FOMESOUTRA

ÇA SOUTRA !!!

Cahier d'activités

Filières Tertiaires

MATHEMATIQUES

BT C. 1A

1ière édition

DOC 1

2025

Chapitre 1

Calculs numériques

Maitriser les différents types de calculs des nombres réels

ChingEval : 5 exercices disponibles pour l'évaluation par QCM

1. *Calcul dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$*

E.1

Définitions :
On classe les nombres suivants leurs natures :

- Tous les nombres admettant une écriture décimale forment l'ensemble des **nombres décimaux** noté $\mathbb{D}$.
- Tous les nombres admettant une écriture sous la forme d'un quotient de deux entiers forment l'ensemble des **nombres rationnels** noté $\mathbb{Q}$.

On considère les deux expressions :

$$A = 5 - 4x \quad ; \quad B = \frac{2 \cdot x + 2}{x - 1}$$

1. Évaluer chacune des deux expressions A et B pour chacun des nombres $x=2$ et $x=-5$.
2. Compléter le tableau ci-dessous avec les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$ pour indiquer le plus petit ensemble auquel appartient chacun de ces nombres :

	$x=2$	$x=-5$
$A=5-4x$		
$B=\dfrac{2 \cdot x+2}{x-1}$		

E.2 On considère les deux expressions :
$A = x^2 - 3x + 1 \quad ; \quad B = -6x^2 + x + 3$

1. Évaluer chacune des deux expressions A et B pour chacun des nombres $x=-1$ et $x=\dfrac{1}{2}$.
2. Compléter le tableau ci-dessous avec les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$ pour indiquer le plus petit ensemble auquel appartient chacun de ces nombres :

	$x=-1$	$x=\dfrac{1}{2}$
$A=x^2-3x+1$		
$B=-6x^2+x+3$		

2. *Ensemble $\mathbb{D}$ et encadrement*

E.3

Définition : un **nombre décimal** est un nombre qui admet une écriture décimale s'écrivant avec un nombre fini de chiffres.

L'ensemble de tous les nombres décimaux se note $\mathbb{D}$. est l'ensemble formé de tous les nombres décimaux.

1. On considère le nombre π dont une valeur approchée est : $\pi \approx 3{,}14159265$
   a. Donner l'encadrement du nombre π au dixième près.
   b. Donner l'encadrement du nombre π au millième près
2. On considère le nombre $\sqrt{2}$ dont une valeur approchée est : $\sqrt{2} \approx 1{,}4142136$
   a. Donner l'encadrement du nombre $\sqrt{2}$ au dixième près.
   b. Donner l'encadrement du nombre $\sqrt{2}$ au millième près

E.4
1. Donner un nombre d appartenant à l'ensemble $\mathbb{D}$ et vérifiant l'encadrement : $\dfrac{4}{49} < d < \dfrac{5}{49}$
2. Donner un nombre d' tel que $d' \in \mathbb{D}$ et $\sqrt{2} < d' < \sqrt{3}$.

E.5 On considère le carré et le disque ci-dessous :

$\mathcal{A} = c^2$ $\qquad$ $\mathcal{A} = \pi \times r^2$

1. Sachant que l'aire du carré est de $5\,m^2$, donner un encadrement, au centième près, de la mesure du côté de ce carré.
2. Sachant que l'aire du disque est de $4\,m^2$, donner un encadrement, au centième près, de la mesure du rayon du disque.

3. *Ensemble $\mathbb{Q}$ et appartenance à $\mathbb{D}$*

E.6

L'ensemble des nombres rationnels, noté $\mathbb{Q}$, admettant une expression sous forme de quotient $\dfrac{a}{b}$ où a et b sont deux entiers relatifs.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples *(QCM)*. Par question, une seule réponse est exacte.

1. Pour le nombre $\dfrac{1}{3}$:

☐ $\dfrac{1}{3}=0{,}33$ ☐ $\dfrac{1}{3}=0{,}34$ ☐ $\dfrac{1}{3}=0{,}3333$ ☐ $\dfrac{1}{3}=0{,}3334$

☐ les réponses précédentes sont fausses.

2. L'écriture décimale du nombre $\dfrac{1}{3}$ a sa partie décimale qui est composée de :

☐ 10 chiffres ☐ 100 chiffres ☐ 10 0000 chiffres

☐ les réponses précédentes sont fausses.

3. Pour le nombre $\dfrac{1}{3}$, on a :

☐ $\dfrac{1}{3}\in\mathbb{N}$ ☐ $\dfrac{1}{3}\in\mathbb{Z}$ ☐ $\dfrac{1}{3}\in\mathbb{D}$ ☐ $\dfrac{1}{3}\in\mathbb{Q}$

E.7

1. On considère le nombre $x=0{,}333333$.
L'assertion "$3\times x = 1$" est-elle vraie ou fausse?

2. On considère le nombre $y=0{,}333334$.
L'assertion "$3\times y = 1$" est-elle vraie ou fausse?

3. On considère l'équation : $(E)\colon\ 3\times z=1$.
   a. Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{Q}$.
   b. Que peut-on dire de la résolution de l'équation (E) dans $\mathbb{D}$.

4. *Comparaison de quotients*

E.8 Sans s'aider de la calculatrice, comparer les quotients suivants :

a. $\dfrac{6}{5}$ et $\dfrac{9}{5}$ b. $\dfrac{5}{8}$ et $\dfrac{5}{9}$

c. $-\dfrac{7}{3}$ et $\dfrac{-10}{3}$ d. $\dfrac{10}{27}$ et $\dfrac{10}{31}$

E.9 Soit n un entier supérieur ou égal à 2, comparer les deux quotients : $\dfrac{n}{n+1}$ et $\dfrac{n}{n-1}$.

E.10

1. Effectuer les calculs suivants :

a. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}$ b. $\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}$ c. $\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}$ d. $\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}$

2. a. Soit m un entier strictement positif, faîtes une conjecture sur l'écriture de la différence suivante :
$$\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}$$
   b. Démontrer cette conjecture.

E.11 ⚠ Pour x un nombre positif. Comparer les nombres :
$$\frac{x}{x+1}\ ;\ \frac{x+1}{x+2}$$

E.12 Comparer les quotients suivants :

a. $\dfrac{3}{\pi}$ et $\dfrac{5}{-\pi}$ b. $\dfrac{\sqrt{2}}{7}$ et $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$

5. *Calculs dans $\mathbb{Q}$*

E.13 Calculer et donner le résultat sous forme de fractions simplifiées.

a. $\dfrac{3}{4}+\dfrac{2}{6}$ b. $\dfrac{2}{15}+\dfrac{3}{20}$ c. $\dfrac{5}{12}-\dfrac{9}{8}$

d. $\dfrac{5}{6}-\dfrac{13}{9}$ e. $\dfrac{5}{12}-\dfrac{2}{15}$ f. $\dfrac{15}{66}-\dfrac{10}{44}$

E.14 Calculer les fractions suivantes et écrivez-les sous formes irréductibles :

a. $\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{6}\times\dfrac{3}{2}$ b. $\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)\times\dfrac{5}{6}$ c. $\dfrac{5-3\times7}{5+9\times3}$

E.15 En laissant les étapes de calculs dans votre rédaction, effectuer les calculs ci-dessous en donnant le résultat sous la forme d'une fraction réduite :

a. $\dfrac{2}{7}+\dfrac{5}{14}$ b. $\dfrac{3}{4}-\dfrac{5}{6}$ c. $\dfrac{1}{3}+\dfrac{5}{3}\times\dfrac{2}{4}$ d. $\dfrac{3}{7}-\dfrac{2}{7}\times\dfrac{21}{8}$

E.16 Effectuer les calculs suivants :

a. $\dfrac{5}{7}+\dfrac{1}{7}\times\left(5+\dfrac{1}{2}\right)$ b. $\dfrac{\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{3}}{\dfrac{10}{9}}$

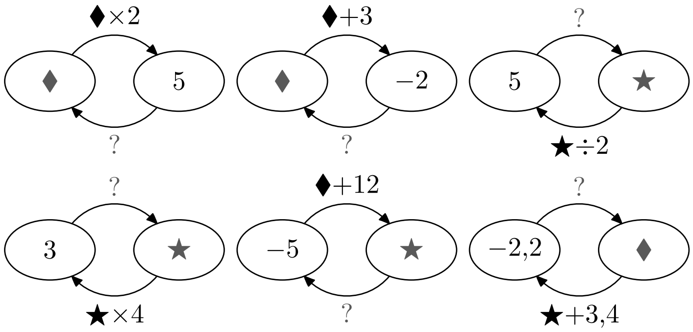
c. $\dfrac{\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}}{\dfrac{17}{9}-\dfrac{1}{3}}$ d. $\dfrac{2}{13}-\dfrac{5}{13}\div\dfrac{10}{16}$

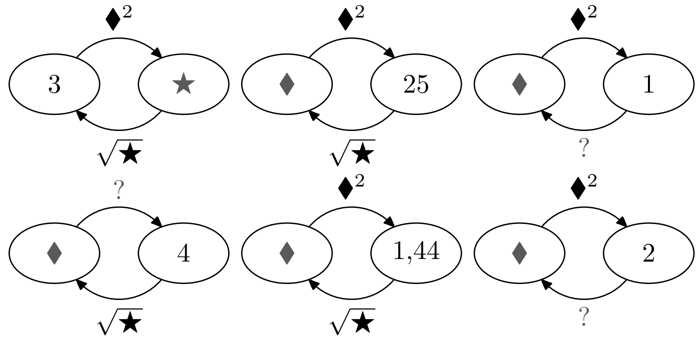
E.17 Effectuer les calculs ci-dessous ; attention, on ne peut simplifier une fraction que lorsque son numérateur et son dénominateur sont entièrement déterminés :

a. $\dfrac{1+\dfrac{1}{2}}{2-\dfrac{23}{7}}$ b. $\dfrac{5-\dfrac{2-3}{5-9}}{\dfrac{3+1}{4}+\dfrac{9-4}{3}}$ c. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}}}}$

6. *Nombres irrationnels*

E.18 Ci-dessous sont indiqués des "*diagrammes commutant*". Retrouver les valeurs manquantes ainsi que les opérations inverses.





7. *Ensemble des nombres réels* $\mathbb{R}$

E.19

Définitions :
On classe les nombres suivants leurs natures :

- Tous les nombres entiers positifs ou nul forment l'ensemble des **nombres naturels** noté $\mathbb{N}$.
- Tous les nombres entiers *(positifs, nul, négatifs)* forment l'ensemble des **nombres relatifs** noté $\mathbb{Z}$.
- Tous les nombres admettant une écriture décimale forment l'ensemble des **nombres décimaux** noté $\mathbb{D}$.
- Tous les nombres admettant une écriture sous la forme d'un quotient de deux entiers forment l'ensemble des **nombres rationnels** noté $\mathbb{Q}$.
- Tous les nombres existants forment l'ensemble des **nombres réels** noté $\mathbb{R}$.

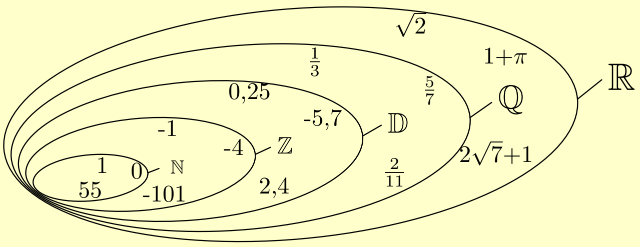
Relier chacun des nombres au plus petit ensemble auquel il appartient :

$\frac{4}{3}$ • $\sqrt{2}$ • -3 • 5 • $0{,}6$ •

• $\mathbb{N}$ • $\mathbb{Z}$ • $\mathbb{D}$ • $\mathbb{Q}$ • $\mathbb{R}$

E.20

Ci-dessous, sont représentés les cinq ensembles de nombres les plus connus : l'ensemble des nombres naturels *(*$\mathbb{N}$*)*, l'ensemble des nombres relatifs *(*$\mathbb{Z}$*)*, l'ensemble des nombres décimaux *(*$\mathbb{D}$*)*, l'ensemble des nombres rationnels *(*$\mathbb{Q}$*)*, l'ensemble des nombres réels *(*$\mathbb{R}$*)*,



Relier chacun des nombres ci-dessous au plus petit des ensembles auquel il appartient :

$\frac{-3}{2}$ • $\frac{-4}{3}$ • $\frac{-6}{-2}$ • $\frac{\pi}{3}$ • $\frac{28}{-7}$ •

• $\mathbb{N}$ • $\mathbb{Z}$ • $\mathbb{D}$ • $\mathbb{Q}$ • $\mathbb{R}$

E.21 Pour chacun des nombres ci-dessous, donner le plus petit ensemble de nombres auquel il appartient :

(a) $\dfrac{-4+2\times5}{2}$ (b) $\dfrac{-9+8}{4}$ (c) $\dfrac{1}{\pi}$ (d) $\dfrac{8\times2-2}{3}$

E.22 Pour chacun des nombres ci-dessous, déterminer le plus petit ensemble de nombre auquel il appartient :

(a) $\dfrac{3}{4}$ (b) $\dfrac{5}{3}$ (c) $\dfrac{0{,}3}{2{,}4}$ (d) $\dfrac{5{,}1}{1{,}7}$

(e) $\sqrt{18}$ (f) $\sqrt{121}$ (g) $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}$ (h) $\sqrt{1{,}44}$

E.23 Donner la nature de chacun des nombres suivants :

(a) $\sqrt{2}$ (b) 4×10^{10} (c) $\sqrt{6^2-3^2}$

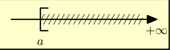
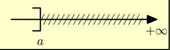
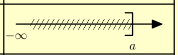
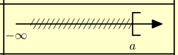
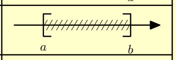
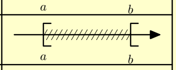
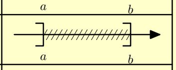
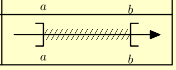
(d) $\dfrac{-5}{2}$ (e) $\dfrac{3\times10^5\times14\times10^{12}}{21\times10^4}$ (f) $\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)$

8. Intervalle

E.24

Définition : On appelle **intervalle** tout sous-ensemble de nombres qui peut être définie par la délimitation d'un ou de deux nombres appelés ses **bornes**.

Voici les différents types d'intervalles et leurs notations :

$[a\,;+\infty[$	$x \geqslant a$	l'ensemble des nombres supérieur ou égal à a	
$]a\,;+\infty[$	$x > a$	l'ensemble des nombres strictement supérieur à a	
$]-\infty\,;a]$	$x \leqslant a$	l'ensemble des nombres inférieur ou égal à a	
$]-\infty\,;a[$	$x < a$	l'ensemble des nombres strictement inférieure à a	
$[a\,;b]$	$a \leqslant x \leqslant b$	l'ensemble des nombres supérieurs ou égal à a et inférieur ou égal à b	
$[a\,;b[$	$a \leqslant x < b$	l'ensemble des nombres supérieurs ou égal à a et strictement inférieur à b	
$]a\,;b]$	$a < x \leqslant b$	l'ensemble des nombres strictement supérieurs à a et inférieur ou égal à b	
$]a\,;b[$	$a < x < b$	l'ensemble des nombres strictement supérieurs à a et strictement inférieur à b	

1. Parmi les intervalles ci-dessous, lequel représente l'ensemble des nombres x vérifiant l'encadrement : $-1 \leqslant x < 4$:

a. $[-1\,;4]$ b. $]-1\,;4]$ c. $[-1\,;4[$ d. $]-1\,;4[$

2. Parmi les intervalles donnés ci-dessous, lequel représente l'ensemble des nombres x réalisant l'inégalité $x > 4$:

a. $]-\infty\,;4[$ b. $]-\infty\,;4]$ c. $[4\,;+\infty[$ d. $]4\,;+\infty[$

E.25 Quatre ensembles de nombres sont représentés ci-dessous sur une droite graduée :

a. 

b. 

c. 

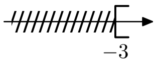
d. 

Associer à chacun de ces ensembles de nombres, l'encadrement qui est vérifié par tous les nombres de cet ensemble :

1. $-1 \leqslant x \leqslant 4$ 2. $-1 < x < 4$

3. $-1 \leqslant x < 4$ 4. $-1 < x \leqslant 4$

E.26 Sur chaque droite ci-dessous, est représenté un ensemble de nombres :

a. 

b. 

c. 

Utiliser un intervalle pour décrire chacun de ces ensembles.

9. Intervalle et appartenance

E.27 Compléter à l'aide des symboles $\in$ et $\notin$:

a. $3 \ldots \left[0\,;\,\dfrac{5}{2}\right[$ b. $0{,}33 \ldots \left[\dfrac{1}{3}\,;\,1\right]$

c. $-3 \ldots [2\,;\,4]$ d. $1 \ldots]-0{,}2\,;\,3]$

E.28 Compléter les pointillés avec les symboles $\in$ ou $\notin$:

a. $\pi \ldots]3{,}14;5]$ c. $\sqrt{2} \ldots [2;3]$

b. $\pi \ldots]0{,}5\,;\,3{,}1]$ d. $\pi \ldots]3{,}1\,;\,4]$

e. $\dfrac{1}{3} \ldots]0\,;\,0{,}33[$

10. Intervalle et inéquations

E.29 Résoudre les inéquations ci-dessous et donner l'ensemble des solutions sous la forme d'un intervalle :

a. $x+1>0$ b. $2x \geqslant 4$

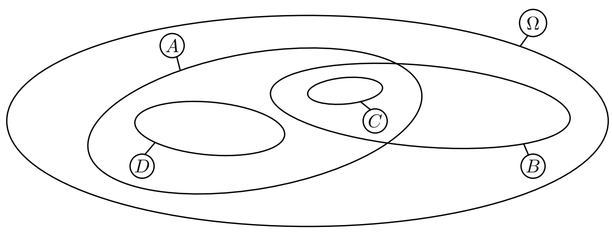
c. $x+2 \leqslant 5$ d. $3x+2<-1$

E.30 Résoudre les inéquations ci-dessous et exprimer leur ensemble de solutions sous la forme d'un intervalle :

a. $3x+1 > x+2$ b. $2x+4 \geqslant 4x-1$ c. $5x+3 \leqslant 4x$

11. Inclusion d'intervalles

E.31 Ci-dessous est représenté l'univers des issues Ω d'une expérience aléatoire et quatre de ces événements A, B, C et D :



À l'aide du symbole $\subset$, écrire la relation d'inclusion induite par le diagramme ci-dessus.

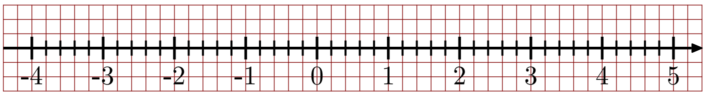
E.32 Dire si les inclusions suivantes sont vraies ou fausses :

(a) $]3\,;\sqrt{17}] \subset]-\infty\,;4]$ (b) $\left[-\frac{2}{3}\,;\frac{\sqrt{2}}{2}\right[\subset \left]-1\,;\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

12. *Réunion et intersection d'intervalles*

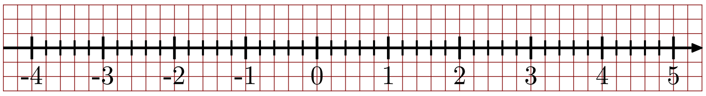
E.33

(1) (a) Représenter, sur la droite graduée ci-dessous, les deux intervalles $[-1\,;3]$ et $[0\,;4]$:



(b) Donner l'intervalle obtenu par la réunion des intervalles $[-1\,;3]$ et $[0\,;4]$.

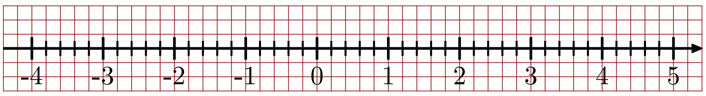
(2) (a) Représenter, sur la droite graduée ci-dessous, les deux intervalles $[-3\,;1]$ et $[-1\,;2]$:



(b) Donner l'intervalle obtenu par l'intersection des intervalles $[-3\,;1]$ et $[-1\,;2]$.

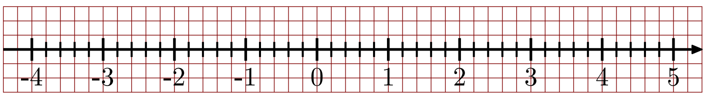
E.34

(1) (a) Représenter, sur la droite graduée ci-dessous, les deux intervalles $]0\,;4]$ et $[-2\,;5[$:



(b) Donner l'intervalle obtenu par la réunion des intervalles $]0\,;4]$ et $[-2\,;5[$.

(2) (a) Représenter, sur la droite graduée ci-dessous, les deux intervalles $]-2\,;0[$ et $[-1\,;2]$:



(b) Donner l'intervalle obtenu par l'intersection des intervalles $]-2\,;0[$ et $[-1\,;2]$.

E.35 Donner l'expression simplifiée de chacun des ensembles ci-dessous :

(a) $[2\,;5[\cup[0\,;4]$ (b) $]-1\,;2]\cap[3\,;5]$ (c) $[2\,;4[\cap]-1\,;3[$

E.36

(1) Donner, si possible, une expression simplifiée des unions d'intervalles suivants :

(a) $[3\,;5]\cup[0\,;4]$ (b) $[-3\,;3]\cup[-2\,;2]$ (c) $[-1\,;2]\cup[4\,;7]$

(2) Donner l'expression des intersections d'intervalles :

(a) $[3\,;5]\cap[0\,;4]$ (b) $[-3\,;3]\cap[-2\,;2]$ (c) $[-1\,;2]\cap[4\,;7]$

E.37 Avant d'effectuer l'opération sur les intervalles demandés, représenter chacun des deux intervalles sur une droite graduée, puis donner l'ensemble résultant.

(a) $[2\,;5]\cup]-1\,;7]$ (b) $]3\,;+\infty[\cup[0\,;3[\cup\{3\}$

(c) $[2\,;5]\cap]-1\,;7]$ (d) $]-\infty\,;3]\cap]3\,;+\infty[$

E.38 Pour chaque question, représenter l'ensemble obtenu sur une droite graduée, puis donner, si possible, une écriture simplifiée de cet ensemble.

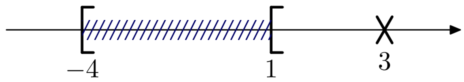
(a) $[-1\,;1]\cup[1\,;4]$ (b) $[1\,;4]\cup[-4\,;-1]$

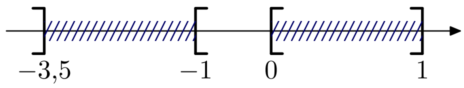
(c) $[4\,;5]\cap[-1\,;4]$ (d) $[-1\,;1]\cap[2\,;3]$

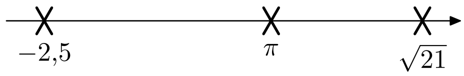
E.39 Ci-dessous sont représentés des sous-ensembles de $\mathbb{R}$:

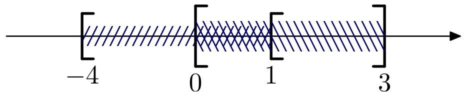
- en hachurant les intervalles constituants ce sous-ensemble ;
- en marquant d'une croix les points isolés lui-appartenant.

À l'aide des notations ensemblistes, décrire chacun de ces sous-ensembles :

(a) $\mathbb{R}$ 

(b) $\mathbb{R}$ 

(c) $\mathbb{R}$ 

(d) $\mathbb{R}$ 

E.40 Pour chaque question, représenter l'ensemble obtenu sur une droite graduée, puis donner, si possible, une écriture simplifiée de cet ensemble.

(a) $[1\,;2]\cup\left[\frac{3}{2}\,;\frac{14}{8}\right]$ (b) $\left[-2\,;\frac{5}{4}\right]\cap[1\,;100]$

E.41 Simplifier l'écriture des ensembles suivants :

(a) $]-\infty\,;3]\cap[-2\,;5[$ (b) $\left[\frac{5}{2}\,;\sqrt{10}\right[\cap[3\,;\pi[$

(c) $\left]-\frac{12}{5}\,;\sqrt{3}\right[\cup\left[-\sqrt{3}\,;\frac{9}{4}\right[$

E.42 Pour chaque couple d'intervalle, donner l'ensemble résultat de leur intersection et de leur réunion :

(a) $[1\,;6[$ et $[3\,;8]$ (b) $\left[-\sqrt{2}\,;\frac{1}{3}\right[$ et $\left]\frac{1}{3}\,;5\right]$

(c) $]-\infty\,;\pi]$ et $]1\,;+\infty[$

13. *Valeurs absolues*

E.43 De manière algébrique, calculer les expressions suivantes :

a) $|2-3|$ b) $|5+3|$ c) $|2\times(4-5)|$

d) $|4\times2-5\times7|$ e) $|7+2|\times|4-6|$ f) $|2-3|\times2$

g) $|5{,}5|+|-5{,}5|$ h) $|-5{,}5|-|4{,}5|$ i) $|2\times3-7|$

E.44 Effectuer les calculs suivants :

a) $2\times\left|3\times\frac{1}{4}-2\right|+1$ b) $\dfrac{|3|+|-3|}{\left|2-\frac{1}{3}\right|}$ c) $\big|2\times|2\times5-12|-7\big|$

E.45 Effectuer les calculs suivants :

a) $\big||5-4|+|4-5|\big|$ b) $\big|2\times|3-5|+2\big|-5$

14. Centre d'un intervalle et équation

E.46

1. Quels sont les points qui sont à une distance de 5 du nombre 3?
2. Résoudre l'équation : $|x-3|=5$

E.47 Résoudre les équations suivantes :

a) $|x|=3$ b) $|x-2|=3$ c) $|x-4|=7$

d) $|x+2|=3$ e) $|x-4|=0$ f) $|x-2|=-1$

15. Centre d'un intervalle et inéquation

E.48

1. Résoudre l'équation : $|x-3|=5$
2. a) Exprimer, sous forme d'intervalle, l'ensemble des nombres x vérifiant la relation : $|x-3|\leqslant5$

   b) Quelle relation peut-on établir entre le nombre 3 et les extrémités de l'intervalle solution obtenu à la question a)?

E.49

1. Donner le centre de chacun des intervalles :

   a) $[5\,;9]$ b) $[-2\,;6]$ c) $[0\,;4]$

2. Compléter les pointillées :

   a) $x\in[5\,;9] \implies d(x,7)\leqslant\ldots$

   b) $x\in[-2\,;6] \implies d(x,\ldots)\leqslant4$

   c) $x\in[0\,;4] \implies d(x,\ldots)\leqslant\ldots$

E.50 Compléter les pointillés ci-dessous :

a) $|x-3|\leqslant2 \implies x\in[1\,;\ldots]$

b) $|x-5|\leqslant1 \implies x\in[\ldots\,;\ldots]$

c) $|x+1|\leqslant2 \implies x\in[\ldots\,;\ldots]$

16. Développement illimité

E.51 Déterminer les écritures fractionnaires associées aux développements décimaux illimités suivants :

a) $x=0{,}7\overline{1}$ b) $y=1{,}2\overline{17}$

E.52

1. Donner les écritures fractionnaires des développements décimaux suivants :

   $A=0{,}1\overline{7}$; $B=0{,}784\overline{84}$

2. En justifiant votre démarche, donner le développement illimité du nombre fractionnaire $B=\dfrac{5}{6}$.

17. Partage

E.53 Effectuer les calculs suivants et donner le résultat sous forme simplifiée :

a) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{3}$ b) $\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{10}\right)\times\dfrac{5}{2}$ c) $\dfrac{\dfrac{1}{9}+\dfrac{2}{6}}{\dfrac{16}{3}}$

Indication : le détail des étapes de calculs sera pris en compte lors de l'évaluation.

