



# MATHivoire

# MATHivoire

# 2<sup>nde</sup> C

By TEHUA

FICHE DE TRAVAUX DIRIGES  
Toutes les Leçons



## **AVANT- PROPOS**

La collection « **MATH.IVOIRE** » est conçue par des professeurs de  
Mathématiques du lycée moderne d'Anyama.

Nos diverses expériences nous ont amenés à concevoir ce document dont la variété des  
exercices permet de développer toutes les notions au programme de l'enseignement des  
Mathématiques en Côte d'Ivoire.

Il est composé d'exercices d'application de cours et d'exercices de synthèse.

La perfection étant un objectif à atteindre, toute proposition d'amélioration sera  
favorablement accueillie.

### **Les auteurs**

# SOMMAIRE

	Pages
Chapitre I : VECTEURS ET POINTS DU PLAN.....	9
Chapitre II : ENSEMBLE DES NOMBRES REELS .....	3
Chapitre III : UTILISATIONS DES SYMETRIES ET TRANSLATION .....	21
Chapitre IV : GENERALITES SUR LESFONCTIONS .....	15
Chapitre V : DROITES ET PLANS DE L'ESPACE.....	23
Chapitre VI : FONCTIONS POLYNOMES ET FRACTIONS RATIONNELLES .....	25
Chapitre VII : ANGLES INSCRITS .....	29
Chapitre VIII : ANGLES ORIENTES ET TRIGONOMETRIE.....	37
Chapitre IX : STATISTIQUES .....	66
Chapitre X : PRODUIT SCALAIRE.....	41
Chapitre XI : EQUATIONS ET INEQUATIONS DANS $\mathbb{R}$ .....	34
Chapitre XII : HOMOTHETIES.....	51
Chapitre XIII : ETUDE DE FONCTIONS .....	47
Chapitre XIV : ROTATIONS.....	51
Chapitre XV: INEQUATIONS DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .....	59
Corrigés de certains exercices .....	69

**CHAPITRE I : VECTEURS ET POINTS DU PLAN**

**Exercices de fixations**

**Exercice 1**

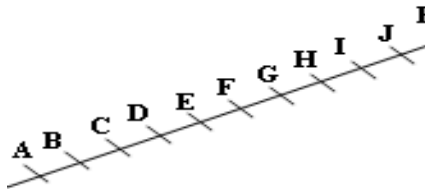
Réponds par Vrai (V) ou Faux (F).

N°	Propositions	Réponses
01	Si ABCD est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ .	
02	Si ABCD est un parallélogramme de centre I et O le milieu de $[AD]$ , alors $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IO}$ .	
03	Pour tous points O ; E et A , on a : $\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{EA}$ .	
04	Si $AB = CD$ alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ .	
05	Deux vecteurs colinéaires et de même norme sont égaux	
06	Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont deux vecteurs colinéaires de même sens alors le quadrilatère ABCD est un trapèze.	
07	Pour tous points A ; B ; C et D , on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$	
08	Si I est le milieu de $[AB]$ alors $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ .	

**1) Calculs vectoriel et relations de chasles**

**Exercice 2\***

Sur la droite ci-dessous, les graduations sont régulières.

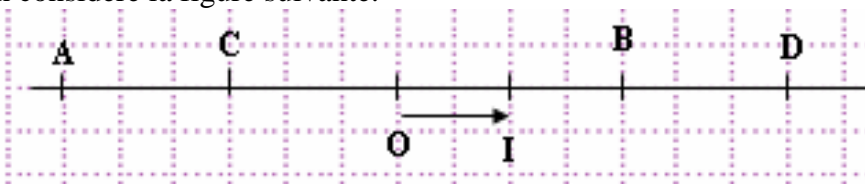


Recopier chaque égalité et la compléter par le nombre réel qui convient.

$\overrightarrow{BF} = \dots \overrightarrow{AB}$  ;  $\overrightarrow{GD} = \dots \overrightarrow{EC}$  ;  $\overrightarrow{HI} = \dots \overrightarrow{EA}$  ;  $\overrightarrow{KD} = \dots \overrightarrow{CH}$  ;  $\overrightarrow{EG} = \dots \overrightarrow{AG}$  ;  $\overrightarrow{FD} = \dots \overrightarrow{FA}$

**Exercice 3**

On considère la figure suivante.



1) Exprimer les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{CA}$ ,  $\overrightarrow{OD}$  et  $\overrightarrow{DB}$  en fonction du vecteur  $\overrightarrow{OI}$ .

2) Déterminer les nombres réels x, y et z tels que :

$\overrightarrow{BC} = x\overrightarrow{BD}$  ;  $\overrightarrow{CD} = y\overrightarrow{AC}$  ;  $\overrightarrow{DA} = z\overrightarrow{OB}$ .

**Exercice 4**

Soit A, B, C trois points du plan tels que  $\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$ .

Recopier chaque égalité et la compléter par le nombre réel qui convient.

$\overrightarrow{AC} = \dots \overrightarrow{BA}$  ;  $\overrightarrow{CA} = \dots \overrightarrow{AB}$  ;  $\overrightarrow{CA} = \dots \overrightarrow{BA}$  ;  $\overrightarrow{AB} = \dots \overrightarrow{AC}$  ;  $\overrightarrow{AC} = \dots \overrightarrow{BC}$  ;  $\overrightarrow{BC} = \dots \overrightarrow{AB}$

### Exercice 5

Simplifier au maximum l'écriture de chacune des sommes vectorielles suivantes.

$$\vec{a} = 7\vec{u} - 4\vec{u} + 3(\vec{u} + 3\vec{w}) - 5(2\vec{w} - \vec{u}) ; \quad \vec{b} = 4(2\vec{u} - \vec{u}) - 4(3\vec{u} - \vec{u}) + 3\vec{u}$$

$$\vec{c} = 2\vec{u} - 3(5\vec{u} - \vec{u}) + 4(\vec{w} + 2\vec{u}) ; \quad \vec{d} = \vec{u} + 2(3\vec{u} + \vec{w}) - 5(2\vec{u} + 3\vec{u}) ; \quad \vec{e} = 7\vec{u} - 4\vec{v} + 3(\vec{u} + 3\vec{w}) - 5(2\vec{w} - \vec{v})$$

### Exercice 6

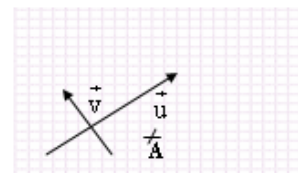
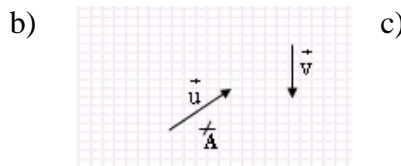
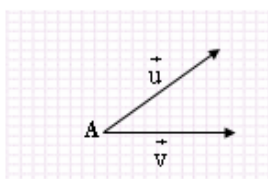
On donne l'expression suivante, dans laquelle A, B et C sont trois points distincts non alignés du plan.

$$\vec{u} = -\overrightarrow{AB} + 2(3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + 5(2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{CB} . \text{ Montrer que } \vec{u} = -14\overrightarrow{BC}$$

2) **Ecrire un vecteur comme combinaison linéaire de deux vecteurs non colinéaires ; construire un représentant d'une combinaison linéaire de vecteurs**

### Exercice 7

Construire, dans chaque cas, le représentant d'origine A du vecteur  $\vec{u} + \vec{v}$

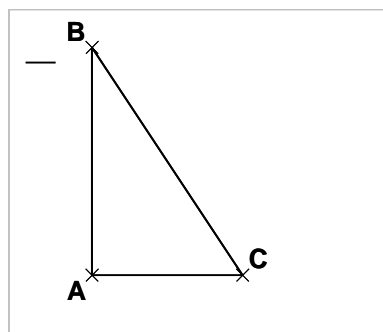


### Exercice 8

On donne le triangle rectangle suivant :

Construire les points E, F, M et P tels que :

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{CP} = -2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} .$$



### Exercice 9\*

A et B sont deux points du plan tel que  $AB = 27\text{cm}$  .

On pose  $\vec{u} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$  . Calculer  $\|\vec{u}\|$  .

### Exercice 10\*

ABC est un triangle, I le milieu de [AB] et  $AB = \sqrt{3}\text{ cm}$

1) Montrer que pour tout point M du plan,  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{IM}$  .

2) Dans chacun des cas suivants, Déterminer l'ensemble (E) des points vérifiant la relation donnée :

a)  $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB}$  ; b)  $\overrightarrow{CM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$  ; c)  $\|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}\| = 6$  .

### Exercice 11

ABC est un triangle. On appelle centre de gravité du triangle ABC, le point G du plan tel que

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$$

1) Montrer que pour tout point M du plan, on a  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$

2) Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que  $\|\vec{MA} + \vec{MA} + \vec{MC}\| = 12$

### Exercice 12

Soit ABC un triangle quelconque. Soit I, J et K des points tels que :  $\vec{BI} = \frac{3}{2}\vec{BC}$  ;  $\vec{CJ} = \frac{1}{3}\vec{AC}$  ;

$$\vec{AK} = \frac{2}{5}\vec{BA} .$$

1) Faire une figure.

2) Ecrire chacun des vecteurs  $\vec{KI}$  et  $\vec{KJ}$  comme une combinaison linéaire des vecteurs  $\vec{BA}$  et  $\vec{CB}$  .

### 3) Démontrer que des points sont alignés , deux droites sont parallèles en utilisant les vecteurs

### Exercice 13

Soit M, N et P trois points du plan tel que :  $\vec{MP} = -4\vec{MN}$  .

Exprimer le vecteur  $\vec{NM}$  en fonction  $\vec{MP}$  ; Le vecteur  $\vec{NM}$  en fonction de  $\vec{NP}$  et le vecteur  $\vec{PN}$  en fonction de  $\vec{PM}$  .

### Exercice 14

Soit ABC un triangle équilatéral tel que  $AB = AC = BC = 5\text{cm}$  . M, N et P trois points tels que :

$$\vec{BM} = \frac{2}{3}\vec{BA} ; \vec{BN} = \frac{2}{3}\vec{BC} \text{ et } \vec{AP} = \frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{3}{2}\vec{AC} .$$

1) Faire une figure puis placer les points M, N et P.

2) Démontrer que les droites  $(MN)$  et  $(AC)$  sont parallèles.

### Exercice 15

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A tel que :  $AB = 6\text{cm}$  et AH la hauteur issue de A ( $H \in BC$ )

1) Faire la figure.

2a) Calculer  $\|\vec{BC}\|$

b) Démontrer que  $\|\vec{AH}\| = 3\sqrt{2}$

3a) Construire le point M défini par  $\vec{HM} = \vec{AB} + \vec{AC}$

b) Démontrer que les points A, H et M sont alignés

c) En déduire  $\|\vec{HM}\|$

### Exercice 16\*

Soit le repère  $(O ; I ; J)$ .

On considère les points  $A(2 ; -3)$ ,  $B(6 ; -1)$ ,  $C(8 ; 0)$ ,  $D(7 ; 3)$ .

1. Vérifier que les points A, B et C sont-ils alignés.

2. Montrer que les droites  $(AB)$  et  $(ID)$  sont-elles parallèles.

**Exercice 17\***

Soit un triangle ABC.

On appelle I le milieu du segment [AC].

On considère les points R et S définis par :  $\overrightarrow{BR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{AS} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ .

- Démontrer que  $\overrightarrow{SR} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{SI} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$
- Démontrer que les points R, S, I sont alignés.

**Exercice 18**

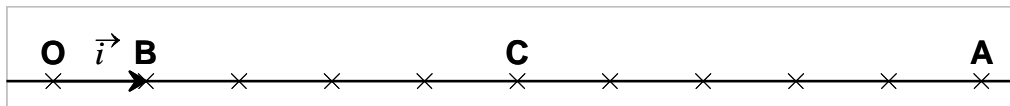
Soit un triangle ABC.

On considère les points M et N définis par :  $\overrightarrow{AM} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Démontrer que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

**4) Mesure algébrique : Lecture et Calculs****Exercice 19**

On donne la figure suivante :



Lire sur le graphique les mesures algébriques suivantes relativement au vecteur  $\vec{i}$  :  $\overline{BA}$  ;  $\overline{CA}$  ;  $\overline{CB}$  ;  $\overline{BB}$  et  $-\overline{AA}$ .

**Exercice 20**

Soit  $(AB)$  un axe tel que  $\overline{AB} = 1$ . Calculer les réels suivants si D et C sont deux points quelconque de  $(AB)$  tel que : a)  $u = \overline{AD} + \overline{AB} + \overline{CA} - \overline{CD}$  ; b)  $v = \overline{AD} + 2\overline{DC} + 2\overline{CA} + \overline{BD}$ .

**Exercice 21**

Sur une droite orientée par un vecteur directeur unitaire  $\vec{i}$ .

- Placer trois points A, B et C tel que  $\overline{AB} = -6$  ;  $\overline{AC} = 4$ .
- Calculer CB.

**5) Base du plan vectoriel, coordonnées, norme et représentation d'un vecteur dans une base****Exercice 22**

Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A tel que  $AB = \sqrt{2}$ .

Justifie que le couple de vecteurs  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$  est une base orthonormée du plan vectoriel.

**Exercice 23\***

Soit  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  deux vecteurs non colinéaires.

On donne :  $\vec{u} = 8\vec{i} + -5\vec{j} - 3(-4\vec{i} + 2\vec{j})$  et  $\vec{v} = 5\left(\vec{i} - \frac{1}{15}\vec{j}\right) - 6\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j}$

Déterminer les coordonnées des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  dans la base  $(\vec{i}; \vec{j})$ .

### Exercice 24\*

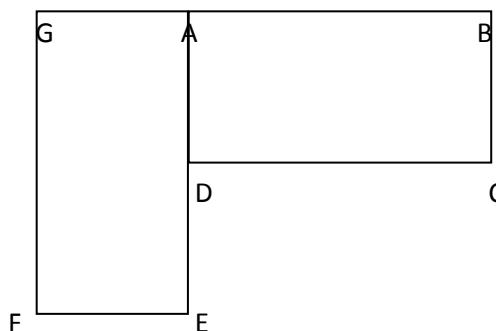
Le plan est muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on donne les vecteurs  $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$  et  $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$ .

- 1) Démontrer que  $(\vec{u}; \vec{v})$  est une base.
- 2) Déterminer les coordonnées des vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  dans la base  $(\vec{u}; \vec{v})$ .

### Exercice 25

L'unité de longueur est le centimètre (cm).

ABCD et AEFB sont deux rectangles comme l'indique la figure ci – contre.



On considère la base  $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$  du plan vectoriel.

1°) a) Montrer que le couple de coordonnées du vecteur

$\overrightarrow{AC}$  dans la base  $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$  est  $(1 ; -1)$ .

**On donne :**

$$AB = AE = 4$$

$$AG = AD = 2$$

b) Sachant que le vecteur  $\overrightarrow{AF}$  a pour coordonnées

$\left(-\frac{1}{2}; -2\right)$ , calculer  $\det(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AF})$  relativement à la base

$(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$  et en déduire que  $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AF})$  est une base de  $V$

2°) Détermine  $\|\overrightarrow{AC}\|$ .

### Exercice 26

Le plan est muni d'une base orthonormée  $(\vec{i}; \vec{j})$ . Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs tels que  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$  et

$$\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j}.$$

Calculer  $\|\vec{u}\|$  et  $\|\vec{v}\|$ .

### Exercice 25

Dans un repère orthonormé. On donne les points  $A(-1;4)$  ;  $B(-6;5)$  et  $C(3;2)$ .

- 1) faire une figure puis déterminer les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  ;  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{BC}$  (unité graphique 2cm)
- 2) Calculer AB ; AC et BC.

### Exercice 26

Dans une base du plan vectoriel, on donne  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$  ;  $\vec{v} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$  .

- 1) Montrer que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.
- 2) Montrer que  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$  ne sont pas colinéaires.
- 3) Calculer  $\det(-2\vec{u}; \vec{v} + \vec{w})$  puis justifier que le couple de vecteurs  $(-2\vec{u}; \vec{v} + \vec{w})$  est une base du plan vectoriel.

### Exercice 27

Soit  $(\vec{i}; \vec{j})$  une base du plan et  $\vec{u}(1;1)$  ;  $\vec{v}(1;-1)$  dans cette base.

- 1) Justifier que  $(\vec{u}; \vec{v})$  est une base du plan.
- 2) Exprimer chacun des vecteurs  $\vec{i}$  ;  $\vec{j}$  en fonction des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  .
- 3) Soit  $\vec{r}(7;5)$  dans la base  $(\vec{i}; \vec{j})$  Exprimer  $\vec{r}$  en fonction de  $\vec{u}$  .

### Exercice 28\*

On considère un triangle quelconque  $ABD$ . Soient  $I$  le milieu de  $[AB]$  et  $J$  le milieu de  $[AD]$ .

On se place dans le repère  $(A ; I ; J)$ .

1. Quelles sont les coordonnées des points  $A$ ,  $B$  et  $D$  ?
2. Calculer les coordonnées du vecteur  $\vec{AB}$  et  $\vec{AD}$  puis  $\vec{AB} + \vec{AD}$
3. En déduire les coordonnées du point  $C$ , tel que  $ABCD$  soit un parallélogramme.
4. Quelle serait la nature du quadrilatère  $ABCD$  ainsi construit si le triangle  $ABD$  était rectangle en  $A$  ?  
Rectangle isocèle en  $A$  ?

### Exercice 29\*

Dans un triangle  $ABC$  quelconque :

- Le point  $I$  est le milieu de  $[BC]$  ;
- Le point  $D$  vérifie :  $\vec{AD} = \frac{1}{4} \vec{AB}$
- $J$  est le point d'intersection de la droite  $(DI)$  et la parallèle à  $(AB)$  passant par  $C$  ;
- $K$  est le point d'intersection des droites  $(AC)$  et  $(DI)$ .

$\vec{u}$  est un vecteur du plan tel que :  $\vec{u} = \vec{AB} + 2\vec{AC}$

- 1a) Faire une figure
- b) Démontrer que :  $\vec{DI} = \vec{IJ}$
2. Démontrer que :  $KJ = 3KD$
3. Exprimer  $\vec{DI}$  en fonction de  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$
4. En déduire que les vecteurs  $\vec{KJ}$  et  $\vec{u}$  sont colinéaires

### Exercice 30

Soit ABC un triangle isocèle rectangle en A tel que  $BC = \sqrt{2}$ .

- 1) Justifie que le couple  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$  est une base orthonormée de  $\mathcal{G}$ .
- 2) On considère le repère du plan  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ . E et F sont deux points du plan tel que  $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AC}$ .
  - a) Construis le triangle ABC puis place les points E et F. On prendra  $AB = AC = 4\text{cm}$ .
  - b) Calcule la distance EF
  - c) Détermine les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{FA}$  et  $\overrightarrow{EC}$  puis montre que les droites  $(AF)$  et  $(EC)$  sont sécantes.
- 3) Soit  $H\left(0; \frac{1}{2}\right)$  dans le repère  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ . Place le point H puis détermine les coordonnées du centre de gravité G du triangle EFH.
- 4) Détermine les coordonnées du point M sachant que  $\overrightarrow{MH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FE}$ .

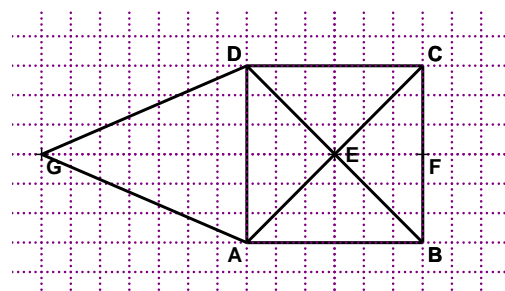
### SITUATION D'ÉVALUATION

#### Evaluation

Sur la figure ci-contre, on définit le repère  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$ .

Les élèves de la classe de 2<sup>nd</sup> C<sub>3</sub> découvrent la figure ci-contre sur leur tableau. Un élève affirme que les points G, E et F sont alignés. Pour vérifier cette affirmation, les élèves décident de répondre aux questions suivantes :

- 1) Détermine les coordonnées des points G, E et F dans le repère  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$ .
- 2) Démontre que les points G, E et F sont alignés.



**CHAPITRE II : ENSEMBLE DES NOMBRES REELS**

**Exercices de fixations**

**Exercice 1**

A l'aide d'une croix, coche la bonne case.

N°	Propositions	Vrai	Faux
01	Tout nombre irrationnel appartient à $\mathbb{N}$ .		
02	Un nombre irrationnel n'appartient pas à $\mathbb{Z}$ .		
03	Tout nombre irrationnel appartient à $\mathbb{Q}$ .		
04	Lorsqu'on multiplie membre à membre des inégalités de même sens, on obtient une inégalité de même sens.		
05	Lorsqu'on additionne membre à membre des inégalités de même sens, on obtient une inégalité de même sens.		
06	Lorsqu'on fait la différence membre à membre des inégalités de même sens, on obtient une inégalité de même sens.		
07	Si on ajoute un même nombre réel aux membres d'une inégalité, on obtient une inégalité de même sens.		
08	Si on retranche un même nombre réel aux membres d'une inégalité, on obtient une inégalité de sens contraire.		
09	Si on multiplie par un même nombre réel négatif les membres d'une inégalité, on obtient une inégalité de même sens		
10	Si on multiplie par un même nombre réel positif les membres d'une inégalité, on obtient une inégalité de sens contraire.		

**Exercice 2**

Détermine le plus petit ensemble possible ( $\mathbb{R}; \mathbb{Q}; \mathbb{Z}; \mathbb{N}$  ) où l'on peut ranger les nombres suivants :  $\frac{6}{3}$  ;

$$\frac{12}{-4} ; \frac{14}{5} ; \sqrt{2} ; -3\sqrt{5} ; \sqrt{196}$$

**1) Calcul dans  $\mathbb{R}$  .**

**Exercice 3\***

Simplifier les écritures des nombres suivants et préciser à quels ensembles ces nombres appartiennent..

$$A = \frac{\sqrt{5808}}{\sqrt{3675}} \quad B = \frac{(a-b)^2 - (a+b)^2}{2ab} \quad C = \frac{-2^3 \times 3}{(-3)^2 \times 2} \quad D = \left( \sqrt{\frac{2}{5}} + \sqrt{\frac{5}{2}} \right)^2 \quad E = \frac{\sqrt{3^2 + 4^2}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}$$

Remarque :  $a$  et  $b$  désignent des réels non nuls.

**Exercice 4**

1) Démontrer que les nombres suivants sont des nombres entiers naturels :

$$A = \frac{\sqrt{722}}{\sqrt{2}} ; B = \frac{(a+b) - (a-b)^2}{ab} ; C = \frac{3^{10}}{243} ; D = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - 2\sqrt{2}$$

**Exercice 5**

Simplifier au maximum,  $a, b, c$  et  $x$  étant des réels strictement positifs

$$1) \sqrt{25a^2} \times \sqrt{7c^2b} \quad 2) 2\sqrt{5a^2} \times 2\sqrt{5b^2} \quad 3) (x\sqrt{2})^3 \times \sqrt{2}x^3 \quad 4) (\sqrt{5}x)^2 (-21x^2)$$

### Exercice 6

Effectuer les calculs suivants en donnant le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

a)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$     b)  $2 + \frac{1}{3} \times \frac{-5}{7}$     c)  $\frac{-1}{2} + \frac{5}{4} - \frac{2}{3}$  ;    d)  $\frac{3}{\frac{-2}{5} + \frac{5}{3}}$  ;    e)  $-2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - 1\right)$     f)  $6\left(2 + \frac{5}{3}\right)\left(1 - \frac{7}{2}\right)$ .

g)  $\frac{2 + \frac{1}{5}}{7 - \frac{3}{5}} \div \frac{\frac{1}{5} + \frac{2}{3}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}$     h)  $\frac{3 + \sqrt{5}}{1 + \frac{1}{1 + \sqrt{5}}}$     i)  $\frac{(-3)^5 \times (-3)^7 \times (-3)^{-11}}{(-7)^{-2} \times (-7)^3}$     j)  $\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-2}{-12}\right)^3$

### Exercice 7

1) Ecrire A; B et C sans radical au dénominateur.

$$A = \frac{3}{\sqrt{3} + 2} ; \quad B = \frac{2\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3} - 1} ; \quad C = \frac{5 + (\sqrt{3} + \sqrt{2})}{\sqrt{27} - \sqrt{12}} .$$

2) Calculer les nombres ci-dessous:

$$-3^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \sqrt{5^2 - 4^2} ; \quad \frac{3\sqrt{5} + \sqrt{20}}{\sqrt{45}\left(2 - \frac{5}{6}\right)} .$$

*Les questions des exercices 8 ; 9 ; 10 ; 11 seront résolues sans calculatrice.*

### Exercice 8

Simplifier, les nombres suivants en les mettant sous la forme d'une fraction irréductible  $\frac{p}{q}$  ou  $p$  et  $q$

sont deux entiers relatifs n'étant pas sous la forme de puissances.

$$\frac{4^2 \times 2^3}{2^2} \cdot \frac{2^2 \times 3^5}{2^4 \times 3^2} \cdot \frac{(-1)^{10} \times 3^4}{3^6} \cdot \frac{7^2 \times (-2)^3}{-14}$$
$$\frac{3^2 \times 9^{-4} \times 6^2}{12^{-3} \times 2^4} \cdot \frac{6^2 \times 7^4}{49^2 \times 2^2 \times 3^3} \cdot \frac{2^3 \times (5^2 \times 7^3)^3 \times 5^{-2}}{16 \times 25 \times 7^{10}} .$$

**2) Ordre dans  $\mathbb{R}$  (Majorant, minorant, maximum, minimum, ranger des nombres réels, encadrer des nombres réels.**

### Exercice 9

1) Comparer :

a) 2,5 et 2,456    b)  $\frac{12}{13}$  et  $\frac{12}{17}$     c)  $\frac{25}{3}$  et  $\frac{26}{3}$     d)  $\frac{12}{17}$  et  $\left(\frac{12}{17}\right)^2$     e)  $\frac{9}{8}$  et  $\frac{7}{6}$

b) En déduire la comparaison des nombres suivants :

$$\frac{25}{3} ; \frac{12}{13} ; 2,5 ; \frac{12}{17} ; \frac{9}{8} ; \frac{26}{3} ; \frac{7}{6} ; 2,456 ; \left(\frac{12}{17}\right)^2$$

c) Comparer les nombres négatifs suivants sans utiliser une calculatrice.

$$-\frac{25}{3} ; -\frac{12}{13} ; -2,5 ; -\frac{12}{17} ; -\frac{9}{8} ; -\frac{26}{3} ; -\frac{7}{6} ; -2,456 ; -\left(\frac{12}{17}\right)^2$$

**Exercice 10**

1) Compare  $2\sqrt{5}$  et  $4$  ; Puis  $2\sqrt{3}$  et  $-3\sqrt{5}$  .

2) Etudie le signe de  $2-\sqrt{3}$  et de  $\sqrt{5}-3$  .

Déduis une comparaison des réels  $2-\sqrt{3}$  et  $\sqrt{5}-3$ .

**Exercice 11**

1) On veut comparer  $2\sqrt{3}-2$  et  $4-\sqrt{3}$  .

Calcule  $A = (2\sqrt{3}-2) - (4-\sqrt{3})$ .

Justifie que  $3\sqrt{3}-6$  est négatif.

Déduis de b) la comparaison de  $2\sqrt{3}-2$  et  $4-\sqrt{3}$  .

Compare  $5\sqrt{2}$  et  $7$  ; Puis  $-\sqrt{7}$  et  $-2\sqrt{2}$  .

Déduis de b) la comparaison de  $5\sqrt{2}-\sqrt{7}$  et  $7-2\sqrt{2}$  .

**Exercice 12**

On appelle nombre d'or le nombre  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

1) Montrer que : a)  $\varphi^2 = \varphi + 1$  ; b)  $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$  ; c)  $\varphi^3 = 2\varphi + 1$

2) On admet que :  $2 < \sqrt{5} < 3$  Démontrer que  $\frac{3}{2} < a < 2$

**Exercice 13\***

Soit  $x$  et  $y$  deux nombres réels tels que :  $-4,1 \leq x \leq -4$  et  $-0,9 \leq y \leq -0,8$

Donner un encadrement de chacun des nombres réels suivant

$x - y$ ;  $x + y$  ;  $x^2$  ;  $xy$  ;  $\frac{x}{y}$

**Exercice 14**

1. Soit  $5 < x < 6$  et  $2 < y < 4$  Encadrer  $-y - x$  ;  $\frac{x}{y}$  ;  $xy$  ;  $\frac{x}{x+y}$

2. Soit  $3 < x < 4$  et  $-7 < y < -5$  Encadrer  $x - y$  et  $\frac{x}{y} \cdot xy$  ;  $\frac{x+y}{y}$

**Exercice 15\***

Soit  $a$  et  $b$  deux réels, non nul, positifs

1. Montrer :  $ab + 1 - b - a = (b-1)(a-1)$

2. Comparer :

a)  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$  et  $2$     b)  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  et  $\frac{1}{a+b}$

c)  $\sqrt{a+b}$  et  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

d)  $2 - \sqrt{3}$  et  $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$

**Exercice 16**

$a$ ,  $b$  et  $c$  sont trois nombres réels.

Démontrer que :

1) Si  $0 < a < 1$  alors  $a < \sqrt{a}$

2) Si  $a > 1$  alors  $\sqrt{a} < a$

**Exercice 17**

Pour  $a \geq 0$  et  $b \geq 0$  comparer les nombres

$\sqrt{a+b}$  et  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

**Exercice 18**

1. Ranger les nombres suivants dans l'ordre croissant sans utiliser une calculatrice

$$\frac{28}{27}, \frac{25}{28}, \frac{27}{28}, \frac{28}{26}, \frac{28}{25}, \frac{26}{28}$$

2. On donne  $B = \left\{ \frac{28}{27}, \frac{25}{28}, \frac{27}{28}, \frac{28}{26}, \frac{28}{25}, \frac{26}{28} \right\}$

a) Donner s'il existe le maximum et le minimum de B.

b) Donner deux majorants et deux minorants de B.

**Exercice 19**

Réponds par vrai (V) ou par faux (F) à chacune des affirmations ci-dessous.

- 1) L'intervalle  $]-\infty; 4[$  est minoré par  $-\infty$
- 2) L'intervalle  $]5; 25[$  admet 25 pour maximum
- 3) L'intervalle  $[-3; 4]$  admet -3 pour minimum et 4 pour maximum.
- 4) L'ensemble des entiers naturels est minoré par -1 mais n'est pas majoré.
- 5) L'intervalle  $[0; +\infty[$  est minoré par 0.

**Exercice 20**

B est l'ensemble des nombres réels s'écrivant sous la forme :  $2 - \frac{5}{n+2}$  ou  $n \in \mathbb{N}$ .

1) 0 et  $\frac{11}{6}$  appartiennent-ils à B ? Justifier.

2) Montrer que  $-\frac{1}{2}$  est le minimum de B.

3) Montrer que 2 est un majorant de B.

**3) Opérations et valeurs absolues**

❖ *Calcul avec les valeurs absolues*

**Exercice 21**

Soit  $x$  et  $y$  des nombres réels. Coche la bonne réponse

N	Propositions	Vrai	Faux	0 7	$ xy  >  x  y $	Vrai	Faux
01	$ x  \geq 0$			0 8	$ x - y  =  x  -  y $		
02	$ x  = 0 \Leftrightarrow x = 0$			0 9	$ x  +  y  \geq  x + y $		
03	$ x  = \sqrt{x^2}$			1 0	$ -x + y  =  x - y $		
04	$ -x  = -\sqrt{x^2}$			1 1	$ x + y  =  x  +  y $		
05	$ x  =  -x $			1 2	$ x  =  y  \Leftrightarrow x = y$		
06	$ x^2  = x$			1 3	$d(x, y) =  -x + y $		

**Exercice 22\***

Ecrire sans barres de valeurs absolues, les nombres suivants :

$$x = |\sqrt{2} - 1| \quad y = |\sqrt{3} - 5| \quad ; \quad z = |\pi - 5| \quad ; \quad t = |7 - 2\pi| \quad ; \quad v = |3 - \pi| \quad ; \quad E = |2\sqrt{3} - 5| - |7 - 3\sqrt{3}| \quad ;$$

**Exercice 23**

On pose  $A = 7 - 4\sqrt{3}$  ; Détermine le signe de  $A$ .

Calcule  $A = (7 - 4\sqrt{3})^2 - (7 + 4\sqrt{3})^2$  .

On pose  $X = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} - \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$  .

Détermine le signe de  $X$  .

Démontrer que  $X^2 = 12$  .

En déduire une écriture plus simple de  $X$  .

**Exercice 24**

On donne  $A = 5 - 3\sqrt{3}$  et  $E = \left| \frac{2}{5 - 3\sqrt{3}} \right|$  .

Démontre que  $A$  est négatif et écrire  $E$  sans les barres de valeurs absolues

Simplifie l'écriture de  $E$  (écrire  $E$  sans le symbole de  $\sqrt{\quad}$  au dénominateur)

❖ *Equations et inéquations avec valeurs absolues*

**Exercice 25**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations et inéquations suivantes :

$$|x - 3| = 5 \quad ; \quad |x + 3| = 0 \quad ; \quad \sqrt{(x - 2)^2} = 1 \quad ; \quad |2 - x| \leq 3 \quad ; \quad |x - 1| < 1 - \sqrt{2} \quad ; \quad 3|4 - x| - 9 = 3.$$

**Exercice 26**

1. Dans chaque cas, caractériser à l'aide d'intervalles, l'ensemble des réels  $x$  satisfaisant à la condition indiquée :

a)  $|2 - x| < 1$  ; b)  $\left| x + \frac{3}{5} \right| \leq \frac{1}{2}$  ; c)  $-3|4 - x| - 9 > 3$ .

