Mathématiques

1ère A

Corrigé

Auteurs

ARRICO Lucie
Professeur de lycée
AKÉ Djebri Antonin
Professeur de lycée

Vallesse

ISBN : 978-2-902594-90-0

Leçon 1 Équations et inéquations dans $\mathbb{R}$

IV. Exercices

IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

V ; F ; V ; V ; F ; F.

Exercice 2

1- A ; 2- C ; 3- B ; 4- A ; 5- B

Exercice 3

Q et R sont sous la forme $ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des nombres réels.

a) $P = 3x^2 + 5x + 2$; a = 3 ; b = 5 ; c = 2 ;

$\Delta = 5^2 - 4 \times 3 \times 2 = 25 - 24 = 1$.

b) $Q = -2x^2 + 2\sqrt{2}x - 1$; a = −2 ;

b = $2\sqrt{2}$; c = −1.

$\Delta = (2\sqrt{2})^2 - 4 \times (-2) \times (-1) = 8 - 8 = 0$.

c) $R = 3x^2 + 12x + 12$;

$a = 3$; $b = 12$; $c = 12$.

$\Delta = 12^2 - 4 \times (3) \times 12 = 144 - 144 = 0$.

Exercice 4

K est sous la forme $ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des nombres réels.

a) $K = x^2 + x + 1$; $a = 1$; $b = 1$; $c = 1$;

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$.

b) $K = x^2 - x - 6$; $a = 1$; $b = -1$; $c = -6$;

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$.

c) $K = 9x^2 - 6x + 1$; $a = 9$; $b = -6$; $c = 1$;

$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 9 \times 1 = 1$.

Exercice 5

Entourer

$3x^2 + 2x + 7 = 0$; $x^2 + x - 1 = 0$; $16x^2 - 25 = 0$

$-6x^2 - 10x + 1 = 0$ et $x^2 + 4x = 0$.

Exercice 6

a) $L = x^2 - 2x - 3$, $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$.

On a : $\Delta > 0$, L a deux zéros.

On a : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \dfrac{-(-2) - \sqrt{16}}{2 \times 1} = -1$;

$x_2 = \dfrac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \times 1} = 3$.

Les zéros de L sont −1 et 3.

b) $L = 4x^2 + 4x + 1$, $\Delta = (4)^2 - 4 \times 4 \times 1 = 0$.

On a : $\Delta = 0$, donc L a un zéro.

On a : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.

$x_0 = \dfrac{-4}{2 \times 4} = -\dfrac{1}{2}$;

$-\dfrac{1}{2}$ est le seul zero de L.

c) $L = x^2 + x + 1$, $\Delta = (1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$.

On a : $\Delta < 0$, donc L n'a pas de zéro.

Exercice 7

a) $3x^2 - 2x + 5 = 0$, $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times 5 = -56$.

On a : $\Delta < 0$, donc M n'a pas de zéro.

b) $2x^2 - 4x + 2 = 0$; $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 0$.

On a : $\Delta = 0$, donc M a un seul zéro.

On a : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.

$x_0 = \dfrac{-(-4)}{2 \times 2} = -1$;

c) $x^2 - x - 12 = 0$; $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-12) = 49$.

$\Delta > 0$, donc M a deux zéros distincts.

On a : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \dfrac{-(-1) - \sqrt{49}}{2 \times 1} = -3$;

$x_2 = \dfrac{-(-1) + \sqrt{49}}{2 \times 1} = 4$.

Exercice 8

$4x^2 - 4x - 3 = 0$; $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 4 \times (-3) = 64$

$\Delta > 0$, donc l'équation admet deux solutions.

On a : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \dfrac{-(-4)-\sqrt{64}}{2\times 4} = -\dfrac{1}{2}$;

$x_2 = \dfrac{-(-4)+\sqrt{64}}{2\times 4} = \dfrac{3}{2}$.

$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right\}$.

Exercice 9

$3x^2 + 4x + 1 = 0$; $\Delta = 4^2 - 4 \times 3 \times 1 = 4$.

$\Delta > 0$, donc l'équation admet deux solutions.

On a : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \dfrac{-4-\sqrt{4}}{2\times 3} = -1$; $x_2 = \dfrac{-4+\sqrt{4}}{2\times 3} = -\dfrac{1}{3}$.

$S_{\mathbb{R}} = \left\{-1;-\dfrac{1}{3}\right\}$.

Exercice 10

$9x^2 + 6x + 1 = 0$; $\Delta = (6)^2 - 4 \times 9 \times 1 = 0$

$\Delta = 0$, donc l'équation admet une solution.

On a : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.

$x_1 = \dfrac{-6}{2\times 9} = -\dfrac{1}{3}$;

$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$.

Exercice 11

$x^2 + 5x + 7 = 0$; $\Delta = (5)^2 - 4 \times 1 \times 7 = -3$

$\Delta < 0$, donc l'équation n'admet pas de solution.

$S_{\mathbb{R}} = \emptyset$.

Exercice 12

$x^2 - x - 4 = 0$; $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 17$.

$\Delta > 0$, donc l'équation admet deux solutions.

On a : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \dfrac{-(-1)-\sqrt{17}}{2\times 1} = \dfrac{1-\sqrt{17}}{2}$;

$x_2 = \dfrac{-(-1)+\sqrt{17}}{2\times 1} = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$.

$S_{\mathbb{R}} = \left\{\dfrac{1-\sqrt{17}}{2};\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\right\}$.

Exercice 13

$-x^2 + 3x - 2 = 0$; $\Delta = (3)^2 - 4 \times (-1) \times (-2) = 1$

$\Delta > 0$, donc l'équation admet deux solutions.

On a : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \dfrac{-3-\sqrt{1}}{2\times(-1)} = 2$; $x_2 = \dfrac{-3+\sqrt{1}}{2\times(-1)} = 1$.

$S_{\mathbb{R}} = \{1;2\}$.

Exercice 14

$P = x^2 - 6x + 8$; P est sous la forme

$ax^2 + bx + c$, où $a = 1$, $b = -6$ et $c = 8$.

$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 4$.

$\Delta > 0$, donc le polynôme admet deux zéros.

On a : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \dfrac{-(-6)-\sqrt{4}}{2\times 1} = 2$;

$x_2 = \dfrac{-(-6)+\sqrt{4}}{2\times 1} = 4$.

$P = a(x - x_1)(x - x_2)$.

$P = (x - 2)(x - 4)$.

Exercice 15

$Q = x^2 + 4x + 3$; Q est sous la forme $ax^2 + bx + c$, où $a = 1$, $b = 4$ et $c = 3$.

$\Delta = (4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4$.

$\Delta > 0$, donc le polynôme admet deux zéros.

On a : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \dfrac{-4-\sqrt{4}}{2\times 1} = -3$; $x_2 = \dfrac{-4+\sqrt{4}}{2\times 1} = -1$.

$Q = a(x - x_1)(x - x_2)$.

$Q = (x + 3)(x + 1)$.

Exercice 16

$R = 2x^2 - 5x + 3$; R est sous la forme $ax^2 + bx + c$, où $a = 2$, $b = -5$ et $c = 3$.

$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 1$

$\Delta > 0$, donc le polynôme admet deux zéros.

On a : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \dfrac{-(-5)-\sqrt{1}}{2\times 2} = 1$;

$x_2 = \dfrac{-(-5)+\sqrt{1}}{2\times 2} = \dfrac{3}{2}$.

$R = a(x - x_1)(x - x_2)$.

$R = 2(x-1)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$.

Exercice 17

$S = 2x^2 - 6x - 10$; S est sous la forme $ax^2 + bx + c$, où $a = 2$, $b = -6$ et $c = -10$.

$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 2 \times (-10) = 116$.

$\Delta > 0$, donc le polynôme admet deux zéros.

On a : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \dfrac{-(-6)-\sqrt{116}}{2\times 2} = \dfrac{3-\sqrt{29}}{2}$;

$x_2 = \dfrac{3+\sqrt{29}}{2}$.

$S = a(x - x_1)(x - x_2)$

$S = 2\left(x-\dfrac{3-\sqrt{29}}{2}\right)\left(x-\dfrac{3+\sqrt{29}}{2}\right)$.

Exercice 18

$P = x^2 - 6x + 9$; P est sous la forme $ax^2 + bx + c$, où $a = 1$, $b = -6$ et $c = 9$.

$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 0$.

$\Delta = 0$, donc le polynôme admet un zéro.

On a : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.

$x_0 = \dfrac{-(-6)}{2\times 1} = 3$;

$P = a(x - x_0)^2$

$P = (x - 3)^2$

Exercice 19

$T = 9x^2 - 6x + 1$; T est sous la forme

$ax^2 + bx + c$, où $a = 9$, $b = -6$ et $c = 1$.

$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 9 \times 1 = 0$.

$\Delta = 0$, donc le polynôme admet un zéro.

On a : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.

$x_0 = \dfrac{-(-6)}{2\times 9} = \dfrac{1}{3}$;

$T = 9\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2$ ou

$T = (3x - 1)^2$.

Exercice 20

$P = x^2 + 2x + 1$; P est sous la forme $ax^2 + bx + c$, où $a = 1$, $b = 2$ et $c = 1$.

$\Delta = (2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$

$\Delta = 0$, donc le polynôme admet un zéro.

On a : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.

$x_0 = \dfrac{-2}{2\times 1} = -1$;

$P = (x + 1)^2$.

Pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $P \geq 0$.

Exercice 21

$Q = 5x^2 + 3x + 2$; Q est sous la forme

$ax^2 + bx + c$, où $a = 5$, $b = 3$ et $c = 2$.

$\Delta = (3)^2 - 4 \times 5 \times 2 = -31.$

$\Delta < 0$, donc le polynôme n'admet pas de zéro.

Le signe de Q est le signe de a. Donc Q est positif sur $\mathbb{R}$.

Exercice 22

$R = 4x^2 + 12x + 9$; R est sous la forme

$ax^2 + bx + c$, où $a = 4$, $b = 12$ et $c = 9$.

$\Delta = (12)^2 - 4 \times 4 \times 9 = 0$

$\Delta = 0$, donc le polynôme admet un zéro.

On a : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.

$x_0 = \dfrac{-12}{2 \times 4} = -\dfrac{3}{2}$

$R = 4\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2$.

Pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $R \geq 0$.

Exercice 23

$P = -x^2 + 6x - 9$; P est sous la forme

$ax^2 + bx + c$, où $a = -1$, $b = 6$ et $c = -9$.

$\Delta = (6)^2 - 4 \times (-1) \times (-9) = 0.$

$\Delta = 0$, donc le polynôme admet un zéro.

On a : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.

$x_0 = \dfrac{-6}{2 \times (-1)} = 3$

$P = -(x - 3)^2$.

Pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $P \leq 0$.

Exercice 24

$P = -8x^2 + 8x - 2$; P est sous la forme

$ax^2 + bx + c$, où $a = -8$, $b = 8$ et $c = -2$.

$\Delta = 8^2 - 4 \times (-8) \times (-2) = 0.$

$\Delta = 0$, donc P admet un zéro.

On a : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$; $x_0 = \dfrac{-8}{2(-8)} = \dfrac{1}{2}$

$P = -8\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2$.

Pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $P \leq 0$.

Exercice 25

$P = x^2 - 4x - 5$; P est sous la forme

$ax^2 + bx + c$, où $a = 1$, $b = -4$ et $c = -5$.

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 36$

$\Delta > 0$, donc le polynôme admet deux zéros.

On a : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \dfrac{-(-4) - \sqrt{36}}{2 \times 1} = -1$;

$x_2 = \dfrac{-(-4) + \sqrt{36}}{2 \times 1} = 5.$

$P = a(x - x_1)(x - x_2)$

$P = (x + 1)(x - 5)$

$P > 0$, pour tout x élément de $]-\infty ; -1] \cup [5 ; +\infty[$.

$P < 0$, pour tout x élément de $[-1 ; 5]$.

$P = 0$, pour tout x élément de $\{-1 ; 5\}$.

Exercice 26

$P = -x^2 + 7x - 12$; P est sous la forme

$ax^2 + bx + c$, où $a = -1$, $b = 7$ et $c = -12$.

$\Delta = (7)^2 - 4 \times (-1) \times (-12) = 1.$

$\Delta > 0$, donc le polynôme admet deux zéros.

On a : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \dfrac{-7 - \sqrt{1}}{2 \times (-1)} = 4$; $x_2 = \dfrac{-7 + \sqrt{1}}{2 \times (-1)} = 3.$

$P = a(x - x_1)(x - x_2)$

$P = -(x - 4)(x - 3)$

$P < 0$, pour tout x élément de

$]-\infty ; 3] \cup [4 ; +\infty[$.

$P > 0$, pour tout x élément de $[3 ; 4]$.

$P = 0$, pour tout x élément de $\{3 ; 4\}$.

Exercice 27

P = $-2x^2 - 4x + 9$; P est sous la forme

$ax^2 + bx + c$, où $a = -2$, $b = -4$ et $c = 9$.

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times (-2) \times 9 = 88$

$\Delta > 0$, donc le polynôme admet deux zéros.

On a : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \dfrac{-(-4)-\sqrt{88}}{2\times(-2)} = \dfrac{-2+\sqrt{22}}{2}$;

$x_2 = \dfrac{-(-4)+\sqrt{88}}{2\times(-2)} = -\dfrac{2+\sqrt{22}}{2}$

$P = a(x - x_1)(x - x_2)$

$P = -2\left(x - \dfrac{-2+\sqrt{22}}{2}\right)\left(x + \dfrac{2+\sqrt{22}}{2}\right)$.

P = 0, pour tout x élément de

$\left\{-\dfrac{2+\sqrt{22}}{2} ; \dfrac{-2+\sqrt{22}}{2}\right\}$.

P < 0, pour tout x élément de

$\left]-\infty ; -\dfrac{2+\sqrt{22}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{-2+\sqrt{22}}{2} ; +\infty\right[$.

P > 0, pour tout x élément de

$\left[-\dfrac{2+\sqrt{22}}{2} ; \dfrac{-2+\sqrt{22}}{2}\right]$.

Exercice 28

Q = $x^2 - x + 1$; Q est sous la forme

$ax^2 + bx + c$, où $a = 1$, $b = -1$ et $c = 1$.

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$.

$\Delta < 0$, donc le polynôme n'admet pas de zéro.

Le signe de Q est le signe de a. Donc Q est strictement positif sur $\mathbb{R}$.

Exercice 29

Q = $-3x^2 + 2x - 5$; Q est sous la forme

$ax^2 + bx + c$, où $a = -3$, $b = 2$ et $c = -5$.

$\Delta = (2)^2 - 4 \times (-3) \times (-5) = -56$.

$\Delta < 0$, donc le polynôme n'admet pas de zéro.

Le signe de Q est le signe de a. Donc Q est strictement négatif sur $\mathbb{R}$.

Exercice 30

$x^2 - 2x + 4 < 0$; $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 4 = -12$

$\Delta < 0$, donc pour tout x élément de $\mathbb{R}$,

$x^2 - 2x + 4 > 0$.

$S_{\mathbb{R}} = \varnothing$

Exercice 31

$x^2 - 3x + 2 \leq 0$; $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1$.

$\Delta > 0$, donc le polynôme $x^2 - 3x + 2$ admet deux zéros.

On a : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \dfrac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\times 1} = 1$; $x_2 = \dfrac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times 1} = 2$.

$x^2 - 3x + 2 \geq 0$ pour tout x élément de

$]-\infty ; 1] \cup [2 ; +\infty[$

$x^2 - 3x + 2 \leq 0$ pour tout x élément de $[1 ; 2]$.

Donc $S_{\mathbb{R}} = [1; 2]$.

Exercice 32

$-x^2 - x + 1 \geq 0$; $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 5$

$\Delta > 0$, donc le polynôme $-x^2 - x + 1 = 0$, admet deux zéros.

On a : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \dfrac{-(-1)-\sqrt{5}}{2\times(-1)} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$;

$x_2 = \dfrac{-(-1)+\sqrt{5}}{2\times(-1)} = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$-x^2 - x + 1 \leq 0$ pour tout x élément de

$\left]-\infty ; -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} ; +\infty\right[$.

$-x^2 - x + 1 \geq 0$ pour tout x élément de

$\left[-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} ; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$

$S_{\mathbb{R}} = \left[-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} ; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$

Exercice 33

$-3x^2 + x - 1 < 0$; $\Delta = 1^2 - 4 \times (-3) \times (-1) = -11$

$\Delta < 0$, donc le polynôme $-3x^2 + x - 1$, n'admet pas de zéros.

