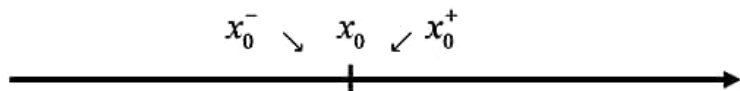


Professeur : GHAZOUI Mohammed
 Matière : Mathématiques
 Class : 2 Bac Sciences Physiques
 Année scolaire : 2021-2022

**Techniques pour calculer
 la limite d'une fonction
 (I)**

Lycée Ibn Al Khatib
 Tanger



Les formes indéterminées

$(+\infty) - (+\infty)$ $(+\infty) + (-\infty)$	$0 \times \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$
Règles			
$\frac{a}{\pm\infty} \rightarrow 0$	$\frac{a \neq 0}{0} \rightarrow \pm\infty$	$(+\infty) + a \rightarrow +\infty$	$(-\infty) + a \rightarrow -\infty$
$(+\infty)^n \rightarrow +\infty$	$(-\infty)^n \rightarrow \begin{cases} +\infty ; \text{si } n \text{ est paire} \\ -\infty ; \text{si } n \text{ est impaire} \end{cases}$	$a \times (-\infty) \rightarrow \begin{cases} -\infty ; \text{si } a > 0 \\ +\infty ; \text{si } a < 0 \end{cases}$	$a \times (+\infty) \rightarrow \begin{cases} +\infty ; \text{si } a > 0 \\ -\infty ; \text{si } a < 0 \end{cases}$

Une fonction polynomiale

Règle (1)	Règle (2)
$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_n x^n)$

Une fonction rationnelle

Règle (1)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{a_n x^n}{b_m x^m} \right)$$

Règle (2)

• $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ou • $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ ou • $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

(On remplace x par x_0 à l'expression de $f(x)$)

Et il y a trois cas :

1er cas	2ème cas	3ème cas
$\frac{a \neq 0}{0}$		$\frac{0}{0}$
La limite est : $\pm\infty$	$l \in \mathbb{R}$	On réduit par $(x - x_0)$, par l'utilisation :
<ul style="list-style-type: none"> ♦ On calcule la limite du numérateur. ♦ On calcule la limite du dénominateur. ♦ On détermine le signe par l'étude du signe de Quotient. 	La limite est le nombre l	<ul style="list-style-type: none"> ♦ Division euclidienne ♦ Factorisation ♦ Identités remarquables : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Une fonction rationnelle

Règle (1)

Pour trouver la limite : $\lim(\sqrt{u(x)})$ Il faut d'abord trouver la limite : $\lim(u(x))$

Et il y a deux cas :

1er cas

Si $\lim u(x) = +\infty$ alors $\lim \sqrt{u(x)} = +\infty$

2ème cas

Si $\lim u(x) = a$ tel que $a \geq 0$ alors : $\lim \sqrt{u(x)} = \sqrt{a}$

Règle (2)

Après remplacement, si nous obtenons la forme indéterminée $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ on fait la factorisation par x à l'intérieur d'une racine.

Après remplacement, si nous obtenons la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ on fait le conjugué.

Rappel

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x ; & \text{si } x \rightarrow +\infty \\ -x ; & \text{si } x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

Le conjugué de $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ est $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

Le conjugué de $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

Règle (3)

Lorsque on calcule la limite : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{ax^2 + bx + c} + ex + d)$, si nous obtenons la forme indéterminée

$(+\infty) + (-\infty)$ alors on calcule le nombre $T = \sqrt{a} + e$; il y a deux cas :

1er cas

♦ Si $T = 0$ on fait le conjugué.

2ème cas

♦ Si $T \neq 0$ on fait la factorisation.

Règle (4)

Lorsque on calcule la limite : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{ax^2 + bx + c} + ex + d)$, si nous obtenons la forme indéterminée

$(+\infty) + (-\infty)$ alors on calcule le nombre $T = -\sqrt{a} + e$; il y a deux cas :

1er cas

♦ Si $T = 0$ on fait le conjugué.

2ème cas

♦ Si $T \neq 0$ on fait la factorisation.

Fonctions trigonométriques

Règle (1)

S'il existe à l'intérieur \tan ou \cos , ou \sin tend vers 0 et nous obtenons la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ alors on

utilise les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(ax)}{x} = a, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{x^2} = \frac{a^2}{2}$$

Règle (2)

Si $x \rightarrow x_0$ et nous obtenons la forme indéterminée, on pose $t = x - x_0$ et on utilise les propriétés de la trigonométrie $(x \rightarrow x_0) \Leftrightarrow (t \rightarrow 0)$ et $(x = t + x_0) \Leftrightarrow (t = x - x_0)$

Règle (3)

S'il existe à l'intérieur \tan ou \cos , ou \sin tend vers $\pm\infty$ alors on utilise :

$$-1 \leq \sin(u(x)) \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \cos(u(x)) \leq 1$$

Continuité en un point :

$$f \text{ est continue en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Continuité à gauche - Continuité à droite :

$$f \text{ est continue à gauche en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$$

$$f \text{ est continue à droite en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$$

$$f \text{ est continue en } x_0 \Leftrightarrow f \text{ est continue à gauche et à droite en } x_0$$

Continuité sur un intervalle :

♦ f est continue sur un intervalle ouvert $]a, b[$ si f est continue en chaque élément de $]a, b[$.

♦ f est continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ si f est continue sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ et f est continue à droite en a et à gauche en b .

- ♦ Tout fonction polynôme est continue sur \mathbb{R} .
- ♦ Toute fonction rationnelle est continue sur chaque intervalle de son domaine de définition.
- ♦ Les fonctions SIN et COS sont continués sur \mathbb{R} .
- ♦ La fonction tan est continue sur chaque intervalle de son domaine de définition, $D_{\tan} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$
- ♦ La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur \mathbb{R}^+ ; (irrationnel fonction).

Composé de deux fonctions continues :

Si f une fonction continue sur l'intervalle I et g une fonction continue sur l'intervalle J tel que $f(I) \subset J$, alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I .

- ♦ Si f est continue et positive sur I alors $\sqrt[n]{f}$ est continue sur I .
- ♦ Si f est continue sur I alors f^n est continue sur I . ($n \in \mathbb{N}^*$)

L'image d'un intervalle I par une fonction f

L'intervalle I	f est strictement croissante sur I	f est strictement décroissante sur I
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$]a, b]$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), f(b) \right]$	$\left] f(b), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$[a, b[$	$\left[f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(a) \right]$
$]a, b[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$[a, +\infty[$	$\left[f(a), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(a) \right]$
$]a, +\infty[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$]-\infty, b]$	$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(b) \right]$	$\left[f(b), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$
$]-\infty, b[$	$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\forall y \in \mathbb{R}^+) : \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow y^n = x$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+) : (\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$$

$$(\forall x_1 \in \mathbb{R}^+) (\forall x_2 \in \mathbb{R}^+) : \sqrt[n]{x_1} = \sqrt[n]{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

$$(\forall x_1 \in \mathbb{R}^+) (\forall x_2 \in \mathbb{R}^+) : \sqrt[n]{x_1} < \sqrt[n]{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$$

◦ La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur \mathbb{R}^+

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\forall p \in \mathbb{N}^*) (\forall a \in \mathbb{R}^+) (\forall b \in \mathbb{R}^+)$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[p]{\sqrt[p]{a^p}}, \sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[np]{a}, (\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$$

