Ministère de l'enseignement supérieur
et de la recherche scientifique

République de Côte d'Ivoire
Union-Discipline-Travail

COURS DE MATHEMATIQUES FINANCIERES

BTS 2

NOM:……………………………………………………………………………………

PRENOMS :…………………………………………………………………………

FILIERE :……………………………………………………………………………

CONTACT :…………………………………………………………………………

PREMIERE PARTIE : Mathématiques Financières

CHAPITRE 1 : LES INTERETS COMPOSES

Les opérations financières à long terme concernent les opérations réalisables sur une durée généralement supérieure à l'année. Cette durée est décomposée en **intervalles de temps égaux** appelés **périodes**. La période peut être le mois, le trimestre, le semestre, l'année etc.

I. DEFINITIONS

1. INTERET COMPOSE

Un placement ou un prêt est effectué à intérêts composés si, à la fin de chaque période, la valeur acquise à intérêts simples sert de base de calcul de l'intérêt pour la période suivante et ce processus continue jusqu'à la fin de la durée de l'opération.

2. CAPITALISATION

La capitalisation est la transformation successive des intérêts en capital.

II. FORMULES ESSENTIELLES

1. VALEUR ACQUISE A INTERETS COMPOSES : FORMULE DE CAPITALISATION

Désignons par :

- C_0 le montant du capital placé ou prêté ;
- **n** le nombre de périodes entier ou non ;
- **i** le taux d'intérêt pour 1 F et pour une période ;
- C_n le montant de la valeur acquise au bout de n périodes

Période	**Capital en début de période**	**Intérêt en fin de période**	**Valeur acquise en fin de période**
1	C_0	$C_0 \times i \times 1$	$C_1 = C_0 + C_0 \times i = C_0(1+i)$
2	C_1	$C_1 \times i \times 1$	$C_2 = C_1(1+i) = C_0(1+i)^2$
3	C_2	$C_2 \times i \times 1$	$C_3 = C_2(1+i) = C_0(1+i)^3$

Par itérations, on aboutit à la formule générale suivante : $C_n = C_0(1+i)^n$

(les valeurs de l'expression $(1+i)^n$ sont données par la table financière n°1)

Remarque : Contrairement aux formules relatives aux calculs d'intérêt simple qui donnaient directement l'intérêt fourni par un placement, la formule fondamentale, en matière d'intérêt composés donne directement la valeur acquise par le capital placé.

a) Exemples de calcul d’une valeur acquise

<u>Exemple 1</u> : Un capital de 5000 000F est placé à intérêts composés au taux annuel i=0,09. Capitalisation annuelle des intérêts.

<u>TAF</u> : Calculer la valeur acquise par ce capital au bout de 7 ans.

<u>Exemple 2 :</u> Un capital de 10 000 000F est placé à intérêts composés au taux trimestriel

i = 0,025. Capitalisation trimestriel des intérêts.

<u>TAF</u> : Calculer la valeur acquise au bout de 6 ans.

<u>Exemple 3 :</u> Yasmina a fait un dépôt à terme d’un montant de 2 000 000F à intérêts composés pour une durée de trois 3 ans 8mois.

<u>TAF</u> : Le taux d’intérêts annuel étant de 6%, déterminons la valeur acquise par ce dépôt. (1ère, 2ème et 3ème Méthode)

b) Problèmes simples sur la formule fondamentale des intérêts composés

<u>Problème 1</u> : La valeur acquise par un capital de 30 000F placé à intérêts composés pendant 11 ans est de 89 971,77F. Déterminer le taux annuel de placement (Méthode 1 et 2)

<u>Problème 2 :</u> La valeur acquise par un capital de 40 000F placé à intérêts composés au taux semestriel de 4,75% est de 76 597,84F. Déterminer la durée de placement (Méthode 1 et 2)

2. CALCUL DU MONTANT DE L'INTERET

Soit I le montant de l'intérêt généré par le capital C_0 après n périodes de placement ; C_n étant la valeur acquise par ce capital on a :

$C_n = C_0 + I$ et on déduit l'intérêt $\mathbf{I = C_n - C_0}$

3. VALEUR ACTUELLE A INTERETS COMPOSES ; ACTUALISATION

L'actualisation est l'opération inverse de la capitalisation ; elle conduit à la détermination de la valeur actuelle d'un capital.

Il s'agit de déterminer le capital C_0 à placer à intérêts composés afin d'avoir une valeur C_n au bout de n périodes. Ainsi de la relation donnant la valeur acquise on déduit celle qui permet d'avoir le capital C_0; soit :

$C_0 = C_n\,(1+i)^{-n}$

(les valeurs de l'expression $(1+i)^{-n}$ sont données par la table financière n°2)

Remarque

Les deux opérations de capitalisation et d'actualisation peuvent être schématisées de la façon suivante :

$$C_0 \xrightarrow{\text{Capitalisation}} C_n = C_0\,(1+i)^n$$

$$C_0 = C_n\,(1+i)^{-n} \xleftarrow{\text{actualisation}} C_n$$

ILLUSTRATION

Quelle somme faut-il placer aujourd'hui au taux annuel de 6% afin d'obtenir une somme de 3 000 000 F au bout de cinq ans ?

RESOLUTION

La somme recherchée C_0 est la valeur actuelle de 3 000 000 F ;

On a : C_n = 3 000 000 ; n = 5 ; i = 0,06

En utilisant la relation liant le capital C_0 à la valeur acquise C_n, on peut écrire

$C_0 = 3\,000\,000\,(1+0{,}06)^{-5}$ soit C_0 = 2 241 775 F

4. ESCOMPTE A INTERETS COMPOSE

Lorsque l'échéance d'un effet est supérieure à l'année alors il est conseillé d'effectuer le calcul de l'escompte à intérêts composés. Soit

- V_n la valeur nominale d'un effet de commerce
- V_0 sa valeur actuelle
- Ec le montant de l'escompte commercial

On a :

$$V_0 = V_n\,(1+i)^{-n}$$

Et on déduit l'escompte

$$Ec = V_n - V_0$$

$$E_c = V_n [1 - (1 + i)^{-n}]$$

ILLUSTRATION

Un effet de valeur nominale 12 000 000 F échéant dans 5ans est escompté à intérêts composés au taux annuel de 8,5% ; Calculons le montant de l'escompte.

Résolution

Compte tenu des notations adoptées, on a : V_n = 12 000 000 ; n = 5 et i = 0,085 L'escompte commercial vaut alors :

$$E_c - 12\,000\,000 - 12\,000\,000\,(1 + 0{,}085)^{-5}$$

$$E_c = 4\,019\,455 \text{ F}$$

III. TAUX EQUIVALENTS - TAUX PROPORTIONNELS

1. TAUX EQUIVALENTS

DEFINITION

Deux taux portant sur des périodes de capitalisation différentes sont dits équivalents si, pour un même capital donné et pour une même durée de placement ils conduisent à la même valeur acquise à intérêts composés. Soit C le capital placé pendant un an

i_a le taux annuel pour 1 F ;

i_s le taux semestriel pour 1 F ;

i_t le taux trimestriel pour 1 F ;

i_m le taux mensuel pour 1 F

Dire que ces taux sont équivalents entre eux revient à écrire les égalités suivantes :

$$C(1 + i_a) = C(1 + i_s)2 = C(1 + i_t)4 = C(1 + i_m)12$$

On en déduit la relation.

$$(1+i_a) = (1+i_s)^2 = (1+i_t)^4 = (1+i_m)^{12}$$

ILLUSTRATION

Calculons les taux trimestriel, semestriel et mensuel équivalents à un taux annuel de

17,5%.

RESOLUTION

En appliquant la relation ci-dessus, et pour un taux annuel i_a = 0,175, on a :

$(1 + 0,175) = (1 + ¡s)^2 = (1 + it)^4 = (1 + im)^{12}$

on déduit des égalités :

$i_s=(1,175)^{1/2}-1$ soit $i_s = 0,084$

$i_t (1,175)^{1/4}-1$ soit $i_t = 0,0411$

$i_m (1,175)^{1/12}-1$ soit $i_m = 0,0135$

2. TAUX PROPORTIONNELS

DEFINITION

Deux taux portant sur des périodes de capitalisation différentes sont dits proportionnels si leur rapport est égal au rapport des périodes de capitalisation correspondantes.

Etant donné un taux annuel de 18%, calculons les taux mensuel, trimestriel et semestriel proportionnels.

<u>RESOLUTION</u>

Selon les notations adoptées on a $i_a = 0,18$

<u>Remarque</u>

A la suite d'un calcul de taux, il est recommandé de retenir cinq chiffres après la virgule, ce qui correspond à trois chiffres après la virgule lorsque le taux est exprimé en pourcentage.

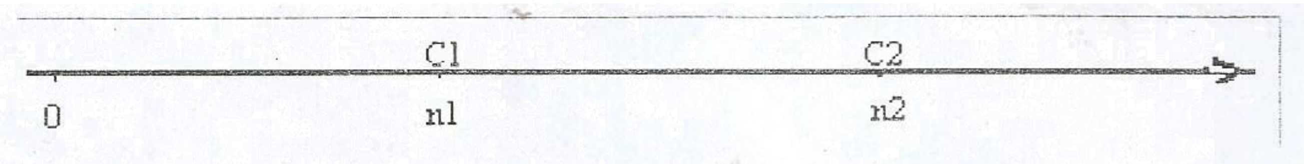
IV. EQUIVALENCE A INTERETS COMPOSES

Nous avons défini et étudié l'équivalence des effets (ou de capitaux) à intérêts simples. Cette notion d'équivalence peut aussi être appliquée à intérêts composés pour des opérations financières à long terme.

1. EQUIVALENCE DE DEUX EFFETS OU CAPITAUX

DEFINITION

Deux capitaux de valeurs nominales C_1 et C_2 échéant respectivement dans n_1 et n_2 périodes sont dits équivalents à la date 0 et à un taux périodique i si leurs valeurs actuelles à cette date sont égales.



l'égalité suivante traduit l'équivalence des capitaux C_1 et C_2 à la date 0 ; soit

$C_1(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{-\boldsymbol{n_1}} = C_2(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{-\boldsymbol{n_2}}$

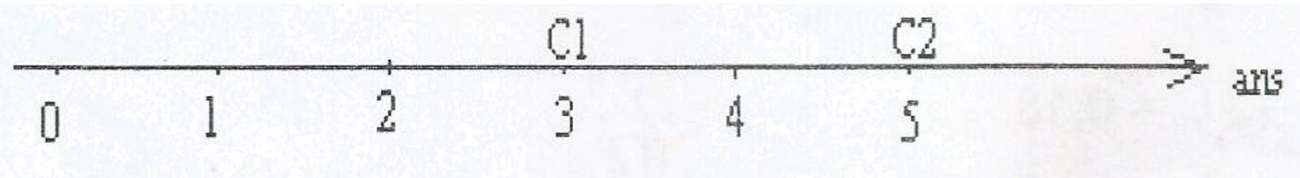
ILLUSTRATION

Considérons les capitaux suivants :

C_1 = 2 382 032 000 F payable dans 3 ans et C_2 = 2 676 451 155 F payable dans 5 ans.

Etudions leur équivalence au taux annuel de 6%

Résolution



Calculons les valeurs actuelles respectives à la date 0 ;

Soit V_{01} la valeur actuelle de C_1 à cette date et V_{02} la valeur actuelle de C_2 à la même date ; au taux annuel de 6% on peut écrire les égalités :

V_{01} = 2 382 032 000 $(1 + 0{,}06)^{-3}$; V_{01} = 2 000 000 000 F

V_{02} = 2 676 451 155 $(1 + 0{,}06)^{-5}$; V_{02} = 2000 000 000 F

Les deux capitaux ont la même valeur actuelle à l'époque 0 ; ils sont équivalents au taux annuel de 6%.

Considérons une autre date à laquelle nous évaluerons les capitaux C_1 et C_2 ; soit la date 1 ; Calculons les valeurs actuelles V'_{01}, et V'_{02} au taux de 6% ; on a :

V'_{01}, = 2 382 032 000 $(1 + 0,06)^{-2}$; V'_{01} = 2 120 000 000 F

V'_{02} - 2 676 451 155 $(1 + 0,06)^{-4}$; V'_{02} = 2 120 000 000 F

Les deux capitaux ont encore la même valeur actuelle à l'époque 1 ; ils sont équivalents au taux annuel de 6%.

Remarque 1 : A intérêts composés, si l'équivalence de deux capitaux est établie à une date donnée alors elle se conserve à n'importe quelle autre date. Ce qui n'est pas le cas en escompte commercial à intérêt simple.

Remarque 2 : En intérêts composés, si deux capitaux sont équivalents à une date donnée, alors ils ont, à cette date, même valeur actuelle et même valeur acquise.

Remarque 3 : Tout comme à intérêts simples, on définit l'équivalence d'un effet à un groupe d'effets et l'équivalence de deux groupes d'effets à intérêts composés.

2. ECHEANCE COMMUNE

Problème 1 :

On remplace aujourd'hui les quatre effets de commerce ci-dessous par un effet unique à échéance de 5 ans.

V_1 = 200 000F à échéance de 1 an

V_2 = 300 000F à échéance de 3 ans

V_3 = 100 000F à échéance de 4 ans

V_4 = 400 000F à échéance de 7 ans

Calculer le montant V de l'effet unique. Taux annuel : 7%

Problème 2 :

On remplace les quatre effets évoqués dans le problème précédent par un effet unique de valeur nominale 1 000 000F.
Compte tenu d'un taux annuel de 7%, déterminer la date d'échéance de cet effet unique.

