NOM : 2017 – 2018
Etablissement : Contacts :

PROGRAMME :

- **Equations – Inéquations – Systèmes**
- **Etude de fonctions**
- **Fonction logarithme népérien – Fonction exponentielle népérienne**
- **Suites numériques**
- **Probabilités**
- **Statistiques**

NOM : 2017 – 2018

Etablissement : Contacts :

Terminale A4

Chapitre 1

EQUATIONS –INEQUATIONS - SYSTEMES

Objectifs pédagogiques :

L'élève sera capable de :

- Résoudre les équations et Inéquations du second degré
- Résoudre les équations et inéquations pouvant se ramener au second degré
- Résoudre des systèmes dans IR^2 par la méthode du substitution, de combinaison et par celle de CRAMER
- Résoudre des système dans IR^3 par la méthode de GAUSS
- Résoudre un problème concret se ramenant aux systèmes

Documentation : HPM, CIAM 1ere SE

Déroulement du cours :

1. Exercices :

A/ Résoudre dans IR :

- $3x^2 - x - 10 = 0$
- $x^2 - 8x + 25 = 0$
- $2x^2 - 5x - 3 = 0$
- $2x^2 - 15x + 4 = 0$
- $x^2 - 4 = 0$
- $x^2 - 9 + (2x+1)(x-3) = 6 - 2x$
- $x^2 + (x+1)(x+3) = x + 3$

Rappels :

$\Delta = \mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}$ est appelé discriminant de $P(x)$ ou de l'équation $P(x) = 0$ appelée équation du second degré.

$$(E) : \; ax^2 + bx + c = 0 \text{ avec } a \neq 0$$

- Si $\Delta < 0$, alors (E) n'a pas de solution
- Si $\Delta = 0$, alors (E) a une solution double $x_0 = -\frac{b}{2a}$
- Si $\Delta > 0$, alors (E) a deux solutions distinctes: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

B/ Résoudre dans IR,

$$x^2 - 3x - 4 < 0$$

$$x^2 - 11x + 10 > 0$$

$$-3x^2 + x + 2 \geq 0$$

$$(3x^2 - x + 1)^2 \geq (2x^2 + 9x - 4)^2$$

$$(x^2 + x - 2)(x^2 - x - 2) < 0$$

Rappels :

Soit : $P(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$

Le signe de Δ permet de savoir si $P(x)$ est factorisable ou non.

- Si $\Delta < 0$, alors $P(x)$ n'est pas factorisable car on a la forme $\alpha^2 + \beta^2$. Dans ce cas $P(x)$ a le signe du coefficient a.

x	$-\infty$ $+\infty$
$P(x)$	Signe de a

- Si $\Delta = 0$, alors $P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. $P(x)$ s'annule pour $x = -\frac{b}{2a}$ sans changer de signe et a le signe du coefficient a.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$P(x)$	Signe de a	0	Signe de a

- Si $\Delta > 0$, alors $P(x)$ a deux zéros: x_1 et x_2 et on a :

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$p(x)$	Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a

C/ Trouver deux nombres réels dont la somme est 3 et le produit est 2.

Trouver deux nombres réels dont la somme est 28 et le produit est 195.

Trouver deux nombres réels dont la somme est -20 et le produit est -1344

Trouver deux nombres réels dont la somme est 14 et le produit est 851.

Résoudre dans IR^2, les systèmes :

$$\begin{cases} x + y = -3 \\ xy = \frac{5}{4} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = -2 \end{cases}$$

Rappels :

Si $\Delta \geq 0$ alors l'équation admet deux solutions distinctes ou confondues $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

On note la somme $S = x_1 + x_2$ et le produit $P = x_1 x_2$. On établit que :

$$S = -\frac{b}{a} \quad ; \quad P = \frac{c}{a}$$

Il est donc possible de trouver deux nombres connaissant leur somme S et leur produit P. Il suffit donc de résoudre l'équation du second degré :

$$x^2 - Sx + P = 0$$

D/ On considère le polynôme défini par $p(x) = x^3 - x^2 + x + 3$

a) Calculer $p(-1)$ et conclure
b) Résoudre dans IR l'équation $p(x) = 0$
c) Résoudre ensuite dans IR l'inéquation $p(x) > 0$

2. Equation et inéquations bicarrées

Une équation bicarrée est une équation de la forme $(E)\ :\ ax^4 + bx^2 + c = 0\ ;\ a \neq 0$. Pour résoudre une telle équation, on pose $X = x^2$ avec $X \geq 0$. Et on résoud ensuite l'équation déduite$X \geq 0\ ,\ aX^2 + bX + c = 0$. Ensuite on déduit les valeurs de x.

Exercices :

Résoudre dans IR :

a) $x^4 - 5x^2 - 12 = 0$
b) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
c) $x^4 - 13x^2 + 36 \geq 0$

3. Système d'équations du 1^er^ degré dans IR^2

1.1. Résolution par substitution et par combinaison

Résoudre dans IR^2, $\begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases}$

1.2. Méthode de CRAMER

a) Notion de déterminant

Soit le système suivant : (Σ):$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

On appelle déterminant, le nombre réel noté $det(\Sigma)$ défini par :

$$det(\Sigma) = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

Si $det(\Sigma) \neq 0$ alors le système admet un seul couple solution.

