  existe pour  $x^2 - 1 > 0$ .

Donc  $D_f = ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$ .

Ensemble d'étude  $E$  de  $f$ .

$f$  est paire ; donc on peut l'étudier sur  $E = ]1; +\infty[$  et déduire le tracé de la courbe de  $f$  sur  $]-\infty; -1[$  par la symétrie orthogonale d'axe l'axe des ordonnées.

Limites en 1 et  $+\infty$  ; interprétations.

Lorsque  $x$  tend vers  $1^+$ ,  $x^2 - 1$  tend vers  $0^+$  et  $-\pi \ln(x^2 - 1)$  tend vers  $+\infty$ . Donc en posant

$X = -\pi \ln(x^2 - 1)$ , on obtient :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$ . On déduit que la droite d'équation

est asymptote à la courbe de  $f$ . Lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ ,  $x^2 - 1$  tend vers  $+\infty$ .

Donc en posant  $X = -\pi \ln(x^2 - 1)$ , on obtient  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ . On déduit que

l'axe des abscisses est asymptote à la courbe de  $f$ .

La fonction :  $x \mapsto -\pi \ln(x^2 - 1)$  est dérivable sur  $]1; +\infty[$  et  $x \mapsto e^x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  ; donc  $f$  est dérivable sur  $]1; +\infty[$  comme la composée de deux fonctions dérivables.

$\forall x \in ]1; +\infty[$ ,  $f'(x) = -\pi \left( \frac{2x}{x^2 - 1} \right) f(x)$  et  $f'(x) < 0$  ; donc  $f$  est strictement décroissante

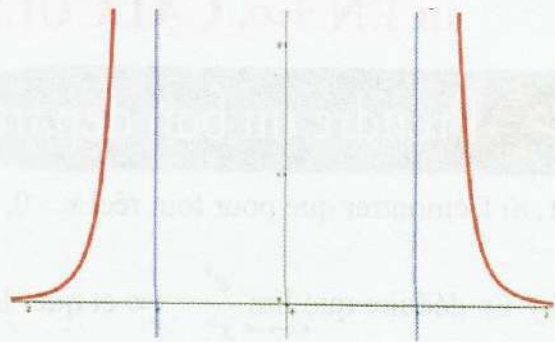
sur  $]1; +\infty[$  car  $x > 1$  et  $x^2 - 1 > 0$ .



Tableau des variations sur  $E$

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | 1         | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | -         |
| $f(x)$  | $+\infty$ | 0         |

Courbe de  $f$  sur  $D_f$



### Exercice résolu 3

Dans un milieu donné, toutes les 12 heures, le nombre de bactéries est multiplié par 17 millions  
constant et suivant la relation horaire  $P(t) = P_0 r^t$ .

a) Quel est le taux horaire de croissance ?

b) En combien de temps une population de bactéries est-elle multipliée par 10 ?

**Solution**

Soit  $i$  le taux horaire de croissance ; après une heure,  $P(1) = P_0 + iP_0 = (1+i)P_0$ .

Or  $P(t) = P_0 r^t$  ; donc  $P(12) = 17 \times 10^6 P_0 = P_0 r^{12}$ .

$$17 \times 10^6 P_0 = P_0 r^{12} \Leftrightarrow 17 \times 10^6 = r^{12} \Leftrightarrow 12 \ln r = \ln 17 + 6 \ln 10.$$

$$\ln r = \frac{\ln 17 + 6 \ln 10}{12} \Leftrightarrow r = e^{\frac{\ln 17 + 6 \ln 10}{12}}.$$

$$r = 1 + i ; \text{ donc } i = r - 1 = e^{\frac{\ln 17 + 6 \ln 10}{12}} - 1 \approx 3,0044 = 300,44\%.$$

$$P(t) = 10P_0 \Leftrightarrow P(t) = P_0 r^t = 10P_0 \Leftrightarrow r^t = 10 \Leftrightarrow t \ln r = \ln 10. \text{ Or } r = e^{\frac{\ln 17 + 6 \ln 10}{12}};$$

$$\text{donc } \ln r = \frac{\ln 17 + 6 \ln 10}{12} ; \text{ d'où } t = \frac{\ln 10}{\frac{\ln 17 + 6 \ln 10}{12}} = \frac{12 \ln 10}{\ln 17 + 6 \ln 10} \approx 1,65965 \approx 1 \text{ h } 39 \text{ min } 35 \text{ s}.$$

### S'exercer

Exprimer, en fonction de  $e$ , le nombre :  $\left( \frac{e^{\sqrt{5}}}{e^{\sqrt{3}}} \right) \sqrt{3} + \sqrt{5}$ .

Simplifier le nombre :  $5^{\frac{2}{3}} \times \sqrt[6]{25}$ .

Dans le film "Mémoires en fuite", on parle d'un capital de 200 000 francs qui, plus tard, vaut 3 500 000 francs. Quel est le taux moyen sur cette période?