CHAPITRE 2 : LES ANNUITES

Ce chapitre est une application des règles de calcul des intérêts composés pour les placements ou les décaissements de plusieurs sommes de même montant ou de montants différents lorsqu'ils sont effectués à intervalle de temps égaux.

I. Généralités

On désigne par annuités des sommes versées à intervalle de temps égaux ; cet intervalle de temps est appelé la période. Celle-ci peut correspondre aussi bien à l'année qu'au semestre, au trimestre ou au mois.

Le terme annuité est générique ; il peut être remplacé par semestrialité si la période est le semestre, trimestrialité si la période est le trimestre et mensualité si la période est le mois.

Les annuités versées visent deux objectifs

- la constitution d'un capital (il s'agit d'annuités de capitalisation)
- le remboursement d'une dette (ce sont des annuités de remboursement). Lorsqu'elles sont de même montant, les annuités sont dites constantes ; dans le cas contraire, elles sont dites variables.

Selon le nombre de versements, les annuités sont dites temporaires, perpétuelles ou viagères.

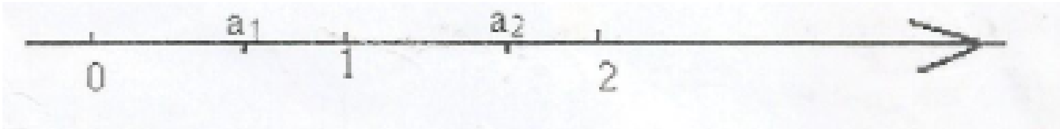
Les annuités sont temporaires lorsque le nombre de termes est connu ; elles sont perpétuelles si le nombre de termes est infini et viagères si leur nombre dépend de la durée de vie d'une ou de plusieurs personnes.

Quelques définitions : annuités immédiates, différées ou anticipées

- Lorsqu'on se place, pour évaluer une suite d'annuités, une période avant le premier versement, la suite d'annuités est dite immédiate.

- La suite d'annuités est dite différée si la date d'évaluation se situe à plus d'une période de celle du premier versement ;

- La suite d'annuités est dite anticipée si la date d'évaluation se situe à moins d'une période de la date du premier versement.

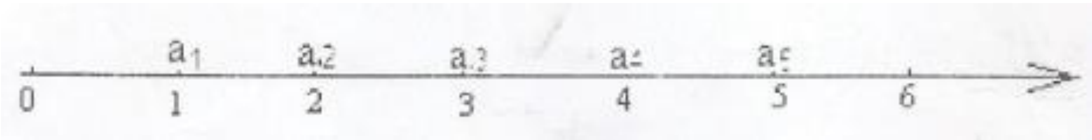


I- LES ANNUITES VARIABLES

1- Evaluation à la date du dernier versement (valeur acquise ou valeur définitive).

On désigne par V_n la valeur de ces n annuités immédiatement après le dernier versement

On suppose n = 5 et on note a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 les cinq annuités versées ;



En appliquant les règles de capitalisation à intérêts composés à chacune des annuités versées, on obtient la relation

$V_5 = a_1(1 + i)^4 + a_2(1 + i)^3 + a_3(1 + I)^2 + a_4(1 + i) + a_5$

Plus généralement, pour n versements, la relation précédente devient :

$$\boxed{V_n = a_1(1 + i)^{n-1} + a_2(1 + i)^{n-2} + ... + a_k(1 + i)^{n-k} + ... + a_{n-1}(1 + i) + a_n}$$ **RELATION N°1**

Illustration 1

Evaluons, au taux annuel de 5% et immédiatement après le dernier versement, valeur des 6 annuités respectives suivantes :

350 000 F, 650 000 F, 500 000 F, 490 000 F, 600 000 F et 835 000 F.

Résolution

Selon les notations qui précèdent on a : a_1 = 350 000 ; a_2 = 650 000 ; a_3 = 500 00C a_4 = 490 000 ; a_5 = 600 000 et a_6 = 835 000

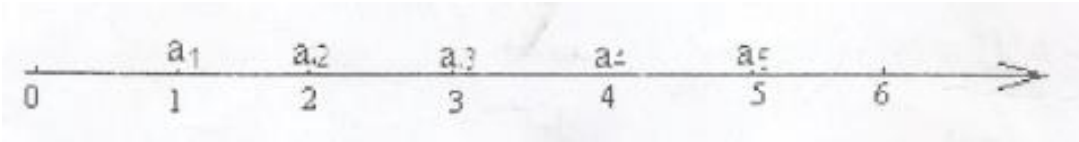
La valeur des 6 annuités immédiatement après le sixième versement est donc :

$V_n = 350\,000\ (1{,}05)^5 + 650\,000(1{,}05)^4 + 500\,000(1{,}05)^3 + 490\,000(1{,}05)^2 + 600\,000(1{,}05) + 835000$

Soit V = 3 820 815,109 F environ 3 820 815 F.

2- Evaluation une période avant le premier versement (Valeur actuelle ou valeur è l'origine).

On désigne par V_0 la valeur de ces n annuités une période avant le premier versement On suppose que n = 5 et on note a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 les cinq annuités versées.



En appliquant les règles d'actualisation à intérêts composés à chaque annuité versée, on obtient la relation :

$V_0 = a_1(1 + i)^{-1} + a_2(1 +i)^{-2} + a_3(1 + i)^{-3} + a_4(1 + i)^{-4} + a_5(1 + i)^{-5}$

Plus généralement, pour n versements, la relation précédente devient :

$$\boxed{V_0 = a_1(1 + i)^{-1} + a_2(1 +i)^{-2} + ...+ a_k(1 + i)^{-k} +...+ a_n(1 + i)^{-n}}$$ **RELATION N°2**

Illustration 2

Les six versements de l'illustration 1 sont effectués en vue de régler une dette contractée un an avant le premier versement. Déterminons le montant emprunté.

Résolution

Le montant emprunté est équivalent aux annuités de remboursement. V_0 la date de l'emprunt on peut donc écrire :

$V_0 = 350\,000(1,05)^{-1} + 650\,000(1,05)^{-2} + 500\,000(1,05)^{-3} + 490\,000(1,05)^{-4} +$

$600\,000(1,05)^{-5} + 835\,000(1,05)^{-6}$

On trouve V_0 = 2 851 151 F

II- LES ANNUITES CONSTANTES

Ce type d'annuités est souvent observé dans la vie courante par exemple lors du règlement d'une dette ou dans le cas de prélèvements en vue de constituer un capital.

Nous noterons par la suite **a** l'annuité constante.

1- Valeur acquise à la date du dernier versement

En nous référant aux annuités variables précédentes il suffit de remplacer les sommes

a_k par l'annuité constante a. La valeur de la suite d'annuités à la date du dernier versement devient :

$V_n = a(1 + i)^{n-1} + a(1 + i)^{n-2} + ...+ a(1 + i)^{n-k} + ... + a(1 + i) + a$

L'addition étant commutative, cette somme peut être faite de la droite vers la gauche; V est donc la somme des n termes d'une suite géométrique de premier terme **a** et de raison

(1 + i). Il ressort de ce qui précède que :

$$\boxed{V_n = a\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

Les valeurs de l'expression $\frac{(1+i)^n-1}{i}$ sont données par la table financière n°3

Illustration 3

Afin de constituer un capital Monsieur BARRY décide d'effectuer 15 versements annuels de 1 250 000 F chacun. De quelle somme disposera-t-il immédiatement après le dernier versement ? Taux annuel d'intérêt : 4,5%

Résolution

Par rapport aux notations qui précèdent on a : n = 15 ; a = 1 250 000 ; i = 0,045.

Le capital constitué immédiatement après le dernier versement est donc :

$V_n = 1\,250\,000\,\frac{(1+0{,}045)^{15}-1}{0{,}045}$; $V_n = 25\,980\,067,\,86$ F

2- Evaluation une période avant le premier versement (valeur actuelle ou valeur à l'origine)

En utilisant la relation n°2 obtenue précédemment, il suffit de remplacer les annuités a_k par l'annuité constante a. La valeur de la suite d'annuités devient :

$$\boxed{V_0 = a\,(1 + i)^{-1} + a\,(1 + i)^{-2} + a\,(1 + j)^{-3} + ... + a\,(1 + i)^{-n}}$$ **RELATION N°3**

V_0 est la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme a $(1 + i)^{-1}$ et de raison $(1 + i)^{-1}$. De ce qui précède il vient :

$$\boxed{V_0 = a\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

Les valeurs de l'expression $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ sont données par la table financière n°4

Remarque : n périodes séparent la date du dernier versement de celle retenue dans cette hypothèse. Aussi peut-on obtenir la valeur V_0 par simple actualisation de V_n sur les n périodes ; soit :

$$V_0 = V_n (1+i)^{-n} = a\,\frac{(1+i)^n-1}{i}(1+i)^{-n} = a\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Illustration 4

Pour rembourser une dette, une personne doit effectuer 20 remboursements trimestriels de 500 000 F chacun, le premier versement étant prévu un trimestre après la date de l'emprunt.

Calculer au taux trimestriel de 4% le montant de la somme empruntée.

Résolution

Désignons par E le montant de l'emprunt ; il est équivalent aux 20 décaissements trimestriels à effectuer. Le premier versement étant prévu un trimestre après la date de l'emprunt, $E=V_0$. par ailleurs on a : n = 20 ; i = 0,04 et a = 500 000

Le montant de l'emprunt est donc : $E = 500\,000\,\frac{1-1{,}04^{-20}}{0{,}04}$; E = 6 795 163 F

3- Exercices sur la formule fondamentale de la valeur acquise : $V_n = a\,\frac{(1+i)^n-1}{i}$

__Exercice 1 :__ Calculer la valeur acquise par une suite de 15 annuités constantes, égales chacune à 100 000F. Taux de capitalisation : 8,5%.

__Exercice 2 :__ Dans le but de se constituer un capital de 1 000 000F pour le 15 Mars 2010, un épargnant envisage d'effectuer des versements annuels constants.
1er versement : 15 Mars 2000 et deuxième versement : 15 Mars 2010.
Le taux de capitalisation étant de 10%, calculer le montant du versement constant.
__Exercice 3 :__ 18 annuités constantes de 50 000F chacune ont une valeur acquise de 2000 000F. Déterminer le taux de capitalisation.

Exercice 4 : A l'aide d'annuités de 200 000F chacune, capitalisées à 7,5%, on veut constituer un capital de 2 000 000F à la date de paiement de la dernière annuité. Déterminer le nombre n de ces annuités.

Exercice 5 : Calculer la valeur acquise par 40 trimestrialités de chacune 200 000F. Taux trimestriel d'intérêt : 2%

Exercice 6 : Calculer la valeur acquise par 84 mensualités de chacune 100 000F. Taux annuel d'intérêt : 10%

4.) Exercices sur la formule fondamentale de la valeur actuelle :

$$V_0 = a\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Exercice 1 : Calculer la valeur à l'origine d'une suite de 15 annuités constantes de montant 100 000F chacune. Taux d'escompte : 8%

Exercice 2 : 10 annuités constantes, escomptées à 10% ont une valeur actuelle de 2 000 000F. Calculer le montant de l'annuité constante.

Exercice 3 : 12 annuités constantes de chacune 125 000F ont une valeur actuelle de 900 000F. Calculer le taux auquel ces annuités ont été escomptées.

Exercice 4 : n annuités constantes de 200 000F chacune, escomptées à 10% ont une valeur actuelle de 1 400 000F. Calculer n.

Exercice 5 : Calculer la valeur à l'origine de 30 semestrialités de chacune 400 000F au taux semestriel de 4,5%.

Exercice 6 : Calculer la valeur, un trimestre avant le premier versement, de 60 trimestrialités de chacune 50 000F. Taux annuel : 10%.

5) Valeur acquise par une suite d'annuités constantes, évaluée d périodes après le dernier versement

Soit V_n^d cette valeur acquise. On a le schéma suivant:

$$\boxed{V_n^d = V_n\,(1+i)^d \qquad \text{ou} \qquad V_n^d = a\,\frac{(1+i)^n-1}{i}\,(1+i)^d}$$

ILLUSTRATION:

Calculer la valeur acquise, 6ans après le dernier versement, par 15 annuités constantes de 100 000F chacune, capitalisées au taux annuel de 9,5%

RESOLUTION:

V_n^6 = V_n $(1+i)^6$ = V $(1+0,095)^6$

V_n^6 = 100 000 $\frac{(1+0,095)^{15}-1}{0,095}$ $(1+0,095)^6$ =……………………………………………

6) Valeur d'une suite d'annuités constantes, évaluée d périodes avant l'origine

Soit V_0^{-d} cette valeur acquise. On a le schéma suivant :

$$V_0^{-d} = A\,(1+i)^{-d} \qquad \text{ou} \qquad V_0^{-d} = a\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\,(1+i)^{-d}$$

ILLUSTRATION : Calculer, au taux annuel de 9,5% la valeur d'une suite de 12 annuités de chacune 300 000F, exprimée 5 ans avant l'origine.

