Mathématiques

2nde C

Corrigé

Auteurs

ARRICO Lucie
Professeur de lycée

AKÉ Djebri Antonin
Professeur de lycée

Vallesse

ISBN : 978-2-38403-020-0

Leçon 1 Ensemble des nombres réels

IV. Exercices

IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

L1→ $\boxed{\text{Faux}}$; L2→ $\boxed{\text{Faux}}$

L3→ $\boxed{\text{Faux}}$; L4→ $\boxed{\text{Vrai}}$

L5→ $\boxed{\text{Faux}}$; L6→ $\boxed{\text{Vrai}}$.

Exercice 2

Supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel. Il existe alors deux nombres entiers naturels a et b non nuls tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec PGCD $(a\ ;b) = 1$

$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow a = \sqrt{2}\,b \Leftrightarrow a^2 = 2b^2$, donc a^2 est pair d'où a est pair.

Ainsi $a = 2p$ avec $p \in \mathbb{Z}$

D'où $a^2 = 2b^2 \Longrightarrow 4p^2 = 2b^2 \Longrightarrow b^2 = 2p^2$; donc b^2 est pair d'où b est pair. Par conséquent a et b sont tous les deux pairs, ce qui est absurde car PGCD $(a\ ;b) = 1$, donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 3

$$A = \left(\frac{-1}{3}\right)^2 - \frac{5}{3}$$
$$= \frac{1}{9} - \frac{5}{3} = \frac{1-15}{9}$$
$$A = \frac{-14}{9}$$

$$B = \left(\frac{1}{8} - 1\right)\left(1 - \frac{7}{11}\right)\left(\frac{5}{7} + \frac{1}{3}\right)$$
$$= \left(\frac{-7}{8}\right)\left(\frac{4}{11}\right)\left(\frac{22}{21}\right)$$
$$= -\frac{7\times 4\times 11\times 2}{2\times 4\times 11\times 3\times 7}$$
$$B = -\frac{1}{3}$$

$$C = \frac{7 - \frac{3}{2} + \frac{6}{5}}{7 + \frac{3}{2} - \frac{6}{5}} = \frac{\frac{70-15+12}{10}}{\frac{70+15-12}{10}}$$
$$= \frac{67}{10} \times \frac{10}{73}$$
$$C = \frac{67}{73}$$

Exercice 4

$$A = \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{7}\right)\times\left(\frac{7}{3} - 1\right) = \left(-\frac{2}{63}\right)\times\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{8}{189}$$

$$B = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{7}{24}\right)\times\frac{12}{49} = \left(\frac{7}{12} - \frac{7}{24}\right)\times\frac{12}{49}$$
$$= \left(\frac{14}{24} - \frac{7}{24}\right)\times\frac{12}{49} = \frac{7}{24}\times\frac{12}{49}$$
$$= \frac{7\times 12}{2\times 12\times 7\times 7}$$
$$B = \frac{1}{14}$$

$$C = \left(\frac{7}{5} - \frac{3}{2}\right) - \left[\frac{7}{8} - \left(\frac{3}{4} - 2\right)\right]$$
$$= \left(-\frac{1}{10}\right) - \left[\frac{7}{8} - \left(-\frac{5}{4}\right)\right]$$
$$= -\frac{1}{10} - \left(\frac{7}{8} + \frac{5}{4}\right) = -\frac{1}{10} - \frac{17}{8}$$
$$= \frac{-8-170}{80} = -\frac{178}{80}$$
$$C = \frac{-89}{40}$$

Exercice 5

$A = (7^{-24}\times 7^{-26}\times 7^{51})^2 = (7^{-24-26+51})^2 = (7^1)^2$

$A = 7^2$.

$B = (2\times 3)^5\times 3^{-3}\times 2\times 2^{-4}\times 3^{-1}$

$= 2^5\times 3^5\times 3^{-3}\times 2^{-3}\times 3^{-1}$

$= 2^{5-3}\times 3 = 2^2\times 3.$

$B = 2^2 \times 3.$

$$C=\frac{5^{12}\times 10^{-3}\times 3^{8}}{10^{-5}\times 3^{8}\times 5^{10}}$$

$$= 5^{12-10}\times 10^{-3+5}\times 3^{8-8} = 5^{2}\times 10^{2}\times 1 = 5^{2}\times 5^{2}\times 2^{2}$$

$C = 2^{2}\times 5^{4}$.

$$D = 8\times (7\times 5)^{5}\times \frac{5^{2}\times 7^{3}}{7^{4}\times 5^{6}}\times (7^{-2})^{2}$$

$$= 8\times 7^{5}\times 5^{5}\times 5^{-3}\times 7^{-1}\times 7^{-4} = 8\times 7^{5-1-4}\times 5^{5-3}$$

$$= 8\times 7^{0}\times 5^{2}$$

$D = 2^{3}\times 5^{2}$.

Exercice 6

$A = (2^{3}\times 2^{-4})^{2}\times (3^{3})^{2}\times 3^{-5} = (2^{-1})^{2}\times 3^{6}\times 5^{-5}$

$A = 2^{-2}\times 3$.

$$B=\left(-\frac{1}{3}\right)^{2}\times 5^{-2}\times\left(\frac{3}{5}\right)^{3}=\frac{1}{3^{2}}\times 5^{-2}\times\frac{3^{3}}{5^{3}}$$

$$= 5^{-2-3}\times 3^{3-2}$$

$B = 5^{-5}\times 3$

$$C=\left(\frac{2}{7}\right)^{4}\times\left(\frac{7}{4}\right)^{2}\times\left(\frac{-49}{2}\right)^{3}$$

$$=\frac{2^{4}}{7^{4}}\times\frac{7^{2}}{2^{4}}\times\frac{(-7^{2})^{3}}{2^{3}}$$

$$= -7^{8-4}\times 2^{-3}$$

$C = -7^{4}\times 2^{-3}$

$$D=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{4}\times\left(\frac{27}{4}\right)^{-1}$$

$$=\frac{2^{-3}}{3^{-2}}\times\frac{3^{4}}{2^{8}}\times\frac{3^{-3}}{2^{-2}}$$

$D = 3^{3}\times 2^{-8}$.