18. Exercices non-classés

E.54

1. Traduire les équations suivantes en termes de distance et donner leurs solutions :

   a. $|x+2|=5$ b. $|x-\pi|=\sqrt{2}$ c. $|x-\sqrt{2}|=|x+2\sqrt{2}|$

2. Résoudre les équations suivantes de manière algébrique :

   a. $|x-3|=1$ b. $|x-3|=\sqrt{3}$ c. $|2x+1|=|3x-4|$

3. Dans chaque cas, représenter sur une droite graduée les solutions des inéquations suivantes :

   a. $|x+2|>2$ b. $|x-3|\leqslant 5$ c. $|2x+1|>-1$

E.55 Soit a, b, c, d et e cinq nombres distincts deux à deux. On considère les ensembles suivants :

$A=\{a\,;c\,;d\}$; $B=\{c\,;e\}$; $C=\{a\,;d\}$

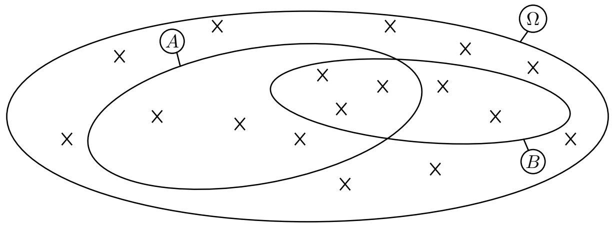
Déterminer l'expression des ensembles suivants :

a. $A\cap B$ b. $A\cup B$ c. $B\cap C$ d. $A\cap(B\cap C)$

E.56

Définition : on appelle cardinal d'un ensemble A le nombre d'éléments composant cet ensemble. On note ce nombre $\text{card}(A)$

On considère Ω l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire et A et B deux événements de cet univers.



1. Donner le nombre d'événements élémentaires composant cette expérience aléatoire.

2. a. Déterminer la valeur des nombres suivants :
   $\text{card}(A)$; $\text{card}(B)$; $\text{card}(A\cup B)$; $\text{card}(A\cap B)$

   b. Quelle formule retrouve-t-on?

3. Déterminer la valeur des nombres suivants :
   $\text{card}(A\cap\overline{B})$; $\text{card}(A\cup\overline{B})$; $\text{card}(\overline{A}\cap\overline{B})$

Chapitre 2

Polynômes et fractions rationnelles

Maitriser la notion de polynôme et de fraction rationnelle

Seconde / Identités remarquables

ChingEval : 4 exercices disponibles pour l'évaluation par QCM

1. Rappels

E.1 Résoudre les équations suivantes :

a) $\dfrac{2x-1}{3} = 5x+1$

b) $(x+1)(2-x) = (2x-4)(5x-3)$

c) $\dfrac{x-4}{3} = x-2$

E.2 En utilisant la méthode de votre choix, résoudre les équations suivantes :

a) $3x^2 + x = 0$

b) $(3x+1)^2 = 3x+1$

c) $\dfrac{2x+1}{6} - \dfrac{1-x}{2} = x$

d) $(2x+1)(3x+4) - (3x+1)(2x+4) = 0$

2. Introduction

E.3 Dans cet exercice, on considère un carré de côté $a+b$ où a et b sont deux nombres réels positifs $(a,b \in]0\,;+\infty[)$.

1) Pour chacune des figures ci-dessous, donner l'aire du domaine hachurée :

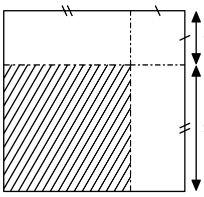


Fig. 1

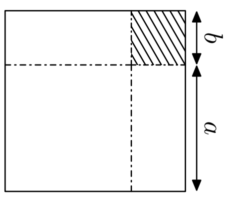


Fig. 2

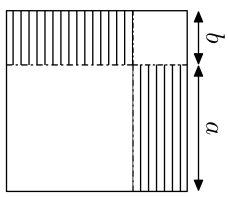


Fig. 3

2) Parmi les expressions ci-dessous, donner les deux réponses permettant d'exprimer l'aire du carré :

a) $(a+b)^2$

b) a^2+b^2

c) $a^2+2ab+b^2$

d) $a^2-2ab+b^2$

E.4 Soit a et b deux nombres réels strictement positifs. On considère les quatre représentations d'un même carré de côté a ci-dessous :

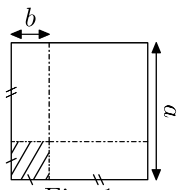


Fig. 1

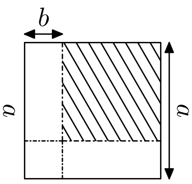


Fig. 2

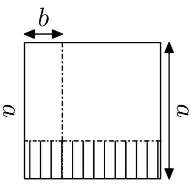


Fig. 3

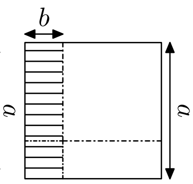


Fig. 4

1) a) Exprimer à l'aide des nombres a et b l'aire de chacune des parties hachurées.

b) Quelle partie de cette figure admet pour aire l'expression : $(a-b)^2+2ab-b^2$

2) Justifier l'identité : $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

3. Développement et identité remarquable

E.5

1) Établir chacune des identités ci-dessous :

a) $(3x+5)^2 = (3x)^2 + 2\times3x\times5 + 5^2$

b) $(4x+3)^2 = (4x)^2 + 2\times4x\times3 + 3^2$

2) Établir chacune des identités ci-dessous :

a) $(2x-1)^2 = (2x)^2 - 2\times2x\times1 + 1^2$

b) $(3-6x)^2 = 3^2 - 2\times3\times6x + (6x)^2$

3) Établir chacune des identités ci-dessous :

a) $(x+2)(x-2) = x^2 - 2^2$

b) $(4x+5)(4x-5) = (4x)^2 - 5^2$

4. Développer une identité remarquable

E.6 Compléter le tableau ci-dessous :

$(a+b)^2$	a	b	a^2	b^2	$2ab$	$a^2+2ab+b^2$
$(3x+2)^2$						
$(4x+1)^2$						
$(5x+1)^2$						

E.7 Compléter le tableau ci-dessous :

$(a-b)^2$	a	b	a^2	$2ab$	b^2	$a^2-2ab+b^2$
$(x-5)^2$						
$(2x-4)^2$						
$(4x-3)^2$						

E.8 Compléter le tableau ci-dessous :

$(a+b)(a-b)$	a	b	a^2	b^2	a^2-b^2
$(2x+5)(2x-5)$					
$(x+4)(x-4)$					
$(4x+3)(4x-3)$					

E.9 Développer les expressions suivantes :

a $(x+1)^2$ b $(2x+3)^2$ c $(x+6)^2$

d $(5x+1)^2$ e $(3x+3)^2$ f $(a+b)^2$

E.10 Développer les expressions suivantes :

a $(x-2)^2$ b $(x-3)^2$ c $(3x-1)^2$

d $(5x-1)^2$ e $(3x-2)^2$ f $(a-b)^2$

E.11

Compléter les pointillés ci-dessous afin d'obtenir les identités :

a $(\ 2x\ +\ 4\ )^2 = 4x^2 + 16x + \dots$

b $(\ 3x\ +\ 1\ )^2 = \dots + 6x + 1$

c $(\ x\ -\ 2\ )^2 = \dots - 4x + 4$

d $(\ 4\ +5x\ )^2 = 16 + 40x + \dots$

e $(\ x\ -\ 3\ )^2 = x^2 - 6x + \dots$

5. *Développer*

E.12 Développer les expressions suivantes :

a $2(3x-1)(2-x)$ b $(2x+3)^2$

c $(3x-2)(3x+2)$ d $(5x-6)^2$

E.13 Ci-dessous est rappelé le développement des identités remarquables :

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$; $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

Utiliser ces identités remarquables pour déterminer par un calcul mental la valeur des calculs ci-dessous :

a 21^2 b 29^2 c 21×19 d 34×26

6. *Factoriser une identité remarquable*

E.14 On considère les expressions littérales suivantes :

a $81x^2+80x+25$ b $4x^2-12x+9$

c $16x^2-32x-16$ d $36-4x^2$

1. Les identités remarquables permettent d'écrire les factorisations suivantes :
   - $a^2+2{\cdot}ab+b^2 = (a+b)^2$
   - $a^2-2{\cdot}ab+b^2 = (a-b)^2$
   - $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$

   En identifiant, si possible, chacune des expressions proposées à l'une des identités remarquables, compléter le tableau ci-dessous :

	a	b	$2{\cdot}ab$
a			
b			
c			
d			

2. Parmi les expressions proposées, lesquelles peuvent être factorisées ? On donnera alors leur forme factorisée.

E.15 On considère les expressions littérales suivantes :

(a) $25x^2+20x+4$ (b) $9x^2+18x+9$

(c) $4x^2-12x+9$ (d) $25x^2-16$

(1) Les identités remarquables permettent d'effectuer les factorisations suivantes :
- $a^2+2{\cdot}ab+b^2=(a+b)^2$
- $a^2-2{\cdot}ab+b^2=(a-b)^2$
- $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

En identifiant, si possible, chacune des expressions proposées à l'une des identités remarquables, compléter le tableau ci-dessous :

	a	b	$2{\cdot}ab$
a			
b			
c			
d			

(2) Parmi les expressions proposées, lesquelles sont factorisées? On donnera alors leur forme factorisée.

E.16

(1) Parmi les trois expressions ci-dessous une seule a été obtenue par le développement d'une identité remarquable? Laquelle? Préciser l'expression de départ :

(a) $4x^2+6x+9$ (b) $4x^2+24x+9$ (c) $4x^2+12x+9$

(2) Même question avec les expressions :

(a) $x^2-64x+64$ (b) $x^2-16x+64$ (c) $x^2-8x+64$

(3) Même question avec les expressions :

(a) $9x^2+15x+25$ (b) $9x^2+30x+25$ (c) $9x^2+6x+25$

E.17 Factoriser chacune des expressions littérales suivantes :

(a) x^2-16 (b) $x^2-10x+25$

(c) x^2-2x+1 (d) $x^2+14x+49$

E.18 Factoriser chacune des expressions suivantes :

(a) $9x^2-12x+4$ (b) x^2+2x+1

E.19 Factoriser, **si possible**, les expressions littérales suivantes :

(a) $25x^2-50x+25$ (b) $4x^2+1$

(c) $100x^2+140x+49$ (d) $4x^2+24x+9$

E.20 Factoriser les expressions littérales suivantes :

(a) $x^2+\dfrac{2}{3}{\cdot}x+\dfrac{1}{9}$ (b) $\dfrac{1}{4}{\cdot}x^2-\dfrac{1}{9}$

(c) $\dfrac{1}{9}x^2-\dfrac{2}{15}x+\dfrac{1}{25}$ (d) $\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{9}$

E.21 Factoriser les expressions suivantes :

(a) $-x^2-4x-4$ (b) $-x^2+6x-9$

(c) $-9x^2+12x-4$ (d) $-25x^2+20x-4$

7. *Factorisation : un peu plus loin*

E.22 Factoriser les expressions suivantes. Aucune justification particulière n'est demandée :

(b) $(x+2)^2-9$ (b) $25x^2-9-(5x+3)(5-x)$

E.23 Factoriser les expressions suivantes :

(a) $(2x-8)(7x+1)-16+x^2$

(b) $18x^2-24x+8+(3x-2)(2-x)$

E.24 Établir la factorisation suivante :
$3(2x+1)+\big(x-1\big)^2=\big(x+2\big)^2$

8. *Equation (facteur commun et identité remarquable)*

E.25 On considère l'expression algébrique :
$B=(5x-7)^2-3^2$

(1) Déterminer la forme factorisée de l'expression B.

(2) Trouver une valeur de x pour laquelle $B=0$.

E.26 Résoudre les équations ci-dessous. Pour cela, utiliser une factorisation pour obtenir une équation produit nul.

(a) $4x^2+12x+9=0$ (b) $x^2-10x+25=0$

(c) $4x^2-9=0$ (d) $5x^2+3x=0$

E.27 Résoudre les équations suivantes :

(a) $9x^2-12x+4=0$ (b) $x^2+5x-5=3x-6$

E.28 Résoudre les équations :

(a) $(x+1)(2x-3)=4x^2-9$

(b) $(2x-3)(5x+4)=(2x-3)(3-2x)$

E.29 Résoudre les équations suivantes :

(a) $(x+1)^2-(2x-3)^2=0$ (b) $(x+1)(2x-3)=x^2-1$

9. *Expression rationnelle*

E.30 Établir l'identité suivante : $\dfrac{x+2}{x+1} - \dfrac{x+2}{2x+3} = \dfrac{(x+2)^2}{(x+1)(2x+3)}$

E.31

1. Déterminer les valeurs des réels a et b réalisant l'identité :
$$\frac{2x+3}{x} - \frac{2x+3}{3x+3} = \frac{(ax+b)^2}{x(3x+3)}$$

2. Déterminer les valeurs des réels c et d réalisant l'identité :
$$\frac{5x+2}{2x+1} - \frac{3x-2}{3x+1} = \frac{(cx+d)^2}{(2x+1)(3x+1)}$$

10. *Problèmes*

E.32 ⚠ *Dans cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Anatole affirme :

> *"Pour tout nombre entier naturel n, l'expression $n^2-24n+144$ est toujours différente de zéro."*

A-t-il raison?

E.33 *Dans cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Aïssa affirme :

> "Pour tout nombre entier naturel n, l'expression $2n^2-6n+4$ est toujours le carré d'un entier."

A-t-il raison?

E.34 *Dans cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

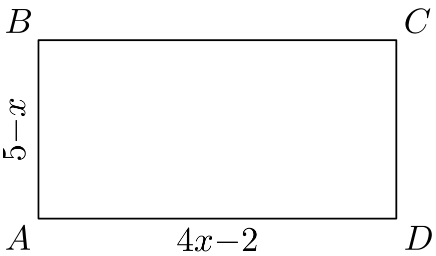
Thomas affirme :

> "Pour tout nombre entier naturel n, l'expression $6n^2-18n+16$ est toujours le carré d'un entier."

A-t-il raison?

E.35

On considère le rectangle $ABCD$ représenté ci-contre dont les dimensions, dépendant d'une valeur indéterminée x, sont $5-x$ et $4x-2$ exprimées en centimètre.



Déterminer les valeurs possibles de x afin que l'aire de $ABCD$, exprimé en cm^2, soit égale au périmètre de $ABDC$, exprimé en cm.

E.36 On considère les deux fonctions f et g définies par :

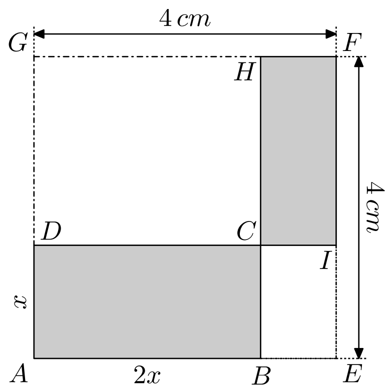
$f(x) = x^2 \quad ; \quad g(x) = 2x-1$

1. À l'aide de votre calculatrice, donner les abscisses des points d'intersections des deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g.

2. a. Retrouver le résultat de la question précédente en résolvant l'équation :
   $x^2 = 2x-1$

   b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

E.37 On considère la figure ci-dessous grisée et on note son aire $\mathcal{A}$:



(les mesures sont exprimées en centimètre)

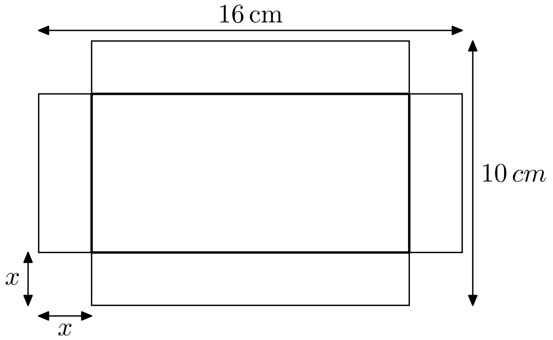
Elle est composée :

- du carré $AEFG$,
- de deux rectangles $ABCD$ et $CIFH$.

Déterminer la ou les valeurs de x afin que l'aire $\mathcal{A}$ ait pour valeur $7\,cm^2$

Toute trace de recherche ou de prise d'initiative sera prise en compte dans l'évaluation.

E.38 On veut réaliser, dans le patron ci-dessous une boîte rectangulaire sans couvercle. Les longueurs sont exprimées en cm.



1. a. Lorsque la boîte sera construire, le nombre x représentera quelle dimension ? La longueur, la largeur ou la hauteur ?

   b. Quelles valeurs peuvent prendre la variable x dans ce problème ?

   c. Donner l'expression du volume $\mathscr{V}$ en fonction de la valeur de x.

2. Dans cette question, nous cherchons pour quelles valeurs de "x", cette boîte possède un volume égal à $144\,cm^3$:

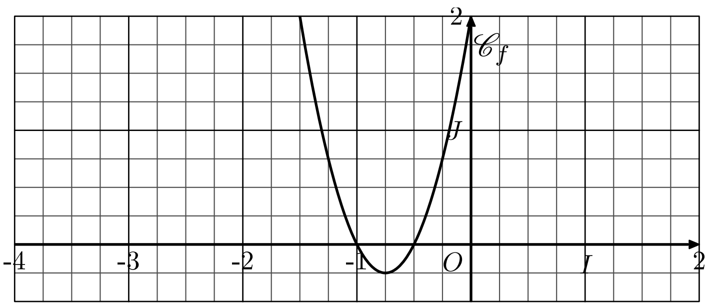
   a. Déterminer la valeur des réels de a et de b vérifiant la factorisation suivante :
   $$4x^3 - 52x^2 + 160x - 144 = (a{\cdot}x + b)(2x - 4)^2$$

   b. En déduire les valeurs de x pour lesquelles $\mathscr{V}(x)$ a pour valeur 144.

11. *Etude de fonctions et identités remarquables*

E.39 On considère les deux fonctions f et g définies par :
$$f(x) = -2x - 2 \quad ; \quad g(x) = 4x^2 + 6x + 2$$

Dans le plan muni d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormal, on note respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g.
La courbe $\mathscr{C}_g$ est donnée ci-dessous :

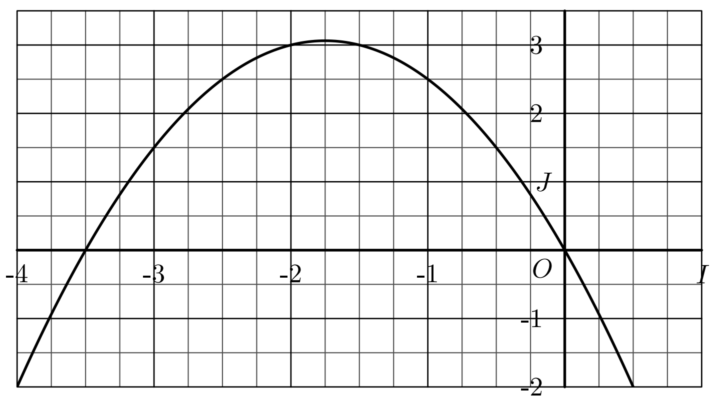


1. Résoudre l'équation : $f(x) = g(x)$

2. Donner, s'ils existent, les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

E.40 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre x est donnée par la relation :
$$f(x) = -\frac{1}{2}(4x+7)(x+2) + x^2 + 4x + 7$$

Dans le repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthogonal ci-dessous sont représentés la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f :



1. Répondre graphiquement aux questions suivantes :

   a. Déterminer l'image du nombre -3 par la fonction f. Justifier votre réponse.

   b. Déterminer l'ensemble des antécédents du nombre 0 par la fonction f. Justifier votre réponse.

2. a. Développer l'expression :
   $$-\frac{1}{2}(4x+7)(x+2) + x^2 + 4x + 7$$

   b. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation :
   $$f(x) = 0.$$

3. a. Factoriser l'expression $x^2 + 4x + 4$.

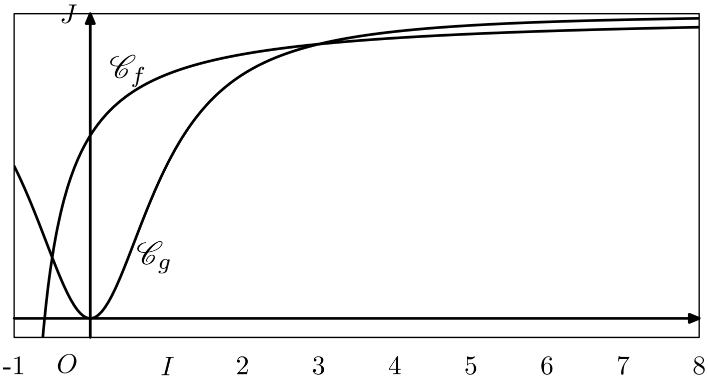
   b. En déduire la factorisation de l'expression :
   $$\Big(-2x - \frac{7}{2}\Big)(x+2) + x^2 + 4x + 4$$

   c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation :
   $$f(x) = 3$$

E.41 On considère les deux fonctions f et g définies sur $]-1\,;+\infty[$ dont les images d'un nombre x sont définies par les relations :

$$f(x)=\frac{5x+3}{5x+5} \quad ; \quad g(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$$

Dans le repère $(O\,;I\,;J)$, sont tracés les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g :



1. Établir l'égalité suivante :
$$g(x)-f(x)=\frac{2x^2-5x-3}{(x^2+1)(5x+5)}$$
2. a. Justifier que 3 est une solution de l'équation : $f(x)=g(x)$.
   b. Déterminer les valeurs des réels a et b vérifiant l'égalité suivante :
   $2x^2-5x-3=(x-3)(a{\cdot}x+b)$
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation : $f(x)=g(x)$

12. Indentités remarquable et racine carrées

E.42 Développer les calculs ci-dessous et donner leurs résultats sous la forme $a+b\sqrt{c}$, où a, b, c sont des entiers avec c le plus petit possible :

a. $(3-\sqrt{2})^2$ b. $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2-(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$

E.43 On considère l'expression :
$E=(\sqrt{7}+1)^2+(\sqrt{7}-1)^2$

1. Après avoir développé les carrés, montrer que E est un nombre entier.
2. En déduire la nature d'un triangle dont les côtés mesurent respectivement, en centimètres, $\sqrt{7}+1$, $\sqrt{7}-1$ et 4 ; justifier votre réponse.

E.44 Soit a et b deux nombres tels que $a\geqslant 0$ et $b\geqslant 0$:

1. Développer : $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$
2. Quel est le signe de : $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$
3. En déduire : $a+b\geqslant 2\sqrt{a\times b}$

E.45

1. a. Établir l'égalité suivante : $(1-2\sqrt{2})^2=9-4\sqrt{2}$
   b. En déduire une expression simplifiée de $\sqrt{9-4\sqrt{2}}$.
2. Démontrer l'égalité suivante : $\sqrt{37+12\sqrt{7}}=3+2\sqrt{7}$

13. Systèmes d'équations non-linéaires et identités remarquables

E.46

1. Résoudre le système : $\begin{cases} x+y=2 \\ x\times y=1 \end{cases}$
2. Résoudre le système : $\begin{cases} x+2y=4 \\ x\times y=2 \end{cases}$
3. Résoudre le système : $\begin{cases} x+3y=-6 \\ x\times y=3 \end{cases}$

14. Partage

E.47 Factoriser chacune des expressions suivantes :

a. $49x^2-42x+9$ b. $16x^2-1$

c. $(5x+2)(3-2x)-(5x+2)(x+1)$

d. $(9x-4)^2-(9x-4)$

15. Exercices non-classés

E.48

Dans cet exercice, nous établissons l'identité de Brahmagupta

Pour tous nombres réels a, b, c, d, établir l'identité ci-dessous :

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=\left(ac+bd\right)^2+\left(ad-bc\right)^2$$

E.49

Développer et réduire les expressions suivantes :

a $(x+1)^2$ b $\left(2-\sqrt{2}x\right)\left(2+\sqrt{2}x\right)$

Factoriser les expressions suivantes :

c $9x^2-12x+4$ d $2x^2-1$

Résoudre l'équation suivante :

e $(x-1)(2x+5)=0$

Première spécialité / Second degré : équations

Davantage d'exercices sur le 2nd degré en suivant le lien :
https://chingatome.fr/chapitre/hp-lycee/fonctions-second-degre

ChingEval : 13 exercices disponibles pour l'évaluation par QCM

1. *Manipulation de polynomes du second degré*

E.1 On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par : $f(x)=2x^2-8x+6$

1. a. Établir l'égalité : $f(x)=2\cdot(x-3)(x-1)$
   b. Résoudre l'équation : $f(x)=0$.
   c. Résoudre l'inéquation : $f(x)\leqslant 0$.
2. a. Établir l'égalité : $f(x)+2=2\big(x-2\big)^2$
   b. En déduire que, pour tout nombre x réel, on a : $f(x)\geqslant -2$

E.2 On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par : $f(x)=-4x^2+36x+63$

1. a. Établir l'égalité : $f(x)=(21-2\cdot x)(2\cdot x+3)$
   b. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation : $f(x)=0$.
   c. Résoudre l'inéquation : $f(x)>0$
2. a. Établir l'égalité : $f(x)-144=-4\cdot\Big(x-\dfrac{9}{2}\Big)^2$.
   b. En déduire que, pour tout nombre x réel, on a : $f(x)\leqslant 144$

2. *Forme canonique*

E.3

Proposition-Définition : tout polynôme du second degré $a\cdot x^2+b\cdot x+c$ admet une expression de la forme :
$$f : x\mapsto \alpha\cdot\big(x-\beta\big)^2+\gamma$$
où α, β, γ sont des nombres réels avec $\alpha\neq 0$.
Cette expression s'appelle la **forme canonique**.