RESOLUTION:

V_0^{-5} = A $(1+i)^{-5}$ ou V_0^{-5}= 300 000 $\frac{1-(1+0,095)^{-5}}{0,095}$ $(1+i)^{-5}$

V_0^{-5}=……………………………………………

7- Evaluation d'une suite d'annuités constantes, exprimée à une date quelconque entre l'origine et la date du dernier versement

Soit k' le nombre de périodes séparant la date du dernier versement de celle de l'évaluation ; la valeur de la suite d'annuités est donnée par actualisation de V_n sur k' périodes ou par capitalisation de V_0 sur (n - k') périodes.

Notons V' la valeur de la suite à la date indiquée ; on a donc ceci :

$$\mathbf{V' = V_n\,(1+i)^{-k'} \qquad ou \qquad V' = V_0\,(1+i)^{n-k'}}$$

Illustration

1- Déterminons la valeur de 12 mensualités de 120 000 F chacune quatre mois après le dernier versement ; taux mensuel 0,3%.
2- Evaluer les 12 mensualités à la date du neuvième versement.

Résolution

1- Déterminons la valeur acquise 4mois après le dernier versement

Nous avons des mensualités constantes de 120 000 F chacune ;

Soit a = 120 000; n = 12 ; i = 0,003 ; k = 4.

La valeur acquise des 12 mensualités à la date du dernier versement est de :

V_n = 120000 (1+0,003) ; Soit V_n = 1 463 999,21 F. On capitalise donc cette valeur acquise sur les quatre périodes supplémentaires de placement ; on a :

$V' = V_n (1 + 0,003)^4$ soit V' = 1 481 646,42F

2- Evaluons la suite d'annuités à la date du 9ème versement

$V' = V_n (1 + i)^{-3}$ ou $V' = V_0 (1 + i)^{12-3} = V_0(1+i)^9$

$V' = 1\,463\,999,21(1 +0,003)^{-3}$; soit V' = 1 450 901, 88 F ≈ 1450 902 F

III- ANNUITES VARIABLES MAIS SUIVANT UNE LOI DONNEE

Ici on considère les annuités qui évoluent soit en progression arithmétique soit en progression géométrique.

1- ANNUITES VARIANT EN PROGRESSION ARITHMETIQUE

Désignons par ai la première annuité, r la raison de la progression arithmétique, i l'intérêt périodique pour 1 F et n le nombre d'annuités versées ou à verser.

a- Evaluation à la date du dernier versement

Soit V_n la valeur de la suite d'annuités à la date du dernier versement ; on démontre et nous l'admettrons que :

$$\boxed{V_n = \left(a_1+\frac{r}{i}\right)\frac{(1+i)^n-1}{i} - \frac{nr}{i}}$$

Illustration 5

Calculons à la date du dernier versement la valeur de cinq annuités variant en progression arithmétique dont la première annuité vaut 250 000 F et la raison 50 000 F. Taux annuel d'intérêt 6%.

Résolution

Conformément aux notations utilisées on a a_1 = 250 000 ; r = 50 000 ; i = 0,06 et n = 5. Appliquons la formule établie

$$V_5 = (250\,000 + \frac{50000}{0{,}06})\,\frac{(1+0{,}06)^5-1}{0{,}06} - \frac{5x50000}{0{,}06}$$

La valeur acquise à la date du dernier versement est donc :

V_5 = 1 940 184,04 F

Remarque : Ce résultat peut aussi être obtenu en utilisant la formule donnant la valeur d'une suite d'annuités quelconques à la date du dernier versement : soit V_5 = 250 000(1,06)4 + 300 000(1,06)3 + 350 000(1,06)2 + 400 000(1,06) + 450 000 = 1 940 184,04 F

b- Evaluation une période avant le premier versement

Désignons par V_0 la valeur de la suite d'annuités une période avant le premier versement ; on démontre et nous l'admettrons que :

$$\boxed{\mathbf{V_0 = (a_1+\frac{r}{i} + nr)\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{nr}{i}}}$$

Illustration 6

Reprenons les données de l'exemple précédent et déterminons la valeur des cinq annuités une période avant le premier versement.

Résolution

Selon la formule on a :

$$V_0 = (250\,000 + \frac{50000}{0{,}06} + 5x50000)\,\frac{1-(1+0{,}06)^{-5}}{i} - \frac{5x50000}{0{,}06}$$

V_0 = 1 449 818,38 F

Remarque : on obtient également ce résultat par actualisation cumulée des annuités. On a alors

$V_0 = 250000(1,06)^{-1} + 300000(1,06)^{-2} + 350000(1,06)^{-3} + 400000(1,06)^{-4} + 450000(1,06)^{-5}$

V_0 = 1 449 818,38 F

2- ANNUITES VARIANT EN PROGRESSION GEOMETRIQUE

Soit a_1 la première annuité, q la raison de la progression géométrique, i l'intérêt périodique pour 1 F et n le nombre d'annuités versées ou à verser ;

a- Evaluation à la date du dernier versement

La valeur de la suite d'annuités à la date du dernier versement est donnée par la formule suivante :

$$V_n = a_1 \frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)} \quad \text{ou encore} \quad V_n = a_1 \frac{(1+i)^n - q^n}{(1+i) - q} \text{ avec } q \neq (1+i)$$

Remarque : si $q = (1 + i)$ alors on démontre que : $V_n = n\, a_1 (1+i)^{n-1}$

Illustration 7

Déterminons à la date du dernier versement la valeur de 8 versements annuels variant en progression géométrique de raison 1,02 et ayant pour premier terme 200 000 F, Taux annuel 10%.

Résolution

Selon les notations retenues on a : a_1 = 200 000 ; q = 1,02 ; i = 0,1 ; n = 8.

1 + i est différent de q ; on peut donc appliquer la première formule, à savoir

$V_8 = 200000 \frac{1,1^8 - 1,02^8}{1,1 - 1,02}$ ce qui donne v_8 = 2 429 823,57 F.

b - Evaluation une période avant le premier versement

Cette évaluation se déduit par actualisation, sur n périodes, de la valeur de la suite d'annuités à la date du dernier versement. Ainsi on a :

$$\boxed{V_0 = V_n (1 + i)^{-n}}$$

Exemple : une période avant le premier versement, les huit annuités de l'illustration précédente ont pour valeur :

$V_0 = 2\ 429\ 823{,}57\ (1 + 0{,}1)^{-8}$; $V_0 = 1\ 133\ 530{,}63$ F

Exercice 1

1. Calculer à la date du 15 octobre 2004 et au taux de 10.5%, la valeur d'une suite d'annuités de chacune 500 000F. Date de versement de la première : 15 octobre 2005. Date de versement de la dernière : 15 octobre 2017.
2. Calculer la valeur de cette même suite d'annuités à la date du 15 octobre 2002 et au même taux (10.5%).

Exercice 2

Une suite de 12 annuités constantes, évaluée deux ans après le dernier versement, a une valeur de 37 323 569,47F. Evaluée deux ans avant le premier versement, elle vaut 9 566 903,285F.

1. Calculer le taux annuel d'intérêt.
2. Calculer le montant de l'annuité constante.
3. A quelle date faut-il verser 21 652 021,82F en remplacement de la suite d'annuités ?

Exercice 3

Une suite de 15 annuités est constituée de la façon suivante :

5 annuités de 100 000F chacune, puis 5 annuités de 150 000F chacune, puis 5 annuités de 200 000F chacune.

1. Calculer la valeur acquise de cette série d'annuités (à la date du dernier versement), taux : 11.5%
2. Calculer la valeur actuelle de cette sérié d'annuités au taux de 11.5%

Problème n°1

M. N'Guessan envisage de constituer un capital de 3 420 082.881F pour s'acheter une Mercedes. Pour cela, il verse chaque trimestre la somme de 250 000 F sur son compte d'épargne, au taux de 8.25%.

Travail à faire :

1. Quel est le taux trimestriel équivalent à ce taux annuel ? (arrondir le résultat au taux usuel le plus proche)

2. Combien de versements trimestriels doit-il effectuer pour atteindre son objectif ?

Le capital acquis, M.N'Guessan va se renseigner chez le concessionnaire de Mercedes. Il constate que son épargne est insuffisante pour l'achat de la voiture de son choix.il décide alors de laisser son épargne dans le compte pendant 18 mois, le temps de bien réfléchir.

3. Quel sera le montant de son épargne à la fin du temps de réflexion ?
4. Après avoir bien réfléchi et vu que son épargne ne suffit toujours pas, il demande et obtient auprès de sa banque un prêt dont le montant, ajouté à son épargne, lui permettra d'acheter la voiture.
   Ce prêt est remboursable par le versement de 20 trimestrialités constantes de 200 000F au taux trimestriel de 3,5%
   a) Quel est le montant du prêt ?
   b) Quel est le coût de revient de la voiture?

<u>Problème n°2</u>

Mme N'Guessan souhaite se constituer un capital de 200 000 F pour le 1er Janvier 2010.Pour cela, elle verse sur un compte, chaque début d'année à partir du 1er janvier 2000 et jusqu'au 1er Janvier 2009, une somme s constante.

<u>Travail à faire</u> :

1. Quel doit être le montant de cette somme si le taux d'intérêt ayant servi sur ce compte est de 8% ?
2. Même question, en supposant cette fois que les versements annuels sont en progression géométrique de raison 1,12. (On précisera le versement à effectuer le 1er Janvier 2000 et celui à effectuer le 1er Janvier 2009)

<u>Problème n°3</u> (BTS FCGE - 2011)

Un père sentant sa mort prochaine fit venir ses trois enfants Jean, Pierre et Paul ;et leur parle sans témoin : voici le fruit de l'héritage que m'a laissé mon père. Il est de 5000 000 F.
Je vous le partage proportionnellement à votre âge. Jean est âgé de 20 ans, Pierre de 17 ans et Paul de 13 ans.
Chacun des enfants peut disposer de son argent à sa majorité fixé a 21 ans, le père ayant pris le soin d'ouvrir un compte à chacun des enfants dans une même banque dont le taux d'intérêt trimestriel est de 2.874%

1) Calculer le taux annuel équivalent.
2) Déterminer la valeur acquise à intérêts composés par la part d'héritage de chacun des enfants à leur majorité.

Le plus grand des enfants étant devenu salarié dans une entreprise de la place, à sa majorité, effectue 12 versements semestriels constants. Le 1er versement a lieu un semestre après l'âge de sa majorité. En fait il souhaite construire une maison dont le coût de revient est estimé à 12 773 086,21 F. Le capital constitué à sa majorité restant toujours placé à intérêts composés au moment du versement des 12 semestrialités. Le taux annuel de capitalisation est de 12%.
Déterminer le montant de la semestrialité constante.

Problème n°4 **(BTS FCGE - 2002)**

Monsieur Konan négocie auprès de la société INFORMACTING l'achat d'un matériel informatique d'un montant de 6 400 000F

Monsieur Konan peut régler au comptant 25% de ce montant et souhaite bénéficier d'un crédit d'une durée de 5 ans pour les 75% restants.

Le responsable des ventes d'INFORMACTING (en abréviation, RDV) lui propose alors un prêt remboursable par annuités constantes au taux annuel de 9.5%.

1) Quel est le montant de l'annuité constante que Monsieur Konan devra verser ?
2) Monsieur Konan trouve le montant de l'annuité de la question n° 1 trop élevé et souhaite que le RDV diminue le taux de manière à ce que l'annuité constante ne dépasse pas 1 200 000F (sur 5ans).
   a- Quel taux maximum doit pratiquer le RDV pour satisfaire Monsieur Konan ?
   b- Selon les instructions d'INFORMACTING, le taux ne doit pas descendre en dessous de 9%. Le RDV peut-il répondre favorablement à Monsieur Konan ?
3) Après négociation, Monsieur Konan et le RDV s'entendent sur un taux annuel de 9% moyennant une remise de 2% sur le montant total de l'achat.

   Calculer le montant définitif de l'annuité constante et présenter les deux dernières lignes du tableau d'amortissement de cet emprunt (sur 5ans).

Problème n°5 **(BTS IDA - 2013)**

Monsieur Koné est comptable de la société AOC. Pour sa retraite, il place chaque 31 décembre 200 000 F à intérêts composés à 5% l'an. Il pense réaliser ces versements pendant 20 ans.

1) Quelle est la valeur acquise au moment du dernier versement ?
2) En fait, à partir du onzième versement, il a pu placer chaque année une somme de 300 000 F. De combien augmentera la valeur acquise au moment du dernier versement ?
3) Le capital ainsi constitué doit servir à l'achat d'une maison, mais il est insuffisant. Monsieur Koné s'engage alors à verser pendant cinq ans en fin d'année, une annuité de 510 000 F au taux de 6%.Combien manquait-il au moment de l'achat ?
4) Quel serait le taux d'intérêt si Monsieur Koné s'était libéré en 10 ans au lieu de 5 ans, par des versements annuels de 290 000 F ?

Problème n°6

Mr Abou est un cadre dans une société de la place. Il a un revenu mensuel de 500 000F. Le 25 décembre 2002, il décide d'ouvrir un compte PEL (Plan-Epargne-Logement) dans sa banque, en vue de s'offrir un toit plus tard. Il commence le 31 décembre 2002 par un placement initial de 200 000 F et doit faire des mensualités constantes par la suite.

1ère mensualité : 31 décembre 2003 et **dernière mensualité** : 31 décembre 2005.