2. Dans chaque cas, caractériser à l'aide de la notation valeur absolue, l'ensemble des réels  $x$  satisfaisant à la condition indiquée :

a)  $x \in \left] -1; \frac{3}{2} \right[$  ; b)  $x \in \left[ -\frac{3}{4}; -\frac{2}{3} \right]$

**Exercice 27**

Soit  $x$  un nombre réel tel que  $|x - 2| \leq 1$  .

1) Montre que  $|x + 2| \leq 5$  .

2) En déduis que  $|x^2 - 4| \leq 5$  .

**Exercice 28**

Résous graphiquement dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

$$|x - 3| = 5 \quad ; \quad |x + 2| = 1 \quad ; \quad |x + 3| = 0.$$

Résous graphiquement dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

$$|x - 3| \leq 5 \quad ; \quad |x + 2| \leq 1 \quad ; \quad |x + 3| \leq 0.$$

**4) Ecriture scientifique d'un nombre réel approximations décimales****Exercice 29\***

Donner l'écriture scientifique de chacun des nombres suivants.

a) 24,5    b) 3600    c) 0,0078    d) - 658    ,    e) 0,000085    f) -7005000.

**Exercice 30**

Sachant que  $a = 0,0012$  ;  $b = 0,0005$  ;  $c = 0,006$  ;  $d = 0,003$  et  $a = 0,000001$  et

$R = \frac{a^2 \times b^2 \times d^2}{c^4 \times e^3}$  . Ecrire  $R$  sous la forme d'une écriture scientifique.

**Exercice 31\***

Effectuer les approximations demandées

	Unité par défaut	Au dixième par excès	au centième le plus proche	Au dixième le plus proche	au millième par excès
1,23456					
475 :25					
0,553 :0,03					
-2,3456					
10000 :120					
143 :7					
12345 :1000					
-4,13579					

**Exercice 32**

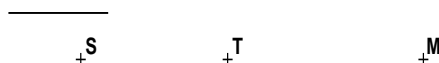
- 1) Donner la valeur approchée à l'unité près par défaut de 128,56871.
- 2) Quelle est la valeur approchée à l'unité près par excès de 18653 divisé par 2.
- 3) Arrondir au centième le plus proche : 25,9478 ; -12,4557 ; -8,1432.
- 4) Calculer 143 :7 au centième le plus proche.

**Exercice 33**

- 1) Soit  $a$  et  $b$  deux nombres réels définis par  $a = 14,206$  et  $b = - 0,042$   
Exprimer  $a$  et  $b$  en notation scientifique.
- 2) Donner une valeur approchée de  $x$  en précisant l'incertitude sachant que  $5,13 < x < 5,15$
- 3) Traduire par un encadrement l'information  $3,14 \approx 22/7$  à  $10^{-2}$  près.

**SITUATION D'EVALUATION**

Un sportif parcourt par jour, 4 km à pied pour garder la forme. Il passe son congé annuel sur une plage disposant d'un supermarché et d'une salle de sport. La distance entre la salle de sport et le supermarché est de 1,5 km. L'homme décide de construire un coin de repos sur la ligne droite entre le supermarché et la salle de sport comme l'indique la figure ci-dessous.



A : désigne la salle de sport, son abscisse est 0  
 B : désigne le coin de repos, son abscisse est  $x$   
 C : désigne le supermarché, son abscisse est 1,5  
 L'unité de longueur est le km.

Chaque jour, pour ses courses, il va deux fois à la salle de sport et une fois au supermarché. Il te sollicite pour l'aider à trouver la position de sa tente afin de parcourir 4km par jour pour ses courses.

- 1) Justifie que la distance  $d$  parcourue par jour par cet homme pour ses courses en fonction de  $x$  est  $d = 4|x| + 2|x - 1,5|$  .
- 2) Démontre que pour tout  $x$  élément de  $]0;1,5[$  , on a :  $d = 2x + 3$  .
- 3) Détermine en km, la distance  $L$  de la salle de sport au coin de repos pour que la distance parcourue chaque jour soit 4 km.

## CHAPITRE III : UTILISATION DES SYMETRIES ET TRANSLATIONS

### Exercice de fixation

#### Exercice 1

Réponds par vrai ou par Faux

N°	Propositions	Réponses
01	Une droite et son image par une translation de vecteur non nul sont perpendiculaires	
02	Deux segments symétriques ont la même longueur	
03	L'image d'un cercle par une symétrie orthogonale est un cercle de même rayon	
04	La symétrie orthogonale ne conserve pas l'orthogonalité et le parallélisme des droites	
05	La symétrie orthogonale transforme un repère du plan en un autre repère du plan	

### Exercices d'application

#### Exercice 2

On donne un cercle  $(C)$  de centre  $O$ , une droite  $(D)$  sécante à  $(C)$  et un point  $I$  intérieur à  $(C)$ .  
Construire un point  $A$  de  $(C)$  et un point  $B$  de  $(D)$  tels que  $I$  soit le milieu de  $[AB]$ .

#### Exercice 3

On donne un cercle  $(C)$  de centre  $O$ , un point  $A$  intérieur à  $(C)$  et un point  $B$  extérieur à  $(C)$ .  
Construire les points  $C$  et  $D$  appartenant à  $(C)$  tels que  $ACBD$  soit un parallélogramme.

#### Exercice 4\*

On donne un cercle  $(C_1)$  de centre  $O_1$  et un cercle  $(C_2)$  de centre  $O_2$ . Un segment  $[AB]$  est tel que  $A \in (C_1)$

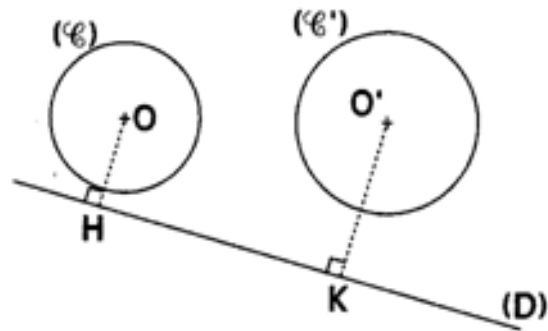
et  $B \in (C_2)$  construire un point  $M$  de  $(C_1)$  et un  $N$  de  $(C_2)$  pour que le quadrilatère  $ABNM$  soit un parallélogramme.

#### Exercice 5

$(C)$  et  $(C')$  sont deux cercles de centres respectifs  $O$  et  $O'$ .  $(D)$  est une droite. Les points  $H$  et  $K$  sont respectivement les projetés orthogonaux des points  $O$  et  $O'$  sur la droite  $(D)$ .

Construire une droite  $(D')$  telle que :

- $(D')$  est parallèle à  $(D)$  ;
- $(D')$  coupe  $(C)$  aux points  $A$  et  $B$  ;
- $(D')$  coupe  $(C')$  aux points  $A'$  et  $B'$  ;
- $AB = A'B'$ .



**NB :** Utiliser la translation de vecteur  $\overrightarrow{HK}$ .

#### Exercice 6

$A$  et  $B$  sont deux points distincts du plan.  $(C)$  est le cercle de diamètre  $[AB]$ ,  $O$  est le centre de  $(C)$  et  $M$  un point de  $(C)$  distinct de  $A$  et  $B$ . On désigne par  $A'$ ,  $B'$  et  $M'$  les images respectives de  $A$ ,  $B$  et  $M$  par la translation de vecteur  $\overrightarrow{OM}$ .

1) Faire une figure

2) Démontrer que :

- $M$  appartient à  $(A'B')$  ;
- $M$  est le milieu de  $[A'B']$  ;
- $A'M'B'$  est un triangle rectangle.

3) que représente  $M$  pour le triangle  $A'M'B'$  ?

### Exercice 7

ABCD est un parallélogramme de centre O. une droite  $(T)$  qui passe par A coupe  $(BC)$  en E. La parallèle  $(T')$  à  $(T)$  contenant C coupe  $(AD)$  en F. Notons  $S_O$  la symétrie centrale de centre O.

- 1) Faire une figure.
- 2) Démontrer que  $(T')$  est l'image de  $(T)$  par  $S_O$ .
- 3) Quelle est l'image de  $(BC)$  par  $S_O$  ? Justifier.
- 4) Démontrer que F est l'image de E par  $S_O$ .
- 5) En déduire que BEDF est un parallélogramme.

### Exercice 8\*

Soit  $(D)$  une droite du plan. M un point de  $(D)$  et A un point n'appartenant pas à  $(D)$ .

- 1) Construire le point N tel que A soit le milieu de  $[MN]$ .
- 2) Déterminer et construire l'ensemble des points N lorsque M décrit  $(D)$ .

### Exercice 9\*

Soit  $(C)$  un cercle de centre O. A et B sont deux points distincts du plan n'appartenant pas à  $(C)$  et N un point de  $(C)$ .

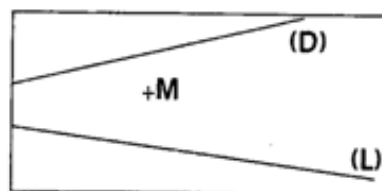
- 1) Construire le point M du plan tel que ABMN soit un parallélogramme.
- 2) Déterminer et construire le lieu géométrique du point M lorsque N décrit le cercle  $(C)$ .

## SITUATION D'ÉVALUATION

### Evaluation 1

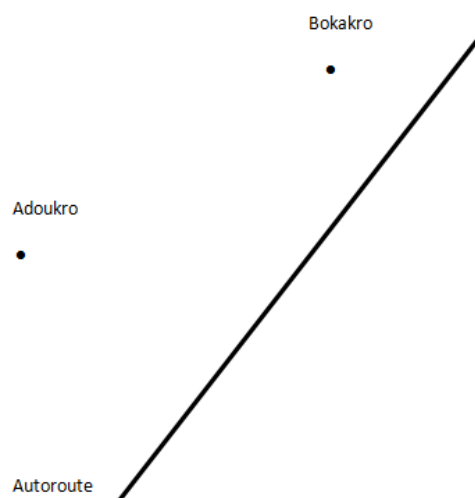
Kouko faisant ses exercices de mathématiques avait tracé sur sa feuille deux droites  $(D)$  et  $(L)$  sécantes en un point P et marqué un point M. Il n'avait pas encore tracé la droite  $(MP)$  lorsque son petit frère par inattention a coupé une partie de sa feuille enlevant le point P (Voir figure ci-contre).

Trouve une méthode de construction de la droite  $(MP)$  pour aider Kouko



### Evaluation 2

Deux villages voisins Adoukro et Bonikro sont situés du même côté d'une autoroute rectiligne (voir schéma ci-contre). Les mutuelles de développement des deux villages ont décidé de construire une gare routière en bordure de l'autoroute de sorte que le trajet Adoukro – gare – Bonikro soit le plus court possible suivant un trajet rectiligne. Construis l'emplacement de la gare représenté par le point G



**CHAPITRE IV : GENERALITES SUR LES FONCTIONS**

**Exercice de fixation**

**Exercice 1**

Réponds par Vrai (V) ou par Faux(F).

<b>1</b>	On appelle fonction définie de B vers A, toute relation de B vers A tel qu'à tout élément de A on associe 1 ou 0 élément de B.	Reponses	
	h est une fonction tel que $h(4) = -1$ . Alors on dit que :	<b>2</b>	4 est un antécédent de -1 par h .
		<b>3</b>	4 est l'image de -1 par h .
		<b>4</b>	-1 a pour antécédent 4 par h .
	On pose $g(x) = \frac{x+1}{ x-2 -1}$ . Alors on a :	<b>5</b>	4 n'appartient pas à $D_h$
		<b>6</b>	$\frac{-1}{2}$ est l'image de -3 par g .
		<b>7</b>	0 est un antécédent de 1 par g .
		<b>8</b>	1 n'a pas d'image par g .

**Exercice 2**

Choisis la bonne réponse. (*Format de réponse : 1 - a* par exemple)

N°	OPERATIONS	PROPOSITIONS DE REPONSES	CHOIX DE L'ELEVE
<b>1</b>	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Soit la fonction $x \mapsto \frac{1+\sqrt{x}}{1- x-2 }$ . Les contraintes sur la variable x de la fonction f est :	a) $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 0$ et $x-2 \neq 0$ et $1+ x-2  \geq 0$	
		b) $x \in D_f \Leftrightarrow 1+\sqrt{x} \geq 0$ et $x-2 \geq 0$ et $1+ x-2  \neq 0$	
		c) $x \in D_f \Leftrightarrow x \geq 0$ et $1+ x-2  \neq 0$	
<b>2</b>	$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Soit la fonction $x \mapsto \frac{x}{x+3} + \sqrt{x-1}$ . L'ensemble de définition de la fonction g est :	a) $D_g = [-3; 1[ \cup ]1; +\infty[$	
		b) $D_g = [-3; +\infty[$	
		c) $D_g = \mathbb{R} - \{-3\}$	
<b>3</b>	$h: [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ Soit la fonction $x \mapsto \frac{\sqrt{1+ x }}{1+x^2}$ . L'ensemble de définition de la fonction h est :	a) $D_h = \mathbb{R}$	
		b) $D_h = [0; +\infty[$	
		c) $D_h = \mathbb{R} - \{-1\}$	

**1) Ensemble de définition d'une fonction**

**Exercice 3\***

Donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

1.  $f(x) = \frac{1}{x+3}$  ;      2.  $g(x) = 2x^2 - 3x + 1$  ;      3.  $k(x) = \frac{3}{x} - 4x^2 + 2x - 1$

#### Exercice 4

Donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{-x}{7x+21} \quad ; \quad x \mapsto \frac{2}{x} - \frac{x}{3} \quad ; \quad x \mapsto \frac{2x-1}{x^2-9} \quad ; \quad x \mapsto \frac{x^2+x}{x^2+2}$$

#### Exercice 5

Donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad g : [0;3] \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sqrt{5-x} \quad ; \quad x \mapsto x^2 - x \quad ; \quad x \mapsto \frac{3x-1}{|x-3|-8}$$

$$A = \left\{ 4; -3; \frac{3}{2}; 1; -5; \sqrt{3}; -2; \frac{1}{2} \right\} \quad \text{et} \quad k : A \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x+2}{1-|x|}$$

#### Exercice 6\*

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions numériques suivantes sous forme d'intervalles ou de réunion d'intervalles.

1.  $f(x) = \sqrt{(x-2)^2}$  ; 2.  $f(x) = (\sqrt{x-2})^2$  ; 3.  $f(x) = \sqrt{1-x} \times \sqrt{1+x}$

4.  $f(x) = \sqrt{2-6x} - \sqrt{x+5}$     5.  $f(x) = \frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{5-x}}$  .

#### 2) Image, antécédent d'un réel par une fonction

#### Exercice 7

$f$  et  $g$  sont deux fonctions

1. Traduire chacune des phrases suivantes à l'aide d'égalités :

a) L'image de  $-2$  par la fonction  $f$  est 3.

b) L'antécédent de  $\sqrt{2}$  par la fonction  $g$  est -1

2a) On sait que  $f(-1) = 1$ . traduire cette égalité par une phrase contenant le mot « image »

b) On sait que  $g(1) = -2$ . Traduire cette égalité par une phrase contenant le mot « antécédent »

#### Exercice 8

On considère la fonction :  $f : \left\{ -2; 0; \frac{1}{2}; 8; 15 \right\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sqrt{5-2x}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de  $f$  .

2) Calculer si possible les images de :  $\frac{1}{2}$  ; -2 ; 8 ; 0

3) Déterminer l'antécédent de 3 par  $f$  .

### Exercice 9

Soit la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = -3x + 1$

- 1) l'image directe de  $[-3; 4]$ .
- 2) l'image réciproque de  $[-2; 7]$ .

### Exercice 10

Soit trois fonctions  $f$  ;  $g$  et  $h$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{-2x+3}{5}$  ;  $g(x) = \frac{x+1}{x(x-2)}$  et

$$h(x) = \sqrt{3x-6} .$$

Calculer si possible : l'image de 4 par  $f$  ; l'image de 1 par  $g$  et l'image de 5 par  $h$  .

Trouve dans chaque cas, la valeur de  $x$  telle  $f(x) = 3$  et  $h(x) = 3$  .

### 3) Fonction égales, coïncidence de deux fonctions sur un ensemble

#### Exercice 11\*

On donne  $f(x) = \frac{x+2}{x^2-9}$  et  $g(x) = \frac{2}{x-3} + \frac{5}{x+3}$

- a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$  et  $g$
- b) Déterminer le plus grand des ensembles sur lequel  $f$  et  $g$  coïncident

#### Exercice 12

Dans chacun des cas suivants, dire si les fonctions  $f$  et  $g$  sont égales sur  $\mathbb{R}$  ou non.

a)  $f(x) = \sqrt{x^2}$  et  $g(x) = \sqrt{-x}$     b)  $f(x) = x$  et  $g(x) = \frac{x^3+x}{x^2+1}$

#### Exercice 13

Dans chacun des cas suivants déterminer les ensembles de définition  $D_f$ ;  $D_g$  de  $f$  et  $g$  et déterminer l'ensemble  $K$  sur lequel  $f$  et  $g$  coïncident.

a)  $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$  et  $g(x) = x-2$

b)  $f(x) = |x|$  et  $g(x) = \frac{x^3}{|x|}$  ;    c)  $f(x) = \frac{2}{x^2-1}$  et  $g(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$  .

### 5) Maximum, Minimum d'une fonction, variations de fonctions

#### Exercice 14

On donne  $f(x) = 4 - (x-1)^2$  .

Démontrer que la fonction  $f$  présente un maximum 4 atteint en 1.

#### Exercice 15

On considère la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = -2 + 3\sqrt{x+1}$

- 1) Détermine l'ensemble de définition  $D_f$  de la fonction  $f$  .

2) Démontre que la fonction  $f$  présente un minimum et précise le point en lequel il est atteint.

**Exercice 16**

$f$  On considère la fonction  $g$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par  $g(x) = |x - 5| + 2$ .

Démontre que 2 est un minimum de  $g$  et préciser le point en lequel il est atteint.

**Exercice 17\***

Une fonction  $f$  admet le tableau de variation suivant :

$x$	-8	0	5	8
$f(x)$	5	1	6	0

1) Recopier et compléter les phrases suivantes :

- a) la fonction  $f$  est définie sur.....
- b) la fonction  $f$  est croissant sur..... et décroissante sur .....
- c) Le minimum de  $f$  sur  $[-8 ; 8]$  est..... Il est atteint pour  $x = \dots$  ;
- d) Le maximum de  $f$  sur  $[-8 ; 8]$  est..... Il est atteint pour  $x = \dots$  ;

2) En déduire un encadrement de  $f(x)$  lorsque  $-8 \leq x \leq 8$ .

3) A l'aide des variations de  $f$ , comparer :

- a)  $f(-5)$  et  $f(-3)$     b)  $f(0)$  et  $f(2)$     c)  $f(5)$  et  $f(6)$     d)  $f(1)$  et  $f(4)$

**Exercice 18**

Soit la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ .

Détermine l'ensemble de définition  $D_f$  de la fonction  $f$ .

Vérifie que si  $u \in D_f$  et  $v \in D_f$  alors  $f(u) - f(v) = \frac{-2(u-v)}{(u-1)(v-1)}$ .

En déduis que  $f$  est strictement décroissante sur  $]-\infty; 1[$  et sur  $]1; +\infty[$ .

Dresse le tableau de variation de variation de  $f$ .

**6) Etude graphique d'une fonction**

**Exercice 19**

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Soit  $x \mapsto \frac{2}{|x-2|-3}$ .

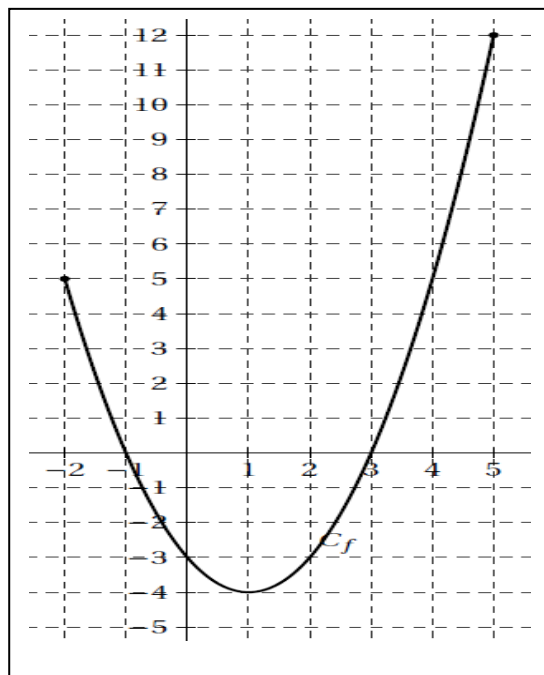
a) Détermine l'ensemble de définition  $D_f$  de la fonction  $f$ .

b) Détermine les valeurs des réels  $a$  et  $b$  sachant que  $A(a+2; -2)$  et  $B(2; b-1)$  sont des points de la courbe de la fonction  $f$ .

### Exercice 20\*

La courbe suivante représente une fonction  $f$ .

1. Sur quel intervalle la fonction  $f$  est-elle définie ?
2. Déterminer le maximum et le minimum de  $f$  sur  $D_f$ .
- 3a) Quelle est l'image par  $f$  de 0 ?
- b) Quelles sont les éventuelles antécédents de  $-3$  et  $-5$ .
3. Résoudre graphiquement les équations  $f(x) = 0$  et  $f(x) = 2$
4. Résoudre graphiquement l'inéquation :  $f(x) \geq -3$
5. Déterminer le signe de  $f$  sur  $[0;5]$ .
6. Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $D_f$ .



### Exercice 21

La courbe ci-dessous est celle d'une fonction  $f$ .

Par lecture graphique :

- A-a) Donner l'ensemble de définition de  $f$ .
- b) Donner l'image de :  $-1$  ;  $0$  ;  $1,5$  ;  $-2$  et  $2,5$ .

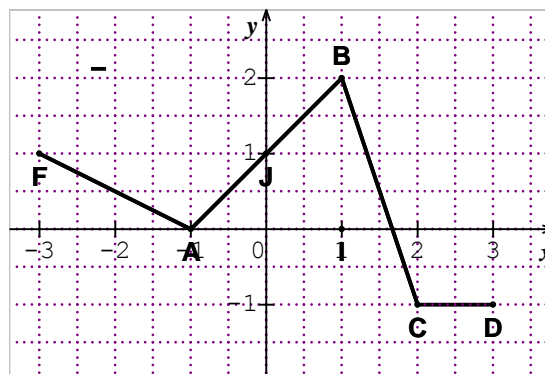
- c) Donner l'image directe de  $[-1;0]$  et l'image réciproque de  $[0;1]$ .

- d) Donner l'antécédent de  $-1$ .
- B-a) Donner le maximum et le minimum de  $f$  sur  $[-3;3]$ .

- b) Etudier le sens de variation de  $f$  puis dresser son tableau de variation

C- Résoudre graphiquement :

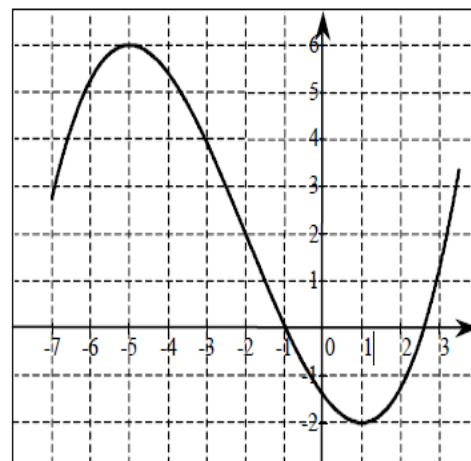
- a)  $x \in D_f ; f(x) = -1$ .
- b)  $x \in D_f ; f(x) < 1$ .



### Exercice 22

- 1) On donne la représentation graphique ( $C_f$ ) ci-dessous d'une  $f$  fonction définie sur  $[-7 ; 3,5]$
- a) Déterminer le minimum et le maximum de  $f$  sur  $[-7 ; 3,5]$  ainsi que les valeurs pour lesquels ils sont atteints
- b) Déterminer graphiquement l'image directe par  $f$  de l'intervalle  $[-5 ; 1]$ .
- c) Déterminer graphiquement l'image réciproque

par  $f$  de l'intervalle  $[-3 ; 6]$

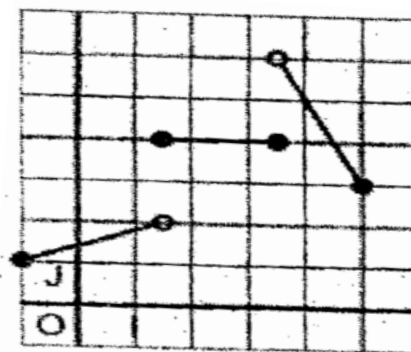


- 2) Quel est le sens de variations de  $f$  sur les intervalles  $[-7 ; -5]$  ;  $[-5 ; 1]$  et  $[1 ; 3,5]$ .
- 3) Etablir le tableau de variation de  $f$  sur l'intervalle  $[-7 ; 3,5]$ .
- 4) Comparer  $f(-3)$  et  $f(-2)$  puis  $f(1)$  et  $f(2)$ .

### Exercice 23

( $C_f$ ) est la courbe représentative d'une fonction  $f$ .

- 1) Déterminer  $D_f$ , l'ensemble de définition de  $f$ .
- 2) Donner le maximum et le minimum de  $f$  sur  $D_f$  et dire en quels points ils sont atteints.
- 3) Déterminer l'image directe de  $[-2;1]$  et l'image réciproque de  $[-1;3]$ .
- 4) Déterminer l'image de - 1 et de 2,0525 puis les antécédents de 3 et de 6.



## SITUATION D'ÉVALUATION

### Évaluation

Le graphique ci contre représente la durée moyenne d'attente (en minutes) des clients le samedi de 9 heures à 20 heures devant les distributeurs automatiques d'une banque.

La journée représentée est le samedi. On appelle  $f$  la fonction qui à chaque heure associe la durée d'attente. Un élève de seconde est envoyé par son père un samedi pour faire un retrait dans ce guichet automatique. Il ne veut pas durer devant le guichet et décide donc d'étudier la fonction.

- 1-a) Détermine le temps d'attente à 14h00 ; à 10h00 ; à 18h
- b) Détermine l'image de 10 par  $f$  .
- c) Donne la valeur de  $f(18)$  .
- 2-a) Détermine les heures auxquelles la durée d'attente est de 5 minutes
- b) Détermine les antécédents de 6 par  $f$  .
- 3-a) Détermine l'image directe de l'intervalle  $[13;15]$  .
- b) Détermine l'image réciproque chacun des intervalles  $[2;4]$  et  $[4;6]$  .
- 4) Détermine le sens de variation de  $f$  .
- 5) Dresse le tableau de variation de  $f$  .
- 6) Détermine l'heure à laquelle le temps d'attente est minimal aux caisses



**CHAPITRE V: DROITES ET PLANS DE L'ESPACE**

**Exercice de fixation**

**Exercice 1**

1) Soit la phrase suivante : « **Si deux plans sont parallèles, tout plan sécant à l'un est parallèle à l'autre et les droites d'intersection sont sécantes** »

C'est une propriété mal énoncée à cause de deux mots qui ne sont pas à leurs places dans la phrase. Identifie –les en les soulignant puis énonce correctement cette propriété.

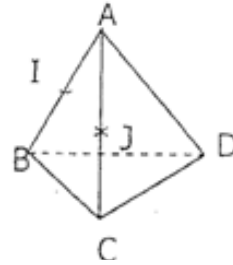
2) Complete avec les mots qui manquent dans la propriété suivante : « **Deux plans sont parallèles si et seulement si l'un contient deux droites..... à l'autre et ..... entres elles** ».

**Exercice 2**

On considère le tétraèdre ABCD.  $I \in [AB]$  et  $J \in [AC]$ .

Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

- a- Les droites  $(IJ)$  et  $(BC)$  sont coplanaires.
- b- Les droites  $(DI)$  et  $(CJ)$  sont sécantes.
- c- L'intersection des plans  $(BJI)$  et  $(BJI)$  est le point B.



**Exercice 3**

On considère le cube ABCDEFGH.

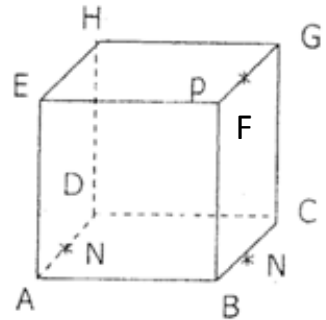
M, N et P sont les milieux respectifs des arêtes  $[AB]$ ,  $[BC]$  et  $[FG]$ .

1) Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

- a) Les droites  $(EH)$  et  $(BC)$  sont coplanaires
- b) Les droites  $(PF)$  et  $(AF)$  sont perpendiculaires ;
- c) Les droites  $(HF)$  et  $(BD)$  sont coplanaires ;
- d) La droite  $(EA)$  et le plan  $(BFH)$  sont parallèles.
- e) Les plans  $(MBN)$  et  $(EDH)$  sont parallèles.
- f) Toute droite parallèle aux plans  $(CGH)$  et  $(ABD)$  est parallèle à  $(EF)$ .

2) Complète l'affirmation suivante :

L'intersection de la droite  $(HD)$  et le plan  $(MBN)$  est.....



**1) Droites coplanaires ; Droites non coplanaires ; Plan parallèles ; intersection de deux plans**

**Exercice 4**

$(P)$  Est un plan et B un point n'appartenant pas à  $(P)$ . Construire une droite  $(D)$  qui passe par B et qui coupe  $(P)$ .

**Exercice 5**

$(P)$  et  $(P')$  sont deux plans sécants suivant la droite  $(\Delta)$ . Construire une droite  $(D)$  contenue dans  $(P)$  et parallèle à  $(P')$ .

**Exercice 6**

ABCD A'B'C'D' est un cube. I, J, I' et J' sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [CD], [A'B'] et [C'D']. K est le point d'intersection des droites (AB') et (A'B). Le cube est posé sur sa face DCC'D'. (Faire une figure).

- 1) Démontrer que les plans (CDD') et (ABB') sont parallèles.
- 2-a) Démontrer que les plans (ABB') et (AB'C') sont sécants.
  - b) Démontrer que les plans (ACB') et (A'D'D) sont sécants.
- 3) Démontrer que la droite (CC') est parallèle au plan (ABB').
- 4) Démontrer que la droite (JK) est sécante au plan (A'B'C').
- 5-a) Démontrer que les droites (AB') et (JK) sont sécantes.
  - b) Quelle est la position relative des droites (AB') et (BC') ? justifier votre réponse.

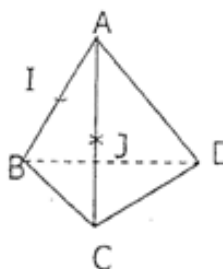
**Exercice 7**

I et J sont les milieux respectifs des arêtes [EH] et [EF] du parallélépipède rectangle ABCDEFGH. Les droites (AI) et (DH) se coupent en M. Les droites (AJ) et (BF) se coupent en N. Démontrer que les droites (IJ) et (MN) sont parallèles.

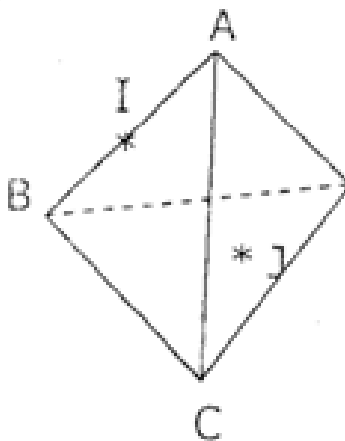
**Exercice 8**

Dans chacun des cas suivants, construire l'intersection de la droite (IJ) avec le plan (BCD).

1-

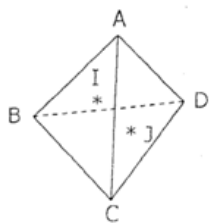


2)



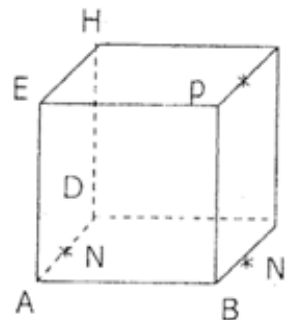
$I \in [AB]$  et  
 $J \in (ADC)$

3)



$I \in [ABC]$   
 $J \in [ADC]$

4)



## SITUATION D'ÉVALUATION

Lors d'une sortie d'étude, les élèves d'une classe de seconde C observent une case en forme pyramidale à base carrée. Le propriétaire a soutenu la case avec deux planches  $(AI)$  et  $(DJ)$  comme l'indique la figure ci-dessous. (I et J sont les milieux respectifs des cotés  $[EB]$  et  $(EC)$ ).

Koffi, un élève de la classe affirme que les points A ; D ; I et J sont tous situés dans un même plan et que les plans  $(AEB)$  et  $(DEC)$  sont sécantes. Les camarades revenus en classe décident de vérifier les affirmations de leur camarade.

Démontre que les points A ; D ; I ; J sont coplanaires

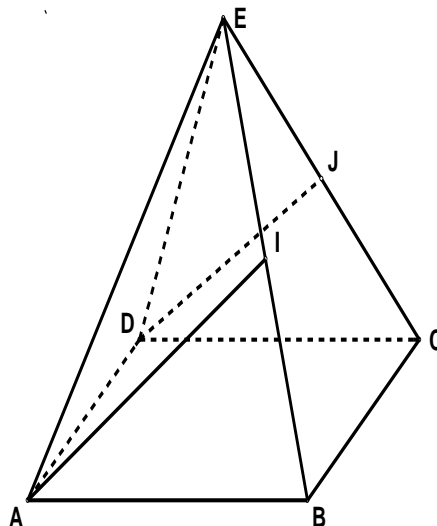
Démontre que les droites  $(AI)$  et  $(DJ)$  sont sécantes. On notera M le point d'intersection des droites  $(AI)$  et  $(DJ)$ .

place le point M.

Démontre que M appartient aux plans  $(AEB)$  et  $(DEC)$ .

En déduire que la droite  $(EM)$  est l'intersection des plans  $(AEB)$  et  $(DEC)$ .

Justifie que les droites  $(EM)$  est parallèle au plan  $(ABC)$ .