## 3.2 CROISSANCES COMPARÉES DE $x \mapsto x^\alpha$ ; $\exp$ ET $\ln$ EN $+\infty$ . CALCULS DE CERTAINES LIMITES



### Prendre un bon départ

1. a) Démontrer que pour tout réel  $x > 0$ ,  $\frac{e^x}{x^\alpha} = e^{x(1-\frac{\ln x}{x})}$ . ( $\alpha > 0$ )
- b) En déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$  et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0$ .
2. a) Démontrer que pour tout réel  $x > 1$ ;  $\frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha} \frac{\ln x^\alpha}{x^\alpha}$ ; ( $\alpha > 0$ )
- b) en posant  $X = x^\alpha$ , déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$



### Retenir

Pour tout réel  $\alpha$ , ( $\alpha > 0$ )

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$$

Pour tout réel  $\alpha$  un réel strictement positif

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0$$

### Remarque

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} |x|^\alpha e^{-x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha e^x$ .

On dit que la fonction :  $x \mapsto |x|^\alpha$  est négligeable devant la fonction :  $x \mapsto e^x$  au voisinage de  $+\infty$  et de  $-\infty$  ou encore que la fonction  $x \mapsto e^x$  est prépondérante devant la fonction :  $x \mapsto |x|^\alpha$  au voisinage de  $+\infty$  et de  $-\infty$ .

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0$ .

On dit que la fonction :  $x \mapsto \ln x$  est négligeable devant la fonction :  $x \mapsto x^\alpha$  au voisinage de  $+\infty$  et de  $0$  ou encore que la fonction :  $x \mapsto x^\alpha$  est prépondérante devant la fonction :  $x \mapsto \ln x$  au voisinage de  $0$  et de  $+\infty$ .

### Exemple

- 1) Déterminons la limite de la fonction :  $x \mapsto \sqrt{x} - \ln x^2$  en  $+\infty$ .

Pour tout réel  $x$  strictement positif,  $\sqrt{x} - \ln x^2 = \sqrt{x} \left( 1 - 2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \right)$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \ln x^2) = +\infty$ . Car  $1 - 2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \rightarrow 1$



$$2) \lim_{x \rightarrow 0^+} x(x \ln x)^3 = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \left( x^{\frac{1}{3}} \ln x \right)^3 = 0. \quad 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\frac{1}{x^2}} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\pi}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\pi}{\left( x^{\frac{1}{2\pi}} \right)^\pi} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{2\pi}}} \right)^\pi = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1000}}{1,01^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1000}}{e^{x \ln 1,01}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^{\frac{1000}{\ln 1,01}}}{e^x} \right)^{\ln 1,01} = 0.$$

Calculons la limite en  $+\infty$  de la fonction  $f: x \mapsto x^2 e^{-\sqrt{x}}$ .

On pose  $X = \sqrt{x}$  on a alors  $f(x) = X^4 e^{-X}$  or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} X = +\infty$  et  $\lim_{X \rightarrow +\infty} X^4 e^{-X} = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

### Exercice résolu

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = \ln 2^x - \ln x^2$ .

1) Démontrer que  $f(x) = x \ln 2 - 2 \ln x$ . 2) Calculer  $f(2)$  et  $f(4)$ .

3) Calculer la dérivée  $f'$  de  $f$ . En déduire les variations de  $f$ .

4) À l'aide des questions 2 et 3, préciser le signe de  $f(x)$ .

5) Déterminer l'ensemble des entiers  $n$  pour lesquels on a  $2^n \geq n^2$ .

#### Solution

D'après les règles de calcul de sur le logarithme,  $\ln a^r = r \ln a \quad \forall a > 0$  et  $r \in \mathbb{R}$ .

Donc  $f(x) = \ln 2^x - \ln x^2 = x \ln 2 - 2 \ln x$ . 2.  $f(2) = \ln 4 - \ln 4 = 0$  et  $f(4) = \ln 16 - \ln 16 = 0$ .

3.  $f'(x) = \ln 2 - \frac{2}{x} = \frac{x \ln 2 - 2}{x}$ . Comme  $x > 0$ , on a  $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \ln 2 - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{\ln 2}$ .

On en déduit les variations de  $f$  : sur  $\left] 0; \frac{2}{\ln 2} \right]$ ,  $f$  est décroissante et sur  $\left] \frac{2}{\ln 2}; +\infty \right[$ ,

$f$  est croissante.

On en déduit :  $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [2; 4]$ .

5. Recherche des entiers  $n$  tel que  $2^n \geq n^2$ .

$$2^n \geq n^2 \Leftrightarrow \ln 2^n \Leftrightarrow \ln 2^n - \ln n^2 \geq 0 \Leftrightarrow f(n) \geq 0 \quad n \in \mathbb{N} - \{3\}.$$

### S'exercer

Calculer les limites, si elles existent des fonctions suivantes en  $+\infty$  et  $-\infty$ .

$$a) x \mapsto e^x - e^{-x}; \quad b) x \mapsto \ln(e^x + 1); \quad c) x \mapsto \frac{x e^x}{3^x}; \quad d) x \mapsto \frac{x}{e^x}.$$

Calculer les limites, si elles existent des fonctions suivantes en 0 et en  $+\infty$ .

$$a) x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}}; \quad b) x \mapsto \frac{(\ln x)^2}{x^{0,1}}; \quad c) x \mapsto \frac{e^{(1+\ln x)^2}}{x}.$$



## S'ENTRAÎNER

## FONCTIONS EXPONENTIELLES

1

Donner l'écriture simplifiée des nombres suivants :

a)  $e^{\ln 3} - e^{3 \ln 2}$  ; b)  $e^{-1+2 \ln 3}$  ;

c)  $e^{2-\ln 3} e^{-1+\ln 3}$ .

