Royaume du Maroc

Ministère de l'éducation national

Résumé du cours de

Mathématiques

Deuxième année du cycle de baccalauréat

- **Section sciences expérimentales**
  - **Branche science de vie et de terre**
  - **Branche science physique**
  - **Branche science agriculture**
- **Section sciences et technologies industrielles**
  - **Branche sciences et technologies mécaniques**
  - **Branche sciences et technologies électriques**

Réalisé par : Prof. Mohamed ELKAYAL

Traduit par : Prof. Smail BOUGUERCH

SOMMAIRE

Chapitres	Pages
Signe d'un binôme - Signe et factorisation d'un polynôme	2
Identités remarquables - Domaine de définition d'une fonction numérique	3
Limites	4
Continuité	6
Dérivabilité	8
Axe de symétrie – Centre de symétrie - Point d'inflexion	10
Les branches infinies	11
La fonction réciproque	12
La fonction racine d'ordre n – la racine n-ème ($n \in IN^*$) - Les puissances radicales	14
Les suites numériques	16
Les fonctions primitives	18
L'intégrale	20
Les fonctions logarithmiques	22
Les fonctions exponentielles	24
Les nombres complexes	26
Les équations différentielles	29
La géométrie dans l'espace	30
Le dénombrement	32
Les probabilités	34
Calcul trigonométrique (Rappel)	36

Signe du binôme $ax+b$; $(a \neq 0)$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	Signe de (-a)	0	Signe de (a)

Signe et factorisation du pôlynome ax^2+bx+c ; $(a \neq 0)$:

Discriminant		Solution de l'équation : $P(x)=0$ $x \in \mathbb{R}$	Signe de $P(x)$	Factorisation de $P(x)$
$\Delta = b^2-4ac$	$\Delta \prec 0$	$S=\varnothing$	x : $-\infty$ ... $+\infty$ $P(x)$: Signe de a	Impossible à l'aide De deux polynômes
	$\Delta = 0$	$S=\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$	x : $-\infty$ ... $-\frac{b}{a}$ ... $+\infty$ $P(x)$: Signe de a | 0 | Signe de a	$P(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)$
	$\Delta \succ 0$	$S=\{x_1;x_2\}$ $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	x : $-\infty$ ... x_1 ... x_2 ... $+\infty$ $P(x)$: Signe de a | 0 | Signe de −a | 0 | Signe de a **(Supposons que $x_1 \prec x_2$)**	$P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$

Si x_1 et x_2 sont solutions de l'équation : $ax^2+bx+c=0$; $x \in \mathbb{R}$ et $(a \neq 0)$

Alors on a : $x_1+x_2=\frac{-b}{a}$ et $x_1 \times x_2=\frac{c}{a}$

Identités remarquables:

Pout tous réels a et b

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

Domaine de définition de certaines fonctions numériques:

f est une fonction à variable réelle x définie par	Domaine de définition de f
$f(x) = P(x)$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\}$
$f(x) = \sqrt{P(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0\}$
$f(x) = \dfrac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \succ 0\}$
$f(x) = \dfrac{\sqrt{P(x)}}{\sqrt{Q(x)}}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0 \text{ et } Q(x) \succ 0\}$
$f(x) = \sqrt{\dfrac{P(x)}{Q(x)}}$	$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \dfrac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \text{ et } Q(x) \neq 0\right\}$

Limites des fonctions $(n \in \mathbb{N}^*) x \mapsto x^n$ **et** $x \mapsto \sqrt{x}$ **et leur inverses:**

$\lim\limits_{x \to 0} x^n = 0$	$\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

Si n **est pair**	**Si** n **est impair**
$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$
$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$	$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$	$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$

Limites des fonctions polynômiales et des fonctions rationnelles au voisinage de $+\infty$ **et** $-\infty$ **:**

La limite d'un polynôme au voisinage de $+\infty$ **et** $-\infty$ **est la limite de son terme de plus grand degré**	**La limite d'une fonction rationnelle au voisinage de** $+\infty$ **et** $-\infty$ **est la limite du quotient de ses termes de plus grand degré**

Limite des fonctions trigonométriques:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

Limites des fonctions de type : $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

$\lim\limits_{x \to x_0} u(x)$	$\Rightarrow$	$\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{u(x)}$
$l \geq 0$		$\sqrt{l}$
$+\infty$		$+\infty$

Ces limites sont toujours valables lorsqu'on les traite soit à droite ou à gauche de x_0 **ou bien au voisinage de** $+\infty$ **ou** $-\infty$

Limites et ordre:

$\left.\begin{array}{l} u(x) \le f(x) \le v(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} u(x) = l \\ \lim\limits_{x \to x_0} v(x) = l \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$	$\left.\begin{array}{l} \lvert f(x) - l \rvert \le u(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$
$\left.\begin{array}{l} f(x) \le v(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} v(x) = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$	$\left.\begin{array}{l} u(x) \le f(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

Ces limites sont toujours valables lorsqu'on les traite soit à droite ou à gauche de x_0 ou bien au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$

Operations sur les limites:

Limite de la somme de deux fonctions:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	l			$-\infty$		$+\infty$	
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)+g(x)]$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**	$-\infty$	$+\infty$	**F.I.**

Limite du produit de deux fonctions:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	l	$l \succ 0$		$l \prec 0$		$-\infty$		$+\infty$		0
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)+g(x)]$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**

Limite du quotient de deux fonctions:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	l		$l \succ 0$		$l \prec 0$		$-\infty$		$+\infty$		0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]$	$\dfrac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**	

Ces limites sont toujours valables lorsqu'on les traite soit à droite ou à gauche de x_0 ou bien au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$

La continuité en un point:

Définition :

f continue en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

La continuité à droite – à gauche – en un point:

f continue à droite en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

f continue à gauche en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

f continue en $x_0 \Leftrightarrow f$ continue à droite et à gauche en x_0

La continuité sur un intervalle:

f continue sur un intervalle ouvert $]a;b[$, si f est continue en tous points de cet intervalle

f continue sur un intervalle fermé $[a;b]$, si f est continue sur l'intervalle ouvert $]a;b[$, et continue à droite en a, et à gauche en b

Operations sur les fonctions continues:

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et k un réel quelconque

- Les fonctions : $f+g$; $f \times g$; $k \times f$ sont aussi continues sur I
- Si on a $(\forall x \in I); g(x) \neq 0$ alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I

Résultats:

- Tout polynôme est continu sur $\mathbb{R}$
- Toute fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$
- Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$
- La fonction $x \mapsto \tan x$ est continue sur son domaine de définition $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

La continuité d'un composé de deux fonctions:

Si f est continue sur un intervalle I et g est continue sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$ alors $g \circ f$ est continue sur I

Image d'un intervalle par une fonction continue:

- L'image d'un segment (intervalle fermé) par une fonction continue est un segment
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

Cas particulier:

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
Le tableau suivant montre la nature de l'intervalle $f(I)$

L'intervalle I	L'intervalle $f(I)$	
	f strictement croissante sur I	f strictement décroissante sur I
$\mathbb{R}$	$\left]\lim_{x\to-\infty} f(x); \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim_{x\to+\infty} f(x); \lim_{x\to-\infty} f(x)\right[$
$[a;b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$[a;b[$	$\left[f(a); \lim_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim_{x\to b^-} f(x);f(a)\right]$
$]a;b]$	$\left]\lim_{x\to a^+} f(x);f(b)\right]$	$\left[f(b); \lim_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]a;b[$	$\left]\lim_{x\to a^+} f(x); \lim_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim_{x\to b^-} f(x); \lim_{x\to a^+} f(x)\right[$
$[a;+\infty[$	$\left[f(a); \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim_{x\to+\infty} f(x);f(a)\right]$
$]a;+\infty[$	$\left]\lim_{x\to a^+} f(x); \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim_{x\to+\infty} f(x); \lim_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]-\infty;a]$	$\left]\lim_{x\to-\infty} f(x);f(a)\right]$	$\left[f(a); \lim_{x\to-\infty} f(x)\right[$
$]-\infty;a[$	$\left]\lim_{x\to-\infty} f(x); \lim_{x\to a^-} f(x)\right[$	$\left]\lim_{x\to a^-} f(x); \lim_{x\to-\infty} f(x)\right[$

Théorème des valeurs intermédiaires (T.V.I.):