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$(\forall r \in \mathbb{Q}^*) (\forall r' \in \mathbb{Q}^*) (\forall x \in \mathbb{R}_+^*) (\forall y \in \mathbb{R}_+^*)$$

$$x^{r+r'} = x^r \cdot x^{r'}, x^r \cdot y^{r'} = (x \cdot y)^{r'}, (x^r)^{r'} = x^{r \cdot r'}$$

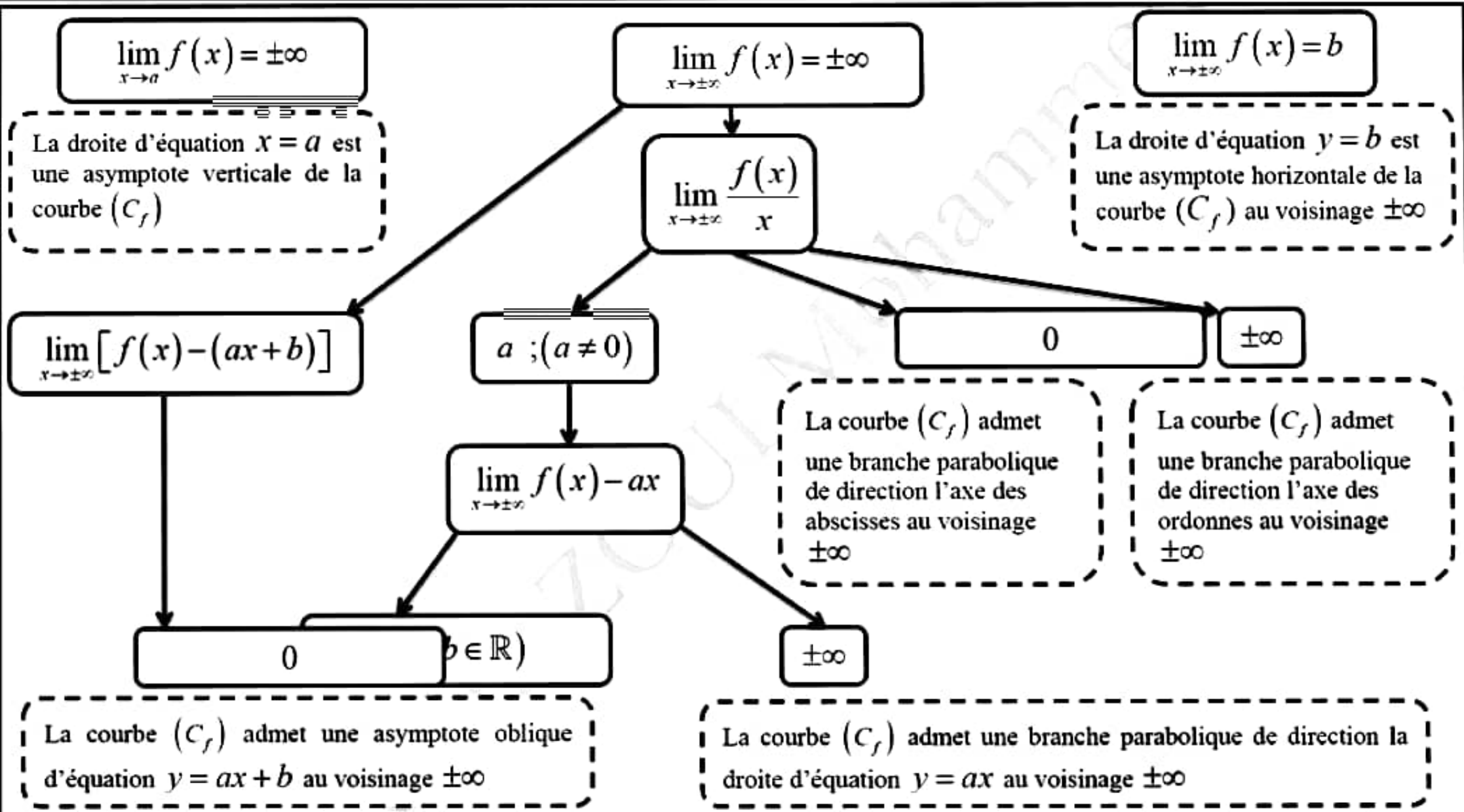
$$\frac{1}{x^r} = x^{-r}, \frac{x^r}{y^r} = \left(\frac{x}{y} \right)^r, \frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$$

Fonction réciproque

- Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors f admet une fonction réciproque, notée f^{-1} définie sur l'intervalle $J = f(I)$.
- La fonction f^{-1} est continue sur J et a le même sens de variation de la fonction f sur I .
- Les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ sont symétriques par rapport la droite $(\Delta) : y = x$.

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

- Si f est continue sur un intervalle $[a, b]$ telle que $f(a) \cdot f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans l'intervalle $]a, b[$.
- Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$ telle que $f(a) \cdot f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]a, b[$.



I) Ensemble de définition :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}\}$$

$$f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Denominateur} \neq 0 \\ \text{Interieur de } \sqrt{\quad} \geq 0 \end{cases}$$

II) Fonction périodique :

- f Périodique de période T si :
 $\forall x \in D_f : (x+T) \in D_f$ et $f(x+T) = f(x)$
- Il suffit d'étudier f sur $D_E = [0,1]$

III) Fonction paire :

- f est une fonction paire si :
 $\forall x \in D_f : -x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$
- (C_f) est symétrique par rapport à (Oy) .
- Il suffit d'étudier f sur $D \subset \mathbb{R}^+$.

IV) Fonction impaire :

- f est une fonction impaire si :
 $\forall x \in D_f : -x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$
- (C_f) est symétrique par rapport à O .
- Il suffit d'étudier f sur $D \subset \mathbb{R}^+$.

V) Centre de symétrie :

$\Omega(a,b)$ centre de symétrie de (C_f) si :

$$\forall x \in D_f : \begin{cases} (2a-x) \in D_f \\ f(2a-x) = 2b - f(x) \end{cases}$$

VI) Axe de symétrie :

$x = a$ axe de symétrie de (C_f) si :

$$\forall x \in D_f : \begin{cases} (2a-x) \in D_f \\ f(2a-x) = f(x) \end{cases}$$

VII) Concavité d'une courbe :

- (C_f) Convexe sur I si : $\forall x \in I ; f''(x) \geq 0$. ☺
- (C_f) Concave sur I si : $\forall x \in I ; f''(x) \leq 0$. ☹

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
La Concavité de la courbe (C_f)			

VIII) Point d'inflexion :

- La courbe (C_f) admet un point d'inflexion en a si :
 $f''(x)$ s'annule et change de signe en a .
- Si $f''(x)$ s'annule et ne change pas de signe en a alors (C_f) n'est pas admet un point d'inflexion en a .

