Lycée Moderne LE PLANTEUR BARRY CALLEBAUT Akoupé

MATHEMATIQUE Tle D

PREPABAC 2026
M. DJAHA
0709521305
SUJET N°7

EXERCICE 1 : 2 points

Dans chacun des cas suivants, recopie le numéro de l'affirmation suivi de Vrai si l'affirmation est vraie et Faux si non.

1. Toute suite croissante et bornée est convergente.
2. La fonction $x \mapsto (-1)^n x$ où n est un entier naturel non nul n'admet pas de limite en $+\infty$.
3. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \ln(e^x + e^{-x})$ est une fonction impaire.
4. La bijection réciproque de la fonction $x \mapsto \ln x$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

EXERCICE 2 : 2 points

Pour chacun des énoncés incomplets du tableau ci-dessous, quatre réponses A, B, C et D sont proposées dont une seule permet d'avoir l'énoncé juste. Ecris sur ta feuille de copie le numéro de chaque énoncé suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

<table>
<tr><td rowspan="2">N°</td><td rowspan="2">AFFIRMATIONS ou ENONCES INCOMPLETS</td><td colspan="4">REPONSES</td></tr>
<tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr>
<tr><td>1</td><td>La valeur exacte de $\int_0^1 (e^{2t} - t)dt$ est....</td><td>$\frac{1}{2}e^2 - 1$</td><td>$e^2 - \frac{1}{2}$</td><td>$\frac{1}{2}(e^2 - 1)$</td><td>$e^2 - 1$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Dans un repère (O,I,J) tel que OI = 2 cm et OJ = 3 cm, l'unité d'aire u.a est égale à....</td><td>5 cm²</td><td>$6\ cm^2$</td><td>9 cm²</td><td>$8\ cm^2$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Soit la série statistique suivante :
<table>
<tr><td>Année</td><td>2023</td><td>2024</td><td>2025</td><td>2026</td></tr>
<tr><td>Rang de l'année x_i</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Taille du plant en cm y_i</td><td>40</td><td>55</td><td>85</td><td>100</td></tr>
</table>
Le point moyen G de cette série a pour couple de coordonnées…</td><td>(1,5 ; 60)</td><td>(1,5 ; 70)</td><td>(1,5 ; 65)</td><td>(1,5 ; 75)</td></tr>
<tr><td>4</td><td>On considère une série statistique double (X ;Y) telles que les droites de régressions de Y en X et de X en Y sont définies par :
(D) : Y = 3,5 X −12 et (D') : X = 0,285 Y +9
Le coefficient de corrélation linéaire de cette série est…</td><td>$r = 0{,}99$</td><td>$r = -1$</td><td>$r = 0{,}97$</td><td>$r = 0{,}08$</td></tr>
</table>

EXERCICE 3 : 3 points

Soit les équations différentielles définies par : (E) : $y' - 2y = 0$ et (E'): $y' - 2y = 8x^2 - 8x$.

1- Détermine toutes les solutions de (E).
2- Détermine une fonction polynôme du second degré d'expression P(x) solution de l'équation (E').
3- Démontre qu'une fonction f est solution de (E') si et seulement si $f - P$ est solution de (E).
4- Justifie que toutes les solutions de (E') s'expriment par $f_k(x) = ke^{2x} - 4x^2$.
5- Détermine la solution f de (E') qui s'annule en 1.

EXERCICE 4 : 3,5 points

On considère l'équation (E) dans $\mathbb{C}$ telle que (E) : $4z^3 - 6i\sqrt{3}z^2 - (9 - 3i\sqrt{3})z - 4 = 0$

1- Détermine les racines carrées de $6 + 6i\sqrt{3}$.
2- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4 = 0$.
3- a- Développe, réduis et ordonne l'expression $(2z + 1)(2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4)$
   b- Déduis-en les solutions de (E).
4- Soit A, B et C trois point du plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O,I,J) d'unité 2 cm. Les affixes respectifs sont $z_A = -\frac{1}{2}$; $z_B = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $z_C = 1 + \sqrt{3}i$
   a- Exprime z_A, z_B et z_C sous forme trigonométrique.
   b- Place A, B et C dans le repère.
5- Soit S la similitude directe de centre O, d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et de rapport 2.
   a- Détermine l'écriture complexe de S.
   b- Justifie que S(A) = B et que S(B) = C.
   c- Détermine l'affixe du point D image de C par S.

EXERCICE 5 : 4,5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{x - lnx} \ si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$. On note (C_f) sa courbe representative dans le repère orthogonal (O, I, J) tel que OI = 2 cm et OJ = 2 cm.

1- Soit la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = x - 1 - lnx$.
   Démontre en étudiant le sens de variation de g que $\forall\ x > 0$, $lnx \leq x - 1$.
2- a- Etudie la continuité de f en 0.
   b- Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
3- a- Etudie la dérivabilité de f en 0.
   b- Interprète graphiquement le résultat.
4- Soit f' la fontion dérivée de f, f étant dérivable sur $1; +\infty[$.
   Etudie les variations de f puis dresse son tableau de variations.
5- Soit $x \geq 1$.
   a- Démontre que $0 \leq \frac{lnx}{x} \leq 1$
   b- Démontre que : $1 + \frac{lnx}{x} + \frac{(lnx)^2}{x^2} + \cdots + \frac{(lnx)^n}{x^n} = f(x)[1 - (\frac{lnx}{x})^{n+1}]$.
   c- Déduis-en la limite de la suite définie par : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 + \frac{lnx}{x} + \frac{(lnx)^2}{x^2} + \cdots + \frac{(lnx)^n}{x^n}$

EXERCICE 6 : 5 points

M. DJAHA est un agriculteur de trois ans d'expérience dans la production de gingembre.
Il a noté sa production en tonnes sur ses trois années d'exercice dans le tableau suivant :

Année	2023	2024	2025
Production en tonnes	2,8	3,1	3,4

Il a remarqué que sa production augmente d'année en année sur un certain rythme. En effet, M . DJAHA a loué le lopin de terre pour 7 ans (fin 2030) et a investi un total de 9 750 000 FCFA (main d'œuvre et machine) pour toute la durée de l'exploitation et le kilogramme de gingembre est vendu à 3500 FCFA bords champs. Ce prix est fixé pour la période du contrat avec les partenaires acheteurs.
M. DJAHA veut modéliser l'évolution de sa production afin d'anticiper sa capacité de production cumulée sur les 7 ans et vérifier s'il y aura des bénéfices.
En cas de bénéfice, il souhaiterait continuer dans ce projet ou changer de culture sinon.
Répond à la préoccupation de M. DJAHA.