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$, alors pour tout réel β compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel α dans l'intervalle $[a;b]$ tel que : $f(\alpha)=\beta$

Résultats:

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et $f(a)\times f(b)\prec 0$ Alors l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution α sur l'intervalle $[a;b]$
Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a;b]$ et $f(a)\times f(b)\prec 0$ Alors l'équation $f(x)=0$ possède une et une seule solution α sur l'intervalle $[a;b]$

Méthode de dichotomie:

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a;b]$ et $f(a)\times f(b)\prec 0$

Et soit α l'unique solution de l'équation $f(x)=0$ sur l'intervalle $[a;b]$

Si $f(a)\times f\left(\frac{a+b}{2}\right)\prec 0$	Si $f(b)\times f\left(\frac{a+b}{2}\right)\prec 0$
Alors $a\prec\alpha\prec\frac{a+b}{2}$ et cette encadrement a une capacité qui vaut: $\frac{b-a}{2}$, on refait la même chose avec l'intervalle $\left[a;\frac{a+b}{2}\right]$ pour obtenir une meilleure précision de l'encadrement de α	Alors $\frac{a+b}{2}\prec\alpha\prec b$ et cette encadrement a une capacité qui vaut: $\frac{b-a}{2}$, on refait la même chose avec l'intervalle $\left[\frac{a+b}{2};b\right]$ pour obtenir une meilleure précision de l'encadrement de α

Remarque : et ainsi de suite jusqu'à obtention de la précision d'encadrement demandée

Dérivabilité en un point:

On dit qu'une fonction f est dérivable en un point x_0 si la limite : $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est finie

Cette limite est nommée le nombre dérivé de la fonction f en x_0 et on écrit : $f'(x_0)$

Equation de la tangente à la courbe d'une fonction – la fonction affine tangente à la courbe d'une fonction:

Soit f une fonction dérivable en x_0

- L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0 est :
  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
- La fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ est la fonction affine tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse x_0 et c'est une approche de la fonction f au voisinage de x_0

Dérivabilité à droite – à gauche, en un point:

On dit que f est dérivable à droite en x_0 si la limite : $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$ est finie

Cette limite est nommée le nombre dérivé de la fonction f à droite en x_0 et on écrit : $f_d'(x_0)$

On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si la limite : $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$ est finie

Cette limite est nommée le nombre dérivé de la fonction f à gauche en x_0 et on écrit : $f_g'(x_0)$

On dit qu'une fonction f est dérivable en un point x_0 si elle est dérivable à droite et à gauche en x_0, et $f_d'(x_0) = f_g'(x_0)$

La dérivabilité et la continuité:

Si une fonction f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0

Tableaux des dérivées de quelques fonctions usuelles:

$f(x)$	$f'(x)$	
k	0	
x	1	$(x \in \mathbb{R})$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	
x^r	rx^{r-1}	$\left(r \in \mathbb{Q}^* - \{1\}\right)$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	

Opérations sur les fonctions dérivables:

$(u+v)'=u'+v'$	$(u-v)'=u'-v'$	$(k\in\mathbb{R});(ku)'=ku'$
$(uv)'=u'v+uv'$	$(u^n)'=nu'u^{n-1}$	
$\left(\frac{1}{v}\right)'=\frac{-v'}{v^2}$	$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$	

La dérivée du composé de deux fonctions – la dérivée de la fonction racine carré:

$(u\circ v)'=v'\times[u'\circ v]$	$\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

La dérivation et les variations d'une fonction:

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I

$\forall x\in I;f'(x)\geq 0\left(f'(x)\succ 0\right)$ $\Leftrightarrow$ f est croissante (strictement croissante) sur l'intervalle I

$\forall x\in I;f'(x)=0$ $\Leftrightarrow$ f est constante sur l'intervalle I

$\forall x\in I;f'(x)\leq 0\left(f'(x)\prec 0\right)$ $\Leftrightarrow$ f est décroissante (strictement décroissante) sur l'intervalle I

La dérivation et l'interprétation géométrique:

La limite	Déduction	Interprétation géométrique la courbe (C_f) admet :
$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=a;(a\neq 0)$	f est dérivable en x_0	Une tangente au point $A(x_0;f(x_0))$ de coefficient directeur a
$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=0$		Une tangente horizontale au point $A(x_0;f(x_0))$
$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=a;(a\neq 0)$	f est dérivable à droite en x_0	Une demi-tangente à droite du point $A(x_0;f(x_0))$
$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=0$		Une demi-tangente horizontale au point $A(x_0;f(x_0))$
$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=-\infty$	f n'est pas dérivable à droite en x_0	Une demi-tangente verticale à droite au point $A(x_0;f(x_0))$ dirigé vers le bas
$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=+\infty$		Une demi-tangente verticale à droite au point $A(x_0;f(x_0))$ dirigé vers le haut
$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=a;(a\neq 0)$	f est dérivable à gauche en x_0	Une demi-tangente à gauche du point $A(x_0;f(x_0))$
$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=0$		Une demi-tangente horizontale au point $A(x_0;f(x_0))$
$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=-\infty$	f n'est pas dérivable à gauche en x_0	Une demi-tangente verticale à gauche au point $A(x_0;f(x_0))$ dirigé vers le haut
$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=+\infty$		Une demi-tangente verticale à gauche au point $A(x_0;f(x_0))$ dirigé vers le bas

Axe de symétrie:

La droite d'équation cartésienne $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe (C_f) si les deux conditions suivantes sont réalisées :

- $(\forall x \in D_f);(2a-x) \in D_f$
- $(\forall x \in D_f);f(2a-x) = f(x)$

Cas particulier : si $a = 0$; f est une fonction paire

Centre de symétrie:

Le point $I(a;b)$ est un centre de symétrie de la courbe (C_f) si les deux conditions suivantes sont réalisées :

- $(\forall x \in D_f);(2a-x) \in D_f$
- $(\forall x \in D_f);f(2a-x)+f(x) = 2b$

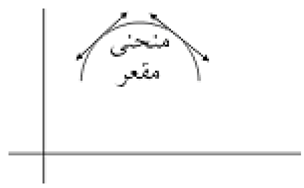
Cas particulier : si $a = b = 0$; f est une fonction impaire

Concavité – convexité – point d'inflexion:

La courbe d'une fonction est dite concave sur un intervalle si elle se situe au-dessous toutes ces tangentes sur cet intervalle

Si $(\forall x \in I);f''(x) \leq 0$

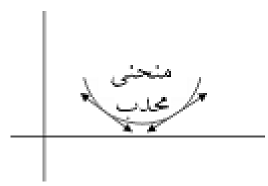
Alors (C_f) est concave sur l'intervalle I



La courbe d'une fonction est dite convexe sur un intervalle si elle se situe au-dessus toutes ces tangentes sur cet intervalle

Si $(\forall x \in I);f''(x) \geq 0$

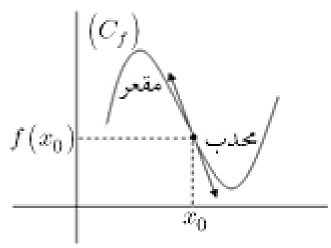
Alors (C_f) est convexe sur l'intervalle I



Le point d'inflexion d'une courbe est le point en lequel change la concavité de cette courbe

Si f'' s'annule en x_0 en changeant de signe,
alors (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse x_0

Si f' s'annule en x_0 sans changer de signe,
alors (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse x_0



$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = a$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$

$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a; (a \neq 0)$

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - ax] = b$

$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - ax] = \pm\infty$

(C_f) Admet:
Une asymptote
Oblique
D'équation
$y = ax + b$ au
voisinage de $\pm\infty$

(C_f) Admet:
Une branche
parabolique
Dirigée vers la droite
d'équation $y = ax$ au
voisinage de $\pm\infty$

(C_f) Admet:
Une branche
parabolique
Dirigée vers l'axe
des abscisses au
voisinage de $\pm\infty$

(C_f) Admet:
Une asymptote
Horizontale
D'équation
$y = a$
au voisinage de $\pm\infty$

(C_f) Admet:
Une branche
parabolique
Dirigée vers l'axe
des ordonnées au
voisinage de $\pm\infty$

(C_f) Admet:
Une asymptote
Verticale
D'équation
$x = a$

Propriété:

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
Alors f admet une fonction réciproque définie sur l'intervalle $f(I)$ vers l'intervalle I

Résultats:

- $\begin{cases} f(x)=y \\ x\in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y)=x \\ y\in f(I) \end{cases}$
- $(\forall x\in I);\left(f^{-1}\circ \mathrm{f}\right)(x)=f^{-1}\left(\mathrm{f}(\mathrm{x})\right)=x$
- $(\forall y\in f(I));\left(\mathrm{f}\circ f^{-1}\right)(\mathrm{y})=\mathrm{f}\left(f^{-1}(\mathrm{x})\right)=y$

Détermination de la formule de la fonction réciproque:

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
Soit x un élément de l'intervalle $f(I)$ et y un élément de l'intervalle I
En utilisant l'équivalence suivante : $f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow x=f(y)$ et en cherchant y en fonction de x on trouve ainsi la formule de $f^{-1}(x)$ pour tout x de $f(I)$

Continuité de la fonction réciproque:

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
Alors la fonction réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$, de même sens de monotonie que f

Dérivabilité de la fonction réciproque:

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
Soit x_0 un élément de l'intervalle $f(I)$ et $y_0=f(x_0)$
Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0)\neq 0$
Alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en y_0 et on a : $\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(\mathrm{y}_0))}$

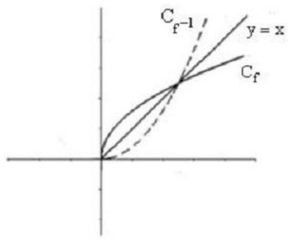
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
Si f est dérivable sur l'intervalle I et sa fonction dérivée f' ne s'annule pas sur cet intervalle I
Alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $f(I)$
Et on a : $(\forall x\in f(I));\left(f^{-1}\right)'(\mathrm{x})=\dfrac{1}{f'\left(\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{x})\right)}$

Monotonie de la fonction réciproque:

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
La fonction réciproque f^{-1} est aussi strictement monotone et de même monotonie que la fonction f

La représentation graphique de la fonction réciproque:

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
Les représentations graphiques des fonctions f et f^{-1} dans un repère orthonormé sont symétrique par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation : $y = x$) du repère.



Remarques importantes:

La courbe (C_f)	La courbe $(C_{f^{-1}})$
$A(a;b) \in (C_f)$	$A'(b;a) \in (C_{f^{-1}})$
Admet une asymptote verticale d'équation : $x = a$	Admet une asymptote horizontale d'équation : $y = a$
Admet une asymptote horizontale d'équation : $y = b$	Admet une asymptote verticale d'équation : $x = b$
Admet une asymptote oblique d'équation : $y = ax + b$	Admet une asymptote oblique d'équation : $y = \frac{1}{a}x + \frac{b}{a}$ (qu'on détermine à partir de la relation $x = ay + b$)
Admet une tangente (ou une demi-tangente) verticale	Admet une tangente (ou une demi-tangente) horizontale
Admet une tangente (ou une demi-tangente) horizontale	Admet une tangente (ou une demi-tangente) verticale

Propriété et définition:

La fonction $x \mapsto x^n$ définie sur $\mathbb{R}^+$ admet une fonction réciproque nommée la fonction racine d'ordre n ou racine $n^{ième}$ et qui est notée : $\sqrt[n]{\ }$

$$\sqrt[n]{\ } : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
$$x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}_+^2 ; \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$$

Cas particuliers:

- $\sqrt{x} = \sqrt[2]{x}$ (racine carrée)
- Le nombre $\sqrt[3]{x}$ s'appelle la racine cube de x

Propriétés:

$\forall (x;y) \in \mathbb{R}_+^2 ; \forall n \in \mathbb{N}^*$

- $\sqrt[n]{x^n} = x$
- $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$
- $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$
- $\sqrt[n]{x} \succ \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x \succ y$

$\forall (x;y) \in \mathbb{R}_+^2 ; \forall (m;n) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$

- $\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \times y}$
- $\left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$
- $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} ; y \neq 0$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n \times m]{x}$

Remarque importante (le conjugué):

$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$	$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \dfrac{x-y}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2}}$

Domaine de définition:

La fonction f est définie comme suit :	Son domaine de définition D_f est :
$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$D_f = [0;+\infty[$
$f(x) = \sqrt[n]{u(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ et } u(x) \geq 0\}$

Les limites:

$\lim\limits_{x \to x_0} u(x)$
$l \geq 0$
$+\infty$

$\Rightarrow$

$\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{u(x)}$
$\sqrt[n]{l}$
$+\infty$

Ces limites sont toujours valables lorsqu'on les traite soit à droite ou à gauche de x_0 ou bien au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$

La continuité:

La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$
Si u est une fonction positive et continue sur un intervalle I, alors la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est continue sur l'intervalle I

La dérivabilité:

La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ Et on a : $\forall x \in]0;+\infty[; \left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est dérivable sur l'intervalle I Et on a : $\forall x \in I ; \left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)}{n\sqrt[n]{[u(x)]^{n-1}}}$

Résolution de l'équation $x^n = a$ **avec** $(x \in \mathbb{R})$ **et** $(a \in \mathbb{R})$**:**

	n est pair	n est impair
$a \succ 0$	$S = \left\{-\sqrt[n]{a}; \sqrt[n]{a}\right\}$	$S = \left\{\sqrt[n]{a}\right\}$
$a = 0$	$S = \{0\}$	$S = \{0\}$
$a \prec 0$	$S = \varnothing$	$S = \left\{-\sqrt[n]{-a}\right\}$

Les puissances radiculaires d'un réel strictement positif:

Soit $r = \dfrac{p}{q}$ un nombre rationnel non nul tel que : $p \in \mathbb{Z}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$

$$\forall x \in]0;+\infty[; x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p$$

Remarques:

- $\forall x \in]0;+\infty[; \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$
- Si f est une fonction numérique à variable réelle x définie comme suit : $(r \in \mathbb{Q}^*) ; f(x) = [u(x)]^r$
  Alors son domaine de définition est : $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ et } u(x) \succ 0\}$..
- $\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \left((u(x))^{\frac{1}{n}}\right)' = \dfrac{1}{n} \times u'(x) \times [u(x)]^{\frac{1}{n}-1}$

Pour tout x et y de $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout r et r' de $\mathbb{Q}^*$

$x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$	$\left(x^r\right)^{r'} = x^{r \times r'} = \left(x^{r'}\right)^r$
$(x \times y)^r = x^r \times y^r$	$\left(\dfrac{x}{y}\right)^r = \dfrac{x^r}{y^r}$
$\dfrac{1}{x^r} = x^{-r}$	$\dfrac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$

La suite arithmétique – la suite géométrique:

	D'une suite arithmétique	D'une suite géométrique
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$ (r est la raison)	$u_{n+1} = q \times u_n$ (q est la raison)
Le terme général	$u_n = u_p + (n-p)r$ ($p \le n$)	$u_n = u_p \times q^{n-p}$ ($p \le n$)
La somme de termes successifs	$u_p + \ldots + u_n = (n-p+1)\times\left(\dfrac{u_p + u_n}{2}\right)$	$u_p + \ldots + u_n = u_p \times \left(\dfrac{q^{n-p+1}-1}{q-1}\right)$
a et b et c trois termes successifs	$2b = a + c$	$b^2 = a \times c$

La suite majorée – la suite minorée:

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique

- $(\forall n \in I);u_n \le M \iff (u_n)_{n\in I}$ est majorée par M
- $(\forall n \in I);u_n \ge m \iff (u_n)_{n\in I}$ est minorée par m
- $(u_n)_{n\in I}$ est bornée $\iff (u_n)_{n\in I}$ majorée et minorée

La monotonie d'une suite numérique:

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique

- $(\forall n \in I);u_{n+1} \le u_n (u_{n+1} \prec u_n) \iff (u_n)_{n\in I}$ est décroissante (strictement décroissante)
- $(\forall n \in I);u_{n+1} \ge u_n (u_{n+1} \succ u_n) \iff (u_n)_{n\in I}$ est croissante (strictement croissante)
- $(\forall n \in I);u_{n+1} = u_n \iff (u_n)_{n\in I}$ est constante

Remarque:

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique dont le premier terme est : u_p

- Si $(u_n)_{n\in I}$ est décroissante, alors : $(\forall n \in I);u_n \le u_p$
- Si $(u_n)_{n\in I}$ est croissante, alors : $(\forall n \in I);u_n \ge u_p$

Limite d'une suite:

Limite de la suite $\left(n^{\alpha}\right)$ avec $\alpha \in \mathbb{Q}^*$:

$\alpha \succ 0$	$\alpha \prec 0$
$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha} = +\infty$	$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha} = 0$

Limite de la suite géométrique $\left(q^{n}\right)$ avec $q \in \mathbb{R}$:

$q \succ 1$	$q = 1$	$-1 \prec q \prec 1$	$q \leq -1$
$\lim_{n\to+\infty} q^{n} = +\infty$	$\lim_{n\to+\infty} q^{n} = 1$	$\lim_{n\to+\infty} q^{n} = 0$	Pas de limite

Critères de convergence:

- Toute suite croissante et majorée est une suite convergente
- Toute suite décroissante et minorée est une suite convergente

$$\left.\begin{array}{l} v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim_{x\to+\infty} v_n = l \\ \lim_{x\to+\infty} w_n = l \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} u_n = l$$

$$\left.\begin{array}{l} |u_n - l| \leq v_n \\ \lim_{x\to+\infty} v_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} u_n = l$$

$$\left.\begin{array}{l} u_n \leq v_n \\ \lim_{x\to+\infty} v_n = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} u_n = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} u_n \geq v_n \\ \lim_{x\to+\infty} v_n = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} u_n = +\infty$$

Suite de type $u_{n+1} = f(u_n)$:

Considérons la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_n = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Avec f une fonction continue sur un intervalle I tel que $f(I) \subset I$ et a un élément de I

Si (u_n) converge, alors sa limite l est la solution de l'équation : $f(x) = x$

Les fonctions primitives d'une fonction continue sur un intervalle:

Définition:

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I
On dit que F est une fonction primitive de f sur l'intervalle I
Si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- F est dérivable sur l'intervalle I
- $(\forall x \in I);F'(x)=f(x)$

Propriétés:

Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I
Si F est une fonction primitive de f sur l'intervalle I, alors toutes les fonctions primitives de f sont définies sur l'intervalle I comme suit :
$x \mapsto F(x)+k \;;\; (k\in\mathbb{R})$

Soit f une fonction numérique qui admet une fonction primitive sur un intervalle I
Et soit x_0 un élément de I et y_0 un réel quelconque de $\mathbb{R}$
Il existe une unique fonction primitive F de f sur l'intervalle I qui vérifie la condition initiale:
$F(x_0)=y_0$

Les primitives de $f+g$ et kf : $(k\in\mathbb{R})$

Propriété:

Soit f et g deux fonctions numériques définies sur un intervalle I et k un réel
Si F et G sont deux primitives de f et g successivement sur l'intervalle I alors :

- $F+G$ est une fonction primitive de $f+g$ sur l'intervalle I
- kF est une fonction primitive de kf sur l'intervalle I

Tableau des primitives de quelques fonctions usuelles:

$f(x)$	$F(x)$
$a \in \mathbb{R}$	$ax + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-1}{x} + k$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$
x^r ; $(r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\})$	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + k$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + k$
e^x	$e^x + k$

Utilisation des formules de dérivée pour la détermination de quelques primitives:

$f(x)$	$F(x)$
$u'(x) + v'(x)$	$u(x) + v(x) + \mathrm{k}$
$au'(x)$; $(\mathrm{a} \in \mathbb{R})$	$au(x)$
$u'(x) \times \mathrm{v}(\mathrm{x}) + u(x) \times v'(x)$	$u(x) \times v(x) + \mathrm{k}$
$\frac{-v'(x)}{[\mathrm{v}(x)]^2}$	$\frac{1}{\mathrm{v}(x)} + \mathrm{k}$
$\frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{[\mathrm{v}(x)]^2}$	$\frac{u(x)}{v(x)} + \mathrm{k}$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)} + \mathrm{k}$
$u'(x) \times [u(x)]^r$; $(r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\})$	$\frac{[u(x)]^{r+1}}{r+1} + \mathrm{k}$
$\frac{u'(x)}{u(x)} + \mathrm{k}$	$\ln\lvert u(x)\rvert + \mathrm{k}$
$u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$	$\mathrm{e}^{u(x)} + \mathrm{k}$
$\cos(ax + b)$; $(\mathrm{a} \neq 0)$	$\frac{1}{a}\sin(ax + b) + \mathrm{k}$
$\sin(ax + b)$; $(\mathrm{a} \neq 0)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax + b) + \mathrm{k}$

Intégral d'une fonction continue sur un segment:

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et F une primitive de f sur $[a;b]$

L'intégral de la fonction f entre a et b est le nombre réel :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

propriétés:

$\int_a^a f(x)dx = 0$	$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

La linéarité:

$(k \in \mathbb{R})$; $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$	$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

Relation de Chasles:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Intégral et comparaison:

Si : $\forall x \in [a;b]$ on a $f(x) \geq 0$ Alors : $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$	Si : $\forall x \in [a;b]$ on a $f(x) \geq g(x)$ Alors : $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

La valeur moyenne:

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$

La valeur moyenne de la fonction f sur le intervalle $[a;b]$ est le réel défini par : $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Intégration par partie:

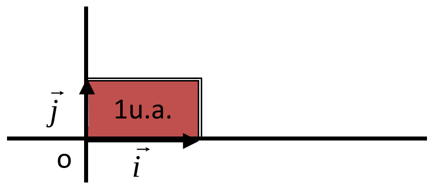
Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a;b]$ à condition que f' et g' soient continues sur l'intervalle $[a;b]$

$$\int_a^b [f'(x) \times g(x)]dx = [f(x) \times g(x)]_a^b - \int_a^b [f(x) \times g'(x)]dx$$

Calcul de l'aire algébrique d'un domaine plan:

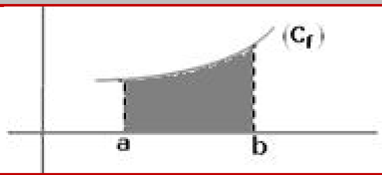
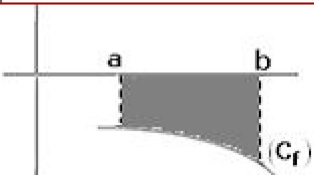
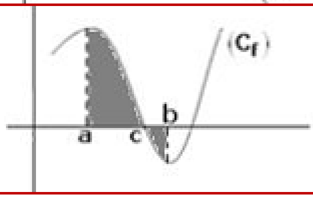
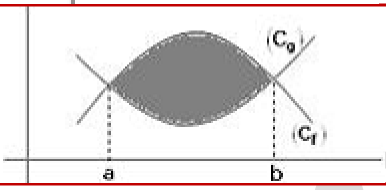
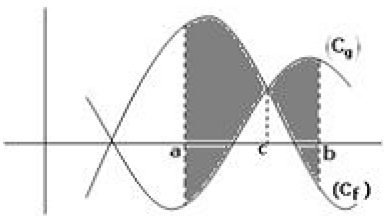
Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$
L'unité de surface (u.a.): est la surface d'un rectangle défini par le point O (origine du repère) et les deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$

$1u.a. = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$



Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ L'aire algébrique délimitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ est représentée par : $\left(\int_a^b \lvert f(x)\rvert dx\right) u.a.$	Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ L'are algébrique comprise entre la courbe (C_f), la courbe (C_g), et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ est représentée par : $\left(\int_a^b \lvert f(x)-\mathrm{g}(x)\rvert dx\right) u.a.$

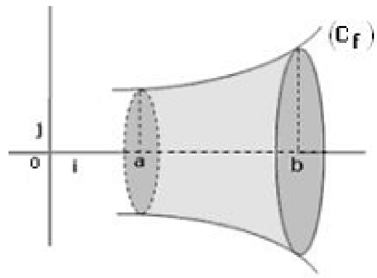
Cas particulier:

La représentation	Remarques	Aire algébrique du domaine plan gris dans la représentation
	f positive sur $[a;b]$	$\left(\int_a^b f(x)dx\right) u.a.$
	f négative sur $[a;b]$	$\left(\int_a^b (-f(x))dx\right) u.a.$
	• f positive sur $[a;c]$ • f négative sur $[\mathrm{c};\mathrm{b}]$	$\left(\int_a^c f(x)dx+\int_c^b (-f(x))dx\right) u.a.$
	(C_f) se situe au-dessus de (C_g) sur $[a;b]$	$\left(\int_a^b f(x)-\mathrm{g}(x)dx\right) u.a.$
	• (C_f) se situe au-dessus de (C_g) sur $[a;c]$ • (C_f) se situe au-dessous de (C_g) sur $[\mathrm{c};\mathrm{b}]$	$\left(\int_a^c (f(x)-\mathrm{g}(x))dx+\int_c^b (\mathrm{g}(x)-f(x))dx\right) u.a.$