2

Donner l'écriture simplifiée des nombres suivants :

a)  $e^{1-\ln 5} - e^{1+\ln 3}$  ; b)  $e^{1+\ln 2} e^{1-\ln 2}$  ;

c)  $(e^{-2 \ln 3})^{\frac{1}{2}}$ .

3

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes:

a)  $e^{2x-16} = e^{-3x^2}$  ; b)  $e^{2x-\ln 3} = 3$

c)  $e^x = \cos \frac{7\pi}{10}$  ; d)  $e^{2-7x} = 12$ .

4

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes:

1)  $2e^{4x} - 5e^{2x} - 3 = 0$ ;

2)  $e^{3x+5} - 2e^{2x+5} - 3e^{x+5} = 0$ ;

3)  $\frac{e^{2x} + 2e^x - 4}{3e^x - 2} = 1$ ;

4)  $(2e^x + 3)(e^x - 3e^x + 2)(e^{-x} - 2e^x) = 0$ ;

5)  $4e^{2x} + 15e^{-x} = 19$ ;

6)  $4e^{-5x} + 3e^{-3x} - e^{-x} = 0$ ;

7)  $e^{4x+2} - \frac{e^2}{e^{4x+2}} = e^2 - 1$ ;

8)  $e^{6x+2} + e^{3x+1} = 2$ .

5

Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  les systèmes d'équations suivantes:

$$\begin{cases} e^x e^y = a \\ 2xy = 1 \end{cases} (a \in \mathbb{R}); \quad \begin{cases} e^x e^y = a^2 \\ 2xy = 1 \end{cases} (a \in \mathbb{R})$$

6

Résoudre et discuter dans  $\mathbb{R}$ , suivant les valeurs du paramètre  $m$ , l'équation, où  $x$  est l'inconnue.

$$e^{2x} + 4me^x - 2m + 2 = 0$$

Etudier le cas particulier où  $m = -1$ .

7

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation

$$e^{2x-1} - \sqrt{e^{2x+2}} - 2e^3 = 0.$$

8

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation

$$(x^2 - 1)e^{\ln(x-2)} = \ln e^{x+1}.$$

9

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations

1)  $2(\ln x)^4 - 5(\ln x)^2 - 3 = 0$ ;

2)  $4(\ln x)^{-5} - 5(\ln x)^{-3} - (\ln x)^{-1} = 0$ .

10

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes:

a)  $e^{2\cos x} > \sqrt{3}$ ; b)  $e^{2x-3} > \sin \frac{9\pi}{2}$ ;

c)  $e^{2x^2-8+\ln 7} \leq 7$ .



Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations :

a)  $e^{x+2} \leq e^{x-1}$  ; b)  $e^{2x^2} \leq e^{7x-3}$  ;

c)  $e^{x^2-1} \leq \frac{1}{e}$ .

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations

a)  $e^{2x} + 7e^x + 2 < 0$  ;

b)  $e^{2x} - 4e^x - 4 > 0$  ;

c)  $e^{2x} - 11e^x + 6 \leq 0$ .

Simplifier :

$(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$ .

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{8}{1-e^x}$ .

Déterminer l'ensemble de définition  $D_f$  de la fonction  $f$ .

Simplifier l'identité

$f(x) = f(-x)$ , pour tout  $x$  de  $D_f$ .

Démontrer que le point  $A(0,4)$  est un centre de symétrie de la courbe représentative de  $f$ .

Déterminer le signe de  $f(x) = e^{3x-1} - e^{2x^2}$ .

Soit une famille de fonction  $f$  définies ci-dessous ,

déterminer sa fonction dérivée  $f'$ .

a)  $f(x) = e^{\frac{1}{2}x-1}$  ;

b)  $f(x) = e^x(e^x - 2)$  ;

c)  $f(x) = (2x+1)e^x$ .

17

Soient  $f$  et  $g$  les fonctions de

$]0 ; +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$  définies par :

$f(x) = 2x + \frac{1}{2} \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$  et

$g(x) = 2e^{2x} - 5e^x + 2$ .

a) Démontrer que

$f(x) = 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 1} = 2x - \frac{1}{2} + \frac{e^x}{e^x - 1}$ .

b) Factoriser  $g(x)$ .

c) Déterminer le signe de la dérivée de  $f$ .

18

Démontrer que quel que soit le

réel  $x$ , on a :  $\ln(e^x + 1) - \ln(1 + e^{-x}) = x$ .