Si $det(\Sigma) = 0$ alors le système admet 0 ou une infinité de couples solution.

b) Exemple de résolution

Pour résoudre un système de deux équations linéaires par la méthode de Cramer, on calcule les déterminants : $det(\Sigma)$, $detx$ et $dety$.

Si $det(\Sigma) \neq 0$ alors on a : $x = \frac{detx}{det(\Sigma)}$ et $y = \frac{dety}{det(\Sigma)}$

Si $det(\Sigma) = 0$ et au moins l'un des deux autres déterminants est non nul, le système n'admet aucune solution.

$det(\Sigma) = 0$ et $detx = 0$ et $dety = 0$ alors on a une infinité de couples solutions du système.

1.3. Systèmes d'équation non linéaires dans IR^2

On peut transformer le système non linéaire en utilisant une inconnue auxiliaire et retrouver un système d'équations linéaires du 1er degré dans IR^2.

<u>Exemple :</u>

Résoudre dans IR^2,
$$\begin{cases} 11\sqrt{x} + 16\sqrt{y} = 531 \\ 13\sqrt{x} + 19\sqrt{y} = 629 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 2y = 23 \\ -2x^2 + 5y = -8 \end{cases}$$

2. Systèmes d'équations dans IR^3

Description de la résolution par la méthode de GAUSS

Soit le système :
$$\begin{cases} ax + by + cz = \alpha \\ a'x + b'y + c'z = \beta \\ a''x + b''y + c''z = \gamma \end{cases}$$

On fixe l'une des équations, avec laquelle on combine respectivement les deux autres en éliminant l'inconnue x. On obtient deux nouvelles équations dans IR^2 que l'on sait résoudre.

A la fin on obtient un système échelonné du type :
$$\begin{cases} ax + by + cz = \alpha \\ \quad ey + fz = \beta' \\ \quad\quad gz = \gamma' \end{cases}$$

Exemple : Résoudre dans IR^3, $\begin{cases} x+2y+3z=2 \\ 4y+3z=-1 \\ 3x-6y-5z=4 \end{cases}$

2.1. Système d'inéquations dans IR^2

Nous adopterons pour les systèmes d'inéquations dans IR^2 , une résolution graphique.

Exemple : Résoudre graphiquement : $\begin{cases} 2x+y-2 \geq 0 \\ 2x+3y \leq 2 \\ x-y>0 \end{cases}$

Programmation linéaire

La programmation linéaire est une situation concrète dont la résolution fait appel à des équations ou inéquations.

Pour résoudre un problème du premier degré on peut :

- Choisir les inconnues
- Traduire l'énoncé en langage mathématique en utilisant des équations et des inéquations
- En fin résoudre le problème en trouvant les solutions des équations et inéquations posées.

Exemple :

Les organisateurs d'un concours proposent aux classes lauréates un voyage. Ils s'adressent à un transporteur qui dispose de 10 cars de 40 places et de 8 cars de 50 places. Les cars devront transporter 540 personnes. Le transporteur demande 2500 ^{F} par autocar de 40 places et 3000 ^{F} par autocar de 50 places.

Déterminer le nombre de cars de chaque type qui occasionnera la dépense la plus faible possible par les organisateurs.

NOM : 2017 – 2018

Etablissement : Contacts :

Terminale A4

Chapitre 2

ETUDE DE FONCTIONS

Objectifs pédagogiques :

L'élève sera capable de :

- Calculer la limite d'une fonction polynôme, d'une fonction rationnelle

Etant donnée une fonction polynôme ou rationnelle :

- Déterminer son ensemble de définition (fonctions paire ou impaire)
- Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition
- Déterminer éventuellement les asymptotes horizontale et verticale
- Montrer éventuellement qu'une droite donnée est une asymptote oblique
- Tracer la courbe représentative de f

Documentation : HPM, CIAM 1^{ere} SE

Déroulement du cours :

1. Exercices :

Soit la fonction $f(x) = \frac{x-2}{2x-3}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de f et calculer les limites aux bornes de l'ensemble
b) Calculer la dérivé f' de f et en déduire son sens de variation
c) Dresser le tableau de f puis construire la courbe (C) de f.

2. Rappels sur le calcul de limites

2.1. Limite à l'infini

La limite à l'infini d'une fonction polynôme est égale à la limite de son monôme de degré le plus élevé.

La limite à l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite à l'infini du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Applications :

Calculer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de :

$$f(x) = -2x^2 - x + 2 \;\; ; \;\; g(x) = \frac{1}{2}x^3 + x - 2 \;\; ;$$

$$h(x) = \frac{2x}{x^2 - 4x - 1} \quad ; \quad k(x) = \frac{x^2 - 2}{\frac{1}{2}x - 1}$$

2.2. Limite en un point a

Calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to 2}\frac{2x-2}{x}$; $\lim_{x\to 1}\left(x^2-\frac{1}{2}x-2\right)$

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x-1}{x-3} \quad ; \quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x-1}$$

2.3. Notions d'asymptotes

Si $\lim_{x\to\infty}f(x)=b$ alors la droite d'équation $y=b$ est une asymptote horizontale à la courbe (C) de f

Si $\lim_{x\to a}f(x)=\infty$ alors a droite d'équation $x=a$ est asymptote verticale à la courbe (C) de f

Si $\lim_{x\to\infty}(f(x)-(ax+b)=0$ alors la droite d'équation $y=ax+b$ est asymptote oblique à la courbe (C) de f