Travail à faire :

1) Sachant que le taux annuel du compte est de 3,5%,déterminer la valeur de la mensualité qu'il doit verser pour avoir un capital de 3 500 000 F immédiatement après le dernier versement.
2) Après le dernier versement, il bénéficie d'un crédit de 8 000 000 F remboursable sur 10 ans, au taux annuel de 12%, par des annuités constantes, la $1^{ère}$ intervenant un an après l'emprunt.
   a- Calculer la valeur de l'annuité constante
   b- Quel est alors le pourcentage de son revenu annuel qui est ainsi dégagé chaque année ?
   c- Il trouve cette proportion trop élevée et souhaite dégager au maximum 20% de son revenu annuel pour le remboursement. A quel taux maximum doit-il négocier cet emprunt ?
3) Après négociation avec les dirigeants de la banque, le taux est fixé à 10,5% et la durée du prêt est passée à 15 ans.
   Déterminer alors la valeur de l'annuité constante définitive.

Problème n°7

Un jeune étudiant plein d'ambition compte à l'avenir créer son entreprise dont il sera le PDG Ayant obtenu son BTS, il réussit à se faire embaucher dans une société de la place Il intègre le groupe de tontine de sa société et récupère sa mise en fin d'année, soit 1 200 000 f. Cette somme immédiatement versée dans un compte bloqué, est rémunérée au taux annuel de 8,5%. Il compte réaliser cette épargne chaque année. Le premier versement a lieu le 01/01/2009 et le dernier versement le 01/01/2018.

1- De quelle somme disposera-t-il :
   a. Immédiatement après le $10^{ème}$ versement ?
   b. 2 ans 3 mois après l'avant dernier versement ?
2- Calculer la valeur des versements :
   a. En 2008
   b. Un an et demi après le premier versement.
3- A partir du $5^{ème}$ versement, il augmente le montant de son épargne d'une valeur de 300 000f. De combien aura augmenté le montant disponible ?

4- En fait pour des raisons non élucidées, le taux annuel d'intérêt est passé de 8,5% à 7,5% après le 7ème versement. Calculer, dans ces conditions, le montant de ses avoirs :
   a. Immédiatement après le 10ème versement.
   b. 3ans après le 10ème versement.

NB : l'annuité reste 1 200 000f.

CHAPITRE 3 : LES EMPRUNTS INDIVIS

Les intérêts composés et les annuités trouvent leur application dans ce chapitre

I) GENERALITES

Un emprunt indivis est un emprunt ordinaire contracté auprès **d'un seul prêteur**. Par exemple, lorsqu'une personne physique ou morale désir acquérir un bien (une villa, une voiture, etc.…) ou financer un investissement, elle peut contracter un emprunt auprès d'un établissement financier.

Dans le monde des affaires, il est convenu que tout prêt s'accompagne du remboursement du capital et du paiement des intérêts induits. Le service de la dette peut être :
- Identique d'une période à l'autre (annuités constantes)
- Variable d'une échéance à l'autre (amortissement constant)
- Ou unique (in fine)

L'emprunt est remboursé à l'aide d'annuités constantes ou variables qui comportent chacune une fraction du capital emprunté. Cette fraction du capital est appelée **amortissement.**

-

II) REMBOURSEMENT PROGRESSIF DU CAPITAL

A-ETUDE D'UN TABLEAU D'AMORTISSEMENT

1-Présentation et analyse du tableau général d'amortissement

Nous adopterons les notations suivantes :
I : l'intérêt périodique pour 1F
D_0 : le capital emprunté encore appelé dette initiale
n : le nombre d'annuités de remboursement
a_k : l'annuité versée à la fin de la période k
A_k : l'amortissement contenu dans l'annuité é a_k
I_k : l'intérêt contenu dans l'annuité a_k
D_k : Capital restant dû après le versement du $k^{ième}$ amortissement

PERIODES	Dette en début de Période	Intérêt de la période	Amortissement de la période	Annuité de la période	Dette en fin de période
1	**D_0**	**D_0 x i**	**A_1**	**$a_1 = D_0$ x i+A_1**	**$D_1 = D_0 - A_1$**
2	**D_1**	**D_1 x i**	**A_2**	**$a_2 = D_1$ x i+A_2**	**$D_2 = D_1 - A_2$**

……..	…………..	………………..	……… ……..….	………………	………………
K	D_{k-1}	$D_{k-1} \times i$	A_k	$a_k = D_{k-1} \times i + A_k$	$D_k = D_{k-1} - A_k$
……………	…………..	……………….…	……… ……….	………………	……………..
n-1	D_{n-2}	$D_{n-2} \times i$	A_{n-1}	$a_{n-1} = D_{n-2} \times i + A_{n-1}$	$D_{n-1} = D_{n-2} - A_{n-1}$
N	D_{n-1}	$D_{n-1} \times i$	A_n	$a_n = D_{n-1} \times i + A_n$	$D_n = 0$

Le tableau d'amortissement présente le plan de règlement d'un emprunt contracté auprès d'une personne physique ou morale. On y trouve les éléments ci-après :

- **Période :** c'est l'intervalle de temps qui sépare deux échéances consécutives ; le nombre qui indique renseigne sur l'échéance à laquelle on se trouve.
- **Dette en début de période :** cette rubrique révèle le montant encore dû par l'emprunteur à une période donnée.
- **Amortissement de la période :** c'est la fraction du capital emprunté qui doit être remboursée à une échéance donnée.
- **Intérêt :** il désigne la charge financière liée à la dette encore vivante en début de période.
- **Annuité :** c'est le montant total à débourser à une échéance pour assurer le service de la dette. Elle comporte essentiellement l'amortissement et l'intérêt de la période.
- **Dette de fin de période :** c'est le montant de la dette, à une période donnée, juste après le versement de l'annuité de la période

REMARQUE :

- **Pour calculer l'intérêt d'une période, on multiplie la dette en début de cette période par le taux.**
- **L'annuité d'une période est égale à la somme des intérêts et amortissement de cette même période.**
- **La dette en fin de période est égale à la différence entre la dette en début de cette période et l'amortissement de cette même période.**
- **La dette en début de période correspond à la dette en fin de période précédente.**

2-PROPRIETES ET RELATIONS

a) Relation entre dette initiale et annuités

La dette initiale ou capital emprunté est égale à la valeur à l'origine des annuités.

b) Relation entre dette initiale et amortissement

La dette initiale est égale à la somme des amortissements.

c) Relation entre annuités et amortissements

d) Relation entre deux annuités successives

e) Evaluation de la dette vivante à une date k

Soit D_{Rk} le montant de la dette remboursée ou amortie après le paiement de la $k^{ième}$ annuité.

$$\mathbf{D_{Rk} = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots\ldots + A_k}$$

Soit D_k la dette vivante après le paiement de la kième annuité.

$$\mathbf{D_K = D_0 - D_{Rk}}$$

B) REMBOURSEMENT PAR ANNUITES CONSTANTES

1) calcul de l'annuité constante

Si les annuités sont constantes, alors la relation n°1 devient :

$D_0 = a \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ d'où nous tirons $a = \frac{D_0 \text{ x } i}{1-(1+i)^{-n}}$

2.) Exemple de tableau d'amortissement

Envisageons le cas d'un emprunt de 1 000 000 F remboursable sur 5ans par annuités constantes. Le taux étant de 12% par an.

Résolution :

Calculons d'abord l'annuité constante.

$a = \frac{1\,000\,000 \text{ x } 0.12}{1-(1+0.12)^{-5}}$;

PERIODES	Dette en début de Période	Intérêt de la période	Amortissement de la période	Annuité de la période	Dette en fin de période
1					
2					
3					
4					
5					

REMARQUE :

A la dernière ligne, on a bien la dette (247 637 .2669) qui est égale au dernier amortissement (247 637 .2669).

Faisons la somme de la colonne « amortissement ».nous trouvons 1 000 000,le montant de la dette initiale.

3.) FORMULES

a) Lien entre deux amortissements successifs

Les annuités étant constantes, la relation n°5 devient : $\mathbf{A_{k+1} - A_k(1+i) = 0}$; ce qui implique que $\mathbf{A_{k+1} = A_k(1+i)}$.

THEOREME 1:

Lorsque les annuités sont constantes, les amortissements successifs varient en progression géométrique croissante de raison (1+i).

CONSEQUENCES DU THEOREME

b) Relation entre dette initiale et amortissements

$D_0 = A_1 \dfrac{(1+i)^{n}-1}{i}$ d'où nous tirons la valeur du 1er amortissement $A_1 = \dfrac{D_0 \times i}{(1+i)^{n}-1}$

<u>REMARQUE</u> : Pour calculer A_1, on peut aussi utiliser la 1ère ligne du tableau d'amortissement

$a = D_0 \times i + A_1$, d'où

$$A_1 = a - D_0 \times i$$

c) Lien entre le 1er amortissement ... ement A_k

$A_k = A_1(1+i)^{k-1}$

d) Lien entre le dernier amortissement A_n et le kième amortissement A_k

$A_n = A_k(1+i)^{n-k}$

e) Lien entre le dernier amortissement A_n et l'annuité constante a

D'après la relation n°4, on a : $a = A_n(1+i)$, Ce qui implique que : $\mathbf{A_n = \dfrac{a}{(1+i)}}$

f) Lien entre le 1er amortissement A_1 et l'annuité constante a

On sait que $A_n = A_1(1+i)^{n-1}$ or $a = A_n(1+i)$, d'où $\mathbf{a = A_1(1+i)^n}$

g) Lien entre le kième amortissement A_k et l'annuité constante a

On sait que $A_n = A_k(1+i)^{n-k}$ or $A_n = \dfrac{a}{(1+i)}$ d'où $\mathbf{A_k = \dfrac{a}{(1+i)^{n-k+1}}}$

h) Dette remboursée après le paiement de la kième annuité

D'après la relation n°6, on a : $D_{Rk} = A_1+A_2+A_3+\ldots\ldots+A_k$

Comme les amortissements sont en progression géométrique de raison (1+i), alors on a :

$\mathbf{D_{RK} = A_1 \dfrac{(1+i)^k-1}{i}}$

i) Dette due après le paiement de la kième annuité

On a remboursé D_{Rk}. Il reste à payer D_k. Selon la relation n°7, on a : $\mathbf{D_k = D_0 - D_{Rk}}$

***Expression de D_k en fonction de A_1**

***Expression de D_k en fonction de D_0**

***Expression de D_k en fonction de a**

C) REMBOURSEMENT PAR AMORTISSEMENTSCONSTANTS

Compte tenu de cette hypothèse, la relation n°2 devient :

$\mathbf{D_0}$ = A + A + A +……+ A = **A** x **n.** D'où on tire $\mathbf{A = \frac{D_0}{n}}$

La relation n°5 devient: $a_{k+1} - a_k = A - A(1+i)$; ce qui implique que $\mathbf{a_{k+1} - a_k = - A} \times \mathbf{i}$

ou bien $\mathbf{a_{k+1} - a_k = - \frac{D_0}{n} \times i}$

<u>THEOREME 2</u>

Lorsque les amortissements sont constants, les annuités successives varient en progression arithmétique décroissante de raison

Exemple : Construisons le tableau d'amortissement d'un emprunt de 1 000 000 F remboursable par amortissements constants sur 5ans. Taux : 12% l'an.

Résolution : Les amortissements étant constants, chacun d'entre eux vaut : $A = D_0/5$

m=1000 000/5 ; m= 200 000 F

Tableau

PERIODES	Dette en début de Période	Intérêt de la période	Amortissement de la période	Annuité de la période	Dette en fin de période
1					
2					
3					
4					
5					

III) REMBOURSEMENT EN BLOC OU REMBOURSEMENT IN FINE

De plus en plus, on rencontre de façon pratique, ce type de remboursement.
Le remboursement in fine peut se faire selon deux modes particuliers :
MODE 1 : A l'échéance, l'emprunteur rembourse le capital et paie également les intérêts composés. La somme totale payée représente la valeur acquise à intérêts composés du capital emprunté.
MODE 2 :L'emprunteur paie les intérêts périodiques du capital emprunté. A l'échéance, il paie le dernier intérêt et rembourse le capital.

Quelque soit le mode retenu, l'emprunteur peut constituer un fonds d'amortissement en vue d'honorer ses engagements. Il place à cet effet, périodiquement et à intérêts composés des sommes qui lui permettront d'obtenir le montant du capital emprunté.

Remarque : en général, le taux de placement est inférieur au taux de l'emprunt.

Illustration :

M. Koffi a contracté un emprunt de 10 000 00 F aux conditions suivantes :

- taux annuel d'intérêt : 12% ;

- remboursement intégral de l'emprunt à la fin de la sixième année ;

- paiement annuel des intérêts échus.

Calculons :

1. Le montant des intérêts payés chaque année ;
2. La somme constante à épargner chaque année au taux d'intérêt annuel de 8% en vue de constituer le fonds d'amortissement sachant que le premier versement a lieu un an après l'emprunt et le dernier, à l'échéance ;
3. La charge annuelle effective de cet emprunt.

4. Présenter le tableau d'amortissement de cet emprunt.

RESOLUTION

Le capital emprunté n'est remboursé qu'à la fin de la durée de l'emprunt ; les intérêts payés chaque année sont calculés à partir du capital de 10 000 000F.

