

RESUME ET EXERCICES



Fomesoutra.com
ça soutra !

**NOMBRES COMPLEXES ET
TRANSFORMATIONS DU PLAN**

EXERCICES ET RESUME DE COURS

MATHS

TLE D

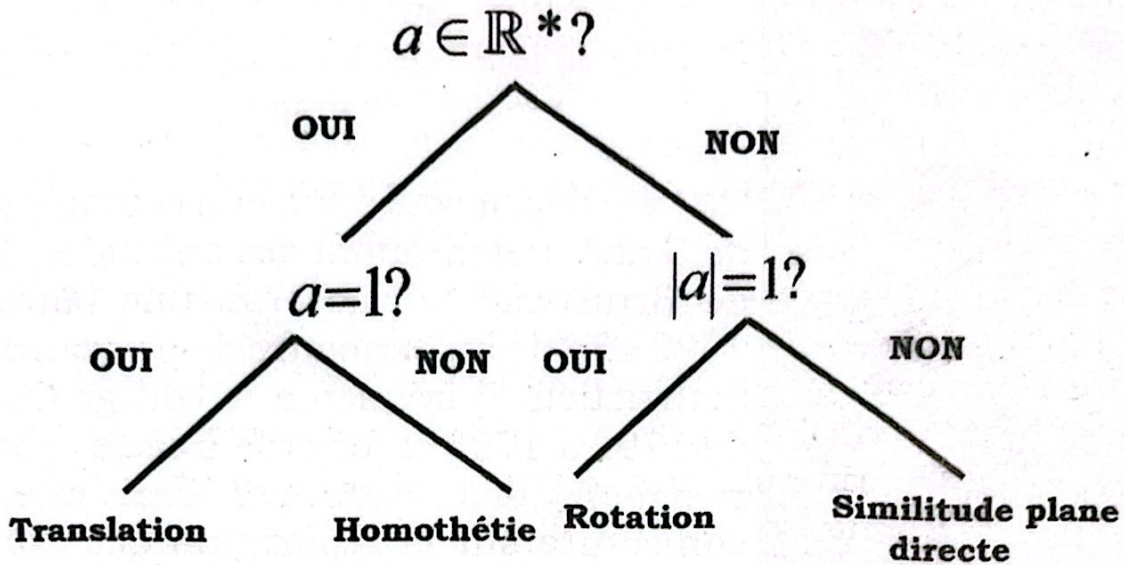
BY TEHUA
2025

 **Fomesoutra.com**
ça soutra !

FICHE DE COURS

Reconnaitre une transformation du plan

Soit une transformation du plan d'écriture complexe : $z' = az + b$ ($a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}$)



Détermination des éléments caractéristiques

Soit $z' = az + b$ ($a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$), l'écriture complexe associée à la similitude directe S

	$a \in \mathbb{R}^*$		$a \notin \mathbb{R}^*, a = a \cdot e^{i\theta}$	
	$a = 1$	$a \neq 1$	$ a = 1$	$ a \neq 1$
Bijection complexe	$z' = az + b$			
Transformations du plan	Translation de vecteur \vec{u}	Homothétie de rapport $ a $ et de centre Ω	Rotation d'angle θ et de centre Ω	Similitude plane directe de rapport $ a $ d'angle θ et de centre Ω
Éléments caractéristiques	L'affixe de \vec{u} est b	<ul style="list-style-type: none"> ▪ rapport a ▪ centre $\Omega(\omega)$ $\omega = \frac{b}{1-a}$ 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ angle θ $\theta = \arg(a)$ ▪ centre $\Omega(\omega)$ $\omega = \frac{b}{1-a}$ 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ rapport a ▪ angle θ $\theta = \arg(a)$ ▪ centre $\Omega(\omega)$ $\omega = \frac{b}{1-a}$

EXERCICE 1

Pour chacune des similitudes directes S , donne la nature et les éléments caractéristiques (rapport, angle et centre éventuel).

- 1 S d'écriture complexe $z' = -3z + 1 - 5i$
- 2 S d'écriture complexe $z' = (1+i)z - i$
- 3 S d'écriture complexe $z' = z + 1 + i$
- 4 S d'écriture complexe $z' = iz - 1 + 2i$

EXERCICE 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (O, I, J)

Donne dans chacun des cas l'écriture complexe de f .

- 1 S est l'homothétie de centre O et de rapport 2.
- 2 S est la rotation de centre Ω d'affixe i et d'angle $-\frac{\pi}{2}$
- 3 S est la similitude directe de centre Ω d'affixe $1 - 2i$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$

EXERCICE 3

Soient A, B, C et D les points d'affixes : $Z_A = -1 - i$; $Z_B = i$; $Z_C = 1 + 3i$ et $Z_D = 5 + i$

Soit S la similitude directe transformant A en C et B en D .

- 1 Détermine le rapport k et l'angle θ de S .
- 2 Détermine l'écriture complexe f associée à S
- 3 Détermine l'affixe de Ω le centre de S .