19

Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  les systèmes :

$$\begin{cases} \ln x + \ln y = -2 \ln 4 \\ e^x e^y = \frac{1}{\sqrt{e}} \end{cases}$$

20

Déterminer les limites suivantes :

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} x e^{\frac{1}{x}}$  ; b)  $\lim_{x \rightarrow 0} x e^{-\frac{1}{x}}$  ; c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{x-1}}$  ;

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x-1}}$ .

21

Soit la fonction  $f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ .

Calculer les limites de la fonction  $f$ , en  $-\infty$  puis en  $+\infty$ .

22

Soit la fonction :  $x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ .



- 1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$ , puis étudier les limites de  $f$  à ses bornes.
- 2) Déterminer les asymptotes à la courbe représentative de  $f$ .

23

Soit la fonction  $f : x \mapsto e^x - x$ .

- 1) Étudier les variations de  $f$  et en déduire que  $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > x$ .

- 2) démontrer par récurrence que  $\forall x \in \mathbb{R}^*,$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, e^x > \frac{x^n}{n!}.$$

- 3) Démontrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

24

On considère la fonction  $f$  définie pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (x+1)e^{-x}$ .

- a) Calculer les limites de  $f$  en  $+\infty$  puis en  $-\infty$ .
- b) Étudier les variations de  $f$  et dresser son tableau des variations.

25

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 3e^{2x} - 4e^x + 2$ .

Dresser le tableau des variations de  $f$ .

26

Pour chacune des fonctions  $f$  définies ci-dessous, déterminer sa fonction dérivée  $f'$  sur l'intervalle  $I$ , puis étudier le signe de  $f'(x)$  pour  $x \in I$  et dresser le tableau des variations de  $f$ .

a)  $f(x) = xe^x \quad I = \mathbb{R};$

b)  $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \quad I = \mathbb{R}^*.$

27

On considère la fonction numérique  $f$  de la variable réelle  $x$  définie par  $f(x) = (2x-4)e^x$ .

On note  $C_f$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 1 cm.

- a) Calculer la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

- b) Calculer la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers  $-\infty$ . On pourra mettre  $f(x)$  sous la forme  $f(x) = 2xe^x - 4e^x$ .

2. a) Montrer que la dérivée  $f'$  de  $f$  est définie par  $f'(x) = 2(x-1)e^x$ .

- b) Étudier le signe de  $f'(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

Dresser le tableau des variations de  $f$ .

3. Écrire une équation de la tangente  $T$  à la courbe  $C_f$  de  $f$  en son point d'abscisse 1.
4. Tracer la tangente  $T$  et la courbe  $C_f$ .

28

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = e^{2x} - 3e^x + x + 2.$$

et  $C$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; i, j)$  d'unité graphique 4 cm.

1. a) Déterminer la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

Démontrer que la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x + 2$  est une asymptote à  $C$ .

- c) Étudier les positions relatives de la courbe  $C$  et de la droite  $\Delta$ .

2. a) Vérifier que pour tout réel  $x$ ,

$$f(x) = e^x \left( e^x - 3 + \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} \right).$$

- b) En déduire la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers  $-\infty$ .



Calculer  $f'(x)$ .

Montrer que  $f'(x) = (2e^x - 1)(e^x - 1)$ .

Étudier dans  $\mathbb{R}$  l'équation

$f'(x) = 0$  puis déduire le signe de  $f'(x)$ .

Établir le tableau des variations de  $f$ .

Déterminer une équation de la tangente

à la courbe  $C$  en son point d'abscisse  $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$ .

Peut-on dire des droites  $T$  et  $D$  ?

Tracer, dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , les droites

et la courbe  $C$ .

Soit la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1).$$

Montrer que  $e^{2x} - e^x + 1$  est strictement positif pour tout réel  $x$ .

Étudier les variations de la fonction  $f$ .

Soit  $(C)$  la courbe représentative de  $f$

dans un repère orthonormé du plan.

Calculer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

Montrer que  $f(x) - 2x = \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$  et

calculer la limite de  $f(x) - 2x$  lorsque  $x$  tend

vers  $+\infty$  et interpréter le résultat obtenu.

Reconstruire la courbe  $(C)$ . (On représentera

graphiquement le point de  $(C)$  d'ordonnée nulle).

Déterminer, le nombre de solutions dans  $\mathbb{R}$

$$f(x) = 0 : e^{2x} - e^x + 1 = 3 :$$

graphiquement,

graphiquement.

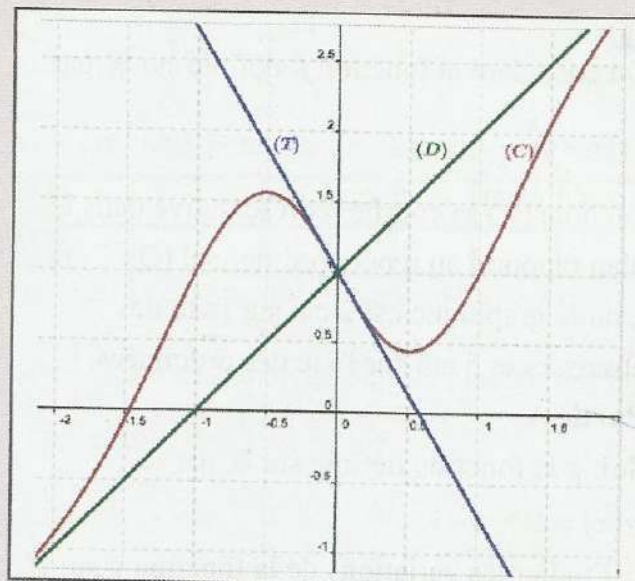
On a la courbe représentative  $(C)$  dans

un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  du plan d'une

fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ ,

on a une asymptote,  $(T)$  sa tangente au point

d'abscisse 0.