1- Les intérêts payés chaque année s'élèvent à :

$$I = \frac{C\ xTxn}{100} = \frac{10\ 000000\ x\ 12\ x\ 1}{100}\ ; \quad I = 1\ 200\ 000\ F$$

2- La somme à épargner chaque année doit avoir, à la date du remboursement, une valeur acquise égale au montant du capital emprunté ;
Soit x cette somme ; elle est liée au capital emprunté par la relation suivante :

$X\ \frac{(1+i)^n - 1}{i} = D_0$, et on en déduit que $x = D_0\ \frac{i}{(1+i)^n - 1}$

Soit $x = 10\ 000\ 000\ \frac{0.08}{(1+0.08)^6 - 1} = 1\ 363\ 153{,}86$

La somme à épargner chaque année est donc de 1 363 153,86 F.

3- La charge annuelle effective de cet emprunt représente le montant total décaissé chaque année, c'est-à-dire le montant épargné augmenté des intérêts annuels.

La charge effective est donc de 1 200 000 + 1 363 153,86 = 2 563 153,86 F.

TABLEAU D'AMORTISSEMENT DANS LE CAS DU REMBOURSEMENT IN FINE

Période	**Dette en début de période**	**Intérêt de la période**	**Amortissement de la période**	**Annuité de la période**	**Dette en fin de période**
1					
2					
3					
4					
5					

TRAVAUX DIRIGES

Exercice 1

La société anonyme Papyrus a emprunté une somme de 200 000 000F amortissable par annuités constantes sur la base d'un taux d'intérêt annuel de 5%.

Sachant que le dernier amortissement doit être de 19 242 670F, Calculer :

1) Le montant de l'annuité constante
2) le montant du 1er amortissement
3) la durée du l'emprunt
4) le montant du capital restant dû après le paiement de la 4^{e} annuité (Arrondir au million de francs inférieur).

Exercice2

Une PME a contracté un emprunt auprès d'un organisme de crédit. Le prêt est remboursable par 12 annuités constantes de fin de périodes. Le 6ème amortissement A_6 est de 725 000F tandis que le 10ème amortissement A_{10} est de 1 368 029,53F.

1. Vérifier qu'on a l'égalité suivante : $A_{10} = A_6 (1+i)^4$.En déduire le taux d'intérêt i.
2. Déterminer le dernier amortissement.
3. Quelle est la somme empruntée ?
4. Déterminer le montant de l'annuité constante.
5. Ecrire les 1ère, 5^{e} ,10^{e} et 12^{e} lignes du tableau d'amortissement. (on présentera les calculs sur la feuille de copie).

Exercice 3

Mr Koné a obtenu de sa banque, un prêt remboursable par annuités constantes pendant 22ans ; la 1ère annuité est payable un an après la remise des fonds ; et le 1er amortissement s'élève à 387 323,2395F

Partie I : Au lendemain du paiement de la 11^{e} annuité, Mr Koné consulte le tableau d'amortissement que lui avait remis la banque ; il constate qu'il n'a remboursé que 8 000 000F du capital emprunté.

1-a) Déterminer le taux d'intérêt.

1-b) En déduire le montant du 11^{e} amortissement.

2-a) Quel est le montant du capital emprunté ?(on arrondira le résultat à la centaine de francs la plus proche).

2-b) En déduire le montant du capital restant dû.

3-Calculer le montant de l'annuité constante.

Partie II : Lors du paiement de la 11^{e} annuité, à sa propre demande, Mr Koné obtient de la banque, l'autorisation de rembourser le capital restant dû, par amortissements constants, et pendant 10ans.

1) Calculer :
   a) Le montant de l'amortissement constant.
   b) Les montants des 12^{e}, 13e et 21^{e} annuités
   c) La somme de toutes les annuités de remboursement de cet emprunt.
2) Donner les 11^{e}, 12^{e}, 13^{e} lignes du tableau d'amortissement de cet emprunt.

Exercice 4

Mr. Sylla désire acheter un véhicule pour son 50e anniversaire. Ses économies lui permettraient d'apporter dans l'immédiat 20% de la valeur du véhicule. Pour le reste, il devra s'adresser à son banquier qui pourra lui consentir un prêt remboursable au moyen d'annuités constantes. Selon les calculs effectués compte tenu des conditions du prêt, on observe les éléments suivants :

- Montant du 3e amortissement : 1 816 925F
- Intérêt contenu dans l'avant dernière annuité : 1 382 273,58F
- Intérêt contenu dans la dernière annuité : 748 203,13F

1) On désigne par $\mathbf{I_{n-1}}$ l'intérêt contenu dans l'avant dernière annuité et $\mathbf{I_n}$ l'intérêt contenu dans la dernière annuité.
   a) Donner les deux expressions de l'avant dernière valeur résiduelle de l'emprunt.
   b) Montrer que : $\mathbf{I_n / (I_{n-1} - I_n) = 1+i}$
   c) En déduire le taux annuel d'intérêt de l'emprunt.

2) Calculer dans l'ordre des questions :
   a) Le 1er amortissement
   b) La durée de remboursement de l'emprunt (utiliser l'expression de $\mathbf{I_n}$).
   c) La somme empruntée (arrondir le résultat au million de francs)
   d) Le montant de l'annuité constante.

3) Ecrire les 1ère, avant dernière et dernière lignes du tableau d'amortissement de l'emprunt.

Exercice 5

La coopérative agricole de PETIT BONDOUKOU, a construit un magasin de stockage de Cacao, d'une capacité de 10 000 sacs de 50 kg. Le tiers du coût de l'opération est financé par la coopérative suisse, et le reste par un prêt bancaire amortissable en douze (12) annuités constantes.

Les deux premières lignes du tableau d'amortissement présentent les caractéristiques suivantes :

Période	Capital en début de période	Intérêt de la période	Amortissements	Annuités	Capital en fin de période
1		1 200 000		1 614 368,076	
2			464 092,245		

Travail à faire :

1. a) Calculer le 1er amortissement.
   b) Calculer le taux d'intérêt.
2. a) Déterminer le montant D_0 de l'emprunt.
   b) En déduire le coût C de la construction.

3. Calculer le montant de la dette restante après le paiement de la $8^{ème}$ annuité ; ainsi que le $12^{ème}$ et dernier amortissement.
4. Déterminer la $1^{ère}$ ligne, la $2^{ème}$ ligne, la $8^{ème}$ ligne et la $12^{ème}$ ligne du tableau d'amortissement de cet emprunt.
5. A la fin de la $8^{ème}$ année, la coopérative réalise une production égale à toute la capacité du magasin ; et le kilogramme de cacao est vendu
   à 450F.La coopérative décide alors de s'acquitter de la totalité de sa dette, immédiatement après le versement de la $8^{ème}$ annuité, en utilisant le $1/50^{ème}$ de son chiffre d'affaires de l'année.
   a) Déterminer le chiffre d'affaire de la $8^{ème}$ année.
   b) Le $1/50^{ème}$ du chiffre d'affaires de la $8^{ème}$ année suffira-t-il pour éponger la dette ? Justifier la réponse.

Exercice 6

La société DONY-DONY a obtenu d'un établissement financier, un emprunt de 22 980 000 F, au taux annuel i = 9% remboursable à l'aide d'annuités dont la $1^{ère}$ intervenant un an après l'emprunt.

Partie 1 : On suppose que les annuités de remboursement sont constantes et que la différence entre le $6^{ème}$ et le 1^{er} amortissement est de 421 566,4931 F.

a) Exprimer le $6^{ème}$ amortissement m_6 en fonction du 1^{er} amortissement m_1.
b) Calculer le 1^{er} amortissement m_1.En déduire le montant de l'annuité.
c) Calculer le nombre d'annuités.
d) Ecrire après en avoir déterminé les éléments, la $1^{ère}$ ligne, la $5^{ème}$ et la dernière ligne du tableau d'amortissement (On précisera les calculs sur la feuille).

Partie 2 : On suppose ici que les amortissements contenus dans les annuités sont en progression arithmétique de raison r = 250 000 F et que le 1^{er} amortissement est m_1 = 540 000 F.

Sachant que la relation entre la capital emprunté D_o et les n amortissements est $D_o = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + m_n$

a) Exprimer D_0 en fonction de n,m_1 et m_n ; puis en fonction de n, m_1 et r.
b) Calculer le nombre n de versements qu'il faut pour amortir la dette.
c) Calculer le capital remboursé après le versement de la $7^{ème}$ annuité.
e) Donner la $1^{ère}$, $2^{ème}$ et $8^{ème}$ ligne du tableau d'amortissement (On précisera les calculs sur la feuille).

BONNE BOSSE !!!!

CHAPITRE 4 : LES EMPRUNTS OBLIGATAIRES

Il arrive qu'un état, une collectivité ou une société désire contacter un emprunt pour financier ces différentes activités, emprunt qui ne saurait être assuré par un seul préteur compte tenu de son montant élevé. Un tel emprunt est donc fractionné équitablement afin de permet à une multitude de prêteurs d'assurer son financement

Les notions développées dans ce chapitre sont pour une grande par similaires à celles relatives aux emprunts indivis.

Ce chapitre permet d'analyser et de comprendre les caractéristiques essentielles d'un emprunt obligataire.

I / __Généralités__

1/ __définitions__

- Un emprunt obligataire est un emprunt particulier contracté au prêt d'une multitude de prêteurs appelés **obligataires**.
- Les obligations sont des titres de créance négociables présentant chacun une fraction de l'emprunt.

2/ __principe du remboursement__

Le principe cde remboursement est le même que celui des emprunts indivis à savoir l'équivalence des sommes reçues et celles décaissées.

3/ __type de remboursement__

Selon les clauses du contrat, le capital emprunté peut être remboursé de façon progressive ou en une seule fois

4/ __caractéristiques d'un emprunt__

En fonction des objectifs fixés par l'emprunteur on définit les caractéristiques suivantes :

- Valeur nominale d'un titre : c'est la valeur effective de l'obligation qui est inscrite dans le conseil d'émission ; il sert de base de calcul de l'intérêt. La valeur nominale est aussi appelé le pair.
- Taux nominal : c'est un taux indiqué dans le contrat d'émission ; il peut être fixe ou variable
- Coupon d'intérêt : c'est l'intérêt périodique perçu sur chaque obligation non amortie ; il est égal au produit de la valeur nominale par le taux nominal.
- Prix d'émission : c'est le prix de souscription payé par l'obligataire pour être propriétaire de l'obligation. Par rapport à la valeur nominale, il peut être inférieur (émission en-dessous du pair), égal (émission au pair) ou supérieur (émission au-dessus du pair).
- Valeur de remboursement : c'est prix auquel sera remboursée une obligation à son échéance. Il peut être fixe ou variable, égale à la valeur nominale (remboursement au pair) ou supérieur à cette valeur nominale (remboursement au-dessus du pair).

- Prime de remboursement : c'est la différence entre la valeur de remboursement et le prix d'émission.
- Taux réel : c'est le taux de calcul à utiliser lorsque la valeur de remboursement est différente de la valeur nominale.

Ces différentes caractéristiques seront notées par la suite :

- **C** : la valeur nominale ;
- **I** : le montant de l'intérêt périodique pour 1F ;
- **C :** le coupon d'intérêt ; $\mathbf{c = C \times i}$;
- **E** : le prix d'émission ;
- **R** : la valeur constante de remboursement d'une obligation ;
- $\mathbf{N_o}$: le nombre total d'obligation émisse ;
- $\mathbf{A_k}$: le nombre d'obligation amorties à la fin de la période K ;

-M_k : le montant de l'amortissement versé à la fin de la période k avec $m_k = A_k \times R$

-N_k : le nombre d'obligations encore en vie après l'amortissement de la période K ;

-a_k : l'annuité de la période k ;

-r : le taux réel avec $r = \frac{c \times i}{R}$

*2-**<u>Remboursement Progressif de l'emprunt</u>***

Le remboursement progressif nécessite une matérialisation des obligations émises sous forme de titres numérotés. Ce procédé rend possible périodiquement le tirage au sort d'un certain nombre de titres qui doivent être portes à l'amortissement.

1-Etude d'un tableau d'amortissement concret.

1.1 Exemple

Dans le cadre du financement de son programme d'investissement, une entreprise a émis un emprunt dont les caractéristiques sont les suivantes :

- nombre d'obligations émises : **150 000**F

- valeur nominale d'une obligation : **10 000F**

- taux nominal d'intérêt **: 9%**

- prix de remboursement : **11 000 F**

- prix d'émission : **95%** de la valeur nominale

- durée de remboursement : **5 ans**

- nombre de titres respectivement amortis chaque fin d'année **: 20 000 ;**

25 000 ; 35 000 ; 42 000.

Le tableau d'amortissement de cet emprunt est le suivant

Périodes	Obligations vivantes en début de période	Intérêts de période	Amortissements		Annuités réelles	Obligations vivantes en fin de période
			Nbres des obligations	valeurs		
1	**150.000**	**135.000.000**	**20.000**	**220.000.000**	**355.000.000**	**130.000**
2	**130.000**	**117.000.000**	**25.000**	**275.000.000**	**392.000.000**	**105.000**
3	**105.000**	**94.000.000**	**28.000**	**308.000.000**	**402.000.000**	**77.000**
4	**77.000**	**69.300.000**	**35.000**	**385.000.000**	**454.300.000**	**42.000**
5	**42.000**	**37.000.000**	**45.000**	**462.000.000**	**499.000.000**	**0**
		453.600.000	**150.000**	**1.650.000.000**	**2.103.000.000**	

1.2 / Lecture et analyse du tableau

Analysons une des lignes du tableau par exemple la ligne 2

-Le nombre d'obligation au début de la **$2^{ème}$**période **(130.000)** correspond au nombre d'obligation à la fin de la 1eme période :

- l'intérêt d'un montant de **117 000 000 F** est le produit par c du nombre d'obligation en début de période **; c=0.009×10 000=900**

- l'amortissement d'une valeur de **275 000 000 F** est le produit du nombre de titres amortis lors de la période **A_2=25 000** par la valeur de remboursement **R=11 000** ; l'annuité de **392 000 000 F** représente la somme des intérêts et d'amortissement de la période.