Associer à chacun des polynômes du second degré sa forme canonique :

$4x^2+8x+7$ ∘	∘ $(x+2)^2-5$
x^2+4x-1 ∘	∘ $(x-4)^2-4$
$x^2-8x+20$ ∘	∘ $4(x+1)^2+3$
$4x^2-16x+6$ ∘	∘ $4(x-2)^2-10$
$-4x^2-16x-12$ ∘	∘ $(x-4)^2+4$
$x^2-8x+12$ ∘	∘ $-4(x-2)^2+4$
$-4x^2+16x-12$ ∘	∘ $-4(x+2)^2+4$

E.4 Déterminer la forme canonique de chacune des expressions ci-dessous :

a. x^2-4x+1 b. x^2+6x+3

E.5 Déterminer la forme canonique de chacun des polynômes du second degré suivants :

a. x^2+4x-5 b. x^2-2x-1

E.6 Déterminer la forme canonique de chacun des polynômes du second degré suivants :

a. x^2+2x-3 b. x^2-6x-2
c. $x^2+12x+5$ d. $x^2-10x+5$

E.7 Donner la forme canonique de chacun des trinômes du second degré ci-dessous :

a. $2x^2+12x-4$ b. $3x^2+30x+12$

E.8 Donner la forme canonique de chacun des trinômes du second degré ci-dessous :

a. $2x^2+8x-6$ b. $3x^2+6x+6$

E.9 Donner la forme canonique de chacun des trinômes du second degré ci-dessous :

a. $9x^2+18x+27$ b. $5x^2+10x+2$

E.10 Déterminer la forme canonique de chacune des expressions ci-dessous :

a. x^2+x+2 b. x^2-3x-1

E.11 Déterminer la forme canonique de chacune des expressions ci-dessous :

a. $x^2+\dfrac{1}{2}x-3$ b. $x^2+x-\dfrac{1}{3}$

E.12 Déterminer la forme canonique de chacun des polynômes du second degré suivants :

a. $x^2+\dfrac{1}{4}x+1$ b. x^2+x+1

3. *Forme canonique et équations*

E.13

Rappel : pour résoudre une équation se présentant sous la forme de l'égalité de deux carrés, on utilise la troisième identité remarquable pour se ramener à une équation-produit :

Résolvons l'équation $(x+1)^2=9$:

$$(x+1)^2=9 \qquad (x+1)^2=3^2 \qquad (x+1)^2-3^2=0$$

D'après l'identité remarquable :

$$\big[(x+1)+3\big]\big[(x+1)-3\big]=0$$
$$(x+4)(x-2)=0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$x+4=0$ | $x-2=0$
$x=-4$ | $x=2$

Cette équation a pour solution : -4 et 2.

On considère le polynôme (P) : x^2+6x-7

1. Déterminer la forme canonique du polynôme P.
2. À l'aide de la forme canonique du polynôme, déterminer les deux solutions de l'équation : $x^2+6x-7=0$

E.14 On considère le polynôme : $P=3{\cdot}x^2-12{\cdot}x+17$.

1. Parmi les expressions ci-dessous, laquelle est la forme canonique du polynôme P :
   - $3{\cdot}(x-2)^2+5$
   - $3{\cdot}(x+1)^2+7$
   - $3{\cdot}(x-3)^2-17$
2. En utilisant la forme canonique du polynôme P, résoudre l'équation : $3{\cdot}x^2-12{\cdot}x+17=8$

E.15 On considère le polynôme (P) : $x^2+4{\cdot}x+9$.

1. Déterminer les valeurs des nombres a et b réalisant l'identité : $x^2+4{\cdot}x+9=(x+a)^2+b$
2. En déduire que l'équation $x^2+4{\cdot}x+9=1$ n'admet aucune solution.

E.16 On considère l'équation : (E) : $2x^2+4x+4=20$.

1. Déterminer la forme canonique du polynôme : $2x^2+4x-16$.
2. En déduire les solutions de l'équation (E).

E.17

1. Factoriser chacune des expressions suivantes en produit de facteurs du premier degré :
   a. $4x^2-81$
   b. x^2-5
   c. $(2x-4)^2-9$
   d. $x^2-6{\cdot}x+9$
2. Trouver un argument permettant de justifier que l'expression x^2+1 ne peut se factoriser sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré.
   on aura alors établi l'assertion suivante :

   Il n'existe pas de nombres réels α, β, γ, δ tel que :
   $x^2+1=(\alpha{\cdot}x+\beta)(\gamma{\cdot}x+\delta)$

E.18 Soit la fonction f dont l'image de x est définie par :
$f(x)=x^2-2x-2$

1. Déterminer les valeurs des deux réels α et β vérifiant l'égalité suivante : $f(x)=(x-\alpha)^2+\beta$
2. Déterminer la forme factorisée de la fonction f.
3. Déduire de la question précédente, les antécédents de 0 par la fonction f.

E.19

1. Déterminer la forme canonique de l'expression : x^2-6x+3
2. Résoudre l'équation : $x^2-6x+3=19$

4. *Calcul du discriminant*

E.20

Définition : le **discriminant** d'un polynôme $a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$ du second degré est un nombre qui se calcule à l'aide des coefficients du polynôme : $\Delta=b^2-4\times a\times c$

Compléter le tableau ci-dessous pour chacun des polynômes du second degré :

	a	b	c	$\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c$
$2x^2+5x+1$				
$-x^2+7x+3$				
x^2-5x+4				
$2x^2-4x-1$				
$-x^2-x-1$				
x^2+7				

E.21 Déterminer le discriminant de chacun des polynômes du second degré ci-dessous :

a) $3{\cdot}x^2+5{\cdot}x+2$ b) $-x^2-3{\cdot}x+2$ c) $2{\cdot}x^2-\frac{1}{3}{\cdot}x+1$

E.22 Déterminer le discriminant des polynômes du second degré ci-dessous :

a) $-2x^2+2x+1$ b) x^2-x-1 c) $3x^2+x-2$

5. *Equation du second degré*

E.23

Définition : les racines d'un polynôme sont les valeurs annulant ce polynôme.

Proposition : pour un polynôme $a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$ du second degré, le nombre de racines existantes dépend du discriminant :

$\Delta<0$	$\Delta=0$	$\Delta>0$
Aucune racine	1 racine $-\dfrac{b}{2{\cdot}a}$	2 racine $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}$; $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}$

Déterminer les racines des polynômes ci-dessous :

a) x^2+4x-5 b) x^2+x+1

c) $2x^2-13x+15$ d) $3x^2-6x+3$

E.24 Déterminer les racines des polynômes ci-dessous :

a) $2x^2-3x-2$ b) $-4x^2+12x-9$ c) $3x^2-4x+2$

E.25 Déterminer les racines des polynômes ci-dessous :

a) $3x^2-5x+6$ b) $3x^2-24x+48$ c) $-2{\cdot}x^2+x+6$

E.26 Déterminer les racines des polynômes suivants :

a) $x^2+2x-15$ b) $3x^2-5x+7$

E.27 Déterminer les racines des polynômes suivants :

a) $3x^2-24x+48$ b) $-4{\cdot}x^2-x+3$

E.28 Déterminer les racines des polynômes du second degré suivants :

a) $-2{\cdot}x^2-5{\cdot}x-3$ b) $2{\cdot}x^2+5{\cdot}x+2$

E.29 Déterminer les racines des polynômes du second degré suivants :

a) x^2+x-2 b) $3{\cdot}x^2+4{\cdot}x+2$

E.30 Déterminer les racines des polynômes ci-dessous :

a) $\frac{2}{3}{\cdot}x^2+x-3$ b) $-2{\cdot}x^2-\frac{11}{3}{\cdot}x-1$ c) $3{\cdot}x^2-3{\cdot}x+\frac{2}{3}$

E.31 Résoudre les équations suivantes :

a) $\frac{2}{7}{\cdot}x^2-\frac{5}{3}{\cdot}x-\frac{7}{3}=0$ b) $-\frac{1}{2}{\cdot}x^2-\frac{4}{5}{\cdot}x+\frac{2}{5}=0$

E.32 ⚠ Parmi les quatre propositions ci-dessous, laquelle est correcte?

L'équation $-\frac{x^3}{3}+x^2+3{\cdot}x=0$ admet sur $\mathbb{R}$:

a) la solution est -2 b) trois solutions distinctes

c) aucune solution d) une unique solution

6. *Equation du second degré*

E.33 Déterminer les racines des polynômes du second degré :

a) x^2-3x+1 b) $5x^2+5x+1$

E.34 Déterminer les racines des polynômes du second degré :

a) x^2-7x+9 b) $-2x^2-3x+1$

E.35 Déterminer les racines des polynômes :

a) $-3x^2+6x+1$ b) $4x^2-6x+1$

Indication : pensez à simplifier le radical

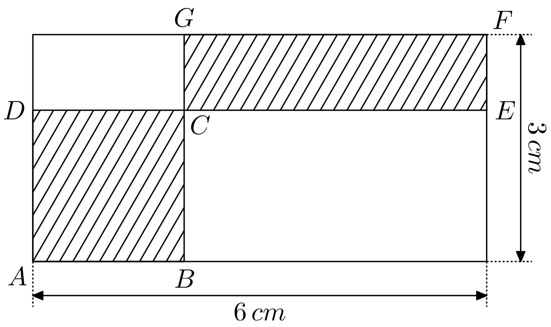
7. *Equation du second degré et manipulation algébrique*

E.36 Résoudre l'équation : $\dfrac{x-1}{x+1}=1-2{\cdot}x$

E.37 Résoudre l'équation : $\dfrac{2x-1}{2x+1}=1-x$

8. *Problèmes*

E.38 On considère le rectangle ci-dessous ayant pour dimension $6\,cm$ et $3\,cm$. À l'intérieur de ce rectangle, on construit le carré $ABCD$ et le rectangle $CEFG$ dont les côtés sont parallèles au rectangle les contenant.



On note x la longueur du segment $[AB]$. Déterminer s'il est possible que la partie hachurée de cette figure ait une aire de $8\,cm^2$.

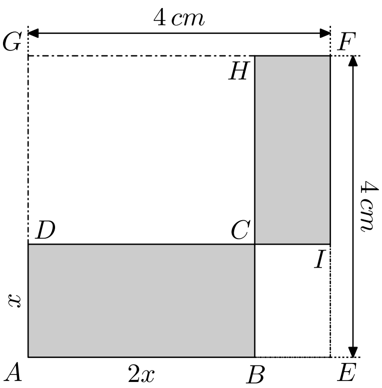
E.39

On considère la figure ci-dessous composée :

- du carré $AEFG$,
- de deux rectangles $ABCD$ et $CIFH$.

Les points B, D, I, H appartiennent aux côtés du carré $AEFG$.

On considère le domaine grisé représenté ci-contre et on note son aire $\mathcal{A}$:



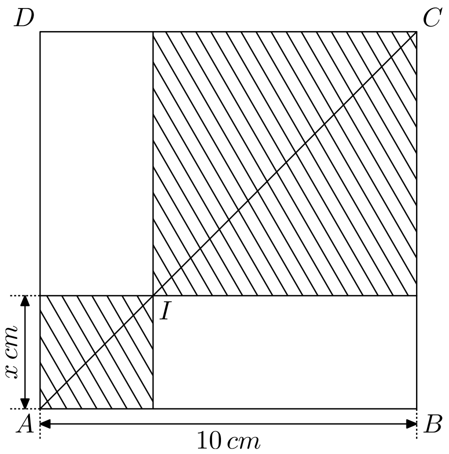
(les mesures sont exprimées en centimètre)

Déterminer l'ensemble des valeurs de x réalisant l'équation :

$$\mathcal{A} = \frac{37}{4}$$

Toute trace de recherche ou de prise d'initiative sera prise en compte dans l'évaluation.

E.40

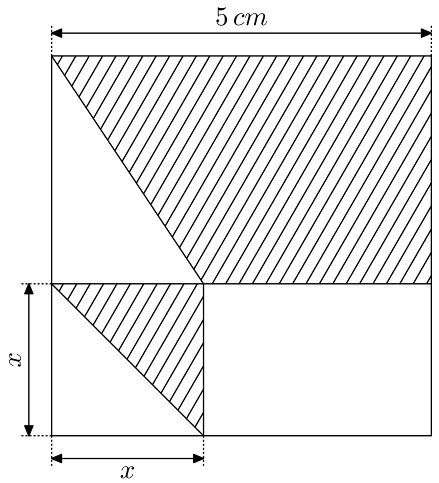


On considère un carré $ABCD$ de 10 centimètres de côté ; un point I appartient à la diagonale $[AC]$, il est repéré comme l'indique la figure ci-dessous par la longueur x :

À partir de ce point I, on construit deux carrés de diagonales respectives $[AI]$ et $[IC]$.

Déterminer la valeur de x pour laquelle la somme des aires de ces deux carrés vaut les $5/8$ de l'aire du carré $ABCD$.

E.41 On considère le carré ci-dessous de côté $5\,cm$ et hachuré un triangle rectangle isocèle et un trapèze rectangle :



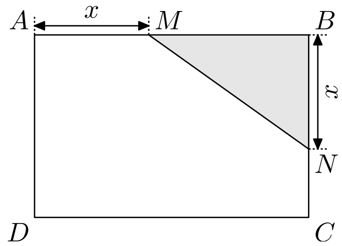
Déterminer la valeur de x pour que la surface de la partie hachurée mesure $16\,cm^2$.

E.42 **Dans cet exercice, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.**

On considère un rectangle $ABCD$ dont les dimensions sont données ci-dessous :

$AB = 6\,m \quad ; \quad AD = 4\,m.$

Pour un nombre réel x compris entre 0 et 4, on place les points M et N respectivement sur les côtés $[AB]$ et $[BC]$ tels que : $AM = x \quad ; \quad BN = x$



Déterminer la ou les valeurs possibles de x pour que l'aire du triangle MBN soit égales à $\frac{1}{6}$ de l'aire totale du rectangle $ABCD$.

E.43

1. Vérifier que : $10^2+11^2+12^2 = 13^2+14^2$
2. Existe-t-il d'autres séries de 5 entiers naturels consécutifs tels que la somme des carrés des deux plus grands soit égale à la somme des carrés des plus petits ?

9. *Problèmes avec substitution*

E.44

1. Résoudre l'équation : $x^2 - \frac{37}{2}\cdot x + 85 = 0$
2. On considère un rectangle ayant $37\,m$ pour périmètre et $85\,m^2$ pour aire. On notera respectivement L et ℓ, la longueur et la largeur de ce rectangle.

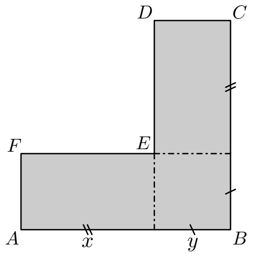
(a) Exprimer ℓ en fonction de L.

(b) Déterminer les dimensions de ce rectangle.

E.45 Un rectangle a pour périmètre $19\,m$ et pour aire $12\,m^2$.

Déterminer les dimensions de ce rectangle.

E.46 La figure ci-dessous est composée de deux rectangles et d'un carré :



On note $\mathcal{P}$ le polygone $ABCDEF$.

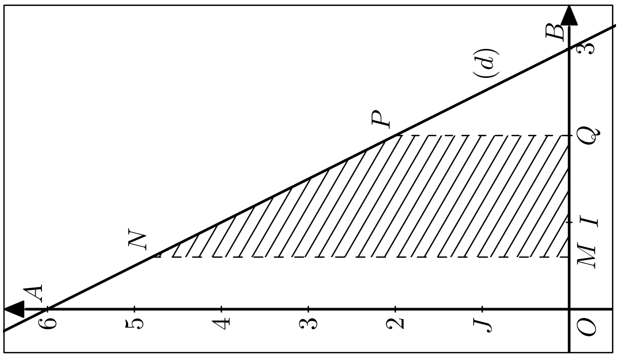
(1) (a) Exprimer le périmètre $\mathcal{L}$ du polygone $\mathcal{P}$ en fonction de x et de y.

(b) Exprimer l'aire $\mathcal{A}$ du polygone $\mathcal{P}$ en fonction de x et de y.

(2) Déterminer l'ensemble des couples $(x\,;y)$ réalisant les deux conditions suivantes :
$L = 15 \quad ; \quad \mathcal{A} = 14$

10. *Problèmes et courbes représentatives de fonctions*

E.47 Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère la droite (d) passant par les points $A(0\,;6)$ et $B(3\,;0)$:



On considère les 4 points M, N, P, Q vérifiant les propriétés suivantes :

- on a les coordonnées : $Q(2\,;0)$; $M(x\,;0)$ où x appartient à l'intervalle $]0\,;2[$.
- les points N et P appartiennent à la droite (d).
- les points M et P ont la même abscisse et les points Q et P ont la même abscisse.

(1) (a) Déterminer l'expression de la fonction affine f admettant la droite (d) pour courbe représentative.

(b) En déduire les coordonnées du point P.

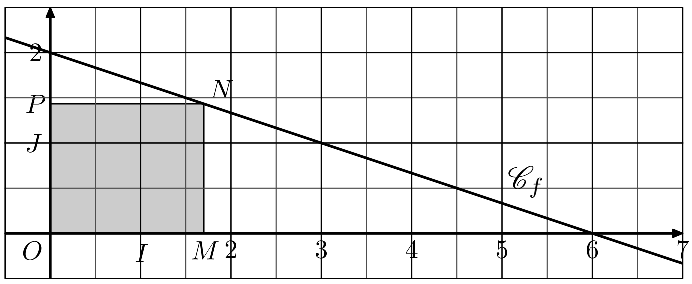
(c) En déduire l'expression des coordonnées du point N en fonction de x.

(2) On note $\mathcal{A}$ l'aire du trapèze $MNPQ$:

(a) Donner l'expression de l'aire $\mathcal{A}$ en fonction de x.

(b) Déterminer la position du point M afin que l'aire $\mathcal{A}$ vaille 3.

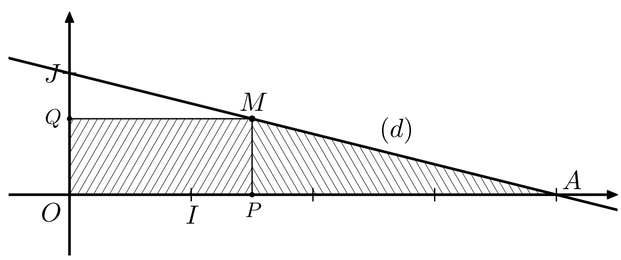
E.48 Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f affine admettant pour expression : $f(x) = -\frac{1}{3}\cdot x + 2$



Soit x un nombre appartenant à l'intervalle $]0\,;6[$. On note N le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x et on construit le rectangle $OMNP$ dont les côtés sont parallèles aux axes.

Déterminer le *(ou les)* coordonnées du point N tel que le rectangle $OMNP$ ait une aire de $\frac{5}{3}$.

E.49 Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère la droite (d) passant par les points $A(4\,;0)$ et J.



On considère un point M appartenant à la droite (d) et d'abscisse x tel que $x \in]0\,;4[$.

Déterminer la position du point M sur la droite (d) telle que le rectangle $OPMQ$ et le triangle MPA aient la même aire.

Toute trace de recherche et de prise d'initiatives seront prises en compte au cours de l'évaluation.

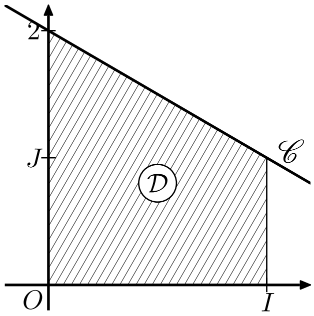
E.50 On considère la fonction f définie par :

$f(x) = 2 - x$ pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$.

On admet que :

$f(x) > 0,$ pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé, et $\mathcal{D}$ le domaine plan compris d'une part entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$, d'autre part entre les droites d'équations $x=0$ et $x=1$. La courbe $\mathscr{C}$ et le domaine $\mathcal{D}$ sont représentés ci-contre.



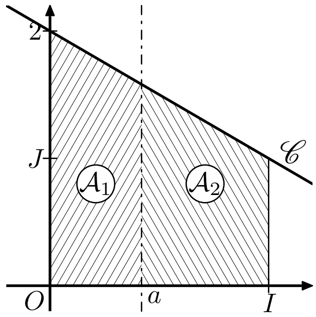
Le but de cet exercice est de partager le domaine $\mathcal{D}$ en deux domaines de même aire, d'abord par une droite parallèle à l'axe des ordonnées *(partie* **A***)*, puis par une droite parallèle à l'axe des abscisses *(partie* **B***)*.

Partie A

Soit a un réel tel que $0 \leqslant a \leqslant 1$.

On note $\mathcal{A}_1$ l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe (Ox), les droites d'équations $x=0$ et $x=a$, puis $\mathcal{A}_2$ celle du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, (Ox) et les droites d'équation $x=a$ et $x=1$.

$\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont exprimées en unités d'aire.



Déterminer la valeur de a afin que les aires $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ soient égales.

Partie B

Soit b un réel positif.

Dans cette partie, on se propose de partager le domaine $\mathcal{D}$ en deux domaines de même aire par la droite d'équation $y=b$.

On admet qu'il existe un unique réel b positif solution.

Déterminer la valeur de b.

11. *Racine et radicaux*

E.51 Exprimer les deux racines du polynôme x^2-3x+1 sous la forme $\dfrac{a+\sqrt{5}}{b}$ où a et b sont deux nombres réels.

E.52 On considère le polynôme P défini par :

$P = -4{\cdot}x^2+4{\cdot}x+1$

Déterminer les deux racines de ce polynôme sous la forme $\dfrac{a+\sqrt{2}}{b}$ où a et b sont des nombres réels.

E.53 Déterminer les racines des polynômes ci-dessous :

(a) $2x^2 + 3x + 3$ (b) $x^2 - 2x - 6$ (c) $x^2 + 2x - 1$

Indication : on exprimera ces racines, si elles existent, sous la forme : $a+b{\cdot}\sqrt{c}$ où $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}_+^*$

E.54 Déterminer les racines des polynômes du second degré suivants :

(a) $-2{\cdot}x^2 - x + 1$ (b) $2{\cdot}x^2 - x + 3$ (c) $2{\cdot}x^2 - 4x + 1$

Indication : on exprimera les racines sous la forme la plus simplifiée possible.

12. *Somme et produit des racines*

E.55

(1) **Étude théorique :**

On admet que pour un trinôme ax^2+bx+c du second degré dont le discriminant Δ est strictement positif, ces deux racines s'expriment sous la forme :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad ; \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

(a) Montrer que la somme des racines vaut $-\dfrac{b}{a}$.

(b) Montrer que le produit des racines vaut $\dfrac{c}{a}$

(2) **Application :**

En utilisant les propriétés établies à la question précédentes, répondre aux questions suivantes :

(a) On considère le polynôme $2x^2+4x-16$. Après avoir vérifié que 2 est une racine de ce polynôme, déterminer la valeur de l'autre racine.

(b) Déterminer un trinôme du second degré admettant deux racines dont la somme des racines vaut 3 et le produit des racines vaut -10.

13. *D'autres équations*

E.56 On considère la fonction polynôme P de degré 3 définie par :

$P(x) = 3x^3 + x^2 - 8x + 4$

1. Déterminer les valeurs de a, b, c tel que :
   $P(x) = (x+2)\big(a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c\big)$
2. En déduire l'ensemble des zéros du polynôme P.

14. *Evolutions et problèmes*

E.57 Un objet coûte au départ 128 € puis subit une augmentation de $t\,\%$ pour finalement subir une réduction de $t\,\%$. Son nouveau prix est de 126 €.

Déterminer la valeur du nombre t associé à chacune de ces évolutions.

E.58 Néo a ouvert un compte en 2017 et place le 1er janvier 2017, le 1er janvier 2018, le 1er janvier 2019 toujours la même somme qu'on notera x.
Son compte est rémunéré à un taux constant 4 % par an.

Sachant que son compte est crédité, au 1er janvier 2019, de 468,24 €, déterminer la somme x déposée par Néo chaque année sur son compte.

15. *Exercices non-classés*

E.59 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre x est définie par la relation algébrique :

$f(x) = 4x^2 + 4x - 3$

1. a. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $f(x) = (2x-1)(2x+3)$
   b. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $f(x) = (2x+1)^2 - 4$
2. Pour chacune des questions suivantes, utiliser la forme la plus adaptée :
   a. Déterminer les antécédents de 0 par la fonction f.
   b. Sachant que le carré d'un nombre est toujours positif ou nul, établir que la fonction f est minorée par -4.
   c. Déterminer le signe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   d. Résoudre l'inéquation : $f(x) \geqslant 5$.

E.60 Résoudre l'équation ci-dessous en donnant les réponses arrondies au centième près : $3{\cdot}x^2 + x - 1 = 0$

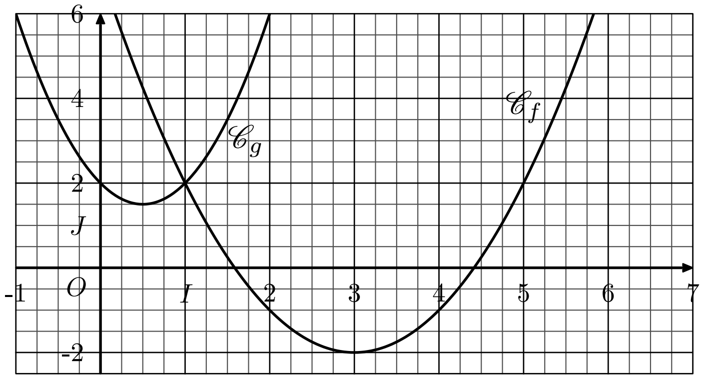
E.61 On considère la fonction f définie par le polynôme du second degré : $f(x) = 4x^2 - 12x + 8$

1. Déterminer la forme canonique de l'expression de f.
2. Établir qu'en $x = \dfrac{3}{2}$, la fonction f admet un minimum.
   On donnera les éléments caractéristiques de cet extremum.
   a. Vérifier que le nombre 1 est un zéro de la fonction f.
   b. En déduire la forme factorisée de la fonction f.
   c. Dresser le tableau de signes de la fonction f.

E.62 On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = x^2 - 6{\cdot}x + 7 \quad ; \quad g(x) = 2{\cdot}x^2 - 2{\cdot}x + 2$

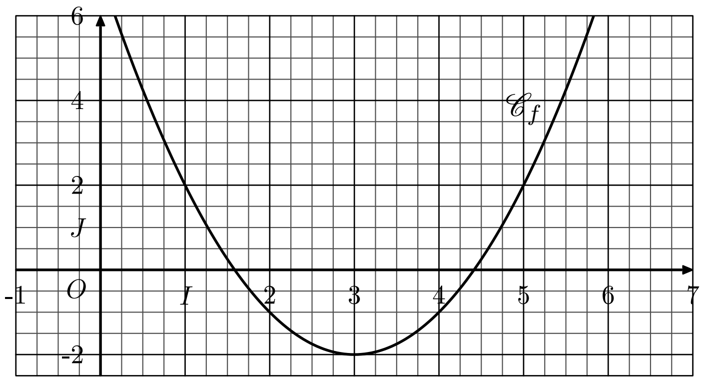
Dans le plan muni d'un repère orthogonal $\big(O\,;I\,;J\big)$, on donne les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives respectivement des fonctions f et g.



1. Déterminer les zéros de la fonction f.
2. Déterminer la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

E.63 Dans le plan muni d'un repère orthogonal $\big(O\,;I\,;J\big)$, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 6{\cdot}x + 7$

Voici la représentation de la courbe $\mathscr{C}_f$:



Déterminer les zéros de la fonction f.