Exercice 7

$$A=\sqrt{27}+2\sqrt{75}-\sqrt{108}$$

$$=\sqrt{9\times 3}+2\sqrt{25\times 3}-\sqrt{36\times 3}$$

$$=3\sqrt{3}+10\sqrt{3}-6\sqrt{3}$$

$A = 7\sqrt{3}$

$$B=\sqrt{256}\times\sqrt{121}+\sqrt{144}=16\times 11+12$$

$B = 188$

$$C=\sqrt{\frac{8}{9}}\times\sqrt{\frac{12}{25}}\times\sqrt{\frac{225}{24}}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{5}\times\frac{15}{2\sqrt{6}}$$

$$C=\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=2$$

Exercice 8

$$A=\frac{2}{\sqrt{33}}\left(\frac{\sqrt{363}}{\sqrt{2}-1}\right)=\frac{2}{\sqrt{33}}\left(\frac{\sqrt{363}(\sqrt{2}+1)}{1}\right)$$

$$=\frac{2\times\sqrt{33}\times\sqrt{11}}{\sqrt{33}}(\sqrt{2}+1)$$

$A = 2\sqrt{22}+2\sqrt{11}$

$$B=\frac{3\times\sqrt{360}-2\sqrt{180}}{\sqrt{10}-\sqrt{2}}$$

$$=\frac{(18\sqrt{10}-12\sqrt{5})(\sqrt{10}+\sqrt{2})}{8}$$

$$=\frac{180+18\sqrt{20}-12\sqrt{50}-12\sqrt{10}}{8}$$

$$=\frac{180}{8}+\frac{36\sqrt{5}}{8}-\frac{60\sqrt{2}}{8}-\frac{12\sqrt{10}}{8}$$

$$=\frac{45}{2}+\frac{9\sqrt{5}}{2}-\frac{15\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{10}}{2}$$

$$B=\frac{45+9\sqrt{5}-15\sqrt{2}-3\sqrt{10}}{2}$$

$$C=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+2}=\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-2)}{2-4}$$

$$=\frac{2-2\sqrt{2}+\sqrt{2}-2}{2-4}$$

$$C=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$D=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-2}=\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+2)}{3-4}$$

$$=-(5+3\sqrt{3})$$

$D = -5-3\sqrt{3}$

Exercice 9

$$1{,}414<\sqrt{2}<1{,}415<1{,}570<\frac{\pi}{2}<1{,}571$$

donc $\sqrt{2}<\frac{\pi}{2}$.

Exercice 10

$2 < x < 5$

$\frac{1}{5} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$ donc $2 + \frac{1}{5} < x + \frac{1}{x} < 5 + \frac{1}{2}$

$\frac{11}{5} < x + \frac{1}{x} < \frac{11}{2}$

Exercice 11

1) On a $8^2 = 64$ et $(4\sqrt{3})^2 = 48$.

Comme $64 > 48$, alors $8 > 4\sqrt{3}$

2) $\sqrt{5} - 2 - (\sqrt{9} - 4\sqrt{5}) = \sqrt{5} - 2 - \sqrt{9} + 4\sqrt{5}$

$= \sqrt{5} - 2 - 3 + 4\sqrt{5}$

$= 5\sqrt{5} - 5$

$= 5(\sqrt{5} - 1)$

On a : $\sqrt{5}^2 = 5, 1^2 = 1$ et $5 > 1$

donc $\sqrt{5} > 1 \Rightarrow \sqrt{5} - 1 > 0$

$\Rightarrow (\sqrt{5} - 2) - (\sqrt{9} - 4\sqrt{5}) > 0$

$\Rightarrow \sqrt{5} - 2 > \sqrt{9} - 4\sqrt{5}$

Exercice 12

L2 → ☒

Exercice 13

L3 → ☒

Exercice 14

Pour l'ensemble A : –15 ; –12 ; –11 ; –8.
Pour l'ensemble B : –5 ; –3 ; –1 ; 0.
Pour l'ensemble C : –20 ; –12 ; –9 ; –7.
Pour l'ensemble D : –25 ; –17 ; –12 ; –11.
Pour l'ensemble E : –5 ; –3 ; 0 ; $\sqrt{2}$.

Exercice 15

Pour l'ensemble A : 14 ; 18 ; 20 ; 25.
Pour l'ensemble B : 0,5 ; 7 ; 10 ; 12.
Pour l'ensemble C : 12 ; 15 ; 17 ; 30.
Pour l'ensemble D : –3 ; –2 ; 0 ; 1.
Pour l'ensemble E : 2 ; 5 ; 10 ; 50.

Exercice 16

L2 → ☒

Exercice 17

L3 → ☒

Exercice 18

Le minimum de A est : –5.
Le minimum de B est : –2.
Le minimum de C est : $\sqrt{2}$.

Exercice 19

Le maximum de A est : 14.
Le maximum de B est : 0.
Le maximum de C est : –3.
Le maximum de D est : –7.

Exercice 20

L2 → ☒
L4 → ☒
L6 → ☒

Exercice 21

De haut en bas, on a :
V - V - V - F - V - F - F - F - V - F - F - F.

Exercice 22

De haut en bas, on a :
F - V - F - V - F - F.

Exercice 23

1) $d(x;y) = |x - y| = |2 - 3| = |-1| = 1$.

2) $d(x;y) = |-0,5 - 4,5| = |-5| = 5$.

3) $d(x;y) = |7 - 12| = |-5| = 5$.

4) $d(x;y) = d(-10,5;32)$
$= |-10,5 + 32|$
$= |21,5|$
$d(x;y) = 21,5$.

Exercice 24

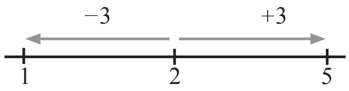
1) $|x-7| = 1 \Leftrightarrow x-7 = -1$ ou $x-7 = 1$
$\Leftrightarrow x = 6$ ou $x = 8$.
L'ensemble des solutions est : $\{6;8\}$.

2) $|1-x| = 2 \Leftrightarrow 1-x = 2$ ou $1-x = -2$
$\Leftrightarrow -x = 2-1$ ou $-x = -2-1$
$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 3$.
L'ensemble des solutions est : $\{-1;3\}$.

3) $|x+4| = 9 \Leftrightarrow x+4 = -9$ ou $x+4 = 9$
$\Leftrightarrow x = -13$ ou $x = 5$.
L'ensemble des solutions est : $\{-13;5\}$.

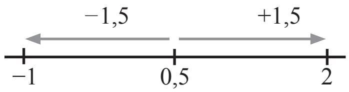
Exercice 25

1) $|x-2| = 3$



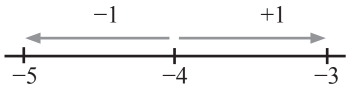
L'ensemble des solutions est : $\{-1;5\}$.

2) $|x-0{,}5| = 1{,}5$



L'ensemble des solutions est : $\{-1 ; 2\}$.

3) $|x+4| = 1 \Leftrightarrow |x-(-4)| = 1$



L'ensemble des solutions est : $\{-5 ; -3\}$.