IX) Théorème de Rolle :

Si f continue sur $[a,b]$
 Et f dérivable sur $]a,b[$ et $f(a) = f(b)$ alors :
 $\exists c \in]a,b[: f'(c) = 0$

X) Théorème des accroissements finis : (TAF)

Si f continue sur $[a,b]$
 Et f dérivable sur $]a,b[$ alors :
 $\exists c \in]a,b[: f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

XI) Inégalité du TAF avec la valeur absolue :

f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$
 Et $\exists k > 0, \exists x \in]a,b[: |f'(x)| \leq k$
 Alors : $|f(b) - f(a)| \leq k|b-a|$

XII) Position relative : (C_f) & (Δ)

x	x_0	
$f(x) - (ax+b)$	$-$	$+$
Position relative de (C_f) et (Δ)	(C_f) au dessous de (Δ)	(C_f) au dessus de (Δ)
Ω : Point d'intersection $(C_f) \cap (\Delta) = \Omega(x_0, f(x_0))$		

XIII) Fonction primitive :

- F fonction primitive de f sur I si F dérivable sur I et $F' = f$.
- Toute fonction continue admet une primitive.
- Il existe une fonction primitive $F / F(x_0) = y_0$
- f paire $\Rightarrow F$ qui s'annule en O impaire
- f impaire $\Rightarrow F$ paire



$(v_n)_{n \geq n_0}$ est géométrique s'il existe un réel q tel que :

$$\forall n \geq n_0 ; v_{n+1} = qv_n$$

Le nombre q est appelé la raison de la suite $(v_n)_{n \geq n_0}$

$(v_n)_{n \geq p}$ Géométrique $\Leftrightarrow \forall n \geq p : v_n^2 = v_{n+1} \times v_{n-1}$

Terme générale d'une suite géométrique

◇ Si (v_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme v_0 alors : $(\forall n \in \mathbb{N}) v_n = v_0 \times q^n$

◇ Si $(v_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme v_1 alors : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) v_n = v_1 \times q^{n-1}$

◇ Pour tous n et p de \mathbb{N} : $v_n = v_p \times q^{n-p}$

Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

(u_n) est une suite géométrique de raison q tels que $q \neq 1$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \times \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right)$$

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 ; n \geq p ; v_p + v_{p+1} + \dots + v_n = v_p \times \left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} \right)$$

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$(1^{\text{er}} \text{ terme de la somme}) \times \left(\frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q} \right)$$

$(v_n)_{n \geq n_0}$ est arithmétique s'il existe un réel r tel que :

$$\forall n \geq n_0 ; v_{n+1} - v_n = r$$

Le nombre r est appelé la raison de la suite $(v_n)_{n \geq n_0}$

$(v_n)_{n \geq p}$ Arithmétique $\Leftrightarrow \forall n \geq p : 2v_n = v_{n+1} + v_{n-1}$

Terme générale d'une suite arithmétique

◇ Si (v_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme v_0 alors $(\forall n \in \mathbb{N}) v_n = v_0 + n \times r$

◇ Si $(v_n)_{n \geq 1}$ est une suite arithmétique de raison r et de premier terme v_1 alors : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) v_n = v_1 + (n-1) \times r$

◇ Pour tous n et p de \mathbb{N} : $v_n = v_p + (n-p) \times r$

Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

(u_n) est une suite arithmétique

$$\forall n \in \mathbb{N} ; v_0 + v_1 + \dots + v_n = (n+1) \times \left(\frac{v_0 + v_n}{2} \right)$$

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 ; n \geq p ; v_p + v_{p+1} + \dots + v_n = (n-p+1) \times \left(\frac{v_p + v_n}{2} \right)$$

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(\text{nombre de termes}) \times \left(\frac{1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme}}{2} \right)$$

$(u_n)_{n \geq p}$ est croissante, if: $\forall n \geq p : u_{n+1} - u_n \geq 0$

$(u_n)_{n \geq p}$ est décroissante, if: $\forall n \geq p : u_{n+1} - u_n \leq 0$

$(u_n)_{n \geq p}$ est constante, if: $\forall n \geq p : u_{n+1} - u_n = 0$

$\left(\forall n \geq p : \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \text{ and } u_n > 0 \right) \Rightarrow ((u_n)_{n \geq p} \text{ est croissante})$

$(u_n)_{n \geq p}$ est majorée par un réel M , si: $\forall n \geq p : u_n \leq M$

$(u_n)_{n \geq p}$ est minorée par un réel m , if: $\forall n \geq p : u_n \geq m$

$(u_n)_{n \geq p}$ est bornée par, if: $\forall n \geq p : m \leq u_n \leq M$

$\left(\forall n \geq p : \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \text{ and } u_n > 0 \right) \Rightarrow ((u_n)_{n \geq p} \text{ est décroissante})$

(u_n) est croissante: $u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_{n-1} \leq u_n \leq u_{n+1} \dots$

(u_n) est décroissante: $\dots u_{n+1} \leq u_n \leq u_{n-1} \leq \dots \leq u_2 \leq u_1 \leq u_0$

On dit qu'une suite est convergente ou elle converge vers l si est seulement si : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

On dit qu'une suite est divergente ou qu'elle diverge vers l si est seulement si : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm\infty$ ou qu'elle n'admet pas de limite.

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite croissante et négative est convergente.

- Toute suite décroissante et minorée est convergente.
- Toute suite décroissante et positive est convergente.

$(\forall n \geq n_0 : u_n \leq v_n ; \lim u_n = \ell \text{ et } \lim v_n = \ell') \Rightarrow (\ell \leq \ell')$

$(\forall n \geq n_0 : u_n \leq v_n \text{ et } \lim u_n = +\infty) \Rightarrow (\lim v_n = +\infty)$

$(\forall n \geq n_0 : u_n \leq v_n \text{ et } \lim v_n = -\infty) \Rightarrow (\lim u_n = -\infty)$

$(\forall n \geq n_0 : |u_n - \ell| \leq v_n \text{ et } \lim v_n = 0) \Rightarrow (\lim u_n = \ell)$

$(\forall n \geq n_0 : w_n \leq u_n \leq v_n \text{ et } \lim w_n = \lim v_n = \ell) \Rightarrow (\lim u_n = \ell)$

$$(\lim u_n = 0) \Leftrightarrow (\lim |u_n| = 0)$$

Si $q > 1$ alors: $\lim q^n = +\infty$

Si $q = 1$ alors: $\lim q^n = 1$

Si $-1 < q < 1$ alors: $\lim q^n = 0$

Si $q \leq -1$ alors la suite $(q^n)_n$ n'admet pas de limite.

• Si $\alpha > 0$ alors: $\lim n^\alpha = +\infty$ • Si $\alpha < 0$ alors: $\lim n^\alpha = 0$

$$(\lim u_n = \ell \text{ et } \ell \neq 0) \Rightarrow (\lim |u_n| = |\ell|)$$

Soit une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

Si f est continue sur un intervalle I et la suite (u_n) est convergente et $f(I) \subset I$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ est la solution de l'équation $f(x) = x$

Si $\lim u_n = \ell$ et f est continue en ℓ

Alors la suite $(v_n)_{n \geq n_0}$ tels que $\forall n \geq n_0 : v_n = f(u_n)$ est convergente et $\lim v_n = f(\ell)$

★ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$
 • La fonction f est dérivable en a .
 • La courbe (C_f) admet une tangente au point $A(a, f(a))$ d'équation : $(T): y = (x - a)f'(a) + f(a)$

★ $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_d(a)$
 • La fonction f est dérivable à droite en a .
 • La courbe (C_f) admet une demi-tangente à droite au point $A(a, f(a))$ de système d'équations :

$$\begin{cases} y = (x - a)f'_d(a) + f(a) \\ x \geq a \end{cases}$$

★ $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_g(a)$
 • La fonction f est dérivable à gauche en a .
 • La courbe (C_f) admet une demi-tangente à gauche au point $A(a, f(a))$ de système d'équations :

$$\begin{cases} y = (x - a)f'_g(a) + f(a) \\ x \leq a \end{cases}$$

★ $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$
 • La fonction f n'est pas dérivable à droite en a .
 • La courbe (C_f) admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut à droite au point $A(a, f(a))$.

