FICHE DE LEÇON

LIMITES ET CONTINUITE

TLE D

Rédigée par :

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON1 : LIMITES ET CONTINUITE

NOMBRE DES SEANCES : 12

DUREE D'UNE SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Identifier	- les notions de branches paraboliques de direction celle de (OI) ou celle de (OJ) dans un repère (O, I, J) - une racine n-ième d'un nombre positif - une puissance d'exposant rationnel
Connaître	- la propriété relative à la limite d'une fonction composée - la propriété relative à la limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert - les propriétés relatives aux opérations sur les fonctions continues sur un intervalle - la propriété relative à la composée de deux fonctions continues sur un intervalle - les propriétés relatives à l'image d'un intervalle par une fonction continue : • en utilisant son tableau de variation • en utilisant une méthode algébrique - le théorème des valeurs intermédiaires - les propriétés relatives aux fonctions continues et strictement monotones sur un intervalle - les méthodes de dichotomie et de balayage - les propriétés relatives aux puissances d'exposants rationnels
Noter	- une racine n-ième d'un nombre positif $\left(\sqrt[n]{x} \ ou \ x^{\frac{1}{n}}\right)$ - une puissance d'exposant rationnel $\left(x^{\frac{p}{q}}\right)$
Déterminer	- la limite d'une fonction

	• en utilisant les limites de référence • en utilisant une expression conjuguée • en utilisant la définition d'un nombre dérivé • en utilisant les propriétés de comparaison (minorant, majorant et encadrement) - la limite d'une fonction composée - l'image d'un intervalle par une fonction continue • en utilisant son tableau de variation • en utilisant une méthode algébrique - une valeur approchée d'une solution d'une équation - le nombre de solutions d'une équation du type $f(x) = k$ - la formule explicite d'une bijection réciproque quand cela est possible - un prolongement par continuité d'une fonction en un point
Représenter	- la courbe de la bijection réciproque d'une bijection dans un repère orthonormé - graphiquement des fonctions du type : • $x \mapsto \sqrt[n]{x} (n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}_+^*)$ • $x \mapsto x^r (r \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{R}_+^*)$
Interpréter	- graphiquement : • $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ • $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty (resp\ -\infty)$ • $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ • $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty (resp\ -\infty)$
Démontrer	- qu'une fonction f est une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J dans le cas où f est continue et strictement monotone sur I. - l'existence d'une unique solution de l'équation $f(x) = m$ (m réel) sur un intervalle I, f étant continue et strictement monotone sur I - l'existence d'une unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur un intervalle ouvert $]a; b[$, f étéant continue et strictement monotone sur $[a; b]$
Traiter une situation	- faisant appel aux limites et à la continuité d'une fonction

SITUATION D'APPRENTISSANGE

Lors d'un cours de biologie en T^{LE}D le professeur de SVT a informé la classe qu'une étude sur l'évolution dans le temps de la population $\boldsymbol{p}$ à venir (en millier), à compter de cette année, d'une espèce d'abeille responsable de la pollinisation des fleurs des anacardiers dans le département de Madinani, est estimée par la formule : $\boldsymbol{p(t) = 780000 \times \frac{2t+1}{t^2+3}}$, où $\boldsymbol{t}$ désigne le nombre d'années qui s'écouleront depuis cette année.

Il ajoute que si on n'y prend garde, cette espèce disparaîtra.

Préoccupés par cette information, les élèves de la classe décident d'étudier la fonction p pour savoir s'il est possible d'estimer l'année où cette espèce pourrait disparaître si aucune mesure n'est prise.

PLAN DE LA LEÇON

I. LIMTES
1. Limites de référence
   Propriété
2. Limite d'une restriction
   Propriété
3. Lien entre limite à gauche, limite à droite et limite d'une fonction en un point
   Propriété
4. Limites et opérations sur les fonctions
   a. Limite de la somme de deux fonctions
      Propriété
   b. Limite du produit de deux fonctions
      Propriété
   c. Limite du quotient de deux fonctions
      Propriété
5. Limite d'une fonction composée
   Propriété
   Conséquences
6. Limites et inégalités
   a. Passage à la limite dans une inégalité
      Propriété
   b. Limite par comparaison
      Propriétés
7. Limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert
   a. Propriété1
   b. Propriété2
   c. Propriété3
   d. Propriété4
8. Calcul de limites et formes indéterminées
   a. Utilisation d'une factorisation
   b. Utilisation de l'expression conjuguée
   c. Utilisation de l'expression conjuguée et d'une factorisation
   d. Utilisation de la définition d'un nombre dérivé
   e. Le changement d'écriture

II. CONTINUITE
1. Continuité en un point
   a. Définition
   b. Propriété
2. Prolongement par continuité
   Propriété et définition
3. Continuité sur un intervalle
   Définition
4. Opérations sur les fonctions continues
   Propriété
5. Image d'un intervalle par une fonction continue
   a. Propriété1
   b. Propriété2
6. Continuité d'une fonction composée
   Propriété
7. Théorème des valeurs intermédiaires
   a. Théorème
   b. Conséquences
8. Fonction continue et strictement monotone
   a. Propriété1
   b. Propriété2
9. Encadrer une solution α de l'équation $f(x) = 0$
   a. Méthode de balayage

b. Méthode de dichotomie

III. ETUDE D'UNE BRANCHE INFINIE

1. Asymptote
   a. Asymptote parallèle à l'un des axes
      Définition
   b. Asymptote non parallèle à l'un des axes
      Définition
2. Branches paraboliques-Direction asymptotique

IV. FONCTION PUISSANCE D'EXPOSANT RATIONNEL

1. Fonction racine *n-ième*
   a. Définition
   b. Notation
   c. Remarque
2. Fonction puissance d'exposant rationnel
   a. Définition
3. Propriétés

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON1 : LIMITES ET CONTINUITE

SEANCE:1/12

DUREE D'UNE SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Déterminer	- la limite d'une fonction • en utilisant les limites de référence

PLAN DE LA SEANCE

I. LIMITE
   1. Limites de référence
      Propriété

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Présentation *5 min*	-Lecture -Travail collectif	-Donne l'énoncé de la situation d'apprentissage aux apprenants. -Demande aux apprenants de faire une lecture silencieuse de la situation. -Demande à un apprenant de lire à haute voix l'énoncé de la situation. -Lis l'énoncé de la situation d'apprentissage à haute voix. **Question pour faire ressortir les tâches :** Qu'est-ce que les élèves décident de faire ?	-Les apprenants lisent silencieusement l'énoncé de la situation. -Un apprenant lis à haute voix l'énoncé de la situation. -Les apprenants écoutent Attentivement. <u>REPONSE ATTENDUE</u> Les élèves de la classe décident d'étudier la fonction p.	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Développement *25 min*	-Travail individuel	ACTIVITE Soit n un nombre entier naturel non nul ; a et c des nombres réels. Calcule les limites suivantes : $\lim_{x\to a} c$; $\lim_{x\to+\infty} c$; $\lim_{x\to-\infty} c$ $\lim_{x\to+\infty} x^n$; $\lim_{x\to-\infty} x^{2n}$; $\lim_{x\to-\infty} x^{2n+1}$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n}$; $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n}$; $\lim_{x\to0} \frac{1}{x^n}$ *Ces résultats font partie d'un ensemble de résultats appelés* ***limites de référence*** *à partir desquels nous effectuerons d'autres calculs de limites de fonctions.*	REPONSES ATTENDUES $\lim_{x\to a} c = c$; $\lim_{x\to+\infty} c = c$; $\lim_{x\to-\infty} c = c$ $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} x^{2n} = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty} x^{2n+1} = -\infty$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$; $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$; $\lim_{x\to0} \frac{1}{x^n} = +\infty$	**I- LIMITE** **1. Limites de référence** **Propriété** • a et c étant des nombres réels, $\lim_{x\to a} c = \lim_{x\to+\infty} c = \lim_{x\to-\infty} c = c$; • a étant un nombre réel et n un nombre entier naturel non nul, $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$; $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ $\lim_{x\to0} x^n = 0$; $\lim_{x\to a}(x-a)^n = 0$ **Pour *n* pair** $\lim_{x\to0} \frac{1}{x^n} = +\infty$; $\lim_{x\to a} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$ **Pour n impair** $\lim_{\substack{x\to0 \\ <}} \frac{1}{x^n} = -\infty$; $\lim_{\substack{x\to0 \\ >}} \frac{1}{x^n} = +\infty$ $\lim_{\substack{x\to a \\ <}} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty$; $\lim_{\substack{x\to a \\ >}} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *20 minutes*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Calcule les limites suivantes : $a.\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ <}} \dfrac{1}{x-5}$; $b.\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ >}} \dfrac{1}{x-5}$ $c.\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{\sin x}$; $d.\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ $e.\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ <}} \dfrac{1}{(x+2)^5}$; $f.\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}} \dfrac{1}{(x-3)^2}$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> $a.\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ <}} \dfrac{1}{x-5} = -\infty$ $b.\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ >}} \dfrac{1}{x-5} = +\infty$ $c.\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{\sin x} = 3\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\frac{\sin x}{x}}\right)$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{\sin x} = 3\times 1 = 3$ $d.\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = 1$ $e.\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ <}} \dfrac{1}{(x+2)^5} = -\infty$	On a : $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to \infty}\sqrt{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = 1$ La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite de son monôme de plus haut degré. La limite d'une fraction rationnelle en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite du quotient du monôme de plus haut degré du numérateur par celui du dénominateur.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE MAISON</u> Calcule les limites suivantes : $a.\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \dfrac{1-x}{2-x}$; $b.\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin 3x}{6x}$ $c.\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos x}{\sin x}$; $d.\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{2x^2}$ $e.\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} \dfrac{1}{(x+1)^7}$; $f.\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}} \dfrac{1}{(x-3)^2}$ $g.\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\pi}{4}$; $h.\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-1}{x\sqrt{x}}$	$f.\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}} \dfrac{1}{(x-3)^2} = +\infty$	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON1 : LIMITES ET CONTINUITE

SEANCE : 2/12

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Déterminer	- la limite d'une fonction en utilisant les limites de référence

PLAN DE LA SEANCE

2. Limite d'une restriction
   Propriété
3. Lien entre limite à gauche, limite à droite et limite d'une fonction en un point
   Propriété

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
10 min *Développement* *10 min*	 -Travail en groupes	Correction de l'exercice de maison ACTIVITE Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{16-x^2}{4-x}$ 1. Détermine la fonction g dont f est la restriction à l'intervalle à $\mathbb{R} \setminus \{4\}$. 2. En déduis la limite de f en 4.	 REPONSES ATTENDUES 1. $f(x) = \frac{16-x^2}{4-x}$ $\forall x \neq 3, f(x) = 4 + x$ On en déduis que $g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ $x \mapsto 4 + x$ 2. $\lim\limits_{x \to 4} 4 + x = 8$ On déduis que $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 8$	 2. Limite d'une restriction Propriété Soit g une fonction numérique, f la restriction de g à une partie H de son ensemble de définition et $\boldsymbol{\alpha}$ un nombre réel. On suppose qu'il existe un intervalle I contenant $\boldsymbol{\alpha}$ tel que I$\setminus \{\boldsymbol{\alpha}\}$ soit inclus dans H. Si g possède une limite $\boldsymbol{l}$ au point a, alors $\boldsymbol{l}$ est la limite de f au point $\boldsymbol{\alpha}$.
Evaluation *15 min*	-Travail individuel	EXERCICE DE FIXATION1 Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1-x^2}{x-1}$ Détermine la limite de f en 1.	REPONSES ATTENDUES $f(x) = \frac{1-x^2}{x-1}$ $\forall x \neq 1, f(x) = -x - 1$ f est la restriction à $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ de la fonction : $g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ $x \mapsto -x - 1$ $\lim\limits_{x \to 1} -x - 1 = -2$ On déduis que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -2$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *10 min*	-Travail individuel	EXERCICE DE FIXATION2 1. Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty;-1[, f(x) = x^2+3 \\ \forall x \in [-1;+\infty[; f(x) = x^3 \end{cases}$ f admet-t-elle une limite en -1 ? 2. Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty;-2[, f(x) = x^2+3 \\ \forall x \in [-2;+\infty[; f(x) = -2x+3 \end{cases}$ g admet-t-elle une limite en -2 ?	REPONSES ATTENDUES 1. $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ <}} f(x) = 4$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ >}} f(x) = -1$ $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ <}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ >}} f(x)$ Donc f n'admet pas de limite en -1. 2. $\lim\limits_{\substack{x\to-2 \\ <}} f(x) = 7$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ >}} f(x) = 7$	3. Lien entre limite à gauche, limite à droite et limite d'une fonction en un point Propriété Une fonction $\boldsymbol{f}$ définie en un point $\boldsymbol{\alpha}$ admet une limite en $\boldsymbol{\alpha}$ si et seulement si elle admet en $\boldsymbol{\alpha}$ une limite à gauche et une limite à droite égale à $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha})$. Une fonction $\boldsymbol{f}$ non définie en un point $\boldsymbol{\alpha}$ admet une limite $\boldsymbol{l}$ en $\boldsymbol{\alpha}$ si et seulement si elle admet en $\boldsymbol{\alpha}$ une limite à gauche et une limite à droite égale à $\boldsymbol{l}$.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
	-Travail individuel	<u>EXRCICE DE MAISON</u>	$\lim_{\substack{x\to -2\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -2\\ >}} f(x) = f(-2)$ Donc g admet une limite en -2.	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON1 : LIMITES ET CONTINUITE

SEANCE : 3/12

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Déterminer	- la limite d'une fonction • en utilisant les limites de référence

PLAN DE LA SEANCE

4. Limites et opérations sur les fonctions

   a. Limite de la somme de deux fonctions
      Propriété
   b. Limite du produit de deux fonctions
      Propriété
   c. Limite du quotient de deux fonctions
      Propriété

<table>
<tr><th>MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES</th><th>STRATEGIES PEDAGOGIQUES</th><th>ACTIVITES DU PROFESSEUR</th><th>ACTIVITES DES APPRENANTS</th><th>TRACE ECRITE</th></tr>
<tr>
<td>10 min

Développement
25 min</td>
<td>-Travail collectif

-Travail individuel</td>
<td>Correction des exercices de maison
<u>ACTIVITE</u>
Soit f et g des fonctions ; l et l' des nombres réels ; α un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$.
Complète les tableaux ci-dessous :
(Annexe)</td>
<td><u>REPONSES ATTENDUES</u>
Voir annexe</td>
<td>4. <u>Limites et opérations sur les fonctions</u>
a. <u>Limite de la somme de deux fonctions</u>
<u>Propriété</u>
Soit f et g deux fonctions ; l et l' des nombres réels ; α un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$.
<table>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$</td><td>$l$</td><td>$l$</td><td>$l$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$</td><td>$l'$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to\alpha}[f(x)+g(x)]$</td><td>$l+l'$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>FI</td></tr>
</table>
b. <u>Limite du produit de deux fonctions</u>
<u>Propriété</u>
Soit f et g deux fonctions ; l et l' des nombres réels ; α un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$.
<table>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$</td><td>$l$</td><td>$l>0$</td><td>$l<0$</td><td>$l>0$</td><td>$l<0$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$</td><td>$l'$</td><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$ ou $-\infty$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to\alpha}[f(x)\times g(x)]$</td><td>$l\times l'$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>FI</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE

c. <u>Limite du quotient de deux fonctions</u>

<u>Propriété</u>

Soit f et g deux fonctions ; l et l' des nombres réels ; α un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	l	l	$l>0$ ou $+\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	$l>0$ ou $+\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$l'\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 avec $g(x)>0$	0 avec $g(x)>0$	0 avec $g(x)<0$	0 avec $g(x)<0$	0	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *15 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Calcule les limites suivantes : 1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+2\sqrt{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x+2\sqrt{x}\right)$ $\lim\limits_{x\to-\infty}(-4x^3+9)$ 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2+3x-7)\left(\frac{x^3+x^2-1}{x^3-4}\right)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2+3x-7)\left(\frac{x^2-1}{x^3-4}\right)$ <u>EXERCICES DE MAISON</u>	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+2\sqrt{x}\right)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}2\sqrt{x}=+\infty$ Calculons : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x+2\sqrt{x}\right)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}-x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}2\sqrt{x}=+\infty$ Donc on ne peut pas conclure. $\lim\limits_{x\to-\infty}(-4x^3+9)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}-4x^3=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}9=9$ 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2+3x-7)\left(\frac{x^3+x^2-1}{x^3-4}\right)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2+3x-7)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+x^2-1}{x^3-4}\right)=1$ Calculons : $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2+3x-7)\left(\frac{x^2-1}{x^3-4}\right)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2+3x-7)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^3-4}\right)=0$ Donc on ne peut pas conclure.	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON1 : LIMITES ET CONTINUITE

SEANCE : 4/12

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la propriété relative à la limite d'une fonction composée
Déterminer	- la limite d'une fonction • en utilisant les limites de référence • en utilisant les propriétés de comparaison (minorant, majorant et encadrement) - la limite d'une fonction composée

PLAN DE LA SEANCE

5. Limite d'une fonction composée
   Propriété
   Conséquences
6. Limites et inégalités
   a. Passage à la limite dans une inégalité
      Propriété
   b. Limite par comparaison
      Propriétés

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
10 min *Développement* *20 min*	-Travail en groupe -Travail individuel	Correction des exercices de maison <u>ACTIVITE</u> On donne les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = x - 1$ $g(x) = \dfrac{2x}{x^2+3}$ 1. Détermine $gof(x)$ puis $\lim\limits_{x\to 5} gof(x)$. 2. a. Détermine $k \in \mathbb{R} \setminus \lim\limits_{x\to 5} f(x) = k$ b. Détermine $p \in \mathbb{R} \setminus \lim\limits_{x\to k} g(x) = p$ 3. Compare $\lim\limits_{x\to 5} gof(x)$ et $\lim\limits_{x\to k} g(x)$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. $gof(x) = g[f(x)]$ $gof(x) = g(x-1)$ $g(x) = \dfrac{2(x-1)}{(x-1)^2+3}$ $\lim\limits_{x\to 5} gof(x) = \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2(x-1)}{(x-1)^2+3}$ $\lim\limits_{x\to 5} gof(x) = \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2(5-1)}{(5-1)^2+3}$ $\lim\limits_{x\to 5} gof(x) = \dfrac{8}{19}$ 2. a. $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 4$ donc $k = 4$ b. $\lim\limits_{x\to 4} g(x) = \dfrac{8}{19} = p$ 3. $\lim\limits_{x\to 4} g(x) = \lim\limits_{x\to 5} gof(x)$	**5. <u>Limite d'une fonction composée</u>** **<u>Propriété</u>** f et g sont des fonctions, a, l et l' des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to l} f(x) = l'$ alors $\lim\limits_{x\to a} fog(x) = l'$. **<u>Conséquences</u>** Soit f une fonction numérique, a un élément de $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$, l est un nombre réel positif ou nul et l' un nombre réel. • Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ alors $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$ • Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{f(x)} = +\infty$ • Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l'$ alors $\lim\limits_{x\to a} \lvert f(x)\rvert = \lvert l'\rvert$ • Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} \lvert f(x)\rvert = +\infty$ • Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} \lvert f(x)\rvert = +\infty$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *10 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION1</u> Calcule les limites suivantes : $\lim\limits_{x\mapsto 1} \sin\dfrac{\pi x^5}{x^2+1}$ $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} \sqrt{x^2-5x-2}$ $\lim\limits_{x\mapsto -3} \lvert 8x-11\rvert$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> Calculons : $\lim\limits_{x\mapsto 1} \sin\dfrac{\pi x^5}{x^2+1}$ $\sin\frac{\pi x^5}{x^2+1}$ est la composée de la fonction $\frac{\pi x^5}{x^2+1}$ suivie de la fonction sinus. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\pi x^5}{x^2+1} = \dfrac{\pi}{2} \\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1 \end{cases}$ Donc $\lim\limits_{x\mapsto 1} \sin\dfrac{\pi x^5}{x^2+1} = 1$ Calculons : $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} \sqrt{x^2-5x-2}$ $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} (x^2-5x-2) = +\infty$ Donc $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} \sqrt{x^2-5x-2} = +\infty$ Calculons : $\lim\limits_{x\mapsto -3} \lvert 8x-11\rvert$ $\lim\limits_{x\mapsto -3} 8x-11 = -13$ Donc $\lim\limits_{x\mapsto -3} \lvert 8x-11\rvert = \lvert -13\rvert$ $\lim\limits_{x\mapsto -3} \lvert 8x-11\rvert = 13$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
				6. Limites et inégalités **a. Passage à la limite dans une inégalité** **Propriété** a est un élément de $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$, f et g deux fonctions admettant des limites en a. Si $f \geq g$ alors $\lim\limits_{x \mapsto a} f(x) \geq \lim\limits_{x \mapsto a} g(x)$ b. **Limite par comparaison** **Propriétés** a et l sont des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$, f et g sont des fonctions. ❖ Si $f \geq g$ et $\lim\limits_{x \mapsto a} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \mapsto a} f(x) = +\infty$ ❖ Si $f \leq g$ et $\lim\limits_{x \mapsto a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \mapsto a} f(x) = -\infty$ ❖ Si g$\leq f \leq h$ et $\lim\limits_{x \mapsto a} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto a} h(x) = l$ alors $\lim\limits_{x \mapsto a} f(x) = l$ ❖ S'il existe un nombre réel l, une fonction g et un intervalle $]A; +\infty[$ tels que : $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} g(x) = 0$ et $\forall x \in]A; +\infty[$, $\lvert f(x) - l \rvert = 0$ alors $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = l$ (Des propriétés analogues existent lorsque x tend vers $-\infty$ ou lorsque x tend vers $x_0 (x_0 \in \mathbb{R})$.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *10 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION2</u> Calcule $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}$ $\lim_{x\to\infty} (x^2 - x\cos x)$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> Calculons : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}$ $-1 \leq \sin x \leq 1$ $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$ $\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ Calculons : $\lim_{x\to\infty} (x^2 - x\cos x)$ $-1 \leq \cos x \leq 1$ $-x \leq x\cos x \leq x$ $x \leq -x\cos x \leq -x$ $x^2 + x \leq x^2 - x\cos x \leq x^2 - x$ $\lim_{x\to+\infty} (x^2 + x) = \lim_{x\to+\infty} (x^2 - x) = +\infty$ donc $\lim_{x\to\infty} (x^2 - x\cos x) = +\infty$	
	-Travail individuel	EXERCICE DE MA<u>ISON</u>		

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		Calcule la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction f définie par : $f(x) = x + \sin x$. Calcule la limite en $+\infty$ de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x^3}{(1+x^3)\sqrt{1+x^4}}$		

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON1 : LIMITES ET CONTINUITE

SEANCE : 5/12

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la propriété relative à la limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert

PLAN DE LA SEANCE

7. Limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert
   a. Propriété1
   b. Propriété2
   c. Propriété3
   d. Propriété4

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
10 min *Développement* *25 min*	-Travail en groupe -Travail individuel	Correction des exercices de maison ACTIVITE 1. Soit f une fonction croissante sur un intervalle ouvert $]a;b[$. Mets une croix dans la case correspondante.	REPONSES ATTENDUES	

		oui	non
Si f est majorée sur $]a;b[$ alors	f admet une limite finie à gauche de b		
	f admet une limite infinie à gauche de b		
Si f est minorée sur $]a;b[$ alors	f admet une limite finie à droite de a		
	f admet une limite infinie à droite de a		
Si f est non majorée sur $]a;b[$ alors	f a pour limite $+\infty$ à gauche de b		
	f a pour limite $-\infty$ à gauche de b		
Si f est non minorée sur $]a;b[$ alors	f a pour limite $-\infty$ à droite de a		
	f a pour limite $+\infty$ à droite de a		

2. Soit f une fonction décroissante sur un intervalle ouvert $]a;b[$
Mets une croix dans la case correspondante.

		oui	non
Si f est majorée sur $]a;b[$ alors	f admet une limite finie à droite de a		
	f admet une limite infinie à droite de a		
Si f est minorée sur $]a;b[$ alors	f admet une limite finie à gauche de b		
	f admet une limite infinie à gauche de b		
Si f est non majorée sur $]a;b[$ alors	f a pour limite $+\infty$ à droite de a		
	f a pour limite $-\infty$ à droite de a		
Si f est non minorée sur $]a;b[$ alors	f a pour limite $-\infty$ à gauche de b		
	f a pour limite $+\infty$ à gauche de b		

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE

1. Soit f une fonction croissante sur un intervalle ouvert $]a;b[$.

		oui	non
Si f est majorée sur $]a;b[$ alors	f admet une limite finie à gauche de b	✖	
	f admet une limite infinie à gauche de b		✖
Si f est minorée sur $]a;b[$ alors	f admet une limite finie à droite de a	✖	
	f admet une limite infinie à droite de a		✖
Si f est non majorée sur $]a;b[$ alors	f a pour limite $+\infty$ à gauche de b	✖	
	f a pour limite $-\infty$ à gauche de b		✖
Si f est non minorée sur $]a;b[$ alors	f a pour limite $-\infty$ à droite de a	✖	
	f a pour limite $+\infty$ à droite de a		✖

2. Soit f une fonction décroissante sur un intervalle ouvert $]a;b[$

		oui	non
Si f est majorée sur $]a;b[$ alors	f admet une limite finie à droite de a	✖	
	f admet une limite infinie à droite de a		✖
Si f est minorée sur $]a;b[$ alors	f admet une limite finie à gauche de b	✖	
	f admet une limite infinie à gauche de b		✖
Si f est non majorée sur $]a;b[$ alors	f a pour limite $+\infty$ à droite de a	✖	
	f a pour limite $-\infty$ à droite de a		✖
Si f est non minorée sur $]a;b[$ alors	f a pour limite $-\infty$ à gauche de b	✖	
	f a pour limite $+\infty$ à gauche de b		✖

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
				7. Limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert **a. Propriété1** Soit f une fonction croissante sur un intervalle ouvert $]a;b[$. - Si f est majorée sur $]a;b[$, alors f admet une limite finie à gauche de b. - Si f est minorée sur $]a;b[$, alors f admet une limite finie à droite de a. **b. Propriété2** Soit f une fonction décroissante sur un intervalle ouvert $]a;b[$. - Si f est majorée sur $]a;b[$, alors f admet une limite finie à droite de a. - Si f est minorée sur $]a;b[$, alors f admet une limite finie à gauche de b. **c. Propriété3** Soit f une fonction croissante sur un intervalle ouvert $]a;b[$. - Si f est non majorée sur $]a;b[$, alors f admet pour limite $+\infty$ à gauche de b. - Si f est non minorée sur $]a;b[$, alors f admet pour limite $-\infty$ finie à droite de a. **d. Propriété4** Soit f une fonction décroissante sur un intervalle ouvert $]a;b[$. - Si f est non majorée sur $]a;b[$, alors f admet pour limite $+\infty$ à droite de a. - Si f est non minorée sur $]a;b[$, alors f admet pour limite $-\infty$ finie à gauche de b

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *15 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> La fonction tan est non majorée sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. Détermine la limite de la fonction tan à gauche de $\frac{\pi}{2}$.	<u>REPONSES ATTENDUES</u> La fonction tan est non majorée sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ donc la limite de la fonction tan à gauche de $\frac{\pi}{2}$ est $+\infty$.	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON1 : LIMITES ET CONTINUITE

SEANCE : 6/12

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Déterminer	- la limite d'une fonction • en utilisant les limites de référence • en utilisant une expression conjuguée • en utilisant la définition d'un nombre dérivé

PLAN DE LA SEANCE

8. Calcul de limites et formes indéterminées
   a. Utilisation d'une factorisation
   b. Utilisation de l'expression conjuguée
   c. Utilisation de l'expression conjuguée et d'une factorisation
   d. Utilisation de la définition d'un nombre dérivé
   e. Le changement d'écriture

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Développement *25 min*	-Travail collectif	<u>ACTIVITE</u> Calcule les limites suivantes : 1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-x^2)$ 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right)$ 3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+7}+x\right)$ 4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ 5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x^3}$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **1**. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-x^2)=\lim\limits_{x\to+\infty}x(1-x)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-x^2)=-\infty$ **2**. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right)$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)=+\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right)=0$ 3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+7}+x\right)$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2-5x+7}+x\right)\left(\sqrt{x^2-5x+7}-x\right)}{\sqrt{x^2-5x+7}-x}$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+7}+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(-5x+7)}{\sqrt{x^2-5x+7}-x}$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+7}+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(-5+\frac{7}{x}\right)}{\lvert x\rvert\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}}-x}$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+7}+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(-5+\frac{7}{x}\right)}{-x\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}}-x}$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+7}+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(-5+\frac{7}{x}\right)}{-x(\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}}+1)}$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+7}+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5-\frac{7}{x}}{\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}}+1}$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+7}+x\right)=\dfrac{5}{2}$ **4**. Calculons : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ La fonction racine carrée est dérivable en 1 et on a : $f'(0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$ $f'(0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sqrt{h+1}-1}{h}$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{h+1}-1)(\sqrt{h+1}+1)}{h(\sqrt{h+1}+1)}$$ $$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{h+1}+1)}$$ $$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{(\sqrt{h+1}+1)}=\frac{1}{2}$$ donc $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\frac{1}{2}$$ **5**. Calculons : $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3}$$ $$\frac{\sin x}{x^3}=\frac{1}{x^2}\times\frac{\sin x}{x}$$ $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$$ $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$ donc $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3}=+\infty$$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *20 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Calcule les limites suivantes : 1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+7}{\sqrt{x^3-3x-4}}$ 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)$ 3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+6}+x\right)$ 4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{(\sin x)^2-1}{x-\frac{\pi}{2}}$ 5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{x}$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+7}{\sqrt{x^3-3x-4}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(2+\frac{7}{x}\right)}{x\sqrt{x-\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^3}}}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+7}{\sqrt{x^3-3x-4}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(2+\frac{7}{x}\right)}{\sqrt{x-\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^3}}}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\dfrac{7}{x}\right)=2$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{4}{x^3}}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+7}{\sqrt{x^3-3x-4}}=0$ 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)}{\sqrt{x^2+4}+x}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}=0$ 3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+6}+x\right)$ $=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+x+6}+x\right)\left(\sqrt{x^2+x+6}-x\right)}{\sqrt{x^2+x+6}-x}$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+6}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+6}{\sqrt{x^2+x+6}-x}$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+6}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(1+\frac{6}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{6}{x}}-x}$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+6}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1-\frac{6}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{6}{x}}+1}=-\dfrac{1}{2}$ 4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{(\sin x)^2-1}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{(\sin x-1)(\sin x+1)}{x-\frac{\pi}{2}}$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{(\sin x)^2-1}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{(\sin x-1)}{x-\frac{\pi}{2}}\times\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x+1)$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{(\sin x-1)}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x-\sin\frac{\pi}{2}}{x-\frac{\pi}{2}}=sin'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\dfrac{\pi}{2}=0$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x+1)=2$ donc $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{(\sin x)^2-1}{x-\frac{\pi}{2}}=0$ 5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\times\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=+\infty$	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON1 : LIMITES ET CONTINUITE

SEANCE :7/12

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Déterminer	- un prolongement par continuité d'une fonction en un point

PLAN DE LA SEANCE

II. CONTINUITE
1. Continuité en un point
   a. Définition
   b. Propriété
2. Prolongement par continuité
   Propriété et définition
3. Continuité sur un intervalle
   Définition

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Développement *25 min*	-Travail individuel	ACTIVITE Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ 1. Détermine D_f. 2. Calcule puis compare $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $f(0)$. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ *: on dit que la fonction* f *est continue en* 0. *La fonction h définie par:* $h(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in \mathbb{R}\setminus\{2\} \\ 4 \text{ si } x = 2 \end{cases}$ *est continue en* 2 *et est le prolongement par continuité de* f *en* 2.	REPONSES ATTENDUES 1. $D_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$ 2. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-4}{x-2}$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$ $f(0) = 2$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$	**II. CONTINUITE** **1. Continuité en un point** **a. Définition** f est une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a. f est continue en a si et seulement si elle admet en a une limite égale à $f(a)$. **b. Propriété** Toute fonction qui est somme, produit ou quotient de fonctions de références est continue en tout élément de son ensemble de définition. **2. Prolongement par continuité** **Propriété et définition** Soit f une fonction et a un nombre réel n'appartenant pas à l'ensemble de définition D_f de f. On suppose que f admet une limite finie l en a. La fonction g définie par : $g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in D_f\setminus\{a\} \\ l \text{ si } x = a \end{cases}$ est continue en a. Elle est appelée le prolongement par continuité de f en a.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *15 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> 1. Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$ Détermine h, le prolongement par continuité de la fonction f en 0. 2. Soit la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \frac{1 - x^2}{x - 1}$ Détermine p, le prolongement par continuité de la fonction g en 1. <u>EXERCICES DE MAISON</u>	<u>REPONSE ATTENDUES</u> 1. $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 1$ $h(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - 1}{x} \ si \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1 \ si \ x = 0 \end{cases}$ 2. $g(x) = \frac{1 - x^2}{x - 1}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $g(x) = -1 - x \ \ \forall x \neq 1$ $\lim_{x \to 1} g(x) = -2$ $p(x) = \begin{cases} -1 - x \ si \ x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ -2 \ \ si \ x = 1 \end{cases}$	**3. <u>Continuité sur un intervalle</u>** **<u>Définition</u>** On dit qu'une fonction est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point de I.

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON1 : LIMITES ET CONTINUITE

SEANCE : 8/12

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

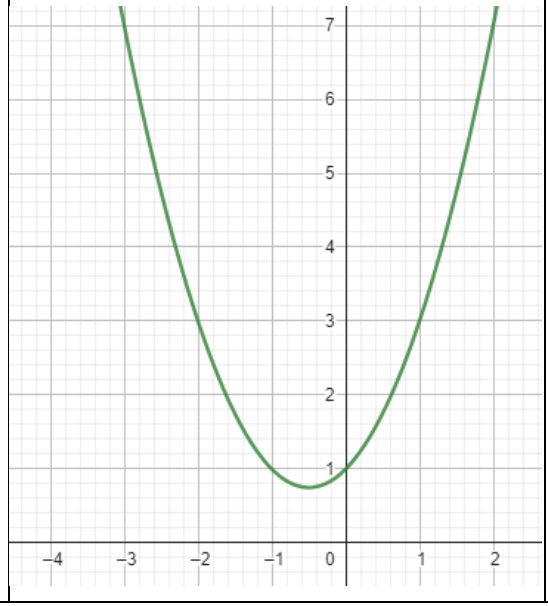
MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- les propriétés relatives aux opérations sur les fonctions continues sur un intervalle - la propriété relative à la composée de deux fonctions continues sur un intervalle - les propriétés relatives à l'image d'un intervalle par une fonction continue : • en utilisant son tableau de variation • en utilisant une méthode algébrique
Déterminer	- l'image d'un intervalle par une fonction continue • en utilisant son tableau de variation • en utilisant une méthode algébrique

PLAN DE LA SEANCE

4. Opérations sur les fonctions continues
   Propriété
5. Image d'un intervalle par une fonction continue
   a. Propriété1
   b. Propriété2
6. Continuité d'une fonction composée
   Propriété

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
10 min *Développement* *15 min*	-Travail collectif -Travail individuel	Correction des exercices de maison <u>ACTIVITE1</u> Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et x et μ deux réels de I. 1. Justifie que la fonction $f+g$ est continue sur I. 2. Justifie que la fonction μf est continue sur I. 3. Justifie que la fonction $\lvert f \rvert$ est continue sur I. 4. Justifie que si g ne s'annule pas sur I, la fonction $\frac{f}{g}$ est continue sur I. 5. Justifie que si f est positive sur I, la fonction $\sqrt{f}$ est continue sur I.	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **1**. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ Or f et g sont continues sur I. Donc $f+g$ est continue sur I. **2**. $\mu f(x) = f(\mu x)$ Or f est une fonction continue sur I. Donc μf est continue sur I. 3. $\lvert f \rvert(x) = \lvert f(x) \rvert$ Or f est une fonction continue sur I. Donc $\lvert f \rvert$ est continue sur I car la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$. **4**. $$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$ Or f et g deux fonctions continues sur I. Donc $\frac{f}{g}$ est continue sur I. **5**. $\sqrt{f}(x) = \sqrt{f(x)}$ Or f est une fonction continue sur I. Donc $\sqrt{f}$ est continue sur I car la fonction racine carrée est continue sur $[0; +\infty[$.	4. **<u>Opérations sur les fonctions continues</u>** **<u>Propriété</u>** Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. • Les fonctions $f+g$; $f \times g$; αf $(\alpha \in \mathbb{R})$ et $\lvert f \rvert$ sont continues sur I. • Si g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I. • Si f est positive sur I, alors $\sqrt{f}$ est continue sur I.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *10 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION1</u> On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{5-x}}{x-1}$ Etudie la continuité de la fonction f sur son ensemble de définition.	<u>REPONSES ATTENDUES</u> $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 5 - x \geq 0 \; et \; x \neq 1\}$ $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 5 \; et \; x \neq 1\}$ $D_f =]-\infty; 1[\cup]1; 5]$ f est le quotient de la fonction continue $\sqrt{5-x}$ par la fonction continue $x - 1$. Donc pour $x - 1 \neq 0$, f est continue sur D_f. Par conséquent, f est continue sur $]-\infty; 1[\cup]1; 5]$.	
Développement *15 min*	-Travail individuel	<u>ACTIVITE2</u> Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^3-1}{x-1} \; si \; x \neq 1 \\ f(1) = 3 \end{cases}$ 1. Représente graphiquement cette fonction dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J). 2. Justifie que f est continue sur son ensemble de définition. 3. Pour chaque intervalle I ci-dessous, dis si f est continue sur I et trouve graphiquement l'image $f(I)$ de l'intervalle I par la fonction f.	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1.  	**5. <u>Image d'un intervalle par une fonction continue</u>** **a. <u>Propriété1</u>** Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ d'ensemble de définition D_f, I un intervalle inclus dans D_f, $f(I)$ l'image par f de l'intervalle I. Si f est continue sur I alors $f(I)$ est un intervalle. **b. <u>Propriété2</u>** a, b, l et L sont des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ tel que $a < b$. f est une fonction telle que :

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		a. $I = [-2; -1]$ b. $I = [0; 1[$ c. $I =]1; 2]$ d. $I =]-3; -1[$	2. f est une fonction rationnelle donc elle est continue en chaque élément de son ensemble de définition. 3. Chacun des intervalle I est inclus dans l'ensemble de définition de la fonction f donc f est continue sur chacun des intervalle I. a. $I = [-2; -1]$; $f(I) = [3; 1]$ b. $I = [0; 1[$; $f(I) = [1; 3[$ c. $I =]1; 2]$; $f(I) =]3; 7]$ d. $I =]-3; -1[$; $f(I) =]7; 1[$	$\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = l$ *et* $\lim_{\substack{x \to b \\ <}} f(x) = L$. • Si f est continue et strictement croissante sur $[a; b]$, alors $f([a; b]) = [f(a); f(b)]$ • Si f est continue et strictement croissante sur $]a; b[$, alors $f(]a; b[) =]l; L[$ • Si f est continue et strictement décroissante sur $[a; b]$, alors $f([a; b]) = [f(b); f(a)]$ • Si f est continue et strictement décroissante sur $]a; b[$, alors $f(]a; b[) =]L; l[$
Evaluation *5 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION2</u> Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 4x + 1$. Détermine l'image par f de chacun des intervalles suivants : $[0; 4]$; $[2; +\infty[$; $]-\infty; 1[$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> $f([0; 4]) = [-3; 1]$ $f([2; +\infty[) = [-3; +\infty[$ $f(]-\infty; 1[) =]-4; +\infty[$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *15 min*	-Travail individuel	EXERCICE DE FIXATION3 Justifie que la fonction $h: x \mapsto \sqrt{\frac{x^2+2}{x^2+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}$. EXERCICES DE MAISON	REPONSE ATTENDUE Posons $h = gof$ avec $g: x \mapsto \sqrt{x}$ et $f: x \mapsto \frac{x^2+2}{x^2+1}$ La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et $f(\mathbb{R}) =]1; 2[$. La fonction g est continue sur $[0; +\infty[$ et $]1; 2[\subset [0; +\infty[$, donc la fonction h est continue sur $\mathbb{R}$.	**6. <u>Continuité d'une fonction composée Propriété</u>** Soit I un intervalle ; f et g deux fonctions. Si f est continue sur I et g est continue sur $f(I)$ alors gof est continue sur I.

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON1 : LIMITES ET CONTINUITE

SEANCE : 9/12

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- le théorème des valeurs intermédiaires - les propriétés relatives aux fonctions continues et strictement monotones sur un intervalle
Déterminer	- le nombre de solutions d'une équation du type $f(x) = k$ - la formule explicite d'une bijection réciproque quand cela est possible
Démontrer	- qu'une fonction f est une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J dans le cas où f est continue et strictement monotone sur I. - l'existence d'une unique solution de l'équation $f(x) = m$ (m réel) sur un intervalle I, f étant continue et strictement monotone sur I - l'existence d'une unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur un intervalle ouvert $]a; b[$, f étéant continue et strictement monotone sur $[a; b]$

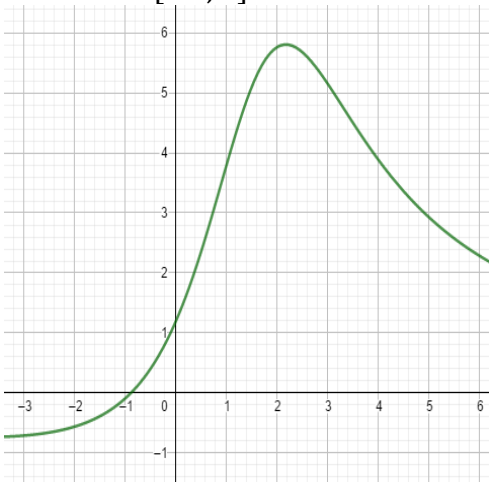
PLAN DE LA SEANCE

7. Théorème des valeurs intermédiaires
   a. Théorème
   b. Conséquences
8. Fonction continue et strictement monotone
   a. Propriété1
   b. Propriété2

<table>
<tr><th>MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES</th><th>STRATEGIES PEDAGOGIQUES</th><th>ACTIVITES DU PROFESSEUR</th><th>ACTIVITES DES APPRENANTS</th><th>TRACE ECRITE</th></tr>
<tr>
<td>10 min

Développement
20 min</td>
<td>-Travail collectif

-Travail individuel</td>
<td>Correction des exercices de maison

<u>ACTIVITE</u>
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{8x+7}{x^2-3x+6}$$
La courbe ci-dessous est la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère (O, I, J) sur l'intervalle $[-3;6]$.
 
Détermine graphiquement le nombre d'antécédant de chacun des éléments suivants par la fonction f :
a. 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 et 5 sur l'intervalle $[-3;6]$.
b. 0 ; 1 ; 2 ; 3 et 4 $s$ur l'intervalle $[-2;1]$.</td>
<td><u>REPONSES ATTENDUES</u>
a. Sur l'intervalle $[-3;6]$.
<table><tr><td>Elts</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>Nbre d'ant.</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr></table>
b. Sur l'intervalle $[-2;1]$.
<table><tr><td>Elts</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>Nbre d'ant.</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>
c. Sur l'intervalle $[-3;6]$.
<table><tr><td>Elts</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>Nbre d'ant.</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td>
<td><u>7. Théorème des valeurs intermédiaires</u>
a. Théorème
Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I.
Tout nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ a au moins un antécédent par f compris entre a et b.
<u>b. Conséquences</u>
Soit $f: I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux éléments de I tel que $a < b$.
Si $f(a) \times f(b) < 0$, c'est-à-dire si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors il existe $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = 0$.

<u>8. Fonction continue et strictement monotone</u>
<u>a. Propriété1</u></td>
</tr>
</table>

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *20 min*	- Travail individuel	$c.$ 3 ; 4 et 5 *s*ur l'intervalle $[3; 6]$. EXERCICE DE FIXATION Soit la fonction $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ $x \mapsto x^2 + 3x - 2$ 1. Montre que f est continue sur $\mathbb{R}$. 2. Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution $x_0 \in [0; 1]$. 3. Montre que f définie une bijection sur $\left]-\frac{3}{2}; +\infty\right[$.	REPONSES ATTENDUES 1. f est un polynôme donc elle est continue sur $\mathbb{R}$. 2. f est continue sur $\mathbb{R}$. $[0; 1] \subset \mathbb{R}$ donc f est continue sur $[0; 1]$. $f(0) = -2$ et $f(1) = 2$ $f(0) \times f(1) < 0$ donc il existe un nombre réel $x_0 \in [0; 1]$ tel que $f(x) = 0$. 3. $f'(x) = 2x + 3$	Toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I détermine une bijection de I sur $f(I)$. **b. <u>Propriété2</u>** Soit f une bijection d'un intervalle I sur l'intervalle $f(I)$. Si f est continue et strictement monotone sur I, alors sa bijection réciproque f^{-1} est également continue et strictement monotone sur $f(I)$; de plus f et f^{-1} ont le même sens de variation.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		4. Soit f^{-1} sa bijection réciproque. Détermine le sens de variation de f^{-1}. EXERCICES DE MAISON	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $-\frac{3}{2}$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$2x+3$</td><td>$-$ 0 $+$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>$-$ 0 $+$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$+\infty$ ↘ $-\frac{17}{4}$ ↗ $+\infty$</td></tr></table> $\forall x \in \left]-\infty;-\frac{3}{2}\right[, f'(x) < 0$ $\forall x \in \left]-\frac{3}{2};+\infty\right[, f'(x) > 0$ donc f est décroissante sur $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right[$ et croissante sur $\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$. f est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$ donc f définit une bijection de $\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$ sur $\left]-\frac{17}{4};+\infty\right[$ 4. f est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$. On en déduit que : f^{-1} est croissante sur $\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$.	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON1 : LIMITES ET CONTINUITE

SEANCE : 10/12

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- les méthodes de dichotomie et de balayage
Déterminer	- une valeur approchée d'une solution d'une équation

PLAN DE LA SEANCE

9. Encadrer une solution α de l'équation $f(x) = 0$
   a. Méthode de balayage
   b. Méthode de dichotomie

<table>
<tr><th>MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES</th><th>STRATEGIES PEDAGOGIQUES</th><th>ACTIVITES DU PROFESSEUR</th><th>ACTIVITES DES APPRENANTS</th><th>TRACE ECRITE</th></tr>
<tr>
<td>10 min

Développement
35 min</td>
<td>-Travail en groupe
-Travail individuel</td>
<td>Correction des exercices de maison
<u>ACTIVITE</u>
Soit la fonction
$f: \left]-\frac{3}{2};+\infty\right[\mapsto \left]-\frac{17}{4};+\infty\right[$
$x \mapsto x^2+3x-2$
1. Justifie que f est une bijection.
2. Montre que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in [0;4]$.
3. Donne un encadrement de x_0 à 10^{-2} près :
a. En effectuant un balayage.
b. Par la méthode de dichotomie.</td>
<td><u>REPONSES ATTENDUES</u>
1. f est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$ et $f\left(\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[\right)=\left]-\frac{17}{4};+\infty\right[$ donc f réalise une bijection de $\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$ sur $\left]-\frac{17}{4};+\infty\right[$.
2. $[0;4] \subset \left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$ donc f est continue et strictement croissante sur $[0;4]$. $f(0)=-2$ et $f(4)=26$ donc $f(0)\times f(4)<0$. On en déduit que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in [0;4]$.
3. a.
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$-$</td><td>$+$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
$\alpha \in [0;1]$.
<table>
<tr><td>x</td><td>0,1</td><td>0,2</td><td>0,3</td><td>0,4</td><td>0,5</td><td>0,6</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$-$</td><td>$-$</td><td>$-$</td><td>$-$</td><td>$-$</td><td>$+$</td></tr>
</table>
$\alpha \in [0,5;0,6]$.
<table>
<tr><td>x</td><td>0,51</td><td>0,52</td><td>0,53</td><td>0,54</td><td>0,55</td><td>0,56</td><td>0,57</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$-$</td><td>$-$</td><td>$-$</td><td>$-$</td><td>$-$</td><td>$-$</td><td>$+$</td></tr>
</table>
$\alpha \in [0,56;0,57]$.</td>
<td>9. <u>Encadrer une solution α de l'équation $f(x)=0$</u>
La méthode de balayage et la méthode de dichotomie sont des méthodes pour trouver une valeur approchée d'une solution α de l'équation $f(x)=0$ où la fonction f est continue et monotone sur l'intervalle $[a;b]$.

a. <u>Méthode de balayage</u>
On commence par balayer l'intervalle $[a;b]$ avec un pas de 1. C'est-à-dire qu'on calcule $f(a)$, $f(a+1)$, $f(a+2)$,…On s'arrête dès qu'on a trouvé deux entiers consécutifs n et $n+1$ pour lesquels $f(n)$ et $f(n+1)$ sont de signes contraires. On sait alors que $\alpha \in [n;n+1]$. On balaye ensuite l'intervalle $[n;n+1]$ avec</td>
</tr>
</table>

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			b. $f(0) = -2 \ et \ f\left(\frac{0+4}{2}\right) = f(2) = 8$ donc $\boldsymbol{\alpha} \in [\mathbf{0}; \mathbf{2}]$ $f(0) = -2 \ et \ f\left(\frac{0+2}{2}\right) = f(1) = 2$ donc $\boldsymbol{\alpha} \in [\mathbf{0}; \mathbf{1}]$ $f(0) = -2 \ et \ f\left(\frac{0+1}{2}\right) = f(0{,}5) = -0{,}25$ donc $\alpha \in [\mathbf{0,5}; \mathbf{1}]$ $f(0{,}5) = -025 \ et \ f\left(\frac{0{,}5+1}{2}\right) = f(0{,}75) = 0{,}8125$ donc $\boldsymbol{\alpha} \in [\mathbf{0,5}; \mathbf{0,75}]$ $f(0{,}5) = -025 \ et \ f\left(\frac{0{,}5+0{,}75}{2}\right) = f(0{,}625) = 0{,}265$ donc $\boldsymbol{\alpha} \in [\mathbf{0,5}; \mathbf{0,625}]$ $f(0{,}5) = -025 \ et \ f\left(\frac{0{,}5+0{,}625}{2}\right) = f(0{,}5625) = 0{,}0039$ donc $\boldsymbol{\alpha} \in [\mathbf{0,5}; \mathbf{0,5625}]$ $f(0{,}5) = -025 \ et \ f\left(\frac{0{,}5+0{,}5625}{2}\right) = f(0{,}53125) = -0{,}124$ donc $\boldsymbol{\alpha} \in [\mathbf{0,53125}; \mathbf{0,5625}]$ $f(0{,}53125)$ $= -0{,}1240234375 \ et \ f\left(\frac{0{,}53125+0{,}5625}{2}\right)$ $= f(0{,}546875) = -0{,}060$	un pas de 0,1. On calcule $f(n)$, $f(n+0{,}1)$, $f(n+0{,}2)$,… et on s'arrête dès qu'on a trouvé deux nombres de signes contraires ; et ainsi de suite. **a. <u>Méthode de dichotomie</u>** On calcule $f(a)$ et $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Si $f(a)$ et $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ sont de signes contraires, alors $\alpha \in \left[a; \frac{a+b}{2}\right]$ Si $f(a)$ et $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ sont de même signe, alors $\alpha \in \left[\frac{a+b}{2}; b\right]$ On répète cette méthode dans l'intervalle contenant α.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			donc $\boldsymbol{\alpha} \in [\mathbf{0,546875}; \mathbf{0,5625}]$ $f(0{,}546875)$ $= -0{,}060 \ et \ f\left(\frac{0{,}546875 + 0{,}5625}{2}\right)$ $= f(0{,}5546875) = -0{,}28$ donc $\boldsymbol{\alpha} \in [\mathbf{0,5546875}; \mathbf{0,5625}]$ $f(0{,}5546875)$ $= -0{,}28 \ et \ f\left(\frac{0{,}5546875 + 0{,}5625}{2}\right)$ $= f(0{,}55859375) = -0{,}012$ donc $\boldsymbol{\alpha} \in [\mathbf{0,55859375}; \mathbf{0,5625}]$ $f(0{,}55859375)$ $= -0{,}012 \ et \ f\left(\frac{0{,}55859375 + 0{,}5625}{2}\right)$ $= f(0{,}560546875) = -0{,}004$ donc $\boldsymbol{\alpha} \in [\mathbf{0,56054875}; \mathbf{0,5625}]$ D'où $\boldsymbol{\alpha} \in [\mathbf{0,56}; \mathbf{0,57}]$	
		<u>EXERCICES DE MAISON</u> <u>EXERCICE1</u> Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 + x + 3$. 1.Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[-2; -1]$. 2.Donne un encadrement de α à 10^{-1} près par la méthode de dichotomie.		

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		<u>EXERCICE2</u> Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^3 - 3x + 3$. 1.Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β dans l'intervalle $[0; 1]$. 2. Donne un encadrement de β à 10^{-1} près par la méthode de balayage.		

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON1 : LIMITES ET CONTINUITE

SEANCE : 11/12

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Identifier	- les notions de branches paraboliques de direction celle de (OI) ou celle de (OJ) dans un repère (O, I, J)
Interpréter	- graphiquement : • $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty(resp\ -\infty)$ • $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ • $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty(resp\ -\infty)$

PLAN DE LA SEANCE

III. ETUDE D'UNE BRANCHE INFINIE
1. Asymptote
   a. Asymptote parallèle à l'un des axes
      Définition
   b. Asymptote non parallèle à l'un des axes
      Définition
2. Branches paraboliques-Direction asymptotique

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
10 min *Développement* *10 min*	-Travail en groupe -Travail individuel	Correction des exercices de maison ACTIVITE1 Le plan est mini d'un repère (O, I, J) 1. Soit la fonction f définie sur $]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{4x+1}{x-3}$ Calcule chacune des limites suivantes : a. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ b. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ c. $\lim\limits_{\substack{x\to3\\<}} f(x)$ d. $\lim\limits_{\substack{x\to3\\>}} f(x)$ 2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\frac{x^3-3x^2+5x-7}{x^2+2}$ Soit (D) la droite d'équation : $y=x-3$ et (C) la courbe de g. Calcule la limite suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-3)]$.	REPONSES ATTENDUES 1. a. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x+1}{x-3}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=4$ b. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x+1}{x-3}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=4$ c. $\lim\limits_{\substack{x\to3\\<}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to3\\<}}\frac{4x+1}{x-3}$ $\lim\limits_{\substack{x\to3\\<}} f(x)=-\infty$ d. $\lim\limits_{\substack{x\to3\\>}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to3\\>}}\frac{4x+1}{x-3}$ $\lim\limits_{\substack{x\to3\\>}} f(x)=+\infty$ 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-3)]$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}[(x-3)+\frac{3x-1}{x^2+2}-(x-3)]$	**III. ETUDE D'UNE BRANCHE INFINIE** **1. Asymptote** **a. Asymptote parallèle à l'un des axes** **Définition** Soit f une fonction de courbe représentative (C) dans le plan muni d'un repère (O, I, J). On dit que la droite d'équation $y=l$ est une asymptote à la courbe (C) lorsque la fonction f a une limite finie l en $-\infty$ ou en $+\infty$. On dit que la droite d'équation $x=x_0$ est une asymptote à la courbe (C) lorsque la fonction f admet une limite infinie à droite ou à gauche au point x_0. **b. Asymptote non parallèle à l'un des axes** **Définition** Soit f une fonction de courbe

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 4$ *on dit que la droite d'équation* $y = 4$ *est une asymptote à la courbe* (C) *en* $-\infty$. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 4$ *on dit que la droite d'équation* $y = 4$ *est une asymptote à la courbe* (C) *en* $+\infty$. $\lim_{\substack{x\to3\\<}} f(x) = -\infty$ *ou* $\lim_{\substack{x\to3\\>}} f(x) = +\infty$ *on dit que la droite d'équation* $x = 3$ *est une asymptote à la courbe* (C). $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (x-3)] = 0$ *on dit que la droite d'équation* $y = x - 3$ *est une asymptote à la courbe* (C) *en* $+\infty$.	$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (x-3)] = \lim_{x\to+\infty} [\frac{3x-1}{x^2+2}]$ $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (x-3)] = 0$	représentative (C) dans le plan muni d'un repère (O, I, J). Lorsque $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ ou $\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$, on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$ ou en $-\infty$.

<table>
<tr><th>MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES</th><th>STRATEGIES PEDAGOGIQUES</th><th>ACTIVITES DU PROFESSEUR</th><th>ACTIVITES DES APPRENANTS</th><th>TRACE ECRITE</th></tr>
<tr>
<td>Evaluation
10 min</td>
<td>-Travail individuel</td>
<td><u>EXERCICE DE FIXATION1</u>
Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par :
$$f(x) = \frac{x+3}{x+1}$$
$$g(x) = x + 2 - \frac{1}{2x+5}$$
1. Calcule : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)$ et interprète graphiquement le résultat.
2. Montre que la droite (L) d'équation : $y = x + 2$ est une asymptote à la courbe représentative de g en $+\infty$.</td>
<td><u>REPONSES ATTENDUES</u>
1.
$$\lim_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ >}} \frac{x+3}{x+1}$$
$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote à la courbe représentative de f.
2.
$$\lim_{x\to+\infty}[g(x) - (x+2)] = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2x+5}$$
$\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x) - (x+2)] = 0$ donc la droite (L) d'équation : $y = x + 2$ est une asymptote à la courbe représentative de g en $+\infty$.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Développement
15 min</td>
<td>-Travail individuel</td>
<td><u>ACTIVITE2</u>
Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ de représentation graphique (C) dans le plan muni d'un repère (O, I, J). On suppose que f a une limite infinie en $+\infty$ ou en $-\infty$.
On pose :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$</td>
<td><u>REPONSES ATTENDUES</u>
<table>
<tr><td rowspan="4">$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$</td><td>$a = +\infty$ ou $a = -\infty$</td></tr>
<tr><td>$a = 0$</td></tr>
<tr><td>a est un nombre réel non nul</td></tr>
<tr><td>a n'existe pas</td></tr>
</table>
</td>
<td>2. <u>Branches paraboliques-Direction asymptotique</u>
Le plan muni d'un repère (O, I, J).
Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ de représentation graphique (C) dans le plan muni du repère (O, I, J).</td>
</tr>
</table>

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		Donne les valeurs possibles de a. *Lorsque $a = +\infty$ ou $a = -\infty$ (C) admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ).* *Lorsque $a = 0$ ou (C) admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OI).* *Lorsque a est un nombre réel non nul, on calcule b tel que $b = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - ax]$:* • *Si b est un nombre réel alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à (C).* • *Si $b = +\infty$ ou $b = -\infty$ alors (C) admet une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y = ax$.* • *Si b n'existe pas alors n'a pas d'asymptote ni de branche parabolique ; elle admet une direction asymptotique ; celle de la droite d'équation $y = ax$.*		On suppose que f a une limite infinie en $+\infty$ ou en $-\infty$. On pose : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = a$ $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - ax] = b$ Lorsque $\boldsymbol{a = +\infty}$ ou $\boldsymbol{a = -\infty}$ (C) admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ). Lorsque $\boldsymbol{a = 0}$ (C) admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OI). Lorsque a est un nombre réel non nul, on calcule b : • Si $\boldsymbol{b}$ **est un nombre réel** alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à (C). • Si $\boldsymbol{b = +\infty}$ **ou** $\boldsymbol{b = -\infty}$ alors (C) admet une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y = ax$.

<table>
<tr><th>MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES</th><th>STRATEGIES PEDAGOGIQUES</th><th>ACTIVITES DU PROFESSEUR</th><th>ACTIVITES DES APPRENANTS</th><th>TRACE ECRITE</th></tr>
<tr>
<td>Evaluation
10 min</td>
<td>-Travail individuel</td>
<td>Lorsque a n'existe pas, (C) n'a pas d'asymptote, ni de branche parabolique, ni de direction asymptotique.

EXERCICE DE FIXATION2
<table>
<tr><th>CAS</th><th>$f(x)$</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$\frac{2}{x}+3x^3$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$-2\sqrt{x}$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$-2x-\frac{1}{x^2}$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$5x+\sqrt{x}$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$2x+\sin x$</td></tr>
<tr><td>6</td><td>$\frac{\pi x}{3}+x\cos x$</td></tr>
</table>
Dans chacun des cas ci-dessus :
a. Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
b. Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$
c. Interprète ces résultats.</td>
<td>REPONSES ATTENDUES
1.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
$et \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=+\infty$
La courbe de f admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ) en $+\infty$.
2.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$
$et \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=0$
La courbe de f admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OI) en $+\infty$</td>
<td>• Si b n'existe pas alors n'a pas d'asymptote ni de branche parabolique ; elle admet une direction asymptotique ; celle de la droite d'équation $y=ax$.

