

RESUME ET EXERCICES



Fomesoutra.com
ça soutra !

NOMBRES COMPLEXES

EXERCICES ET RESUME DE COURS

MATHS

TLE D

BY TEHUA
2025

 **Fomesoutra.com**
ça soutra !

FICHE DE COURS

Soit $z = a + ib$ (avec a et b deux nombres réels) un nombre complexe.

① Module et argument d'un nombre complexe écrit sous forme algébrique :

Le module de z est : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\text{Un argument } \theta \text{ de } z \text{ est donné par : } \begin{cases} \cos \theta = \frac{\operatorname{Re}(Z)}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \theta = \frac{\operatorname{Im}(Z)}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

② Forme trigonométrique ou forme exponentielle d'un nombre complexe :

$$\left. \begin{aligned} z &= \rho(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ Forme trigonométrique} \\ z &= \rho e^{i\theta} \text{ Forme exponentielle} \end{aligned} \right\} \rho = |z| \text{ et } \theta = \arg(z).$$

③ Conjugué d'un nombre complexe :

sous forme algébrique et sous forme exponentielle :

$$\bar{z} = a - ib = \rho e^{-i\theta} = \rho(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$$

④ Module et argument d'un produit $z \cdot z'$ et d'un quotient $\frac{z}{z'}$

- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$ et $\arg(z \times z') = (\arg z + \arg z') + k2\pi$
- $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$ et $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = (\arg z - \arg z') + k2\pi$

⑤ Résoudre une équation du second degré avec a , b et c complexes :

Soit l'équation $az^2 + bz + c = 0$, avec a , b et c complexes

$\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant

Premier cas : $\Delta \in \mathbb{R}$

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une solution : $z_1 = \frac{-b}{2a}$

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Deuxième cas : $\Delta \notin \mathbb{R}$

l'équation admet deux solutions complexes

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - \delta}{2a} \text{ (}\delta \text{ étant une racine carrée de } \Delta\text{)}$$

6 Différentes caractérisations du fait que z est réel :

a avec l'écriture algébrique : $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = a \cos \theta$

b avec l'argument : $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg z = 0 + k\pi$

c avec le conjugué : $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$

7 Différentes caractérisations du fait que z est imaginaire pur :

a avec l'écriture algébrique : $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = ia \sin \theta$

b avec l'argument : $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg z = \left(\frac{\pi}{2}\right) + k\pi$

c avec le conjugué : $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\bar{z}$

8 Calculer une longueur avec des complexes :

$$AB = |z_B - z_A| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

9 Calculer des angles avec des complexes :

$$\text{mes}(\overline{AB}; \overline{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) + k2\pi$$

10 Montrer que deux droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires :

On montre que : $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est un nombre imaginaire pur

ou encore que : $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

11 Montrer que trois points A, B et C sont alignés :

On montre que : $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ est un nombre réel

ou encore que : $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = 0 + k2\pi$

12 Montrer que quatre points A, B, C et D sont cocycliques ou alignés :

On montre que : $\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_C - z_A}\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_B}{z_D - z_A}\right) + k\pi$ avec k entier relatif

13 Traduire que ABC est rectangle isocèle en B :

On montre que $\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C} = i$ ou $\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C} = -i$

14 Traduire que ABC est équilatéral :

On montre que : $|z_B - z_A| = |z_C - z_B| = |z_A - z_C|$

ou encore que : $\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

15 Cosinus et sinus de quelques angles particuliers

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

METHODES PRATIQUES

M1 Quand utiliser le conjugué d'un nombre complexe

- Pour écrire sous forme algébrique un nombre complexe qui a une forme de quotient, on multiplie son numérateur et son dénominateur par le conjugué du dénominateur.
- Pour prouver que Z est un nombre réel, on démontre que $\bar{Z} = Z$
- Pour prouver que Z est un imaginaire pur, on démontre que $\bar{Z} = -Z$

M2 Quand utiliser les formes trigonométriques ?

- Pour calculer les puissances de certains nombres complexes, on les écrit sous forme trigonométrique ou exponentielle et on utilise la formule de Moivre.
- Pour calculer les valeurs exactes du sinus et du cosinus de certains angles, on peut identifier les formes algébrique et trigonométrique.

M3 Recherche algébrique des racines carrées d'un nombre complexe

Soit $Z = a + ib$ et soit $z = x + iy$ une racine carrée de Z

$$z^2 = Z \Leftrightarrow |z|^2 = |Z| \text{ et } (x + iy)^2 = a + ib \Leftrightarrow x^2 + y^2 = |Z| \text{ et } (x^2 - y^2 + 2xy) = a + ib$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = |Z| & (1) \\ x^2 - y^2 = a & (2) \\ 2xy = b & (3) \end{cases}$$

Remarque : Si $b > 0$ alors x et y ont le même signe.
Si $b < 0$ alors x et y ont des signes contraires.