★ $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$
 • La fonction f n'est pas dérivable à droite en a .
 • La courbe (C_f) admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas à droite au point $A(a, f(a))$.

★ $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$
 • La fonction f n'est pas dérivable à gauche en a .
 • La courbe (C_f) admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas à gauche au point $A(a, f(a))$.

★ $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$
 • La fonction f n'est pas dérivable à gauche en a .
 • La courbe (C_f) admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut à gauche au point $A(a, f(a))$.

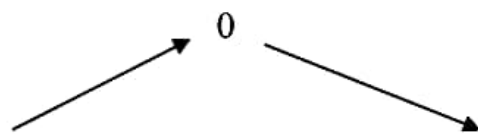
$f(x)$	$f'(x)$
$\alpha ; \alpha = \text{Constante}$	0
x	1
αx	α
x^2	$2x$
$x^n ; n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}
αx^n	αnx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\cos(\alpha x + \beta)$	$-\alpha \sin(\alpha x + \beta)$
$\sin(\alpha x + \beta)$	$\alpha \cos(\alpha x + \beta)$
$\tan(\alpha x + \beta)$	$\alpha(1 + \tan^2(\alpha x + \beta))$
$u + v$	$u' + v'$
$u - v$	$u' - v'$
$u \times v$	$u' \cdot v + u \cdot v'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
u^n	$n \cdot u' \cdot u^{n-1}$
\sqrt{u}	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\sqrt[n]{u}$	$\frac{u'}{n(\sqrt[n]{u})^{n-1}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
e^x	e^x
e^u	$u'e^u$
e^{-x}	$-e^{-x}$
e^{2x}	$2e^{2x}$
$e^{\frac{x}{2}}$	$\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$

• f est dérivable sur I et $(\forall x \in I): f'(x) \neq 0$
 alors la fonction f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et on a :

$$(\forall x \in f^{-1}(I)); (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

• f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$ alors :

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	\circ	$-$
$g(x)$			

$$\forall x \in]-\infty, \alpha]$$

\star g est continue et croissante sur $]-\infty, \alpha]$.

\star g admet une valeur maximale en α .

$$\forall x \in]-\infty, \alpha]: g(x) \leq g(\alpha)$$

$$\forall x \in]-\infty, \alpha]: g(x) \leq 0$$

$$\forall x \in [\alpha, +\infty[$$

\star g est continue et décroissante sur $[\alpha, +\infty[$.

\star g admet une valeur maximale en α .

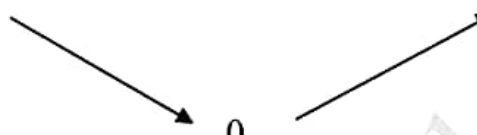
$$\forall x \in [\alpha, +\infty[: g(x) \leq g(\alpha)$$

$$\forall x \in [\alpha, +\infty[: g(x) \leq 0$$

$$\forall x \in]-\infty, \alpha] \cup [\alpha, +\infty[\quad g(x) \leq 0$$

$$\forall x \in]-\infty, +\infty[\quad g(x) \leq 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) \leq 0$$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	\circ	$+$
$g(x)$			

$$\forall x \in]-\infty, \alpha]$$

\star g est continue et décroissante sur $]-\infty, \alpha]$.

\star g admet une valeur minimale en α .

$$\forall x \in]-\infty, \alpha]: g(x) \geq g(\alpha)$$

$$\forall x \in]-\infty, \alpha]: g(x) \geq 0$$

$$\forall x \in [\alpha, +\infty[$$

\star g est continue et croissante sur $[\alpha, +\infty[$.

\star g admet une valeur minimale en α .

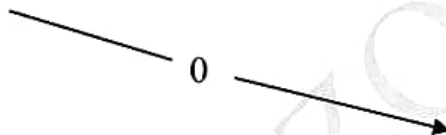
$$\forall x \in [\alpha, +\infty[: g(x) \geq g(\alpha)$$

$$\forall x \in [\alpha, +\infty[: g(x) \geq 0$$

$$\forall x \in]-\infty, \alpha] \cup [\alpha, +\infty[\quad g(x) \geq 0$$

$$\forall x \in]-\infty, +\infty[\quad g(x) \geq 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) \geq 0$$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$			

$$\forall x \in]-\infty, \alpha]$$

\star g est continue et décroissante sur $]-\infty, \alpha]$.

\star g admet une valeur minimale en α .

$$\forall x \in]-\infty, \alpha]: g(x) \geq g(\alpha)$$

$$\forall x \in]-\infty, \alpha]: g(x) \geq 0$$

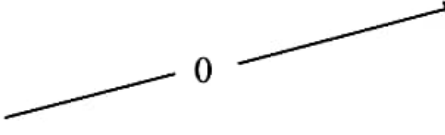
$$\forall x \in [\alpha, +\infty[$$

\star g est continue et décroissante sur $[\alpha, +\infty[$.

\star g admet une valeur maximale en α .

$$\forall x \in [\alpha, +\infty[: g(x) \leq g(\alpha)$$

$$\forall x \in [\alpha, +\infty[: g(x) \leq 0$$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$			

$$\forall x \in]-\infty, \alpha]$$

\star g est continue et croissante sur $]-\infty, \alpha]$.

\star g admet une valeur maximale en α .

$$\forall x \in]-\infty, \alpha]: g(x) \leq g(\alpha)$$

$$\forall x \in]-\infty, \alpha]: g(x) \leq 0$$

$$\forall x \in [\alpha, +\infty[$$

\star g est continue et croissante sur $[\alpha, +\infty[$.

\star g admet une valeur minimale en α .

$$\forall x \in [\alpha, +\infty[: g(x) \geq g(\alpha)$$

$$\forall x \in [\alpha, +\infty[: g(x) \geq 0$$

Théorème des valeurs intermédiaires

f est continue et strictement décroissante sur $[a, b]$.

$$f(a) = \dots > 0 \quad ; \quad f(b) = \dots < 0$$

$$\Rightarrow f(a) \cdot f(b) < 0$$

Par l'utilisation de théorème des valeurs intermédiaires l'équation : $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]a, b[$.

f est continue et strictement croissante sur $[a, b]$.

$$f(a) = \dots < 0 \quad ; \quad f(b) = \dots > 0$$

$$\Rightarrow f(a) \cdot f(b) < 0$$

Par l'utilisation de théorème des valeurs intermédiaires l'équation : $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]a, b[$.

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} ; \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} ; \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} ; 2\alpha \text{ and } \alpha \neq \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

On pose:
$$\begin{cases} p = \alpha + \beta \\ q = \alpha - \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{p+q}{2} \\ \beta = \frac{p-q}{2} \end{cases}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

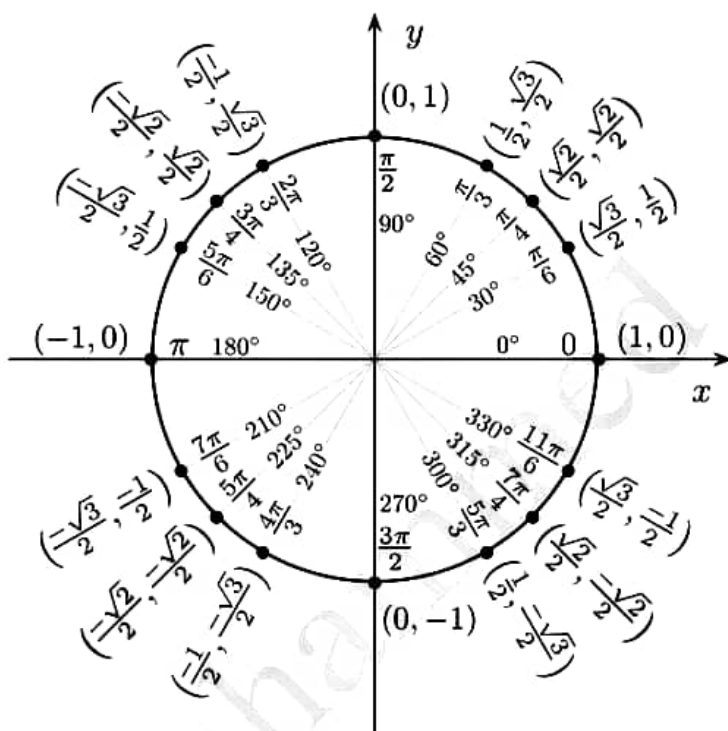
$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