Exercice 26

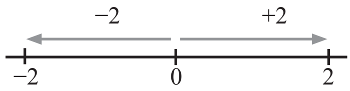
1) $|x-2| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x-2 \leq 5$
$\Leftrightarrow -5+2 \leq x \leq 5+2$
$\Leftrightarrow -3 \leq x \leq 7$.
L'ensemble des solutions est : $[-3;7]$.

2) $|9-x| \leq 0{,}5 \Leftrightarrow -0{,}5 \leq 9-x \leq 0{,}5$
$\Leftrightarrow -0{,}5-9 \leq -x \leq 0{,}5-9$
$\Leftrightarrow -9{,}5 \leq -x \leq -8{,}5$
$\Leftrightarrow 8{,}5 \leq x \leq 9{,}5$
L'ensemble des solutions est : $[8{,}5 ; 9{,}5]$.

3) $|x+0{,}7| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x+0{,}7 \leq 1$
$\Leftrightarrow -1{,}7 \leq x \leq 0{,}3$
L'ensemble des solutions est : $[-1{,}7;0{,}3]$.

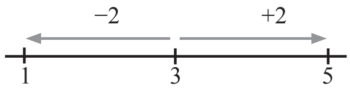
Exercice 27

1) $|x| \leq 2$



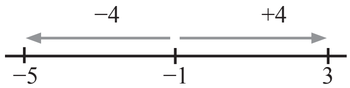
L'ensemble des solutions est : $[-2 ; 2]$.
2) $|3-x| \leq 2 \Leftrightarrow |x-3| \leq 2$

3) $|3-x| \leq 2$



L'ensemble des solutions est : $[1 ; 5]$.
$|x+1| \leq 4 \Leftrightarrow |x-(-1)| \leq 4$.

4) $|x+1| \leq 4$.



L'ensemble des solutions est : $[-5 ; 3]$.

Exercice 28

Déterminons l'encadrement de $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$2 \times 1{,}41 < 2\sqrt{2} < 2 \times 1{,}42$

$2{,}82 < 2\sqrt{2} < 2{,}84$

$\frac{1}{3} \times 2{,}82 < \frac{2\sqrt{2}}{3} < \frac{1}{3} \times 2{,}84$

$0{,}94 < \frac{2\sqrt{2}}{3} < 0{,}946$.

Exercice 29

1) Encadrement :

• $-1 \leq x + y \leq 1$.

• On a : $-2 \leq -y \leq -1$; donc $-4 \leq x - y \leq -2$.

• Comme $-2 \leq x \leq -1$, alors $1 \leq x^2 \leq 4$.

De plus $1 \leq y^2 \leq 4$, donc $2 \leq 2y^2 \leq 8$.

D'où $3 \leq x^2 + 2y^2 \leq 12$.

2) Encadrement de xy

$-2 \leq x \leq -1 \Leftrightarrow 1 \leq -x \leq 2$

On a $1 \leq -x \leq 2$ et $1 \leq y \leq 2$

donc $1 \leq -xy \leq 4$

$-4 \leq xy \leq -1$

Encadrement de $\frac{y}{x}$

$-2 \leq x \leq -1 \Leftrightarrow 1 \leq -x \leq 2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq -\frac{1}{x} \leq 1$

On a $\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{x} \leq 1$ et $1 \leq y \leq 2$

Donc $\frac{1}{2} \leq -\frac{y}{x} \leq 2$.

$-2 \leq \frac{y}{x} \leq -\frac{1}{2}$

IV.2. Exercices de renforcement

Exercice 30

a) $A - B = (x-1)^2 - (x-2)^2$
$= (x - 1 + x - 2)(x - 1 - x + 2)$
$= (2x - 3)(1)$
$A - B = 2x - 3$.

b) $x \geq 2$; $2x \geq 4$; $2x - 3 \geq 1$; donc $A - B$ est positif. Ainsi, $A > B$.

Exercice 31

1) On a : $B = ab + a + b + 1$
$A - B = a + b > 0$, donc $A > B$.

2) $A - B = \dfrac{(a-b)^2}{ab} \geq 0$, donc $A \geq B$.

3) $A - B = \dfrac{a+b}{ab} - \dfrac{1}{a+b}$.

$A - B = \dfrac{a^2 + ab + b^2}{ab(a+b)} > 0$, donc $A > B$.

Exercice 32

• Dans l'énoncé, remplacer

$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$ par $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$ et $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ par $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

$1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$
$8{,}66 < 5\sqrt{3} < 8{,}665$

$4{,}33 < \dfrac{5\sqrt{3}}{2} < 4{,}3325$.

Exercice 33

Dans l'énoncé
• remplacer $-2 \leq x < -1$ par $0 < x < 1$ et $1 \leq y \leq 2$ par $-1 \leq y < 0$.
• remplacer $x^2 + 2y^2$ par $x^2 + y^2$ dans 1).
• supprimer $\frac{y}{x}$ dans 2).

1) $-1 \leq y < 0 \Rightarrow 0 < -y \leq 1$

$0 < x < 1$
$0 < -y \leq 1$

$0 < x - y < 2$

• $0 < x < 1 \Rightarrow 0 < x^2 < 1$

$-1 \leq y < 0 \Rightarrow 0 < y^2 \leq 1$

$0 < x^2 < 1$
$0 < y^2 \leq 1$

$0 < x^2 + y^2 < 2$

2) $-1 \leq y < 0 \Rightarrow 0 < -y \leq 1$

$0 < x < 1$
$0 < -y \leq 1$

$0 < -xy \leq 1$
$-1 < xy \leq 0$

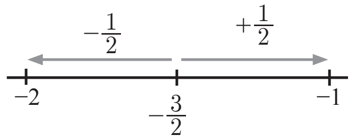
Exercice 34

1) $|2x + 3| = 1 \Leftrightarrow \left|2\left(x + \frac{3}{2}\right)\right| = 1$

$\Leftrightarrow |2|\left|x + \frac{3}{2}\right| = 1 \Leftrightarrow 2\left|x + \frac{3}{2}\right| = 1$

$\Leftrightarrow \left|x + \frac{3}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

2) Résolution graphique



L'ensemble des solutions est : $\{-2; -1\}$.

Exercice 35

1) $\left|-\frac{x}{2}+3\right| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|\frac{-x+6}{2}\right| \leq \frac{1}{2}$

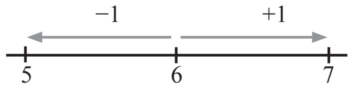
$\Leftrightarrow \left|-\frac{1}{2}(x-6)\right| \leq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \left|-\frac{1}{2}\right|\left|x-6\right| \leq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|x-6\right| \leq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \left|x-6\right| \leq 1$

2) Résolution graphique



L'ensemble des solutions est : $[5 ; 7]$.