3. Dérivation

3.1. Rappels des règles de dérivation

Toute fonction polynôme est dérivable dur IR

Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition

Fonctions	Dérivées
a	0
ax	a
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f\times g$	$f'\times g+g'\times f$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'\times g-g'\times f}{g^2}$
f^n	$n\times f'\times f^{n-1}$

3.2. Interprétation de la dérivée d'une fonction

a) Sens de variation

f est fonction strictement croissante si $f'(x)\geq 0$

f est une fonction strictement décroissante si $f'(x)\leq 0$

Exercice :

Soit $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x-1}$. Etudier le sens de variation de la fonction f.

b) Tangente à la courbe en un point x_0

Soit f une fonction de représentation graphique (C). Si f est dérivable en x_0 alors (C) admet au point d'abscisse x_0 une tangente d'équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Reprendre l'exemple précédent en déterminant l'équation de la tangente au point d'abscisse $x_0 = 0$

4. Exemple d'étude de fonction

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x^2-x-3}{x-1}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de f puis calculer ses limites aux bornes de son ensemble de définition
b) Calculer la dérivée f de la fonction f
c) Etudier le signe de $f'(x)$ puis en déduire son sens de variation
d) Dresser le tableau de variation de f
e) Construire dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ la coube représentative de f.

NOM : 2017 – 2018

Etablissement : Contacts :

Terminale A4

Chapitre 3

FONCTION LOGARITHME NEPERIEN – FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE

Objectifs pédagogiques :

L'élève sera capable de :

- Calculer les limites des fonctions logarithme népérien et exponentielle népérienne
- Utiliser les dérivées pour étudier des fonctions logarithme et exponentielle
- Dresser le tableau de variation et représenter graphiquement des fonctions comportant les logarithmes et les exponentielles
- Résoudre des équations et des inéquations comportant ln et exp

Documentation : HPM, CIAM Te SE

Déroulement du cours :

1. Fonction logarithme népérien

1.1. Définition et propriétés

La fonction logarithme népérien notée ln, est la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ et dont la dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Soit $f\ :\ x \mapsto\ lnx$. On a :

$$D_f =]0\ ;\ +\infty[$$

$$(lnx)' = \frac{1}{x} \quad ; \quad ln1 = 0$$

Exemple : calculer à l'aide de la calculatrice : $ln4\ ;\ ln\sqrt{3}$

Propriétés :

Pour tout réels $a\,;b$ strictement positifs, on a :

$$\ln(a \times b) = lna + lnb \quad ; \quad ln\frac{1}{b} = -lnb$$

$$ln\frac{a}{b} = lna - lnb \quad ; \quad lna^n = nlna$$

Exercice : utilisation des propriétés

Calculer en fonction de $ln2$: $ln8\ ;\ ln\frac{1}{16}\ ;\ ln(2\sqrt{2})$

Calculer en fonction de $ln3$ et $ln5$: $ln15\ ;\ ln45\ ;\ ln\frac{25}{3}$

1.2. Etude de la fonction ln

On note $f(x) = lnx$

Elle est définie pour $x > 0$. Donc $D_f =]0\ ;\ +\infty[$

NOM : 2017 – 2018
Etablissement : Contacts :

Les limites de référence:

$$\lim_{x \to 0>} lnx = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} lnx = +\infty$$

Dérivée : $f'(x) = \frac{1}{x}$. Donc pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$. f est donc strictement croissante sur $]0 \; ; \; +\infty[$

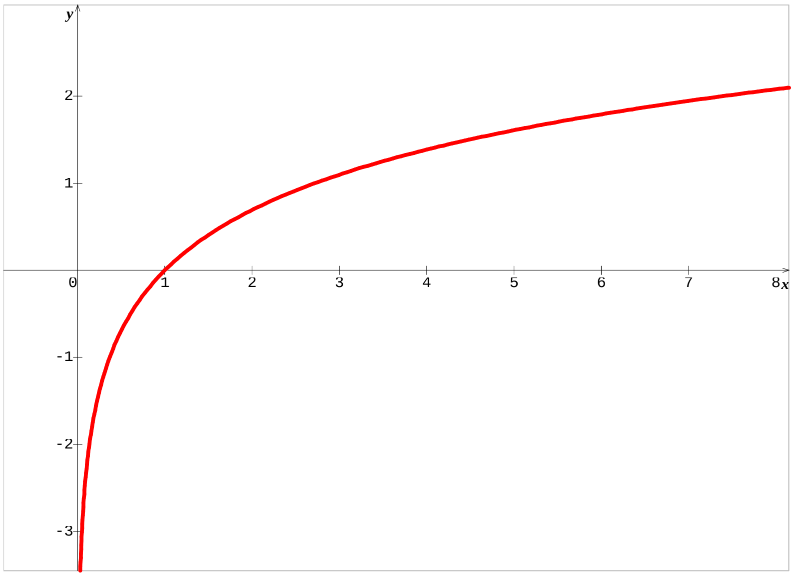
Tableau de variation :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

$\lim_{x \to 0>} lnx = -\infty$

Alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à (C)

Représentation graphique :



1.3. *Compléments sur les fonctions ln*

a) Le nombre e

e est appelé la constante d'Euler. C'est la base de la fonction logarithme népérien. Il est le nombre dont le logarithme est 1.

$$lne = 1$$

Trouver à la calculatrice une valeur approchée de e.