**CHAPITRE VI: FONCTIONS POLYNOMES ET FONCTIONS RATIONNELLES**

**Exercice de fixation**

**Exercice 1 :**

Complète en choisissant la bonne réponse. (Format de réponse : 1 – a) par exemple

N <sub>0</sub>	Opérations	Propositions de réponses	Choix de l'élève
1	On pose $f(x) = x^3 + 2x - 1$ . $f$ admet pour forme canonique :	a) $f(x) = (x+1)^2$	
		b) impossible	
		c) $f'(x) = (x+1)^2 - 2$	
2	On donne $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4x + 6$ . Un zéro de $p(x)$ est :	a) $\sqrt{2}$	
		b) $-1$	
		c) $\frac{1}{2}$	
3	On donne $p(x) = x^3 + 3$ et $q(x) = -x^3 - 1$ . Alors le degré du polynôme $(p(x) + q(x))$ est :	a) 3	
		b) 1	
		c) 0	
4	On donne $p(x) = x^3 + 3$ et $q(x) = 3x^2 - 1$ . Alors le degré du polynôme $p(x)q(x)$ est :	a) 5	
		b) 6	
		c) 1	

**Exercice 2 :**

Complète en choisissant la bonne réponse (Format de réponse : 1 – a) par exemple.

N <sub>0</sub>	Opérations	Propositions de réponses	Choix de l'élève
1	La solution de l'équation $3x = 0$ est :	a) $-3$	
		b) $0$	
		c) $\frac{1}{3}$	
2	L'ensemble des solutions de l'équation $x^2 - 9x = 0$ est :	a) $S_{\mathbb{R}} = \{-3; 3\}$	
		b) $S_{\mathbb{R}} = \{0; -9\}$	
		c) $S_{\mathbb{R}} = \Phi$	
3	L'ensemble des solutions de l'inéquation $-3x > 0$ est :	a) $]0; +\infty[$	
		b) $] -\infty; 3[$	
		c) $] -\infty; 0[$	
4	Une solution de l'inéquation $3x - 2 \geq x^2$ est :	a) $[1; 2]$	
		b) $] -\infty; 1]$	
		c) $[2; +\infty[$	

## 1) Calcul avec les polynômes

### Exercice 3

Entoure la bonne réponse

- 1) Le polynôme  $3x^2 + 10x^5 - 1$  a pour degré 3 ; 2 ; 5 ; 10.
- 2) Le coefficient du terme de degré 4 du polynôme  $(a + \sqrt{2})x^4 + ax^2 + (\sqrt{2} - 1)x - 1 + a + 3$  est  $a$  ;  $\sqrt{2}$  ;  $\sqrt{2} - 1$  et  $a + \sqrt{2}$ .
- 3) Le coefficient du terme de degré 2 du polynôme  $2x^3 + 1$  est 1 ; 0 ; 2 ; 3.

### Exercice 5

Dans chacun des cas suivants, déterminer le degré et le coefficient du terme du plus haut degré du polynôme  $P$ .

- a)  $P(x) = 3x - 2x^2 + 5x^4 - 1$     b)  $P(x) = (\sqrt{2}x^5 - 1)(x^2 + 1) - 3$
- c)  $P(x) = (x^2 - 2) + x^3(1 + x^2)$     d)  $P(x) = (x - 1)(1 + x^2) + x(x^2 - 2x + 1) - (x + 1)(x + 2)$

### Exercice 6

Soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  des nombres réels. Déterminer  $a$ ,  $b$  et  $c$  pour que les polynômes  $P$  et  $Q$  soient égaux.

$$P(x) = x - x^2 + x^3 - 1 \text{ et } Q(x) = (-3x + b)x + ax^3 - c$$

### Exercice 7

On donne les expressions suivantes :

$$A(x) = 1 - \frac{3}{x} ; B(x) = \frac{x-3}{x} \text{ et } C(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3 - 3}{x^3 + x} .$$

Montrer que  $A(x) = B(x) = C(x)$ .

### Exercice 8\*

Déterminer le degré du polynôme  $RS$  et  $R+S$  dans chacun des cas suivants.

- 1)  $R(x) = -x^4 - 3x^2 + 5$  et  $S(x) = 2x^7 + 4x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 5$
- 1)  $R(x) = x^2 + 7x^5 - 1$  et  $S(x) = 2x^5 + 4x^3 - 2x^2 - 2$

### Exercice 9

Déterminer le degré du polynôme  $PQ$  et  $P+Q$  dans chacun des cas suivants.

- a)  $P(x) = 2x^2 + x + 1$  et  $Q(x) = x^3 - 1$     b)  $P(x) = -x^5 - 1$  et  $Q(x) = x^2 + 3$
- c)  $P(x) = 2x^2 + x + 1$  et  $Q(x) = x(-2x + 1)$     d)  $P(x) = -x^2 - x - 2$  et  $Q(x) = (x^2 + 1)^2$

### Exercice 10

Indique les bonnes réponses en reliant chaque numéro du **tableau 1** à la lettre correspondante dans le **tableau 2**.

Tableau 1	N°
$(x-1)^3$	<b>1</b>
$(x+1)^3$	<b>2</b>
$x^3 - 1$	<b>3</b>
$x^3 + 1$	<b>4</b>
$x^2 - 1$	<b>5</b>

Lettres	Tableau 2
<b>a</b>	$(x-1)(x+1)$
<b>b</b>	$x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
<b>c</b>	$x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
<b>d</b>	$x^3 + 3x^2 - 3x - 1$
<b>e</b>	$(x+1)(x^2 - x + 1)$
<b>f</b>	$(x-1)(x^2 + x + 1)$

### Exercice 11

On considère la fonction numérique  $f$  de variable  $x$ . Développer, réduire et ordonner  $f(x)$  suivant les puissances décroissantes de  $x$  dans chacun des cas suivants.

1.  $f(x) = 2(x-3)^2 - 3(2-x)(2+x) + 3x^2 - 7$
2.  $f(x) = (3x+2)^2 + 3(x-2)^2 - (4-2x)(4x+2)$
3.  $f(x) = x(x^2-2) + (-2+5x^2)(x^3+2)$
4.  $f(x) = 7x^2 - 4 + (1+5x^4)(x^2-6)$

### Exercice 12

Ecrire sous la forme d'un produit de deux polynômes du premier degré, chacun des polynômes ci-dessous :

- 1)  $f(x) = 2(x-3)^2 - (3-x)(3+x) + 2x - 6$  ; 2)  $4 - 9(t-1)^2$  ; 3)  $f(x) = 4x^2 - 4x + 1 - (2x-1)(3+x)$
- 4)  $f(x) = 9 - 25x^2 + (5x-3)^2 - (3-5x)(2x+5)$  ; 5)  $f(x) = (4-3x)^2 - (x+4)^2 + (x-4)^2$
- 6)  $A(x) = x^3 - 8 + (x-2)(4x+5)$ .

### Exercice 13\*

Développer, réduire, et ordonner les polynômes suivants (en utilisant les égalités remarquables)

1.  $(x-2)^3$
2.  $(3x-4)^3$
3.  $(1-2x)^3$
4.  $(-x-1)^3$

### Exercice 14\*

Ecrire sous la forme d'un produit de deux polynômes du premier degré, chacun des polynômes ci-dessous en utilisant les égalités remarquables.

- 1)  $x^3 - 8$  ; 2)  $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$  ; 3)  $1 + 6x + 12x^2 + 8x^3$  ; 4)  $x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2$
- 5)  $216x^3 + 125y^3$  ; 6)  $25x^3 - 20x$ .

## 2) Forme canonique d'un polynôme du second degré et son utilisation

### Exercice 15\*

Donner la forme canonique des fonctions polynômes  $f$  du second degré définies par :

1.  $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$  ; 2.  $f(x) = -x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}$  ; 3.  $f(x) = \frac{5}{2}x^2 + 15x + 30$

### Exercice 16

1) Utilise la forme canonique pour factoriser les polynômes suivants :

- a)  $P(x) = x^2 - 4x + 3$  ; b)  $L(x) = x^2 - 5x + 6$  ; c)  $G(x) = 2x^2 - x - 6$  ; e)  $H(x) = -3x^2 + 5x - 2$

2) Peut-on factoriser  $Q(x) = x^2 + 2x + 2$  ? Justifier.

## 3) Utilisation de la division euclidienne ou de la méthode des coefficients indéterminés pour factoriser

### Exercice 17

Utiliser la division euclidienne de  $2x^3 + 5x^2 + 9$  par  $x+3$  pour factoriser  $2x^3 + 5x^2 + 9$ .

### Exercice 18

1) Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  sachant que :  $x^4 + x^2 - 2 = (x^2 - 1)(ax^2 + bx + c)$ .

2) Déterminer les zéros du polynôme  $x^4 + x^2 - 2$ .

### Exercice 19

On donne un polynôme  $P$  et un nombre réel  $\alpha$

Dans chacun des cas suivants :

- Vérifier que  $P(x)$  est factorisable par  $x - \alpha$ .

- Déterminer le quotient de  $P(x)$  par  $x - \alpha$ .

(L a méthode des coefficients indéterminés ou la méthode de la division euclidienne)

- Factoriser, si possible, ce quotient

- Etudier le signe de  $P(x)$ .

1)  $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$  et  $\alpha = -1$

2)  $P(x) = x^3 - 7x - 6$  et  $\alpha = 3$

3.  $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4$  et  $\alpha = -2$

4.  $P(x) = -x^3 + x^2 - 5x + 5$  et  $\alpha = 1$

5.  $P(x) = x^3 - x^2 - x - 2$  et  $\alpha = 2$

6.  $P(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 3$  et  $\alpha = \frac{1}{2}$

7.  $P(x) = x^3 + (3 - \sqrt{2})x^2 + (2 - 3\sqrt{2})x - 2\sqrt{2}$  et  $\alpha = \sqrt{2}$

### Exercice 20\*

Étudier, suivant les valeurs de  $x$ , le signe de la fonction  $f$  dans les cas suivants :

1.  $f(x) = 8x^2 + 8x + 2$  ; 2.  $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$  ; 3.  $f(x) = -x^2 - 3x + 10$

Sans calculer  $f(-7)$ ,  $f(1/2)$ ,  $f(148)$ , indiquer les signes de ces nombres.

### Exercice 21

On donne le polynôme  $P$  défini par :  $P(x) = 4x^3 - 16x^2 + 13x - 3$

a) Calculer  $P(3)$

b) Montrer que  $P(x) = (x - 3)(2x - 1)^2$

c) Etudier le signe de  $P(x)$  suivant les valeurs du réel  $x$ .

### Exercice 22

Dans chacun des cas suivants, déterminer  $\beta$  pour que  $P$  soit factorisable par  $f$  puis étudier son signe.

1.  $P(x) = \beta x^3 + 7x^2 + 2x - 3$  et  $f(x) = x + 3$

2.  $P(x) = x^3 + \beta x^2 + \frac{5}{4}x - 3$  et  $f(x) = x + 3$

3.  $P(x) = x^3 + (3 - \sqrt{2})x^2 + \beta x - 2\sqrt{2}$  et  $f(x) = x + 2$

### 4) Transformation de l'écriture et étude du signe d'une fraction rationnelle.

### Exercice 23\*

Etudier le signe des expressions suivantes sur  $\mathbb{R}$  :

1.  $E(x) = \frac{x-5}{4-x}$  2.)  $F(x) = \frac{3x-5}{5x}$  3.)  $G(x) = \frac{2x-6x^2}{x+2}$

### Exercice 24

Soit  $f$ ,  $g$  deux fonctions numériques définies par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 + 5x + 6} \quad ; \quad g(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 + 2x + 1}$$

Déterminer  $Df$  et  $Dg$  puis Simplifier et étudier le signe de  $f$  et de  $g$  suivant les valeurs de  $x$ .

### Exercice 25

1. Déterminer les nombres réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que :  $\frac{2x^2 - 11x + 13}{x - 4} = ax + b + \frac{c}{x - 4}$

2. Déterminer les nombres réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que :  $\frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 2} = ax + b + \frac{c}{x - 2}$

3. Déterminer les nombres réels

$a$  et  $b$  tels que pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$  on ait  $\frac{x - 4}{(x - 1)(x - 3)} = \frac{\alpha}{x - 1} + \frac{\beta}{x + 3}$

### Exercice 26

Etudier le signe des fractions rationnelles  $P$ ,  $E$  et  $f$  définies par :

$$P(x) = x - 1 + \frac{2x - 4}{x - 2} \quad E(x) = 1 - x + \frac{2x + 1}{16 - x^2} \quad f(x) = 1 + \frac{2}{x - 3} + \frac{1}{x(x - 3)}$$

### Exercice 27

1-On donne le polynôme  $P$  défini par :  $P(x) = -3x^2 - 7x - 2$ .

a) Ecrire  $P(x)$  sous forme canonique, puis justifier que  $P(x) = -(3x + 1)(x + 2)$

b) Déterminer les zéros de  $P$

2-Soit le polynôme  $Q$  défini par  $Q(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ .

a) Calculer  $Q(-2)$  et  $Q(1)$  puis justifier que  $Q(x)$  est factorisable par  $x - 1$ .

b) Déterminer les réels  $a$ ;  $b$  et  $c$  tels que  $Q(x) = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$ .

c) Ecrire  $Q(x)$  comme produit de polynômes de 1<sup>er</sup> degré

d)

Etudier le signe de  $h(x)$  suivant les valeurs de la variable  $x$ .

3- On considère la fraction rationnelle  $h$  définie par  $H(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{-3x^2 - 7x - 2}$

a) Déterminer l'ensemble de définition  $D_h$  de  $H$

b) Montrer que pour tout  $x$  élément de  $D_h$ ,  $H(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{-3x - 1}$ .

c) Etudier le signe de  $h$  suivant les valeurs de la variable  $x$ .

d) Déterminer les réels  $a$ ;  $b$  et  $c$  tels que  $H(x) = ax + b + \frac{c}{-3x - 1}$ .

### SITUATION D'EVALUATION

Par curiosité, les élèves d'une classe de seconde C demande à leur professeur de mathématiques son âge. Ce dernier leur répond : « Dans quatre ans j'aurais le double de l'âge de mon premier fils mais actuellement le produit de nos deux âges est égal à 720 ». Ces élèves veulent déterminer l'âge du professeur. On désigne par  $y$  l'âge du professeur et par  $x$  celui de son fils.

1 -a) Montre que  $y = 2x + 4$ .

b) Déduis que le produit de leurs âges en fonction de  $x$  est égal à :  $2x^2 + 4x$ .

2 -a) Détermine la forme canonique du polynôme du second degré :  $2x^2 + 4x - 720$ .

b) Déduis -en l'âge de ce professeur de mathématiques.

**CHAPITRE VII : ANGLES INSCRITS**

**Exercices de fixation**

**Exercice 1**

Réponds par Vrai (V) ou Faux (F).

1 - Soit A, B, C et D quatre points d'un même cercle. Les deux angles inscrits  $ABC$  et  $CDA$  ont la même mesure.

2 - Des angles inscrits dans un cercle qui interceptent des arcs de cercles de même longueur ont la même mesure

3 - Si M et N sont deux points de l'arc de cercle  $AB$ , alors les angles inscrits  $AMB$  et  $ANB$  sont supplémentaires.

**Exercice 2**

Pour chacune des propositions ci-dessous, mets une croix dans la colonne qui convient.

N	Propositions	Vrai	Faux
01	Si deux angles inscrits interceptent le même arc de cercle, alors la mesure de l'un est le double de la mesure de l'autre.		
02	Soit A ; B ; C et D quatre points d'un même cercle. Les deux angles inscrits $(ABC)$ et $(CDA)$ ont la même mesure.		
03	Si un angle inscrit et un angle au centre interceptent le même arc de cercle, alors la mesure de l'angle au centre est le double de la mesure de l'angle inscrit.		
04	Des angles inscrits dans un cercle qui interceptent des arcs de cercle de même longueur ont la même mesure		
05	Si M et N sont deux points de l'arc $AB$ , alors les angles inscrits $(AMB)$ et $(ANB)$ sont supplémentaires.		

**Exercice 3**

Pour chacune des propositions ci-dessous, mets une croix dans la colonne qui convient

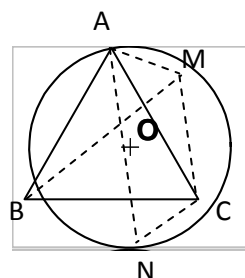
N	Propositions	Vrai	Faux
01	Soit un triangle ABC, on a : $\frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin B}{AC} = \frac{1}{2R}$ où R est le rayon du cercle circonscrit à ABC		
02	L'aire du triangle EFG est donné par la formule $S = \frac{1}{2} EF \times EG \sin F$		
03	Soit un triangle BEC et A l'aire de triangle, On pose $BE = c$ ; $BC = e$ et $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{abc}{2A}$		

**1) Relation entre angle inscrit et angle au centre associé**

**Exercice 4**

On donne la figure suivante où ABC est un triangle équilatéral inscrit dans un cercle ( $\Gamma$ ) .

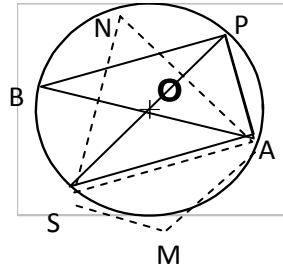
Déterminer la mesure des angles  $BOC$  et  $BNC$  .



### Exercice 5

Examiner la figure ci-contre. Déterminer en justifiant vos réponses les mesures en degré des angles suivants :

$ABP$  ;  $APB$  ;  $OSA$  ;  $BAP$  et  $SMA$ .



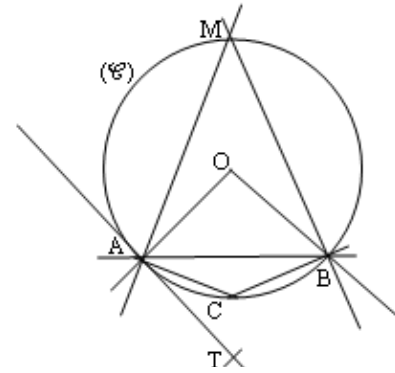
### 2) Extension de la notion d'angles inscrits

#### Exercice 6

On considère la figure ci-contre

- mes  $ACB = 30^\circ$
- (AT) est tangente à (c) en A.

Calculer : mes  $AOB$  ; mes  $AMB$  ; mes  $TAB$  et mes  $OAB$ .



#### Exercice 7\*

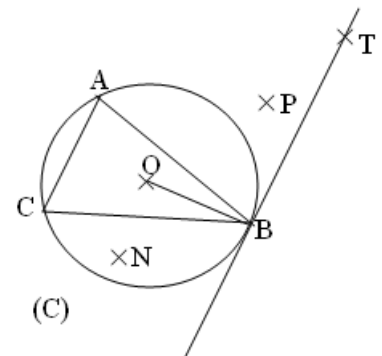
Sur la figure ci-contre, (C) est un cercle de centre O, les droites (OB) et (BT) sont perpendiculaires, mes  $CAB = 60^\circ$  ; mes  $CBA = 50^\circ$  et P n'appartiennent pas à (C) et la demi-droite [AP) coupe le cercle (C).

- 1) Parmi les angles suivants, indiquer ceux qui sont inscrits dans le cercle (C).

$CAB$  ;  $CAP$  ;  $CPA$  ;  $CAN$  ;  $ANC$  ;  $NAP$  ;  
 $CBT$  ;  $ABT$  ;  $CBN$  ;  $NBT$

- 2) Déterminer la mesure en degré de chacun des angles suivants :

$AOB$  ;  $CBT$  ;  $ABT$  ;  $AOC$



#### Exercice 8

Examine la figure ci-contre, où  $[AB]$  est un diamètre du cercle  $(\Gamma)$ . La tangente à  $(\Gamma)$  en E coupe la droite  $(AB)$  en F. On donne  $mes EMB = 28^\circ$ .

- 1) Justifier que  $mes EAB = mes BEF = 28^\circ$ .
- 2) a – Démontrer que le triangle ABE est rectangle en E.

b- Calculer  $mes ABE$  et  $mes BOE$ .

- 3) a – Justifier que  $mes AEF = 118^\circ$ .

c- Calculer  $mes EFB$  et  $mes AET$ .

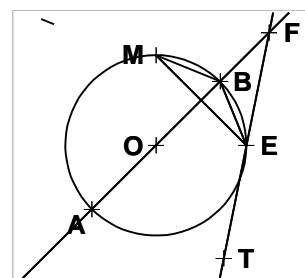
### 3) Détermination de lieux géométrique (Arcs capables)

#### Exercice 9

On donne un segment  $[AB]$  de longueur 4 cm.

Construis l'ensemble des points M du plan tel que  $mes AMB = 54^\circ$

Donne un programme de construction.



**Exercice 10**

1) Construire l'ensemble des points M du plan tels que :

a)  $\text{mes} \angle AMB = 45^\circ$

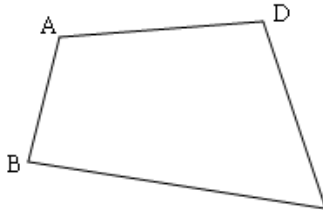
b)  $\text{mes} \angle AMB = 135^\circ$  .

(On prendra  $AB = 5\text{cm}$  dans chacun des cas).

**Exercice 11**

On considère le quadrilatère ABCD ci-contre :

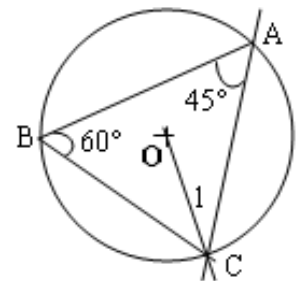
Construit un point tel que  $\text{mes} \angle AMB = \text{mes} \angle ADB$  et  $\text{mes} \angle DMC = 90^\circ$  .



**4) Relation métrique dans un triangle**

**Exercice 12\***

Déterminer la longueur de chacun des côtés du triangle ABC.

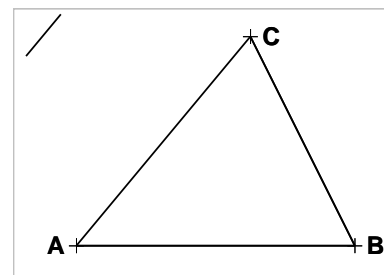


**Exercice 14**

Sur la figure ci-contre  $AB = 8$  et  $\text{mes} \angle A = 30^\circ$ .

On rappelle que  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$  .

- 1) Calculer l'aire A du triangle ABC.
- 2) Calculer la distance BC sachant que  $\text{mes} \angle B = 45^\circ$  .



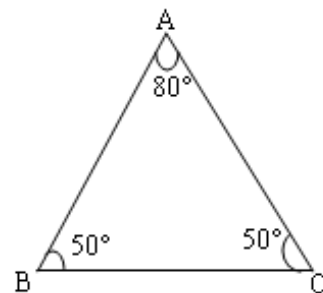
**Exercice 15\***

Soit ABC un triangle.

Démontrer que ABC est un rectangle en A si et seulement si  $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$  .

**Exercice 16**

Déterminer la longueur de chacun des côtés du triangle ABC sachant que son aire est égale à 2.

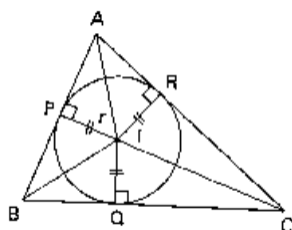


### Exercice 17

Le cercle (C) de centre I et de rayon r est le cercle inscrit dans le triangle ABC.

On note p le périmètre du triangle ABC.

Exprimer l'aire a du triangle ABC en fonction de r et de p.



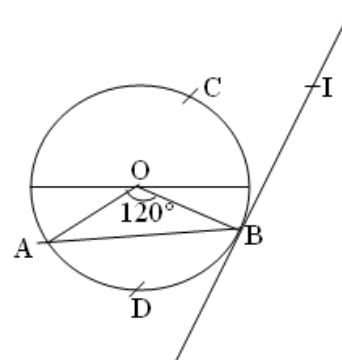
### Exercice 18\*

Sur la figure ci-contre, (C) est un cercle de centre O, A et B sont deux points de (C) tels que

mes  $\text{AOB} = 120^\circ$ . (BI) et (OB) perpendiculaires.

1- Calculer les mesures des angles ACB, ADB, OAB et ABI.

2) Donner la valeur en degré de mes CAD + mes CBD.



### Exercice 19

(C) est un cercle de centre O et de rayon  $\text{OA} = 3 \text{ cm}$ .

P est un point de l'arc AJ ;

(D) est la perpendiculaire en A de (OA) et K le point de (D) situé dans le demi-plan de frontière (AJ) ne contenant pas le point O.

1°) Faire une figure

2°) Démontrer que mes  $\text{AOJ} = 90^\circ$

3°) Calculer mes  $\text{APJ}$

4°) Calcule mes  $\text{KAJ}$ .

### Exercice 20

ABC est un triangle équilatéral inscrit dans un cercle (C) de centre O. N est un point de AC distinct de A et C, M est un point de BC distinct de B et C.

1 a) Faire une figure.

b) Calculer la mesure de chacun des angles BOC ; AMB ; AMC et ANC

2) P est le point de la demi-droite [MA) tel que  $\text{MB} = \text{MP}$

Montrer que MBP est un triangle équilatéral.

### Exercice 21\*

ABCD est un rectangle tel que  $\text{BD} = 2 \text{ AB}$ . (C) est le cercle circonscrit au rectangle ABCD.

Les tangentes en A et en D au cercle (C) se rencontrent en M et coupent la droite (BC) respectivement en N et P.

1) Faire une figure.

2) Justifier que mes  $\text{DBC} = 30^\circ$

3 a) Démontrer que ADM est un triangle équilatéral.

b) En déduire que le triangle NMP est équilatéral

### Exercice 22

[AB] est un diamètre d'un cercle (C). La médiatrice de [AB] coupe (C) en deux points I et J.

P est un point de AJ et M le projeté orthogonal de A sur (PI).

- 1) Faire une figure
- 2) Démontrer que le triangle AMP est rectangle isocèle

### Exercice 23

ABC est un triangle tel que  $BC = 5$  et  $\text{mes } B = \text{mes } C = 30^\circ$

Calculer

- a) Le périmètre du triangle ABC.
- b) L'aire S et le rayon r de son cercle circonscrit.

### Exercice 24

A et B sont deux points distincts du plan. Dans chacun des cas suivants construire les arcs capables d'extrémités A et B et d'angles  $\alpha$ .

- a)  $\alpha = 30^\circ$  ; b)  $\alpha = 60^\circ$  ; c)  $\alpha = 90^\circ$  ; d)  $\alpha = 120^\circ$

### Exercice 25\*

L'unité est le cm

ABC est un triangle tel que  $\text{mes } B = 75^\circ$  ;  $\text{mes } C = 45^\circ$  et  $BC = 6$  on note (C) le cercle circonscrit au triangle ABC, O son centre et r son rayon.

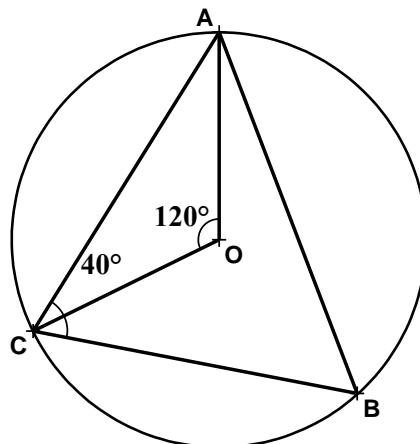
- 1) Faire une figure
- 2) Calculer la mesure de l'angle BOC.
- 3) Montrer que  $r = 2\sqrt{3}$
- 4) Calculer AB, AC et l'aire du triangle ABC.

## SITUATION D'EVALUATION

Dans le terrain circulaire ci – contre de superficie  $900\pi \text{ m}^2$ , le triangle ABC représente le jardin potager du club environnement d'un collège. Pour éviter que les plantes soient détruites par les animaux, élèves décident de clôturer le jardin. Le grillage qui va servir de clôture est vendu à 800 Frs le mètre. Le trésorier du club dispose de 180.000 Frs et veut savoir si cet argent peut suffire.

On désigne par **P** le périmètre du triangle ABC.

- 1-a) Détermine la mesure de l'angle ABC et Justifie que  $\text{mes } ACB = 80^\circ$  .  
b) Montre que le rayon du cercle est  $R = 30 \text{ m}$ .
- 2-a) Justifie que le périmètre **P** du triangle est  $P = 60(\sin 40^\circ + \sin 60^\circ + \sin 80^\circ)$ .  
b) Déduis la valeur numérique de **P** à  $10^{-2}$  près.
- 3) Justifie si oui ou non l'argent du trésorier va suffire pour la clôture du jardin.



**CHAPITRE VIII : ANGLES ORIENTES ET TRIGONOMETRIE**

**1) Mesure en radian d'un angle orienté**

**Exercice 1**

Réponds par Vrai (V) ou Faux (F).

- 1) Dans un repère orthonormé  $(O;I;J)$ , tout angle orienté dans le sens indirect à une mesure positive.
- 2) Deux angles orientés opposés ont la même mesure.
- 3) La mesure principale en radian de l'angle droit direct est  $\frac{3\pi}{2}$ .

**Exercice 2\***

Compléter le tableau suivant :

Degré	-210°		- 36°			20°
radian		$\frac{7\pi}{10}$		3	$\frac{\pi}{10}$	

**Exercice 3**

$(C)$  est le cercle de centre O et de rayon R. ; E et F sont deux points de  $(C)$  .

Calculer la mesure en radian de l'angle  $EOF$  lorsque  $R = 2$  et  $EF$  a pour longueur  $\pi$  .

**Exercice 4**

Exprimer en radian et en degré les mesures des arcs suivants :

- a) un demi-tour dans le sens direct.    b) un demi-tour dans le sens indirect.
- c) 7 tours et demi dans le sens direct.    d) trois quart de tours dans le sens indirect.

**2) angle orientés et Mesure principale.**

**Exercice 5**

Parmi les réels suivants, indiquer ceux qui sont des mesures principales d'angles.

$;\frac{6}{3}\pi ; \frac{2\pi}{3} ; \frac{\pi}{12} ; \frac{17\pi}{2} ; 340\pi ; 0$  et  $-\pi$

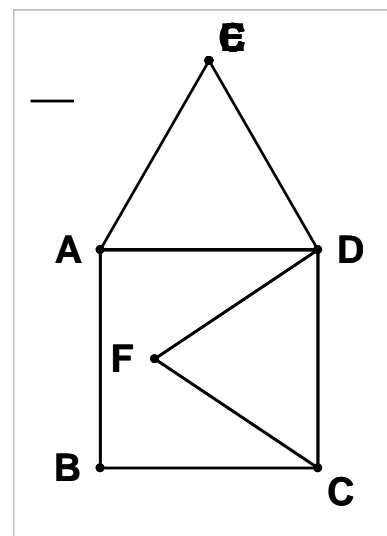
**Exercice 6**

La figure ci-contre représente le carré ABCD et deux triangles équilatéraux ADE et CDF.

Donner la nature des triangles ADF et BCF.

Déterminer les mesures principales des angles suivants :

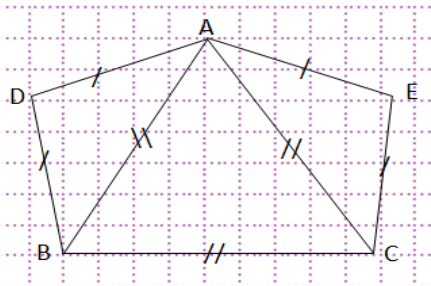
$Mes(\overrightarrow{FD};\overrightarrow{FC}) ; Mes(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD}) ; Mes(\overrightarrow{BF};\overrightarrow{BC}) ;$   
 $Mes(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE})$  et  $Mes(\overrightarrow{DF};\overrightarrow{DE})$ .



**Exercice 7\***

On considère la figure ci- dessous

ADB et AEC sont des triangles rectangles respectivement en D et en E.



- 1) Calculer les mesures radian des angles orientés suivants :  $(\vec{AB}, \vec{AC})$  ;  $(\vec{DA}, \vec{DB})$  ;  $(\vec{AB}, \vec{AE})$  ;  $(\vec{AE}, \vec{AD})$  ;  $(\vec{DB}, \vec{BC})$  ;  $(\vec{AD}, \vec{CB})$

**Exercice 8**

- 1) Placer les points images des angles orientés de mesures principales :  $-\frac{\pi}{3}$  ;  $\frac{2\pi}{3}$  ;  $-\frac{\pi}{6}$  ;  $\frac{5\pi}{6}$  ;  $\frac{\pi}{6}$  et  $\frac{\pi}{3}$  sur le cercle trigonométrique.

- 2) On considère les réels  $x = \frac{13\pi}{6}$  ;  $y = \frac{-11\pi}{2}$  ;  $z = \frac{-17\pi}{6}$   
Placer sur le cercle trigonométrique (C) les réels  $x$ ,  $y$  et  $z$

**Exercice 9**

Soit A ; B ; C et D les points images respectifs des réels :  $\frac{5\pi}{6}$  ;  $-\frac{3\pi}{4}$  ;  $\frac{7\pi}{12}$  ; et  $-\frac{3\pi}{8}$  sur le cercle trigonométrique. (*unité graphique : 5cm*).

- 1- a) Place les points A ; B ; C et D.
- b) Donne les coordonnées du point B dans le repère  $(O; I; J)$ .
- c) Détermine  $Mes(\vec{OC}; \vec{OJ})$  et  $Mes(\vec{OB}; \vec{OD})$ .

**Exercice 10\***

On considère les points B, J, D, E de la droite des réels d'abscisses :

$B(\frac{\pi}{6})$  ;  $J(\frac{\pi}{2})$  ;  $D(\frac{7\pi}{6})$  ;  $E(\frac{-\pi}{2})$

1. Soit  $(O, I, J)$  un repère orthonormé et  $(C)$  le cercle trigonométrique.  
Placer ces points sur le cercle trigonométrique  $(C)$ , obtenus par enroulement de la droite des réels.
2. Quelle est la nature du quadrilatère BJDE ? Le Justifier.
3. Soit  $(D)$  la droite perpendiculaire à  $(OJ)$  passant par B, soit H le point d'intersection de  $(D)$  et de  $(OJ)$ .
  - a) Quelles sont les coordonnées des points B et H ?
  - b) Calculer la valeur exacte de BJ
  - c) En déduire la valeur exacte de BE.