$-3x^2 + x - 1$ a le même signe que -3.

$-3x^2 + x - 1 < 0$, pour tout x élément de $\mathbb{R}$.

$S_{\mathbb{R}} = \emptyset$.

Exercice 34

$$\frac{2x+1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow 2x+1=0 \text{ et } x-2 \neq 0$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ et } x \neq 2$$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

Exercice 35

$$\frac{x-4}{2x-2} = 0 \Leftrightarrow x-4=0 \text{ et } 2x-2 \neq 0$$
$$\Leftrightarrow x = 4 \text{ et } x \neq 1.$$

$S_{\mathbb{R}} = \{4\}$.

Exercice 36

$$\frac{3-x}{x+7} = 0 \Leftrightarrow 3-x=0 \text{ et } x+7 \neq 0$$
$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ et } x \neq -7.$$

$S_{\mathbb{R}} = \{3\}$.

Exercice 37

$$\frac{2x+4}{x-1} = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ et } x \neq 1.$$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$2x+4$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$\frac{2x+4}{x-1}$		$+$	0	$-$	||	$+$	

$S_{\mathbb{R}} = [-2 ; 1[$.

Exercice 38

$$\frac{x-7}{2-x} = 0 \Leftrightarrow x = 7 \text{ et } x \neq 2.$$

x	$-\infty$		2		7		$+\infty$
$2-x$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$x-7$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$\frac{x-7}{2-x}$		$-$	||	$+$	0	$-$	

$S_{\mathbb{R}} =]2 ; 7]$.

Exercice 39

$$\frac{x+1}{x+4} \leq 0.$$

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$1-x$		$+$	5	$+$	0	$-$	
$\frac{1-x}{x+4}$		$-$	||	$+$	0	$-$	

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty ; -4[\cup]1 ; +\infty[$.

Exercice 40

$\frac{-x-4}{x-2} > 0$ en utilisant un tableau de signe, on obtient : $S_{\mathbb{R}} =]-4 ; 2[$.

Exercice 41

Résolvons $\frac{1-x}{x+8} < 0$

$\frac{1-x}{x+8} = 0 \Leftrightarrow 1-x=0$ et $x+8 \neq 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ et $x \neq -8$.

Tableau de signe

x	$-\infty$		-8		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	||	$+$	0	$-$	
$x+8$		$-$	||	$+$	|	$+$	
$\frac{1-x}{x+8}$		$-$	||	$+$	0	$-$	

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty ; -8[\cup]1 ; +\infty[$.

IV.2. Exercices de renforcement

Exercice 42

$P = x^2 - x - 12.$

1) Déterminons les zéros de P.

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-12) = 49.$

On a : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Soit $x_1 = \dfrac{-(-1)-\sqrt{49}}{2} = -3$;

$x_2 = \dfrac{-(-1)+\sqrt{49}}{2} = 4$.

Les zéros de P sont −3 et 4.

2) $P = a(x - x_1)(x - x^2)$

$= (x + 3)(x - 4)$

3) Étudions le signe de P.

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	7	$+$	
$x-4$		$-$	-7	$-$	0	$+$	
P		$+$	0	$-$	0	$+$	

P = 0 pour tout x élément de $\{-3 ; 4\}$.

P > 0 pour tout x élément de

$]-\infty ; -3[\cup]4 ; +\infty[$.

P < 0 pour tout x élément de $]-3 ; 4[$.

Exercice 43

$Q = -x^2 - x + 2$

1) Déterminons les zéros de Q.

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 9.$

On a : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Soit $x_1 = \dfrac{-(-1)-\sqrt{9}}{-1\times 2} = 1$;

$x_2 = \dfrac{-(-1)+\sqrt{9}}{-1\times 2} = -2.$

Les zéros de P sont 1 et −2.

2) $Q = a(x - x_1)(x - x_2)$

$= -(x - 1)(x + 2)$

3) Étudions le signe de P.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	3	$+$	
$x-1$		$-$	-3	$-$	0	$+$	
$(x+1)(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Q		$-$	0	$+$	0	$-$	

$Q \leq 0$ pour tout x élément de

$]-\infty ; -2] \cup [1 ; +\infty[$

$P \geq 0$ pour tout x élément de $[-2 ; 1]$.

4) $Q \geq 0$

$S_{\mathbb{R}} = [-2 ; 1]$.

Exercice 44

$R = x^2 - 5x + 6$

1) Déterminons les zéros de R.

$\Delta = (-5)^2 - 4 \times (1) \times 6 = 1$

On a : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Soit $x_1 = \dfrac{-(-5)-\sqrt{1}}{2} = 2$;

$x_2 = \dfrac{-(-5)+\sqrt{1}}{2} = 3.$

Les zéros de P sont 2 et 3.

2) $R = a(x - x_1)(x - x_2)$

$= (x - 2)(x - 3)$

3) Étudions le signe de P.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	1	$+$	
$x-3$		$-$	-1	$-$	0	$+$	
$(x-2)(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$R \geq 0$ pour tout x élément de

$]-\infty ; 2] \cup [3 ; +\infty[$.

$P \leq 0$ pour tout x élément de $[2 ; 3]$.

4) $R \leq 0$

$S_{\mathbb{R}} = [2 ; 3]$.

Exercice 45

H = $3x^2 + x + 1$.

1) Justifions que H n'a pas de zéro.

$\Delta = (1)^2 - 4 \times (3) \times 1 = -11$, $\Delta < 0$, donc H n'a pas de zéro.

2) H est de la forme $ax^2 + bx + c$ où $a = 3$; $b = 1$ et $c = 1$.

$\Delta < 0$, donc H est du signe de a. ($a = 3$).

Donc pour tout nombre réel, H est strictement positif.

Exercice 46

1) $\dfrac{x-2}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0$ et $x + 1 \neq 0$
soit $x = 2$ et $x \neq -1$.

$S_{\mathbb{R}} = \{2\}$.

2) Tableau de signe

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x-2}{x+1}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

$\dfrac{x-2}{x+1} \leq 0$ pour tout nombre réel x élément de l'intervalle $]-1\ ;\ 2]$.

$S_{\mathbb{R}} =]-1\ ;\ 2]$.

Exercice 47

1) $\dfrac{2x+6}{x} = 0 \Leftrightarrow 2x + 6 = 0$ et $x \neq 0$
soit $x = -3$ et $x \neq 0$.

$S_{\mathbb{R}} = \{-3\}$.

2) Tableau de signe

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
$2x+6$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{2x+6}{x}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

$\dfrac{2x+6}{x} \leq 0$ pour tout nombre réel x élément de l'intervalle $[-3\ ;\ 0[$.

$S_{\mathbb{R}} = [-3\ ;\ 0[$.

Exercice 48

1) $\dfrac{3-x}{x} = 0 \Leftrightarrow 3 - x = 0$ et $x \neq 0$

$\Leftrightarrow x = 3$ et $x \neq 0$.

$S_{\mathbb{R}} = \{3\}$.

2) Tableau de signe

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{3-x}{x}$		$-$	‖	$+$		$-$	

S = $]-\infty\ ;\ 0[\cup [3\ ;\ +\infty[$.

IV.3. Exercices d'approfondissement

Exercice 49

1) On a : $x = 4 - \dfrac{5}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \dfrac{x^2}{x} = \dfrac{4x-5}{x} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \dfrac{x^2}{x} = \dfrac{4x-5}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \dfrac{x^2-4x-5}{x} = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \dfrac{x^2-4x-5}{x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 - 4x - 5 = 0 \end{cases}$

Donc $x = 4 - \dfrac{5}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 - 4x + 5 = 0 \end{cases}$

2) a) $x^2 - 4x + 5 = 0$.

$\Delta = -4$, donc l'équation n'a pas de solution.

b) L'équation (E) n'a pas de solution

Exercice 50

1) Pour tout nombre réel x :

$$\begin{aligned}(x-1)(5x^2+6x+1) &= 5x^3 + 6x^2 + x - 5x^2 - 6x - 1 \\ &= 5x^3 + x^2 - 5x - 1\end{aligned}$$

2) $\Delta = 6^2 - 4 \times 5 \times 1 = 16$

$\Delta > 0$, donc l'équation admet deux solutions.

$$x_1 = \frac{-6-\sqrt{16}}{2\times 5} = \frac{-6-4}{10} = -1 \text{ et}$$
$$x_2 = \frac{-6+\sqrt{16}}{2\times 5} = \frac{-6+4}{10} = \frac{1}{5.}$$

$S = \left\{-1; \frac{1}{5}\right\}$.

3) $5x^3 + x^2 - 5x - 1 = 0$

$(x - 1)(5x^2 + 6x + 1) = 0$

$x - 1 = 0$ ou $5x^2 + 6x + 1 = 0$

$x = 1$ ou $x = -1$ ou $x = \frac{1}{5}$.

$S_{\mathbb{R}} = \left\{1; -1; \frac{1}{5}\right\}$.

Exercice 51

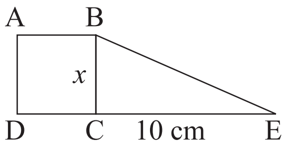
Soit x l'âge du père. On a : $x(x - 25) = 116$.

$X^2 - 25x - 116 = 0$.

Les solutions de cette équation sont –4 et 29.

Le père a 29 ans et le fils 4 ans.

Exercice 52

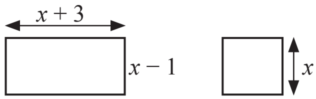


L'aire de la figue est $x^2 + \frac{10x}{2}$.
Cette aire égale à 6 équivaut à $x^2 + \frac{10x}{2} = 6$.
Soit $x^2 + 5x - 6 = 0$.

$\Delta = 49$, $x_1 = -6$, $x_2 = 1$.

L'aire de la figure est de 6 cm² lorsque $x = 1$ cm.

Exercice 53



On a : $(x + 3)(x - 1) = 2x^2$

$(x + 3)(x - 1) = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0, \Delta = 16$,
$x_1 = -1$ et $x_2 = 3$.

La seule valeur qui convient est 3.

IV.4. Situations complexes

Exercice 54

Soit x la longueur à ajouter.
Pour déterminer x, nous allons résoudre une équation.

On a : $(3 + x)(7 + x) = 60$

$(3 + x)(7 + x) = 60 \Leftrightarrow x^2 + 10x - 39 = 0$,

soit $x = -13$ ou $x = 3$.

$-13 < 0$ donc c'est une solution impossible.

On doit ajouter 3 m de chaque côté.

Exercice 55

Soit n le nombre de personnes présentes.

Utilisons une équation pour résoudre ce problème.

On a : $3n(n - 1) = 468$

$n(n - 1) = 156$

$n^2 - n - 156 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-156)$

$\Delta = 625 = 25^2$

$n_1 = \frac{1-25}{2} = -12$ et

$n_2 = \frac{1+25}{2} = 13$

Comme $n > 0$, seule la valeur 13 convient.
Il y a 13 personnes à la fête.
La voisine n'a pas raison.

Maths 1eres A corrigé 06102021.indd 11 06/10/2021 08:10

Leçon 2 Dénombrement

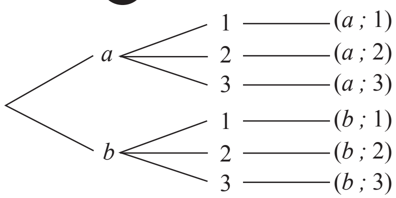
IV. Exercices

IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

$E \times F = \{(1;a);(1;b);(2;a);(2;b);(3;a);(3;b)\}$.

Exercice 2



$F \times E = \{(a;1) ; (a;2) ; (a;3) ; (b;1) ; (b;2) ; (b;3)\}$.

Exercice 3

Calculons Card($E \times F$)

$\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$

$\text{Card}(E \times F) = 4 \times 3$

$\text{Card}(E \times F) = 12$

Exercice 4

Le nombre de façon pour cet homme de s'habiller chaque matin est $5 \times 3 = 15$.

Exercice 5

Le nombre de façon d'entrer et de sortir est

3×2 soit 6.

Exercice 6

(1;1) ; (1;2), (1;3) ; (2;1), (2 ; 2) (2;3), (3;1) ; (3;2) et (3;3).

Exercice 7

Le nombre de 4-listes de E est : $3^4 = 81$.

Exercice 8

(1 ; 2) ; (2 ; 1 ; 3) ; (3 ; 2 ; 1).
D'autres réponses sont possibles.

Exercice 9

Le nombre d'arrangements de 3 éléments de E

est : $A_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$.

Exercice 10

a) $A_4^2 = 4 \times 3 = 12$
b) $A_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$
c) $A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$
d) $A_7^4 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$

Exercice 11

a) $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$
b) $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$
c) $\dfrac{2!}{5!} = \dfrac{2!}{5 \times 4 \times 3 \times (2!)} = \dfrac{1}{60}$
d) $\dfrac{6!}{4!} = \dfrac{6 \times 5 \times (4!)}{4!} = 6 \times 5 = 30$

Exercice 12

(1 ; 2 ; 3) ; (2 ; 1 ; 3) ; (3 ; 2 ; 1).

Exercice 13

Le nombre de permutations de E est :
$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Exercice 14

$\{1\}$; $\{1;2\}$; $\{1;2;3\}$.

Exercice 15

Le nombre de combinaisons de trois éléments de E est :

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5\times4\times3!}{3!2!} = \frac{5!}{3!2!}$$
$$= \frac{5\times4}{2\times1} = \frac{20}{2} = 10$$

ou $C_5^3 = \frac{A_5^3}{3!} = \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1} = \frac{60}{6} = 10$

Exercice 16

Le nombre de combinaisons de trois éléments de E est :

a) $C_4^1 = \frac{4!}{1!(4-1)!} = \frac{4\times3!}{3!} = 4.$

b) $C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4\times3!}{3!1!} = \frac{4}{1} = 4.$

c) $C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5\times4\times3!}{3!2!}$

$$= \frac{5\times4}{2\times1} = \frac{20}{2} = 10.$$

d) $C_7^4 = \frac{A_7^4}{4!} = \frac{7\times6\times5\times4}{4\times3\times2\times1} = 35.$

Exercice 17

Une poignée de mains s'échange entre deux personnes. Lors d'un tel échange, il n' y a pas d'ordre de pas de répétition.

Il s'agit d'une combinaison.

Le nombre de poignées de main est :

$C_{20}^2 = \frac{A_{20}^2}{2!} = \frac{20\times19}{2\times1} = 190$.

IV.2. Exercices de renforcement

Exercice 18

	p-liste d'éléments de A	Arrangement d'éléments de A	Permutation d'éléments de A	Combinaison d'éléments de A
(1 ; 1)	×			
(1 ; 2)	×	×		
(2 ; 1 ; 3)	×	×		
(1 ; 3 ; 1 ; 4 ; 5)	×	×	×	
(2 ; 3 ; 1 ; 4 ; 5)	×	×	×	
{1 ; 2}				×
{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5}				×

Exercice 19

Le nombre de façons de choisir ces deux livres est : 2 × (5 × 3) + 2 × (3 × 10) + 2 × (5 × 10) =
30 + 60 + 100 = 190.

Exercice 20

Le nombre de façons de choisir un menu sachant qu'un menu est composé d'une entrée, d'un plat et d'un dessert est : 3 × 6 × 3 = 54.

Exercice 21

Le nombre de façons différentes dont elle peut s'habiller est : 4 × 5 × 3 = 60.

Exercice 22

Le nombre de poignées de main qui ont été échangées est : 12 × 15 = 180.

Exercice 23

Le nombre de réponses possibles est : 4^{15}.

Exercice 24

Le nombre de réponses possibles est : 2^8.

Exercice 25

1) Le nombre de numéros de téléphone à 8 chiffres est : $10^8 = 100\,000\,000$.
2) Le nombre de numéros de téléphone à 8 chiffres ne comprenant le chiffre 0 est :
$9^8 = 43\,046\,721$.

3) Le nombre de numéros de téléphone à 8 chiffres ne commençant pas par le chiffre 0 est :
$9 \times 10^7 = 90\,000\,000$.

Exercice 26

Le nombre de distributions possibles est :

$A_7^3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$.

Exercice 27

Le nombre de bureaux possibles est :

$A_{24}^3 = 24 \times 23 \times 22 = 12144$.

Exercice 28

1) Le nombre d'éléments de A est : 9×10^3.

2) a- Le nombre d'éléments composés de 4 quatre chiffres 2 à 2 distincts est :

$9 \times A_9^3 = 9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$.

b- Le nombre d'éléments composé d'au moins deux chiffres identiques est :

$9 \times A_9^3 - 9 \times A_9^3 = 22680$.

c- Le nombre de quatre chiffres 2 à 2 distincts autres que 5 et 7 sont : $7 \times A_7^3 = 1470$.