- Le nombre d'obligations vivantes en a la fin de la deuxième année est la différence entre le nombre d'obligations vivantes en début de période et le nombre de titres amortis à la fin de la période.

2/ ***Généralisation***

Nous adopterons les notations dans les caractéristiques.

Période	Obligations vivantes en début de période	Intérêts de période	Amortissements		Annuités réelles	Obligations vivantes en début de période
			Nombre des titres	Montant (R connu)		
1	N_0	$N_0.c$	A_1	$A_1.R$	$N_0.c + A_1.R = a_1$	$N_0 - A_1$
2	N_1	$N_1.c$	A_2	$A_2.R$	$N_1.c + A_2.R= a_2$	$N_1 - A_2$
:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:
K	$N_k – 1$	$N_k – 1.c$	A_k	$A_k.R$	$N_k – 1.c + A_k.R= a_k$	$N_k – 1 - A_k$
K + 1	N_k	$N_k.c$	A_{k+1}	$A_{k+1}.R$	$N_k.c + A_{k+1}.R= a_{k+1}$	$N_k - A_{k+1}$
:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:
n-1	$N_n – 2$	$N_n – 2.c$	A_{n-1}	$A_{n-1}.R$	$N_n – 2.c + A_{n-1}.R= a_{n-1}$	$N_n – 2 - A_{n-1}$
n	$N_n - 1$	$N_n – 1.c$	A_n	$A_n.R$	$N_n – 1.c + A_n.R= a_n$	$N_n= 0$
		Σl_k	N	N.R	Σa_k	

***2.2/Relations entre les différents éléments d'un emprunt obligation*.**

De ce tableau général d'amortissement on vérifie les propriétés suivantes :

a- Relation liant le nombre de titres émis et les titres amortis

$N_0 = A_1+A_2+A_3+$………………………………+A **RELATION 1**

$N = N_{n-1} – A_n = 0$ soit $N_{n-1} = A_n$ **RELATION 2**

b- Relation liant la dette payable et les annuités

.La dette à rembourser et sur laquelle est basé le tableau d'amortissement constitue la dette initiale Do égale a No. R

.Le taux de calcul permettant d'établir l'équivalence entre les différents éléments de l'emprunt est le taux réel r. Selon le principe de l'équivalence on obtient :

$$N \times R = a_1(1+r)^{-1} + a_2(1+r)^{-2} + \ldots\ldots + a_K(1+r)^{-k} + \ldots\ldots + a_n(1+r)^{-n}$$

$$N \times R=\Sigma a_k(1+r)^{-k}$$ **RELATION**

C-Relation liants annuités et amortissements

Du fait de la similitude entre les emprunts indivis et les emprunts obligataires il ressort :

a_n = mn (1+ r) = An. R (1 + r) **RELATION 4**

a_{k+1}– ak =m k+1 – mk (1 + r) **RELATION 5**

d – **Évaluation de la dette vivante à la date k**

Soit Rk le capital amorti après le paiement de l'annuité ak ; on a :

Rk = m1 + m2 + m3 +…………….. + mk

= A1R + A2R + A3R +……………..+ AKR

Rk = (A1 + A2 + A3 + ………………. + Ak) × R **RELATION** 6

La somme A1 + A2 +………………. + AKreprésente le nombre total de titres amortis après k paiements.

Soit Dk la dette vivante à la date k ; on a :

Dk = D0 - Rk

= N0×R -∑Ak × R

= (N0 - ∑Ak) × R

DK = NK × R Avec Nk = N0 - ∑Ak **RELATION 7**

Cette dette peut être obtenue par actualisation des annuités non échues ; soit

D = $a_{k+1}(1+r)^{-1}$ + $a_{k+2}(1 + r)^{-2}$ + ……… + an$(1+r)^{-(n-k)}$RELATION 8

3 ***Cas particuliers***

3.1 Emprunts obligataires remboursables par annuités constantes.

Selon cette hypothèse les relations précédentes deviennent :

RELATION 3 **N0R = a $\frac{(1+r)^{-n}}{r}$** **RELATION 3 bis**

RELATION 4 **a = An × R (1 +r)** **RELATION 4 bis**

RELATION 8 **Nk × R = a $\frac{1-(1+r)^{-n+k}}{r}$** **RELATION 8 bis**

RELATION 5 $\boldsymbol{m_{k+1} - m_k(1+r) = 0}$ **RELATION 5 bis**

De cette dernière relation on déduit :

$m_{k+1} = m_k(1+r)$ soit encore $A_{k+1}.R = A_k.R\,(1+r)$

Et par simplification membre à membre on obtient :

$$A_{k+1} = A_k(1+r)$$

De ce qui précède, il ressort la loi de variation des obligations amorties :

Théorème **:**

Lorsque les annuités sont constatées, les nombres successifs d'obligations amorties varient en progression géométrique croissante de raison (1 + r)

Conséquences **:**

RELATION 1 : $\boldsymbol{N_0 = A_1 \frac{(1+r)^n - 1}{r}}$ RELATION 1 bis

RELATION 7 : $\boldsymbol{N_k = N_0 - A_1 \frac{(1+r)^k - 1}{r}}$ RELATION 7 bis

De la relation 1 bis, on tire A_1 et par substitution on obtient :

$$\boldsymbol{N_k = N_0 \frac{(1+r)^n - (1+r)^k}{(1+r)^n - 1}} \qquad \text{RELATION 9}$$

De même des relations 1 bis et 7 bis, on déduit :

$\boldsymbol{N_k = A_1 \frac{(1+r)^n - (1+r)^k}{r}}$RELATION 10

Enfin la relation 8 devient : $\boldsymbol{N_K R = a \frac{1-(1+r)^{-n+k}}{r}}$RELATION 8 bis

REMARQUE **:** En pratique les annuités sont plutôt sensiblement constantes compte tenu du fait que le nombre d'obligations amorties à chaque échéance est entier.

ILLUSTRATION **1**

Une société émet un emprunt obligation dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Nominal **: 10.000F**
- Prix d'émission : **9.500F**
- Valeur de remboursement : **12.500**
- Nombre d'obligations émises : **50.000**
- Taux de souscription : **7.8%**
- Remboursement progressif sur **5 an**s par annuités constantes

1) Calculons

a) Le montant de la dette à rembourser

b) Le montant de l'annuité constante

c) Le nombre de titres amortis au premier tirage

d) De deux façons différentes le nombre de titres en vie après le 3^{eme}tirage

2) écrivons les lignes 1, 4 et 5 du tableau d'amortissement.

RESOLUTION

a) Soit D_0 la dette à rembourser, R la valeur de remboursement d'une obligation et N_0 le nombre d'obligations émises : on a

$D_0 = N_0 \times R$ Soit $D_0 = 50.000 \times 12.500$; $D_0 = 625.000.000F$

b) Le remboursement se faisant de façon progressive et par annuités théoriques constantes on peut utiliser la relation 3 bis et avoir :

$$\boldsymbol{r = \frac{C \times i}{r}\ ; \quad r = \frac{10.000 \times 0.075}{12.500} \qquad r = 0.06}$$

De la relation 3 bis on déduit l'annuité théorique constante :

Soit $\boldsymbol{a = N_0 R \frac{r}{1-(1+r)^{-n}}}$ $\boldsymbol{avec}$ $\boldsymbol{n = 5}$

$$\boldsymbol{a = 50.000 \times 12.500 \frac{0.06}{1 - 1.06^{-5}}\ ; a = 148.372.750F}$$

c) Soit A_1 le nombre de titres amortis la première année. Etant le remboursement progressif par annuités constantes, la relation 1 bis permet d'écrire :

$$\boldsymbol{82A_1 = N_0 \frac{r}{(1+r)^n - 1}\ ; \quad Soit \quad A_1 = 50.000 \frac{0.06}{(1+0.06)^5} = 8.869,}$$

Nombre théorique ; on arrondit ce résultat par excès : Soit $A_1 = 8.870$ obligations.

d) On note N_3 ce nombre

$\underline{1^{ere}\ Méthode}$

La relation 9 permet d'écrire : $\boldsymbol{N_3 = N_0 \frac{(1+r)^5 - (1+r)^3}{(1+r)^5 - 1}}$

$$\boldsymbol{N_3 = 50.000 \frac{(1+0.06)^5 - (1+0.06)^3}{(1+0.06)^5 - 1}}$$

$$N_3 = 21.762{,}04\ (nombre\ théorique) \quad Soit\ 21.762\ obligations$$

$\underline{2^{eme}Méthode}$

Compte tenu du résultat de la question **c** et de la relation 10, on a :

$$N_3 = 21.762{,}04\ Soit\ 21.762\ pbligations\ vivantes.$$

$$N_3 = A_1 \frac{(1+r)^5 - (1+r)^3}{r}$$

$$Soit\ N_3 = 8.869,82 \frac{(1+r)^5 - (1+0.06)^3}{0.06}$$

$N_3 = 21.762{,}04$ $\quad$ $Soit\ 21.762\ pbligations\ vivantes.$

2- Tableau d'amortissement

Période	Obligations vivantes	Intérêt	Amortissement Nombre Valeur		Annuité	Obligations vivantes
1	50.000	37.500.000	8.870	110.875.000	148.375.500	41.130
:	:	:	:	:	:	:
4	21.762	16.321.500	10.564	148.050.000	148.371.500	11.198
5	11.198	8.398.500	11.198	139.975.000	148.373.500	0

3.2 Emprunts obligataires remboursables par amortissement constants

Cette hypothèse conduit à ma nouvelle relation à savoir :

RELATION 1 : $\boldsymbol{N_0 = A + A + A + \ldots\ldots\ldots. + A = n \times A}$

Où A désigné le nombre constant d'obligations tirées à chaque échéance.

$$A = \frac{N_0}{n}$$

RELATION 5 : $\quad a_{k+1} - a_k = -A \times R \times r\ \ Soit\ \ a_{k+1} = a_k\ (-\frac{N_0}{n} R \times r)$

Il s'en suit la loi de variation des annuités :

Théorème :

Lorsque les amortissements sont constants, les annuités varient en progression arithmétique décroissante de raison ($-\frac{N_0}{n} R \times r$)

Illustration 2

Reprenons l'illustration précédente en considérant ici un remboursement progressif sur 5 ans par amortissement constants.

Écrivons les $1^{ère}$; $4^{ème}$ et $5^{ème}$ lignes du tableau d'amortissement

<u>Résolution</u>

Étant donné l'amortissement constant, le nombre de titres remboursés à chacune des échéances est toujours le même ; c'est-à-dire

$$A = \frac{N_0}{r};\ A = \frac{50.000}{5} = 10.000$$

$$\boldsymbol{N_3 = N_0 - 3A}\ ; \qquad \boldsymbol{N_3 = 50.000 - 3\ \times 10.000 = 20.000}$$

Tableau d'amortissement

Période	Obligations vivantes	Intérêts	<u>Amortissements</u> Nombre	Valeur	Annuités	Obligations encore en vie
1	50.000	37.500.000	10.000	162.000.000	162.000.000	40.000
4	20.000	15.000.000	10.0000	140.000.000		10.000
5	10.000	7.500.000	10.000	132.500.000	132.500.000	0

Remarque

• On vérifie aisément la loi de variation des annuités pour des amortissements constants ; en effet les annuités varient ici en progression arithmétique décroissante en raison $-\ 7.500.000$.

• Du fait des amortissements constants il ressort que la loi de variation des annuités est la même que celle des intérêts

III – <u>Remboursement en bloc ou en fine</u>

Depuis la dématérialisation des titres (les titres ne sont plus représentés de façon matérielle mais sont remplacés par une inscription au compte du propriétaire) ce mode remboursement est de plus en plus usité.

<u>Principe</u>

À l'émission, le débours (ou somme déboursée) des obligataires s'élève à

$\boldsymbol{N_0} \times \boldsymbol{E}$; l'émetteur verse en contre partie à l'ensemble des obligataires $\boldsymbol{N_0} \times \boldsymbol{c}$ à chaque échéance et $\boldsymbol{N_0} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{N_0} \times \boldsymbol{R}$ à terme.

Dans des cas très rare, l'emprunteur verse à échéance les intérêts composés des coupons et la dette initiale $\boldsymbol{N_0} \times \boldsymbol{R}$.