**4) Cosinus et sinus d'un nombre réel**

**Exercice 11**

Mets une croix en dessous du nombre dans la case correspondant à la bonne réponse.

	<b>propositions de réponses</b>			
$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) =$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) =$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) =$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) =$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) =$	1	-1	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

**Exercice 12**

En utilisant les positions sur le cercle trigonométrique des points images des réels suivants :  $-\frac{2\pi}{3}$  ;  $\frac{\pi}{12}$  ;

$-\frac{\pi}{12}$  ;  $-\frac{3\pi}{4}$  ;  $\frac{2\pi}{3}$  et  $\frac{5\pi}{6}$ , compléter le tableau suivant :

Compléter le tableau suivant :

Mesure $\alpha$	$-\frac{\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
Signe du $\cos \alpha$						
Signe du $\sin \alpha$						

**Exercice 13\***

1) Déterminer la mesure de l'angle  $x$  vérifiant :  $\begin{cases} \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$

2) Déterminer une valeur exacte de  $x$  sachant que  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $\cos x = -\frac{1}{2}$

3) Sans utiliser la calculatrice, calculer  $A = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{10}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)$ .

### Exercice 14

1. Soit un réel tel que  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$  et  $\sin x = \frac{1}{3}$ . Sans utiliser de calculatrice, donner une valeur exacte de  $\cos(x)$  et  $\tan(x)$ .

2. On admet que  $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ . Calculer  $\sin \frac{\pi}{8}$ .

### Exercice 15

$x$  est un réel tel que  $\sin x = \frac{1}{3}$ .

1) Peut-on en déduire  $\cos x$  ?

2) Sachant que  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$  ; Trouver  $\cos x$  puis  $\tan x$ .

### Exercice 16

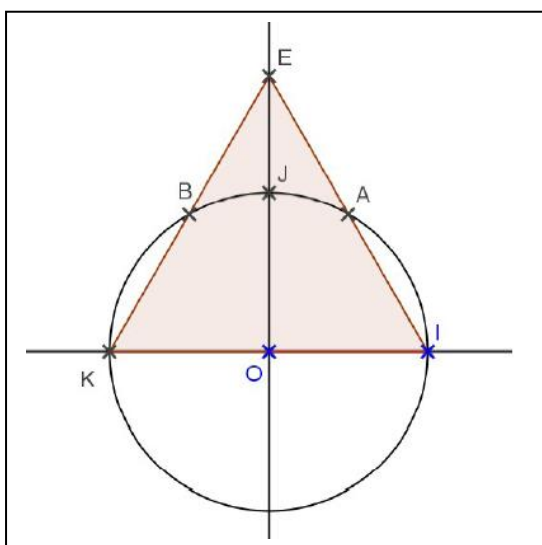
Soit  $x$  un réel tel que  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ . On donne  $\tan x = -\sqrt{3}$ . Déterminer  $\cos x$  puis  $\sin x$ .

### Exercice 17\*

Dans la figure suivante (C) est le cercle trigonométrique, (O, I, J) un repère orthonormé.

Le triangle IEK est équilatéral, la droite (IE) coupe le cercle (C) en A ; la droite (KE) coupe le cercle (C) en B.

Déterminer les coordonnées des points I, K, E, A et B dans le repère (O, I, J)



### Exercice 18\*

1) Simplifier au maximum, pour tout réel  $t$ , l'expression  $(1 - \cos t)(1 + \cos t)$

2) Démontrer que pour tout nombre réel  $x$  :

a)  $\cos^4(x) - \sin^4(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

b)  $\cos^4(x) - \sin^4(x) = 2 \cos^2(x) - 1$

c)  $(\cos(x) + \sin(x))^2 - (\cos(x) - \sin(x))^2 = 4 \cos(x) \sin(x)$

## SITUATION D'ÉVALUATION

Sur la figure ci-dessous :

Les traits pleins reliant les points D ; E ; F et A représentent un circuit de course. D est le point de départ et A est celui d'arrivée.

- Les points D et A sont sur un cercle de centre O
- Les points E et F sont sur un cercle de centre O
- On note  $OD = r$  et  $OE = r'$

Pendant un cours d'EPS, deux groupes d'élèves d'une classe de seconde C doivent courir sur le circuit représenté par la figure précédente.

Le groupe 1 part de D et va directement à A en suivant l'arc de cercle  $DA$  .

Le groupe 2 part de D à E puis de E à F en suivant l'arc de cercle  $EF$  . Les élèves du groupe 2 se plaignent du fait que leur trajet est plus long. Leur professeur affirme que l'angle  $\alpha$  a été choisi de sorte que les trajets aient la même longueur. Pour vérifier cette affirmation, les élèves cherchent la valeur de  $\alpha$  .

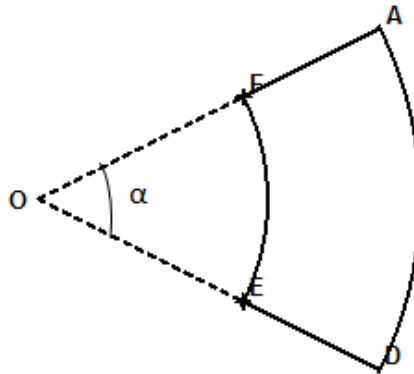
1) On suppose que  $r = 150m$  et  $r' = 150m$  et  $\alpha = 1rad$  .

Lequel des deux trajets est le plus long ?

2) On suppose que  $r = 300m$  et  $r' = 250m$  et  $\alpha = 3rad$  .

Lequel des deux trajets est le plus long ?

3) Trouve une condition sur  $\alpha$  pour que les deux trajets aient la même longueur.



## CHAPITRE IX: STATISTIQUES

### Exercice de fixation

#### Exercice 1

Voici une série statistique : 12 ; 17 ; 22 ; 12 ; 25 ; 11 ; 17 ; 18 ; 17 ; 17

Pour chacune des propositions suivantes, trois réponses sont proposées. Une seule de ces trois réponses est juste. Entoure la bonne réponse.

N <sup>o</sup>	propositions	Réponses		
		A	B	C
1	La médiane de la série est :	17	25	11
2	La moyenne est :	25	16,8	18
3	La variance est :	11,66	20	17,56
4	L'écart moyen est :	5	3,08	2
5	L'écart type est :	6	4,72	4,19

#### Exercice 2

I - Le tableau suivant donne l'âge des habitants d'un échantillon d'une ville .

Age	0 à 6	6 à 15	15 à 25	25 à 35	35 à 45	45 à 60	60 à 65
Nombre	40	34	32	29	22	21	18

Le nombre d'individus de cet échantillon ayant au moins 45 ans est :

Veillez entourer la bonne réponse : **A - 147** ; **B - 22** ; **C - 196** ; **D - 125** .

#### Exercice 3

Le tableau suivant donne l'âge des habitants d'un échantillon d'une ville.

Age	0 à 6	6 à 15	15 à 25	25 à 35	35 à 45	45 à 60	60 à 65
Nombre	40	34	32	29	22	21	18

Le pourcentage d'individus de cet échantillon ayant plus de 45 ans est :

Veillez entourer la bonne réponse **A - 11,46 %** ; **B - 80,43 %** ; **C - 46,35 %** ; **D - 100 %**

**1) Effectifs cumulés ; fréquences cumulées ; regroupement par classes de même amplitude ; représentation graphique d'une série statistiques.**

#### Exercice 4

Dans une entreprise, on a relevé le nombre de pièces fabriquées par chaque ouvrier au cours d'une journée. Le tableau ci-dessous donne la série obtenue regroupée en classes.

Classes ( <i>nombre de pièces</i> )	[60;65[	[65;70[	[70;75[	[75;80[	[80;85[
Effectifs ( <i>des ouvriers</i> )	33	36	48	37	24

Représenter cette série statistique par un histogramme (Echelle : 2mm par ouvrier).

**Exercice 5\***

On donne le tableau ci-contre.

Age de la mère (années révolues)	Nombre d'enfants
Moins de 20 ans	28 600
20 à 24	227 600
25 à 29	277 100
30 à 34	172 600
35 à 44	110 900
45 ans et plus	2 378

Dresser un tableau où figureront les classes d'âge, les effectifs, les fréquences, et les effectifs cumulés croissants et décroissants et les fréquences cumulées, croissantes et décroissantes, les amplitudes des classes.

On notera que les âges sont donnés en années révolues. En conséquence, par exemple

la classe « 20 à 24 » signifie « 20 à 25 ».

On retiendra 15 ans et 55 ans comme bornes respectivement inférieure et supérieure du domaine de variation de la variable continue.

**Exercice 6**

Un agent de la SODECI relève la consommation d'eau en m<sup>3</sup> de vingt familles dans un quartier d'Abidjan. Il obtient le tableau ci-dessous :

Consommation en m <sup>3</sup>	05	08	10	12
Effectifs	2	5	3	10

1-a) Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants de cette série statistique.

b) Détermine le nombre de familles ayant une consommation inférieure ou égale à, 10m<sup>3</sup>.

2) Représente cette série statistique par un diagramme circulaire.

**2) Variance ; écart type ; écart moyen ; classe modale ; médiane d'une série statistique**

**Exercice 7**

Le tableau ci-dessous représente une série statistique

Valeurs x <sub>i</sub> de la variable X	09	11	12	13	15
Fréquences	0,2	0,24		0,16	0,08

1) Montre que la fréquence de la modalité 12 est 0,32.

2) Calcule : la moyenne ; l'écart moyen ; la variance et l' écart type

3-a) Complete le tableau suivant :

Valeurs x <sub>i</sub> de la variable X	09	11	12	13	15
Effectifs cumulés croissants					
Fréquences décroissantes					

b) Représente sur le même graphique les polygones des effectifs cumulés croissants et des effectifs cumulés décroissants.

c) Détermine graphiquement la médiane de la série.

**Exercice 8**

Le tableau ci-dessous présent les effectifs cumulés d'une série statistique regroupée en classe de même amplitude.

Classes	[30;35[	[35;40[	[40;45[	[45;50[	[50;55[
Effectifs cumulés	15	33	53	80	100

1) Détermine l'intervalle médian de cette série.

2) Détermine par le calcul la médiane de cette série statistique.

3) Construis le polygone des effectifs cumulés croissants puis détermine graphiquement la médiane de cette série.

**Exercice 9\***

On considère la série statistique sur les notes sur 20 des élèves d'une classe de seconde. Cette distribution statistique est donnée par le tableau ci-dessous.

Notes	Centres $x_i$	Effectifs $n_i$	Effectifs cumulés croissants	$x_i n_i$	$x_i^2 n_i$	$n_i [x_i - \bar{x}]$
[5,5;6,5[		1				
[6,5;7,5[		2				
[7,5;8,5[		5				
[8,5;9,5[		2				
[9,5;10,5[		5				
[10,5;11,5[		10				
[11,5;12,5[		3				
[12,5;13,5[		1				
[13,5;14,5[		4				
[14,5;15,5[		7				

Compléter, puis calculer la moyenne  $\bar{x}$ , l'écart moyen, la variance et l'écart type de cette série statistique.

**Exercice 10**

On considère la série statistique sur l'âge des élèves d'une classe de seconde. Cette distribution statistique est donnée par le tableau ci-dessous.

1) Déterminer la moyenne  $\bar{X}$  et le mode de cette série statistique.

Modalités $x_i$	13	14	15	16	Total
Effectifs $n_i$					
$X_i^2$					
$n_i X_i^2$					
$ X_i - \bar{X} $					
$n_i  X_i - \bar{X} $					

Compléter, puis calculer l'écart moyen, la variance et l'écart type de cette série statistique.

## SITUATION D'ÉVALUATION

### Evaluation 1

Les moyennes en mathématiques de 30 élèves au premier trimestre d'une classe de seconde sont les suivantes :

12,5 ; 14,2 ; 12 ; 10,3 ; 12,8 ; 15,4 ; 13,2 ; 6,4 ; 7,3 ; 10,8 ; 9,7 ; 8,2 ; 5,7 ; 8,3 ;  
7,1 ; 16,5 ; 13,2 ; 16,1 ; 9,8 ; 11,4 ; 9,4 ; 9,6 ; 9 ; 8,5 ; 10,1 ; 17,3 ; 11,2 ; 6,2 ; 4,3 ; 10,5.

Le professeur décide de classer ces moyennes en cinq classes d'amplitude 3.

1) Compléter le tableau ci-dessous.

Classes	[3;6[	[6;9[	[9;12[	[12;15[	[15;18[	Total
Effectifs $n_i$						
Effectifs cumulés croissantes						
Effectifs cumulés décroissantes						

***On donnera l'arrondi d'ordre 1 de chaque résultat***

- 1-a) Déterminer la classe modale de cette série puis interpréter le résultat.
- b) Calculer la moyenne du regroupement en classes.
- 2) Calcule l'écart moyen de cette série puis interpréter le résultat.
- 3) Calcule l'écart type de cette série. Donnes-en une interprétation.
- 4) Déterminer par le calcul la médiane de la série. Donnes-en une interprétation.

### Evaluation 2

Our qu'un fabricant de chocolat puisse faire figurer le label « 90 % de cacao » sur ses produits, il faut que, lors de la production, le pourcentage moyen de la teneur en cacao appartienne à l'intervalle  $[84,5\% ; 95,5\%]$  ;  $S < 3,5$  et qu'au moins 94 % de la production ait un pourcentage de teneur en cacao compris entre  $[m - 2S; m + 2S]$  , où  $m$  et  $S$  désignent respectivement la moyenne et l'écart type.

La teneur en cacao des plaquettes de chocolat d'une société est la suivante :

Pourcentage de teneur en cacao	Nombre de plaquettes
[70;80]	7
[80;83]	23
[83;85]	55
[85;88]	75
[88;90]	17
[90;95]	3

Inquiet, le directeur de cette société sollicite les cinq élèves de ta classe dont tu fais partie en vue de savoir si sa société pourra faire figurer le label « 90 % de cacao » sur ses produits.

- 1) Calculer le pourcentage moyen de teneur en
- 2) Calculer la variance et l'écart type
- 3) Calculer les fréquences cumulées croissantes
- 4) Déterminer le pourcentage de plaquettes dont la teneur en cacao se situe entre l'intervalle .
- 5) Dire si la société pourra accoler l'étiquette « 90 % de cacao » sur ses produits

**CHAPITRE X : PRODUIT SCALAIRE**

**Exercices de fixation**

**Exercice 1**

Réponds par Vrai (V) ou par Faux (F) aux affirmations suivantes

N°	Propositions	Réponses
01	Le produit scalaire de deux vecteurs est un vecteur	
02	Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux équivaut à $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .	
03	$\vec{u} \cdot \vec{v}$ Et $\cos(\vec{u}; \vec{v})$ sont deux nombres réels de même signe	
04	A et B sont deux points du plan, $\overline{AB}^2$ est l'aire d'un carré de coté AB	
05	$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, colinéaires et de même sens, on a alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \ \vec{u}\  \times \ \vec{v}\ $ .	
06	A ; B et C sont trois points ptels que $AB = 3$ ; $AC = 4$ et $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = -10$ alors les points A, B et C sont alignés	
07	Dans un repere orthonormé, les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux	

**Exercice 2**

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs tel que  $\|\vec{u}\| = 5$  ;  $\|\vec{v}\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -5$ .

Pour chacune des propositions suivantes, trois réponses sont proposées. Une seule de ces trois réponses est juste. Entoure la bonne réponse.

N°	propositions	Réponses		
		A	B	C
1	La mesure de l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$ est égale à :	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$
2	La norme $\ \vec{u} + \vec{v}\ $ est egale à :	$\sqrt{17}$	$5 + \sqrt{2}$	$5\sqrt{2}$
3	La norme $\ \vec{u} - \vec{v}\ $ est egale à :	$5 - \sqrt{2}$	$\sqrt{37}$	$5\sqrt{2}$

**1) Calcul du produit scalaire de deux vecteurs**

**Exercice 3\***

Soient deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  distincts du vecteur nul.

On note  $\alpha$  la mesure en radians de l'angle orienté  $(\vec{u}; \vec{v})$ . Calculer  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  dans chacun des cas suivants :

1)  $\|\vec{u}\| = 5$  et  $\|\vec{v}\| = 2$  ;  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  . 2)  $\|\vec{u}\| = 3$  et  $\|\vec{v}\| = \frac{3}{2}$  ;  $\alpha = -\frac{\pi}{6}$  . 3)  $\|\vec{u}\| = 4$  et  $\|\vec{v}\| = 1$  ;  $\alpha = \pi$  .

4)  $\|\vec{u}\| = \frac{3}{2}$  et  $\|\vec{v}\| = \frac{5}{2}$  ;  $\alpha = \frac{2\pi}{3}$  . 5)  $\|\vec{u}\| = 1$  et  $\|\vec{v}\| = 2$  ;  $\alpha = -\frac{\pi}{2}$  .

### Exercice 4

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs tels que  $\|\vec{u}\| = 2\sqrt{3}$  et  $\|\vec{v}\| = 3$ .

Calculer  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  dans chaque cas :

- a)  $Mes(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{2\pi}{3}$  ; b)  $Mes(\vec{u}; \vec{v}) = 0$  ; c)  $Mes(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{5\pi}{6}$  ; d)  $Mes(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$  ;

### 2) Produit scalaire dans une base orthonormée

#### Exercice 5

Dans un repère orthonormé, on considère les vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Calculer  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .

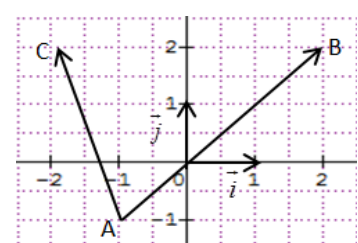
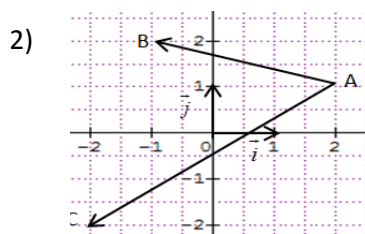
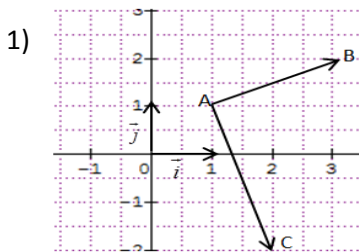
#### Exercice 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé. On donne  $A(1; -2)$ ;  $B(-3; 4)$  et  $C(3; -2)$ .

Calculer  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .

#### Exercice 7\*

Soit un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan. Dans chacun des trois cas suivants, calculer  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$



#### Exercice 7

Soit  $(\vec{i}; \vec{j})$  une base orthonormée du plan vectoriel.  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs tels que  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  et

$\vec{v} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$ . Démontrer que  $(\vec{u}; \vec{v})$  est une base orthonormée du plan vectoriel.

#### Exercice 8

Dans une base orthonormée, on donne  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 2(\sqrt{2}-1) \end{pmatrix}$

Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont-ils orthogonaux ? Justifier votre réponse.

#### Exercice 9

Calculer le produit scalaire  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , puis  $\|\vec{u}\|$  et  $\|\vec{v}\|$  dans chacun des cas suivants :

1)  $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$  ;  $\vec{v} = -5\vec{i} + 2\vec{j}$  ; 2)  $\vec{u} = \sqrt{2}\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$  ;  $\vec{v} = \sqrt{3}\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j}$

3)  $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$  ;  $\vec{v} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$  ; 4)  $\vec{u} = (1-\sqrt{2})\vec{i} + (1+\sqrt{2})\vec{j}$  ;  $\vec{v} = \sqrt{2}\vec{i} - \sqrt{2}\vec{j}$

#### Exercice 10

Les coordonnées des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont données dans une base orthonormée  $(\vec{i}; \vec{j})$ .

Soit  $m$  un nombre réel. Déterminer  $m$  pour que  $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$

- 1)  $\vec{u}(1; m)$  et  $\vec{v}(m; -2)$  2)  $\vec{u}(1; m)$  et  $\vec{v}(-2; m)$  3)  $\vec{u}(m+1; m)$  et  $\vec{v}(-2; m+3)$

### Exercice 11\*

Les coordonnées des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont données dans une base orthonormée  $(\vec{i}; \vec{j})$ .

Dans chacun des cas suivants, déterminer la ou les valeurs de  $x$  pour que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  soient orthogonaux.

a)  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ x+1 \end{pmatrix}$     b)  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2x-1 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 3x+2 \\ x+1 \end{pmatrix}$

### Exercice 12

On donne :

-  $(O; I; J)$  est un repère orthonormé.

-  $(C)$  est un cercle trigonométrique de centre O.

- P est le point d'abscisse -1.

- M est un point de  $(C)$  tel que  $Mes(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{3}$ .

1) a- Faire une figure en prenant  $OI = 4cm$  ; Celle-ci sera complétée au fur et à mesure.

b- Placer le point Q symétrique de M par rapport à  $(OI)$ .

c- Déterminer la mesure en radian de l'angle orienté  $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OQ})$ .

2) Placer A, le point image du réel  $\frac{\pi}{4}$  sur le cercle  $(C)$ .

3) On rappelle que le point M a pour coordonnées  $(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$ . On donne  $Mes(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{12}$ .

a- En utilisant la forme analytique du produit scalaire, prouver que  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

b- En utilisant la forme trigonométrique du produit scalaire, prouver que  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = \cos(\frac{\pi}{12})$ .

c- En déduire la valeur exacte de  $\cos(\frac{\pi}{12})$ .

### 3) Utilisation des propriétés du produit scalaire

#### Exercice 13

Soit EFG un triangle. I et J les milieux respectifs des segments  $[EF]$  et  $[GF]$ . Réponds par vrai (V) ou Faux (F).

1 - On a d'après le **théorème Al Kashi** :  $EF^2 = EG^2 + FG^2 - 2 \times EG \times FG \times \cos(F)$ .

2 - On a d'après le **théorème de la médiane** :  $EG^2 + FG^2 = GI^2 + \frac{EF^2}{4}$ .

3 - On a  $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = \frac{EF^2 + EG^2 - GF^2}{2}$ .

4 - On a d'après **théorème de la médiane** :  $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = EJ^2 - \frac{GF^2}{4}$ .

**Exercice 14**

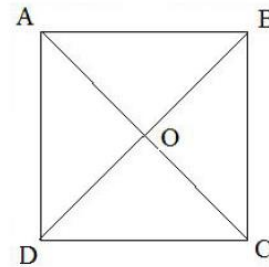
$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs. Démontrer que :

- 1)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$ .
- 2)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$ .
- 3)  $-\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \leq \vec{u} \cdot \vec{v} \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ .

**Exercice 15\***

Soit un parallélogramme ABCD tel que AB = 5, AC = 6 et AD = 4. Calculer les produits scalaires suivants :

- 1)  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$  ; 2)  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$  3)  $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB}$

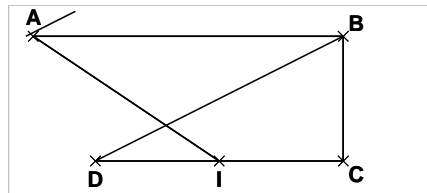


**Exercice 16\***

ABCD est un carré de centre O et de coté 4 unités.

(voir figure) :

- Calculer : a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  ; b)  $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB}$  ;  
et c)  $\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{DO}$ .



**Exercice 17**

Observe la figure suivante :

On donne :  $AB = 17$  ;  $BC = 12$

et  $CD = 17$ .

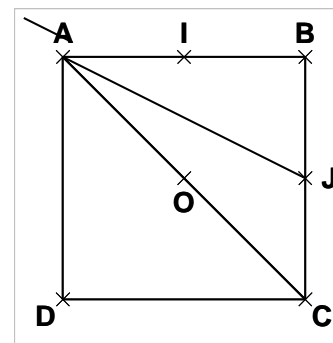
- Calculer :  $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC}$  ;  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$  ;  
 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD}$  et  $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{CD}$ .

**Exercice 18**

ABCD est un carré de coté  $a$  et de centre O.

Les points I et J sont les milieux respectifs des segments  $[AB]$  et  $[BC]$  .

- 1) Calculer les produits scalaires  $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$  et  $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{CD}$ .
- 2) a- calculer  $AJ$  et  $AO$ .  
b- En calculant de deux manières le produit scalaire  $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{AC}$  , déterminer en degré une valeur approché à  $10^{-2}$  près de la mesure de l'angle  $(JAC)$  .



**Exercice 19**

Soit ABCD un carré de coté  $a$  et de centre O.

- 1) a- Faire une figure.  
b- Calculer en fonction de  $a$  les produits scalaires suivantes :  
 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  ;  $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ .

2) Démontrer que les vecteurs  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$  et  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$  sont orthogonaux.

3) a- Calculer  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})^2$  et  $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})^2$  .

b- Justifier que les vecteurs  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$  et  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$  ont la même norme.

**Exercice 20**

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs tels que  $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$   $\|\vec{v}\| = \sqrt{3}$  et  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$ .

Calculer : a)  $(2\vec{u} - \vec{v})(\vec{u} + 4\vec{v})$     b)  $(\vec{u} - \vec{v})(\vec{u} + \vec{v})$     c)  $(\sqrt{2}\vec{u} - \sqrt{3}\vec{v})(\sqrt{2}\vec{u} + -\sqrt{3}\vec{v})$

**Exercice 21**

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs tels que :  $\|\vec{v}\| = 2\|\vec{u}\| - 6$  et  $\vec{u} - \vec{v} = 9$

Calculer  $\|\vec{u}\|$  et  $\|\vec{v}\|$ .

**Exercice 22\***

Déterminer la valeur exacte, en radian, de l'angle géométrique  $AOB$  dans chacun des cas suivants :

1)  $OA = 4$  ;  $OB = 8$  ;  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -16$  ;    2)  $OA = \sqrt{2}$  ;  $OB = 3$  ;  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 3$

3)  $OA = \sqrt{3}$  ;  $OB = 2\sqrt{2}$  ;  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -3\sqrt{2}$  ;    3)  $OA = 1$  ;  $OB = 1$  ;  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -1$

**Exercice 23**

Soit A, B et K trois points du plan tels que  $AB = 2$  et K est le milieu de  $[AB]$ . On veut déterminer

l'ensemble  $(\Gamma)$  des points M du plan tels que  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 8$

1) Faire une figure.

2) a- Calculer  $\vec{KA} \cdot \vec{KB}$ .

b- Justifier que pour tout point M du plan,  $\vec{KM} \cdot (\vec{KA} + \vec{KB}) = 0$ .

3) a- En utilisant la question 2) démontrer que pour tout point M du plan,  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = -1 + \vec{KM}^2$ .

b- Déduire alors l'ensemble  $(\Gamma)$  des points M du plan tels que  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 8$ .

c- Construire l'ensemble  $(\Gamma)$ .

**4) Utilisation du théorème d'AL KASHI****Exercice 24**

ABC est un triangle. On appelle A son aire. On pose  $a = BC$  ;  $b = CA$  et  $c = AB$ . On sait que

$\text{Mes}A = 45^\circ$  ;  $b = 3$  et  $A = 3$ .

Déterminer la longueur de chacun des cotés et les angles de ce triangle.

**Exercice 25**

ABC est un triangle tel que  $\text{Mes}A = 60^\circ$  ;  $AC = 3$  et  $AB = 5$ .

On appelle R le rayon de son cercle circonscrit et A l'aire du triangle ABC.

Déterminer la distance BC ; La mesure des angles B et C ; le rayon R et son aire A.

**Exercice 26\***

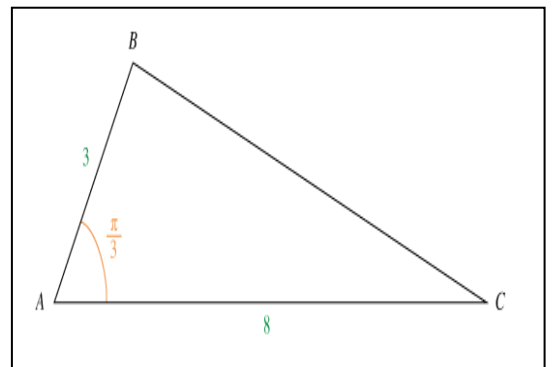
ABC est un triangle tel que :  $\text{mes}BAC = \frac{\pi}{3}$   $AB = 3$  et  $AC = 8$

1 Calculer le produit scalaire  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$

2 Calculer le produit scalaire  $\vec{BC} \cdot \vec{BA}$

On pourra utiliser la relation d'Al-Kashi :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(BAC)$$



### Exercice 27

1) ABC est un triangle tel que  $AB = 4$  ;  $AC = 7$  et  $mes A = 120^\circ$ .

Calculer la distance BC.

2) ABC est un triangle tel que  $AC = 4$  ;  $AB = 3\sqrt{3}$  et  $mes A = \frac{\pi}{6}$ .

Calculer la distance BC

### Exercice 28

Soit ABC un triangle tel que  $AB = AC = 4$  et  $BC = 4\sqrt{3}$ .

1) a- Justifier que  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$ .

b- Prouver que  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -8$ .

2) Démontrer que  $mes BAC = 120^\circ$ .

3) Déterminer la mesure de l'angle  $BAC$ .

4) Calculer l'aire A du triangle ABC et le rayon R du cercle circonscrit.

### Exercice 29\*

ABC est un triangle tel que  $AB = 7$  ;  $AC = 5$  ;  $BC = 8$ . On note I est le milieu de [BC]

Calculer la longueur AI de la médiane [AI]

### Exercice 30

ABC est un triangle tel que  $AB = 7$  ;  $AC = 5$  et  $BC = 4$ .

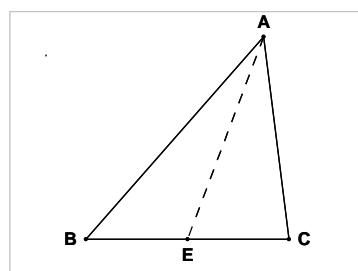
1) Démontrer que  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$ .

2) a- Calculer  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ .

b- En déduire  $\cos A$ .

3) Le point E est le milieu de [BC].

Calculer la longueur AE de la médiane [AE]



### Exercice 31

Sur la figure ci-dessous, ABC est un triangle inscrit dans le cercle de centre O et de diamètre AB. H est le pied de la hauteur issue du point C. On a  $AB = 5$  et  $CB = 3$ .

1) Justifier que  $AC = 4$ .

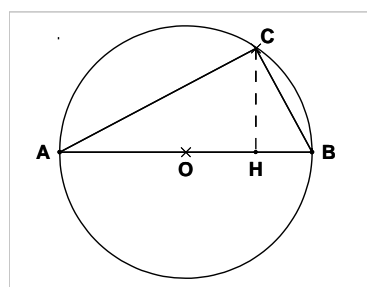
2) En utilisant le théorème d'Al Kashi,

démontrer que  $\cos A = \frac{4}{5}$ .

3) En déduire la valeur de  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ .

4) Démontrer que  $CB^2 - CA^2 = 2\vec{AB} \cdot \vec{CH}$ .

5) En déduire que  $CB^2 - CA^2 = -2\vec{AB} \cdot \vec{OH}$ .



### Exercice 32

On considère le polynôme  $P(x) = x^2 - x - 6$ .

1) a- Ecrire sous sa forme canonique.

b- Factoriser le polynôme  $P(x)$ .

c- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $(E): P(x) = 0$ .

2)  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs tels que  $\text{Mes}(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$  et  $\|\vec{u}\| = 2$ .

a – Sachant que  $(2\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 2$  ; Démontrer que  $\|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v}\| - 6 = 0$ .

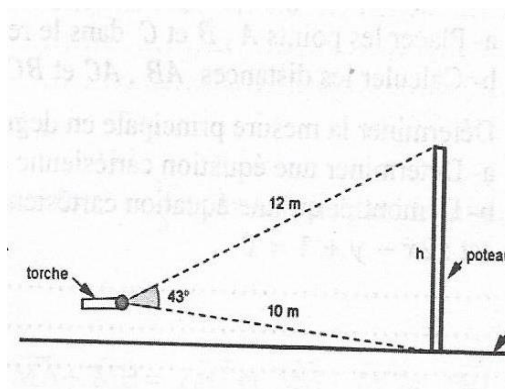
b- En utilisant la question 1), calculer  $\|\vec{v}\|$ .

### SITUATION D'EVALUATION

Après le cours sur le produit scalaire, Koffi se propose de déterminer la hauteur du poteau électrique situé derrière leur maison. Pour cela, à la nuit tombée, à une certaine distance du poteau, il l'éclaire avec sa torche (Voir schéma ci-dessous).

L'angle solide du faisceau lumineux est de  $43^\circ$  les rayons lumineux de la torche au ras du poteau et au sommet du poteau mesurent respectivement 10 m et 12 m.

Calculer la hauteur  $h$  du poteau électrique.