E.64 Soit m un nombre réel $(m\in\mathbb{R})$. Pour tout nombre m, on considère la fonction f_m définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_m(x) = 4{\cdot}x^2 + \big(5-m\big)x + m$$

Déterminer l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles la courbe de la fonction f_m intercepte une seule fois l'axe des abscisses.

E.65

Proposition : *(admise)*
Un polynôme est factorisable sous la forme d'un carré, si et seulement si, son discriminant est nul.

Soit a un nombre connu, on considère le polynôme P défini par :

$$P = \big(x+10\big)\big(x+10+a\big)+k$$

Déterminer la valeur de k en fonction de a afin que le polynôme P soit factorisable sous la forme d'un carré.

Indication : toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte lors de l'évaluation.

Première spécialité / Second degré : fonctions, variations, inéquations

ChingEval : 8 exercices disponibles pour l'évaluation par QCM

1. Rappels

E.1 Compléter les tableaux de signe ci-dessous :

1.

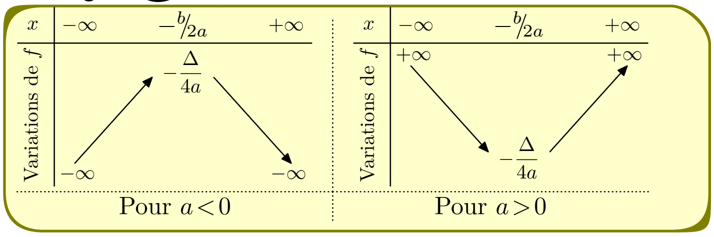
x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$1-x$	
$2x+1$	
$(1-x)(2x+1)$	

2.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$x-3$	
$-2x+4$	
$(x-3)(-2x+4)$	

2. Tableau de variations

E.2



Dresser le tableau de variations des fonctions polynomiales du second degré ci-dessous :

a) $f(x) = 3{\cdot}x^2 - 3{\cdot}x + 2$ $\qquad$ b) $g(x) = -x^2 - 2{\cdot}x + 3$

E.3 Pour chacune des fonctions, dresser le tableau de variations et donner les caractéristiques de leur extremum :

1. $f(x) = -3x^2 + 9x - 2$ $\qquad$ 2. $g(x) = 3x^2 + 2x + 2$

E.4 Pour chacune des fonctions, dresser le tableau de variations et donner les caractéristiques de leur extremum :

1. $f : x \longmapsto \frac{1}{6}{\cdot}x^2 + \frac{1}{4}x + 1$ $\qquad$ 2. $g : x \longmapsto -x^2 + 2\sqrt{3}x - 1$

3. Tableau de variations et racines

E.5 Soit h la fonction définie par la relation : $h(x) = 4x^2 + 2x + 1$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction h.
2. Justifier que la fonction h ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$.

E.6 Soit f la fonction définie par la relation : $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$

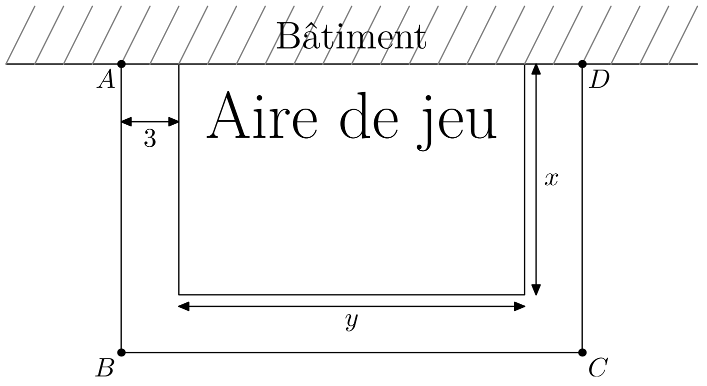
1. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
2. Justifier que la fonction f s'annule en deux valeurs.

E.7 Soit g la fonction définie par la relation : $g(x) = -4x^2 + 4x - 1$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction g.
2. Justifier que la fonction g s'annule en une unique valeur qu'on précisera.

4. Problèmes et extrémums

E.8 On veut construire le long d'un bâtiment une aire de jeu rectangulaire. De plus, on souhaite que les dimensions de ce rectangle soient supérieures ou égales à $10\,m$. Cet espace de jeu est entouré sur trois côtés d'une allée de $3\,m$ de large comme l'indique le croquis ci-dessous.



L'ensemble est clôturé sur les trois côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CD]$.
On s'intéresse à la longueur $\mathscr{L}$ de la clôture :

$\mathscr{L} = AB + BC + CD$.

On note x et y les dimensions en mètres de l'aire de jeu *(la valeur de x et de y sont nécessairement positifs)*.

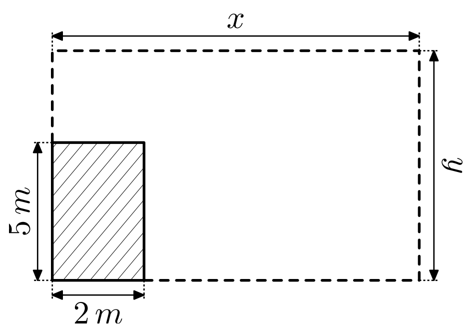
On dispose de 100 mètres de clôture qu'on souhaite entièrement utilisé :

1. a. Exprimer, dans ces conditions, la valeur de y en fonction de x.

   b. Justifier que la valeur de x doit être inférieure à 44.

2. Déterminer les dimensions afin que les 100 mètres de clôtures soient utilisés et que l'aire de jeu soit maximale.

E.9 Dans son champ, un agriculteur possède un poulailler de forme rectangulaire et de dimensions $5\,m$ et $2\,m$. Il souhaite construire un enclos comme l'indique la figure ci-dessous avec $17\,m$ de clôture :



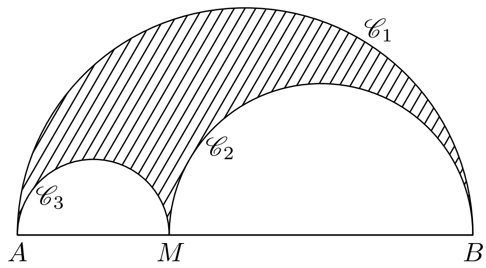
Les nombres x et y représentent les dimensions de ce champ.

Le poulailler est représenté par la partie hachurée, la clôture est représentée en pointillés et la partie extérieure dédiée aux poules est représentée par la partie blanche.

On note $\mathcal{A}$ l'aire de la partie extérieure.

1. Établir la relation suivante entre x et y :
   $x + y = 12$
2. Démontrer que l'aire de l'espace extérieur a pour expression : $\mathcal{A}(x) = -x^2 + 12 \cdot x - 10$
3. Dresser le tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$ sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer les valeurs de x et de y pour que l'aire de l'espace extérieur réservé aux poules soient maximale.

E.10 La figure ci-dessous est composée du segment $[AB]$ mesurant $6\,cm$ et d'un point M appartement au segment $[AB]$.
Le demi-cercle $\mathscr{C}_1$ *(resp.* $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$*)* admet le segment $[AB]$ *(resp.* $[MB]$, $[AM]$*)* pour diamètre.



On note x la longueur du segment $[AM]$. Déterminer pour quelle*(s)* valeur*(s)* de x l'aire du domaine hachurée est maximale.

5. *Forme canonique et factorisation*

E.11 On considère le polynôme du second degré :

$P = x^2 - 6x - 16$

1. Déterminer la forme canonique du polynôme P.
2. En déduire la factorisation : $P = (x-8)(x+2)$
3. En déduire que le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		8		$+\infty$
$x^2-6x-16$		$+$	0	$-$	0	$+$	

E.12 On considère le polynôme du second degré :

$P = -2x^2 - 13x - 15$

1. Déterminer la forme canonique du polynôme P.
2. En déduire la factorisation : $P = (-2x-3)(x+5)$
3. En déduire que le tableau de signes du polynôme P

E.13 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$f(x)=2{\cdot}x^2-16{\cdot}x+30$

1. Établir que la fonction f admet pour forme canonique : $f(x)=2{\cdot}\left[(x-4)^2-1\right]$
2. En déduire l'expression de la fonction f, puis factoriser sous la forme de deux facteurs de degré 1.

   Indication : la fonction f admet une factorisation de la forme : $f(x)=2{\cdot}(a{\cdot}x+b)(c{\cdot}x+d)$ où $a, b, c, d\in\mathbb{R}$
3. Dresser le tableau de signes de la fonction f.

E.14 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$f(x)=6x^2-9x-6$

1. Montrer que l'expression de $f(x)$ peut s'écrire :

$$f(x)=6\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{25}{16}\right]$$

2. En remarquant que $\frac{25}{16}=\left(\frac{5}{4}\right)^2$, factoriser l'expression de la fonction f sous la forme de deux facteurs de degré 1.
3. Dresser le tableau de signes de la fonction f.

6. *Introduction : racines, factorisation et signes*

E.15 On considère le polynôme : $P=3{\cdot}x^2+3{\cdot}x-18$

1. Déterminer les racines du polynôme P.

On note x_1 et x_2 les deux racines du polynôme P.

2. a. Développer l'expression $(x-x_1)(x-x_2)$.
   b. En déduire une factorisation du polynôme P.
   c. Dresser le tableau de signe de l'expression P sur $\mathbb{R}$.

E.16 On considère le polynôme : $P=-9{\cdot}x^2+6{\cdot}x+15$

1. Déterminer les racines du polynôme P.

On note x_1 et x_2 les deux racines du polynôme P.

2. a. Développer l'expression $(x-x_1)(x-x_2)$.
   b. En déduire une factorisation du polynôme P.
   c. Dresser le tableau de signe de l'expression P sur $\mathbb{R}$.

E.17 On considère le polynôme : $P=-2{\cdot}x^2-8{\cdot}x+16$

1. Déterminer les racines du polynôme P.

Indication : on donnera ces racines sous la forme "$a+b{\cdot}\sqrt{c}$" où $a,b,c\in\mathbb{Z}$

On note x_1 et x_2 les deux racines du polynôme P.

2. a. Développer l'expression $(x-x_1)(x-x_2)$.
   b. En déduire une factorisation du polynôme P.
   c. Dresser le tableau de signe de l'expression P sur $\mathbb{R}$.

7. *Factorisations*

E.18 Donner la forme factorisée des expressions suivantes :

a. $3{\cdot}x^2-3{\cdot}x-6$ b. $2{\cdot}x^2+12{\cdot}x+18$

E.19 Factoriser, si possible, les polynômes du second degré ci-dessous :

a. x^2+2x+1 b. $3x^2-4x+2$ c. $-3x^2+4x-1$

Indication : présenter les résultats sous la forme : $(a{\cdot}x+b)(c{\cdot}x+d)$ ou $(a{\cdot}x+b)^2$ avec $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$

E.20 Factoriser, si possible, les expressions suivantes :

a. $8x^2-24x+18$ b. $3x^2+x+1$ c. $-4x^2+x+3$

Indication : présenter les résultats sous la forme : $(a{\cdot}x+b)(c{\cdot}x+d)$ ou $(a{\cdot}x+b)^2$ avec $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$

E.21

1. Factoriser l'expression : $-2{\cdot}x^2-3{\cdot}x+5$.
2. Pour chaque proposition, une seule réponse est correcte. Cochez la case correspondante.

Indication : on utilisera le résultat de la question 1

a. La forme de factorisée de $-x^2-\frac{3}{2}{\cdot}x+\frac{5}{2}$ est :

☐ $(x+5)(1-x)$ ☐ $\left(x+\frac{5}{2}\right)(1-x)$

☐ $(x+5)\left(1-\frac{1}{2}{\cdot}x\right)$ ☐ $\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\right)$

b. La forme de factorisée de $-2{\cdot}x^2-3{\cdot}x+5+(1-x)$ est :

☐ $(2{\cdot}x+5)(1-x)$ ☐ $(2{\cdot}x+5){\cdot}x$

☐ $(2{\cdot}x+6)(1-x)$ ☐ $(2{\cdot}x+6)(2-x)$

c. La forme de factorisée de $-2{\cdot}(x+1)^2-3{\cdot}(x+1)+5$ est :

☐ $(2{\cdot}x+6)(1-x)$ ☐ $(2{\cdot}x+6)(2-x)$

☐ $-(2{\cdot}x+7){\cdot}x$ ☐ $(2{\cdot}x+7)(2-x)$

E.22 Factoriser les expressions suivantes :

(a) $2x^2 - 6x + 2$

Indication : on simplifiera au maximum l'expression factorisée de ces polynômes, notamment en portant un soin sur l'expression de leurs racines.

E.23 Factoriser, si possible, chacun des polynômes ci-dessous :

(a) $3x^2 - 12x + 12$ (b) $-5x^2 + 2x - 1$ (c) $6x^2 + x - 15$

E.24 Factoriser l'expression : $A = 12x^2 + 12x - 3$

Indication : on factorise l'expression sous la forme :
$A = (2x + \alpha)(6x + \beta)$
où α et β sont deux nombres réels.

8. *Factorisations (degré 3)*

E.25 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$f(x) = x^3 - 7{\cdot}x - 6$

(1) Vérifier que le nombre 3 est un zéro de la fonction f.

Le polynôme $x^3-7{\cdot}x-6$ admet le nombre 3 pour racine. Il admet donc une factorisation de la forme :
$x^3-7{\cdot}x-6 = (x-3)(a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c)$ où $a,b,c \in \mathbb{R}$

(2) (a) Pour a, b, c des nombres réels, vérifier l'identité suivante :
$(x-3)(a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c) = a{\cdot}x^3+(b-3a){\cdot}x^2+(c-3b){\cdot}x-3c$

(b) Déterminer les valeurs de a et b vérifiant :
$a = 1$; $b - 3a = 0$; $c - 3b = -7$; $-3c = -6$

(c) En déduire la forme factorisée de la fonction f en facteurs de degré 1.

E.26 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'expression est : $f(x) = 2{\cdot}x^3-7{\cdot}x^2+4{\cdot}x+3$

(1) Déterminer les nombres réels a, b, c réalisant l'égalité :
$f(x) = (2{\cdot}x - 3)(a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c)$

(2) En déduire la forme factorisée de la fonction f en produit de facteurs de degré 1.

9. *Tableau de signes*

E.27 Établir le tableau de signes des expressions suivantes :

(a) $3x^2+4x-4$ (b) $-4x^2+2x+6$

E.28 ⚠ Dresser le tableau de signes de chacune des expressions ci-dessous :

(a) $2{\cdot}x^2+9{\cdot}x+10$ (b) $12x^2-31x+20$ (c) $-5x^2-3x-1$

E.29 Établir le tableau de signes des expressions suivantes :

(a) $2x^2+11x+5$

E.30 Dresser, sur $\mathbb{R}$, le tableau de signes de chacune des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

(a) $f(x) = 5x^2 - 4x + 1$ (b) $g(x) = -3x^2 + 7x + 20$

10. *Tableau de signes et inéquation*

E.31 Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $x^2-x-2<0$ (b) $-9x^2+12x-4 \leqslant 0$

E.32 Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $-4x^2+2x+2 \geqslant 0$ (b) $3{\cdot}x^2+x+1<0$

E.33 Résoudre les inéquations :

(a) $6{\cdot}x^2 + x - 1 \geqslant 0$ (b) $-x^2 + x - 3 > 0$

E.34 Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $-10x^2 - 13x + 3 \geqslant 0$ (b) $(3x + 1)(x^2 + x + 1) < 0$

E.35 Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $x^2-3x+2>0$ (b) $5x^2+4x-1<0$

11. *Tableau de signe et inéquation (degré 3)*

E.36 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$f(x) = x^3 - 4{\cdot}x^2 - 4{\cdot}x + 16$

(1) Vérifier que le nombre 2 est un zéro de la fonction f.

Le polynôme $x^3-4\cdot x^2-4\cdot x+16$ admet le nombre 2 pour racine. Il admet donc une factorisation de la forme :
$$x^3-4\cdot x^2-4\cdot x+16=(x-2)(a\cdot x^2+b\cdot x+c) \quad \text{où } a,b,c\in\mathbb{R}$$

2. a. Pour a, b, c des nombres réels, vérifier l'identité suivante :
$$(x-2)(a\cdot x^2+b\cdot x+c) = a\cdot x^3+(b-2a)\cdot x^2+(c-2b)\cdot x-2c$$
   b. Déterminer les valeurs de a et b vérifiant :
$$a=1 \quad ; \quad b-2a=-4 \quad ; \quad c-2b=-4 \quad ; \quad -2c=16$$
   Proposer une forme factorisée de la fonction f.
   c. Établir le tableau de signes de la fonction f.

E.37 On considère le polynôme $\mathcal{P}$ admettant pour expression :
$$\mathcal{P} = 2\cdot x^3+7\cdot x^2-7\cdot x-12$$

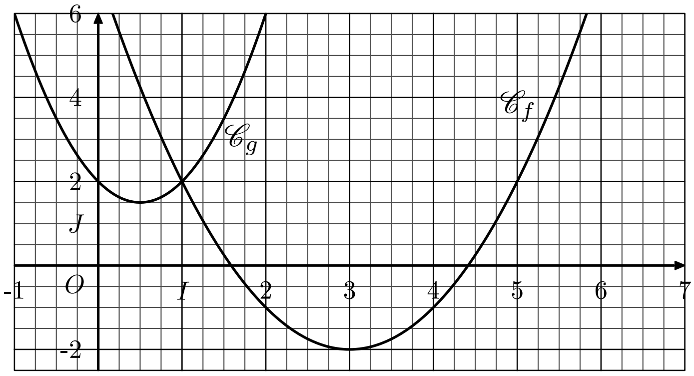
1. Établir la factorisation suivante où b est un nombre réel à déterminer :
$$\mathcal{P} = (x+1)\cdot(2\cdot x^2+b\cdot x-12)$$
2. En déduire le tableau de signes du polynôme $\mathcal{P}$.

E.38 On considère le polynôme du troisième degré :
$$\mathcal{P} = 3x^3+5x^2-5x+1$$
On sait que le polynôme P admet une factorisation de la forme :
$$\mathcal{P} = (3x-1)(a\cdot x^2+b\cdot x+c)$$

1. Déterminer les valeurs de a, b, c vérifiant cette factorisation.
2. En déduire l'ensemble des racines du polynôme $\mathcal{P}$.
3. Dresser le tableau de signes de $\mathcal{P}$.

12. *Positions relatives de courbes*

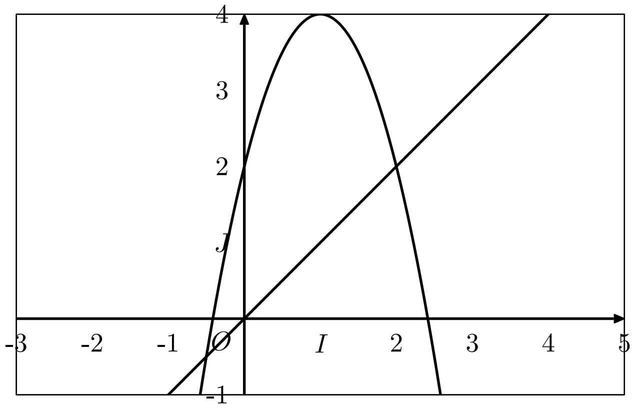
E.39 On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^2-6\cdot x+7 \quad ; \quad g(x) = 2\cdot x^2-2\cdot x+2$$
Dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;I\,;J)$, on donne les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives respectivement des fonctions f et g.



Déterminer la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

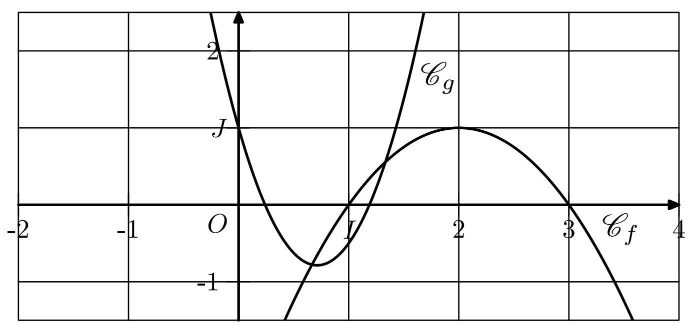
E.40 On considère la fonction f dont l'image de tout nombre réel x est définie par la relation : $f(x)=-2x^2+4x+2$

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f et la droite (Δ) première bissectrice du plan admettant pour équation $y=x$.



Algébriquement, étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite (Δ).

E.41 Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g définies par :
$$f(x) = -x^2+4\cdot x-3 \quad ; \quad g(x) = \frac{7}{2}\cdot x^2-5x+1$$



Déterminer la position relative de ces deux courbes.

13. *Positions relatives de courbes (degré 3)*

E.42 On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}\backslash\{5\}$ par les relations :

$$f(x)=\frac{5}{4x^2+1} \quad ; \quad g(x)=-x+2$$

Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives respectivement des fonctions f et g.

14. *Problèmes et inéquations*

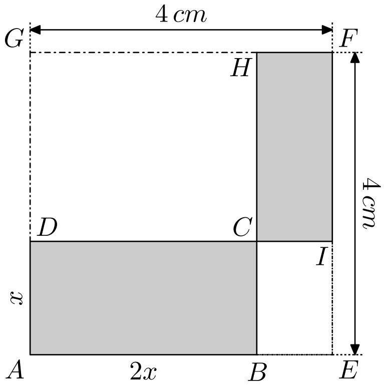
E.43

On considère la figure ci-dessous composée :

- du carré $AEFG$,
- de deux rectangles $ABCD$ et $CIFH$.

Les points B, D, I, H appartiennent aux côtés du carré $AEFG$.

On considère le domaine grisé représenté ci-contre et on note son aire $\mathcal{A}$:



(les mesures sont exprimées en centimètre)

Déterminer l'ensemble des valeurs de x réalisant l'inéquation :

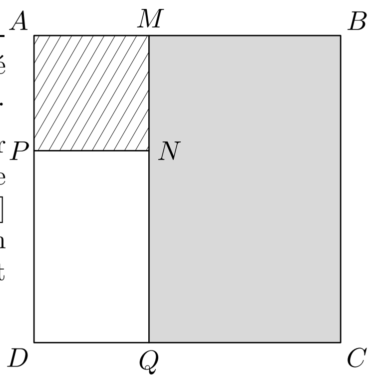
$$\mathcal{A}\geqslant\frac{37}{4}$$

Toute trace de recherche ou de prise d'initiative sera prise en compte dans l'évaluation.

E.44

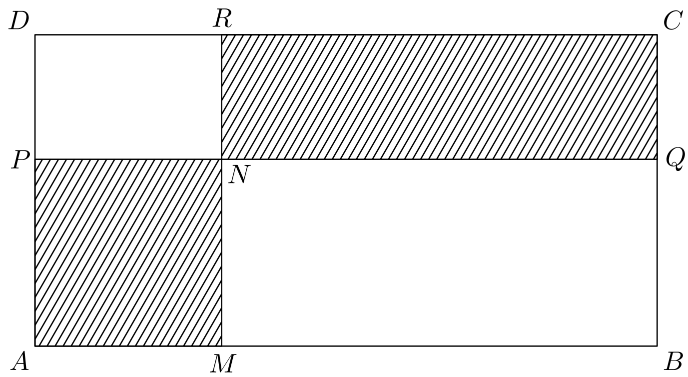
On considère la figure ci-contre où $ABCD$ est un carré dont les côtés mesurent $5\,cm$.

On considère un point M sur le segment $[AB]$ et on place le point P sur le segment $[AD]$ et les points N et Q afin que $AMNP$ soit un carré et $BCQM$ est un rectangle.



On note x la mesure du segment $[AM]$. Déterminer l'ensemble des valeurs de x afin que l'aire du carré $AMNP$ soit strictement supérieure à l'aire du rectangle $BCQM$.

E.45 On considère la configuration ci-dessous où :



où :

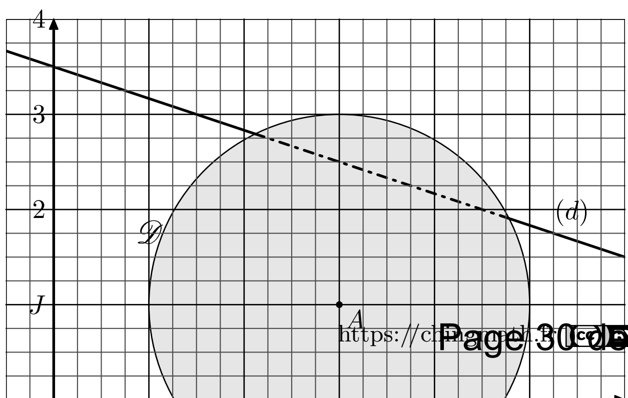
- les quadrilatères $ABCD$ et $CRNQ$ sont des rectangles et $AMNP$ est un carré
- les points M, Q, R, P appartiennent respectivement aux segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$
- $AB=10\,cm$ et $AD=5\,cm$.

On note x la longueur du segment $[AM]$ et on note $\mathcal{A}$ l'aire de la partie non hachurée de cette figure :

1. Montrer que l'aire $\mathcal{A}$ s'exprime en fonction de x par : $\mathcal{A}=-2{\cdot}x^2+15{\cdot}x$
2. a. Résoudre l'équation $\mathcal{A}=27$
   b. Déterminer les positions du point M pour que la surface non hachurée ait une aire supérieure ou égale à $27\,cm^2$.
3. De même, on déterminera les positions du point M pour que la surface non hachurée ait une aire supérieure ou égale à $18\,cm^2$.

15. *Problèmes, inéquations et racines carrées*

E.46 Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère le disque $\mathscr{D}$ de centre $A(3\,;1)$ et de rayon 2 et la droite (d) passant par les points $B(0\,;3{,}5)$ et $C(1{,}5\,;3)$:



Déterminer l'ensemble des abscisses des points de la droite (d) inclus dans le disque $\mathscr{D}$.

Indication : on s'intéressera à l'ensemble des points M de la droite (d) tels que $AM^2 \leqslant 4$

16. *Fractions rationnelles et simplifications*

E.47 On considère la fonction f définie par : $f(x)=x^2-6{\cdot}x-7$

1. Déterminer la forme factorisée de la fonction f.
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\,;7\}$ par :
$$g(x) = \frac{x^2-6{\cdot}x-7}{(x-3)\,(x-7)}.$$
   a. Simplifier l'expression de la fonction g.
   b. Dresser le tableau de signes de la fonction g.

E.48 Simplifier la fraction rationnelle suivante :
$$\frac{x^2-x-2}{2x^2-3x-2}$$

E.49 Simplifier l'expression des fractions rationnelles ci-dessous :

a. $\dfrac{3x-1}{3x^2+2x-1}$ b. $\dfrac{6x^2-5x+1}{1-4x^2}$

17. *Tableau de variations et tableau de signes*

E.50 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ définies par les relations :
$$f(x) = x^2+x+1 \quad ; \quad g(x) = -2x^2-3x+5$$

1. Dresser le tableau de variations de chacune de ces fonctions.
2. Établir le tableau de signes de chacune de ces fonctions.