M4 Quand utiliser le rapport $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$?

Soit Z_A , Z_B et Z_C les affixes des points distincts A , B et C .

- Pour prouver que A , B et C sont alignés, on démontre que $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$ est un réel.
- Pour prouver que le triangle ABC est rectangle en A ou alors que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires, on démontre que $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$ est un imaginaire pur.

EXERCICES RESOLUS

FORME ALGEBRIQUE

EXERCICE 1

Détermine la forme algébrique de : $Z_1 = 1 - 2i + 4 + 5i$ et $Z_2 = \frac{3 - 5i}{4 + 2i}$

FORME TRIGONOMETRIQUE / FORME EXPONENTIELLE

EXERCICE 2

Soit les nombres complexes : $Z_1 = 1 + i$, $Z_2 = 2i$, $Z_3 = 5$ et $Z_4 = 1 - \sqrt{3}i$

- 1 Détermine le module et un argument des nombres complexes ci-dessus.
- 2 Dédus-en leur forme trigonométrique puis leur forme exponentielle.

EXERCICE 3

Soit les nombres complexes : $Z_1 = 1 + i$ et $Z_2 = 1 + \sqrt{3}i$

- 1 Détermine $|Z_1|$ et $|Z_2|$
- 2 Détermine : $\arg(Z_1)$ et $\arg(Z_2)$
- 3 Dédus-en le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$Z_3 = (1 + i)(1 + i\sqrt{3}), Z_4 = \frac{1 + i}{1 + i\sqrt{3}}, Z_5 = (1 + i)^7$$

EXERCICE 4

Calcule $Z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{2001}$

EXERCICE 5

On donne $z = -1 + i\sqrt{3}$ et $z' = 1 + i$

- 1 Calcule le module puis un argument des nombres complexes z et z' .
- 2 Ecris $\frac{z}{z'}$ sous forme trigonométrique
- 3 Ecris $\frac{z}{z'}$ sous forme algébrique
- 4 Dédus-en les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

ENSEMBLES DE POINTS

EXERCICE 6 BAC Blanc 2001. Cours UNESCO Plateau

On considère les points E (i), F (3-i) et G (1+2i).

- 1 Place ces points dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité : 1cm).
- 2 Détermine et construis :
 - a l'ensemble (B) des points M (z) tels que : $|z-i|=3$
 - b l'ensemble (H) des points M (z) tels que : $|z-i|=|z-3+i|$
 - c l'ensemble (R) des points M (z) tels que : $\text{Arg}(z-i) = \text{Arg}(z_G - z_E)$

EXERCICE 7

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct O, \vec{u}, \vec{v} .

Au point m d'affixe $z = x + iy$, avec $z \neq i$, on associe le point M d'affixe $Z = \frac{z+3}{z-i}$

- 1 Exprime les coordonnées X et Y de M à l'aide des coordonnées x et y de m.
- 2 Détermine l'ensemble des points m tels que :
 - a Z soit réel.
 - b Z soit imaginaire pur.

TRIGONOMETRIE

EXERCICE 8

Détermine $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$.

EXERCICE 9

Linéarise $\cos^3 \theta$

RESOLUTION D'EQUATIONS

EXERCICE 10

Détermine les racines carrées de $Z = 3 - 4i$

EXERCICE 11

Dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes, on considère l'équation :

$$E : z^3 + (1-8i)z^2 - (23+4i)z - 3 + 24i = 0$$

- 1 Montre que (E) admet une solution imaginaire pure et la déterminer.
- 2 Montre que $1 + 2i$ et $-2 + 3i$ sont solution de (E).
- 3 Donne l'ensemble des solutions de (E).

FIGURES GEOMETRIQUES

EXERCICE 12

On désigne par R, S et T les points du plan complexe d'affixes définies respectivement par : $R = 3 - 2\sqrt{3} + 2i$; $S = 3 - 2\sqrt{3} - 2i$; $T = 3$

- 1 Détermine le module et un argument du nombre : $U = \frac{S-T}{R-T}$
- 2 Dédus-en la nature du triangle RST.

VALEURS EXACTES DE COSINUS ET DE SINUS

EXERCICE 13 Bac Sénégal 2005

1 Résous dans \mathbb{C} , $z^3 = 1$

2 a Développe $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^3$

b Soit l'équation (E) : $z^3 = 4\sqrt{2} - 1 - i$

En posant $u = \frac{z}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$, détermine sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique les racines de l'équation (E).

3 Déduis-en les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$