Exercice 29

1) $3 \times 6^3 = 648$.
2) $3 \times 5^3 = 375$
3) $3 \times 6^3 - 3 \times 5^3 = 273$
4) $3 \times A_6^3 = 360$.
5) $3 \times 6^3 - 3 \times A_6^3 = 648 - 360 = 388$.

Exercice 30

Le nombre de triplets différents qui peuvent être solution de ce système : $3! = 6$.
Les 6 triplets sont $(5 ; -1 ; 3)$, $(5 ; 3 ; -1)$, $(-1 ; 5 ; 3)$, $(1 ; 3 ; -5)$, $(3 ; -1 ; 5)$, $(3 ; 5 ; -1)$

Exercice 31

Le nombre d'anagramme du mot MATH est : $4! = 24$.

Exercice 32

1) Lorsqu'on tient compte de l'accent sur le <<e>>, le nombre d'anagramme est : $6! = 720$.

2) En ne tenant pas compte de l'accent sur le <<e>>, le nombre d'anagrammes est : $\frac{6!}{2!} = 360$.

Exercice 33

Le nombre d'anagramme du mot MORGES est :
$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$.

Exercice 34

Le nombre de façons de disposer 5 livres distincts sur une étagère d'une bibliothèque est :
$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Exercice 35

1) Le nombre de façons est :
$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.
2) Le nombre de façons est :
$(3! \times 2!) + (2! \times 3!) = 12 + 12 = 24$.

Exercice 36

S'il veut que les livres de même type soient ensemble, le nombre de façons est :

$3! \times (6! \times 4! \times 2!) = 207360$.

Exercice 37

Le nombre de matchs que l'on peut organiser est : $C_8^2 = 28$.

Exercice 38

1) Le nombre de façons est : C_{32}^{2}

2) 19×13

3) C_{19}^{2}

Exercice 39

1) Le nombre de façons est : $C_{57}^{6} = 36\,288\,252$.

2) a. Uniquement des hommes : $C_{32}^{6} = 906\,192$.

b. Des personnes de même sexe :

$C_{25}^{6} + C_{32}^{6} = 177100 + 906132 = 1\,083\,292$.

c. $C_{57}^{6} - (C_{25}^{6} + C_{32}^{6}) = 35204960$.

Exercice 40

1) a- $A_{5}^{3} = 60$

b- $A_{4}^{3} = 24$.

c- $A_{9}^{3} - A_{5}^{3} = 444$.

d- $C_{3}^{1} \times A_{5}^{1} \times A_{4}^{2} = 15 \times 12 = 180$.

2) a- $C_{5}^{3} = 10$.

b- $C_{4}^{3} = 4$.

c- $C_{9}^{3} - C_{5}^{3} = 74$.

d- $C_{5}^{1} \times C_{4}^{2} = 5 \times 6 = 30$.

IV.3. Exercices d'approfondissement

Exercice 41

1) $A_{30}^{3} = 24360$.

2) Dans ce cas, les différentes façons d'occuper les postes de président, vice-président et secrétaire : G - G - F, G - F - F, F - G - F et F - F - F.
Le nombre de façons est $18 \times 17 \times 12 + 18 \times 12 \times 11 + 12 \times 18 \times 11 + 12 \times 11 \times 10 = 9744$.

3) $C_{3}^{1} \times A_{1}^{1} \times A_{29}^{2} = 3 \times 1 \times 29 \times 28 = 2436$.

4) Dans ce cas, les différentes répartitions sont :

G - G - F ou G - F - F. Le nombre de comités est $18 \times 17 \times 12 + 18 \times 12 \times 11 = 6048$.

5) Dans ce cas, les différentes répartitions sont :

G - F - G, G - F - F, F - G - G ou F - G - F.

Le nombre de comités est :

$18 \times 12 \times 17 + 18 \times 12 \times 11 + 12 \times 18 \times 17 + 12 \times 18 \times 11 = 9720$.

Exercice 42

Dans un tel prélèvement, il n'y a pas d'ordre et pas de répétition : c'est une combinaison.

a) $C_{16}^{5} = 4368$.

b) $C_{20}^{5} - C_{16}^{5} = 11136$.

c) $C_{20}^{5} - (C_{16}^{5} + C_{4}^{1} \times C_{16}^{4}) = 3856$.

ou $C_{4}^{2} \times C_{16}^{3} + C_{4}^{3} \times C_{16}^{2} + C_{4}^{4} \times C_{16}^{1}$.

Exercice 43

$A_{n}^{2} = 12, n \geq 2$

$n(n-1) = 12$

$n^2 - n - 12 = 0$

$\Delta = 49$, $n_1 = -3$ et $n_2 = 4$.

Comme $-3 \notin \mathbb{N}$, on a :

$S = \{4\}$.

$C_{n}^{2} = 10, n \geq 2$.

$\dfrac{n(n-1)}{2} = 10$

$n(n-1) = 20$

$n^2 - n - 20 = 0$

$\Delta = 81$, $n_1 = -4$ et $n_2 = 5$.

Comme $-4 \notin \mathbb{N}$, on a :

$S = \{5\}$.

Exercice 44

1) $10^8 = 100\,000\,000$

2) A_{10}^{8}

3) $C_{10}^{2} \times 9^7 \times 8 = 1\,721\,868\,840$

4) $C_{10}^{3} \times C_{3}^{2} \times 8^6 = 94\,371\,840$

Exercice 45

1) $C_{80}^{3} = 82\,160$

2) a- $C_{50}^{3} = 19\,600$

b- $C_{50}^{2} \times C_{30}^{1} = 36\,750$

c- $C_{50}^{1} \times C_{30}^{2} = 21\,750$

d- $C_{30}^{3} = \dfrac{30 \times 29 \times 28}{6} = 4060$

Exercice 46

1) $C_{27}^{6} = 296\,010$

2) $C_{1}^{1} \times C_{26}^{5} = 80\,730$

3) $C_{1}^{1} \times C_{1}^{0} \times C_{24}^{5} = 53\,130$.

IV.4. Situations complexes

Exercice 47

On peut choisir :

- pour le premier car, 2 accompagnateurs parmi 8 et un chauffeur parmi 4. Il y a donc $C_{8}^{2} \times 4 = 28 \times 4 = 112$ tels choix.
- pour le deuxième car, 2 accompagnateurs parmi les 6 restants, puis un chauffeur parmi les 3 restants. Il y a donc $C_{6}^{2} \times 3 = 15 \times 3 = 45$ tels choix.
- pour le troisième car, 2 accompagnateurs parmi les 4 restantes, puis un chauffeur parmi les 2 restants. Il y a donc $C_{4}^{2} \times 2 = 6 \times 2 = 12$ tels choix.
- pour le dernier car, on n'a plus de choix à faire : on lui affecte les deux dernièrs accompagnateurs et le dernier chauffeur.

Le nombre total de choix est donc
112 × 45 × 12 = 60 480.
C'est le chef de 1$^{\text{ère}}$ D qui a raison.

Exercice 48

a) Dénombrement de tous les chemins possibles
Quelque que soit le chemin emprunté de A à M, l'araignée fait 9 déplacements vers la droite et 6 déplacements vers le haut.
En notant D un déplacement vers la droite et H un déplacement vers le haut, choisir un chemin revient à écrire un mot de 15 lettres écrit avec 6 H et 9 D.
Une fois que l'on choisit les 6 cases pour la lettre H, les lettres D se placent automatiquement dans les cases restantes. De plus, dans le choix des cases, il n'y a pas d'ordre et il n'y a pas de répétition.
Le nombre de chemins possibles est :
C_{15}^{6} (ou C_{15}^{9}) , soit 5 005.
b) Dénombrement de tous les chemins passant par P.
De A à P, l'araignée fait 4 D et 2 H, soit $C_{6}^{2} = 15$ chemins.
De P à M, l'araignée fait 5 D et 4 H, soit $C_{9}^{4} = 126$ chemins.
Au total, le nombre de chemins de A à M passant par P est 15 × 126 = 1 890.
c) Dénombrement de tous les chemins passant par P et Q.
De A à P, l'araignée fait 4 D et 2 H, soit $C_{6}^{2} = 15$ chemins.
De P à Q, l'araignée fait 1 D et 2 H, soit $C_{3}^{1} = 3$ chemins.
De Q à M, l'araignée fait 4 D et 2 H, soit $C_{6}^{2} = 15$ chemins.
Ainsi, le nombre de chemins de A à M passant par P et Q est 15 × 3 × 15 = 675.
d) Dénombrement de tous les chemins passant par P ou Q.
En notant A l'ensemble des chemins passant par P et B l'ensemble des chemins passant par Q, le nombre cherché est card(A∪B).
On a card(A∪B) = card(A) + card(B) – card(A∩B).
D'après le b) on a card(A) = 1 890.
En raisonnant comme dans le b),
on a card(B) = 1 890.
D'après le b) on a card(A∩B) = 675.
D'où card(A∪B) = 1 890 + 1 890 – 675 = 3 105.
Donc le nombre de chemins de A à M passant par P ou Q est 3 105.
Conclusion : Pour décrocher le meilleur prix, l'élève doit donner les réponses ci-dessus.

Leçon 3 Compléments sur les fonctions

IV. Exercices

IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

On dit que la fonction f est paire lorsque pour tout $x \in Df$, on a : $-x \in Df$ et $f(-x) = f(x)$.

Exercice 2

$f(x) = 3x^2 + 1$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $-x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = 3x^2 + 1$.

$f(-x) = 3(-x)^2 + 1 = 3x^2 + 1 = f(x)$, la fonction f est une fonction paire.

Exercice 3

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $-x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = -x^4 + 5x^2$.

$f(-x) = -(-x)^4 + 5(-x)^2 = -x^4 + 5x^2 = f(x)$

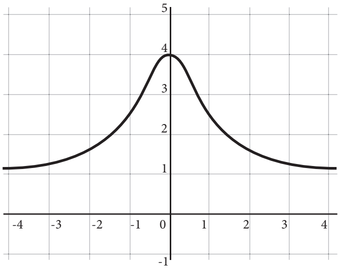
Donc la fonction f est une fonction paire.

Exercice 4

x	$f(-2)$	$f(-1)$	$f(1)$	$f(2)$
$f(x)$	-5	3	3	-5

Exercice 5

f étant paire sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Exercice 6

$f(x) = 3x^3 + x$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $-x \in \mathbb{R}$ et

$f(-x) = 3(-x)^3 + (-x) = -3x^3 - x = -f(x)$.

Donc la fonction f est une fonction impaire.

Exercice 7

$k(x) = \dfrac{1}{x}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $-x \in \mathbb{R}^*$ et

$k(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -k(x)$.

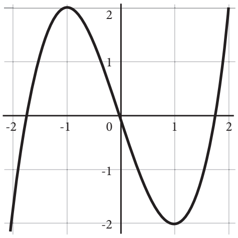
Donc la fonction k est une fonction impaire.

Exercice 8

x	$f(-3)$	$f(-1)$	$f(1)$	$f(3)$
$f(x)$	-27	-3	3	27

Exercice 9

f étant impaire, sa courbe est symétrique par rapport à l'origine des repères.



Exercice 10

Si pour tout nombre réel x tel que $a + x \in Df$, on a : $a - x \in Df$ et $f(a + x) = f(a - x)$, alors la courbe (C) admet la droite d'équation $x = a$ comme axe de symétrie.

Exercice 11

$f(x)=\dfrac{4}{(x-1)^2+3}$.

1) $f(1-x)=\dfrac{4}{(1-x-1)^2+3}=\dfrac{4}{(-x)^2+3}$
$=\dfrac{4}{x^2+3}$.

2) $f(1+x)=\dfrac{4}{(1+x-1)^2+3}=\dfrac{4}{(x)^2+3}$
$=\dfrac{4}{x^2+3}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, tel que $1 + x \in \mathbb{R}$,

on a : $1 - x \in \mathbb{R}$ et $f(1-x)=f(1+x)$.

Donc la droite d'équation $x = 1$ est axe de symétrie de (C).

Exercice 12

$f(x) = 5 - (2x + 1)^2$.

1) $f\left(-\dfrac{1}{2}-x\right)=5-\left(2\left(-\dfrac{1}{2}-x\right)+1\right)^2$
$=5-(-1-2x+1)^2$
$=5-(-2x)^2=5-4x^2$

2) $f\left(-\dfrac{1}{2}+x\right)=5-\left(2\left(-\dfrac{1}{2}+x\right)+1\right)^2$
$=5-(-1+2x+1)^2$
$=5-(2x)^2=5-4x^2$

$f\left(-\dfrac{1}{2}-x\right)=f\left(-\dfrac{1}{2}+x\right)$.

Autre méthode

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$g(x)=f(1+x)$

$g(x)=5-4x^2$

g est paire car $g(-x)=5-4x^2=g(x)$

Donc la droite d'équation $x=-\dfrac{1}{2}$ est axe de symétrie de (C).

Exercice 13

$f(x)=3+\dfrac{1}{x-5}$.

1) $f(5-x)=3+\dfrac{1}{5-x-5}$
$=3+\dfrac{1}{-x}=3-\dfrac{1}{x}$

2) $f(5+x)=3+\dfrac{1}{5+x-5}$
$=3+\dfrac{1}{x}=3+\dfrac{1}{x}$

3) $f(5-x)+f(5+x)=3-\dfrac{1}{x}+3+\dfrac{1}{x}$
$=6=2\times 3$.

Donc le point E(5 ; 3) est centre de symétrie de (C).

Exercice 14

$f(x)=\dfrac{1}{2x+1}$.

1) $f\left(-\dfrac{1}{2}-x\right)=\dfrac{1}{2\left(-\dfrac{1}{2}-x\right)+1}$
$=\dfrac{1}{-1-2x+1}$
$=\dfrac{1}{-2x}$

2) $f\left(-\dfrac{1}{2}+x\right)=\dfrac{1}{2\left(-\dfrac{1}{2}+x\right)+1}$
$=\dfrac{1}{-1+2x+1}$
$=\dfrac{1}{2x}$

$f\left(-\dfrac{1}{2}-x\right)+f\left(-\dfrac{1}{2}+x\right)=0$.

Donc le point $\Omega\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$ est centre de symétrie de (C).

Exercice 15

$k(x)=\dfrac{3x-5}{x-2}$

$k(2+x)=\dfrac{3(2+x)-5}{2+x-2}$
$=\dfrac{6+3x-5}{x}=\dfrac{3x+1}{x}$

$$k(2-x)=\frac{3(2-x)-5}{2-x-2}=\frac{6-3x-5}{-x}$$
$$=\frac{-3x+1}{-x}=\frac{3x-1}{x}$$
$$k(2+x)+k(2-x)=\frac{3x+1}{x}+\frac{3x-1}{x}$$
$$=\frac{6x}{x}=6=2\times 3.$$

Donc le point A(2 ; 3) est centre de symétrie de (C).

IV.2. Exercices de renforcement

Exercice 16

- La courbe 1 représente une fonction paire car l'axe des ordonnées en est un axe de symétrie.
- La courbe 2 représente une fonction ni paire ni impaire car l'axe des ordonnées n'en est pas un axe de symétrie et l'origine des repères n'en est pas un centre de symétrie.
- La courbe 3 représente une fonction impaire l'origine des repères en est un centre de symétrie.
- La courbe 4 représente une fonction ni paire ni impaire car l'axe des ordonnées n'en est pas un axe de symétrie et l'origine des repères n'en est pas un centre de symétrie.
- La courbe 5 représente une fonction impaire l'origine des repères en est un centre de symétrie.
- La courbe 6 représente une fonction paire car l'axe des ordonnées en est un axe de symétrie.

Exercice 17

$$f(x)=x^2-2x+3$$
$$f(1-x)=(1-x)^2-2(1-x)+3$$
$$=1-2x+x^2-2+2x+3$$
$$=x^2+2$$

$$f(1+x)=(1+x)^2-2(1+x)+3$$
$$=1+2x+x^2-2-2x+3$$
$$=x^2+2$$
$$f(1-x)=f(1+x).$$

Donc la droite d'équation $x = 1$ est axe de symétrie de (C).