Lorsque a n'existe pas, (C) n'a pas d'asymptote, ni de branche parabolique, ni de direction asymptotique.</td>
</tr>
</table>

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			3. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ $et \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$ $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) + 2x] = 0$ La droite d'équation $y = 2x$ est une asymptote oblique à la courbe de la fonction f. 4. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ $et \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 5$ $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - 5x] = +\infty$ La courbe de f admet une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y = 5x$. 5. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $et \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - 2x] = \lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ Or la fonction ***sin*** n'a pas de limite à l'infini. Donc la courbe de f n'a pas d'asymptote, ni de branche parabolique. Elle admet une direction asymptotique, celle de la droite d'équation $y = 2x$.	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
	-Travail individuel	EXERCICE DE MAISON	6. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $et \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\pi}{3} + \cos x\right)$ $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x\to+\infty} \sin x$ Or la fonction ***cos*** n'a pas de limite à l'infini. Donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ n'existe pas. Donc la courbe de f n'a pas d'asymptote, ni de branche parabolique ni de direction asymptotique.	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON1 : LIMITES ET CONTINUITE

SEANCE : 12/12

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Identifier	- une racine n-ième d'un nombre positif - une puissance d'exposant rationnel
Connaître	- les propriétés relatives aux puissances d'exposants rationnels
Noter	- une racine n-ième d'un nombre positif $\left(\sqrt[n]{x}\ ou\ x^{\frac{1}{n}}\right)$ - une puissance d'exposant rationnel $\left(x^{\frac{p}{q}}\right)$
Représenter	- graphiquement des fonctions du type : • $x \mapsto \sqrt[n]{x}(n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}_+^*)$ • $x \mapsto x^r(r \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{R}_+^*)$

PLAN DE LA SEANCE

IV. FONCTION PUISSANCE D'EXPOSANT RATIONNEL
1. Fonction racine *n-ième*
   a. Définition
   b. Notation
   c. Remarque
2. Fonction puissance d'exposant rationnel
   a. Définition
   b. Notation
3. Propriétés

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
10 min *Développement* *15 min*	-Travail en groupe -Travail individuel	Correction des exercices de maison ACTIVITE n est un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit la fonction : $f_n: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ $x \mapsto x^n$ 1. Montre que f_n est bijective. 2. Détermine f_n^{-1}. *La fonction* $f_n: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ $x \mapsto x^n$ *est appelée la fonction puissance.* *Lorsque* r *est un nombre rationnel non nul et différent de* 1, $x \mapsto x^r$ *est appelée fonction puissance d'exposant rationnel.* *La bijection réciproque de la fonction puissance est la fonction :* $f_n^{-1}: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ *est la fonction racine n-ième.* *La fonction racine n-ième se note aussi* $x \mapsto \sqrt[n]{x}$.	REPONSES ATTENDUES 1. $f_n'(x) = nx^{n-1}$ $f_n'(x) \geq 0$ donc f_n est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$. De plus $f_n([0; +\infty[) = [0; +\infty[$ Donc f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$. 2. Soit $a \in \mathbb{R}^+$ tel que : $f_n(x) = a$ $x^n = a \Leftrightarrow (x^n)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}$ $x = a^{\frac{1}{n}}$ $f_n^{-1}: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$	**IV. FONCTION PUISSANCE D'EXPOSANT RATIONNEL** **1. Fonction racine *n-ième*** ***a.* Définition** On appelle fonction racine n^{ième} ($n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$) ; la bijection réciproque de la bijection définie sur $[0; +\infty[$ par : $x \to x^n$. Cette bijection réciproque est : $x \to \sqrt[n]{x}$. $\forall x \mathbb{R}^+, x^n = y \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$. ***b.* Notation** L'image de tout nombre positif par la fonction racine n^{ième} se note : $\sqrt[n]{x}$ ou $x^{\frac{1}{n}}$ ***c.* Remarque** Soient $f_n: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ et $x \mapsto x^n$ $g_n: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ Les courbes représentatives de f_n et g_n dans le plan muni d'un

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
				repère orthonormé sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. **2. <u>Fonction puissance d'exposant rationnel</u>** **a. <u>Définition</u>** r étant un nombre rationnel non nul et différent de 1, on appelle fonction puissance d'exposant r, la fonction : $\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ $x \mapsto x^r$ **b. <u>Notation</u>** En posant : $r = \frac{p}{q}$ on a : $x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}}$ $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$ **c. <u>Propriétés</u>** u et v étant deux nombres rationnels non nuls, x et y des nombres réels strictement positifs $x^u \times y^u = (xy)^u$ $(x^u)^v = x^{uv}$ $x^u \times x^v = x^{u+v}$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Développement *15 min*	-Travail en groupes	<u>ACTIVITE2</u> a et b étant deux nombres réels positifs, m et n deux nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à 2. Montre que : a. $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ b. Si $b \neq 0$ alors $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ c. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\times n]{a}$ d. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ e. $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{a} = \sqrt[m\times n]{a^{m+n}}$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **a**. Montrons que : $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ Posons : $x = \sqrt[n]{a}$ et y= $\sqrt[n]{b}$ $x^n = a$ et $y^n = b$ $(xy)^n = ab$ $x^n y^n = ab$ $xy = \sqrt[n]{ab}$ D'où $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ **b**. Montrons que : si $b \neq 0$ alors $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ Posons : $x = \sqrt[n]{a}$ et y= $\sqrt[n]{b}$ $x^n = a$ et $y^n = b$ $\frac{x^n}{y^n} = \frac{a}{b}$ $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{a}{b}$ $\frac{x}{y} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ D'où	$\frac{x^u}{y^u} = \left(\frac{x}{y}\right)^u$ $\frac{x^u}{x^v} = x^{u-v}$ **3. <u>Propriétés</u>** a et b étant deux nombres réels positifs, m et n deux nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à 2. • $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ ou $a^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$ • Si $b \neq 0$ alors $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ ou $\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$ • $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\times n]{a}$ ou $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m\times n}}$ • $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ ou

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ **c**. Montrons que : $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\times n]{a}$ Posons : $x = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ $x^m = \sqrt[n]{a}$ $(x^m)^n = a$ $x^{mn} = a$ $x = \sqrt[mn]{a}$ D'où $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\times n]{a}$ d. Montrons que : $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ Posons : $x = \sqrt[n]{a}$ $x = a^{\frac{1}{n}}$ $x^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ $x^m = a^{\frac{1}{n}\times m}$ $x^m = a^{m\times\frac{1}{n}}$ $x^m = \sqrt[n]{a^m}$ D'où $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ **e**. Montrons que : $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{a} = \sqrt[m\times n]{a^{m+n}}$ $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{m}} \times a^{\frac{1}{n}}$	$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$ • $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{a} = \sqrt[m\times n]{a^{m+n}}$ ou $a^{\frac{1}{m}} \times a^{\frac{1}{n}} = (a^{m+n})^{\frac{1}{m\times n}}$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *10 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Simplifie : 1. $\sqrt[3]{5^4} \times \sqrt{5^4}$ 2. $\sqrt[3]{3^4} \times \sqrt{3^2}$ 3. $\dfrac{3^{\frac{3}{2}} \times 2^{-\frac{7}{6}}}{2^{-\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{3}}}$ 4. $\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{6}{5}} \times \sqrt[5]{5^7}$	$\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}$ $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{a} = a^{\frac{m+n}{mn}}$ $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{a} = a^{(m+n)\times\frac{1}{mn}}$ $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{a} = (a^{m+n})^{\frac{1}{mn}}$ D'où $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{a} = \sqrt[m\times n]{a^{m+n}}$ <u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. $\sqrt[3]{5^4} \times \sqrt{5^4} = 5\sqrt[3]{5} \times 25$ $\sqrt[3]{5^4} \times \sqrt{5^4} = 125\sqrt[3]{5}$ 2. $\sqrt[3]{3^4} \times \sqrt{3^2} = 3\sqrt[3]{3} \times 3$ $\sqrt[3]{3^4} \times \sqrt{3^2} = 9\sqrt[3]{3}$ 3. $\dfrac{3^{\frac{3}{2}} \times 2^{-\frac{7}{6}}}{2^{-\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{3}}} = 3^{\frac{3}{2}-\frac{1}{3}} \times 2^{-\frac{7}{6}+\frac{1}{4}}$ $\dfrac{3^{\frac{3}{2}} \times 6^{-\frac{7}{6}}}{2^{-\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{3}}} = 3^{\frac{7}{6}} \times 2^{-\frac{11}{12}}$ $\dfrac{3^{\frac{3}{2}} \times 6^{-\frac{7}{6}}}{2^{-\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{3\sqrt[6]{3}}{\sqrt[12]{2}}$ 4.	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
	-Travail individuel	EXERCICE DE MAISON	$\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{6}{5}} \times \sqrt[5]{5^7} = 2^{\frac{6}{15}} \times 5\sqrt[5]{5^2}$ $\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{6}{5}} \times \sqrt[5]{5^7} = 5\sqrt[15]{2} \times \sqrt[5]{5^2}$	

BIBLIOGRAPHIE

Mon livre de mathématiques $T^{LE}D$ Collection PYRAMIDE

Livre de mathématiques $T^{LE}D$ Editions Vallesse

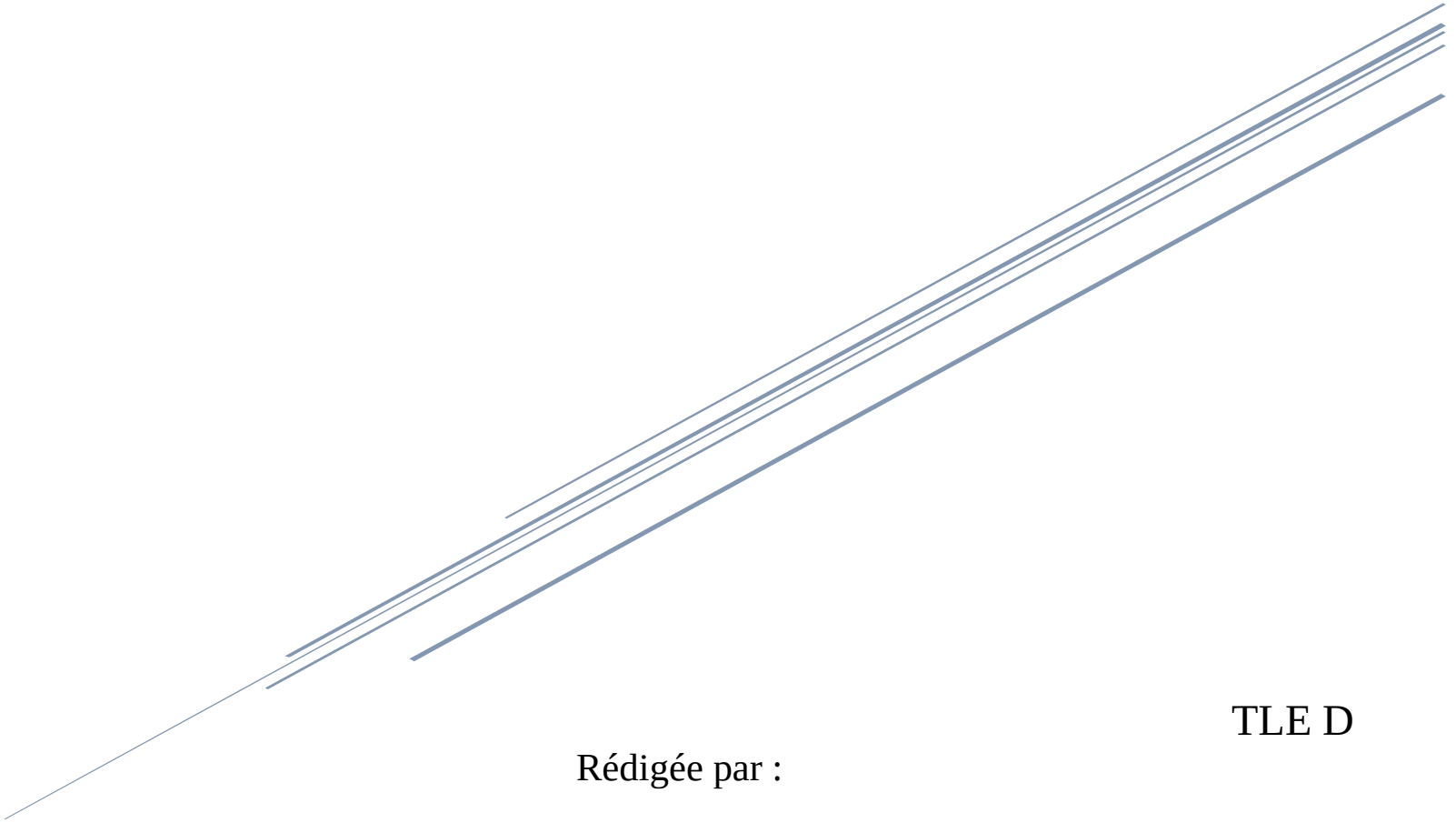
Livre de mathématiques $T^{LE}D$ CIAM

WWW.monecoleàlamaison.ci

https://physiques-et-maths.fr

FICHE DE LEÇON

PROBABILITE CONDITIONNELLE ET VARIABLE ALEATOIRE



TLE D

Rédigée par :

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE2

THEME2 : MODELISATION D'UN PHENOMENE ALEATOIRE

LEÇON2 : PROBABILITE CONDITIONNELLE ET VARIABLE ALEATOIRE

NOMBRE DES SEANCES : 6

DUREE D'UNE SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la définition d'une probabilité conditionnelle - la définition d'une variable aléatoire - la définition d'une loi de probabilité - la définition d'une fonction de répartition - la définition de l'espérance mathématique, de la variance et de l'écart-type - la définition d'un système complet d'évènement - la définition d'une épreuve de Bernoulli - la définition d'un schéma de Bernoulli - la définition de la loi binomiale de paramètres n et p - la propriété relative à l'espérance mathématique d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale B(n, p) - la propriété relative à la variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale B(n, p) - la formule des probabilités totales
Noter	- une probabilité conditionnelle : P(A/B) ou $P_A(B)$
Calculer	- la probabilité d'un évènement - la probabilité d'un évènement en utilisant la formule des probabilités totales - la probabilité d'obtenir k succès dans une suite de n épreuves de Bernoulli $(0 \leq k \leq n)$ - l'espérance mathématique, de la variance et de l'écart-type d'une variable aléatoire donnée
Justifier	- que deux évènements sont indépendants ou non
Déterminer	- la loi de probabilité d'une variable aléatoire donnée

	- la fonction de répartition d'une variable aléatoire donnée
Construire	- un arbre pondéré - la fonction de répartition d'une variable aléatoire donnée
Traiter une situation	- faisant appel aux probabilités

SITUATION D'APPRENTISSANGE

L'éducateur du niveau terminal souhaite désigner au hasard, en classe de $T^{LE}D1$ du lycée moderne de Madinani, un représentant pour la tenue du discours des élèves à l'occasion de la cérémonie de réception des nouveaux élèves du lycée. Parmi les 46 élèves de cette classe, il y a :

- 20 filles
- 25 garçons
- Parmi les filles, il y a 10 redoublantes
- Parmi les garçons, il y a 15 élèves non redoublants

Informés, chacun des élèves de la $T^{LE}D1$ décide d'évaluer ses chances d'être choisi. Pour ce faire, ils cherchent à calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

- L'élève choisi est une fille et est redoublante.
- L'éducateur choisi une fille sachant qu'elle est non redoublante.
- L'éducateur choisi un garçon sachant qu'il est non redoublant.
- L'éducateur choisi un élève redoublant sachant que c'est un garçon.

PLAN DE LA LEÇON

I. PROBABILITE CONDITIONNELLE
   1. Définition
   2. Conséquences
   3. Evènements indépendants
      a. Définition
      b. Conséquence
      c. Propriétés
   4. Formule des probabilités totales
      a. Partition d'un ensemble
      b. Formule des probabilités totales

II. VARIABLE ALEATOIRE
   1. a. Définition
      b. Notation et vocabulaire
   2. Loi de probabilité d'une variable aléatoire
      Définition
   3. Fonction de répartition d'une variable aléatoire
      Définition
   4. Espérance mathématique
      Définition
   5. Variance
      Définition
   6. Ecart-type

III. LOI BINOMIALE
   1. Epreuve de Bernoulli
      Définition
   2. Schéma de Bernoulli
      Définition
   3. Loi binomiale
      a. Définition
      b. Propriété

HABILETES, CONTENUS ET PLANS PAR SEANCE

SEANCE1

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la définition d'une probabilité conditionnelle
Noter	- une probabilité conditionnelle : $P(A/B)$ ou $P_A(B)$
Calculer	- la probabilité d'un évènement
Justifier	- que deux évènements sont indépendants ou non

PLAN DE LA SEANCE1

I. PROBABILITE CONDITIONNELLE
1. Définition
2. Conséquences
3. Evènements indépendants
   a. Définition
   b. Conséquence
   c. Propriétés

SEANCE2

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la définition d'un système complet d'évènement - la formule des probabilités totales
Construire	- un arbre pondéré
Calculer	- la probabilité d'un évènement en utilisant la formule des probabilités totales

PLAN DE LA SEANCE2

4. Formule des probabilités totales
   a. Partition d'un ensemble
   b. Formule des probabilités totales

SEANCE3

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la définition d'une variable aléatoire - la définition d'une loi de probabilité - la définition d'une fonction de répartition
Déterminer	- la loi de probabilité d'une variable aléatoire donnée - la fonction de répartition d'une variable aléatoire donnée
Construire	- la fonction de répartition d'une variable aléatoire donnée

PLAN DE LA SEANCE3

II. VARIABLE ALEATOIRE
1.a. Définition
b. Notation et vocabulaire
2. Loi de probabilité d'une variable aléatoire
Définition
3. Fonction de répartition d'une variable aléatoire
Définition

SEANCE4

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la définition de l'espérance mathématique, de la variance et de l'écart-type
Calculer	- l'espérance mathématique, de la variance et de l'écart-type d'une variable aléatoire donnée

PLAN DE LA SEANCE4

4. Espérance mathématique
   Définition
5. Variance
   Définition
6. Ecart-type

SEANCE5

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la définition d'une épreuve de Bernoulli - la définition d'un schéma de Bernoulli
Calculer	- la probabilité d'obtenir k succès dans une suite de n épreuves de Bernoulli ($0 \leq k \leq n$)

PLAN DE LA SEANCE5

III. LOI BINOMIALE

1. Epreuve de Bernoulli
   Définition
2. Schéma de Bernoulli
   Définition
3. Loi binomiale
   a. Définition
   b. Propriété

SEANCE6

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la définition de la loi binomiale de paramètres n et p - la propriété relative à l'espérance mathématique d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale B(n, p) - la propriété relative à la variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale B(n, p)

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE2

THEME2 : MODELISATION D'UN PHENOMENE ALEATOIRE

LEÇON2 : PROBABILITE CONDITIONNELLE ET VARIABLE ALEATOIRE

SEANCE : 1/6

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la définition d'une probabilité conditionnelle
Noter	- une probabilité conditionnelle : $P(A/B)$ ou $P_A(B)$
Calculer	- la probabilité d'un évènement
Justifier	- que deux évènements sont indépendants ou non

PLAN DE LA SEANCE

I. PROBABILITE CONDITIONNELLE
   1. Définition
   2. Conséquences
   3. Evènements indépendants
      a. Définition
      b. Conséquence
      c. Propriétés

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Présentation *10 min*	-Lecture -Travail en groupe	-Donne l'énoncé de la situation d'apprentissage aux apprenants. -Demande aux apprenants de faire une lecture silencieuse de la situation. -Demande à un apprenant de lire à haute voix l'énoncé de la situation. -Lis l'énoncé de la situation d'apprentissage à haute voix. **Question pour faire ressortir les tâches :** Qu'est-ce que les élèves décident de faire ? Dans la phrase ci-dessous, donne le rôle que joue l'expression en gras et en italique : L'éducateur choisis une fille ***sachant qu'elle est non redoublante***. *Déterminer la probabilité de certains évènements à condition que d'autres évènements soient réalisés s'appelle « **la probabilité conditionnelle** »*	-Les apprenants lisent silencieusement l'énoncé de la situation. -Un apprenant lis à haute voix l'énoncé de la situation. -Les apprenants écoutent Attentivement. REPONSE ATTENDUE Les élèves cherchent à déterminer leurs chances d'être choisis. Ils décident alors de calculer la probabilité de certains évènements. L'expression en gras et en italique est une condition au choix de l'élève.	**I. PROBABILITE CONDITIONNELLE** **1. Définition** Soit Ω l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire. B est un évènement de Ω de probabilité non nulle. L'application P_B qui à tout évènement A de Ω associe le nombre réel $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ est une probabilité sur Ω.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *10 min*	-Travail individuel	*La probabilité qu'un évènement C se réalise sachant qu'un autre évènement D de probabilité non nulle est réalisé se note :* $P(C/D)$ ou $P_D(C)$. *Elle est définie par :* $$P_D(C) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)}$$ <u>EXERCICE DE FIXATION</u> En notant les évènements : A : « l'élève choisi est une fille » B : « l'élève choisi est redoublant » Donne une notation et la définition de chacun des évènements suivants : a. « l'élève choisie est une fille et est redoublante ». b. « L'élève choisie est une fille ***sachant qu'elle est non redoublante ».*** c. « L'élève choisi est un garçon ***sachant qu'il est redoublant »***. d. « L'élève choisi est un redoublant ***sachant que c'est garçon ».***	<u>REPONSES ATTENDUES</u> a. $P(A \cap B)$ b. $P_{\bar{B}}(A) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})}$ c. $P(\bar{A}/B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)}$ d. $P_{\bar{A}}(B) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})}$	$P_B(A)$ est appelée probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé ou plus simplement la probabilité de A sachant B. On la note aussi $P(A/B)$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Développement *15 minutes*	-Travail individuel	ACTIVITE Soient deux évènements A et B de Ω de probabilités non nulles. 1. Supposons la réalisation de A n'influence pas la réalisation de B et inversement. Ecris $P_B(A)$ et $P_A(B)$ en fonction de $P(A)$ ou $P(B)$. 2. A partir de la définition de $P_B(A)$ et $P_A(B)$, détermine deux expressions différentes $P(A \cap B)$. 3. Détermine l'expression $P(A \cap B)$ dans le cas où la réalisation de A n'influence pas la réalisation de B et inversement. 4. Résume la situation d'apprentissage par un schéma.	REPONSES ATTENDUES 1. $P_B(A) = P(A)$ $P_A(B) = P(B)$ 2. $P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$ $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$ 3. $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$	**2. Conséquences** Soit A et B deux évènements d'un univers Ω tels que $P(A) \neq 0$ et $P(A) \neq 0$. $P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$ $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$ **3. Evènements indépendants** **a. Définition** Soit P une probabilité définie sur un univers Ω. Deux évènements A et B sont indépendants lorsque la réalisation de l'un n'influence pas la réalisation de l'autre, c'est-à-dire $P_B(A) = P(A)$ et $P_A(B) = P(B)$. **b. Conséquence** Deux évènements A et B sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. **c. Propriétés** Si A et B sont deux évènements indépendants alors : $\bar{A}$ et B sont indépendants ; A et $\bar{B}$ sont indépendants ; $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *15 minutes*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> 1. A et B sont deux évènements tels que : $P(A) = \frac{3}{4};\ P(B) = \frac{2}{3};$ $P(A \cap B) = \frac{3}{5}$ Calcule $P_B(A)$ et $P_A(B)$ 2. Soit E et F deux évènements tels que $P(F) = 0{,}67$ et $P_F(E) = 0{,}56$. Calcule $P(E \cap F)$. 3. Dans le lancer d'un dé parfait, on considère les évènements suivants : A : « Obtenir un nombre pair » B : « Obtenir un multiple de 3 ». Justifie que les évènements A et B sont indépendants.	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ $P_B(A) = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{3}}$ $P_B(A) = \frac{9}{10}$ $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ $P_A(B) = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{3}{4}}$ $P_B(A) = \frac{12}{15}$ 2. $P(E \cap F) = P_F(E) \times P(F)$ $P(E \cap F) = 0{,}56 \times 0{,}67$ $P(E \cap F) = 0{,}3752$ 3. $P(A) = \frac{1}{2};\ P(B) = \frac{1}{3}$ $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ $P(A) \times P(B) = \frac{1}{6}$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
	-Travail en groupes	<u>EXERCICE DE MAISON</u> Une maladie atteint 3% d'une population. Dans ce qui suit, on appellera « ***malade*** » les individus atteint de cette maladie et « ***bien portant*** » ceux qui ne le sont pas. On dispose d'un test pour la détecter. Ce test donne les résultats suivants : Chez les individus malades, 95% de tests sont positifs. Chez les individus bien portant, 98% des test sont négatifs. 1. Calculer la probabilité qu'un individu malade ait un test négatif. 2. Calculer la probabilité qu'un individu soit malade et ait un test négatif. 3. Calculer la probabilité qu'un individu ait un test positif sachant qu'il est malade. 4. Calculer la probabilité qu'un individu soit bien portant et ait un test positif.	$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ Donc A et B sont indépendants.	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE2

THEME2 : MODELISATION D'UN PHENOMENE ALEATOIRE

LEÇON2 : PROBABILITE CONDITIONNELLE ET VARIABLE ALEATOIRE

SEANCE : 2/6

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

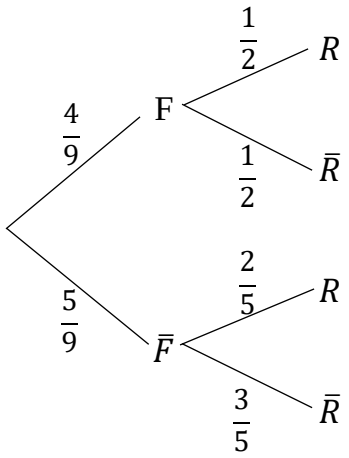
MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

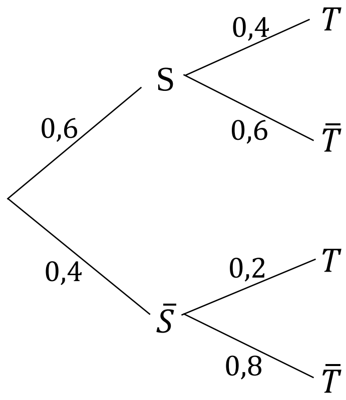
HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la définition d'un système complet d'évènement - la formule des probabilités totales
Construire	- un arbre pondéré
Calculer	- la probabilité d'un évènement en utilisant la formule des probabilités totales

PLAN DE LA SEANCE

4. Formule des probabilités totales
   a. Partition d'un ensemble
   b. Formule des probabilités totales

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
10 min *Développement* *15 min*	-Travail en groupes	Correction de l'exercice de maison ACTIVITE1 Soient les ensembles A, B, C, D et E tel que : $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \sigma, \theta, \vartheta, \mu, \pi, \rho\}$ $B = \{\alpha, \beta\}$; $C = \{\gamma, \delta, \varepsilon\}$; $D = \{\sigma\}$; $E = \{\theta, \vartheta, \mu, \pi, \rho\}$. Détermine les ensembles suivants : a. $B \cap C$; $B \cap D$; $B \cap E$; $C \cap D$; $C \cap E$; $D \cap E$. b. $B \cup C \cup D \cup E$. *Les ensembles B, C, D et E sont des parties de l'ensemble A qui sont deux à deux disjoints et dont la réunion est égale l'ensemble A.* *On dit alors que les ensembles B, C, D et E forment* ***une partition de l'ensemble A.***	REPONSES ATTENDUES a. $B \cap C = \phi$; $B \cap D = \phi$; $B \cap E = \phi$; $C \cap D = \phi$; $C \cap E = \phi$; $D \cap E = \phi$. b. $B \cup C \cup D \cup E = \{\alpha, \beta\} \cup \{\gamma, \delta, \varepsilon\} \cup \{\sigma\} \cup \{\theta, \vartheta, \mu, \pi, \rho\}$ $B \cup C \cup D \cup E = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \sigma, \theta, \vartheta, \mu, \pi, \rho\}$ $B \cup C \cup D \cup E = A$	4. **Formule des probabilités totales** **a. Partition d'un ensemble** Soit Ω un ensemble non vide et $B_1, B_2, \ldots, B_n$ des parties de Ω tel que n est un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. $B_1, B_2, \ldots, B_n$ forment une partition de l'ensemble Ω signifie que $B_1, B_2, \ldots, B_n$ sont deux à deux disjoints et $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$.
Evaluation *5 min*	-Travail individuel	EXERCICE DE FIXATION1 Soit l'ensemble H tel que : $H = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ On donne trois ensembles non vides A, B et C tels que : $A = \{1; 2; 3\}$; $B = \{4; 5; 6\}$ et	REPONSE ATTENDUE $A \cap B = \phi$; $A \cap C = \phi$; $B \cap C = \phi$ et $A \cup B \cup C = \{1; 2; 3\} \cup \{4; 5; 6\} \cup C = \{7; 8\}$.	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Développement *15 min*	-Travail en groupe	$C = \{7; 8\}$. Justifie les ensembles A, B et C forment une partition de l'ensemble H. ACTIVITE2 1. Représente la situation d'apprentissage par un arbre de probabilité. 2. Détermine la probabilité qu'un élève choisi au hasard soit redoublant. 3. Détermine la probabilité qu'un élève choisi au hasard soit non redoublant.	$A \cup B \cup C =$ $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ $A \cup B \cup C = H$. A, B et C sont deux à deux disjoints et $A \cup B \cup C = H$ donc A, B et C forment une partition de l'ensemble H. REPONSES ATTENDUES 1.  2. $P(R) = P(R \cap F) + P(R \cap \bar{F})$ $P(R) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{9} + \frac{2}{5} \times \frac{5}{9}$ $P(R) = \frac{4}{9}$ 3. $P(R) = P(\bar{R} \cap F) + P(\bar{R} \cap \bar{F})$	**b. <u>Formule des probabilités totales</u>** Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à deux. $B_1, B_2, \ldots, B_n$ forment une partition d'un univers Ω telle que la probabilité de chaque évènement $B_i (1 \leq i \leq n)$ soit non nulle. Pour tout évènement A de Ω, $P(A) = P(A \cap B_1) + \cdots + P(A \cap B_n)$ Pour tout i $(1 \leq i \leq n)$, $P(A \cap B_i) = P_{B_i}(A) \times P(B_i)$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *10 min*	-Travail individuel -Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Dans un magasin de vêtement, on s’intéresse au comportement d’un acheteur potentiel d’un short et d’un T-shirt. - La probabilité qu’il achète un short est 0,6. - La probabilité pour qu’il achète un T-shirt quand il a acheté un short est 0,4. - La probabilité pour qu’il achète un T-shirt quand il n’a pas acheté de short est de 0,2. On désigne par S l’évènement : « le client achète un short » et par T l’évènement : « le client achète un T-shirt ». 1) Dresse l’arbre de choix. 2) Détermine la probabilité pour qu’il achète un short et un T-shirt. 3) Détermine la probabilité pour qu’il achète un T-shirt. <u>EXERCICES DE MAISON</u>	$P(R) = \frac{1}{2}\times\frac{4}{9} + \frac{3}{5}\times\frac{5}{9}$ $P(R) = \frac{5}{9}$ <u>REPONSES ATTENDUES</u> 1.  2. $P(S \cap T) = 0{,}6 \times 0{,}4$ $P(S \cap T) = 0{,}24$ 3. $P(T) = P(T \cap S) + P(T \cap \bar{S})$ $P(T) = 0{,}24 + 0{,}2 \times 0{,}4$ $P(T) = 0{,}24 + 0{,}2 \times 0{,}4$ $P(T) = 0{,}32$	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE2

THEME2 : MODELISATION D'UN PHENOMENE ALEATOIRE

LEÇON2 : PROBABILITE CONDITIONNELLE ET VARIABLE ALEATOIRE

SEANCE : 3/6

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la définition d'une variable aléatoire - la définition d'une loi de probabilité - la définition d'une fonction de répartition
Déterminer	- la loi de probabilité d'une variable aléatoire donnée - la fonction de répartition d'une variable aléatoire donnée
Construire	- la fonction de répartition d'une variable aléatoire donnée

PLAN DE LA SEANCE

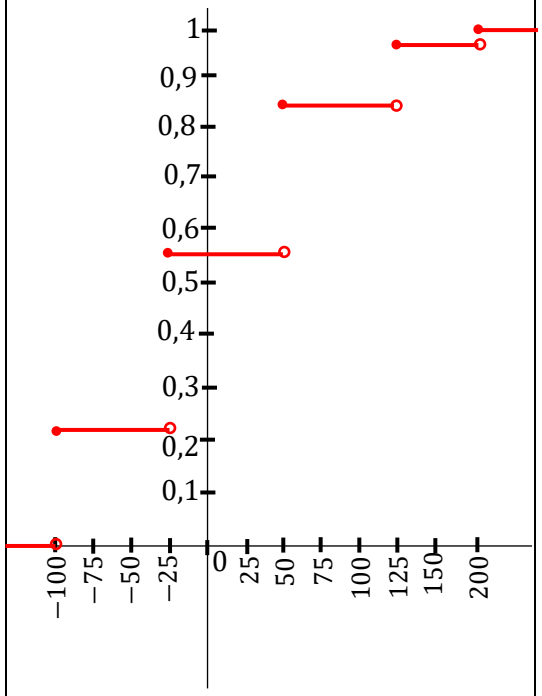
II. VARIABLE ALEATOIRE
1. a. Définition
   b. Notation et vocabulaire
2. Loi de probabilité d'une variable aléatoire
   Définition
3. Fonction de répartition d'une variable aléatoire
   Définition

<table>
<tr><th>MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES</th><th>STRATEGIES PEDAGOGIQUES</th><th>ACTIVITES DU PROFESSEUR</th><th>ACTIVITES DES APPRENANTS</th><th>TRACE ECRITE</th></tr>
<tr>
<td>10 min

Développement
25 min</td>
<td>-Travail en groupe

-Travail en groupe</td>
<td>Correction des exercices de maison

<u>ACTIVITE</u>
Une urne contient 2 boules blanches, 3 boules vertes et 5 boules rouges. Un jeu consiste à tirer simultanément et au hasard 2 boules de l'urne. On gagne 100F par boules blanche tirée, 25F par boule verte et on perd 50F par boule rouge.
1. Soit Ω l'univers associé au jeu. Donne l'ensemble de toutes les éventualités de Ω.
2. Soit X l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ qui, à chaque éventualité associe le gain (algébrique) correspondant. Détermine $X(\Omega)$, l'ensemble des valeurs possibles prises par X.
3. Soit x_i un élément de $X(\Omega)$. Détermine l'application qui à toute valeur x_i prise par X associe $p_i = P(X = x_i)$. On supposera $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$
4. Représente graphiquement l'application $F : \mathbb{R} \mapsto [0\,;1]$
$x \mapsto p(X \leq x)$</td>
<td><u>REPONSES ATTENDUES</u>
1. $\{B;B\}$; $\{B;V\}$; $\{B;R\}$; $\{V;V\}$; $\{V;R\}$; $\{R;R\}$.
2.
$X(\Omega)=\{-100;-25;50;125;200\}$
3.
$P(X=-100)=\frac{C_5^2}{C_{10}^2}=\frac{10}{45}$
$P(X=-25)=\frac{C_5^1\times C_3^2}{C_{10}^2}=\frac{15}{45}$
$P(X=50)=\frac{C_3^2+C_2^1\times C_5^1}{C_{10}^2}=\frac{13}{45}$
$P(X=125)=\frac{C_2^1\times C_3^1}{C_{10}^2}=\frac{6}{45}$
$P(X=200)=\frac{C_2^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{45}$
<table><tr><td>x_i</td><td>-100</td><td>-25</td><td>50</td><td>125</td><td>200</td></tr><tr><td>p_i</td><td>$\frac{10}{45}$</td><td>$\frac{15}{45}$</td><td>$\frac{13}{45}$</td><td>$\frac{6}{45}$</td><td>$\frac{1}{45}$</td></tr></table>
4.
$x \in]-\infty;-100[, F(x)=0$
$x \in]-100;-25[, F(x)=\frac{10}{45}$</td>
<td>II. <u>VARIABLE ALEATOIRE</u>
1. <u>a. Définition</u>
On appelle variable aléatoire X sur un univers Ω, toute application de Ω vers $\mathbb{R}$.
Lorsque à chaque éventualité d'une expérience aléatoire, on associe un nombre réel x_i (valeur prise par X), on dit que l'on a défini une variable aléatoire.
<u>b. Notation et vocabulaire</u>
L'ensemble de toutes les valeurs prises par X notée $X(\Omega)$ est appelée univers image de Ω par X.
L'évènement de Ω noté $[X=k]$ est l'ensemble des éléments ω de Ω tel que $X(\omega)=k$.
L'évènement de Ω noté $[X<k]$ est l'ensemble des éléments $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega)<k$.</td>
</tr>
</table>

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		C'est-à-dire : $x \in]-\infty; x_1[, F(x) = 0$ $x \in [x_1; x_2[, F(x) = p_1$ $x \in [x_2; x_3[, F(x) = p_1 + p_2$ $x \in [x_i; x_{i+1}[, F(x) = p_1 + p_2 + \ldots + p_i$ …… $x \in [x_n; +\infty[, F(x) = 1$ *Lorsque à chaque éventualité d'une expérience aléatoire, on associe un nombre réel x_i (valeur prise par X), on dit que l'on a défini une* ***variable aléatoire****.* *L'ensemble de toutes les valeurs prises par X notée* ***X(Ω)*** *est appelée* ***univers image*** *de Ω par X.* *L'application qui, à tout x_i de X(Ω) associe P([X = x_i]) est la* ***loi de probabilité*** *de X .* *L'application F est* ***la fonction de répartition*** *de X.*	$x \in [-25; 50[, F(x) = \frac{25}{45}$ $x \in [50; 125[, F(x) = \frac{38}{45}$ $x \in [125; 200[, F(x) = \frac{44}{45}$ $x \in [200; +\infty[, F(x) = 1$  	**2. <u>Loi de probabilité d'une variable aléatoire</u>** **<u>Définition</u>** X est une variable aléatoire définie sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire. On appelle loi de probabilité de X (ou distribution de X), l'application qui à chaque valeur x_i prise par X associe la probabilité de l'évènement $(X = x_i)$. La loi de probabilité d'une variable aléatoire X peut être présentée par un tableau. $\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|} \hline x_i & x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \hline P(X = x_i) & p_1 & p_2 & \ldots & p_n \\ \hline \end{array}$ On a : $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ **3. <u>Fonction de répartition d'une variable aléatoire</u>** **<u>Définition</u>** X est une variable aléatoire définie sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire. $\{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par X.

<table>
<tr><th>MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES</th><th>STRATEGIES PEDAGOGIQUES</th><th>ACTIVITES DU PROFESSEUR</th><th>ACTIVITES DES APPRENANTS</th><th>TRACE ECRITE</th></tr>
<tr>
<td>Evaluation
15 min</td>
<td>-Travail individuel</td>
<td>EXERCICE DE FIXATION
Un sac contient 5 jetons Rouges et 2 jetons blancs tous indiscernables au toucher. Un jeu consiste à tirer au hasard un jeton du sac. Si le jeton est Rouge, le jeu s'arrête ; sinon on tire un second jeton sans remettre le premier dans le sac. La mise est de 50F. Le tirage d'un jeton blanc rapporte 200F, tandis que celui d'un jeton Rouge ne rapporte rien.
Soit X la variable aléatoire réelle qui, à chaque jeu associe le gain algébrique du joueur.
1) Donne les valeurs possibles de X.
2) Déterminer la loi de probabilité de X.</td>
<td>REPONSES ATTENDUES
1. Les éventualités de Ω sont :
$\{R\}; \{B; B\}; \{B; R\}$
$X(\Omega)=\{-50; 150; 350\}$
2.
$P(X=-50)=\frac{C_5^1}{C_7^1}=\frac{5}{7}$
$P(X=150)=\frac{C_2^1\times C_5^1}{C_7^1\times C_6^1}=\frac{10}{42}$
$P(X=350)=\frac{C_2^1\times C_1^1}{C_7^1\times C_6^1}=\frac{2}{42}$
<table><tr><td>x_i</td><td>-50</td><td>150</td><td>350</td></tr><tr><td>$P(X=x_i)$</td><td>$\frac{30}{42}$</td><td>$\frac{10}{42}$</td><td>$\frac{2}{42}$</td></tr></table>3.
$x<-50, F(x)=0$
$-50\le x<150, F(x)=\frac{30}{42}$</td>
<td>On appelle fonction de répartition de X l'application F de $\mathbb{R}$ vers $[0;1]$ définie par : $F(x)=P(X\le x)$.
On a :
$\begin{cases} Pour\ x<x_1, F(x)=0 \\ Pour\ x_i\le x<x_{i+1}, \\ F(x)=F(x_{i-1})+P(X=x_i) \\ Pour\ x_n\le x, F(x)=1 \end{cases}$</td>
</tr>
</table>

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		3) Déterminer la fonction de répartition de X puis représente la graphiquement.	$150 \leq x < 350, F(x) = \frac{40}{42}$ $350 \leq x, F(x) = 1$	
	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE MAISON</u>		

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE2

THEME2 : MODELISATION D'UN PHENOMENE ALEATOIRE

LEÇON2 : PROBABILITE CONDITIONNELLE ET VARIABLE ALEATOIRE

SEANCE : 4/6

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la définition de l'espérance mathématique, de la variance et de l'écart-type
Calculer	- l'espérance mathématique, de la variance et de l'écart-type d'une variable aléatoire donnée

PLAN DE LA SEANCE

4. Espérance mathématique
   Définition
5. Variance
   Définition
6. Ecart-type

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
10 min *Développement* *25 min*	-Travail en groupe -Travail individuel	Correction des exercices de maison ACTIVITE Le tableau ci-dessous représente la loi de probabilité d'une variable aléatoire X. $\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline x_i & -50 & 150 & 350 \\ \hline p_i & \frac{30}{42} & \frac{10}{42} & \frac{2}{42} \\ \hline \end{array}$ Calcule : 1. $E(X)$ tel que : $E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3$ 2. $V(X)$ tel que : $V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + p_3(x_3 - E(X))^2$ 3. $\sigma(X)$ tel que : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$	REPONSES ATTENDUES 1. $E(X) = -50 \times \frac{30}{42} + 150 \times \frac{10}{42} + 350 \times \frac{2}{42}$ $E(X) = \frac{2}{42}(-50 \times 15 + 150 \times 5 + 350)$ $E(X) = \frac{350}{21}$ $E(X) = \frac{50}{3}$ $E(X) = 16{,}67$ 2. $V(X) = \frac{30}{42}\left(-50 - \frac{50}{3}\right)^2 + \frac{10}{42}\left(150 - \frac{50}{3}\right)^2 + \frac{2}{42}\left(350 - \frac{50}{3}\right)^2$ $V(X) = \frac{1}{21}(15\left(-\frac{200}{3}\right)^2 + \frac{5}{21}\left(\frac{400}{3}\right)^2 + \frac{1}{21}\left(\frac{1000}{3}\right)^2$	**4. <u>Espérance mathématique</u>** **<u>Définition</u>** Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs x_1 ; x_2 ;… ; x_n, avec les probabilités respectives p_1 ; p_2 ;… ; p_n. On appelle espérance mathématique de X, le nombre réel noté $E(X)$ défini par : $E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n$ $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i$ **5. <u>Variance</u>** **<u>Définition</u>** Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs x_1 ; x_2 ;… ; x_n, avec les probabilités respectives p_1 ; p_2 ;… ; p_n et $E(X)$ l'espérance mathématique de X. On appelle variance de X le

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		*$E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ sont respectivement appelées **espérance mathématique** de X, **variance** de X et **écart-type**.* *En termes de jeu, $E(X)$ est le gain moyen qu'un joueur peut espérer s'il y joue un très grand nombre de fois.* ➢ *Lorsque $E(X) > 0$, le jeu est avantageux joueur pour le joueur(ou favorable au joueur).* ➢ *Lorsque $E(X) < 0$, le jeu est désavantageux pour le joueur(ou défavorable au joueur). En moyenne, le joueur perd de l'argent à chaque essai* ➢ *Lorsque $E(X) = 0$, le jeu est équitable.*	$V(X) = \frac{200^2}{21 \times 9}(15 + 20 + 25)$ $V(X) = \frac{40000}{189} \times 60$ $V(X) = 12698{,}41$ 3. $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ $\sigma(X) = \sqrt{12698{,}41}$ $\sigma(X) = 112{,}69$	nombre réel positif noté $V(X)$ défini par: $V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + \ldots + p_n(x_n - E(X))^2$ $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2$ **Autre expression de la variance** $V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = (p_1 {x_1}^2 + p_2 {x_2}^2 + \cdots + p_n {x_n}^2)$ **6. Ecart-type** Soit X une variable aléatoire de variance $V(X)$. On appelle écart-type de X le nombre réel positif noté $\sigma(X)$ défini par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *15 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Le tableau ci-dessous donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.	<u>REPONSES ATTENDUES</u>	

x_i	-100	-25	50	125	200
p_i	$\frac{10}{45}$	$\frac{15}{45}$	$\frac{13}{45}$	$\frac{6}{45}$	$\frac{1}{45}$

a. Calcule l'espérance mathématique de X.
b. Calcule la variance de la variable aléatoire X.
c. Calcule l'écart-type de la variable aléatoire X.

a.

$$E(X) = \frac{1}{45}(-100 \times 10 - 25 \times 15 + 50 \times 13 + 125 \times 6 + 200)$$

$$E(X) = \frac{1}{45}(-1000 - 375 + 650 + 750 + 200)$$

$$E(X) = 5$$

b.

$$V(X) = \frac{1}{45}[10(-105)^2 + 15(-30)^2 + 13(45)^2 + 6(120)^2 + 195^2]$$

$$V(X) = \frac{1}{45}[110250 + 13500 + 26325 + 86400 + 38025]$$

$$V(X) = \frac{274500}{45}$$

$$V(X) = 6100$$

c.

$$\sigma(X) = \sqrt{6100}$$

$$\sigma(X) = 78{,}102$$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE MAISON</u> Un test consiste à répondre à 5 questions par oui ou par non. Chaque réponse juste est notée 4 points et chaque réponse fausse est notée -2 points. Un candidat répond au hasard à chacune de ces questions, c-à-d que la réponse « oui » et la réponse « non » ont la même probabilité. Soient X et Y les variables aléatoires suivantes : X : nombre de réponses exactes Y : note obtenue c-à-d le plus grand des deux nombres 0 et S, S désignant la somme des 5 notes obtenues par le candidat. 1.a. Donner la loi de probabilité de X. Calculer son espérance mathématique et sa variance . b. Calculer $p(X \geq 4)$ 2.a. Justifier que les valeurs prises par Y sont 0 ; 2 ; 8 ; 14 et 20. b. Déterminer sa loi de probabilité. c. Calculer son espérance mathématique et sa variance.		

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE2

THEME2 : MODELISATION D'UN PHENOMENE ALEATOIRE

LEÇON2 : PROBABILITE CONDITIONNELLE ET VARIABLE ALEATOIRE

SEANCE : 5/6

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la définition d'une épreuve de Bernoulli - la définition d'un schéma de Bernoulli
Calculer	- la probabilité d'obtenir k succès dans une suite de n épreuves de Bernoulli ($0 \leq k \leq n$)

PLAN DE LA SEANCE

III. LOI BINOMIALE
1. Epreuve de Bernoulli
   Définition
2. Schéma de Bernoulli
   Définition

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
10 min *Développement* *25 min*	-Travail en groupe -Travail individuel	Correction de l'exercice de maison <u>ACTIVITE</u> Dans une urne non transparente on dispose de 6 disques indiscernables au toucher portant chacun l'une des lettres suivantes : A ; B ; C ; D ; E et F. Un jeu consiste à choisir au hasard l'un des disques puis on le remet dans l'urne et on répète 4 fois de suite l'expérience. On s'intéresse au choix du disque portant l'inscription A. 1. Donne le nombre d'issues possibles de cette expérience aléatoire. 2. Détermine la probabilité d'obtenir le disque portant la lettre A à l'issu d'un choix. 3. Donne le nombre de fois que le joueur répète l'expérience aléatoire à l'identique. *Une expérience aléatoire qui ne conduit exclusivement à deux issues possibles est appelée* ***expérience de Bernoulli****.*	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. On obtient la lettre A ou on n'obtient pas la lettre A. Donc on a deux issues. 2. Tous les 6 disques dans l'urne on la même chance d'être tiré. Nous sommes dans un cas d'équiprobabilité. Donc $P(A) = \frac{1}{6}$ 3. Le joueur répète 5 fois l'expérience aléatoire à l'identique.	**III. <u>LOI BINOMIALE</u>** **1. <u>Epreuve de Bernoulli Définition</u>** On appelle ***épreuve de Bernoulli***, toute expérience aléatoire ne conduisant qu'à deux éventualités. L'un est appelé « succès » et l'autre « échec ». Lorsqu'on a une épreuve de Bernoulli, si on note $\boldsymbol{p}$ la probabilité du succès, alors celle de l'échec est $\boldsymbol{1-p}$. **2. <u>Schéma de Bernoulli Définition</u>** On appelle ***schéma de Bernoulli*** une suite de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Le nombre $\boldsymbol{n}$ d'épreuves et la probabilité $\boldsymbol{p}$ du succès sont appelés ***paramètres*** du schéma de Bernoulli.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *15 min*	-Travail individuel	*L'une est appelée* ***succès*** *noté S et l'autre est appelée* ***échec*** *noté* $\bar{S}$. *Une expérience qui consiste à répéter* $\boldsymbol{n}$ *fois de suite une épreuve de Bernoulli de façon indépendante est appelée* ***schéma de Bernoulli***. *La probabilité* $\boldsymbol{p}$ *du succès est appelée* ***paramètre*** *de l'épreuve de Bernoulli.* *La probabilité* $\boldsymbol{p}$ *du succès et* $\boldsymbol{n}$ *sont appelés* ***paramètres*** *du schéma de Bernoulli.* *Dans notre activité nous avons* 5 *répétitions d'une épreuve de Bernoulli de paramètre* $\frac{1}{6}$. *On a donc un schéma de Bernoulli de paramètre* 5 *et* $\frac{1}{6}$. <u>EXERCICE DE FIXATION</u> On lance 10 fois de suite un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On s'intéresse à l'apparition d'un multiple de 3 sur la face supérieure. Justifie qu'on a un schéma de Bernoulli dont tu préciseras les paramètres.	<u>REPONSES ATTENDUES</u> Le lancer de ce dé conduit à deux éventualités exclusives : « obtenir un multiple de 3 » avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ et « ne pas obtenir un multiple de 3 » avec une	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			probabilité de $\frac{2}{3}$. On a une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$.Cette épreuve de Bernoulli est répétée successivement et de façon indépendante 10 fois. On a donc un schéma de Bernoulli de paramètres 10 et $\frac{1}{3}$.	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE2

THEME2 : MODELISATION D'UN PHENOMENE ALEATOIRE

LEÇON2 : PROBABILITE CONDITIONNELLE ET VARIABLE ALEATOIRE

SEANCE : 6/6

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la définition de la loi binomiale de paramètres n et p - la propriété relative à l'espérance mathématique d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale B(n, p) - la propriété relative à la variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale B(n, p)

PLAN DE LA SEANCE

3. Loi binomiale
   a. Définition
   b. Propriété

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Développement *30 min*	-Travail en groupes	ACTIVITE Dans une urne non transparente on dispose de 6 disques indiscernables au toucher portant chacun l'une des lettres suivantes : A ; B ; C ; D ; E et F. Un jeu consiste à choisir au hasard l'un des disques puis on le remet dans l'urne. Au total, on répète 5 fois de suite l'expérience. On s'intéresse au choix du disque portant l'inscription A. Soit X la variable aléatoire qui à chaque éventualité associe le nombre de succès et p la probabilité du succès. 1. Détermine p. 2. Détermine l'ensemble des valeurs prises par X. 3. Détermine et compare a. $P(X=2)$ et $C_5^2p^2(1-p)^3$ b. $P(X=3)$ et $C_5^3p^3(1-p)^2$ 4. Détermine la loi de probabilité de X. 5. Détermine et compare :	REPONSES ATTENDUES 1. $p=\frac{1}{6}$ 2. L'ensemble des valeurs prises par X est $\{0;1;2;3;4;5;6\}$. 3.a. Les différentes possibilités sont : $\boldsymbol{AA}\bar{A}\bar{A}\bar{A}$; $\boldsymbol{A}\bar{A}\boldsymbol{A}\bar{A}\bar{A}$; $\boldsymbol{A}\bar{A}\bar{A}\boldsymbol{A}\bar{A}$; $\boldsymbol{A}\bar{A}\bar{A}\bar{A}\boldsymbol{A}$; $\bar{A}\boldsymbol{AA}\bar{A}\bar{A}$; $\bar{A}\boldsymbol{A}\bar{A}\boldsymbol{A}\bar{A}$; $\bar{A}\boldsymbol{A}\bar{A}\bar{A}\boldsymbol{A}$; $\bar{A}\bar{A}\boldsymbol{AA}\bar{A}$; $\bar{A}\bar{A}\boldsymbol{A}\bar{A}\boldsymbol{A}$ et $\bar{A}\bar{A}\bar{A}\boldsymbol{AA}$. $P(X=2)=10\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^3$ $C_5^2p^2(1-p)^3=10\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^3$ $P(X=2)=C_5^2p^2(1-p)^3$ b. Les différentes possibilités sont : $\boldsymbol{AAA}\bar{A}\bar{A}$; $\boldsymbol{AA}\bar{A}\boldsymbol{A}\bar{A}$; $\boldsymbol{AA}\bar{A}\bar{A}\boldsymbol{A}$; $\boldsymbol{A}\bar{A}\boldsymbol{AA}\bar{A}$; $A\bar{A}\boldsymbol{A}\bar{A}A$; $A\bar{A}\bar{A}\boldsymbol{AA}$; $\bar{A}\boldsymbol{AAA}\bar{A}$; $\bar{A}\boldsymbol{AA}\bar{A}\boldsymbol{A}$ et $\bar{A}\bar{A}\boldsymbol{AAA}$. $P(X=3)=10\left(\frac{1}{6}\right)^3\times\left(\frac{5}{6}\right)^2$ $C_5^3p^3(1-p)^2=10\times\left(\frac{1}{6}\right)^3\times\left(\frac{5}{6}\right)^2$ $P(X=3)=C_5^3p^3(1-p)^2$	3. **Loi binomiale** **a. Définition** Soit E un schéma de Bernoulli à n épreuves. Pour une épreuve, on note p la probabilité du succès et q $(q=1-p)$ celle de l'échec. Soit X la variable aléatoire qui à chaque éventualité de E associe le nombre k de succès $(0\leq k\leq n)$. On a : ❖ L'ensemble des valeurs prises par X est : $\{0;1;\ldots;n\}$. ❖ La probabilité d'obtenir exactement k succès au cours des n épreuves est : $P(X=k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$ La loi de probabilité de X est appelée loi binomiale de paramètre n et p. On la note : $B(n;p)$. **b. Propriété** Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la loi binomiale de paramètres n et p.

<table>
<tr><th>MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES</th><th>STRATEGIES PEDAGOGIQUES</th><th>ACTIVITES DU PROFESSEUR</th><th>ACTIVITES DES APPRENANTS</th><th>TRACE ECRITE</th></tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>a. $E(X)$ et np
b. $V(X)$ et $np(1-p)$
$1 \times \left(\frac{1}{6}\right)^5 \times \left(\frac{5}{6}\right)^0$
.</td>
<td>4.
<table>
<tr><td>x_i</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>p_i</td><td>$\frac{3125}{7776}$</td><td>$\frac{3125}{7776}$</td><td>$\frac{1250}{7776}$</td><td>$\frac{250}{7776}$</td><td>$\frac{25}{7776}$</td><td>$\frac{1}{7776}$</td></tr>
</table>
5.a.
$E(X) = \frac{6480}{7776}$
$E(X) = \frac{5}{6}$
$np = 5 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$
$E(X) = np$
b.
$V(X) = \frac{10800}{7776} - \frac{25}{36}$
$V(X) = \frac{25}{18} - \frac{25}{36}$
$V(X) = \frac{25}{36}$
$np(1-p) = 5 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$
$V(X) = np(1-p)$</td>
<td>On a :
$E(X) = np$
$V(X) = np(1-p)$.</td>
</tr>
</table>

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *15 min*	-Travail individuel	*X est la variable aléatoire qui à chaque éventualité associe le nombre $k(0 \leq k \leq n)$ de succès et p la probabilité du succès. La loi de probabilité de X est appelée loi binomiale de paramètres n et p.* *On la note : $B(n\,;p)$* $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ $(q=1-p)$ EXERCICE DE FIXATION X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n=4$ et $p=\frac{1}{3}$. Calcule : a. $E(X)$ b. $V(X)$ c. $\sigma(X)$	REPONSES ATTENDUES a. $E(X)=np$ $E(X)=4\times\frac{1}{3}$ $E(X)=\frac{4}{3}$ b. $V(X)=np(1-p)$ $V(X)=5\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}$ $V(X)=\frac{10}{9}$ c. $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$ $\sigma(X)=\frac{\sqrt{10}}{3}$	

BIBLIOGRAPHIE

Programmes éducatifs et guides d'exécution Mathématiques $T^{LE}D$

Progressions annuelles

Mon livre de mathématiques $T^{LE}D$ Collection PYRAMIDE

Mon livre de mathématiques $T^{LE}D$ Collection CIAM/EDICEF

Les cahiers de la réussite T^{LE} D Vallesse

Mon cahier d'habiletés Mathématiques T^{LE} D JD Editions

WWW.monecoleàlamaison.ci

https://physiques-et-maths.fr

FICHE DE LEÇON

DERIVABILITE ET ETUDE DE FONCTIONS

TLE D

Rédigée par :

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON3 : DERIVABILITE ET ETUDE DE FONCTIONS

NOMBRE DES SEANCES : 9

DUREE D'UNE SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la définition d'une fonction dérivable à gauche (respectivement à droite) en un point - la définition des dérivées successives d'une fonction - les nouvelles notations des dérivées successives $\frac{df}{dx}$; $\frac{d^2f}{dx^2}$;… ; $\frac{d^nf}{dx^n}(n \in \mathbb{N}^*)$ - les propriétés relatives à la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle - la propriété relative à la dérivé d'une fonction composée - les propriétés relatives à l'inégalité des accroissements finis (les 2 formes)
Noter	- un nombre dérivé à gauche (respectivement à droite) d'une fonction - les dérivées successives d'une fonction
Reconnaître	- graphiquement un point d'inflexion
Déterminer	- le signe d'une fonction en utilisant ses variations - le sens de variation d'une bijection réciproque d'une fonction f sur un intervalle J connaissant le sens de variation de f sur un intervalle I - le nombre dérivé de la fonction f^{-1} en un point y_0 - un point d'inflexion d'une courbe représentative d'une fonction - des dérivées successives d'une fonction
Etudier	- la dérivabilité d'une fonction définie par intervalles en un point de raccordement
Calculer	- le nombre dérivé en un point d'une fonction composée - la dérivée d'une fonction composée

Représenter	- graphiquement la bijection réciproque d'une bijection dans un repère orthonormé - une demi-tangente - graphiquement une fonction du type : • $x \mapsto \cos(ax+b)$ • $x \mapsto \sin(ax+b)$ • $x \mapsto \tan(ax+b)$ • $x \mapsto \frac{ax+b}{cx^2+dx+e}$ • $x \mapsto \frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$ • $x \mapsto \sqrt{ax+b}$ • $x \mapsto \sqrt{ax^2+bx+c}$ - graphiquement des fonctions de raccordement - graphiquement une fonction : • comportant une valeur absolue • comportant une racine carrée
Interpréter	- graphiquement la dérivabilité à droite (resp. à gauche) d'une fonction en un point x_0
Démontrer	- qu'une fonction composée est dérivable en un point
Utiliser	- l'inégalité des accroissements finis pour : • démontrer une inégalité • établir un encadrement
Traiter une situation	- faisant appel à la dérivabilité et à la représentation graphique des fonctions

SITUATION D'APPRENTISSANGE

Monsieur Talla possède une agence de déménagement. Chaque jour lorsqu'il associe le nombre de manœuvre à la somme à payer pour un déménagement, il obtient la fonction $f(x) = 4000\left(\frac{x^2+5x+4}{x}\right)$ qui représente le coût d'un déménagement avec x le nombre de manœuvre. Il souhaite savoir le nombre de manœuvre qu'il lui faut pour que la somme à payer soit minimale. Aide-le.

PLAN DE LA LEÇON

I. DERIVABILITE
1. Dérivabilité en un point
   Définition
2. Dérivabilité à gauche-dérivabilité à droite d'une fonction en un point
   a. Propriété et définition
   b. Propriétés
   c. Demi-tangente verticale
3. Dérivabilité sur un intervalle
   a. Définition
   b. Propriété
4. Dérivabilité d'une fonction composée
   a. Propriété
   b. Conséquences
5. Dérivabilité d'une bijection réciproque
   a. Propriété
   b. Sens de variation de la réciproque d'une fonction bijective
      Propriété
6. Dérivées successives
   a. Définitions
   b. Point d'inflexion
7. Inégalité des accroissements finis
   Propriété1
   Propriété2

II. ETUDES DE FONCTIONS

HABILETES, CONTENUS ET PLANS PAR SEANCE

SEANCE1

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la définition d'une fonction dérivable à gauche (respectivement à droite) en un point
Noter	- un nombre dérivé à gauche (respectivement à droite) d'une fonction
Interpréter	- graphiquement la dérivabilité à droite (resp. à gauche) d'une fonction en un point x_0
Représenter	- une demi-tangente

PLAN DE LA SEANCE1

I. DERIVABILITE
   1. Dérivabilité en un point
      Définition
   2. Dérivabilité à gauche-Dérivabilité à droite
      a. Propriété et définition
      b. Propriétés
      c. Démi-tangente verticale

SEANCE2

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- les propriétés relatives à la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle
Etudier	- la dérivabilité d'une fonction définie par intervalles en un point de raccordement

PLAN DE LA SEANCE2

   3. Dérivabilité sur un intervalle
      a. Définition
      b. Propriété

SEANCE3

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la propriété relative à la dérivé d'une fonction composée
Déterminer	- le sens de variation d'une bijection réciproque d'une fonction f sur un intervalle J connaissant le sens de variation de f sur un intervalle I - le nombre dérivé de la fonction f^{-1} en un point y_0
Calculer	- le nombre dérivé en un point d'une fonction composée - la dérivée d'une fonction composée
Représenter	- graphiquement la bijection réciproque d'une bijection dans un repère orthonormé
Démontrer	- qu'une fonction composée est dérivable en un point

PLAN DE LA SEANCE3

   4. Dérivabilité d'une fonction composée
      a. Propriété
      b. Conséquences
   5. Dérivabilité d'une bijection réciproque
      a. Propriété
      b. Sens de variation de la réciproque d'une fonction bijective
         Propriété

SEANCE4

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la définition des dérivées successives d'une fonction - les nouvelles notations des dérivées successives $\frac{df}{dx}$; $\frac{d^2f}{dx^2}$;… ; $\frac{d^nf}{dx^n}(n \in \mathbb{N}^*)$
Noter	- les dérivées successives d'une fonction
Reconnaître	- graphiquement un point d'inflexion
Déterminer	- un point d'inflexion d'une courbe représentative d'une fonction - des dérivées successives d'une fonction

PLAN DE LA SEANCE4

6. Dérivées successives
   a. Définitions
   b. Point d'inflexion

SEANCE5

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- les propriétés relatives à l'inégalité des accroissements finis (les 2 formes)
Utiliser	- l'inégalité des accroissements finis pour : • démontrer une inégalité • établir un encadrement

PLAN DE LA SEANCE5

7. Inégalité des accroissements finis
   Propriété1
   Propriété2

SEANCE6

HABILETES	CONTENUS
Représenter	- graphiquement la bijection réciproque d'une bijection dans un repère orthonormé

PLAN DE LA SEANCE6

II. ETUDES DE FONCTIONS
   1. Fonctions polynômes

SEANCE7

HABILETES	CONTENUS
Représenter	- graphiquement une fonction du type : • $x \mapsto \frac{ax+b}{cx^2+dx+e}$ • $x \mapsto \frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$

PLAN DE LA SEANCE7

2. Fractions rationnelles

SEANCE8

HABILETES	CONTENUS
Représenter	- graphiquement une fonction du type : • $x \mapsto \sqrt{ax+b}$ • $x \mapsto \sqrt{ax^2+bx+c}$ - graphiquement une fonction : • comportant une racine carrée

PLAN DE LA SEANCE8

3. Fonctions racines carrées

SEANCE9

HABILETES	CONTENUS
Représenter	- graphiquement une fonction du type : • $x \mapsto \cos(ax+b)$ • $x \mapsto \sin(ax+b)$ • $x \mapsto \tan(ax+b)$

PLAN DE LA SEANCE9

4. Fonctions trigonométriques

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON3 : DERIVABILITE ET ETUDE DE FONCTIONS

SEANCE : 1/9

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la définition d'une fonction dérivable à gauche (respectivement à droite) en un point
Noter	- un nombre dérivé à gauche (respectivement à droite) d'une fonction
Interpréter	- graphiquement la dérivabilité à droite (resp. à gauche) d'une fonction en un point x_0
Représenter	- une demi-tangente

PLAN DE LA SEANCE

I. DERIVABILITE
   1. Dérivabilité en un point
      Définition
   2. Dérivabilité à gauche-dérivabilité à droite d'une fonction en un point
      a. Propriété et définition
      b. Propriétés
      c. Demi-tangente verticale

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Présentation *5 min*	-Lecture -Travail collectif	-Donne l'énoncé de la situation d'apprentissage aux apprenants. -Demande aux apprenants de faire une lecture silencieuse de la situation. -Demande à un apprenant de lire à haute voix l'énoncé de la situation. -Lis l'énoncé de la situation d'apprentissage à haute voix. **Question pour faire ressortir les tâches :** Qu'est-ce que les élèves décident de faire ?	-Les apprenants lisent silencieusement l'énoncé de la situation. -Un apprenant lis à haute voix l'énoncé de la situation. -Les apprenants écoutent Attentivement. REPONSE ATTENDUE Ils souhaitent savoir le nombre de manœuvre qu'il lui faut pour que la somme à payer soit minimale.	
Développement *25 min*	-Travail individuel	ACTIVITE Soit f et g deux fonctions définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ respectivement par : $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$. 1. Calcule : a. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ b. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$	REPONSES ATTENDUES 1. a. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} x + 2$ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 4$ b. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$	I. DERIVABILITE 1. Dérivabilité en un point Définition f est une fonction et x_0 un élément de son ensemble de définition. Lorsque la fonction $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une une limite finie $\boldsymbol{l}$ en x_0(ou la fonction

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		c. $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} \dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}$ 2. Calcule : a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x}$ b. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$ c. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \dfrac{g(x)-g(-2)}{x-1}$	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} x+1$ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 2$ c. $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} \dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} \dfrac{x^2-4}{x+2}$ $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} \dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} x-2$ $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} \dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} -4$ 2. a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x}}{x}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x} = +\infty$ b. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \dfrac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \dfrac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$	$\dfrac{f(x+h)-f(x_0)}{h}$ admet une limite finie $\boldsymbol{l}$ en 0) on dit que f est dérivable en x_0. Cette limite est appelée le nombre dérivé de f en x_0. On le note $f'(x_0)$. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ La droite d'équation $\boldsymbol{y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$ est tangente à (C_f) en son point d'abscisse x_0. 2. <u>Dérivabilité à gauche-dérivabilité à droite d'une fonction en un point</u> a. <u>Propriété et définition</u> I est un intervalle ouvert. Soit $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction, soit x_0 un élément de I et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \frac{1}{2}$ c. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{1}{\sqrt{x}+1}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \frac{1}{2}$	On dit que ***f est dérivable à gauche en x_0*** lorsque $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est finie. Cette limite s'appelle le nombre dérivé de f à gauche en x_0 et on la note $\boldsymbol{f'_g(x_0)}$. (C) admet une demi-tangente à gauche au point A d'abscisse x_0. On dit que ***f est dérivable à droite en x_0*** lorsque $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est finie. Cette limite s'appelle le nombre dérivé de f à droite en x_0 et on la note $\boldsymbol{f'_d(x_0)}$. (C) admet une demi-tangente à droite au point A d'abscisse x_0. b. <u>Propriétés</u> Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]a;b[$ contenant x_0. f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \frac{1}{2}$ c. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{1}{\sqrt{x}+1}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \frac{1}{2}$	gauche en x_0, dérivable à droite en x_0 et $\boldsymbol{f'_g(x_0) = f'_d(x_0)}$. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[x_0, b[$. f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite en x_0. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]a, x_0]$. f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche en x_0. c. <u>Demi-tangente verticale</u> Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0. Lorsque $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est ***infinie*** la courbe représentative de f admet une ***demi-tangente verticale*** au point $A(x_0, f(x_0))$.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *20 minutes*	-Travail individuel	<u>EXERCICES DE FIXATION</u> 1. On considère la fonction f définie par : $f(x)=\begin{cases}2x^2 si\ x\geq 0\\3x^4\ si\ x<0\end{cases}$ étudie la dérivabilité de f en 0. 2. Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x)=x\lvert x-3\rvert$ étudie la dérivabilité de g en 3. 3. On considère la fonction h définie par : $h(x)=\begin{cases}(x-1)^2 si\ x<1\\1-\sqrt{x}\ si\ x\geq 0\end{cases}$ étudie la dérivabilité de f en 1. 4. On considère la fonction définie par : $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}\ si\ x\geq 0\\\sqrt{-x}\ si\ x<0\end{cases}$ Soit (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère (O, I, J). Justifie que	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **1.** $f(x)=\begin{cases}2x^2 si\ x\geq 0\\3x^4\ si\ x<0\end{cases}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}}\dfrac{2x^2}{x}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}}2x$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}}\dfrac{3x^4}{x}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}}3x^3$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$ $f'_g(0)=f'_d(0)$ donc f est dérivable en 0. **2.** $g(x)=x\lvert x-3\rvert$ $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\<}}\dfrac{g(x)-g(3)}{x-3}=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\<}}\dfrac{x(3-x)}{x-3}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\<}}\dfrac{g(x)-g(3)}{x-3}=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\<}}-x$ $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\<}}\dfrac{g(x)-g(3)}{x-3}=-3$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		(C) admet une tangente verticale au point O. 5. On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = -\sqrt{\lvert 1 - x^2 \rvert}$ Soit (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère (O, I, J). Justifie que (C) admet une tangente verticale au point d'abscisse 1.	$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}} \frac{g(x)-g(3)}{x-3} = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}} \frac{x(x-3)}{x-3}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}} \frac{g(x)-g(3)}{x-3} = x$ $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}} \frac{g(x)-g(3)}{x-3} = 3$ $g'_g(3) \neq g'_d(3)$ donc g n'est pas dérivable en 3. **3.** $h(x) = \begin{cases} (x-1)^2 si\ x < 1 \\ 1-\sqrt{x}\ si\ x \geq 0 \end{cases}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{(x-1)^2}{x-1}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} x-1$ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = 0$ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{1-\sqrt{x}}{x-1}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{-1}{1+\sqrt{x}}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = -\frac{1}{2}$ $h'_g(1) \neq h'_d(1)$ donc h n'est pas dérivable en 1.	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			4. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\ si\ x \geq 0 \\ \sqrt{-x}\ si\ x < 0 \end{cases}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{\sqrt{-x}}{x}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{1}{\sqrt{-x}}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{\sqrt{x}}{x}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty$ (C) admet une demi-tangente verticale au point O dirigée vers le haut. **5**. $f(x) = -\sqrt{\lvert 1-x^2 \rvert}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ <}} \frac{-\sqrt{1-x^2}}{x-1}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ <}} \frac{-\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x}}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{-\sqrt{x^2-1}}{x-1}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$ (C) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 1 dirigée vers le bas.	
	-Travail individuel	<u>EXERCICES DE MAISON</u>		

EXERCICE1

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x+2}$
On note (C_f) la courbe représentative de f dans un repère (O ; I ; J).
1. Montre que, en utilisant la définition, que f est dérivable en 3 puis précise f '(3).
2. Donner une équation de la tangente à (C_f) en 3.

EXERCICE2

On considère la fonction g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to |x^2 + x - 2|$$

Etudie la dérivabilité de g en -2 et interprète graphiquement le résultat.

EXERCICE3

On donne la fonction g sur $[0. +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x-2}$.

Etudie la dérivabilité de g en 2 puis interprète graphiquement le résultat obtenu.