IV.3. Exercices d'approfondissement

Exercice 36

$(a+b)^2 - 4ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$.

Comme $(a-b)^2 \geq 0$, alors $(a+b)^2 - 4ab \geq 0$

$\Longrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab$.

Donc $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

Exercice 37

a) On a $\frac{2+12}{2} = 7$ et $12 - 7 = 5$

D'où $x \in [2;12] \Leftrightarrow |x-7| \leq 5$

b) On a $\frac{-2+9}{2} = \frac{7}{2}$ et $9 - \frac{7}{2} = \frac{11}{2}$

D'où $x \in]-2;9[\Leftrightarrow \left|x - \frac{7}{2}\right| < \frac{11}{2}$

Exercice 38

• $|x-2| < 0,1$

$-0,1 < x - 2 < 0,1$

$1,9 < x < 2,1$

• $|y+3| < 0,2$

$-0,2 < y + 3 < 0,2$

$-3,2 < y < -2,8$

Encadrement de $|x + y + 3|$

$1,9 < x < 2,1$

$-3,2 < y < -2,8$

$-1,3 < x + y < -0,7$

$1,7 < x + y + 3 < 3,7$

$-3,7 < 1,7 < x + y + 3 < 3,7$

$|x + y + 3| < 3,7$.

Encadrement de $|x - y|$

$1,9 < x < 2,1$

$2,8 < -y < 3,2$

D'où $4,7 < x - y < 5,3$

$-5,3 < 4,7 < x - y < 5,3$

$|x-y| < 5,3$

Encadrement de $|xy|$

$1,9 < x < 2,1$

$2,8 < -y < 3,2$

$5,32 < -xy \leq 6,72$

$-6,72 < 5,32 < -xy < 6,72$

$-6,72 < xy < 6,72$

$|xy| < 6,72$.

Encadrement de $\frac{|x|}{y}$

$1,9 < x < 2,1$

$-2,1 < 1,9 < x < 2,1$

$|x| < 2,1$

$2,8 < -y < 3,2 \Longrightarrow \frac{1}{3,2} < -\frac{1}{y} < \frac{1}{2,8}$

On a : $0 < |x| < 2,1$

et $\frac{1}{3,2} < -\frac{1}{y} < \frac{1}{2,8}$

donc $0 < -\frac{|x|}{y} < \frac{2,1}{2,8}$

$$0 < -\frac{|x|}{y} < 0,75$$
$$-0,75 < \frac{|x|}{y} < 0$$

Exercice 39

1) Quatre minorants : –7 ; –5 ; –2 ; 0.
Quatre majorants : 1 ; 2 ; 10 ; 15.

2) Pour $n = 1$; $\frac{1}{1} = 1 \in E$

$n \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow n \geq 1$, donc $0 < \frac{1}{n} \leq 1$.

Donc 1 est le maximum de E.

3) Supposons que E possède un minimum m.
Alors il existe un nombre entier naturel n non nul tel que $m = \frac{1}{n}$.
On a : $n + 1 > n$, donc $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ c'est-à-dire que $\frac{1}{n+1} < m$. Absurde car $\frac{1}{n+1} \in E$; donc il existerait un élément E plus petit que le minimum de E.
D'où E n'admet pas de minimum.

Exercice 40

1) 7 est un majorant de E et appartient à E ; donc 7 est le maximum.
2) Supposons que E admet un minimum m.
$m \in E$, donc $m > 2$.
Considérons l'intervalle $]2\,;m[$. On a
$\frac{2+m}{2} \in]2;m[$, c'est à dire $2 < \frac{2+m}{2} < m$.
Par suite, $\frac{2+m}{2} \in E$ et $\frac{2+m}{2} < m$.
Cela contredit le fait que m est le minimum de E. Donc E n'admet pas de minimum.

Exercice 41

- Dans la question 2 de l'énoncé, remplacer minimum par maximum.

1) $\forall x \in E$, on a $2 < x < 3$. Ainsi E est minoré et majoré. Donc E est borné.
2) Supposons que E admet un maximum M.
$M \in E$, donc $M < 3$.
Considérons l'intervalle $]M;3[$.
On a
$\frac{M+3}{2} \in]M;3[$, c'est à dire $M < \frac{M+3}{2} < 3$.
Par suite, $\frac{M+3}{2} \in E$ et $\frac{M+3}{2} > M$.
Cela est contradictoire car aucun élément de E ne peut être plus grand que M.
Conclusion : E n'admet pas de maximum.

Exercice 42

1) Pour x égal respectivement à 0 ; 1 ; –1 ; –2 ; 2 on a les éléments de E suivants : 3 ; 9 ; 1 ; 3 et 11 respectivement.
2) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $(x+1)^2 \geq 0$
$$x^2 + 2x + 1 \geq 0$$
$$2x^2 + 4x + 2 \geq 0$$
$$2x^2 + 4x + 3 \geq 1$$
Donc 1 est un minorant de E.

3) Pour $x = -1$, l'élément de E est 1.
4) Comme 1 est un minorant de E et appartient à E, alors 1 est le minimum de E.

Exercice 43

$$A = \frac{1}{a+1} - \frac{\frac{a-1}{a}}{\frac{a+1}{a}}$$
$$= \frac{1}{a+1} - \left(\frac{a-1}{a} \times \frac{a}{a+1}\right)$$
$$A = \frac{1}{a+1} - \frac{a-1}{a+1} = \frac{2-a}{a+1}$$

Exercice 44

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$
$$E = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) +$$
$$\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + ... + \left(\frac{1}{998} - \frac{1}{999}\right) + \left(\frac{1}{999} - \frac{1}{1000}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{1000} = \frac{1000-1}{1000}$$
$$E = \frac{999}{1000}$$

Exercice 45

1) $\dfrac{0{,}2 \times 2{,}025 \times 10^{18}}{5{,}5} = 7{,}36 \times 10^{11}$ globules rouges

2) a) $\dfrac{5{,}5 \times 70000}{0{,}01} = 3{,}85 \times 10^{7}$ globules blancs

b) $\dfrac{5{,}5 \times 2500000}{10^{-2}} = 1{,}375 \times 10^{9}$ plaquettes.

Exercice 46

On a : $18\ g \leftrightarrow 6{,}03 \times 10^{23}$

$10^{-6}\ g \leftrightarrow x$

$$x = \frac{6{,}03 \times 10^{23} \times 10^{-6}}{18} = \frac{6{,}03}{18} \times 10^{17}$$

$= 0{,}335 \times 10^{17} = 3{,}35 \times 10^{-1} \times 10^{17}$

$x = 3{,}35 \times 10^{16}$.

Exercice 47

1) 1 jour = 24 h ; 4 jours = 96 h.