b) Limites à connaitre

$$\lim_{x \to 0>} lnx = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} lnx = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0>} xlnx = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{lnx}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{lnx}{x-1} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \to 0>} \frac{ln(x+1)}{x} = 1$$

c) Autres propriétés

Pour tout réel a , b strictement positifs, on a :

- $lna = lnb$ équivaut à $a = b$
- $lna < lnb$ équivaut à $a < b$
- $lna = b$ équivaut $a = e^b$
- Soit u une fonction de la variable réelle :

$$(lnu)' = \frac{u'}{u}$$

Dans ce cas l'ensemble de définition est : $D = \{x \in IR/u(x) > 0\}$. Pour retrouver donc l'ensemble de définition dans ce cas, on résoud l'inéquation $u(x) > 0$ dont l'ensemble solution est l'ensemble de définition de la fonction.

1.4. Applications

a) Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions définies par : $f(x) = ln(2x - 3) - ln\,(x - 1)$

$$g(x) = ln\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right) \quad ; \quad h(x) = x^2 + xln(x^2 - 1)$$

b) Résoudre dans IR :

$$ln(2x - 3) + 2ln(x + 1) = ln(6x - 3)$$
$$(lnx)^3 - 7lnx + 6 = 0$$
$$(lnx)^2 + 2lnx - 15 \leq 0$$

1.5. Etude d'une fonction comportant ln

Etudier et construire la fonction définie par :

$f(x) = 1 - x + ln(x - 1)$

2. Fonction exponentielle népérienne

2.1. Définition et propriétés

La fonction ln est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$. Elle donc bijective de $]0\ ;\ +\infty[$ vers IR. Elle admet alors une bijection réciproque notée exp définie de IR vers $]0\ ;\ +\infty[$. On note :

$$x \mapsto expx = e^x$$

Son ensemble de définition est IR et $\forall x \in IR\ ;\quad (e^x)' = e^x$

<u>Propriétés :</u>

Pour tous réels a et b :

- $e^{a+b} = e^a \times e^b$
- $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$; $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$; $e^{ra} = (e^a)^r$

2.2. Etude de la fonction exp

a) Sens de variation

La fonction exp est la réciproque de la fonction ln. Elle a alors le même sens de variation que la fonction ln. Donc elle est strictement croissante de IR vers $]0 \;:\; +\infty[$. On en déduit alors que :

- $\forall x > 0 \;;\; e^x > 0$
- $e^a = e^b \quad \Leftrightarrow \quad a = b$
- $e^a < e^b \quad \Leftrightarrow \quad a < b$
- $e^a = b \quad \Leftrightarrow \quad a = lnb \qquad (b > 0)$
  $e^a < b \quad \Leftrightarrow \quad a < lnb$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

b) Les limites de références

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

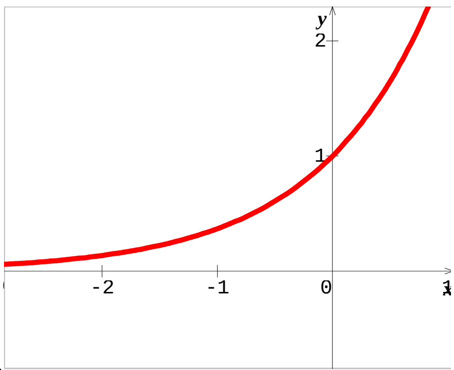
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Remarque :

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$. Donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe représentative en $-\infty$

c) Tableau de variations et représentation graphique

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0	$+\infty$



2.3. *Résolution d'équations et d'inéquations*

Résoudre dans IR :

$3e^{2x} + 20e^x - 7 = 0$; $e^{3x} - 3e^{2x} - e^x + 3 = 0$

2.4. *Etude de fonctions comportant exp*

Soit u une fonction dérivable sur IR. On a : $(e^u)' = u' \times e^u$

<u>Exemple</u> : Etudier et représentation de la fonction définition par :

$f(x) = 1 + x - e^x$

3. Etude de la fonction $x \mapsto 2^x$

Ensemble de définition : $D = IR$

$$\lim_{x\to-\infty} 2^x = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} 2^x = +\infty$$

Propriété : $\forall x \in IR, \quad 2^x = e^{xln2}$

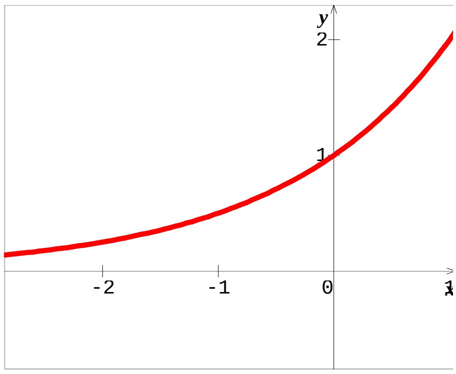
NOM : 2017 – 2018

Etablissement : Contacts :

Dérivée : $(2^x)' = (xln2)'^{e^{xln2}} = ln2 \times (2^x)$

Pour tut réel x, $ln2 \times (2^x) > 0$. La fonction est alors strictement croissante sur IR.

x	$-\infty$	$+\infty$
$(2^x)'$	$+$	
2^x	0 ↗	$+\infty$



NOM : 2017 – 2018
Etablissement : Contacts :

Terminale A4
Chapitre 4

LES SUITES NUMERIQUES

Objectifs pédagogiques:
L'élève sera capable de :

- Utiliser les acquis de la classe de première
- Utiliser le raisonnement par récurrence pour démontrer certaines propriétés des suites
- Traduire des problèmes de suite
- Etudier le sens de variation d'une suite donnée et la convergence d'une suite dans des cas simples

Documentation : HPM, CIAM 1ere et Te SE
Déroulement du cours :

1. Exercice

I/ le plan est muni du repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ;\ J)$.

