Résumé :

Etude de fonction

① Ensemble de définition :

$f(x) = \dots\dots$

Si	Si	Si	Si	Si
$\sqrt{P(x)}$	$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$\dfrac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$	$\sqrt{\dfrac{P(x)}{Q(x)}}$	$\dfrac{\sqrt{P(x)}}{\sqrt{Q(x)}}$
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
$D_f = \{x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0\}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) > 0\}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0$ et $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0\}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0,\ Q(x) > 0\}$

- $x \neq a \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$
- $x \geq a \Leftrightarrow x \in [a ; +\infty[$
- $x < a \Leftrightarrow x \in]-\infty ; a[$
- $a \leq x < b \Leftrightarrow x \in [a ; b[$

$x \in I$ et $x \in J$

$\Updownarrow$

$x \in I \cap J$

$x \in I$ ou $x \in J$

$\Updownarrow$

$x \in I \cup J$

$\Rightarrow f(x) =$ polynôme

$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

$\Rightarrow f(x) = \sqrt{|\text{poly}|}$ ← valeur absolue

$\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$
$=]-\infty ; +\infty[$

② Calcul limites aux bornes :

Les bornes = الحدود + خارجين

Exemple 1 ↳ $D_f =]-\infty;+\infty[\xrightarrow{\text{Les bornes}} -\infty / +\infty$

Exemple 2 ↳ $D_f =]-\infty;0] \xrightarrow{\text{Les bornes}} -\infty$

Exemple 3 ↳ $D_f =]-\infty;0[\xrightarrow{\text{Les bornes}} -\infty / 0^-$

Exemple 4 ↳ $D_f =]0;+\infty[\xrightarrow{\text{Les bornes}} 0^+ / +\infty$

Exemple 5 ↳ $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\} \xrightarrow{\text{Les bornes}} -\infty / 1^- / 1^+ / +\infty$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

- $\lim\limits_{n\to-\infty} x^n = -\infty$ (n impair)
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ (n pair)
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0 \;,\; \forall n \in \mathbb{N}^*$

F.I : $\dfrac{0}{0} \;\Big|\; \dfrac{\infty}{\infty} \;\Big|\; 0\times\infty \;\Big|\; -\infty+\infty$

F.D : $"\dfrac{k}{\infty}" \longrightarrow 0$

$"\dfrac{k}{0}" \longrightarrow \infty$

$\infty\times\infty = \infty$

$"\dfrac{\infty}{0}" \longrightarrow \infty$

$"\dfrac{0}{\infty}" \longrightarrow 0$

- $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(ax)}{bx} = \dfrac{a}{b}$
- $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\tan(ax)}{bx} = \dfrac{a}{b}$
- $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos(ax)}{x^2} = \dfrac{a^2}{2}$