En 1 h, on a : 2×10 ;
en 2 h, on a : $2 \times (2 \times 10) = 2^2 \times 10$;
en 3 h, on a : $2 \times (2^2 \times 10) = 2^3 \times 10$;
donc dans 4 jours, on a : $2^{96} \times 10$.

2) Le volume occupé est égal au produit du nombre de bactéries par le volume d'une bactérie. Le volume d'une bactérie est $\pi \times (75 \times 10^{-6})^2 \times 200 \times 10^{-6}$
soit $3534291{,}735 \times 10^{-18}\,\text{m}^3$.
Le volume occupé est donc
$2^{96} \times 10 \times 3534291{,}735 \times 10^{-18}$
soit $2^{96} \times 35342917{,}35 \times 10^{-18}$ m^3.

Exercice 48

1 jour $\Leftrightarrow$ plus de 10000 fois
75 ans = 27375 jours.
Donc en 75 ans, il aura cligné des yeux plus de :
$27375 \times 10000 = 2{,}7375 \times 10^{8}$ fois.

Exercice 49

1) On suppose que $\dfrac{a}{b} \leq 1$, alors : $a \leq b$.

$ac \leq bc$ car $c > 0$

$ac + ab \leq bc + ab$

$$1 \leq \frac{bc + ab}{ac + ab} \Longrightarrow 1 \leq \frac{b(a + c)}{a(b + c)}$$

donc $\dfrac{a}{b} \leq \dfrac{a + c}{b + c}$.

2) On suppose que $\dfrac{a}{b} \geq 1$, alors $a \geq b$.

$ac \geq bc$ car $c > 0$

$ac + ab \geq bc + ab$

$$1 \geq \frac{bc + ab}{ac + ab} \Longrightarrow 1 \geq \frac{b(a + c)}{a(b + c)}$$

donc $\dfrac{a}{b} \geq \dfrac{a + c}{b + c}$.

3) • $\dfrac{a}{b} \leq \dfrac{c}{d} \Rightarrow ad \leq bc$

$\Rightarrow ab + ad \leq ab + bc$

$\Rightarrow a(b + d) \leq b(a + c)$

$\Rightarrow \dfrac{a}{b} \leq \dfrac{a + c}{b + d}$ (1)

• $\dfrac{a}{b} \leq \dfrac{c}{d} \Rightarrow ad \leq bc$

$\Rightarrow cd + ad \leq cd + bc$

$\Rightarrow d(a + c) \leq c(b + d)$

$\Rightarrow \dfrac{a + c}{b + d} \leq \dfrac{c}{d}$ (2)

• De (1) et (2), on conclut que $\dfrac{a}{b} \leq \dfrac{a + c}{b + d} \leq \dfrac{c}{d}$

Exercice 50

1) Comparaison

• $\sqrt{a+m} - \sqrt{a} = \dfrac{m}{\sqrt{a+m} + \sqrt{a}}$

et $\sqrt{b+m} - \sqrt{b} = \dfrac{m}{\sqrt{b+m} + \sqrt{b}}$

$a > b \Rightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$

$a > b \Rightarrow a + m > b + m \Rightarrow \sqrt{a+m} > \sqrt{b+m}$

d'où $\sqrt{a+m} + \sqrt{a} > \sqrt{b+m} + \sqrt{b}$

$$\frac{1}{\sqrt{a+m} + \sqrt{a}} < \frac{1}{\sqrt{b+m} + \sqrt{b}}$$

$$\frac{m}{\sqrt{a+m}+\sqrt{a}} < \frac{m}{\sqrt{b+m}+\sqrt{b}}$$
$$\sqrt{a+m}-\sqrt{a} < \sqrt{b+m}-\sqrt{b}$$

2) On suppose que $a > 1, b > 1$,

on a : $(a-2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 4a + 4 \geq 0$

$$\Leftrightarrow a^2 \geq 4a - 4 \Leftrightarrow a^2 \geq 4(a-1)$$
$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{a-1} \geq 4.$$

De même, on a : $\frac{b^2}{b-1} \geq 4$;

Donc $\frac{a^2}{a-1} + \frac{b^2}{b-1} \geq 8$.

Exercice 51

1) On a : $\varphi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(6+2\sqrt{5}\right)$

$\varphi^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

$\varphi + 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{1+\sqrt{5}+2}{2}$

$= \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Donc $\varphi^2 = \varphi + 1$.

2) $\varphi - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; $\frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; donc $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$.

3) On a : $\frac{1}{\varphi^2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $2 - \varphi = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Donc $\frac{1}{\varphi^2} = 2 - \varphi \Leftrightarrow \varphi^2(2-\varphi) = 1$.

IV.4. Situations d'évaluation

Exercice 52

1) On a $30{,}21 < x < 30{,}22$
Donc $912{,}6441 < x^2 < 913{,}2484$

2) On a $40{,}52 < y < 40{,}53$
Donc $1641{,}8704 < y^2 < 1642{,}6809$
Par suite : $2554{,}5145 < x^2 + y^2 < 2555{,}9293$
$50{,}542 < \sqrt{x^2+y^2} < 50{,}556$

$50{,}54 < \sqrt{x^2+y^2} < 50{,}55$

L'hypoténuse est comprise entre 50,54 m^2 et 50,55 m^2.

Exercice 53

1) De la tente, aller 1 fois à la salle de sport, c'est effectuer 1 aller-retour donc, la distance parcourue est $|2x|$; donc aller 2 fois à la salle de sport, c'est faire 2 allers-retours ; donc la distance parcourue est $|4x|$.
De même, aller 1 fois au supermarché, c'est faire 1 aller-retour ; donc la distance parcourue est $|2(1{,}5-x)|$.
Ainsi, $d = |4x| + |2(1{,}5-x)|$

$d = 4|x| + |-2||x-1{,}5|$

$d = 4|x| + 2|x-1{,}5|$.

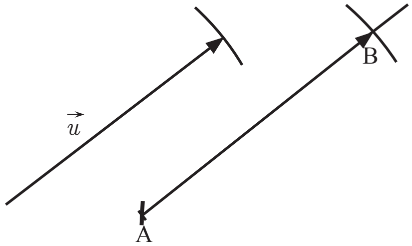
2) $\forall x \in]0;1{,}5[$, on a : $0 < x < 1{,}5$
$0 < x \Longrightarrow |x| = x$
$x < 1{,}5 \Longrightarrow |x-1{,}5| = 1{,}5 - x$
Par suite, $d = 4x + 2(1{,}5-x)$
Donc $d = 2x + 3$

3) Pour tout x élément de $]0\,;1{,}5[$, $d = 2x + 3$.
On a : $d = 4$ km $\Leftrightarrow 2x + 3 = 4$
$\Leftrightarrow x = 0{,}5$ km.