Sachant que le point  $J(0;1)$  est le centre

de symétrie  $(C)$ , que l'asymptote

$(D)$  passe par les points  $K(-1; 0)$  et  $J$  et que

la tangente  $(T)$  a pour équation :  $y = (1 - e)x + 1$ .

1) Déterminer une équation de  $(D)$ .

2) On suppose qu'il existe deux réels  $m$  et  $p$  et

une fonction  $\phi$  définie sur  $\mathbb{R}$  telle que, pour

tout réel  $x$ ,  $f(x) = mx + p + \phi(x)$  avec

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = 0$$

a) Démontrer que  $m = p = 1$ .

b) En utilisant le point  $J$ , montrer que, pour

tout réel  $x$ , on a  $f(x) + f(-x) = 2$ .

c) En déduire en explicitant  $f(x)$  et

$f(-x)$ , que la fonction  $\phi$  est impaire.

a. Déduire de la question b) que  $f'$ , dérivée de  $f$ , est paire.

3) On suppose maintenant que, pour tout réel  $x$ ,

$$\phi(x) = (ax + b)e^{-x^2} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des réels.}$$

a) En utilisant la parité de  $\phi$ , démontrer que  $b = 0$ .

b) Calculer  $f'(x)$ .

c) En utilisant le coefficient directeur de  $(T)$ , démontrer que  $a = -e$ .

$$\text{Démontrer que : } f(x) = x + 1 - xe^{-x^2+1}.$$



**31**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x}.$$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

L'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

**Partie A**

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$g(x) = e^x - x - 1.$$

1. Étudier les variations de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

En déduire le signe de  $g$ .

2. Justifier que pour tout réel  $x$ ,  $e^x - x > 0$ .

**Partie B**

1) a. Calculer les limites de  $f$  en  $+\infty$

et  $-\infty$ .

b. Interpréter graphiquement ces résultats.

2) a. Calculer  $f'(x)$ ,  $f'$  désignant la fonction dérivée de  $f$ .

b. Étudier le sens de variation de  $f$  puis dresser son tableau des variations.

3) a. Écrire une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

b. À l'aide de la partie A, étudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).

Tracer la droite (T), les asymptotes à (C) et la courbe (C) dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

## FONCTIONS EXPONENTIELLES DE BASE QUELCONQUE

**32**

Donner l'écriture simplifiée des nombres réels

suivant : a)  $\exp_{\frac{1}{4}}(2)$ ; b)  $\exp_{\frac{1}{4}}(-2)$ ;

c)  $\exp_4\left(\frac{1}{2}\right)$ ; d)  $\exp_4\left(-\frac{1}{2}\right)$ ;

e)  $\exp(2)$ ; f)  $\exp(-1)$ .

**33**

Déterminer  $x$  dans chaque cas.

a)  $\exp_{\frac{2}{3}}(x) = \frac{8}{27}$  ;

b)  $\exp_{\frac{3}{4}}(x) = \frac{10}{9}$  ;

c)  $\exp(x) = 1000$  ;

d)  $\exp(x) = 0,01$  ; e)  $\exp(x) = 1$  ;

f)  $\exp_{\frac{1}{2}}(x) = 4$  ;

g)  $\exp_{\frac{1}{4}}(x) = 4$  ; h)  $\exp_4(x) = \frac{1}{2}$ .

**34**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = a^x$ .

a) Représenter  $f$  dans un repère orthonormal du plan.

b) Justifier pourquoi la base de la fonction exponentielle  $y = a^x$  doit être différente de 1.

**35**

Détermine la base de chacune des fonctions exponentielles définies ci-dessous. puis indique si la fonction est croissante ou décroissante.

a)  $f(x) = \left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{x}{2}}$  ; b)  $f(x) = 2^{2x}$  ;

c)  $f(x) = 4^{\frac{x}{2}}$  ; d)  $f(x) = 2^{-x}$ .

**36**

Dans chacun des cas suivants, le point A

appartient au graphique de la fonction  $f$ .