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON3 : DERIVABILITE ET ETUDE DE FONCTIONS

SEANCE : 2/9

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- les propriétés relatives à la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle
Etudier	- la dérivabilité d'une fonction définie par intervalles en un point de raccordement

PLAN DE LA SEANCE

3. Dérivabilité sur un intervalle
   a. Définition
   b. Propriété

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
15 min *Développement* *20 min*	-Travail en groupe -Travail individuel	Correction des exercices de maison <u>ACTIVITE</u> On donne la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} 2x^2 \ \forall x \in]-\infty; 2] \\ \dfrac{1}{3x} \ \forall x \in [2; +\infty[\end{cases}$ On se propose d'étudier la dérivabilité de f et de déterminer f'. 1. Etudie la dérivabilité de f en tout point de $]-\infty; 2[$. 2. Etudie la dérivabilité de f en tout point de $]2; +\infty[$. 3. Etudie la dérivabilité de f à gauche en 2 et à droite en 2. 4. Conclue.	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **1**. Sur $]-\infty; 2[$, f coïncide avec $g: x \to 2x^2$ donc f est dérivable en tout élément de $]-\infty; 2[$. f est dérivable sur $]-\infty; 2[$ et pour tout x élément de $]-\infty; 2[$ $f'(x) = 4x$. **2**. Sur $]2; +\infty[$, f coïncide avec $h: x \to \dfrac{1}{3x}$ donc f est dérivable en tout élément de $]2; +\infty[$,. f est dérivable sur $]2; +\infty[$, et pour tout x élément de $]-\infty; 2]$ $f'(x) = -\dfrac{1}{3x^2}$. 3. $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{2(x^2 - 4)}{x - 2}$ $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} 2(x + 2)$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 8$ f est dérivable à gauche en 2 et	3. <u>Dérivabilité sur un intervalle</u> a. <u>Définition</u> f est une fonction définie sur un intervalle $]a; b[$. On dit que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]a; b[$ lorsque f est dérivable en tout élément de l'intervalle $]a; b[$. f est une fonction définie sur un intervalle $[a; b]$. On dit que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[a; b]$ lorsque f est dérivable sur $]a; b[$, dérivable à droite en a, dérivable à gauche en b. f est une fonction définie sur un intervalle $]a; b]$. On dit que f est dérivable sur $]a; b]$ lorsque f est dérivable sur $]a; b[$, dérivable à gauche en b.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			$f'_g(2) = 8$ $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{\frac{1}{3x}-\frac{1}{6}}{x-2}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)}{x-2}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{2-x}{2x}\right)}{x-2}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} -\frac{1}{6x}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} -\frac{1}{12}$ f est dérivable à droite en 2 et $f'_d(2) = -\frac{1}{12}$. 4. f est dérivable sur $]-\infty; 2[$ et dérivable à gauche en 2 donc f est dérivable sur $]-\infty; 2]$. f est dérivable sur $]2; +\infty[$ et dérivable à droite en 2 donc f est dérivable sur $[2; +\infty[$. $f'(x) = \begin{cases} 4x\ \forall x \in]-\infty; 2[\\ -\frac{1}{3x^2}\ \forall x \in]2; +\infty[\\ f'_g(2) = 8 \\ f'_d(2) = -\frac{1}{12} \end{cases}$	f est une fonction définie sur un intervalle $[a; b[$. On dit que f est dérivable sur $[a; b[$ lorsque f est dérivable sur $]a; b[$, dérivable à droite en a. b. <u>Propriété</u> Si une fonction est dérivable sur un intervalle, alors elle est continue sur cet intervalle.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *20 min*	-Travail individuel	EXERCICE DE FIXATION On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$. Etudie la dérivabilité de f sur $[-3; 3]$.	REPONSES ATTENDUES $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ >}} \dfrac{f(x) - f(-3)}{x + 3} = \lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ >}} \dfrac{\sqrt{9 - x^2}}{x + 3}$ $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ >}} \dfrac{f(x) - f(-3)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ >}} \dfrac{\sqrt{3 - x}}{\sqrt{x + 3}}$ $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ >}} \dfrac{f(x) - f(-3)}{x + 3} = +\infty$ f n'est pas dérivable à droite en 3. $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \dfrac{\sqrt{9 - x^2}}{x - 3}$ $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \dfrac{\sqrt{x + 3}}{\sqrt{-x + 3}}$ $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3} = +\infty$ f n'est pas dérivable à gauche en 3. f n'est dérivable sur $[-3; 3]$. f est dérivable sur $]-3; 3[$à droite en 3.	
	-Travail individuel	EXERCICE DE MAISON		

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON3 : DERIVABILITE ET ETUDE DE FONCTION

SEANCE : 3/9

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la propriété relative à la dérivé d'une fonction composée
Déterminer	- le sens de variation d'une bijection réciproque d'une fonction f sur un intervalle J connaissant le sens de variation de f sur un intervalle I - le nombre dérivé de la fonction f^{-1} en un point y_0
Calculer	- le nombre dérivé en un point d'une fonction composée - la dérivée d'une fonction composée
Représenter	- graphiquement la bijection réciproque d'une bijection dans un repère orthonormé
Démontrer	- qu'une fonction composée est dérivable en un point

PLAN DE LA SEANCE

4. Dérivabilité d'une fonction composée
   a. Propriété
   b. Conséquences
5. Dérivabilité d'une bijection réciproque
   a. Propriété
   b. Sens de variation de la réciproque d'une fonction bijective
      Propriété

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
10 min	-Travail en groupe	Correction des exercices de maison		
Développement *15 min*	-Travail en groupes	<u>ACTIVITE1</u> On donne les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = 2x^2$ et $g(x) = 3x + 1$ 1. Détermine g$of(x)$ 2. Détermine : a. $f'(x)$ b. $g'(x)$ c. $(fog)'(x)$ 3. Compare $(fog)'(x)$ et $g'(x) \times f'(g(x))$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. $fog(x) = f(g(x))$ $fog(x) = f(3x + 1)$ $fog(x) = 2(3x + 1)^2$ $fog(x) = 2(9x^2 + 6x + 1)$ $fog(x) = 18x^2 + 12x + 2$ 2. a. $f'(x) = 4x$ b. $g'(x) = 3$ c. $(fog)'(x) = 36x + 12$ 3. $g'(x) \times f'(g(x)) = 3 \times 4(3x + 1)$ $g'(x) \times f'(g(x)) = 36x + 12$ $(fog)'(x) = g'(x) \times f'(g(x))$	4. <u>Dérivabilité d'une fonction composée</u> a. <u>Propriété</u> Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et g une fonction dérivable sur un intervalle inclus dans *f*(I) alors la fonction *gof* est dérivable sur I et on a : $(gof)' = f' \times g'of$. b. <u>Conséquences</u> Soit u une fonction dérivable sur un intervalle K. ▪ $\forall n \in \mathbb{Q}^*$, $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ ▪ Pour $u > 0$, $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ ▪ $(\cos u)' = -u' \sin u$ ▪ $(\sin u)' = u' \cos u$ ▪ Pour $\cos u \neq 0$, $(\tan u)' = u'[1 + tan^2(u)]$ ou $(\tan u)' = \frac{u'}{cos^2(u)}$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *10 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Dans chacun des cas suivants, f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Calcule sa dérivée. 1. $f(x) = (3x^2 - 2x + 5)^3$ 2. $f(x) = \sqrt{x^2 - 8}$ 3. $f(x) = \cos(2x^3 + 1)$ 4. $f(x) = \sin(\cos(3x + 4))$ 5. $f(x) = \tan\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. $f(x) = (3x^2 - 2x + 5)^3$ $f(x) = 3(6x - 2)(3x^2 - 2x + 5)^2$ $f(x) = (18x - 6)(3x^2 - 2x + 5)^2$ 2. $f(x) = \sqrt{x^2 - 8}$ $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 8}}$ $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 8}}$ 3. $f(x) = \cos(2x^3 + 1)$ $f'(x) = -6x^2 \sin(2x^3 + 1)$ 4. $f(x) = \sin(\cos(3x + 4))$ $f'(x) = -3 \sin(3x + 4) \cos(\cos(3x + 4))$ 5. $f(x) = \tan\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)$ $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}}\left[1 + tan^2\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)\right]$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Développement *15 min*	-Travail individuel	<u>ACTIVITE2</u> Soit f une bijection d'un intervalle I sur f(I) et f^{-1} sa bijection réciproque. On suppose que pour tout élément b de f(I), $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$. 1. a. Détermine fof^{-1} b. Déduis-en que $(fof^{-1})'(b) = 1$. 2. En utilisant la dérivée de la composée de deux fonctions, détermine $(fof^{-1})'(b)$. 3. Déduis la valeur de $(f^{-1})'(b)$. 4. Discute du sens de variation de f^{-1} selon celui de f.	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. a. $fof^{-1} : I \to I$ $x \to x$ b. $(fof^{-1})(x) = x$. $(fof^{-1})'(x) = 1$. $(fof^{-1})'(b) = 1$ 2. $(fof^{-1})'(b) = (f^{-1})'(b) \times f'(f^{-1}(b))$ 3. $(f^{-1})'(b) \times f'(f^{-1}(b)) = 1$ $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$ 4. $(f^{-1})'(b) \times f'(f^{-1}(b)) = 1$ $(f^{-1})'(b) \times f'(f^{-1}(b)) > 0$ donc $(f^{-1})'$ et f' ont le même signe. On en déduit que : ○ Si f est croissante sur I alors f^{-1} est croissante sur f(I). ○ Si f est décroissante sur I alors f^{-1} est décroissante sur f(I).	5. <u>Dérivabilité d'une bijection réciproque</u> a. <u>Propriété</u> Soit f une bijection d'un intervalle I sur f(I) et a un élément de I d'image b par f. Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$ (c'est-à-dire $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$) alors f^{-1} est dérivable en b et on a : $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$ b. <u>Sens de variation de la réciproque d'une fonction bijective</u> <u>Propriété</u> Soit f une fonction bijective et dérivable sur un intervalle I et f^{-1} sa bijection réciproque. ○ Si f est croissante sur I alors f^{-1} est croissante sur f(I). ○ Si f est décroissante sur I alors f^{-1} est décroissante sur f(I).

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *10 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $f(x) = x^3 + 1$. 1. a. Montre que f est bijective. b. Donne le sens de variation de f^{-1} 2. f^{-1} est la bijection réciproque de f. a) Démontre que f^{-1} est dérivable en 9 et calcule $(f^{-1})'(9)$. b) f^{-1} est-elle dérivable en 1 ? Justifie ta réponse.	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. a. f est un polynôme donc f est continue sur $\mathbb{R}$. $f'(x) = 3x^2$ $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, f est bijective. b. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. 2.a. $f(x) = 9 \Leftrightarrow x^3 + 1 = 9$ $x^3 = 8$ $x = 2$ $f'(2) = 12$ $f'(2) \neq 0$ donc f^{-1} est dérivable en 9. $(f^{-1})'(9) = \frac{1}{f'(2)}$ $(f^{-1})'(9) = \frac{1}{12}$ b. $f(x) = 1 \Leftrightarrow x^3 + 1 = 1$ $x^3 = 0$ $x = 0$ $f'(0) = 0$ $f'(0) = 0$ donc f^{-1} n'est dérivable en 1.	
	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE MAISON</u>		

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON3 : DERIVABILITE ET ETUDE DE FONCTION

SEANCE : 4/9

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la définition des dérivées successives d'une fonction - les nouvelles notations des dérivées successives $\frac{df}{dx}$; $\frac{d^2f}{dx^2}$;… ; $\frac{d^nf}{dx^n}(n \in \mathbb{N}^*)$
Noter	- les dérivées successives d'une fonction
Reconnaître	- graphiquement un point d'inflexion
Déterminer	- un point d'inflexion d'une courbe représentative d'une fonction - des dérivées successives d'une fonction

PLAN DE LA SEANCE

6. Dérivées successives
   a. Définitions
   b. Point d'inflexion

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
15 min *Développement* *25 min*	-Travail en groupe -Travail individuel	Correction des exercices de maison <u>ACTIVITE</u> On considère la fonction *f* dérivable et définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^7 + x^5 - 2x^4 + x^3 - 3x + 7$. 1. Calcule la dérivée *f* ' de la fonction *f* sur $\mathbb{R}$. 2. On admet que *f* ' est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calcule la dérivée de la fonction *f* '(on la notera f''). 3. On admet que f'' est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calcule la dérivée de la fonction *f* '(on la notera $f^{(3)}$). 4. Calcule $f^{(4)}$; $f^{(5)}$; $f^{(6)}$ et $f^{(7)}$.	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. $f(x) = x^7 + x^5 - 2x^4 + x^3 - 3x + 7$. $f'(x) = 7x^6 + 5x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 3$ 2. $f''(x) = 42x^5 + 20x^3 - 24x^2 + 6x$ 3. $f^{(3)}(x) = 210x^4 + 60x^2 - 48x + 6$ 4. $f^{(4)}(x) = 840x^3 + 120x - 48$ $f^{(5)}(x) = 2520x^2 + 120$ $f^{(6)}(x) = 5040x$ $f^{(7)}(x) = 5040$	6. <u>Dérivées successives</u> a. <u>Définitions</u> Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I. Si *f* est dérivable sur I, alors sa dérivée *f* ' est la dérivée première de *f*. On la note aussi : $f^{(1)}$ ou $\frac{df}{dx}$ Si *f* 'est dérivable sur I, alors sa dérivée est la dérivée seconde de *f*. On la note : f'' ou $f^{(2)}$ ou $\frac{d^2f}{dx^2}$ De proche en proche, la dérivée n-ième de *f* sur I, si elle existe, est la dérivée de la fonction $(n-1)$-ième de *f* sur I. On la note : $f^{(n)}$ ou $\frac{d^nf}{dx^n}$ b. <u>Point d'inflexion</u> Soit *f* une fonction deux fois

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *15 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> 1. Calcule les dérivées successives jusqu'à l'ordre 3 de chacune des fonctions suivantes : $f(x) = x^4 - 2x^3 - 8$ $g(x) = \cos\left(\frac{x}{2} - 1\right)$ $h(x) = \frac{1}{x+3}$ 2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^4 - 6x^2 + 1$. Détermine les coordonnées des points d'inflexion éventuels de la courbe (C_f).	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$ $f''(x) = 12x^2 - 12x$ $f^{(3)}(x) = 24x - 12$ $g'(x) = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2} - 1\right)$ $g''(x) = -\frac{1}{4}\cos\left(\frac{x}{2} - 1\right)$ $g^{(3)}(x) = \frac{1}{8}\sin\left(\frac{x}{2} - 1\right)$ $h'(x) = -\frac{1}{(x+3)^2}$ $h''(x) = \frac{2(x+3)}{(x+3)^4}$ $h^{(2)}(x) = \frac{2}{(x+3)^3}$ $h^{(3)}(x) = -\frac{6(x+2)^2}{(x+3)^6}$ $h^{(3)}(x) = -\frac{6}{(x+3)^4}$	dérivable sur un intervalle I, (C_f) est sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère. Le point A(a; $f(a)$) est un point d'inflexion de (C_f) lorsque $f^{(2)}$ s'annule en a changeant de signe.

<table>
<tr><th>MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES</th><th>STRATEGIES PEDAGOGIQUES</th><th>ACTIVITES DU PROFESSEUR</th><th>ACTIVITES DES APPRENANTS</th><th>TRACE ECRITE</th></tr>
<tr>
<td></td>
<td>-Travail individuel</td>
<td><u>EXERCICE DE MAISON</u></td>
<td>
2.$f'(x) = 4x^3 - 12x$
$f''(x) = 12x^2 - 12$
$f''(x) = 12(x^2 - 1)$
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$ -1 1 $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f''(x)$</td><td>$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$</td></tr>
</table>

Les points d'inflexion de la courbe (C_f) sont A$(-1; f(-1))$ et B$(1; f(1))$.

$f(-1) = (-1)^4 - 6(-1)^2 + 1$
$f(-1) = 1 - 6 + 1$
$f(-1) = -4$

$f(1) = (1)^4 - 6(1)^2 + 1$
$f(-1) = 1 - 6 + 1$
$f(-1) = -4$

A$(-1; -4)$ et B$(1; -4)$ sont les points d'inflexion de la courbe (C_f).
</td>
<td></td>
</tr>
</table>

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON3 : DERIVABILITE ET ETUDE DE FONCTION

SEANCE : 5/9

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- les propriétés relatives à l'inégalité des accroissements finis (les 2 formes)
Utiliser	- l'inégalité des accroissements finis pour : • démontrer une inégalité • établir un encadrement

PLAN DE LA SEANCE

7. Inégalité des accroissements finis
   Propriété1
   Propriété2

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
15 min *Développement* *25 min*	-Travail en groupe -Travail individuel	Correction des exercices de maison ACTIVITE Partie1 Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. m et M sont deux nombres réels tels que : $\forall x \in [a;b], m \leq f'(x) \leq M$. 1. On considère la fonction g définie sur $[a;b]$ par : $g(x) = f(x) - mx$. En utilisant le sens de variation de g, démontre que : $m(b-a) \leq f(b) - f(a)$. 2. On considère la fonction h définie sur $[a;b]$ par : $h(x) = Mx - f(x)$. En utilisant le sens de variation de h, démontre que : $f(b) - f(a) \leq M(b-a)$ 3. Déduis des questions 1. et 2. un encadrement de $f(b) - f(a)$.	REPONSES ATTENDUES **1**. $g(x) = f(x) - mx$ $g'(x) = f'(x) - m$ $\forall x \in [a;b], m \leq f'(x) \leq M$ $\forall x \in [a;b], f'(x) - m \geq 0$ $\forall x \in [a;b], g'(x) \geq 0$ donc g est croissante sur $[a;b]$. $g(a) \leq g(b)$ $f(a) - ma \leq f(b) - mb$ $mb - ma \leq f(b) - f(a)$ $m(b-a) \leq f(b) - f(a)$. **2**. $h(x) = Mx - f(x)$ $h'(x) = M - f'(x)$ $\forall x \in [a;b], m \leq f'(x) \leq M$ $\forall x \in [a;b], M - f'(x) \geq 0$ $\forall x \in [a;b], h'(x) \geq 0$ donc h est croissante sur $[a;b]$. $h(a) \leq h(b)$ $Ma - f(a) \leq Mb - f(b)$ $f(b) - f(a) \leq Mb - Ma$ $f(b) - f(a) \leq M(b-a)$ **3**. On déduit des questions 1. et 2. Que : $\boldsymbol{m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)}$.	7. Inégalité des accroissements finis Propriété1 Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. S'il existe des nombres réels M et m tels que : $\forall x \in [a;b], m \leq f'(x) \leq M$ alors $\boldsymbol{m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)}$.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *15 min*	-Travail individuel	<u>Partie2</u> Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. On suppose qu'il existe un nombre réel M tel que : $\forall x \in]a;b[, \lvert f'(x)\rvert \leq M$. En utilisant les résultats de l'activité1, démontre que : pour tous nombres réels x_1 et x_2 éléments de $]a;b[$, $\lvert f(x_2)-f(x_1)\rvert \leq M(x_2-x_1)$ <u>EXERCICE DE FIXATION</u> 1.Soit f une fonction dérivable sur $[2;5]$ et telle que : $1 \leq f'(x) \leq 4$ pour tout x élément de $[2;5]$. Démontre que : $3 \leq f(5)-f(2) \leq 12$. 2.Soient a et b deux nombres réels, tels que : $a<b$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis sur $[a;b]$, démontre que : $\lvert\cos b-\cos a\rvert \leq \lvert b-a\rvert$	$\forall x \in]a;b[, \lvert f'(x)\rvert \leq M$ $\forall x \in]a;b[, -M \leq f'(x) \leq M$. D'après la partie1, on a : Pour tous nombres réels x_1 et x_2 éléments de $]a;b[$, $-M(x_2-x_1) \leq f(x_2)-f(x_1) \leq M(x_2-x_1)$. $\lvert \boldsymbol{f(x_2)-f(x_1)}\rvert \leq \boldsymbol{M(x_2-x_1)}$ <u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. Soit f une fonction continue sur $[2;5]$ et dérivable sur $]2;5[$. $\forall x \in [2;5]$, $1 \leq f'(x) \leq 4$ D'après l'inégalité des accroissements finis, on a : $1(5-2) \leq f(5)-f(2) \leq 4(5-2)$. $3 \leq f(5)-f(2) \leq 12$ 2. Posons $g(x)=\cos x$ g est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. $\forall x \in]a;b[, g'(x)=-\sin x$ $\forall x \in]a;b[, \lvert g'(x)\rvert \leq 1$ D'après l'inégalité des accroissements finis, on a :	<u>Propriété2</u> f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. S'il existe un nombre réel M tel que pour tout x élément de I $\lvert f'(x)\rvert \leq M$, alors pour tous nombres réels a et b éléments de I, $\lvert \boldsymbol{f(b)-f(a)}\rvert \leq \boldsymbol{M\lvert b-a\rvert}$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
	-Travail individuel	EXERCICE DE MAISON	$\lvert g(b) - g(a)\rvert \leq 1 \times \lvert b - a\rvert$ $\lvert g(b) - g(a)\rvert \leq \lvert b - a\rvert$ $\lvert \cos b - \cos a\rvert \leq \lvert b - a\rvert$	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON3 : DERIVABILITE ET ETUDE DE FONCTION

SEANCE : 6/9

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Représenter	- graphiquement la bijection réciproque d'une bijection dans un repère orthonormé

PLAN DE LA SEANCE

II. ETUDES DE FONCTIONS
   1. Fonctions polynômes

STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS
-Travail en groupes	<u>EXERCICE1</u> Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 4$. 1. Détermine $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 2. Détermine $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ et interprète graphiquement les résultats obtenus. 3. Détermine le sens de variation de *f* sur $\mathbb{R}$. 4. Dresse le tableau de variation de *f*. 5. Soit *h* la restriction de f à l'intervalle $\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[$. Montre que *h* réalise une bijection de $\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[$ sur un intervalle K à déterminer. 6. Donne le sens de variation de h^{-1} la bijection réciproque de *h*. 7. Représente (C_f) et ($C_{h^{-1}}$) dans le plan muni d'un repère (O, I, J) : unité graphique : 1cm.	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 4$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 - 2x^2 + x + 4$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 - 2x^2 + x + 4$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ 2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + x + 4}{x}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ) en $-\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + x + 4}{x}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ) en $+\infty$. 3. $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$ $\Delta = 16 - 12$ $\Delta = 4$ $x_1 = \frac{4-2}{6}, x_2 = \frac{4+2}{6}$ $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 1$ $f'(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 1)$

STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS

$\forall x \in \left]-\infty ; \frac{1}{3}\right[\cup]1 ; +\infty[, f'(x) > 0$

$\forall x \in \left]\frac{1}{3} ; 1\right[, f'(x) < 0.$

f est strictement croissante sur $\left]-\infty ; \frac{1}{3}\right[$ et sur $]1 ; +\infty[$.

f est strictement décroissante sur $\left]\frac{1}{3} ; 1\right[$.

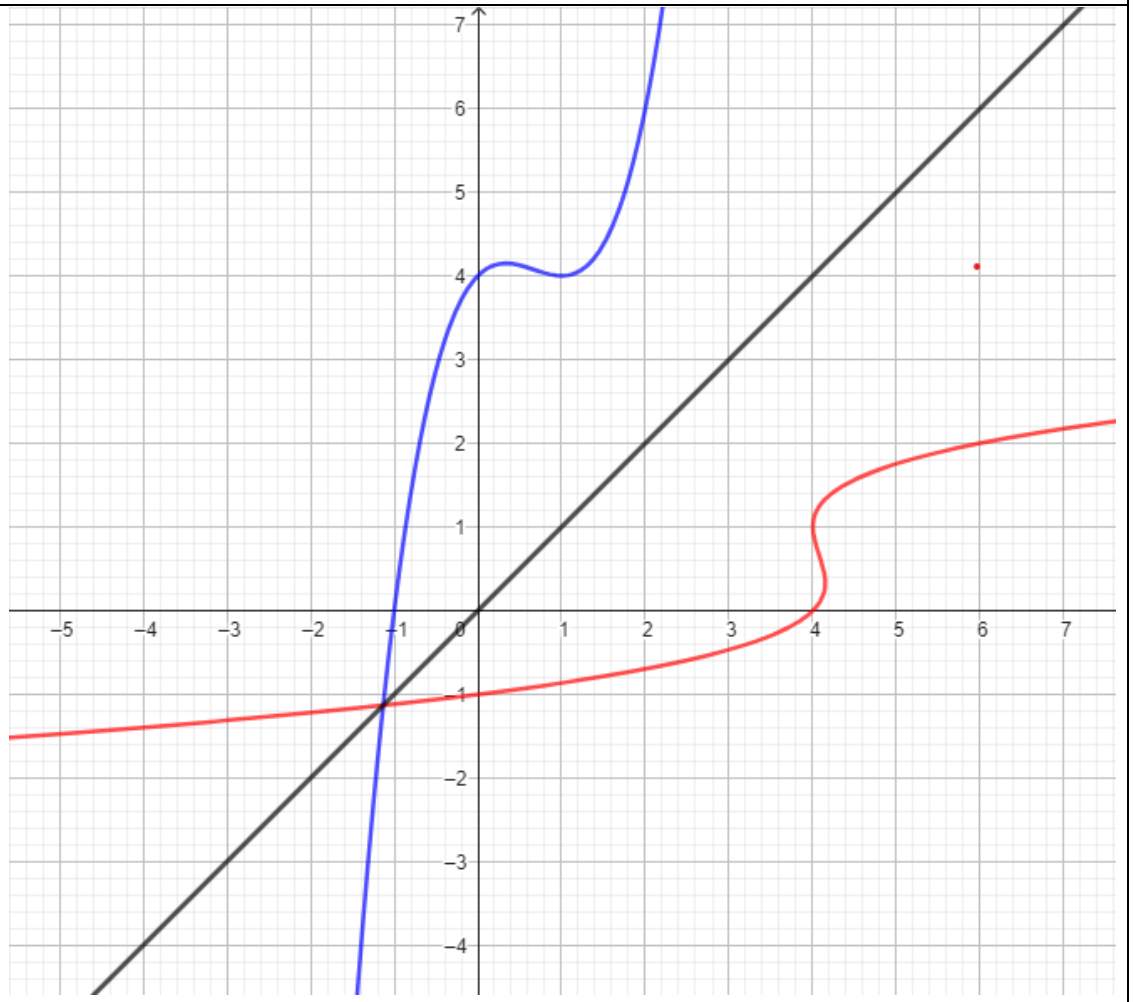
4.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{112}{27}$	↘	4	↗	$+\infty$

5. h est continue et strictement croissante sur $\left]-\infty ; \frac{1}{3}\right[$.

   $f\left(\left]-\infty ; \frac{1}{3}\right[\right) = \left]-\infty ; \frac{112}{27}\right[$ donc h réalise une bijection de $\left]-\infty ; \frac{1}{3}\right[$ sur $\left]-\infty ; \frac{112}{27}\right[$.

6. h est strictement croissante sur $\left]-\infty ; \frac{112}{27}\right[$.
7. Représentation graphique.

STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS
		

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON3 : DERIVABILITE ET ETUDE DE FONCTIONS

SEANCE : 7/9

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Représenter	- graphiquement une fonction du type : • $x \mapsto \frac{ax+b}{cx^2+dx+e}$ • $x \mapsto \frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$

2. Fractions rationnelles

STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS
-Travail individuel	<u>EXERCICE2</u> Soit g la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $$g(x) = \frac{x^2+3x-7}{x-1}$$ 1. Détermine l'ensemble de définition de g. 2. a. Calcule les limites aux bornes de l'ensemble de définition. b. Interprète les résultats. 3. a. Détermine la dérivée de la fonction g sur $]-\infty;1[\cup]1;\infty[$. b. Détermine les variations de g. c. Dresse le tableau de variation de g. 4. a. Détermine trois nombres réels a, b et c tels que : $$f(x) = ax+b+\frac{c}{x-1}$$ b. Déduis-en que (C_g) admet en $-\infty$ et en $+\infty$ une asymptote (Δ) dont on précisera une équation. c. Etudie la position de (C_g) par rapport à (Δ). 5. a. Démontre que l'équation $g(x)=0$ admet deux solutions α et β tels que $\alpha<\beta$. b. Justifie que que $-4{,}6<\alpha<-4{,}6$ et $1{,}5<\alpha<1{,}6$.	1. $Dg =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$. 2. a. $$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x-7}{x-1} \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x-7}{x-1}$$ $$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$ $$\lim_{\substack{x\to1\\<}} g(x) = \lim_{\substack{x\to1\\<}}\frac{x^2+3x-7}{x-1} \qquad \lim_{\substack{x\to1\\>}} g(x) = \lim_{\substack{x\to1\\>}}\frac{x^2+3x-7}{x-1}$$ $$\lim_{\substack{x\to1\\<}} g(x) = +\infty \qquad \lim_{\substack{x\to1\\>}} g(x) = -\infty$$ b. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} g(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x=1$ est asymptote verticale à (C_g). 3. a. $$g(x) = \frac{x^2+3x-7}{x-1}$$ $$g'(x) = \frac{(2x+3)(x-1)-(x^2+3x-7)}{(x-1)^2}$$ $$g'(x) = \frac{2x^2-2x+3x-3-x^2-3x+7}{(x-1)^2}$$ $$g'(x) = \frac{x^2-2x+4}{(x-1)^2}$$ b.$\forall x\in]-\infty;1[\cup]1;\infty[, g'(x)>0$ donc g est strictement croissante sur $]-\infty;1[$ et strictement croissante sur $]1;\infty[$. c. Tableau de variation

STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS
	c. Déduis-en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. 6. Trace (C_g), (Δ) et les autres asymptotes dans un même repère orthonormé (O, I, J).	

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g(x)$	$+$		$\|\|$	$+$	
$g'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4. a.

$$g(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$$

$$g(x) = \frac{ax^2 - ax + bx - b + c}{x-1}$$

$$g(x) = \frac{ax^2 + (b-a)x - b + c}{x-1}$$

Par identification :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 3 \\ c - b = -7 \end{cases}$$

$a = 1$; $b = 4$ et $c = -3$

$$g(x) = x + 4 - \frac{3}{x-1}$$

b.

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) - (x+4) = \lim_{x \to -\infty} -\frac{3}{x-1}$$

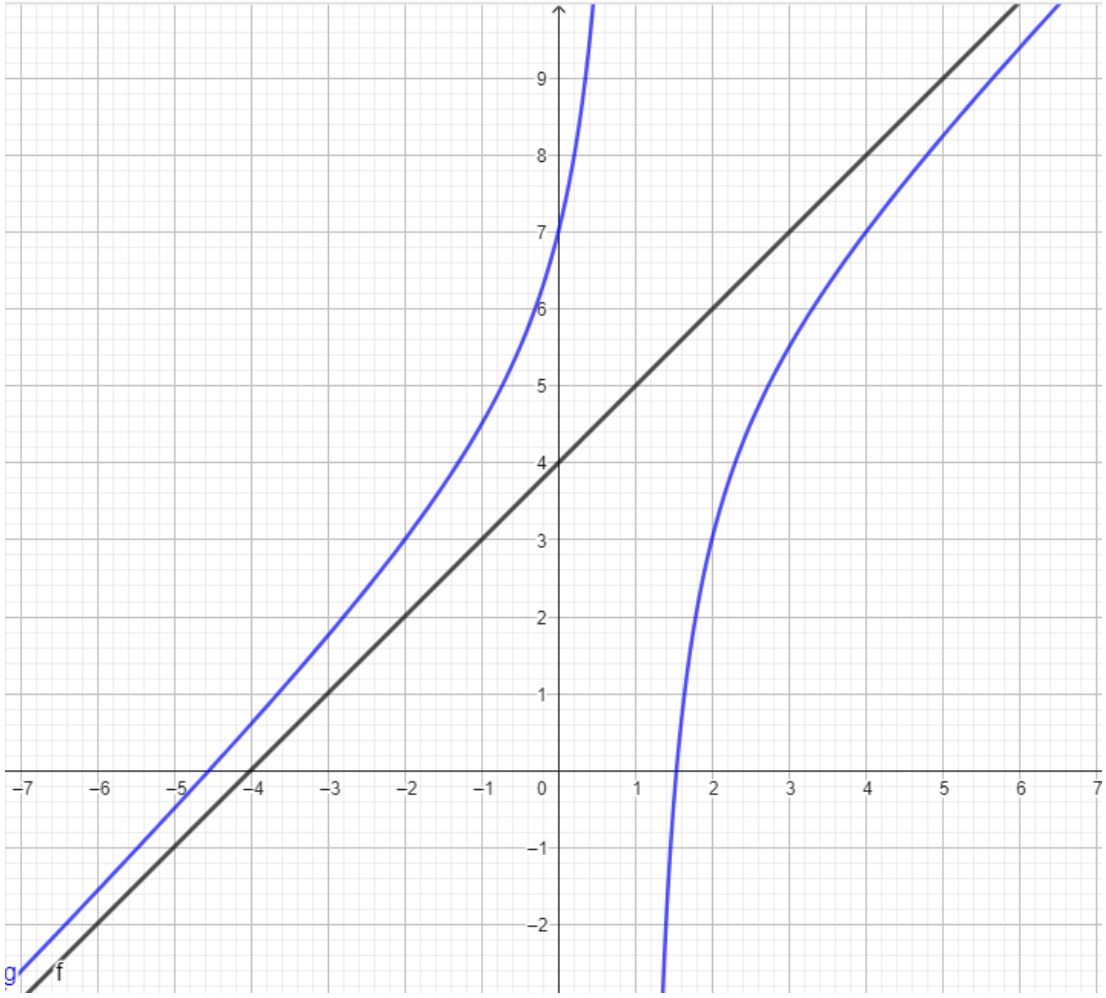
$$\lim_{x \to -\infty} g(x) - (x+4) = 0$$

Donc la droite (Δ) d'équation $y = x + 4$ est une asymptote à (C_g) en $-\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) - (x+4) = \lim_{x \to +\infty} -\frac{3}{x-1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) - (x+4) = 0$$

STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS
		Donc la droite (Δ) d'équation $y = x + 4$ est une asymptote à (C_g) en $+\infty$. c. $$g(x) - (x+4) = -\frac{3}{x-1}$$ $\forall x \in]-\infty; 1[, g(x) - (x+4) > 0$ $\forall x \in]1; +\infty[, g(x) - (x+4) < 0$ (C_g) est au dessus de (Δ) sur $]-\infty; 1[$ et (C_g) est en dessous de (Δ) sur $]1; +\infty[$. 5. a. g est continue et strictement croissante sur $]-\infty; 1[$. $g(]-\infty; 1[) =]-\infty; +\infty[$; donc g réalise une bijection de $]-\infty; 1[$ sur $]-\infty; +\infty[$. Comme $0 \in]-\infty; +\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-\infty; 1[$. g est continue et strictement croissante sur $]1; +\infty[$. $g(]1; +\infty[) =]-\infty; +\infty[$; donc g réalise une bijection de $]1; +\infty[$ sur $]-\infty; +\infty[$. Comme $0 \in]-\infty; +\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution β sur $]1; +\infty[$. b. $g(-4{,}5) = 0{,}045$ et $g(-4{,}6) = -0{,}064$ $g(-4{,}5) \times g(-4{,}6) < 0$ donc $-4{,}6 < \alpha < -4{,}5$ $g(1{,}5) = -0{,}5$ et $g(1{,}6) = 0{,}6$ $g(1{,}5) \times g(1{,}6) < 0$ donc $1{,}5 < \beta < 1{,}6$. c. g est continue et strictement croissante sur $]-\infty; 1[$; donc $\forall x < \alpha, g(x) < g(\alpha)$ et $\forall x > \alpha, g(x) > g(\alpha)$ $\forall x < \alpha, g(x) < 0$ et $\forall x > \alpha, g(x) > 0$ $\forall \in]-\infty; \alpha[, g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha; 1[, g(x) > 0$. De même : g est continue et strictement croissante sur $]1; +\infty[$; donc $\forall x < \beta, g(x) < g(\beta)$ et $\forall x > \beta, g(x) > g(\beta)$ $\forall x < \beta, g(x) < 0$ et $\forall x > \beta, g(x) > 0$ $\forall \in]1; \beta[, g(x) < 0$ et $\forall x \in]\beta; +\infty[, g(x) > 0$.

STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS
		Conclusion : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty;\alpha[\cup]1;\beta[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha;1[\cup]\beta;+\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$ 6. Courbe 

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON3 : DERIVABILITE ET ETUDE DE FONCTION

SEANCE : 8/9

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Représenter	- graphiquement une fonction du type : • $x \mapsto \sqrt{ax+b}$ • $x \mapsto \sqrt{ax^2+bx+c}$ - graphiquement une fonction : • comportant une racine carrée

PLAN DE LA SEANCE

3. Fonctions racines carrées

STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS
-Travail individuel	<u>EXERCICE3</u> Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4}}$ 1. Détermine l'ensemble de définition de *f*. 2. Calcule les limites aux bornes de l'ensemble de définition et interprète graphiquement les résultats. *3.* a. Calcule $f'(x)$. b. Détermine les variations de *f*. c. Dresse le tableau de variation de *f*. 4. Détermine une équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 3. 5. Trace (C_f), dans un repère orthonormé (O, I, J).	1. $D_f =]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$. 2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4}}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{-x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ La droite d'équation $y=-1$ est une asymptote horizontale à (C_f) en $-\infty$. $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\<}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-2\\<}} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4}}$ $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\<}} f(x) = -\infty$ La droite d'équation $x=-2$ est une asymptote verticale à (C_f). $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4}}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ La droite d'équation $y=1$ est une asymptote horizontale à (C_f) en $+\infty$. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\>}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to2\\>}} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4}}$ $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\<}} f(x) = +\infty$ La droite d'équation $x=2$ est une asymptote verticale à (C_f). 3. a. $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2-4} - \frac{x(x+1)}{\sqrt{x^2-4}}}{x^2-4}$ $f'(x) = \frac{x^2-4-x^2-x}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}$ $f'(x) = -\frac{x+4}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}$

STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS

b.

x	$-\infty$		-4		-2		2		$+\infty$
$-x-4$		$+$	0	$-$				$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$				$-$	

$\forall x \in]-\infty;-4[,\ f'(x) > 0.$

$\forall x \in]-4;-2[\cup]2;+\infty[,\ f'(x) < 0.$

f est strictement croissante sur $]-\infty;-4[$.

f est strictement décroissante sur $]-4;-2[$ et sur $]2;+\infty[$.

c. Tableau de variation

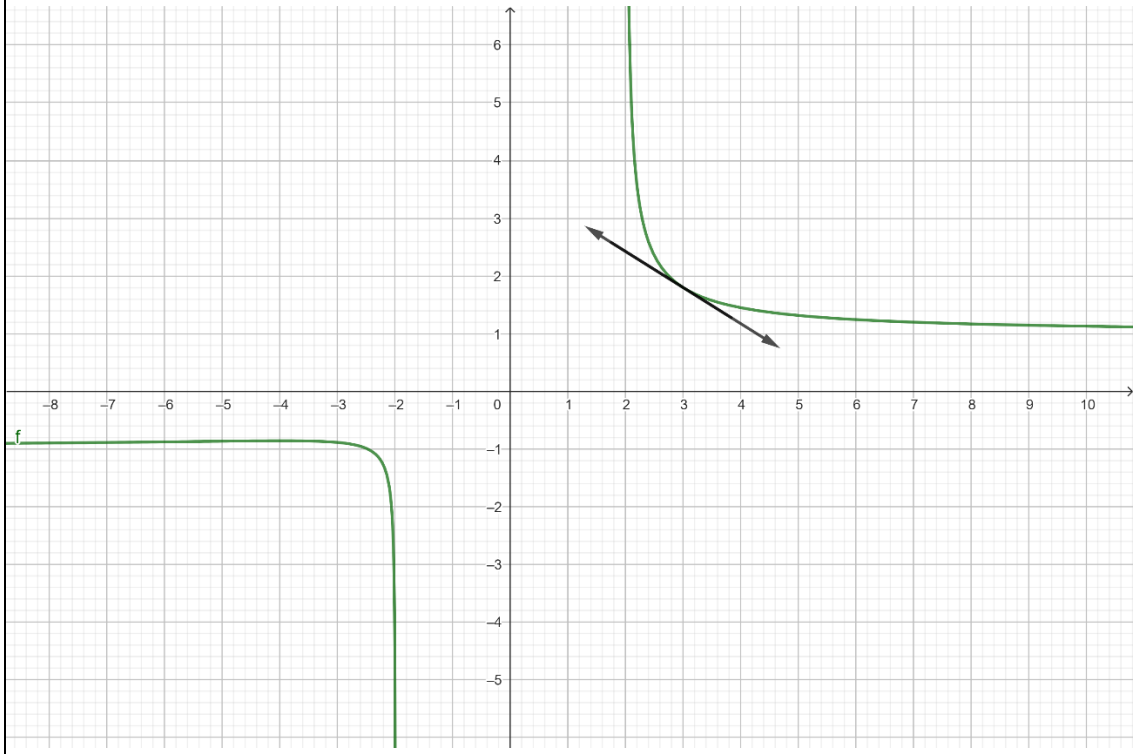
x	$-\infty$		-4		-2		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$				$+$	
$f(x)$	-1	↗	$-\frac{3}{2\sqrt{3}}$	↘	$-\infty$		$+\infty$	↘	1

4.

(T) : $y = f'(3)(x-3) + f(3)$

$$y = f'(3)(x-3) + f(3) = -\frac{7}{5\sqrt{5}}(x-3) + \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$(T): y = -\frac{7}{5\sqrt{5}}x + \frac{41}{5\sqrt{5}}$$

STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS
		5. Courbe 

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON3 : DERIVABILITE ET ETUDE DE FONCTIONS

SEANCE : 9/9

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Représenter	- graphiquement une fonction du type : • $x \mapsto \cos(ax+b)$ • $x \mapsto \sin(ax+b)$ • $x \mapsto \tan(ax+b)$

PLAN DE LA SEANCE

4. Fonctions trigonométriques

STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS
-Travail individuel	<u>EXERCICE4</u> Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Soit *f* la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$. 1. Donne l'ensemble de définition de la fonction *f*. 2. Démontre que *f* est une fonction π-périodique. 3. Justifie qu'on peut restreindre l'étude de la fonction f à l'intervalle $[0;\pi]$. 4. Calcule : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to \pi} f(x)$. 5. Calcule $f'(x)$. 6. a. Etudie le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0;\pi]$. b. Déduis-en les variations de la fonction *f* sur $[0;\pi]$. 7. Dresse le tableau de variation de la fonction *f* sur $[0;\pi]$. 8. Réalise la représentation graphique de la fonction f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. *f* est la composée des fonctions définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ respectivement par $x \to \cos x$ et $x \to 3x - \frac{\pi}{4}$ donc $D_f = \mathbb{R}$. 2. Périodicité $f(x+\pi) = \cos\left(2(x+\pi) - \frac{\pi}{3}\right)$ $f(x+\pi) = \cos\left(2x + 2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$ $f(x+\pi) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ $f(x+\pi) = f(x)$. On en déduit que *f* est une fonction π-périodique. 3. *f* est une fonction π-périodique donc on peut restreindre son étude à l'intervalle $[0;\pi]$ et compléter sa courbe représentative grâce à une translation de vecteur $\pi\overrightarrow{OI}$ ou $-\pi\overrightarrow{OI}$. 4. Calculons : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to \pi} f(x)$. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to \pi} f(x) = \lim\limits_{x\to \pi} \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to \pi} f(x) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to \pi} f(x) = \frac{1}{2}$ 5. *f* est la composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc *f* est dérivable sur $[0;\pi]$. $\forall x \in [0;\pi], f'(x) = -2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 6. a. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, 0 + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \pi + 2k\pi$

STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + k\pi$$

Cherchons les solutions de l'inéquation : $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \geq 0$ dans $[0;\pi]$:

Pour $k = 0$: $\quad \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$

Pour $k = 1$: $\quad \frac{-5\pi}{6} \leq x \leq -\frac{\pi}{3}$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$f'(x)$	1	$+$	0	$-$	0	$+$	$\sqrt{3}$

b. Les variations de f sur $[0;\pi]$.

$$\forall x \in \left]0;\frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3};\pi\right[, f'(x) > 0$$

$$\forall x \in \left]\frac{\pi}{6};\frac{2\pi}{3}\right[, f'(x) < 0$$

f est strictement croissante sur $\left]0;\frac{\pi}{6}\right[$ et sur $\left]\frac{2\pi}{3};\pi\right[$

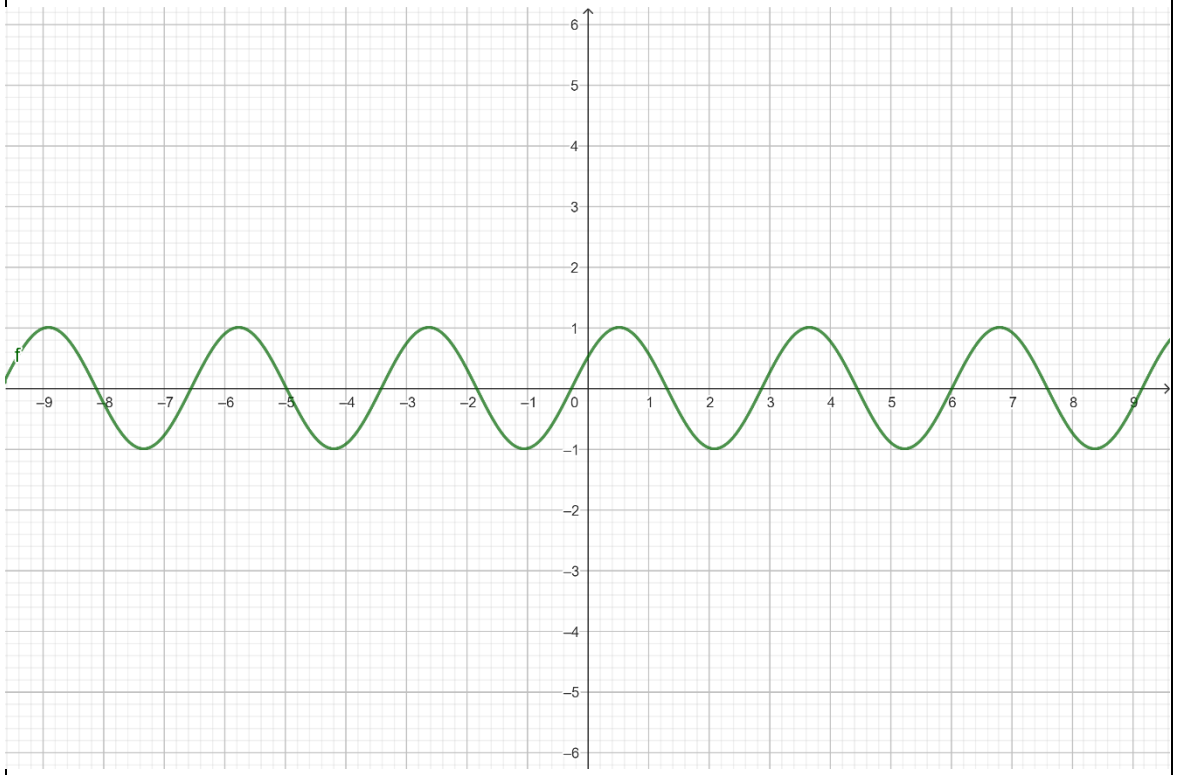
f est strictement décroissante sur $\left]\frac{\pi}{6};\frac{2\pi}{3}\right[$.

7. Tableau de variation

STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$	1	$+$	0	$-$	0	$+$	$\sqrt{3}$
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↗	1	↘	-1	↗	$\frac{1}{2}$

8. Courbe



BIBLIOGRAPHIE

Programmes éducatifs et guides d'exécution Mathématiques $T^{LE}D$

Progressions annuelles

Mon livre de mathématiques $T^{LE}D$ Collection PYRAMIDE

Mon livre de mathématiques $T^{LE}D$ Collection CIAM/EDICEF

Les cahiers de la réussite T^{LE} D Vallesse

Mon cahier d'habiletés Mathématiques T^{LE} D JD Editions

WWW.monecoleàlamaison.ci

https://physiques-et-maths.fr

FICHE DE LEÇON

PRIMITIVES

TLE D

Rédigée par :

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON4 : PRIMITIVES

NOMBRE DES SEANCES : 3

DUREE D'UNE SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la définition d'une primitive d'une fonction continue - la primitive des fonctions de référence - les primitives de : • $u'+v'$, $\lambda u'(\lambda\in\mathbb{R})$ • $v'\times u'ov$, $\frac{u'}{\sqrt{u}}$, $u'cosu$, $u'sinu$, $\frac{u'}{u^r}$, $r\in\mathbb{Q}\setminus\{1\}$, $u'\times u^m$, $m\in\mathbb{Q}\setminus\{-1\}$ où u et v sont des fonctions dérivables
Déterminer	- l'ensemble des primitives d'une fonction continue - les primitives d'une fonction en utilisant les primitives des fonctions de référence - la primitive d'une fonction qui prend une valeur donnée en un point donné - les primitives d'une fonction du type : • $u'+v'$, $\lambda u'(\lambda\in\mathbb{R})$ • $v'\times u'ov$, $\frac{u'}{\sqrt{u}}$, $u'cosu$, $u'sinu$, $\frac{u'}{u^r}$, $r\in\mathbb{Q}\setminus\{1\}$, $u'\times u^m$, $m\in\mathbb{Q}\setminus\{-1\}$ où u et v sont des fonctions dérivables
Justifier	- qu'une fonction est une primitive d'une fonction donnée
Traiter une situation	- faisant appel aux primitives de fonctions

SITUATION D'APPRENTISSANGE

Le car loué par le lycée pour transporter les élèves pour assister aux matchs des éléphants lors de la CAN 2024 doit effectuer un trajet de 1500 km. Lorsque ce car roule à la vitesse moyenne *v*, exprimé en *km*/ *h*, la dérivée de sa consommation *C*(*v*), exprimée en litre pour 100 *km*, selon les études d'un expert sur ce type de véhicule, est donnée par la relation :

$$C(v) = -\frac{300}{v^2} + \frac{1}{3}$$

Une information complémentaire fournie par le chauffeur de la location du car est qu'il consomme 25 litres au 100 km pour une vitesse moyenne de 60 *km* /*h* .

Le salaire horaire du chauffeur est de 900 F CFA et le litre de gasoil coûte 600 FCFA.

Lynda, élève en classe de TD dont le père est le responsable de cette compagnie veut aider son père à déterminer la vitesse moyenne à laquelle le chauffeur doit rouler pour minimiser le coût total du voyage. Elle tente de déterminer cette vitesse moyenne, mais n'y arrive pas.

Elle pose le problème à ses camarades de classe qui décident de l'aider à déterminer cette vitesse moyenne.

PLAN DE LA LEÇON

I. PRIMITIVES D'UNE FONCTION
   1. Définition
   2. Propriétés
      a. Propriété1
      b. Propriété2
      c. Propriété3
   3. Primitives de fonctions usuelles

II. PRIMITIVES ET OPERATIONS SUR LES FONCTIONS

HABILETES, CONTENUS ET PLANS PAR SEANCE

SEANCE1

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la définition d'une primitive d'une fonction continue
Déterminer	- l'ensemble des primitives d'une fonction continue - la primitive d'une fonction qui prend une valeur donnée en un point donné
Justifier	- qu'une fonction est une primitive d'une fonction donnée

PLAN DE LA SEANCE1

I. PRIMITIVES D'UNE FONCTION
1. Définition
2. Propriétés
   a. Propriété1
   b. Propriété2
   c. Propriété3

SEANCE2

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la primitive des fonctions de référence
Déterminer	- les primitives d'une fonction en utilisant les primitives des fonctions de référence

PLAN DE LA SEANCE2

3. Primitives de fonctions usuelles

SEANCE3

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- les primitives de : • $u'+v'$, $\lambda u'(\lambda\in\mathbb{R})$ • $v'\times u'ov$, $\frac{u'}{\sqrt{u}}$, $u'cosu$, $u'sinu$, $\frac{u'}{u^r}$, $r\in\mathbb{Q}\setminus\{1\}$, $u'\times u^m, m\in\mathbb{Q}\setminus\{-1\}$ où u et v sont des fonctions dérivables
Déterminer	- les primitives d'une fonction du type : • $u'+v'$, $\lambda u'(\lambda\in\mathbb{R})$ • $v'\times u'ov$, $\frac{u'}{\sqrt{u}}$, $u'cosu$, $u'sinu$, $\frac{u'}{u^r}$, $r\in\mathbb{Q}\setminus\{1\}$, $u'\times u^m, m\in\mathbb{Q}\setminus\{-1\}$ où u et v sont des fonctions dérivables

PLAN DE LA SEANCE3

II. PRIMITIVES ET OPERATIONS SUR LES FONCTIONS

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON4 : PRIMITIVES

SEANCE : 1/3

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la définition d'une primitive d'une fonction continue
Déterminer	- l'ensemble des primitives d'une fonction continue - la primitive d'une fonction qui prend une valeur donnée en un point donné
Justifier	- qu'une fonction est une primitive d'une fonction donnée

PLAN DE LA SEANCE

I. PRIMITIVES D'UNE FONCTION
   1. Définition
   2. Propriétés
      a. Propriété1
      b. Propriété2
      c. Propriété3

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Présentation *5 min*	-Lecture -Travail collectif	-Donne l'énoncé de la situation d'apprentissage aux apprenants. -Demande aux apprenants de faire une lecture silencieuse de la situation. -Demande à un apprenant de lire à haute voix l'énoncé de la situation. -Lis l'énoncé de la situation d'apprentissage à haute voix. **Question pour faire ressortir les tâches :** Qu'est-ce que les élèves décident de faire ?	-Les apprenants lisent silencieusement l'énoncé de la situation. -Un apprenant lis à haute voix l'énoncé de la situation. -Les apprenants écoutent Attentivement. REPONSE ATTENDUE Déterminer la vitesse moyenne à laquelle le chauffeur doit rouler pour minimiser le coût total du voyage.	
Développement *25 min*	-Travail individuel	ACTIVITE Soient les fonctions *f*, *g*, *h* et *k* définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ respectivement par : $f(x) = 2x^2 - x + 3$ $g(x) = 2x^2 - x - 9$ $h(x) = 2x^2 - x + \frac{5}{2}$ $k(x) = 4x - 1$ 1. Détermine *f* '(*x*), *g*'(*x*) et *h*'(*x*). 2. Compare *f* '(*x*), *g*'(*x*) et *h*'(*x*) à *k*(*x*).	REPONSES ATTENDUES. 1. $f'(x) = 4x - 1.$ $g'(x) = 4x - 1$ $h'(x) = 4x - 1$ 2. $f'(x) = k(x).$ $g'(x) = k(x).$ $h'(x) = k(x).$	I. PRIMITIVES D'UNE FONCTION 1. Définition Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I. On appelle primitive de *f* sur I, toute fonction F dérivable sur I et telle que : $\forall x \in I, F'(x) = f(x).$ 2. Propriétés a. Propriété1 *Condition d'existence d'une primitive*

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		$f'(x) = k(x)$; $g'(x) = k(x)$ et $h'(x) = k(x)$. *On dit que* ***f***, ***g***, ***h*** *sont des primitives de la fonction* ***k***. *En notant* ***m*** *la fonction définie de* $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ *par* $m(x) = 2x^2 - x$ *; on remarque que* ***m*** *est une primitive de* ***k*** *et pour tout nombre réel* $\boldsymbol{\alpha}$*,* $\boldsymbol{m(x) + \alpha}$ *est aussi une primitive de* ***k(x)***.		Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I. b. <u>Propriété2</u> *Ensemble des primitives d'une fonction* Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I. ○ Pour tout nombre réel c , la fonction $x \to F(x) + c$ est une primitive de *f* sur I. ○ Toute primitive de *f* sur I est de la forme $x \to F(x) + c$ où $c \in \mathbb{R}$. c. <u>Propriété3 :</u> *Primitive prenant une valeur donnée en un réel donné* Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I x_0 est un nombre réel de I et y_0 un nombre réel. Il existe une primitive G de f sur I, et une seule, telle que : $G(x_0) = y_0$.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *20 min*	-Travail individuel	EXERCICES DE FIXATION **1**. Soit f et F dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par respectivement : $f(x) = 3x^2 + \cos(x+2)$ et $F(x) = x^3 + \sin(x+2) + 5$. Démontre que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. **2**. Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $f(x) = 2x - \sin(x+\pi)$. Détermine sur $\mathbb{R}$ la primitive F de f qui prend la valeur 3 en 0.	REPONSES ATTENDUES **1**. $F(x) = x^3 + \sin(x+2) + 5$ F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $F'(x) = 3x^2 + \cos(x+2) + 0$ $F'(x) = 3x^2 + \cos(x+2)$ $F'(x) = f(x)$ donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. **2**. Les primitives sur $\mathbb{R}$ de f sont de la forme : $F(x) = x^2 + \cos(x+\pi) + c$ avec $c \in \mathbb{R}$. On a : $F(0) = 3 \Leftrightarrow c = 4$. Donc la primitive recherchée est la fonction de f est définie par $F(x) = x^2 + \cos(x+\pi) + 4$.	
	-Travail individuel	EXERCICE DE MAISON		

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON4 : PRIMITIVES

SEANCE :2/3

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la primitive des fonctions de référence
Déterminer	- les primitives d'une fonction en utilisant les primitives des fonctions de référence

PLAN DE LA SEANCE

3. Primitives de fonctions usuelles

<table>
<tr><th>MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES</th><th>STRATEGIES PEDAGOGIQUES</th><th>ACTIVITES DU PROFESSEUR</th><th>ACTIVITES DES APPRENANTS</th><th>TRACE ECRITE</th></tr>
<tr>
<td>20 min

Développement
15 min</td>
<td>-Travail en groupe

-Travail individuel</td>
<td>Correction des exercices de maison

<u>ACTIVITE</u>
n est un entier naturel supérieur ou égale à 1 ; c est un nombre réel ; F est une fonction dérivable sur I de dérivée f.
Complète les tableaux ci-dessous :
<table>
<tr><th>$f(x)$</th><th>F(x)</th><th>I</th></tr>
<tr><td>…</td><td>$ax + c$</td><td>$\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>…</td><td>$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$</td><td>$\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>…</td><td>$2\sqrt{x} + c$</td><td>$]0; +\infty[$</td></tr>
<tr><td>…</td><td>$\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$</td><td>$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$</td></tr>
<tr><td>…</td><td>$\frac{x^{r+1}}{r+1} + c$</td><td>$[0; +\infty[$ $si\ r > 0$
$]0; +\infty[$ $si\ r < 0$</td></tr>
<tr><td>…</td><td>$-\cos x + c$</td><td>$\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>…</td><td>$\sin x + c$</td><td>$\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>…</td><td>$\tan x + c$</td><td>$]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$</td></tr>
</table>
</td>
<td><u>REPONSES ATTENDUES</u>
<table>
<tr><th>$f(x)$</th><th>F(x)</th><th>I</th></tr>
<tr><td>$a\ (a \in \mathbb{R})$</td><td>$ax + c$</td><td>$\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>x^n</td><td>$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$</td><td>$\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{\sqrt{x}}$</td><td>$2\sqrt{x} + c$</td><td>$]0; +\infty[$</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{x^n}$</td><td>$\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$</td><td>$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{x^r}$</td><td>$\frac{x^{r+1}}{r+1} + c$</td><td>$[0; +\infty[$ $si\ r > 0$
$]0; +\infty[$ $si\ r < 0$</td></tr>
<tr><td>$\sin x$</td><td>$-\cos x + c$</td><td>$\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>$\cos x$</td><td>$\sin x + c$</td><td>$\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>$1 + tan^2 x$</td><td>$\tan x + c$</td><td>$]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$</td></tr>
</table>
</td>
<td>3. <u>Primitives de fonctions usuelles</u>
(Voir annexe1)</td>
</tr>
</table>

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *20 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Dans chacun des cas suivants, détermine les primitives de la fonction f sur $]0;+\infty[$. a. $f(x)=x$ b. $f(x)=x^2$ c. $f(x)=\frac{1}{x^4}$ d. $f(x)=\sqrt{x}$ e. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ f. $f(x)=\sqrt[3]{x}$ g. $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ h. $f(x)=\sin x$ i. $f(x)=-\cos x$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> a. $F(x)=\frac{1}{2}x^2+c, c\in\mathbb{R}$ b. $F(x)=\frac{1}{3}x^3+c, c\in\mathbb{R}$ c. $F(x)=\frac{1}{3x^3}+c, c\in\mathbb{R}$ d. $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+c, c\in\mathbb{R}$ e. $F(x)=2\sqrt{x}+c, c\in\mathbb{R}$ f. $F(x)=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+c, c\in\mathbb{R}$ g. $F(x)=\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+c, c\in\mathbb{R}$ h. $F(x)=-\cos x+c, c\in\mathbb{R}$ i. $F(x)=-\sin x+c, c\in\mathbb{R}$	
	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE MAISON</u>		

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON4 : PRIMITIVES

SEANCE: 3/3

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- les primitives de : • $u' + v'$, $\lambda u'(\lambda \in \mathbb{R})$ • $v' \times u'ov$, $\frac{u'}{\sqrt{u}}$, $u'cosu$, $u'sinu$, $\frac{u'}{u^r}$, $r \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$, $u' \times u^m$, $m \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ où u et v sont des fonctions dérivables
Déterminer	- les primitives d'une fonction du type : • $u' + v'$, $\lambda u'(\lambda \in \mathbb{R})$ • $v' \times u'ov$, $\frac{u'}{\sqrt{u}}$, $u'cosu$, $u'sinu$, $\frac{u'}{u^r}$, $r \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$, $u' \times u^m$, $m \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ où u et v sont des fonctions dérivables

PLAN DE LA SEANCE

II. PRIMITIVES ET OPERATIONS SUR LES FONCTIONS

<table>
<tr><th>MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES</th><th>STRATEGIES PEDAGOGIQUES</th><th>ACTIVITES DU PROFESSEUR</th><th>ACTIVITES DES APPRENANTS</th><th>TRACE ECRITE</th></tr>
<tr>
<td>15 min

Développement
20 min</td>
<td>-Travail en groupe

-Travail en groupes</td>
<td>Correction des exercices de maison

<u>ACTIVITE</u>
F est une fonction dérivable sur I de dérivée f.
Complète le tableaux ci-dessous :
<table>
<tr><th>$f(x)$</th><th>F(x)</th><th>K</th></tr>
<tr><td>…</td><td>au</td><td>$a \in \mathbb{R}^*$</td></tr>
<tr><td>…</td><td>$u+v$</td><td></td></tr>
<tr><td>…</td><td>$2\sqrt{u}$</td><td>u est strictement positive sur K.</td></tr>
<tr><td>…</td><td>$\frac{1}{(r+1)}u^{r+1}$</td><td>$r \in \mathbb{Q}$</td></tr>
<tr><td>…</td><td>$\frac{-1}{(r-1)u^{r+1}}$</td><td>$r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{1\}$ u ne s’annule pas sur K</td></tr>
<tr><td>…</td><td>$-\cos u$</td><td></td></tr>
<tr><td>…</td><td>$\sin u$</td><td></td></tr>
</table>
</td>
<td><u>REPONSES ATTENDUES</u>
<table>
<tr><th>$f(x)$</th><th>F(x)</th><th>K</th></tr>
<tr><td>au'</td><td>au</td><td>$a \in \mathbb{R}^*$</td></tr>
<tr><td>$u'+v'$</td><td>$u+v$</td><td></td></tr>
<tr><td>$\frac{u'}{\sqrt{u}}$</td><td>$2\sqrt{u}$</td><td>u est strictement positive sur K.</td></tr>
<tr><td>$u'.u^r$</td><td>$\frac{1}{(r+1)}u^{r+1}$</td><td>$r \in \mathbb{Q}$</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{u^r}$</td><td>$\frac{-1}{(r-1)u^{r-1}}$</td><td>$r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{1\}$ u ne s’annule pas sur K</td></tr>
<tr><td>$u'.\sin u$</td><td>$-\cos u$</td><td></td></tr>
<tr><td>$u'.\cos u$</td><td>$\sin u$</td><td></td></tr>
</table>
</td>
<td>II. <u>PRIMITIVES ET OPERATIONS SUR LES FONCTIONS</u>
Tableau récapitulatif des primitives
(Voir annexe2)</td>
</tr>
</table>

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *20 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Dans chacun des cas suivants, détermine une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction *f*. a. $f(x)=(2x+2)(x^2+2x-9)^3$ b. $f(x)=\frac{2x-2}{(x^2-2x+1)^4}$ c. $f(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x-3}}$ d. $f(x)=\sin x\,.cos^4x$ e. $f(x)=3x+\frac{3}{x^2}$ f. $f(x)=-5x^2.(x^3+6)^7$ g. $f(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> Soit F une primitive de f : a. $f(x)=(2x+2)(x^2+2x-9)^3$ $f(x)=(x^2+2x-9)'.(x^2+2x-9)^3$ $F(x)=\frac{1}{4}(x^2+2x-9)^4$ b. $f(x)=\frac{2x-2}{(x^2-2x+1)^4}$ $f(x)=\frac{(x^2-2x+1)'}{(x^2-2x+1)^4}$ $F(x)=\frac{-1}{3(x^2-2x+1)^3}$ c. $f(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x-3}}$ $f(x)=\frac{(x^2+x-3)'}{\sqrt{x^2+x-3}}$ $F(x)=2\sqrt{x^2+x-3}$ d. $f(x)=\sin x\,.cos^4x$ $f(x)=-(\cos x)'.cos^4x$ $F(x)=-\frac{1}{5}.cos^5x$ e $f(x)=3x+\frac{3}{x^2}$ $F(x)=3\times\frac{1}{2}x^2+3\times\frac{-1}{x}$ $F(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{x}$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
	-Travail individuel	EXERCICE DE MAISON	f. $f(x) = -5x^2.(x^3+6)^7$ $f(x) = -5 \times \frac{1}{3} \times 3x^2.(x^3+6)^7$ $f(x) = -\frac{5}{3} \times (x^3+6)' \times (x^3+6)^7$ $F(x) = -\frac{5}{3} \times \frac{1}{8} \times (x^3+6)^8$ $F(x) = -\frac{5}{24}(x^3+6)^8$ g. $f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ $f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ $F(x) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} \times x^{\frac{5}{2}}$ $F(x) = \frac{4}{15}x^{\frac{5}{2}}$ $F(x) = \frac{4}{15}x^2\sqrt{x}$	

Tableau de primitives

Fonction f	Primitive de f (c$\in \mathbb{R}$)	Sur l'intervalle
$a\ (a \in \mathbb{R})$	$ax + c$	$\mathbb{R}$
$x^n (n \in \mathbb{N}^*)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$]0; +\infty[$
$\frac{1}{x^n} (n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\})$	$\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$\frac{1}{x^r} (n \in \mathbb{Q}^* \backslash \{1\})$	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + c$	$[0; +\infty[\ si\ r > 0$ $]0; +\infty[\ si\ r < 0$
$\sin x$	$-\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + c$	$\mathbb{R}$
$1 + tan^2 x$	$\tan x + c$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$

Annexe1

Tableau récapitulatif des primitives

Fonction f	Une primitive de f	Observation
au'	au	Sur un intervalle I où u est dérivable
$u' + v'$	$u + v$	Sur un intervalle I où u et v sont dérivables
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	Sur un intervalle I où u est dérivable et strictement positive
$u'.u^n$, $n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	Sur un intervalle I où u est dérivable
$u'.u^r$, $n \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\}$	$\frac{1}{r+1}u^{r+1}$	u est strictement positive sur I si $r > 0$ u est strictement négative sur I si $r < 0$
$\frac{u'}{u^n}, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	$\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$	Sur un intervalle I où u est dérivable et s'annule pas
$\frac{u'}{u^r}, n \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$	$\frac{-1}{(r-1)u^{r-1}}$	Sur un intervalle I où u est dérivable et s'annule pas
$u'.v + u.v'$	$u \times v$	Sur un intervalle I où u et v sont dérivables
$\frac{u'.v - u.v'}{v^2}$	$\frac{u}{v}$	Sur un intervalle I où u et v sont dérivables et v ne s'annule pas
$u'.\sin u$	$-\cos u$	Sur un intervalle I où u est dérivable
$u'.\cos u$	$\sin u$	Sur un intervalle I où u est dérivable
$u'.(1 + tan^2 u) = \frac{u'}{cos^2 u}$	$\tan u$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$

Annexe2

BIBLIOGRAPHIE

Programmes éducatifs et guides d'exécution Mathématiques $T^{LE}D$

Progressions annuelles

Mon livre de mathématiques $T^{LE}D$ Collection PYRAMIDE

Mon livre de mathématiques $T^{LE}D$ Collection CIAM/EDICEF

Les cahiers de la réussite T^{LE} D Vallesse

Mon cahier d'habiletés Mathématiques T^{LE} D JD Editions

WWW.monecoleàlamaison.ci

https://physiques-et-maths.fr

FICHE DE LEÇON

FONCTIONS LOGARITHMES

TLE D

Rédigée par :

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON5 : FONCTIONS LOGARITHMES

NOMBRE DES SEANCES : 5

DUREE D'UNE SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- La définition de la fonction logarithme népérien - La définition de la fonction logarithme décimal - Les propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien - La dérivée de la fonction logarithme népérien - Le sens de variation de la fonction logarithme népérien - La représentation graphique de la fonction logarithme népérien - Les propriétés algébriques de la fonction logarithme décimal - Les limites de référence de la fonction logarithme népérien - Les fonctions dérivées des fonctions du type : $lnou$, $lno\|u\|$ - Les primitives des fonctions du type : $\frac{u'}{u}$, où u est une fonction dérivable non nulle
Noter	- La fonction logarithme népérien - Une fonction logarithme décimal - Une fonction logarithme de base a ($a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$)
Résoudre	- Des équations ou inéquations faisant intervenir la fonction ln - Une équation de la forme $x^n = k$ ($k \in \mathbb{R}_+^*, n \in \mathbb{N}^*$) - Une inéquation d'inconnue n de la forme $q^n \geq a$ ou $q^n \leq a$ ($q \in \mathbb{R}_+^*, a \in \mathbb{R}_+^*, n \in \mathbb{N}^*$)
Déterminer	- Les fonctions dérivées des fonctions du type : $lnou$, $lno\|u\|$ - Les primitives des fonctions du type : $\frac{u'}{u}$ où u est une fonction dérivable non nulle

Représenter	- Graphiquement les fonctions du type : $lnou$, $lno\|u\|$ - graphiquement une fonction faisant intervenir la fonction logarithme népérien - graphiquement une fonction faisant intervenir une fonction puissance d'exposant réel non nul
Utiliser	- les propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien pour transformer une écriture - les limites de référence pour calculer d'autres limites
Etudier	- une fonction faisant intervenir la fonction logarithme népérien
Traiter une situation	- Faisant appel aux fonctions logarithmes

SITUATION D'APPRENTISSANGE

Lors d'une séance d'information avec les élèves du lycée moderne de Madinani, le directeur régional de l'agriculture a révélé que :
« en 2020, la superficie totale des champs de céréales dans sa zone était de 1000 000 de coton et celle des champs d'anacarde de 250 000 hectares. Depuis le 1er janvier 2021, les augmentations annuelles des superficies totales sont en moyenne de 11% pour les champs de céréales et de 40% pour les champs d'anacarde. »
Des élèves de $T^{LE}D$ présents à cette séance s'inquiètent de la faible augmentation des superficies de champs de céréales depuis 2021.
Ils cherchent à déterminer l'année à partir de laquelle la superficie totale des champs d'anacarde sera supérieure à celle des champs de céréales pour sensibiliser les autorités sur une potentielle crise alimentaire.