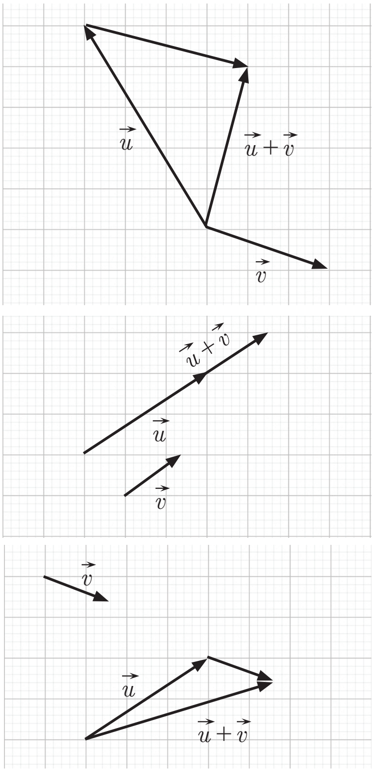
Leçon 2 Vecteurs et points du plan

IV. Exercices
IV.1. Exercices de fixation

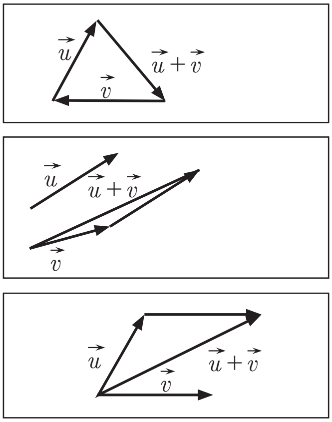
Exercice 1



Exercice 2



Exercice 3



Exercice 4

1) $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AB}$

2) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$

3) $\overrightarrow{RT} - \overrightarrow{ST} + \overrightarrow{SR} = \overrightarrow{RT} + \overrightarrow{TS} + \overrightarrow{SR}$

$= \overrightarrow{RR} = \vec{0}$

4) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM}$

$= \overrightarrow{BB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA}$

5) $2\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{MQ}$

$= 2\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QP}$

$= 2\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PP}$

$2\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{MQ} = 2\overrightarrow{MN}$

Exercice 5

1) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$

$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \vec{O}$

2) $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{DO}$

$= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD}$

$= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OB} = \vec{0}$

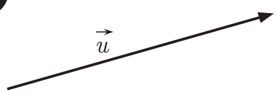
3) $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$

$= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BC}$

$= \vec{0}$

Exercice 6



$\|\vec{u}\| = 3$ cm

Exercice 7

$\|\vec{v}\| = \|7\vec{u}\| = |7| \times \|\vec{u}\| = 7 \times \|\vec{u}\|$

$\|\vec{u}\| = 7 \times 2 = 14$

Exercice 8

On a : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

$\|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\|$

or $\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\| \leq \|\overrightarrow{BA}\| + \|\overrightarrow{AC}\|$

Donc $\|\overrightarrow{BC}\| \leq \|\overrightarrow{BA}\| + \|\overrightarrow{AC}\|$

$\leq 2 + 9$

$\|\overrightarrow{BC}\| \leq 11$

Exercice 9

$\|\vec{w}\| = \left\|\dfrac{\vec{u}}{5}\right\| = \left|\dfrac{1}{5}\right| \|\vec{u}\| = \dfrac{1}{5} \times 5 = 1$

donc $\vec{w}$ est un vecteur unitaire.

$\|\vec{t}\| = \|4\vec{v}\| = |4| \|\vec{u}\| = 4 \times 0{,}25 = 1$

donc $\vec{t}$ est un vecteur unitaire.

Exercice 10

1) $2(\vec{u} + \vec{v}) + \dfrac{1}{2}(3\vec{u}) + \dfrac{1}{3}(\vec{u} - 6\vec{v})$

$= 2\vec{u} + 2\vec{v} + \dfrac{3}{2}\vec{u} + \dfrac{1}{3}\vec{u} - 2\vec{v} = \dfrac{23}{6}\vec{u}$

2) $7(\vec{u} - \vec{v}) + 3(\vec{u} + 2\vec{v}) - 2\left(5\vec{u} - \dfrac{1}{2}\vec{v}\right)$

$= 7\vec{u} - 7\vec{v} + 3\vec{u} + 6\vec{v} - 10\vec{u} + \vec{v}$

$= \vec{0}$

Exercice 11

- Dans l'énoncé, remplacé $\vec{b}$ par :

$\vec{b} = 7\vec{u} - 4\vec{v} + 3(\vec{u} + 3\vec{v}) - 5(\vec{u} - \vec{v})$.

Après avoir développé et réduit les expressions, on obtient :

$\vec{a} = -\dfrac{5}{18}\vec{u} + \dfrac{5}{6}\vec{v}$

$\vec{b} = 10\vec{v}$

Exercice 12

$\overrightarrow{AB} = \dfrac{2}{3}\vec{u} = \dfrac{-5}{-5} \times \dfrac{2}{3}\vec{u}$

$\overrightarrow{AB} = -\dfrac{2}{15} \times (-5\vec{u})$ donc $\overrightarrow{AB} = -\dfrac{2}{15}\overrightarrow{CD}$

D'où $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Exercice 13

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, donc

$\exists k \in \mathbb{R}^* / \vec{v} = k\vec{u}$. Par conséquent

$\vec{u} + \vec{v} = (1+k)\vec{u}$ *et* $\vec{u} - \vec{v} = (1-k)\vec{u}$.

- Si $k = -1$, alors $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$ et $\vec{u} - \vec{v} = 2\vec{u}$

Comme le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur, on en déduit que $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ sont colinéaires.

- Si $k = 1$, alors $\vec{u} + \vec{v} = 2\vec{u}$ et $\vec{u} - \vec{v} = 0$

De même que précédemment, que $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ sont colinéaires.

- Si $k \neq 1$ et $k \neq -1$, alors $\vec{u} + \vec{v} = (1+k)\vec{u}$

$= \dfrac{1+k}{1-k}(1-k)\vec{u}$

$\vec{u}+\vec{v}=\dfrac{1+k}{1-k}\,(\vec{u}-\vec{v})$

Donc $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ sont colinéaires.

Exercice 14

$\vec{w}=-2\vec{v}$ or $\vec{v}=3\vec{u}$,donc $\vec{w}=-2(3\vec{u})$

$\vec{w}=-6\vec{u}$. D'où $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

Exercice 15

$\overrightarrow{DQ}=\dfrac{-3}{-3}\times\dfrac{2}{3}\overrightarrow{EF}=\dfrac{2}{-9}\times\left(-3\overrightarrow{EF}\right)$

$\overrightarrow{DQ}=-\dfrac{2}{9}\overrightarrow{DP}$ donc D, P et Q sont alignés.