A. Soit la suite définie par :$U_0 = 1$; $U_{n+1} = 3 + \frac{1}{4}U_n$. Représenter les trois premiers termes de la suite.

B. Soit la suite (U_n) définie par son premier terme U_0 et par la relation de récurrence $U_{n+1} = \frac{1+2U_n}{2+U_n}$.

a) On donne $U_0 = 1$. Calculer U_1 ; U_2 ; U_3

b) On donne $U_0 = -1$. Calculer U_1 ; U_2 ; U_3

c) Que peut – on déduire pour la suite (U_n) pour les valeurs du premier terme données précédemment

d) On donne maintenant $U_0 = 2$.

- Construire la courbe de la fonction $x \mapsto \frac{1+2x}{2+x}$ et la droite d'équation $y = x$
- Représenter sur l'axe (OI) les quatre premiers termes de la suite

II/ on considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \frac{2U_n}{2+U_n}$

1. Calculer U_1 ; U_2 ; U_3
2. On pose $V_n = \frac{1}{U_n}$ pour tout entier naturel.

a) Démontrer que la suite (V_n) est une suite arithmétique

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n

3. On pose : $S = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_{n-1}$
   a) Calculer S en fonction de n
   b) Déterminer n pour que $S = 115$

2. Raisonnement par récurrence

Soit (P_n) une proposition. Il s'agit de démontrer que la proposition (P_n) est vraie. La démonstration par récurrence se repose sur trois étapes :

- Initialisation : on vérifie que des cas particuliers $P_0; \ \ P_1$ sont vraies
- Hérédité : on suppose ici que P_n est vraie au rang n et on démontre qu'elle reste vraie au rang $n + 1$
- Conclusion : on conclut que alors que (P_n) est vraie

Exemple : soit la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n}{1+U_n} \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in IN, \quad U_n \leq 2$

3. Résolution de problèmes à l'aide des suites

a. Capital placé à intérêts simples

Un capital fixe est placé à un taux annuel fixe. Chaque année les intérêts sont perçus. On parle de placements à intérêts simples.

Soit C_0 le capital placé à intérêt simple à un taux annuel r. Le capital acquis au bout de :

- Un an est : $C_1 = C_0 + rC_0 = (1 + r)C_0$
- Deux ans est : $C_2 = C_1 + rC_0 = (1 + 2r)C_0$
- Au bout de n années est : $\boldsymbol{C_n = (1 + nr)C_0}$

Exemple :

M. Adjato place à la banque une somme de 100.000 à un taux d'intérêt annuel simple de 4%. Quel est son capital au bout 10ans ?

b. Capital placé à intérêt composé

Un capital fixe est placé à un taux annuel fixe. Chaque année les intérêts produits s'ajoutent au capital pour former un nouveau capital et ainsi de suite. On parle de placements à intérêts composés.

Soit C_0 le capital placé à intérêt composé à un taux annuel q. Le capital acquis au bout de :

- Un an est : $C_1 = C_0 + qC_0 = (1 + q)C_0$
- Deux ans est : $C_2 = C_1 + qC_1 = (1 + q)C_1$
- Au bout de n années est : $\boldsymbol{C_n = (1 + q)^n C_0}$

Exemple :

10 ans après, M. adjato décide de revoir son contrat et suggère à la banque de reconsidérer son nouveau capital comme placement initial à un taux d'intérêt composé de 5%. Au bout de combien d'années son capital atteindra $2.000.000 Frs$.

4. Variation d'une suite numérique

Pour étudier le sens de variation d'une suite numérique, on utilise les propriétés suivantes :

Soit (U_n) une suite numérique :

Si pour tout entier naturel n, $U_{n+1} \geq U_n$ alors la suite (U_n) est dite croissante

Si pour tout entier naturel n, $U_{n+1} \leq U_n$ alors la suite (U_n) est dite décroissante

a) Cas d'une suite arithmétique

Si (U_n) est une suite arithmétique alors on a : $U_{n+1} - U_n = r$ où r désigne la raison de la suite.

- Si $r > 0$ alors $U_{n+1} > U_n$. La suite (U_n) est alors croissante
- Si $r < 0$ alors $U_{n+1} < U_n$. La suite (U_n) est alors décroissante

b) Cas d'une suite géométrique

Si (U_n) est une suite géométrique alors on a : $\frac{U_{n+1}}{U_n} = q$ où q désigne la raison de la suite avec $q \neq 0$; $U_n \neq 0$

- Si $q > 1$ alors $U_{n+1} > U_n$. La suite (U_n) est alors croissante
- Si $0 < q < 1$ alors $U_{n+1} < U_n$. La suite (U_n) est alors décroissante

5. Limite d'une suite numérique

Soit la suite définie par : $U_n = 2^n$. Nous avions établit dans le chapitre précédent que : $\lim_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$. On en déduit donc que :

$$\lim_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$$

a) Définitions

Soit la suite définie par $U_n = f(n)$.