Calcul d'un volume:

Le volume du solide engendré par un tour complet, de la courbe (C_f), autour de l'axe des abscisses dans un intervalle $[a;b]$ est :

$$V=\left[\int_a^b \pi(f(x))^2\,dx\right] u.a.$$



La fonction logarithme népérien:

Définition :

La fonction logarithme népérien, notée $\ln$ (ou $\log_e$), est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1

Déductions et propriétés:

- $\ln e = 1$; $\ln 1 = 0$
- $\forall x \in]0;+\infty[$ et $\forall y \in]0;+\infty[$
  - $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$
  - $\ln x \succ \ln y \Leftrightarrow x \succ y$
- $\forall x \in]0;+\infty[$ et $\forall y \in \mathbb{R}$
  - $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$
- $\forall x \in]0;+\infty[$ et $\forall y \in]0;+\infty[$
  - $\ln xy = \ln x + \ln y$
  - $\ln x^r = r\ln x \ ; (r \in \mathbb{Q})$
  - $\ln \frac{1}{y} = -\ln y$
  - $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$

Si n est pair, alors $(\forall x \in \mathbb{R}^*); \ln x^n = n \ln|x|$

Le Domaine de définition:

La fonction f est définie comme suit :	Son domaine de définition est :
$f(x) = \ln x$	$D_f =]0;+\infty[$
$f(x) = \ln[u(x)]$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ et } u(x) \succ 0\}$

Les limites:

Limites principales		Déductions
$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$		$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \ln[u(x)] = +\infty$
$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$		$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0^+ \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \ln[u(x)] = -\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$	$(n \in \mathbb{N}^*)$	$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\ln[u(x)]}{[u(x)]^n} = 0$
$\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0$	$(n \in \mathbb{N}^*)$	$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0^+ \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} [u(x)]^n \ln[u(x)] = 0$
$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$		$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\ln[u(x)]}{u(x) - 1} = 1$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x + 1)}{x} = 1$		$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\ln[u(x) + 1]}{u(x)} = 1$

Ces limites sont toujours valables lorsqu'on les traite soit a droite ou a gauche de x_0 ou bien au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$

La continuité:

La fonction $x \mapsto \ln x$ est continue sur l'intervalle $]0;+\infty[$

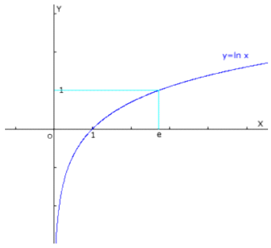
Si u est strictement positive et continue sur un intervalle I alors la fonction $x \mapsto \ln[u(x)]$ est continue sur l'intervalle I

La dérivabilité:

La fonction $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et on a :
$$\forall x \in]0;+\infty[\; ; \; (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Si u est strictement positive et dérivable sur un intervalle I alors la fonction $x \mapsto \ln[u(x)]$ est dérivable sur l'intervalle I et on a :
$$\forall x \in I \; ; \; (\ln[u(x)])' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

La représentation graphique:



signe de $\ln$:

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	$-$	0	$+$

La fonction logarithme de base a avec $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$:

Définition:

La fonction logarithme de base a est la fonction notée : $\log_a$

tel que : $\forall x \in]0;+\infty[\; ; \; \log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

Cas particulier: la fonction $\log_{10}$ est la fonction logarithme décimal et on la note $\log$

Déductions et propriétés:

$\log_a 1 = 0$ $\log_a a = 1$	$\forall x \in]0;+\infty[$ et $\forall y \in]0;+\infty[$ et $r \in \mathbb{Q}$ $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ $\log_a x^r = r \log_a x$ $\log_a \left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$ $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
$\forall x \in]0;+\infty[$ et $\forall r \in \mathbb{Q}$ $\log_a x = r \Leftrightarrow x = a^r$	

Limites et inéquations:

$a \succ 1$	$0 \prec a \prec 1$
$\log_a x \succ \log_a y \Leftrightarrow x \succ y$	$\log_a x \succ \log_a y \Leftrightarrow x \prec y$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$

La dérivée:

$$\forall x \in]0;+\infty[\; ; \; (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

La fonction exponentielle népérienne:

Définition :

La fonction exponentielle népérien, notée e^x (ou $\exp(x)$), est la fonction réciproque de la fonction $x \mapsto \ln x$, et qui est définie sur $\mathbb{R}$

Déductions et propriétés:

$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \succ 0$ $\ln e^x = x$	$\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}$ $e^x \times e^y = e^{x+y}$ $\left(e^x\right)^r = e^{rx}$; $(r \in \mathbb{Q})$ $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$ $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$
$\forall x \in \left]0;+\infty\right[\quad e^{\ln(x)} = x$	
$\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}$ • $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$ • $e^x \succ e^y \Leftrightarrow x \succ y$	
$\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \left]0;+\infty\right[$ • $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$	

Si n est pair, alors $\left(\forall x \in \mathbb{R}^*\right); \ln x^n = n \ln\left|x\right|$

Le Domaine de définition:

La fonction f est définie comme suit :	Son domaine de définition est :
$f(x) = e^x$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = e^{u(x)}$	$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / x \in D_u\right\}$

Les limites:

Limites principales		Déductions
$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$		$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} e^{u(x)} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$		$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} e^{u(x)} = 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$	$\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$	$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{e^{u(x)}}{\left[u(x)\right]^n} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$	$\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$	$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \left[u(x)\right]^n e^{u(x)} = 0$
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$		$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{e^{u(x)} - 1}{u(x)} = 1$

Ces limites sont toujours valables lorsqu'on les traite soit a droite ou a gauche de x_0 ou bien au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$

La continuité:

La fonction $x \mapsto e^{x}$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$

Si u est continue sur un intervalle I alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est continue sur l'intervalle I

La dérivabilité:

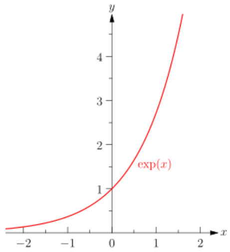
La fonction $x \mapsto e^{x}$ est dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \; ; \left(e^{x}\right)' = e^{x}$$

Si u est dérivable sur un intervalle I alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur l'intervalle I et on a :

$$\forall x \in I \; ; \left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \times e^{u(x)}$$

La représentation graphique:



La fonction exponentielle de base a avec $a \in \mathbb{R}_{+}^{*} - \{1\}$:

Définition:

La fonction exponentielle de base **a**, notée : a^{x} , est la réciproque de $\log_a$

Déductions et propriétés:

$\forall x \in \mathbb{R} \quad a^{x} = e^{x \ln a}$ $\log_a(a^{x}) = x$	$\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{Q}$ $a^{x} \times a^{y} = a^{x+y}$ $\left(a^{x}\right)^{r} = a^{rx}$ $\dfrac{1}{a^{x}} = a^{-x}$ $\dfrac{a^{x}}{a^{y}} = a^{x-y}$
$\forall x \in]0;+\infty[\quad a^{\log_a x} = x$	
$a^{x} = a^{x} \Leftrightarrow x = y$	
$\forall x \in \mathbb{R} \; \forall y \in]0;+\infty[$ $a^{x} = y \Leftrightarrow x = \log_a y$	

Limites et inéquations:

$a \succ 1$	$0 \prec a \prec 1$
$a^{x} \succ a^{y} \Leftrightarrow x \succ y$	$a^{x} \succ a^{y} \Leftrightarrow x \prec y$
$\lim\limits_{x \to +\infty} a^{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} a^{x} = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} a^{x} = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} a^{x} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^{x} - 1}{x} = \ln a$	

La dérivée:

$$\forall x \in]0;+\infty[\; ; \left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$$

Définition:

L'ensemble des nombres complexes s'écrit : $\mathbb{C} = \{ z = a + ib \ / \ (a;b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } i^2 = -1 \}$

L'écriture algébrique d'un nombre complexe:

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec : $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