**CHAPITRE XI: EQUATIONS ET INEQUATIONS DANS  $\mathbb{R}$**

**Exercices de fixation**

**Exercice 1 :**

Complète en choisissant la bonne réponse. (*Format de réponse : 1 – a par exemple*)

N°	Opérations	Propositions de réponses	Choix de l'élève
1	L'ensemble des solutions de l'inéquation $5x \geq 9x - 8$ est :	a) $[-2; 0[$	
		b) $]-\infty; -2]$	
		c) $[-2; +\infty[$	
2	Une solution de l'équation $x^2 = 3x - 2$ est :	a) 1	
		b) 2	
		c) -1	
3	L'ensemble des solutions de l'équation $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+1} = -\frac{1}{2}$ est :	a) $S_{\mathbb{R}} = \{-1; 4\}$	
		b) $S_{\mathbb{R}} = \{1; 4\}$	
		c) $S_{\mathbb{R}} = \{-4; 1\}$	
4	Une solution de l'inéquation $\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-1} > 1$ est :	a) $\frac{3}{2}$	
		b) -1	
		c) -4	

**1) Equations liant deux polynômes ou deux fractions rationnelles**

**Exercice 2**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , les équations suivantes.

- 1)  $x - 1 = -2x - 3$  ; 2)  $\frac{3}{5}(x - 10) = 2$  ; 3)  $3\sqrt{5} - x\sqrt{5} = 0$  ; 4)  $3x + 10 = x + 2(x + 5)$   
 5)  $3(x - 1) - 5(x - 2) = -2(4x + 3)$  ; 6)  $3x - 2 = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$  ; 7)  $\frac{5}{2}x - 1 = \frac{x - 2}{3}$   
 8)  $\frac{3x + 1}{2} - \frac{x - 4}{3} = \frac{5}{6}$  ; 9)  $x^3 + x + 4 = x^3 - 3x - 4$

**Exercice 3**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , les équations suivantes.

- 1)  $x(x + 1) = 2x^2 - 5x + 6$  ; 2)  $x^2 = 2(x - 2)(x - 1)$  ; 3)  $3x^2 + 5x + 1 = 2x^2 + 4x + 3$   
 4)  $-x^2 - 2x - 28 = -2x^2 - 3x - 33$  . 5)  $(3x + 4)^2 + 12 = (1 - 2x)^2$  ; 6)  $(3x - 1)^2 + (1 - 6x)^2 = 0$ .

**Exercice 4\***

Résoudre les équations suivantes :

1. (E) :  $(x - 3)^2 = (2x + 5)^2$   
 2. (F) :  $4(x + 1)^2 = 9x^2$   
 3. (G) :  $(3x - 1)^2 = x^2 + x + \frac{1}{4}$

**Exercice 5\***

Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , les équations suivantes.

- 1)  $(16x - 49)^2 - (4x - 25)^2 = 0$  ; 2)  $60x + 9x^2 + 100 = 0$ . 3)  $5(3x - 1) = x(3x - 1)$

**Exercice 6\***Résoudre dans  $\mathbb{R}$  en précisant les contraintes sur  $x$ 

$$1) \frac{2-x}{3x+1} = \frac{x-2}{x+1} \quad 2) \frac{x^2-4}{x^2+2x-8} = 0 \quad 3) \frac{2x^2}{9-x^2} = -1$$

**Exercice 7**Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , les équations suivantes.

$$1) \frac{2x+3}{x-2} = 3 \quad ; 2) \frac{2x+3}{x-2} = \frac{x-5}{x-2} \quad ; 3) \frac{3}{x+2} = \frac{x}{x^2-4} \quad ; 4) \frac{x-2}{x+3} = \frac{x+1}{x-5} ;$$

$$5) \frac{5}{x-3} = \frac{x}{x^2-9} \quad ; 6) \frac{x-1}{x+1} - \frac{2}{x-1} = 2 + \frac{x+1}{x-1}.$$

**2) Inéquation liant deux polynômes ou deux fractions rationnelles****Exercice 8\***Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes.

$$1) 4x-2 \geq 2x-1 \quad ; \quad 2) 2(x-3) < x-5 \quad 3) 1-(x+4) \leq 3 \quad 4) 3x+1 > x-3 \quad 5) 2x-1 \leq 6x+11$$

**Exercice 9**Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes.

$$1) 3x+5 \geq 0 \quad 2) -5x-7 > 0 \quad 3) x-3(x+1) \leq x-9 \quad 4) (7x-1)-(2x+5) < 0$$

$$5) \frac{9x-1}{2} > 0 \quad 6) x - \frac{1}{3} \leq 5x - \frac{1}{2} \quad 7) \frac{1}{2}x - \frac{2x+5}{3} \geq 1$$

**Exercice 10**Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , les inéquations suivantes.

$$1) \frac{2x+3}{x-2} \leq 3 \quad ; 2) \frac{x-5}{2x+1} \geq \frac{2}{3} \quad ; 3) \frac{x+3}{x} \geq \frac{x-2}{x+1} \quad ; 4) \frac{3}{x-2} \geq \frac{2x+1}{x^2-4} \quad ; 5) \frac{(x+1)^2}{2x^2+1} \leq \frac{1}{2}.$$

**Exercice 11**

$$1) \text{ Quel est l'ensemble de définition de l'inéquation } \frac{1}{5x-1} \leq \frac{1}{x+2} ?$$

$$2) \text{ Montrer que l'inéquation ci-dessus est équivalente à l'équation } \frac{-4x+3}{(5x-1)(x+2)} \leq 0$$

3) Résoudre alors l'inéquation donnée.

**Exercice 12\***Résoudre dans  $\mathbb{R}$  en précisant les contraintes sur  $x$ 

$$1) \frac{2x+3}{5x-2} \leq 0 \quad ; \quad 2) \frac{-x}{x+4} > 0 \quad ; \quad 3) \frac{x^2-121}{11-x} \leq 0 \quad ; 4) \frac{x-1}{x-1} \geq \frac{1}{(x-1)^2}$$

**Exercice 13**Soit  $f$  la fonction définie de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x - \frac{1}{x}$ .1) Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , l'équation  $f(x) = 0$ .3) Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , l'inéquation  $(I): f(x) \leq 0$ .

**Exercice 14**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

$$1) (9x^2 - 4) - (6x + 4)(x - 5) = 0 \quad ; 2) \frac{6x^2 + x + 2}{2x + 3} = \frac{3x^2 - x - 2}{x - 3} ;$$

$$3) \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 - \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2 = 0 \quad ; 4) \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}} = 3$$

**Exercice 15**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x^2 + 3x + 2$$

1) Vérifier que  $f(x)$  peut s'écrire sous la forme  $f(x) = (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}$

2) Factoriser  $f(x)$ .

3) Répondre aux questions suivantes en utilisant la forme la plus adaptée.

a) Résoudre l'équation  $f(x) = 0$ .

b). Résoudre l'inéquation  $f(x) \geq -\frac{1}{4}$ .

c) Déterminer le minimum de  $f$

e) Résoudre l'inéquation  $f(x) < 0$ .

**3) équations et inéquations avec valeurs absolues****Exercice 16\***

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes.

$$1. |x+2| = -1 \quad 2. |2x-5| = 0 \quad 3. |x+2| = 3 \quad 4. |4x+2| = |-2x+3|$$

**Exercice 17**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes.

$$1) |5x+2| = 8 \quad 2) |-1-4x| = 0 ; \quad 3) |-2x| + 7 = 0 ; \quad 4) |1+x^2| - 10 = 0 ;$$

$$5) |2x - |x|| = 2 \quad 6) |x^2 - x + 3| = |x+2| \quad 7) |3x-2| = |1-5x| \quad 8) |x^2 + x + 2| = -2$$

**Exercice 18\***

Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , les inéquations suivantes.

$$1) |-x| \leq 3 \quad 2) |x-7| \leq 2 \quad 3) |2x+7| \leq 21 \quad 4) \left| \frac{3}{5}x - 2 \right| \leq -10 ; \quad 5) |-2x+3| \leq 5 .$$

**Exercice 19**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , les inéquations suivantes.

$$1) |x-3| \leq 0 \quad 2) |3x+5| < \frac{5}{3} \quad 3) |2-x| \leq 2 ; \quad 4) |3-2x| + 6 \leq 0. \quad 5) |x-7| \leq -5$$

$$6) |3x-2| \leq \sqrt{2} \quad ; \quad 7) 1 < |2x+1| < 5$$

## SITUATION D'ÉVALUATION

### Evaluation 1

Chaque jour, une entreprise fabrique  $x$  objets, avec  $x \in [0; 50]$ .

Le coût de production des  $x$  objets est donné en euros par :  $C(x) = 60 - 0,3x$ .

Le revenu des  $x$  objets est donné en euros par  $R(x) = 20,1x - 0,3x^2$ .

Le bénéfice quotidien de cette entreprise est noté  $B(x)$ , il correspond à la différence entre le revenu et le coût de production.

1. Exprimer  $B(x)$  en fonction de  $x$ .
2. Vérifier que le bénéfice peut également s'écrire  $B(x) = -0,3(x - 34)^2 + 286,8$ .
3. Quel est le bénéfice maximal? Quel nombre d'objets l'entreprise doit-elle produire pour l'atteindre ?

### Evaluation 2

Dans un lycée, les professeurs de seconde organisent un voyage de fin d'année ; ils ont loué des cars.

S'ils décident de mettre quarante élèves par car, onze élèves n'ont pas de place. S'ils mettent quarante-trois élèves par car, il reste une place dans un car.

1. Combien y a-t-il de cars ?
2. Combien y a-t-il d'élèves ?

## CHAPITRE XII : HOMOTHETIES

### Exercices de Fixation

#### Exercice 1

Pour chacune des propositions ci-dessous, mets une croix dans la colonne qui convient.

N	Propositions	Vrai	Faux
01	Si B' est l'image de B par l'homothétie $h_{(I;3)}$ alors $\overrightarrow{IB'} = 3\overrightarrow{IB}$ .		
02	Si A' est l'image de A par l'homothétie $h_{(O;\frac{1}{2})}$ alors $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'O}$ .		
03	Si des points P ; Q et R sont alignés, alors il existe une homothétie de centre R qui transforme P en Q.		
04	Si $\overrightarrow{OA} = -2\overrightarrow{BO}$ alors le rapport de l'homothétie de centre O qui transforme B en A est - 2		
05	Par une homothétie, une droite et son image son parallèles		

#### Exercice 2

Pour chacune des propositions suivantes, trois réponses sont proposées. Une seule de ces trois réponses est juste. Entoure la bonne réponse.

N <sup>0</sup>	propositions	Réponses		
		A	B	C
1	On donne $\overrightarrow{GP} = -2\overrightarrow{QG}$ . l'homothétie de centre G qui transforme Q en P a pour rapport :	2	-2	$-\frac{1}{5}$
2	Soit K le point de $[PQ]$ tel que $\frac{KQ}{KP} = \frac{1}{5}$ . L'homothétie de centre K qui transforme P en Q à pour rapport :	5	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$
3	On donne $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QA}$ . L'homothétie qui transforme Q en P est :	$h_{(A;\frac{1}{2})}$	$h_{(A;\frac{3}{2})}$	$h_{(A;-\frac{1}{2})}$
	Si $h_{(O;\frac{1}{3})}(G) = H$ , alors :	$\overrightarrow{GH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OH}$	$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OH}$	$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OG}$

#### 1) Construire l'image d'un point par une homothétie ; Déterminer une homothétie.

#### Exercice 3\*

Exprimer les propositions suivantes sous la forme d'une égalité vectorielle :

- 1) A est l'image de B par l'homothétie de centre I et de rapport  $\frac{3}{4}$
- 2) M a pour image P par l'homothétie de centre R et de rapport - 5.
- 3) L'homothétie de centre O et de rapport  $-\frac{1}{2}$  transforme le point F en S
- 4) L'homothétie de centre A et de rapport  $k$  qui transforme D en C

#### Exercice 4

Interpréter en utilisant une homothétie les égalités vectorielles suivantes :

$$\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BA} \quad ; 2) \quad 2\overrightarrow{MN} = -5\overrightarrow{MP} \quad ; 3) \quad \frac{3}{2}\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RG} .$$

### Exercice 5\*

Les affirmations sont-elles vraies ou fausses ? Justifier

- 1) Si  $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$ , alors B est l'image de C par l'homothétie de centre A et de rapport 3.
- 2) Si  $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$ , alors C est l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport 3.
- 3) Si  $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$ , alors C est l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport  $\frac{1}{3}$ .
- 4) Si  $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$ , alors B est l'image de A par l'homothétie de centre C et de rapport -2.
- 5) Si  $C = h_{(A;-4)}(B)$ , alors  $\overrightarrow{AB} = -4\overrightarrow{BC}$
- 6) Si  $C = h_{(A;-4)}(B)$ , alors  $\overrightarrow{AC} = -4\overrightarrow{AB}$
- 7) Si  $C = h_{(A;-4)}(B)$ , alors  $5\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$

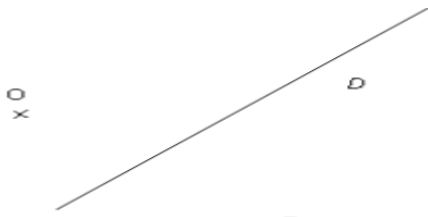
### Exercice 6

On considère trois points O, A et B alignés tels que :  $AB = 6\text{cm}$ ,  $AO = 3\text{cm}$   $O \in [AB]$

- 1) Construire l'image A' du point A par l'homothétie de centre O et de rapport 2.
- 2) Construire l'image B' du point B par l'homothétie de centre O et de rapport  $-\frac{2}{3}$ .

### Exercice 7

Soit  $h$  l'homothétie de centre O et de rapport 2,5. Construire l'image de la droite D par  $h$



### Exercice 8

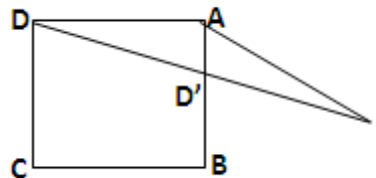
ABCD est un carré. D' est un point du segment

$[DI]$ .  $h$  est l'homothétie de centre I

qui transforme le point D en D'.

Construire  $h(A) = A'$ ,  $h(B) = B'$

$h(C) = C'$ , et  $h(D) = D'$



### Exercice 9

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . On désigne par  $h$  l'homothétie de centre  $A(-1; 2)$  et de rapport -2.

1. Déterminer les coordonnées du point B' image de B  $(1; 3)$  par  $h$ .
2. Déterminer les coordonnées du point C dont l'image par  $h$  est C'  $(3; -2)$ .

### Exercice 10

ABC est un triangle de centre de gravité G. On donne C', B', A' les milieux respectifs des côtés  $[AB]$ ,  $[AC]$  et  $[BC]$ .

Démontrer qu'il existe une homothétie  $h$  de centre G qui transforme ABC en A'B'C'

### Exercice 11

Soit ABC un triangle et G son centre de gravité. A' B' et C' sont les milieux respectifs des côtés [BC], [AC] et [AB].

- 1) Quel est le rapport de l'homothétie de centre A qui transforme B en C ?
- 2) Quel est le rapport de l'homothétie de centre C' qui transforme A en B ?
- 3) Quel est le rapport de l'homothétie de centre A qui transforme A' en G ?
- 4) Quel est le rapport de l'homothétie de centre A qui transforme A' en A ?
- 5) Quel est le rapport de l'homothétie de centre A qui transforme A en A ?

### Exercice 12\*

Détermine le rapport de l'homothétie de centre A qui transforme B en C dans les cas suivants :

1.  $\vec{AC} + 3\vec{AB} = \vec{0}$  ; 2.  $\vec{BC} - 4\vec{BA} = \vec{0}$  ; 3.  $\vec{BC} = 2\vec{BA}$

### Exercice 13

Dans chacun des cas, déterminer le rapport de l'homothétie de centre A qui transforme le point B en C.

a)  $-2\vec{BA} = \vec{AC}$  ; b)  $-\frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{CA} = \vec{0}$  ; c)  $-3\vec{AB} = \vec{BC}$  ; d)  $\vec{AC} = -5\vec{CB}$ .

1.  $\vec{AB} + 2\vec{AC} = \vec{0}$  ; 2.  $\vec{BC} - 2\vec{AB} = 2\vec{AC}$  ; 3.  $-\frac{5}{2}\vec{AB} + \vec{CA} = \frac{3}{4}\vec{AC}$

### Exercice 14

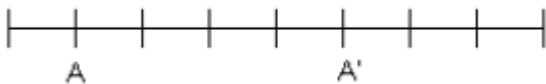
A, B et C sont trois point du plan tels que :  $\vec{AC} = -2\vec{BC}$ .

Dans chaque cas, déterminer le rapport de l'homothétie :

- 1) de centre B et qui transforme le point A en C ;
- 2) de centre C et qui transforme le point A en B ;
- 3) de centre A et qui transforme le point C en B.

## 2) utilisation des propriétés sur les homothéties

### Exercice 15\*



- 1)  $h$  est l'homothétie de centre O et de rapport -3 qui transforme A en A'. Construire O
- 2)  $h'$  est l'homothétie de centre O' et de rapport  $\frac{1}{3}$  qui transforme A en A'. Construire O'

### Exercice 16

ABC est un triangle. I un point du segment [AB].  $h$  est l'homothétie de centre I qui transforme le point A en B. Faire une figure puis construire  $h(B) = B'$  et  $h(C) = C'$ .

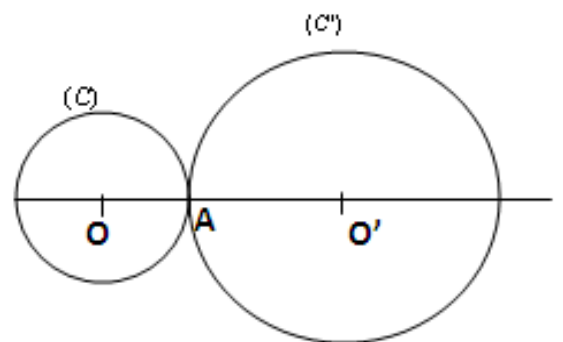
### Exercice 17

On donne deux cercles (C) et (C') tangents en A.

On suppose que  $OA=4\text{cm}$  ;  $O'A=6\text{cm}$ .

1) Montre que O' est l'image de O par une homothétie de centre A. (Tu détermineras le rapport de cette homothétie.)  
Dédus-en que (C') est l'image de (C) par cette homothétie.

- 2) Une droite (D) passant par A coupe (C) en M et (C') en M'.
- Une droite ( $\Delta$ ) passant par A coupe (C) en N et (C') en N'.
- Montre que  $(MN) \parallel (M'N')$ .



### 3) Caractérisation des homothéties

#### Exercice 18

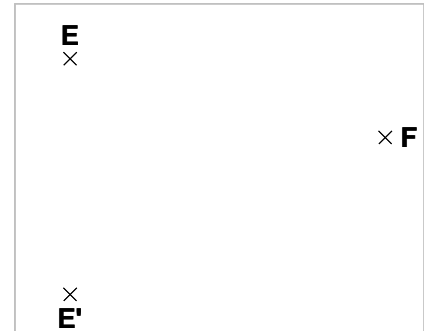
Soit  $\beta$  un nombre réel non nul et  $h$  l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $\beta$ . Soit  $A$  et  $B$  deux points quelconques d'images respectives  $A'$  et  $B'$  par  $h$ .

- 1) Exprimer  $\overrightarrow{OA'}$  en fonction de  $\overrightarrow{OA}$  et  $\overrightarrow{OB'}$  en fonction de  $\overrightarrow{OB}$ .
- 2) En déduire  $\overrightarrow{A'B'}$  en fonction de  $\overrightarrow{AB}$ .

#### Exercice 19

Soit  $h$  une homothétie de rapport 3 ;  $E'$  et  $F'$  les images respectives par  $h$  de  $E$  et  $F$ . En utilisant la propriété fondamentale de l'homothétie :

- 1) Exprimer  $\overrightarrow{E'F'}$  en fonction de  $\overrightarrow{EF}$ .
- 2) Construire le point  $F'$ .



#### Exercice 20

- 1) Sur chacune des figures ci-dessous, construire l'image  $M'$  du point  $M$  par l'homothétie qui transforme le point  $A$  en  $A'$  et le point  $B$  en  $B'$ .
- 2) Placer le centre de cette homothétie sur chaque figure.

Figure 1

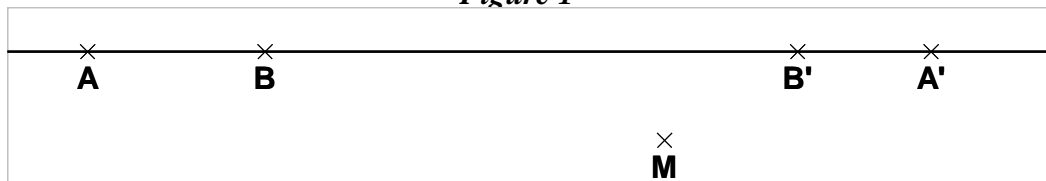
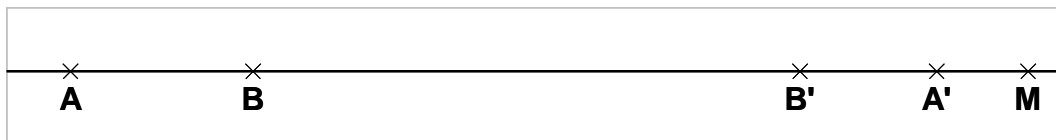
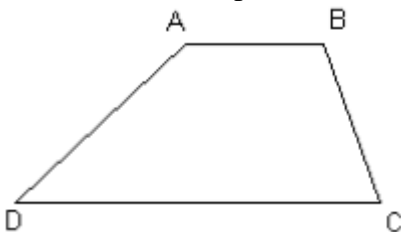


Figure 2



#### Exercice 21\*

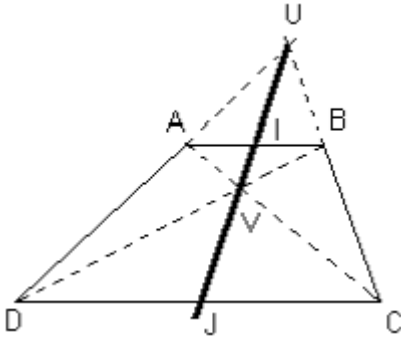
Soit  $ABCD$  un trapèze de base  $[AB]$  et  $[CD]$  tel que  $AB \neq CD$



- 1) Démontrer qu'il existe deux homothéties transformant  $[AB]$  en  $[CD]$
- 2) Quelle relation y a-t-il entre les rapports de ces deux homothéties.

**Exercice 22\***

ABCD est un trapèze de bases [AB] et [CD] de milieux respectifs I et J. Les droites (AB) et (BC) se coupent U ; les droites (AC) et (BD) se coupent en V.



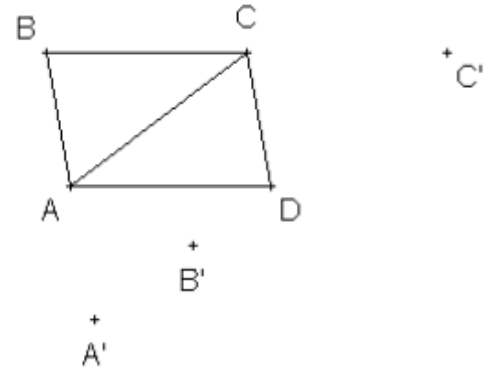
Démontrer que U, V, I et J sont alignés.

**Exercice 23\***

Soit ABCD un parallélogramme On construit les points suivants :

- A', symétrique de B par rapport à A.
- B' symétrique de B par rapport à (AC)
- C' symétrique de B par rapport à C.

Démontrer que les quatre points A', B', C' et D sont alignés.



**Exercice 24\***

Soit ABCD un rectangle tel que  $AB = 4$  et  $AD = 3$ . Soit M le point défini par  $\overrightarrow{DM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DB}$ .

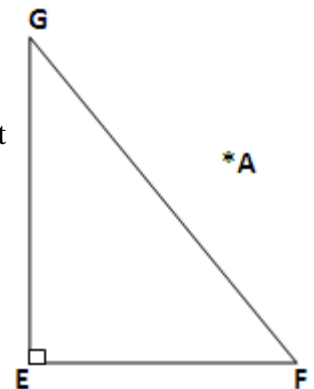
P est le projeté orthogonal de M sur (CD) et Q est le projeté orthogonal de M sur (AD).

- 1) Montrer que  $\overrightarrow{DP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$
- 2) Soit  $h$  l'homothétie de centre D et de rapport  $\frac{3}{2}$ . Déterminer  $h(B)$ ,  $h(C)$  et  $h(A)$ .
- 3) Quelle est la nature du quadrilatère MPDQ ? Déterminer son périmètre et son aire.

**Exercice 25**

Soit EFG un triangle rectangle en E tel que  $EF = 3$  ;  $GE = 4$  et A est un point du plan. On considère l'homothétie  $h$  de centre A et de rapport  $-3$ .

- 1) Traduire par une égalité vectorielle, chacune des égalités suivantes :
- 2)  $h(F) = F'$  ;  $h(G) = G'$  et  $h(E) = E'$ .
- 3) Reproduire la figure ci-dessous puis construire l'image du triangle EFG .
  - a- Démontrer que  $\overrightarrow{F'G'} = -3\overrightarrow{FG}$  puis calculer les distances  $F'G'$  et FG
  - b- Soit A l'aire du triangle EFG. Calculer A' puis déduire l'aire A' de l'image du triangle E'F'G'.



**CHAPITRE XIII : ETUDE DE FONCTIONS ELEMENTAIRES**

**Exercices de fixation**

**Exercice 1**

Parmi les fonctions suivantes, indique par une croix celles qui représentent des fonctions affines par intervalles.

N°	Propositions	Choix de l'élève
01	$f(x) = -3x + 2$	
02	$\begin{cases} g(x) = 2x & \text{si } x < -1 \\ g(x) = -2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$	
03	$h(x) =  -x $	
04	$\begin{cases} r(x) = x^2 + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ r(x) = -x - 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$	
05	$\begin{cases} r(x) = \frac{1}{x} + 1 & \text{si } x \leq -3 \\ r(x) = x - \frac{11}{3} & \text{si } x > -3 \end{cases}$	
06	$h(x) =  -x + 5 $	

**Exercice 2**

Pour chacune des propositions suivantes, trois réponses sont proposées. Une seule de ces trois réponses est juste. Entoure la bonne réponse.

N°	propositions	Réponses		
		A	B	C
1	Soit la fonction numérique $f$ définie par $f(x) = x^2$ . alors	La fonction $f$ est croissante sur $]-\infty; 0]$	La fonction $f$ est décroissante sur $]-\infty; 0]$	La fonction $f$ est croissante sur $\mathbb{R}$
2	La fonction $f$ est la fonction carrée. Alors on a :	L'ensemble de définition de $f$ est $\mathbb{R}$ .	L'ensemble de définition de $f$ est $[0; +\infty[$ .	L'ensemble de définition de $f$ est $]-\infty; 0]$ .
3	La fonction $g$ est la fonction cube. Alors on a :	$g(-3) = -9$	$g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$	$g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$
4	La fonction $h$ est la fonction inverse. Alors on a :	$h(10) = -10$	$h\left(\frac{1}{2}\right) = -2$	$h(3) = \frac{1}{3}$
5	Sur l'intervalle $]-1; 1[$ , la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est :	décroissante	ni décroissante, ni croissante	croissante
6	La fonction racine carrée est :	Décroissante sur $[0; +\infty[$ .	croissante sur $[0; +\infty[$ .	croissante sur $]-\infty; 0]$
7	La fonction $k : x \mapsto \sqrt{x}$ vérifie :	$k(100) = 10$	$k\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$	$k(9) = -3$

## 1) Etude de fonctions affines par intervalles

### Exercice 3\*

On considère la fonction  $f$  affine par intervalles définie par :

$$\begin{cases} \text{pour } x \in [-4; -2[; f(x) = -x + 5 \\ \text{pour } x \in [-2; 4[; f(x) = 3 \\ \text{pour } x \in [4; 5]; f(x) = 4x \end{cases}$$

- 1) Déterminer  $D_f$ , l'ensemble de définition de  $f$ .
- 2) Calculer l'image par  $f$  des nombres suivants : -4 ; -2 ; 4 et 5.
- 3) Représenter graphiquement la fonction  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; I; J)$  unité 2cm.

### Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O; I; J)$ . On considère la fonction  $f$  définie par :

$$\begin{cases} \text{pour } x \in [-3; -1[; f(x) = -x - 3 \\ \text{pour } x \in [-1; 2[; f(x) = 2x \\ \text{pour } x \in [2; 5]; f(x) = 4 \end{cases}$$

- 1) Justifier que  $f$  est une fonction affine par intervalles.
- 2) Calculer l'image par  $f$  de chacun des nombres réels suivants : -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 2 et 5.
- 3) Construire la représentation graphique  $(C_f)$  de la fonction  $f$  dans le repère  $(O; I; J)$ .

### Exercice 5\*

On considère la fonction numérique  $f$  définie par :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto |3x - 1|$$

Justifier que  $f$  est une fonction affine par intervalles (exprimer  $f$  sans les barres de valeurs absolues).

### Exercice 6

Soit  $f$  une fonction telle que  $f(x) = |x + 3| + |x - 4|$ .

- 1) Exprimer  $f$  sans les barres de valeurs absolues suivant la valeur de  $x$ .
- 2) Tracer dans le plan muni d'un repère  $(O; I; J)$ , la courbe  $(C_f)$  de  $f$  unité graphique 2cm.
- 3) Résoudre graphiquement les équations  $f(x) = 2$  et  $f(x) = x$ .

### Exercice 7

Les tarifs d'un taxi sont décrits comme suit :

« La prise en charge est de 60 F, le prix du Km est de 39 F. Si la course fait plus de 10 Km, la prise en charge est de 160 F et le prix au Km est de 29 F.

- 1) Exprimer le prix  $P$  en fonction de la longueur  $x$  de la course.
- 2) Représenter la fonction  $P$  qui associe à la longueur  $x$  de la course, le prix  $P(x)$  de la course ( $1cm \mapsto 5Km$  ;  $1cm \mapsto 100F$ ).

### Exercice 8

Le tableau ci-dessous est le tableau de variation d'une fonction affine par intervalles  $f$ .

$x$	-3	-1	4	7
$f(x)$	2	-5	3	1

- 1) Représenter graphiquement  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; I; J)$ . *unité graphique 1cm.*
- 2) Définir explicitement cette fonction  $f$  (Donner l'expression de  $f$ ).

**2) Etudes des fonctions élémentaires (fonction valeur absolue ; fonction carrée ; fonction inverse ; fonction racine carrée ; fonction cube).**

### Exercice 9\*

On veut étudier la fonction valeur absolue

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto |x|$$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$ .
- 2) Ecrire  $f(x)$  sans les barres de valeur absolue.
- 3) Dresser un tableau de valeur de  $f$ .
- 4) représenter  $(C_f)$  dans un repère orthonormé.

### Exercice 10

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = |3x - 5| - 1$ .

- 1) Prouver que  $g(x)$  peut s'exprimer par :

$$\begin{cases} g(x) = -3x + 4 & \text{si } x \leq \frac{5}{3} \\ g(x) = 3x - 6 & \text{si } x \geq \frac{5}{3} \end{cases}$$

- 2) Construire la courbe représentative de  $g$ .
- 3) Utiliser la courbe représentative de  $g$  pour déterminer et représenter les solutions de l'inéquation :  $|3x - 5| - 1 \leq 2$ .

### Exercice 11

On donne la fonction  $f$  définie par :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2$$

- 1) Déterminer  $D_f$ , l'ensemble de définition de  $f$ .
- 2) Déterminer le sens de variation de  $f$  puis dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 3) a) Compléter le tableau de variation suivant :

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$									

- b) Dans un repère orthonormé  $(O; I; J)$ , construire la courbe  $(C_f)$  de  $f$  sur l'intervalle  $[-4; 4]$ .

**Exercice 12\***On donne la fonction  $f$  définie par :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

- 1) Déterminer  $D_f$ , l'ensemble de définition de  $f$ .
- 2) Déterminer le sens de variation de  $f$  puis dresser le tableau de variation de  $f$
- 3) a) Compléter le tableau de variation suivant :

$x$	0	1	4	9	16
$f(x)$					

b) Dans un repère orthonormé  $(O;I;J)$ , construire la courbe  $(C_f)$  de  $f$  sur l'intervalle  $[0;16]$  **unité****1cm.****Exercice 13**On donne la fonction  $f$  définie par :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

- 1) Déterminer  $D_f$ , l'ensemble de définition de  $f$ .
- 2) Déterminer le sens de variation de  $f$  puis dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 3) a) Compléter le tableau de variation suivant :

$x$	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
$f(x)$															

b) Dans un repère orthonormé  $(O;I;J)$ , Construire la courbe  $(C_f)$  de  $f$  sur l'intervalle  $[-4;4]$  **unité****1cm.****Exercice 14**On donne la fonction  $f$  définie par :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^3$$

- 1) Déterminer  $D_f$ , l'ensemble de définition de  $f$ .
- 2) Déterminer le sens de variation de  $f$  puis dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 3) a) Compléter le tableau de variation suivant :

$x$	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

b) Dans un repère orthonormé  $(O;I;J)$ , construire la courbe  $(C_f)$  de  $f$  sur l'intervalle  $[-2;2]$  **unité****1cm.**

### 3) Utilisation des fonctions élémentaires

#### Exercice 15

Dans chaque cas utiliser le sens de variation de la fonction carrée et sa courbe représentative pour compléter :

- 1) Lorsque  $x \leq -4$  on a :  $x^2$  .....
- 2) Lorsque  $x \geq \sqrt{2}$  on a :  $x^2$  .....
- 3) Lorsque  $1 \leq x \leq 5$  on a : .....  $x^2$  .....
- 3) Lorsque  $-2 \leq x \leq 0$  on a : .....  $x^2$  .....
- 4) Lorsque  $-4 \leq x \leq 3$  on a : .....  $x^2$  .....
- 5) Lorsque  $x^2 \leq 4$  on a : .....  $x$  .....
- 6) Lorsque  $x \geq 1$  on a : .....  $x$  ou  $x$  .....

#### Exercice 16

$f$  est la fonction carrée et  $(C_f)$  est sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; I; J)$ .

- 1) Trouver les coordonnées des points A et B d'abscisses respectives 1 et 2, situés sur la courbe  $(C_f)$ .
- 2) Tracer la courbe  $(C_f)$  et la droite  $(AB)$ .
- 3) Ecrire une équation de la droite  $(AB)$ .
- 4) Montrer que si un point  $M(x; y)$  appartient à  $(C_f)$  et à la droite  $(AB)$ ,

on a  $x^2 - 3x + 2 = 0$

- 5) Montrer que  $x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$ , puis déduire que les seuls points communs à la droite  $(AB)$  et la courbe  $(C_f)$  sont les points A et B.

#### Exercice 17

Le plan est muni du repère  $(O; I; J)$ .