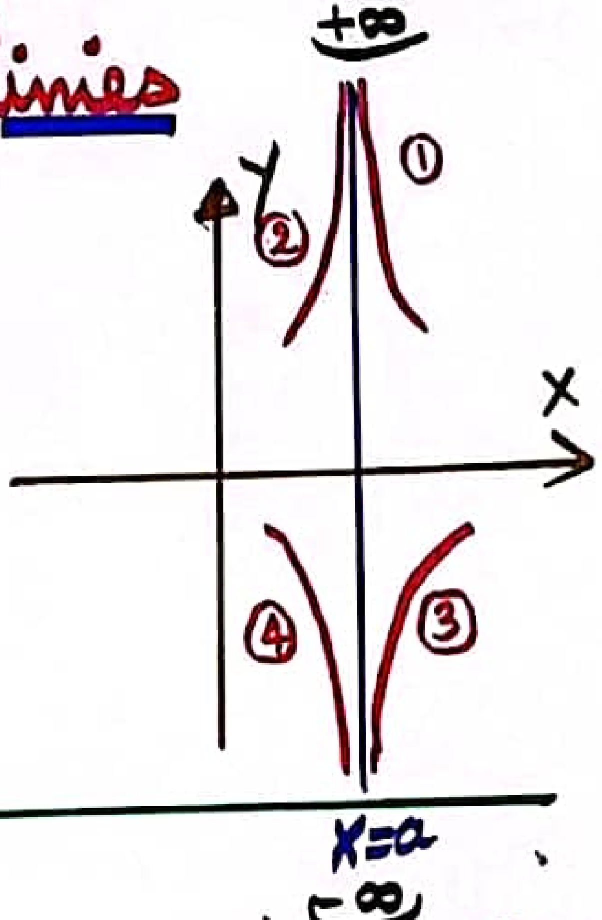
$-1 \leq \cos(x) \leq 1$

$-1 \leq \sin(x) \leq 1$

3 Les Branches infinies

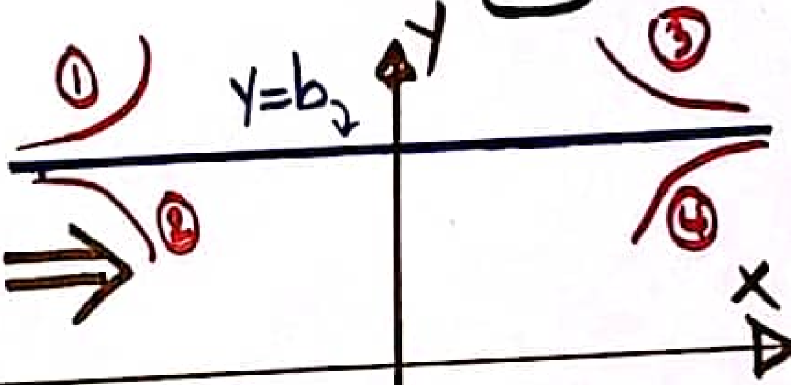
1. $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty}$ $\Longrightarrow$

on dit que : $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote verticale d'équation $X = a$.



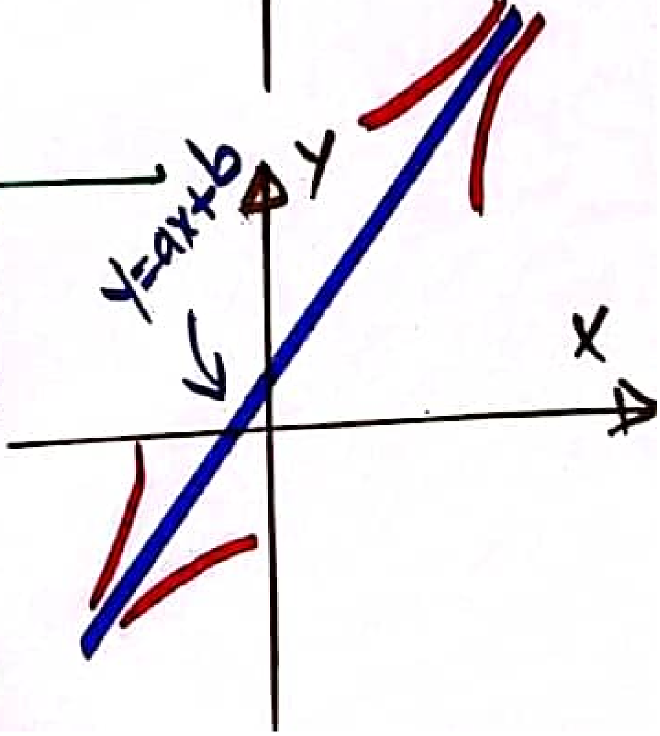
2. $\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}}$ $\Longrightarrow$

on dit que : $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = b$ au voisinage de $\pm\infty$



3. $\boxed{\lim_{x \to \infty} f(x) - (ax+b) = 0}$ $\Longrightarrow$

on dit que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ $\mathcal{V}(\infty)$



Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

- 0 : (C_f) admet une Branche parabolique de direction L'axe (Ox) au voisinage de $\pm\infty$

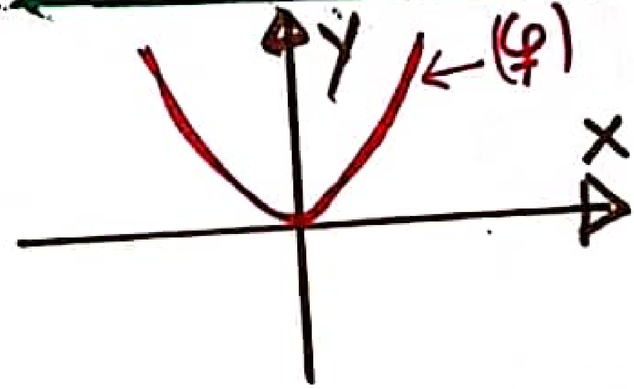
- $a \neq 0$: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - ax$
  - $b \in \mathbb{R}$: (C_f) admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ au voisinage de $\pm\infty$
  - $\pm\infty$: (C_f) admet une Branche parabolique de direction la droite $y = ax$ au $v(\pm\infty)$