E.51 Déterminer le tableau de signes des expressions suivantes sur $\mathbb{R}$:

a. $2x^2-3x-2$ b. $(2x+1)(3x^2-2x-1)$

18. *Partage*

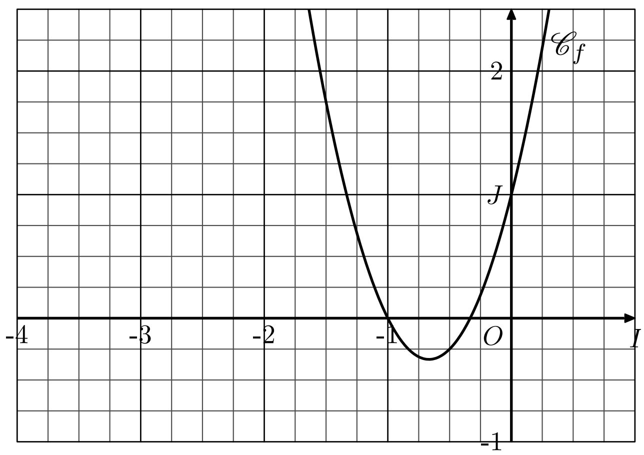
E.52 On considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y=x^2-x-10$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y=2x-1$.

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$.
2. Donner les valeurs de x pour lesquelles le point $\mathcal{P}$ ayant pour abscisse x se trouve au-dessus du point de $\mathcal{D}$ ayant même abscisse.

19. *Exercices non-classés*

E.53 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$$f(x) = 3{\cdot}x^2+4{\cdot}x+1$$

Ci-dessous, est donnée la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé :



1. On considère la droite (d) passant par les points $A(-3\,;2)$ et $B(-2\,;1)$.
   a. Tracer la droite (d) dans le repère ci-dessous.

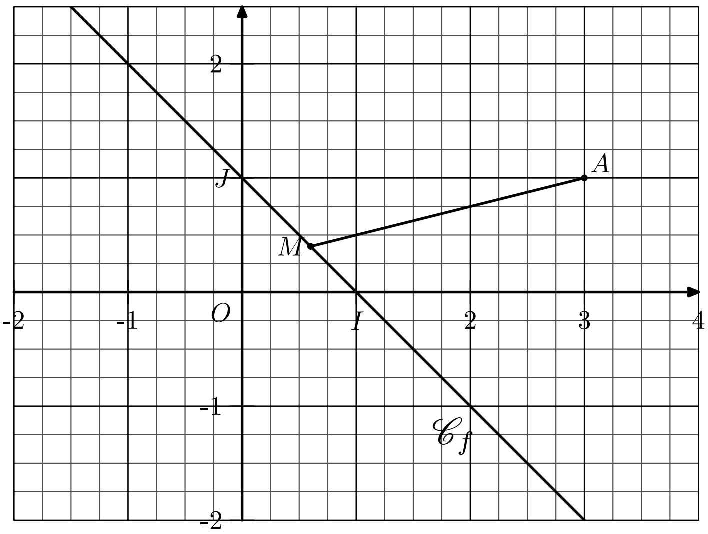
(b) Déterminer l'équation réduite de la droite (d).

(2) Déterminer la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite (d).

E.54 On considère la fonction f définie par la relation :

$f(x) = -x + 1$

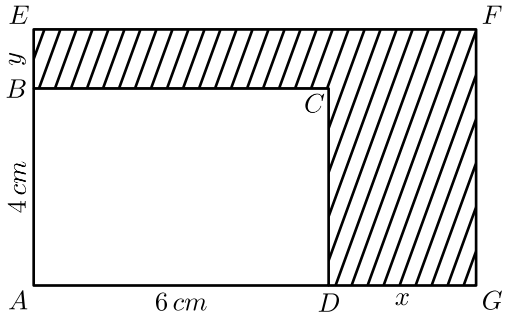
La représentation graphique est donnée ci-dessous :



On considère le point A de coordonnée $(3\,;1)$ et M un point de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Déterminer la position du point M sur $\mathscr{C}_f$ afin que la longueur AM soit minimale.

E.55 Soit $ABCD$ un rectangle de dimension $6\,cm$ et $4\,cm$. On considère les points E et G, situés hors du rectangle $ABCD$, appartenant respectivement aux demi-droites $[AB)$ et $[AD)$ et le point F tels que le quadrilatère $AGFE$ est un rectangle.



On note x et y les deux distances suivantes :

$x = DG \quad ; \quad y = BE$

On impose aux points E et G de former un rectangle $AEFG$ dont le périmètre est de $28\,cm$.

(1) (a) Montrer que la longueur y s'exprime en fonction de x par : $y = 4 - x$

(b) En déduire les valeurs possibles de x.

On note $\mathcal{A}$ l'aire de la partie hachurée *(celle du polygone $BEFGDC$)*.

(2) Établir que l'aire de la partie hachurée s'écrit en fonction de x est obtenue par l'égalité :

$\mathcal{A}(x) = -x^2 + 2x + 24$

(3) Dresser le tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$ sur $[0\,;4]$. *(on indiquera la valeur de l'extrémum local)*.

(4) Donner la valeur de l'aire maximale de la partie hachurée? Pour quelles valeurs de x est-elle atteinte?

Exercice 1

▶**1.** Soit $E = x^3 + 5x^2 - 12x - 36$

a) Vérifier que -6 est une racine de E.

b) Factoriser E.

▶**2.** Soit $F = 132x^3 - 13x^2 - 2x$

a) Vérifier si F possède une racine évidente.

b) Factoriser F.

Exercice 2

▶**1.** Soit $E = x^3 - 7x^2 - 36x + 252$

a) Vérifier que -6 est une racine de E.

b) Factoriser E.

▶**2.** Soit $F = -40x^3 - 102x^2 - 77x - 15$

a) Vérifier si F possède une racine évidente.

b) Factoriser F.

Exercice 3

▶**1.** Soit $E = x^3 + 3x^2 - 10x - 24$

a) Vérifier que -4 est une racine de E.

b) Factoriser E.

▶**2.** Soit $F = 3x^3 + 5x^2 - 4x - 4$

a) Vérifier si F possède une racine évidente.

b) Factoriser F.

Exercice 4

▶**1.** Soit $E = x^3 + 9x^2 - 22x - 120$

a) Vérifier que -10 est une racine de E.

b) Factoriser E.

▶**2.** Soit $F = -50x^3 + 105x^2 + 26x - 72$

a) Vérifier si F possède une racine évidente.

b) Factoriser F.

Exercice 5

▶**1.** Soit $E = x^3 + 5x^2 - 26x - 120$

a) Vérifier que -6 est une racine de E.

b) Factoriser E.

▶**2.** Soit $F = -10x^3 + 9x^2 + 7x$

a) Vérifier si F possède une racine évidente.

b) Factoriser F.

Exercice 6

▶**1.** Soit $E = x^3 + 14x^2 + 53x + 40$

a) Vérifier que -8 est une racine de E.

b) Factoriser E.

▶**2.** Soit $F = -12x^3 + 29x^2 + 15x - 50$

a) Vérifier si F possède une racine évidente.

b) Factoriser F.

Chapitre 3

Equations et inéquations dans R

Maitriser la résolution numérique d'une équation et inéquation dans R

Seconde / Calcul algébrique, équation du premier degré, problèmes

ChingEval : 4 exercices disponibles pour l'évaluation par QCM

1. Rappels

E.1 Dire si les équations suivantes acceptent pour solution $x=2$:

(a) $3x+1=2x-1$ (b) $3(x+1)-3(2-x)=x+1$

(c) $\dfrac{2x+1}{3x+4}=\dfrac{1}{2}$ (d) $\sqrt{3x^2+4}=4$

E.2 Au travers de contre-exemple, montrer que les égalités suivantes sont fausses :

(a) $3x+1=4x$ (b) $(x+1)^2=x^2+1$

(c) $(x+y)^2=x^2+y^2$ (d) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{x+y}$

(e) $\sqrt{x^2+y^2}=x+y$

E.3 Le diagramme ci-dessous présente la résolution d'une équation.

$5(x+2)+2x=3(x+5)+2$	
$5x+10+2x=3x+15+2$	
$7x+10=3x+17$	
$7x=3x+17-10$	
$7x=3x+7$	
$7x-3x=7$	
$4x=7$	
$x=\dfrac{7}{4}$	

Compléter chacune des étiquettes à l'aide d'une "*action*" mathématique.

2. Développement

E.4 Développer les expressions ci-dessous :

(a) $x(2x-1)-3(5-x)$ (b) $(3x+1)x-3(x-2)$

E.5 Développer les expressions suivantes :

(a) $3(x-5)-2x(1-2x)$ (b) $3(x+2)-4(2-2x)$

E.6 Développer et réduire les produits suivants :

(a) $(2x+1)(3-2x)$ (b) $(x-3)(-x-1)$

E.7 Développer et donner la forme réduite des expressions ci-dessous :

(a) $(3x+2)(5-2x)$ (b) $(x-1)(3x^2-2)$

E.8 Développer et donner la forme réduite des expressions ci-dessous :

(a) $2(3-2x)x-2(x-2)$ (b) $\big[2+2(x-5)\big](x-1)$

(c) $(5x+1)\big[2(x-1)-5x\big]$

E.9 Développer les expressions suivantes :

(a) $(3-x)(2x+1)+2(x+2)$ (b) $(x-1)(2x-1)-3(3+2x)$

E.10 Développer et réduire les expressions suivantes :

(a) $-(5-2x)+(x+3)(2x+1)$

(b) $x(1+x)-(x+2)(3-x)$

3. Développement : identification des termes

E.11 Pour chacune des questions ci-dessous, déterminer les valeurs des réels a et b réalisant l'identité proposée :

(a) $2x^2 - 5x - 3 = (2x+1)(a \times x + b)$

(b) $-2x^2 + 5x - 3 = (x-1)(a \times x + b)$

(c) $-x^2 - 3x + 4 = (-x+a)(-1+b \times x)$

(d) $4x^2 + 12x + 9 = \left(2x+a\right)^2$

E.12

(1) On considère l'expression algébrique $-4x^2+4x+3$. Sa forme factorisée est une des quatre expressions ci-dessous. Laquelle?

(a) $\left(-2x+1\right)\left(2x+3\right)$ (b) $\left(2x-1\right)\left(2x-3\right)$

(c) $\left(2x+1\right)\left(2x-3\right)$ (d) $\left(2x+1\right)\left(3-2x\right)$

(2) Déterminer les valeurs des nombres a et b réalisant la factorisation suivante :
$6x^2 - 7x - 5 = \left(2x+1\right)\left(a \times x + b\right)$

E.13

(1) On considère l'expression algébrique $-4x^2-4x+3$. Sa forme factorisée est une des quatre expressions ci-dessous. Laquelle?

(a) $\left(-2x+1\right)\left(2x+3\right)$ (b) $\left(2x-1\right)\left(2x-3\right)$

(c) $\left(2x+1\right)\left(2x-3\right)$ (d) $\left(2x+1\right)\left(3-2x\right)$

(2) Déterminer les valeurs des nombres a et b réalisant la factorisation suivante :
$8x^2 - 2x - 3 = \left(2x+1\right)\left(a \times x + b\right)$

4. *Factorisation : avec facteur commun*

E.14 Factoriser les expressions suivantes :

(a) $(3x-1)(2x+1) + (5-x)(2x+1)$

(b) $x(2-x) + (3x+1)(2-x)$

E.15 Factoriser les expressions suivantes :

(a) $\left(x+3\right)\left(x+1\right) + \left(3x-1\right)\left(x+3\right)$

(b) $\left(2x+1\right)\left(4x-1\right) + \left(2+x\right)\left(2x+1\right)$

E.16 Factoriser les expressions suivantes :

(a) $\left(3x+2\right)\left(2-2x\right) + \left(3x+2\right)\left(x+4\right)$

(b) $\left(x-1\right)\left(2x-2\right) + \left(2x-2\right)\left(5-2x\right)$

E.17 Factoriser les expressions suivantes :

(a) $\left(4-3x\right)\left(x+5\right) - \left(4-3x\right)\left(x+2\right)$

(b) $\left(2x+5\right)\left(x+2\right) - \left(2x+5\right)$

E.18 Factoriser les expressions suivantes :

(a) $(2x+4)(3-3x) + (2x+4)$

(b) $(5x+1)(7-3x) - (5x+1)$

E.19 Factoriser les expressions suivantes :

(a) $(3x-1)^2 + (3x-1)(5x+4)$

(b) $\left(x+5\right)\left(4-x\right) - \left(4-x\right)^2$

E.20 Factoriser les expressions suivantes :

(a) $\left(5-x\right)^2 + \left(5-x\right)\left(x+1\right)$

5. *Factorisation et équation*

E.21 Résoudre par la méthode de votre choix les équations suivantes :

(a) $(3x+1)(2-3x) - (5x-1)(3x+1) = 0$

(b) $2(x+2)(3-x) = (x+2)(5x-7)$

6. *Equation produit et du 1er degré*

E.22

(1) Développer chacune des expressions suivantes :

(a) $x(x-3) - x^2$

(b) $(6x+1)^2 - (12x+2)(3x-3)$

(2) Résoudre les équations suivantes après développement et réduction :

(a) $x(x-3) - x^2 = 0$

(b) $(6x+1)^2 = (12x+2)(3x-3)$

E.23 Résoudre par la méthode de votre choix les équations suivantes :

(a) $(2x+3)(6x+7)+(2-4x)(3x+1)=3x-7$

(b) $(2x+1)\big(x-2\big)+\big(3x-5\big)\big(2x+1\big)=0$

E.24 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

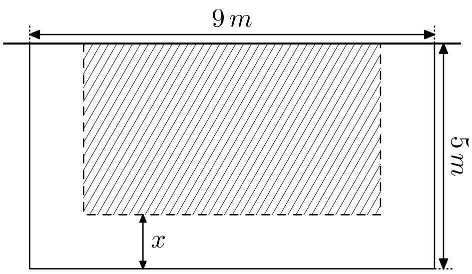
(a) $(2x+1)\big(4-x\big)+\big(4x-1\big)\big(2x+1\big)=0$

(b) $-(12x-2)(2-3x)=36x^2-12x+1$

7. *Problèmes*

E.25 Adossé à sa maison, Jean possède un jardin de forme rectangulaire ayant pour dimensions $9\,m$ et $5\,m$.

Il souhaite construire sur trois des côtés de ce jardin une allée ayant la même largeur et il plantera de la pelouse sur le reste du jardin. Il propose le schéma ci-dessous où la partie hachurée est l'espace de la pelouse



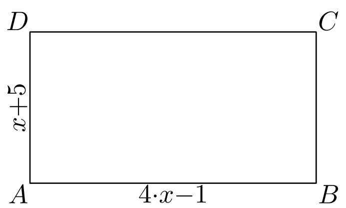
Quelle doit-être la largeur de l'allée pour que l'ensemble de la pelouse ait une surface de $10\,m^2$?

Indication :
On utilisera une des formes factorisées ci-dessous :
- $2x^2-18x+28=(2x-4)\big(x-7\big)$
- $2x^2-20x+32=(2x-4)\big(x-8\big)$
- $2x^2-19x+35=(2x-5)\big(x-7\big)$
- $2x^2-21x+40=(2x-5)\big(x-8\big)$

E.26

(1) Établir la factorisation suivante :
$$\big(x+5\big)\big(4x-1\big)-10x-8=(x-1)(4x+13)$$

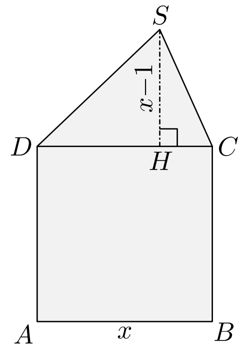
(2) On considère le rectangle $ABCD$ dont les dimensions sont fonction d'un nombre réel x et sont données en centimètre :
$AB=4x-1$; $AD=x+5$

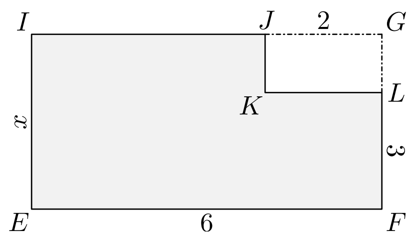


(a) Quelles sont les valeurs possibles du paramètre x?

(b) Déterminer la ou les valeurs de x afin que le périmètre, exprimé en cm, du rectangle $ABCD$ est égal à l'aire, exprimé en cm^2, du rectangle $ABCD$.

E.27 On considère les deux surfaces $ABCSD$ et $EFLKJI$ représentées ci-dessous où x est un nombre réel.





- $ABCD$ est un carré de côté x et SDC est un triangle dont la hauteur $[SH]$ a pour mesure $x-1$.
- Les quadrilatères $EFGI$ et $GJKL$ sont deux rectangles.

(1) Quelles sont les valeurs possibles de la variable x en fonction des contraintes des figures?

(2) Exprimer l'aire de ces deux surfaces en fonction de x.

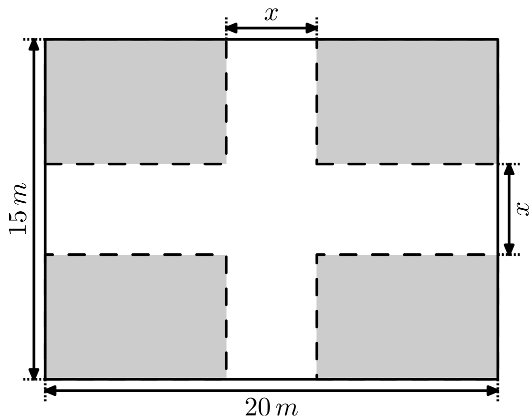
(3) (a) Établir la factorisation :
$$\frac{3}{2}\cdot x^2-\frac{9}{2}\cdot x-6=\Big(\frac{3}{2}\cdot x-6\Big)\big(x+1\big)$$

(b) Déterminer la ou les valeurs possibles de la variable x permettant d'obtenir l'égalité d'aires de ces deux surfaces.

E.28 Un jardin a une forme rectangulaire ayant pour dimension $20\,m$ de longueur et $15\,m$ de largeur.

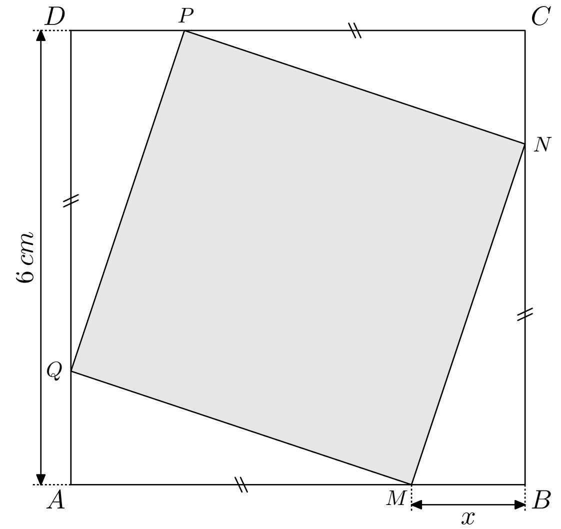
Deux allées de largeur $x\,m$ partagent transversalement ce jardin ; du gazon sera planté sur le reste du jardin.

Une clôture doit être posée autour du gazon : elle est représentée en pointillées sur la représentation.



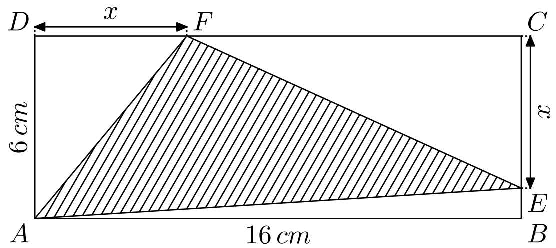
1. Indiquer quelles valeurs peut prendre la variable x.
2. a. Déterminer en fonction de x l'aire totale des deux allées.
   b. Déterminer en fonction de x l'aire du gazon de ce jardin.
3. a. Déterminer les valeurs des réels a et b vérifiant l'égalité :
   $2{\cdot}x^2 - 70{\cdot}x + 300 = (x-30)(a{\cdot}x+b)$
   b. L'architecte chargé de la réalisation de ce jardin décide de choisir la largeur de l'allée afin que les aires des allées et du gazon soient égales.
4. Le propriétaire du jardin décide d'investir 5 600 euros dans l'aménagement du jardin.
   Le m^2 de gazon coûte 7 € ; Le m^2 du parquet composant l'allée coûte 30 € ; Le m de la clôture coûte 12 €.
   a. Établir l'égalité suivante :
   $23x^2 - 757x + 2660 = (x-4)(23x-665)$
   b. En déduire la largeur des allées réalisant les dessins du propriétaire.

E.29 On considère le carré $ABCD$ de côtés $6\,cm$ et quatre points M, N, P, Q tels que : $AM = BN = CP = DQ$
On admet que $MNPQ$ est un carré et on note : $x = BM$



1. Justifier que l'aire $\mathcal{A}$ du carré $MNPQ$ a pour valeur : $\mathcal{A} = 2x^2 - 12x + 36$.
2. a. Étabir la factorisation :
   $2x^2 - 12x + \dfrac{27}{2} = \dfrac{1}{2}(2x-9)(2x-3)$
   b. Déterminer la ou les valeurs de x afin que l'aire du carré $MNPQ$ a pour valeur les $\dfrac{5}{8}$ de celle du carré $ABCD$.

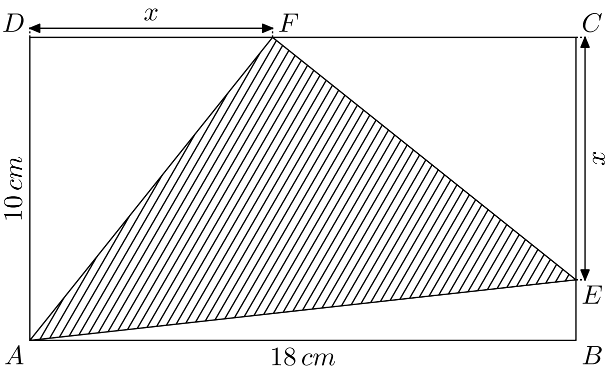
E.30 On considère la figure ci-dessous constituée d'un rectangle $ABCD$ de dimension $16\,cm$ et $6\,cm$ et des deux points E et F appartenant respectivement aux segments $[BC]$ et $[CD]$ tels que : $CE = DF = x$ où x est un nombre réel.



On considère le domaine hachuré de la figure défini par le triangle AEF.

1. Donner l'ensemble des valeurs possibles du nombre x.
2. a. Justifier que la partie "*blanche*" de cette figure a pour aire $\mathcal{A}$ dont l'expression en fonction de x est :
   $\mathcal{A} = -\dfrac{1}{2}x^2 + 3x + 48$
   b. Déterminer l'aire $\mathcal{A}'$ de la partie "*hachurée*".
3. Déterminer la ou les valeurs de x permettant d'obtenir les deux domaines "*blancs*" et "*hachurés*" de même aire.

E.31 On considère la figure ci-dessous constituée d'un rectangle $ABCD$ de dimension $18\,cm$ et $10\,cm$ et des deux points E et F appartenant respectivement aux segments $[BC]$ et $[CD]$ tels que : $CE = DF = x$ où x est un nombre réel.



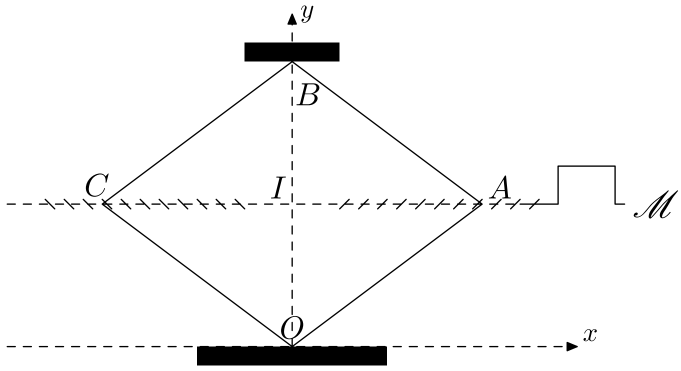
On considère le domaine hachuré de la figure défini par le triangle AEF.

1. Donner l'ensemble des valeurs possibles du nombre x.
2. a. Justifier que la partie "*blanche*" de cette figure a pour aire $\mathcal{A}$ dont l'expression en fonction de x est :
$\mathcal{A} = -\frac{1}{2}x^2 + 5x + 90$
   b. Déterminer l'aire $\mathcal{A}'$ de la partie "*hachurée*".

Indication : on pensera à factoriser par x.

3. Déterminer la ou les valeurs de x permettant d'obtenir les deux domaines "*blancs*" et "*hachurés*" de même aire.

E.32 La figure ci-dessous est le schéma d'un cric de voiture.



Celui-ci est constitué d'un losange déformable $OABC$, le point O étant le point d'appui sur le sol et le point B étant le point par lequel la voiture est soulevée.

À chaque tour de la manivelle $\mathscr{M}$, les écrous A et C se rapprochent *(ou s'éloigne)* de $2\,cm$, ce qui fait monter *(ou descendre)* l'appui B, selon l'axe (Oy).

On donne : $OA = OC = AB = BC = 25\,cm$

Dans le repère orthonormé $(O\,;\ x\,;\ y)$ d'unité un centimètre, x_A désigne l'abscisse du point A et varie de 0 à 25.
L'ordonnée du point B est notée y_B :

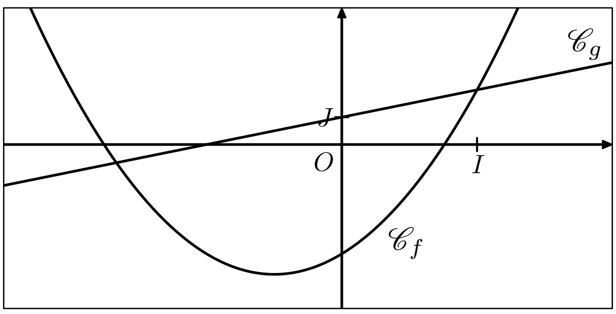
- Pour $x_A = 0$, on a : $y_B = 50$;
- Pour $x_A = 25$, on a : $y_B = 0$.

1. Démontrer que les valeurs x_A et y_B vérifient la relation :
$y_B = 2\sqrt{625 - {x_A}^2}$
2. a. Déterminer la valeur de y_B lorsque x_A est égal à 7.
   b. Déterminer la valeur de x_A lorsque y_B est égal à 40.
3. Supposons que le cric est fermé ; la hauteur du point B est alors de $0\,cm$:
   a. Lorsque le cric est complétement fermé, combien de tours de manivelles permettent d'atteindre une hauteur de $24\,cm$ pour le point B?
   b. Combien de tours supplémentaire faut-il pour doubler la hauteur du point B?