- 1) Tracer sur le même graphique, les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$  définies respectivement par  $f(x) = |x|$  et  $g(x) = x^2$ .
- 2) Résoudre graphiquement l'équation  $|x| = x^2$ .
- 3) Résoudre graphiquement l'équation  $x^3 = 3x + 2$ .

#### Exercice 18

Le plan est muni du repère  $(O; I; J)$ .

On considère les fonctions numériques  $f$  et  $g$  définies par  $f(x) = x|x|$  et  $g(x) = x^3$ .

- 1) Etudier les variations de  $f$  et tracer sa courbe représentative  $(C_f)$ .
- 2) Tracer sur le même graphique la courbe représentative  $(C_g)$  de la fonction  $g$ .
- 3) a- Résoudre graphiquement l'équation  $f(x) = g(x)$ .  
b- comparer, pour tout réel  $x$ ,  $f(x)$  et  $g(x)$ .

## SITUATION D'ÉVALUATION

L'entreprise **7 com** offre tous les samedis des tarifs de communication suivants :

A partir de 7 minutes le client peut communiquer sans payer des frais supplémentaires.

Curieux, les élèves de 2<sup>nde</sup> C décident d'étudier ce type de facturation.

Soit  $f$  la fonction qui à chaque minute de communication, associe le montant total de la somme à payer.

- 1) Donne l'expression de  $f$  sur chacun des intervalles du tableau.
- 2) Justifie que  $f$  est croissante.
- 3) Représente graphiquement  $f$ .
- 4) Détermine le montant total à payer pour des communications en minute de 0 ; 7 ; 2 ; 3 ; 5 et 10.

Intervalle de temps de communication en minutes	Facturation de la minute
]0;1]	100 F
]1;2]	90 F de plus
]2;3]	70 F de plus
]3;4]	60 F de plus
]4;5]	40 F de plus
]5;6]	20 F de plus
]6;7]	10 F de plus

**CHAPITRE XIV : ROTATIONS**

**Exercices de Fixation**

**Exercice 1**

Pour chacune des propositions ci-dessous, mets une croix dans la colonne qui convient.

N	Propositions	Vrai	Faux
01	Si ABC est un triangle rectangle isocèle en A tel que $Mes(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{4}$ alors la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$ transforme A en C.		
02	Si une rotation de centre O transforme A en B et C en D alors le point O appartient à la médiatrice de $[AB]$ et à celle de $[BC]$ .		
03	Si un angle a pour mesure $15^\circ$ alors son image par une rotation est un angle de mesure $30^\circ$ .		
04	Si un point O du plan et un nombre réel $\theta$ appartenant à l'intervalle $]-\pi; \pi]$ et si alors $r_{(O;\theta)}(C) = B$ alors $r_{(O;\theta)}(B) = C$ .		
05	Si ABC est un triangle rectangle et isocèle en A de sens direct, alors $r_{\left(A; \frac{\pi}{2}\right)}(B) = C$ .		

**Exercice 2**

Pour chacune des propositions suivantes, trois réponses sont proposées. Une seule de ces trois réponses est juste. Entoure la bonne réponse.

N°	propositions	Réponses		
		A	B	C
1	Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct. La rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$ transforme le point C en :	A	B	C
2	Soit QR un triangle rectangle isocèle en R de sens direct et I le milieu de l'hypoténuse. Le quart de tour indirect de centre I transforme le point P en :	P	Q	R
3	Soit ABC un triangle équilatéral de centre O tel que. La rotation de centre O qui transforme B en C a pour angle :	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$

**1) Construire l'image d'un point par une rotation ; Détermination d'une rotation**

**Exercice 3**

O ; A et E sont trois points distincts du plan.

- 1) Construire l'image E' du point E par la rotation de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ .
- 2) Construire l'image A' du point A par la rotation de centre O et d'angle  $-\frac{2\pi}{3}$ .

**Exercice 4\***

ABC est un triangle équilatéral de sens direct de centre de gravité G.  $r$  est la rotation de centre G et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$ .

Déterminer l'image de chacun des sommets du triangle ABC par  $r$

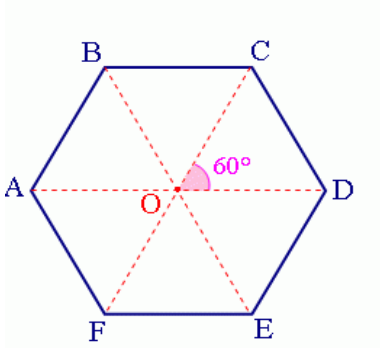
### Exercice 5

Soit  $(D)$  une droite et  $O$  un point n'appartenant pas à  $(D)$ .

Construire l'image  $(D')$  de la droite  $(D)$  par la rotation centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

### Exercice 6\*

ABCDEF est un hexagone régulier de centre  $O$ . On a  $Mes(\overrightarrow{OD}; \overrightarrow{OC}) = 60^\circ$ .



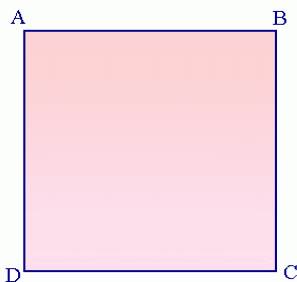
1. Quelle est l'image de  $C$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $60^\circ$  dans le sens des aiguilles d'une montre ?
2. Quelle est l'image de  $E$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $120^\circ$  dans le sens des aiguilles d'une montre ?

#### correction

1.  $OC = OD$  (car ABCDEF est un hexagone régulier) et  $mes\ COD = 60^\circ$   
Donc  $D$  est l'image de  $C$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $60^\circ$  dans le sens des aiguilles d'une montre.
2.  $OE = OA$  (car ABCDEF est un hexagone régulier) et  $mes\ EOA = 120^\circ$   
Donc  $A$  est l'image de  $E$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $120^\circ$  dans le sens des aiguilles d'une montre.

### Exercice 7\*

On considère un carré ABCD.



1. Quelle est l'image de  $A$  par la rotation de centre  $D$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  dans le sens indirect.
2. Quelle est l'image de  $A$  par la rotation de centre  $B$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  dans le sens direct.

#### correction

1.  $DA = DC$  (car les quatre côtés du carré ont même mesure) et  $mes(\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DC}) = -\frac{\pi}{2}$   
alors  $r_{(D; -\frac{\pi}{2})} A = C$  donc  $C$  est l'image de  $A$  par la rotation de centre  $D$  et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ .

2.  $BA = BC$  (car les quatre côtés du carré ont même mesure) et  $mes(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{2}$  alors  $r_{(B; \frac{\pi}{2})} A = C$  donc

C est l'image de A par la rotation de centre B et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

### Exercice 8

Soit OAB un triangle isocèle de sommet principal O tel que :  $Mes(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{4}$ .

1) Déterminer les points  $r_{(O; \frac{\pi}{4})}(A)$  et  $r_{(O; -\frac{\pi}{4})}(B)$ .

2) Construire, à la règle et au compas, les points :  $r_{(O; -\frac{\pi}{4})}(A)$  ;  $r_{(O; \frac{\pi}{4})}(B)$  ;  $r_{(A; \frac{3\pi}{8})}(B)$  ; ;

$r_{(B; \frac{3\pi}{8})}(O)$  et  $r_{(A; -\frac{3\pi}{8})}(O)$ .

### 2) Utilisation des propriétés sur les rotations

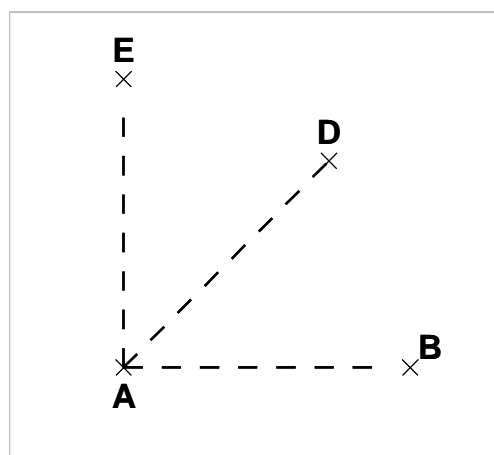
#### Exercice 9\*

On considère la figure suivante :

$r$  est la rotation de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ .

On donne  $D = r_{(A; \frac{\pi}{4})}(B)$  et  $E = r_{(A; \frac{\pi}{4})}(D)$ .

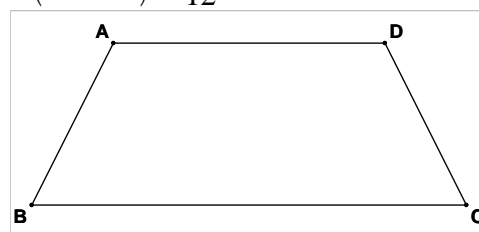
- 1) Montrer que  $AB = AE$ .
- 2) Montrer que  $(AB) \perp (AE)$ .
- 3) Déduire la nature du triangle ABE.



#### Exercice 10

Soit ABCD un trapèze isocèle de bases  $[AD]$  et  $[BC]$  tel que  $Mes(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) = \frac{5\pi}{12}$ .

- 1) Trouver une rotation transformant le point A en D et le point B en C (préciser son centre et son angle).
- 2) Trouver une rotation transformant le point A en C et le point B en D. (préciser son angle).



#### Exercice 11\*

A et B sont deux points du plan tels que  $AB = 6cm$ .  $r$  est la rotation de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .

- 1) On note C l'image de B par  $r$ . Démontrer que ABC est un triangle équilatéral.
- 2) D est l'image de C par  $r$ .
  - a- calculer l'aire du triangle ABC.
  - b- en déduire l'aire du triangle ACD.

### Exercice 12\*

ABCD est un carré de sens direct.  $r$  est la rotation de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{2}$

- 1) Quelle est l'image de B par  $r$  ?
- 2) On note E l'image de D par  $r$ . Démontrer que le point D appartient à la médiatrice du segment  $[BE]$ .
- 3) Construire le point F, image de C par  $r$ .

### Exercice 13

Soit ABC un triangle équilatéral tel que :  $\text{Mes}(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$ , G sont centre de gravité et A', B', C' les milieux respectifs des segments [BC], [AC],[AB].

1) Déterminer :

a)  $r_{(B; \frac{\pi}{3})}(C)$  , b)  $r_{(A; \frac{\pi}{3})}(B)$  , c)  $r_{(C; \frac{\pi}{3})}(A)$

2) Déterminer le centre et l'angle de rotation qui transforme A en B, B en C et C en A.

### Exercice 14\*

ABCD est un carré de sens direct et de centre I.  $r$  est le quart de tour direct de centre A. M est le point de la demi-droite  $[CB)$  distinct de B et C. La perpendiculaire à la droite  $(AM)$  coupe la droite  $(DC)$  en P.

- 1) Faire une figure.
- 2) Quelle est l'image de B par  $r$  ? Justifier.
- 3) Démontrer que  $r(C)$  est le symétrique de C par rapport à D.
- 4) Démontrer que le point P est l'image de M par  $r$ .

### Exercice 15

ABC est un triangle.  $f$  l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' défini par  $3\overrightarrow{AM'} - 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$ .

- 1) Déterminer les images des points A, B et C par  $f$ .
- 2) Montrer qu'il existe un unique point G invariant par  $f$  (G est tel que  $f(G) = G$ ).
- 3) Démontrer que  $f$  est une homothétie de centre G dont on précisera le rapport.

## SITUATION D'EVALUATION

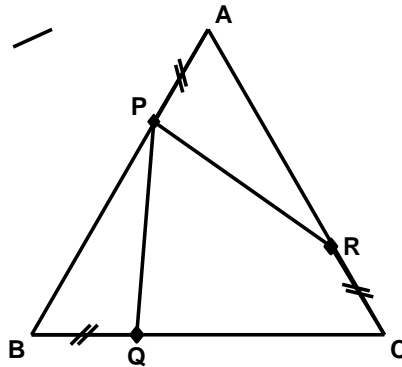
Un collier a la forme d'un triangle équilatéral  $ABC$ . Les points  $P$ ,  $Q$  et  $R$  sont tels que :

$$AP = BQ = CR.$$

En observant le collier, un élève affirme que  $PQR$  est un triangle équilatéral. Les autres élèves veulent vérifier cette affirmation.

On note  $O$  le centre du triangle  $ABC$  et  $r$  la rotation de centre  $O$ , d'angle  $120^\circ$  et de sens positif.

- 1-Déterminer les images des points  $A$ ,  $B$  et  $C$  par cette rotation
- 2-En déduire l'image du point  $P$  par  $r$ .
- 3-Justifier que l'affirmation de l'élève est vérifiée.



**CHAPITRE XV : INEQUATIONS DANS  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$**

**Exercice de fixation**

**Exercice 1**

Pour chaque ligne du tableau, une seule réponse est juste. Ecris dans la dernière colonne du tableau, le numéro de l'affirmation et la lettre qui correspond à la réponse juste

*(Format de réponse : 1 – A par exemple)*

N <sup>0</sup>	PREPOSITIONS	Réponse A	Réponse B	Réponse C	Choix de l'élève
1	Le système $\begin{cases} -x + y = 7 \\ 8x + y = 5 \end{cases}$ a pour déterminant :	$\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}$	
2	$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}$ est égal	$-1 \times 1 + 8 \times 1$	$-1 \times 1 - 8 \times 1$	$8 \times 1 + 1 \times 1$	
3	Si le déterminant d'un système linéaire d'équations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est non nul, alors ce système :	N'a aucune solution	A une seule solution	A une infinité de solution	
4	Un système linéaire d'inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est formé :	D'une inéquation à deux inconnues	De plusieurs inéquations à deux inconnues	De plusieurs inéquations à plusieurs inconnues	

**Exercice 2**

Réponds par Vrai (V) ou par Faux (F)

N	Propositions	Réponses
01	Un système d'équations à deux inconnues peut avoir plusieurs solutions	
02	Le déterminant d'un système d'équations à deux inconnues est un couple de nombres réels	
03	Le déterminant d'un système d'équations à deux inconnues est unique	
04	Lorsque le déterminant d'un système est nul, ce système n'admet pas de solution	
05	Le système suivant $\begin{cases} 2x + 3y = 16 \\ -5x + 2y = -21 \end{cases}$ a pour solution $(-1; 0)$ :	

**1) Déterminant d'un système d'équations linéaires dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  et applications**

**Exercice 3\***

Soit le système (S) définie par (S):  $\begin{cases} x + 2y - 2 = 0 & (E_1) \\ \frac{1}{2}x + y - 2 = 0 & (E_2) \end{cases}$ .

Calculer le déterminant du système (S).

#### Exercice 4\*

On donne les systèmes  $(S)$  et  $(S')$  suivant :  $(S) : \begin{cases} 2x - y - 3 = 0 & (E_1) \\ x - 2y - 6 = 0 & (E_2) \end{cases}$  et

$$(S') : \begin{cases} (\sqrt{3} - 2)x + y = 2 & (E_1) \\ -x + (2 + \sqrt{3})y = 1 & (E_2) \end{cases} .$$

- 1) Calculer le déterminant du système  $(S)$  et de  $(S')$ .
- 2) Résoudre les systèmes  $(S)$  et  $(S')$  dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  par combinaison.

#### Exercice 5

On donne les systèmes  $(S)$  et  $(S')$  suivant :  $(S) : \begin{cases} (\sqrt{2} - 1)x + y = 0 & (E_1) \\ x + (\sqrt{2} + 1)y = 0 & (E_2) \end{cases}$  et

$$(S') : \begin{cases} 7x - 2y = 6 & (E_1) \\ -3x + 4y = 8 & (E_2) \end{cases}$$

- 1) Calculer le déterminant du système  $(S)$  et de  $(S')$ .
- 2) Résoudre le système  $(S)$  et  $(S')$  dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  par substitution

#### Exercice 6

Résoudre graphiquement dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , l'inéquation d'inconnue  $(x; y) : -x + 3y + 3 \leq 0$ .

#### Exercice 7

Résoudre graphiquement dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , le système d'inéquations  $(\Gamma)$  définie par :  $(\Gamma) : \begin{cases} x - y + 4 < 0 \\ 2x + y - 2 < 0 \end{cases}$ .

### 2) Interprétation géométrique des solutions de systèmes d'équations et d'inéquations de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et applications

#### Exercice 8

- 1) Dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; I; J)$ , représenter les droites  $(D)$  et  $(D')$  d'équations respectives  $3x - 4y + 5 = 0$  et  $-2x + y - 4 = 0$ .
- 2) Justifier que les droites  $(D)$  et  $(D')$  ne sont pas parallèles.
- 3) Calculer les coordonnées de leur point d'intersection.

#### Exercice 9\*

Soit le système  $(S)$  suivant :  $(S) : \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -3x + 4y = 2 \end{cases}$

- 1) Justifier que le système  $(S)$  a une seule solution.
- 2)  $(D_1)$  et  $(D_2)$  sont deux droites d'équations respectives  $2x - 3y - 1 = 0$  et  $-3x + 4y - 2 = 0$ . Etudier les positions relatives des droites  $(D_1)$  et  $(D_2)$ .

### Exercice 10

Soit le système  $(S)$  suivant :  $(S) : \begin{cases} x - 2y = 4 \\ -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y = -1 \end{cases}$ .

1) Justifier que le système  $(S)$  a une infinité de solutions.

2)  $(D_1)$  et  $(D_2)$  sont deux droites d'équations respectives  $x - 2y - 4 = 0$  et  $-\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + 1 = 0$ . Etudier les positions relatives des droites  $(D_1)$  et  $(D_2)$ .

### Exercice 11

Soit le système  $(S)$  suivant :  $(S) : \begin{cases} 2x - 4y = 5 \\ -3x + 6y = 10 \end{cases}$ .

1) Justifier que le système  $(S)$  n'a pas de solutions.

2)  $(D_1)$  et  $(D_2)$  sont deux droites d'équations respectives  $2x - 4y = 5$  et  $-3x + 6y = 10$ . Etudier les positions relatives des droites  $(D_1)$  et  $(D_2)$ .

### Exercice 12

Résoudre graphiquement chacun des systèmes suivants :  $(I_1) : \begin{cases} x + 2y - 3 \geq 0 \\ 2x - y - 2 \geq 10 \end{cases}$  ;  $(I_2) : \begin{cases} 2x - 3y \leq 5 \\ x \geq 2y - 3 \end{cases}$  ;

$(I_3) : \begin{cases} x - 2y - 8 \leq 0 \\ 5x - 2y - 10 \geq 0 \\ x - 4y < 0 \end{cases}$ .

## SITUATION D'EVALUATION

L'entreprise « Sabari », spécialisée dans la vente de produits agricoles a embauché des commerciaux. Les uns sous contrat 1 travaillant 35h et payées 55000 francs par semaine et les autres sous contrat 2 travaillant 20h et payée 22000 francs par semaine. Compte tenu d'une crise financière, le chef d'entreprise peut embaucher au plus 8 personnes sous contrat 1 et 15 personnes sous contrat 2. Chaque semaine, il dispose d'un budget de 506000 francs et 370 h de travail au moins doivent être effectuées. Il veut savoir le nombre de travailleurs sous contrat 1 et le nombre de travailleurs sous contrat 2 que l'entreprise peut embaucher.

On note  $x$  le nombre de personnes embauchées sous contrat 1 et  $y$  le nombre de personnes embauchées sous contrat 2.

1) Traduis les informations ci-dessus par un système d'inéquations.

2) Résous graphiquement ce système.

3) Le chef du personnel présente les trois cas suivants au chef d'entreprise :

**1<sup>er</sup> cas** : 7 personnes en contrat 1 et 7 personnes en contrat 2.

**2<sup>ème</sup> cas** : 4 personnes en contrat 1 et 12 personnes en contrat 2.

**3<sup>ème</sup> cas** : 2 personnes en contrat 1 et 14 personnes en contrat 2.

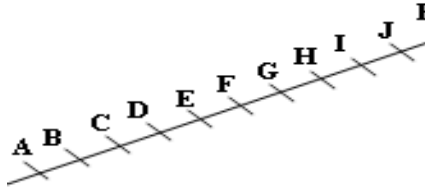
Dans chacun des cas, justifie si oui ou non le chef de l'entreprise « sabari » peut embaucher pour satisfaire ses besoins.

# **CORRIGES DE CERTAINS EXERCICES**

*NB* : *Les Numéros d'exercices avec des Astérix sont corrigés*

**Exercice 2**

Sur la droite ci-dessous, les graduations sont régulières.



Recopions chaque égalité et la complétons par le nombre réel qui convient.

$$\overrightarrow{BF} = 4 \overrightarrow{AB} ; \quad \overrightarrow{GD} = \frac{3}{2} \overrightarrow{EC} ; \quad \overrightarrow{HI} = -\frac{1}{4} \overrightarrow{EA} ; \quad \overrightarrow{KD} = -\frac{7}{5} \overrightarrow{CH} ; \quad \overrightarrow{EG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AG} ; \quad \overrightarrow{FD} = \frac{2}{5} \overrightarrow{FA}$$

**Exercice 9**

A et B sont deux points du plan tel que  $AB = 27cm$ .

On pose  $\vec{u} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$ . Calculons  $\|\vec{u}\| = \left\| -\frac{1}{3} \overrightarrow{AB} \right\| = \left| -\frac{1}{3} \right| \|\overrightarrow{AB}\| = 9$

**Exercice 10**

ABC est un triangle, I le milieu de [AB]

1. Montrons que pour tout point M du plan,  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{IM}$ .

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} + 2\overrightarrow{IM} \text{ Or } \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0} \text{ car I est le milieu de [AB]}$$

Donc  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{IM}$

2. Dans chacun des cas suivants, Déterminons l'ensemble (E) des points vérifiant la relation donnée :

- a) l'ensemble (E) des points vérifiant la relation donnée  $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB}$  est un parallélogramme.
- b) l'ensemble (E) des points vérifiant la relation donnée  $\overrightarrow{CM} = \alpha \overrightarrow{AB}$  est la parallèle à (AB) contenant C.
- c)  $\|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}\| = \|2\overrightarrow{IM}\| = 6$ . Alors  $IM = 3$  Donc M appartient au cercle de centre I et de rayon 3.

**Exercice 16**

1. Vérifions si les points A, B et C sont alignés, déterminons les coordonnées des vecteurs

$\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{BC}$ . On calcule donc les coordonnées de ces vecteurs :

•  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} ; \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6-2 \\ -1-(-3) \end{pmatrix} ; \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

•  $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} ; \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 8-6 \\ 0-(-1) \end{pmatrix} ; \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

On remarque que :  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  donc  $\overrightarrow{AB} = 2 \overrightarrow{BC}$

Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{BC}$  sont donc colinéaires.

Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{BC}$  sont colinéaires et ont un point commun : les points A, B et C sont donc alignés.

2. Montrons que les droites (AB) et (ID) sont parallèles, Déterminons les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{ID}$ .

Sachant que I(1 ;0), les coordonnées de ces vecteurs sont :

•  $\overrightarrow{ID} \begin{pmatrix} x_D - x_I \\ y_D - y_I \end{pmatrix} ; \overrightarrow{ID} \begin{pmatrix} 7-1 \\ 3-0 \end{pmatrix} ; \overrightarrow{ID} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

•  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$  en calculant le rapport des coordonnées de  $\overrightarrow{ID}$  sur celles de  $\overrightarrow{AB}$  on remarque :  $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

Donc :  $\overrightarrow{ID} = \frac{3}{2} \overrightarrow{AB}$  Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{ID}$  sont donc colinéaires.

Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{ID}$  sont colinéaires : les droites  $(AB)$  et  $(ID)$  sont donc parallèles.

**Exercice 17**

Soit un triangle ABC.

On appelle I le milieu du segment [AC].

On considère les points R et S définis par :  $\overrightarrow{BR} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{AS} = \frac{3}{2} \overrightarrow{AB}$ .

1. Démontrer que  $\overrightarrow{SR} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} \overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{SI} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$

2. Démontrer que les points R, S, I sont alignés.

Pour démontrer que les points R, S, I sont alignés, il suffit de démontrer que les vecteurs  $\overrightarrow{SI}$  et  $\overrightarrow{SR}$  (ou  $\overrightarrow{RS}$  et  $\overrightarrow{RI}$ , ou  $\overrightarrow{IS}$  et  $\overrightarrow{IR}$  ...) sont colinéaires.

**Exercice 24**

Le plan est muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on donne les vecteurs  $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$  et  $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$ .

1. Démontrons que  $(\vec{u}; \vec{v})$  est une base.

Calculons  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2$

$\det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$  alors  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont non colinéaires donc  $(\vec{u}; \vec{v})$  est une base.

2. Déterminons les coordonnées des vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  dans la base  $(\vec{u}; \vec{v})$ .

$\vec{i} = \frac{1}{2} \vec{u} + \frac{1}{2} \vec{v}$  et  $\vec{j} = \frac{1}{2} \vec{u} - \frac{1}{2} \vec{v}$

**Exercice 28**

1. Dans le repère  $(A; I; J)$ , A est l'origine ; donc :  $A(0; 0)$ .

Le point B :

- se situe sur l'axe des abscisses (AI), son ordonnée vaut donc : 0

- $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$ , son abscisse vaut donc : 2

donc :  $B(2; 0)$ .

De même, le point D :

- se situe sur l'axe des ordonnées (AJ), son abscisse vaut donc : 0

- $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AJ}$ , son ordonnée vaut donc : 2

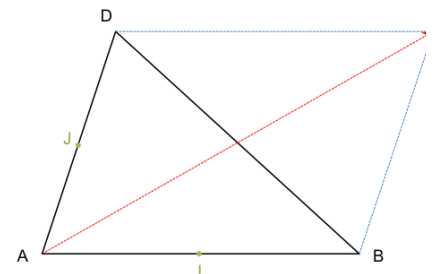
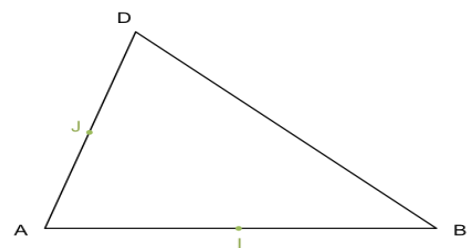
Donc :  $D(0; 2)$ . On a finalement :  $A(0; 0)$ ,  $B(2; 0)$  et  $D(0; 2)$ .

2. Les coordonnées de  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ ;  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  De même :  $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Finalement :  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 2+0 \\ 0+2 \end{pmatrix}$  donc  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme si et seulement si :  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$

On doit donc avoir :  $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  Or les coordonnées de  $\overrightarrow{AC}$  sont :



$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - 0 \\ y_C - 0 \end{pmatrix}$$

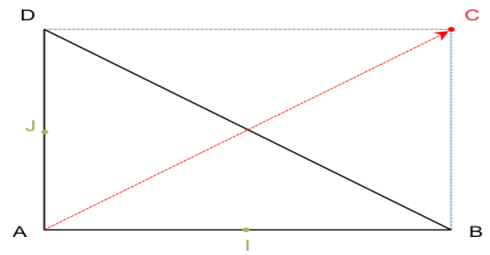
On a donc :  $x_C = 2$ ,  $y_C = 2$

Pour que  $ABCD$  soit un parallélogramme, on doit avoir :  $C(2; 2)$ .

4. Si  $ABD$  rectangle en  $A$

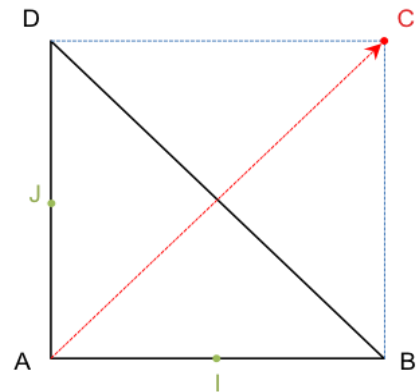
Dans ce cas de figure, le repère  $(A; I; J)$  est orthogonal et  $ABCD$  est un parallélogramme possédant un angle droit.

$ABCD$  est alors un rectangle.



• Si  $ABD$  rectangle isocèle en  $A$ .

Dans ce cas de figure, le repère  $(A; I; J)$  est orthonormal et  $ABCD$  est un parallélogramme possédant un angle droit et deux côtés consécutifs de même longueur ( $AB$  et  $AD$ ).  $ABCD$  est alors un carré.



### Exercice 29

1.a Dans cette figure, on a :

- b) • Les droites  $(AB)$  et  $(CJ)$  sont parallèles ;
- Les points  $B, I$  et  $C$  sont alignés dans cet ordre ;
- Les points  $D, I$  et  $J$  sont alignés dans cet ordre.

On peut donc appliquer le théorème de Thalès

$$\text{dans cette configuration : } \frac{IC}{IB} = \frac{IJ}{ID} = \frac{JC}{DB}$$

Or  $I$  est le milieu de  $[BC]$ , d'où :

$$IB = IC \text{ et donc } \frac{IB}{IC} = 1 \text{ On en déduit : } \frac{ID}{IJ} = 1, \text{ c'est-à-dire } ID = IJ.$$

Sachant que les points  $D, I$  et  $J$  sont alignés dans cet ordre, les vecteurs  $\overrightarrow{DI}$  et  $\overrightarrow{IJ}$

- ont même norme ; ont même direction ; ont même sens.

$$\text{Donc : } \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{IJ}$$

2. Les droites  $(AB)$  et  $(CJ)$  sont parallèles.

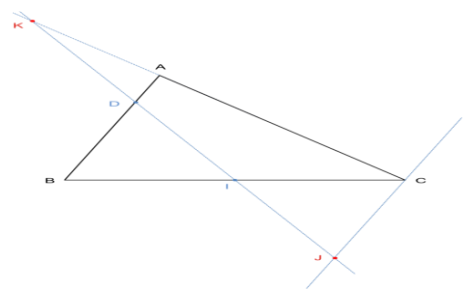
Donc d'après le théorème de Thalès dans le triangle  $KJC$  :

$$\frac{KA}{KC} = \frac{KD}{KJ} = \frac{AD}{JC}$$

Or, d'après la question précédente :  $\frac{JC}{DB} = \frac{IC}{IB} = 1$ , soit  $DB = JC$

$$\text{Donc : } \frac{KD}{KJ} = \frac{AD}{DB} \text{ Or, on a : } \overrightarrow{AD} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} \text{ Donc : } AD = \frac{1}{4} AB \text{ et } \overrightarrow{KJ} = \frac{3}{4} \overrightarrow{u}$$

$$\text{Donc : } \frac{AD}{DB} = \frac{1}{3} \text{ Et donc finalement : } \frac{KD}{KJ} = \frac{1}{3} \text{ Soit } \mathbf{KJ = 3KD}$$



3. D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

Finalement :  $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

4. Sachant que le vecteur  $\vec{u}$  est exprimé en fonction des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  on tente d'exprimer de même le vecteur  $\overrightarrow{KJ}$  en fonction de ces deux vecteurs :

$$\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IJ}$$

Or, on sait, d'après les questions précédentes, que :

- $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{IJ}$  et  $\overrightarrow{KD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{KJ}$  On a donc :  $\overrightarrow{KJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{KJ} + 2\overrightarrow{DI} \Leftrightarrow \frac{2}{3}\overrightarrow{KJ} = 2\overrightarrow{DI} \Leftrightarrow \overrightarrow{KJ} = 3\overrightarrow{DI}$

En reprenant l'expression de  $\overrightarrow{DI}$  en fonction de  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  établie dans la question précédente :

$$\overrightarrow{KJ} = 3\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = 3\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{4}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{3}{4}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}) = \frac{3}{4}\vec{u}$$

$$\overrightarrow{KJ} = \frac{3}{4}\vec{u} \text{ Les vecteurs } \overrightarrow{KJ} \text{ et } \vec{u} \text{ sont donc colinéaires.}$$

## CHAPITRE II : ENSEMBLE DES NOMBRES REELS

### Exercice 3

Simplifions les écritures des nombres suivants et précisons à quels ensembles ces nombres appartiennent.

$$A = \frac{\sqrt{5808}}{\sqrt{3675}} = \sqrt{\frac{5808}{3675}} = \sqrt{\frac{363 \times 16}{147 \times 25}} = \sqrt{\frac{11^2 \times 3}{7^2 \times 3}} \times \frac{4}{5} = \frac{44}{35} \text{ Donc } A \in \mathbb{Q} \text{ et aussi } A \in \mathbb{R}$$

$$B = \frac{(a-b)^2 - (a+b)^2}{2ab} = \frac{(a^2 - 2ab + b^2) - (a^2 + 2ab + b^2)}{2ab} = -2 \text{ Donc } B \in \mathbb{Z}; B \in \mathbb{ID}; B \in \mathbb{Q}; B \in \mathbb{IR}$$

$$C = \frac{-2^3 \times 3}{(-3)^2 \times 2} = \frac{-2 \times 2 \times 2 \times 3}{(-3)^2 \times 2} = \frac{-4}{3} \text{ Donc } C \in \mathbb{Q}; C \in \mathbb{IR}.$$

$$D = \left(\sqrt{\frac{2}{5}} + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2 = \frac{2}{5} + 2 \times \sqrt{\frac{2}{5} \times \frac{5}{2}} + \frac{5}{2} = \frac{2}{5} + 2 + \frac{5}{2} = \frac{49}{10} \text{ Donc } D \in \mathbb{ID}; D \in \mathbb{Q}; D \in \mathbb{IR}$$

$$E = \frac{\sqrt{3^2 + 4^2}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{9+16}}{\frac{4}{12} - \frac{3}{12}} = \frac{\sqrt{25}}{\frac{1}{12}} = 60 \text{ Donc } E \in \mathbb{N}; E \in \mathbb{Z}; E \in \mathbb{ID}; E \in \mathbb{Q}; E \in \mathbb{IR}$$

### Exercice 4

1) Démontrons que les nombres suivants sont entiers :

$$A = \frac{\sqrt{722}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2 \times 19^2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2 \times 19^2}{2}} = 19$$

$$B = \frac{(a+b) - (a-b)^2}{ab} = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2)}{ab} = \frac{4ab}{ab} = 4$$

$$C = \frac{3^{10}}{243} = \frac{3^{10}}{3^5} = 3^5 = 243.$$

$$D = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} - 2\sqrt{2} = \frac{(\sqrt{2} + 1)^2}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} - 2\sqrt{2} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2 - 1} - 2\sqrt{2} = 3$$

### Exercice 13

Soit  $x$  et  $y$  deux nombres réels tels que :  $-4,1 \leq x \leq -4$  et  $-0,9 \leq y \leq -0,8$

Donnons un encadrement de chacun des nombres réels suivant :

Encadrons :  $x - y$

On a :  $-4,1 \leq x \leq -4$  et  $-0,9 \leq y \leq -0,8$

Alors  $0,8 \leq -y \leq 0,9$  donc  $-4,1 + 0,8 \leq x + (-y) \leq -4 + 0,9$

Par conséquent :  $-3,3 \leq x - y \leq -3,1$

Encadrons :  $x + y$

On a :  $-4,1 \leq x \leq -4$  et  $-0,9 \leq y \leq -0,8$

Alors  $-4,1 - 0,9 \leq x + y \leq -4 - 0,8$  donc  $-5 \leq x + y \leq -4,8$

Encadrons :  $x^2$

On a :  $-4,1 \leq x \leq -4$  alors  $4 \leq -x \leq 4,1$

Alors  $4 \times 4 \leq -x \times (-x) \leq 4,1 \times 4,1$  donc  $16 \leq x^2 \leq 16,81$

Encadrons :  $xy$

On a :  $-4,1 \leq x \leq -4$  et  $-0,9 \leq y \leq -0,8$

Alors :  $4 \leq -x \leq 4,1$  et  $0,8 \leq -y \leq 0,9$  donc  $4 \times 0,8 \leq (-x)(-y) \leq 4,1 \times 0,9$

Par conséquent :  $3,2 \leq xy \leq 3,69$

Encadrons :  $\frac{x}{y}$

On a :  $-4,1 \leq x \leq -4$  et  $-0,9 \leq y \leq -0,8$

Alors :  $4 \leq -x \leq 4,1$  et  $\frac{1}{-0,8} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{-0,9}$  par suite  $\frac{1}{0,9} \leq -\frac{1}{y} \leq \frac{1}{0,8}$

Donc  $4 \times \frac{1}{0,9} \leq (-x)(-\frac{1}{y}) \leq 4,1 \times \frac{1}{0,8}$

Par conséquent :  $\frac{4}{0,9} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{4,1}{0,8}$

### Exercice 15

Soit  $a$  et  $b$  deux réels, non nul, positifs

1. Montrer :  $ab + 1 - b - a = (b-1)(a-1)$

Montrons :  $(b-1)(a-1) = ab - a - a + 1 = ab + 1 - b - a$ .