PLAN DE LA LEÇON

I. FONCTION LOGARITHME NEPERIEN
1. Définition
   Conséquence
2. Propriétés algébriques
   a. Propriété fondamentale
   b. Conséquences
3. Etude de la fonction ln
   a. Limites de référence
   b. Sens de variation
      Conséquence
   c. Courbe représentative
4. Equations et inéquations avec ln
   a. Propriétés
   b. Equations du type $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$
      Méthode
   c. Inéquations du type $\ln(u(x)) \leq \ln(v(x))$
      Méthode
5. Logarithme népérien d'une fonction
6. Primitive d'une fonction du type : $x \to \frac{u'(x)}{u(x)}$

II. FONCTIONS LOGARITHMES DE BASE a
1. Définition
   Vocabulaire
   Remarque
2. Fonction logarithme décimale
   Conséquence

HABILETES, CONTENUS ET PLANS PAR SEANCE

SEANCE1

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- La définition de la fonction logarithme népérien - Les propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien
Noter	- La fonction logarithme népérien
Utiliser	- les propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien pour transformer une écriture

PLAN DE LA SEANCE1

I. FONCTION LOGARITHME NEPERIEN
1. Définition
   Conséquence
2. Propriétés algébriques
   a. Propriété fondamentale
   b. Conséquence

SEANCE2

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- Le sens de variation de la fonction logarithme népérien - La représentation graphique de la fonction logarithme népérien - Les limites de référence de la fonction logarithme népérien
Utiliser	- les limites de référence pour calculer d'autres limites

PLAN DE LA SEANCE2

3. Etude de la fonction ln
   a. Limites de référence
   b. Sens de variation
      Conséquence
   c. Courbe représentative

SEANCE3

HABILETES	CONTENUS
Résoudre	- Des équations ou inéquations faisant intervenir la fonction ln - Une équation de la forme $x^n = k$ ($k \in \mathbb{R}_+^*, n \in \mathbb{N}^*$) - Une inéquation d'inconnue n de la forme $q^n \geq a$ ou $q^n \leq a$ ($q \in \mathbb{R}_+^*, a \in \mathbb{R}_+^*, n \in \mathbb{N}^*$)

PLAN DE LA SEANCE3

4. Equations et inéquations avec ln
   a. Propriétés
   b. Equations du type $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$
      Méthode
   c. Inéquations du type $\ln(u(x)) \leq \ln(v(x))$
      Méthode

SEANCE4

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- Les fonctions dérivées des fonctions du type : lnou, ln$o\|u\|$ - Les primitives des fonctions du type : $\frac{u'}{u}$, où u est une fonction dérivable non nulle
Déterminer	- Les fonctions dérivées des fonctions du type : $lnou$, $lno\|u\|$ - Les primitives des fonctions du type : $\frac{u'}{u}$ où u est une fonction dérivable non nulle
Représenter	- Graphiquement les fonctions du type : $lnou$, $lno\|u\|$ - graphiquement une fonction faisant intervenir la fonction logarithme népérien

PLAN DE LA SEANCE4

5. Logarithme népérien d'une fonction
6. Primitive d'une fonction du type : $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$

SEANCE5

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- La définition de la fonction logarithme décimal - Les propriétés algébriques de la fonction logarithme décimal
Noter	- Une fonction logarithme décimal - Une fonction logarithme de base a ($a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$)

PLAN DE LA SEANCE5

II. FONCTION LOGARITHME DE BASE a

1. Définition
   Vocabulaire
   Remarque
2. Fonction logarithme décimale
   Conséquence

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON5 : FONCTIONS LOGARITHMES

SEANCE : 1/5

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- La définition de la fonction logarithme népérien - Les propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien
Noter	- La fonction logarithme népérien
Utiliser	- les propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien pour transformer une écriture

PLAN DE LA SEANCE

I. FONCTION LOGARITHME NEPERIEN
   1. Définition
      Conséquence
   2. Propriétés algébriques
      a. Propriété fondamentale
      b. Conséquences

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Présentation *5 min*	-Lecture -Travail collectif	-Donne l'énoncé de la situation d'apprentissage aux apprenants. -Demande aux apprenants de faire une lecture silencieuse de la situation. -Demande à un apprenant de lire à haute voix l'énoncé de la situation. -Lis l'énoncé de la situation d'apprentissage à haute voix. **Question pour faire ressortir les tâches :** Qu'est-ce que les élèves décident de faire ?	-Les apprenants lisent silencieusement l'énoncé de la situation. -Un apprenant lis à haute voix l'énoncé de la situation. -Les apprenants écoutent Attentivement. REPONSE ATTENDUE Ils cherchent à déterminer l'année à partir de laquelle la superficie totale des champs d'anacarde sera supérieure à celle des champs de céréales.	
Développement *5 min*	-Travail individuel	ACTIVITE1 Démontre que la fonction $x \to \frac{1}{x}$ admet des primitives sur $]0;+\infty[$. *Nous intéressons ici à la primitive de la fonction inverse qui prend la valeur **0** en **1**.* *Elle s'appelle la fonction logarithme népérien et se note* **ln**.	REPONSES ATTENDUES La fonction $x \to \frac{1}{x}$ est continue sur $]0;+\infty[$ donc elle admet des primitives sur $]0;+\infty[$.	I. FONCTION LOGARITHME NEPERIEN 1. Définition La fonction logarithme népérien, notée **ln**, est la primitive de la fonction $x \to \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$, qui prend la valeur 0 en 1.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Développement *20 min*	-Travail en groupe	*Pour tout $x > 0$ on écrira le plus souvent* $\mathbf{\ln x}$ *au lieu de* $\mathbf{\ln(x)}$. ACTIVITE2 1. $\forall a \in]0;+\infty[$, soit la fonction f définie de $]0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(ax)$. a. Démontre que f est une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ b. Déduis-en que : $f(x) = \ln x + c$ c. Calcule $f(1)$ et déduis-en la valeur de c. 2.En déduire que : $\forall a \in]0;+\infty[$, $\forall b \in]0;+\infty[$, a. $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$ b. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ c. $\ln(a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \cdots + \ln(a_n)$ d. $\ln(a^r) = r \ln a, \forall r \in \mathbb{Q}$	REPONSES ATTENDUES **1**.Considérons la fonction f définie de $]0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(ax)$. f est la composée de la fonction g définie de $]0;+\infty[$ vers $]0;+\infty[$ par : $g(x) = ax$ et de la fonction ln définie de $]0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$. La fonction g et la fonction ln sont dérivables sur $]0;+\infty[$ donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a : $\forall x \in]0;+\infty[, g'(x) = a$ $\forall x \in]0;+\infty[, (ln)'(x) = \frac{1}{x}$ Par suite : $f'(x) = (ax)' \times (ln)'(ax)$ $f'(x) = a \times \frac{1}{ax}$ $f'(x) = \frac{1}{x}$ On en déduit que la fonction f est une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction	Conséquences ○ La fonction ln est définie, continue et dérivable sur $]0;+\infty[$. ○ $\forall x \in]0;+\infty[$, $(ln)'(x) = \frac{1}{x}$; $\ln 1 = 0$. 2. Propriétés algébriques a. Propriété fondamentale $\forall a \in]0;+\infty[, \forall b \in]0;+\infty[$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$. b. Conséquences $\forall a \in]0;+\infty[, \forall b \in]0;+\infty[$, on a : o $\ln(a^r) = r \ln a, \forall r \in \mathbb{Q}$. En particulier : $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a$. o $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ o $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$ Pour tous nombres strictement positifs a_1, a_2,…, a_n, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\ln(a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \cdots + \ln(a_n)$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			$\mathbb{R}^* \mapsto \mathbb{R}^*$ $x \mapsto \frac{1}{x}$ Par conséquent, il existe un nombre réel c telle que : $f(x) = \ln x + c$ $\begin{cases} f(1) = c \\ f(1) = \ln a \end{cases}$ On en déduit que : $c = \ln a$ D'où $\forall a \in]0;+\infty[, \forall b \in]0;+\infty[, \ln(ax) = \ln a + \ln x.$ **2.a.** $\forall b \in]0;+\infty[,$ $b \times \frac{1}{b} = 1$ $\ln\left(b \times \frac{1}{b}\right) = \ln 1$ $\ln b + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = 0$ $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$ **b**.$\forall a \in]0;+\infty[, \forall b \in]0;+\infty[,$ $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a + \ln\left(\frac{1}{b}\right)$ $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			c.Soit a, b et c trois nombres réels strictement positifs. $abc = (ab)c$ $\ln(abc) = \ln(ab) + \ln c$ $\ln(abc) = \ln a + \ln b + \ln c$ Ainsi, Pour tous nombres strictement positifs a_1, a_2,…, a_n, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\ln(a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \cdots + \ln(a_n)$ **d**.Montrons que $\forall a \in]0;+\infty[$, $\ln(a^r) = r \ln a, \forall r \in \mathbb{Q}$ r est un nombre entier relatif 1er Cas : $n \in \mathbb{N}$ $\ln(a^n) = n \ln a$ 2e Cas : $n \in \mathbb{Z}^-$ alors $-n \in \mathbb{N}$ $\ln(a^n) = \ln\left(\frac{1}{a^{-n}}\right)$ $\ln(a^n) = -\ln(a^{-n})$ $\ln(a^n) = -(-n)\ln a$ $\ln(a^n) = n\ln a$ D'où $\forall a \in]0;+\infty[, \forall n \in \mathbb{Z}$ $\ln(a^n) = n \ln a$ r est un nombre rationnel 1e Cas : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Considérons le nombre réel $a^{\frac{1}{n}}$ Posons $b = a^{\frac{1}{n}}$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall b \in \mathbb{R}_+^*$ $b = a^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow b^n = a$ $b^n = a$ $n \ln b = \ln a$ $\ln b = \frac{1}{n} \ln a$ D'où $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall b \in \mathbb{R}_+^*, \ln a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \ln a$ En particulier $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$ 2e Cas $r \in \mathbb{Q}^* \setminus \mathbb{Z}$ Il existe un nombre entier relatif p et un nombre entier naturel q tels que $r = \frac{p}{q}$ $a^r = a^{\frac{p}{q}}$ $a^r = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$ $\ln a^r = p \ln a^{\frac{1}{q}}$ $\ln a^r = \frac{p}{q} \ln a$ $\ln a^r = r \ln a$ D'où $\forall a \in]0; +\infty[, \forall r \in \mathbb{Q}$ $\ln(a^r) = r \ln a$	

<table>
<tr><th>MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES</th><th>STRATEGIES PEDAGOGIQUES</th><th>ACTIVITES DU PROFESSEUR</th><th>ACTIVITES DES APPRENANTS</th><th>TRACE ECRITE</th></tr>
<tr>
<td>Evaluation
5 min</td>
<td>- Travail individuel</td>
<td>
<u>EXERCICE DE FIXATION1</u>
Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :
<table>
<tr><td>a.</td><td>La fonction ln est définie sur $]-\infty; 0[$</td></tr>
<tr><td>b.</td><td>La fonction ln est définie sur $]0; +\infty[$</td></tr>
<tr><td>c.</td><td>La fonction ln est dérivable sur $]0; +\infty[$</td></tr>
<tr><td>d.</td><td>La fonction ln est définie sur $]3; +\infty[$</td></tr>
<tr><td>e.</td><td>La fonction ln est définie sur $]1; 25[$</td></tr>
<tr><td>f.</td><td>La fonction ln est décroissante sur $]0; +\infty[$</td></tr>
<tr><td>g.</td><td>$\ln 1 = 1$</td></tr>
<tr><td>h.</td><td>$(ln)'(2) = 2$</td></tr>
<tr><td>i.</td><td>$(ln)'\left(\frac{1}{5}\right) = 5$</td></tr>
<tr><td>j.</td><td>$(ln)'\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{2}$</td></tr>
</table>
</td>
<td>
<u>REPONSES ATTENDUES</u>
<table>
<tr><td>a.</td><td>La fonction ln est définie sur $]-\infty; 0[$</td><td>F</td></tr>
<tr><td>b.</td><td>La fonction ln est définie sur $]0; +\infty[$</td><td>V</td></tr>
<tr><td>c.</td><td>La fonction ln est dérivable sur $]0; +\infty[$</td><td>V</td></tr>
<tr><td>d.</td><td>La fonction ln est définie sur $]3; +\infty[$</td><td>V</td></tr>
<tr><td>e.</td><td>La fonction ln est définie sur $]1; 25[$</td><td>V</td></tr>
<tr><td>f.</td><td>La fonction ln est décroissante sur $]0; +\infty[$</td><td>F</td></tr>
<tr><td>g.</td><td>$\ln 1 = 1$</td><td>F</td></tr>
<tr><td>h.</td><td>$(ln)'(2) = 2$</td><td>F</td></tr>
<tr><td>i.</td><td>$(ln)'\left(\frac{1}{5}\right) = 5$</td><td>V</td></tr>
<tr><td>j.</td><td>$(ln)'\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{2}$</td><td>V</td></tr>
</table>
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>15 min</td>
<td>-Travail individuel</td>
<td>
<u>EXERCICE DE FIXATION2</u>
1. Ecris les expressions suivantes sous la forme $\ln a$, a est un nombre réel positif.
a. $\ln 2 + \ln 5$
b. $\ln \sqrt{2} + \ln 2\sqrt{2}$
</td>
<td>
<u>REPONSES ATTENDUES</u>
1.
a. $\ln 2 + \ln 5 = \ln(2 \times 5) = \ln 10$
b. $\ln \sqrt{2} + \ln 2\sqrt{2} = \ln(\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}) = \ln 4$
c. $\ln 9 + \ln \frac{1}{3} = \ln\left(9 \times \frac{1}{3}\right) = \ln 3$
</td>
<td></td>
</tr>
</table>

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		c. $\ln 9 + \ln\frac{1}{3}$ **2**. Ecris les expressions suivantes sous la forme $\ln a + \ln b$, où a et b sont des nombres réels strictement positifs. a. $\ln(3 \times 7)$ b. $\ln 5\sqrt{3}$ c. $\ln 2\pi$ **3**.Justifie que : $\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2}) + \ln(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 0$ **4**.On considère les nombres réels A, B et C tels que : $A = \ln 5 - \ln 15$ $B = 3\ln 3 - \ln 9$ $C = 2\ln 3 - \ln 6 + \ln\frac{4}{3}$ Ecris chacun de ces nombres sous la forme $\ln a$ où a est un nombre réel strictement positif. -Travail individuel <u>EXERCICE DE MAISON</u>	**2**. a. $\ln(3 \times 7) = \ln 3 + \ln 7$ b. $\ln 5\sqrt{3} = \ln 5 + \ln\sqrt{3}$ c. $\ln 2\pi = \ln 2 + \ln\pi$ **3**. $D = \ln(\sqrt{3}+\sqrt{2}) + \ln(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ $D = \ln[(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})]$ $D = \ln(3-2)$ $D = \ln(1)$ $D = 0$ **4**. $A = \ln 5 - \ln 15 = \ln\left(\frac{5}{15}\right)$ $A = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln 3$ $B = 3\ln 3 - \ln 9 = \ln 3^3 - \ln 9$ $B = \ln\frac{27}{9} = \ln 3$ $C = 2\ln 3 - \ln 6 + \ln\frac{4}{3}$ $C = \ln\frac{9}{6} + \ln\frac{4}{3} = \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3}$ $C = \ln\left(\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\right) = \ln 2$	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON5 : FONCTIONS LOGARITHMES

SEANCE: 2/5

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- Le sens de variation de la fonction logarithme népérien - La représentation graphique de la fonction logarithme népérien - Les limites de référence de la fonction logarithme népérien
Utiliser	- les limites de référence pour calculer d'autres limites

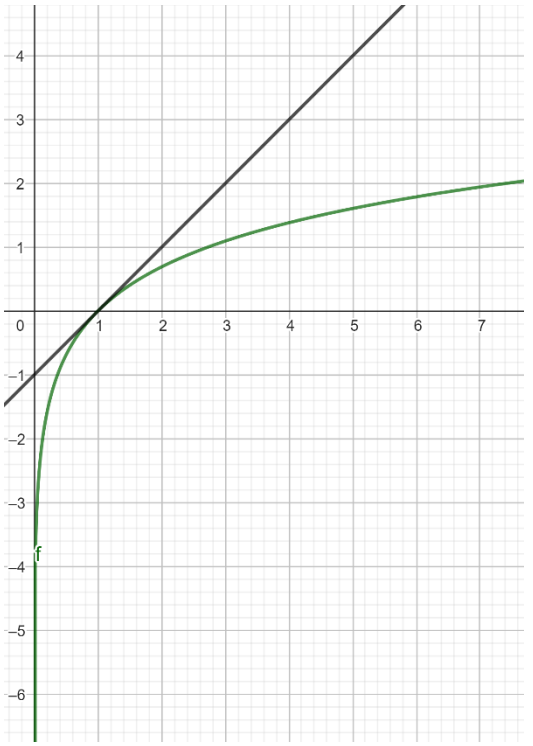
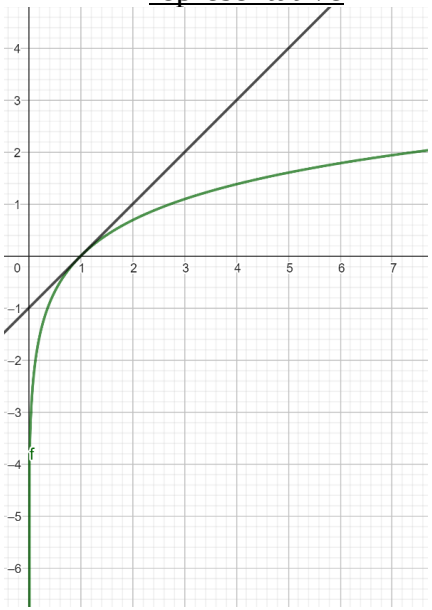
PLAN DE LA SEANCE

3. Etude de la fonction ln
   a. Limites de référence
   b. Sens de variation
      Conséquence
   c. Courbe représentative

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
10 min *Développement* *25 min*	-Travail en groupe -Travail en groupes	Correction des exercices de maison ACTIVITE 1. On admet que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$. Sachant que : $\ln x = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ Détermine : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x$. Interprète graphiquement ce résultat. 2. Détermine le sens de variation de la fonction ln et dresse son tableau de variation. 3. Déduis de ce qui précède, le signe de la fonction ln. 4. Démontre que l'équation $\ln x = 1$ admet une unique solution dans $]0;+\infty[$. 5. Soit (C) la courbe représentative de la fonction ln dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). a. Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1. b. Trace (T) et la courbe (C).	REPONSES ATTENDUES 1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x = -\infty$ La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction ln. 2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, (\ln)'(x) > 0$ donc la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. 3. $\forall x \in]0;1[, \ln x < 0$. $\forall x \in]1;+\infty[, \ln x > 0$. 4. La fonction ln est continue et	3. Etude de la fonction ln a. Limites de référence o $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x = -\infty$ o $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ o $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln x = 0$ o $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ o $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ o $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ b. Sens de variation La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$(\ln)'(x)$	+	1	+
$\ln x$	$-\infty$	0	$+\infty$

x	0	$+\infty$
$(\ln)'(x)$	+	
$\ln x$	$-\infty$	$+\infty$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			strictement croissante sur $]0;+\infty[$. $\ln(]0;+\infty[) =]-\infty;+\infty[$ donc la fonction ln réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $]-\infty;+\infty[$. Or $1 \in]-\infty;+\infty[$ donc l'équation $\ln x = 1$ admet une unique solution dans $]0;+\infty[$. 5. a. $(T): y = (\ln)'(1)(x-1) + \ln 1$ $(T): y = x - 1$ b. 	Conséquence La fonction ln est une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. On appelle e (nombre d'Euler) l'unique nombre réel élément de $]0;+\infty[$ tel que $\ln e = 1$. Une valeur approchée de e est : 2,718 281 828 456. c. Courbe représentative 

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *20 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Calcule les limites suivantes : a. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x(2-\ln x)$ b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\ln x}{1+x}$ c. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x\ln x}{x-1}$ d. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2\ln x}{1+x}$ e. $\lim\limits_{x\to +\infty} (3x-1-\ln x)$ f. $\lim\limits_{x\to 0} x^4\ln x$ g. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **a**. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x(2-\ln x)$ $= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} 2x - x\ln x$ $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} 2x = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln x = 0 \end{cases}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x(2-\ln x) = 0$ **b**. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\ln x}{1+x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+x} \times x\ln x$ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+x} = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln x = 0 \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\ln x}{1+x} = 0$ **c**. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x\ln x}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} x \times \dfrac{\ln x}{x-1}$ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1} x = 1 \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x\ln x}{x-1} = 1$ **d**. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2\ln x}{1+x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{1+x}.\ln x$ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{1+x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE MAISON</u>	$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 \ln x}{1+x} = +\infty$ **e**. $\lim_{x\to+\infty} (3x - 1 - \ln x) =$ $\lim_{x\to+\infty} x\left(3 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right)$ $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} 3 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} = 3 \\ \lim_{x\to+\infty} x = +\infty \end{cases}$ $\lim_{x\to+\infty} (3x - 1 - \ln x) = +\infty$ **f**. $\lim_{x\to0} x^4 \ln x = \lim_{x\to0} x^3 . x \ln x$ $\begin{cases} \lim_{x\to0} x^3 = 0 \\ \lim_{x\to0} x \ln x = 0 \\ > \end{cases}$ $\lim_{x\to0} x^4 \ln x = 0$ **g**. $\lim_{x\to+\infty} x \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right) =$ $\lim_{x\to+\infty} 3 \times \frac{x}{3} . \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right) =$ $\lim_{x\to+\infty} 3 \times \frac{\ln\left(1 + \frac{3}{x}\right)}{\frac{3}{x}} =$ $\lim_{u\to0} 3\frac{\ln 1 + u}{u} = 3$ $avec\ u = \frac{3}{x}$ $\lim_{x\to+\infty} x \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right) = 3$	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON5 : FONCTIONS LOGARITHMES

SEANCE: 3/5

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Résoudre	- Des équations ou inéquations faisant intervenir la fonction ln - Une équation de la forme $x^n = k$ $(k \in \mathbb{R}_+^*, n \in \mathbb{N}^*)$ - Une inéquation d'inconnue n de la forme $q^n \geq a$ ou $q^n \leq a$ $(q \in \mathbb{R}_+^*, a \in \mathbb{R}_+^*, n \in \mathbb{N}^*)$

PLAN DE LA SEANCE

4. Equations et inéquations avec ln
   a. Propriétés
   b. Equations du type $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$
      Méthode
   c. Inéquations du type $\ln(u(x)) \leq \ln(v(x))$
      Méthode

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
10 min	-Travail en groupe	Correction des exercices de maison		
Développement *5 min*	-Travail en groupes	<u>ACTIVITE</u> Soient a et b deux nombres réels strictement positifs. En te basant sur le sens de variation de la fonction ln, complète les pointillés ci-dessous par les signes $<, >$ ou $=$. $a = b \Leftrightarrow \ln a \ldots \ln b$ $a < b \Leftrightarrow \ln a \ldots \ln b$ $a > b \Leftrightarrow \ln a \ldots \ln b$ $a > 1 \Leftrightarrow \ln a \ldots 0$ $0 < a < 1 \Leftrightarrow \ln a \ldots 0$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> La fonction ln est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$. $a = b \Leftrightarrow \ln a = \ln b$ $a < b \Leftrightarrow \ln a < \ln b$ $a > b \Leftrightarrow \ln a > \ln b$ $a > 1 \Leftrightarrow \ln a > 0$ $0 < a < 1 \Leftrightarrow \ln a < 0$	4. <u>Equations et inéquations avec ln</u> a. <u>Propriétés</u> Pour tous nombres réels a et b strictement positifs. ○ $a = b \Leftrightarrow \ln a = \ln b$ ○ $a < b \Leftrightarrow \ln a < \ln b$ ○ $a > b \Leftrightarrow \ln a > \ln b$ ○ $a > 1 \Leftrightarrow \ln a > 0$ ○ $0 < a < 1 \Leftrightarrow \ln a < 0$ ○ $a \leq b \Leftrightarrow \ln a \leq \ln b$ ○ $a \geq b \Leftrightarrow \ln a \geq \ln b$ ○ $a \geq 1 \Leftrightarrow \ln a \geq 0$ ○ $0 < a \leq 1 \Leftrightarrow \ln a \leq 0$
Evaluation *10 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> 1. Compare : $\ln 8$ et $\ln 6$; $\ln\sqrt{5}$ et $\ln 3$; $\ln 2\sqrt{5}$ et $\ln 7$ 2. Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : a. $\ln x = \ln 3$ b. $\ln x = 2$ c. $2\ln x = \ln 16$ d. $\ln x \leq \ln 5$ e. $\ln x > 7$ f. $(\ln x)^2 - 2\ln x + 1 = 0$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. $\ln 8 > \ln 6$; $\ln\sqrt{5} < \ln 3$; $\ln 2\sqrt{5} < \ln 27$. 2. a. $\ln x = \ln 3 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = 3}$ b. $\ln x = 2 \Leftrightarrow \ln x = 2\ln e$ $\ln x = 2 \Leftrightarrow \ln x = \ln e^2$ $\boldsymbol{x = e^2}$ c. $2\ln x = 2\ln 4 \Leftrightarrow \ln x = \ln 4$ $\boldsymbol{x = 4}$ d. $\ln x \leq \ln 5 \Leftrightarrow x \leq 5$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Développement *5 min*	-Travail en groupe	<u>ACTIVITE2</u> Soient u et v deux fonctions réelles. 1. Détermine l'ensemble de définition des fonctions de type : $\ln(u(x))$. 2. Détermine l'ensemble de validité de l'équation $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$ et de l'inéquation $\ln(u(x)) < \ln(v(x))$. 3. Propose une méthode de résolution de : a. l'équation $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$ b. l'inéquation $\ln(u(x)) < \ln(v(x))$	$\boldsymbol{x \in]0;5]}$ e. $\ln x > 7 \Leftrightarrow \ln x > 7 \ln e$ $\ln x > \ln e^7$ $x > e^7$ $\boldsymbol{x \in]0;e^7[}$ f. $(\ln x)^2 - 2\ln x + 1 = 0$ Posons : $X = \ln x$ L'équation devient : $X^2 - 2X + 1 = 0$ $(X-1)^2 = 0 \Leftrightarrow X = 1$ $\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$ <u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. L'ensemble de définition des fonctions $\ln(u(x))$ est : $\{x \in \mathbb{R} / x \in D_u \; et \; u(x) > 0\}$ 2. L'ensemble de validité de l'équation $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$ et de l'inéquation $\ln(u(x)) < \ln(v(x))$ est $\left\{ \begin{matrix} x \in \mathbb{R} / x \in D_u, x \in D_v \\ et \; u(x) > 0 \; et \; v(x) > 0 \end{matrix} \right\}$ 3. Méthode : d. On détermine l'ensemble de validité E_v de l'équation ;	e. <u>Equations du type $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$</u> <u>Méthode</u> Pour résoudre une équation (E) de type $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$, on peut procéder comme suit : ▪ On détermine l'ensemble de validité E_v de l'équation (E). Sur E_v, (E) est équivalente à l'équation (E'): $u(x) = v(x)$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *15 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations et inéquations suivantes : a. $\ln(2-x)=\ln(x+5)$ b. $\ln(x-3)=2$	On résout l'équation $u(x)=v(x)$ sur l'ensemble de validité. f. On détermine l'ensemble de validité E_v de l'inéquation ; On résout l'inéquation $u(x)\leq v(x)$ sur l'ensemble de validité. <u>REPONSES ATTENDUES</u> **a**. $\ln(2-x)=\ln(x+5)$ $E_v=\{x\in\mathbb{R}/2-x>0\ et\ x+5>0\}$ $E_v=\{x\in\mathbb{R}/x<2\ et\ x>-5\}$ $E_v=]-5;2[$	▪ Les solutions de (E) sont donc les solutions de (E') sur E_v . c. <u>Inéquations du type $\ln(u(x))\leq \ln(v(x))$</u> <u>Méthode</u> Pour résoudre une inéquation (I) de type $\ln(u(x))\leq\ln(v(x))$, on peut procéder comme suit : ▪ On détermine l'ensemble de validité E_v de l'équation (I). Sur E_v, (I) est équivalente à l'équation (I'): $u(x)\leq v(x)$. ▪ Les solutions de (I) sont donc les solutions de (I') sur E_v .

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		c. $(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0$ d. $\ln(2-x) \leq \ln(x+5)$ e. $\ln(x-3) > 2$ f. $(\ln x)^2 + \ln x - 6 < 0$	$\forall x \in E_v, \ln(2-x) = \ln(x+5)$ équivaut à $2 - x = x + 5$ $2x = -3$ $x = -\frac{3}{2}$ $-\frac{3}{2} \in E_v \; donc \; S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ **b**. $\ln(x-3) = 2$ $E_v = \{x \in \mathbb{R} / x - 3 > 0\}$ $E_v = \{x \in \mathbb{R} / \; x > 3\}$ $E_v =]3; +\infty[$ $\forall x \in E_v, \ln(x-3) = 2 \Leftrightarrow$ $x - 3 = e^2$ $x = 3 + e^2$ $3 + e^2 \in E_v \; donc \; S_{\mathbb{R}} = \{3 + e^2\}$ **c**. $(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0$ $E_v = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$ $E_v =]0; +\infty[$ $\forall x \in E_v$, en posant $X = \ln x$ $(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0 \Leftrightarrow$ $X^2 + X - 6 = 0$ $X = -3$ ou $X = 2$ $\ln x = -3$ ou $\ln x = 2$ $x = e^{-3}$ ou $x = e^2$ $e^{-3} \in E_v$ et $e^2 \in E_v$ donc $S_{\mathbb{R}} = \{e^{-3}; e^2\}$ **d**. $\ln(2-x) \leq \ln(x+5)$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE MAISON</u>	$E_v =]-5;2[$ $\forall x \in E_v, \ln(2-x) \leq \ln(x+5)$ équivaut à $2-x \leq x+5$ $2x \leq -3$ $x \leq -\frac{3}{2}$ $S_{\mathbb{R}} = \left]-5;-\frac{3}{2}\right]$ **e**. $\ln(x-3) > 2$ $E_v = \{x \in \mathbb{R}/x-3>0\}$ $E_v = \{x \in \mathbb{R} / \ x > 3\}$ $E_v =]3;+\infty[$ $\forall x \in E_v, \ln(x-3) > 2 \Leftrightarrow$ $x-3 > e^2$ $x > 3+e^2$ $S_{\mathbb{R}} =]3+e^2;+\infty[$ **f**. $(\ln x)^2 + \ln x - 6 < 0$ $E_v = \{x \in \mathbb{R}/x>0\}$ $E_v =]0;+\infty[$ $\forall x \in E_v$, en posant $X = \ln x$ $(\ln x)^2 + \ln x - 6 < 0 \Leftrightarrow$ $X^2 + X - 6 < 0$ $X = -3$ ou $X = 2$ $-3 < X < 2$ $-3 < \ln x < 2$ $e^{-3} < x < e^2$ $S_{\mathbb{R}} =]e^{-3};e^2[$	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON5 : FONCTIONS LOGARITHMES

SEANCE : 4/5

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- Les fonctions dérivées des fonctions du type : lnou, ln$o\|u\|$ - Les primitives des fonctions du type : $\frac{u'}{u}$, où u est une fonction dérivable non nulle
Déterminer	- Les fonctions dérivées des fonctions du type : $lnou$, $lno\|u\|$ - Les primitives des fonctions du type : $\frac{u'}{u}$ où u est une fonction dérivable non nulle
Représenter	- Graphiquement les fonctions du type : $lnou$, $lno\|u\|$ - graphiquement une fonction faisant intervenir la fonction logarithme népérien

PLAN DE LA SEANCE

5. Logarithme népérien d'une fonction
6. Primitive d'une fonction du type : $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
10 min	-Travail en groupe	Correction des exercices de maison		
Développement *25 min*	-Travail en groupes	<u>ACTIVITE</u> 1. Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I. a. Justifie que ln$o u$ est dérivable sur I. b. Justifie que $(\ln ou)' = \frac{u'}{u}$. 2. Soit v une fonction dérivable sur un intervalle J. On suppose que v ne s'annule pas sur J. a. Détermine le plus grand sous-ensemble J sur lequel ln$o\|v\|$ est dérivable. b. Justifie que $(\ln o\|v\|)' = \frac{v'}{v}$. c. Déduis des questions précédentes les primitives des fonctions $\frac{v'}{v}$.	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. a. ln$o u$ est la composée de deux fonctions dérivables sur I donc ln$o u$ est dérivable sur I. b. $(\ln ou)' = u'(\ln)'(u)$ $(\ln ou)' = u' \times \frac{1}{u}$ $(\ln ou)' = \frac{u'}{u}$ 2.a. Le plus grand ensemble sur lequel ln$o\|v\|$ est dérivable sur est $\mathbb{R}^*$ b. Si v est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$, on a : $(\ln o\|v\|)' = (\ln ov)' = v'(\ln)'(v)$ $(\ln o\|v\|)' = v' \times \frac{1}{v}$ $(\ln ou)' = \frac{v'}{v}$ Si v est strictement négative sur $\mathbb{R}^*$, on a : $(\ln o\|v\|)' = \big(\ln o(-v)\big)'$ $(\ln o\|v\|)' = -v'(\ln)'(-v)$ $(\ln o\|v\|)' = -v' \times \frac{1}{-v}$	5. <u>Logarithme népérien d'une fonction</u> Soit u une fonction numérique d'ensemble de définition D_u. - L'ensemble de définition de la fonction ln$o u$ est : $\{x \in \mathbb{R}/x \in D_u \; et \; u(x) > 0\}$ - Si u est dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors la fonction ln$o u$ est dérivable sur I et on a : $\forall x \in I, (\ln ou)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ - La fonction ln$o\|u\|$ est dérivable sur tout intervalle I où la fonction u est dérivable et s'annule pas et on a : $\forall x \in I, (\ln o\|u\|)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *25 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> **1**. Dans chacun des cas suivants, calcule la dérivée de la fonction f sur l'intervalle I considéré : a $f(x) = \ln(3x^2 - 7x + 5)$ $I = \mathbb{R}$ b $f(x) = \ln\|2 - x\|$ $I =]-\infty; 2[$ c $f(x) = \ln\left(\frac{3-x}{x+1}\right)$ $I =]-1; 3[$ d $f(x) = \ln\sqrt{2x^2 - 1}$ $I = \left]-\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right[$ **2**. Détermine sur l'ensemble K les primitives de chacune des fonctions suivantes :	$(\ln\|v\|)' = \frac{v'}{v}$ 3. Les primitives des fonctions $\frac{v'}{v}$ Sont les fonctions de la forme $\ln\|v\| + c$ où $c \in \mathbb{R}$. <u>REPONSES ATTENDUES</u> **1**. a $f(x) = \ln(3x^2 - 7x + 5)$ $f'(x) = \frac{6x-7}{3x^2-7x+5}$ b $f(x) = \ln\|2 - x\|$ $f'(x) = \frac{-1}{2-x}$ c $f(x) = \ln\left(\frac{3-x}{x+1}\right)$ $f'(x) = \frac{-4}{(x+1)(3-x)}$ d $f(x) = \ln\sqrt{2x^2 - 1}$ $f'(x) = \frac{2x}{2x^2-1}$	6. <u>Primitive d'une fonction du type</u> $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ Si u est une fonction dérivable et ne s'annule pas sur un intervalle I, alors la fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ a pour primitives sur I les fonctions $x \mapsto \ln\big(u(x)\big) + c, c \in \mathbb{R}$.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
	-Travail individuel	a $f(x) = -\frac{2}{x}$; $K =]0; +\infty[$ b $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$; $K = \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$ c $f(x) = \frac{3}{2-x}$; $K =]-\infty; 2[$ d $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+1}$; $K = \mathbb{R}$ <u>EXERCICE DE MAISON</u>	**2**. a $f(x) = -\frac{2}{x}$ $F(x) = -2\ln x + c, c \in \mathbb{R}$ b $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ $F(x) = \ln\lvert\sin x\rvert + c, c \in \mathbb{R}$ $F(x) = \ln(-\sin x) + c, c \in \mathbb{R}$ c $f(x) = \frac{3}{2-x}$ $F(x) = -3\ln\lvert 2-x\rvert + c, c \in \mathbb{R}$ $F(x) = -3\ln(2-x) + c, c \in \mathbb{R}$ d $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+1}$ $F(x) = \ln(x^2-x+1) + c, c \in \mathbb{R}$	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON5 : FONCTIONS LOGARITHMES

SEANCE : 5/5

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- La définition de la fonction logarithme décimal - Les propriétés algébriques de la fonction logarithme décimal
Noter	- Une fonction logarithme décimal - Une fonction logarithme de base a ($a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$)

PLAN DE LA SEANCE

II. FONCTIONS LOGARITHMES DE BASE a

1. Définition
   Vocabulaire
   Remarque
2. Fonction logarithme décimale
   Conséquence

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
15 min *Développement* *15 min*	-Travail en groupe -Travail en groupes	Correction des exercices de maison ACTIVITE Soit k un nombre réel non nul et a un nombre réel strictement positif différent de 1. On considère la fonction : $f_k: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ $x \mapsto k \ln x$ Détermine la fonction f_k correspondant à la valeur de k telle que : 1) $f_k(e) = 1$ 2) $f_k(10) = 1$ 3) $f_k(a) = 1$ *La fonction* $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln x$ *est appelée* ***fonction logarithme de base e***.	REPONSES ATTENDUES 1) $f_k(e) = 1 \Leftrightarrow k \ln e = 1$ $k = 1$ La fonction correspondante est : $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ $x \mapsto \ln x$ 2) $f_k(10) = 1 \Leftrightarrow k \ln 10 = 1$ $k = \frac{1}{\ln 10}$ La fonction correspondante est : $g: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ $x \mapsto \frac{1}{\ln 10} \times \ln x$ 3) $f_k(a) = 1 \Leftrightarrow k \ln a = 1$ $k = \frac{1}{\ln a}$ La fonction correspondante est : $h: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ $x \mapsto \frac{1}{\ln a} \times \ln x$	II. FONCTIONS LOGARITHMES DE BASE a 1. Définition On appelle fonction logarithme de base a, $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, la fonction notée $\log_a$ et définie sur $]0; +\infty[$ par : $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$ Vocabulaire La fonction logarithme de base 10 est la fonction logarithme décimal. La fonction logarithme de base 2 est la fonction logarithme binaire. La fonction logarithme de base e est la fonction logarithme népérien. Remarque La fonction $\log_a$ a les mêmes

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		La fonction $g: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\ln x}{\ln 10}$ *est appelée* ***fonction logarithme de base*** **10** *ou* ***logarithme décimal*** *notée* **log .** *Comme* ln 10 *est un nombre positif, la fonction logarithme décimal possède des propriétés algébriques analogues à celles de la fonction* ln. *La fonction* $h: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\ln x}{\ln a}$ *est appelée* ***fonction logarithme de base*** a *notée* $\log_a$**.** *la fonction logarithme de base a possède des propriétés algébriques analogues à celles de la fonction* ln		propriétés algébriques que la ln. 2. <u>Fonction logarithme décimale</u> On appelle fonction logarithme décimal, la fonction notée log et définie sur $]0;+\infty[$ par : $\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$ <u>Conséquences</u> $\log(1) = 0, \log(10) = 1$ $\forall n \in \mathbb{Q}, \log 10^n = n$ Si $10^n \leq a \leq 10^{n+1}$, alors $n \leq \log a \leq n+1$.
Evaluation *20 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> 1. Ecris sous la forme $\log_a(b)$ a. $\log_2(4) + \log_2\left(\frac{1}{2}\right)$ b. $\log_3(9) - \log_3(27)$ c. $\log_4(5) + 2\log_4(8)$ 2. Calcule chacun des nombres suivants sans utiliser la calculatrice	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **1.a**. $\log_2(4) + \log_2\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2(4) - \log_2(2)$ $\log_2(4) + \log_2\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2\left(\frac{4}{2}\right)$ $\log_2(4) + \log_2\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2(2)$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		a. $\log(1000)$ b. $\log(0{,}000001)$ c. $\log\left(\sqrt{10000000}\right)$ d. $\log(8)+\log(125)$ e. $\log_8(2)$ f. $\log_2(256)$ g. $\log_5\left(\frac{1}{625}\right)$	**b**. $\log_3(9)-\log_3(27)=\log_3\left(\frac{27}{9}\right)$ $\log_3(9)-\log_3(27)=\log_3(3)$ **c**. $\log_4(5)+2\log_4(8)$ $=\log_4(5)+\log_4(64)$ $\log_4(5)+2\log_4(8)=\log_4(5\times 64)$ $\log_4(5)+2\log_4(8)=\log_4(320)$ **2.a**. $\log(1000)=\log 10^3$ $\log(1000)=3\log 10$ $\log(1000)=3$ **b**. $\log(0{,}000001)=\log 10^{-6}$ $\log(0{,}000001)=-6\times\log 10$ $\log(0{,}000001)=-6$ **c**. $\log\left(\sqrt{10000000}\right)=\log 10^{\frac{7}{2}}$ $\log\left(\sqrt{10000000}\right)=\frac{7}{2}\times\log 10$ $\log\left(\sqrt{10000000}\right)=\frac{7}{2}$ **d**. $\log(8)+\log(125)=\log(8\times 125)$ $\log(8)+\log(125)=\log(1000)$ $\log(8)+\log(125)=\log 10^3$ $\log(8)+\log(125)=3\log 10$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			$\log(8) + \log(125) = 3$ **f**. $\log_8(2) = \frac{\ln 2}{\ln 8}$ $\log_8(2) = \frac{\ln 2}{\ln 2^3}$ $\log_8(2) = \frac{\ln 2}{3\ln 2}$ $\log_8(2) = \frac{1}{3}$ **g**. $\log_5\left(\frac{1}{625}\right) = -\log_5(625)$ $\log_5\left(\frac{1}{625}\right) = -\log_5(5^4)$ $\log_5\left(\frac{1}{625}\right) = -4\log_5(5)$ $\log_5\left(\frac{1}{625}\right) = -4$	

BIBLIOGRAPHIE

Programmes éducatifs et guides d'exécution Mathématiques $T^{LE}D$

Progressions annuelles

Mon livre de mathématiques $T^{LE}D$ Collection PYRAMIDE

Mon livre de mathématiques $T^{LE}D$ Collection CIAM/EDICEF

Les cahiers de la réussite T^{LE} D Vallesse

Mon cahier d'habiletés Mathématiques T^{LE} D JD Editions

WWW.monecoleàlamaison.ci

https://physiques-et-maths.fr

FICHE DE LEÇON

FONCTIONS EXPONENTIELLES ET FONCTIONS PUISSANCES

TLE D

Rédigée par :

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON6 : FONCTIONS EXPONENTIELLES ET FONCTIONS PUISSANCES

NOMBRE DES SEANCES :7

DUREE D'UNE SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- La définition de la fonction exponentielle népérienne - La définition d'une fonction exponentielle de base a ($a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$) - La définition d'une fonction puissance d'exposant réel non nul - Les propriétés algébriques de la fonction exponentielle népérienne - La dérivée de la fonction exponentielle népérienne - Le sens de variation de la fonction exponentielle népérienne - La représentation graphique de la fonction exponentielle népérienne - Les propriétés algébriques de la fonction exponentielle de base a ($a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$) - Les propriétés algébriques de la fonction puissance d'exposant réel non nul - L'allure de la courbe représentative de la fonction $\mapsto x^\alpha$, $\alpha \neq 0$ suivant que $\alpha < 1$ ou $\alpha > 1$ - Les limites référence de la fonction exponentielle népérienne - Les fonctions dérivées des fonctions du type $expou$ ou u^α, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ - Les primitives des fonctions du type $u'e^u$ et $u'u^m$, $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ - Les propriétés relatives à la croissance comparée des fonctions logarithme népérienne, exponentielles et puissances
Noter	- La fonction exponentielle népérienne - Une fonction exponentielle de base a ($a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$) - Une fonction puissance d'exposant réel non nul
Résoudre	- Des équations ou inéquations faisant intervenir des fonctions exponentielles

Déterminer	- Les dérivées des fonctions du type $expou$ ou u^{α}, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ - Les primitives des fonctions du type $u'e^{u}$ et $u'u^{m}$, $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
Représenter	- Graphiquement les fonctions du type $expou$ ou u^{α}, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ - graphiquement une fonction faisant intervenir la fonction exponentielle népérienne - graphiquement une fonction faisant intervenir une fonction puissance d'exposant réel non nul
Utiliser	- les propriétés algébriques de la fonction exponentielle népérienne pour transformer une écriture - les limites de référence pour calculer d'autres limites - les limites sur la croissance comparée pour calculer d'autres limites
Etudier	- une fonction faisant intervenir la fonction exponentielle népérienne - une fonction faisant intervenir une fonction puissance d'exposant réel non nul
Traiter une situation	- Faisant appel aux fonctions exponentielles et puissances

SITUATION D'APPRENTISSANGE

Pour son premier stage pratique dans l'infirmerie de ton établissement, un étudiant en médecine reçoit un élève malade. Il lui donne un médicament qu'il prend immédiatement. La fonction qui modélise la masse M, en mg de ce médicament encore présent dans le sang, t heures après sa prise, est la fonction telle que : M(t) =$50e^{-0,75t}$.

L'étudiant affirme que la prochaine prise de ce médicament se fera lorsque le taux de présence dans le corps de la première prise est en dessous de 20%. L'élève malade veut savoir quand il pourra effectuer la prochaine prise. Pour cela il te sollicite.

Motivés pour la cause, les élèves de la classe s'organisent et décident de faire des recherches sur le comportement de cette fonction.

PLAN DE LA LEÇON

I. FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE

1. Définition-Propriétés algébriques
   a. Définition
      Notation
   b. Conséquences
   c. Propriétés algébriques
   d. Equations et inéquations

2. Etude de la fonction exponentielle
   a. Limites de référence
   b. Dérivée
   c. Tableau de variation

3. Dérivées-Primitives
   a. Dérivée de la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$
   b. Primitive de la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$

II. FONCTIONS EXPONENTIELLES-FONCTIONS PUISSANCES

1. Fonction exponentielle de base a
   a. Définition
   b. Dérivée et sens de variation de la fonction exp_a
      Conséquence
   c. Limites de référence
2. Fonction puissance d'exposant α
   a. Définition
   b. Remarque
   c. Croissance comparée

HABILETES, CONTENUS ET PLAN PAR SEANCE

SEANCE1

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- La définition de la fonction exponentielle népérienne - Le sens de variation de la fonction exponentielle népérienne
Noter	- La fonction exponentielle népérienne

PLAN DE LA SEANCE1

I. FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE
1. Définition-Propriétés algébriques
   a. Définition
      Notation
   b. Conséquences

SEANCE2

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- Les propriétés algébriques de la fonction exponentielle népérienne
Utiliser	- Les propriétés algébriques de la fonction exponentielle népérienne pour transformer une écriture

PLAN DE LA SEANCE2

   c. Propriétés algébriques

SEANCE3

HABILETES	CONTENUS
Résoudre	- Des équations ou inéquations faisant intervenir des fonctions exponentielles

PLAN DE LA SEANCE3

   d. Equations et inéquations

SEANCE4

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- La dérivée de la fonction exponentielle népérienne - Le sens de variation de la fonction exponentielle népérienne - La représentation graphique de la fonction exponentielle népérienne - Les limites référence de la fonction exponentielle népérienne
Utiliser	- Les limites de référence pour calculer d'autres limites

PLAN DE LA SEANCE4

2. Etude de la fonction exponentielle
   a. Limites de référence
   b. Dérivée

SEANCE5

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- Les primitives des fonctions du type $u'e^u$ et $u'u^m$
Déterminer	- Les primitives des fonctions du type $u'e^u$ et $u'u^m$

PLAN DE LA SEANCE5

3. Dérivée-primitives
   a. Dérivée de la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$
   b. Primitives de la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$

SEANCE6

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- Les primitives des fonctions du type $u'e^u$ et $u'u^m$
Déterminer	- Les primitives des fonctions du type $u'e^u$ et $u'u^m$

PLAN DE LA SEANCE6

II. FONCTIONS EXPONENTIELLES-FONCTIONS PUISSANCES

1. Fonction exponentielle de base a
   a. Définition
   b. Dérivée et sens de variation de la fonction exp_a Conséquence
   c. Limites de référence

SEANCE7

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- La définition d'une fonction puissance d'exposant réel non nul - Les propriétés algébriques de la fonction puissance d'exposant réel non nul - L'allure de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \neq 0$ suivant que $\alpha < 1$ ou $\alpha > 1$ - Les propriétés relatives à la croissance comparée des fonctions logarithme népérienne, exponentielles et puissances
Noter	- Une fonction puissance d'exposant réel non nul
Utiliser	- Les limites de référence pour calculer d'autres limites - Les limites sur la croissance comparée pour calculer d'autres limites

PLAN DE LA SEANCE7

2. Fonction puissance d'exposant α
   a. Définition
   b. Remarque
   c. Croissance comparée

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON6 : FONCTIONS EXPONENTIELLES ET FONCTIONS PUISSANCES

SEANCE : 1/7

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- La définition de la fonction exponentielle népérienne - Le sens de variation de la fonction exponentielle népérienne
Noter	- La fonction exponentielle népérienne

PLAN DE LA SEANCE

I. FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE
   1. Définition-Propriétés algébriques
      a. Définition
         Notation
      b. Conséquences

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Présentation *5 min*	-Lecture -Travail collectif	-Donne l'énoncé de la situation d'apprentissage aux apprenants. -Demande aux apprenants de faire une lecture silencieuse de la situation. -Demande à un apprenant de lire à haute voix l'énoncé de la situation. -Lis l'énoncé de la situation d'apprentissage à haute voix. **Question pour faire ressortir les tâches :** Qu'est-ce que les élèves décident de faire ?	-Les apprenants lisent silencieusement l'énoncé de la situation. -Un apprenant lis à haute voix l'énoncé de la situation. -Les apprenants écoutent Attentivement. REPONSE ATTENDUE Les élèves décident de faire des recherches sur les fonctions de type : M(t) =$50e^{-0,75t}$.	
Développement *25 min*	-Travail individuel	ACTIVITE 1. A l'aide de la calculatrice scientifique, effectue les calculs suivants : ln (e^8) ; $e^{\ln(8)}$, ln (e^x) ; $e^{\ln(x)}$ $(x > 0)$. 2. Dis ce que représente la fonction e^x pour la fonction ln (x). 3. A partir de l'ensemble de définition de la fonction lnx ,donne l'ensemble de définition de la fonction e^x.	REPONSES ATTENDUES 1. $\ln(e^8) = 8$; $e^{\ln(8)} = 8$, $\ln(e^x) = x$; $e^{\ln(x)} = 8$. 2. La fonction e^x est la bijection réciproque de la fonction ln (x). 3. La fonction e^x est définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+$.	I. FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE 1. Définition-Propriétés algébriques a. Définition On appelle fonction exponentielle népérienne, notée exp, la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
				<u>Notation</u> $exp: \mathbb{R} \mapsto]0;+\infty[$ $x \mapsto \exp(x)$ Pour tout nombre réel x, le nombre exp (x) se note également e^x : $\exp(x) = e^x$. b. Conséquences • La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$. • Pour tout nombre réel x et pour tout nombre réel strictement positif y, on a : $e^x = y \Leftrightarrow x = lny$ • Pour tout réel x, $e^x > 0$. • $e^0 = 1$; $e^1 = e$ • Pour tout nombre réel $x \in]0;+\infty[$, on a : $e^{lnx} = x$. • Pour tout nombre réel y, on a :$\ln(e^y) = y$. • La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

<table>
<tr><th>MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES</th><th>STRATEGIES PEDAGOGIQUES</th><th>ACTIVITES DU PROFESSEUR</th><th>ACTIVITES DES APPRENANTS</th><th>TRACE ECRITE</th></tr>
<tr>
<td>Evaluation
20 minutes</td>
<td>-Travail individuel</td>
<td>
<u>EXERCICE DE FIXATION</u>
Recopie le numéro de chacune des affirmations ci-dessous suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.
<table>
<tr><th>N°</th><th>Affirmations</th></tr>
<tr><td>1</td><td>L'ensemble de définition de la fonction exponentielle népérienne est $\mathbb{R}_+$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>La fonction exponentielle népérienne est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>La fonction exponentielle népérienne est la réciproque de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2x}$ sur $]0;+\infty[$.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$lne^9 = ln9$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$e^{ln3} = 3$</td></tr>
<tr><td>6</td><td>$x = ln2 \Leftrightarrow e^x = 2$</td></tr>
</table>
</td>
<td>
<u>REPONSES ATTENDUES</u>

F
F
F
F
V
V

</td>
<td></td>
</tr>
</table>

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON6 : FONCTIONS EXPONENTIELLES ET FONCTIONS PUISSANCES

SEANCE2 : 2/7

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- Les propriétés algébriques de la fonction exponentielle népérienne
Utiliser	- Les propriétés algébriques de la fonction exponentielle népérienne pour transformer une écriture

PLAN DE LA SEANCE

c. Propriétés algébriques

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Développement *25 min*	-Travail en groupes	<u>ACTIVITE</u> A l'aide des propriétés de la fonction logarithme népérien, compare les expressions suivantes : 1. $e^a \times e^b$ et e^{a+b} 2. e^{-b} et $\frac{1}{e^b}$ 3. $\frac{e^a}{e^b}$ et e^{a-b} 4. $(e^a)^r$ et $e^{a\times r}$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. $\ln(e^a \times e^b) = lne^a + lne^b$ $\ln(e^a \times e^b) = a + b$ $\ln(e^{a+b)}) = a + b$ On en déduit que : $e^a \times e^b = e^{a+b}$ 2. $\ln e^{-b} = -b$ $\ln\left(\frac{1}{e^b}\right) = -lne^b = -b$ On en déduit que $e^{-b} = \frac{1}{e^b}$ 3. $ln\left(\frac{e^a}{e^b}\right) = lne^a - lne^b$ $ln\left(\frac{e^a}{e^b}\right) = a - b$ $lne^{a-b} = a - b$ On en déduit que $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$ 4. $\ln (e^a)^r = \ln (e^a \times e^a \ldots \times e^a)$ $\ln(e^a)^r = \ln e^a + lne^a + \cdots + lne^a$ $\ln(e^a)^r = a + a + \cdots + a$ $\ln (e^a)^r = a \times r$ $lne^{a\times r} = a \times r$ On en déduit que $(e^a)^r = e^{a\times r}$	**c. <u>Propriétés algébriques</u>** Pour tous nombres réel a et b Et pour tout nombre rationnel r, on a : $e^a \times e^b = e^{a+b}$ $e^{-b} = \frac{1}{e^b}$ $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$ $(e^a)^r = e^{a\times r}$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *25 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Ecris sous la forme e^a, où a est un nombre réel, les nombres réels suivants : a) $\frac{e^9}{e^5}$ b) $(e^{-3})^2 \times e^8$ c) $\frac{e^{11} \times e^{-7}}{e^5}$ d) $\frac{e^{2+ln5}}{e^{3+ln5}}$		

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON6 : FONCTIONS EXPONENTIELLES ET FONCTIONS PUISSANCES

SEANCE : 3/7

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Résoudre	- Des équations ou inéquations faisant intervenir des fonctions exponentielles

PLAN DE LA SEANCE

d. Equations et inéquations

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Développement *25 min*	-Travail individuel	ACTIVITE Soient a et b deux nombres réels. En utilisant le sens de variation de la fonction logarithme népérien et le sens de variation de la fonction exponentielle népérienne, montre que : $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$ et $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$.	REPONSES ATTENDUES Montrons que : $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$ *Montrons que $\boldsymbol{e^a < e^b \Rightarrow a < b}$ $e^a > 0$ et $e^b > 0$. La fonction lnx est strictement croissante donc si $e^a < e^b$ alors $lne^a < lne^b$. D'où $a < b$. *Montrons que $\boldsymbol{a < b \Rightarrow e^a < e^b}$ La fonction e^x est une fonction strictement croissante donc si $a < b$ alors $e^a < e^b$. Conclusion : $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$ Montrons que : $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ *Montrons que $\boldsymbol{e^a = e^b \Rightarrow a = b}$ Si $e^a = e^b$ $alors$ $lne^a = lne^b$ $e^a = e^b \Rightarrow a = b$ Si $a = b$ alors $e^a = e^b$. Conclusion : $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$.	**d- <u>Equations et inéquations</u>** Pour tous nombres réels a et b on a : $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$ et $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *25 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Résous dans $\mathbb{R}$ chacune les équations suivantes : 1) $e^{3x-4} = e^{x+2}$ 2) $e^{x+6} = 4$ 3) $e^{2x} - e^{x} - 2 = 0$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1) $e^{3x-4} = e^{x+2}$ V= $\mathbb{R}$ $e^{3x-4} = e^{x+2} \Leftrightarrow 3x - 4 = x + 2.$ $2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$ Comme $3 \in V$, $S_{\mathbb{R}} = \{3\}$ 2) $e^{x+6} = 4$, V= $\mathbb{R}$ $e^{x+6} = 4 \Leftrightarrow e^{x+6} = e^{ln4}$ $x + 6 = ln4 \Leftrightarrow x = -6 + ln4$ $-6 + ln4 \in V$, $S_{\mathbb{R}} = \{-6 + ln4\}$ 3) $e^{2x} - e^{x} - 2 = 0$, $V = \mathbb{R}$. $e^{2x} - e^{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow$ $(e^{x})^2 - e^{x} - 2 = 0$ Posons $X = e^{x}$; donc $X > 0$ L'équation devient : $X^2 - X - 2 = 0$ $\Delta = 1 + 8 = 3^2$ $X = \frac{1+3}{2}$ ou $X = \frac{1-3}{2}$ $X = 2$ ou $X = -1$(impossible car $X > 0$) $X = 2 \Leftrightarrow e^{x} = 2$ $e^{x} = 2 \Leftrightarrow x = ln2$ $ln2 \in V$, $S_{\mathbb{R}} = \{ln2\}$	
	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE MAISON</u>		

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON6 : FONCTIONS EXPONENTIELLES ET FONCTIONS PUISSANCES

SEANCE : 4/7

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- La dérivée de la fonction exponentielle népérienne - Le sens de variation de la fonction exponentielle népérienne - La représentation graphique de la fonction exponentielle népérienne - Les limites référence de la fonction exponentielle népérienne
Utiliser	- Les limites de référence pour calculer d'autres limites

PLAN DE LA SEANCE

2. Etude de la fonction exponentielle
   a- Limites de référence
   b- Dérivée

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
10 min *Développement* *15 min*	-Travail collectif -Travail individuel	Correction des exercices de maison <u>ACTIVITE1</u> On considère la fonction $x \mapsto e^x$ 1. Donne l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto e^x$ et l'image de ce ensemble par cette fonction. 2. Donne $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} e^x$ et $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} e^x$. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} e^x = 0$ *et* $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} e^x = +\infty$ *sont appelées des limites de référence de la fonction* $x \mapsto e^x$. *Il y existe d'autres limites référence de la fonction* $x \mapsto e^x$ *qui sont :* $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} xe^x = 0$ $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x\mapsto0} \frac{e^x-1}{x} = 1$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto e^x$ est $]-\infty;+\infty[$. L'image de $]-\infty;+\infty[$ par la fonction $x \mapsto e^x$ est $]0;+\infty[$. 2. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} e^x = +\infty$	**2. <u>Etude de la fonction Exponentielle</u>** **a. <u>Limites de référence</u>** $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} e^x = 0$; $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} e^x = +\infty$ $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} xe^x = 0$ $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x\mapsto0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *10 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Calcule les limites suivantes : $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}(2x+5)e^x$ $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}x(1+e^{-x})$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}(2x+5)e^x$ $=\lim\limits_{x\mapsto-\infty}2xe^x+\lim\limits_{x\mapsto-\infty}5e^x$ $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}(2x+5)e^x=0$ car $\begin{cases}\lim\limits_{x\mapsto-\infty}2xe^x=0\\ \lim\limits_{x\mapsto-\infty}5e^x\end{cases}$ $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}x(1+e^{-x})$ $=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)$ $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}x(1+e^{-x})$ $=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}x\times\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left(1+\frac{1}{e^x}\right)$ $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}x(1+e^{-x})=+\infty$ car $\begin{cases}\lim\limits_{x\mapsto+\infty}x=+\infty\\ \lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left(1+\frac{1}{e^x}\right)=1\end{cases}$	

<table>
<tr><th>MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES</th><th>STRATEGIES PEDAGOGIQUES</th><th>ACTIVITES DU PROFESSEUR</th><th>ACTIVITES DES APPRENANTS</th><th>TRACE ECRITE</th></tr>
<tr>
<td>Développement
15 min</td>
<td>-Travail individuel</td>
<td>ACTIVITE2
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$.
1. Calcule :
$\lim\limits_{h\mapsto 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$
En déduire $f'(x)$.
2. Dresse le tableau de variation de la fonction e^x.</td>
<td>REPONSES ATTENDUES
1.
$\lim\limits_{h\mapsto 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$
$= \lim\limits_{h\mapsto 0} \dfrac{e^{x+h}-e^x}{h}$
$= \lim\limits_{h\mapsto 0} \dfrac{e^x(e^h-1)}{h}$
$= e^x \times \lim\limits_{h\mapsto 0} \dfrac{(e^h-1)}{h}$
$\lim\limits_{h\mapsto 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = e^x$.
On en déduit que $f'(x) = e^x$.