8. Fonctions et équations produits

E.33 On considère les deux fonctions f et g du second degré définies sur $\mathbb{R}$ par les expressions algébriques :
$f(x) = 3x^2 + 3x - 4 \quad ; \quad g(x) = x + 1$

Dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthogonal ci-dessous, on considère les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives données ci-dessous :

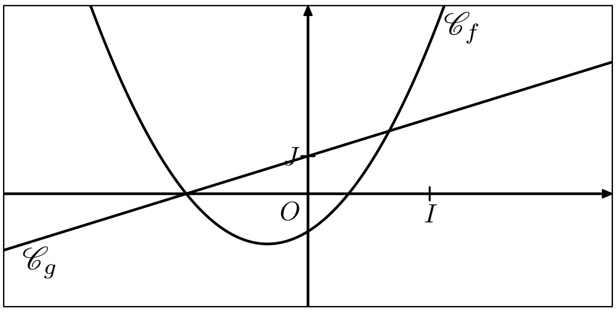


1. Établir la factorisation :
$f(x) - g(x) = (x-1)(3x+5)$
2. En déduire les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

E.34 On considère les deux fonctions f et g du second degré définies sur $\mathbb{R}$ par les expressions algébriques :

$$f(x) = 3x^2 + 2x - 1 \quad ; \quad g(x) = x + 1$$

Dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthogonal ci-dessous, on considère les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives données ci-dessous :



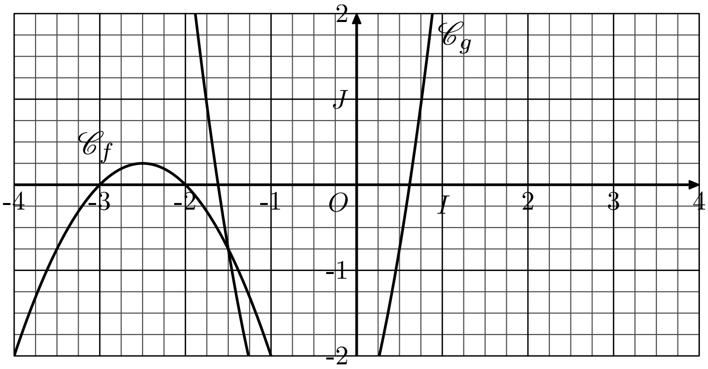
1. Établir la factorisation :
$$f(x) - g(x) = (x+1)(3x-2)$$

2. En déduire les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

E.35 On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (-x-2)(x+3) \quad ; \quad g(x) = 3x^2 + 3x - 3$$

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on note respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g :



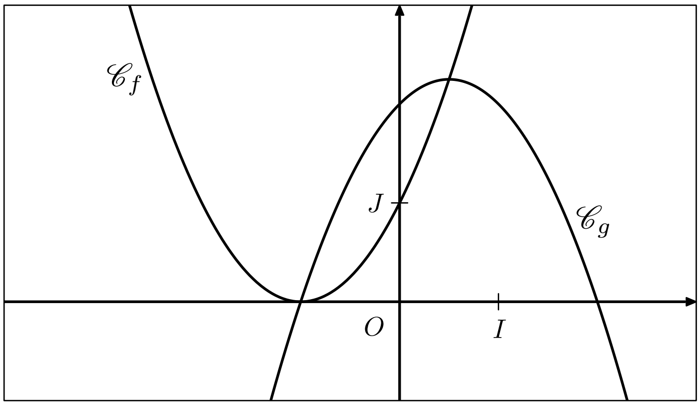
1. Établir la factorisation :
$$f(x) - g(x) = (-2x-1)(2x+3)$$

2. En déduire les abscisses des points d'intersection de ces deux courbes.

E.36 On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par les relations :

$$f(x) = x^2 + 2 \cdot x + 1 \quad ; \quad g(x) = -(x+1)(x-2)$$

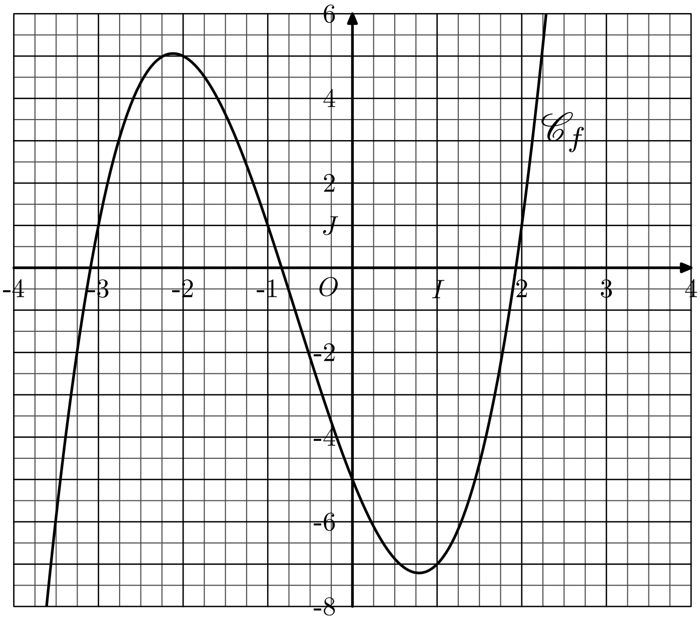
Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives respectivement des fonctions f et g sont données dans le repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$.



Déterminer les coordonnées des points d'intersections de ces deux courbes.

Toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.

E.37 Dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthogonal représenté ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:



1. a. Déterminer l'image du nombre -3 par la fonction f. Justifier votre réponse.

   b. Résoudre, graphiquement, l'équation $f(x)=1$. Justifier votre réponse.

2. L'image d'un nombre x par la fonction f est donnée par la relation :
$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 5$$

   a. Justifier, par le calcul, la valeur de l'image du nombre -3.

   b. Établir l'égalité suivante :
$$x^3 + 2x^2 - 5x - 5 = (x+3)(x-2)(x+1) + 1$$

   c. Résoudre, par le calcul, l'équation $f(x)=1$.

9. *Factorisation : reconnaissance du facteur commun*

E.38
1. a. Trouver une relation algébrique entre les deux expressions :
$3x-2 \quad ; \quad 6x-4$
b. En déduire une factorisation de l'expression algébrique suivante :
$A=(x+2)(3x-2)+(5x-2)(6x-4)$
2. a. Trouver une relation algébrique entre :
$3-x \quad ; \quad x-3$
b. En déduire une factorisation de l'expression algébrique suivante :
$B=(2x+1)(3-x)-(2-2x)(x-3)$
3. a. Trouver une relation algébrique entre :
$2x-1 \quad ; \quad 2-4x ?$
b. En déduire une factorisation de l'expression algébrique suivante :
$C=(5-2x)(2x-1)+(2-4x)$

E.39 Factoriser les expressions suivantes :
a. $(7x-2)(5-x)+(4x-1)(x-5)$
b. $(12x-3)(7+2x)-(5-2x)(1-4x)$

E.40 Factoriser les expressions suivantes :
a. $(x-2)(x+1)-2(x-2)(2x+3)$
b. $(x+3)(2x-1)+(2-4x)(x-1)$

E.41 Factoriser les expressions suivantes :
a. $(2x-4)(x+4)+(6-3x)(4x+2)$
b. $2(4x+6)(5-2x)+(x-3)(6x+9)$

E.42 Factoriser les expressions suivantes :
a. $(2x+3)(1-x)+(4x+6)^2$
b. $(3-9x)^2+3(3x-1)$
c. $(5x+1)(2x-4)+(3x-6)^2$

10. *Equation produit : reconnaissance du facteur commun*

E.43
1. a. Factoriser l'expression algébrique suivante :
$(3x+2)(2x-1)+(4x-2)(3-5x)$
b. Résoudre l'équation suivante :
$(3x+2)(2x-1)+(4x-2)(3-5x)=0$
2. a. Factoriser l'expression suivante :
$(2x+1)(3-2x)-(3x-2)(2x-3)$
b. Résoudre l'équation suivante :
$(2x+1)(3-2x)=(3x-2)(2x-3)$

E.44
1. a. Montrer que les deux équations suivantes sont équivalentes :
$x^2=x \quad ; \quad x(x-1)=0$
b. En déduire les solutions de l'équation : $x^2=x$
2. Résoudre les équations suivantes :
a. $(x-2)(3-2x)=0$
b. $(5x-1)(2-x)+(2x-4)(3-2x)=0$

E.45 En se ramenant à une équation produit, résoudre les équations suivantes :
a. $(3x-1)(2x+2)+3(5-2x)(x+1)=0$
b. $3(5x+1)(2-3x)+(6x-4)(x-1)=0$
c. $(4x+6)(1-2x)=5(2x+3)^2$

11. *Expression rationnelle et équation*

E.46 Établir les identités suivantes :
a. $\dfrac{3x+1}{x+1}+\dfrac{3}{x-1}=\dfrac{3x^2+x+2}{(x+1)(x-1)}$
b. $\dfrac{2-x}{3x+1}+\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{3x^2+2x+5}{2(3x+1)}$

E.47 Résoudre les équations suivantes :
a. $\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{3}{2x-1}=0$ b. $\dfrac{2x-1}{4x+1}-\dfrac{3x}{6x-1}=0$

E.48 Résoudre l'équation :
$\dfrac{4x}{2x+1}-\dfrac{2x-3}{x+1}=0$

E.49 Résoudre les équations suivantes :
a. $\dfrac{2x}{4x+1}=\dfrac{x+1}{2x-1}$ b. $\dfrac{1-x}{2-x}=\dfrac{x+3}{x-1}$

E.50 Résoudre l'équation :
$\dfrac{3}{5x+3}-\dfrac{2-5x}{x+2}=0$

12. *Expression algébrique : antécédents*

E.51

(1) On considère les trois fonctions suivantes :

$f(x)=(x+1)(1-x^2)$; $g(x)=\dfrac{(1+x)^2}{x-2}$; $h(x)=3-2\cdot(x+1)$

Déterminer l'image du nombre 1 par chacune de ces trois fonctions.

(2) On considère les trois fonctions suivantes :

$j(x)=\dfrac{1}{1-x}$; $k(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x+1}$; $\ell(x)=\dfrac{3\cdot x-1}{2-3\cdot x}$

Déterminer les antécédents du nombre -1 par chacune de ces trois fonctions.

13. *Expression algébrique : antécédents et ensemble de définition*

E.52

(1) On considère la fonction f carrée dont l'expression algébrique est : $f(x)=x^2$

La fonction f admet-elle un ou des antécédents du nombre -4? Justifier votre réponse.

(2) On considère la fonction g dont l'expression est donnée par la relation : $g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

Que peut-on dire de l'ensemble des antécédents du nombre 2 par la fonction g?

(3) On considère la fonction h définie par l'expression : $h(x)=\dfrac{3\cdot x+1}{x}$

Déterminer l'ensemble des antécédents du nombre 3 par la fonction h.

14. *Expression algébrique : image et antécédents*

E.53

(1) Soit f une fonction réalisant la relation : $f(2)=\sqrt{5}$

(a) Traduire cette relation par une phrase utilisant le mot "*image*".

(b) Traduire cette relation par une phrase utilisant le mot "*antécédent*".

(2) Soit g une fonction telle que l'équation $g(x)=1$ admet pour solution les nombres -1 et 2.
Traduire cette propriété par une phrase utilisant le mot "*antécédente*".

E.54 On définit six fonctions et, pour chacune d'elles, deux valeurs numériques :

(a) $f(x)=3x+5$; $a=2$; $b=-1$

(b) $g(x)=-2x-2$; $a=1$; $b=8$

(c) $h(x)=x^2$; $a=5$; $b=9$

(d) $j(x)=3x^2$; $a=-3$; $b=-1$

(e) $k(x)=\dfrac{3x+1}{x+1}$; $a=2$; $b=1$

(f) $\ell(x)=\dfrac{2x-2}{x+\pi}$; $a=1$; $b=2$

(1) Pour chaque question, déterminer l'image du nombre a par la fonction associée.

(2) Pour chaque question, déterminer l'ensemble des antécédents du nombre b par la fonction associée.

E.55

(1) Ci-dessous est présenté trois fonctions qui ont été saisies sur une calculatrice :

(a) `Y1=√(1+√(3-X))÷√X+3`

(b) `Y2=(3X-2)÷(2√X+1)`

(c) `Y3=√(3+X)(2-X)`

Réécrire sur votre copie ces trois fonctions avec la présentation habituelle des expressions mathématiques.

(2) Pour chacune des fonctions ci-dessous, écrire les caractères à saisir dans une calculatrice pour les insérer :

(a) $f : x \mapsto \dfrac{1+\dfrac{3+x}{x}}{2-3x}$

(b) $g : x \mapsto \sqrt{(1-2x)\times(3x-1)}$

(c) $h : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+1}$

15. *Etude algébrique*

E.56 On considère les trois fonctions ci-dessous

$f : x \longmapsto 3x+2$; $g : x \longmapsto \dfrac{3x-1}{x+3}$; $h : x \longmapsto \sqrt{x-5}$

(1) Déterminer l'image de 5 pour chacune de ces fonctions.

(2) Déterminer les antécédents du nombre 4 pour chacune de ces trois fonctions.

(3) Pour chaque fonction, préciser si elle est définie pour tout nombre réel. Sinon, citer au moins un nombre n'admettant d'image par cette fonction.

E.57 On considère la fonction f définie, pour tout réel strictement positif, par :

$$f(x) = \frac{-x^2}{3} + \frac{2}{x}$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Donner, sous forme simplifiée, les images des nombres suivants par la fonction f :

   a. -2 b. 1 c. $\sqrt{2}$

3. Justifier que le nombre 2 est un antécédent de $-\frac{1}{3}$ par la fonction f.

E.58

1. On considère la fonction f dont l'image du nombre x est définie par :

   $f(x) = \sqrt{1-x} \times \sqrt{2x+3}$

   a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

   b. Déterminer, sous forme simplifiée, les images de -1 et de $\frac{1}{2}$ par la fonction f.

2. On considère la fonction g définie par :

   $g(x) = \frac{\sqrt{2}\,x+1}{3x-1}$

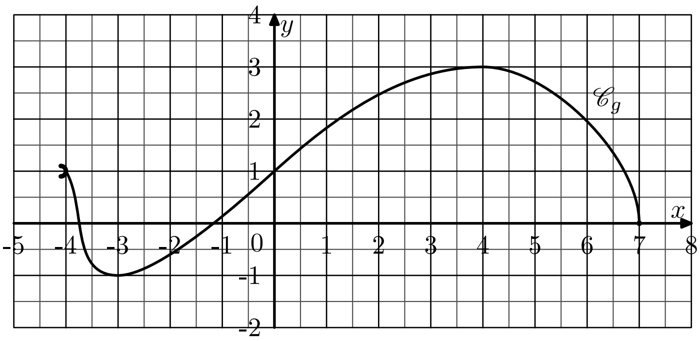
   a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g.

   b. Déterminer l'image du nombre 3 par la fonction g.

16. *Etude de fonctions*

E.59 On considère les deux fonctions f et g :

- la fonction f définie par : $f : x \longmapsto x^2 - 6x + 2$.
- La fonction g est définie par la représentation graphique ci-dessous :



Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte ; citer la réponse exacte.

1. L'image de 1 par la fonction f est :

   a. 1 b. 0 c. -1 d. -3

2. L'ensemble des antécédents de -7 par f est :

   a. $\{3\}$ b. $\{2\}$ c. $\{-2\,;3\}$ d. $\{1\,;2\}$

3. L'ensemble de définition de la fonction g est :

   a. $[-1;-3[$ b. $[-1;3]$ c. $[-4;7]$ d. $]-4;7]$

4. L'image de 0 par la fonction g vaut :

   a. 1 b. -1 c. 7 d. 0 .

5. Un de ces points n'appartient pas à $\mathscr{C}_g$. Lequel?

   a. $(-3;-1)$ b. $(-4;1)$ c. $(6;2)$ d. $(-2;-0{,}5)$

E.60

1. On considère une fonction f. On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f.

   On considère les propriétés suivantes de la courbe $(\mathscr{C})$:

   a. Le point de coordonnées $(0\,;3)$ appartient à $(\mathscr{C})$.

   b. Le seul point de $(\mathscr{C})$ d'ordonnée 5 a pour abscisse -1.

   c. Aucun point de $(\mathscr{C})$ n'a pour abscisse -2.

   d. Il n'y a pas de point de $(\mathscr{C})$ d'ordonnée 6.

   Traduire chacune de ces phrases par une phrase décrivant une propriété de la fonction f en utilisant, à chaque fois, au moins un des mots suivant *image*, *antécédent*, *définie*.

2. Soit g la fonction définie dont l'image d'un nombre x est définie par :

   $g(x) = 2x^2 - 3$

   On note $(\mathscr{C}_g)$ la courbe représentative de la fonction g.

   a. A est un point d'abscisse 2 de $(\mathscr{C}_g)$. Quelle est l'ordonnée du point A?

   b. B est un point de $(\mathscr{C}_g)$ d'ordonnée -3. Donner l'abscisse du point B.

   c. Combien de points de la courbe $(\mathscr{C}_g)$ ont pour ordonnées -1? Préciser, s'ils existent, les coordonnées de ces points.

   d. Combien de points de la courbe $(\mathscr{C}_g)$ ont pour ordonnées -4? Préciser, s'ils existent, les coordonnées de ces points.

3. On considère la fonction h définie par la relation :

   $h(x) = \frac{2}{x^2+3}$

   On note $(\mathscr{C}_h)$ la courbe représentative de la fonction h.

   a. Donner l'ordonnée du point de $(\mathscr{C}_h)$ d'abscisse 0.

   b. Combien de points $(\mathscr{C}_h)$ ont pour ordonnée $\frac{1}{6}$? Donner, s'ils existent, les coordonnées de ces points.

17. *Ensemble de définitions*

E.61 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

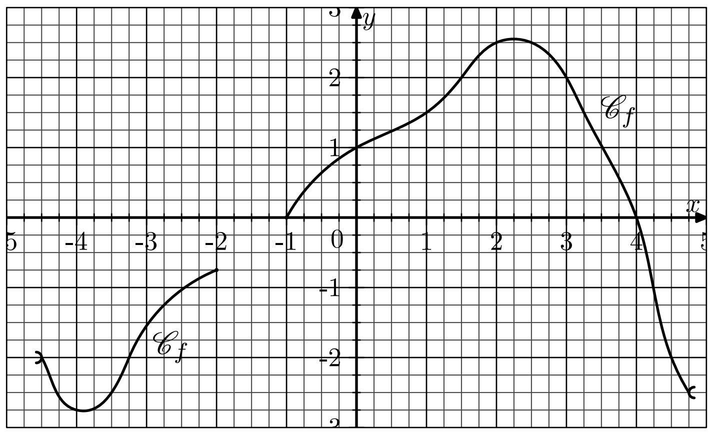
1. $f : x \longmapsto 2x+5$
2. $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$
3. $h : x \longmapsto \dfrac{1}{2x+5}$
4. $j : x \longmapsto \dfrac{x+1}{2x+5}$
5. $k : x \longmapsto \sqrt{x}$
6. $\ell : x \longmapsto \sqrt{x^2}$
7. $m : x \longmapsto \sqrt{2x+5}$
8. $n : x \longmapsto \sqrt{-x+2}$

E.62 On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x+1}}{x-4}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Déterminer l'image du nombre 3 par la fonction f.
3. Déterminer l'ensemble des antécédents de 0 par la fonction f.

E.63 Dans le repère ci-dessous, est représentée la courbe représentative de la fonction f



1. Déterminer les images des nombres suivants par la fonction f :

   a) 1 b) 0 c) -2

2. Déterminer l'ensemble des antécédents pour chacun des nombres suivants :

   a) 2 b) -2

3. a) Donner deux nombres n'admettant pas d'images par la fonction f.

   b) Donner un nombre n'admettant pas d'antécédents par la fonction f.

18. *Exercices non-classés*

E.64

1. Établir pour tout entier naturel non nul p l'égalité suivante :
$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{1}{p(p+1)}$$
2. En déduire la valeur de la somme suivante :
$$S = \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \cdots + \frac{1}{2003\times2004} + \frac{1}{2004\times2005}$$

E.65 Résoudre les équations suivantes :

a) $(3x+1)(5x-2) = (6x+2)(1-x)$ b) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x-1} = 0$

E.66 Résoudre les équations :

a) $\dfrac{x}{3x+2} = \dfrac{5x}{2x+1}$ b) $\dfrac{4x-2}{2x-3} - \dfrac{6x-2}{3x+1} = 0$

E.67 Développer les expressions suivantes :

a) $(2x+1)(3-x)$ b) $(5-2x)(3-x) - 3(3-2x)$

c) $4(x+4)(5-2x)$ d) $(x-2)(2x-1)(5-x)$

E.68 Développer et réduire les expressions suivantes :

a) $(2x+1)(3-x) - 2(3x+2)$ b) $(2x+1)^2$

c) $(2x+1)(1-x)(x+2)$

E.69 Chacune des expressions suivantes est factorisable. Donner la forme factorisée de chacune d'elle :

a) $(2x+1)(3x-1) - (x+3)(6x-2)$

b) $(x-1)(3x+2) + (2x+3)(1-x)$

c) $(7x-1)(5x-6) - (10x-12)$

d) $(x+2)^2 - (x+2)$

E.70 Effectuer les factorisations suivantes :

a) $(3x+1)(2-2x) - (5-4x)(x-1)$

b) $(2-3x)(3+2x) + (3x+2)(-6x-9)$

c) $(6x+2)(2x+3) + (9x+3)^2$

d) $(2x+1)\big(2x+3\big) + 2\big(2x+3\big)$

E.71 Factoriser les expressions suivantes :

a) $(2x-4)(3x+1) - (6x+2)(4x+1)$

b) $(2-6x) + (x+1)(3x-1)$

E.72 Factoriser les expressions suivantes :

a) $(3x+2)(x-2)+(4-2x)(2x+3)$

b) $(6x-3)(2x+1)-2(2x-1)^2$

c) $(x+1)(5-2x)(3x-4)+3(2x-5)(6x-8)$

E.73 Factoriser les expressions suivantes :

a) $(x-1)(2x+1)-(2x-2)(5-2x)$

b) $(2+x)(3-x)+(5-2x)(3-x)$

c) $3(4+2x)-(3+x)(10+5x)$

d) $(2-x)(3x-4)+\left(2-\dfrac{3}{2}x\right)(2x+3)$

E.74 Factoriser les expressions suivantes :

d) $(5x+1)(3\text{-}2x)-(5x+1)(2x+1)$

e) $(x+1)(2x\text{-}1)-(2x\text{-}1)$

f) $(2x-1)^2+(2x-1)(3x+1)$

E.75 Factoriser les expressions suivantes :

a) $(x+1)(1-x)-(x+1)(2x+1)$

b) $3(2x-2)+(x+1)(1-x)$

E.76

Définition :

- on dit qu'une expérience aléatoire est **équiprobable** si chacune de ses issues à la même probabilité de se réaliser.
- La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des issues qui le définissent.

Proposition :
Pour une expérience aléatoire équiprobable comportant N issues et pour un événement A défini par n issues, la probabilité de A a pour valeur : $\dfrac{n}{N}$

Exemple :
On jette un dé équilibré où les six faces sont numérotées de 1 à 6. On considère l'événement A : "*la face obtenue est strictement supérieure à* 4". Cet événement est composé de 2 issues. La probabilité de l'événement A est :

$$\frac{2}{6}=\frac{1\times\cancel{2}}{3\times\cancel{2}}$$

Jean possède 365 albums de bandes dessinées. Afin de trier les albums de sa collection, il est rangé par série et classe les séries en trois catégories : franco-belges, comics et mangas comme ci-dessous :

Séries franco-belges	**Séries de comics**
23 albums "Astérix" 22 albums "Tintin" 45 albums "Lucky-Luke"	35 albums "Batman" 90 albums "Spider-Man"
Séries de mangas	
85 albums "One-pièce" 65 albums "Naruto"	

Il choisit au hasard un album parmi tous ceux de sa collection.

1) Quelle est la probabilité que l'album choisi soit un album "*Lucky-Luke*"?

2) Quelle est la probabilité que l'album choisi soit un comics?

E.77 Résoudre, par la méthode de votre choix, les équations suivantes :

a) $(x-2)(3x+1)=2(x-2)(x-5)$

b) $(5-2x)(3x+1)+(4x+10)(2x-5)=0$

c) $(2x+3)(8x-3)+(3-4x)(4x+1)=0$

E.78 Résoudre les équations suivantes :

a) $(x+1)(x-1)=3x(x+1)$

E.79 Résoudre les équations suivantes :

a) $(x+1)^2=4$

b) $(x-2)^2+4=7$

c) $(x+2)^2+5=2$

d) $3\cdot x^2-6=1$

E.80 Factoriser les expressions suivantes :

a) $(5x-1)(3x+1)+(5x-1)^2$

b) $(3x+1)(2-3x)+(2-3x)$

c) $(x-3)(7-x)+(x-3)(2x+1)$

d) $(3x-1)(x-2)-(x-2)(1-5x)$

ChingEval : 8 exercices disponibles pour l'évaluation par QCM

1. *Inéquations du premier degré*

E.1 Parmi les inéquations suivantes, lesquelles acceptent le nombre 9 comme solution :

(a) $-3x+2 \geqslant 0$ (b) $5(x+9) > 0$

(c) $\dfrac{x+1}{4} \geqslant -3\times\dfrac{x-2}{3}$ (d) $2 > x$

E.2

(1) Pour chaque question, représenter l'ensemble des nombres vérifiant l'encadrement sur une droite graduée :

(a) $-1 \leqslant x \leqslant 2$ (b) $\sqrt{2} \leqslant x < \sqrt{3}$

(c) $x > 9$ (d) $-5 > x$

(2) Noter sous la forme d'un intervalle, les ensembles représentés précédemment sur une droite graduée.