- $\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{x \to +\infty} f(x)$ (nous savons déjà calculer les limites de fonctions)
- Si $\lim_{n \to +\infty} U_n$ existe et est finie, on dit que la suite est convergente. Dans le cas contraire elle est divergente.

b) Applications

Soit la suite définie par :

$$V_n = ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \quad ; \quad \forall n \neq 0$$

1. Calculer la limite de V_n
2. On pose $S_n = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n$. Calculer S_1 ; S_2 ; S_3
3. Démontrer par récurrence que $S_n = -ln(n+1)$
4. Calculer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

NOM :   2017 – 2018
Etablissement :   Contacts :

Terminale A4
Chapitre 5

LES PROBABILITES

Objectifs pédagogiques :
L'élève sera capable de :

- Etablir un arbre de choix pour dénombrer
- Reconnaître devant une situation si la modélisation fait appel à un couple ou à un p −uplet d'éléments d'un ensemble fini
- Calculer le nombre d'éléments d'un produit cartésien
- Calculer le nombre de permutation d'un ensemble fini
- Calculer les nombres A_n^p ; $n!$; C_n^p
- Calculer à partir des dénombrements, la probabilité d'un évènement dans des situations d'équiprobabilités.

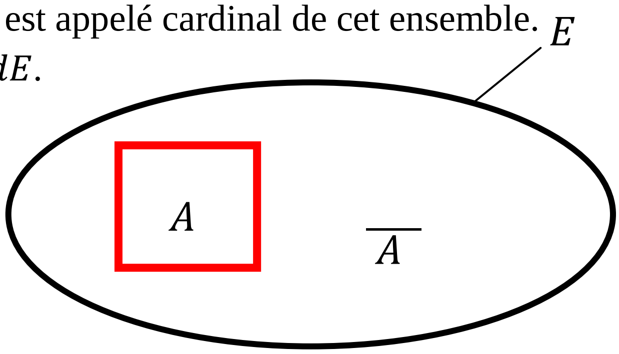
Documentation : HPM, CIAM 1ere et Te SE
Déroulement du cours :

1. **Exercices :**

Exercice 1:
Dans un groupe de 25 personnes, 10 jouent au basketball, 17 jouent au football et 8 pratiquent les deux sports. Déterminer le nombre de personnes :

a) Qui pratiquent uniquement au football
b) Qui pratiquent uniquement au basketball
c) Qui ne pratiquent aucun sport

N.B :
Un ensemble est dit fini, lorsqu'on peut compter ses éléments. Le nombre d'éléments contenus dans un ensemble est appelé cardinal de cet ensemble.
Soit $E = \{a ; b ; 1 ; 5 ; c\}$. Donner $CardE$.
On dit que A est inclu dans E
$\overline{A}$ est le complémentaire de A dans E.



La réunion de A et B est notée $A \cup B$ et leur intersection est $A \cap B$
Représenter par un diagramme ces ensembles.

$$\boldsymbol{Card(A \cup B) = CardA + CardB - Card(A \cap B)}$$

Exercice 2 : $A = \{a ; b ; c\}$ et $B = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$. Déterminer à l'aide d'un arbre de choix et d'un tableau cartésien tous les éléments de $A \times B$. Quel est son cardinal.

N.B :
Soient A et B deux ensembles finis. On appelle produit cartésien de A par B, l'ensemble des couples $(a;b)$ où $a \in A$; $b \in B$. On le note $A \times B$.
Pour tout ensemble A et B, on a :

- $A \times B \neq B \times A$
- $Card(A \times B) = CardA \times CardB$
- Si $A = B$ alors on a : $A \times B = B \times A = A^2$

$CardA^2 = n^2$ où $CardA = n$.

Exercice 3:

I. Un numéro téléphonique du TOGO est constitué de 8 chiffres. Quel est le nombre d'abonnés du réseau téléphonique de notre pays ?

Calculer 5! ; 7! ; A_5^2 ; A_{10}^3 ; A_4^1 ; C_5^2 ; C_{10}^3 ; C_4^1

II.
1. De combien de façons peut – on garer 5 voitures dans un parking de :
a) 5 places
b) 10 places
2. Une urne contient 10 boules blanches et 5 boules vertes. On tire successivement 4 boules de l'urne. Déterminer le nombre de tirages qu'on peut effectuer comportant :
a) 3 boules blanches
b) 2 boules blanches
c) 4 boules vertes

IV. On veut élire un comité de quatre personnes parmi les 45 élèves d'une classe.

1. Quel est le nombre de résultats possibles ?
2. Quel est le nombre de comités comportant exactement 2 filles sachant qu'il y a 25 filles dans cette classe.
3. Quel est le nombre de comités comportant au moins une fille.