2. Tableau de variation
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$(e^x)'$</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>e^x</td><td>$+\infty$
0</td></tr>
</table>
</td>
<td>b. <u>Dérivée</u>
La fonction exponentielle népérienne est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est : $x \mapsto e^x$.

c. <u>Tableau de variation</u>
La fonction exponentielle népérienne est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$(e^x)'$</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>e^x</td><td>$+\infty$
0</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Evaluation
10 min</td>
<td>-Travail individuel</td>
<td>EXERCICE DE FIXATION
Détermine la dérivée de chacune des fonctions suivantes :
$f(x) = 3x(e^x - 1)$
$g(x) = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$</td>
<td>REPONSES ATTENDUES
$f(x) = 3x(e^x - 1)$
$f'(x) = 3(e^x - 1) + 3xe^x$
$f'(x) = 3xe^x + 3e^x - 3$
$f'(x) = 3e^x(x+1) - 3$</td>
<td></td>
</tr>
</table>

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		<u>EXERCICE DE MAISON</u> Calcule les limites suivantes : $\lim_{x \mapsto +\infty} (x - e^x + 1)$ $\lim_{x \mapsto -\infty} (x - e^x + 1)$ $\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{e^x - x}{e^{2x} + 1}$ $\lim_{x \mapsto +\infty} (xe^{1-x})$ $\lim_{x \mapsto -\infty} \frac{3 - e^x}{1 + 2e^{2x}}$	$g(x) = \frac{1 + e^x}{1 - e^x}$ $g'(x) = \frac{e^x(1 - e^x) + e^x(1 + e^x)}{(1 - e^x)^2}$ $g'(x) = \frac{e^x - (e^x)^2 + e^x + (e^x)^2}{(1 - e^x)^2}$ $g'(x) = \frac{2e^x}{(1 - e^x)^2}$	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON6 : FONCTIONS EXPONENTIELLES ET FONCTIONS PUISSANCES

SEANCE : 5/7

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- Les primitives des fonctions du type $u'e^u$ et $u'u^m$
Déterminer	- Les primitives des fonctions du type $u'e^u$ et $u'u^m$

PLAN DE LA SEANCE

3. DERIVEES – PRIMITIVES
   a. Dérivée de la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$
   b. Primitive de la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Présentation *5 min*	-Travail en groupe	*Soit u une fonction dérivable sur un intervalle K de $\mathbb{R}$, alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur K et $\forall x \in K$, on a :* $(e^u)'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.		**3. <u>DERIVEES</u> – <u>PRIMITIVES</u>** **a. <u>Dérivée de la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$</u>** Soit u une fonction dérivable sur un intervalle K de $\mathbb{R}$, alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur K. Pout tout x élément de K on a : $(e^u)'(x) = u'(x)e^{u(x)}$
Evaluation *20 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION1</u> Calcule les dérivées sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes : $f(x) = e^{1-3x}$ $g(x) = x^2e^{-x}$ $h(x) = e^{3cosx}$ $l(x) = e^{2x^3+5x+4}$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> $f'(x) = -3e^{1-3x}$ $g'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x}$ $g'(x) = xe^{-x}(2-x)$ $h'(x) = -3\sin(x)e^{cosx}$ $l'(x) = (6x^2+5)e^{2x^3+5x+4}$	
Présentation *5 min*	-Travail collectif	*Si u est une fonction dérivable sur un intervalle K alors la fonction : $x \mapsto u'(x) \times e^{u(x)}$ a pour primitives sur K , les fonctions : $x \mapsto e^{u(x)} + c$ avec $c \in \mathbb{R}$*		**b. <u>Primitive de la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$</u>** Si u est une fonction dérivable sur un intervalle K alors la fonction : $x \mapsto u'(x) \times e^{u(x)}$ a pour primitives sur K , les fonctions : $x \mapsto e^{u(x)} + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *20 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION2</u> Détermine sur $\mathbb{R}$ les primitives de chacune des fonctions suivantes : $f(x) = e^x$; $g(x) = cos3xe^{sin3x}$; $i(x) = xe^{x^2}$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> $f(x) = e^x$ $f(x) = 1e^x$ $f(x) = x'e^x$ Les primitives de la fonction f telle que $f(x) = e^x$ sont les fonctions F telles que : $F(x) = e^x + \propto \quad (\propto \in \mathbb{R})$. $g(x) = cos3xe^{sin3x}$ $g(x) = \frac{1}{3}(3cosxe^{sin3x})$ $g(x) = \frac{1}{3}((sin3x)'e^{sin3x})$ Les primitives de la fonction g telle que $g(x) = cos2xe^{sin2x}$ sont les fonctions G telles que : $G(x) = \frac{1}{3}e^{sin2x} + \beta \ (\beta \in \mathbb{R})$ $i(x) = xe^{x^2}$ $i(x) = \frac{1}{2} \times 2xe^{x^2}$ $i(x) = \frac{1}{2} \times (x^2)'e^{x^2}$ Les primitives de la fonction i telle que $i(x) = xe^{x^2}$ sont les fonctions I telles que : $I(x) = e^{x^2} + \theta \ (\theta \in \mathbb{R})$	
	-Travail individuel	<u>EXERCICES DE MAISON</u>		

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON6 : FONCTIONS EXPONENTIELLES ET FONCTIONS PUISSANCES

SEANCE : 6/7

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- Les primitives des fonctions du type $u'e^u$ et $u'u^m$
Déterminer	- Les primitives des fonctions du type $u'e^u$ et $u'u^m$

PLAN DE LA SEANCE

II. FONCTIONS EXPONENTIELLES – FONCTIONS PUISSANCES
1. Fonction exponentielle de base a
   a. Définition
   b. Dérivée et sens de variation de la fonction exp_a
      Conséquence
   c. Limites de référence

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
10 min *Développement* *15 min*	-Travail collectif -Travail individuel	Correction des exercices de maison. <u>ACTIVITE1</u> Soit a un nombre réel strictement positif. On donne la fonction f telle que $f(x) = a^x$. Ecris f sous la forme e^{β} où β est un nombre réel. Déduis-en le signe de a^x. *$e^{xln\,a}$ est appelée fonction exponentielle de base a.* *On note $exp_a(x) = a^x = e^{xlna}$.*	<u>REPONSES ATTENDUES</u> $f(x) = a^x$ $f(x) = e^{\ln a^x}$ $f(x) = e^{x\ln a}$ On en déduis que $a^x > 0$.	**II. <u>FONCTIONS EXPONENTIELLES – FONCTIONS PUISSANCES</u>** **<u>Fonction exponentielle de base a</u>** **a. <u>Définition</u>** Soit a un nombre réel strictement positif. On appelle fonction exponentielle de base a, notée exp_a, la fonction $x \mapsto a^x$ et définie sur $\mathbb{R}$ par : $exp_a(x) = a^x = e^{xlna}$. Remarques • Pour tout nombre réel strictement positif x, $a^x > 0$. • La fonction exponentielle de base 1 est la fonction constante $x \mapsto 1$. • La fonction exponentielle de base e est la fonction

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *5 min*	-Travail individuel	EXERCICE DE FIXATION1 Ecris sous forme $e^{u(x)}$ les fonctions suivantes : 2^x ; 7^x ; 23^x .	REPONSES ATTENDUES $2^x = e^{xln2}$; $7^x = e^{xln7}$; $23^x = e^{xln23}$.	exponentielle népérienne.
Développement *10 min*	-Travail individuel	ACTIVITE2 On donne la fonction$f : x \mapsto a^x$. 1. Détermine f'. 2. Donne le signe de $f'(x)$ puis le sens de variation de f suivant les valeurs prises par a.	REPONSE ATTENDUE 1. $f(x) = a^x$ $f(x) = a^x = e^{xlna}$ $f'(x) = (a^x)' = (e^{xlna})'$ $f'(x) = lnae^{xlna}$ $f'(x) = lna \times a^x$ 2. Si $0 < a < 1$, ln $(a) < 0$ donc $f'(x) < 0$.f est strictement croissante. Si $a > 1$, ln $(a) > 0$ donc $f'(x) > 0$. f est strictement décroissante.	**b. <u>Dérivée et sens de variation de la fonction exp_a.</u>** **<u>Propriété</u>** • Pour tout nombre réel strictement positif et différent de 1, la fonction exp_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x on a : $exp'_a(x) = \ln(a)a^x$ • Si $0 < a < 1$, ln $(a) < 0$ alors la fonction exp_a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. • Si $a > 1$, ln $(a) > 0$ alors la fonction exp_a est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *10 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION2</u> Résous les équations et inéquations suivantes : 1. $3^{-x+1} = 3^{2x-5}$ 2. $2^{5x} < 16^{3x+7}$ 3. $(0{,}7)^{x-2} < (0{,}7)^{-3x+1}$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. $3^{-x+1} = 3^{2x-5}$ $3^{-x+1} = 3^{2x-5} \Leftrightarrow -x+1 = 2x-5 \Leftrightarrow -3x = -6 \Leftrightarrow x = 2$ $S_{\mathbb{R}} = \{2\}$ 2. $2^{5x} < 16^{x+2}$ $2^{5x} < 16^{x+2} \Leftrightarrow 2^{5x} < (2^4)^{x+2} \Leftrightarrow 2^{5x} < 2^{4x+8} \Leftrightarrow$	**<u>Conséquence</u>** Pour tout nombre réel strictement positif a et pour tous nombres réels x et y, on a : ❖ $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$ ❖ Si $0 < a < 1$, alors $a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$. ❖ Si $a > 1$, alors $a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$. **c. <u>Limites de référence</u>** ○ Si $0 < a < 1$, alors $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} a^x = +\infty$. ○ Si $a > 1$, alors $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} a^x = 0$.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE MAISON</u> Détermine le sens de variation des fonctions définies par : $f(x) = -2 \times 1{,}3^x$ $g(x) = 8{,}7 \times 0{,}92^x$ $h(x) = 0{,}6 \times 2{,}39^x$ $l(x) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{7}{8}\right)^x$ $i(x) = 5 \times \left(\frac{3}{2}\right)^x$	$5x < 4x + 8 \Leftrightarrow x < 8.$ $S_{\mathbb{R}} =]-\infty; 8[$ 3. $(0{,}7)^{x-2} < (0{,}7)^{-3x+1} \Leftrightarrow$ $x - 2 > -3x + 1 \Leftrightarrow 4x >$ $3 \Leftrightarrow x > \frac{3}{4}$ $S_{\mathbb{R}} = \left]\frac{3}{4}; +\infty\right[$	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON6 : FONCTIONS EXPONENTIELLES ET FONCTIONS PUISSANCES

SEANCE : 7/7

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- La définition d'une fonction puissance d'exposant réel non nul - Les propriétés algébriques de la fonction puissance d'exposant réel non nul - L'allure de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^{\alpha}$, $\alpha \neq 0$ suivant que $\alpha < 1$ ou $\alpha > 1$ - Les propriétés relatives à la croissance comparée des fonctions logarithme népérienne, exponentielles et puissances
Noter	- Une fonction puissance d'exposant réel non nul
Utiliser	- Les limites de référence pour calculer d'autres limites - Les limites sur la croissance comparée pour calculer d'autres limites

PLAN DE LA SEANCE

2. Fonction puissance d'exposant α

   a. Définition

   b. Remarque

   c. Croissance comparée

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
10 min *Développement* *20 min*	-Travail individuel	Correction de l'exercice de maison <u>ACTIVITE</u> Soit α un nombre réel non nul. On considère la fonction f telle que : $f(x) = x^{\alpha}$ 1. Ecris $f(x)$ sous forme exponentielle. 2. Donne l'ensemble de définition de la fonction f. *x^{α} est appelée fonction puissance d'exposant α.*	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. $f(x) = x^{\alpha}$ $f(x) = e^{lnx^{\alpha}}$ $f(x) = e^{\alpha lnx}$ 2. $e^{\alpha lnx} > 0$ donc f est définie sur $]0; +\infty[$.	2. **<u>Fonction puissance d'exposant α</u>** **a. <u>Définition</u>** Soit α un nombre réel non nul. On appelle fonction puissance d'exposant α, la fonction $x \mapsto x^{\alpha}$. Cette fonction est définies sur $]0; +\infty[$ par $x^{\alpha} = e^{\alpha lnx}$. **b. <u>Remarque</u>** Les règles de calculs sur les puissances d'exposants rationnels s'appliquent pour ces fonctions puissances d'exposants réels. **c. <u>Croissances comparées Propriété</u>** Soit α un nombre réel strictement positif, on a : $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0$ $\lim\limits_{\substack{x \mapsto 0 \\ >}} x^{\alpha} \ln x = 0$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *20 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Calcule les limites suivantes : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \frac{\ln x}{x^7}$ $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 0 \\ >}} x^3 \ln x$ $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \frac{e^x}{x^5}$ $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x^6 e^{-x}$		$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

BIBLIOGRAPHIE

Programmes éducatifs et guides d'exécution Mathématiques $T^{LE}D$

Progressions annuelles

Mon livre de mathématiques $T^{LE}D$ Collection PYRAMIDE

Mon livre de mathématiques $T^{LE}D$ Collection CIAM/EDICEF

Les cahiers de la réussite T^{LE} D Vallesse

Mon cahier d'habiletés Mathématiques T^{LE} D JD Editions

WWW.monecoleàlamaison.ci

https://physiques-et-maths.fr

FICHE DE LEÇON

NOMBRES COMPLEXES

TLE D

Rédigée par :

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME1 : CALCULS ALGEBRIQUES

LEÇON7 : NOMBRES COMPLEXES

NOMBRE DES SEANCES :11

DUREE D'UNE SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Identifier	- La partie réelle, la partie imaginaire d'un nombre complexe - La forme algébrique d'un nombre complexe - La forme trigonométrique d'un nombre complexe - La forme exponentielle d'un nombre complexe
Connaître	- La définition du module, d'un argument d'un nombre complexe - Les propriétés relatives au module et un argument du produit, de l'inverse, du quotient et de la puissance entière d'un nombre complexe - Les propriétés relatives à la somme, au produit et au quotient de deux nombres complexes - La définition du conjugué d'un nombre complexe - Les propriétés relatives au conjugué d'un nombre complexe - La propriété relative à l'égalité de deux nombres complexes - L'affixe d'un point, d'un vecteur - Le point image, le vecteur image d'un nombre complexe - La définition d'une racine carrée d'un nombre complexe - La définition d'une racine $n^{ième}$ d'un nombre complexe non nul - Les racines $n^{ième}$ de l'unité - La formule de Moivre - La formule d'Euler - Les caractérisations complexes d'un cercle, d'une droite, d'une demi-droite

Déterminer	- La forme algébrique, la forme trigonométrique d'un nombre complexe - La partie réelle, la partie imaginaire d'un nombre complexe - Le conjugué d'un nombre complexe - Le module et un argument d'un nombre complexe non nul - Des lieux géométriques à l'aide des nombres complexes - Les racines carrées d'un nombre complexe - Les racines $n^{ième}$ d'un nombre complexe non nul
Calculer	- La somme, le produit et le quotient de deux nombres complexes - La puissance d'un nombre complexe
Linéariser	- Des puissances de $\cos x$ et $\sin x$
Résoudre	- Une équation du second degré à coefficients complexes ainsi que des équations s'y ramenant - Une équation se ramenant du second degré à coefficients complexes
Utiliser	- Les formules de Moivre et d'Euler pour transformer des produits en somme dans des expressions trigonométriques
Traiter une situation	- Faisant appel aux nombres complexes

SITUATION D'APPRENTISSANGE

Des élèves d'une classe de terminale s'interroge sur ce qu'ils viennent de découvrir à l'exposition sur les journées mathématiques organisée par la Société Mathématique de Côte d'Ivoire (SMCI). Dans un stand sur les équations on peut lire : Au début du XVIème siècle, le mathématicien Scipione dal Ferro, propose une formule donnant une solution de l'équation du 3ème degré $x^3 + px = q$.

$$x = \sqrt[3]{\frac{q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}}$$

A la fin du XVIème siècle, le mathématicien Bombelli applique cette formule à l'équation $x^3 - 15x = 4$. Il obtient littéralement : $x = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}$.

Les élèves sont intrigués par la notation $\sqrt{-1}$ car depuis la classe de troisième ils savent que la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas. Leur professeur de mathématique explique qu'en mathématique, lorsqu'une une équation n'a pas de solutions dans un ensemble, une démarche naturelle (et historique) consiste à en chercher dans un ensemble plus grand. L'ensemble numérique le plus grand que l'on a rencontré est $\mathbb{R}$. Pourtant, l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$. Il faut donc envisager un autre ensemble noté $\mathbb{C}$ contenant des nombres imaginaires. Les élèves décident d'en savoir d'avantage sur ce nouvel ensemble.

PLAN DE LA LEÇON

I. ETUDE ALGEBRIQUE
   1. Notion de nombre complexe
      a. Définition
         Propriété et définition
      b. Opérations dans $\mathbb{C}$
      c. Propriété
      d. Puissance entière d'un nombre complexe
   2. Conjugué d'un nombre complexe
      a. Définition
      b. Propriété1
      c. Propriété2
   3. Module d'un nombre complexe
      a. Définition
      b. Propriétés

II. REPRESENTATION GEOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE
   1. Plan complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur, point image d'un nombre complexe, vecteur image d'un nombre complexe.
   2. Interprétation géométrique du module d'un nombre complexe

III. FORME TRIGONOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL
   1. Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul
      a. Argument d'un nombre complexe non nul
         Définition
         Remarque
         Propriété
      b. Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul
      c. Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul
         Définition
         Propriété
   2. Formule de Moivre et applications
      a. Formule de Moivre
         Propriété
      b. Formule d'Euler
         Propriété
         Remarque

IV. EQUATION DANS $\mathbb{C}$
   A. RESOLUTION D'EQUATIONS DANS $\mathbb{C}$
      1. Racine carrée d'un nombre complexe
         a. Définition
         b. Remarque
      2. Equations du second degré
         a. Propriété
         b. Remarque
   B. RACINE N^{IEME} D'UN NOMBRE COMPLEXE
      1. Racine $n^{ième}$ d'un nombre complexe
         a. Définition
         b. Propriété1
         c. Propriété2
      2. Racine $n^{ième}$ de l'unité
         a. Définition
         b. Remarques

HABILETES, CONTENUS ET PLANS PAR SEANCE

SEANCE1

HABILETES	CONTENUS
Identifier	- La partie réelle, la partie imaginaire d'un nombre complexe - La forme algébrique d'un nombre complexe
Connaître	- Les propriétés relatives à la somme, au produit et au quotient de deux nombres complexes
Déterminer	- La partie réelle, la partie imaginaire d'un nombre complexe
Calculer	- La somme, le produit et le quotient de deux nombres complexes

PLAN DE LA SEANCE1

I. ETUDE ALGEBRIQUE
1. Notion de nombre complexe
   a. Définition
      Propriété et définition
   b. Opérations dans $\mathbb{C}$

SEANCE2

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- La propriété relative à l'égalité de deux nombres complexes
Calculer	- La puissance d'un nombre complexe

PLAN DE LA SEANCE2

   c. Propriété
   d. Puissance entière d'un nombre complexe

SEANCE3

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- La définition du conjugué d'un nombre complexe - Les propriétés relatives au conjugué d'un nombre complexe
Déterminer	- Le conjugué d'un nombre complexe

PLAN DE LA SEANCE3

2. Conjugué d'un nombre complexe
   a. Définition
   b. Propriété1
   c. Propriété2

SEANCE4

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- La définition du module d'un nombre complexe - Les propriétés relatives au module du produit, de l'inverse, du quotient et de la puissance entière d'un nombre complexe

3. Module d'un nombre complexe
   a. Définition
   b. Propriétés

SEANCE5

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- L'affixe d'un point, d'un vecteur - Le point image, le vecteur image d'un nombre complexe

PLAN DE LA SEANCE5

II. REPRESENTATION GEOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

1. Plan complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur, point image d'un nombre complexe, vecteur image d'un nombre complexe.
2. Interprétation géométrique du module d'un nombre complexe

SEANCE6

HABILETES	CONTENUS
Identifier	- La forme trigonométrique d'un nombre complexe
Connaître	- La définition d'un argument d'un nombre complexe - Les propriétés relatives au module et un argument du produit, de l'inverse, du quotient et de la puissance entière d'un nombre complexe
Déterminer	- Le module et un argument d'un nombre complexe non nul - La forme trigonométrique d'un nombre complexe

PLAN DE LA SEANCE6

III. FORME TRIGONOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

1. Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul
   a. Argument d'un ombre complexe non nul
      Définition
      Remarque
      Propriété
   b. Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

SEANCE7

HABILETES	CONTENUS
Identifier	- La forme exponentielle d'un nombre complexe

PLAN DE LA SEANCE7

c. Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul
   Définition
   Propriété

SEANCE8

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- La formule de Moivre - La formule d'Euler
Linéariser	- Des puissances de $\cos x$ et $\sin x$
Utiliser	- Les formules de Moivre et d'Euler pour transformer des produits en somme dans des expressions trigonométriques

PLAN DE LA SEANCE8

2. Formule de Moivre et applications
   a. Formule de Moivre
      Propriété
   b. Formule d'Euler
      Propriété
      Remarque

SEANCE9

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- La définition d'une racine carrée d'un nombre complexe
Déterminer	- Les racines carrées d'un nombre complexe

PLAN DE LA SEANCE9

IV. EQUATION DANS ℂ
  A. RESOLUTION D'EQUATIONS DANS ℂ
    1. Racine carrée d'un nombre complexe
      a. Définition
      b. Remarque

SEANCE10

HABILETES	CONTENUS
Résoudre	- Une équation du second degré à coefficients complexes ainsi que des équations s'y ramenant - Une équation se ramenant du second degré à coefficients complexes

PLAN DE LA SEANCE10

    2. Equations du second degré
      a. Propriété
      b. Remarque

SEANCE11

HABILETES	CONTENUS
Résoudre	- Une équation du second degré à coefficients complexes ainsi que des équations s'y ramenant - Une équation se ramenant du second degré à coefficients complexes

PLAN DE LA SEANCE11

  B. RACINE N^{IEME} D'UN NOMBRE COMPLEXE
    1. Racine n^{ième} d'un nombre complexe
      a. Définition
      b. Propriété1
      c. Propriété2
    2. Racine n^{ième} de l'unité
      a. Définition
      b. Remarques

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME1 : CALCULS ALGEBRIQUES

LEÇON7 : NOMBRES COMPLEXES

SEANCE : 1/11

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Identifier	- La partie réelle, la partie imaginaire d'un nombre complexe - La forme algébrique d'un nombre complexe
Connaître	- Les propriétés relatives à la somme, au produit et au quotient de deux nombres complexes
Déterminer	- La partie réelle, la partie imaginaire d'un nombre complexe
Calculer	- La somme, le produit et le quotient de deux nombres complexes

PLAN DE LA SEANCE

I. ETUDE ALGEBRIQUE
   1. Notion de nombre complexe
      a. Définition
         Propriété et définition
      b. Opérations dans $\mathbb{C}$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Présentation *5 min*	-Lecture -Travail collectif	-Donne l'énoncé de la situation d'apprentissage aux apprenants. -Demande aux apprenants de faire une lecture silencieuse de la situation. -Demande à un apprenant de lire à haute voix l'énoncé de la situation. -Lis l'énoncé de la situation d'apprentissage à haute voix. **Question pour faire ressortir les tâches :** Qu'est-ce que les élèves décident de faire ?	-Les apprenants lisent silencieusement l'énoncé de la situation. -Un apprenant lis à haute voix l'énoncé de la situation. -Les apprenants écoutent Attentivement. REPONSE ATTENDUE Les élèves décident d'en savoir d'avantage sur l'ensemble $\mathbb{C}$.	
Développement *20 min*	-Travail individuel	ACTIVITE1 On donne les nombres z_1, z_2 et z_3 ci-dessous écrits sous la forme $a + ib$: $z_1 = 2 + 5i$ $z_2 = -3i$ $z_3 = 6$ 1. Pour chacun des nombres z_1, z_2 et z_3, indique la valeur de a et celle de b. 2. Indique l'ensemble auquel appartiennent a et b.	REPONSES ATTENDUES 4. $z_1 = 2 + 5i$ $a = 2\ et\ b = 5$ $z_2 = -3i$ $a = 0\ et\ b = -3$ $z_3 = 6$ $a = 6\ et\ b = 0$ 5. Les nombres a et b appartiennent à $\mathbb{R}$.	I. ETUDE ALGEBRIQUE 6. Notion de nombre complexe a. Définition On appelle nombre complexe tout nombre de la forme $a + ib$ où $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$. L'ensemble des nombres complexes se note $\mathbb{C}$.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		Les nombres qui s'écrivent sous la forme $z = a + ib$ *où* a *et* b *sont des nombres réels sont appelés* ***nombres complexes***. $i^2 = -1$ *L'ensemble des nombres complexes se note* $\mathbb{C}$. *L'écriture* $z = a + ib$ *est appelée* ***forme algébrique*** *de* z. a *désigne la* ***partie réelle*** $(a = \mathcal{R}e(z))$ *et* b *est la* ***partie imaginaire*** $(b = \mathcal{I}m(z))$. *Lorsque* $= 0$ *,* z *est un nombre réel ;* *Lorsque* $a = 0$*,* z *est un nombre complexe* ***imaginaire pur.*** *L'ensemble des nombres réels imaginaires purs est noté* $i\mathbb{R}$. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$		<u>Propriété et définition</u> Tout nombre complexe z s'écrit de façon unique sous la forme $z = a + ib$. La forme $\boldsymbol{a + ib}$ est appelée ***forme algébrique*** du nombre complexe. Le nombre réel a est appelé la ***partie réelle*** du nombre complexe z ; on note : $a = \mathcal{R}e(z)$ Le nombre réel b est appelé la ***partie imaginaire*** du nombre complexe z ; on note : $b = \mathcal{I}m(z)$ Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle est un nombre complexe ***imaginaire pur***. L'ensemble des nombres complexes imaginaires purs est l'ensemble noté $i\mathbb{R}$. Un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle est un nombre réel. On a : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et $i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ Le seul nombre complexe à la fois réel et imaginaire pur est le nombre nul 0.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Développement *15 min*	-Travail individuel	<u>ACTIVITE2</u> Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes donnés. Calcule : 1) $z + z'$ 2) $z \times z'$ 3) $\frac{1}{z}$ 4) $\frac{z}{z'}$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1) $z + z' = a + ib + a' + ib'$ $z + z' = (a + a') + i(b + b')$ 2) $zz' = (a + ib)(a' + ib')$ $zz' = aa' + iab' + ia'b - bb'$ $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$ 3) $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib}$ $\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)}$ $\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$ $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}$ 4) $\frac{z}{z'} = \frac{a+ib}{a'-ib'} = z \times \frac{1}{z'}$ $\frac{z}{z'} = \frac{(a + ib)(a' + ib')}{(a' - ib')(a' + ib')}$ $\frac{z}{z'} = \frac{aa' + iab' + ia'b - bb'}{a'^2 + b'^2}$ $\frac{z}{z'} = \frac{aa' - bb'}{a'^2 + b'^2} + i\frac{ab' + a'b}{a'^2 + b'^2}$	b. <u>Opérations dans $\mathbb{C}$</u> Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes donnés. $z + z' = (a + a') + (b + b')$ $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$ Pour tout nombre complexe non nul, $(a; b) \neq (0; 0)$ et $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}$ Soient z et z' deux nombres complexes tels que $z \neq 0$; $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *15 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Donne la forme algébrique de chacun des nombres complexes ci-dessous : $z = (2 + 3i) + (1 - 5i)$ $z_1 = (1 + i)(3 - 2i)$ $z_2 = \frac{1}{1+2i}$ $z_3 = \frac{2+i}{1+3i}$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> $z = (2 + 3i) + (1 - 5i)$ $z = (2 + 1) + i(3i - 5i)$ $z = 3 - 2i$ $z_1 = (3 + 2) + i(-2 + 3)$ $z_1 = 5 + i$ $z_2 = \frac{1}{1+2i}$ $z_2 = \frac{(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$ $z_2 = \frac{(1-2i)}{1^2+2^2}$ $z_2 = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$ $z_3 = \frac{2+i}{2+3i}$ $z_3 = \frac{(2+i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}$ $z_3 = \frac{(2+3)+i(-6+1)}{1^2+3^2}$ $z_3 = \frac{5}{10} - \frac{5}{10}i$ $z_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$	
	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE MAISON</u>		

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME1 : CALCULS ALGEBRIQUES

LEÇON7 : NOMBRES COMPLEXES

SEANCE2 : 2/11

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- La propriété relative à l'égalité de deux nombres complexes
Calculer	- La puissance d'un nombre complexe

PLAN DE LA SEANCE

c. Propriété
d. Puissance entière d'un nombre complexe

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
10 min	-Travail collectif	Correction des exercices de maison		
Développement *10 min*	-Travail individuel	<u>ACTIVITE1</u> Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes. Montre que : $z = z' \Leftrightarrow a = a' et\ b = b'$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> Montrons que : $z = z' \Rightarrow a = a' et\ b = b'$ Tout nombre complexe s'écrit de façon unique sous la forme $x + iy$ où x et y sont des nombres réels. D'où $z = z' \Rightarrow a = a' et\ b = b$ Montrons que : $a = a' et\ b = b' \Rightarrow z = z'$ $z = a + ib$ $z = a' + ib'$ $z = z'$ Conclusion : $z = z' \Leftrightarrow a = a' et\ b = b'$	c. **<u>Propriété</u>** Soient z et z' deux nombres complexes. $z = z' \Leftrightarrow \mathcal{R}e(z) = \mathcal{R}e(z')$ et $\mathcal{I}m(z) = \mathcal{I}m(z')$ $z = 0 \Leftrightarrow \mathcal{R}e(z) = 0$ et $\mathcal{I}m(z) = 0$
Evaluation *5 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Soient $z = a + 1 + i(2b - 3)$ et $z' = -4 + 5i$. Détermine les réels a et b pour que z et z' soient égaux.	<u>REPONSE ATTENDUE</u> $z = z' \Leftrightarrow a + 1 = -4$ et $2b - 3 = 5$ $z = z' \Leftrightarrow a = -5$ et $b = 4$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Développement *15 min*	-Travail en groupes	<u>ACTIVITE2</u> 1. Calcule les nombres suivants : i^4, i^5, i^6 et i^7. 2. Soient a et b deux nombres réels ; $z = a + ib$. Calcule : z^2, z^3, z^4. *Pour tout nombre entier naturel n, on a :* $i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$ *et* $i^{4n+3} = -i$. $(a+ib)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{5-k}(ib)^k$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. $i^4 = (i \times i) \times (i \times i)$ $i^4 = (-1) \times (-1)$ $i^4 = 1$ $i^5 = i^4 \times i$ $i^5 = i$ $i^6 = i^4 \times i^2$ $i^6 = -1$ $i^7 = i^4 \times i^2 \times i$ $i^7 = -i$ 2. $z^2 = a^2 + 2iab + b^2$ $z^3 = a^3 + 3a^2ib + 3ai^2b^2 + i^3b^3$ $z^4 = a^4 + 3a^3ib + 3a^2i^2b^2 + i^3ab^3 + a^3ib + 3a^2i^2b^2 + 3ai^3b^3 + i^4b^4$ $z^4 = a^4 + 4a^3ib + 6a^2i^2b^2 + 4ai^3b^3 + i^4b^4$	d. <u>Puissance entière d'un nombre complexe</u> *Pour tout nombre entier naturel n, on a :* $i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$ *et* $i^{4n+3} = -i$. $(a+ib)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{5-k}(ib)^k$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *15 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> 1. Détermine la forme algébrique des nombres complexes suivants : i^{37} ; i^{2023} et i^{23574} 2. Détermine la forme algébrique du nombre complexe $(2+i)^5$.	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. $i^{37} = i^{4\times 9+1} = i$ $i^{2023} = i^{4\times 505+3} = -i$ $i^{23574} = i^{4\times 5893+2} = -1$ 2. $(2+i)^5 = \sum_{k=0}^{5} C_5^k 2^{5-k} i^k$ $(2+i)^5 = 1\times 2^5 + 5\times 2^4 \times i + 10\times 2^3 \times i^2 + 10\times 2^2 \times i^3 + 5\times 2\times i^4 + i^5$ $(2+i)^5 = 32 + 80i - 80 - 40i + 10 + i$ $(2+i)^5 = -38 + 41i$	
	-Travail individuel	<u>EXERCICES DE MAISON</u>		

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME1 : CALCULS ALGEBRIQUES

LEÇON7 : NOMBRES COMPLEXES

SEANCE : 3/11

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- La définition du conjugué d'un nombre complexe - Les propriétés relatives au conjugué d'un nombre complexe
Déterminer	- Le conjugué d'un nombre complexe

PLAN DE LA SEANCE

2. Conjugué d'un nombre complexe

   a. Définition
   b. Propriété1
   c. Propriété2

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
10 min	-Travail collectif	Correction des exercices de maison		
Présentation *10 min*	-Travail collectif	*Soit $z = a + ib$ un nombre complexe $(a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$.* *Le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$ est appelé le* ***nombre complexe conjugué*** *de z.*		2. <u>Conjugué d'un nombre complexe</u> a. <u>Définition</u> Soit un nombre complexe z tel que $z = a + ib$ où $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. Le ***nombre complexe conjugué*** de z est le nombre complexe noté $\bar{z}$ tel que $\bar{z} = a - ib$.
Evaluation *5 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Détermine le conjugué de chacun des nombres complexes suivants : $z_1 = 2 + 3i$ $z_2 = -1 - i$ $z_3 = 5i$ $z_4 = -11$ $z_5 = 1 - 4i$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> $\overline{z_1} = 2 - 3i$ $\overline{z_2} = -1 + i$ $\overline{z_3} = -5i$ $\overline{z_4} = -11$ $\overline{z_5} = 1 + 4i$	
Développement *15 min*	-Travail en groupes	<u>ACTIVITE</u> Soient z et z' deux nombres complexes non nuls $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ $(a, b, a'$ et b' sont des nombres réels). Montre que :	<u>REPONSES ATTENDUES</u> $a)\ \bar{\bar{z}} = \overline{a - \imath b}$ $\bar{\bar{z}} = a + ib$ $\bar{\bar{z}} = z$ $b)\ \overline{z + z'} = \overline{(a + a') + \imath(b + b')}$ $\overline{z + z'} = a + a' - ib - ib'$	b. <u>Propriété1</u> Soit $(z; z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ (i) $\bar{\bar{z}} = z$ (ii) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$ $z + \bar{z} = 2\mathcal{R}e(z)$; $z - \bar{z} = 2i\mathcal{I}m(z)$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		$a)\ \bar{\bar{z}} = z$ $b)\ \overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'};$ $z + \bar{z} = 2\mathcal{R}e(z);$ $z - \bar{z} = 2i\mathcal{I}m(z)$ $c)\ \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$ $d)\ z \times \bar{z} = a^2 + b^2$	$\overline{z+z'} = (a - ib) + (a' - ib')$ $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ $z + \bar{z} = a + ib + a - ib$ $z + \bar{z} = 2a$ $z + \bar{z} = 2\mathcal{R}e(z)$ $z - \bar{z} = a + ib - a + ib$ $z - \bar{z} = 2ib$ $c)\ \overline{z \times z'}$ $= \overline{(a + \imath b) \times (a' + \imath b')}$ $\overline{z \times z'}$ $= \overline{aa' + \imath ab' + \imath a'b - bb'}$ $\overline{z \times z'}$ $= \overline{aa' - bb' + \imath ab' + \imath a'b}$ $\overline{z \times z'} = aa' - bb' - iab'$ $- ia'b$ $\overline{z \times z'} = aa' - bb' - iab'$ $- ia'b$ $\overline{z \times z'} = a(a' - ib') - ib(a'$ $- ib')$ $\overline{z \times z'} = (a - ib)(a' - ib')$ $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$ $d)\ z \times \bar{z} = (a + ib)(a - ib)$ $z \times \bar{z} = a^2 - (ib)^2$ $z \times \bar{z} = a^2 + b^2$	(iii) $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$ $\overline{z^n} = \bar{z}^n$ (iv) Pour $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ (v) Pour $z = a + ib$, $z \times \bar{z} = a^2 + b^2$ c. <u>Propriété2</u> Soit $z \in \mathbb{C}^*$ (i) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{I}m(z) = 0 \Leftrightarrow$ $\bar{z} = z$ (ii) $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{R}e(z) = 0 \Leftrightarrow$ $\bar{z} = -z$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *15 minutes*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Soient z et z' deux nombres complexes tels que : $z = 1 + 2i$ et $z' = 3 - 4i$. Détermine la forme algébrique des nombres suivants : $a)\ \overline{z + z'}$ $b)\ \overline{z \times z'}$ $c)\ \left(\overline{\frac{z}{z'}}\right)$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> $a)\ \overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$ $\overline{z + z'} = 1 - 2i + 3 + 4\text{i}$ $\overline{z + z'} = 4 + 2i$ $b)\ \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \overline{z'}$ $\overline{z \times z'} = (1 - 2i)(3 + 4i)$ $\overline{z \times z'} = 3 + 4i - 6i + 8$ $\overline{z \times z'} = 11 - 2i$ $c)\ \left(\overline{\frac{z}{z'}}\right) = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$ $\left(\overline{\frac{z}{z'}}\right) = \frac{1 - 2i}{3 + 4i}$ $\left(\overline{\frac{z}{z'}}\right) = \frac{(1 - 2i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)}$ $\left(\overline{\frac{z}{z'}}\right) = \frac{3 - 4i - 6i - 8}{3^2 + 4^2}$ $\left(\overline{\frac{z}{z'}}\right) = \frac{-5 - 10i}{25}$ $\left(\overline{\frac{z}{z'}}\right) = -\frac{5}{25} - \frac{10}{25}i$ $\left(\overline{\frac{z}{z'}}\right) = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME1 : CALCULS ALGEBRIQUES

LEÇON8 : NOMBRES COMPLEXES

SEANCE : 4/11

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- La définition du module d'un nombre complexe - Les propriétés relatives au module du produit, de l'inverse, du quotient et de la puissance entière d'un nombre complexe
Déterminer	- Le module et un argument d'un nombre complexe non nul

PLAN DE LA SEANCE

3. Module d'un nombre complexe
   a- Définition
   b- Propriétés

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Présentation *10 min*	-Travail collectif	*Soit z un nombre complexe tel que* $z = a + ib$. *Le nombre réel positif* $\|z\|$ *tel que* $\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ *est appelé « le module du nombre complexe z.*		**3. <u>Module d'un nombre complexe</u>** **a. <u>Définition</u>** Le ***module*** d'un nombre complexe $z = a + ib$ est le nombre réel positif noté $\|z\|$ tel que : $\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$. $\|z\| = \sqrt{z \times \bar{z}}$
Evaluation *10 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Calcule le module de chacun des nombres complexes ci-dessous : $z = 2 - i$ $z_1 = -3 + 4i$ $z_2 = -5 - \sqrt{2}i$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> $z = 2 - i$ $\|z\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2}$ $\|z\| = \sqrt{4 + 1}$ $\|z\| = \sqrt{5}$ $z_1 = -3 + 4i$ $\|z_1\| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2}$ $\|z_1\| = \sqrt{9 + 16}$ $\|z_1\| = \sqrt{25}$ $\|z_1\| = 5$ $z_2 = -5 - \sqrt{2}i$ $\|z_2\| = \sqrt{(-5)^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2}$ $\|z_2\| = \sqrt{25 + 2}$ $\|z_2\| = \sqrt{27}$ $\|z_2\| = 3\sqrt{3}$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Développement *15 min*	-Travail en groupes	<u>ACTIVITE</u> Soit z et z' deux nombres complexes tels que : $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$. I. Détermine $\|z\|$: i. $b = 0$ ii. $a = 0$ II. Compare : a. $\|\bar{z}\|$ et $\|z\|$ b. $\|-z\|$ et $\|z\|$ c. $\|z \times z'\|$ et $\bar{z} \times \|z'\|$ d. $\left\|\frac{1}{z}\right\|$ et $\frac{1}{\|z\|}$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> I. i. Si $b = 0$ alors $z = a$ $\|z\| = \sqrt{(a)^2} = \|a\|$ ii. Si $a = 0$ alors $z = ib$ $\|z\| = \sqrt{(b)^2} = \|b\|$ II. a. $\|z\|=\sqrt{a^2 + b^2}$ $\bar{z} = a - ib$ $\|\bar{z}\|=\sqrt{a^2 + (-b)^2}$ $\|\bar{z}\|=\sqrt{a^2 + b^2}$ $\|\bar{z}\| = \|z\|$ b. $-z = -a - ib$ $\|-z\| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2}$ $\|-z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\|-z\| = \|z\|$ c. $\|z \times z'\| = \|(aa' - bb') + i(ab' + a'b)\|$ $\|z \times z'\| = \sqrt{(aa' - bb')^2 + (ab' + a'b)^2}$ $\|z \times z'\|$ $= \sqrt{a^2a'^2 - 2aa'bb' + b^2b'^2 + a^2b'^2 + 2aa'bb' + a'^2b^2}$ $\|z \times z'\| = \sqrt{a^2a'^2 + b^2b'^2 + a^2b'^2 + a'^2b^2}$ $\|z \times z'\| = \sqrt{a^2(a'^2 + b'^2) + b^2(b'^2 + a'^2)}$ $\|z \times z'\| = \sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)}$ $\|z \times z'\| = \sqrt{a^2 + b^2} \times \sqrt{a'^2 + b'^2}$ $\|z \times z'\| = \|z\| \times \|z'\|$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			d. Pour $z \neq 0$, $\left\|\frac{1}{z}\right\| = \left\|\frac{1}{a+ib}\right\|$ $\left\|\frac{1}{z}\right\| = \left\|\frac{a-ib}{a^2+b^2}\right\|$ $\left\|\frac{1}{z}\right\| = \frac{1}{a^2+b^2} \times \|a-ib\|$ $\left\|\frac{1}{z}\right\| = \frac{1}{a^2+b^2} \times \sqrt{a^2+b^2}$ $\left\|\frac{1}{z}\right\| = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\left\|\frac{1}{z}\right\| = \frac{1}{\|z\|}$	b. Propriétés Soit $(z, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Si $z = a$, $a \in \mathbb{R}$ alors $\|z\| = \|a\|$ Si $z = ib$, $b \in \mathbb{R}$ alors $\|z\| = \|b\|$ $\|\bar{z}\| = \|-z\| = \|z\|$; $\|z \times z'\| = \|z\| \times \|z'\|$ $\|z^n\| = \|z\|^n$ Pour $z \neq 0$, $\left\|\frac{1}{z}\right\| = \frac{1}{\|z\|}$ $\left\|\frac{z'}{z}\right\| = \frac{\|z'\|}{\|z\|}$ $\|z+z'\| \leq \|z\| + \|z'\|$ (Inégalité triangulaire) $\|z\|^2 = z \times \bar{z} = (\mathcal{R}e(z))^2 + (\mathcal{I}m(z))^2$
		On montre aussi que : $\|z^n\| = \|z\|^n$ $\left\|\frac{z}{z'}\right\| = \frac{\|z\|}{\|z'\|}$ $\|z+z'\| \leq \|z\| + \|z'\|$ *(Inégalité triangulaire)* $\|z\|^2 = z \times \bar{z}$		
Evaluation *15 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Détermine le module du nombre complexe z dans chacun des cas ci-dessous : 1. $z = (1+2i)(-2+3i)$ 2. $z = (-3+i) + (7-4i)$ 3. $z = \frac{5+2i}{1-6i}$ 4. $z = (2+2i)^3$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. $z = (1+2i)(-2+3i)$ $\|z\| = \|1+2i\| \times \|-2+3i\|$ $\|z\|$ $= \sqrt{1^2+2^2} \times \sqrt{(-2)^2+3^2}$ $\|z\| = \sqrt{5} \times \sqrt{13}$ $\|z\| = \sqrt{65}$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE MAISON</u>	$2.\ z = (-3+i)+(7-4i)$ $\lvert z\rvert = \lvert 4-3i\rvert$ $\lvert z\rvert = \sqrt{4^2+(-3)^2}$ $\lvert z\rvert = \sqrt{25}$ $\lvert z\rvert = 5$ $3.\ z = \dfrac{5+2i}{1-6i}$ $\lvert z\rvert = \dfrac{\lvert 5+2i\rvert}{\lvert 1-6i\rvert}$ $\lvert z\rvert = \dfrac{\sqrt{5^2+2^2}}{\sqrt{1^2+(-6)^2}}$ $\lvert z\rvert = \dfrac{\sqrt{29}}{\sqrt{37}}$ $\lvert z\rvert = \dfrac{\sqrt{1073}}{37}$ $4.\ z = (2+2i)^3$ $\lvert z\rvert = \lvert 2+2i\rvert^3$ $\lvert z\rvert = \left(2\sqrt{2}\right)^3 = 16\sqrt{2}$	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME1 : CALCULS ALGEBRIQUES

LEÇON7 : NOMBRES COMPLEXES

SEANCE : 5/11

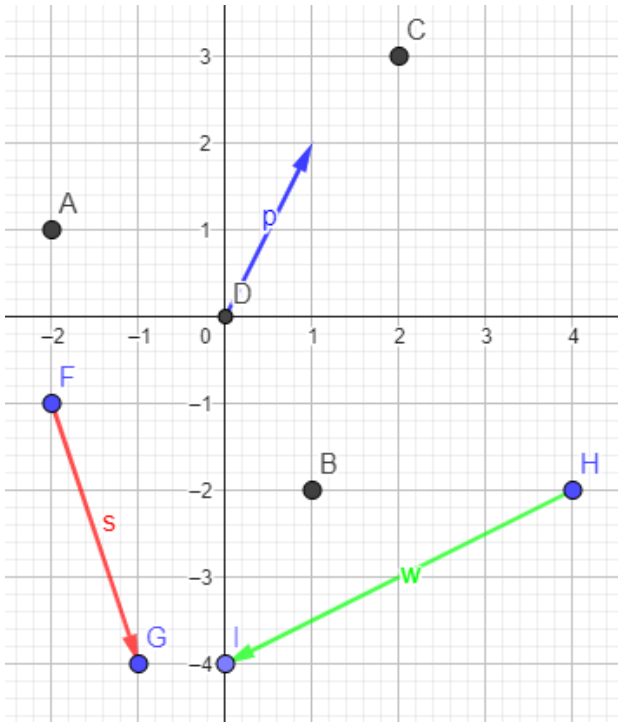
MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- L'affixe d'un point, d'un vecteur - Le point image, le vecteur image d'un nombre complexe

PLAN DE LA SEANCE

II. REPRESENTATION GEOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

1. Plan complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur, point image d'un nombre complexe, vecteur image d'un nombre complexe.
2. Interprétation géométrique du module d'un nombre complexe

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
10 min *Développement* *20 min*	-Travail en groupe -Travail individuel	Correction des exercices de maison <u>ACTIVITE</u> Sur la figure ci-dessous, $(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé direct, A, B et T sont des points du plan ; $\vec{w}$, $\vec{s}$ et $\vec{p}$ sont des vecteurs du plan.  Détermine les coordonnées des point A, B et C ainsi que les coordonnées des vecteurs $\vec{w}$, $\vec{s}$ et $\vec{p}$ dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.	<u>REPONSES ATTENDUES</u> $A(-2;1)$ $B(1;-2)$ $C(2;3)$ $\vec{w}(-4;-2)$ $\vec{s}(1;-3)$ $\vec{p}(1;2)$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		$(O,\vec{u},\vec{v})$ est appelé « le plan complexe ». *$(O,\vec{u})$ est appelé l'axe réel.* *$(O,\vec{u})$ est appelé l'axe imaginaire.* *Aux points $A(-2;1)$, $B(1;-2)$ et $C(2;3)$ on peut associer respectivement des nombres complexes z_A, z_B et z_C tels que :* $z_A = -2 + i$; $z_B = 1 - 2i$ et $z_C = 2 + 3i$ *z_A, z_B et z_C sont appelés les affixes respectives des points A, B et C. On note* *$A(-2;1)$ se note $A(z_A)$* *$B(1;-2)$ se note $B(z_B)$* *$C(2;3)$ se note $C(z_C)$* *De même :* *Aux vecteurs $\vec{w}(-4;-2)$;* *$\vec{s}(1;-3)$ et $\vec{p}(1;2)$ on peut associer respectivement des nombres complexes $z_{\vec{w}}$, $z_{\vec{s}}$ et $z_{\vec{p}}$ tels que :* $z_{\vec{w}} = -4 - 2i$; $z_{\vec{s}} = 1 - 3i$ et $z_{\vec{p}} = 1 + 2i$ *$z_{\vec{w}}$, $z_{\vec{s}}$ et $z_{\vec{p}}$ sont appelés les affixes respectives des vecteurs $\vec{w}$, $\vec{s}$ et $\vec{p}$* $z_2 = z_B$; $z_3 = z_C$.		II. <u>REPRESENTATION GEOMETRIQUE D'UN NOMBRE COPLEXE</u>. 1. <u>Plan complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur, point image d'un nombre complexe, vecteur image d'un nombre complexe.</u> Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On l'appelle aussi ***plan complexe***. A tout nombre complexe $z = x + iy$ on associe le point $(x; y)$ du plan. Réciproquement à tout point $A(a; b)$ du plan on associe le nombre complexe $z_0 = a + ib$. On établit ainsi une bijection entre $\mathbb{C}$ et $\mathcal{P}$ (plan). Le nombre complexe $z = x + iy$ est appelé ***affixe du point M***. On note $\boldsymbol{z_M}$. Le point $(x; y)$ est le ***point image*** du nombre complexe $z = x +$. On note M(z) . On associe également à chaque vecteur $\vec{w}(a; b)$ du plan le nombre complexe $z = a + ib$ appelé ***affixe du vecteur $\vec{w}$*** . On note $z_{\vec{w}} = a + bi$. Le vecteur $\vec{w}(a; b)$ est le ***vecteur image*** du nombre complexe $a + ib$. $(O,\vec{u})$ *est appelé l'axe réel.* $(O,\vec{u})$ *est appelé l'axe imaginaire.* Soit $\vec{w}$ et $\overrightarrow{w'}$ deux vecteurs du plan, M et M' deux points du plan et $k \in \mathbb{R}$. $z_{\vec{w}+\overrightarrow{w'}} = z_{\vec{w}} + z_{\overrightarrow{w'}}$; $z_{\overrightarrow{MM'}} = z_{M'} - z_M$, et $z_{k\vec{w}} = k \times z_{\vec{w}}$.

<table>
<tr><th>MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES</th><th>STRATEGIES PEDAGOGIQUES</th><th>ACTIVITES DU PROFESSEUR</th><th>ACTIVITES DES APPRENANTS</th><th>TRACE ECRITE</th></tr>
<tr>
<td>Evaluation
20 min</td>
<td>-Travail individuel</td>
<td>
<u>EXERCICE DE FIXATION</u>
Complète les tableaux ci-dessous :
<table>
<tr><th>Eléments géométriques</th><th>Affixes</th></tr>
<tr><td>A$(-5;3)$</td><td></td></tr>
<tr><td>B$(1;7)$</td><td></td></tr>
<tr><td>$\vec{u}(-2;9)$</td><td></td></tr>
<tr><td>$\overrightarrow{AB}$</td><td></td></tr>
</table>
<table>
<tr><th>Nombres complexes</th><th>Points images</th><th>Vecteurs images</th></tr>
<tr><td>$2+i$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$-4i$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$1-3i$</td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td>
<td>
<u>REPONSES ATTENDUES</u>
<table>
<tr><th>Eléments géométriques</th><th>Affixes</th></tr>
<tr><td>A$(-5;3)$</td><td>$z=-5+3i$</td></tr>
<tr><td>B$(1;7)$</td><td>$z'=1+7i$</td></tr>
<tr><td>$\vec{u}(-2;9)$</td><td>$z_1=-2+9i$</td></tr>
<tr><td>$\overrightarrow{AB}$</td><td>$z_2=6+4i$</td></tr>
</table>
<table>
<tr><th>Nombres complexes</th><th>Points images</th><th>Vecteurs images</th></tr>
<tr><td>$2+i$</td><td>$I(2;1)$</td><td>$\vec{u}(2;1)$</td></tr>
<tr><td>$-4i$</td><td>J$(0;-4)$</td><td>$\vec{v}(0;-4)$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>K$(3;0)$</td><td>$\vec{w}(3;0)$</td></tr>
<tr><td>$1-3i$</td><td>L$(1;-3)$</td><td>$\vec{f}(1;-3)$</td></tr>
</table>
</td>
<td>
2. <u>Interprétation géométrique du module d’un nombre complexe</u>
z est un nombre complexe de point image M. Le point M et le vecteur $\overrightarrow{OM}$ ont le même affixe $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = OM = |z|$.
On en déduit que le module d’un nombre complexe z d’image M est la distance entre les points O et M.
$\left|z_{\overrightarrow{MM'}}\right| = |z_{M'} - z_{M'}| = MM'$.
</td>
</tr>
</table>

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME1 : CALCULS ALGEBRIQUES

LEÇON7 : NOMBRES COMPLEXES

SEANCE : 6/11

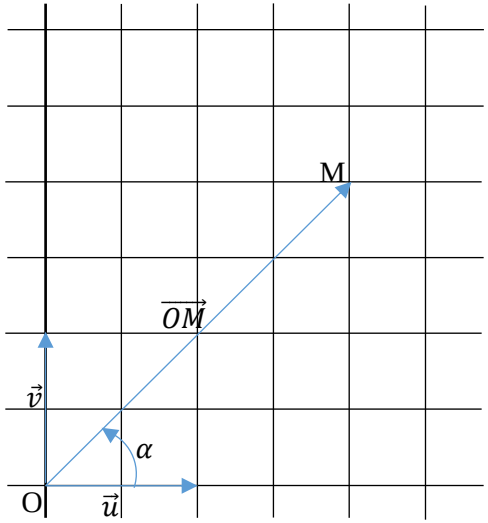
MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Identifier	- La forme trigonométrique d'un nombre complexe
Connaître	- La définition d'un argument d'un nombre complexe - Les propriétés relatives au module et un argument du produit, de l'inverse, du quotient et de la puissance entière d'un nombre complexe
Déterminer	- Le module et un argument d'un nombre complexe non nul - La forme trigonométrique d'un nombre complexe

PLAN DE LA SEANCE

III. FORME TRIGONOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

1. Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul
   a. Argument d'un nombre complexe non nul
      Définition
      Remarque
      Propriété
   b. Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Développement *25 min*	-Travail individuel	<u>ACTIVITE</u> On donne la figure ci-dessous :  1. Détermine $\alpha = Mes(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OM}})$. 2. Détermine l'affixe $z = z_{\overrightarrow{OM}}$ du vecteur $\overrightarrow{OM}$. 3. Compare $\cos\alpha$ et $\frac{\mathcal{R}e(z)}{\lvert z\rvert}$ puis $\sin\alpha$ et $\frac{\mathcal{I}m(z)}{\lvert z\rvert}$ 4. Compare $\lvert z\rvert(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ et z. *α est appelé un argument de z.* *$\lvert z\rvert(cos\,\alpha + i\,sin\,\alpha)$ est la forme trigonométrique de z.*	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 2. $z = 2 + 2i$ 3. $\lvert z\rvert = \sqrt{2^2 + 2^2}$ $\lvert z\rvert = 2\sqrt{2}$ $\frac{\mathcal{R}e(z)}{\lvert z\rvert} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\alpha$ $\frac{\mathcal{I}m(z)}{\lvert z\rvert} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\alpha$ 4. $\lvert z\rvert(\cos\alpha + i\sin\alpha) = 2\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$ $\lvert z\rvert(\cos\alpha + i\sin\alpha) = 2 + 2i = z$	III. <u>FORME TRIGONOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE</u> 1. <u>Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul</u> a. <u>Argument d'un nombre complexe Définition</u> Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, soit $z \in \mathbb{C}^*$ d'image M. ***Un argument*** du nombre complexe z est la mesure en radian de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OM}})$. Soit α une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OM}})$ alors $\arg(z) = \alpha + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$ Si $z = a + ib$, $(a;b) \neq (0;0)$ et $\alpha = \arg(z)$ alors on a :

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
				$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a}{a^2+b^2} \\ \sin\alpha = \dfrac{b}{a^2+b^2} \end{cases}$ Si $a \neq 0$ alors $\tan\alpha = \dfrac{b}{a}$ <u>Remarque</u> Tout nombre complexe non nul z admet un unique argument appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$ appelé ***argument principal*** et noté $Arg(z)$. <u>Propriété</u> Soient $(z;z') \in (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*)$, $n \in \mathbb{N}$. $arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ $\arg(z^n) = n.\arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *25 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> 1. Détermine un argument du nombre complexe z puis la forme trigonométrique de z dans chacun des cas suivants : a. $z = \sqrt{3} + i$ b. $z = 1 - \sqrt{3}i$ c. $z = 1 + i$ 2. Détermine un argument du nombre complexe z puis la forme trigonométrique de z dans chacun des cas suivants : a. $z = (\sqrt{3} + i)(1 + i)$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1) $\lvert z\rvert = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}$ $\lvert z\rvert = 2$ Soit θ un argument de z. On a : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases}$ On en déduit que $\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$	b. <u>Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul</u> Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul ; $r = \lvert z\rvert$ et θ un argument de z. z s'écrit de façon unique sous la forme $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ Cette écriture est appelée la forme trigonométrique du nombre complexe z.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		b. $z = \frac{1+i}{1-\sqrt{3}i}$ c. $z = \left(\sqrt{3}+i\right)^5$	2) $\lvert z\rvert = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}$ $\lvert z\rvert = 2$ Soit β un argument de z. On a : $\begin{cases} \cos\beta = \frac{1}{2} \\ \sin\beta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ On en déduit que $\beta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ $z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ 3) $\lvert z\rvert = \sqrt{1^2 + 1^2}$ $\lvert z\rvert = \sqrt{2}$ Soit γ un argument de z. On a : $\begin{cases} \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ On en déduit que $\gamma = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		EXERCICE DE MAISON	2.a. Soit φ un argument de z. $\varphi = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ $\varphi = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 5) b. Soit δ un argument de z. $\delta = \frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{6}) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ $\delta = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ c. Soit ω un argument de z. $\omega = 5 \times \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ $\omega = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME1 : CALCULS ALGEBRIQUES

LEÇON7 : NOMBRES COMPLEXES

SEANCE : 7/11

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Identifier	- La forme exponentielle d'un nombre complexe

PLAN DE LA SEANCE

c. Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul
   Définition
   Propriété

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
10 min		Correction de l'exercice de maison		
Développement *20 min*	-Travail individuel	ACTIVITE On a : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ z est un nombre complexe de module r et dont un argument est α. 1. Donne la forme trigonométrique de z. 2. Ecris z sous la forme $ke^{i\theta}$. *L'écriture $z = re^{i\alpha}$ est appelée la **forme exponentielle** de z.*	REPONSES ATTENDUES 1. La forme trigonométrique de z est $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. 2. $z = re^{i\alpha}$.	c. Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul Définition On pose : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument $\boldsymbol{\theta}$. On appelle forme exponentielle de z l'écriture $z = re^{i\theta}$. Propriété Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\alpha}$ deux nombres complexes non nuls. (i) $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ (ii) $\bar{z} = e^{-i\theta}$; $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$. (iii) $z' \times z = rr'e^{i(\theta+\alpha)}$. (iv) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z^n = r^n e^{in\theta}$. (v) $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\alpha)}$
Evaluation *20 min*	-Travail individuel	EXERCICE DE FIXATION Détermine la forme exponentielle de chacun des nombres complexes z suivants : 1. $z = 1 + i$ 2. $z = 1 + i\sqrt{3}$	REPONSES ATTENDUES 1. $z = 1 + i$ $\lvert z\rvert = \sqrt{1^2 + 1^2}$ $\lvert z\rvert = \sqrt{2}$ Soit θ un argument de z.	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		3. $z = (1+i)\left(1+i\sqrt{3}\right)$ 4. $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$	$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ On en déduit que $\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ 2. $z = 1 + \sqrt{3}i$ $\lvert z\rvert = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}$ $\lvert z\rvert = 2$ Soit θ un argument de z. $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ On en déduit que $\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ 3. $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\right)$ $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$ 4. $z = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$	
	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE MAISON</u>		

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME1 : CALCULS ALGEBRIQUES

LEÇON7 : NOMBRES COMPLEXES

SEANCE : 8/11

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- La formule de Moivre - La formule d'Euler
Linéariser	- Des puissances de $\cos x$ et $\sin x$
Utiliser	- Les formules de Moivre et d'Euler pour transformer des produits en somme dans des expressions trigonométriques

PLAN DE LA SEANCE

2. Formule de Moivre et applications
   a. Formule de Moivre
      Propriété
   b. Formule d'Euler
      Propriété
      Remarque

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
10 min *Développement* *10 min* *Evaluation* *10 min*	-Travail collectif -Travail individuel -Travail individuel	Correction des exercices de maison ACTIVITE Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On donne : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ Montre que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ *L'égalité :* $(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)^n = cos(n\theta) + i\,sin(n\theta)$ *est appelée la formule de Moivre.* EXERCICE DE FIXATION Ecris sous forme trigonométrique le nombre complexe z tel que : $z = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^2$	REPONSE ATTENDUE $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = e^{in\theta}$ $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ REPONSES ATTENDUES $\lvert z\rvert = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}$ $\lvert z\rvert = 2$ Soit θ un argument de z $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ On en déduit que : $\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ $z = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^2$	2. Formule de Moivre et applications a. Formule de Moivre Propriété Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$ On a : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ Cette propriété s'appelle la formule de Moivre.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Présentation *5 min*	-Travail collectif		$z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ $z = 4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $z = -2 + 2i\sqrt{3}$	b. <u>Formule d'Euler</u> <u>Propriété</u> Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$ $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ De façon générale : $\cos(n\theta) = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}$ $\sin(n\theta) = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}$ <u>Remarque</u> Les formules d'Euler permet de linéariser des expressions du type $cos^n(x)$ ou $sin^n(x)$.
Evaluation *15 min*	-Travail en groupes	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Soit α un nombre réel et *n* un nombre entier relatif. Exprime $cos^4(\alpha)$ en fonction $\cos n\alpha$ et $\sin n\alpha$.	<u>REPONSE ATTENDUE</u> $cos^4(\alpha) = \left(\frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}\right)^4$ $cos^4(\alpha) = \frac{1}{16}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})^4$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE MAISON</u>	$$cos^4(\alpha) = \frac{1}{16}\sum_{k=0}^{4} C_4^k (e^{i\alpha})^k (e^{-i\alpha})^{4-k}$$ $$cos^4(\alpha) = \frac{1}{16}(e^{-4i\alpha} + 4e^{i\alpha}e^{-3i\alpha} + 6e^{2i\alpha}e^{-2i\alpha} + 3e^{3i\alpha}e^{-i\alpha} + e^{4i\alpha})$$ $$cos^4(\alpha) = \frac{1}{16}[(e^{4i\alpha} + e^{-4i\alpha}) + (4e^{2i\alpha} + 4e^{-2i\alpha}) + 6)]$$ $$cos^4(\alpha) = \frac{1}{16}[(e^{4i\alpha} + e^{-4i\alpha}) + 4(e^{2i\alpha} + e^{-2i\alpha}) + 6)]$$ $$cos^4(\alpha) = \frac{1}{16}(2\cos 4\alpha + 8\cos 2\alpha + 6)$$ $$cos^4(\alpha) = \frac{1}{8}\cos 4\alpha + \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{3}{8}$$	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME1 : CALCULS ALGEBRIQUES

LEÇON7 : NOMBRES COMPLEXES

SEANCE : 9/11

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- La définition d'une racine carrée d'un nombre complexe
Déterminer	- Les racines carrées d'un nombre complexe

PLAN DE LA SEANCE

IV. EQUATION DANS $\mathbb{C}$

A. RESOLUTION D'EQUATIONS DANS $\mathbb{C}$
   1. Racine carrée d'un nombre complexe
      a. Définition
      b. Remarque

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
10 min *Développement* *20 min*	-Travail collectif -Travail individuel	Correction des exercices de maison ACTIVITE Soit $z = x + iy$ et $z_0 = a + ib$ deux nombres complexes non nuls. Explicite l'équation : $z^2 = z_0$ *Le nombre complexe z est appelé* ***la racine carrée du nombre complexe*** $\boldsymbol{z_0}$**.**	REPONSES ATTENDUES $z^2 = z_0 \Leftrightarrow (x + iy)^2 = a + ib$ et $\lvert x + iy\rvert^2 = \lvert z_0\rvert$ $\Leftrightarrow x^2 + 2ixy - x^2 = a + ib$ et $x^2 + y^2 = \lvert z_0\rvert$ $\Leftrightarrow (x^2 - y^2) + 2ixy = a + ib$ et $x^2 + y^2 = \lvert z_0\rvert$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \lvert z_0\rvert \\ x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$	IV. EQUATIONS DANS $\mathbb{C}$ 3. RESOLUTION D'EQUATIONS DANS $\mathbb{C}$ 1. Racine carrée d'un nombre complexe a. Définition Soit un nombre complexe z_0. On appelle ***racine carrée du nombre complexe*** $\boldsymbol{z_0}$ tout nombre complexe z tel que $\boldsymbol{z^2 = z_0}$. Méthode Soit $z = x + iy$; $z^2 = z_0 \Leftrightarrow$ $\begin{cases} x^2 + y^2 = \lvert z_0\rvert & (1) \\ x^2 - y^2 = \mathcal{R}e(z_0) & (2) \\ 2xy = \mathcal{I}m(z_0) & (3) \end{cases}$ b. Remarques - Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées opposées. - Si $z_0 \in \mathbb{R}$ avec $z_0 > 0$ alors les racines carrées de z_0 sont : $-\sqrt{z_0}$ et $\sqrt{z_0}$.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *20 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Détermine les racines carrées de chacun des nombres complexes suivants : 1) $z_0 = 5$ 2) $z_0 = -1$ 3) $z_0 = 3 - 4i$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1) $z_0 = 5$ $z_0 \in \mathbb{R}\ et\ z_0 > 0$ donc les racines carrées de z_0 sont $-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$. 2) $z_0 = -1$ $z_0 \in \mathbb{R}\ et\ z_0 < 0$ donc les racines carrées de z_0 sont $-i\sqrt{1}$ et $i\sqrt{1}$. Les racines carrées de z_0 sont $-i$ et i. 3) $z_0 = 3 - 4i$ $\lvert z_0\rvert = \sqrt{3^2 + 4^2}$ $\lvert z_0\rvert = 5$ Soit $z = x + iy$ une racine carrée de z_0. On a : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5\ \ (1) \\ x^2 - y^2 = 3\ \ (2) \\ 2xy = -4\ \ (3) \end{cases}$ $(1) + (2)$ entraine $2x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2\ ou\ x = -2$ D'après (3) : $2xy = -4 \Leftrightarrow xy = -2$ donc x et y sont de signes contraires.	- Si $z_0 \in \mathbb{R}$ avec $z_0 < 0$ alors les racines carrées de z_0 sont $-i\sqrt{-z_0}$ et $i\sqrt{-z_0}$.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE MAISON</u> Calcule les racines carrées des nombres suivants : $z_1 = i$; $z_2 = 1 + i$; $z_3 = -1 - i$; $z_4 = 3 + 4i$; $z_5 = 1 + i\sqrt{3}$.	Si $x = 2$ alors $y = -1$ Si $x = -2$ alors $y = 1$ Les racines carrées de z_0 sont : $z = 2 - i$ et $z' = -2 + i$.	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME1 : CALCULS ALGEBRIQUES

LEÇON7 : NOMBRES COMPLEXES

SEANCE : 10/11

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Résoudre	- Une équation du second degré à coefficients complexes ainsi que des équations s'y ramenant - Une équation se ramenant du second degré à coefficients complexes

PLAN DE LA SEANCE

2. Equations du second degré
    a. Propriété
    b. Remarque

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
10 min *Présentation* *10 min*	-Travail collectif -Travail collectif	Correction de l'exercice de maison *Soit z un nombre complexe ; Soit a, b et c des nombres complexes tel que* $a \neq 0$. *Soit* $\Delta = b^2 - 4ac$ *un nombre complexe.* *Si* δ *est une racine carrée de* Δ *alors l'équation* $az^2 + bz + c = 0$ *a pour solutions les nombres complexes* $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ *et* $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$		2. <u>Equations du second degré</u> <u>Propriété</u> Soit a, b et c des nombres complexes avec $a \neq 0$. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$. Si δ est une racine carrée de Δ, alors les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ sont : $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ *et* $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$ <u>Remarque</u> Soit a, b et c des nombres réels avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ a deux solutions complexes conjuguées. Pour résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$, on n'a pas besoin de déterminer les deux racines carrées de Δ.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *30 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : 1. $z^2+z+1=0$ 2. $4z^2-2z+1=0$ 3. $z^2-(1+2i)z+i-1=0$ 4. $z^3+3z-2i=0$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. $z^2+z+1=0$ $\Delta=-3$ donc $\delta_1=-i\sqrt{3}$ et $\delta_2=i\sqrt{3}$ $z_1=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ $z_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ $S_{\mathbb{C}}=\left\{\frac{-1+i\sqrt{2}}{2};\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right\}$ 2. $4z^2-2z+1=0$ $\Delta=-12$ donc $\delta_1=-2i\sqrt{3}$ et $\delta_2=2i\sqrt{3}$ $z_1=\frac{2-2i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2=\frac{2+2i\sqrt{3}}{2}$ $S_{\mathbb{C}}=\{1-i\sqrt{3};1+i\sqrt{3}\}$ 3. $z^2-(1+2i)z+i-1=0$ $\Delta=(1+2i)^2-4(i-1)$ $\Delta=1+4i-4-4i+4$ $\Delta=1$ $\Delta=1$ donc $\delta_1=-i$ et $\delta_2=i$ $z_1=\frac{1+2i-i}{2}$ et $z_2=\frac{1+2i+i}{2}$ $z_1=\frac{1+i}{2}$ et $z_2=\frac{1+3i}{2}$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			$S_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{1+i}{2}; \frac{1+3i}{2}\right\}$ 4. $z^3 + 3z - 2i = 0$ Soit $p(z) = z^3 + 3z - 2i$ $p(i) = i^3 + 3i - 2i = -i + i = 0$ i est une racine de p $p(z) = (z-i)(az^2 + bz + c)$ $p(z) = az^3 + bz^2 + cz - iaz^2 - ibz - ic$ $p(z) = az^3 + (b - ia)z^2 + (c - ib)z - ic$ Par identification : $\begin{cases} a = 1 \\ b - ia = 0 \\ c - ib = 3 \\ -ic = -2i \end{cases}$ $\begin{cases} a = 1 \\ b = i \\ c = 2 \end{cases}$ $p(z) = (z-i)(z^2 + iz + 2)$ Soit l'équation $z^2 + iz + 2 = 0$ $\Delta = i^2 - 8$ $\Delta = -9$ $\Delta = -9$ donc $\delta_1 = -3i$ et $\delta_2 = 3i$ $z_1 = \frac{-i - 3i}{2}$ et $z_2 = \frac{-i + 3i}{2}$ $z_1 = -2i$ et $z_2 = i$ $S_{\mathbb{C}} = \{-2i; i\}$	
	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE MAISON</u>		

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME1 : CALCULS ALGEBRIQUES

LEÇON7 : NOMBRES COMPLEXES

SEANCE : 11/11

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Résoudre	- Une équation du second degré à coefficients complexes ainsi que des équations s'y ramenant - Une équation se ramenant du second degré à coefficients complexes

PLAN DE LA SEANCE

B. RACINE N^{IEME} D'UN NOMBRE COMPLEXE
   1. Racine $n^{ième}$ d'un nombre complexe
      a. Définition
      b. Propriété1
      c. Propriété2
   2. Racine $n^{ième}$ de l'unité
      a. Définition
      b. Remarques

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
10 min *Développement* *25 min*	-Travail collectif -Travail en groupes	Correction de l'exercice de maison. <u>ACTIVITE</u> Soit $z_0 = a + ib$ un nombre complexe non nul ; soit θ un argument de z_0. Soit $z = x + iy$ un nombre complexe tel que Arg(z)= α et $n \in \mathbb{N}$ $\boldsymbol{avec\ n \geq 2}$. 1. Trouve un système d'équations équivalent à l'équation $z^n = z_0$. 2. Trouve un système d'équations équivalent à l'équation $z^n = 1$. *On appelle racine n^ième de z_0 tout nombre complexe z tel que $z^n = z_0$.* *On appelle racine n^ième de 1 tout nombre complexe z tel que $z^n = 1$.*	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. $z_0 = \lvert z_0\rvert(\cos\theta + i\sin\theta)$ $z = \lvert z\rvert(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ $z^n = \lvert z\rvert^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha))$ $z^n = z_0$ équivaut à $\begin{cases} \lvert z\rvert^n = \lvert z_0\rvert \\ n\alpha = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ $\begin{cases} \lvert z\rvert^n = \lvert z_0\rvert \\ \alpha = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ $\begin{cases} \lvert z\rvert = \sqrt[n]{\lvert z_0\rvert} \\ \alpha = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ 2. $1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$ $z^n = \lvert z\rvert^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha))$ $z^n = 1$ équivaut à $\begin{cases} \lvert z\rvert^n = 1 \\ n\alpha = 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ $\begin{cases} \lvert z\rvert = \sqrt[n]{1} \\ \alpha = \dfrac{2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ $\begin{cases} \lvert z\rvert = 1 \\ \alpha = \dfrac{2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$	2. <u>RACINE N^IEME D'UN NOMBRE COMPLEXE</u> 1. <u>Racine n^ième d'un nombre complexe</u> a. <u>Définition</u> Soit un nombre complexe $z_0 \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$ $\boldsymbol{avec\ n \geq 2}$. On appelle racine n^ième de tout nombre complexe z tel que $z^n = z_0$. b. <u>Propriété1</u> Soit $Z_0 = Re^{i\theta}$; les racines n^ième de Z_0 sont $z_k = \sqrt[n]{R} \times e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ avec $k \in \{0; 1; 2; \ldots; n-1\}$ c. <u>Propriété2</u> Les racines n^ième d'un nombre complexe sont les affixes des sommets d'un polygone régulier de n côtés inscrit dans un cercle de rayon $\sqrt[n]{R}$.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
				2. Racine n^{ième} de l'unité a. Définition Une racine n^{ième} de l'unité est une solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^n = 1$. Les racines n^{ième} de l'unité sont : $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ avec $k \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\}$ b. Remarques Les images des racines n^{ième} de l'unité sont les sommets d'un n polygone régulier inscrit dans un cercle trigonométrique. Si $z_k \neq 1$ est une racine n^{ième} de l'unité alors $\overline{z_k} = z_{n-k}$. Si $z_0 \neq 1$ est une racine n^{ième} de l'unité alors les racines n^{ième} de l'unité sont : $z_k = {z_0}^k$ avec $k \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\}$ Si $z_k, k \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\}$ sont les racines n^{ième} de l'unité alors $\sum_{k=0}^{n} z_k = 0$ Si z_0 est une racine n^{ième} de Z_0 alors les racines n^{ième} de Z_0 sont $z_k = z_0 e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\}$.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *15 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> 1. Soit $Z = 8(1 + i\sqrt{3})$ Détermine les racines quatrième de Z. 2. Détermine les racines quatrième de 1.	<u>REPONSE ATTENDUE</u> 1. $\lvert Z\rvert = 16$ Soit θ un argument de Z. $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ $\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ $Z = 16\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ Soit $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ $z^n = \rho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$ $z^4 = \rho^4(\cos 4\alpha + i\sin 4\alpha)$ $\begin{cases} \rho^4 = 16 \\ 4\alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ $\begin{cases} \rho = 2 \\ \alpha = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ $z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right)\right)$ Pour $k = 0$, $z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ Pour $k = 1$, $z_1 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$ Pour $k = 2$, $z_2 = 2\left(\cos(-\frac{11\pi}{12}) + i\sin(-\frac{11\pi}{12})\right)$ Pour $k = 3$, $z_3 = 2\left(\cos(-\frac{5\pi}{6}) + i\sin(-\frac{5\pi}{6})\right)$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			2. $z^4 = 1$ $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{4}}, k \in \{0; 1; 2; 3\}$ $z_0 = 1$ $z_1 = i$ $z_2 = -1$ $z_3 = -i$	

BLIOGRAPHIE

Programmes éducatifs et guides d'exécution Mathématiques $T^{LE}D$

Progressions annuelles

Mon livre de mathématiques $T^{LE}D$ Collection PYRAMIDE

Mon livre de mathématiques $T^{LE}D$ Collection CIAM/EDICEF

Les cahiers de la réussite T^{LE} D Vallesse

Mon cahier d'habiletés Mathématiques T^{LE} D JD Editions

WWW.monecoleàlamaison.ci

https://physiques-et-maths.fr

FICHE DE LEÇON

CALCUL INTEGRAL

TLE D

Rédigée par :

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON8 : CALCUL INTEGRAL

NOMBRE DES SEANCES : 7

DUREE D'UNE SEANCE : 55 minutes

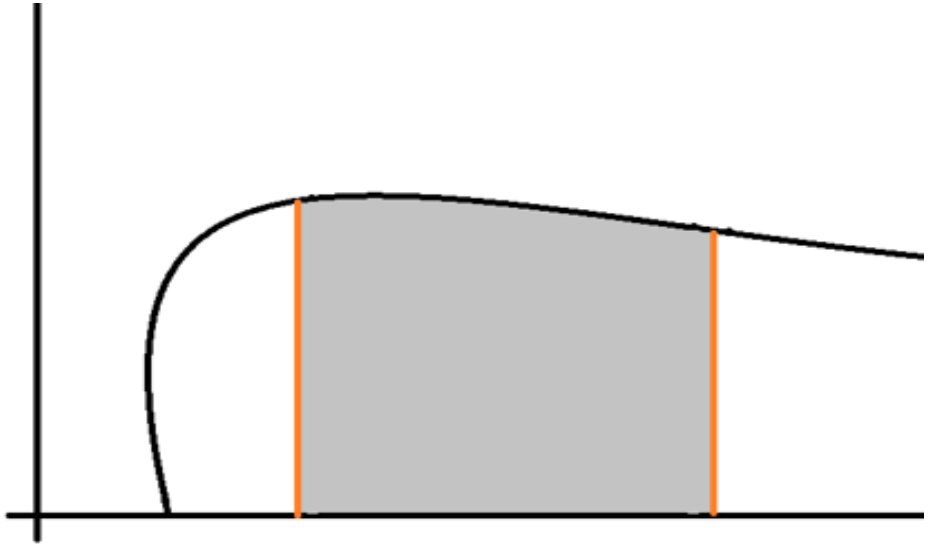
MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- La définition de l'intégrale d'une fonction continue - La définition de la valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle - Les propriétés de l'intégrale : o Linéarité o Signe de l'intégrale o Relation de Chasles o Inégalité de la moyenne (les deux formes) - La technique de l'intégration par partie - La technique du changement de variable affine
Noter	- Une intégrale
Calculer	- Une intégrale en utilisant : o Les primitives de fonctions usuelles o La relation de Chasles o Une intégration par partie o Un changement de variable affine o Une fonction du type $u' \times (f'ou)$ - Une aire - La valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle - Une intégrale en utilisant la parité ou la périodicité d'une fonction

Déterminer	- Le signe d'une intégrale - Un encadrement d'une intégrale
Interpréter	- Graphiquement une intégrale
Etudier	- Les variations des fonctions du type : $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$
Représenter	- Une allure d'une fonction du type : $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$
Traiter une situation	- Faisant appel au calcul intégral

SITUATION D'APPRENTISSANGE

Sur la figure ci-contre, la partie grisée représente le champ d'anacarde de Monsieur Konaté. Il désire acheter des herbicides pour l'entretien de son camp. Pour connaître la quantité adéquate d'herbicide à acheter, il faut connaître l'aire du champ.
Il sollicite l'aide de sa fille, Mariam, en classe de terminale D afin de connaître cette aire.
Mariam sollicite à son tour ses camarades de classe pour l'aider à déterminer cette aire pour permettre à son père à acheter la quantité d'herbicide nécessaire.