Si $t = \tan \frac{x}{2}$ alors $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2} ; (x \neq \frac{\pi}{2} [\pi] \text{ et } x \neq \pi [2\pi])$$



$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \quad , \quad \tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha \quad , \quad \sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \quad , \quad \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha \quad , \quad \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha \quad , \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha \quad , \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha \quad , \quad \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha$$

$$\tan(x + k\pi) = \tan x ; \left(x \neq \frac{\pi}{2} [\pi]\right)$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} ; \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right)$$

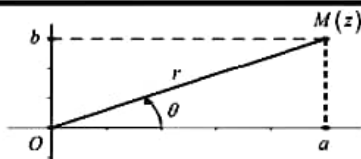
$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} ; \left(x \neq \frac{\pi}{2} [\pi]\right)$$

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases} / k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases} / k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi / k \in \mathbb{Z}$$

- ◆ La forme algébrique d'un nombre complexe : $z = a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
- ◆ La partie réelle de z est : $\text{Re}(z) = a$
- ◆ La partie imaginaire de z est : $\text{Im}(z) = b$
- ◆ Le conjugué de z est : $\bar{z} = a - ib$
- ◆ Le module de z est : $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$
 $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$



$M(z)$ est l'image de z et \overline{OM} est l'image vectorielle de z
 $z = a + ib$ est appelé l'afixe du point $M(a, b)$ ou l'afixe du vecteur \overline{OM}

- ◆ La forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul :
 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, $r > 0$
- ◆ Le module de z est : $r = |z| = OM$
- ◆ L'argument de z est :
 $\arg z \equiv (\vec{u}, \overline{OM}) \equiv \theta [2\pi]$
- ◆ $a = r \cos \theta$ et $b = r \sin \theta$
 $z = [r, \theta] = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

- $\arg(-z) \equiv \pi + \arg z [2\pi]$
- $\arg \bar{z} \equiv -\arg z [2\pi]$
- $\arg(z + z') \neq \arg z + \arg z' [2\pi]$
- $\arg(z \times z') \equiv \arg z + \arg z' [2\pi]$
- $\arg z^n \equiv n \cdot \arg z [2\pi]$
- $\arg \frac{z}{z'} \equiv \arg z - \arg z' [2\pi]$
- $\arg \frac{1}{z} \equiv -\arg z [2\pi]$

La distance AB est : $AB = |z_B - z_A|$

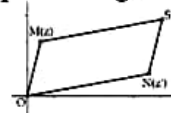
$ z = -z = \bar{z} $	$z + \bar{z} = 2 \text{Re}(z)$
$ z + z' \leq z + z' $	$z - \bar{z} = 2i \text{Im}(z)$
$ z \times z' = z \times z' $	$\frac{z + z'}{z \times z'} = \frac{\bar{z} + \bar{z}'}{\bar{z} \times \bar{z}'}$
$ z'' = z ''$	$(z'') = (\bar{z})''$
$\left \frac{z}{z'} \right = \frac{ z }{ z' }$	$\left(\frac{z}{z'} \right) = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$

I est le milieu de $[AB]$:

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

L'afixe du \overline{AB} est : $z_B - z_A$
 aff $\overline{AB} = z_B - z_A = b - a$

Si $M(z)$ et $N(z')$ alors le point $S(z + z')$ tel que $OMSN$ parallélogramme



Les points A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$

Les points A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si : $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_C}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}$ ou $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_D - z_C}{z_B - z_C} \in \mathbb{R}$

$$(\vec{u}, \overline{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A) [2\pi]$$

$$(\overline{AB}, \overline{CD}) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$$

$$(AB) // (CD) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv 0 [2\pi] \Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$$

$$(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$$

◆ La forme exponentielle d'un nombre complexe non nul : $z = re^{i\theta}$, tel que $r > 0$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$e^{i\theta} = [1, \theta]$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$$

$$e^{i(\theta-\theta')} = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}$$

$$e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

Z est réel $\Leftrightarrow \text{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow \bar{Z} = Z$

Z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \text{Re}(Z) = 0 \Leftrightarrow \bar{Z} = -Z$

$\text{Re}(Z) > 0$ et $\text{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow Z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg Z \equiv 0 [2\pi]$

$\text{Re}(Z) < 0$ et $\text{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow Z \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg Z \equiv \pi [2\pi]$

$\text{Im}(Z) > 0$ et $\text{Re}(Z) = 0 \Leftrightarrow Z \in i\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg Z \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

$\text{Im}(Z) < 0$ et $\text{Re}(Z) = 0 \Leftrightarrow Z \in i\mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg Z \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

$\text{Re}(Z) \neq 0$ et $\text{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow Z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg Z \equiv 0 [\pi]$

$\text{Im}(Z) \neq 0$ et $\text{Re}(Z) = 0 \Leftrightarrow Z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg Z \equiv \pi [\pi]$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} = \left[1, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = \left[1, \frac{\pi}{3}\right]$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} = \left[1, \frac{\pi}{6}\right]$$

$$0 + i = \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$-1 + i \cdot 0 = [1, \pi]$$

$$1 + i \cdot 0 = [1, 0]$$

$$[r, \theta] \times [r', \theta'] = [r \times r', \theta + \theta']$$

$$\frac{[r, \theta]}{[r', \theta']} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta' \right]$$

$$[r, \theta]'' = [r'', n\theta], -[r, \theta] = [r, \theta + \pi]$$

$$\overline{[r, \theta]} = [r, -\theta], \frac{1}{[r, \theta]} = \left[\frac{1}{r}, -\theta \right]$$

L'équation : $az^2 + bz + c = 0$, tels que : $(a \in \mathbb{R}^*)$ et $(b, c) \in \mathbb{R}^2$
 $\Delta = b^2 - 4ac$
 Si $\Delta < 0$: l'équation admet deux solutions complexes conjuguées $z_2 = \overline{z_1}$:
 $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$
 • La factorisation : $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$

$$G = \text{bary}\{(A, \alpha); (B, \beta)\} \Leftrightarrow \alpha \overline{AG} + \beta \overline{BG} = \overline{0} \Leftrightarrow \alpha(z_G - z_A) + \beta(z_G - z_B) = 0$$

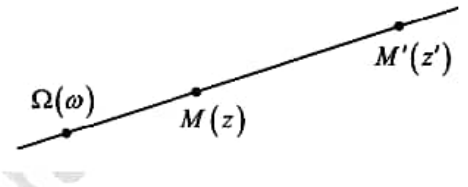
Une homothétie h de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k ; ($k \in \mathbb{R}$)

