

**EXERCICE 1 : 2 points**

Dans chacun des cas suivants, recopie le numéro de l'affirmation suivi de Vrai si l'affirmation est vraie et Faux si non.

1. Soit A et B deux événements d'un univers de probabilités telles que leurs probabilités respectives notées P(A) et P(B) soient non nulles. La probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé est notée  $P_A(B)$ .
2. Soit  $f$  et  $h$  deux fonctions définies sur l'intervalle  $[1 ; e]$ . Si  $\forall x \in [1 ; e], f(x) < h(x)$  alors  $\int_1^e f(x)dx < \int_1^e h(x)dx$ . C'est la propriété de la positivité de l'intégrale.
3. Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $\theta$  un nombre réel. La réécriture de  $\cos^n(\theta)$  en fonction de  $\cos(n\theta)$  et de  $\sin(n\theta)$  est appelée linéarisation.
4. Soit  $U$  une suite numérique définie par récurrence telle que  $u_0$  donnée et  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Si  $U$  est convergente, alors sa limite  $l$  si elle existe est la solution de l'équation  $f(x) = x$ . Ce théorème appliqué est appelé théorème des valeurs intermédiaires.

**EXERCICE 2 : 2 points**

Pour chacun des énoncés incomplets du tableau ci-dessous, quatre réponses A, B, C et D sont proposées dont une seule permet d'avoir l'énoncé juste. Ecris sur ta feuille de copie le numéro de chaque énoncé suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	AFFIRMATIONS OU ENONCES INCOMPLETS	REPNSES			
		A	B	C	D
1	L'équation (E): $z \in \mathbb{C}$ , $8z^3 - 8(1+i)z^2 + 6iz + 1 - i = 0$ admet une solution réelle $z_0$ de valeur	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2
2	Si $f$ est une fonction dérivable sur $[2; 5]$ et $1 \leq f'(x) \leq 4$ , alors pour tout $x \in [2 ; 5]$ , d'après l'inégalité des accroissements finis on a :	$1 \leq f(5) - f(2) \leq 4$	$2 \leq f(5) - f(2) \leq 5$	$3 \leq f(5) - f(2) \leq 12$	$2 \leq f(5) - f(2) \leq 5$
3	Soit $g$ une fonction continue et définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ . Une primitive $G$ de $g$ sur $\mathbb{R}$ est $G(x) = \dots\dots$	$\ln(e^{-2x})$	$\ln(1 + e^{-2x})$	$-2\ln(1 + e^{-2x})$	$2\ln(1 + e^{-2x})$
4	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} =$	0	1	2	$\frac{1}{2}$

### EXERCICE 3 : 3 points

On considère les équations différentielles  $(E_1)$  et  $(E_2)$  telles que:

$$(E_1) : y'' + y = 0 \text{ et } (E_2) : y'' + y = e^x + e^{-x}$$

- 1- Détermine les solutions de  $(E_1)$ .
- 2- Soit  $f$  une solution de  $(E_2)$  g la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  telle que  $g(x) = f(x) + m(e^x + e^{-x})$  où  $k \in \mathbb{R}$ .
  - a- Exprime les dérivées secondes  $g''$  de  $g$  et  $f''$  de  $f$  en fonction de  $m$ .
  - b- Détermine la valeur de  $m$  pour que la fonction  $g$  soit solution de  $(E_1)$ .
  - c- Dédus-en toutes les solutions de  $(E_2)$ .
  - d- Détermine la solution  $h$  de  $(E_2)$  qui vérifie les conditions : 
$$\begin{cases} h(0) = 0 \\ h'(0) = 1 \end{cases}$$

### EXERCICE 4 : 3,5 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O ; I ; J)$

Soit  $S$  la similitude directe de centre  $O$ , de rapport  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  et d'angle de mesure  $\frac{\pi}{6}$ . On note  $f$  l'application qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  du plan associé le point  $M'$  d'affixe  $z'$  par la similitude  $S$ .

- 1- Détermine l'expression de  $f(z)$  en fonction de  $z$ .
- 2- On pose  $z_0 = 1 - i$  et  $z_1 = f(z_0)$ . On notera  $r$  le module de  $z$  et  $\theta$  son argument.
  - a- Ecris  $z_0$  sous forme trigonométrique et exponentielle.
  - b- Calcule le module  $r_1$  de  $z_1$  et un argument  $\theta_1$  de  $z_1$ .
- 3- On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = r_n[\cos(\theta_n) + i\sin(\theta_n)]$  où  $r_n$  et  $\theta_n$  désignent respectivement les modules et argument de  $z_n$ .

On considère la suite  $(z_n)$  telle que 
$$\begin{cases} z_0 = 1 - i \\ z_{n+1} = \frac{1}{4}(3 + i\sqrt{3})z_n \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

- a- Précise la nature et les éléments caractéristiques de la suite  $(z_n)$ .
- b- Exprime  $z_n$  en fonction de  $n$ .
- c- Exprime  $r_n$  et  $\theta_n$  en fonction de  $n$ .
- d- Précise la nature et les éléments caractéristiques des suites  $(r_n)$  et  $(\theta_n)$  puis caractérise-les.

### EXERCICE 5 : 4,5 points

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (x^2 - x + 1)e^x$ . On note  $(C_f)$  sa courbe représentative dans le repère orthogonal  $(O, I, J)$  tel que  $OI = 1$  cm et  $OJ = 2$  cm.

- 1- Dresse le tableau de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . (on calculera les limites)
- 2- a- Démontre que l'équation  $f(x) = 1$  admet deux solutions sur  $\mathbb{R}$  dont l'une est 0 et l'autre sera notée  $\alpha$ .
  - b- Justifie que  $\alpha \in [-2; \frac{3}{2}]$
- 3- Soit  $k$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $k(x) = -\ln(x^2 - x + 1)$ 
  - a- Démontre que  $f(x) = 1 \Leftrightarrow k(x) = x$
  - b- Etudie les variations de  $k$  puis dresse son tableau de variation.

4- a- Démontre que si  $x \in \left[-2; \frac{3}{2}\right]$  alors  $k(x) \in \left[-2; \frac{3}{2}\right]$

b- Démontre que si  $x \in \left[-2; \frac{3}{2}\right]$  alors  $|k'(x)| \leq 0,9$

5- On définit la suite  $(u_n), \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = k(u_n) \end{cases}$ . Prouve que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[-2; \frac{3}{2}\right]$

6- En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq 0,9|u_n - \alpha|$$

7- a- Démontre que  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq (0,9)^n |u_0 - \alpha|$

b- Déduis-en que  $(u_n)$  converge vers  $\alpha$

8- Détermine la plus petite valeur de l'entier naturel  $n$  tel que  $|u_n - \alpha| \leq 0,1$ .

#### EXERCICE 6 : 5 points

Une supérette de fruit et légume reçoit une cargaison de mangue dont le quart est avarié (de mauvaise qualité ou non consommable). Une employée est chargée de trier le stock et de préparer les emballages de 5 mangue chacun pour la vente.

Celle-ci, négligente, ne se donne pas la peine d'extraire les mangues avariées. Par conséquent, chaque client qui trouve dans le paquet qu'il achète, 2 mangues ou plus qui sont avariées revient se plaindre.

Ce jour-là, Le rayonniste des mangues a reçu 100 clients et chaque client a acheté exactement 1 paquet de mangue.

En vue de se préparer à d'éventuels remboursements, Monsieur DJAHA, propriétaire de la superette souhaiterait savoir combien de plaintes en moyenne il y aura ce jour-là.

Il te sollicite pour cela.

Réponds à la préoccupation de M. DJAHA.