Exercice 18

$$f(x)=\frac{1}{x^2+x+1}$$
$$f\left(-\frac{1}{2}-x\right)=\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}-x\right)^2+\left(-\frac{1}{2}-x\right)+1}$$
$$=\frac{1}{x^2+\frac{3}{4}}$$
$$f\left(-\frac{1}{2}+x\right)=\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}+x\right)^2+\left(-\frac{1}{2}+x\right)+1}$$
$$=\frac{1}{x^2+\frac{3}{4}}$$
$$f\left(-\frac{1}{2}-x\right)=f\left(-\frac{1}{2}+x\right).$$

Donc la droite d'équation $x=-\frac{1}{2}$ est axe de symétrie de (C).

Exercice 19

$$k(x)=\frac{x-1}{x}.$$
$$k(-x)=\frac{-x-1}{-x}=\frac{x+1}{x}$$
$$k(-x)+k(x)=\frac{x+1}{x}+\frac{x-1}{x}$$
$$=\frac{2x}{x}=2=2\times 1,$$

le point A(0 ;1) est centre de symétrie de (C).

Exercice 20

$$g(x)=(x-3)^2+2.$$

$$g(3-x)=(3-x-3)^2+2=x^2+2$$

$$g(3+x)=(3+x-3)^2+2=x^2+2$$

$g(3-x)=g(3+x)$, la droite d'équation

$x = 3$ est axe de symétrie de (C).

IV.3. Exercices d'approfondissement

Exercice 21

$$g(x)=x^2-4x+7.$$
$$g(2-x)=(2-x)2-4(2-x)+7$$
$$=4-4x+x^2-8+4x+7=x^2+3$$

$$g(2+x)=(2+x)2-4(2+x)+7$$
$$=4+4x+x^2-8-4x+7=x^2+3$$

$g(2-x)=g(2+x)$, la droite d'équation $x=2$ est axe de symétrie de (C).

Exercice 22

$g(x)=\dfrac{7x+3}{x-2}$.

1) $7+\dfrac{17}{x-2}=\dfrac{7(x-2)+17}{x-2}$
$=\dfrac{7x-14+17}{x-2}$
$=\dfrac{7x+3}{x-2}=g(x)$

2) $g(2-x)=7+\dfrac{17}{2-x-2}$
$=7+\dfrac{17}{-x}=7-\dfrac{17}{x}$

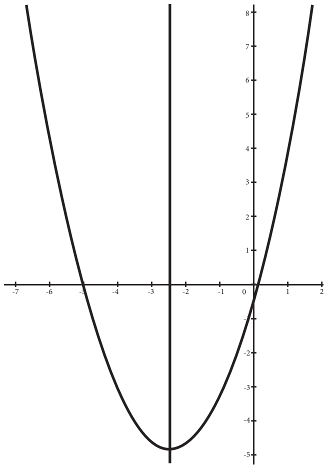
$g(2+x)=7+\dfrac{17}{2+x-2}$
$=7+\dfrac{17}{x}$

$g(2-x)+g(2+x)=14=2\times 7$, le point A(2 ; 7) est centre de symétrie de (C).

Exercice 23

1) La droite d'équation $x=-\dfrac{5}{2}$ est axe de symétrie de (C).

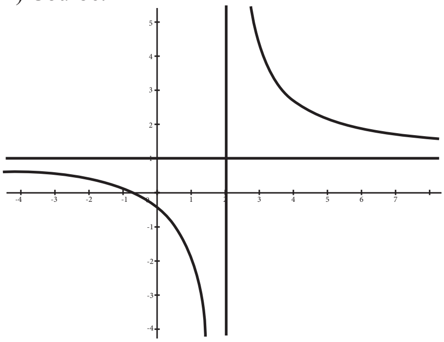
2) Courbe.



Exercice 24

1) Le point A(2 ; 1) est centre de symétrie de (C).

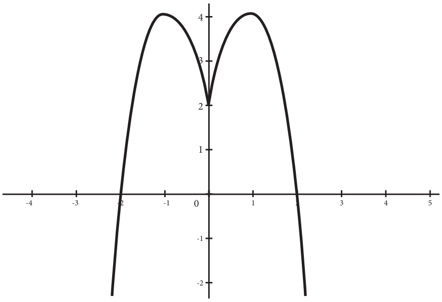
2) Courbe.



Exercice 25

1) La droite d'équation $x=0$ est axe de symétrie car g est paire.

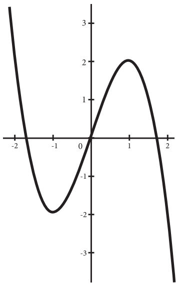
2) Courbe.



Exercice 26

1) La fonction g est une fonction impaire car $g(-x)=-g(x)$. Le point O est un centre de symétrie de (C).

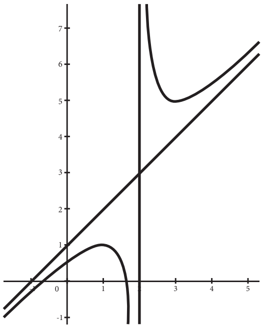
2) Courbe.



Exercice 27

1) Le point de A coordonnées (2 ; 3) est centre de symétrie.

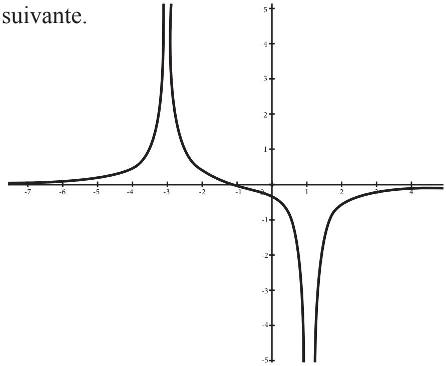
2) Courbe.



IV.2. Exercices de renforcement

Exercice 28

D'après l'énoncé, le point A de coordonnées (−1 ; 0) est centre de symétrie de la courbe représentative de *f*. Cela permet d'obtenir la courbe complétée suivante.



Leçon 4 Dérivabilité et étude de fonction

IV. Exercices

IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

1) B 2) A

3) C 4) C

Exercice 2

Colonne 1	Colonne 2
(AB)	$\dfrac{y_C - y_B}{x_C - x_B}$
(BC)	$\dfrac{y_E - y_C}{x_E - x_C}$
(EC)	$\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
(BE)	$\dfrac{y_B - y_E}{x_B - x_E}$
(AE)	$\dfrac{y_A - y_E}{x_A - x_E}$

Exercice 3

On dit que la fonction *f* est dérivable en α, lorsque la représentation graphique de *f* dans le plan muni d'un repère (O, I, J), admet au point d'abscisse α une tangente non parallèle à l'axe des ordonnées. Le coefficient directeur de cette tangente est appelé le nombre dérivé de la fonction en α. On le note *f* '(α).

Exercice 4

a) $\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3} = \dfrac{5-5}{x-3} = 0$ donc $f'(3)=0$

b) $\dfrac{f(x)-f(-5)}{x+5} = \dfrac{x+5}{x+5} = 1$

donc $f'(-5)=1$

c) $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{-3x+3}{x-1} = \dfrac{-3(x-1)}{x-1}$

$= -3$ donc $f'(1) = -3$

d) $f'(3)=6$

e) $f'(3)=-1$

f) $f'(1)=3$

Exercice 5

- $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=-\dfrac{1}{x}$
  donc $f'(1)=-1$
- $\dfrac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{1}{x}-2}{x-\frac{1}{2}}=-\dfrac{2}{x}$
  donc $f'\left(\frac{1}{2}\right)=-4$
- $\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\dfrac{\frac{1}{x}+1}{x+1}=\dfrac{1}{x}$
  donc $f'(-1)=-1$

Exercice 6

$h'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à (C) au point d'abscisse 1.

Exercice 7

$k(5)=-71$

$k'(5)$ est le coefficient directeur de la tangente à (C) au point d'abscisse 5.

Exercice 8

$f'(2)=-\dfrac{1}{2}$

Exercice 9

$f'(0)=3$

Exercice 10

$f'(0)=4$

Exercice 11

$g'(-1)=2$

Exercice 12

$y-g(a)=g'(a)(x-a)$ réponse 3)

Exercice 13

$y+3=2(x-a)$ réponse 2)

Exercice 14

- $f(2)=4$.
- $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=x+2$ et $f'(2)=4$
- (D) : $y-4=4(x-2)$, soit $y=4x-4$.

Exercice 15

- $f(1)=1$
- $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{-1}{x}$ et $f'(1)=-1$
- (D) : $y-1=-1(x-1)$, soit $y=-x+2$.

Exercice 16

1\. A ; 2. B ; 3. B ; 4. A ; 5. C ; 6. A ; 7. A
8\. B ; 9. A ; 10. C.

Exercice 17

1\. A ; 2. B ; 3. A ; 4. C ; 5. A ; 6. B

Exercice 18

1\. $-\dfrac{v'}{v^2}$

2\. $\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

Exercice 19

$\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=1$.

Exercice 20

$\forall x\in\mathbb{R}, g'(x)=5$.

Exercice 21

$\forall x\in\mathbb{R}, h'(x)=2x+6$.

Exercice 22

$\forall x\in\mathbb{R}, u'(x)=4-2x$.

Exercice 23

$\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=3x^2+8$.

Exercice 24

$\forall x \in \mathbb{R}$, $p'(x) = 3x^2 - 2x$.

Exercice 25

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $w'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$

Exercice 26

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $m'(x) = 2x - \dfrac{1}{x^2}$

Exercice 27

$\forall x \in \mathbb{R}$, $t'(x) = 2(x+5) + 1(2x+1) = 4x + 11$

Exercice 28

$\forall x \in \mathbb{R}$, $d'(x) = 5(x+5) + 5x = 10x + 25$

Exercice 29

$\forall x \in \mathbb{R}$, $a'(x) = 2x(-3x+5) - 3x^2 = -9x^2 + 10x$

Exercice 30

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $w'(x) = \dfrac{1 \times x - 1(x+2)}{x^2} = -\dfrac{2}{x^2}$

Exercice 31

$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-3\}$,

$f'(x) = \dfrac{x+3-(x+1)}{(x+3)^2} = \dfrac{2}{(x+3)^2}$

Exercice 32

$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$,

$f'(x) = \dfrac{-5(1+3x)-3(2-5x)}{(1+3x)^2} = \dfrac{-11}{(1+3x)^2}$

Exercice 33

- Pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) \geq 0$ si et seulement si, f est croissante sur I.
- Pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) \leq 0$ si et seulement si, f est décroissante sur I.
- Pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) = 0$ si et seulement si, f est constante sur I.

Exercice 34

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) $f'(x) = -3x + 1$ donc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$

- $\forall x \in \left]-\infty ; \dfrac{1}{3}\right[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\left]-\infty ; \dfrac{1}{3}\right[$.
- $\forall x \in \left]\dfrac{1}{3} ; +\infty\right[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\left]\dfrac{1}{3} ; +\infty\right[$.

3) $f'(x) = 8 + 7x$ donc $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{8}{7}$

- $\forall x \in \left]-\dfrac{8}{7} ; +\infty\right[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\left]-\dfrac{8}{7} ; +\infty\right[$.
- $\forall x \in \left]-\infty ; \dfrac{8}{7}\right[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\left]-\infty ; \dfrac{8}{7}\right[$.

4) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 35

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0$ soit $x = 2$.

Tableau de variation

x	-1				2				5
$f'(x)$			$-$		0		$+$		
$f(x)$	8		$\searrow$		-1		$\nearrow$		8

Exercice 36

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$

x	-2		-1		1		3
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\dfrac{11}{3}$	$\nearrow$	$\dfrac{19}{3}$	$\searrow$	$\dfrac{11}{3}$	$\nearrow$	17

Exercice 37

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$

x	-5		-2		3		5
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$22{,}17$	$\searrow$	$-9{,}33$	$\nearrow$	$11{,}5$	$\searrow$	$-1{,}17$

Exercice 38

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	-4	$\searrow$	||	$\searrow$	4	$\nearrow$	

Exercice 39

$f'(x) > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	||	$\nearrow$	

Exercice 40

La fonction f est strictement croissante sur $]-4\,;0[$. Donc $\forall x \in \,]-4\,;0[, f'(x) > 0$.

Exercice 41

• $f\,'$ s'annule en -1 en changeant de signe donc $f(-1) = -5$ est un extremum relatif.

Sur $]-3\,;0]$ le minimum relatif -5 est atteint en -1.

• $f\,'$ s'annule en 1 en changeant de signe donc $f(1) = -1$est un extremum relatif.

Sur $]0\,;3]$ le maximum relatif -1 est atteint en 1.

IV.2. Exercices de renforcement

Exercice 42

a) $f'(x) = 2x - 2$ donc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

- $\forall x \in \,]-\infty\,;1[\,, f'(x) < 0.$
- $\forall x \in \,]1\,;+\infty[\,, f'(x) > 0.$

Donc f possède un minimum relatif en 1.

b) $f'(x) = -2x$ donc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

- $\forall x \in \,]-\infty\,;0[\,, f'(x) > 0.$
- $\forall x \in \,]0\,;+\infty[\,, f'(x) < 0.$

Donc f possède un maximum relatif en 0.

c) $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$ donc $f'(x) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(3x+1) = 0.$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -\frac{1}{3}$.

- $\forall x \in \left]-\frac{1}{3};1\right[, f'(x) < 0.$
- $\forall x \in \,]1\,;+\infty[\; f'(x) > 0.$

Donc f possède un minimum relatif en 1.

- $\forall x \in \left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[, f'(x) > 0.$
- $\forall x \in \left]-\frac{1}{3};1\right[, f'(x) < 0.$

Donc f possède un maximum relatif en $-\frac{1}{3}$.

Exercice 43

x	-5		-3		4		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	35	$\nearrow$	135	$\searrow$	-208	$\nearrow$	980

2) Sur $[-5\,;4]$ le maximum relatif est 135.

Sur $[-3; 5]$ le minimum relatif est -208.

Exercice 44

1) $f(-1) = -1$.

2) $f'(x) = -2x$ donc $f'(-1) = 2$.

3) Une équation de la tangente en -1

$y = 2(x+1) - 1$ soit $y = 2x + 1$.

Exercice 45

1) $f(3) = -12$.

2) $f'(x) = -2x - 1$ donc $f'(3) = -7$.

3) $y = -7(x - 3) - 12$ soit $y = -7x + 9$.

Exercice 46

1) $f'(x) = 2x$

2) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\forall x \in]-\infty ; 0[, f'(x) < 0$.

$\forall x \in]0 ; +\infty[, f'(x) > 0$.

3) f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$.

f est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

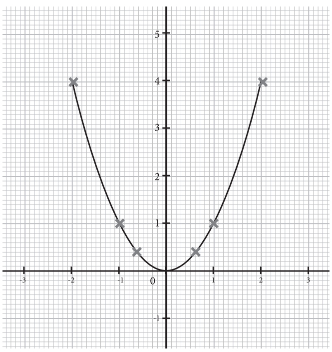
4)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	8	$\searrow$	0	$\nearrow$	8

5)

x	-2	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	2
$f(x)$	4	1	$0,25$	0	$0,25$	1	4

6)



Exercice 47

1) $g'(x) = -4x$

2) $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\forall x \in]-\infty ; 0[, g'(x) > 0$.

$\forall x \in]0 ; +\infty[, g'(x) < 0$.

3) g est strictement croissante sur $]-\infty ; 0[$.

g est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

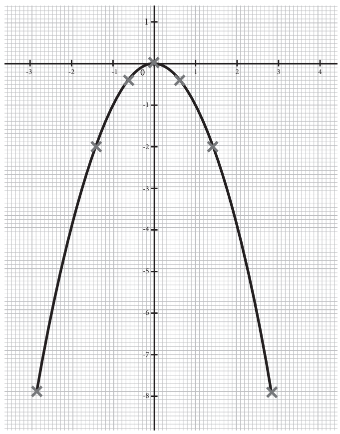
4)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

5)

x	-2	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	2
$g(x)$	-8	-2	$0,5$	0	$0,5$	-2	8

6)



Exercice 48

1) $h'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

2) $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $h'(x) < 0$.

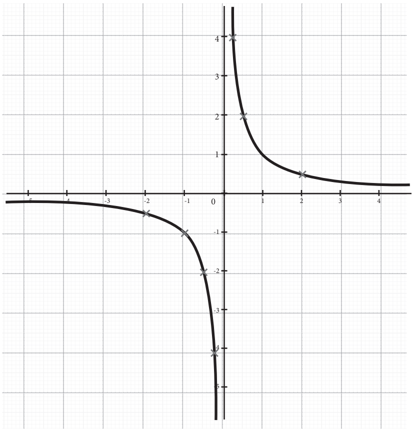
3) $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $h'(x) < 0$. Donc h est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$ est sur $]0 ; +\infty[$.