Le point $M'(z')$ est l'image du point $M(z)$ par $h(\Omega, k)$

$$h_{(\Omega, k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overline{\Omega M'} = k \overline{\Omega M}$$

$$\Leftrightarrow \text{aff} \overline{\Omega M'} = k \text{aff} \overline{\Omega M}$$

$$\Leftrightarrow z' - \omega = k(z - \omega)$$



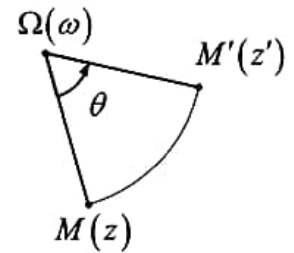
Une rotation R de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ

Le point $M'(z')$ est l'image du point $M(z)$ par $R(\Omega, \theta)$

$$R_{(\Omega, \theta)}(M) = M' \Leftrightarrow \overline{\Omega M'} = e^{i\theta} \overline{\Omega M}$$

$$\Leftrightarrow \text{aff} \overline{\Omega M'} = e^{i\theta} \text{aff} \overline{\Omega M}$$

$$\Leftrightarrow z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$



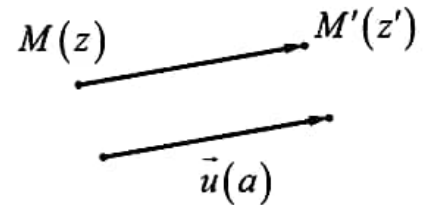
Une translation T du vecteur $\vec{u}(a)$; ($a \in \mathbb{C}$)

Le point $M'(z')$ est l'image du point $M(z)$ par $T_{\vec{u}}$

$$T_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overline{MM'} = \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow \text{aff} \overline{MM'} = \text{aff} \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow z' - z = a$$



$|z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow$ L'ensemble des points $M(z)$ est la médiatrice du segment $[AB]$

$|z - z_\Omega| = r \Leftrightarrow$ L'ensemble des points $M(z)$ est le cercle (C) de centre Ω et de rayon r .

Si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[\frac{|z_C - z_A|}{|z_B - z_A|}, \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \right]$ et $\frac{z_B - z_A}{z_B - z_A} = [r, \theta]$

Alors : $\frac{|z_C - z_A|}{|z_B - z_A|} = r \Leftrightarrow \frac{AC}{AB} = r$ et $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \theta[2\pi] \Leftrightarrow (\overline{AB}, \overline{AC}) \equiv \theta[2\pi]$

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1, \pm \frac{\pi}{2} \right] \Leftrightarrow$ Le triangle ABC est rectangle et isocèle en A .

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1, \pm \frac{\pi}{3} \right] \Leftrightarrow$ Le triangle ABC est équilatéral.

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[k, \pm \frac{\pi}{2} \right] \Leftrightarrow ABC$ est rectangle en A .

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = [1, \theta] \Leftrightarrow ABC$ est isocèle en A .

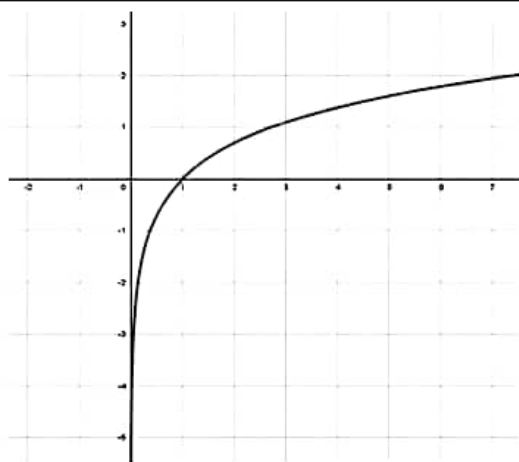


$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0^-$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n \ln x = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$\begin{aligned} \ln 1 &= 0 \\ \ln e &= 1 \\ e &\approx 2.7 \end{aligned}$$

$$\ln^2 x = (\ln x)^2, \quad \ln x^2 = 2 \ln x$$

$$\forall a > 0, \forall b > 0, r \in \mathbb{Q}$$

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln \frac{1}{b} = -\ln b$$

$$\ln a^r = r \ln a$$

$$\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$\forall a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\log_a a = \frac{\ln a}{\ln a} = 1$$

$$\log_a 1 = \frac{\ln 1}{\ln a} = 0$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\ln^2 x)' = 2(\ln x)'(\ln x)^{2-1}$$

$$((\ln x)^2)' = 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln x = \frac{2 \ln x}{x}$$

$$\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$$

$$\ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y$$

$$\ln x \leq \ln y \Leftrightarrow x \leq y$$

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot (x)'}{x^2}$$

$$\log x = \log_{10} x$$

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

$$\log 10 = \frac{\ln 10}{\ln 10} = 1$$

$$\log 1 = \frac{\ln 1}{\ln 10} = 0$$

$$\forall x \in]0, 1] : \ln x \leq 0$$

$$\forall x \in [1, +\infty[: \ln x \geq 0$$

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$		-	+

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2}$$

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} \cdot \ln x = +\infty \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln^2 x}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} \cdot (\ln x)^2 = +\infty \cdot (-\infty)^2 = +\infty$$

$$X = \sqrt{x} \Leftrightarrow X^2 = x$$

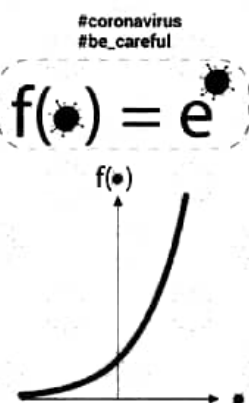
$$; \quad \begin{cases} x \rightarrow +\infty \\ X \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2 = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln X^2}{X}\right)^2 = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left(2 \frac{\ln X}{X}\right)^2 = (2 \cdot 0)^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0^-$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$e^0 = 1, e \approx 2.7$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$e^1 = e \approx 2.7182818$$

$$\ln x = a \Leftrightarrow x = e^a$$

$$e^{\ln x} = x, x > 0$$

$$\ln e^x = x, x \in \mathbb{R}$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{Q}$$

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b, e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}, (e^a)^r = e^{a \cdot r}$$

$$\sqrt{e^x} = e^{\frac{1}{2}x}, \sqrt[n]{e^x} = e^{\frac{1}{n}x}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$\forall x \in \mathbb{R}; e^x > 0$$

$$x > 0 \Leftrightarrow e^x > 1$$

$$x = 0 \Leftrightarrow e^x = 1$$

$$x < 0 \Leftrightarrow 0 < e^x < 1$$

$$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$$

$$e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$$

$$e^x \geq e^y \Leftrightarrow x \geq y$$

$$e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$$

$$e^x \leq e^y \Leftrightarrow x \leq y$$

$$(e^{-x})' = -e^{-x}$$

$$(e^{2x})' = 2e^{2x}$$

$$(e^{-2x})' = -2e^{-2x}$$

$$\left(e^{\frac{x}{2}}\right)' = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$$

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$$

$$a > 0, a \neq 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : a^x = e^{x \ln a}$$

$$a^0 = 1; a^1 = a$$

$$a^x = t \Leftrightarrow x = \log_a(t)$$

$$10^x = t \Leftrightarrow x = \log t$$

$$(a^x)' = (\ln a) \cdot a^x$$

$$\left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{(e^x)' \cdot x - e^x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$$

$$\left\{ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \right\}$$

$$\left\{ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+ \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \cdot e^x = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\left\{ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \right\}$$

$$t = -x \Leftrightarrow -t = x$$

$$\begin{cases} x \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$$

$$X = -x \Leftrightarrow -X = x$$

$$\begin{cases} x \rightarrow +\infty \\ X \rightarrow -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$$