Déterminer l'expression de cette fonction.

a)  $A(2; 16)$  ; b)  $A\left(\frac{1}{2}; 3\right)$  ;

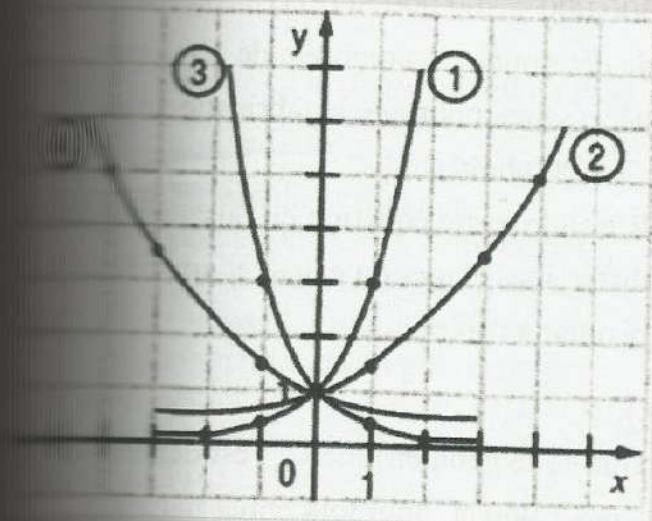
c)  $A\left(-\frac{1}{2}; 3\right)$  ; d)  $A\left(-\frac{3}{2}; \frac{125}{27}\right)$ .



La courbe d'une fonction exponentielle passe par le point  $A\left(2; \frac{9}{16}\right)$ . Quelle est l'ordonnée du point B appartenant à ce graphique si l'abscisse de B est  $-3$ ?

Les points A(2, 9) et B(4, 16) sont-ils situés sur la même courbe d'une fonction exponentielle? Justifier la réponse.

Déterminer une équation cartésienne de la courbe d'une fonction exponentielle représentée du graphique ci-dessous.



Montrer que si  $a$  est strictement positif,  $\exp_a(-x) = \frac{1}{\exp_a(x)}$ .

Comment peut-on déduire le graphique de la fonction  $\exp_{\frac{1}{a}}$  à partir du graphique de la fonction  $\exp_a$ ?

À partir du graphique de  $y = 2^x$ , tracer le graphique de:

a)  $y = -2^x$ ; b)  $y = -2^{-x}$

42

Soit  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

a) Compléter le tableau de valeurs ci-dessous

| x | 1 | 2 | 10 | 20 | 100 | 1 000 | 10 000 | 100 000 |
|---|---|---|----|----|-----|-------|--------|---------|
| y |   |   |    |    |     |       |        |         |

b) Vérifie que, au fur et à mesure que  $x$  croît,  $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  se rapproche de plus en plus du nombre 2,718 28.

43

Résoudre les équations suivantes dans  $\mathbb{R}$ :

- a)  $3^x = 32$ ; b)  $3^x = 27$ ;  
c)  $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{81}{16}$ ; d)  $16^x = 2$ .

44

Donner une expression simplifiée des nombres réels suivants:

- a)  $\log_2 1$ ; b)  $2^{\log_2 5}$ ; c)  $\log 10$ ; d)  $\log_2 2^6$ ;  
e)  $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$ ; f)  $\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^3$ ; g)  $10^{\log 2}$ ; h)  $\log_{\frac{1}{3}} 1$ ;  
i)  $\ln e^5$ .

45

Donner la forme simplifiée des nombres réels suivants:

- a)  $\ln e$ ; b)  $\left(\frac{3}{4}\right)^{\log_3 2}$ ; c)  $\log 10^2$ ; d)  $\ln 10^0$ ;  
e)  $\log_2 \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ ; f)  $e^{\ln e}$ ; g)  $-\log 0,1$ ; h)  $2 \ln 1$ ;  
i)  $e^{\ln 2}$ .

46

Déterminer l'ensemble solution des équations suivantes: a)  $5^x = 2$ ; b)  $2^x = 2^{-1}$ ;  
c)  $5^{x-2} = 2$ ; d)  $2^{x+1} = 2^{-1}$ .



47

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

a)  $2^x = 9$  ; b)  $2^{x+1} = 7$  ;

c)  $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1} = 3$  ; d)  $2^{-3x} = 64$  .

48

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes.

a)  $2^{3x} = 3^{x+1}$  ; b)  $3^{x-1} = 2^{x+1}$  ;

c)  $3^{2x+1} = 9^{x-2}$  ; d)  $\frac{2^x}{3^x} = 5$ .

49

Résoudre dans  $[0; +\infty[$ , les inéquations suivantes.

a)  $3(0,8)^x \leq 1,5$  ;

b)  $0,004(2,2)^x \geq 0,8$  ;

c)  $5,2 - 3,5(1,02)^x \geq 6$ .

50

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

a)  $5^{2x} - 8 \cdot 5^x + 15 = 0$  ;

b)  $4^x - 7 \cdot 2^x + 12 = 0$  .

51

Résoudre  $\mathbb{R}^2$  les systèmes :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3 \times 2^x + 3^y = 24 \end{cases}$$

52

Au bout de la première semaine de fonctionnement, la production de boîtes d'un médicament générique est de 200 000 unités.

Par suite, on envisage d'augmenter cette production de 3 % par semaine.

On note :

- $U_1$  la production, en unités, à la fin de la première semaine, ( $U_1 = 200\,000$ ),
- $U_2$  la production, en unités, à la fin de la 2<sup>ème</sup> semaine,
- $U_n$  la production, en unités, à la fin de la n-ième semaine.