E.3 Résoudre les inéquations suivantes et donner l'ensemble des solutions sous la forme d'intervalles :

(a) $-3x+7 \leqslant x+2$ (b) $-6x+1 > 0$

(c) $-\dfrac{x}{4} < 5$ (d) $-3(x+5) < x+5$

(e) $-3x+7 \leqslant 9-x$

E.4 Résoudre les inéquations suivantes et donner l'ensemble des solutions sous la forme d'intervalles :

(a) $3x+3 \geqslant 1$ (b) $\dfrac{3x-1}{4} \leqslant -1$

E.5 Résoudre les inéquations suivantes et donner l'ensemble des solutions sous la forme d'intervalles :

(a) $\dfrac{x+1}{2}+x < 0$ (b) $\dfrac{x-2}{-4} < x+1$

E.6 Résoudre les inéquations suivantes et donner les solutions sous la forme d'intervalles :

(a) $\dfrac{x-1}{6}+\dfrac{x+1}{3} < 2$ (b) $x+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{6} \leqslant \dfrac{x+1}{3}+\dfrac{2x-3}{6}$

E.7 Résoudre les inéquations suivantes et donner l'ensemble des solutions sous la forme d'intervalle :

(a) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cdot x \leqslant \dfrac{1}{3}\cdot x+\dfrac{1}{6}$ (b) $\dfrac{1}{5}\cdot x+\dfrac{1}{2} > x-\dfrac{1}{3}$

E.8 Résoudre les inéquations suivantes :

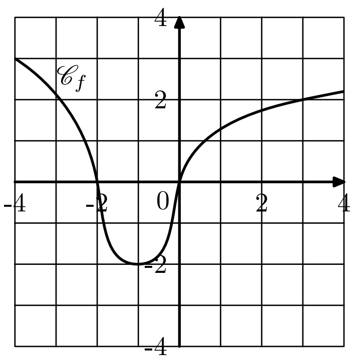
(a) $(x+1)^2 > 0$ (b) $(x+1)^2 \geqslant 0$

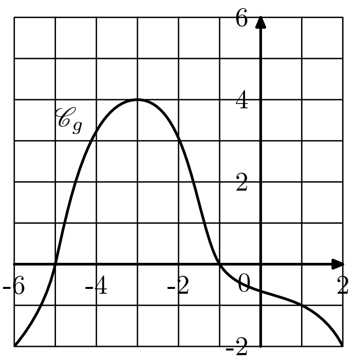
(c) $(x+1)^2 < 0$ (d) $x^2+1 \leqslant 0$

(e) $x^2-4 < (x+2)^2$ (f) $(x+1)^2-(x-1)^2 \geqslant 0$

2. *Lecture graphique de tableaux de signes*

E.9 On représente ci-dessous les représentations graphiques des fonctions f et g définies respectivement sur $[-4\,;\,4]$ et $[-6\,;\,2]$.





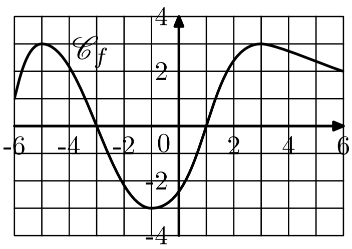
(1) Déterminer, graphiquement, les solutions des inéquations :
$f(x) \geqslant 0$; $g(x) \geqslant 0$

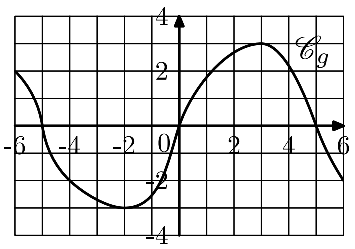
(2) Dresser les tableaux de signes des fonctions f et g :

x	-4 $\qquad\qquad$ 4
$f(x)$	

x	-6 $\qquad\qquad$ 2
$g(x)$	

E.10 On considère les deux fonctions f et g définies sur $[-6\,;6]$ dont les représentations graphiques sont données ci-dessous :





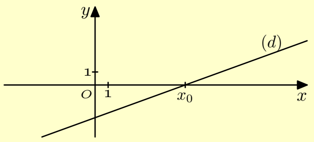
Dresser les tableaux de signes des fonctions f et g sur $[-6\,;6]$

3. Tableau de signes des fonctions affines

E.11

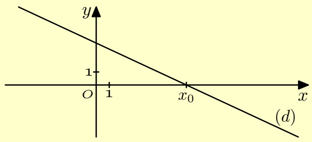
Proposition :

Coefficient directeur positif ($m>0$)



x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
Signe de $f(x)$	$-$	0	$+$

Coefficient directeur négatif ($m<0$)



x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
Signe de $f(x)$	$+$	0	$-$

1. On considère la fonction affine f définie par :
$f(x) = 2x + 3$
Déterminer le tableau de signes de la fonction f.

2. On considère la fonction affine f définie par :
$g(x) = -x + 1$
Déterminer le tableau de signes de la fonction g.

E.12 On considère une fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ et dont le tableau de signe est donnée ci-dessous :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

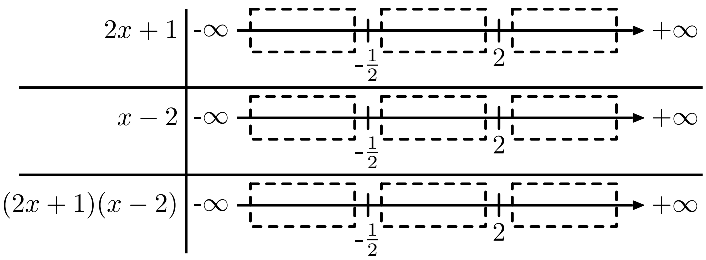
De plus, l'inéquation $f(x) \geqslant 3$ admet pour solutions l'ensemble $\mathcal{S}$: $\mathcal{S} =]-\infty\,;-3[$

Déterminer l'équation réduite de la fonction f.

4. Construction de tableaux de signes

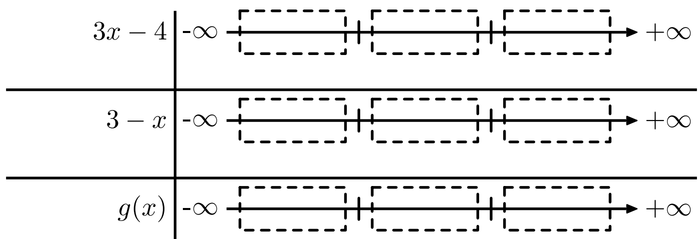
E.13

1. On considère la fonction f définie par la relation :
$f(x) = 2x^2 - 3x - 2$
Dans cette question, nous allons étudier le signe de la fonction f.
   a. Établir l'égalité : $f(x) = (2x+1)(x-2)$.
   b. Résoudre les deux inéquations suivantes :
   $2x + 1 < 0 \quad ; \quad x - 2 < 0$
   c. Dans le tableau ci-dessous et pour les deux facteurs $2x+1$ et $x-2$, colorier :
      - en bleu les intervalles sur lesquels le facteur est positif ;
      - en rouge les intervalles sur lesquels le facteur est négatif.



   d. Compléter la troisième ligne en utilisant la règle des signes d'un produit.
   e. Résoudre l'inéquation : $f(x) \leqslant 0$.

2. On considère la fonction g dont l'image d'un nombre x est donné par la relation :
$g(x) = -3x^2 + 13x - 12$
   a. Établir l'égalité suivante : $g(x) = (3x-4)(3-x)$
   b. De même que pour la question précédente, compléter le tableau ci-dessous :



   c. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $g(x) < 0$

E.14 Compléter les tableaux de signe ci-dessous :

1.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$2x + 1$	
$3 + x$	
$(2x+1)(3+x)$	

2.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$2 - x$	
$4x - 3$	
$(2-x)(4x-3)$	

E.15 Compléter les tableaux de signe ci-dessous :

1.

x	$-\infty$ $+\infty$
$1-x$	
$2x+1$	
$(1-x)(2x+1)$	

2.

x	$-\infty$ $+\infty$
$x-3$	
$-2x+4$	
$(x-3)(-2x+4)$	

E.16 Compléter les tableaux de signe ci-dessous :

1.

x	$-\infty$ $+\infty$
$x+5$	
$-2x-8$	
$\dfrac{x+5}{-2x-8}$	

2.

x	$-\infty$ $+\infty$
$x-1$	
$4-x$	
$-x-1$	
$\dfrac{(x-1)(4-x)}{-x-1}$	

E.17 Compléter les tableaux de signe ci-dessous :

1.

x	$-\infty$ $+\infty$
$2+x$	
$2-x$	
$\dfrac{2+x}{2-x}$	

2.

x	$-\infty$ $+\infty$
$4x+1$	
$x-1$	
x	
$\dfrac{(4x+1)(x-1)}{x}$	

5. *Inéquations et tableaux de signes*

E.18 Résoudre les inéquations suivantes :

a) $(x+4)(1-2x) \geqslant 0$ b) $(3+x)(2-x) \leqslant 0$

E.19 Résoudre les inéquations suivantes :

a) $(3-2x)(5x+2) \geqslant 0$ b) $(3x+1)(4-2x) \geqslant 0$

E.20 Résoudre l'inéquation :

$$-\frac{(x+1)(x-2)}{1-x} > 0$$

E.21

1. Développer : $(x-1)(x-5)$
2. Résoudre : $\dfrac{(x-3)^2-4}{3-2x} < 0$

Indication : on utilisera le résultat de question 1

6. *Inéquations et factorisation*

E.22 Résoudre les inéquations suivantes :

a) $(x+1)(1-x) > (2x-1)(x+1)$ b) $x^3-x \leqslant 0$

c) $(x+1)^2-(x+1)(2-x) \geqslant 0$

E.23 Résoudre les inéquations suivantes :

$$\frac{x^2-x}{2x+4} \geqslant 0$$

E.24 On considère l'inéquation :
$(3x-1)(4x+5) > 3(3-2x)(2-6x)$

1. Factoriser : $(3x-1)(4x+5)-3(3-2x)(2-6x)$.
2. Résoudre l'inéquation (E).

E.25 Résoudre l'inéquation :
$(3-x)(2x+3) < (x-3)(2x+6)$

E.26 Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $(x-2)(x+1) > (2x+1)(2x+2)$

(b) $(3x-4)(5-2x) \geqslant (4x-10)(2-3x)$

7. *Inéquations et identités remarquables*

E.27 Résoudre l'inéquation : $\dfrac{x^2-1}{x+2} < 0$

E.28 Résoudre l'inéquation : $(2x-1)\big(x^2+6x+9\big) < 0$

E.29 Résoudre l'inéquation : $(x+1)^2 \geqslant x^2-1$

E.30 Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

(a) $\dfrac{9x^2+36x+36}{2x-3} < 0$ (b) $\dfrac{x^2-5}{3x^2+2\sqrt{3}x+1} \leqslant 0$

E.31 Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $(4x+4)(x+2) < -1$ (b) $x(4x-3) > (x-1)(3x+4)$

8. *Inéquation et fractions rationnelles*

E.32

(a) Étudier le signe sur $\mathbb{R}$ de l'expression : $\dfrac{x+1}{x-1}+1$

(b) Résoudre l'inéquation : $\dfrac{x+1}{x-1} < -1$

E.33 Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $\dfrac{1}{1+x} < \dfrac{1}{1-x}$ (b) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+5} \geqslant 0$

E.34

(1) Déterminer l'expression de P afin de réaliser la factorisation suivante : $2x^2+x-1=(x+1)\times P$

(2) Dresser le tableau de signes de : $\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-4}$

(3) Résoudre l'inéquation suivante : $\dfrac{5x^2+x-13}{x^2-4} \leqslant 3$

E.35 Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $\dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{1}{5}$ (b) $\dfrac{1}{x} > \dfrac{3}{4}$ (c) $\dfrac{1}{x} < -\dfrac{1}{3}$ (d) $\dfrac{1}{x} < 2$

E.36 Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $\dfrac{2x-4}{4x+1} \leqslant \dfrac{3x+5}{6x}$ (b) $\dfrac{4(2x+1)}{4x-1}+\dfrac{2-4x}{2x+3} \geqslant 0$

E.37 ⚠ Résoudre l'inéquation : $\dfrac{5x+1}{2x-1}+\dfrac{3x+3}{x+1} \geqslant 0$

E.38

(1) Établir l'égalité : $\dfrac{3x-6}{2x+3}-\dfrac{4-7x}{2x-2}=\dfrac{5x(4x-1)}{(2x-2)(2x+3)}$

(2) Résoudre l'inéquation : $\dfrac{3x-6}{2x+3} < \dfrac{4-7x}{2x-2}$

9. *Manipulations algébriques*

E.39 On considère deux nombres positifs a et b tels que $a\leqslant b$.
Pour $c\in\mathbb{R}$, on souhaite comparer les nombres $a{\cdot}c$ et $b{\cdot}c$.

(1) (a) Donner le signe de $a-b$.

(b) En fonction du signe de c, déterminer le signe de $(a-b)\times c$.

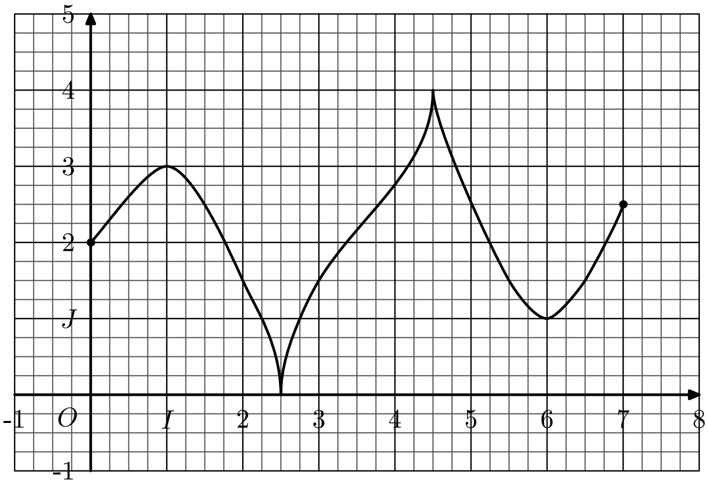
(2) Pour a, b, c trois nombres réels, compléter les énoncés suivants à l'aide des signes de comparaison :

- Si $a\leqslant b$ et $c\geqslant 0$ Alors $a{\cdot}c$ ...... $b{\cdot}c$
- Si $a\leqslant b$ et $c\leqslant 0$ Alors $a{\cdot}c$ ...... $b{\cdot}c$

E.40 Soit x et y deux nombres réels avec $x\neq 0$, montrer que $\dfrac{y}{x^2}$ et $\dfrac{y+3}{x^2+2}$ sont rangés dans le même sens que $2{\cdot}y$ et $3{\cdot}x^2$.

10. *Résolutions graphique d'inéquations*

E.41 Dans un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$, on considère la fonction f définie sur l'intervalle $\big[0\,;7\big]$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :

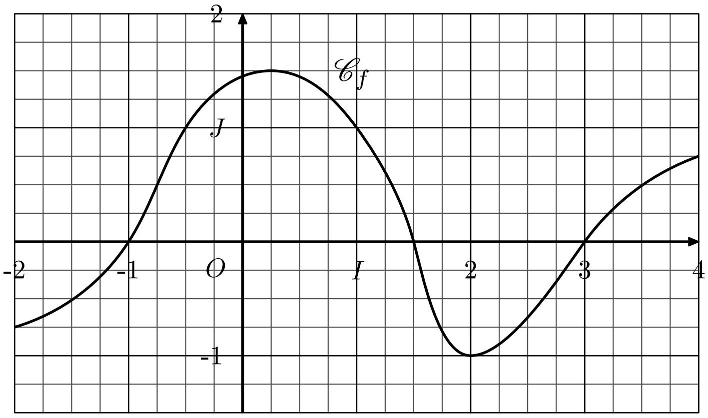


Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

(a) $f(x) \geqslant 1{,}5$ (b) $f(x) \leqslant 1$

On laissera quelques traits de constructions.

E.42 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[-2\,;4\right]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée dans le repère $\left(O\,;I\,;J\right)$ orthonormé ci-dessous :



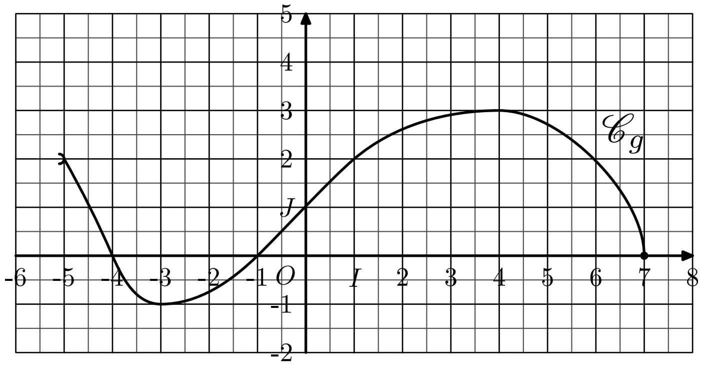
(1) On laissera les traits de constructions nécessaires à la résolution des questions suivantes :

(a) Déterminer graphiquement l'image du nombre 2 par la fonction f.

(b) Déterminer graphiquement les antécédents du nombre 1 par la fonction f.

(2) Graphiquement, déterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 0$

E.43 Dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative de la fonction g :



(1) Donner, sans justification, l'ensemble de définition de la fonction g.

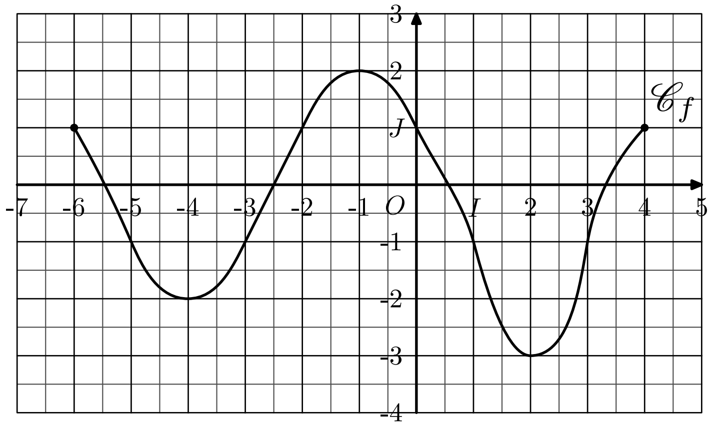
(2) Donner, sans justification, les solutions des deux équations suivantes : (a) $g(x) = 2$ (b) $g(x) = 0$

(3) Résoudre graphiquement les inéquations :

(a) $g(x) \geqslant 2$ (b) $g(x) < 0$

On surlignera les parties utilisées de la courbe $\mathscr{C}_g$ pour répondre à ces questions.

E.44 Dans un repère $\left(O\,;I\,;J\right)$, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



On répondra graphiquement aux questions suivantes :

(1) Donner l'ensemble de définition de cette fonction.

(2) On laissera les traits de construction nécessaire pour répondre aux questions ci-dessous :

(a) Déterminer l'image du nombre 1 par la fonction f

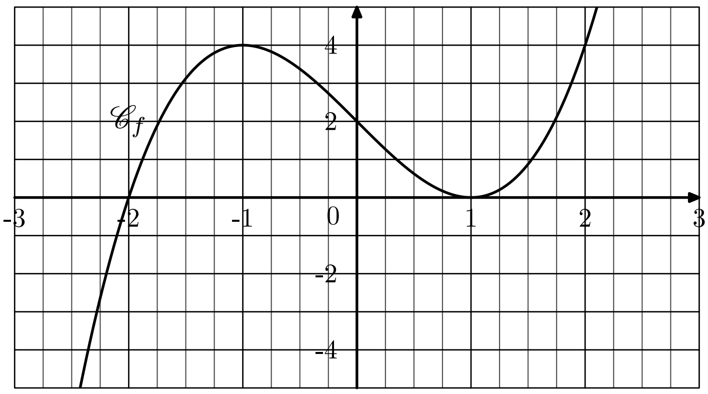
(b) Déterminer l'ensemble des antécédents par la fonction f du nombre 1.

(3) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant -1$. On surlignera la partie considérée de la courbe $\mathscr{C}_f$.

11. *Lectures graphiques et manipulations algébriques*

E.45 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

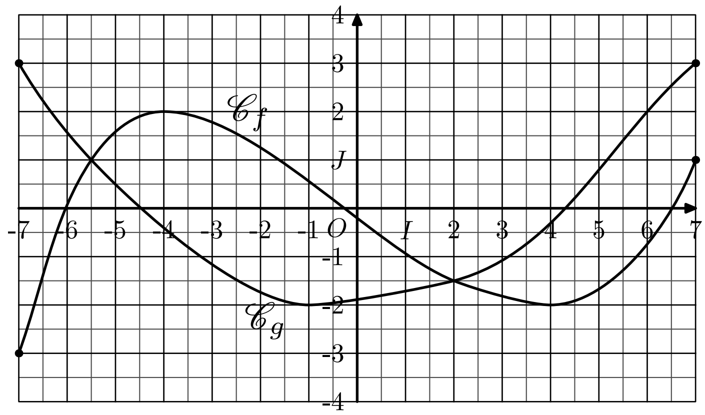
$f(x) = x^3 - 3x + 2$



1. Graphiquement, déterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x)>0$.
2. a. Établir l'égalité suivante : $f(x)=(x+2)(x-1)^2$
   b. Dresser le tableau de signes de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   c. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation : $f(x)>0$

12. *Positions relatives de courbes : résolution graphique*

E.46 Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives respectivement des fonctions f et g définies sur $[-7\,;7]$:



1. Déterminer, graphiquement, les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
2. Graphiquement, résoudre l'inéquation : $g(x)\geqslant f(x)$

13. *Positions relatives de courbes : résolution algébrique*

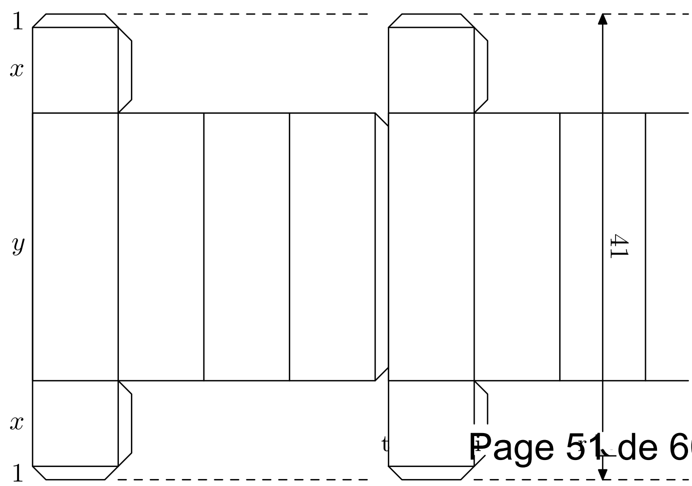
E.47 Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthogonal, on considère les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g où les fonctions f et g sont définies par :

$$f(x)=6x^3+2x^2+x+1 \quad ; \quad g(x)=2x^2+19x+13$$

1. Déterminer les réels a et b réalisant l'identité : $6x^3-18x-12=(2x+2)(3x+3)(ax+b)$
2. En déduire sur quels intervalles la courbe $\mathscr{C}_g$ est strictement au-dessus de $\mathscr{C}_f$.

14. *Problemes*

E.48 Un fabricant de boîtes en carton dispose, pour sa fabrication, de rouleaux donnant une bande de carton de 41 *cm* de large dans laquelle il trace et découpe les patrons de boîtes avant de les coller. Il dispose ses patrons de la manière indiquée dans le dessin ci-dessous :



Les boîtes, en forme de pavés droits, comportent deux faces carrées de $x\,cm$ de côté, munies de deux languettes de $1\,cm$ de large pour le collage, et quatre autres faces dont les dimensions en cm sont x et y, ainsi qu'un rabat pour la fermeture.

1. a. Donner une expression de y en fonction de x.
   b. Justifier que la valeur de x appartient à l'intervalle $]0\,;19{,}5[$.
2. Démontrer que le volume $\mathcal{V}$, de la boîte en fonction de x en cm^3, est donné, par la formule :
   $\mathcal{V} = 39x^2 - 2x^3$
3. a. Déterminer l'expression du polynôme P vérifiant l'égalité :
   $39x^2 - 2x^3 - 972 = (x-18)(x-6)\times P$
   b. En déduire les valeurs de x pour lesquelles le volume $\mathcal{V}$ est supérieur à $972\,cm^3$.
4. a. Déterminer l'expression du polynôme Q vérifiant l'égalité : $\mathcal{V}(x) - 2197 = (-2x-13)\times Q$
   b. En déduire le tableau de signes de l'expression :
   $\mathcal{V}(x) - 2197$.
   c. Donner le volume maximal que le fabricant peut obtenir avec ce type de boite ; pour quelle valeur de x, ce maximum est-il atteint?

15. Approfondissement : réflexion sur les opérations algébriques

E.49 Un élève a produit la résolution suivante d'une inéquation :

$$\frac{x^2+4}{x} \geqslant 4$$
$$x^2+4 \geqslant 4x$$
$$x^2-4x+4 \geqslant 0$$
$$(x-2)^2 \geqslant 0$$

Un carré étant toujours positif
On a : $S = \mathbb{R}$

1. a. Le nombre -1 est-il solution de l'inéquation : $\dfrac{x^2+4}{x} \geqslant 4$
   b. Que peut-on en déduire sur la résolution proposée par l'élève?
2. Résoudre correctement cette inéquation.

16. Approfondissement : systèmes d'inéquation

E.50 Donner la valeur de a afin que le système ci-dessous ait pour solution l'intervalle $[1\,;3]$:

$$\begin{cases} 3x+2 \geqslant 5 \\ \dfrac{1}{2} - x \geqslant a \end{cases}$$

E.51 Résoudre les systèmes d'équations suivantes :

1. $\begin{cases} 2x-3 < 5x-1 \\ x+4 \geqslant 3x-2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x-3 > x+\dfrac{1}{2} \\ x+1 \leqslant 2x+1 \end{cases}$

17. Approfondissement : manipulation d'encadrements

E.52 On considère un carré $ABCD$ de $5\,cm$ de côté.

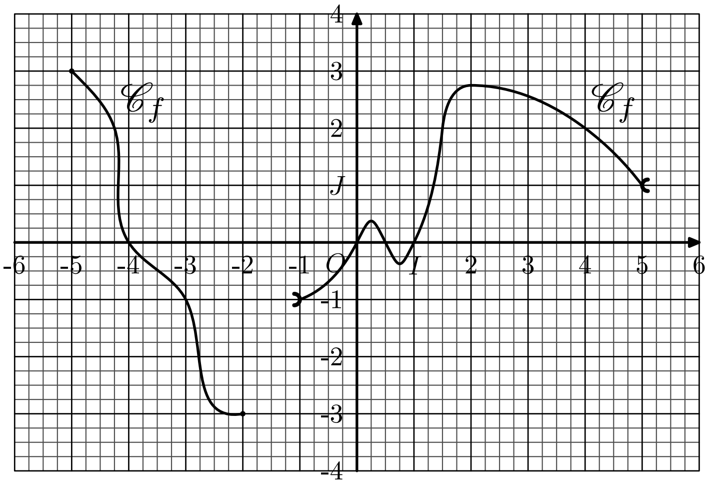
1. Donner la longueur exacte des diagonales de ce carré.
2. Sachant que : $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$
   Donner un encadrement de la longueur de cette diagonale.

E.53

1. Soit $a\in\mathbb{R}$ tel que $\dfrac{1}{2}<a<1$, préciser quels encadrements sont vérifiés par a :
   a. $\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{a} < 2$ b. $0 < a < 2a$ c. $\dfrac{1}{4} < a^2 < 4$
2. Par disjonction de cas pour $a\in\,]-1\,;0[$ et $a\in[0\,;2[$, donner un encadrement de a^2 et a^3 pour $-1<a<2$.