PLAN DE LA LEÇON

I. INTEGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE
   1. Définition - notation
      Conséquences de la definition
   2. Propriétés de l'intégrale
      a. Egalité de Chasles
      b. Linéarité
      c. Inégalité et intégrale
      d. Parité
      e. Périodicité
      f. Intégrale et primitive
      g. Inégalités de la moyenne
   3. Valeur moyenne d'une fonction continue
      Définition

II. TECHNIQUES DE CALCUL D'UNE INTEGRALE
   1. Utilisation de primitives
   2. Intégration par parties
      Propriété
   3. Changement de variable affine

III. CALCULS D'AIRES
   1. Calcul d'une aire d'une partie du plan délimitée par l'axe des abscisses et une courbe
   2. Calcul d'une aire d'une partie du plan délimitée par deux courbes

HABILETES, CONTENUS ET PLANS PAR SEANCE

SEANCE1

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- La définition de l'intégrale d'une fonction continue
Noter	- Une intégrale

PLAN DE LA SEANCE1

I. INTEGRALE D4UNE FONCTION CONTINUE
1. Définition-notation
Conséquences de la définition

SEANCE2

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- Les propriétés de l'intégrale : o Linéarité o Relation de Chasles

PLAN DE LA SEANCE2

2. Propriétés de l'intégrale
a. Egalité de Chasles
b. Linéarité

SEANCE3

HABILETES	CONTENUS
Connaître	Les propriétés de l'intégrale : o Signe de l'intégrale
Calculer	- Une intégrale en utilisant la parité ou la périodicité d'une fonction
Déterminer	- Le signe d'une intégrale

PLAN DE LA SEANCE3

c. Inégalité et intégrale
d. Parité

SEANCE4

HABILETES	CONTENUS
Calculer	Une intégrale en utilisant la parité ou la périodicité d'une fonction
Etudier	Les variations des fonctions du type : $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$
Représenter	Une allure d'une fonction du type : $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$

PLAN DE LA SEANCE4

e. Périodicité
f. Intégrale et primitive

SEANCE5

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- La définition de la valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle - Les propriétés de l'intégrale : o Inégalité de la moyenne (les deux formes)
Calculer	- La valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle
Déterminer	- Un encadrement d'une intégrale

PLAN DE LA SEANCE5

g. Inégalité de la Moyenne

3. Valeur Moyenne d'une fonction continue
   Définition

SEANCE6

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- La technique de l'intégration par partie - La technique du changement de variable affine
Calculer	- Une intégrale en utilisant : o Les primitives de fonctions usuelles o Une intégration par partie o Un changement de variable affine o Une fonction du type $u' \times (f'ou)$

PLAN DE LA SEANCE6

II. TECHNIQUES DE CALCUL D'UNE INTEGRALE
   1. Utilisation de primitives
   2. Intégration par parties
      Propriété
   3. Changement de variable affine

SEANCE7

HABILETES	CONTENUS
Calculer	- Une aire
Interpréter	- Graphiquement une intégrale

PLAN DE LA SEANCE7

III. CALCULS D'AIRES
   1. Calcul d'une aire d'une partie du plan délimitée par l'axe des abscisses et une courbe
   2. Calcul d'aire d'une partie du plan délimitée par deux courbes

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON8 : CALCUL INTEGRAL

SEANCE : 1/7

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- La définition de l'intégrale d'une fonction continue
Noter	- Une intégrale

PLAN DE LA SEANCE

I. INTEGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE
   1. Définition - notation
      Conséquences de la definition

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Présentation *5 min*	-Lecture -Travail collectif	-Donne l'énoncé de la situation d'apprentissage aux apprenants. -Demande aux apprenants de faire une lecture silencieuse de la situation. -Demande à un apprenant de lire à haute voix l'énoncé de la situation. -Lis l'énoncé de la situation d'apprentissage à haute voix. **Question pour faire ressortir les tâches :** Qu'est-ce que les élèves décident de faire ?	-Les apprenants lisent silencieusement l'énoncé de la situation. -Un apprenant lis à haute voix l'énoncé de la situation. -Les apprenants écoutent Attentivement. REPONSE ATTENDUE Les élèves de la classe de terminale D décident de déterminer l'aire du champ d'anacarde de monsieur Konaté.	
Développement *15 min*	-Travail individuel	ACTIVITE Soient *f*, F et G les applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par : $f(x) = 2x + 1$; $F(x) = x^2 + x + 5$ et $G(x) = x^2 + x - 3$. 1.a. Vérifie que F et G sont deux primitives de f sur $\mathbb{R}$. b. Calcule : $F(2), G(2), F(5)$ et G(5). c. Compare $F(5) - F(2)$ et $G(5) - G(2)$. 2. Soit *f* une fonction continue	REPONSES ATTENDUES 1.a. $F'(x) = 2x + 1$ $F'(x) = f(x)$ $G'(x) = 2x + 1$ $G'(x) = f(x)$ F et G sont deux primitives de *f*. b. $F(2) = 11$; $G(2) = 3$ $F(5) = 35$; $G(5) = 27$ c. $F(5) - F(2) = 24$ $G(5) - G(2) = 24$	I. INTEGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE 1. Définition-Notation *f* est une fonction continue sur un intervalle I, F une primitive de *f* sur I, a et b des éléments de I. Le nombre réel F(b)−F(a), est indépendant du choix de la primitive F ; Le nombre réel F(b)−F(a) est appelé intégral de a à b de

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. F et G deux primitives de *f* sur I. Soient a et b deux nombres réels de I. Sachant qu'il existe un nombre réel c tel que $F(x) = G(x) + c$, montre que :$\forall x \in$ I, $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$. *Le nombre réel* **F($b$)−F($a$)**, *est indépendant du choix de la primitive F et est appelé* ***intégral*** *de* a à b *de f.* Il se note aussi $\int_a^b f(x)dx$ ou $[F(x)]_a^b$	$F(5) - F(2) = G(5) - G(2)$ 2. $F(b) - F(a) = [G(b) + c] - [G(a) + c]$ $F(b) - F(a) = G(b) + c - G(a) - c$ $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$	*f.* On le note aussi $\int_a^b f(x)dx$ ou $[F(x)]_a^b$ $\int_a^b f(x)dx$ se lit intégral (ou somme) de a à b de *f*(*x*)d*x*. La lettre x choisie peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre pourvue que la lettre choisie n'introduise aucune ambiguïté. Ainsi, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(t)dt = \cdots$
Evaluation *5 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Calcule l'intégrale : $I = \int_1^4 (2x + 3)dx$	<u>REPONSE ATTENDUE</u> $I = \int_1^4 (2x + 3)dx = [x^2 + 3x]_1^4$ $I = (4^2 + 3 \times 4) - (1^2 + 3 \times 1)$ $I = 28 - 4$ $I = 24$	
Développement *12 min*	-Travail individuel	<u>ACTIVITE2</u> *f* est une fonction continue sur un intervalle I ; F une primitive de *f* sur I, a et b des éléments de I. En utilisant la définition de l'intégrale d'une fonction continue,	<u>REPONSES ATTENDUES</u> a. $\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b)$	<u>Conséquences de la définition</u> Soit *f* est une fonction continue sur un intervalle I, a et b des éléments de I.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *13 min*	-Travail individuel	montre que : a. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ b. $\int_a^a f(x)dx = 0$ <u>EXERCICE DE FIXATION</u> Calcule les intégrales suivantes : a. $\int_0^2 x^3 dx$ b. $\int_0^2 t^3 dt$ c. $\int_e^1 \left(1+\frac{1}{x}\right) dx$ d. $\int_{-5}^{-5} 2\sqrt{x^2-5x+7}dx$	b. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ $\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a)$ $\int_a^a f(x)dx = 0$ <u>REPONSES ATTENDUES</u> a. $\int_0^2 x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = 4$ b. $\int_0^2 t^3 dt = \int_0^2 x^3 dx = 4$ c. $\int_e^1 \left(1+\frac{1}{x}\right) dx = -\int_1^e \left(1+\frac{1}{x}\right) dx$ $\int_e^1 \left(1+\frac{1}{x}\right) dx = -[x+\ln x]_1^e$ $\int_e^1 \left(1+\frac{1}{x}\right) dx = -e-1+1$ $\int_e^1 \left(1+\frac{1}{x}\right) dx = -e$ d. $\int_{-5}^{-5} 2\sqrt{x^2-5x+7}dx = 0$	$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$; $\int_a^a f(x)dx = 0$;
	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE MAISON</u>		

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON8 : CALCUL INTEGRAL

SEANCE : 2/7

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- Les propriétés de l'intégrale : o Linéarité o Relation de Chasles

PLAN DE LA SEANCE

2. Propriétés de l'intégrale
   a. Egalité de Chasles
   b. Linéarité

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
10 min *Développement* *20 min*	-Travail en groupes -Travail individuel	Correction des exercices de maison <u>ACTIVITE</u> Soit *f* et *g* deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$; α et β deux nombres réels. a, b et c trois nombres réels éléments de I ; F une primitive de *f* sur I. G une primitive de *g* sur I. Démontre que : **1**. $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$ **2**. **a**.$\alpha F, \beta G$ et $\alpha F + \beta G$ sont des primitives respectives de $\alpha f, \beta g$ et $\alpha f + \beta g$. **b**. En déduire que : $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$ et	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **1**. $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx =$ $F(b) - F(a) + F(c) - F(b) =$ $F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)dx$ $\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f(x)dx} + \int_{\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{f(x)dx} =$ $\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{f(x)dx}$ **2.a**. $(\alpha F)' = \alpha F'$ $(\alpha F)' = \alpha f$ donc αF est une primitive de αf sur I. $(\beta G)' = \beta G'$ $(\beta G)' = \beta g$ donc βG est une primitive de βgsur I. $(\alpha F + \beta G)' = \alpha F' + \beta G'$ $(\alpha F)' = \alpha f + \beta g$ donc $\alpha F + \beta G$ est une primitive de $\alpha f + \beta g$ sur I. **b**.	2. <u>Propriétés de l'intégrale</u> a. <u>Egalité de Chasles Propriété</u> Soient *f* une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c des éléments de I. On a : $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$ b. <u>Linéarité Propriété</u> Soient *f* et *g* deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b des éléments de I, α un nombre réel quelconque, $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ *L'égalité* $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$ *est appelée « **égalité de Chasles** ».* *L'intégrale vérifie aussi les propriétés :* $\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{\alpha f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{\alpha}\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}$ *et*	$\int_a^b \alpha f(x)dx = [\alpha F]_a^b$ $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha F(b) - \alpha F(a)$ $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha(F(b) - F(a))$ $\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{\alpha f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{\alpha}\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}$ $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx =$ $[\alpha F + \beta G]_a^b =$ $\alpha F(b) + \beta G(b) - \alpha F(a) - \beta G(a) =$ $\alpha F(b) - \alpha F(a) + \beta G(b) - \beta G(a) =$ $\alpha\big(F(b) - F(a)\big) + \beta\big(G(b) - G(a)\big)$ $\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} [\boldsymbol{\alpha f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\beta g}(\boldsymbol{x})]\boldsymbol{dx} =$ $\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} + \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}$	$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *20 min*	-Travail individuel	$\int_a^b \alpha f(x)dx + \int_a^b \beta g(x)dx = \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx$ *Ces propriétés permettent de dire que l'intégrale est* ***linéaire****. On parle ainsi de la* ***linéarité*** *de l'intégrale.* EXERCICE DE FIXATION 1. Calcule : a. $\int_{-1}^{5} \lvert x-2\rvert\,dx$ b. $\int_{-3}^{4} \lvert x+1\rvert\,dx$ 2. a. Calcule les intégrales : $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2\cos x\,dx$ et $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} -\frac{2}{x}dx$ b. Déduis-en $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(2\cos x - \frac{2}{x}\right)dx$	REPONSES ATTENDUES **1.a**. $\int_{-1}^{5} \lvert x-2\rvert\,dx = \int_{-1}^{2} (2-x)dx + \int_{2}^{5} (x-2)dx$ $\int_{-1}^{5} \lvert x-2\rvert\,dx = \left[2x - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{2} + \left[\frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_{2}^{5}$ $\int_{-1}^{5} \lvert x-2\rvert\,dx = 4 - 2 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{25}{2} - 10 - 2 + 4$ $\int_{-1}^{5} \lvert x-2\rvert\,dx = 9$ **b**.	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			$\int_{-3}^{4} \|x+1\|\,dx = \int_{-3}^{-1} (-x-1)dx + \int_{-1}^{4} (x+1)dx$ $\int_{-3}^{4} \|x+1\|\,dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 - x\right]_{-3}^{-1} + \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-1}^{4}$ $\int_{-3}^{4} \|x+1\|\,dx = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{9}{2} - 3 + 8 + 4 - \frac{1}{2} + 1$ $\int_{-3}^{4} \|x+1\|\,dx = \frac{29}{2}$ **2.a.** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2\cos x\,dx = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x\,dx$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2\cos x\,dx = 2[\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 3\cos x\,dx = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 3\cos x\,dx = \sqrt{3} - \sqrt{2}$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE MAISON</u>	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} -\frac{2}{x}dx = -2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{x}$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} -\frac{2}{x}dx = -2[\ln x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} -\frac{2}{x}dx = -2\left(\ln\frac{\pi}{3} - \ln\frac{\pi}{4}\right)$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} -\frac{2}{x}dx = -2\left(\ln\frac{\pi}{3}\times\frac{4}{\pi}\right)$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} -\frac{2}{x}dx = -2\ln\frac{4}{3}$ **b**. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(2\cos x - \frac{2}{x}\right)dx =$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2\cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} -\frac{2}{x}dx$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(2\cos x - \frac{2}{x}\right)dx = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ $-2\ln\frac{4}{3}$	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON8 : CALCUL INTEGRAL

SEANCE : 3/7

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	Les propriétés de l'intégrale : o Signe de l'intégrale
Calculer	- Une intégrale en utilisant la parité ou la périodicité d'une fonction
Déterminer	- Le signe d'une intégrale

PLAN DE LA SEANCE

c. Inégalité et intégrale
d. Parité

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
15 min *Développement* *15 min*	-Travail en groupe -Travail en groupes	Correction des exercices de maison <u>ACTIVITE1</u> Soit : ▪ a et b deux nombres réels tels que : $a < b$. ▪ f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$. ▪ F une primitive de f sur $[a, b]$. ▪ G une primitive de g sur $[a, b]$. **1**. On suppose que :$\forall x \in [a; b]$, $f(x) \geq 0$. **a**. Donne le sens de variation de F. **b**. Compare $F(b)$ et $F(a)$. **c**. Déduis-en que : $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ **2**. $\forall x \in [a; b]$, $f(x) \geq g(x)$. **a**. Donne le sens de variation de F−G. **b**. Déduis-en que : $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **1**. $\forall x \in [a; b]$, $f(x) \geq 0$. **a**. F une primitive de f sur $[a, b]$ donc $\forall x \in [a; b]$, $F'(x) = f(x)$. $\forall x \in [a; b]$, $F'(x) \geq 0$. F est croissante sur $[a; b]$. **b**. $a < b$ donc $F(a) \leq F(b)$ car F est croissante sur $[a; b]$. **c**. $F(a) \leq F(b)$ donc $F(b) - F(a) \geq 0$ $\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx} \geq \mathbf{0}$. **2**.**a**. F et G sont des primitives respectives de f et g sur $[a; b]$ donc $F - G$ est une primitive de $f - g$ sur $[a, b]$. $\forall x \in [a; b]$, $f(x) \geq g(x)$ donc $\forall x \in [a; b]$, $f(x) - g(x) \geq 0$. $F - G$ est croissante sur $[a, b]$. **b**. $F(b) - G(b) \geq F(a) - G(a)$ $F(b) - F(a) \geq G(b) - G(a)$ $\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx} \geq \int_a^b \boldsymbol{g(x)dx}$	c. <u>Inégalité et intégrale Propriétés</u> Soient f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$. Si :$\forall x \in [a; b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$. Si :$\forall x \in [a; b]$, $f(x) \geq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *10 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION1</u> 1. Démontre que l'intégrale $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ est positive. 2. Démontre que : $\int_1^2 xe^x dx \leq \int_1^2 x^2 e^x dx.$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. $\forall x \in [1;2]$ $\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} > 0\ donc$ $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} > 0.$ 2. $xe^x - x^2e^x = (x-x^2)e^x.$ $xe^x - x^2e^x = x(1-x)e^x.$ $\forall x \in [1;2], x(1-x)e^x \leq 0.$ On en déduit que $\forall x \in [1;2], xe^x \leq x^2e^x.$ Conclusion : $\int_1^2 xe^x dx \leq \int_1^2 x^2 e^x dx.$	
Développement *15 min*	-Travail en groupes	<u>ACTIVITE2</u> Soit *f* une fonction continue sur un intervalle I symétrique par rapport à 0. Soit a un élément de I. 1. Si *f* est paire : a. En posant : $t = -x$, démontre que : $\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$ b. En déduire que : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ 2. Si *f* est impaire	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **1**. Supposons que *f* est paire : **a**. Lorsque $t = -x, dx = -dt$ Lorsque $x = -a, t = a$ Lorsque $x = 0, t = 0$ $\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_a^0 -f(-t)dt$ $\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_a^0 f(t)dt$ car $f(-t) = f(t)$ $\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\left(-\int_0^a f(t)dt\right)$	d. <u>Parité</u> Soit f une fonction continue sur un intervalle I symétrique par rapport à 0. Pour tout élément a de I, on a : Si ***f est paire***, alors $\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_0^a f(t)dt$ et $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ Si ***f est impaire***, alors

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		a. En posant : $t = -x$, démontre que : $\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx$ b. En déduire que : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$	$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(t)dt$ $\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx$ **b**. $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$ $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$ car f est paire. $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$ **2**.**a**. Supposons que f est impaire : Lorsque $t = -x, dx = -dt$ Lorsque $x = -a, t = a$ Lorsque $x = 0, t = 0$ $\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{a}^{0} -f(-t)dt$ $\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{a}^{0} f(t)dt$ car $f(-t) = -f(t)$ $\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(t)dt$	$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx$ et $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *10 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Calcule : a. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x\, dx$ b. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx$	$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx$ b. $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$ $\int_{-a}^{a} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$ car f est impaire. $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$ <u>REPONSES ATTENDUES</u> a. La fonction sinus est une fonction impaire donc $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x\, dx = 0.$ b. La fonction cosinus est une fonction paire donc $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx$ $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx = 2\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}}$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE MAISON</u>	$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx = 2\left(\frac{1}{2} - 0\right)$ $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx = 1$	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON8 : CALCUL INTEGRAL

SEANCE : 4/7

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Calculer	- Une intégrale en utilisant la parité ou la périodicité d'une fonction
Etudier	- Les variations des fonctions du type : $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$
Représenter	- Une allure d'une fonction du type : $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$

PLAN DE LA SEANCE

e. Périodicité
f. Intégrale et primitive

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
15min *Développement* *15 min*	-Travail en groupe -Travail en groupes	Correction des exercices de maison <u>ACTIVITE1</u> Soit *f* une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T. Soient α et β deux nombres réels. 1. En posant $t = x + T$, démontre que $\int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ 2. En utilisant l'égalité de Chasles, déduis de la question 1 que $\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)dx = \int_{\beta}^{\beta+T} f(x)dx$ 3. Réécris l'égalité de la question 2 lorsque $\beta = 0$.	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. Posons $t = x - T$, $dx = dt$. Lorsque $x = \alpha + T$, $t = \alpha$. Lorsque $x = \beta + T$, $t = \beta$. $\int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t+T)dt$ Comme $f(t+T) = f(t)$, on obtient : $\int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$ $\int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ 2. $\int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(x)dx = \int_{\alpha+T}^{\beta} f(x)dx + \int_{\beta}^{\beta+T} f(x)dx$ $\int_{\beta}^{\beta+T} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx - \int_{\alpha+T}^{\beta} f(x)dx$	e. <u>Périodicité</u> <u>Propriété</u> Soit *f* une fonction continue sur un intervalle I, α et β des éléments de I. Si *f* est périodique de période T, alors $\int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ et $\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			$\int_{\beta}^{\beta+T} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\beta}^{\alpha+T} f(x)dx$ $\int_{\beta}^{\beta+T} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx + \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)dx$ $\int_{\beta}^{\beta+T} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)dx$ $\int_{\beta}^{\beta+T} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)dx$ **3**. $\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)dx = \int_{\beta}^{\beta+T} f(x)dx$ Lorsque $\beta = 0$, on obtient : $\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *10 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> 1. Sans calculer chacune des intégrales, justifie que : a. $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = \int_{2\pi}^{4\pi} \sin x\,dx$ b. $\int_0^{2\pi} \cos x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,dx$ 2. Calcule : $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos 2x\,dx$ La fonction $x \mapsto \cos 2x$ est périodique de période π. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos 2x\,dx = \int_{0+\frac{\pi}{2}}^{\pi+\frac{\pi}{2}} \cos 2x\,dx$ $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos 2x\,dx = \int_0^{\pi} \cos 2x\,dx$ $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos 2x\,dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}$ $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos 2x\,dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **1.a**. La fonction $x \mapsto \sin x$ est périodique de période 2π. $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = \int_{0+2\pi}^{2\pi+2\pi} \sin x\,dx$ $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = \int_{2\pi}^{4\pi} \sin x\,dx$ **b**. La fonction $x \mapsto \cos x$ est périodique de période 2π. $\int_0^{2\pi} \cos x\,dx = \int_{-\pi}^{-\pi+2\pi} \cos x\,dx$ $\int_0^{2\pi} \cos x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,dx$ **2**. La fonction $x \mapsto \cos 4x$ est Périodique de période π. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos 2x\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\pi} \cos 2x\,dx$ $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos 2x\,dx = \int_0^{\pi} \cos 2x\,dx$ $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos 2x\,dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}$ $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos 2x\,dx = 0.$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Développement *5 min*	-Travail en groupes	<u>ACTIVITE2</u> Soit *f* une fonction continue sur un intervalle I et a un élément de I. F est une primitive de *f* sur I. On considère la fonction φ définie pour tout $x \in$ I par : $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt.$ 1. Exprime $\varphi(x)$ en fonction de F(x). 2. Déduis-en que φ est une primitive de *f* sur I. 3. Calcule $\varphi(a)$. $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt$ *est la primitive de* ***f*** *sur I qui s'annule en* $\boldsymbol{a}$.	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt.$ $\varphi(x) = F(x) - F(a).$ 2. $\varphi(x) = F(x) - F(a).$ $\varphi'(x) = F'(x) - (F(a))'.$ $\varphi'(x) = f(x).$ φ est une primitive de *f* sur I. 3. $\varphi(a) = \int_a^a f(t)dt$ $\varphi(a) = 0$	f. <u>Intégrale et primitive</u> <u>Propriété</u> Soit *f* une fonction continue sur un intervalle I et a un élément de I. La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ de I vers $\mathbb{R}$ est la primitive de *f* qui s'annule en a.
Evaluation *5 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> 1. Justifie que la fonction logarithme népérien est la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par : $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt.$ 2. Détermine la primitive de la fonction G de la fonction	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **1.** $\forall x \in]0;+\infty[$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ et $\ln(1) = 0.$ la fonction logarithme népérien est la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par : $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt.$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
	-Travail individuel	$x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$ qui s'annule en 0. EXERCICE DE MAISON	**2**. $G(x) = \int_0^x \frac{t}{\sqrt{t^2+3}} dt =$ $G(x) = \left[\sqrt{t^2+3}\right]_0^x$ $G(x) = \sqrt{x^2+3} - \sqrt{3}$	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON8 : CALCUL INTEGRAL

SEANCE : 5/7

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- La définition de la valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle - Les propriétés de l'intégrale : o Inégalité de la moyenne (les deux formes)
Calculer	- La valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle
Déterminer	- Un encadrement d'une intégrale

PLAN DE LA SEANCE

g. Inégalités de la moyenne

3. Valeur moyenne d'une fonction continue

Définition

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
14 min *Développement* *13 min*	-Travail en groupe -Travail en groupes	Correction des exercices de maison <u>ACTIVITE1</u> Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. Soient m et M deux nombres réels. 1. On suppose que : $\forall x \in [a;b], m \leq f(x) \leq M$. Justifie que : $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$. 2. On suppose que : $\forall x \in [a;b], \lvert f(x)\rvert \leq M$. Déduis de la question 1 que : $\left\lvert \int_a^b f(x)dt \right\rvert \leq M(a-b)$. *Les inégalités :* $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ $et \left\lvert \int_a^b f(x)dt \right\rvert \leq M(a-b)$ *sont appelées* ***inégalités de la moyenne***.	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **1**. $\forall x \in [a;b], m \leq f(x) \leq M$. $\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$ $m\int_a^b dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M\int_a^b dx$ $m[x]_a^b \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M[x]_a^b$ $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$. **2**. $\forall x \in [a;b], \lvert f(x)\rvert \leq M$. $-M \leq f(x) \leq M$ D'après l'inégalité de la question 1, $-M(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$ $\left\lvert \int_a^b f(x)dt \right\rvert \leq M(a-b)$.	f. <u>Inégalités de la moyenne Propriétés</u> Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$, m et M deux nombres réels. Si $\forall x \in [a\,;b]$, $m \leq f(x) \leq M$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$. Si $\forall x \in [a;b], \lvert f(x)\rvert \leq M$, alors $\left\lvert \int_a^b f(x)dt \right\rvert \leq M(a-b)$.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *8 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> 1. Sans calculer l'intégrale, justifie que $\left\|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx\right\| \leq 2$. 2. En supposant que : $\forall x \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$, $1 \leq \frac{1}{sinx} \leq \sqrt{2}$, justifie que : $\frac{\pi}{4} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\, dx \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **1**. $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow \|\sin x\| \leq 1$ La fonction $x \mapsto \sin x$ est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ donc d'après l'inégalité de la moyenne, on a : $\left\|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx\right\| \leq 1 \times \left(\frac{\pi}{2} - 0\right)$. $\left\|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx\right\| \leq \frac{\pi}{2}$. $\left\|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx\right\| \leq 2$. **2**. $\forall x \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right], 1 \leq \frac{1}{sinx} \leq \sqrt{2}$ La fonction $x \mapsto \sin x$ est continue sur $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$ donc d'après l'inégalité de la moyenne, on a : $1\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\, dx \leq \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$. $\frac{\pi}{2} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\, dx \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Développement *10 min*	-Travail individuel	ACTIVITE2 On donne la fonction *f* définie sur $[1;7]$ par : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+2$. La courbe (C) est la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). (Figure : Voir annexe1) 1. Calcule le nombre μ tel que : $\mu=\frac{1}{7-1}\int_1^7 f(x)\,dx$. 2. Compare μ et la hauteur du rectangle de base $7-1$ ayant le même aire que la partie du plan limitée par (C), l'axe (OI), les droites d'équation $x=7$ et $x=2$. *μ est appelé la **valeur moyenne** de la fonction f sur* $[1;7]$. *Graphiquement, μ est la hauteur du rectangle de base* $7-1$ *ayant le même aire que la partie du plan limitée par* (C), *l'axe* (OI), *les droites d'équation* $x=7$ *et* $x=1$.	REPONSES ATTENDUES 1. $\mu=\frac{1}{7-1}\int_1^7 f(x)\,dx$. $\mu=\frac{1}{7-1}\int_1^7\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+2\right)dx$. $\mu=\frac{1}{6}\left[2\sqrt{x}+2x\right]_1^7$ $\mu=\frac{1}{6}\left(2\sqrt{7}+14-2-2\right)$ $\mu=\frac{1}{3}\left(\sqrt{7}+5\right)$ $\mu=\frac{\sqrt{7}+5}{3}$ $\mu\simeq 2{,}55$. 2. μ est égale à la hauteur du rectangle de base $7-1$ ayant le même aire que la partie du plan limitée par (C), l'axe (OI), les droites d'équation $x=7$ et $x=1$.	3. Valeur moyenne d'une fonction continue Définition Soit *f* une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. On appelle valeur moyenne de la fonction *f* sur $[a;b]$, le nombre réel $\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$. Interprétation graphique Dans le cas d'une fonction positive, la valeur moyenne μ de *f* est la hauteur du rectangle de base $b-$ a ayant le même aire (en unité d'aire) que la partie du plan limitée par la courbe (C_f), l'axe (OI), les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *10 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - sinx$. Calcule la valeur moyenne μ_1 de f sur $[0; \pi]$. 2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^2$. Calcule la valeur moyenne μ_2 de g sur $[0; 1]$.	<u>REPONSE ATTENDUE</u> **1**. $\mu_1 = \frac{1}{\pi - 0}\int_0^{\pi} f(x)\,dx.$ $\mu_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (x - sinx)\,dx.$ $\mu_1 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2} + \cos x\right]_0^{\pi}$ $\mu_1 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} + \cos\pi - \frac{0^2}{2} + \cos 0\right)$ $\mu_1 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} - 1 + 0 + 1\right)$ $\mu_1 = \frac{\pi}{2}$ **2**. $\mu_2 = \frac{1}{1 - 0}\int_0^{1} g(x)\,dx = \int_0^{\pi} x^2\,dx$ $\mu_2 = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{1} = \frac{1}{3}.$	
	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE MAISON</u>		

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON8 : CALCUL INTEGRAL

SEANCE : 6/7

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- La technique de l'intégration par partie - La technique du changement de variable affine
Calculer	- Une intégrale en utilisant : o Les primitives de fonctions usuelles o Une intégration par partie o Un changement de variable affine o Une fonction du type $u' \times (f' \circ u)$

PLAN DE LA SEANCE

II. TECHNIQUES DE CALCUL D'UNE INTEGRALE
1. Utilisation de primitives
2. Intégration par parties
   Propriété
3. Changement de variable affine

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
10 min	-Travail en groupe	Correction des exercices de maison		
Développement *5 min*	-Travail individuel	<u>ACTIVITE1</u> Soient f une fonction continue sur un intervalle I, F une primitive sur I de *f*, a et b des éléments de I. Exprime $\int_a^b f(x)dx$ en Fonction de F(a) et F(b). *Lorsqu'il est possible de déterminer une primitive F de f sur* $[a;b]$, *pour calculer l'intégrale de f sur* $[a;b]$, *on utilise l'égalité* : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.	<u>REPONSES ATTENDUE</u> $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$ $= F(b) - F(a)$	II. <u>TECHNIQUES DE CALCUL D'UNE INTEGRALE</u> 1. <u>Utilisation de primitives</u> *f* est une fonction continue sur un intervalle I, F une primitive sur I de *f*, a et b des éléments de I. $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$ $= F(b) - F(a)$
Evaluation *5 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Calcule l'intégrale : $A = \int_0^1 \frac{2x}{3+x^2}dx$.	<u>REPONSE ATTENDUE</u> $A = \int_0^1 \frac{2x}{3+x^2}dx$ $A = [\ln(3+x^2)]_0^1$ $A = \ln(3+1^2) - \ln(3+0^2)$ $A = \ln(4) - \ln(3)$ $A = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$.	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Développement *8 min*	-Travail individuel	ACTIVITE2 Soient a et b deux nombres réels tels que $a \leq b$; f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ dérivables sur l'intervalle $[a; b]$ telles que leurs fonctions dérivées f' et g' soient continues sur $[a; b]$. 1. Exprime $(fg)'(x)$ en fonction de $f(x)$, $g(x)$, $f'(x)$ et $g'(x)$. 2. Déduis-en que : $\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$ *Cette technique de calcul d'une intégrale est appelée la technique d'**intégration par parties**.*	REPONSES ATTENDUES **1**. La fonction $fg: [a; b] \mapsto \mathbb{R}$ $x \mapsto f(x) \times g(x)$ est dérivable et on a : $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ **2**. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ Ainsi nous avons $\int_a^b (fg)'(x)dx = \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$ $[f(x)g(x)]_a^b = \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$ $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$	2. Intégration par parties Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, a et b deux éléments de I. Si u' et v' sont continues sur I, alors: $\int_a^b u'(x)v(x) = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *12 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> A l'aide d'une intégration par parties calculer chacune des intégrales suivantes : a. $\int_1^2 lnxdx$ b. $\int_0^{\pi} x^2 \sin x\, dx$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **a**. Calculons $\int_1^2 lnxdx$ $\int_1^2 lnxdx = \int_1^2 1.\ln x\, dx$ Posons $u(x) = \ln x \qquad u'(x) = \frac{1}{x}$ $v'(x) = 1 \qquad v(x) = x$ $\int_1^2 lnxdx = [x\ln x]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \times x\, dx$ $\int_1^2 lnxdx = [x\ln x]_1^2 - \int_1^2 dx\, dx$ $\int_1^2 lnxdx = [x\ln x]_1^2 - [x]_1^2$ $\int_1^2 lnxdx = 2\ln 2 - 1$ **b**. Calculons $\int_0^{\pi} x^2 \sin x\, dx$ Posons $u(x) = x^2 \qquad u'(x) = 2x$ $v'(x) = \sin x \qquad v(x) = -\cos x$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			$\int_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx$ $= [-x^2 \cos x]_0^{\pi} + \int_1^2 2x \cos x \, dx \, dx$ $\int_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx = -\pi^2 \cos \pi - 0^2 \cos 0 + \int_1^2 2x \cos x \, dx \, dx$ $\int_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx = \pi^2 + \int_1^2 2x \cos x \, dx \, dx$ Posons $a(x) = 2x \quad a'(x) = 2$ $b'(x) = \cos x \quad b(x) = \sin x$ $\int_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx = \pi^2 + [2x \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2 \sin x \, dx$ $\int_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx = \pi^2 + 2\pi \sin \pi - 2 \times 0 \sin 0 + 2 \int_0^{\pi} -\sin x \, dx$ $\int_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx = \pi^2 + 2[\cos x]_0^{\pi}$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Développement *8 min*	-Travail individuel	ACTIVITE3 Soit *f* une fonction continue sur un intervalle I et $x \mapsto \alpha x + \beta$ une fonction affine telle que $\alpha \neq 0$. a et b sont deux nombres réels tels que : $\forall x \in [a; b], \alpha x + \beta \in I$. F est une primitive de *f* sur I. 1. Justifie que la dérivée de la fonction $x \mapsto F(\alpha x + \beta)$ est la fonction $x \mapsto \alpha f(\alpha x + \beta)$. 2. On pose : $t = \alpha x + \beta$. En utilisant ce qui précède et la définition de l'intégrale d'une fonction continue, démontre que : $\int_a^b f(\alpha x + \beta)dx = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(t)\,dt$	$\int_0^{\pi} x^2 \sin x\,dx = \pi^2 - 2$ REPONSES ATTENDUES **1**. $x \mapsto F(\alpha x + \beta)$ est la composée de deux fonctions dérivables sur I : $x \mapsto \alpha x + \beta$ et $x \mapsto F(x)$. $x \mapsto F(\alpha x + \beta)$ est dérivable sur I et $F'(\alpha x + \beta) = (\alpha x + \beta)'F'(\alpha x + \beta)$ $F'(\alpha x + \beta) = \alpha f(\alpha x + \beta)$. **2**. Soit $t = \alpha x + \beta$. $dt = \alpha dx$ $dx = \frac{1}{\alpha}dt$. Lorsque $x = a,\ t = \alpha a + \beta$. Lorsque $x = b,\ t = \alpha b + \beta$. $\int_a^b f(\alpha x + \beta)dx = \int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} \frac{1}{\alpha} f(t)\,dt$ $\int_a^b f(\alpha x + \beta)dx = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(t)\,dt$	3. Changement de variable affine Pour calculer $\int_a^b f(\alpha x + \beta)dx$ α et β étant deux nombres réels tels que $\alpha \neq 0$, on peut procéder comme suit : o Faire le changement de variable $t = \alpha x + \beta$. On a : $dt = \alpha dx$ d'où $dx = \frac{1}{\alpha}dt$. $x = a \Leftrightarrow t = \alpha a + \beta$ $x = b \Leftrightarrow t = \alpha b + \beta$. o Utiliser l'égalité : $\int_a^b f(\alpha x + \beta)\,dx = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(t)\,dt$
Evaluation *7 min*	-Travail individuel	EXERCICE DE FIXATION Calcule les intégrales :	REPONSE ATTENDUE Calculons $I = \int_{-1}^{0} (2x + 1)^3 dx$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		$I = \int_{-1}^{0} (2x+1)^3 dx.$ $J = \int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt{3x-1}} dx.$	Posons : $u = 2x + 1$ On a : $du = 2dx$ donc $dx = \frac{1}{2} du.$ $x = -1 \Leftrightarrow u = -1$ $x = 0 \Leftrightarrow u = 1.$ $I = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u^3 du = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}u^4\right]_{-1}^{1}.$ $I = \frac{1}{8}(1-1) = 0.$ Calculons $J = \int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt{3x-1}} dx$ Posons : $t = 3x - 1$ On a : $dt = 3dx$ donc $dx = \frac{1}{3} dt.$ $x = 1 \Leftrightarrow t = 2$ $x = 2 \Leftrightarrow t = 5.$ $J = \frac{1}{3}\int_{2}^{5} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{3}\left[\sqrt{t}\right]_{2}^{5}.$ $J = \frac{2\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{3}.$	
	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE MAISON</u>		

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON8 : CALCUL INTEGRAL

SEANCE : 7/7

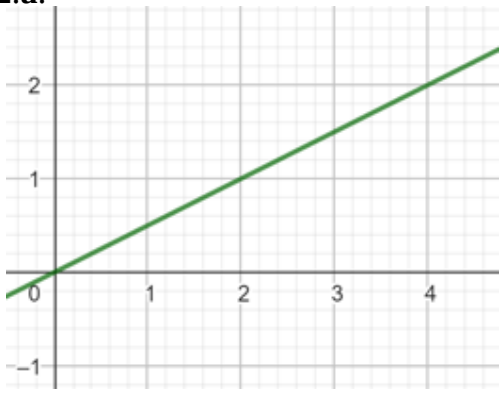
DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

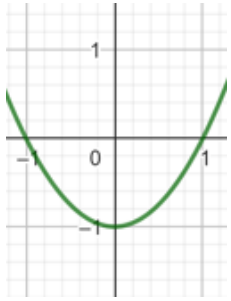
MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

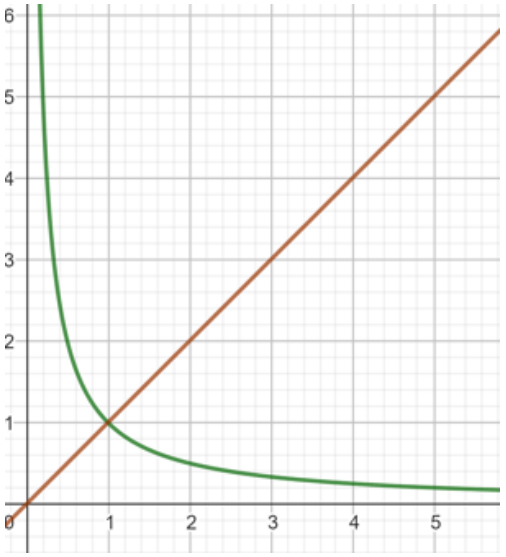
HABILETES	CONTENUS
Calculer	- Une aire
Interpréter	- Graphiquement une intégrale

PLAN DE LA SEANCE

III. CALCULS D'AIRES
1. Calcul d'une aire d'une partie du plan délimitée par l'axe des abscisses et une courbe
2. Calcul d'une aire d'une partie du plan délimitée par deux courbes

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
15 min *Développement* *20 min*	-Travail en groupe -Travail en groupes	Correction des exercices de maison <u>ACTIVITE</u> Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J) tel que : $OI = a\ cm$ et $OJ = b\ cm$. **1**. Donne l'aire du rectangle de dimensions OI et OJ. **2**. Soit f_1 la fonction définie sur $[0; 4]$ par $f_1(x) = \frac{1}{2}x$ On note (C_{f_1}) la courbe représentative de f_1 dans le plan muni du repère (O, I, J). a. Trace (C_{f_1}). b. Détermine le signe de f_1 sur $[0; 4]$. c. Calcule : $\int_0^4 f_1(x)\,dx$ d. Calcule l'aire A de la surface délimitée par la courbe (C_{f_1}), l'axe (OI) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$. e. Compare les résultats du 2c et du 2d. **3**. Soit f_2 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_2(x) = x^2 - 1$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **1**. L'aire du rectangle de dimensions OI et OJ est $ab\ cm^2$. **2.a**.  **b**.$\forall x \in [0; 4], 0 \leq x \leq 4$ $\forall x \in [0; 4], 0 \leq \frac{1}{2}x \leq 2$ $\forall x \in [0; 4], 0 \leq f_1(x) \leq 2$ f_1 est positive sur $[0; 4]$. **c**. $\int_0^4 f_1(x)\,dx = \int_0^4 \frac{1}{2}x\,dx$ $\int_0^4 f_1(x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^4$ $\int_0^4 f_1(x)\,dx = 4.$	III. <u>CALCULS D'AIRES</u> 1. <u>Calcul d'une aire d'une partie du plan délimitée par l'axe des abscisses et une courbe</u> Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J). L'aire du rectangle construit avec les points O, I et J est appelée ***unité d'aire*** ($1ua = OI \times OJ\ cm^2$). Soit *f* une fonction continue sur un intervalle [a ; b] et de représentation graphique (C_f). ***Cas où f est positive sur*** $[a; b]$ L'aire en unité d'aire de la partie du plan délimitée par (C_f), (OI), les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale au nombre réel positif $\Delta = \int_a^b f(x)\,dx$.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		On note (C_{f_2}) la courbe représentative de f_2 dans le plan muni du repère (O, I, J). a. Trace (C_{f_2}). b. Détermine le signe de f_2 sur $[-1;1]$. c. Calcule : $-\int_{-1}^{1} f_2(x)\,dx$ **4**. On considère les fonctions f et g définies sur $[0;+\infty]$ par : $f(x)=\frac{1}{x}$ et $g(x)=x$. On note (C_f) et (C_g) les courbes représentatives de f et g dans le plan muni du repère (O, I, J). a. Trace (C_f) et (C_g). b. Justifie que $f \leq g$ sur $[1;e]$. c. Calcule : $\int_1^e (g(x)-f(x))\,dx$.	**d**. $A=\frac{4\times 2}{2}$ $A=4\ cm^2$. **e**. $A=\int_0^4 f_1(x)\,dx$. **3**. $f_2(x)=x^2-1$ **a**.  **b**. $f_2(x)=x^2-1$ $f_2(x)=(x-1)(x+1)$ $\forall x\in[-1;1], f_2(x)\leq 0$ **c**. $-\int_{-1}^{1} f_2(x)\,dx=-\int_{-1}^{1}(x^2-1)\,dx$ $-\int_{-1}^{1} f_2(x)\,dx=\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx$ $-\int_{-1}^{1} f_2(x)\,dx=\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}$	***Cas où f est négative sur*** $[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$ L'aire en unité d'aire de la partie du plan délimitée par (C_f), (OI), les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale au nombre réel positif $\Delta=-\int_a^b f(x)\,dx$. 2. <u>Calcul d'une aire d'une partie du plan délimitée par deux courbes</u> Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle [a ; b] et de représentations graphiques respectives (C_f) et (C_g). On suppose que $f \geq g$ sur $[a;b]$. L'aire en unité d'aire de la partie délimitée par les courbes (C_f), (C_g) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale au nombre réel positif $\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			$-\int_{-1}^{1} f_2(x)\,dx = 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}$ $-\int_{-1}^{1} f_2(x)\,dx = 2 - \frac{2}{3}$ **4. a.**  **b.** $g(x) - f(x) = x - \frac{1}{x}$ $g(x) - f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$ $\forall x \in [1; e], g(x) - f(x) \geq 0$ $\forall x \in [1; e], g(x) \geq f(x)$ $f \leq g$ sur $[1; e]$ **c.**	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *20 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> **1**. Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J) avec OI = 2 cm et OJ = 3 cm. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$. On note ($C_f$) la courbe représentative de *f* dans le repère (O, I, J). Déterminer en cm² l'aire de la partie du plan limitée par (C_f), (OI), les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.	$\int_1^e (g(x) - f(x))\,dx = \int_1^e \left(x - \frac{1}{x}\right) dx$ $\int_1^e (g(x) - f(x))\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \ln x\right]_1^e$ $\int_1^e (g(x) - f(x))\,dx = \frac{e^2-3}{2}$ <u>REPONSES ATTENDUES</u> **1**. *f* est continue sur $[1;2]$ et $\forall x \in [1;2], f(x) > 0$. Soit A_1 l'aire en cm² de la partie du plan limitée par (C_f), (OI), les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$. $A_1 = \int_1^2 f(x)\,dx \times ua$ $A_1 = \int_1^2 \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx \times ua$ $A_1 = \left[2\sqrt{x^2+1}\right]_1^2 \times 2 \times 3$ cm² $A_1 = \left[2\sqrt{5} - 2\sqrt{2}\right] \times 6$cm2 $A_1 = 12\left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)$cm²	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		2. Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) ; unité graphique : 2 cm. Soit *f* et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 3 - xe^x$ et $g(x) = x + 3$. On note (C_f) et (C_g) respectivement les courbes représentatives de *f* et g dans le repère (O, I, J). Détermine en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par (C_f), (C_g) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = e$.	**2**. f et g sont continues sur $[0; e]$. $f(x) - g(x) = -xe^x$. $\forall x \in [0; e], f(x) - g(x) \leq 0$. Sur $[0; e], f \leq g$. Soit A_2 l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par (C_f), (C_g) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = e$. $A_2 = \int_0^e [g(x) - f(x)]\,dx \times ua$ $A_2 = \int_0^e xe^x\,dx \times ua$ Posons : $u(x) = x \qquad u'(x) = 1$ $v'(x) = e^x \qquad v(x) = e^x$ $\int_0^e xe^x dx = [xe^x]_0^e - \int_0^e e^x\,dx$ $\int_0^e xe^x dx = [xe^x]_0^e - [e^x]_0^e$ $\int_0^e xe^x dx = ee^e - e^e + 1$ $\int_0^e xe^x dx = e^e(e-1) + 1$ $A_2 = 4[e^e(e-1) + 1]\text{cm}^2$	
	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE MAISON</u>		

BIBLIOGRAPHIE

Programmes éducatifs et guides d'exécution Mathématiques $T^{LE}D$

Progressions annuelles

Mon livre de mathématiques $T^{LE}D$ Collection PYRAMIDE

Mon livre de mathématiques $T^{LE}D$ Collection CIAM/EDICEF

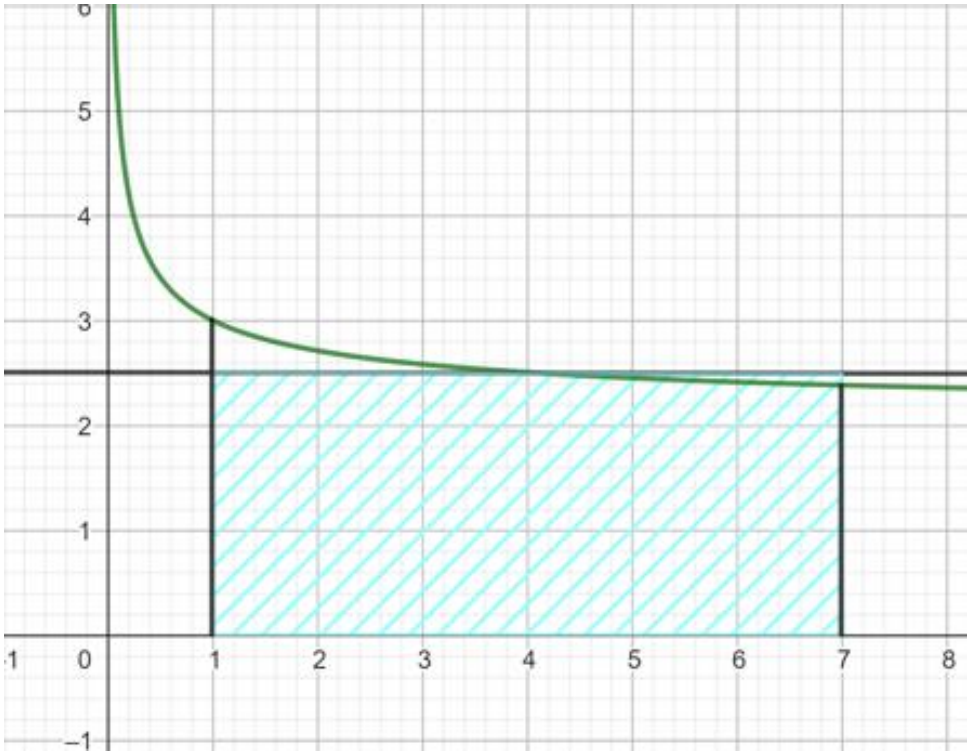
Les cahiers de la réussite T^{LE} D Vallesse

Mon cahier d'habiletés Mathématiques T^{LE} D JD Editions

WWW.monecoleàlamaison.ci

https://physiques-et-maths.fr

ANNEXE1



FICHE DE LEÇON

NOMBRES COMPLEXES ET GEOMETRIE DU PLAN

TLE D

Rédigée par :

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE3

THEME1 : GEOMETRIE DU PLAN

LEÇON9 : NOMBRES COMPLEXES ET GEOMETRIE DU PLAN

NOMBRE DES SEANCES : 8

DUREE D'UNE SEANCE : 55 minutes

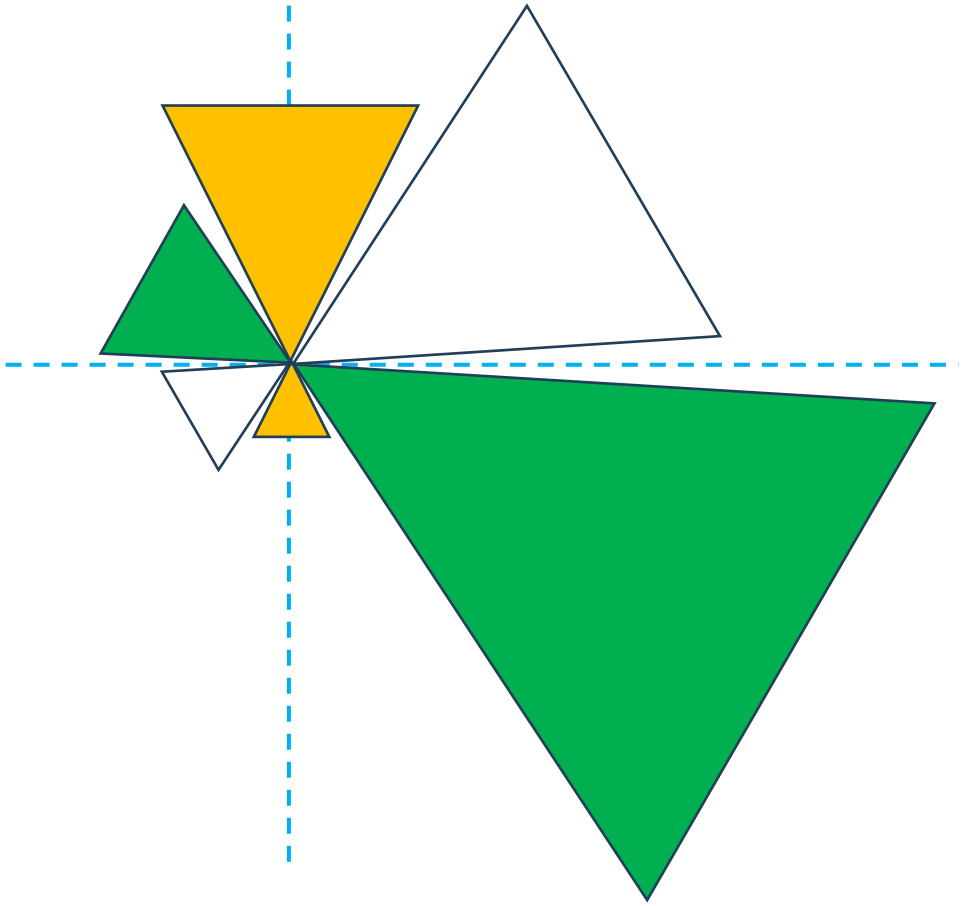
MTERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la définition d'une similitude directe - les éléments caractéristiques d'une similitude directe - les formules relatives à l'écriture complexe : • d'une translation • d'une symétrie centrale • de la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses • de la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées • d'une homothétie de centre Ω et de rapport λ • d'une rotation de centre Ω et d'angle θ • d'une similitude directe - les caractérisations complexes : • des points alignés • des triangles particuliers • des points cocycliques • d'un cercle • d'une droite
Reconnaître	-l'écriture complexe d'une : • translation • symétrie centrale

	• symétrie orthogonale par rapport à l'un des axes de coordonnées • homothétie • rotation • similitude directe
Déterminer	-l'écriture complexe d'une : • translation • symétrie centrale • symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses • symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées • homothétie de centre Ω et de rapport k • rotation de centre Ω et d'angle θ • similitude directe -l'image d'un point, d'un segment, d'une droite, d'un cercle, d'un angle, par une transformation dont on connait l'écriture complexe -les éléments caractéristiques, connaissant son écriture complexe, d'une : • translation • symétrie centrale • symétrie orthogonale par rapport à un axe du repère • homothétie • rotation • similitude directe - des lieux géométriques à l'aide des nombres complexes - la nature d'un triangle, d'un quadrilatère en utilisant les caractérisations complexes
Construire	- l'image d'un point par une similitude directe - des lieux géométriques
Démontrer	- l'image d'un point par une similitude directe - des lieux géométriques
Traiter une situation	faisant appel aux applications géométriques des nombres complexes

SITUATION D'APPRENTISSANGE

Un artiste peintre fait une exposition au lycée moderne de Madinani. De passage devant le tableau ci-contre avec ses camarades, le chef d'une classe de terminale D demande à l'artiste la technique utilisée pour réaliser le tableau.
L'artiste leur répond : « cette technique s'appelle *l'abstraction géométrique*. Ce mouvement artistique utilise des formes géométriques pures, comme les cercles, les carrés et les triangles, pour créer des compositions non figuratives et bidimensionnelles. Des artistes cubistes comme Picasso ou Braque ont exploré cette méthode. Ce tableau est composé de triangles isocèles obtenus les uns à partir des autres par une similitude directe. »
Fascinés, ces élèves décident de faire des recherches sur les similitudes directes pour afin de réaliser des figures similaires à celle du tableau.