- $a + ib$ est l'écriture algébrique du nombre complexe z
- Le nombre a est la partie réelle de z , notée : $\mathrm{Re}(z)$
- Le nombre b est la partie imaginaire de z , notée : $\mathrm{Im}(z)$

Cas particulier:

- Si $\mathrm{Im}(z) = 0$, alors z est un nombre réel
- Si $\mathrm{Re}(z) = 0$, alors z est un nombre imaginaire pur

Egalité de deux nombres complexes:

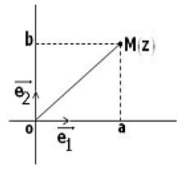
Soit z et z' deux nombres complexes

$$z = z' \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \text{ et } \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')$$

Représentation graphique d'un nombre complexe:

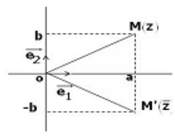
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec : $(a;b) \in \mathbb{R}^2$
On relie le nombre complexe z avec le point $M(a;b)$
Le nombre z s'appelle l'affixe du point M et le point M s'appelle l'image du nombre z et on écrit : $M(z)$



Conjugué d'un nombre complexe:

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec : $(a;b) \in \mathbb{R}^2$
Le conjugué du nombre complexe z est le complexe noté $\bar{z}$ avec $\bar{z} = a - ib$



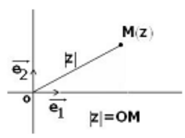
$M(z)$ و $M'(\bar{z})$ متماثلان بالنسبة للمحور الحقيقي

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$
- $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$
- $\overline{z^n} = \bar{z}^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
- $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z'}}$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}} \quad (z' \neq 0)$

- $\bar{z} = z \Leftrightarrow$
- $\bar{z} = -z \Leftrightarrow$
- $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$
- $z - \bar{z} = 2\,\mathrm{Im}(z)$
- $z \times \bar{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2$

Module d'un nombre complexe:

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec : $(a;b) \in \mathbb{R}^2$
Le module du nombre complexe z est le nombre réel positif $|z|$ avec : $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

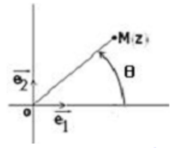


$\|z^n\| = \|z\|^n \ ; \ n \in \mathbb{N}^*$	$\|-z\| = \|z\|$	$\|z \times z'\| = \|z\| \times \|z'\|$
$\|\bar{z}\| = \|z\|$	$\left\|\frac{1}{z'}\right\| = \frac{1}{\|z'\|} \ (z' \neq 0)$	$\left\|\frac{z}{z'}\right\| = \frac{\|z\|}{\|z'\|} \ (z' \neq 0)$

L'argument d'un nombre complexe non nul:

Soit z un nombre complexe non nul et M son image
L'argument du nombre complexe z est θ l'un des mesures de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{OM}\right)$

On le note: $\arg(z)$ et on écrit: $\arg(z)\equiv\theta[2\pi]$



La forme trigonométrique et la notation exponentielle d'un nombre complexe non nul:

Soit z un nombre complexe non nul
On pose : $r=|z|$ et $\arg(z)\equiv\theta[2\pi]$

- La forme trigonométrique du complexe z est : $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=[r,\theta]$
- La notation exponentielle du complexe z est : $z=re^{i\theta}$

Cas particulier:

L'écriture trigonométrique (réduite) d'un nombre réel a non nul

$a\succ 0$	$a\prec 0$
$a=[a,0]$	$a=[-a,\pi]$
$ai=\left[a,+\frac{\pi}{2}\right]$	$ai=\left[-a,-\frac{\pi}{2}\right]$

$\arg(zz')=(\arg(z)+\arg(z'))[2\pi]$	$[r,\theta]\times[r',\theta']=[r\times r',\theta+\theta']$	$re^{i\theta}\times r'e^{i\theta'}=(r\times r')e^{i(\theta+\theta')}$
$\arg(\bar{z})=-\arg(z)[2\pi]$	$\overline{[r,\theta]}=[r,-\theta]$	$\overline{re^{i\theta}}=re^{-i\theta}$
$-\arg(z)=(\pi+\arg(z))[2\pi]$	$-[r,\theta]=[r,\pi+\theta]$	$-re^{i\theta}=re^{i(\pi+\theta)}$
$\arg(z^n)=n\arg(z)[2\pi]$	$[r,\theta]^n=[r^n,n\times\theta]$	$(re^{i\theta})^n=r^ne^{in\theta}$
$\arg\left(\frac{1}{z}\right)=-\arg(z)[2\pi]$	$\frac{1}{[r,\theta]}=\left[\frac{1}{r},-\theta\right]$	$\frac{1}{re^{i\theta}}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}$
$\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=(\arg(z)-\arg(z'))[2\pi]$	$\frac{[r,\theta]}{[r',\theta']}=\left[\frac{r}{r'},\theta-\theta'\right]$	$\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}}=\frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

• $\forall k\in\mathbb{Z}$; $[r,\theta+2k\pi]=[r,\theta]$	• $arg(z)=k\pi\Leftrightarrow z$ est un réel ($k\in\mathbb{Z}$) • $arg(z)=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow z$ est un imaginaire pur ($k\in\mathbb{Z}$)

Formule de MOIVRE:

$\forall n\in\mathbb{N}$

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

Formules d'EULER:

$\forall\theta\in\mathbb{R}$

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\text{ et }\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

Résolution de l'équation $z^2=a$ $(z\in\mathbb{C})$ avec $(a\in\mathbb{R})$:

L'équation		Ensembles de solutions
$z\in\mathbb{C}$; $z^2=a$	$a\succ 0$	$S=\{-i\sqrt{a};i\sqrt{a}\}$
	$a=0$	$S=\{0\}$
	$a\prec 0$	$S=\{-i\sqrt{-a};i\sqrt{-a}\}$

Résolution de l'équation $z\in\mathbb{C}$; $az^2+bz+c=0$ avec a et b et c des réels et $a\neq 0$:

L'équation		Ensembles de solutions
$z\in\mathbb{C}$; $az^2+bz+c=0$ $(\Delta=b^2-4ac)$	$\Delta\succ 0$	$S=\left\{\frac{-b-i\sqrt{\Delta}}{2a};\frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$
	$\Delta=0$	$S=\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$
	$\Delta\prec 0$	$S=\left\{\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a};\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right\}$

Notions géométriques:

La notion géométrique	La relation complexe
La distance AB	$AB=\lvert z_B-z_A\rvert$
I centre du segment $[AB]$	$z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$
Mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$	$\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$
A et B et C des points alignés	$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$
A et B et C et D des points cocycliques	$\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\times\frac{z_D-z_C}{z_B-z_C}\in\mathbb{R}$ ou $\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\times\frac{z_B-z_C}{z_D-z_C}\in\mathbb{R}$

La relation complexe	La notion géométrique
$\lvert z-z_A\rvert=r$; $(r\succ 0)$	$AM=r$ M appartient au cercle de centre A et de rayon r
$\lvert z-z_A\rvert=\lvert z-z_B\rvert$	$AM=AB$ M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$
$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[r;\pm\frac{\pi}{2}\right]$	ABC est un triangle rectangle au point A
$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=[1;\theta]$	ABC est un triangle isocèle au point A
$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[1;\pm\frac{\pi}{2}\right]$	ABC est un triangle rectangle et isocèle au point A
$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[1;\pm\frac{\pi}{3}\right]$	ABC est un triangle équilatéral

La représentation complexe de quelques transformations usuelles:

La transformation	La représentation complexe
La translation : $t_{\vec{u}}$	$z'=z+b$, avec b est l'affixe du vecteur $\vec{u}$
L'homothétie : $h(\Omega;k)$	$z'-\omega=k(z-\omega)$, avec ω l'affixe du point Ω
La rotation : $R(\Omega;\theta)$	$z'-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)$, avec ω l'affixe du point Ω

L'équation différentielle	La solution générale de L'équation différentielle
$y' = ay + b$	$y(x) = \alpha e^{ax} - \dfrac{b}{a}$ $a \in \mathbb{R}^2$

L'équation différentielle	L'équation caractéristique	L'équation caractéristique admet :		La solution générale de L'équation différentielle
$y'' + ay' + by = 0$	$r^2 + ar + b = 0$ $(\Delta = b^2 - 4ac)$	$\Delta \succ 0$	Deux différentes solutions réelles r_1 et r_2	$y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$
		$\Delta = 0$	Une solution réelle r	$y(x) = (\alpha x + \beta)e^{rx}$ $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$
		$\Delta \prec 0$	Deux solutions complexes conjuguées $r_1 = p - iq$ et $r_2 = p + iq$	$y(x) = (\alpha \cos(qx) + \beta \sin(qx))e^{px}$ $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$