<u>**Illustration 3**</u> **:** Emprunt obligataire **TPCI 2005 ; 6,5%**

Dans le cadre de son programme économique et financier 2005 – 2008, l'État de Côte d'Ivoire sollicite le marché financier de l'UEMOA à travers l'émission d'un emprunt obligataire dont les caractéristiques sont les suites :

- Montant de l'emprunt **: FCFA 40.000.000.000,**
- Valeur nominale : **FCFA 10.000 par obligation**,
- Durée totale : **3 ans**
- Taux d'intérêt : **6,5 %** net d'impôt
- Remboursement in fine **2008**

<u>***1- Trouvons le nombre d'obligation émis***</u>

<u>***2- Calculons le montant d'intérêts versés chaque année***</u>

RESOLUTION

1. Soit N_0 le nombre d'obligations émises pour la collecte des fonds ;

On a $\boldsymbol{N_0 C = 40.000.000.000}$ $\boldsymbol{Soit\ N_0} = \frac{\mathbf{40.000.000.000}}{\mathbf{10.000}} = \mathbf{4.000.000}$ $obligations.$

2. Le remboursement a lieu en bloc et à la fin de la durée du prêt (3 ans) ; à la fin de chacune de ces années, les obligataires percevront des coupons de 10.000 × 6,5% = 650F par obligation ;

Pour l'ensemble des obligations ; l'État devra verser la somme de :

650 × 4.000.000 = 2.600.000.000F

IV – Calcul des taux effectifs

On rappelle que le taux nominal d'intérêt est un taux indicatif qui sert à calculer le coupon. Les effectifs désignent le taux réel r aussi appelé taux actuariel, le taux de rendement ou de revient.

1 – Taux de rendement

1.1 Taux de rendement d'un obligataire

a- Cas d'une obligation remboursée à la date k

C'est le taux qui réalise l'équivalence entre la valeur d'émission de l'obligation et les sommes reçues par l'obligataire jusqu' à la date k. On note **x** ce taux ; on a :

$$\boldsymbol{E = c(1+x)^{-1} + c(1+x)^{-2} + c(1+x)^{-3} + \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + c(1+x)^{-k} + R(1+x)^{-k}}$$

$$\boldsymbol{E = c\frac{1 - (1+k)^{-k}}{x} + R(1+x)^{-k}}$$

Ce taux est au moins égal au taux nominal. Au-delà de k= 2 la détermination du taux pourra se faire par essais successif suivis éventuellement d'une interpolation linéaire.

Illustration 4

Une collectivité locale émet un emprunt – obligataire remboursable à l'aide d'annuités sensiblement constantes. Les caractéristiques de cet emprunt sont les suivants :

- Valeur nominal : 10.000F
- Taux d'intérêt nominal : 12%
- Prix d'émission 9.600F
- Valeur de remboursement : 10.800
- Nombre d'obligations émis : 10.000
- Durée de remboursement 5 ans
- Frais d'émission : 2.400.000F

Calculons le taux de rendement réalisé par un obligataire dont les titres sont remboursés au $2^{ème}$tirage.

Résolution

Par rapport aux notations indiquées, on a :

C =10.000 ; E = 9.600 : R = 10.800

Soit n_0 le nombre d'obligations de cet obligataire ; le montant versé à l'émission est de $n_0 \times E$; en retour il perçoit $n_0 \times c$ à la première échéance et $n_0 \times c + n_0 \times R$ au deuxième tirage. Le taux de rendement **x** réalise l'équivalence entre les sommes versées et les sommes reçues, on peut écrire la relation d'équivalence suivante :

$\boldsymbol{n_0 \times E = n_0 \times c(1+x)^{-1} + n_0 \times c(1+x)^{-2} + n_0 \times R(1+x)^{-2}}$; en simplifiant membre à membre par $n_0 cette$ relation devient :

$$\boldsymbol{E = c(1+x)^{-1} + c(1+x)^{-2} + R(1+x)^{-2}}$$

Ou encore $\boldsymbol{c(1+x)^{-1} + c(1+x)^{-2} + R(1+x)^{-2} - E = 0}$

Pour X = 0.16 le premier membre de cette équation donne -47.56$<$ 0 ;

Pour X = 0.15 le premier membre donne 117.20$>$ 0

Pour X = 0.155 le premier membre donne 34.2947 > 0

Le taux recherché est donc compris entre 15.5% et 16%. On peut à présent faire l'interpolation linéaire et obtenir la valeur recherchée ; X = 0.157 soit un taux de rendement de 15.7%

En posant $(1 + X)^{-1} = y,$ la relation d'équivalence équivaut à une équation du second degré à une d'inconnue y. En calculant le discriminant on détermine la valeur e l'inconnue y à partir de laquelle on obtient X

<u>b- Cas de plusieurs obligations remboursées à des dates différentes</u>

On considère un obligataire ayant souscrit à p obligations dont p_1 remboursé à la datek_1 et p_2 remboursé à la date k_2 ; le taux de rendement d'un tel obligataire est le taux X qui réalise l'équivalence entre le débourse et les sommes perçues.

<u>Illustration 5</u>

L'obligataire a souscrit pour trois obligations, il verse à l'émission trois fois la valeur d'émission d'une obligation, c'est-à-dire 3 × E.

Les obligations étant remboursés au $2^{ème}$ puis $3^{ème}$ tirage, il reçoit :

3 × c, 3 × c + R et 2 × c +R respectivement au 1^{er}, $2^{ème}$ et $3^{ème}$tirages.

Pour un taux de rendement noté X, la relation d'équivalence s'écrit :

$$\boldsymbol{3 \times E = 3 \times c(1+x)^{-1} + 3 \times c(1+x)^{-2} + R(1+x)^{-2} + 2 \times c(1+x)^{-3} + 2 \times R(1+x)^{-3}}$$

Ou encore

$$\boldsymbol{3 \times c(1+x)^{-1} + 3 \times c(1+x)^{-2} + R(1+x)^{-2} + 2 \times c(1+x)^{-3} + 2 \times R(1+x)^{-3} - 3 \times E = 0}$$

Pour x = 0.15 le premier membre de l'équation donne -200< 0

Pour x = 0.145 le premier membre de l'équation donne 115.90> 0

Pour x = 0.1475 le premier membre de l'équation donne 89.3386> 0 ; le taux recherché est compris entre 14.75% et 15%

Par interpolation linéaire on calcule le taux de rendement et on obtient x = 0.148272 ; soit un taux de 14.83%

<u>1.2 Taux de rendement moyen de l'ensemble des obligataires</u>

Ce taux réalise l'équivalence entre somme totale décaissé et les annuités perçues par les obligataires. On note y ce taux ; on a : $\mathbf{N_0E = a_1(1+y)^{-1}a_2(1+y)^{-2} + \cdots \dots \dots .. +} \boldsymbol{a_n(1+y)^{-n}}$

• Si les annuités sont constantes cette relation devient :

$$N_0E = a\,\frac{1-(1+y)^{-n}}{y} \qquad avec\; a = N_0R\frac{r}{1-(1+r)^{-n}}$$

On déduit alors $\frac{1-(1+y)^{-n}}{y} = \frac{E}{R} \times \frac{1-(1+r)^{-1}}{r}$

• Si le remboursement est en fine, la relation d'équivalence s'écrit :

$$N_0E = N_0c\frac{1-(1+y)^{-n}}{y} + N_0R(1+y)^{-n}$$

Soit en simplifiant N_0 ***:*** $E = c\frac{1-(1+y)^{-n}}{y} + R(1+y)^{-n}$

La détermination du taux pourra à nouveau se faire interpolation linéaire.

Illustration 6

On reprend les données de l'illustration 4 et calculons le taux de rendement moyen dde cet emprunt

Résolution

Le remboursement des obligations s'effectue aux dessus du pair (R> C), il nous faut déterminer le taux actuariel $r = \frac{C \times i}{R} = \frac{10.000 \times 0{,}12}{10.800} = 0{,}11111$; on pourra ensuite calculer le montant des annuités théorique puis écrire la relation d'équivalence. On pourrait aussi utiliser la relation suivante : $\frac{1-(1+y)^{-n}}{y} = \frac{E}{R} \times \frac{1-(1+r)^{-1}}{r}$

$$\frac{1-(1+y)^{-5}}{y} = \frac{10.000}{10.800} \times \frac{1-(1+0.11111)^{-5}}{0.11111} = 3.412593$$

Selon la table financière n°4, on lit pour y = 14 la valeur 3.433081 et pour y = 14,25 la valeur 3,412554 ; enfin par interpolation linéaire on obtient : ***y =0.142*** ;

Soit un taux de 14,20%

2- Taux de revient de l'émetteur

L'émission d'un emprunt obligation engendre des frais supportés par l'émetteur ; il dispose en définitive de la différence entre les sommes collectées et les charges supportées. On note montant total des charges ; on appelle taux de revient de l'émetteur le taux t qui réalise l'équivalence entre le montant net disponible et les annuités de remboursement ;

On a : $N_0E - F = a_1(1+t)^{-1} + a_2(1+t)^{-2} + a_3(1+t)^{-3} + \cdots \ldots\ldots + a_n(1+t)^{-n}$

• Si les annuités sont constantes, la relation devient :

$$N_0E - F = a\frac{1 - (1+t)^{-n}}{t}$$

• Si le remboursement est en in fine on a :

$$N_0E - F = N_0C\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}N_0R(1+t)^{-n}$$

Soit en simplifiant par N_0 : $E - f = c\frac{1-(1+t)^{-n}}{t} + R(1+t)^{-n}$ $avec\ f = \frac{F}{N_0}$

Illustration 7

En se référant à l'illustration 4 déterminons le taux de revient de cet emprunt pour l'émetteur.

Résolution

Le montant disponible à l'émission est la différence entre les sommes collectées et les frais d'émission. Ici on a : $N_0 \times E - F$ c'est-à-dire

$$10.000 \times 10.000 - 2.400.000 = 97.600.000$$

L'annuité théorique est obtenue de la façon suivante :

$$a = N_0 \times R\frac{r}{1-(1+r)^{-5}}\ ; a = 10.000\ \times 10.800\frac{0,11111}{1-(1+0,11111)^{-5}} = 29.303.232$$

Le taux de revient réalise l'équivalence entre le montant disponible à l'émission et les annuités de remboursement versées par la collectivité. On peut donc écrire l'équation suivante : $N_0E - F = a\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$

$$97.600.000 = 29.303.232\frac{1-(1+t)^{-5}}{t}\ ;\quad Soit\ \frac{1-(1+t)^{-5}}{t} = 3,330691$$

De la lecture de la table N°4 et de l'interpolation linéaire que t = 15,2.

CHAPITRE 5 : CHOIX D'INVESTISSEMENT ET CHOIX DU MODE DE FINANCEMENT

Tout comme les emprunts, ce chapitre utilise essentiellement les notions d'actualisation.

La compréhension de ce chapitre nécessite la connaissance préalable :

- De la construction du tableau d'un emprunt ;
- De quelques notions de la comptabilité (mécanisme d'amortissement, calcul des flux net de trésorerie, mode calcul de la capacité d'autofinancement) ;
- De quelques notions de fiscalité (Calcul des impôts sur les bénéfices des sociétés)

Au terme de ce chapitre, vous serez capable de :

- Déterminer la rentabilité économique de la rentabilité financière d'un investissement ;
- Choisir un investissement parmi plusieurs investissements concurrents et le mode de financement adéquat

I – Généralité

1 – Définition

L'investissement est une dépense consentie par une entreprise pour acquérir des biens matériels ou immatériels dans le but d'améliorer sa rentabilité.

L'investissement matériel peut être assimilé à un placement de capitaux en vue d'en retirer le meilleur revenu ou la meilleure rentabilité.

2 – Eléments caractéristique d'un investissement matériel

a **– Capitaux investis :** Il s'agit de la masse des capitaux nécessaires à l'acquisition de bien et à toutes les dépenses induites par cette acquisition (frais de transport, de formation etc…) ; ces dépenses peuvent être réalisées en une ou plusieurs fois.

b – **Cash-flow :** C'est la recette nette d'un impôt générée en fin d'exercice par l'investissement, il est aussi appelé capacité ou marge brute d'autofinancement ; et est calculé pendant toute la durée de vie du projet.

c – **Durée de vie :** elle est de deux sortes à savoir

- La durée de vie du projet est la durée pendant laquelle le projet génère de revenus ;
- La durée de vie du matériel est la durée de vie fiscale pendant laquelle le matériel amorti.

d - **Valeur résiduelle nette :** elle désigne la valeur de vente probable du bien, déductions faites des impôts éventuels.

II – Mesure de la rentabilité économique d'un investissement

On apprécie la rentabilité d'un projet d'investissement par comparaison des divers flux : capitaux investis d'une part et capacité d'autofinancement et valeur résiduelle d'une autre part.