Exercice 16

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}\\
&=-\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}\\
&=2\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\
&=2\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\
&=2\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\
\overrightarrow{MN} &= \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

donc $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, d'où (MN) et (AC) sont parallèles.

Exercice 17

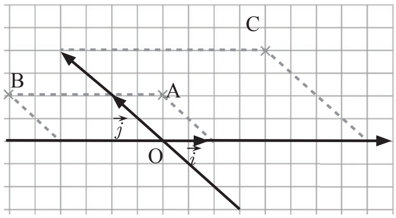
A, B, C sont non alignés, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
On en déduit que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ est une base.

Exercice 18

1) A(0 ; 0), B(1 ; 0) et C(0 ; 1).

2) $H\left(-\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 19



Exercice 20

$\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-4\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

Exercice 21

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-3\\1-2\end{pmatrix}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix}$

Exercice 22

$\det(\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix}2 & 3\\-1 & 2\end{vmatrix}=4-(-3)=7$

$\det(\vec{v},\vec{u})=\begin{vmatrix}3 & 2\\2 & -1\end{vmatrix}=-3-4=-7$

$\det(2\vec{u},-3\vec{v})=\begin{vmatrix}4 & -9\\-2 & -6\end{vmatrix}=-24-18=-42$

$\det(2\vec{u},-3\vec{v})=-42$

Exercice 23

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}8\\-4\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=\begin{vmatrix}8 & -4\\-4 & 2\end{vmatrix}=0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires d'où (AB) et (CD) sont parallèles.

Exercice 24

• Dans l'énoncé, remplacer $\overrightarrow{OM}$ par $\overrightarrow{OM} = -5\vec{i} + 7\vec{j}$.

$$\det(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = \begin{vmatrix} -5 & \frac{15}{2} \\ 7 & -\frac{21}{2} \end{vmatrix}$$

$$= -5\times(-\frac{21}{2}) - 7\times\frac{15}{2}$$

$$= \frac{105}{2} - \frac{105}{2}$$

$$= 0$$

$\det(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = 0$, donc $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ sont colinéaires.

On en déduit que O, M et N sont alignés.

Exercice 25

a) $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & -\frac{6}{5} \\ -4 & \frac{8}{5} \end{vmatrix} = 0$

donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

b) $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 14$ et $14 \neq 0$

donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

c) $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 0$

donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exercice 26

$\overrightarrow{IO} = -\vec{u}$, donc $\overline{IO} = -1$

$\overrightarrow{OA} = -2\vec{u}$, donc $\overline{OA} = -2$; $\overline{OB} = 3$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = 2\vec{u} + 3\vec{u} = 5\vec{u}$

$\overline{AB} = 5$; $\overline{BA} = -5$

Exercice 27

1) $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG}$ (1) ; $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BG}$ (2)

$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CG}$ (3)

En faisant la somme membre à membre des trois égalités on a :

$$3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}$$

$$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \underbrace{(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})}_{\vec{0}}$$

$$3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

donc $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

2) $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3} ; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$

3) $G\left(\frac{-1+7-3}{3} ; \frac{2+5-4}{3}\right)$

$G(1 ; 1)$

IV.2. Exercices de renforcement

Exercice 28

$$x\vec{a} + y\vec{b} = x(2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}) + y(\vec{u} - 3\vec{v})$$

$$= (2x + y)\vec{u} + (\frac{1}{2}x - 3y)\vec{v}$$

Or $\vec{c} = \frac{3}{2}\vec{u} - \vec{v}$. Donc

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}x - 3y = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 3 \\ x - 6y = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7}{13} \text{ et } y = \frac{11}{26}$$

Exercice 29

• Dans l'énoncé, remplace $2\overrightarrow{CD}$ par $2\overrightarrow{CB}$ dans b)

a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

b) $2\overrightarrow{CB} - 9\overrightarrow{CA} - 7\overrightarrow{AD} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}) - 9(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA})$

$-7(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{CD} - 9\overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{DB} - 9\overrightarrow{DB} + 7\overrightarrow{DB} + 9\overrightarrow{AB}$

$-7\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

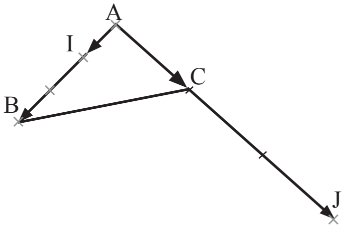
$\Leftrightarrow -7\overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{7}{2}\overrightarrow{CD}$

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Exercice 30

1) Plaçons les points



2. a) $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = 3\overrightarrow{AI} + 3\overrightarrow{IC}$

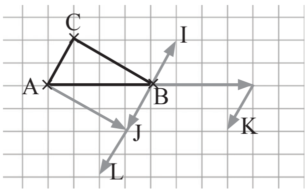
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BJ} = 3\text{AI} + 3\text{IC}$ donc $\overrightarrow{BJ} = 3\overrightarrow{IC}$

b) Ainsi, $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont colinéaires ;

donc (BJ) // (IC)

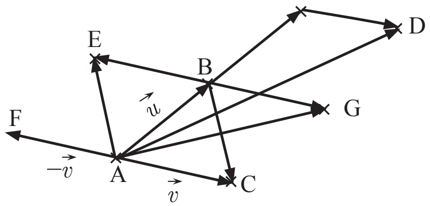
Exercice 31

Dans l'énoncé, $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.



Exercice 32

1) Construction des points D, E, F et G :



2) $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} = \vec{u} + 2\vec{v}$

$\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AG} = \vec{u} + 2\vec{v}$

3) $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AB} = \vec{v} + \vec{u}$

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

$= -\vec{u} + 2\vec{u} + \vec{v}$

$\overrightarrow{BD} = \vec{u} + \vec{v}$

Exercice 33

1) $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$

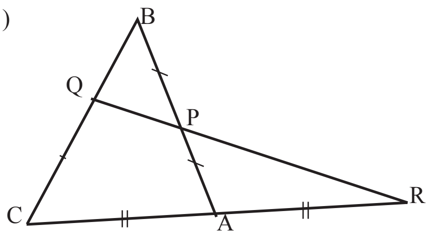
$= \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

2) $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires car $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Donc (EF) et (BC) sont parallèles.

Exercice 34

1)



2) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AR} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

3) $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$= -\frac{1}{3}(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{PQ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{PR}$

Donc $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ sont colinéaires.

4) $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ étant colinéaires, on en déduit que les points P, Q et R sont alignés.