PLAN DE LA LEÇON

I. NOMBRES COMPLEXES ET CONFIGURATION DU PLAN
   1. Affixes et configuration
      a. Affixe d'un vecteur, affixe du milieu d'un segment
      b. Nombres complexes, distances et angles
      c. Caractérisation d'ensembles de points
   2. Caractérisation et configurations
      a. Caractérisation complexe de points alignés
      b. Caractérisation complexe des triangles particuliers
      c. Caractérisation complexe de l'angle droit
      d. Caractérisation complexe de points cocycliques

II. NOMBRES COMPLEXES ET TRANSFORMATIONS DU PLAN
   1. Ecritures complexes des symétries
      a. Symétrie par rapport aux axes d'un repère
      b. Symétrie par rapport à un point
   2. Ecriture complexe d'une translation
   3. Ecriture complexe d'une homothétie
   4. Ecriture complexe d'une rotation

III. SIMILITUDES DIRECTES DU PLAN
   1. Définition et propriétés
   2. Détermination d'une similitude directe
   3. Images de figures simples par une similitude directe

HABILLETES, CONTENUS ET PLANS PAR SEANCE

SEANCE1

HABILETES	CONTENUS
Déterminer	- des lieux géométriques à l'aide des nombres complexes
Construire	- des lieux géométriques
Démontrer	- des lieux géométriques

PLAN DE LA SEANCE1

I. NOMBRES COMPLEXES ET CONFIGURATIONS DU PLAN
   1. Affixes et configuration
      a. Affixe d'un vecteur, affixe du milieu d'un segment
      b. Nombres complexes, distances et angles

SEANCE2

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- les caractérisations complexes : • d'un cercle • d'une droite
Déterminer	- des lieux géométriques à l'aide des nombres complexes
Construire	- des lieux géométriques
Démontrer	- des lieux géométriques

PLAN DE LA SEANCE2

      c. Caractérisation d'ensembles de points

SEANCE3

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- les caractérisations complexes : • des points alignés • des triangles particuliers
Déterminer	-la nature d'un triangle en utilisant les caractérisations complexes

PLAN DE LA SEANCE3

   2. Caractérisation et configurations
      a. Caractérisation complexe de points alignés
      b. Caractérisation complexe des triangles particuliers

SEANCE4

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- des points cocycliques
Déterminer	- la nature d'un triangle, d'un quadrilatère en utilisant les caractérisations complexes

PLAN DE LA SEANCE4

      c. Caractérisation complexe de l'angle droit
      d. Caractérisation complexe de points cocycliques

SEANCE5

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- les formules relatives à l'écriture complexe : • d'une translation • d'une symétrie centrale • de la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses • de la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées
Reconnaître	-l'écriture complexe d'une : • translation • symétrie centrale • symétrie orthogonale par rapport à l'un des axes de coordonnées
Déterminer	-l'écriture complexe d'une : • translation • symétrie centrale • symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses • symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées -les éléments caractéristiques, connaissant son écriture complexe, d'une : • translation • symétrie centrale • symétrie orthogonale par rapport à un axe du repère

PLAN DE LA SEANCE5

II. NOMBRES COMPLEXES ET TRANSFORMATIONS DU PLAN
   1. Ecriture complexes des symétries
      a. Symétrie par rapport aux axes d'un repère
      b. Symétrie par rapport à un point
   2. Ecritures complexes des translations

SEANCE6

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- les formules relatives à l'écriture complexe : • d'une homothétie de centre Ω et de rapport λ • d'une rotation de centre Ω et d'angle θ
Reconnaître	-l'écriture complexe d'une : • homothétie • rotation
Déterminer	-l'écriture complexe d'une : • homothétie de centre Ω et de rapport *k* • rotation de centre Ω et d'angle θ -les éléments caractéristiques, connaissant son écriture complexe, d'une : • homothétie • rotation

PLAN DE LA SENCE6

3. Ecriture complexe d'une homothétie
4. Ecriture complexe d'une rotation

SEANCE7

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la définition d'une similitude directe - les éléments caractéristiques d'une similitude directe - les formules relatives à l'écriture complexe : • d'une similitude directe
Reconnaître	-l'écriture complexe d'une : • similitude directe
Déterminer	-l'écriture complexe d'une : • similitude directe -les éléments caractéristiques, connaissant son écriture complexe, d'une : • similitude directe

PLAN DE LA SEANCE7

III. SIMILITUDES DIRECTES DU PLAN
1. Définition et propriétés
2. Détermination d'une similitude directe

SEANCE8

HABILETES	CONTENUS
Déterminer	-l'image d'un point, d'un segment, d'une droite, d'un cercle, d'un angle, par une transformation dont on connait l'écriture complexe
Construire	- l'image d'un point par une similitude directe
Démontrer	- l'image d'un point par une similitude directe

PLAN DE LA SEANCE8

3. Image de figures simples par une similitude directe

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE3

THEME1 : GEOMETRIE DU PLAN

LEÇON9 : NOMBRES COMPLEXES ET GEOMETRIE DU PLAN

SEANCE : 1/8

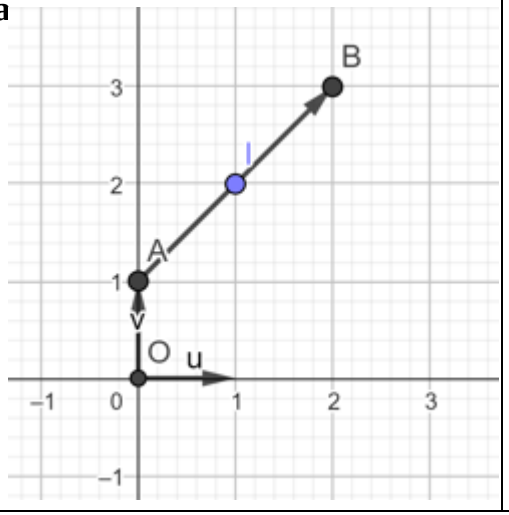
DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Déterminer	- des lieux géométriques à l'aide des nombres complexes
Construire	- des lieux géométriques
Démontrer	- des lieux géométriques

PLAN DE LA SEANCE

I. NOMBRES COMPLEXES ET CONFIGURATION DU PLAN
   1. Affixes et configuration
      a. Affixe d'un vecteur, affixe du milieu d'un segment
      b. Nombres complexes, distances et angles

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Présentation *5 min*	-Lecture -Travail collectif	-Donne l'énoncé de la situation d'apprentissage aux apprenants. -Demande aux apprenants de faire une lecture silencieuse de la situation. -Demande à un apprenant de lire à haute voix l'énoncé de la situation. -Lis l'énoncé de la situation d'apprentissage à haute voix. **Question pour faire ressortir les tâches :** Qu'est-ce que les élèves décident de faire ?	-Les apprenants lisent silencieusement l'énoncé de la situation. -Un apprenant lis à haute voix l'énoncé de la situation. -Les apprenants écoutent Attentivement. REPONSE ATTENDUE Les élèves décident de faire des recherches sur les similitudes directes pour construire des figures.	
Développement *25 min*	-Travail individuel	ACTIVITE Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$). 1. Soit A et B deux points d'affixes respectives $z_A = i$ et $z_B = 2 + 3i$; I est le milieu du segment [AB]. a. Place les points A et B dans le plan muni du repère (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$). b. Compare $z_{\overrightarrow{AB}}$ et $z_B - z_A$. c. Compare z_I, l'affixe du point I et $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$. d. Compare AB et $\lvert z_B - z_A \rvert$.	REPONSES ATTENDUES **1.a**  	I. NOMBRES COMPLEXES ET CONFIGURATION DU PLAN 1. Affixes et configuration a. Affixe d'un vecteur, affixe du milieu d'un segment Propriété Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B. ○ $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		e. Compare $\arg(z_B - z_A)$ et $\text{mes}\left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right)$. 2. Soit A, B, C et D quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$ d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D. a. En utilisant la relation de Chasles, justifie que : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{AC}\right) - \left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right)$. $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{CD}\right) - \left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right)$. b. Déduis-en que : $\text{mes}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ $\text{mes}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$	**b**. $z_{\overrightarrow{AB}} = 2 + 2i$ $z_B - z_A = 2 + 3i - i$ $z_B - z_A = 2 + 2i$ $\boldsymbol{z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A}$ **c**. $z_I = 1 + 2i$ $\frac{z_A + z_B}{2} = \frac{i + 2 + 3i}{2}$ $z_I = \frac{2 + 4i}{2}$ $z_I = 1 + 2i$ $\boldsymbol{\frac{z_A + z_B}{2} = z_I}$. **d**. En utilisant la propriété de Pythagore on obtient : $AB = 2\sqrt{2}$. $\lvert z_B - z_A \rvert = \lvert 2 + 2i \rvert$ $\lvert z_B - z_A \rvert = \sqrt{2^2 + 2^2}$ $\lvert z_B - z_A \rvert = 2\sqrt{2}$ $\boldsymbol{\lvert z_B - z_A \rvert = AB}$. **e**. $\text{mes}\left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ $z_B - z_A = 2 + 2i$ Soit θ un argument de $z_B - z_A$. $\begin{cases} \cos\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$	○ I étant le milieu de [AB], on a : $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$ b. <u>Nombres complexes, distances et angles Propriété</u> Soit A, B, C et D quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$ d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D. ○ $AB = \lvert z_B - z_A \rvert$ ○ $\text{mes}\left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg(z_B - z_A) + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ ○ $\text{mes}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ ○ $\text{mes}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			On en déduit que : $\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ $\arg(z_B - z_A) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ $\mathbf{mes}\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}}\right) = \mathbf{arg}(z_B - z_A) + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ **2.a**. $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \vec{u}}\right) + \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AC}}\right)$ $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = -\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}}\right) + \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AC}}\right)$ $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AC}}\right) - \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}}\right)$ $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \vec{u}}\right) + \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{CD}}\right)$ $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = -\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}}\right) + \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{CD}}\right)$ $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{CD}}\right) - \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}}\right)$ **b**. $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = \text{mes}\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AC}}\right) - \text{mes}\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}}\right)$ $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = \arg(z_C - z_A) - \arg(z_B - z_A) + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ $\mathbf{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = \mathbf{arg}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *20 minutes*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$). Soient A, B, C et D quatre points du plan d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que : $z_A = 7 - i$, $z_B = 3 + 3i$ $z_C = -1 - i$, $z_D = 3 - 5i$. 1. Détermine : $z_{\overrightarrow{AB}}$. 2. Calcule z_I(I milieu de [AD]). 3. Calcule AB. 4. Détermine mes$\left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right)$. 5. Détermine mes$\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right)$.	$\text{mes}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \text{mes}\left(\vec{u}, \overrightarrow{CD}\right) - \text{mes}\left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right)$ $\text{mes}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A) + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ $\boldsymbol{\text{mes}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})}$ <u>REPONSES ATTENDUES</u> **1**. $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$ $z_{\overrightarrow{AB}} = 3 + 3i - 7 + i$ $z_{\overrightarrow{AB}} = -4 + 4i$ **2**. $z_I = \frac{z_A + z_D}{2}$ $z_I = \frac{7 - i + 3 - 5i}{2}$ $z_I = \frac{10 - 6i}{2}$ $z_I = 5 - 3i$ **3**. $AB = \lvert z_B - z_A \rvert$ $AB = \lvert 3 + 3i - 7 + i \rvert$ $AB = \lvert -4 + 4i \rvert$ $AB = 4\sqrt{2}$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
	-Travail individuel	EXERCICE DE MAISON	**4**. $\text{mes}\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AB}}\right) = \arg(z_B - z_A) + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ $\text{mes}\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AB}}\right) = \arg(-4+4i) + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ $\text{mes}\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AB}}\right) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ **5**. $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}}\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_B}{z_C - z_B}\right) + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ $\frac{z_D - z_B}{z_C - z_B} = \frac{3-5i-3-3i}{-1-i-3-3i}$ $\frac{z_D - z_B}{z_C - z_B} = \frac{-8i}{-4-4i}$ $\frac{z_D - z_B}{z_C - z_B} = \frac{2i}{1+i}$ $\frac{z_D - z_B}{z_C - z_B} = \frac{2i(1-i)}{2}$ $\frac{z_D - z_B}{z_C - z_B} = 1+i$ $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}}\right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE3

THEME1 : GEOMETRIE DU PLAN

LEÇON9 : NOMBRES COMPLEXES ET GEOMETRIE DU PLAN

SEANCE : 2/8

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- les caractérisations complexes : • d'un cercle • d'une droite
Déterminer	- des lieux géométriques à l'aide des nombres complexes
Construire	- des lieux géométriques
Démontrer	- des lieux géométriques

PLAN DE LA SEANCE

c. Caractérisation d'ensembles de points

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
15 min *Développement* *25 min*	-Travail en groupes -Travail individuel	Correction des exercices de maison <u>ACTIVITE</u> Soient A et B deux points distincts du plan d'affixes respectives z_A et z_B. Détermine l'ensemble des points M d'affixe z du plan tels que : a. $\lvert z-z_A\rvert = \lvert z-z_B\rvert$ b. $\lvert z-z_A\rvert = r, r \in \mathbb{R}_+^*$ c. $\arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ d. $\arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **a**. $\lvert z-z_A\rvert = \lvert z-z_B\rvert \Leftrightarrow MA = MB$ L'ensemble des point M du plan tels que $MA = MB$ est la médiatrice du segment [AB]. L'ensemble des points M d'affixe z du plan tels que : $\lvert z-z_A\rvert = \lvert z-z_B\rvert$ est la médiatrice du segment [AB]. **b**. Posons : $z = x + iy$, $z_A = a + a'i$ avec x, y, a et a' des réels. $\lvert z-z_A\rvert = r \Leftrightarrow$ $\sqrt{(x-a)^2 + (y-a')^2} = r \Leftrightarrow$ $(x-a)^2 + (y-a')^2 = r^2$ L'ensemble des points M d'affixe z du plan tels que : $\lvert z-z_A\rvert = r, r \in \mathbb{R}_+^*$ est le cercle de centre A et de rayon r. **c**. $\arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right) = k\pi \Leftrightarrow$ mes $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = 0$ ou	c. <u>Caractérisation d'ensembles de points</u> Soient A et B deux points distincts du plan d'affixes respectives z_A et z_B. L'ensemble des points M d'affixe z du plan tels que : $\lvert z-z_A\rvert = \lvert z-z_B\rvert$ est la médiatrice du segment [AB]. $\lvert z-z_A\rvert = r, r \in \mathbb{R}_+^*$ est le cercle de centre A et de rayon r. $\arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ est la droite (AB) privée des points A et B. $\arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, est le cercle de diamètre [AB] privée des points A et B.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *15 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> On considère les points A$(1;1)$, B$(0;-2)$, C$(-1;-1)$ et D$(0;-1)$. Dans chaque cas, détermine l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant la condition donnée :	mes $\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)=\pi$ ou mes $\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)=-\pi$ A, B et C sont alignés. L'ensemble des points M d'affixe z du plan tels que : $\arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right)=k\pi, k\in\mathbb{Z}$ est la droite (AB) privée des points A et B. **d**. $\arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi \Leftrightarrow$ mes $\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ M appartient au cercle de diamètre [AB]. L'ensemble des points M d'affixe z du plan tels que : $\arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ est le cercle de diamètre [AB] privée des points A et B. <u>REPONSES ATTENDUES</u> **1**. $\lvert 2z+2+2i\rvert=4$ $2\lvert z+1+i\rvert=4$ $\lvert z-(-1-i)\rvert=2$ $\lvert z-z_C\rvert=2$ L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		1. $\|2z+2+2i\|=4$ 2. $\|z-1-i\|=1$ 3. $\|z-1-i\|=\|z+2i\|$ 4. $\|z+i\|=\|z+1+i\|$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> $\|2z+2+2i\|=4$ est le cercle de centre C et de rayon 2. **2**. $\|z-1-i\|=1$ $\|z-(1+i)\|=1$ $\|z-z_A\|=1$ L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $\|z-1-i\|=1$ est le cercle de centre A et de rayon 1. **3**. $\|z-1-i\|=\|z+2i\|$ $\|z-(1+i)\|=\|z-(-2i)\|$ $\|z-z_A\|=\|z-z_B\|$ L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $\|z-1-i\|=\|z+2i\|$ est la médiatrice du segment [AB] privée des points A et B. **4**. $\|z+i\|=\|z+1+i\|$ $\|z-z_D\|=\|z-z_C\|$ L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $\|z+i\|=\|z+1+i\|$ est la Médiatrice du segment [DC] privée des points D et C.	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE3

THEME1 : GEOMETRIE DU PLAN

LEÇON9 : NOMBRES COMPLEXES ET GEOMETRIE DU PLAN

SEANCE : 3/8

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- les caractérisations complexes : • des points alignés • des triangles particuliers
Déterminer	-la nature d'un triangle en utilisant les caractérisations complexes

PLAN DE LA SEANCE

2. Caractérisation et configurations
   a. Caractérisation complexe de points alignés
   b. Caractérisation complexe des triangles particuliers

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Développement *15 min*	-Travail en groupes	<u>ACTIVITE1</u> Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soient A, B et C trois points du plan tels que A≠B et C≠A d'affixes respectives z_A, z_B et z_C. 1. Justifie que : A, B et C sont alignés⇔ $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=k\pi,(k\in\mathbb{Z})$ 2. Déduis-en à quel ensemble appartient le apport $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **1**. Montrons que A, B et C sont alignés⇒ $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=k\pi,\ (k\in\mathbb{Z})$ Si A, B et C sont alignés alors mes$\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)=k\pi,(k\in\mathbb{Z})$. Or mes $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)=\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ Si A, B et C sont alignés alors $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=k\pi,(k\in\mathbb{Z})$. (1) Montrons que si $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=k\pi,(k\in\mathbb{Z})$ alors A, B et C sont alignés. $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=k\pi$ donc on a: mes $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)=k\pi,(k\in\mathbb{Z})$ donc A, B et C sont alignés (2). D'après (1) et (2) A, B et C sont alignés équivaut à $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=k\pi,(k\in\mathbb{Z})$ **2**. $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=k\pi,(k\in\mathbb{Z})$	2. <u>Caractérisation et configurations</u> a. <u>Caractérisation complexe de points alignés</u> <u>Propriété</u> Soient A, B et C trois points du plan tels que A≠B et C≠A d'affixes respectives z_A, z_B et z_C. A, B et C sont alignés équivaut à $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}^*$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *10 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soient A, B et C trois points d'affixes respectives a, b et c, telles que : $a = -3i$, $b = 1 - i$ et $c = 2 + i$. Démontre que les points A, B et C sont alignés.	Soit r le module de $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = r(\cos k\pi + i \sin k\pi)$ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = r\cos k\pi$ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm r$ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$ <u>REPONSE ATTENDUE</u> $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{c - a}{b - a}$ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{2 + i + 3i}{1 - i + 3i}$ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{2 + 4i}{1 + 2i}$ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{(2 + 4i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)}$ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{2 - 4i + 4i + 8}{1 + 4}$ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{10}{5}$ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = 2$ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$. Les points A, B et C sont alignés.	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Développement *15 min*	-Travail en groupes	ACTIVITE2 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soient A, B et C trois points du plan tels que A≠B et C≠A d'affixes respectives z_A, z_B et z_C. **1**. Dans chacun des cas suivants a. Détermine $\left\|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right\|$ b. Détermine $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)$ c. Déduis-en la forme exponentielle de $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ Cas1 : ABC est un triangle isocèle en A et mes$\hat{A}=\alpha$ $(\alpha\neq k\pi,k\in\mathbb{Z})$ Cas2 : ABC est un triangle équilatéral. **2**. ABC est un triangle rectangle en A. a. Détermine $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)$ b. Déduis à quel ensemble appartient le rapport $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ **C**. Si ABC est un triangle rectangle et isocèle en A, détermine la forme algébrique	REPONSES ATTENDUES **A**. **Cas1 :** ABC est un triangle isocèle en A et mes$\hat{A}=\alpha$ $(\alpha\neq k\pi,k\in\mathbb{Z})$ **a**. ABC est un triangle isocèle en A. $AB=AC\Leftrightarrow\|z_B-z_A\|=\|z_C-z_A\|$ $\left\|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right\|=\frac{\|z_C-z_A\|}{\|z_B-z_A\|}=1.$ **b**. $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\alpha+2k\pi,k\in\mathbb{Z}$ **c**. $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\alpha}$ **Cas2 :** ABC est un triangle équilatéral. **a**. $AB=AC\Leftrightarrow\|z_B-z_A\|=\|z_C-z_A\|$ $\left\|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right\|=\frac{\|z_C-z_A\|}{\|z_B-z_A\|}=1.$ **b**. $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}$ **c**. $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ **2**. **a**. $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}$	b. Caractérisation complexe des triangles particuliers Propriété Soient A, B et C trois points du plan tels que A≠B et C≠A d'affixes respectives z_A, z_B et z_C. ABC est un triangle isocèle en A équivaut à $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\theta}$ $(\theta\neq k\pi,k\in\mathbb{Z})$ ABC est un triangle équilatéral équivaut à $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ABC est un triangle rectangle en A équivaut à $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\alpha i$ $(\alpha\in\mathbb{R}^*)$ ABC est un triangle rectangle et isocèle en A équivaut à

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		de : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.	**b**. $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = r\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)$ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm ri, r \in \mathbb{R}^*$ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$ **C**. ABC est un triangle rectangle et isocèle en A donc $\left\|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right\| = 1$ et $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm i, (r = 1).$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$
Evaluation *15 min*	-Travail individuel	EXERCICE DE FIXATION Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. **1.** Soient A, B et C trois points d'affixes respectives : $-1 + i$, $2i$ et $2 - 2i$ Démontre que ABC est un triangle rectangle en A. **2.** Soient E, F et G trois points d'affixes respectives : $1 + i$, $3 + 2i$ et $-i$ Détermine la nature du triangle EFG.	REPONSES ATTENDUES **1**. $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{2 - 2i + 1 - i}{2i + 1 - i}$ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{3 - 3i}{1 + i}$ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{(3 - 3i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)}$ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{3 - 3i - 3i - 3}{1 + 1}$ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-6i}{2}$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE MAISON</u>	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -3i$ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$ ABC est un triangle rectangle en A. **2**. $\left\|\frac{z_F - z_E}{z_G - z_E}\right\| = \left\|\frac{-1-1-i}{3+2i-1-i}\right\|$ $\left\|\frac{z_F - z_E}{z_G - z_E}\right\| = \left\|\frac{-2-i}{2+i}\right\|$ $\left\|\frac{z_F - z_E}{z_G - z_E}\right\| = \|-1\| \times \left\|\frac{1+i}{2+i}\right\|$ $\left\|\frac{z_F - z_E}{z_G - z_E}\right\| = 1$ EFG est un triangle isocèle en E.	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE3

THEME1 : GEOMETRIE DU PLAN

LEÇON9 : NOMBRES COMPLEXES ET GEOMETRIE DU PLAN

SEANCE : 4/8

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- des points cocycliques
Déterminer	- la nature d'un triangle, d'un quadrilatère en utilisant les caractérisations complexes

PLAN DE LA SEANCE

c. Caractérisation complexe de l'angle droit
d. Caractérisation complexe de points cocycliques

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
10 min	-Travail en groupe	Correction des exercices de maison		
Développement *10 min*	-Travail en groupes	<u>ACTIVITE1</u> Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soient A, B, C et D quatre points du plan tels que A≠B et C≠ D d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D. **1**. Justifie que $(AB) \perp (CD)$ équivaut à $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **2**. Déduis-en à quel ensemble appartient le rapport $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$.	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **1**. Si $(AB) \perp (CD)$ alors $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ Si $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ alors $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ Donc $(AB) \perp (CD)$. Conclusion : $(AB) \perp (CD)$ équivaut à $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **2**. Soit r le module du rapport $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$. $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = r\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)$ $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \pm ri$ $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$.	c. <u>Caractérisation de l'angle droit</u> Soient A, B, C et D quatre points du plan tels que A≠B et C≠ D d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D. La droite (AB) est perpendiculaire à la droite (CD) équivaut à $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *10 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soient A, B et C trois points d'affixes respectives a, b et c, telles que : $a=3-i$, $b=2i$ et $c=2-2i$. Démontre que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.	<u>REPONSE ATTENDUE</u> $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{2-2i-3+i}{2i-3+i}$ $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{-1-i}{-3+3i}$ $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{(-1-i)(-3-3i)}{(-3+3i)(-3-3i)}$ $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{3+3i+3i-3}{9+9}$ $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{6i}{18}$ $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{1}{3}i$ $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in i\mathbb{R}^*$ Les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.	
Développement *15 min*	-Travail en groupes	<u>ACTIVITE2</u> Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soient A, B, C et D quatre points du plan tels que A≠B et C≠ D d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D. On rappelle que les points A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si A, B et C sont non alignés et	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **1**. Si $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CA}}\right)=\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CA}}\right)+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$ alors $\arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)=\arg\left(\frac{z_B-z_D}{z_A-z_D}\right)+k\,\pi,(k\in\mathbb{Z})$ $\arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)-\arg\left(\frac{z_B-z_D}{z_A-z_D}\right)=k\,\pi,(k\in\mathbb{Z})$ $(\boldsymbol{a})$	d. <u>Caractérisation complexe de points cocycliques</u> Soient A, B, C et D quatre points deux à deux distincts d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D. Les points A, B, C et D sont cocycliques équivaut à $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}:\frac{z_B-z_D}{z_A-z_D}\in\mathbb{R}^*$.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CA}}\right) = \text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CA}}\right) + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ 1. Justifie que $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CA}}\right) = \text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CA}}\right) + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ équivaut à $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) - \arg\left(\frac{z_B - z_D}{z_A - z_D}\right) = k\,\pi, (k \in \mathbb{Z})$ 2. Justifie que : $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} : \frac{z_B - z_D}{z_A - z_D}\right) = k\,\pi, (k \in \mathbb{Z})$ 3. Déduis à quel ensemble appartient le quotient $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} : \frac{z_B - z_D}{z_A - z_D}$	Si $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) - \arg\left(\frac{z_B - z_D}{z_A - z_D}\right) = k\,\pi, (k \in \mathbb{Z})$ alors $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CA}}\right) - \text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CA}}\right) = +k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CA}}\right) = \text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CA}}\right) + k\pi, (k \in \mathbb{Z})(\boldsymbol{b})$ D'après (a) et (b) $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CA}}\right) = \text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CA}}\right) + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ équivaut à $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) - \arg\left(\frac{z_B - z_D}{z_A - z_D}\right) = k\,\pi, (k \in \mathbb{Z})$ **2**. $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) - \arg\left(\frac{z_B - z_D}{z_A - z_D}\right) = k\,\pi, (k \in \mathbb{Z})$ équivaut à $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} : \frac{z_B - z_D}{z_A - z_D}\right) = k\,\pi, (k \in \mathbb{Z})$ **3**. $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} : \frac{z_B - z_D}{z_A - z_D} \in \mathbb{R}^*$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *10 min*	-Travail individuel	EXERCICE DE FIXATION Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives $z_A = 2i$, $z_B = 2-2i$, $z_C = 3-i$ et $z_D = 2+2i$. Justifie que les points A, B, C et D sont cocycliques.	REPONSE ATTENDUE Posons $q = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} : \frac{z_B - z_D}{z_A - z_D}$ $q = \frac{-1-i}{-3+3i} : \frac{4i}{-2}$ $q = \frac{1+i}{-3(1-i)} : -2i$ $q = \frac{1+i}{-3\times 2i(1-i)}$ $q = \frac{1+i}{-6i(1-i)}$ $q = \frac{1+i}{-6-6i}$ $q = \frac{1+i}{-6(1+i)}$ $q = -\frac{1}{6}$ $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} : \frac{z_B - z_D}{z_A - z_D} \in \mathbb{R}^*$ donc les points A, B, C et D sont cocycliques.	
	-Travail individuel	EXERCICE DE MAISON		

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE3

THEME1 : GEOMETRIE DU PLAN

LEÇON9 : NOMBRES COMPLEXES ET GEOMETRIE DU PLAN

SEANCE : 5/8

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

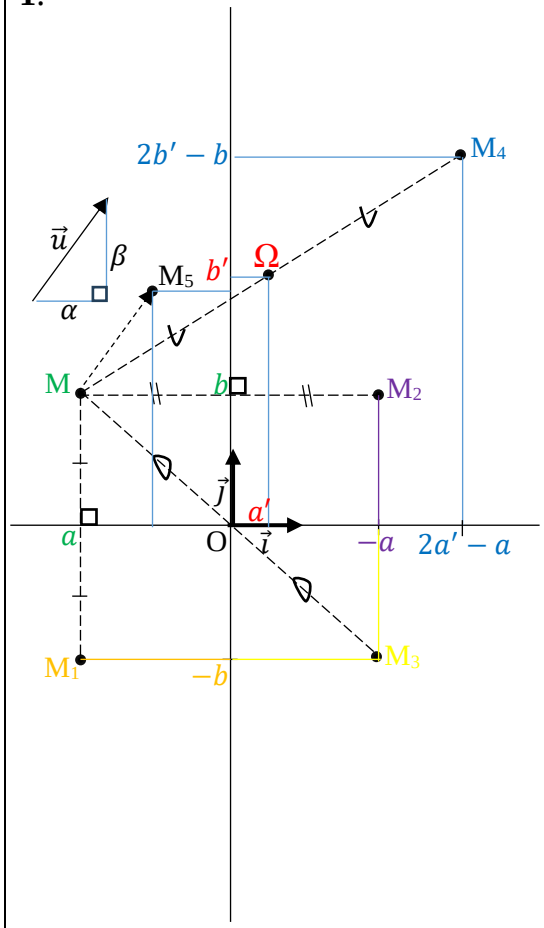
MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- les formules relatives à l'écriture complexe : • d'une translation • d'une symétrie centrale • de la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses • de la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées
Reconnaître	-l'écriture complexe d'une : • translation • symétrie centrale • symétrie orthogonale par rapport à l'un des axes de coordonnées
Déterminer	-l'écriture complexe d'une : • translation • symétrie centrale • symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses • symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées -les éléments caractéristiques, connaissant son écriture complexe, d'une : • translation • symétrie centrale • symétrie orthogonale par rapport à un axe du repère

PLAN DE LA SEANCE

II. NOMBRES COMPLEXES ET TRANSFORMATIONS DU PLAN

1. Ecritures complexes des symétries
   a. Symétrie par rapport aux axes d'un repère
   b. Symétrie par rapport à un point
2. Ecriture complexe d'une translation

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
15 min *Développement* *20 min*	-Travail en groupes -Travail en groupes	Correction des exercices de maison ACTIVITE Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soient a, a', b, b, α et β des nombres réels non nuls ; M et Ω des points d'affixes respectives z et ω ; $\vec{u}$ un vecteur non nul d'affixe m. On pose : ▪ $z = a + ib$; $\omega = a' + ib'$ et $m = \alpha + i\beta$ ▪ M_1 l'image de M par la symétrie orthogonale d'axe $(O,\vec{u})$. ▪ M_2 l'image de M par la symétrie orthogonale d'axe $(O,\vec{v})$. ▪ M_3 l'image de M par la symétrie centrale de centre O. ▪ M_4 l'image de M par la symétrie centrale de centre Ω. ▪ M_5 l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$.	REPONSES ATTENDUES **1.**  	II. NOMBRES COMPLEXES ET TRANSFORMATIONS DU PLAN Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. 1. Ecritures complexes des symétries M et M' sont deux points d'affixes respectives z et z'. a. Symétrie par rapport aux axes d'un repère Propriété M' est l'image de M par la *symétrie orthogonale d'axe* $(O,\vec{u})$ si et seulement si $\boldsymbol{z' = \bar{z}}$. On dit aussi que l'écriture complexe de la *symétrie orthogonale d'axe (OI)* est : $\boldsymbol{z' = \bar{z}}$ où $\overrightarrow{OI} = \vec{u}$ M' est l'image de M par la *symétrie orthogonale d'axe* $(O,\vec{v})$ si et seulement si

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		1. Place le point M et Ω dans le plan. 2. Construis le point M_1 et exprime son affixe z_1 en fonction de $\bar{z}$. 3. Construis le point M_2 et exprime son affixe z_2 en fonction de $\bar{z}$. 4. Construis le point M_3 et exprime son affixe z_3 en fonction de z. 5. Construis le point M_4 et exprime son affixe z_4 en fonction de z et ω. 6. Construis le point M_5 et exprime son affixe z_5 en fonction de z et m.	2. $z_1 = a - ib$ $z_1 = \bar{z}$ 3. $z_2 = -a + ib$ $z_2 = -(a - ib)$ $z_2 = -\bar{z}$ 4. $z_3 = -a - ib$ $z_3 = -(a + ib)$ $z_3 = -z$ 5. $z_4 = (2a' - a) + i(2b' - b)$ $z_4 = -(a + ib) + 2(a' + ib')$ $z_4 = -z + 2\omega$ 6. $z_5 = (a + \alpha) + i(b + \beta)$ $z_5 = (a + ib) + (\alpha + i\beta)$ $z_5 = z + m$	$\boldsymbol{z' = -\bar{z}}$. On dit aussi que l'écriture complexe de la *symétrie orthogonale d'axe (OJ)* est : $\boldsymbol{z' = -\bar{z}}$ où $\overrightarrow{OJ} = \vec{v}$ b. <u>Symétrie par rapport à un point Propriété</u> M' est l'image de M par la *symétrie centrale de centre O* si et seulement si $\boldsymbol{z' = -z}$. On dit aussi que l'écriture complexe de la symétrie centrale de centre O est : $z' = -z$. M' est l'image de M par la *symétrie centrale de centre* Ω d'affixe ω si et seulement si $\boldsymbol{z' = -z + 2\omega}$. On dit aussi que l'écriture complexe de la symétrie centrale de centre Ω d'affixe ω est : $\boldsymbol{z' = -z + 2\omega}$ 2. <u>Ecriture complexe d'une translation Propriété</u> M et M' sont deux points d'affixes respectives z et z'. L'écriture complexe d'une

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
				transformation du plan est celle d'une translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe b si et seulement si $\boldsymbol{z' = z + b}$.
Evaluation *20 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. M est un point du plan d'affixe $z = 1 + 2i$. Détermine l'affixe de l'image du point A par : a. la symétrie orthogonale d'axe $(O, \vec{u})$. b. la symétrie orthogonale d'axe $(O, \vec{v})$. c. la symétrie centrale de centre O. d. la symétrie centrale de centre Ω d'affixe $-1 - i$. e. la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $b = -2 - i$.	<u>REPONSES ATTENDUES</u> a. L'écriture complexe de la symétrie orthogonale d'axe (O, I) est : $z' = \bar{z}$. $z_1 = \bar{z}$ $z_1 = \overline{1 - 2i}$ $z_1 = 1 - 2i$ b. L'écriture complexe de la symétrie orthogonale d'axe (O, J) est : $z' = -\bar{z}$. $z_2 = -\bar{z}$ $z_2 = -\overline{1 - 2i}$ $z_2 = -(1 - 2i)$ $z_2 = -1 + 2i$ c. L'écriture complexe de la symétrie centrale de centre O est : $z' = -z$. $z_3 = -z$ $z_3 = -(1 + 2i)$ $z_3 = -1 + 2i$ d. L'écriture complexe de la symétrie centrale de centre Ω d'affixe ω est : $z' = -z + 2\omega$. $z_4 = -z + 2(-1 - i)$ $z_4 = -(1 + 2i) + 2(-1 - i)$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE MAISON</u>	$z_4 = -1 - 2i - 2 - 2i$ $z_4 = -3 - 4i$ e. L'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe b est : $z' = z + b$. $z_5 = z + (-2 - i)$ $z_5 = (1 + 2i) + (-2 - i)$ $z_5 = 1 + 2i - 2 - i$ $z_5 = -1 + i$	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE3

THEME1 : GEOMETRIE DU PLAN

LEÇON9 : NOMBRES COMPLEXES ET GEOMETRIE DU PLAN

SEANCE : 6/8

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- les formules relatives à l'écriture complexe : • d'une homothétie de centre Ω et de rapport λ • d'une rotation de centre Ω et d'angle θ
Reconnaître	-l'écriture complexe d'une : • homothétie • rotation
Déterminer	-l'écriture complexe d'une : • homothétie de centre Ω et de rapport k • rotation de centre Ω et d'angle θ -les éléments caractéristiques, connaissant son écriture complexe, d'une : • homothétie • rotation

PLAN DE LA SEANCE

3. Ecriture complexe d'une homothétie
4. Ecriture complexe d'une rotation

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
15 min	-Travail en groupe	Correction des exercices de maison		
Développement *10 min*	-Travail individuel	<u>ACTIVITE1</u> Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit M'(z') l'image de M(z) par l'homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport k, $(k \in \mathbb{R}^*)$. 1. Détermine l'affixe de chacun des vecteurs $\overrightarrow{\Omega M'}$ et $k\overrightarrow{\Omega M}$. 2. Justifie que : $z' - \omega = k(z - \omega)$. 3. Déduis-en l'expression de z' en fonction de z. 4. Déduis-en l'expression de z' en fonction de z lorsque le centre de l'homothétie est le point O.	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **1**. $z_{\overrightarrow{\Omega M'}} = z_{M'} - z_\Omega$ $z_{\overrightarrow{\Omega M'}} = z' - \omega$ $z_{k\overrightarrow{\Omega M}} = k z_{\overrightarrow{\Omega M}}$ $z_{k\overrightarrow{\Omega M}} = k(z_M - z_\Omega)$ $z_{k\overrightarrow{\Omega M}} = k(z - \omega)$. **2**. M'(z') l'image de M(z) par l'homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport $k, (k \in \mathbb{R}^*)$ donc $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ $z_{\overrightarrow{\Omega M'}} = z_{k\overrightarrow{\Omega M}}$ $z' - \omega = k(z - \omega)$. **3**. $z' - \omega = k(z - \omega)$ $z' = k(z - \omega) + \omega$ $z' = kz - k\omega + \omega$ $z' = kz + (1 - k)\omega$. **4**. Si le centre de l'homothétie est le point O alors $\omega = 0$. On obtient : $z' = kz$.	3. <u>Ecriture complexe d'une homothétie Propriété</u> M et M'sont deux points du plan d'affixes respectives z et z' et k un nombre réel non nul. L'écriture complexe d'une transformation du plan est celle d'une homothétie de centre O et de rapport k si et seulement si $\boldsymbol{z' = kz}$. L'écriture complexe d'une transformation du plan est celle d'une homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport k si et seulement si $\boldsymbol{z' = kz + b}$ où b est un nombre complexe tel que : $\boldsymbol{b = \omega - k\omega}$.
Evaluation *10 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. M et M'sont deux points du plan d'affixes respectives z et z'	<u>REPONSES ATTENDUES</u> $z' = 7z + 3 - i$ f est sous la forme $z' = kz + b$ avec $k = 7$ et $b = 3 - i$ donc f est une homothétie.	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Développement *15 min*	-Travail individuel	Soit *f* la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M'd'affixe z' tel que : $z' = 7z + 3 - i$. Justifie que *f* est une homothétie puis précise son rapport et son centre. <u>ACTIVITE2</u> Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit M'(z') l'image de M(z) par la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle orienté θ ($\theta \in \mathbb{R}$) 1. Calcule les distances ΩM et ΩM'. 2. Exprime $\arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right)$ en fonction de θ. 3. Justifie que $\frac{z'-\omega}{z-\omega} = e^{i\theta}$ 4. Déduis que :	Le rapport de l'homothétie f est : $k = 7$. On a : $b = (1-k)\omega$ On en déduit que : $\omega = \frac{b}{1-k}$ $\omega = \frac{3-i}{1-7}$ $\omega = \frac{3-i}{-6}$ $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}i$ *f* est l'homothétie de rapport 7 et de centre Ω d'affixe ω avec $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}i$. <u>REPONSES ATTENDUES</u> **1**. ΩM= $\lvert z-\omega \rvert$ ΩM'= $\lvert z'-\omega \rvert$ **2**. M'est l'image de M par la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle orienté θ donc ΩM= ΩM' et mes $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}\right) = \theta$. mes $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}\right) = \arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ $\arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	4. <u>Ecriture complexe d'une rotation</u> <u>Propriété</u> Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. M et M'sont deux points du plan d'affixes respectives z et z'. L'écriture complexe d'une transformation du plan est celle d'une rotation de centre

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		$z' = e^{i\theta}z + (1 - e^{i\theta})\omega$ 5. Déduis-en l'écriture complexe de la rotation de centre le point O et d'angle orienté θ.	**3.** $\lvert z - \omega\rvert = \lvert z' - \omega\rvert$ donc $\left\lvert\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right\rvert = 1$ $\frac{z' - \omega}{z - \omega} = \left\lvert\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right\rvert \times e^{i\theta}$ $\frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta}$ **4.** $\frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta}$ équivaut à $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ $z' = e^{i\theta}z - e^{i\theta}\,\omega + \omega$ $z' = e^{i\theta}z + (1 - e^{i\theta})\omega$ **5.** $z' = e^{i\theta}z$	O et d'angle orienté de mesure θ si et seulement si $\boldsymbol{z' = e^{i\theta}z}$. L'écriture complexe d'une transformation du plan est celle d'une rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle orienté de mesure θ si et seulement si $\boldsymbol{z' = e^{i\theta}z + b}$ où b est un nombre complexe tel que : $\boldsymbol{b = \omega - e^{i\theta}\omega}$.
Evaluation *10 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. M et M'sont deux points du plan d'affixes respectives z et z'. Soit *f* la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M'd'affixe z' tel que : $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)z + 3i$ Justifie que *f* est une rotation puis précise son angle et son centre.	<u>REPONSES ATTENDUES</u> $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)z + 3i$ $z' = e^{i\frac{\pi}{6}}z + 3i$ *f* est sous la forme $z' = e^{i\theta}z + b$ avec $b = 3i$ donc *f* est une rotation. $b = (1 - e^{i\frac{\pi}{6}})\omega$. On en déduit que : $\omega = \frac{b}{1 - e^{i\frac{\pi}{6}}}$ $\omega = \frac{3i}{1 - e^{i\frac{\pi}{6}}}$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE MAISON</u>	$\omega = \dfrac{3i}{1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)}$ $\omega = \dfrac{3i}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i}$ $\omega = \dfrac{6i}{\left(2-\sqrt{3}\right)+i}$ $\omega = \dfrac{6i\left[\left(2-\sqrt{3}\right)-i\right]}{\left(2-\sqrt{3}\right)^2+1}$ $\omega = \dfrac{6+6\left(2-\sqrt{3}\right)i}{4-4\sqrt{3}+3+1}$ $\omega = \dfrac{6+6\left(2-\sqrt{3}\right)i}{8-4\sqrt{3}}$ $\omega = \dfrac{3+3\left(2-\sqrt{3}\right)i}{4-2\sqrt{3}}$ $\omega = \dfrac{3}{4-2\sqrt{3}}+\dfrac{3\left(2-\sqrt{3}\right)}{4-2\sqrt{3}}i$ $\omega = \dfrac{3\left(2+\sqrt{3}\right)}{2}+\dfrac{3}{2}i$	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE3

THEME1 : GEOMETRIE DU PLAN

LEÇON9 : NOMBRES COMPLEXES ET GEOMETRIE DU PLAN

SEANCE : 7/8

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la définition d'une similitude directe - les éléments caractéristiques d'une similitude directe - les formules relatives à l'écriture complexe : • d'une similitude directe
Reconnaître	-l'écriture complexe d'une : • similitude directe
Déterminer	-l'écriture complexe d'une : • similitude directe -les éléments caractéristiques, connaissant son écriture complexe, d'une : • similitude directe

PLAN DE LA SEANCE

III. SIMILITUDES DIRECTES DU PLAN
   1. Définition et propriétés
   2. Détermination d'une similitude directe

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
20 min *Développement* *25 min*	-Travail en groupe -Travail individuel	Correction des exercices de maison <u>ACTIVITE</u> Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On désigne par Ω le point d'affixe ω. Soit r la rotation de centre Ω et d'angle orienté θ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport k , $k \in \mathbb{R}^*$. 1. a. Donne l'écriture complexe de r. b. Donne l'écriture complexe de h. 2. a. Justifie que l'écriture complexe de hor est : $z \mapsto ke^{i\theta}(z-\omega)+\omega$. b. Déduis-en que l'écriture complexe de hor est sous la forme : $z' = az + b$ où a et b sont des nombres complexes à déterminer.	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **1**. **a**. L'écriture complexe de r est : $z' = e^{i\theta}z - e^{i\theta}\omega + \omega$. **b**. L'écriture complexe de h est : $z' = kz - k\omega + \omega$. **2**. **a**. $(hor)(z) = h[r(z)]$ $(hor)(z) = kr(z) - k\omega + \omega$ $(hor)(z) = k\left[e^{i\theta}z - e^{i\theta}\omega + \omega\right] - k\omega + \omega$ $(hor)(z) = ke^{i\theta}z - ke^{i\theta}\omega + k\omega - k\omega + \omega$ $(hor)(z) = ke^{i\theta}z - ke^{i\theta}\omega + \omega$ $(hor)(z) = ke^{i\theta}(z-\omega) + \omega$ L'écriture complexe de hor est : $z' = ke^{i\theta}(z-\omega) + \omega$ **b**. $z' = ke^{i\theta}(z-\omega) + \omega$ L'écriture complexe de hor est sous la forme : $z' = az + b$ où $a = ke^{i\theta}$ et $b = \omega - ke^{i\theta}\omega$.	III. <u>SIMILITUDES DIRECTES DU PLAN</u> 1. <u>Définition et propriétés</u> a. <u>Définition</u> Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. M et M'sont deux points du plan et k un nombre réel strictement positif. On appelle similitude de rapport k, toute transformation du plan, telle que pour tous points M et N d'images respectives M' et N', M'N'= kMN. On appelle similitude directe de rapport k toute similitude qui conserve l'orientation et les angles. b. <u>Propriétés</u> <u>Propriété1</u> Toute similitude directe de rapport k est : ○ soit une translation ○ soit une rotation

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
				○ soit une homothétie ○ soit la composée d'une rotation et d'une homothétie de rapport k. <u>Propriété2</u> Toute similitude directe de rapport différent de 1 admet un point invariant appelé centre de la similitude. <u>Propriété3</u> Soit S une similitude de rapport k différent de 1 et de centre Ω. Il existe une unique homothétie H de rapport k et de centre Ω et une unique rotation R de centre Ω et d'angle θ telle que : S=HoR= RoH. L'angle de la rotation est appelé angle de la similitude. 2. <u>Détermination d'une similitude directe</u> <u>Propriété1</u> Si S est une similitude plane directe, alors il existe un unique couple $(a; b)$ appartenant à $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, tel que l'écriture complexe de S soit $z' = az + b$.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
				L'application du plan dans lui-même associé à l'application complexe qui à tout point M d'affixe z associe le pont M' d'affixe z' telle que $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ est une similitude plane directe. <u>Propriété2</u> Soit $z' = az + b$ l'écriture complexe d'une similitude directe qui n'est pas une translation. ○ son centre est le point Ω d'affixe ω tel que $\omega = a\omega + b$ ou $\omega = \frac{b}{1-a}$ ○ son rapport est : $k = \lvert a \rvert$. ○ son angle est égal à $\mathrm{Arg}(a)$. <u>Détermination d'une transformation du plan dont on connaît l'écriture complexe.</u> (Voir tableau annexe)

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *10 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Détermine les éléments caractéristiques de la similitude directe d'écriture complexe : $z' = \left(1 + i\sqrt{3}\right)z + \sqrt{3}(2 - i)$.	<u>REPONSES ATTENDUES</u> $z' = \left(1 + i\sqrt{3}\right)z + \sqrt{3}(2 - i)$. $z' = az + b$ avec $a = 1 + i\sqrt{3}$ et $b = \sqrt{3}(2 - i)$. $\boldsymbol{k = \lvert a \rvert = 2.}$ $\theta = Arga$ $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3}}$. $\omega = \frac{b}{1 - a}$ $\omega = \frac{\sqrt{3}(2 - i)}{1 - \left(1 + i\sqrt{3}\right)}$ $\omega = \frac{\sqrt{3}(2 - i)}{-i\sqrt{3}}$ $\omega = \frac{\sqrt{3}(2 - i)\sqrt{3}i}{3}$ $\omega = \frac{3(2 - i)i}{3}$ $\omega = (2 - i)i$ $\boldsymbol{\omega = 1 + 2i.}$	
	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE MAISON</u>		

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE3

THEME1 : GEOMETRIE DU PLAN

LEÇON9 : NOMBRES COMPLEXES ET GEOMETRIE DU PLAN

SEANCE : 8/8

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Déterminer	-l'image d'un point, d'un segment, d'une droite, d'un cercle, d'un angle, par une transformation dont on connait l'écriture complexe
Construire	- l'image d'un point par une similitude directe
Démontrer	- l'image d'un point par une similitude directe

PLAN DE LA SEANCE

3. Images de figures simples par une similitude directe

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
20 min *Développement* *20 min*	-Travail en groupe -Travail individuel	Correction des exercices de maison <u>ACTIVITE</u> Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit S une similitude directe de rapport k qui n'est pas une translation. 1. Sachant qu'on peut écrire S= hor ou S= roh où h est une homothétie et r une rotation, montre que : a. l'image d'une droite par une similitude S est une droite. b. l'image d'un segment [AB] par une similitude S est un segment [A'B'] tel que : $A'B' = kAB$. c. l'image d'un cercle de rayon r par la similitude S est un cercle de rayon kr. d. Que la similitude S conserve le parallélisme, l'orthogonalité, le contacte et le barycentre. 2. Soit S la similitude directe d'écriture complexe :	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **1**. **a**. S= roh . L'image d'une droite par une homothétie est une droite et . L'image d'une droite par une rotation est une droite donc l'image d'une droite par une similitude S est une droite. **b**. S= roh L'image d'un segment [AB] par homothétie de rapport k est un segment [A'B'] tel que : $A'B' = kAB$. Or la rotation conserve la distance donc l'image d'un segment [AB] par une similitude S est un segment [A'B'] tel que : $A'B' = kAB$. **c**. S= roh L'image d'un cercle de rayon r par homothétie de rapport k est un cercle de rayon kr. Or la rotation conserve la distance donc l'image d'un cercle de rayon r par la similitude S est un cercle de rayon kr .	3. <u>Images de figures simples par une similitude directe</u> <u>Propriété1</u> Par une similitude directe, l'image : ▪ d'un segment est un segment, ▪ d'une demi-droite est une demi droite, ▪ d'une droite est une droite, ▪ d'un cercle est un cercle, <u>Propriété2</u> Toute similitude directe de rapport k conserve : ▪ le parallélisme, ▪ l'orthogonalité, ▪ le contacte, ▪ le barycentre.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		$z' = (1+i)z + i$ et (D) la droite d'équation : $x + y - 1 = 0$. Détermine une équation de la droite (D') image de la droite (D) par S.	**d**. S= roh L'homothétie et la rotation conservent le parallélisme, l'orthogonalité, le contacte et le barycentre donc la similitude S conserve le parallélisme, l'orthogonalité, le contacte et le barycentre. **2**. $z = x + iy$ $x + y - 1 = 0$ donc $y = 1 - x$ $z = x + (1-x)i$ $z' = (1+i)z + i$ $x' + iy' = (1+i)[x + (1-x)i] + i$ $x' + iy' = (1+i)(x + i - xi) + i$ $x' + iy' = x + i - xi + ix - 1 + x + i$ $x' + iy' = 2x + 2i$ $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2 \end{cases}$ $(D'): y = 2.$	
Evaluation *15 min*	-Travail individuel	EXERCICE DE FIXATION Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. 1. Soit S la similitude directe d'écriture complexe : $z' = -2iz$. Soit (D) la droite d'équation :	REPONSES ATTENDUES **1**. $z = x + iy$ $x - y = 0 \Leftrightarrow y = x$ $z = x + ix$ $z' = -2iz$ $z' = -2i(x + ix)$ $z' = 2x - 2ix$ $x' + y' = 2x - 2ix$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		$x - y = 0$. Détermine une équation de la droite (D'), image de (D) par S. 2. Soit S' la similitude directe d'écriture complexe : $z' = 2(1 + i\sqrt{3})z + 3$. Soit (C) le cercle de centre O et de rayon $\frac{5}{4}$. Détermine une équation de (C') image de (C) par S'.	$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = -2x \end{cases} \Leftrightarrow y' = -x'$ (D'): $y = -x$. **2.** $k = \lvert 2(1 + i\sqrt{3}) \rvert$ $k = 4$ Soit ω l'affixe du centre du cercle (C'). On a : $\omega = 2(1 + i\sqrt{3}) \times 0 + 3$ $\omega = 3$ Soit r le rayon du cercle (C'). $r = 4 \times \frac{5}{4}$ $r = 5$ (C') est un cercle de rayon 5 et de centre le point Ω d'affixe $\omega = 3$.	

BIBLIOGRAPHIE

Programmes éducatifs et guides d'exécution Mathématiques $T^{LE}D$

Progressions annuelles

Mon livre de mathématiques $T^{LE}D$ Collection PYRAMIDE

Mon livre de mathématiques $T^{LE}D$ Collection CIAM/EDICEF

Les cahiers de la réussite T^{LE} D Vallesse

Mon cahier d'habiletés Mathématiques T^{LE} D JD Editions

WWW.monecoleàlamaison.ci

https://physiques-et-maths.fr

Annexe

❖ ***Détermination d'une transformation du plan dont on connaît l'écriture complexe***.

Soit f une transformation du plan d'écriture complexe : $z' = az + b$, $(a \in \mathbb{C}^* ; b \in \mathbb{C})$

		Nature et éléments caractéristiques de f
$a \in \mathbb{R}^*$	$a = 1$	f est la translation de vecteur $\vec{\imath}$ d'affixe b
	$a \neq 1$	f est l'homothétie de centre le point Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et de rapport a.
$a \in \mathbb{C}$ et $a \notin \mathbb{R}$	$\lvert a \rvert = 1$	f est la rotation d'angle $\mathrm{Arg}(a)$ et de centre le point Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$.
	$\lvert a \rvert \neq 1$	f est la similitude directe de rapport $\lvert a \rvert$, d'angle $\mathrm{Arg}(a)$ et de centre le point Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$.

FICHE DE LEÇON

SUITES NUMERIQUES

TLE D

Rédigée par :

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON10 : SUITES NUMERIQUES

NOMBRE DES SEANCES : 7

DUREE D'UNE SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- La définition d'une suite : o Majorée o Minorée o Bornée - La définition d'une suite : o Convergente o Divergente - Les propriétés sur les suites monotones : o Toute suite croissante et majorée converge o Toute suite décroissante et minorée converge - Les propriétés sur la convergence des suites numériques o Si (u_n) est une suite convergente vers a et f une fonction continue en a alors la suite $v_n = f(u_n)$ converge vers $f(a)$. o les propriétés des suites récurrentes définies par une relation du type $U_{n+1} = f(U_n)$ - les propriétés sur la divergence des suites numériques o Toute suite croissante et non majorée a pour limite $+\infty$ o Toute suite décroissante et non minorée a pour limite $-\infty$ - les propriétés sur la convergence : o des suites géométriques

	○ des suites arithmétiques ○ des suites du type n^{α} - les théorèmes de comparaison - les propriétés sur les limites et comportements asymptotiques comparés des suites $(\ln n)$, (a^n), a > 0 et (n^{α}), α réel
Savoir	- mener un raisonnement par récurrence
Reconnaître	- une suite géométrique convergente ou divergente - une suite du type n^{α} convergente ou divergente
Démontrer	- qu'une suite est monotone - qu'une suite est majorée et/ou minorée - qu'une suite est convergente ou divergente
Conjecturer	- le comportement d'une suite récurrente
Déterminer	- la plus petite valeur de n telle que : $u_n \geq 10^p, p \in \mathbb{N}$. - la plus petite valeur de n telle que : $\lvert u_n - l \rvert \leq 10^p, p \in \mathbb{N}$ - la limite d'une suite
Traduire	- une situation donnée à l'aide d'une suite : ○ arithmétique ○ géométrique ○ arithmético-géométrique
Traiter une situation	- faisant appel aux suites numériques

SITUATION D'APPRENTISSANGE

Dans le souci d'avoir assez de revenus pour l'organisation des festivités de fin d'année, le président de la promotion terminale veut effectuer le placement de la somme de 300.000FCFA qu'ils ont dabs leur caisse au premier Janvier 2026.
Il se rend dans une structure bancaire et le banquier lui propose deux options :
Option1 : le capital placé est augmenté de 2500 FCFA à intérêt simple par mois
Option2 : le capital placé augmentera de 5% de mois en mois pendant la durée du placement
Le budget de la manifestation étant de 400.000FCFA, le président voudrait connaître l'option la plus avantageuse pour obtenir rapidement cette somme avant la date de la manifestation fixée au début du mois d'août 2026.
Le major de cette promotion affirme que le problème peut être résolu à l'aide des suites particulières.
Forts de ces informations et voulant aider leur président, les élèves de la promotion terminale décident de faire des recherches sur les suites arithmétiques et géométriques.

PLAN DE LA LEÇON

1. Démonstration par récurrence
2. Suites minorée, majorée, bornée
3. Suites monotones
   a. Définition
   b. Sens de variation d'une suite arithmétique
   c. Sens de variation d'une suite géométrique
4. Suites convergentes, suites divergentes
   Définitions
   Remarques
5. Convergence d'une suite monotone
   Propriétés
6. Limites des suites définies par une formule explicite
7. Convergence de suite géométrique et de suite arithmétique
   a. Convergence d'une suite arithmétique
   b. Convergence d'une suite géométrique
   c. Convergence d'une suite du type $u_n = n^\alpha$
8. Limites des suites récurrentes
   Propriétés
9. Croissance comparée des suites ($\ln n$), (a^n), a > 0 et (n^α), α réel
10. Propriétés de comparaison
    Propriétés
    Propriété1
    Propriété2 (Théorème des gendarmes)
        1ère forme
        2e forme

HABILETES, CONTENUS ET PLANS PAR SEANCE

SEANCE1

HABILETES	CONTENUS
Savoir	- mener un raisonnement par récurrence

PLAN DE LA SEANCE1

1. Démonstration par récurrence

SEANCE2

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la définition d'une suite : o Majorée o Minorée o Bornée
Démontrer	- qu'une suite est majorée et/ou minorée

PLAN DE LA SEANCE2

2. Suites minorées, majorées, bornées

SEANCE3

HABILETES	CONTENUS
Démontrer	- qu'une suite est monotone

PLAN DE LA SEANCE3

3. Suites monotones
   a. Définition
   b. Sens de variation d'une suite arithmétique
   c. Sens de variation d'une suite géométrique

SEANCE4

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- La définition d'une suite : o Convergente o Divergente - Les propriétés sur les suites monotones : o Toute suite croissante et majorée converge o Toute suite décroissante et minorée converge - les propriétés sur la divergence des suites numériques o Toute suite croissante et non majorée a pour limite $+\infty$ o Toute suite décroissante et non minorée a pour limite $-\infty$
Démontrer	- qu'une suite est convergente ou divergente

PLAN DE LA SEANCE4

4. Suites convergentes, Suites divergentes
   Définitions
   Remarques
5. Convergence d'une suite monotone
   Propriétés

SEANCE5

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- les propriétés sur la convergence : o des suites géométriques o des suites arithmétiques o des suites du type n^{α}
Reconnaître	- une suite géométrique convergente ou divergente - une suite du type n^{α} convergente ou divergente
Déterminer	- la limite d'une suite

PLAN DE LA SEANCE5

6. Limites des suites définies par une formule explicite
7. Convergence de suite géométrique et de suite arithmétique
   a. Convergence d'une suite arithmétique
   b. Convergence d'une suite géométrique
   c. Convergence d'une suite du type $u_n = n^{\alpha}$

SEANCE6

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- Les propriétés sur la convergence des suites numériques o Si (u_n) est une suite convergente vers a et f une fonction continue en a alors la suite $v_n = f(u_n)$ converge vers $f(a)$. o les propriétés des suites récurrentes définies par une relation du type $U_{n+1} = f(U_n)$ - les propriétés sur les limites et comportements asymptotiques comparés des suites $(\ln n)$, (a^n), a > 0 et (n^{α}), α réel
Conjecturer	- le comportement d'une suite récurrente

PLAN DE LA SEANCE6

8. Limites des suites récurrentes
   Propriétés
9. Croissance comparée des suites $(\ln n)$, (a^n), a > 0 et (n^{α}), α réel

SEANCE7

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- les théorèmes de comparaison

PLAN DE LA SEANCE7

10. Propriétés de comparaison
    Propriétés
    Propriété1
    Propriété2(Théorème des gendarmes : 1ERE Forme)
    (Théorème des gendarmes : 2ERE Forme)

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON10 : SUITES NUMERIQUES

SEANCE : 1/7

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Savoir	- mener un raisonnement par récurrence

PLAN DE LA SEANCE

1. Démonstration par récurrence

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Présentation *5 min*	-Lecture -Travail collectif	-Donne l'énoncé de la situation d'apprentissage aux apprenants. -Demande aux apprenants de faire une lecture silencieuse de la situation. -Demande à un apprenant de lire à haute voix l'énoncé de la situation. -Lis l'énoncé de la situation d'apprentissage à haute voix. **Question pour faire ressortir les tâches :** Qu'est-ce que les élèves décident de faire ?	-Les apprenants lisent silencieusement l'énoncé de la situation. -Un apprenant lis à haute voix l'énoncé de la situation. -Les apprenants écoutent Attentivement. REPONSE ATTENDUE Ils décident de faire des recherches sur les suites arithmétiques et géométriques.	
Développement *20 min*	-Travail individuel	ACTIVITE Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$ 1. Vérifie que $u_0 \leq 2$. 2. En supposant que pour un nombre entier naturel $k \geq 0$, $u_k \leq 2$, démontre que $u_{k+1} \leq 2$. 3. Déduis-en que pour tout nombre entier naturel n, $u_n \leq 2$.	REPONSES ATTENDUES **1**. $u_0 = 1$ $1 \leq 2$ donc $u_0 \leq 2$. **2**. Supposons que pour un nombre entier naturel $k \geq 0$, $u_k \leq 2$. $\frac{1}{2}u_k \leq \frac{1}{2} \times 2$ $\frac{1}{2}u_k \leq 1$ $\frac{1}{2}u_k + 1 \leq 1 + 1$ $u_{k+1} \leq 2$	1. Démonstration par récurrence Pour montrer qu'une propriété $P(n)$ dépendant d'un enter naturel n est vraie pour tout $n \geq n_0$ (n_0 entier naturel donné), on procède en trois étapes : ▪ On vérifie que la propriété est vraie quand $n = n_0$. ▪ On suppose que la propriété est vraie pour un entier $k \geq n_0$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *25 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> 1. On considère la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$ Démontre par récurrence que pour tout nombre entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 2$. 2. On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 3u_n + 4, pour\ n > 0 \end{cases}$ Démontre par récurrence que pour tout nombre entier naturel, $u_n = 3^n - 2$. 3. Démontre par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$	**3**. $u_0 \leq 2$ et pour un nombre entier naturel $k \geq 0$, si $u_k \leq 2$ alors $u_{k+1} \leq 2$. On en déduit que pour tout nombre entier naturel n, $u_n \leq 2$. <u>REPONSES ATTENDUES</u> **1**. Soit $P(n)$ la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 2$. $u_0 = 1$ $0 \leq 1 \leq 2$ donc $0 \leq u_0 \leq 2$. $P(0)$ est vraie. Pour un nombre entier naturel $k \geq 0$, supposons que $P(k)$ est vraie ; c'est-à-dire : $0 \leq u_k \leq 2$. Montrons que $P(k+1)$ est vraie. $0 \leq u_k \leq 2$ $0 + 2 \leq u_k + 2 \leq 2 + 2$ $2 \leq u_k + 2 \leq 4$ $\sqrt{2} \leq \sqrt{u_k + 2} \leq \sqrt{4}$ $\sqrt{2} \leq \sqrt{u_k + 2} \leq 2$ $0 \leq u_{k+1} \leq 2$ $P(k+1)$ est vraie. Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 2$. **2**. Soit $P(n)$ la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^n - 2$.	et on démontre qu'elle est vraie pour l'entier suivant $k+1$. ▪ On conclut que la propriété est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			$u_0 = -1 = 3^0 - 2.$ $P(0)$ est vraie. Pour un nombre entier naturel $k \geq 0$, supposons que $P(k)$ est vraie ; c'est-à-dire : $u_k = 3^k - 2.$ Montrons que $P(k+1)$ est vraie. $u_k = 3^k - 2$ $u_{k+1} = 3u_k + 4$ $u_{k+1} = 3(3^k - 2) + 4$ $u_{k+1} = 3^{k+1} - 6 + 4$ $u_{k+1} = 3^{k+1} - 2$ $P(k+1)$ est vraie. Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^n - 2.$ **3**. Soit $P(n)$ la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}^*,$ $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ $1 + 2 = \frac{2(2+1)}{2}$ $P(2)$ est vraie. Pour un nombre entier naturel $k \geq 2$, supposons que $P(k)$ est vraie ; c'est-à-dire : $1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE MAISON</u>	Montrons que $P(k+1)$ est vraie. $1+2+3+\cdots+k+(k+1)=$ $\frac{k(k+1)}{2}+k+1=$ $\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=$ $\frac{(k+1)(k+2)}{2}=$ $\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$ $P(k+1)$ est vraie. Conclusion : pour tout entier naturel $n \geq 1$, $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON10 : SUITES NUMERIQUES

SEANCE : 2/7

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la définition d'une suite : o Majorée o Minorée o Bornée
Démontrer	- qu'une suite est majorée et/ou minorée

PLAN DE LA SEANCE

2. Suites minorée, majorée, bornée

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
15 min *Développement* *20 min*	-Travail en groupe -Travail individuel	Correction des exercices de maison <u>ACTIVITE</u> 1. Soit la suite numérique (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{2}{n+1}$ Démontre que pour tout nombre entier naturel $n \geq 1$, $u_n \leq 1$. 2. Soit la suite numérique (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{2}{n} + 3$ Démontre que pour tout nombre entier naturel $n \geq 1$, $v_n \geq 3$. 3. Soit la suite numérique (w_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} w_0 = 2 \\ w_{n+1} = \sqrt{1 + w_n} \end{cases}$ Démontre que pour tout nombre entier naturel n, $0 \leq w_n \leq 2$.	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **1**. $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 1$ $n + 1 \geq 2$ $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$ $\frac{2}{n+1} \leq 1$ Pour tout nombre entier naturel $n \geq 1$, $u_n \leq 1$. **2**. $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 1$, $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$ $0 \leq \frac{2}{n}$ $3 \leq \frac{2}{n} + 3$ $3 \leq v_n$ **3**. Soit $P(n)$ la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq w_n \leq 2$. $w_0 = 2$ $2 \leq 2$ donc $w_0 \leq 2$. $P(0)$ est vraie. Pour un nombre entier naturel $k \geq 0$, supposons que $P(k)$ est vraie ; c'est-à-dire : $0 \leq w_k \leq 2$. Montrons que $P(k+1)$ est vraie.	2. <u>Suites minorée, majorée, bornée</u> On dit qu'une suite numérique (u_n) définie sur une partie E de $\mathbb{N}$ est : ○ ***Majorée***, s'il existe un nombre réel M tel que : $\forall n \in E, u_n \leq M$. ○ ***Minorée***, s'il existe un nombre réel m tel que : $\forall n \in E, u_n \geq m$. ○ ***Bornée***, s'il elle est à la fois majorée et minorée. ○ ***Positive***, si elle est minorée par 0. ○ ***Négative***, si elle est majorée par 0. <u>Méthode</u> Pour démontrer qu'une suite (u_n) est bornée, on peut utiliser l'un des procédés suivants : - Encadrer le terme général de la suite par deux nombres réels.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			$0 \leq w_k \leq 2$ $1 \leq w_k + 1 \leq 3$ $1 \leq \sqrt{w_k + 1} \leq \sqrt{3}$ $1 \leq u_{k+1} \leq \sqrt{3}$ $0 \leq u_{k+1} \leq 2$ $P(k+1)$ est vraie. Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq w_n \leq 2$.	▪ Etudier la fonction f, lorsque la suite est du type : $u_n = f(n)$. ▪ Faire un raisonnement par récurrence.
		Pour tout nombre entier naturel $n \geq 1$, $u_n \leq 1$. On dit que la suite (u_n) est ***majorée*** *par* 1. *Pour tout nombre entier naturel $n \geq 1$, $v_n \geq 3$. On dit que la suite (v_n) est* ***minorée*** *par* 3. *Pour tout nombre entier naturel n, $0 \leq w_n \leq 2$. La suite (w_n) est à la fois majorée et minorée. On dit qu'elle est* ***bornée***.		
Evaluation *20 min*	-Travail individuel	EXERCICE DE FIXATION 1. Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes : a. Si pour tout entier n $u_n < 4$, alors la suite (u_n) est minorée par 4. b. Si pour tout entier n $u_n \geq -1$, alors la suite (u_n) est minorée par -1.	REPONSES ATTENDUES **1**. a. Faux b. Vrai c. Vrai d. Faux **2**. $v_n = \frac{3n^2 + 2}{n^2 + 1}$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
	-Travail individuel	c. Si pour tout entier n $\lvert u_n\rvert < 2$, alors la suite (u_n) est bornée. d. Si pour tout entier n $u_n \geq \sqrt{2}$, alors la suite (u_n) est majorée par $\sqrt{2}$. 2. Soit la suite v définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $v_n = \frac{3n^2+2}{n^2+1}$ Démontre que v est minorée par 2. 3. Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \sqrt{5 - \frac{1}{n^2+1}}$ Démontre que $\forall n \in \mathbb{N},\ 2 \leq u_n \leq \sqrt{5}$. EXERCICE DE MAISON	$v_n = \frac{3(n^2+1)-3+2}{n^2+1}$ $v_n = 3 - \frac{1}{n^2+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 1$ $n^2 \geq 1 \Leftrightarrow n^2+1 \geq 2$ $\frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{n^2+1} \geq -\frac{1}{2}$ $3 - \frac{1}{n^2+1} \geq 3 - \frac{1}{2}$ $3 - \frac{1}{n^2+1} \geq \frac{5}{2}$ $v_n \geq \frac{5}{2}$ $v_n \geq 2$ v est minorée par 2. **3**. $u_n = \sqrt{5 - \frac{1}{n^2+1}}$ $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 0$ $n^2 \geq 0 \Leftrightarrow n^2+1 \geq 1$ $\frac{1}{n^2+1} \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{n^2+1} \geq -1$ $5 \geq 5 - \frac{1}{n^2+1} \geq 4$ $2 \leq u_n \leq \sqrt{5}$	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON10 : SUITES NUMERIQUES