★ L'intégrale d'une fonction continue sur un segment $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

★ La linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad , \quad \int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

$$(\lambda \in \mathbb{R}); \quad \int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

★ La relation de Chasles :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

★ Intégrale et ordre :

• Si $\forall x \in [a, b]: f(x) \geq 0$ alors : $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

• Si $\forall x \in [a, b]: f(x) \leq g(x)$ alors : $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

★ La valeur moyenne : $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

★ L'intégration par partie : $I = \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx$

ALPES

$$\begin{array}{ccc} u' = & & u = \dots \\ \uparrow & \swarrow \textcircled{1} & \\ -\textcircled{2} & v = & v' = \dots \end{array}$$

$$I = [\textcircled{1}] - \int \textcircled{2} = [uv]_a^b - \int_a^b v \cdot u' dx$$

★ L'aire \mathcal{A} du domaine plan limite par la courbe (C_f) et les droites d'équations $y = \alpha x + \beta$, $x = a$ et $x = b$ est :

$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x) - y| dx \text{ u.a.}$$

★ L'aire \mathcal{A} du domaine plan limite par (C_f) et (Ox) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)| dx \text{ u.a.}$$

★ L'aire \mathcal{A} du domaine plan limite par (C_f) et (C_g) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \text{ u.a.}$$

★ Le volume \mathcal{V} du solide de révolution engendré par la rotation de la courbe (C_f) autour de l'axe (Ox) sur l'intervalle $[a, b]$ est :

$$\mathcal{V} = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx \text{ u.v.}$$

$f(x)$: fonction	$F(x)$: Primitive fonctions
0	c ; $c = \text{Constante}$
a ; $a = \text{Constante}$	$ax + c$
$2x$	$x^2 + c$
x^n ; $n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
αx^n	$\alpha \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$\frac{-1}{x^2}$	$\frac{1}{x} + c$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x} + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$1 + \tan^2 x$	$\tan x + c$
$u' \sin(u)$	$-\cos(u) + c$
$u' \cos(u)$	$\sin(u) + c$
$u'(1 + \tan^2(u))$	$\tan(u) + c$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + c$
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + c$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u + c$
e^x	$e^x + c$
$u'e^n$	$e^n + c$
e^{-x}	$-e^{-x} + c$
e^{2x}	$\frac{e^{2x}}{2} + c$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + c$

u.a. : L'unité de l'aire. $u.a. = \|\vec{i}\| \cdot \|\vec{j}\|$

u.v. : L'unité de volume. $u.v. = \|\vec{i}\| \cdot \|\vec{j}\| \cdot \|\vec{k}\|$

ALPES: A : arctan L : ln P : polynomial

E : exponential S : sinusoidal (sin, cos)

Professeur : GHAZOUI Mohammed
 Matière : Mathématiques
 Class : 2 Bac Sciences Physiques
 Année scolaire : 2021-2022

Les équations différentielles

☘

Lycée Ibn Al Khatib
 Tanger

Équation différentielle du premier ordre	La solution générale de l'équation différentielle
$(a \neq 0) ; y' = ay + b$	$(\alpha \in \mathbb{R}) ; y(x) = \alpha e^{ax} - \frac{b}{a}$

Équation différentielle du second ordre	L'équation caractéristique	L'équation caractéristique admet :	La solution générale de l'équation différentielle	
$ay'' + by' + cy = 0$	$ar^2 + br + c = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	Deux solutions réelles : $r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	$y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ Tel que : $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
		$\Delta = 0$	Une solution unique réelle : $r_0 = \frac{-b}{2a}$	$y(x) = (\alpha x + \beta) e^{r_0 x}$ Tel que : $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
		$\Delta < 0$	Deux solutions complexes et conjuguées $r_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = p + iq$ $r_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = p - iq$	$y(x) = e^{px} (\alpha \cos(qx) + \beta \sin(qx))$ Tel que : $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

- Une **expérience aléatoire** est une expérience qu'on ne peut pas prévoir les résultats.
- Une **éventualité** est tout résultat d'une expérience aléatoire.
- L'**univers des éventualités** est l'ensemble de toutes les éventualités, il est noté Ω .
- L'**événement** est toute partie de l'univers des éventualités.
- L'**événement certain** est l'ensemble Ω .
- L'**événement impossible** est l'ensemble vide \emptyset .
- L'**événement élémentaire** tout singleton $\{e_i\}$ inclus dans Ω .
- L'**événement** $A \cap B$ c'est l'événement A et B .
- L'**événement** $A \cup B$ c'est l'événement A ou B .
- L'**événement contraire** de A noté \bar{A} c'est l'événement qui vérifie : $A \cap \bar{A} = \emptyset$ et $A \cup \bar{A} = \Omega$.
- **Deux événements** A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$.
- et : \times ou : $+$

⌘ La probabilité d'un événement M : $p(M) = \frac{\text{Card } M}{\text{Card } \Omega}$
 $p(\Omega) = 1$, $p(\emptyset) = 0$, $0 \leq p(M) \leq 1$

⌘ La probabilité de l'union de deux événements :
 $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
 ▪ Si A et B deux événements incompatibles (càd $A \cap B = \emptyset$) alors : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

⌘ **Indépendance de deux événements**
 On dit que deux événements A et B sont **indépendants** si
 $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

⌘ **Probabilité conditionnelle :**
 La probabilité de l'événement B sachant que A est réalisé, est le nombre noté $p_A(B)$ ou $p(B/A)$ définie par : $p_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

⌘ Probabilité de l'événement contraire $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

⌘ La loi de probabilité d'une variable aléatoire X

$X = x_i$	x_1	x_2	\dots	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	\dots	p_n

- L'espérance mathématique : $E(X) = \sum_1^n x_i \cdot p_i$
- La variance : $V(X) \equiv E(X^2) - E(X)^2$
- L'écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$
- « $E(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n$ », « $E(X^2) = \sum_1^n x_i^2 \cdot p_i$ »

⌘ **Epreuves répétées**

Soit A un événement de probabilité p dans une expérience aléatoire et soient n et k deux entiers naturels tels que $k \leq n$.
 Lorsqu'on répète cette expérience n fois de manière indépendante alors la probabilité pour que A se réalise k fois exactement est $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

Types de tirages et dénombrement
 ⌘ **Tirages simultanés** : C_n^p
 Le tirage simultané de p éléments parmi n éléments ($0 \leq p \leq n$) c'est tirer simultanément p éléments parmi n éléments et le nombre de ces tirages est C_n^p càd le nombre de combinaisons de p éléments parmi n éléments.
 ⌘ **Tirages successifs sans remise** : A_n^p
 Le tirage successif sans remise de p éléments parmi n éléments ($1 \leq p \leq n$) c'est tirer un élément parmi n , on ne le remet pas jusqu'à tirer p éléments et le nombre de ces tirages est A_n^p càd le nombre des arrangements sans répétition de p éléments parmi n éléments
 ⌘ **Tirages successifs avec remise** : n^p
 Le tirage successif avec remise de p éléments parmi n éléments c'est tirer un élément parmi n , on le remet jusqu'à tirer p éléments et le nombre de ces tirages est n^p càd le nombre des arrangements avec répétition de p éléments parmi n éléments (c'est possible que $p \geq n$).