1. Calculer  $U_2$  et  $U_3$ .2. Quelle est la nature de la suite de terme général  $U_n$ ? Préciser la raison de cette suite.3. a) Exprimer  $U_n$  en fonction de n.b) En déduire la production au bout de la 12<sup>ème</sup> semaine. (arrondir le résultat à l'unité).

4. L'équation

$300\,000 = 200\,000 \times (1,03)^{n-1}$  permet de déterminer le nombre n de semaines nécessaires pour que la fabrication atteigne 300 000 boîtes.

Résoudre cette équation en faisant figurer différentes étapes du calcul et arrondir le résultat à l'unité.

53

Une suite géométrique  $(C_n)$  est définie par  $C_0 = 1\,000$  et, pour tout entier naturel n,  $C_{n+1} = 1,0225C_n$ .

Dans ce qui suit, arrondir les valeurs approchées à  $10^{-2}$ .

1. Calculer  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ .2. Pour tout entier n de  $\mathbb{N}$ , exprimer  $C_n$  en fonction de n.3. Déterminer le sens de variation de la suite  $(C_n)$ .4. Déterminer le plus petit nombre entier n tel que :  $C_n \geq 2C_0$ .

54

Une entreprise fabriquant du matériel pour les laboratoires augmente chaque année sa production de 5 %.



production d'un certain type de pièces de 6 %.  
Calculer la production  $P_1$  de la première année est de 100 000 pièces.

Déterminer la nature de la suite des productions annuelles en précisant le premier terme et la raison.

Calculer la production  $P_2$  pour la deuxième année,  $P_3$  pour la troisième année,  $P_4$  pour la quatrième année ; les valeurs seront arrondies à l'unité.

On désigne par  $P_n$  la production de l'année  $n$ . Donner  $P_n$  en fonction de  $n$ .

Calculer la production de la douzième année (arrondir à l'unité).

Déterminer en quelle année la production  $P_n$  dépassera 100 000 pièces.

En janvier 2012, la population d'un pays est de 30 millions d'habitants. On estime que l'augmentation de la population pour les années à venir sera de 2 % par an.

Calculer la population au 1<sup>er</sup> janvier 2013, au 1<sup>er</sup> janvier 2019. Les résultats seront donnés en millions et arrondis à  $10^{-3}$ .

Calculer l'augmentation en pourcentage, la population au 1<sup>er</sup> janvier 2012 et la population au 1<sup>er</sup> janvier 2019 ? Le résultat sera arrondi à 0,1 %.

Montrer que dans l'ensemble des nombres réels, l'équation :  $1,02^x \geq 1,2$ .

Déterminer l'année à partir de laquelle la population dépassera 36 millions d'habitants.

Deux capitaux sont placés simultanément à deux taux composés :

le premier de 2 500 000 F à 4,5 % l'an ; le

second de 3 000 000 F à 3,5 % l'an.

Déterminer le nombre d'années de placement à

partir duquel la valeur acquise par le premier

capital dépassera celle acquise par le second.

Un médicament est administré un centimètre cube de produit

à un malade.

Toutes des demi-heures, son organisme élimine : 10 % de ce produit.

Quel volume de ce produit calmant a-t-il au bout de six heures ? Arrondir à  $10^{-2}$  près

Sachant que ce produit n'est plus efficace lorsque le volume restant est inférieur à 500 millimètres cubes, au bout de combien de temps le produit sera-t-il inefficace ?

58

Le but de l'exercice est l'étude de la désintégration d'un corps radioactif : le carbone 14.

Soit  $N_0$  le nombre d'atomes de carbone 14 à l'instant  $t = 0$ ,  $N_1$  le nombre d'atomes de carbone 14 un siècle après,  $N_k$  le nombre d'atomes de carbone 14 après  $k$  siècles ( $k$  entier). On sait que le nombre d'atomes de carbone 14 diminue très lentement au cours du temps : environ 1,24 % par siècle.

a) Donner l'expression de  $N_1$  en fonction de  $N_0$ , puis de  $N_k$  en fonction de  $N_{k-1}$ .

b) En déduire la nature de la suite  $(N_k)$  et l'expression de  $N_k$  en fonction de  $N_0$  et  $k$ .

c) Donner, en le justifiant, le sens de variation de la suite  $(N_k)$ .

2. Le carbone 14 est renouvelé constamment chez les êtres vivants ; à la mort de ceux-ci, l'assimilation cesse et le carbone 14 présent se désintègre.

Des archéologues ont trouvé des fragments d'os donc la teneur en carbone 14 est 40 % de celle d'un fragment d'os actuel de même masse, pris comme témoin.

Calculer l'âge de ces fragments. On arrondira le résultat au siècle près.

## FONCTIONS PUISSANCES :

$$f_\alpha : x \rightarrow x^\alpha \text{ où } x > 0$$

59

Soit  $x$  un réel strictement positif. Mettre sous la forme  $x^\alpha$  les nombres réels suivants :

$$\sqrt{x} ; \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} ; \sqrt[5]{x^3} ; \frac{1}{\sqrt{x^{0,6}}} ; \sqrt[3]{x} \times \sqrt[4]{x}.$$



**60**Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations :

a)  $x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{2}{3}} = 2$  ;

b)  $x^{\pi} - 42 \cdot x^{-\pi} = 1$  .