2. Comparons :

a)  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$  et 2

On a  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab}$  d'où  $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) - 2 = \frac{a^2 + b^2}{ab} - 2 = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab}$  or  $ab > 0$   $(a-b)^2 \geq 0$

$(a-b)^2 \geq 0$  Donc  $\frac{(a-b)^2}{ab} \geq 0$  cela implique que  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

b)  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  et  $\frac{1}{a+b}$

On a :  $\frac{1}{a+b} - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{a+b} - \left(\frac{b+a}{ab}\right) = -\frac{a^2 + b^2 + ab}{ab(a+b)}$  or  $-\frac{a^2 + b^2 + ab}{ab(a+b)} < 0$

Cela entraîne  $\frac{1}{a+b} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

c)  $\sqrt{a+b}$  et  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

On a :  $\sqrt{(a+b)^2} = a+b$  et  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a+b + 2\sqrt{ab}$

D'où  $\sqrt{(a+b)^2} - (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a+b - (a+b+2\sqrt{ab}) = -2\sqrt{ab}$

Or  $2\sqrt{ab} > 0$  alors  $-2\sqrt{ab} < 0$  alors  $\sqrt{(a+b)^2} - (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 < 0$

Cela implique  $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

d)  $2 - \sqrt{3}$  et  $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$

On a :  $(2 - \sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3}$  et  $(\sqrt{7 - 4\sqrt{3}})^2 = 7 - 4\sqrt{3}$  donc  $2 - \sqrt{3} = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$

**Exercice 22**

Ecrivons sans barres de valeurs absolues, les nombres suivants :

$x = |\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$  car  $\sqrt{2} > 1$  ;  $y = |\sqrt{3} - 5| = 5 - \sqrt{3}$  car  $5 > \sqrt{3}$

$z = |\pi - 5| = 5 - \pi$  car  $5 > \pi$  ;  $t = |7 - 2\pi| = 7 - 2\pi$  car  $7 > 2\pi$  ;

$v = |3 - \pi| = \pi - 3$  car  $\pi > 3$

**Exercice 30**

Donnons l'écriture scientifique de chacun des nombres suivants.

a)  $24,5 = 2,45 \times 10^1$  b)  $3600 = 3,6 \times 10^3$  c)  $0,0078 = 7,8 \times 10^{-3}$  d)  $-658 = -6,58 \times 10^2$

e)  $0,000085 = 8,5 \times 10^{-5}$  f)  $-7005000 = -7,005 \times 10^6$

**Exercice 31**

Effectuons les approximations demandées

	Unité par défaut	Au dixième par excès	au centième le plus proche	Au dixième le plus proche	au millième par excès
1,23456	1	1,3	1,23	1,2	1,235
475 :25	19	19,0	19,00	19,0	19,000
0,553 :0,03	18	18,5	18,43	18,4	18,434
-2,3456	-3	-2 ,3	-2,35	-2,3	-2,345
10000 :12083	83	83,4	83,33	83,3	83,334
143 :7	20	20,5	20,43	20,4	20,429
12345 :1000	12	12,4	12,35	12,3	12,345
-4,13579	- 5	- 4,1	- 4,14	- 4,1	- 4,135

**CHAPITRE III : UTILISATION DES SYMETRIES ET TRANSLATIONS**

**Exercice 3**

ABNM est un parallélogramme signifie que N est l'image de M par la translation de vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .

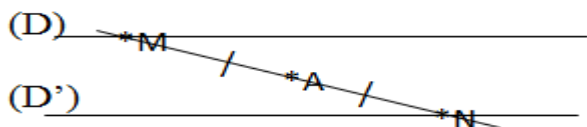
\*Construire  $(C'_1)$  l'image de  $(C_1)$  par  $t_{\overrightarrow{AB}}$ .  $(C'_1)$  Coupe  $(C_2)$  en un point N ;

En déduire la construire de M.

**Exercice 8**

1) Figure

A le milieu de [MN] signifie que la symétrie centrale de centre A, est telle que  $S_A(M)=N$

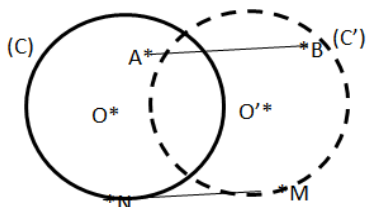


2) Soit  $S_A$  la symétrie centrale de centre A.  $S_A(M)=N$  Lorsque M décrit (D) ; N décrit l'image(D') de (D) par  $S_A$

**Exercice 9**

1. figure

$t_{\overline{AB}}(N) = M, t_{\overline{AB}}(O) = O'$



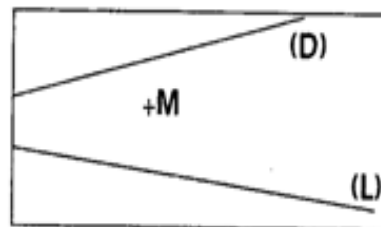
2) Soit  $t_{\overline{AB}}$  la translation de vecteur  $\overline{AB}$ .  $t_{\overline{AB}}(N) = M$ , alors pour N élément de (C), M appartient à l'image de (C) par  $t_{\overline{AB}}$ . Donc lorsque N décrit (C), M décrit l'image de (C) qui est (C') par  $t_{\overline{AB}}$ .

**Evaluation 1**

Soit  $S_M$  la symétrie centrale de centre M.

1- Construire l'image de (Δ) par  $S_M$ .

2- Construire (D') l'image de (D) par  $S_M$ .



3- Le point de rencontre (A') des droites (Δ') est (D') est l'image du point A par  $S_M$ . donc M est le milieu de [AA'] par suite (AM) = (A'M)

**CHAPITRE IV : GENERALITES SUR LES FONCTIONS**

**Exercice 3**

Donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

1.  $Df = \mathbb{R} \setminus \{-3\} = ]-\infty; -3[ \cup ]-3; +\infty[$  ; 2.  $Dg = \mathbb{R}$  ;

3.  $Dh = \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\} = ]-\infty; \frac{2}{3}[ \cup ]\frac{2}{3}; +\infty[$  4.  $Dk = \mathbb{R} \setminus \{0\} = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$

**Exercice 6**

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions numériques suivantes sous forme d'intervalles ou de réunion d'intervalles.

1.  $f(x) = \sqrt{(x-2)^2}$

$x \in Df \Leftrightarrow (x-2)^2 \geq 0$  Or  $\forall x \in \mathbb{R}, (x-2)^2 \geq 0$  Donc  $Df = \mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$

2.  $f(x) = (\sqrt{x-2})^2$

$x \in Df \Leftrightarrow x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$  Donc  $Df = [2; +\infty[$

$$3. f(x) = \sqrt{1-x} \times \sqrt{1+x}$$

$$x \in Df \Leftrightarrow 1-x \geq 0 \text{ et } 1+x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq 1 \text{ et } x \geq -1 \text{ Donc } Df = [-1; 1]$$

$$4. f(x) = \sqrt{6-2x} - \sqrt{x+5}$$

$$x \in Df \Leftrightarrow 6-2x \geq 0 \text{ et } x+5 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq 3 \text{ et } x \geq -5 \text{ Donc } Df = [-5; 3]$$

$$5. f(x) = \frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{5-x}}$$

$$x \in Df \Leftrightarrow x-5 \geq 0 \text{ et } 5-x > 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq 5 \text{ et } x < 5 \text{ Donc } Df = \emptyset$$

$$6. f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$$

$$x \in Df \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$$

$$\text{Or } \forall x \in \mathbb{R}, (x+1)^2 \geq 0 \text{ Donc } Df = \mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$$

### Exercice 11

$$\text{On donne } f(x) = \frac{x+2}{x^2-9} \text{ et } g(x) = \frac{2}{x-3} + \frac{5}{x+3}$$

a) Déterminons l'ensemble de définition de la fonction  $f$  et  $g$

$$Df = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\} \text{ et } Dg = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$$

b)  $f$  et  $g$  coïncident sur  $\mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$

### Exercice 17

1) Recopions et complétons les phrases suivantes :

a) la fonction  $f$  est définie sur...  $[-8; 8]$ ...

b) la fonction  $f$  est croissant sur  $[0; 5]$

c) Le minimum de  $f$  sur  $[-8; 8]$  est ...0. Il est atteint pour  $x = 8$ ;

d) Le maximum de  $f$  sur  $[-8; 8]$  est 6. Il est atteint pour  $x = 5$ ;

2) D'après 1c) et 1d) On déduit que si  $-8 \leq x \leq 8$  alors  $0 \leq f(x) \leq 6$

3) A l'aide des variations de  $f$ , comparons :

a)  $-5 < -3$  et  $f$  est strictement décroissante sur  $[-5; -3]$  donc  $f(-5) > f(-3)$

b)  $0 < 2$  et  $f$  est strictement croissante sur  $[0; 2]$  donc  $f(0) < f(2)$

c)  $5 < 6$  et  $f$  est strictement décroissante sur  $[5; 6]$  donc  $f(5) > f(6)$

d)  $1 < 4$  et  $f$  est strictement croissante sur  $[1; 4]$  donc  $f(1) < f(4)$

### Exercice 20

$$1. Df = [-2; 5]$$

2. Le maximum de  $f$  sur  $Df$  est 12 atteint en  $x = 5$ .

Le minimum de  $f$  sur  $Df$  est -4 atteint en  $x = 1$ .

$$3a) f(0) = -3$$

b) Les antécédents de -3 sont 0 et -5 n'a pas d'antécédent

$$4. f(x) = 0; S_{\mathbb{R}} = \{-1; 3\} \quad f(x) = 2; S_{\mathbb{R}} = \{-1, 5; 3, 4\}$$

$$5. f(x) \geq -3; S_{\mathbb{R}} = [-2; 0] \cup [2; 5]$$

6. Dressons le tableau de variations de  $f$  sur  $D_f$

$x$	-2	1	5
$f(x)$	5	-4	12

**CHAPITRE VI: FONCTIONS POLYNOMES ET FONCTIONS RATIONNELLES**

**Exercice 8**

Déterminons le degré du polynôme  $RS$  et  $R+S$  dans chacun des cas suivants.

1)  $R(x) = -x^4 - 3x^2 + 5$  et  $S(x) = 2x^7 + 4x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 5$

On a  $d^\circ(RS) = d^\circ R + d^\circ S = 7 + 4 = 11$ .  $d^\circ(R+S) = 7$ .

1)  $R(x) = x^2 + 7x^5 - 1$  et  $S(x) = 2x^5 + 4x^3 - 2x^2 - 2$

On a  $d^\circ(RS) = d^\circ R + d^\circ S = 5 + 5 = 10$ .  $d^\circ(R+S) = 5$ .

**Exercice 13**

Développons, ordonnons les polynômes suivants (en utilisant les égalités remarquables)

1.  $(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$  2.  $(3x-4)^3 = 27x^3 - 108x^2 + 144x - 64$

3.  $(1-2x)^3 = -8x^3 + 12x^2 - 6x + 1$  4.  $(-x-1)^3 = -x^3 - 3x^2 - 3x - 1$

**Exercice 14**

Factorisons en utilisant les égalités remarquables.

1.  $x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$  2.  $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = x^3 - 3 \times 2x^2 + 3 \times 2^2 \times x - 2^3 = (x-2)^3$  3.

$1 + 6x + 12x^2 + 8x^3 = (1 + 2x^3)^2$  4.  $x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$

5.  $216x^3 + 125y^3 = (6x + 5y)(36x^2 - 30xy + 25y^2)$  6.  $25x^3 - 20x = 5x(\sqrt{5}x - 2)(\sqrt{5}x + 2)$

**Exercice 15**

Donnons la forme canonique des fonctions polynômes  $f$  du second degré définies par :

La forme canonique d'un polynôme est  $a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{\Delta}{4a^2})]$  avec  $\Delta = b^2 - 4ac$

1.  $f(x) = 2x^2 - 8x + 6 = 2[(x-2)^2 - 1]$ ; 2.  $f(x) = -x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{9} = -(x + \frac{1}{3})^2$

3.  $f(x) = \frac{5}{2}x^2 + 15x + 30 = \frac{5}{2}[(x+3)^2 + 3]$

**Exercice 20**

Étudions, suivant les valeurs de  $x$ , le signe de la fonction  $f$  dans les cas suivants :

Sans calculer  $f(-7)$ ,  $f(1/2)$ ,  $f(148)$ , indiquons les signes de ces nombres.

1.  $f(x) = 8x^2 + 8x + 2 = 2(2x+1)^2$  or  $\forall x \in \mathbb{R} (2x+1)^2 \geq 0$  donc  $8x^2 + 8x + 2$  est positif ou nul

2.  $f(x) = 2x^2 - 3x + 2 = 2[(x - \frac{3}{4})^2 + \frac{7}{16}]$  On constate que  $f(x)$  n'est pas factorisable.

Puisque  $2 > 0$  donc  $2x^2 - 3x + 2$  est positif.

3.  $f(x) = -x^2 - 3x + 10 = -[(x-2)(x+5)]$

La lecture du tableau de signe permet de dire :

Donc  $f(x) > 0$  lorsque  $x \in ]-5; 2[$  ;  $f(x) < 0$  lorsque  $x \in ]-\infty; -5[ \cup ]2; +\infty[$

$f(x) = 0$  lorsque  $x = -5$  ou  $x = 2$

$-7 \in ]-\infty; -5[$  donc  $f(-7) < 0$  ,  $\frac{1}{2} \in ]-5; 2[$  donc  $f(1/2) > 0$  et  $148 \in ]2; +\infty[$   $f(148) < 0$ .

### Exercice 23

1. Pour déterminer le signe de  $E(x) = \frac{x-5}{4-x}$ .

On recherche les réels qui annulent les expressions affines :  $x - 5$  et  $4 - x$

$x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$  et  $4 - x = 0 \Leftrightarrow x = 4$

De plus,  $4 - x$  est au dénominateur : 4 est donc une valeur interdite.

On peut ainsi dresser le tableau de signes suivant, et en déduire le signe de  $E(x)$  :

$x$	$-\infty$	4	5	$+\infty$
$x-5$	-	0	0	+
$4-x$	+	0	-	-
$E(x)$	-	+	0	-

Finalement ;

$\forall x \in ]-\infty; 4[ \cup ]5; +\infty[$  ,  $E(x) \leq 0$

$\forall x \in ]4; 5]$  ,  $E(x) \geq 0$

2. Pour déterminer le signe de  $F(x) = \frac{3x-5}{5x}$  , On recherche les réels qui annulent les expressions affines :

$3x - 5$  et  $5x$

$3x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$  et  $5x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

De plus,  $5x$  est au dénominateur : 0 est donc une valeur interdite.

On peut ainsi dresser le tableau de signes suivant, et en déduire le signe de  $F(x)$  :

$x$	$-\infty$	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$3x-5$	-	0	0	+
$5x$	-	0	+	+
$F(x)$	+	-	0	+

Finalement ;  $\forall x \in ]-\infty; 0[ \cup ]\frac{1}{3}; +\infty[$  ,  $F(x) \geq 0$  ;  $\forall x \in ]0; \frac{1}{3}]$  ,  $F(x) \leq 0$

3. Pour pouvoir déterminer son signe, on doit exprimer au préalable  $G(x)$  sous la forme de produit de

facteurs de type  $(a x + b)$ . On factorise donc le numérateur :  $G(x) = \frac{2x - 6x^2}{x + 2} = \frac{2x(1 - 3x)}{x + 2}$

Pour déterminer le signe, on recherche les réels qui annulent les expressions

$2x$ ,  $1 - 3x$  et  $x + 2$ .

$2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$  et  $1 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$  et  $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

De plus,  $x + 2$  est au dénominateur :  $-2$  est donc une valeur interdite

On peut ainsi dresser le tableau de signes suivant, et en déduire le signe de  $G(x)$  :

$x$	$-\infty$	-2	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$2x$	-	0	0	+	+
$1-3x$	+	+	+	0	-
$x+2$	-	0	+	+	+
$G(x)$	+	-	0	0	-

Finalement ;  $\forall x \in ]-\infty; -2[ \cup ]0; \frac{1}{3}]$  ,  $G(x) \geq 0$

$\forall x \in ]-2; 0] \cup ]\frac{1}{3}; +\infty[$  ,  $G(x) \leq 0$

**Exercice 7**

1) Les angles inscrits dans C sont

CAB ; CAP ; CAN ; NAP ;

CBT ; ABT ; CBN ; NBT

2) Déterminons la mesure en degré de chacun des angles suivants :

- mes AOB = 2 mes ACB or mes ACB =  $180^\circ - 50^\circ - 60^\circ = 70^\circ$  d'où mes AOB =  $140^\circ$

-mes CBT =  $180^\circ - \frac{1}{2}$  mes COB =  $180^\circ - \frac{1}{2} \times 60^\circ = 120^\circ$

- ABT et ACB sont inscrit et intercepte le même arc AB donc mes ABT =  $70^\circ$

-mes AOC = 2mes ABC =  $100^\circ$

**Exercice 12**

Déterminons la longueur de chacun des côtés du triangle ABC.

ABC est un triangle, on pose  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$ . A son aire, r le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

D'après le théorème des sinus, on a

$$\text{On a } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{abc}{2A} = 2r$$

$$\text{Donc } \frac{a}{\sin A} = 2r \Leftrightarrow a = 2r \times \sin A = 2 \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}, a = \sqrt{2}$$

$$\text{De même } \frac{b}{\sin B} = 2r \Leftrightarrow b = 2r \times \sin B = 2 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}, b = \sqrt{3}$$

$$\text{Et } \frac{c}{\sin C} = 2r \Leftrightarrow c = 2r \times \sin C = 2 \times 1 \times \sin(75^\circ) = 2 \times 1 \times 0,9659 = 1,9318 \dots b = 1,9318 \dots$$

La longueur de AB = 1,9318..., BC =  $\sqrt{2}$ , AC =  $\sqrt{3}$ .

**Exercice 15**

\*Le triangle ABC rectangle en A

$$\text{Alors } BC^2 = AB^2 + AC^2 \text{ ainsi : } \frac{BC^2}{BC^2} = \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} \text{ par suite } 1 = \sin^2 C + \sin^2 B$$

$$\text{Or } \sin^2 A = \sin^2(90^\circ) = 1$$

$$\text{Donc ABC triangle rectangle en A alors on a : } \sin^2 A = \sin^2 C + \sin^2 B$$

\*Supposons que  $\sin^2 A = \sin^2 C + \sin^2 B$

$$\text{D'après le théorème de sinus. On a } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \text{ Ainsi } \sin^2 B + \sin^2 C = \frac{b^2}{a^2} \sin^2 A + \frac{c^2}{a^2} \sin^2 A =$$

$$\frac{b^2 + c^2}{a^2} \sin^2 A$$

$$\text{Or selon l'hypothèse } \sin^2 B + \sin^2 C = \sin^2 A \text{ par conséquent on a } \frac{b^2 + c^2}{a^2} = 1$$

Ce qui veut dire que :  $b^2 + c^2 = a^2$

D'après la réciproque de la propriété de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

### Exercice 18

Sur la figure ci-contre, (C) est un cercle de centre O, A et B sont deux points de (C) tels que

mes  $\angle AOB = 120^\circ$ . (BI) et (OB) perpendiculaires.

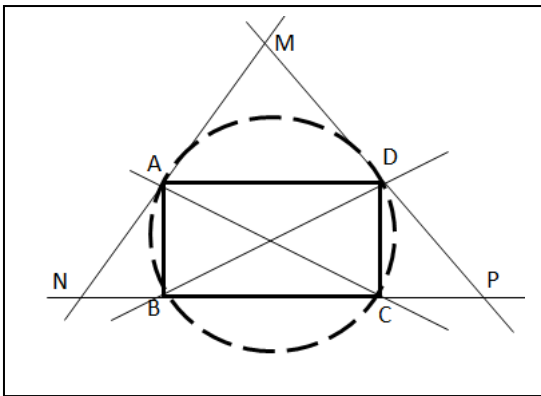
1) Calculons les mesures des angles  $\angle ACB$ ,  $\angle ADB$ ,  $\angle OAB$  et  $\angle ABI$ .

- $\angle ACB$  et  $\angle AOB$  sont associés donc Mes  $\angle ACB = 60^\circ$
- $C \in \overset{\frown}{AB}$  et  $D \in AB$  donc  $\angle ACB$  et  $\angle ADB$  sont supplémentaires.  
donc Mes  $\angle ADB = 120^\circ$ .
- Mes  $\angle OAB = \text{mes } \angle OBA = 30^\circ$
- $\angle ABI$  est inscrit et intercepte  $\overset{\frown}{AB}$  donc mes  $\angle ABI = \text{mes } \angle ADB = 120^\circ$

2) Donnons la valeur en degré de mes  $\angle CAD + \text{mes } \angle CBD$ .

$\angle CAD$  et  $\angle CBD$  sont supplémentaires cela implique que  $\angle CAD + \text{mes } \angle CBD = 180^\circ$ .

### Exercice 21



2) Justifions que mes  $\angle DBC = 30^\circ$

ABCD est un rectangle alors BDC est un triangle rectangle en C

$$\sin \angle DBC = \frac{CD}{DB} = \frac{AB}{2AB} = \frac{1}{2}, \text{ alors mes } \angle DBC = 30^\circ$$

3 a) Démontrons que ADM est un triangle équilatéral.

mes  $\angle DBC = \text{mes } \angle DAC = 30^\circ$ . On a aussi mes  $\angle ACB = \text{mes } \angle BDA = 30^\circ$

$\angle ACD$  et  $\angle ABD$  interceptent des arcs de même longueur donc mes  $\angle ACD = \text{mes } \angle ABD = 60^\circ$

$\angle NAB$  est inscrit et intercepte le même arc que  $\angle BDA$  donc mes  $\angle NAB = 30^\circ$

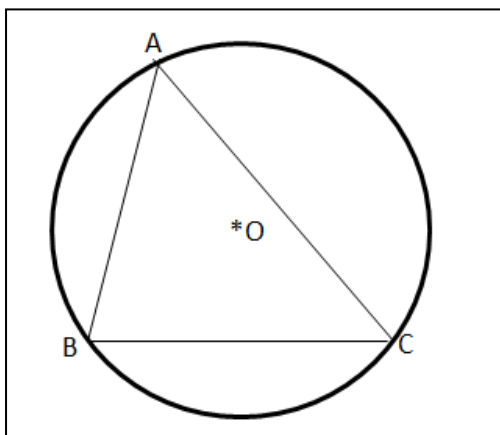
mes  $\angle DAM = \text{mes } \angle ADM = 60^\circ$ . Donc ADM est un triangle équilatéral.

b) mes  $\angle ANB = 60^\circ$  de même  $\angle CPD = 60^\circ$  En déduire que le triangle NMP est équilatéral

### Exercice 25

L'unité est le cm

1) Faire une figure



2)  $\text{mes} \angle BOC = 120^\circ$

3)  $\frac{a}{\sin A} = 2r \Rightarrow r = 2\sqrt{3}$

4)  $\frac{c}{\sin C} = 2r \Rightarrow C = 2\sqrt{6}$  ;  $AC = b = 6,69$  et  $S = 14,19 \text{ cm}^2$

## CHAPITRE VIII : ANGLES ORIENTES ET TRIGONOMETRIE

### Exercice 2

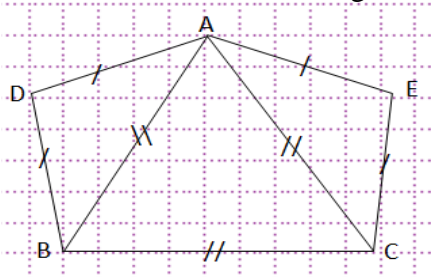
Complétons le tableau suivant :

Degré	$-210^\circ$	$126^\circ$	$-36^\circ$	$\frac{3 \times 180}{\pi} = 171,97$	$18^\circ$	$20^\circ$
radian	$-\frac{7\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{10}$	$-\frac{\pi}{5}$	3	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{9}$

### Exercice 7

On considère la figure ci- dessous

ADB et AEC sont des triangles rectangles respectivement en D et en E.



1) Calculons les mesures en radian des angles orientés suivants :

$$\text{Mes} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Mes}(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = -\frac{\pi}{2} ;$$

$$\text{Mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = \text{Mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \text{Mes}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12} ;$$

$$\text{Mes}(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}) = \text{Mes}(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AC}) + \text{Mes}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + \text{Mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{6}$$

$$\text{Calculons d'abord } \text{Mes}(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}) = \text{Mes}(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}) + \text{Mes}(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{7\pi}{12}$$

$$\text{Donc } \text{Mes}(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{BC}) = \frac{5\pi}{12}$$

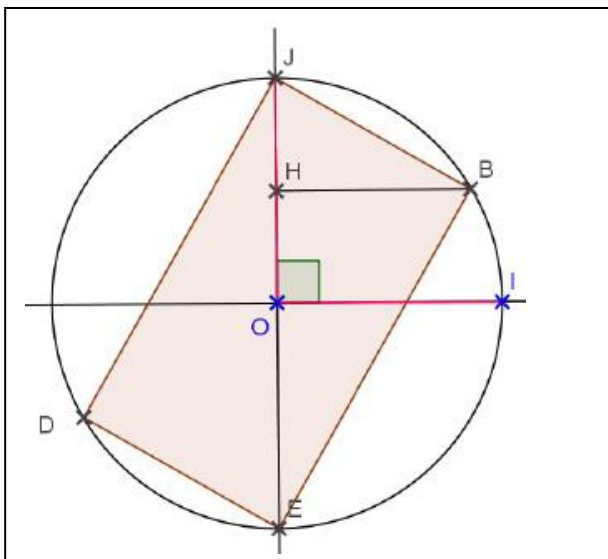
$$\text{Mes}(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}) = \text{Mes}(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) + \text{Mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{12}$$

### Exercice 10

On considère les points B, J, D, E de la droite des réels d'abscisses :

$$B\left(\frac{\pi}{6}\right) ; J\left(\frac{\pi}{2}\right) ; D\left(\frac{7\pi}{6}\right) ; E\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

1. Plaçons ces points sur le cercle trigonométrique (C).



2. Le quadrilatère BJDE est un rectangle. Car ses diagonales sont de même longueur et se coupent en leur milieu

3. a) Les coordonnées de B sont  $B\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right); \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$  ; soit  $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Les coordonnées de H sont  $H\left(0; \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$  soit  $H\left(0; \frac{1}{2}\right)$

b) Le triangle BJH est rectangle en H. On applique le théorème de Pythagore

$$BJ^2 = JH^2 + HB^2 \text{ soit } BJ^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 \text{ donc } BJ = 1.$$

c) Le triangle BJE est rectangle en B. On applique le théorème de Pythagore :

$$EJ^2 = BJ^2 + BE^2 \text{ soit } BE^2 = EJ^2 - BJ^2 = 2^2 - 1 = 3 \text{ Donc } BE^2 = 3. \text{ } BE = \sqrt{3}$$

### Exercice 14

Déterminons les coordonnées des points I, K, E, A et B dans le repère (O,I,J)

Coordonnées de I : I(1;0)

Coordonnées de K : K(-1;0)

Coordonnées de E :

Par hypothèse le triangle IEK est équilatéral donc  $KI = IE = EK = 2$ .

Rappel la hauteur d'un triangle équilatéral de côté  $a$  vaut :  $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

EO est la hauteur du triangle EKI ;  $EO = \frac{2\sqrt{3}}{2}$  soit  $EO = \sqrt{3}$  Finalement  $E(0;\sqrt{3})$

Coordonnées de A :

Par hypothèse le triangle IEK est équilatéral donc  $EIK = 60^\circ$

De plus le triangle AOI est isocèle en O il est donc équilatéral. Donc  $IOA = 60^\circ$

On en déduit donc  $A(\cos 60^\circ; \sin 60^\circ)$  ;  $A(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$

Coordonnées de B :

Le point B est symétrique de A par rapport à (OE), médiatrice de [KI]

On en déduit donc  $B(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$ .