Rappels : **Dénombrements**

C'est l'ensemble des techniques qui permet de compter et d'organiser les éléments d'un ensemble.

a) *p −uplets d'un ensemble*

Soit E un ensemble à n éléments et p un nombre entier naturel non nul. On appelle p −uplet d'éléments de E toute liste de p éléments ordonnés de E, chaque élément pouvant être répété. L'ensemble des $p-$listes d'éléments de E est noté E^p. Le nombre de $p-$uplets d'éléments de E est n^p.

b) *Arrangements*

On appelle arrangement de p éléments de E comportant n éléments, toute liste ordonnée de p éléments de E, aucun élément ne pouvant être répété dans la liste.
Le nombre d'arrangements de p éléments dans n est noté A_n^p.
Si $n = p$ alors ce modèle d'arrangements est appelé une permutation.

$$A_n^n = n! = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$\forall n\ ;\ p \in IN\ ;\ A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Le mot successif ou successivement suggère l'ordre, donc un arrangement ou un $p-$uplet (dans le cas où il y a répétition.

c) *Combinaison*

Soit E un ensemble à n éléments. On appelle combinaison de p éléments de E, tout sous ensemble de E, les éléments n'étant pas ordonnés. Le nombre de combinaisons de p éléments de E est noté C_n^p
On a :

$$\boldsymbol{C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}}$$

<u>Récapitulation :</u>

Modélisation	Ordre	Eléments différents	Outil	Nombre
Tirage successif avec remise				
Tirage successif sans remise				
Tirages simultanés				

2. Calcul de probabilité

2.1. Vocabulaires

a) Expérience aléatoire

On lance un dé cubique et on observe le numéro apparu sur la face supérieure du dé. Six résultats sont possibles : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6.

- On dit que l'on a réalisé une <u>expérience aléatoire</u> ou une <u>épreuve</u> car le résultat ne peut pas être connu d'avance. Chaque résultat est une <u>éventualité</u>.
- L'ensemble $\Omega = \{1\ ;2\ ;3\ ;4\ ;5\ ;6\}$ est l'ensemble des éventualités ou univers.

b) Evènements liés à une expérience aléatoire

On appelle évènement toute partie de l'univers Ω.
On appelle évènement élémentaire, tout singleton de Ω.

Dans l'exemple du lancé de dé :

- « Obtenir un nombre pair » est l'évènement $\{2\ ;4\ ;6\}$
- « Obtenir un nombre pair et premier » est l'évènement { 2 }.

Dans une épreuve, un évènement est réalisé lorsqu'il contient le résultat de l'expérience. Si on obtient 4 alors l'évènement « Obtenir un nombre pair est réalisé ».
Quelle est la chance de réaliser l'évènement « Obtenir un nombre pair » ?

La valeur trouvée est une probabilité.

2.2. Situation d'équiprobabilité

Dans l'exemple précédent, tous les numéros ont la même chance d'apparaitre. On parle d'équiprobabilité. Le nombre de résultats que l'on peut obtenir suite à une épreuve est appelé nombre de cas possibles. Une situation précise envisagée est appelée cas favorable. Soit une probabilité définie sur un univers E et A un évènement de E. La probabilité que l'évènement soit réalisé est donnée par la relation :

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{nbre\ de\ cas\ favorables}{nbre\ de\ cas\ possibles} = \frac{cardA}{cardE}}$$

Pour tout évènement A, une probabilité est un nombre réel compris dans l'intervalle [0 ; 1].

Si $P(A) = 0$ alors l'évènement n'est pas réalisable : on dit que c'est un évènement incertain ou impossible

Si $p(A) = 1$ alors l'évènement A est toujours réalisé : on dit que c'est un évènement certain.

<u>Exercices 1 :</u>

Une urne contient 10 boules, 6 boules rouges et 4 boules blanches.

1. On tire successivement 3 boules de l'urne en remettant à chaque fois la boule tirée avant de procéder à un nouveau tirage. A chaque tirage on note la couleur de la boule tirée.

a) Quelle est la probabilité de tirer 3 boules de même couleur ?
b) Quelle est la probabilité de tirer 2 boules rouges et une boule blanche ?

2. On change les principes de l'expérience. Cette fois on extrait successivement 3 boules de l'urne mais on ne remet pas la boule tirée avant de faire un autre tirage.

a) Quelle est la probabilité de tirer 3 boules de même couleur ?
b) Quelle est la probabilité de tirer 2 boules rouges et une boule blanche ?

3. On décide enfin de réaliser un tirage simultané de 3 boules de l'urne.

a) Quelle est la probabilité de tirer 3 boules de même couleur ?
b) Quelle est la probabilité de tirer 2 boules rouges et une boule blanche ?

Exercice 2 :

Dans une association de 20 membres dont 12 garçons et 8 filles, on désire choisir 7 personnes pour aller représenter l'association à une exposition théâtrale.

1. Quelle est la probabilité que l'équipe soit constituée de 3 filles et 4 garçons ?
2. Quelle est la probabilité que l'équipe soit constituée de 5 filles et 2 garçons ?
3. Quelle est la probabilité que l'équipe soit constituée uniquement que des filles ?
4. une fois l'équipe choisie, on annonce que la pièce comporte 4 rôles masculins et 3 rôles féminins. En admettant que telle a été la configuration de l'équipe, déterminer le nombre de distribution de rôles possibles.

Terminale A4
Chapitre 6
LES STATISTIQUES

Objectifs pédagogiques :

L'élève sera capable de :

- Déterminer les quartiles, les déciles, l'écart moyen d'une série statistique donnée
- Présenter une série statistique double par un tableau à double entrée
- Reconstituer les deux séries marginales
- Représenter le nuage de points
- Décider si ce nuage est justiciable d'un ajustement linéaire
- Effectuer éventuellement cet ajustement linéaire par une méthode graphique ou par celle de Mayer
- Déterminer les points moyens et donner une interprétation des résultats.