18. Exercices non-classés

E.54 On munit le plan du repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé. Ci-dessous est représentée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



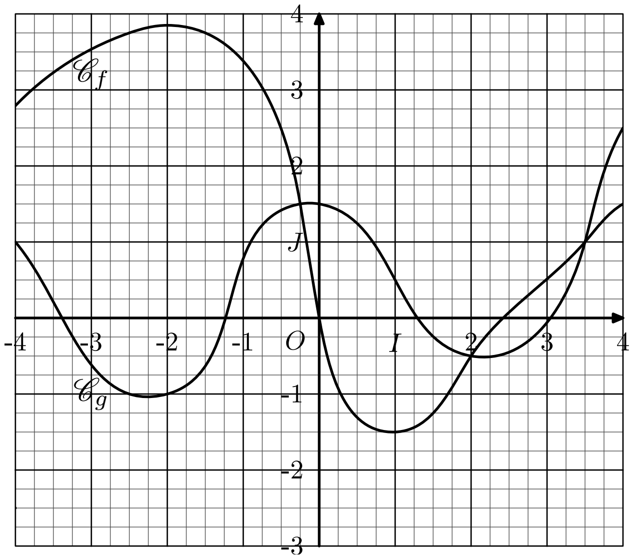
1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Déterminer, graphiquement, l'image des nombres suivants par la fonction f :

   a. -3 b. 1 c. 2

3. Déterminer, graphiquement, l'ensemble des antécédents du nombre de 2 par la fonction f.
4. a. Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\geqslant 2$.

   b. Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)<0$.

E.55 Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-4\,;4]$:



On considère l'inéquation : $f(x)<g(x)$

1. Parmi les nombres ci-dessous, lesquels sont solutions de cette inéquation :

   a. $-2{,}5$ b. $-0{,}25$ c. 1

2. Résoudre graphiquement cette inéquation.

E.56 Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés *(pixels)* dont la couleur va du blanc au noir en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un réel x de façon suivante :

- $x=0$ pour le blanc ;
- $x=1$ pour le noir ;
- $x=0{,}01$; $x=0{,}02$ et ainsi de suite jusqu'à $x=0{,}99$ par pas de $0{,}01$ pour toutes les nuances intermédiaires *(du clair au foncé)*.

L'image A, ci-après, est composée de quatre pixels et donne un échantillon de ces nuances avec leurs codes.
Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites "*fonctions de retouche*".
Une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ est dite "*fonction de retouche*" si elle possède les quatre propriétés suivantes :

- $f(0)=0$;
- $f(1)=1$;
- f est continue sur l'intervalle $[0\,;1]$;
- f est croissante sur l'intervalle $[0\,;1]$.

Une nuance codée x est dite assombrie par la fonction f si $f(x)>x$, et éclaircie, si $f(x)<x$.

- si $f(x)=x^2$, un pixel de nuance codée $0{,}2$ prendra la nuance codée $0{,}2^2=0{,}04$. L'image A sera transformée en l'image B ci-dessous.
- Si $f(x)=\sqrt{x}$, la nuance codée $0{,}2$ prendra la nuance codée $\sqrt{0{,}2}\approx 0{,}45$. L'image A sera transformée en l'image C ci-dessous.

0,20	0,40
0,60	0,80

Image A

0,04	0,16
0,36	0,64

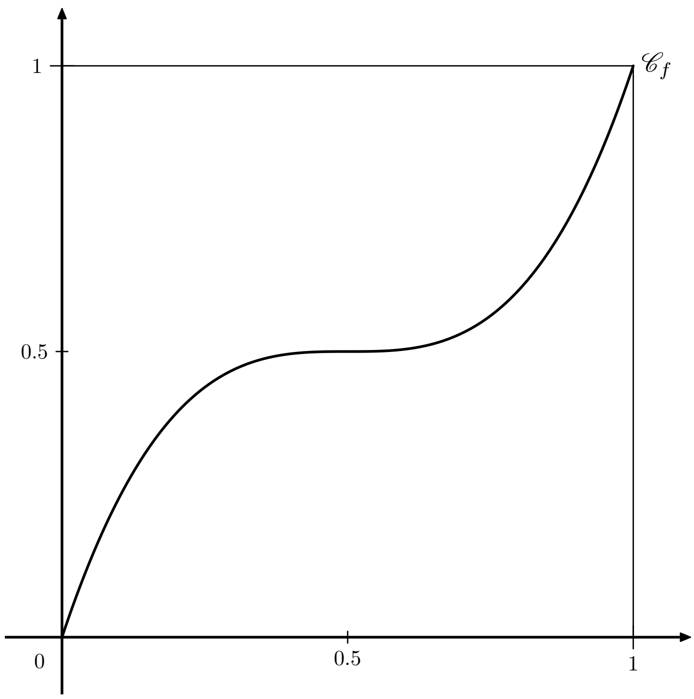
Image B

0,45	0,63
0,77	0,89

Image C

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par :
$f(x)=4x^3-6x^2+3x$

On admet que la fonction f est une fonction de retouche. Sa courbe $\mathscr{C}_f$ représentative est donnée ci-dessous :



1 Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\leqslant x$, à l'aide du graphique donné ci-dessous, en faisant apparaître les pointillés utiles.

2 Interpréter ce résultat en termes d'éclaircissement ou d'assombrissement.

E.57 L'entreprise *BBE (Bio Bois Énergie)* fabrique et vend des granulés de bois pour alimenter des chaudières et de poêles chez des particuliers ou dans des collectivités.
L'entreprise produit entre 1 et 15 tonnes de granulés par jour.

- Les coûts de fabrication quotidiens sont modélisés par la fonction C définie sur l'intervalle $[1\,;15]$ par :
  $C(x)=0{,}3\cdot x^2-x+\mathrm{e}^{-x+5}$
  où x désigne la quantité de granulés en tonnes et $C(x)$ le coût de fabrication quotidien correspondant en centaines d'euros.
- Dans l'entreprise *BBE* le prix de vente d'une tonne de granulés de bois est de 300 euros.
  La recette quotidienne de l'entreprise est donc donnée par l fonction R définie sur l'intervalle $[1\,;15]$ par :
  $R(x)=3\cdot x$
  où x désigne la quantité de granulés en tonnes et $R(x)$ la recette quotidienne correspondante en centaines d'euros.
- On définit par $D(x)$ le résultat net quotidien de l'entreprise en centaines d'euros, c'est-à-dire la différence entre la recette $R(x)$ et le coût $C(x)$, où x désigne la quantité de granulés en tonnes.

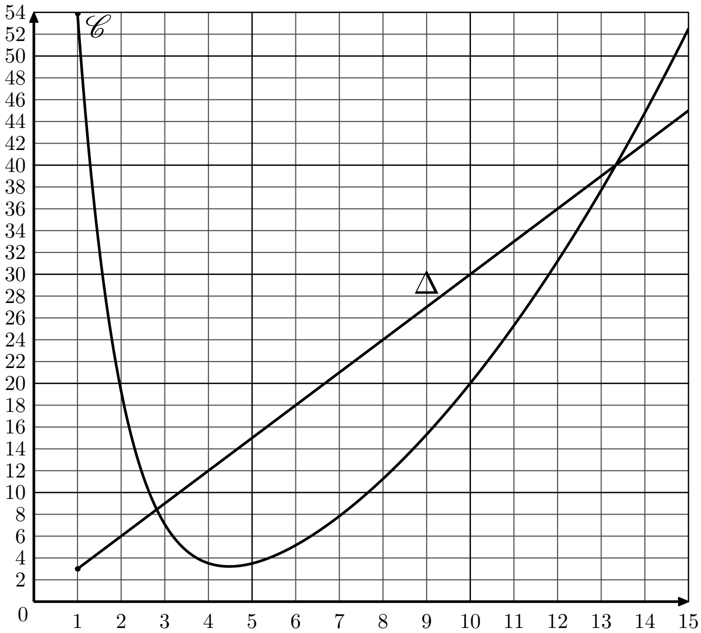
Sur le graphique situé ci-dessous, on donne $\mathscr{C}$ et Δ les représentations graphiques respectives des fonctions C et R dans un repère d'origine O.

On répondra aux questions suivantes à l'aide du graphique, et avec la précision permise par celui-ci. Aucune justification n'est demandée.

1 Déterminer la quantité de granulés en tonnes pour laquelle le coût quotidien de l'entreprise est minimal.

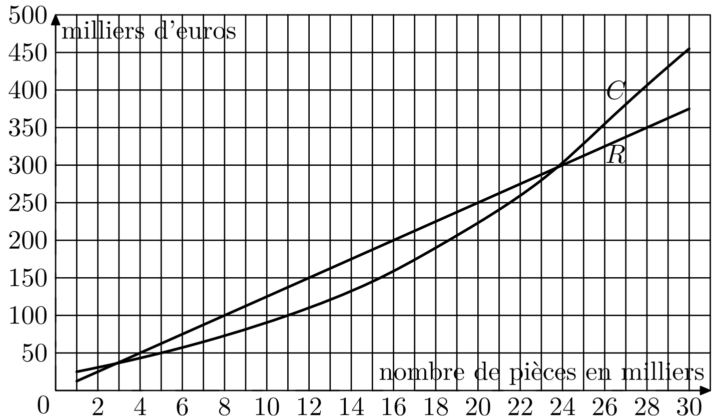
2 a Déterminer les valeurs $C(6)$ et $R(6)$ puis en déduire une estimation du résultat net quotidien en euros dégagé par l'entreprise pour 6 tonnes de granulés fabriqués et vendus.

b Déterminer les quantités possibles de granulés en tonnes que l'entreprise doit produire et vendre quotidiennement pour dégager un résultat net positif, c'est-à-dire un bénéfice.



E.58 Une entreprise produit et vend des composants électroniques.
Sa capacité mensuelle de production est comprise entre 1 000 et 30 000 pièces. On suppose que toute la production est commercialisée.

On donne ci-dessous R et C les représentations graphiques respectives des fonctions recette et coût sur l'intervalle $[1\,;30]$.



Par lecture graphique, donner une estimation des valeurs demandées.

1 Quel est le coût de production de 21 000 pièces?

2 Pour quelles quantités de pièces produites, l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice?

3 Pour quel nombre de pièces produites le bénéfice est-il maximal?

Chapitre 4

Equations et inéquations dans RxR

Maitriser la résolution numérique et graphique d'un système

1. Résolution de systèmes

E.1

1. On considère la matrice A définie par :
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
Déterminer l'inverse de la matrice A.

2. On considère le système d'équations suivant :
$$\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$
   a. Traduire ce système d'équation par une relation matricielle.
   b. En déduire l'ensemble des solutions de ce système.

E.2

1. On considère les deux matrices suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -6 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$
Montrer que ces deux matrices sont inverses l'une de l'autre.

2. Résoudre les systèmes suivants d'équations :
$$\begin{cases} x - 2y - 2z = 0 \\ 2x + y + 2z = -9 \\ 2x + z = -8 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x + 2y - 2z = -2 \\ 2x + 5y - 6z = -7 \\ -2x - 4y + 5z = 8 \end{cases}$$

E.3 On considère la matrice A définie par :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. a. Effectuer le calcul : $4{\cdot}A - A^2$
   b. En déduire l'expression de la matrice inverse de la matrice A.
   c. Donner l'expression de la matrice : $B = \frac{4}{5}{\cdot}I_2 - \frac{1}{5}{\cdot}A$.

2. On considère les deux matrices X et Y définies par :
$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad ; \quad Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
En utilisant la question 1, résoudre le système :
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ -2{\cdot}x + 3{\cdot}y = 1 \end{cases}$$

2. Introduction

E.4 On considère l'équation (E) à deux inconnues :

(E) : $2x - y = 3$

1. Parmi les couples ci-dessous, lesquels vérifient l'équation :
   a. $(2\,;1)$ b. $(-4\,;2)$ c. $(3\,;3)$

2. Donner deux autres couples vérifiant cette égalité.

E.5 On considère le système (E) de deux équations à deux inconnues :
$$(E) : \begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$$
Parmi les couples ci-dessous, lesquels sont solutions du système (E) :

a. $(1\,;-2)$ b. $(2\,;1)$ c. $(-3\,;6)$

E.6 Justifier chacune de vos réponses.

1. -2 est-il solution de l'inéquation : $3x+12<4-2x$?
2. -2 est-il solution de l'équation : $(x-2)(2x+1)=0$?
3. -2 est-il solution de l'équation : $x^3+8=0$?
4. Le couple $(-2\,;1)$ est-il solution du système :
$$\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ x + 5y = 3 \end{cases}$$

3. Résolution par combinaisons linéaires

E.7 Un collégien effectue deux achats :

- 3 crayons et 2 stylos noirs pour 10,80 pesos
- 1 crayon et 1 stylo noir pour 4,80 pesos.

1. a. Quel aurait été le prix de 3 crayons et de 3 stylos noir?
   b. En déduire le prix d'un stylo noir.
2. Déterminer le prix d'un crayon.
3. Vérifier que les prix trouvés vérifient les conditions de l'énoncé.

E.8 On considère le système (S) défini par :
$$(S) : \begin{cases} 3x + 3y = 9 \\ 4x + 3y = 10 \end{cases}$$
Résoudre le système (S).

4. Resolution par substitution

E.9 Un classeur coûte 1,80 € de plus qu'un cahier.
Sachant que 3 classeurs et 2 cahiers coûtent 11,40 €, donner le prix d'un classeur et d'un cahier.

5. Résolution de systèmes

E.10

1. Résoudre le système : $(S) : \begin{cases} 3x + 2y = 66 \\ x + 3y = 57 \end{cases}$
2. Vérifier que, pour la solution $(x\,;y)$ trouvée, on a $\dfrac{x}{y} = \dfrac{4}{5}$.

E.11

1. Résoudre le système :

$$(S) : \begin{cases} 10x - 3y = 35 \\ 5x - 4y = -20 \end{cases}$$

2. Montrer que les valeurs trouvées pour x et y vérifient la condition suivante :

$$8\left(\frac{x-5}{y-5}\right) = 3\left(\frac{x+20}{y+20}\right)$$

E.12

1. Résoudre par la méthode de combinaisons linéaires le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 4x + 3y = 3 \end{cases}$$

2. Résoudre par la méthode de la substitution le système suivant :

$$(T) : \begin{cases} 3x + y = 16 \\ 8x - 5y = 12 \end{cases}$$

6. Résolution et modélisation

E.13

1. Résoudre le système $(S) : \begin{cases} x + 3y = 2\,250 \\ 2x + y = 2750 \end{cases}$
2. Pour l'achat d'un tee-shirt et de 3 casquettes, André a payé $2\,250\,F$. Pour l'achat de 2 tee-shirts et d'une casquette, Maeva a payé $2\,750\,F$. Déterminer le prix d'un tee-shirt et d'une casquette.

Remarque : les prix sont donnés en francs polynésiens (FP). Pour information 1 euro vaut environ $119{,}33\,FP$

E.14

1. Résoudre le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} x + y = 104 \\ x - y = 8 \end{cases}$$

2. Matéo et Simon, qui ont 8 ans d'écart, additionnent leurs âges et trouvent 104 ans.
Sachant que Matéo est le plus jeune, calculer l'âge de chacune de ces deux personnes.

E.15

1. Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 4x + 3y = 206 \\ 2x + 2y = 114 \end{cases}$
2. Lors d'un spectacle, la famille A, composée de 4 adultes et de 3 enfants, a payé 206 euros.
Pour le même spectacle, la famille B, composée de 2 adultes et de 2 enfants, a payé 114 euros.
Combien paiera la famille C, sachant qu'elle est composée de 3 adultes et de 2 enfants?

E.16

1. Résoudre le système : $\begin{cases} 6x + 5y = 25 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases}$
2. Pierre et Jules achètent des poissons rouges et des poissons jaunes dans le même magasin spécialisé. Pour l'achat de 6 poissons rouges et de 5 poissons jaunes, Pierre dépense 25 euros.
Pour l'achat de 2 poissons rouges et de 3 poissons jaunes, Jules dépense 11 euros.
   a. Quel est le prix d'un poisson rouge?
   b. Quel est le prix d'un poisson jaune?

La démarche suivie sera expliquée sur la copie.

E.17

1. Résoudre le système : $\begin{cases} 3x + 2y = 50{,}30 \\ x + 3y = 32{,}75 \end{cases}$
2. À la pépinière “Fruitfleur”, un client achète 3 orangers et 2 citronniers pour 50,30 euros. Un autre client paye 32,75 euros pour 1 oranger et 3 citronniers. On désigne par x le prix d'un oranger et y celui d'un citronnier.
   a. Écrire un système de deux équations qui traduit le problème.
   b. Calculer le prix d'un oranger et le prix d'un citronnier.

E.18

1. Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 4x + 3y = 206 \\ 2x + 2y = 114 \end{cases}$
2. Lors d'un spectacle, la famille A, composée de 4 adultes et de 3 enfants, a payé 206 euros.

   Pour le même spectacle, la famille B, composée de 2 adultes et de 2 enfants, a payé 114 euros.

   Combien paiera la famille C, sachant qu'elle est composée de 3 adultes et de 2 enfants?

7. *Systèmes d'équations avec nombres relatifs et rationnels*

E.19 On considère le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ 5x + 10y = 20 \end{cases}$$

Résoudre le système (S).

E.20 On considère le système (S) d'équations :

$$\begin{cases} x - 3y = 8 \\ 4x + y = -7 \end{cases}$$

Résoudre le système (S).

E.21 On considère le système (S) d'équations :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

Résoudre le système (S).

E.22 On considère le système (S) d'équations :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 4x + 3y = -2 \end{cases}$$

Résoudre le système (S).

8. *Modélisation et résolution*

E.23 Une élève de CP fait des courses pour ses camarades :

- la première fois, elle achète 5 crayons et 2 gommes pour 10,90 euros ;
- la seconde fois, elle achète 8 crayons et 3 gommes pour 17,20 euros.

En utilisant un système d'équations, aider l'élève de CP à retrouver le prix de chaque article.

E.24 Un client d'une quincaillerie regarde les deux tickets de caisse suivants :

- 6 kilogrammes de vernis et 4 litres de cire ont couté 95 €.
- 3 kilogrammes de vernis et 3 litres de cire ont couté 55,50 €.

Déterminer le prix d'un kilogramme de vernis et le prix d'un litre de cire.

E.25 ⚠ Un train est constitué, à l'aller, de deux locomotives identiques et de dix wagons-citernes du même modèle et ce train mesure alors 152 m de long.

Après avoir vidé le contenu de tous les wagons-citernes, on décroche une locomotive et on ajoute deux wagons-citernes vides.
Après ces changements, le train ainsi constitué mesure 160 de long.

On cherche la longueur x d'une locomotive et la longueur y d'un wagon-citerne.

1. Écrire un système de deux équations à deux inconnues représentant la situation.
2. Résoudre le système : $\begin{cases} x + 5y = 76 \\ x + 12y = 160 \end{cases}$
3. En déduire la longueur en mètre d'une locomotive et celle d'un wagon-citerne.

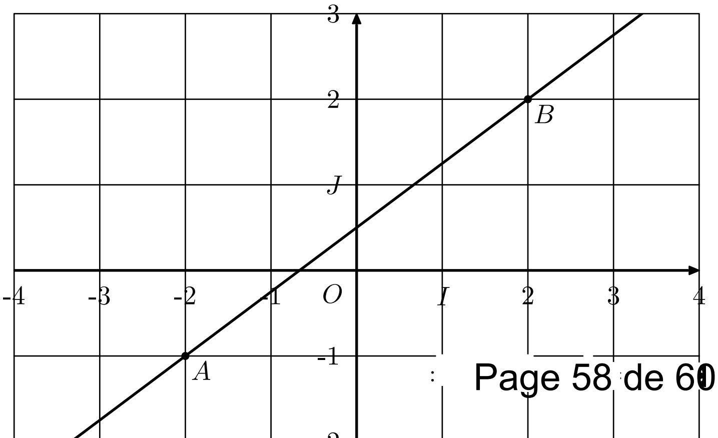
9. *Résolution graphique*

E.26 Résoudre graphiquement le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} y = 0{,}5x + 2 \\ y = -x + 7 \end{cases}$$

10. *Fonctions et systèmes d'équations*

E.27 Dans le repère $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous, est donnée la droite (d) représentative d'une fonction affine f.



L'expression algébrique de la fonction affine f est de la forme :
$f(x) = a \times x + b$
Le but de l'exercice est de déterminer les valeurs des deux nombres a et b.

1. Donner les coordonnées des points A et B.

Première méthode :

2. À l'aide des points A et B, déterminer le coefficient directeur de la fonction affine f.

3. À l'aide des coordonnées du point A ou du point B, déterminer la valeur du nombre b.
Écrire l'expression complète de la fonction f.

Seconde méthode :

4. Justifier que les deux nombres a et b vérifient les deux équations ci-dessous :
$-2a + b = -1 \quad ; \quad 2a + b = 2$

5. Résoudre le système d'équations :
$$\begin{cases} -2a + b = -1 \\ 2a + b = 2 \end{cases}$$
Écrire l'expression complète de la fonction f.

E.28 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$.
L'unité de longueur est le centimètre.

1. Soit f une fonction affine vérifiant :
$f(4) = -2 \quad ; \quad f(0) = 6$
   a. Déterminer l'expression de la fonction f.
   b. Effectuer le tracé de la représentation graphique de la fonction f.

2. Soit g la fonction affine définie par : $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$.
   a. Construire la droite (d) représentant graphiquement la fonction g.
   b. Montrer que $C(-4\,;-1)$ appartient à (d) et placer le point C.

3. a. Résoudre par le calcul le système d'équations suivant :
$$\begin{cases} y = -2x + 6 \\ y = \frac{1}{2}x + 1 \end{cases}$$
   b. Expliquer comment on peut trouver graphiquement le résultat.

11. Un peu plus loin

E.29 Trouver deux nombres, connaissant leur somme 2003 et leur différence 51

12. Système d'équations linéaires

E.30

1. Résoudre le système : $\begin{cases} x - y = 8 \\ 7x + 5y = 104 \end{cases}$

2. Une bibliothèque achète 7 DVD et 5 livres. Le prix total est de 104 euros. Un livre coûte 8 euros de moins qu'un DVD.
   a. Quel est le prix d'un DVD?
   b. Quel est le prix d'un livre?

E.31

1. Résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} 8x + 3y = 39{,}5 \\ 7x + 9y = 50{,}5 \end{cases}$$

2. Une balade d'une heure en mer est proposée à deux groupes de touristes.
Le premier groupe, composé de 8 adultes et de 3 enfants, paie 39,50 euros. Le second, composé de 7 adultes et de 9 enfants, paie 50,50 euros. Quel est donc le prix d'un ticket pour un adulte? Pour un enfant?

E.32

1. Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 4x + 3y = 206 \\ 2x + 2y = 114 \end{cases}$

2. Lors d'un spectacle, la famille A, composée de 4 adultes et de 3 enfants, a payé 206 euros.

   Pour le même spectacle, la famille B, composée de 2 adultes et de 2 enfants, a payé 114 euros.

   Combien payera la famille C, sachant qu'elle est composée de 3 adultes et de 2 enfants?

E.33 Un élève achète dans une papeterie deux stylos et un cahier pour un montant total de 3,5 €.

Il retourne une seconde fois dans ce magasin pour acheter pour 1 stylo et 3 cahiers, du même modèle et du même prix, pour un coût global de 6,75 €.

Déterminez le prix d'un stylo et d'un cahier dans cette papeterie.

E.34 Sur la ligne de train Lyon-Marseille :

- Un TGV part de Lyon à destination de Marseille à $9h\,30$ et roule à la vitesse constante de $300\,{}^{km}\!/_{h}$.
- Un train Grande-Ligne part de Marseille pour relier Lyon à $9h$ et roule à la vitesse constante de $150\,{}^{km}\!/_{h}$.

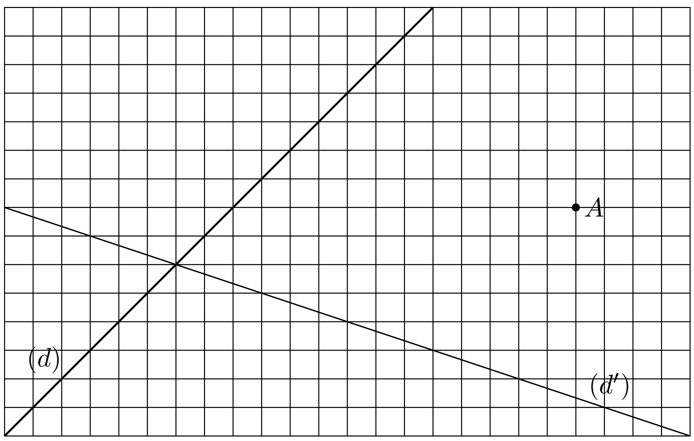
À quelle heure les deux trains vont se croiser? *(La distance Lyon-Marseille est de $255\,km$)*

Indication :

- On note x le temps écoulé en heures à partir de $9h\,30$.
- On note $L(x)$ la distance parcourue par le train partant de Lyon rejoignant Marseille à l'instant x.
- On note $M(x)$ la distance à l'instant x restant à parcourir par le train partant de Marseille et reliant Lyon.

13. *Projeté orthogonal*

E.35 Dans le quadrillage ci-dessous, on considère les deux droites (d) et (d') et un point A :



1. Placer le point M projeté orthogonal du point A sur la droite (d).
2. Placer le point N projeté orthogonal du point A sur la droite (d').

14. *Exercices non-classés*

E.36 Arthur vide sa tirelire et constate qu'il possède 21 billets.
Il a des billets de 5 € et de billets de 10 € pour une somme totale de 125 €.

Combien de billets de chaque sorte possède-t-il?

Si le travail n'est pas terminé, laisse tout de même une trace de la recherche. Elle sera prise en compte dans l'évaluation.

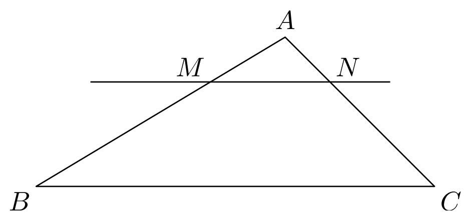
E.37

1. -2 est-il solution de l'inéquation : $3x+12<4-2x$? Justifier.
2. -2 est-il solution de l'équation : $(x-2)(2x+1)=0$? Justifier.
3. -2 est-il solution de l'équation : $x^3+8=0$? Justifier.
4. Le couple $(-2\,;1)$ est-il solution du système :
$$\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ x + 5y = 3 \end{cases}$$

E.38

1. Résoudre le système : $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x - y = 4{,}5 \end{cases}$
2. Dans le triangle ABC ci-dessous, on donne :
$AB=6\,cm$; $BC=9\,cm$

M est le point de $[AB]$ tel que : $AM=2\,cm$.
La droite parallèle à (BC) passant par M coupe $[AC]$ en N.



   a. Calculer MN.
   b. Donner la valeur de $\dfrac{AN}{AC}$.
3. On suppose que $[NC]$ mesure $4{,}5\,cm$ et l'on pose $AN=y$ et $AC=x$.
   a. Établir les égalités : $x-y=4{,}5$; $x-3y=0$.
   b. Calculer AN et AC, en utilisant éventuellement les questions 1 et 3 a.

Remarque : les calculs sont possibles même si les questions 1 et 3 a n'ont pas été traités.