### Exercice 18

1) Simplifions au maximum, pour tout réel  $t$ ,  $(1 - \cos t)(1 + \cos t) = 1^2 - (\cos t)^2 = (\sin t)^2$

2) Démontrons que pour tout nombre réel  $x$  :  $\cos^4(x) - \sin^4(x) = (\cos^2 x)^2 - (\sin^2 x)^2$

$$(\cos^2(x) - \sin^2(x))(\cos^2(x) + \sin^2(x)) = (\cos^2(x) - \sin^2(x)) \times 1 = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

Puisque  $\cos^4(x) - \sin^4(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ , on poursuit :  $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$   
 $= 2\cos^2(x) - 1$

## CHAPITRE IX : STATISTIQUES

### Exercice 5

Dressons un tableau où figureront les classes d'âge, les effectifs, les fréquences, et les effectifs cumulés croissants et décroissants et les fréquences cumulées, croissantes et décroissantes, les amplitudes des classes

Age de la mère	Effectifs	Fréquences	Effectifs cumulés croissants	Fréquences cumulées croissantes	Effectifs cumulés décroissants	Fréquences cumulées décroissantes	Amplitude classe
[15 ; 20[	28 600	0,035	28 600	0,035	819 178	1	5
[20 ; 25[	227 600	0,27	256 200	0,315	790 578	0,965	5
[25 ; 30[	227 100	0,34	533 300	0,655	562 978	0,685	5
[30 ; 35[	172 600	0,21	705 900	0,865	285 878	0,345	5
[35 ; 45[	110 900	0,135	816 800	1	113 278	0,135	10
[45 ; 55[	2 378	0,000	819 178	1	2 378	0,000	10

### Exercice 9

Complétons le tableau

Notes	Centres $x_i$	Effectifs $n_i$	Effectifs cumulés croissants	$x_i n_i$	$x_i^2 n_i$	$n_i  x_i - \bar{x} $
5,5 - 6,5	6	1	1	6	36	5,2
6,5 - 7,5	7	2	3	14	98	8,4
7,5 - 8,5	8	5	8	40	320	16
8,5 - 9,5	9	2	10	18	162	4,4
9,5-10,5	10	5	15	50	500	6
10,5- 11,5	11	10	25	110	1210	2
11,5-12,5	12	3	28	36	432	2,4
12,5-13,5	13	1	29	13	169	1,8
13,5-14,5	14	4	33	56	784	11,2
14,5-15,5	15	7	40	105	1575	26,6
TOTAL		40		448	5286	84

1. Calculons la moyenne  $\bar{x} = \frac{448}{40} = 11,2$

L'écart moyen,  $\frac{84}{40} = 2,1$  ; la variance  $\frac{5286}{40} - (11,2)^2 = 6,71$  ; l'écart type  $\sqrt{6,71} = 2,6$

## CHAPITRE X : PRODUIT SCALAIRE

### Exercice 3

$$1) \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) = 5 \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 10 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}.$$

$$2) \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) = 3 \times \frac{3}{2} \times \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{9}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}.$$

$$3) \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) = 4 \times 1 \times \cos(\pi) = 4 \times (-1) = -4$$

$$4) \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{3}{2} \times \frac{5}{2} \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{15}{4} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{15}{8}$$

$$5) \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) = 1 \times 2 \times \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 \times 0 = 0$$

### Exercice 7

Soit un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan. Dans chacun des trois cas suivants, calculer  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

1) les points A, B, et C ont pour coordonnées respectives (1;1), (3;2), (2 ; -2).

$$\text{Par conséquent, le vecteur } \overrightarrow{AB} \text{ a pour coordonnées : } \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Quant au vecteur } \overrightarrow{AC}, \text{ il a pour coordonnées : } \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ -2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Il en résulte que :  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 1 + 1 \times (-3) = 2 - 3 = -1.$

2) De même  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5$

3)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$

**Exercice 9**

**Calculons**

$$\begin{aligned} \text{a) } (3\vec{i} - \vec{j}) \cdot (-\vec{i} + 2\vec{j}) &= (3\vec{i}) \cdot (-\vec{i}) + (3\vec{i}) \cdot (2\vec{j}) - \vec{j} \cdot (-\vec{i}) - \vec{j} \cdot (2\vec{j}) \\ &= -3\vec{i}^2 + 6\vec{i} \cdot \vec{j} + \vec{i} \cdot \vec{j} - 2\|\vec{j}\|^2 \\ &= -3 \times 2 + 7 \times (-4) - 2 \times 3^2 = -52. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (\vec{i} - 3\vec{j})^2 &= \vec{i}^2 + 2\vec{i} \cdot (-3\vec{j}) + (-3\vec{j})^2 = \vec{i}^2 + 2 \times (-3)\vec{i} \cdot \vec{j} + (-3)^2 \vec{j}^2 \\ &= 2 - 6 \times (-4) + 9 \times 9 = 107. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \|2\vec{i} + 3\vec{j}\|^2 &= (2\vec{i} + 3\vec{j})^2 = (2\vec{i})^2 + 2 \times (2\vec{i}) \cdot (3\vec{j}) + (3\vec{j})^2 = 2^2 \vec{i}^2 + 2 \times 2 \times 3\vec{i} \cdot \vec{j} + 3^2 \vec{j}^2 \\ &= 4 \times 2 + 12 \times (-4) + 9 \times 3^2 = 41. \end{aligned}$$

Ainsi  $\|2\vec{i} + 3\vec{j}\| = \sqrt{41}$

**Exercice 11**

Dans chacun des cas suivants, déterminons la ou les valeurs de  $x$  pour que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  soient orthogonaux.

a) les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux  $\Leftrightarrow 1 \times 6 + 3 \times (x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ .

b) les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux  $\Leftrightarrow (2x-1)(3x+2) + 2(x+1) = 0$

$$\Leftrightarrow 6x^2 + 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x(2x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = 0$$

**Exercice 16**

**Calculons**  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

ABCD est un parallélogramme donc les égalités vectorielles suivantes sont vérifiées :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

Par définition du produit scalaire, on a :  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{BA}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 - \|\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\|^2)$

$$= \frac{1}{2} (AB^2 + BC^2 - \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\|^2) = \frac{1}{2} (AB^2 + AD^2 - AC^2) = \frac{1}{2} (5^2 + 4^2 - 6^2) = \frac{5}{2}$$

**Calculons**  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{BA}\|^2 + \|\overrightarrow{CA}\|^2 - \|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA}\|^2) = \frac{1}{2} (BA^2 + CA^2 - \|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\|^2)$

$$= \frac{1}{2} (BA^2 + CA^2 - CB^2) = \frac{1}{2} (5^2 + 6^2 - 4^2) = \frac{45}{2}$$

**Calculons**  $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{DC}\|^2 + \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}\|^2) = \frac{1}{2} (AB^2 + AB^2 - \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}\|^2)$$

$$= \frac{1}{2} (2AB^2) = AB^2 = 25.$$

### Exercice 16

Calculons : a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

ABCD est un carré ( de sens indirect) donc  $\text{Mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{4}$

Dans le triangle ABC rectangle en B :  $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 16 + 16 = 32$

Donc  $AC = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 4\sqrt{2} \times \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 16\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (rappel : } \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{)} = 16$$

b)  $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{OC}\| \times \|\overrightarrow{AB}\| \times \cos(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{AB})$

ABCD est un carré ( de sens indirect) donc  $\text{Mes}(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{AB}) = \text{Mes}(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{4}$

$$OC = \frac{AC}{2} = 2\sqrt{2} \text{ unités}$$

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = 2\sqrt{2} \times 4 \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 8\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (rappel : } \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{)} = 8$$

c)  $\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{DO}$

ABCD est un carré donc les diagonales sont perpendiculaires donc  $\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{DO} = 0$ .

Remarque : ABCD est un carré de sens indirect  $\text{Mes}(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{DO}) = \text{Mes}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = -\frac{\pi}{2}$

$$\text{Or } \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

### Exercice 22

Déterminons la valeur exacte, en radian, de l'angle géométrique AOB dans chacun des cas suivants :

1. On sait que  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OB}\| \times \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 4 \times 8 \times \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = -16$ .

$$\text{Alors } \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = -\frac{16}{32} = -\frac{1}{2}. \text{ Donc } \text{Mes} AOB = \frac{2\pi}{3}.$$

2. De même  $\text{Mes} AOB = \frac{\pi}{4}$     3)  $\text{Mes} AOB = \frac{5\pi}{6}$     4)  $\text{Mes} AOB = \pi$

### Exercice 26

1 Calculons le produit scalaire  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

On a :  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(BAC) = 3 \times 8 \times \cos\frac{\pi}{3} = 3 \times 8 \times \frac{1}{2} = 12$$

Donc :  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 12$

2 Calculons le produit scalaire  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$

$$\text{On a : } \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2} \left( \|\overrightarrow{BC}\|^2 + \|\overrightarrow{BA}\|^2 - \|\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\|^2 \right) = \frac{1}{2} \left( BC^2 + BA^2 - \|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}\|^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( BC^2 + BA^2 - \|\overrightarrow{AC}\|^2 \right) = \frac{1}{2} (BC^2 + BA^2 - AC^2) = \frac{1}{2} (BC^2 + 3^2 - 8^2) = \frac{1}{2} (BC^2 - 55)$$

On peut enfin déterminer la valeur  $BC^2$  grâce au théorème d'Al-Kashi :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(BAC) = 3^2 + 8^2 - 2 \times 3 \times 8 \times \cos \frac{\pi}{3} = 9 + 64 - 24 = 49$$

$$\text{Finalement : } \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2} (49 - 55) = -3$$

### Exercice 29

Calculons la longueur AI de la médiane [AI]

Calculons la longueur AI de la médiane [AI]

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2} BC^2 \Leftrightarrow 7^2 + 5^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2} 8^2 \Leftrightarrow 74 = 2AI^2 + 32$$

$$\text{Donc } AI = \sqrt{21} \quad (\text{Car } AI > 0)$$

## CHAPITRE XI : EQUATIONS ET INEQUATIONS DANS $\mathbb{R}$

### Exercice 4

Résolvons dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

$$1 \quad \text{(E)} \quad (x-3)^2 = (2x+5)^2 \Leftrightarrow x-3 = 2x+5 \text{ ou } x-3 = -(2x+5)$$

$$x-3 = 2x+5 \Leftrightarrow x = -8 \quad \text{ou} \quad x-3 = -2x-5 \Leftrightarrow 3x = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ -8; -\frac{2}{3} \right\}$$

$$2. \text{ (F)} : 4(x+1)^2 = 9x^2 \Leftrightarrow [2(x+1)]^2 = (3x)^2 \Leftrightarrow 2(x+1) = 3x \text{ ou } 2(x+1) = -3x$$

$$2(x+1) = 3x \Leftrightarrow 2x+2 = 3x \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } 2(x+1) = -3x \Leftrightarrow 2x+2 = -3x \Leftrightarrow 5x = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{5}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{2}{5}; 2 \right\}$$

$$3. \text{ (G)} : (3x-1)^2 = x^2 + x + \frac{1}{4}$$

$$(3x-1)^2 = x^2 + x + \frac{1}{4} \Leftrightarrow (3x-1)^2 = \left( x + \frac{1}{2} \right)^2$$

$$3x-1 = x + \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad 3x-1 = -x - \frac{1}{2}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{1}{8}; \frac{3}{4} \right\}$$

### Exercice 6

Résolvons dans  $\mathbb{R}$  en précisant les contraintes sur  $x$

1)  $\frac{2-x}{3x+1} = \frac{x-2}{x+1}$  Contraintes sur  $x$  :  $3x+1 \neq 0$  et  $x+1 \neq 0$  donc  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; -\frac{1}{3}\}$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; -\frac{1}{3}\}$ ,  $\frac{2-x}{3x+1} = \frac{x-2}{x+1} \Leftrightarrow (2-x)(x+1) = (3x+1)(x-2)$

$$S_{\mathbb{R}} = \{-\frac{1}{2}; 2\}$$

2)  $\frac{x^2-4}{x^2+2x-8} = 0$  Contraintes sur  $x$  :  $x^2+2x-8 \neq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+4) \neq 0$  donc  $x \in \mathbb{R} \setminus \{2; -4\}$

Pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{2; -4\}$   $\frac{x^2-4}{x^2+2x-8} = 0 \Leftrightarrow x^2-4=0 \Leftrightarrow x=2$  ou  $x=-2$

$x \neq 2$  donc  $S_{\mathbb{R}} = \{-2\}$   $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

3)  $\frac{2x^2}{9-x^2} = -1$  Contraintes sur  $x$  :  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$

Pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$   $\frac{2x^2}{9-x^2} = -1 \Leftrightarrow 2x^2 = -9 + x^2$

$$S_{\mathbb{R}} = \emptyset$$

### Exercice 8

Résolvons dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes.

1)  $4x-2 \geq 2x-1 \Leftrightarrow 2x \geq 1$  donc  $S_{\mathbb{R}} = [\frac{1}{2}; +\infty[$

2)  $2(x-3) < x-5 \Leftrightarrow 2x-6 < x-5$  donc  $S_{\mathbb{R}} = ]-\infty; 1[$

3)  $1-(x+4) \leq 3 \Leftrightarrow 1-x-4 \leq 3 \Leftrightarrow x \geq -6$  donc  $S_{\mathbb{R}} = [-6; 1[$

4)  $3x+1 > x-3$   $S_{\mathbb{R}} = ]-2; +\infty[$

5)  $2x-1 \leq 6x+11$   $S_{\mathbb{R}} = [-3; +\infty[$

### Exercice 12

Résolvons dans  $\mathbb{R}$  en précisant les contraintes sur  $x$

1)  $\frac{2x+3}{5x-2} \leq 0$

Les contraintes sur  $x$  :  $5x-2 \neq 0$  donc  $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{5}\}$ . On étudie le signe  $\frac{2x+3}{5x-2}$  et d'après la lecture du tableau de

signe  $S = ]-\infty; -\frac{3}{2}] \cup ]\frac{2}{5}; +\infty[$

2)  $\frac{-x}{x+4} > 0$  Les contraintes sur  $x$  :  $x+4 \neq 0 \Leftrightarrow$  donc  $x \neq -4$   $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$ .

On étudie le signe  $\frac{-x}{x+4}$  et d'après la lecture du tableau de signe  $S = ]-4; 0[$

$$3) \frac{x^2 - 121}{11 - x} \leq 0 \text{ Les contraintes sur } x : 11 - x \neq 0 \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{11\}.$$

$$\text{On simplifie } \frac{x^2 - 121}{11 - x} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{11\} \quad \frac{x^2 - 121}{11 - x} = -(x + 11)$$

$$\frac{x^2 - 121}{11 - x} \leq 0 \Leftrightarrow -(x + 11) \leq 0 \Leftrightarrow x \geq -11 \quad S = ]-11; 11[ \cup ]11; +\infty[$$

$$4) \frac{x-1}{x-1} \geq \frac{1}{(x-1)^2} \text{ Les contraintes sur } x : x-1 \neq 0 \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad \frac{x-1}{x-1} \geq \frac{1}{(x-1)^2} \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2}{(x-1)^2} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 \geq 0 \text{ car pour tout } x \quad (x-1)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) \geq 0 \geq 0 \text{ à l'aide du tableau des signes on obtient } S = ]-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty[$$

### Exercice 16

Résolvons dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes.

$$1. |x + 2| = -1 \quad S_{\mathbb{R}} = \emptyset$$

$$2. |2x - 5| = 0 \Leftrightarrow 2x - 5 = 0 \quad S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{5}{2} \right\}$$

$$3. |x + 2| = 3 \Leftrightarrow x + 2 = 3 \text{ ou } x + 2 = -3 \quad S_{\mathbb{R}} = \{-5; 1\}$$

$$4. |4x + 2| = |-2x + 3| \Leftrightarrow 4x + 2 = -2x + 3 \text{ ou } 4x + 2 = -(-2x + 3) \quad S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{-5}{2}; \frac{1}{6} \right\}$$

### Exercice 18

Résolvons dans  $\mathbb{R}$ , les inéquations suivantes.

$$1) |-x| \leq 3 \Leftrightarrow S_{\mathbb{R}} = [-3; 3]$$

$$2) |x - 7| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x - 7 \leq 2 \Leftrightarrow 5 \leq x \leq 9 \quad S_{\mathbb{R}} = [5; 9]$$

$$3) |2x + 7| < 21 \Leftrightarrow -21 < 2x + 7 < 21 \quad S_{\mathbb{R}} = ]-14; 7[$$

$$4) \left| \frac{3}{5}x - 2 \right| \leq -10 \quad S_{\mathbb{R}} = \emptyset$$

### Evaluation 1

1. Exprimons  $B(x)$  en fonction de  $x$ .

$$B(x) = R(x) - C(x) = 20,1x - 0,3x^2 - (60 - 0,3x)$$

$$B(x) = -0,3x^2 + 20,4x - 60$$

2. Vérifions que le bénéfice peut également s'écrire  $B(x) = -0,3(x - 34)^2 + 286,8$ .

$$\text{On développe } -0,3(x - 34)^2 + 286,8 = -0,3(x^2 - 68x + 1156) + 286,8 = -0,3x^2 + 20,4x - 60 = B(x)$$

Donc une autre expression de  $B(x)$   $B(x) = -0,3(x - 34)^2 + 286,8$

3. La forme démontrée en 2. Pour  $B(x)$  correspond à la forme canonique.

On en déduit que  $B$  admet un maximum (car  $-0,3$  est négatif) atteint en  $x = 34$  et qui vaut  $286,8$ , ce qui s'interprète par : le bénéfice maximal vaut  $286,80 \text{ €}$ ,

Il est atteint pour une production de 34 objets.

## Evaluation 2

1. Déterminons les nombres de cars et d'élèves.

D'après l'énoncé, le nombre d'élèves s'obtient comme  $40x+11$  d'après la première possibilité, et comme  $43x-1$  d'après la deuxième. Or le nombre d'élèves à faire voyager est le même d'où l'équation

$$40x+11=43x-1 \Leftrightarrow 40x-43x=-1-11 \Leftrightarrow x=4$$

Donc il y a 4 cars. On en déduit qu'il y a  $40 \times 4 + 11 = 171$  élèves.

Vérification :  $43 \times 4 = 171$  également.

Finalement, il y a 4 cars et 171 élèves.

## **CHAPITRE XII : HOMOTHETIES**

### Exercice 3

Exprimons les propositions suivantes sous la forme d'une égalité vectorielle :

1.  $\frac{3}{4} \overrightarrow{IA} = \frac{3}{4} \overrightarrow{IB}$

2.  $\overrightarrow{RP} = -5\overrightarrow{RM}$

3.  $\overrightarrow{OS} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{OF}$

4.  $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AD}$

### Exercice 5

1) VRAI. C'est la définition même de l'homothétie

2) FAUX. Pour que C soit l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport 3, il aurait fallu que  $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$

3) VRAI Si  $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$ , alors  $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ , et on retombe sur la définition : « C est l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport  $\frac{1}{3}$  »

4) VRAI Si  $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$ , alors  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{CB} = -2\overrightarrow{CA}$   
B est bien l'image de A par l'homothétie de centre C et de rapport -2.

5) FAUX Si  $C = h_{(A;-4)}(B)$ , alors par définition  $\overrightarrow{AC} = -4\overrightarrow{AB}$ , mais il est impossible, à partir de cette égalité, d'obtenir l'égalité  $\overrightarrow{AB} = -4\overrightarrow{BC}$

6) VRAI. C'est la définition même de l'homothétie

7) VRAI Si  $C = h_{(A;-4)}(B)$ , alors par définition  $\overrightarrow{AC} = -4\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -4\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$

### Exercice 12

Déterminons le rapport de l'homothétie de centre A qui transforme B en C dans les cas suivants :

1.  $\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$ . Cette homothétie est de rapport -3.

2.  $\overrightarrow{BC} - 4\overrightarrow{BA} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{BA} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{BA}$  Cette homothétie est de rapport -3.

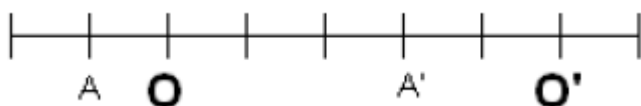
3.  $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}$  Cette homothétie est de rapport -1

### Exercice 15

1) Si  $h$  est l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $-3$  qui transforme  $A$  en  $A'$ . Alors  $\overrightarrow{OA'} = -3\overrightarrow{OA}$ , égalité qui se transforme en  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA'} = -3\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = -4\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AA'}$ , ce qui permet ainsi de placer le point  $O$ . (Voir figure)

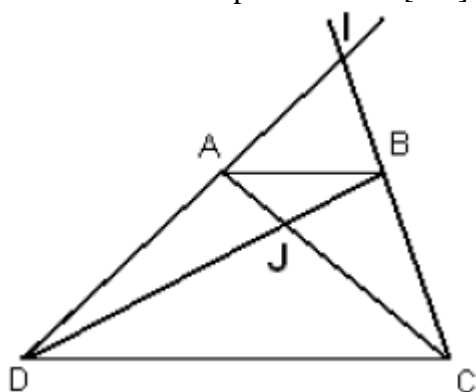
2) Si  $h'$  est l'homothétie de centre  $O'$  et de rapport  $\frac{1}{3}$  qui transforme  $A$  en  $A'$ . alors  $\overrightarrow{O'A'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{O'A}$ .

égalité qui se transforme en  $\overrightarrow{O'A} + \overrightarrow{AA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{O'A} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{O'A} \Leftrightarrow \overrightarrow{AO'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AA'}$ , ce qui permet ainsi de placer le point  $O'$ . (Voir figure)



### Exercice 21

Soit  $ABCD$  un trapèze de base  $[AB]$  et  $[CD]$  tel que  $AB \neq CD$



1. Démontrons qu'il existe deux homothéties transformant  $[AB]$  en  $[CD]$

Notons  $I$  le point d'intersection des droites  $(AD)$  et  $(BC)$  (qui existe car  $AB \neq CD$ ), et  $J$  le point d'intersection des diagonales  $[AC]$  et  $[BD]$ .

1. Puisque les  $I, A, D$  d'une part et  $I, B, C$  d'autre part, sont alignés, avec  $(AB) \parallel (CD)$  (car  $ABCD$  est un trapèze), les points  $I, A, B, D, C$  sont en configuration de Thalès.

L'homothétie de centre  $I$  et de rapport  $\frac{IA}{ID} = \frac{IB}{IC} = \frac{AB}{CD}$  transforme le segment  $[AB]$  en  $[CD]$ .

Puisque les points  $A, J, C$  d'une part et  $B, J, D$  d'autre part, sont alignés, avec  $(AB) \parallel (CD)$  (car  $ABCD$  est un trapèze), les points  $J, A, B, D, C$  sont en configuration de Thalès (dite « en papillon »)

L'homothétie de centre  $J$  et de rapport  $\frac{JA}{JC} = \frac{JB}{JD} = \frac{AB}{CD}$  transforme le segment  $[AB]$  en  $[CD]$ .

2. Les deux rapports de ces deux homothéties sont égaux à  $\frac{AB}{CD}$

### Exercice 22

Démontrons que  $U, V, I$  et  $J$  sont alignés.

D'après l'exercice précédent, l'homothétie de centre  $U$  transforme  $[AB]$  en  $[CD]$ , donc le milieu  $I$  de  $[AB]$  en le milieu  $J$  de  $[CD]$ , de sorte que les points  $U, I$  et  $J$  sont alignés.

(Un point, son image et le centre de l'homothétie sont alignés)

De plus, l'homothétie de centre  $V$  transforme  $[AB]$  en  $[CD]$ , donc le milieu  $I$  de  $[AB]$  en le milieu  $J$  de  $[CD]$ , de sorte que les points  $V, I$  et  $J$  sont alignés

(un point, son image et le centre de l'homothétie sont alignés)

Les points  $U, I, V$  et  $J$  sont donc alignés.

### Exercice 23

Les points A, H, O et C sont alignés sur le segment [AC]

Puisque A' est le symétrique de B par rapport à A,

$$\text{On a } \overrightarrow{BA'} = 2\overrightarrow{BA}$$

Puisque B' est le symétrique de B par rapport à (AC),

$$\text{On a } \overrightarrow{BB'} = 2\overrightarrow{BH}$$

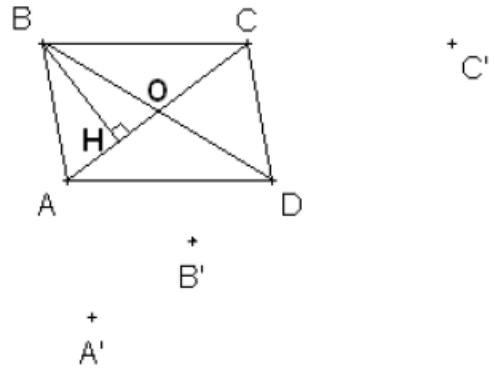
Puisque O est le centre du parallélogramme,

$$\text{On a } \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BO}$$

Puisque C' est le symétrique de B par rapport à C,

$$\text{On a } \overrightarrow{BC'} = 2\overrightarrow{BC}$$

L'homothétie de centre B et de rapport 2 transforme donc les points



A, H, O, C en A', B', D et C'.

Puisque les points A, H, O et C sont alignés sur le segment [AC], leurs images A', B', D et C' seront alignés.

### Exercice 24

Soit ABCD un rectangle tel que  $AB = 4$  et  $AD = 3$ . Soit M le point défini par  $\overrightarrow{DM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DB}$ .

P est le projeté orthogonal de M sur (CD) et Q est le projeté orthogonal de M sur (AD).

1. Montrons que  $\overrightarrow{DP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$

DCB est un triangle,  $P \in (DC)$  et  $M \in (DB)$ .  $(MP) \parallel (BC)$

D'après le théorème de Thalès, (Troisième formulation) puisque  $\overrightarrow{DM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DB}$ ,  $\overrightarrow{DP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$

2. Déterminons  $h(B)$ ,  $h(C)$  et  $h(A)$ .

On a  $\overrightarrow{DM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DB}$  donc  $h(B) = M$ ,  $\overrightarrow{DP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$  donc  $h(C) = P$  et  $h(A) = Q$  car  $\overrightarrow{DQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DA}$

(même démonstration que pour P)

3. Par une homothétie, l'image d'une droite est une droite qui lui est parallèle. Donc les côtés de MPDQ sont parallèles à ceux de ABCD, donc MPDQ est un rectangle.

Par  $h$ , les longueurs sont multipliées par  $\frac{3}{2}$ , donc le périmètre de MPDQ est  $\frac{3}{2} \times 2 \times (4 + 3) = 21 \text{ cm}$

Par  $h$ , les aires sont multipliées par  $\frac{9}{4}$ , donc l'aire de MPDQ est  $\frac{9}{4} \times 4 \times 3 = 27 \text{ cm}^2$

## CHAPITRE XIII : ETUDE DE FONCTIONS

### Exercice 3

1) Déterminons  $D_f$ .  $D_f = [-4; -2[ \cup [-2; 4[ \cup [4; 5] = [-4; 5]$

2) Calculons l'image par  $f$  des nombres suivants : -4 ; -2 ; 4 et 5.

On a  $-4 \in [-4; -2[$  ; donc  $f(-4) = -(-4) + 5 = 9$

On a  $-2 \in [-2; 4[$  ; donc  $f(-2) = 3$

On a  $5 \in [4; 5]$  ; donc  $f(4) = 4(4) = 16$ .

On a  $4 \in [4; 5]$  ; donc  $f(4) = 4(5) = 20$ .

3) Représentons graphiquement la fonction  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; I; J)$  unité 2cm.

Elle est obtenue à partir des  $(D_1)$ ,  $(D_2)$  et  $(D_3)$

D'équations respectives

$(D_1) : y = -x + 5$

$(D_2) : y = 3$

$(D_3) : y = 4x$

**Exercice 5**

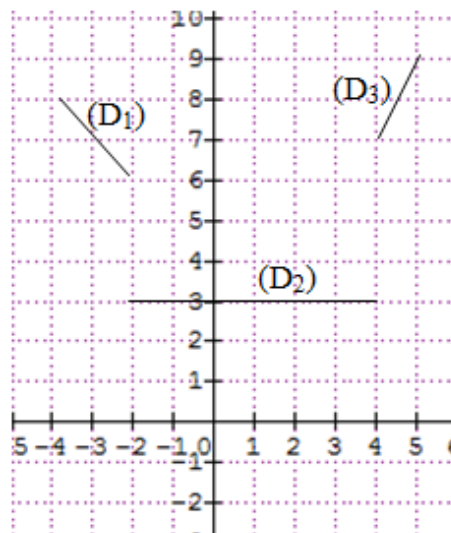
On considère la fonction numérique  $f$  définie par :

On a :  $f(x) = |3x - 1|$   $Df = \mathbb{R}$

Si  $3x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}$  alors  $f(x) = 3x - 1$

Si  $3x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$  alors  $f(x) = -3x + 1$

Ainsi  $\begin{cases} \forall x \in ]-\infty; \frac{1}{3}], f(x) = -3x + 1 \\ \forall x \in ]\frac{1}{3}; +\infty[, f(x) = 3x - 1 \end{cases}$



$Df$  est une réunion d'intervalles sur chacun desquels  $f(x)$  coïncide avec fonction affine.

**Exercice 9**

On veut étudier la fonction valeur absolue

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto |x|$

1) Déterminons  $D_f : Df = \mathbb{R}$

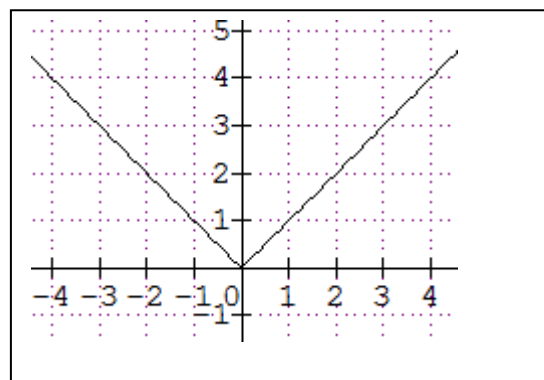
2) Ecrivons  $f(x)$  sans les barres de valeur absolue.

Si  $x < 0$  alors  $f(x) = -x$

Si  $x > 0$  alors  $f(x) = x$

3) Dressons un tableau de valeur de  $f$ .

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	4	3	2	1	0	1	2	3	4



4) Représentons  $(C_f)$  dans un repère orthonormé.

### Exercice 12

On donne la fonction  $f$  définie par :

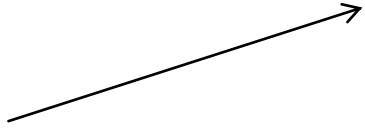
$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

1) Déterminer  $D_f, Df = [0; +\infty[$

2) Déterminer le sens de variation de  $f$  puis dresser le tableau de variation de  $f$

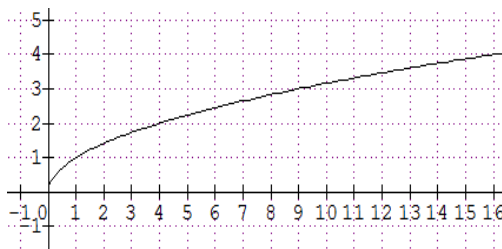
La fonction racine carrée est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$

$x$	0 16
$f(x)$	

3) a) Compléter le tableau de variation suivant :

$x$	0	1	4	9	16
$f(x)$	0	1	2	3	4

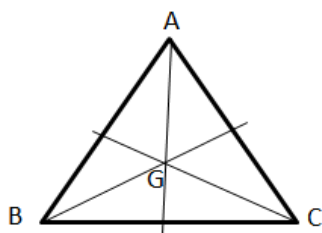
b) Dans un repère orthonormé  $(O; I; J)$ , construire la courbe  $(C_f)$  de  $f$  sur l'intervalle  $[0; 16]$  **unité 1cm.**



## CHAPITRE XIV : ROTATIONS

### Exercice 4

ABC est un triangle équilatéral de sens direct.



$r(A) = B, r(B) = C, r(C) = A$  L'image de ABC est ABC on dit que ABC est globalement invariant par  $r$

### Exercice 6

1.  $OC = OD$  (car ABCDEF est un hexagone régulier) et  $\text{mes } COD = 60^\circ$

Donc D est l'image de C par la rotation de centre O et d'angle  $60^\circ$  dans le sens des aiguilles d'une montre.

2.  $OE = OA$  (car ABCDEF est un hexagone régulier) et  $\text{mes } EOA = 120^\circ$

Donc A est l'image de E par la rotation de centre O et d'angle  $120^\circ$  dans le sens des aiguilles d'une Montre

### Exercice 7

1.  $DA = DC$  (car les quatre côtés du carré ont même mesure) et  $mes(\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DC}) = -\frac{\pi}{2}$

alors  $r_{(D; -\frac{\pi}{2})} A = C$  donc  $C$  est l'image de  $A$  par la rotation de centre  $D$  et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ .

2.  $BA = BC$  (car les quatre côtés du carré ont même mesure) et  $mes(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{2}$

alors  $r_{(B; \frac{\pi}{2})} A = C$  donc  $C$  est l'image de  $A$  par la rotation de centre  $B$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

### Exercice 9

1) Montrons que  $AB = AE$

On sait que  $D = r_{(A; \frac{\pi}{4})}(B)$  alors  $AB = AD$  et  $Mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{4}$

$E = r_{(A; \frac{\pi}{4})}(D)$  alors  $AD = AE$  et  $Mes(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}) = \frac{\pi}{4}$

Puisque  $AB = AD$  et  $AD = AE$  donc  $AB = AE$

2) Montrons que  $(AB) \perp (AE)$ .

$$Mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{4}, \quad Mes(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}) = \frac{\pi}{4} \quad \text{donc} \quad Mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Donc  $(AB) \perp (AE)$

3. Le triangle  $ABE$  est rectangle isocèle en  $A$ .

Car  $AB = AE$  et  $(AB) \perp (AE)$ .

### Exercice 11

$A$  et  $B$  sont deux points du plan tels que  $AB = 6\text{cm}$ .  $r$  est la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .

$$1) r(B) = C \Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ Mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Un triangle isocèle qui a un angle de mesure  $\frac{\pi}{3}$  équilatéral.

Donc  $ABC$  est un triangle équilatéral.

2) a- calculons l'aire du triangle  $ABC$ .

$$S(ABC) = \frac{B \times h}{2} \quad \text{avec } B = \text{base}; h = \text{hauteur}$$

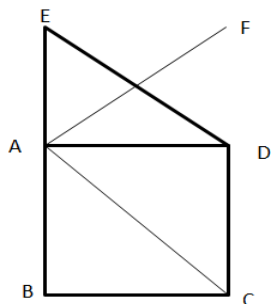
Or la hauteur d'un triangle équilatéral est  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$   $a$  = le côté du triangle

$$\text{Donc } S(ABC) = \frac{B \times h}{2} = \frac{6 \times \frac{6\sqrt{3}}{2}}{2} = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

b-  $S(ABC) = S(ACD) = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$  Car  $r(ABC) = ACD$  et la rotation conserve l'aire.

## Exercice 12

1. Figure



1.  $r(B) = D$

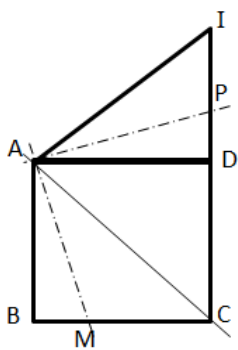
2. On sait que  $r(B) = D$  et  $r(D) = E$  alors  $BD = DE$  donc (D) appartient à la médiatrice du segment [BE].

3. Voir figure

## Exercice 34

ABCD est un carré de sens direct et de centre I.  $r$  est le quart de tour direct de centre A. M est le point de la demi-droite  $[CB)$  distinct de B et C. La perpendiculaire à la droite  $(AM)$  coupe la droite  $(DC)$  en P.

1.  $r$  est la rotation de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .



2.  $r(B) = D$

3. Notons I le symétrique de C par rapport à (D),  $(AD) \perp (DC)$  donc I est le symétrique de C par rapport à (AD) alors  $AC = AI$  de plus  $Mes(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{4}$  donc  $Mes(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI}) = \frac{\pi}{2}$  donc  $r(C) = I$

4. On a  $r(BC) = (DC)$ ,  $M \in (BC)$  donc  $r(M) \in (DC)$

Soit M' l'image de M par  $r$  donc  $Mes(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{2}$  alors M' appartient à la perpendiculaire à (AM) contenant A donc  $M' = P$ .

**Exercice 3**

Calculons le déterminant du système  $(S)$ .

$$\det \Sigma = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 \times \frac{1}{2} = 1 - 1 = 0$$

**Exercice 4**

Soit le système  $(S)$  définie par  $(S) : \begin{cases} 2x - y - 3 = 0 & (E_1) \\ x - 2y - 6 = 0 & (E_2) \end{cases}$ .

1. Calculons le déterminant du système  $(S)$ .

$$\det \Sigma = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - (-1) = -3$$

Le déterminant du système est non nul, alors le système admet une solution unique.

2. Résolvons le système  $(S)$  dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

$$S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{0; -3\}$$

**Exercice 9**

Soit le système  $(S)$  suivant :  $(S) : \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -3x + 4y = 2 \end{cases}$

1) Justifions que le système  $(S)$  a une seule solution.

. Calculons le déterminant du système  $(S)$ .

$$\det \Sigma = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1, \det \Sigma \neq 0 \text{ alors le système } (S) \text{ a une seule solution.}$$

2)  $(D_1)$  et  $(D_2)$  sont deux droites sécantes car leurs coefficients directeurs  $\frac{2}{3}$  et  $\frac{3}{4}$  sont différents.