Documentation : HPM, CIAM 1ere et Te SE

Déroulement du cours :

1. **Exercice**

On donne la série statistique définie par le tableau suivant :

3	4	5	6	9	10
15	17	11	14	7	8
4	5	7	4	7	11
15	13	11	10	7	8
13	14	5	9	8	10
13	5	9	8	4	11
10	16	10	10	15	11
6	13	12	4	2	15
11	13	4	3	15	11
4	11	12	4	7	6

8	10	10	14	12	10
12	13	12	11	15	3
14	10	16	3	6	8
14	4	8	9	12	14
13	11	11	10	17	16
6	12	10	15	3	10
17	3	8	5	9	13
8	9	8	10	10	10
9	13	11	15	11	10
11	10	15	9	8	7

1ère Partie

1. Determiner le série statisque des notes que ce tableau définit.
2. Représenter cette série par un diagramme en bâtons.
3. Construire le diagramme cumulatif (croissant) de cette série.
4. Determiner le ou les modes.
5. Calculer la moyenne.
6. Calculer la variance et l' écart-type.

2ème Partie

Regrouper les notes dans les classes suivantes :

$[0\,;4[, [4\,;10[, [10\,;14[, et\ [14\,;20[$

1. Calculer les fréquences de chacune des classes.
2. Construire un histogramme de représentant cette série groupée.
3. Construire le polygone des effectifs.
4. Construire le diagramme des effectifs cumulés croissants et celui des effectifs cumulés décroissants.
5. Déterminer la classe modale.
6. Calculer le mode, la moyenne de cette série groupée.
7. Calculer la variance et l'écart-type.
8. Déterminer graphiquement la médiane.

3ème Partie

Reprendre le regroupement en classes proposé dans l'exercice 1.

1. Calculer les fréquences de chacune des classes.
2. Construire un histogramme de représentant cette série groupée.
3. Construire le polygone des effectifs.
4. Construire le diagramme des effectifs cumulés croissants et celui des effectifs cumulés décroissants.
5. Déterminer la classe modale.
6. Calculer le mode, la moyenne de cette série groupée.
7. Calculer la variance et l'écart-type.
8. Déterminer graphiquement la médiane.

4ème Partie

1. Comparer les moyennes obtenues dans les trois premières parties.
2. Comparer les écart-types obtenus dans les trois premières parties.
3. Commenter et comparer ces trois études d'un même caractère sur une même population.

2. Séries statistiques doubles

2.1. Exemple introductif

Dans une classe de terminale scientifique, on a relevé les poids en kg (x) et les tailles en m (y) des 10 garçons et on a obtenu les résultats suivants :

x	54	63	60	58	62	63	86	72	62	58
y	165	183	178	168	175	183	173	195	172	179

On parle de série statistique double lorsqu'on a deux caractères à valeurs dans IR^2. Dans ce cas les modalités sont des couples $(poids; tailles)$. Les éléments d'une telle série statistique sont notés $(x_i\ ;\ y_j\ ;\ n_{ij})$. L'ensemble de tous les points $M_{ij}(x_i\ ;\ y_j)$ est appelé nuage de points. n_{ij} est l'effectif du couple $(x_i\ ;\ y_j)$.

2.2. Séries marginales

On a :

$$X = \{54\,;58\,;60\,;62\,;63;\ 72\,;86\,\}$$
$$Y = \{165\,;168\,;172\,;173\,;175\,;179\,;183\,;195\}$$

On peut établir alors le tableau à double entrée :

	54	58	60	62	63	72	86
165							
168							
172							
173							
175							
179							
183							
195							

2.3. Nuage de points

a) Nuage de points pondérés (à partir de l'exemple précédent)
b) Nuage de points par tâche (à partir de l'exemple précédent)

Pour chacune des éries marginales, on définit la moyenne $\overline{x}$ de X et $\overline{y}$ de Y par :

$$\boldsymbol{\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} n_i \times x_i}$$
$$\boldsymbol{\overline{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} n_j \times y_j}$$

Où N est l'effectif total de la série statistique double. Le point $G(\overline{x}\ ;\ \overline{y})$ est appelé le point moyen.

3. Ajustement linéaire

La forme du nuage de points représentant une série statistique à deux caractères peut conduire à la recherche d'une relation entre x et y. Le but est de dégager une tendance pour faire des interpolations linéaires ou des prévisions.

On parle d'ajustement linéaire lorsqu'on peut trouver une droite qui passe le plus près possible de tous les points du nuage. On l'appelle droite d'ajustement ou droite de régression ou encore droite d'estimation.

3.1. Ajustement par la méthode de MAYER

a) Activité

Dans un concours, on examine les notes x_i(sur 100) et le nombres d'années de travail y_i de chaque candidat. On obtient le tableau suivant :

Notes	228	45	49	20	44	30	38	22	50	35	42	53
Nbre d'ans	4	7	8	1	6	3	5	2	9	6	7	10

- Partager cette série statistique en deux sous séries de même effectif
- Déterminer les points moyens G_1 et G_2 de ces nouvelles séries statistiques
- Trouver une équation de la droite (G_1G_2) appelée la droite de Mayer

b) Principe

Pour trouver un ajustement affine par la méthode de Mayer, on :
Partage le nuage en deux sous nuages de même effectif, de points moyens respectifs G_1 et G_2. On appelle droite de Mayer la droite (G_1G_2).