4)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$		$-$	
$h(x)$		$\searrow$		$\searrow$	

x	-2	-1	$-0{,}5$	$0{,}25$	$0{,}25$	$0{,}5$	1	2
$h(x)$	$-0{,}5$	-1	-2	-4	4	2	1	$0{,}5$

6)



Exercice 49

1) $f'(x) = 2x - 2$

2) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$\forall\, x \in]-\infty\,;\,1[\,, f'(x) < 0.$

$\forall\, x \in]1\,;\,+\infty[\,,\ f'(x) > 0$

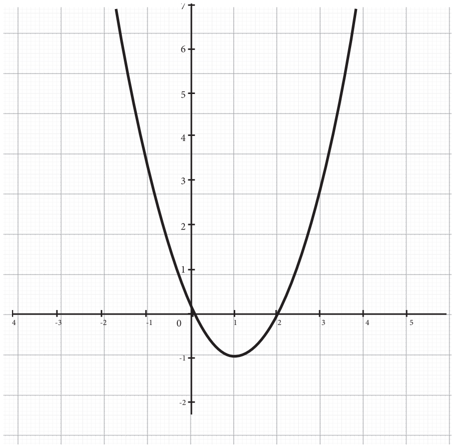
3) f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,1[$

f est strictement croissante sur $]1\,;\,+\infty[$.

4) $y = f'(0) \times x + x(0)$ donc $y = -2x$

5)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	8	$\searrow$	-1	$\nearrow$	8



Exercice 50

1) $h'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

2) $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$, $h'(x) < 0$.

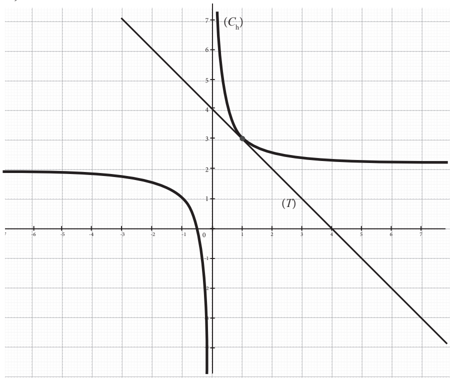
3) h est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$ et sur $]0\,;\,+\infty[$

4) $y = h'(1)(x - 1) + h(1)$ donc $y = -x + 4$

5)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$		$-$	
$h(x)$		$\searrow$		$\searrow$	

6)



IV.3. Exercices d'approfondissement

Exercice 51

1) a. $\forall\, x \in [-4\,;\,0], f'(x) > 0$

b. $\forall\, x \in [0\,;\,4], f'(x) < 0$

2) a. $\forall\, x \in \mathbb{R}, g'(x) = 2x + 3$

b. $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$

$\forall\, x \in \left]-\infty\,;-\dfrac{3}{2}\right[, g'(x) < 0.$

$\forall\, x \in \left]-\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[, g'(x) > 0.$

c. $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$

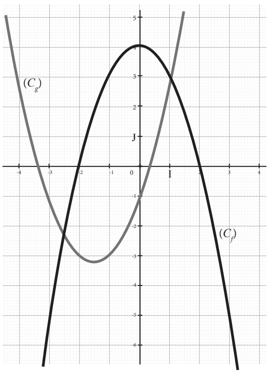
g est strictement décroissante sur $\left]-\infty\,;-\dfrac{3}{2}\right[$

et strictement croissante sur $\left]-\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$.

d.

x	-4		$-\frac{3}{2}$		4
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	3	$\searrow$	$-3{,}25$	$\nearrow$	27

3)



4) $f'(x) = g(x) \Leftrightarrow x = -2{,}5$ ou $x = 1$

5) (C_g) est au-dessus de (C_f) sur $]-\infty\,;-2{,}5[$ et sur $]1\,;+\infty[$

(C_g) est en dessous de (C_f) sur $]-2{,}5\,;1[$.

Exercice 52

1) $\forall\, x \in \mathbb{R}, g'(x) = x^2 - 1$

2) $g'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$

$\forall\, x \in]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[, g'(x) > 0.$

$\forall\, x \in]-1\,;1[, g'(x) < 0$

3)

x	-3		-1		1		3
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	-6	$\nearrow$	$0{,}67$	$\searrow$	$-0{,}67$	$\nearrow$	6

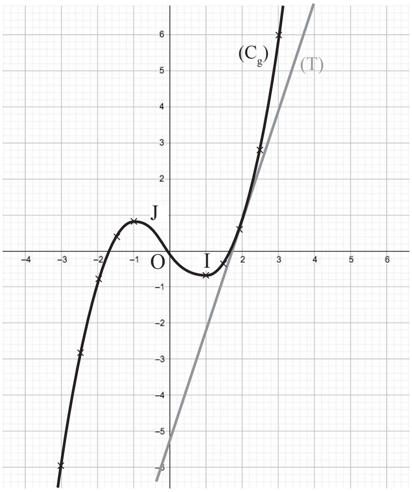
4) $y = g'(2)(x-2) + g(2)$ donc $y = 3x - \dfrac{16}{3}$.

5)

x	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1
$g(x)$	-6	$-2{,}7$	$-0{,}67$	$0{,}37$	$0{,}67$

0	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$	3
0	$-0{,}67$	$-0{,}37$	$0{,}67$	$2{,}7$	6

6)



IV.2. Exercices de renforcement

Exercice 53

Soit x la longueur du côté d'un petit carré.
Soit L la longueur de la boîte et ℓ sa largeur
$L = 80 - 2x$ et $\ell = 50 - 2x$ avec $x \in]0 ; 25[$.

- Le volume V(x) de la boîte est :

$V(x) = L \times \ell \times x = 4(x^3 - 65x^2 + 1000x)$
$V'(x) = 4(3x^3 - 130x^2 + 1000)$

Discriminant de V'(x) :

$\Delta = 16900 - 12000 = 4900 = 70^2$.
$V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$ ou $x = \dfrac{100}{3} = 33,33$.

- Tableau de variation de V sur]0 ; 25[

x	0		10		25
$g'(x)$		+	0	–	
$g(x)$		↗	6000	↘	

Le volume de la boîte est maximal lorsque la longueur du coté de chaque petit carré est égale à 10 cm.

Leçon 5 Suites numériques

IV. Exercices

IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

1- F ; 2- V ; 3- F ; 4- V ; 6- V ; 7- V ; 8- V

Exercice 2

1) $U_n = 2n + 1$ 2) $U_n = 2^n + 7$.

Exercice 3

$$(V_n) : \begin{cases} V_0 = 12 \\ V_{n+1} = -3V_n + 4, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C'est le cas 3)

Exercice 4

1) (U_n) : $U_0 = -3$; $U_1 = 3$; $U_2 = 5$ et $U_3 = 7$
pour $n \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$.
C est le cas 1)

Exercice 5

$U_0 = 2 \times 0 - 5 = -5$; $U_1 = 2 \times 1 - 5 = -3$;
$U_2 = 2 \times 2 - 5 = -1$; $U_3 = 2 \times 3 - 5 = 1$.

Exercice 6

$U_3 = 3^2 = 9$; $U_4 = 4^2 = 16$; $U_5 = 5^2 = 25$.

Exercice 7

$U_2 = 2 \times (2 + 1) = 2 \times 3 = 6$;
$U_7 = 7 \times (7 + 1)\ 7 \times 8 = 56$.
$U_{11} = 11 \times 12 = 132$

Exercice 8

$V_2 = 2^3 + 1 = 9$; $V_3 = 3^3 + 1 = 28$;
$V_{10} = 10^3 + 1 = 1001$; $V_{15} = 15^3 + 1 = 3376$.

Exercice 9

$w_1 = \dfrac{6}{1} = 6;\ w_2 = \dfrac{6}{2} = 3;\ w_3 = \dfrac{6}{3} = 2;$

$w_4 = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2};\ w_5 = \dfrac{6}{5};\ w_6 = \dfrac{6}{6} = 1$

Exercice 10

$t_0 = \dfrac{0}{0+1} = 0;\ t_5 = \dfrac{5}{5+1} = \dfrac{5}{6};$

$t_8 = \dfrac{8}{8+1} = \dfrac{8}{9};\ t_{12} = \dfrac{12}{12+1} = \dfrac{12}{13};$

$t_{14} = \dfrac{14}{14+1} = \dfrac{14}{15};\ t_{18} = \dfrac{18}{18+1} = \dfrac{18}{19}$

Exercice 11

$r_2 = \dfrac{2 \times 2}{2-1} = 4$; $r_3 = \dfrac{2 \times 3}{3-1} = 3$;

$r_4 = \dfrac{2 \times 4}{4-1} = \dfrac{8}{3}$; $r_5 = \dfrac{2 \times 5}{5-1} = \dfrac{5}{2}$;

$r_6 = \dfrac{2 \times 6}{6-1} = \dfrac{12}{5}$; $r_7 = \dfrac{2 \times 7}{7-1} = \dfrac{7}{3}$

Exercice 12

$S_0 = 3 + 2 \times (-1)^0 = 5$; $S_1 = 3 + 2 \times (-1)^1 = 1$;
$S_2 = 3 + 2 \times (-1)^2 = 5$; $S_3 = 3 + 2 \times (-1)^3 = 1$.
$S_4 = 3 + 2 \times (-1)^4 = 5$; $S_5 = 3 + 2 \times (-1)^5 = 1$.

Exercice 13

$Z_0 = 3 \times (-1)^{2 \times 0 + 1} = -3$;
$Z_1 = 3 \times (-1)^{2 \times 1 + 1} = -3$;
$Z_2 = 3 \times (-1)^{2 \times 2 + 1} = -3$.
De la même manière, on trouve $Z_3 = Z_4 = Z_5 = -3$.

Exercice 14

$q_0 = 5 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^0 = 5$; $q_1 = 5 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^1 = \dfrac{5}{2}$;

$q_2 = 5 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{4}$; $q_3 = 5 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{5}{8}$;

$q_4 = 5 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \dfrac{5}{16}$

Exercice 15

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = u_n + 4, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$u_1 = u_{0+1} = u_0 + 4 = -3 + 4 = 1$;
$u_2 = u_{1+1} = u_1 + 4 = 1 + 4 = 5$;
De la même manière, on trouve $u_3 = u_{2+1} = 9$; $u_4 = u_{3+1} = 13$; $u_5 = u_{4+1} = 17$; $u_6 = u_{5+1} = 21$.

Exercice 16

$$(v_n) : \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = 2v_n + 4, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$v_1 = v_{0+1} = 2v_0 + 4 = 8 + 4 = 12$;
$v_2 = v_{1+1} = 2v_1 + 4 = 24 + 4 = 28$.
De la même manière, on trouve $v_3 = v_{2+1} = 60$; $v_4 = v_{3+1} = 124$; $v_5 = v_{4+1} = 252$.

Exercice 17

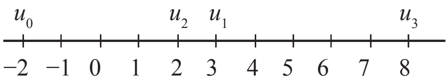
$$(r_n) : \begin{cases} r_0 = 4 \\ r_{n+1} = \frac{1}{2} r_n + 4, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$r_1 = r_{0+1} = \dfrac{1}{2} r_0 + 4 = \dfrac{1}{2} \times 4 + 4 = 6$;

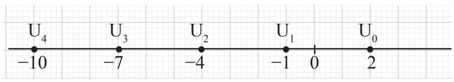
$r_2 = r_{1+1} = \dfrac{1}{2} r_1 + 4 = \dfrac{1}{2} \times 6 + 4 = 7$;

$r_3 = r_{2+1} = \dfrac{1}{2} r_2 + 4 = \dfrac{1}{2} \times 7 + 4 = \dfrac{15}{2}$.

Exercice 18



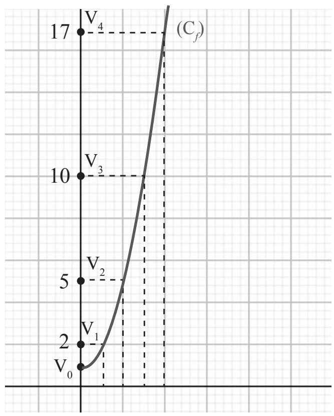
Exercice 19



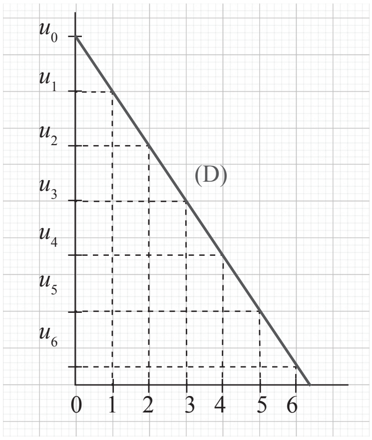
Exercice 20

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 1$.

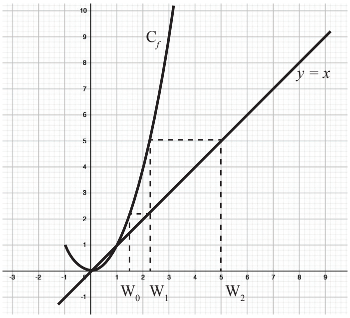
On a : $u_n = f(n)$.



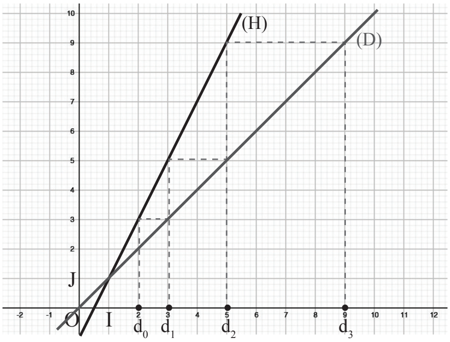
Exercice 21



Exercice 22



Exercice 23

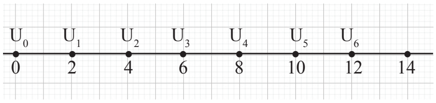


IV.2. Exercices de renforcement

Exercice 24

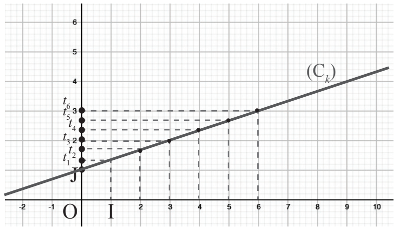
1) La suite des entiers naturels pairs est :
$U_n = 2n,\ n \in \mathbb{N}$

2)



Exercice 25

1)



Exercice 26

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = u_n + 2,\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) $u_1 = u_{0+1} = -3 + 2 = -1$;
$u_2 = u_{1+1} = u_1 + 2 = -1 + 2 = 1$
De la même manière, on trouve $u_3 = u_2 + 2 = 3$;
$u_4 = u_3 + 2 = 5$; $u_5 = u_4 + 2 = 7$.

2) $v_0 = 2 \times 0 - 3 = -3$; $v_1 = 2 \times 1 - 3 = -1$;
$v_2 = 2 \times 2 - 3 = 1$.
De la même manière, on trouve $v_3 = 3$ et $v_4 = 5$.

3) $u_{n+1} - u_n = u_n + 2 - u_n = 2$ et
$v_{n+1} - v_n = [2(n+1) - 3] - (2n - 3) = 2$.

Exercice 27

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) $u_1 = u_{0+1} = u_0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$;

$u_2 = u_{1+1} = u_1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$

De la même manière, on trouve

$u_3 = u_2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$; $u_4 = u_3 + \frac{1}{2} = 2.$

2) $v_0 = \frac{0}{2} = 0$; $v_1 = \frac{1}{2}$; $v_2 = \frac{2}{2} = 1$

De la même manière, on trouve

$v_3 = \frac{3}{2}$ et $v_4 = 2.$

3) $u_{n+1} - u_n = \left(u_n + \frac{1}{2}\right) - u_n = \frac{1}{2}$ et

$v_{n+1} - v_n = \frac{n+1}{2} - \frac{n}{2} = \frac{1}{2}.$

Exercice 28

1)

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n, \ n \in \mathbb{N} \end{cases} \text{ et } v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

1) $u_1 = u_{0+1} = \frac{1}{2} u_0 = \frac{1}{2}$;

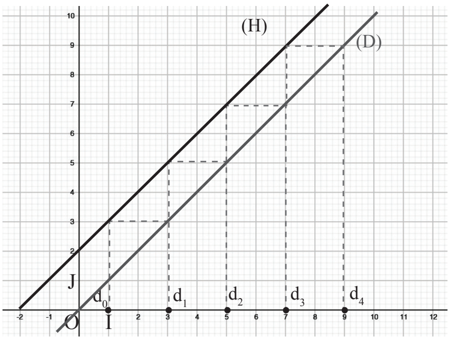
$u_2 = u_{1+1} = \frac{1}{2} u_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$;

$u_3 = \frac{1}{2} u_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

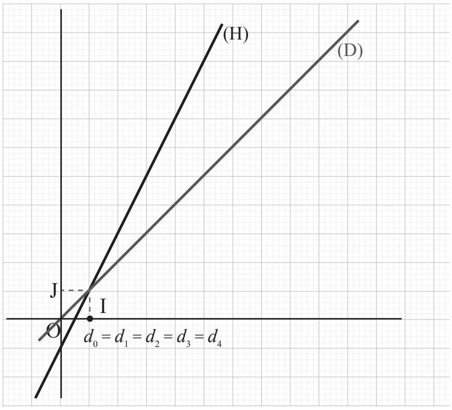
2) $v_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$; $v_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$;
$v_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$; $v_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$
et $v_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

3) $u_1 = v_1 = \frac{1}{2}$; $u_2 = v_2$.