**61**Calculer les limites, si elles existent des fonctions suivantes en  $+\infty$  et  $-\infty$ .

a)  $x \mapsto (2x+1)e^x$  ; b)  $x \mapsto xe^{-x}$  ;

c)  $x \mapsto x^2 e^{-x} - x$  ;

d)  $x \mapsto \frac{3e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$  .

**62**Calculer les limites, si elles existent des fonctions suivantes en  $\alpha$ .

a)  $x \mapsto \frac{\ln(1+3x)}{x}$ ,  $\alpha = 0$  ;

b)  $x \mapsto \frac{e^{x^2} - 1}{x}$ ,  $\alpha = 0$  ;

c)  $x \mapsto \frac{\ln x - 1}{x - e}$ ,  $\alpha = e$  ;

d)  $x \mapsto \frac{e^{3x} - 1}{x}$ ,  $\alpha = 0$  ;

e)  $x \mapsto \frac{2^x - 32}{x - 5}$ ,  $\alpha = 5$  ;

b)  $x \mapsto \frac{2^{2x} - 1}{2x - 1}$ ,  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

**63**

Une organisation humanitaire dispose aujourd'hui d'un capital  $C_0$  de 3 000 000 F. Déterminer à quel taux elle doit le placer aujourd'hui pour que la valeur acquise dans cinq ans soit égale à 3 600 000 F.

a) On a rempli un aquarium avec 90 litres d'eau claire et 10 litres de produit colorant capable de se mélanger instantanément à l'eau claire de façon homogène. Chaque jour, un système de renouvellement fait écouler 10 litres du mélange remplacés par 10 litres d'eau claire sans adjonction de produit colorant. Soit  $v_0 = 10$  le volume initial de produit colorant (exprimé en litres).

Calculer le volume  $v_1$  de produit colorant après 1 renouvellement.

Calculer le volume  $v_2$  de produit colorant après 2 renouvellements.

a) Calculer le volume  $v_n$  de produit colorant après  $n$  renouvellements.

b) Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .

c) Pour un autre aquarium muni d'un autre système de renouvellement, on a  $v_1 = 15$ . Après combien de renouvellements le volume de produit colorant sera-t-il pour la première fois inférieur à 1 litre ?



# Chapitre 10

## SUITES NUMÉRIQUES

### LEÇON SUITES NUMÉRIQUES

1. CALCULS DES LIMITES DES SUITES : SUITES CONVERGENTES
2. CONVERGENCE DE LA SUITE  $(a^n)$  OÙ  $a$  EST UN NOMBRE RÉEL DONNÉ
3. SUITES CROISSANTES ET MAJORÉES OU DÉCROISSANTES ET MINORÉES.
4. SUITES DÉFINIES PAR UNE RELATION DE LA FORME  $u_{n+1} = f(u_n)$  OÙ  $f$  EST UNE FONCTION NUMÉRIQUE.

### S'ENTRAÎNER



## LEÇON

## SUITES NUMÉRIQUES

- ▶ Calculer la limite d'une suite ;
- ▶ Montrer qu'une suite est convergente en utilisant les calculs des limites, et les théorèmes de convergence des suites ;
- ▶ Montrer qu'une suite  $u$  définie par  $u_{n+1} = f(u_n)$  est convergente en utilisant les inégalités des accroissements finis.

## 1. CALCULS DES LIMITES DES SUITES : SUITES CONVERGENTES



### Prendre un bon départ

a) Chacune des suites suivantes est définie par son terme général :

$$u_n = \frac{n^2 + n - 1}{4n + 3}; v_n = \frac{\ln(n+2)}{n}; w_n = e^{-n^2+3}; T_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n;$$

$$x_n = n(e^{\frac{1}{n}} - 1); y_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Calculer la limite de chacune de ces suites quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Citer celles dont les limites sont des nombres réels.

b)  $u$  est une suite numérique et  $l$  un réel.

Montrer que si  $|u_n - l|$  converge vers 0, alors  $u$  converge vers  $l$ .

Soit une suite  $v$  telle que  $|u_n - l| \leq v_n$  à partir d'un certain rang.

Montrer que si  $v$  converge vers 0, alors  $u$  converge vers  $l$ .



### Retenir

- Une suite de terme général  $u_n$  est convergente lorsque la limite de  $u_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  est un nombre réel. Si le réel  $l$  est cette limite, alors on dit que la suite  $u$  converge vers  $l$ .
- Si une suite admet une limite qui n'est pas un réel ou si elle n'admet pas de limite, alors on dit que cette suite diverge.
- Si  $\alpha$  est la limite de la suite  $u$ , alors on note :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$  ou  $u \rightarrow \alpha$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

### Exemple

Soit  $u_n = e^{-n+1}$ .  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-n+1) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

La suite  $u$  est convergente et converge vers 0.