EXERCICE 4 Bac 2000 session normale

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé (O, I, J) , les points A et B ont pour affixes respectives $\sqrt{3} + i$ et $-\sqrt{3} + i$.

On désigne par S la similitude directe d'écriture complexe : $z' = \frac{3 - i\sqrt{3}}{2}z - \sqrt{3} + i$

- 1 Détermine les images par S des points O et A .
- 2 Détermine les éléments caractéristiques de S .
- 3 Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 2 et (C') son image par S .
 - a Détermine la nature et les éléments caractéristiques de (C') .
 - b Construis (C') .

EXERCICE 5 BAC blanc 2009. Lycée Mamie Fétai de Bingerville

On considère le polynôme $P(z) = z^4 - 4(1+i)z^3 + 12iz^2 + 8(1-i)z - 20$

- 1 Détermine les nombres complexes b et c pour que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait :

$$P(z) = (z^2 + 2i)(z^2 + bz + c)$$
- 2 Résous dans \mathbb{C} , l'équation : $P(z) = 0$.

3 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) .

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $Z_A = 1 - i$; $Z_B = -1 + i$;

$Z_C = 1 + 3i$ et $Z_D = 3 + i$

a Fais une figure.

b Démontre que ABCD est un carré.

4 Soit S la similitude directe transformant A en A et C en B.

a Détermine l'écriture complexe de S.

b Détermine les éléments caractéristiques de S.

c Détermine l'image du point B par S

d Construis l'image du carré ABCD par S.

EXERCICE 6 BAC 2005 Session normale

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

L'unité est le centimètre. On donne le point A d'affixe i .

Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant $\left| (1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i \right| = 6$

1 a Démontre qu'un point M appartient à (Γ) si et seulement si son affixe z vérifie:

$$|z - i| = 3$$

b Déduis-en la nature de (Γ) .

2 On considère les points B et C d'affixes respectives $\sqrt{3}$ et $-4i$.

L'application S est la similitude directe qui applique A sur O et B sur C.

Soit M un point d'affixe z et M' d'affixe z' l'image de M par S.

a Démontre que : $z' = (1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i$

b Détermine les éléments caractéristiques de S. On notera E son centre.

3 On désigne par (C) l'image de (Γ) par S.

a Détermine la nature et les éléments caractéristiques de (C).

b Construis (C) et (Γ) .

4 Soit D le point tel que : $D \in [EB]$ et $ED = 2EB$.

a Construis les points D et E dans le même repère.

b Démontre que le triangle ECD est équilatéral.

c Calcule l'affixe de D.

5 Soit r la rotation de centre E qui transforme C en D.

Détermine l'écriture complexe de r.

EXERCICE 7 Bac 2004. Session normale

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé (O, I, J) , on considère les points

A, B et C d'affixes respectives Z_A ; Z_B et Z_C telles que : $Z_A = 4i$, $Z_B = 2\sqrt{3} + 2i$ et

$Z_C = -2\sqrt{3} + 2i$.

1 Détermine le module et l'argument principal de chacun des nombres complexes

Z_A ; Z_B et Z_C .

2 Utilise les résultats précédents pour placer les points A, B et C.

Unité graphique : 1 cm.

3 Démontre que le triangle OBA est équilatéral.

4 Démontre que le quadrilatère OBAC est un losange.

5 On désigne par K le milieu du segment [OA] et par S la similitude directe de centre O qui transforme B en K.

a Détermine l'écriture complexe de S.

b Calcule l'affixe de l'image par S du point L milieu du segment [AC].

c Dédus-en que l'image par S de la médiatrice du segment [AC] est la droite (OI).

EXERCICE 8 Bac 2004. Session normale

Le plan complexe est muni du repère orthonormé O, \vec{e}_1, \vec{e}_2 .

On considère l'équation (E) : $Z \in \mathbb{C}, Z^3 + (6-5i)Z^2 + (1-20i)Z - 14-5i = 0$

1 a Vérifie que i est une solution de l'équation (E).

b Résous dans \mathbb{C} l'équation : $Z^2 + (6-4i)Z + 5-14i = 0$

c Résous à l'aide des questions qui précèdent l'équation (E).

2 On considère les points A, B et D d'affixes respectives $u = i$; $v = -2+3i$ et $t = -4+i$.

a Place les points A, B et D dans le repère.

b Ecris le nombre complexe $Z = \frac{u-v}{t-v}$ sous forme trigonométrique.

c Dédus-en que le triangle ABD est rectangle isocèle en B.

3 Soit S la similitude directe de centre A qui transforme D en B.

B' est l'image de B par S.

a Justifie que le triangle ABB' est rectangle isocèle en B'.

b Dédus-en la construction du point B'.

4 a Détermine l'écriture complexe de S.

b Calcule l'affixe de B'.

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

EXERCICE 9

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (O, I, J)

On considère l'application F qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'

définie par : $z' = u^2 z + u - 1$ où u désigne un nombre complexe.

1 a Détermine l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels F est une translation.

b Caractérise F pour chacune des valeurs trouvées.

2 a Détermine l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels F est une rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

b Caractérise F pour chacune des valeurs trouvées.