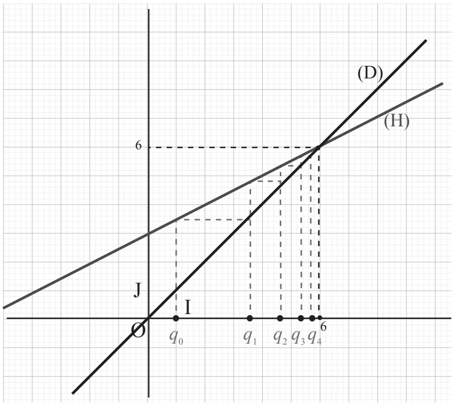
Exercice 29



Exercice 30



Exercice 31



IV.3. Exercices d'approfondissement

Exercice 32

1) $u_{n+1} = 2(n+1)+3$

$u_{n+1} = 2n+5$

2) $u_{n+1} - u_n = 2n+5-2n-3$

$u_{n+1} - u_n = 2$

3) $u_{2n+1} = 2(2n+1)+3$

$u_{2n+1} = 4n+5$

Exercice 33

1) $u_{n+1} = \frac{n+1}{2} - 1$

$u_{n+1} = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$

2) $u_{n+1} - u_n = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} - \left(\frac{n}{2} - 1\right)$

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}$

3) $u_{2n-1} = \frac{2n-1}{2} - 1$

$u_{2n-1} = n - \frac{3}{2}$

Exercice 34

1) $d_{n+1} = 3(n+1)+2$

$d_{n+1} = 3n+5$

2) $d_{n+1} - d_n = 3n+5-(3n+2)$

$d_{n+1} - d_n = 3$

Exercice 35

1) • $t_{n+1} = -2(n+1)+2$

$t_{n+1} = -2n$

• $t_n+1 = (-2n+2)+1$

$t_n+1 = -2n+3$

• $t_{n+2} = -2(n+2)+2$

$t_{n+2} = -2n-2$

• $t_{2n} = -2(2n)+2$

$t_{2n} = -4n+2$

• $t_n^2 = (-2n+2)^2$

$t_n^2 = 4n^2 - 8n + 4$

2)

$t_{n+1} - t_n = (-2n) - (-2n+2)$

$= -2n + 2n - 2$

$t_{n+1} - t_n = -2$

Exercice 36

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n + 4, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) $u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} + 4$

$= \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}u_n + 4\right) + 4$

$u_{n+2} = \frac{9}{4}u_n + 10$

2) $u_0 = 1$; $u_1 = \frac{3}{2}u_0 + 4 = \frac{11}{2}$;

$u_2 = \frac{3}{2}u_1 + 4 = \frac{49}{4}$; $u_3 = \frac{3}{2} \times u_2 + 4 = \frac{179}{8}$

Exercice 37

En 24 h chaque paramécie se divise en 3.

Après 24h ; $U_1 = 3u_0$

1) $u_0 = 1$ million

$u_1 = 3$ millions

$u_2 = 9$ millions

$u_3 = 27$ millions

$u_4 = 81$ millions

2) $u_n = 3^n$ millions

IV.2. Exercices de renforcement

Exercice 38

• Soit u_n son salaire au cours de la n-ième année ($1 \leq n \leq 10$) selon le contrat de type 1.
Pour tout n, on a : $u_{n+1} = u_n + 100\,000$.
Ainsi :
$u_1 = 3\,800\,000$
$u_2 = 3\,900\,000$
$u_3 = 4\,000\,000$
$u_4 = 4\,100\,000$

$u_5 = 4\ 200\ 000$
$u_6 = 4\ 300\ 000$
$u_7 = 4\ 400\ 000$
$u_8 = 4\ 500\ 000$
$u_9 = 4\ 600\ 000$
$u_{10} = 4\ 700\ 000$

• Soit v_n son salaire au cours de la n-ième année ($1 \leq n \leq 10$) selon le contrat de type 2.

Pour tout n, on a : $v_{n+1} = v_n + \frac{10}{100} v_n = 1,1 v_n$.

Ainsi :
$v_1 = 3\ 000\ 000$
$v_2 = 3\ 300\ 000$
$v_3 = 3\ 630\ 000$
$v_4 = 3\ 993\ 000$
$v_5 = 4\ 392\ 300$
$v_6 = 4\ 831\ 530$
$v_7 = 5\ 314\ 683$
$v_8 = 6\ 909\ 087,9$
$v_9 = 7\ 599\ 996, 69$
$v_{10} = 8\ 359\ 996, 359$

• Conclusion

Sur les quatre premières années, le contrat de type 1 est plus avantageux, mais sur les 6 dernières, c'est le contrat de type 2 qui est le plus avantageux.
De plus $u_1 + u_2 + ... + u_{10} < v_1 + v_2 + ... + v_{10}$.
En définitive, c'est le contrat de type 2 qui est le plus avantageux sur 10 ans.

Leçon 6 Système d'inéquations linéaires dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

IV. Exercices

IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

(H) : $(x\ ;\ y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$; $3x - y + 4 > 0$

On a : $3 \times (2) - (3) + 4 = 7$ et $7 > 0$, d'où le couple $(2\ ;\ 3)$ est une solution de l'inéquation $3x - y + 4 > 0$.

Exercice 2

$(x\ ;\ y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$; $3x - y + 4 < 0$

On a : $3 \times (-5) - (3) + 4 = -14$ et $-14 < 0$, d'où le couple $(-5\ ;\ 3)$ est une solution de l'inéquation $3x - y + 4 < 0$.

Exercice 3

$(x\ ;\ y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$; $3x - 5y + 1 \leq 0$

On a : $3 \times (0) -5\ (3) + 1 = -14$ et $-14 \leq 0$, d'où le couple $(0\ ;\ 3)$ est une solution de l'inéquation $3x - 5y + 1 \leq 0$.

Exercice 4

$(x\ ;\ y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$; $x + y - 1 < 0$

$(0) + (1) + 1 = 2$, d'où le couple $(0\ ;\ 1)$ n'est pas une solution de l'inéquation $x + y - 1 < 0$.
$(0) + (-2) + 1 = -1$ et $-1 < 0$, donc le couple $(0\ ;\ 1)$ est une solution de l'inéquation $x + y + 1 < 0$.
$(+4) + (0) + 1 = 5$ et $5 > 0$, donc le couple $(+4\ ;\ 0)$ n'est pas une solution de l'inéquation $x + y + 1 < 0$.
$(-5) + (7) +1 = 3$ et $3 > 0$, donc le couple $(-5\ ;\ 7)$ n'est pas une solution de l'inéquation $x + y + 1 < 0$.

Exercice 5

$(x\ ;\ y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$; $x + y - 1 \geq 0$

$(1) + (-8) - 1 = -8$ et $- 8 < 0$ donc le couple $(1\ ;\ -8)$ n'est pas une solution de l'inéquation $x + y - 1 \geq 0$.

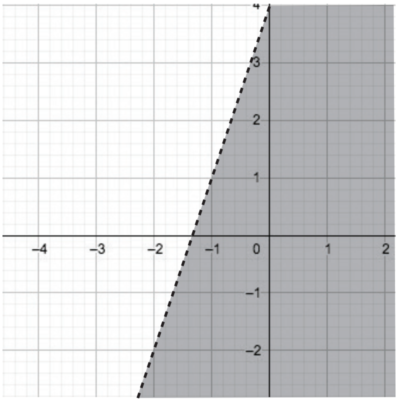
(3 ; 0) n'est pas une solution de l'inéquation $3x - 6y + 7 < 0$.

Exercice 7

$(x\,;\,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$; $3x + y + 4 > 0$

3 (0) − (0) + 4 = 4. Le couple (0 ; 0) est une solution de l'inéquation $3x + y + 4 > 0$.

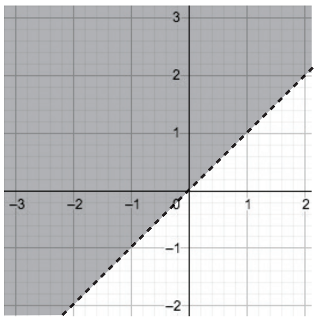
Le demi-plan en gris contenant le couple (0 ; 0) et privé de la droite (D) d'équation $3x - y + 4 = 0$ est la représentation graphique des solutions de $3x - y + 4 > 0$.



Exercice 8

$(x\,;\,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$; $x - y < 0$

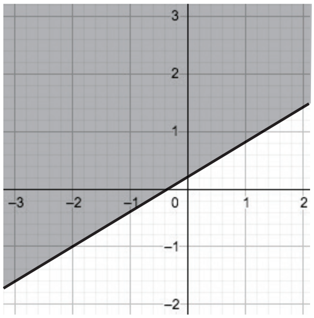
(1) − (0) = 1. Le couple (1 ; 0) n'est pas une solution de l'inéquation $x - y < 0$.
Le demi-plan en gris ne contenant pas le couple (1 ; 0) et privé de la droite (D) d'équation $x - y = 0$ est la représentation graphique des solutions de $x - y < 0$.



Exercice 9

$(x\,;\,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$; $3x - 5y + 1 \leq 0$

3 × (0) − 5(0) + 1 = 1. Le couple (0 ; 0) n'est pas une solution de l'inéquation $3x - 5y + 1 \leq 0$.
Le demi-plan en gris ne contenant pas le couple (0 ; 0) est la représentation graphique des solutions de $3x - 5y + 1 \leq 0$.



Exercice 10

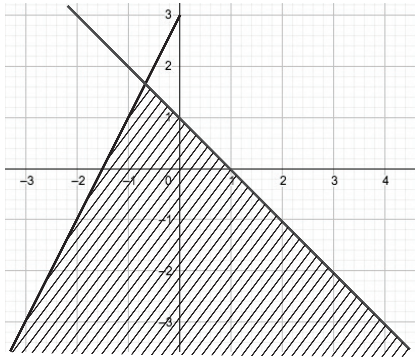
$(x\,;\,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$; $\begin{cases} x + y - 2 > 0 \\ 2x + y + 1 > 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} (5)+(1)-2 = 3 \text{ et } 3 > 0 \\ 2\times(5)+(1)+1 = \text{ et } 12 > 0 \end{cases}.$$

Le couple (5 ; 1) est une solution du système d'inéquations dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $\begin{cases} x + y - 2 > 0 \\ 2x + y + 1 > 0 \end{cases}$.

Exercice 11

$(x\,;\,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$; $\begin{cases} 2x - y + 3 \geq 0 \\ x + y - 1 \leq 0 \end{cases}$

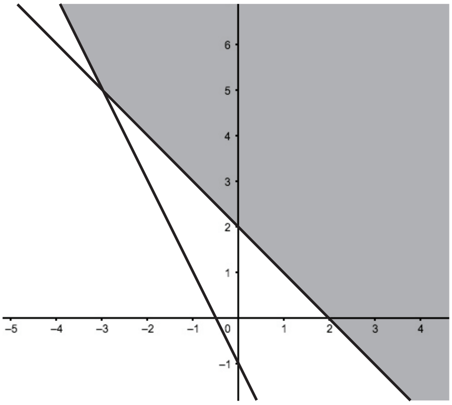


La partie du plan hachurée contenant le couple (0 ; 0) est la représentation graphique de l'ensemble des solutions de $\begin{cases} 2x-y+3 \geq 0 \\ x+y-1 \leq 0 \end{cases}$

Exercice 12

$(x\ ;\ y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\ ;\ \begin{cases} x+y-2>0 \\ 2x+y+1>0 \end{cases}$

L'ensemble solution est représenté par la partie du plan en gris.



IV.2. Exercices de renforcement

Exercice 13

$(x\ ;\ y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\ ;\ \begin{cases} x-2y+3>0 \\ 2x-y+3<0 \end{cases}$

$\begin{cases} (-5)-2(-2)+3=2 \text{ et } 2>0 \\ 2\times(-5)-(-2)+3=-5 \text{ et } -5<0 \end{cases}.$

Le couple (−5 ; −2) est une solution du système d'inéquations dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $\begin{cases} x-2y+3>0 \\ 2x-y+3<0 \end{cases}.$

Exercice 14

$(x\ ;\ y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\ ;\ \begin{cases} x+y<0 \\ -x+y<0 \end{cases}$

$\begin{cases} (0)+(-5)=-5 \text{ et } -5<0 \\ -(0)+(-5)=-5 \text{ et } -5<0 \end{cases}.$

Le couple (0 ; −5) est solution du système d'inéquations dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $\begin{cases} x+y<0 \\ -x+y<0 \end{cases}.$

Exercice 15

$(x\ ;\ y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\ ;\ \begin{cases} x+y-1<0 \\ x-y-1<0 \end{cases}$

$\begin{cases} (3)+(1)-1=3 \text{ et } 3>0 \\ (3)-(1)-1=1 \text{ et } 1>0 \end{cases}.$

Le couple (3 ; 1) n'est pas une solution du système d'inéquations dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $\begin{cases} x+y-1<0 \\ x-y-1<0 \end{cases}.$

Exercice 16

$(x\ ;\ y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\ ;\ -2x-y+6=0.$

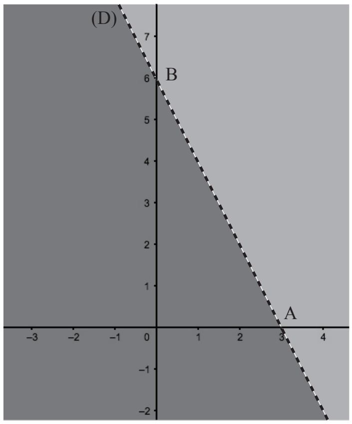
1) $-2\times(3)-0+6=0$, donc le couple (3 ; 0) est solution de l'équation $-2x-y+6=0$

$-2\times(0)-6+6=0$, donc le couple (0 ; 6) est solution de l'équation $-2x-y+6=0$.

2) Voir figure

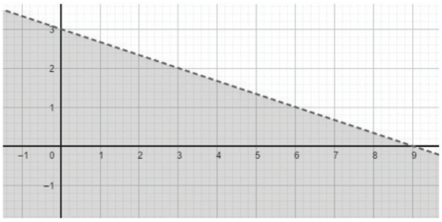
3) Voir figure

4) Voir figure



Exercice 17

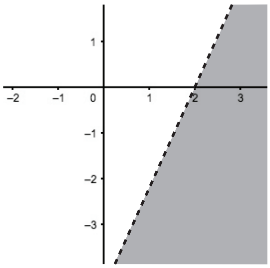
$(x\ ;\ y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\ ;\ x+3y-9<0.$



2) Le couple $(a\ ;\ 3)$ est solution de l'inéquation $x + 3y - 9 < 0$ lorsque $a + 3 \times 3 - 9 < 0$, soit $a < 0$. Le couple $(-1\ ;\ 3)$ est une solution de l'inéquation $x + 3y - 9 < 0$ $(a = -1)$.

Exercice 18

$(x\ ;\ y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\ ;\ 2x - y > 4$



2) Le couple $(0\ ;\ 0)$ n'est pas solution du système car $2 \times 0 - 0 = 0$ et $0 < 4$.

L'ensemble solution est la partie hachurée.

Exercice 19

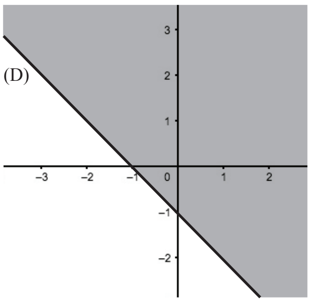
$(x\ ;\ y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\ ;\ x + y + 1 > 0$.