$A_n^p \equiv \frac{n!}{(n-p)!}$ $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
 $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ $0! = 1$

⌘ **Loi binomiale :**

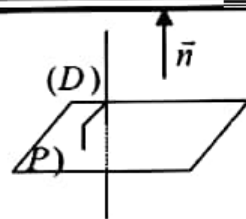
Soit A un événement de probabilité p dans une expérience aléatoire.
 On répète cette expérience n fois
 Si X est une variable aléatoire binomiale de paramètres n et p alors $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ et la loi de probabilité de X est définie Par : $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$
 $\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$
 ▪ L'espérance mathématique : $E(X) = np$
 ▪ La variance : $V(X) = np\bar{p} = np(1-p)$
 ▪ L'écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

$$\vec{u}(x, y, z) , \vec{v}(x', y', z')$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

• Un vecteur \vec{n} non nul de l'espace est normal à un plan (P) lorsque toute droite de vecteur directeur \vec{n} est perpendiculaire à (P)



• On considère le plan (P) d'équation $ax + by + cz + d = 0$
 Le vecteur $\vec{n}(a, b, c)$ est un vecteur normal au plan (P)

Une équation cartésienne du plan (P) passant par le point

$A(x_A, y_A, z_A)$ et vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$

★ 1^{er} Méthode :

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (P) \Leftrightarrow \vec{n} \perp \overline{AM}$$

$$\Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overline{AM} = 0$$

$$\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$$

Avec $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$

★ 2^{ème} Méthode :

puisque $\vec{n}(a, b, c)$ est un vecteur normal à (P) , alors une équation cartésienne du plan (P) est de la forme : $ax + by + cz + \delta = 0$

Puisque $A \in (P)$ alors $ax_A + by_A + cz_A + \delta = 0$

$$\delta = -(ax_A + by_A + cz_A)$$

Distance du point Ω au plan $(P) : ax + by + cz + d = 0$

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|ax_\Omega + by_\Omega + cz_\Omega + d|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ax_\Omega + by_\Omega + cz_\Omega + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

▲ La sphère de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M tels que : $\Omega M = R$

▲ Une équation cartésienne de la sphère de centre $\Omega(a, b, c)$ et de rayon R est : $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$

Où : $x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \delta z + \lambda = 0$

▲ Une équation cartésienne de la sphère (S) de diamètre $[AB]$

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (S) \Leftrightarrow \overline{AM} \perp \overline{BM}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \overline{BM} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) + (z - z_A)(z - z_B) = 0$$

$$A(x_A, y_A, z_A) , B(x_B, y_B, z_B)$$

$$\overline{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

$$AB \equiv \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Soit (D) la droite de vecteur directeur

$\vec{u}(a, b, c)$, et (D') la droite de

vecteur directeur $\vec{v}(a', b', c')$

$$(D) \perp (D') \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\Leftrightarrow aa' + bb' + cc' = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{u, v})$$

Intersection de (S) et (P)

Soit (S) la sphère de centre Ω et de rayon R , et soit (P) un plan

★ si $d(\Omega, (P)) < R$ alors le plan

(P) coupe la sphère (S) selon un

cercle de centre H et de rayon r

• H est le projeté orthogonal du point Ω sur (P)

$$\bullet r = \sqrt{R^2 - d^2}$$

★ Si $d(\Omega, (P)) = R$ alors le plane

(P) tangent à sphère (S) au point H

★ Si $d(\Omega, (P)) > R$ alors le plan

(P) est à l'extérieur de la sphère (S) .

$$(S) \cap (P) = \emptyset$$

✦ Si $d(\Omega, (P)) = 0$ alors le plan

(P) coupe la sphère selon cercle de

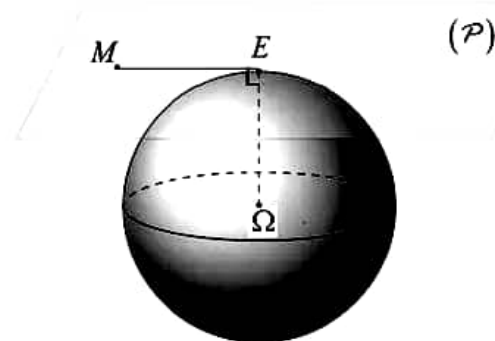
centre Ω et de rayon R

▲ Une équation cartésienne du plan (\mathcal{P}) tangent à la sphère de centre $\Omega(a,b,c)$ et de rayon R au point E

$$\overline{\Omega E} \perp (\mathcal{P})$$

$\overline{\Omega E}$ est un vecteur normal au plan (\mathcal{P})

$$M(x,y,z) \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \overline{\Omega E} \perp \overline{EM} \\ \Leftrightarrow \overline{\Omega E} \cdot \overline{EM} = 0$$



Une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point Ω et orthogonale au plan (\mathcal{P})

* $\vec{n}(a,b,c)$ est un vecteur normal au plan (\mathcal{P})

* Puisque $(\Delta) \perp (\mathcal{P})$ alors $\vec{n}(a,b,c)$ un vecteur directeur de la droite (Δ)

$$M(x,y,z) \in (\Delta) \Leftrightarrow \vec{n} \text{ et } \overline{\Omega M} \text{ sont colinéaires} \\ \Leftrightarrow \overline{\Omega M} = t\vec{n} \quad / t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_\Omega = at \\ y - y_\Omega = bt \\ z - z_\Omega = ct \end{cases} \quad / t \in \mathbb{R}$$

$$(\Delta): \begin{cases} x = x_\Omega + at \\ y = y_\Omega + bt \\ z = z_\Omega + ct \end{cases} \quad / t \in \mathbb{R}$$

$$\vec{u}(x,y,z) \quad , \quad \vec{v}(x',y',z')$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\widehat{u,v})$$

- ★ $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- ★ $\alpha \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \alpha \vec{v} = \alpha (\vec{u} \wedge \vec{v})$
- ★ $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$

Une équation cartésienne du plan (ABC) :

$\vec{n} \equiv \overline{AB} \wedge \overline{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

$$M(x,y,z) \in (ABC) \Leftrightarrow (\overline{AB} \wedge \overline{AC}) \perp \overline{AM} \\ \Leftrightarrow \vec{n} \perp \overline{AM} \\ \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overline{AM} = 0$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}$$

$$\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow A, B \text{ et } C \text{ sont alignés}$$

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont coplanaires}$$

$$\text{Aire du triangle } ABC \text{ est : } \mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overline{AB} \wedge \overline{AC}\|$$

$$\text{Aire du parallélogramme } ABCD \text{ est : } \mathcal{A}_{ABCD} = \|\overline{AB} \wedge \overline{AD}\|$$

La distance entre les droites $D(A, \vec{u})$ et $D'(B, \vec{v})$

$$d(D(A, \vec{u}), D'(B, \vec{v})) = \frac{|\overline{AB} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$$

Distance du point Ω à la droite (Δ) passant par le point A est dirigée par le vecteur \vec{u}

$$d(\Omega, \Delta(A, \vec{u})) = d(\Omega, (\Delta)) = \frac{\|\overline{\Omega A} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

Intersection de $S(\Omega, R)$ la (Δ)

- ★ Si $d(\Omega, (\Delta)) < R$ alors la droite (Δ) coupe la sphère (S) en deux points
- ★ Si $d(\Omega, (\Delta)) = R$ la droite (Δ) coupe la sphère (S) en un seul point. (Δ) est tangente à la sphère (S)
- ★ Si $d(\Omega, (\Delta)) > R$ la droite (Δ) est à l'extérieur de la sphère (S)
 $(S) \cap (\Delta) = \emptyset$