- $\pm\infty$: (C_f) admet une Branche parabolique de direction (OY) au voisinage de $\pm\infty$

④ Les élements de symetrie et périodicité

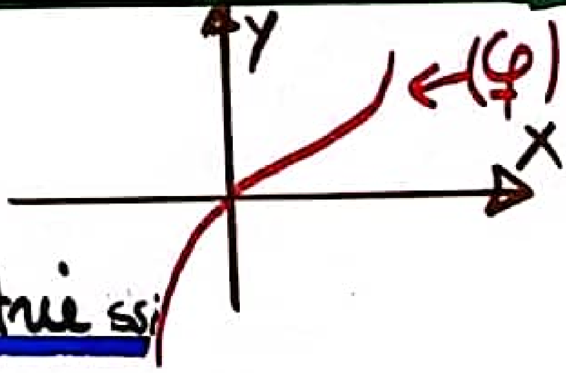
- **f est paire ssi :**

$\cdot\, x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$ $\cdot\, \forall x \in D_f : f(-x) = f(x)$	$(\mathcal{C}_f)$ est symetrique par rapport (OY)



- **f impaire ssi :**

$\cdot\, x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$ $\cdot\, \forall x \in D_f : f(-x) = -f(x)$	$(\mathcal{C}_f)$ est symetrique par rapport $O(0,0)$



- **$X = a$ axe de symetrie ssi**
  - $\forall x \in D_f : 2a - x \in D_f$
  - $\forall x \in D_f : f(2a - x) = f(x)$

- **$\Omega(a;b)$ centre de symetrie**
  - $\forall x \in D_f : 2a - x \in D_f$
  - $\forall x \in D_f : f(2a - x) = 2b - f(x)$.

Scanné avec CamScanner

⑤ Dérivabilité et variations

$f'(x)$

$\forall x \in I, f'(x) \geqslant 0$
f croissante sur I

$\forall x \in I, f'(x) \leqslant 0$
f décroissante sur I

$f'(a) = 0$

(φ) admet une Tangente horizontale au pt $(a, f(a))$ d'éq : $y = f(a)$

Tableau de Variations :

x	...... α	← D_f
$f'(x)$	$+$ ϕ $-$	← Signe $f'(x)$
Variation f	$\nearrow$ $\searrow$	← V def.

$a \notin D_{f'} \Rightarrow f' \overset{a}{\|}$ $a \notin D_f$ $\begin{matrix} f' \\ f \end{matrix} \overset{a}{\|}$

Scanné avec CamScanner

Les points d'inflexions :

$\Rightarrow f''(x) = 0$

$\Leftrightarrow$ . . . .

$\Leftrightarrow$ . . . .

$\Leftrightarrow$ . . . .

$\Leftrightarrow x = \alpha$ ou $x = \beta$

$A(\alpha, f(\alpha))$ et $B(\beta, f(\beta))$ des points d'inflexions de $(\mathcal{C}_f)$.

Propriété : Si f' s'annule en a et ne change pas de signe

$\Rightarrow (a, f(a))$ point d'inflexion.

Tableau de concavité de $\mathcal{C}_f$:

x		α	
$f''(x)$	$-$	0	$+$
Concavité de $(\mathcal{C}_f)$	Concave $\cap$	$(\alpha, f(\alpha))$ pt d'inflexion	Convexe $\cup$

⑥ La position relatif :

Soit $(\Delta) : y = ax + b$

↳ si : $\forall x \in I : f(x) - (ax+b) \leq 0$

(C_f) est au dessous de (Δ) sur I

↳ si : $\forall x \in I : f(x) - (ax+b) \geq 0$

(C_f) est en dessus de (Δ) sur I

Tableau de position relatif :

x	.... α ....
$f(x)-(ax+b)$	$-$ 0 $+$
La P.R	dessous $\wedge$ dessus

$(\alpha, f(\alpha))$ point