1) Le couple $(0\ ;\ b)$ est solution de $x + y + 1 > 0$ signifie que $0 + b + 1 > 0$ soit $b > -1$.

Exemple le couple $(0\ ;\ 0)$ est une solution de l'inéquation $x + y + 1 > 0$.

2) Soit (D) la droite d'équation $x + y + 1 = 0$. Voir la figure ci-dessous pour le tracé de (D).

3) voir figure.



L'ensemble solution est la partie hachurée.

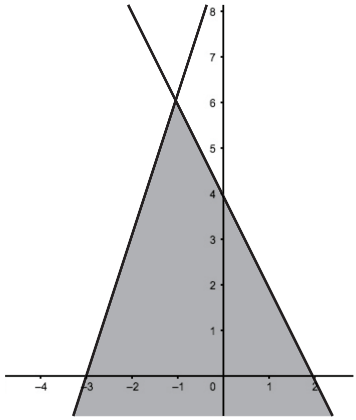
Exercice 20

$(x\ ;\ y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\ ;\ \begin{cases} 3x - y + 9 > 0 \\ 2x + y - 4 < 0 \end{cases}$

1) $\begin{cases} 3(4) - (-5) + 9 = 26 \text{ et } 26 > 0 \\ 2(4) + (-5) - 4 = -1 \text{ et } -1 < 0 \end{cases}$.

Le couple $(4\ ;\ -5)$ est une solution du système d'inéquation dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $\begin{cases} 3x - y + 9 > 0 \\ 2x + y - 4 < 0 \end{cases}$.

2) L'ensemble solution est représenté par la partie du plan en gris.



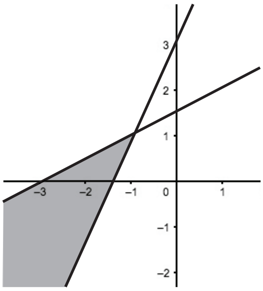
Exercice 21

$(x\ ;\ y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\ ;\ \begin{cases} x - 2y + 3 > 0 \\ 2x - y + 3 < 0 \end{cases}$

1) $\begin{cases} (-5) - 2(-2) + 3 = 2 \text{ et } 2 > 0 \\ 2(-5) - (-2) + 3 = -5 \text{ et } -5 < 0 \end{cases}$.

Le couple $(-5\ ;\ -2)$ est une solution du système d'inéquations dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $\begin{cases} x - 2y + 3 > 0 \\ 2x - y + 3 < 0 \end{cases}$.

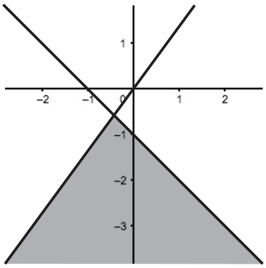
2) L'ensemble solution est représenté par la partie du plan en gris.



Exercice 22

$(x\ ;\ y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\ ;\ \begin{cases} -2x+y<0 \\ x+y+1<0 \end{cases}$

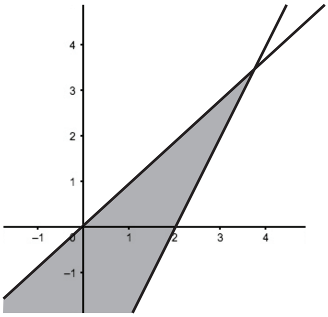
L'ensemble solution est représenté par la partie du plan en gris.



Exercice 23

$(x\ ;\ y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\ ;\ \begin{cases} y<x \\ y>2x-4 \end{cases}$

L'ensemble solution est représenté par la partie du plan en gris.



IV.3. Exercices d'approfondissement

Exercice 24

$(x\ ;\ y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$; $-5x + 2y - 8 \geq 0$.

- $-5(a) + 2(-2a) - 8 = -5a - 4a - 8 = -9a - 8$ et $-9a - 8 \leq 0$, donc $(a\ ;-2a)$ n'est pas solution de $-5x + 2y - 8 \geq 0$.
- $-5(-2a) + 2(3a) - 8 = 16a - 8$ et $16a - 8 > 0$ donc $(-2a\ ;\ 3a)$ est une solution de $-5x + 2y - 8 \geq 0$.
- $-5(-2a) + 2(-a) - 8 = 8a - 8$ et $8a - 8 > 0$ donc $(-2a\ ;-a)$ est une solution de

$-5x + 2y - 8 \geq 0$.

Exercice 25

$(x\ ;\ y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$; $x + y < 0$.

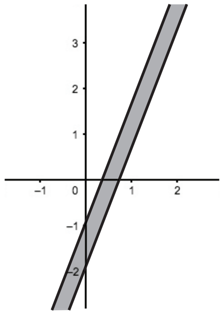
- $a + a = 2a$ et $2a > 0$, donc $(a\ ;\ a)$ n'est pas solution de $x + y < 0$.
- $3a + (-a) = 2a$ et $2a > 0$, donc $(3a\ ;-a)$ n'est pas solution de $x + y < 0$.
- $-3a + a = -2a$ et $-2a < 0$, donc $(-a\ ;-a)$ est une solution de $x + y < 0$.
- $-a - a = -2a$ et $-2a < 0$, donc $(-3a\ ;\ a)$ est une solution de $x + y < 0$.

Exercice 26

1) Les deux droites d'équation $-3x + y +2 = 0$ et $-3x + y + 1 = 0$ ont le même coefficient directeur qui est -3. Donc ces droites sont parallèles.

2) $(x\ ;\ y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\ ;\ \begin{cases} -3x+y+2>0 \\ -3x+y+1<0 \end{cases}$

L'ensemble solution est représenté par la partie en gris située entre les deux droites. (les droites sont exclues).



Exercice 27

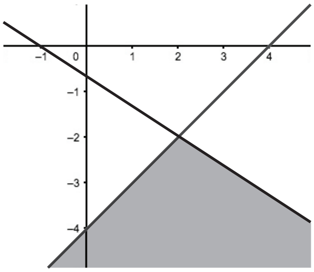
1) $(x\ ;y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\ ;\ \begin{cases} x-y-4=0 \\ x+\frac{3}{2}y+1=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (x\ ;y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\ ;\ \begin{cases} x=y+4 \\ (y+4)+\frac{3}{2}y+1=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (x\ ;y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\ ;\ \begin{cases} x=y+4 \\ \frac{5}{2}y+5=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (x\ ;y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\ ;\ \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$

2) L'ensemble solution est représenté par la partie du plan (en couleur).



Exercice 28

1) La droite passe par les points A(0 ; 2,5) et B(3 ; 0). L'équation de la droite est de la forme $y = ax + b$.

On a le système : $\begin{cases} 2,5=a\times 0+b \\ 0=3a+b \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2,5=b \\ 0=3a+\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{5}{2} \\ a=-\frac{5}{2} \end{cases}$

Une équation de la droite (AB) est

$y = -\frac{5}{6}x+\frac{5}{2}$ soit $5x + 6y - 15 = 0$.

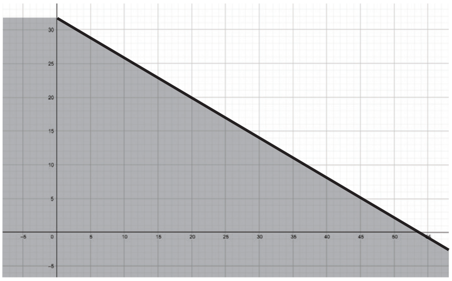
2) Le couple (0 ; 0) n'est pas solution.
Donc l'inéquation cherchée $5x + 6y - 15 \geq 0$.

3) La deuxième droite passe par les points A(0 ; 2,5) et C(−2,5 ; 0).
L'équation de cette droite est $x - y + 2,5 = 0$.
Le couple (0 ; 0) n'est pas solution.
Donc la deuxième inéquation est $x - y + 2,5 < 0$.

Un système cherché est : $\begin{cases} 5x+6y-15\geq 0 \\ x-y+2,5<0 \end{cases}$.

Exercice 29

Soit x le nombre de cahier de 200 pages et y le nombre de cahier de 300 pages.
On a : $300x + 500y \leq 16\,000$.
$300x + 500y \leq 16\,000 \Leftrightarrow 3x + 5y - 160 \leq 0$.



Les couples solutions sont choisis dans la partie coloriée en bleu.
Exemples
- (15 ; 15) c'est-à-dire 15 cahiers de 200 pages et 15 cahiers de 300 pages.
- (30 ; 10) c'est-à-dire 30 cahiers de 200 pages et 10 cahiers de 300 pages.

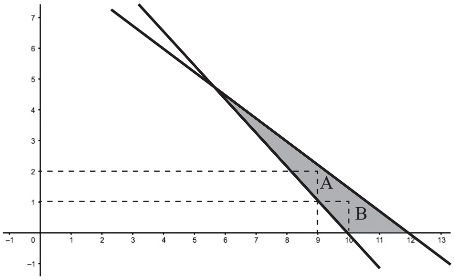
Exercice 30

1) On obtient : $x + y > 10$.

2) On obtient : $2\,500x + 3\,500y < 30\,000$.

3) En mettant ensemble les deux inéquations, on obtient : $\begin{cases} x+y>10 \\ 2500x+3500y<30\,000 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x+y>10 \\ 5x+7y-60<0 \end{cases}$.

4) La résolution graphique donne les nombres la partie du plan colorié (en jaune).



Les solutions doivent être des couples de nombres entiers naturels.
On a : les couples :

- (5 ; 5), c'est-à-dire 5 poulets et 5 pintades
- (9 ; 2), c'est-à-dire 9 poulets et 2 pintades
- (10 ; 1), c'est-à-dire 10 poulets et 1 pintade

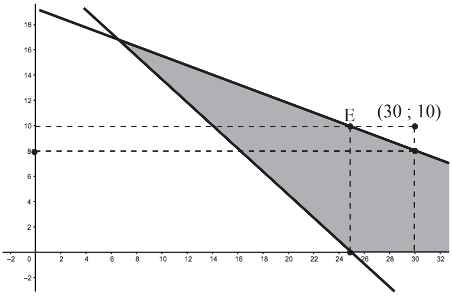
IV.4. Situations complexes

Exercice 31

Soit x le nombre de bouteilles de jus de fruit et y le nombre de bouteilles de lait.

On a : $\begin{cases} x+y \geq 25 \\ 200x+500y \leq 10\,000 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-25 \geq 0 \\ 2x+5y-100 \leq 0 \end{cases}$.



Le couple (30 ; 10) n'est pas solution de l'inéquation $200x + 500y \leq 10\,000$ car $200 \times 30 + 500 \times 10 = 11\,000$.

Plusieurs solutions sont possibles. Il suffit de choisir les coordonnées des points situés dans la partie du plan coloriée en jaune.

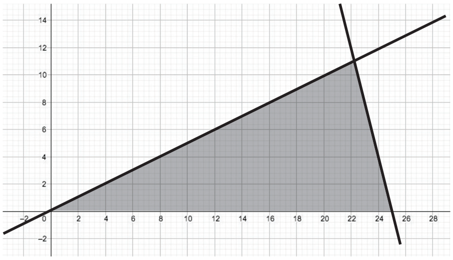
Pour épuiser les 10 000 F, les couples (25 ; 10) et (30 ; 8) conviendraient.

Exercice 32

Soit x le nombre de paquets de livres et y le nombre de paquets de cahiers. On a :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \geq 2y \\ 100x+25y \leq 2\,500 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x-2y \geq 0 \\ 4x+y \leq 100 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de ce système est représenté par la partie coloriée de la figure suivante.



Pour avoir 3 possibilités de chargement, il suffit de donner 3 solutions du système, par exemples (10 ; 4), (15 ; 7) et (22 ; 10). Le camion peut donc prendre l'un des chargements suivants :

- 10 paquets de livres et 4 paquets de cahiers ;
- 15 paquets de livres et 7 paquets de cahiers ;
- 22 paquets de livres et 9 paquets de cahiers.

IV. Exercices

IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

Classes $[x_i ; x_{i+1}]$	[0 ; 40[	[40 ; 60[	[60; 70[	[70 ; 80[	[80 ; 100[
Effectif *ni*	10	15	20	35	20
Centre $c_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$	20	50	65	75	90
Amplitude : $a_i = \lvert x_{i+1} - x_i \rvert$	40	20	10	10	20
Densité : $\frac{n_i}{\lvert x_{i+1} - x_i \rvert}$	0,25	0,75	2	3,5	1

Exercice 2

Classes $[x_i ; x_{i+1}]$	[1 ; 5[	[5; 8[	[8; 13[	[13 ; 14[	[14 ; 21[
Effectif *ni*	12	28	32	10	8
Centre $c_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$	3	6,5	10,5	13,5	12,5
Amplitude : $a_i = \lvert x_{i+1} - x_i \rvert$	4	3	5	1	7
Densité : $\frac{n_i}{\lvert x_{i+1} - x_i \rvert}$	3	$\frac{21}{3}$	6,4	10	$\frac{8}{7}$

Exercice 3

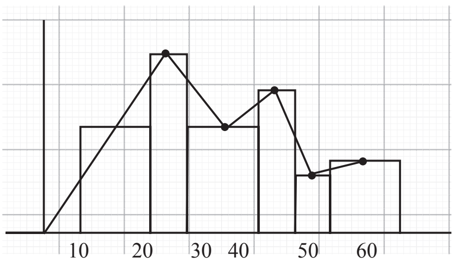
Affirmations	V	F
Dans un histogramme, la hauteur de chaque rectangle est égale à l'effectif de la classe correspondante.		×
Dans un histogramme, la hauteur de chaque rectangle est proportionnelle à l'effectif de la classe correspondante si les classes ont des amplitudes égales.	×	
Dans un histogramme, l'aire de chaque rectangle est proportionnelle à l'effectif de la classe correspondante.	×	
Dans un histogramme, la hauteur de chaque rectangle est égale à la fréquence de la classe correspondante.		×
Dans un histogramme, l'aire de chaque rectangle est proportionnelle à la fréquence de la classe correspondante.	×	

Exercice 4

a) Le polygone des effectifs est obtenu en joignant les milieux successifs des segments supérieurs de chaque rectangle de l'histogramme.

b) Le polygone des fréquences est obtenu en joignant les milieux successifs des segments supérieurs de chaque rectangle de l'histogramme.

Exercice 5



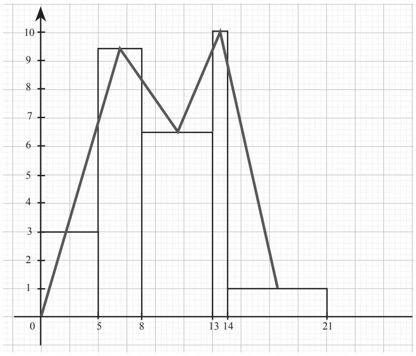
Exercice 6

1)

Classes	[1 ; 5[	[5; 8[	[8; 13[	[13 ; 14[	[14 ; 21[
Effectif *ni*	12	28	32	10	8
Centre	3	6,5	10,5	13,5	12,5
Amplitude	4	3	5	1	7
Densité	3	$\frac{21}{3}$	6,4	10	$\frac{8}{7}$
Largeur	2	1,5	2,5	0,5	3,5
Hauteur	3	9,3	6,4	10	1,1

L'aire de chaque classe est proportionnelle à la fréquence de la classe correspondante.
Amplitude 2 cm → 1 cm.