Dans ce chapitre du cours, l'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

Formule analytique du : produit scalaire-norme d'un vecteur-produit vectoriel:

Soit $\vec{u}(a;b;c)$ et $\vec{v}(a';b';c')$ deux vecteurs de $\mathcal{V}^3$ (l'espace vectoriel)

$\vec{u}.\vec{v} = aa' + bb' + cc'$ (Produit scalaire)

$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ (norme d'un vecteur)

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & a & a' \\ \vec{j} & b & b' \\ \vec{k} & c & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}\vec{k}$$ (Produit vectoriel)

La distance:

La distance entre deux points A et B est égale à :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

La distance entre un point M et un plan (P) d'équation cartésienne : $ax + by + cz + d = 0$ est :

$$d(M;(P)) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

La distance entre un point M et une droite $\Delta(A;\vec{u})$ est : $d(M;(\Delta)) = \dfrac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

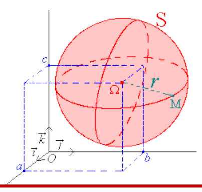
Equation d'un plan:

$(P): ax + by + cz + d = 0 \Leftrightarrow \vec{n}(a;b;c)$ est un vecteur normal au plan (P)

Si A, B et C sont trois points non alignés, alors $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC), et dans ce cas on peut déduire l'équation cartésienne du plan (ABC) à l'aide de l'équivalence suivante : $M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) = 0$

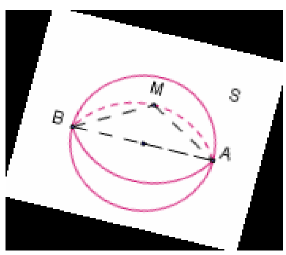
Equation d'une sphère:

L'équation d'une sphère (S) de centre $\Omega(a;b;c)$ et de rayon r est : $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$



L'équation d'une sphère (S) dont l'un de ces diamètres est $[AB]$ peut se déterminer à l'aide de l'équivalence suivante : $M \in (S) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

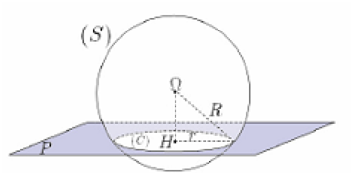
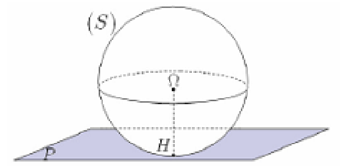
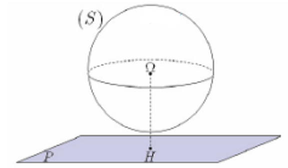
Remarque: dans ce cas la sphère (S) est de centre Ω milieu du segment $[AB]$ et de rayon $r = \dfrac{AB}{2}$



Intersection d'une sphère $S(\Omega;R)$ **et un plan** $(P): ax+by+cz+d=0$ **:**

Soit H la projection orthogonale du centre Ω sur le plan (P)

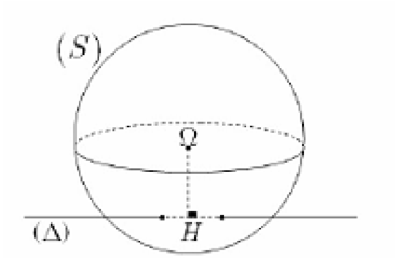
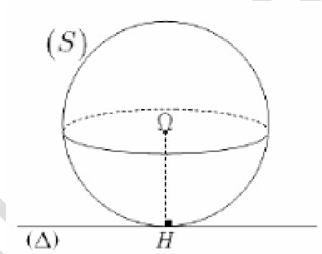
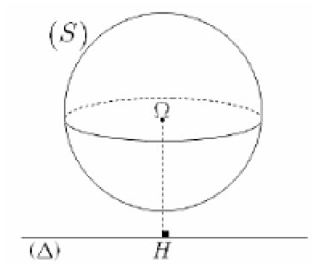
On pose : $d = \Omega H = d\left(\Omega;(P)\right)$

$d \prec R$	$d = R$	$d \succ R$
		
Le plan (P) coupe la sphère (S) selon un cercle (C) de centre H et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$	Le plan (P) est tangent à la sphère (S)	Le plan (P) ne coupe pas la sphère (S)

Intersection d'une sphère $S(\Omega;R)$ **et une droite** (Δ) **:**

Soit H la projection orthogonale du centre Ω sur la droite (Δ)

On pose : $d = \Omega H = d\left(\Omega;(\Delta)\right)$

$d \prec R$	$d = R$	$d \succ R$
		
La droite (Δ) coupe la sphère (S) en deux points différents	La droite (Δ) est tangente à la sphère (S)	La droite (Δ) ne coupe pas la sphère (S)

Cardinal d'un ensemble:

Définition:

Le cardinal d'un ensemble fini E est le nombre des éléments de cet ensemble et on le note : $CardE$

Cas particulier: $Card\varnothing = 0$

Propriété:

A et B sont deux ensembles finis

$Card\left(A \cup B\right) = CardA + CardB - Card\left(A \cap B\right)$

Accompli d'un ensemble:

Définition :

Soit A une partie d'un ensemble fini E

L'accompli de A par rapport à l'ensemble E est l'ensemble noté $\overline{A}$ avec : $\overline{A} = \left\{x \in E \;/\; x \notin A\right\}$

Remarques:

- $A \cap \overline{A} = \varnothing$
- $A \cup \overline{A} = E$
- $Card\,\overline{A} = CardE - CardA$

Le principe fondamental du dénombrement:

Si une opération globale peut se décomposer en p opérations élémentaires successives ($p \in \mathbb{N}^*$), ces dernières pouvant s'effectuer respectivement de n_1 ; n_2 ;...; n_p manières différentes, alors l'opération globale peut se faire de: $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_p$ manières différentes.

Arrangement avec répétition – sans répétition:

Arrangement avec répétition:

Soit n et p deux éléments de $\mathbb{N}^*$ ($p \leq n$)

Le nombre d'arrangement avec répétition, de p éléments parmi n , est : n^p

Arrangement sans répétition:

Soit n et p deux éléments de $\mathbb{N}^*$ ($p \leq n$)

Le nombre d'arrangement sans répétition, de p éléments parmi n , est :

$$A_n^p = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)}_{p-facteurs}$$

Cas particulier:

Tout arrangement sans répétition de n éléments parmi n éléments s'appelle une permutation de n éléments et il est égal à : $A_n^n = n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$

Les combinaisons:

Soit E un ensemble fini contenant n éléments
Toute partie A de E contenant p éléments ($p \leq n$), s'appelle une combinaison de p éléments parmi n éléments, et le nombre de ses combinaisons est : $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$

Les nombres n! et A_n^p et C_n^p :

($n \in \mathbb{N}^*$) ;	$n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times 2\times 1$ $0! = 1$		
$C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$		$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$	
$C_n^n = 1$	$C_n^1 = n$	$C_n^0 = 1$	$C_n^{n-1} = n$ $C_n^p = C_n^{n-p}$
$C_n^p = C_n^{n-p}$		$C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p$	

Nombre de possibilité d'arrangement de n éléments:

Si on a, n_1 éléments de type A , et n_2 éléments de type B , et n_3 éléments de type C , parmi n éléments, avec $n = n_1 + n_2 + n_3$, alors le nombre de possibilité d'arranger ses éléments est : $\dfrac{n!}{n_1!n_2!n_{3!}}$

Quelques types de tirage:

On tire p éléments parmi n éléments ($p \leq n$) et on résume les résultats dans le tableau suivant :

Type de tirage	Nombre de tirages possibles	Importance de l'ordre de tirage
Simultané	C_n^p	Pas important
Successif et avec remise	n^p	important
Successif et sans remise	A_n^p	important

Terminologie:

Terme de probabilité	Son sens
Expérience aléatoire	Toute expérience qui admet plus d'un résultat
Univers des événements Ω	L'ensemble des événements possibles pour une expérience aléatoire
Evénement A	A est une partie de l'univers des événements Ω
Evénement élémentaire	Tout événement contenant un seul élément
Réalisation de l'événement $A \cap B$	Si A et B sont réalisés simultanément
Réalisation de l'événement $A \cup B$	Si A et B ou l'un des deux est réalisé
L'événement contraire de A	C'est l'événement $\overline{A}$ ($A \cap \overline{A} = \varnothing$ et $A \cup \overline{A} = \Omega$)
A et B deux événements incompatibles	$A \cap B = \varnothing$

Stabilité d'un événement – probabilité d'un événement:

Définition:

Soit Ω l'univers des événements d'une expérience aléatoire

- Quand la probabilité d'un événement élémentaire $\{\omega_i\}$ se stabilise sur une valeur p_i, on dit que la probabilité de l'événement $\{\omega_i\}$ est : p_i et on écrit : $P(\{\omega_i\}) = p_i$
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités élémentaires qui le compose. C'est-à-dire, si $A = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; ...; \omega_n\}$ est un événement de l'univers Ω, alors la probabilité de l'événement A est : $P(A) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + P(\{\omega_3\}) + ... + P(\{\omega_n\})$

Propriétés:

Soit Ω l'univers des événements d'une expérience aléatoire

- $P(\varnothing) = 0$ et $P(\Omega) = 1$
- $0 \leq P(A) \leq 1$ pour tout événement A de Ω
- Probabilité de l'union de deux événements:
  Pour tous événements A et B de Ω
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  - Si $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, on dit que A et B sont incompatibles
- Probabilité de l'événement contraire:
  Pour tout événement A de Ω : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Hypothèse d'équiprobabilité:

Définition:

Si tous les événements élémentaires, dans une expérience aléatoire dont l'univers des événements est Ω, sont équiprobables, alors la probabilité de tout événement A de Ω est : $P(A) = \dfrac{CardA}{Card\,\Omega}$

Probabilité conditionnelle – indépendance de deux événements:

Définition:

Soit A et B deux événements liés à une même expérience aléatoire tel que : $P(A) \neq 0$
La probabilité d'un événement B sachant que l'événement A est réalisé est :
$P_A(B) = P\left(B/A\right) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Résultat:

Pour tous événements A et B liés à une même expérience aléatoire tel que : $P(A)\times P(B)\neq 0$

On a : $P(A\cap B)=P(A)\times P\left(B/A\right)=P(B)\times P\left(A/B\right)$

Définition:

Pour tous événements A et B liés à une même expérience aléatoire
$P(A\cap B)=P(A)\times P(B) \Leftrightarrow$ A et B sont deux événements indépendants

Propriété:

Soit Ω un univers d'événements d'une expérience aléatoire, et Ω_1 et Ω_2 deux sous-univers de Ω ($\Omega_1\cap\Omega_2=\varnothing$ et $\Omega_1\cup\Omega_2=\Omega$)

Pour tout événement A de Ω : $P(A)=p(\Omega_1)\times p\left(A/\Omega_1\right)+p(\Omega_2)\times p\left(A/\Omega_2\right)$

Loi de probabilité d'une variable aléatoire:

Soit X une variable aléatoire sur Ω univers d'événements d'une expérience aléatoire
Pour déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X , on suit les deux étapes suivantes :

- Détermination de $X(\Omega)=\{x_1;x_2;x_3;...;x_n\}$ l'ensemble des valeurs que peut prendre X
- Calcul des probabilités $p(X=x_i)$ pour tout i de l'ensemble $\{1;2;3;...;n\}$

L'espérance mathématique – la variance – l'écart type d'une variable aléatoire:

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est représentée dans le tableau à côté :

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$p(X=x_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Définitions:

L'espérance mathématique de X	$E(X)=x_1\times p_1+x_2\times p_2+x_3\times p_3+...+x_n\times p_n=\sum_{i=1}^{n}x_i\times p_i$
La variance de X	$v(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2\times p_i-\left[\sum_{i=1}^{n}x_i\times p_i\right]^2$
L'écart type de X	$\sigma(X)=\sqrt{v(X)}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2\times p_i-\left[\sum_{i=1}^{n}x_i\times p_i\right]^2}$

La loi binomiale:

Soit p la probabilité d'un événement A dans une expérience aléatoire
On répète cette épreuve n fois de suite
La variable aléatoire X qui lie chaque résultat au nombre de fois que cet événement se réalise s'appelle une variable aléatoire binomiale de paramètres n et p

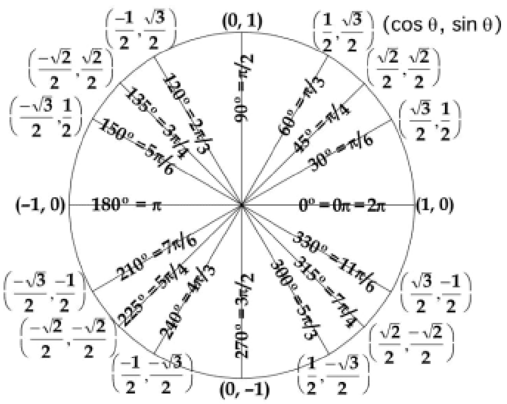
Et on a : $\forall k\in\{0;1;2;3;...;n\}$; $p(X=k)=C_n^k\times p^k\times(1-p)^{n-k}$

Et $E(X)=n\times p$

Et $v(X)=n\times p\times(1-p)$

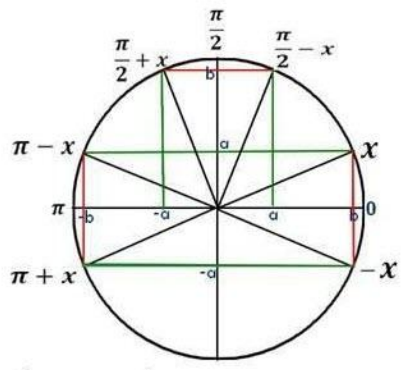
Tableau des valeurs habituelles et le cercle trigonométrique:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	



Relations entre les Ratios trigonométriques:

	$-x$	$\pi - x$	$\pi + x$	$\frac{\pi}{2} - x$	$\frac{\pi}{2} + x$
sin	$-\sin x$	$\sin x$	$-\sin x$	$\cos x$	$\cos x$
cos	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$



$\cos(x+2k\pi)=\cos x$ $\sin(x+2k\pi)=\sin x$ $\tan(x+k\pi)=\tan x$	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$-1 \le \cos x \le 1$ $-1 \le \sin x \le 1$ $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Equations trigonométriques essentielles:

$\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$

$\sin x = \sin a \Leftrightarrow x = -a + 2k\pi$ ou $x = (\pi - a) + 2k\pi$

$\tan x = \tan a \Leftrightarrow x = a + k\pi$; $(k \in \mathbb{Z})$

Formules d'addition (soustraction):

$$\cos(a-b)=\cos a\times\cos b+\sin a\times\sin b$$

$$\sin(a-b)=\sin a\times\cos b-\cos a\times\sin b$$

$$\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\times\tan b}$$

$$\cos(a+b)=\cos a\times\cos b-\sin a\times\sin b$$

$$\sin(a+b)=\sin a\times\cos b+\cos a\times\sin b$$

$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\times\tan b}$$

Résultats:

En posant : $t=\tan\frac{a}{2}$

$$\sin a=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos a=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\tan a=\frac{2t}{1-t^2}$$

$$\sin 2a=2\sin a\times\cos a$$

$$\tan 2a=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$

$$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a=\frac{1-\tan^2 a}{1+\tan^2 a}$$

Linéarisation (Formules de CARNOT)

$$\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$$

$$\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$$

$$\tan^2 a=\frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$$

Formules produit-somme:

$$\cos a\times\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$$

$$\sin a\times\sin b=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)-\cos(a-b)\right]$$

$$\sin a\times\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$$

$$\cos a\times\sin b=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)-\sin(a-b)\right]$$

Formules somme-produit (formules de SIMPSON)**:**

$$\cos p+\cos q=2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$$

$$\cos p-\cos q=-2\sin(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$$

$$\sin p+\sin q=2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$$

$$\sin p-\sin q=2\cos(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$$

$$\tan p+\tan q=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\times\cos q}$$

$$\tan p-\tan q=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\times\cos q}$$

Conversion de la formule $a\cos x+b\sin x$; $(a;b)\neq(0;0)$**:**

$$a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)$$

Avec α **un réel vérifiant :** $\sin(\alpha)=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ **et** $\cos(\alpha)=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$