SEANCE : 3/7

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Démontrer	- qu'une suite est monotone

PLAN DE LA SEANCE

3. Suites monotones
   a. Définition
   b. Sens de variation d'une suite arithmétique
   c. Sens de variation d'une suite géométrique

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
15 min *Développement* *25 min*	-Travail en groupe -Travail en groupes	Correction des exercices de maison <u>ACTIVITE</u> I. 1. Soit (u_n) une suite numérique. Supposons que la suite (u_n) est strictement croissante. Justifie que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$. 2. Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$. Démontre que la suite (u_n) est strictement croissante. (on pourrait montrer par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, et $\forall m \in \mathbb{N}, u_m < u_{m+k}$). II. 1. Soit (u_n) la suite arithmétique définie par : $u_n = rn + b$, $(r \neq 0)$, pour tout nombre entier naturel n. Etudie selon le signe de r le sens de variation de (u_n). 2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique définie par : $v_n = v_0 q^n$. a. Justifie que : $v_{n+1} - v_n = q^n v_0(q-1)$.	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **I**. **1**. Soit (u_n) une suite numérique. Supposons que la suite (u_n) est strictement croissante ; c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}$, si $n < m$ alors $u_n < u_m$. $\forall n \in \mathbb{N}\ n < n+1$. Comme (u_n) est strictement croissante $u_n < u_{n+1}$. **2**. Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$. montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, et $\forall m \in \mathbb{N}$, $u_m < u_{m+k}$. Soit $P(k)$ la propriété : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, et $\forall m \in \mathbb{N}$, $u_m < u_{m+k}$. Pour $k = 1$, on a : $u_m < u_{m+1}$. $P(1)$ est vraie. Soit $l \in \mathbb{N}$ tel que $l \geq 1$. Supposons que $P(l)$ est vraie ; c'est-à-dire $u_m < u_{m+l}$. Montrons que $P(l+1)$ est vraie. $u_m < u_{m+l}$.	3. <u>Suites monotones</u> a. Définition Soit $(u_n)_{n\in E}$ une suite numérique. ▪ Si pour tout n élément de E, $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n > 0}$, alors la suite (u_n) est ***strictement croissante*** sur E. ▪ Si pour tout n élément de E, $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n < 0}$, alors la suite (u_n) est ***strictement décroissante*** sur E. <u>Remarques</u> ✓ Une suite numérique (u_n) est dite monotone si elle est soit croissante, soit décroissante. ✓ Une suite constante est une suite monotone. b. <u>Sens de variation d'une suite arithmétique</u> Une suite arithmétique de

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		b. Déduis selon les valeurs de v_0 et q le sens de variation de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.	$u_m < u_{m+1} < u_{(m+1)+l}$. $P(l+1)$ est vraie. Conclusions : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, et $\forall m \in \mathbb{N}$, $u_m < u_{m+k}$. On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}$, si $u_n < u_{n+1}$ alors la suite (u_n) est strictement croissante. **II**. **1**. Soit (u_n) la suite arithmétique définie par : $u_n = rn + b$, $(r \neq 0)$, pour tout nombre entier naturel n. $u_{n+1} - u_n = r$ 1er cas : $r > 0$ $u_{n+1} > u_n$ donc (u_n) est strictement croissante. 2e cas : $r < 0$ $u_{n+1} < u_n$ donc (u_n) est strictement décroissante. 3e cas : $r = 0$. $u_{n+1} = u_n$ donc (u_n) est constante. **2**. **a**.$v_n = v_0 q^n$. $v_{n+1} - v_n = v_0 q^{n+1} - v_0 q^n$ $v_{n+1} - v_n = v_0 q^n (q-1)$ **b**. **1 cas : $v_0 > 0$**. Si $q > 1$, $v_{n+1} > v_n$ donc (v_n) est strictement croissante. Si $0 < q < 1$, $v_{n+1} < v_n$ donc (v_n) est strictement décroissante.	raison ***r*** est ***strictement croissante*** (resp. strictement décroissante) si et seulement si ***r est positif*** (resp. si ***r*** est négatif). a. <u>Sens de variation d'une suite géométrique</u> Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme v_0 différent de 0. On suppose que $v_0 > 0$. ○ Si $q > 1$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. ○ Si $0 < q < 1$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. ○ Si $q = 1$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. On suppose que $v_0 < 0$. ○ Si $q > 1$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. ○ Si $0 < q < 1$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. ○ Si $q = 1$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. <u>Remarque</u> Si $q < 0$, alors les termes de la suite sont alternativement

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			Si $q = 1$, $v_{n+1} = v_n$ donc (v_n) est constante. **2 cas : $v_0 < 0$** Si $q > 1$, $v_{n+1} < v_n$ donc (v_n) est strictement décroissante. Si $0 < q < 1$ $v_{n+1} > v_n$ donc (v_n) est strictement croissante. Si $q = 1$, $v_{n+1} = v_n$ donc (v_n) est constante.	positifs et négatifs. La suite n'est ni croissante, ni décroissante. <u>Méthode</u> Pour étudier le sens de variation d'une suite numérique (u_n) , on pourra : - étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$. -si la suite est à termes strictement positifs, comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1. - étudier **le sens de variation** de la fonction f si (u_n) est définie par $u_n = f(n)$. - lorsque (u_n) est définie par une formule de récurrence :$u_{n+1} = g(u_n)$ on utilise un raisonnement par récurrence (éventuellement le sens de variation de g)
Evaluation *15 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> 1. Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes : a. Si pour tout entier n $u_{n+1} = u_n + 3$, alors la suite (u_n) décroissante. b. Si pour tout entier n	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. a. Faux b. Faux c. Vrai d. Vrai 2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \ln(n+1)$ $u_{n+1} - u_n = \ln(n+2) - \ln(n+1)$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		$u_n = 1 - 2n$, alors la suite (u_n) est croissante. c. Si pour tout entier n $u_n = -\frac{2}{3} \times 5^n$ alors la suite (u_n) est décroissante. d. Si pour tout entier n $u_n = -\frac{1}{5} \times (-2)^n$ alors la suite (u_n) croissante. 2. Démontre que la suite u définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \ln(n + 1)$ est croissante. 3. Soit la suite v définie pour tout entier naturel n non nul par : $v_n = \sqrt{\frac{2}{n} + 3}$ Justifie que la suite *v* est décroissante.	$u_{n+1} - u_n = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$ $\forall n \in \mathbb{N}, n + 2 > n + 1 > 1$ $\frac{n+2}{n+1} > 1$ $\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) > 0$ $u_{n+1} - u_n > 0$ la suite u définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \ln(n + 1)$ est croissante. 3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n > 0$. $v_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{n+1} + 3}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*, n + 1 > n$ $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ $\frac{1}{n+1} + 3 < \frac{1}{n} + 3$ $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} < v_n$ La suite *v* est décroissante.	
	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE MAISON</u> Etudie le sens de variation de la suite (u_n) définie dans chacun des cas ci-dessous :		

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		a. $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ b. $u_n = 3^n$ c. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = {u_n}^3 - 2 \end{cases}$		

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON10 : SUITES NUMERIQUES

SEANCE : 4/7

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel, calculatrice scientifique

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- La définition d'une suite : o Convergente o Divergente - Les propriétés sur les suites monotones : o Toute suite croissante et majorée converge o Toute suite décroissante et minorée converge - les propriétés sur la divergence des suites numériques o Toute suite croissante et non majorée a pour limite $+\infty$ o Toute suite décroissante et non minorée a pour limite $-\infty$
Démontrer	- qu'une suite est convergente ou divergente

PLAN DE LA SEANCE

4. Suites convergentes, suites divergentes
   Définitions
   Remarques
5. Convergence d'une suite monotone
   Propriétés

<table>
<tr><th>MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES</th><th>STRATEGIES PEDAGOGIQUES</th><th>ACTIVITES DU PROFESSEUR</th><th>ACTIVITES DES APPRENANTS</th><th>TRACE ECRITE</th></tr>
<tr>
<td>15 min

Développement
20 min</td>
<td>-Travail en groupe

-Travail en groupes</td>
<td>Correction des exercices de maison

<u>ACTIVITE</u>
On donne les suites numériques (u_n), (v_n), (w_n) et (t_n) définies pour tout entier naturel n par :
$u_n = \frac{3n+1}{n+1}$ $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 3 \end{cases}$
$\begin{cases} w_0 = 3 \\ w_{n+1} = \frac{1}{v_n} \end{cases}$ $t_n = 3 \times 7^n$
1. Complète les tableaux suivants :
<table>
<tr><td>n</td><td>10</td><td>10^2</td><td>10^3</td><td>10^4</td><td>10^5</td></tr>
<tr><td>u_n</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>n</td><td>5</td><td>8</td><td>10</td><td>11</td><td>14</td><td>15</td></tr>
<tr><td>v_n</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>n</td><td>1</td><td>2</td><td>5</td><td>8</td><td>11</td><td>14</td></tr>
<tr><td>w_n</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>n</td><td>1</td><td>10</td><td>10^2</td><td>10^3</td><td>10^4</td><td>10^5</td></tr>
<tr><td>t_n</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
2. Utilise chacun de ces tableaux pour conjecturer l'existence d'un nombre réel l tel qu'il est possible de rendre u_n, v_n, w_n ou t_n aussi proche que l'on veut de l en</td>
<td><u>REPONSES ATTENDUES</u>
1.
<table>
<tr><td>n</td><td>10</td><td>10^2</td><td>10^3</td><td>10^4</td><td>10^5</td></tr>
<tr><td>u_n</td><td>2,8</td><td>2,9</td><td>2,998</td><td>2,9998</td><td>2,9999</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>n</td><td>5</td><td>8</td><td>10</td><td>11</td><td>14</td><td>15</td></tr>
<tr><td>v_n</td><td>5,9 531</td><td>5,9 882</td><td>5,9 970</td><td>5,9 985</td><td>5,9 998</td><td>5,9 999</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>n</td><td>1</td><td>2</td><td>5</td><td>8</td><td>11</td><td>14</td></tr>
<tr><td>w_n</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td>3</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td>3</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td>3</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>n</td><td>1</td><td>10</td><td>10^2</td><td>10^3</td><td>10^4</td></tr>
<tr><td>t_n</td><td>21</td><td>8,47 .10^8</td><td>9,7 .10^{84}</td><td>3,7. 10^{845}</td><td>5,88. 10^{8454}</td></tr>
</table>
2. En choisissant n suffisamment grand :
- on peut rendre u_n aussi proche que l'on veut de 3.
- On peut rendre v_n aussi proche que l'on veut de 6.
- il est impossible de rendre w_n aussi proche que l'on veut d'un nombre réel l.
Il est impossible de rendre t_n aussi proche que l'on veut d'un nombre réel l.</td>
<td>4. <u>Suites convergentes, suites divergentes</u>
<u>Définitions</u>
Une suite est dite ***convergente*** lorsqu'elle admet une limite finie.
Une suite est ***divergente*** si elle n'est pas convergente.
<u>Remarques</u>
On admet que si une suite admet une limite, alors cette limite est unique.
Lorsqu'une suite admet une limite finie l, on dit qu'elle converge vers l.
Une suite est divergente si elle n'admet pas de limite ou si elle admet une limite infinie.
5. <u>Convergence d'une suite monotone</u>
<u>Propriétés</u>
Toute suite décroissante et minorée est convergente.</td>
</tr>
</table>

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		choisissant n suffisamment grand. *En choisissant n suffisamment grand on peut rendre u_n aussi proche que l'on veut de* 3. *On dit que la suite (u_n)* ***converge*** *vers* 3. *De même, la suite (v_n)* ***converge*** *vers* 6. *On dit aussi que les suite (u_n) et (v_n) sont* ***convergentes***. *Les suites (w_n) et (t_n) ne convergent pas ; elles* ***divergent***. *Les suite (w_n) et (t_n) sont* ***divergentes***.		Toute suite croissante et majorée est convergente. Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$. Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
Evaluation *20 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> On considère la suite u définie par : $u_0 = 1$ $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ a. Démontre que u est croissante. b. Démontre que u est majorée par 2. c. En déduire que la suite u converge	<u>REPONSES ATENDUES</u> **a**. Montrons que u est croissante : $u_1 = \sqrt{2 + u_0}$ $u_1 = \sqrt{2 + 1}$ $u_1 = \sqrt{3}$ Soit P_n la propriété : pour tout nombre réel n $u_{n+1} > u_n$. $u_1 > u_0$ donc P_1 est vraie. Soit k un nombre réel tel que $k \geq 1$. Supposons que P_k; c'est-à-dire $u_{k+1} > u_k$. Montrons que P_{k+1} est vraie. $u_{k+1} > u_k$ $2 + u_{k+1} > 2 + u_k > 2$ $\sqrt{2 + u_{k+1}} > \sqrt{2 + u_k}$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			$u_{k+2} > u_{k+1}$ donc P_{k+1} est vraie. Conclusions : pour tout nombre réel n $u_{n+1} > u_n$. La suite u est croissante. **b**. Montrons que u est majorée par 2. Soit Q_n la propriété : pour tout nombre réel n $u_n < 2$. $u_0 = 1$ $u_0 < 2$ donc Q_0 est vraie. Soit k un nombre réel tel que $k \geq 0$. Supposons que Q_k est vraie; c'est-à-dire $u_k < 2$. Montrons que Q_{k+1} est vraie. $u_k < 2 \Leftrightarrow 2 + u_k < 2 + 2$ $2 + u_k < 4 \Leftrightarrow \sqrt{2 + u_k} < \sqrt{4}$ $\sqrt{2 + u_k} < 2$ d'où $u_{k+1} < 2$. Q_{k+1} est vraie Conclusion : pour tout nombre réel n $u_n < 2$. La suite u est majorée par 2. **c**. La suite u est croissante et majorée par 2 donc elle converge.	
	-Travail individuel	<u>EXERCICES DE MAISON</u> 1. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$ a. Démontre par récurrence		

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2$. b. En utilisant la question 1, étudie le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. c. Justifie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. 2. Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = \dfrac{v_n + 4}{3} \end{cases}$ a. Démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq 2$. b. Démontre que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. c. Déduis-en que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.		

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON10 : SUITES NUMERIQUES

SEANCE : 5/7

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- les propriétés sur la convergence : ○ des suites géométriques ○ des suites arithmétiques ○ des suites du type n^{α}
Reconnaître	- une suite géométrique convergente ou divergente - une suite du type n^{α} convergente ou divergente
Déterminer	- la limite d'une suite

PLAN DE LA SEANCE

6. Limites des suites définies par une formule explicite
7. Convergence de suite géométrique et de suite arithmétique
   a. Convergence d'une suite arithmétique
   b. Convergence d'une suite géométrique
   c. Convergence d'une suite du type $u_n = n^{\alpha}$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
15 min	-Travail en groupe	Correction des exercices de maison		
Développement *5 min*	-Travail en groupes	<u>ACTIVITE1</u> On considère la fonction *f* définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=2+\frac{3}{x^2-1}$ et la suite (u_n) Définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n=f(n)$. 1. Détermine la limite de *f* en $+\infty$. 2. a. Détermine la formule explicite de la suite (u_n). b. Déduis-en la limite de la suite (u_n).	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **1**. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2+\frac{3}{x^2-1}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2.$ **2.a**. $u_n=f(n).$ $u_n=2+\frac{3}{n^2-1}$ **b**. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=2.$	6. <u>Limites des suites définies par une formule explicite</u> <u>Propriété</u> Soient *f* une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et (u_n) la suite définie par la formule explicite : $u_n=f(n)$. Si *f* admet une limite en $+\infty$, alors la suite (u_n) admet la même limite et on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty} f(n).$
Evaluation *5 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Calcule les limites de chacune des suites numériques suivantes : a. $u_n=-3+\frac{1}{n+1}$ b. $v_n=\frac{\ln(n+1)}{n}+2$ c. $t_n=\sqrt{n^3+3n^2+1}$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **a**. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty} -3+\frac{1}{n+1}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-3$ **b**. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{n}+2$ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=2$ **c**. $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n=\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^3+3n^2+1}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n=+\infty$	

<table>
<tr><th>MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES</th><th>STRATEGIES PEDAGOGIQUES</th><th>ACTIVITES DU PROFESSEUR</th><th>ACTIVITES DES APPRENANTS</th><th>TRACE ECRITE</th></tr>
<tr>
<td>Développement
20 min</td>
<td>-Travail en groupes</td>
<td>
<u>ACTIVITE2</u>
Soient (u_n), (v_n) et (t_n) trois suites numériques ayant pour formules explicites respectives :
$u_n = rn + p$;
$v_n = v_0 \times q^n$;
$t_n = n^\alpha$.
1. Etudie selon les valeurs de r la convergence de la suite (u_n).
2. Etudie selon les valeurs de q la convergence de la suite (v_n).
3. Etudie selon les valeurs de α la convergence de la suite (t_n).
</td>
<td>
<u>REPONSES ATTENDUES</u>
1.
<table>
<tr><td>$r = 0$</td><td>(u_n) est une suite constante. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
(u_n) converge.</td></tr>
<tr><td>$r > 0$</td><td>(u_n) est croissante.
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
(u_n) diverge vers $+\infty$.</td></tr>
<tr><td>$r < 0$</td><td>(u_n) est décroissante.
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$. (u_n) diverge vers $-\infty$.</td></tr>
</table>
2.
<table>
<tr><td>$q = 1$</td><td colspan="2">$v_n = v_0$. (v_n) est une suite constante. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = v_0$.
(v_n) converge.</td></tr>
<tr><td>$-1 < q < 1$</td><td colspan="2">$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.
(v_n) converge vers 0.</td></tr>
<tr><td>$q \leq -1$</td><td colspan="2">Les termes sont alternativement positifs et négatifs. (v_n) n'a pas de limite.
(v_n) n'est pas convergente.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$q > 1$</td><td>$v_0 < 0$</td><td>$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.
(v_n) diverge.</td></tr>
<tr><td>$v_0 > 0$</td><td>$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
(v_n) diverge.</td></tr>
</table>
</td>
<td>
7. <u>Convergence de suite géométrique et de suite arithmétique</u>
a. <u>Convergence d'une suite arithmétique Propriété</u>
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme v_0.
Si $r = 0$, alors (u_n) converge : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$.
Si $r \neq 0$, alors (u_n) diverge : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ si $r < 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si $r > 0$.
b. <u>Convergence d'une suite géométrique</u>
Soit v une suite géométrique de de premier terme v_0 et de raison q.
Si $|\boldsymbol{q}| < \mathbf{1}$ alors v ***converge*** vers 0.
Si $|\boldsymbol{q}| > \mathbf{1}$ alors v ***diverge*** et $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \; si \; v_0 < 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty \; si \; v_0 > 0 \end{cases}$
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th>MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES</th><th>STRATEGIES PEDAGOGIQUES</th><th>ACTIVITES DU PROFESSEUR</th><th>ACTIVITES DES APPRENANTS</th><th>TRACE ECRITE</th></tr>
<tr>
<td>Evaluation
10 min</td>
<td>-Travail individuel</td>
<td>EXERCICE DE FIXATION
On considère les suites (u_n), (v_n), (w_n), (a_n), (b_n), (c_n) et (d_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :
$u_n = (0{,}9)^n$, $v_n = 5^n$
$w_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n$, $a_n = n^{-3}$
$b_n = n^5$, $c_n = \sqrt{n}$
$d_n = -2n + 1$
Donne les limites suivantes :
1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$</td>
<td>
<table>
<tr><td>$q = 0$</td><td>(v_n) est la suite constante nulle et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.
(v_n) converge.</td></tr>
</table>
3.
<table>
<tr><td>$\alpha = 0$</td><td>$t_n = 1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$
(t_n) converge vers 1.</td></tr>
<tr><td>$\alpha > 0$</td><td>$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
(t_n) diverge vers $+\infty$.</td></tr>
<tr><td>$\alpha < 0$</td><td>$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
(t_n) converge vers 0.</td></tr>
</table>
REPONSES ATTENDUES
1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$
6. $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = +\infty$
7. $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = -\infty$
</td>
<td>
Si $\boldsymbol{q < -1}$ alors v n’a pas de limite.
Si $\boldsymbol{q = 0}$ ou $v_0 = 0$ alors v est la suite constante nulle.
Si $\boldsymbol{q = 1}$ alors $\boldsymbol{v}$ est une suite constante et converge vers $\boldsymbol{v_0}$.
c. <u>Convergence d’une suite du type $u_n = n^\alpha$</u>
<u>Propriété</u>
Si $\alpha < 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = 0$.
Si $\alpha = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = 1$.
Si $\alpha > 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$.
</td>
</tr>
</table>

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		3. $\lim_{n\to+\infty} w_n$ 4. $\lim_{n\to+\infty} a_n$ 5. $\lim_{n\to+\infty} b_n$ 6. $\lim_{n\to+\infty} c_n$ 7. $\lim_{n\to+\infty} d_n$		

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON10 : SUITES NUMERIQUES

SEANCE : 6/7

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- Les propriétés sur la convergence des suites numériques ○ Si (u_n) est une suite convergente vers a et f une fonction continue en a alors la suite $v_n = f(u_n)$ converge vers $f(a)$. ○ les propriétés des suites récurrentes définies par une relation du type $U_{n+1} = f(U_n)$ - les propriétés sur les limites et comportements asymptotiques comparés des suites $(\ln n)$, (a^n), a > 0 et (n^α), α réel
Conjecturer	- le comportement d'une suite récurrente

PLAN DE LA SEANCE

8. Limites des suites récurrentes
   Propriétés
9. Croissance comparée des suites $(\ln n)$, (a^n), a > 0 et (n^α), α réel

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Développement *15 min*	-Travail en groupe	ACTIVITE Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{9}{6-u_n} \end{cases}$ Soient a et l des éléments de l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$; f est une fonction définie sur un intervalle K. On suppose que (u_n) est une suite convergente. On pose : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$. (*On admet que la propriété donnant la limite de la composée de deux fonctions reste valable pour la composée d'une suite suivie d'une fonction*). 1. Détermine la fonction f telle que : $u_{n+1} = f(u_n)$. 2. Détermine $\lim\limits_{x\to+\infty} f(u_n)$. 3. On pose $a = 3$. a. Calcule l. b. Résous l'équation $f(x) = x$ puis compare la solution à l.	REPONSES ATTENDUES **1**. $f: \mathbb{R}\setminus\{6\} \mapsto \mathbb{R}$ $x \mapsto \dfrac{9}{6-x}$ **2**. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(u_n) = l$ **3**.**a**. $l = \lim\limits_{x\to 3} f(x)$ $l = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{9}{6-x}$ $l = 3$. **b**. $f(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{9}{6-x} = x$ $-x^2 + 6x = 9$ $-x^2 + 6x - 9 = 0$ $x^2 - 6x + 9 = 0$ $(x-3)^2 = 0$ $x = 3.$ l est égal à la solution de l'équation $f(x) = x$.	8. Limites des suites récurrentes Propriétés Propriété1 Soit f une fonction, D_f son ensemble de définition et (u_n) une suite d'éléments de D_f. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$; $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(u_n) = l$. $(l \in \mathbb{R})$ Propriété2(Théorème du point fixe) Soit une suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction numérique continue sur un intervalle I. Si la suite (u_n) est convergente et que pour tout entier naturel n, $u_n \in I$, alors la limite de la suite (u_n) est la solution de l'équation : $x \in I, f(x) = x$. Remarque Toute solution de l'équation $x \in I, f(x) = x$ est appelée point fixe de f.
Evaluation *15 min*	-Travail individuel	EXERCICE DE FIXATION 1. Calcule la limite de la suite de terme (u_n) général :	REPONSES ATTENDUES **1**. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		$u_n = n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ 2. On considère la suite (v_n) définie par : $\begin{cases} v_0 = \frac{1}{2} \\ v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n}, \text{pour } n \geq 0 \end{cases}$ On suppose (v_n) est convergente et à termes positifs. Détermine la limite de la suite (v_n).	$f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $u_{n+1} = f(u_n)$ $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_n)$ $f(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ Posons $X = \frac{1}{x}$ Lorsque : $x \to +\infty,\ X \to 0$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{X\to 0} \frac{\sin X}{X}$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = 1$ **2**. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ La suite (v_n) est convergente et pour tout entier naturel n, limite de la suite (v_n).$v_n \in \mathbb{R}_+^*$, alors la limite de la suite (v_n) est la solution de l'équation : $x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = x$. $f(x) = x \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x} = x$ $x^2 = x + 1$ $x^2 - x - 1 = 0$ $\Delta = 1 + 4 = 5$ $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Développement *15 min*	-Travail individuel	ACTIVITE2 Soient n un nombre entier naturel strictement positif ; a et α deux nombres réels. Justifie chacune des propositions suivantes : 1. Si $\alpha > 0$, alors : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln n}{n^{\alpha}}\right) = 0.$ 2. Si $a > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln n}{a^{n}}\right) = 0.$ 3. Si $a > 1$ et $\alpha > 0$, alors : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^{\alpha}}{a^{n}}\right) = 0.$ 4. Si $0 < a < 1$ et $\alpha < 0$, alors : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^{\alpha}}{a^{n}}\right) = +\infty.$	$x_1 < 0$ et $x_2 > 0$. $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ La limite de la suite (v_n) est $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. REPONSES ATTENDUES **1**. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x^{\alpha}}, \alpha > 0$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}}$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$ $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln n}{n^{\alpha}}\right) = \lim_{n\to+\infty} f(n)$ $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln n}{n^{\alpha}}\right) = 0$ Si $\alpha > 0$, alors : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln n}{n^{\alpha}}\right) = 0.$ **2**. Soit p la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $p(x) = \frac{\ln x}{a^{x}}, \alpha > 1$ $\lim_{x\to+\infty} p(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{a^{x}}$ $\lim_{x\to+\infty} p(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{e^{x\ln a}} = 0$	9. Croissance comparée des suites $(\ln n)$, (a^n), a > 0 et (n^{α}), α réel Si $\alpha > 0$, alors : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln n}{n^{\alpha}}\right) = 0.$ Si $a > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln n}{a^{n}}\right) = 0.$ Si $a > 1$ et $\alpha > 0$, alors : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^{\alpha}}{a^{n}}\right) = 0.$ Si $0 < a < 1$ et $\alpha < 0$, alors : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^{\alpha}}{a^{n}}\right) = +\infty.$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln n}{a^x}\right)=\lim_{n\to+\infty}p(n)$ $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln n}{a^x}\right)=0$ Si $a>1$, alors $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln n}{a^n}\right)=0.$ **3**. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $g(x)=\left(\frac{x^\alpha}{a^x}\right), a>1 \text{et } \alpha>0$ $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^\alpha}{a^x}\right)$ $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^\alpha}{e^{x\ln a}}\right)=0$ $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^\alpha}{a^n}\right)=\lim_{n\to+\infty}g(n)=0$ $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^\alpha}{a^n}\right)=0$ Si $a>1$ et $\alpha>0$, alors : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^\alpha}{a^n}\right)=0.$ **4**. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $h(x)=\left(\frac{x^\alpha}{a^x}\right), 0<a<1 \text{et } \alpha<0$ $\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^\alpha}{a^x}\right)$ $\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^\alpha}{e^{x\ln a}}\right)$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *10 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Etudie les limites éventuelles de la suite : a. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 - 4^n$ b. $\lim\limits_{n\to+\infty} n - \ln n$ c. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^5}{7^n}$ d. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n^3}$	$\alpha < 0$ donc il existe $\delta > 0$ tel que : $\alpha = -\delta$. $0 < a < 1$ donc $\ln a < 0$. Il existe $\theta > 0$ tel que : $\ln a = -\theta$. $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^{-\delta}}{e^{-\theta x}}\right)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{\theta x}}{x^{\delta}}\right) = +\infty$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n^{\alpha}}{a^n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} h(n)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n^{\alpha}}{a^n}\right) = +\infty$ Si $0 < a < 1$ et $\alpha < 0$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n^{\alpha}}{a^n}\right) = +\infty$. <u>REPONSES ATTENDUES</u> **a**. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 - 4^n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^3\left(1 - \frac{4^n}{n^3}\right)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 - 4^n = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = -\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{4^n}{n^3}\right) = -\infty \end{cases}$ **b**. $\lim\limits_{n\to+\infty} n - \ln n$ $= \lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE MAISON</u>	$\lim_{n\to+\infty} n - \ln n = +\infty$ car $\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} n = +\infty \\ \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right) = 1 \end{cases}$ **c**. $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^5}{7^n} = 0$ **d**. $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n^3} = +\infty$	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON10 : SUITES NUMERIQUES

SEANCE : 7/7

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- les théorèmes de comparaison

PLAN DE LA SEANCE

10. Propriétés de comparaison
    Propriétés
    Propriété1
    Propriété2 (Théorème des gendarmes)
    1ERE Forme
    2EME Forme

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
10 min *Développement* *25 min*	-Travail en groupe -Travail en groupes	Correction de l'exercice de maison <u>ACTIVITE</u> I. Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites. 1. Démontre que si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ et pour tout entier $n \geq n_0$, $v_n \leq u_n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. 2. Démontre que si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ et pour tout entier $n \geq n_0$, $v_n \geq u_n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$. II. Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$; $(v_n)_{n\geq n_0}$ et $(w_n)_{n\geq n_0}$ trois suites. Démontre que si $(v_n)_{n\geq n_0}$ et $(w_n)_{n\geq n_0}$ convergent vers la même limite l et si pour tout entier $n \geq n_0$, $v_n \leq u_n \leq w_n$ alors (u_n) converge vers l.	<u>REPONSES ATTENDUES</u> I. **1**. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ donc soit A un nombre réel strictement positif ; il existe un nombre entier naturel N tel que : $\forall n \geq N$, $v_n \in]A;+\infty[$. Ainsi, pour tout nombre entier $n \geq N$, $A \leq v_n \leq u_n$; c'est-à-dire : $u_n \in]A;+\infty[$. Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. **2**. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ donc soit B un nombre réel strictement positif ; il existe un nombre entier naturel N' tel que : $\forall n \geq N'$, $v_n \in]-\infty; -B[$. Ainsi, pour tout nombre entier $n \geq N'$, $u_n \leq v_n \leq -B$; c'est-à-dire : $v_n \in]-\infty; -B[$. Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$. **II**. Soit r un nombre réel strictement positif. La suite (v_n) converge vers l, donc à partir d'un certain indice N_v , les termes de la suite (v_n) sont dans l'intervalle de centre l	10. <u>Propriétés de comparaison</u> <u>Propriétés</u> <u>Propriété1</u> Soit (u_n) et (v_n) deux suites numériques. Si à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. Si à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$. <u>Propriété2</u> (Théorème des gendarmes) <u>1ERE Forme</u> Soit (u_n), (u_n) et (w_n) des suites définies sur $\mathbb{N}$. Si à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$. <u>2EME Forme</u> S'il existe une suite (u_n) telle que $\lvert u_n - l\rvert \leq v_n$ à

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *20 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FOXATION</u> Détermine chacune des limites suivantes : 1. $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2+(-1)^n)$ 2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+\sin n)$ 3. $\lim\limits_{n\to+\infty}(\cos n-2n)$ 4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin n}{n}$ 5. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$	et de rayon r c'est-à-dire : $l-r<v_n<l+r$. De même la suite (w_n) converge vers l, donc à partir d'un certain indice N_w , les termes de la suite (v_n) sont dans l'intervalle de centre l et de rayon r c'est-à-dire : $l-r<w_n<l+r$. Posons $N=max\{N_v\,;N_w\}$. Pour tout entier $n\geq N$, on a : $l-r<v_n\leq u_n\leq w_n<l+r$ La suite (u_n) converge vers l. <u>REPONSES ATTENDUES</u> **1**. $-1\leq(-1)^n\leq 1$ $n^2-1\leq n^2+(-1)^n\leq n^2+1$ $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2-1)=\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2+1)=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2+(-1)^n)=+\infty$. **2**. $-1\leq\sin n\leq 1$ $n-1\leq\sin n\leq n+1$ $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-1)=\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+\sin n)=+\infty$. **3**. $-1\leq\cos n\leq 1$ $-1-2n\leq\cos n\leq 1-2n$	partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			$\lim\limits_{n\to+\infty}(-1-2n)=\lim\limits_{n\to+\infty}(1-2n)$ $=-\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(\cos n-2n)=-\infty$. **4**. $-1\leq\sin n\leq 1$ $-\frac{1}{n}\leq\frac{\sin n}{n}\leq\frac{1}{n}$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin n}{n}=0$ **5**. $-1\leq(-1)^n\leq 1$ $-\frac{1}{n^2}\leq\frac{(-1)^n}{n^2}\leq\frac{1}{n^2}$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=0$	

BIBLIOGRAPHIE

Programmes éducatifs et guides d'exécution Mathématiques $T^{LE}D$

Progressions annuelles

Mon livre de mathématiques $T^{LE}D$ Collection PYRAMIDE

Mon livre de mathématiques $T^{LE}D$ Collection CIAM/EDICEF

Les cahiers de la réussite T^{LE} D Vallesse

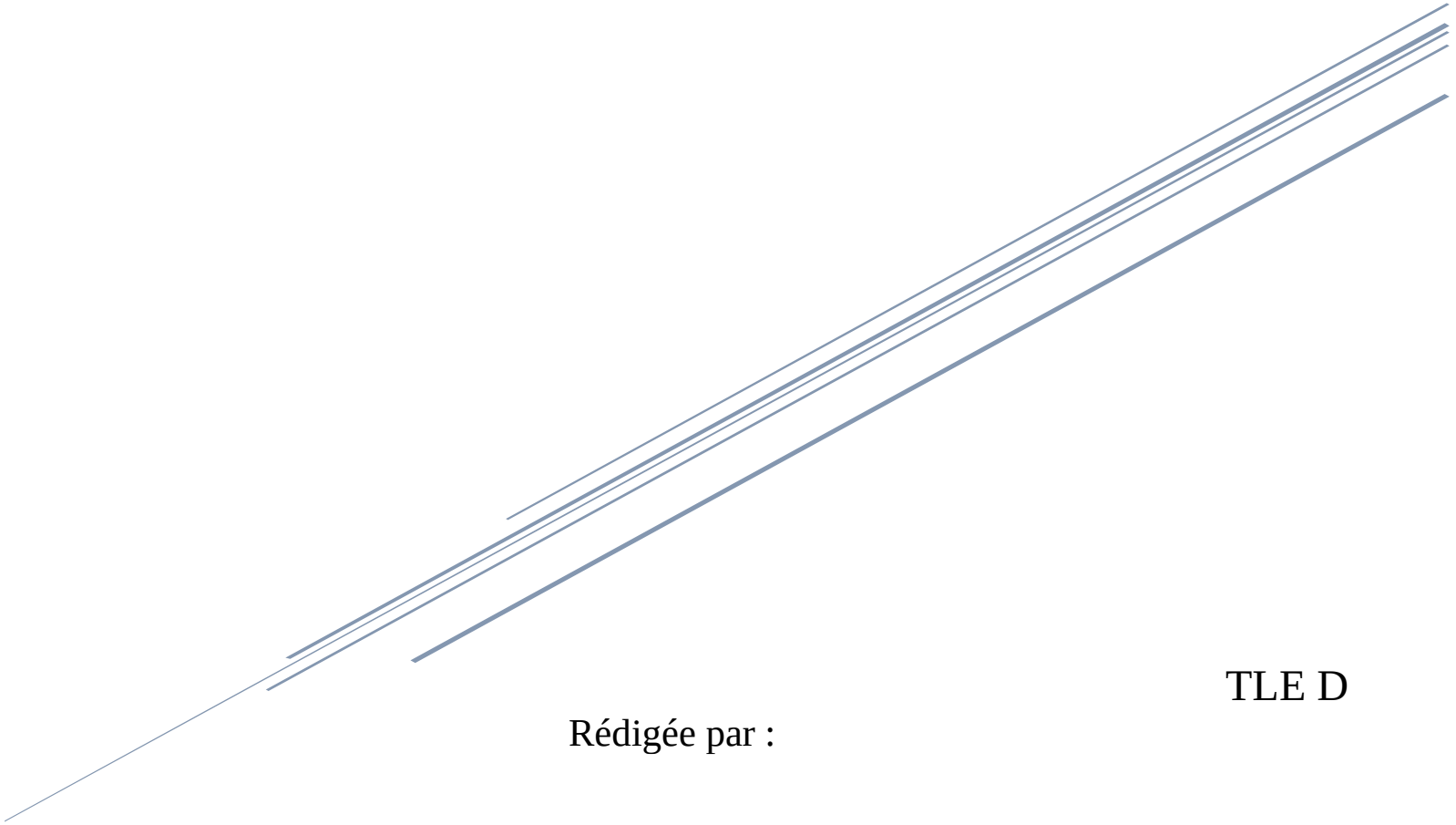
Mon cahier d'habiletés Mathématiques T^{LE} D JD Editions

WWW.monecoleàlamaison.ci

https://physiques-et-maths.fr

FICHE DE LEÇON

EQUATIONS DIFFERENTIELLES



TLE D

Rédigée par :

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON12 : EQUATIONS DIFFERENTIELLES

NOMBRE DES SEANCES : 3

DUREE D'UNE SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la définition d'une équation différentielle - les solutions de chaque équation différentielle au programme
Identifier	- une équation différentielle
Justifier	- qu'une fonction est solution d'une équation différentielle
Résoudre	- une équation différentielle du type $f' = af$ (a réel) - une équation différentielle du type $f' = af + b$ (a et b réels et $a \neq 0$) - une équation différentielle du type $f'' = 0$ - une équation différentielle du type $f'' = \omega^2 f$ (ω réel non nul) - une équation différentielle du type $f'' = -\omega^2 f$ (ω réel non nul)
Déterminer	- la solution d'une équation différentielle du type $f' = af + b$ (a et b réels) satisfaisant à une condition initiale donnée - la solution d'une équation différentielle du type $f'' = mf$ (m réel) - satisfaisant à des conditions initiales données.
Traiter une situation	- faisant appel aux équations différentielles

SITUATION D'APPRENTISSANGE

L'enseignant de physique-chimie vous donne les informations suivantes :

« lors d'une chute d'un parachutiste, le parachute fait subir une force de frottement opposée à sa vitesse. On suppose que le frottement $\vec{F}$ est proportionnel à la vitesse $\vec{v}$: $\vec{F} = -km\,\vec{v}$ (où k est le coefficient de frottement). Le principe fondamental de la mécanique établit que : $mg - kmv = ma$ (m est la masse, v est la vitesse, a son accélération et g la constante de gravitation).
En remarquant que l'accélération est la dérivée de la vitesse par rapport au temps, on obtient l'équation : $\frac{dv(t)}{dt} + kv(t) = g$.

La détermination d'une fonction v judicieusement choisie permettra de déterminer la position du parachutiste à tout instant t ». Eveillés par l'existence d'une équation qui met en relation une fonction et sa dérivée, les élèves décident de faire des recherches sur ce type d'équations.

PLAN DE LA LEÇON

I. NOTION D'EQUATION DIFFERENCIELLE
   Définitions
II. EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU TYPE $f' = af + b$ (a et b réels ; $a \neq 0$)
   1. Equations différentielles du type $f' = b$
   2. Equations différentielles du type $f' = af$
   3. Equations différentielles du type $f' = af + b$
   4. Equations différentielles du type $f' = af + b$ vérifiant une condition
III. EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU TYPE $f'' = mf$ (m réel)
   1. Equations différentielles du type $f'' = 0$
   2. Equations différentielles du type $f'' = \omega^2 f$ ($\omega \in \mathbb{R}^*$)
   3. Equations différentielles du type $f'' = -\omega^2 f$ ($\omega \in \mathbb{R}^*$)
   4. Equations différentielles du type $f'' = mf$ vérifiant deux conditions

HABILETES, CONTENUS ET PLANS PAR SEANCE

SEANCE1

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la définition d'une équation différentielle - les solutions de chaque équation différentielle au programme
Identifier	- une équation différentielle
Justifier	- qu'une fonction est solution d'une équation différentielle
Résoudre	- une équation différentielle du type $f' = af$ (a réel) - une équation différentielle du type $f' = af + b$ (a et b réels et $a \neq 0$)
Déterminer	- la solution d'une équation différentielle du type $f' = af + b$ (a et b réels) satisfaisant à une condition initiale donnée

PLAN DE LA SEANCE1

I. NOTION D'EQUATION DIFFERENCIELLE
Définitions

II. EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU TYPE $f' = af + b$ (a et b réels ; $a \neq 0$)

1. Equations différentielles du type $f' = b$
2. Equations différentielles du type $f' = af$
3. Equations différentielles du type $f' = af + b$
4. Equations différentielles du type $f' = af + b$ vérifiant une condition

SEANCE2

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- les solutions de chaque équation différentielle au programme
Résoudre	- une équation différentielle du type $f'' = 0$ - une équation différentielle du type $f'' = \omega^2 f$ (ω réel non nul) - une équation différentielle du type $f'' = -\omega^2 f$ (ω réel non nul)

PLAN DE LA SEANCE2

III. EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU TYPE $f'' = mf$ (m réel)

1. Equations différentielles du type $f'' = 0$
2. Equations différentielles du type $f'' = \omega^2 f$ ($\omega \in \mathbb{R}^*$)
3. Equations différentielles du type $f'' = -\omega^2 f$ ($\omega \in \mathbb{R}^*$)

SEANCE3

HABILETES	CONTENUS
Déterminer	- la solution d'une équation différentielle du type $f'' = mf$ (m réel) satisfaisant à des conditions initiales données.

PLAN DE LA SEANCE3

4. Equations différentielles du type $f'' = mf$ vérifiant deux conditions

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON12 : EQUATIONS DIFFERENTIELLES

SEANCE : 1/3

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la définition d'une équation différentielle - les solutions de chaque équation différentielle au programme
Identifier	- une équation différentielle
Justifier	- qu'une fonction est solution d'une équation différentielle
Résoudre	- une équation différentielle du type $f' = af$ (a réel) - une équation différentielle du type $f' = af + b$ (a et b réels et $a \neq 0$)
Déterminer	- la solution d'une équation différentielle du type $f' = af + b$ (a et b réels) satisfaisant à une condition initiale donnée

PLAN DE LA SEANCE

I. NOTION D'EQUATION DIFFERENCIELLE
   Définitions
II. EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU TYPE $f' = af + b$ (a et b réels ; $a \neq 0$)
   1. Equations différentielles du type $f' = b$
   2. Equations différentielles du type $f' = af$
   3. Equations différentielles du type $f' = af + b$
   4. Equations différentielles du type $f' = af + b$ vérifiant une condition

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Présentation *5 min*	-Lecture -Travail collectif	-Donne l'énoncé de la situation d'apprentissage aux apprenants. -Demande aux apprenants de faire une lecture silencieuse de la situation. -Demande à un apprenant de lire à haute voix l'énoncé de la situation. -Lis l'énoncé de la situation d'apprentissage à haute voix. **Question pour faire ressortir les tâches :** Qu'est-ce que les élèves décident de faire ?	-Les apprenants lisent silencieusement l'énoncé de la situation. -Un apprenant lis à haute voix l'énoncé de la situation. -Les apprenants écoutent Attentivement. REPONSE ATTENDUE les élèves décident de faire des recherches sur le type équation qui met en relation une fonction et sa dérivée.	
Développement *10 min*	-Travail individuel	ACTIVITE1 On donne la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = \frac{3}{x}$ f est la primitive sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en e. 1.a.Traduis par une équation l'expression « f est une primitive de g ». b. Donne l'inconnue de cette équation. 2.a.Traduis par une égalité l'expression « f est la primitive de g qui s'annule en e	REPONSES ATTENDUES 1.a. $f'(x) = g(x)$ b. L'inconnue dans l'équation : $f'(x) = g(x)$ est la fonction f. 2.a. $f(e) = 0$. b. L'égalité $f(e) = 0$ est une condition à laquelle doit satisfaire la fonction inconnue f.	I. NOTION D'EQUATION DIFFERENTIELLE Définitions On appelle ***équation différentielle***, toute équation ayant pour inconnue une fonction et dans laquelle figure au moins une des dérivées successives de la fonction inconnue. On appelle solution d'une équation différentielle toute fonction définie et dérivable

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		b. Dis ce que représente cette égalité pour l'équation. *L'équation* $f'(x) = g(x)$ *est* appelée ***équation différentielle***. *Toute autre lettre désignant une fonction peut être utilisée à la place de f.* *La condition* $f(e) = 0$ *est appelée* ***condition initiale*** *du problème.* *Toute équation ayant pour* ***inconnue une fonction*** *et dans laquelle figure* ***au moins une des dérivées successives de la fonction inconnue*** *est appelée* ***équation différentielle***. *Une* ***équation différentielle est dite d'ordre n*** *lorsque le plus grand ordre des dérivées intervenant dans cette équation est* ***n***. *Toute fonction vérifiant une équation différentielle sur un intervalle ouvert K est appelée solution sur K de cette équation différentielle.*		sur un intervalle et vérifiant cette équation. Intégrer ou résoudre une équation différentielle sur un intervalle K, c'est déterminer l'ensemble des solutions de cette équation différentielle sur K.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *3 minutes*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Parmi les équations suivantes, indique celles qui sont des équations différentielles. 1. $(E_1): 2y^3 - y = 5$ 2. $(E_2): 3y' - 4 = 0$ 3. $(E_3): 3y^2 = 8$ 4. $(E_4): y'' - 2y' - y = 1$ 5. $(E_5): y - 4 = -1$ 6. $(E_6): 2y'' - 5y = 11$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> (E_2), (E_4) et (E_2) sont des équations différentielles. (E_1), (E_3) et (E_5) ne sont pas des équations différentielles.	
Développement *22 min*	-Travail en groupes	<u>ACTIVITE2</u> Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$; a et b deux nombres réels. On considère l'équation différentielle : $f' = af + b$. 1. Détermine les solutions de (E) : a. Pour $a = 0$ et $b \neq 0$ b. Pour $a \neq 0$ et $b = 0$ 2. Pour $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Vérifie que les fonctions h définies par : $h(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ sont Solutions de (E). 3. Démontre que la solution de (E) vérifiant $f(x_0) = y_0$ est unique.	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **1. a**. Pour $a = 0$ et $b \neq 0$ $(E): f' = b$ $\frac{df}{dx} = b \Leftrightarrow df = bdx$ $\int df = \int bdx$ $\int df = b\int dx$ $\boldsymbol{f(x) = bx + c, c \in \mathbb{R}}$ **b**. Pour $a \neq 0$ et $b = 0$ $(E): f' = af$ $\frac{df}{dx} = af \Leftrightarrow \frac{df}{f} = adx$ $\int \frac{1}{f} df = \int adx$ $\int \frac{1}{f} df = a\int dx$	II. <u>EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU TYPE $f' = af + b$ (a et b réels ; $a \neq 0$)</u> 1. <u>Equations différentielles du type $f' = b$</u> <u>Propriété</u> Soit b un nombre réel. Les solutions de l'équation différentielle $f' = b$ sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = bx + k$ où k est une constante réelle quelconque. 2. <u>Equations différentielles du type $f' = af$</u>

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			$\ln f(x) = ax + c, c \in \mathbb{R}$ $e^{\ln f(x)} = e^{ax+c}, c \in \mathbb{R}$ $f(x) = e^{ax+c}, c \in \mathbb{R}$ $f(x) = e^c e^{ax}, c \in \mathbb{R}$ $\boldsymbol{f(x) = ke^{ax}, k \in \mathbb{R}}$ $avec\ k = e^c$ **2**. $f' = af + b$ $h(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ $h'(x) = ake^{ax}$ $ah(x) + b = ake^{ax} - b + b$ $ah(x) + b = ake^{ax}$ $h'(x) = ah(x) + b$ Les fonctions *h* définies par : $h(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ sont Solutions de (E). **3**. Soit f_1 et f_2 deux solutions de (E) telles que : $f_1(x) = k_1 e^{ax} - \frac{b}{a}$ et $f_2(x) = k_2 e^{ax} - \frac{b}{a}$ Supposons que : $f_1(x_0) = f_2(x_0) = y_0$ c'est-à-dire $k_1 e^{ax_0} - \frac{b}{a} = k_2 e^{ax_0} - \frac{b}{a}$ $k_1 e^{ax_0} = k_2 e^{ax_0} \Leftrightarrow$ $(k_1 - k_2)e^{ax_0} = 0 \Leftrightarrow k_1 - k_2 = 0$ $k_1 = k_2$ D'où $f_1(x) = f_2(x)$	Soit a un réel. Les solutions de l'équation différentielle $f' = af$ sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = ke^{ax}$ où k est une constante réelle quelconque. 3. <u>Equations différentielles du type $f' = af + b$</u> Soit a et b deux nombres réels non nuls. Les solutions de l'équation différentielle $f' = af + b$ sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ où k est une constante réelle quelconque. 4. <u>Equations différentielles du type $f' = af + b$ vérifiant une condition</u> Quels que soient les nombres réels x_0 et y_0, l'équation $f' = af + b$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ admet une unique solution g telle que $g(x_0) = y_0$.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *15 minutes*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Intègre chacune des équations différentielles suivantes puis déduire celle qui vérifie la condition initiale indiquée. 1. $y' = 4y \quad ; y(1) = 2e.$ 2. $y' + 3y = 0 \ ; \ y(-1) = e.$ 3. $y' = 5 \quad ; y(0) = 7.$ 4. $y' = 3y + 2 \quad ; y(0) = 0.$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **1.** $y' = 4y \quad ; y(1) = 2e.$ Les solutions de l'équation différentielle $y' = 4y$ sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = ke^{4x}, k \in \mathbb{R}$ $f_k(1) = 2e \Leftrightarrow ke^4 = 2e$ $k = \frac{2e}{e^4} = 2e^{-3}$ La solution de l'équation différentielle $y' = 4y$ qui vérifie la condition $y(1) = 2e$ est la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2e^{-3}e^{4x}$ $f(x) = 2e^{4x-3}$ **2.** $y' + 3y = 0 \ ; \ y(-1) = e.$ $y' = -3y \ ; \ y(-1) = e.$ Les solutions de l'équation différentielle $y' = -3y$ sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = ke^{-3x}, k \in \mathbb{R}$ $f_k(-1) = e \Leftrightarrow ke^3 = e$ $k = \frac{e}{e^3} = e^{-2}$ La solution de l'équation différentielle $y' = -3y$ qui vérifie la condition $y(-1) = e$ est la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-2}e^{-3x}$ $f(x) = 2e^{-3x-2}$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
	-Travail individuel	EXERCICE DE MAISON	**3.** $y' = 5 \quad ; y(0) = 7.$ Les solutions de l'équation différentielle $y' = 5$ sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = 5x + k, k \in \mathbb{R}$ $f_k(0) = 7 \Leftrightarrow 5 \times 0 + k = 7$ $k = 7$ La solution de l'équation différentielle $y' = 5$ qui vérifie la condition $y(0) = 7$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 5x + 7$ **4.** $y' = 3y + 2 \quad ; y(0) = 0.$ Les solutions de l'équation différentielle $y' = 3y + 2$ sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = ke^{3x} - \frac{2}{3}, k \in \mathbb{R}$ $f_k(0) = 0 \Leftrightarrow k - \frac{2}{3} = 0$ $k = \frac{2}{3}$ La solution de l'équation différentielle $y' = 3y + 2$ qui vérifie la condition $y(0) = 0$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{2}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}$	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON12 : EQUATIONS DIFFERENTIELLES

SEANCE : 2/3

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- les solutions de chaque équation différentielle au programme
Résoudre	- une équation différentielle du type $f'' = 0$ - une équation différentielle du type $f''=\omega^2 f$ (ω réel non nul) - une équation différentielle du type $f''=-\omega^2 f$ (ω réel non nul)

PLAN DE LA SEANCE

III. EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU TYPE $f'' = mf$ (m réel)
   1. Equations différentielles du type $f'' = 0$
   2. Equations différentielles du type $f'' = \omega^2 f$ ($\omega \in \mathbb{R}^*$)
   3. Equations différentielles du type $f'' = -\omega^2 f$ ($\omega \in \mathbb{R}^*$)

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
15 min *Développement* *30 min*	-Travail en groupes -Travail en groupes	Correction des exercices de maison ACTIVITE Soient m un nombre réel et f une fonction deux fois dérivable. 1. Lorsque $m = 0$. a. détermine l'ensemble des fonctions f telles que $f'' = 0$. b. Vérifie que toute fonction h définie par $h(x) = ax + b$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle $f'' = 0$. 2. Lorsque $m = \omega^2, \omega \in \mathbb{R}^*$ a. Vérifie que les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\omega x}$ et $g(x) = e^{-\omega x}$ sont solutions de l'équation différentielle $f'' = \omega^2 f$. b. Démontre que pour tout couple $(a; b)$ élément de $\mathbb{R}^2$, la fonction Hdéfinie par $H(x) = af(x) + bg(x)$ est solution de l'équation différentielle $f'' = \omega^2 f$. c. Déduis en l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $f'' = \omega^2 f$. 3. Lorsque $m = -\omega^2, \omega \in \mathbb{R}^*$ a. Démontre que les fonctions p	REPONSES ATTENDUES **1.a**. $f'' = 0$ donc $f'(x) = a, a \in \mathbb{R}$ $f(x) = ax + b,\ a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$ **b**. $h(x) = ax + b$ donc $h'(x) = a$ $h''(x) = 0$ donc h est solution de l'équation différentielle $f'' = 0$. **2.a**. $f'' = \omega^2 f$ $f(x) = e^{\omega x} \Rightarrow f'(x) = \omega e^{\omega x}$ $f'(x) = \omega e^{\omega x} \Rightarrow f''(x) = \omega^2 e^{\omega x}$ $f''(x) = \omega^2 f(x)$ donc la fonction f est solution de l'équation différentielle $f'' = \omega^2 f$. $g(x) = e^{-\omega x} \Rightarrow g'(x) = -\omega e^{-\omega x}$ $g'(x) = -\omega e^{\omega x} \Rightarrow$ $g''(x) = \omega^2 e^{-\omega x}$ $g''(x) = \omega^2 g(x)$ donc la fonction g est solution de l'équation différentielle $f'' = \omega^2 f$. **b**. $H(x) = af(x) + bg(x)$ $H''(x) = af''(x) + bg''(x)$ $H''(x) = a\omega^2 f(x) + b\omega^2 g(x)$ $H''(x) = \omega^2[af(x) + bg(x)]$ $H''(x) = \omega^2 H(x)$ H est solution de l'équation différentielle $f'' = \omega^2 f$.	III. EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU TYPE $f'' = mf$ (m réel) 1. Equations différentielles du type $f'' = 0$ Les solutions de l'équation différentielle $f'' = 0$ sont les fonctions $f_{a,b}$ définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_{a,b}(x) = ax + b$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. 2. Equations différentielles du type $f'' = \omega^2 f$ ($\omega \in \mathbb{R}^*$) Soit ω un nombre réel non nul. Les solutions de l'équation différentielle $f'' = \omega^2 f$ sont les fonctions $f_{a,b}$ définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_{a,b}(x) = ae^{\omega x} + be^{-\omega x}$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ 3. Equations différentielles du type $f'' = -\omega^2 f$ ($\omega \in \mathbb{R}^*$)

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		et h définies sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = \sin(\omega x)$ et $h(x) = \cos(\omega x)$ sont solutions de l'équation différentielle $f'' = -\omega^2 f$. b. Démontre que pour tout couple $(a; b)$ élément de $\mathbb{R}^2$, la fonction Gdéfinie par $G(x) = ap(x) + bh(x)$ est solution de l'équation différentielle $f'' = -\omega^2 f$. c. Déduis en l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $f'' = -\omega^2 f$.	**c**. On déduis de ce qui précède que les solutions de l'équation différentielle $f'' = \omega^2 f$ sont les fonctions $x \mapsto ae^{\omega x} + be^{-\omega x}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. **3**.**a**. $f'' = -\omega^2 f$ $p(x) = \sin(\omega x) \Rightarrow$ $f'(x) = \omega \cos(\omega x)$ $f'(x) = \omega \cos(\omega x)$ $\Rightarrow f''(x) = -\omega^2 \sin(\omega x)$ $p''(x) = -\omega^2 p(x)$ donc la fonction p est solution de l'équation différentielle $f'' = -\omega^2 f$. $h(x) = \cos(\omega x)$ $\Rightarrow h'(x) = -\omega \sin(\omega x)$ $h'(x) = -\omega \sin(\omega x) \Rightarrow$ $h''(x) = -\omega^2 \cos(\omega x)$ $h''(x) = -\omega^2 h(x)$ donc la fonction h est solution de l'équation différentielle $f'' = -\omega^2 f$. **b**. $G(x) = ap(x) + bh(x)$ $G''(x) = ap''(x) + bh''(x)$ $G''^{(x)} = -a\omega^2 p(x) - b\omega^2 h(x)$ $G''(x) = -\omega^2[ap(x) + bh(x)]$ $G''(x) = -\omega^2 G(x)$ G est solution de l'équation	Soit ω un nombre réel non nul. Les solutions de l'équation différentielle $f'' = -\omega^2 f$ sont les fonctions $f_{a,b}$ définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_{a,b}(x) = a \sin(\omega x) + b \cos(\omega x)$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *10 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations différentielles suivantes : 1. $y'' = 0$ 2. $y'' = y$ 3. $y'' - 49y = 0$ 4. $y'' + 36y = 0$ 5. $y'' = -16y$	différentielle $f'' = -\omega^2 f$. **c**. On déduis de ce qui précède que les solutions de l'équation différentielle $f'' = -\omega^2 f$ sont les fonctions $x \mapsto a\sin(\omega x) + b\cos(\omega x)$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. <u>REPONSES ATTENDUES</u> **1**. $y'' = 0$ Les solutions de l'équation différentielle $y'' = 0$ sont les fonctions $f_{a,b}$ définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_{a,b}(x) = ax + b$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. **2**. $y'' = y$ Les solutions de l'équation différentielle $y'' = 1^2 y$ sont les fonctions $f_{a,b}$ définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_{a,b}(x) = ae^x + be^{-x}$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ **3**. $y'' - 49y = 0$ Les solutions de l'équation différentielle $y'' = 7^2 y$ sont les fonctions $f_{a,b}$ définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_{a,b}(x) = ae^{7x} + be^{-7x}$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ **4**. $y'' + 36y = 0$ Les solutions de l'équation différentielle $f'' = -6^2 f$ sont les	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
	-Travail individuel	EXERCICE DE MAISON Dans chacun des cas suivants résous l'équation différentielle (E). a. $y'' + y = 0$ b. $y'' - 3y = 0$ c. $y'' - 4y = 0$ d. $4y'' - y = 0$ e. $y'' - 9y = 0$ f. $4y'' - 49y = 0$ g. $4y'' + y = 0$ h. $16y'' - 9y = 0$ i. $16y'' + 9y = 0$ j. $4y'' + 49y = 0$	fonctions $f_{a,b}$ définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_{a,b}(x) = a\sin(6x) + b\cos(6x)$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. **5.** $y'' = -16y$ Les solutions de l'équation différentielle $f'' = -4^2 f$ sont les fonctions $f_{a,b}$ définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_{a,b}(x) = a\sin(4x) + b\cos(4x)$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON12 : EQUATIONS DIFFERENTIELLES

SEANCE : 3/3

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Déterminer	- la solution d'une équation différentielle du type $f'' = mf$ (m réel) satisfaisant à des conditions initiales données.

PLAN DE LA SEANCE

4. Equations différentielles du type $f'' = mf$ vérifiant deux conditions

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
15 min	-Travail en groupe	Correction de l'exercice de maison		
Développement *25 min*	-Travail en groupes	<u>ACTIVITE</u> Soient m un nombre réel et f une fonction deux fois dérivable. Dans chacun des cas suivants, démontre que quels que soient les réels x_0, y_0 et z_0, l'équation différentielle $f'' = mf$ admet une unique solution g telle que : $g(x_0) = y_0$ et $g'(x_0) = z_0$. a. Cas1 : $m = 0$ b. Cas2 : $m = \omega^2, \omega \in \mathbb{R}^*$ c. Cas3 : $m = \omega^2, \omega \in \mathbb{R}^*$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **a**. Cas1 : $m = 0$ $f'' = 0$ Les solutions de l'équation différentielle $y'' = 0$ sont les fonctions $f_{a,b}$ définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_{a,b}(x) = ax + b,$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ Soient g_1 et g_2 deux solutions de l'équation différentielle $f'' = 0$ telles que $g_1(x) = a_1 + b_1$ et $g_2(x) = a_2 + b_2$. $g_1(x_0) = y_0$ et $g_1'(x_0) = z_0$. $g_2(x_0) = y_0$ et $g_2'(x_0) = z_0$. $g_1(x_0) = g_2(x_0)$ et $g_1'(x_0) = g_2'(x_0)$ $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$ et $a_1 = a_2$ D'où $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$ Conclusion : $g_1(x) = g_2(x)$. **b**. Cas2 : $m = \omega^2, \omega \in \mathbb{R}^*$ $f'' = \omega^2 f$ Les solutions de l'équation différentielle $f'' = \omega^2 f$ sont les fonctions $f_{a,b}$ définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_{a,b}(x) = ae^{\omega x} + be^{-\omega x}$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.	4. <u>Equations différentielles du type $f'' = mf$ vérifiant deux conditions</u> Quels que soient les nombres réels x_0, y_0 et z_0, l'équation différentielle $f'' = mf, m \in \mathbb{R}$ admet une unique solution g telle que : $g(x_0) = y_0$ et $g'(x_0) = z_0$.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			Soient g_1 et g_2 deux solutions de l'équation différentielle $f'' = \omega^2 f$ telles que : $g_1(x) = a_1 e^{\omega x} + b_1 e^{-\omega x}$ et $g_2(x) = a_2 e^{\omega x} + b_2 e^{-\omega x}$ $\begin{cases} g_1(x_0) = y_0 \text{ et } g_1'(x_0) = z_0 \\ g_2(x_0) = y_0 \text{ et } g_2'(x_0) = z_0 \end{cases}$ $\begin{cases} g_1(x_0) = g_2(x_0) \\ g_1'(x_0) = g_2'(x_0) \end{cases}$ $a_1 e^{\omega x_0} + b_1 e^{-\omega x_0} = a_2 e^{\omega x_0} + b_2 e^{-\omega x_0}$ et $a_1 \omega e^{\omega x} - b_1 \omega e^{-\omega x} = a_2 \omega e^{\omega x} - b_2 \omega e^{-\omega x} a_2$ $(a_1 - a_2) e^{\omega x_0} + (b_1 - b_2) e^{-\omega x_0} = 0$ et $(a_1 - a_2)\omega e^{\omega x_0} + (b_2 - b_1)\omega e^{-\omega x_0} = 0$ $(a_1 - a_2) = 0$ et $(b_1 - b_2) = 0$ $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$ Conclusion : $g_1(x) = g_2(x)$. **c**. Cas3 : $m = -\omega^2, \omega \in \mathbb{R}^*$ $f'' = -\omega^2 f$ Les solutions de l'équation différentielle $f'' = -\omega^2 f$ sont les fonctions $f_{a,b}$ définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_{a,b}(x) = a \sin(\omega x) + b \cos(\omega x)$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Soient g_1 et g_2 deux solutions de l'équation différentielle $f'' = -\omega^2 f$ telles que $g_1(x) = a_1 \sin(\omega x) + b_1 \cos(\omega x)$ $g_2(x) = a_2 \sin(\omega x) + b_2 \cos(\omega x)$ $\begin{cases} g_1(x_0) = y_0 \text{ et } g_1'(x_0) = z_0 \\ g_2(x_0) = y_0 \text{ et } g_2'(x_0) = z_0 \end{cases}$ $\begin{cases} g_1(x_0) = g_2(x_0) \\ g_1'(x_0) = g_2'(x_0) \end{cases}$ $a_1 \sin(\omega x_0) + b_1 \cos(\omega x_0) = a_2 \sin(\omega x_0) + b_2 \cos(\omega x_0)$ et $a_1\omega \cos(\omega x_0) - b_1\omega \sin(\omega x_0) = a_2\omega \cos(\omega x_0) - b_2\omega \sin(\omega x_0)$ $(a_1 - a_2) \sin(\omega x_0) + (b_1 - b_2) \cos(\omega x_0) = 0$ et $(a_1 - a_2)\omega \cos(\omega x_0) + (b_2 - b_1)\omega \sin(\omega x_0) = 0$ $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$ Conclusion : $g_1(x) = g_2(x)$.	
Evaluation	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Intégrer chacune des équations différentielles suivantes puis déduire celle qui vérifie la condition initiale indiquée.	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **1**. $y'' = 4y \Leftrightarrow y'' = 2^2 y$ Les solutions de l'équation différentielle $f'' = 2^2 f$ sont les fonctions $f_{a,b}$ définies sur $\mathbb{R}$ par :	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		1. $y'' = 4y$; $y(0) = 2$ et $y'(0) = -10$. 2. $y'' + 36y = 0$; $y(0) = 1$ et $y'(0) = 6$. 3. $y'' = 0$; $y(1) = 2$ et $y'(1) = 3$.	$f_{a,b}(x) = ae^{4x} + be^{-4x}$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. $\begin{cases} f(0) = 2 \\ f'(0) = -10 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} a + b = 2 \\ 4a - 4b = -10 \end{cases}$ $\begin{cases} 4a + 4b = 8 \\ 4a - 4b = -10 \end{cases}$ $8a = -2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}$ $-8b = -18 \Leftrightarrow b = \frac{9}{4}$ $f(x) = -\frac{1}{4}e^{4x} + \frac{9}{4}e^{-4x}$ **2**. $y'' + 36y = 0 \Leftrightarrow y'' = -6^2 y$ Les solutions de l'équation différentielle $f'' = -6^2 f$ sont les fonctions $f_{a,b}$ définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_{a,b}(x) = a\sin(6x) + b\cos(6x)$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} b = 1 \\ 6a = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$ $f(x) = \sin(6x) + \cos(6x)$ 3. $y'' = 0$ Les solutions de l'équation différentielle $y'' = 0$ sont les fonctions $f_{a,b}$ définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_{a,b}(x) = ax + b,$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f'(1) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ a = 3 \end{cases}$ $a = 3$ et $b = -1$ $f(x) = 3x - 1$	

Tableau récapitulatif de résolution de quelques types d'équations différentielles

Types d'équations différentielles	**Solutions générales sur $\mathbb{R}$**
$y' = a, a \in \mathbb{R}$	$x \mapsto ax + k, k \in \mathbb{R}$
$y' = ay, a \in \mathbb{R}$	$x \mapsto ke^{ax}, k \in \mathbb{R}$
$y' = ay + b, a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}^*$	$x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}, k \in \mathbb{R}$
$y'' = 0$	$x \mapsto ax + b, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$
$y'' = \omega^2 y, \omega \in \mathbb{R}^*$	$x \mapsto ae^{\omega x} + be^{-\omega x}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$
$y'' = -\omega^2 y, \omega \in \mathbb{R}^*$	$x \mapsto a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x), a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$

BIBLIOGRAPHIE

Programmes éducatifs et guides d'exécution Mathématiques $T^{LE}D$

Progressions annuelles

Mon livre de mathématiques $T^{LE}D$ Collection PYRAMIDE

Mon livre de mathématiques $T^{LE}D$ Collection CIAM/EDICEF

Les cahiers de la réussite T^{LE} D Vallesse

Mon cahier d'habiletés Mathématiques T^{LE} D JD Editions

WWW.monecoleàlamaison.ci

https://physiques-et-maths.fr