2)

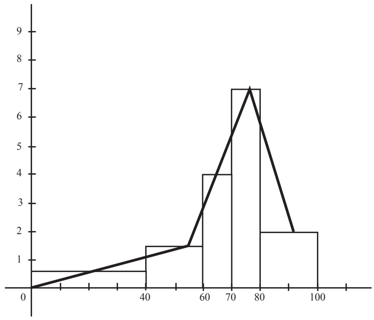


Exercice 7

1) Échelle
Amplitude 10 cm → 1 cm

Classes $[x_i ; x_{i+1}]$	[0 ; 40[	[40; 60[	[60 ; 70[	[70 ; 80[	[80 ; 100[
Fréquence *fi*	0,1	0,15	0,2	0,35	0,2
Amplitude : $a_i = \lvert x_{i+1} - x_i \rvert$	40	20	10	10	20
Densité : $\frac{n_i}{\lvert x_{i+1} - x_i \rvert}$	0,25	0,75	2	3,5	1
$Li\left(Li = \frac{a_i}{10}\right)$	4	2	1	1	2
$Hi\left(200 \times \frac{f_i}{a_i}\right)$	0,5	1,5	4	7	2

2)



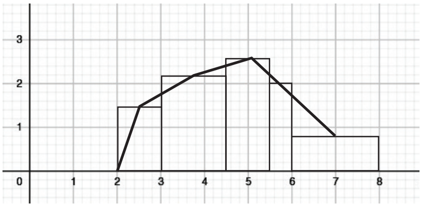
Maths 1eres A corrigé 06102021.indd 41 06/10/2021 08:11

Exercice 8

1)

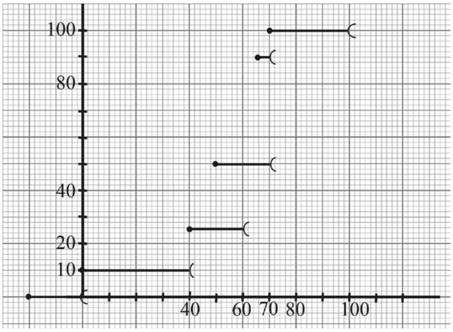
Classes $[x_i ; x_{i+1}]$	[2 ; 3[	[3; 4,5[	[4,5 ; 5,5[	[5,5 ; 6[	[6 ; 8[
Fréquence *fi*	0,15	0,35	0,25	0,1	0,15
Amplitude : $a_i = \lvert x_{i+1} - x_i \rvert$	1	1,5	1	0,5	2
Centre $c_i = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$	2,5	3,75	5	5,75	7
Densité : $\dfrac{n_i}{\lvert x_{i+1} - x_i \rvert}$	1,15	2,33	2,5	2	0,75
Li	1	1,5	1	0,5	2
Hi	1,15	2,33	2,5	2	0,75

2)



Exercice 9

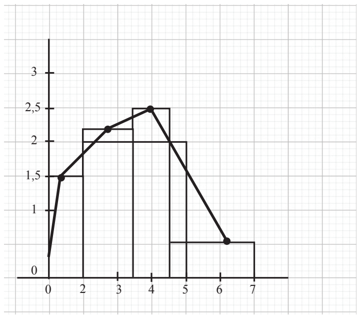
Classes $[x_i ; x_{i+1}]$	[0 ; 40[	[40 ; 60[	[60 ; 70[	[70 ; 80[	[80 ; 100[
Effectif *ni*	10	15	20	35	20
Effectif cumulé	10	25	45	80	100



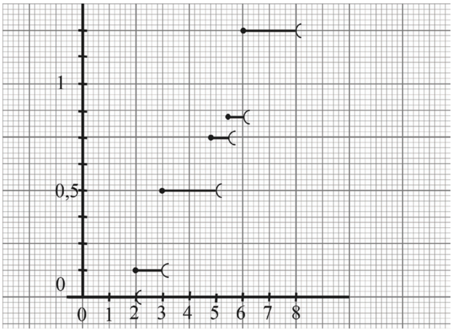
Exercice 10

1)

Modalité	[2 ; 3[	[3; 4,5[	[4,5 ; 5,5[	[5,5 ; 6[	[6 ; 8[
Fréquence	0,15	0,35	0,25	0,1	0,15
Amplitude	1	1,5	1	0,5	2
Centre	2,5	3,75	5	5,75	7
Densité	0,15	0,233	0,25	0,2	0,075
Li	1	1,5	1	0,5	2
Hi	1,5	1,33	2,5	2	0,75



Exercice 11



Courbe cumulative des fréquences

Exercice 12

1) La classe modale est [65 ; 75[elle a la plus grande densité.

2)

$$\frac{15\times45+35\times57,5+25\times70+10\times77,5+15\times90}{100}$$

$$=65,625$$

3)

Prix	[40, 50[	[50 ; 65[	[65 ;75[	[75 ; 80[	[80 ; 100[
Effectifs	15	35	25	10	15
Effectifs cumulés	15	50	75	85	100

On a : $\frac{100}{2}=50$ et

40	50	65	75	80	100
0	15	50	75	85	100

La médiane est 65

4) Déterminons le quartile 1

On a : $\frac{100}{4}=25$ et

$$\frac{Q_1-50}{25-15}=\frac{65-50}{50-15}$$

$Q_1 = 50 + 4$
$Q_1 = 54$
$Q_3 = 75$

4) $Q_3 - Q_1 = 75 - 54 = 21$

Interprétation

L'écart interquartile est relativement grand. Donc les valeurs sont dispersées par rapport à la moyenne.

Exercice 13

1)

Taille	[150 ; 160[	[160 ; 170[	[170 ; 180[	[180 ;190[
n_i	3	23	79	7
C_i	155	165	175	185

$$\overline{x}=\frac{\sum n_i\times c_i}{112}=17,04$$

2)

Classe	$C_i-\overline{x}$	$(C_i-\overline{x})^2$	$n_i(C_i-\overline{x})^2$
[150 ; 160[	−18,04	325,44	976,32
[160 ; 170[	−8,04	64,64	1468,72
[170 ; 180[	1,96	3,84	303,36
[180 ;190[	11,96	143,04	1001,28

2) $V=\frac{\sum n_i(c_i-\overline{x})^2}{112}=33,48$

$\sigma=\sqrt{V}\simeq 5,79$

IV.2. Exercices de renforcement

Exercice 14

La classe modale est : [65 ; 100[

La moyenne est : 42,9975

Exercice 15

Classe	[0,4 ; 0,5[	[0,5 ; 6[	[6 ; 8[	[8 ; 10[	[10 ; 14[	[14 ; 16[	[16 ;18[
Fréquence	0,07	0,085	0,225	0,275	0,21	0,08	0,055
Amplitude	0,1	5,5	2	2	4	2	2
Densité	0,7	0,015	0,1125	0,1375	0,0525	0,04	0,0275
Fréquence cumulée	0,07	0,155	0,38	0,655	0,865	0,945	1

1) La classe modale est [0,4 ; 0,5[

2) $\overline{X}$ = 0,45 × 0,07 + 3,25 × 0,085 + 7 × 0,225+9 × 0,275 + 11 × 0,21 + 15 × 0,055 = 8,8

3) 0,38 < 0,5 < 0,655

$8 < Me < 10$

$$\frac{Me-8}{0,5-0,38}=\frac{10-8}{0,655-0,38}$$

$$Me=8+\frac{2\times 0,12}{0,275}=8,87$$

4) 0,155 < 0,25 < 0,38

$6 < Q_1 < 8$

$$\frac{Q_1-6}{0,25-0,155}=\frac{8-6}{0,38-0,155}$$

$$Q_1=6+\frac{2\times 0,095}{0,225}=6,84$$

0,655 < 0,75 < 0,865

$10 < Q_3 < 14$

$$\frac{Q_3-10}{0,75-0,655}=\frac{14-10}{0,865-0,655}$$

$$Q_1=10+\frac{4\times 0,095}{0,21}=11,81$$

5) $Q_3 - Q_1 = 11,81 - 6,84 = 4,97$

Interprétation

L'écart interquartile est relativement petit. Donc les valeurs sont plus ou moins regroupés autour de la moyenne.

Exercice 16

Temps	[0 ; 20[	[20 ; 40[	[40 ; 60[	[60 ; 100[	[100 ; 140[	[140 ; 200[
Effectif	35	41	30	12	5	2
Centre	10	30	50	80	120	170

$$\overline{x}=\frac{\sum n_i\times c_i}{125}=39,84$$

$$V=\frac{\sum n_i c_i^2}{125}-\overline{x}^{\,2}=988,7744$$

$$\sigma=\sqrt{V}=31,44$$

IV.3. Exercices d'approfondissement

Exercice 17

$M_e = 9$; $Q_1 = 6,5$

$Q_3 = 13$; $Q_3 - Q_1 = 6,5$

Exercice 18

Mesure	[9,725 ; 9,775[	[9,775 ; 9,800[	[9,800;9,825[	[9,825;9,850[	[9,850;9,900[
C_i	9,75	9,79	9,81	9,83	9,86
n_i	1	5	4	6	4

$$\overline{x}=\frac{\sum n_i\times c_i}{20}=9,818$$

Écart absolu

$$e=\frac{\sum n_i|c_i-\overline{x}\,|}{20}=0,0605$$

V = 0,0012.

σ = 0,0347

Exercice 19

Notes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectif	15	24	52	80	92	132	154	42	21	2
Eff. cumul	15	39	91	171	263	395	549	591	612	614
Fréquence	0,024	0,039	0,085	0,13	0,15	0,215	0,251	0,068	0,034	0,004
Fréq. Cumul	0,024	0,063	0,148	0,278	0,428	0,43	0,894	0,962	0,996	1

$$\frac{Q_1-3}{154-91}=\frac{4-3}{171-91}\ ;\ Q_1=3,79$$

$$\frac{Q_3-6}{462-395}=\frac{7-6}{549-395}\ ;\ Q_3=6,66$$

$Q_3-Q_1=6,66-3,79=2,87$

Interprétation

L'écart interquartile est relativement petit. Donc les valeurs sont plus ou moins regroupées autour de la moyenne.

Exercice 20

Classe	[0 ; 40[	[40 ;60[	[60 ; 80[	[80 ; 100[	[100 ; 120[	[120 ; 150[	[150 ; 200[
c_i	20	50	70	90	110	135	175
f_i	0,1	0,15	0,05	0,25	0,225	0,1	0,125

1) $\overline{x}=\sum f_i c_i = 99,625$

2) $V=\sum f_i c_i^2-\overline{x}^{\,2}=10862,5$

$\sigma = 104,70$

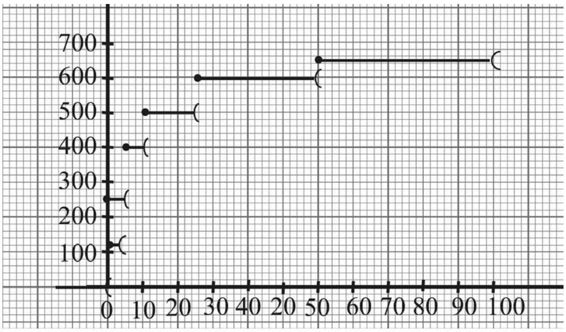
Exercice 21

x_i	[0 ;2,5[	[2,5 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 25[	[25 ; 50[	[50 ; 100[
c_i	1,25	3,75	7,5	17,5	37,5	75
n_i	137	106	112	154	100	33
Eff. cumul	137	243	355	509	609	642

1) $\overline{x}=\dfrac{1,25\times137+3,75\times106+7,5\times154+37,5\times100+75\times33}{642}=16,088$

$\overline{x}=16,088$ millions de FCFA

2)



3) Le nombre d'entreprises qui ont un chiffre d'affaires compris entre 20 et 35 millions de FCFA est compris entre 509 et 609 entreprises.

4) Le nombre d'entreprise dont le chiffre d'affaires est inférieur à 25 millions de FCFA est 509 entreprises

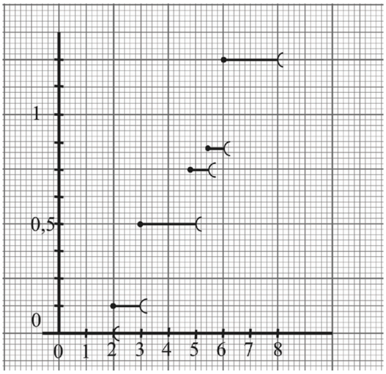
5) Le nombre d'entreprise dont le chiffre d'affaires est supérieur à 10 millions 154 + 100 + 33 = 287 entreprises.

Exercice 22

x_i	[20 ; 40[	[40 ; 60[	[60 ; 80[	[80 ;100[	[100 ;140[	[140 ;200[
c_i	30	50	70	90	120	170
n_i	240	208	160	172	129	91
f_i	0,24	0,208	0,16	0,172	0,129	0,091
Fréq. cumul	0,24	0,448	0,608	0,78	0,909	1

1) $\overline{x} = \dfrac{30 \times 240 + 50 \times 208 + 70 \times 160 + 90 \times 172 + 120 \times 129 + 170 \times 91}{1000} = 75,23$

2)



Courbe cumulative des fréquences

3) La proportion est comprise entre 0,448 et 0,909.

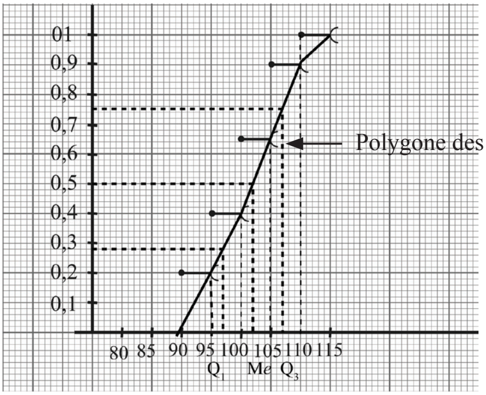
Exercice 23

x_i	[80 ;85[	[85 ; 90[	[90 ; 95[	[95 ; 100[	[100 ; 105[	[105 ; 110[	[110 ; 115[
n_i	5	9	14	18	25	16	7
c_i	82,5	87,5	92,5	97,5	102,5	107,5	112,5
f_i	0,05	0,01	0,14	0,19	0,27	0,17	0,07
Fréq. cumul	0,05	0,06	0,2	0,39	0,66	0,83	1

1) $\overline{x} = \dfrac{5 \times 82,5 + 9 \times 87,5 + 14 \times 92,5 + 18 \times 97,5 + 25 \times 102,5 + 16 \times 107,5 + 7 \times 112,5}{94} = 99,15$

2) voir tableau

3)



Courbe cumulative des fréquences

4) Me ∈ [100 ; 105[, Me = $100 + \dfrac{5(0,5-0,39)}{0,66-0,39}$ = 102,037

Q_1 ∈ [95 ; 100[, $Q_1 = 95 + \dfrac{5(0,25-0,2)}{0,39-0,2}$ = 96,32

Q_3 ∈ [105 ; 110[, $Q_3 = 105 + \dfrac{5(0,75-0,66)}{0,83-0,99}$ = 107,65

5) Le pourcentage de fromage de chèvres est compris entre 20% et 39%.

IV.4. Situations complexes

Exercice 24

Garçons

Âge	[11 ; 13[	[13 ; 16[	[16 ; 17[	[17 ; 21[	[21 ; 22[
Centre	12	14,5	16,5	19	21,5
Amplitude	2	3	1	4	1
Effectif	420	310	240	280	70
Eff. cumul	420	730	970	1250	1320
Densité	210	103,33	240	312,5	70

• La classe modale est [17 ; 21[.

Moyenne : $\overline{x} = \dfrac{420 \times 12 + 310 \times 14,5 + 240 \times 16,5 + 280 \times 19 + 70 \times 21,5}{1320} = 15,40$

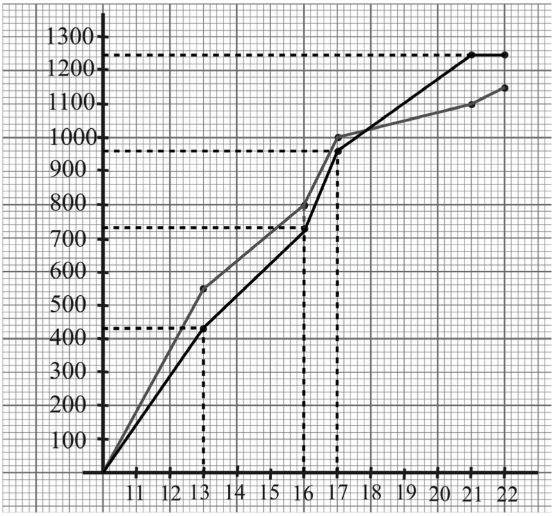
Médiane : Me ∈ $[13;16[$; M$e = 13 + \dfrac{3(660-420)}{730-420} = 15,32$

1er quartile : $Q_1 \in [11;13[$, $\dfrac{Q_1 - 11}{13-11} = \dfrac{330-0}{420-0}$, donc $Q_1 \simeq 12,57$

Filles

Âge	[11 ; 13[	[13 ; 16[	[16 ; 17[	[17 ; 21[	[21 ; 22[
Centre	12	14,5	16,5	19	21,5
Amplitude	2	3	1	4	1
Effectif	530	360	120	160	50
Eff. cumul	530	890	1010	1170	1220
Densité	265	120	120	40	50

- Classe modale : [11 ; 13[.
- Moyenne : $\overline{y} = \sqrt{7,71} = 2,78$



Polygone cumulé des effectifs cumulés

Mise en page : Vallesse Éditions
Tel : 2722410821/0101916125
Achevé d'imprimer en Côte d'Ivoire
3ème trimestre 2021
Dépôt légal : n° 17688 du 14 juillet 2021