Ces flux sont actualisés à intérêts composés à l'époque de l'investissement initial. En vue d'apprécier la rentabilité d'un investissement on a recours à l'un des critères suivants :

- **La valeur actuelle nette** (VAN) c'est-à-dire la différence entre les entrées nettes supplémentaires et capitaux investis actualisés à certain taux (généralement le taux de rentabilité sur le marché) ;
  Si la VAN est > 0 alors l'investissement est rentable ;
  Si la VAN est < 0 l'investissement est non rentable
  Si la VAN = 0 il y a compensation des dépenses et des recettes
- **Le taux interne de rentabilité** (TIR) c'est le taux **t** à partir duquel les valeurs actualisées des recettes et des dépenses se compensent. Soit **i** le taux d'actualisation des capitaux sur le marché :
  Si **t** $>$ **i** alors l'investissement est rentable ;
  Si **t** $<$ **i** alors la l'investissement est non rentable.
- **Le taux de profitabilité** (t_p) ; c'est le rapport entre la VAN et les capitaux investis actualisés.
  Si $t_p < 0$ alors l'investissement est non rentable au taux indiqué
  Si $t_p > 0$ alors l'investissement est rentable au taux indiqué
  Si t_p= 0 alorsles dépenses compensent les entrées
- **L'indice de profitabilité** (l_p) : C'est le rapport entre les entrées nettes supplémentaires actualisées et les capitaux investis actualisés.
  Si$l_p < 1$ alors l'investissementn'estpas rentable au taux indiqué.
  Si$l_p > 1$ alors l'investissement est rentable au taux indiqué.
  Si l_p = 1 alors les recettes compensent les dépenses

ILLUSTRATION 1

M. KONE désire accroitre les performances de son usinesituée à VAVOUA. Il acquiert à cette fin une machine qu'il installe à ses frais. L'investissement s'élève à 8.000.000F. Selon ses prévisions le revenu annuel net sera accru de 2.000.000F chacune des deux premières années et de 3.000.000F chacune des trois années suivantes. Il pense pouvoir revendre la machine à 800.000F net d'impôt au terme de ces cinq années d'utilisation.

1 - Examinons la rentabilité de ce projet au taux annuel de :

a) 18%

b) 19%

2) Déterminons le taux interne de rentabilité du projet.

3) Calculons l'indice de profitabilité au taux de 18%

RESOLUTION

1 - Examinons la rentabilité de ce projet ;

a) Au taux annuel de 18% :

Le calcul de la VAN s'effectue de la manière suivante :

$$VAN = -\,8.000.000 + 2.000.000(1{,}18)^{-1} + 2.000.000(1{,}18)^{-2} + 3.000.000(1{,}18)^{-3} + 3.000.000(1{,}18)^{-4} + 3.000.000(1{,}18)^{-5} + 800.000(1{,}18)^{-5}$$

$$-8.000.000 + 2.000.000\frac{1(1{,}18)^{2}}{0{,}18} + 3.000.000\frac{1(1{,}18)^{3}}{0{,}18}(1{,}18)^{-2} + 800.000(1{,}18)^{-5}$$

$$= 165.558{,}3789F$$

VAN $>$ 0 le projet est donc rentable au taux 18%.

b) Au taux annuel de 19%

En procédant comme précédemment le calcul de la VAN permet d'écrire :

$$VAN = -8.000.000 + 2.000.000\frac{1-(1.19)^{-2}}{0.19} + 3.000.000\frac{1-(1.19)^{-3}}{0.19}(1.19)^{-2} + 800.000(1.19)^{-5}$$

$= -\,38.356{,}79F$

Cette fois, la VAN est négative et le projet n'est plus rentable au taux annuel de 19%.

2- Déterminons le taux interne de rentabilité

Par définition c'est le taux t par lequel les recettes compensent les dépenses ; la VAN est donc nulle.

D'après ce qui précède le taux recherché sera compris entre 18% et 19% ; en effet pour un taux annuel de 18% la VAN est positive alors que pour un taux annuel de 19%. Nous procéderons par interpolation linéaire.

$$18\% \Longrightarrow VAN = 165.558{,}3789$$

$$t\% \Rightarrow \quad VAN = 0$$

$$19\% \Rightarrow \quad VAN = -38.356{,}7871$$

$$\frac{t-18}{19-18} = \frac{0-165.558{,}3789}{-\,38.356{,}7871-165.558{,}3789}$$

t = 18 + 0.8118

t%	= 18,8118%

3 -	Calculons enfin l'indice de probabilité au taux annuel de 18%

Cet indice est le rapport entre les recettes net supplémentaires actualisées capital investi ; par suite on a :

$$l_p = \frac{2.000.000\,\frac{1-1{,}18^{-2}}{0{,}18} + 3.000.000\,\frac{1-1{,}18^{-3}}{0{,}18}(1{,}18)^{-2} + 800.000(1{,}18)^{-5}}{8.000.000}$$

$$= \frac{8.165.558{,}3789}{8.000.000}$$

$$= 1{,}0206$$

On parvient à la même conclusion c'est-à-dire que l'investissement est rentable au taux de 18%

ILLUSTRATION 2

La société anonyme YAO et fils envisage de réaliser un investissement de 9.600.000F dont la durée de vie sera probablement de 4 ans. Les prévisions d'exploitation sont contenues dans le tableau suivant :

Années / Eléments	Année 1	Année 2	Année 3	Année 4
Vente	12.000.000	15.600.000	21.600.000	16.800.000
Charges	7.200.000	9.600.000	12.960.000	10.440.000

L'investissement sera amorti linéairement sur 4 ans. D'autre part la société est soumise à l'impôt sur le bénéfice dont le taux est de 35%. La valeur résiduelle de ce bien est estimé à 1.200.000F net d'impôt.

1 -	Pour chacune des chaque année calculons le cash-flow.

2 -	Etudions la rentabilité de l'investissement au taux annuel de 15% :

a – Au moyen de la VAN

b – Au moyen du TIR

RESOLUTION

	Année 1	Année 2	Année 3	Année 4
Chiffre d'affaire	12.000.000	15.600.000	21.600.000	16.800.000
- Dépenses	7.200.000	9.600.000	12.960.000	10.440.000
- Amortissent	2.400.000	2.400.000	2.400.000	2.400.000
= Résultat avant impôt	2.400.000	3.600.000	6.240.000	3.960.000
- Impôt	840.000	1.260.000	2.184.000	1.386.000
= Résultat après impôt	1.560.000	2.340.000	4.056.000	2.574.000
+ Amortissement	2.400.000	2.400.000	2.400.000	2.400.000
+ Valeur résiduelle				1.200.000
= Cash-flow	3.960.000	4.740.000	6.456.000	6.174.000

2 - Calcul de la VAN

$$VAN = -9.600.000 + 3.960.000(1{,}15)^{-1} + 4.740.000(1{,}15)^{-2} + 6.456.000(1{,}15)^{-3} + 6.174.000(1{,}15)^{-4}$$

$$VAN = 5.888.633F$$

La VAN étant positive on en déduit que le projet est rentable au taux de 15%.

3 - Détermination du TIR

C'est l taux t pour lequel la VAN devient nulle ; on part de l'égalité si après :

$-9.600.000 + 3.960.000(1+t)^{-1} + 4.740.000(1+t)^{-2} + 6.456.000(1+t)^{-3} + 6.174.000(1+t)^{-4} = 0$ Et on déduit t par essai successifs et interpolation linéaire :

Pour t = 38% la VAN est égale à : - 82.552,59226

Pour t = ? la VAN est égale à : .

Pour t = 37% la VAN est égale à : 79.298,54186

$$\frac{t \;\; 37}{38 \;\; 37}\frac{0 \;\; 79.298{,}54186}{82.552{,}59226 \;\; 79.298{,}54186}$$

On trouve t = 0,3749 soit 37,49%

Remarques

1- Pour le dernier exercice d'exploitation, le flux net de trésorerie intègre la valeur résiduelle nette.
2- A la date de l'investissement, le flux net de trésorerie est égal à la différence entre le montant de l'emprunt et les capitaux investis.
3- Les différents modes de financement, rappelons-le, sont :
    - Le financement sur fonds propres,
    - Le financement par leasing ou crédit-bail

- Le financement par emprunt
- Le financement mixte (fonds propres et emprunts, fonds propres et crédit-bail, etc.)

4- Il s'agira de comparer soit les VAN de tous les modes de financement, soit leur TIR, soit le cout net actualisé de chacun des modes de financement. La société retiendra la solution meilleure.

Pour la suite, nous partirons de l'illustration 2 et nous analyserons les différents critères de choix selon le mode de financement.

2- Choix du mode de financement :

Utilisation de la VAN

La société doit effectuer un choix entre

- Un financement entièrement sur fond propre,
- Un financement entièrement par emprunt,
- Un financement mixte (par exemple un apport de 1.600.000 F et un emprunt de 8.000.000 F)
- Un financement par crédit-bail.

a. Financement sur fonds propres

Illustration 3

Dans l'illustration 2, le financement de 9.600.000 F étant intégralement réalisé par la société, il n'y a pas d'emprunt et donc pas d'intérêt ni d'amortissement d'emprunt. Le flux net de trésorerie est égal au cash-flow net. Au taux d'actualisation de 15% on détermine la VAN.

Remarque : lorsque l'entreprise projette plusieurs investissements, elle mesure la rentabilité économique de chaque projet et opère un choix à partir d'un même critère en fonction des priorités et des objectifs visés.

III- Mesure de la rentabilité financière

Certes la décision d'investir dans un projet nécessite qu'on en mesure la rentabilité économique mais, compte tenu des charges liées à son financement et des opportunités offertes par le marché, il s'avère indispensable d'en mesurer également la rentabilité financière. La couverture des besoins pourra nécessiter l'utilisation de fonds propres, d'emprunts ou de crédit-bail de façon séparée ou combinée.

1- Flux spécifiques à chaque type de financement

Dans la détermination des flux nets de trésorerie, l'entreprise prend en compte d'une part tous les produits encaissés et d'autre part toutes les charges effectivement décaissées au cours d'un exercice (charges d'exploitation, impôts, annuités de remboursement, besoins en fonds de roulement). Pour un exercice donné, la détermination de flux de trésorerie s'articule autour du schéma classique suivant :

+ Produits d'exploitation
- Charges d'exploitation

= Marge brut d'exploitation

- intérêts d'emprunts
- amortissement du bien

= Bénéfice avant impôts

- Impôts sur le bénéfice

= Résultat net d'exploitation

+ Amortissement

= cash-flow ou capacité d'autofinancement

- Amortissement de l'emprunt
- Besoin en fonds de roulement

= Flux net de trésorerie

Observons tout de suite que l'emprunt suscite des dépenses supplémentaires qui se traduisent par le paiement d'annuité de remboursement. L'intérêt contenu dans chaque annuité accroit les charges d'exploitation contribuant ainsi à la réduction de l'impôt sur le bénéfice de la société. On parle à cet effet d'une économie d'impôts.

Les flux nets annuels sont les suivants :

Années / Eléments	Année 1	Année 2	Année 3	Année 4
+Ventes	12 000 000	15 600 000	21 600 000	16 800 000
-charges d'exploitation	7 200 000	9 600 000	12 960 000	10 440 000
-amortissement du bien	2 400 000	2 400 000	2 400 000	2 400 000
-intérêt de l'emprunt	1 152 000	910 962	641 000	338 643
= bénéfice avant impôts	1 248 000	2 689 038	5 599 000	3 621 357
- Impôt sur le bénéfice	436 800	941 163	1 959 650	1 267 475
= résultat net d'exploitation	811 200	1 747 875	3 639 350	2 353 882
+amortissement du bien	2 400 000	2 400 000	2 400 000	2 400 000
=cash-flow	3 211 200	4 147 875	6 039 350	4 753 882
+ valeur résiduelle nette				1 200 000
-amortissement de l'emprunt	2 008 650	2 249 688	2 519 650	2 822 012
=flux net de trésorerie	1 202 550	1 898 197	3 519 700	3 131 878

Calculons à nouveau la VAN au taux d'actualisation de 15%. A l'époque 0 le flux net de trésorerie est nul ; on a :

VAN = 1 202 550 $(1,15)^{-1}$ + 1 898 187 $(1,15)^{-2}$ + 3 519 700 $(1,15)^{-3}$ + 3 131 878 $(1,15)^{-4}$

VAN = 1 045 696 + 1 435 302 + 2 314 260 + 1 790 661

VAN = 6 585 919

Conclusion

Pour un financement entièrement par emprunt, la VAN est de 6 585 914 F au taux d'actualisation de 15% alors qu'elle est de 5 888 633 F pour un financement sur fonds propres.

Par comparaison de ces deux premiers modes de financement, la société choisira celui qui produit la VAN la plus élevée, c'est-à-dire le financement par emprunt exclusivement.

V.A.N = - 9 600 000 + 3 960 000 $(1,15)^{-1}$ + 4 740 000 $(1,15)^{-2}$ + 6 456 000 $(1,15)^{-3}$ + 6 174 000 $(1,15)^{-4}$

V.A.N = 5 888 633 F

Conclusion : pour un financement sur fonds propres, la VAN au taux d'actualisation de 15% est égale à 5 888 633 F.

b- Financement par emprunt

Illustration 4

Dans l'illustration le financement de l'investissement est réalisable grâce à un emprunt de 9.600.000F négocié aux conditions suivantes :

- Taux annuel d'intérêt 12%
- Remboursement à l'aide de quatre annuités constantes, la première payable à la fin de l'exercice.

Pour chacune des quatre années, calculons le flux net de trésorerie puis la VAN au taux d'actualisation 15%.

Résolution

Calculons tout d'abord l'annuité constante de remboursement (**a**) ;

$$9.600.000 = a\frac{1 - 1{,}12^{-4}}{0{,}12}$$

On en déduit la valeur de l'annuité a$\approx 3.160.650{,}589F$, l'annuité que nous arrondissons à la valeur de 3.160.650F des commodités de calcul ; le tableau d'amortissement de l'emprunt se présente comme suit :

Année	Capital restant dû	Intérêt	Amortissement	Annuité
1	9.600.000	1.152.000	2.008.650	3.160.650
2	7.591.350	910.962	2.249.688	3.160.650
3	5.341.662	641.000	2.519.650	3.160.650
4	2.822.012	338.643	2.822.012	3.160.650