Exercice 35

1) $3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

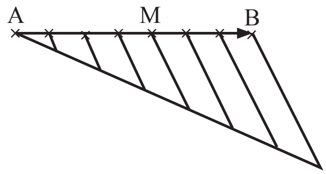
$\overrightarrow{MA} = \dfrac{-4}{3}\overrightarrow{MB}$, donc $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$

sont colinéaires

2) $3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{AB} = \vec{O}$

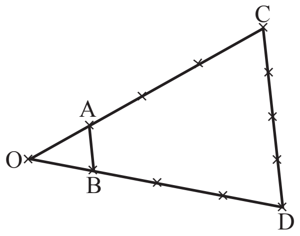
$\overrightarrow{MA} = -\dfrac{4}{7}\overrightarrow{AB}$

3) Remarque : on peut construire $\overrightarrow{AB}$ tel que $\|\overrightarrow{AB}\| = 7$ puis placer M tel que $\overrightarrow{AM} = \dfrac{4}{7}\overrightarrow{AB}$.



Exercice 36

1) Construction de C et D.



2) $\overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC} = 4\overrightarrow{OB} + 4\overrightarrow{BA}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{OB} - 4\overrightarrow{AB}$

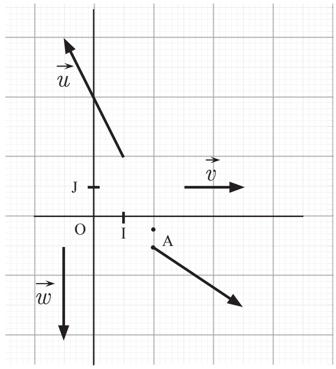
$\Leftrightarrow \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{OB} - 4 \times \left(\dfrac{1}{4}\overrightarrow{CD}\right)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OB}$

Donc O, B et D sont alignés.

Exercice 37



a) $\vec{u} = -2\overrightarrow{OI} + 4\overrightarrow{OJ}$ donc $\vec{u}$ $(-2 ; 4)$

$\vec{v} = 2\overrightarrow{OI}$ donc $\vec{u}$ $(2 ; 0)$

$\vec{w} = -3\vec{j}$, donc $\vec{w}(0 ; -3)$

b) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - 2 \\ y_B + 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

donc $x_B - 2 = 3$ et $y_B + 1 = -2$

$x_B = 5$ et $y_B = -3$. Donc B(5 ; −3)

Exercice 38

a) $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x_M - 3 \\ y_M - 3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M - 3 = 6 \\ y_M - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 9 \\ y_M = 3 \end{cases}$

Donc M(9 ; 3).

b) M milieu de [AC] $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$x_M + 1 = 3$ et $y_M - 1 = 0$ donc $M(2 ; 1)$.

c) $\overrightarrow{AB}$ (4 ; 2) ; $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} x_M - 5 \\ y_M - 1 \end{pmatrix}$

$2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CM} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 + 3x_M - 15 = 0 \\ 4 + 3y_M - 3 = 0 \end{cases}$

$M\left(\dfrac{7}{3}; -\dfrac{1}{3}\right)$

d) ABCM est un parallélogramme.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow$ M(1 ; −1).

Exercice 39

Les points K, L et M étant alignés, on a $\det(\overrightarrow{KL},\overrightarrow{KM}) = 0$. Soit x l'abscisse de M.

$\det(\overrightarrow{KL},\overrightarrow{KM}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 7 & x+3 \\ -3 & -7 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -49+3x+9 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{40}{3}$

L'abscisse de M est $\dfrac{40}{3}$

Exercice 40

1) $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AD}$ donc D est le milieu de [AE].

2) F milieu de [AB] $\Leftrightarrow \overrightarrow{AF} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} x_F + 1 \\ y_F + 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AF} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ donc $F\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

3) $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{GB}\begin{pmatrix} 4 - x_G \\ 2 - y_G \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 8 - 2x_G = 0 \\ 4 + 4 - 2y_G = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = 5 \\ y_G = 4 \end{cases}$ G(5 ; 4).

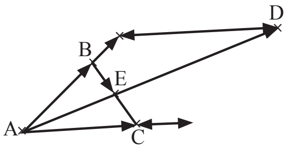
4) $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{7}{2} \end{pmatrix}$; $\dfrac{-1}{2}\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{7}{2} \end{pmatrix}$

on a : $\overrightarrow{DF} = \dfrac{-1}{2}\overrightarrow{BE}$; donc $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires d'où (BE) // (DF).

IV.3. Exercices d'approfondissement

Exercice 41

1) Plaçons D, E et F



2) a) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$

$= \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$= \overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

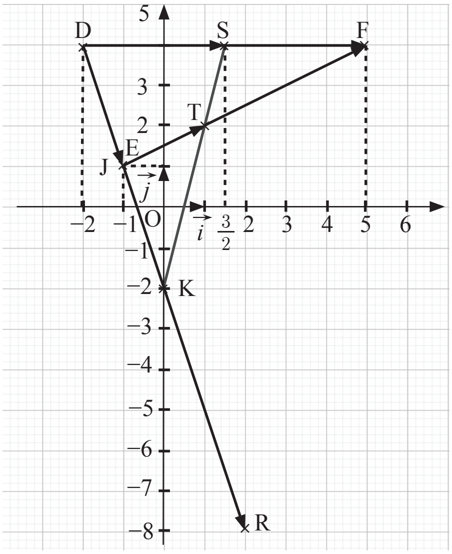
b) $\overrightarrow{AD} = 3\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)$

$\overrightarrow{AD} = 3\,\overrightarrow{AE}$

c) D'après b), A, D et E sont alignés.

Exercice 42

1. a) Construction des points R, S et T



b) R(2 ; −8) ; T(1 ; 2) ; $S\left(\dfrac{3}{2};4\right)$.

2) $\overrightarrow{ST}\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FR}\begin{pmatrix} -3 \\ 12 \end{pmatrix}$; donc $6\,\overrightarrow{ST}\begin{pmatrix} -3 \\ 12 \end{pmatrix}$

Ainsi $\overrightarrow{FR} = 6\,\overrightarrow{ST}$. D'où $\overrightarrow{FR}$ et $\overrightarrow{ST}$ sont colinéaires. Par conséquent, (ST) et (FR) sont parallèles.

3) Soit K, milieu de [DR] ; alors $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DR}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_K + 2 = 2 \\ y_K - 4 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K = 0 \\ y_K = -2 \end{cases}$ d'où K(0 ; −2)

4) $\overrightarrow{SK}\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -6 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{ST}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$; $3\,\overrightarrow{ST}\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -6 \end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{SK} = 3\,\overrightarrow{ST}$ d'où S, T et K sont alignés.

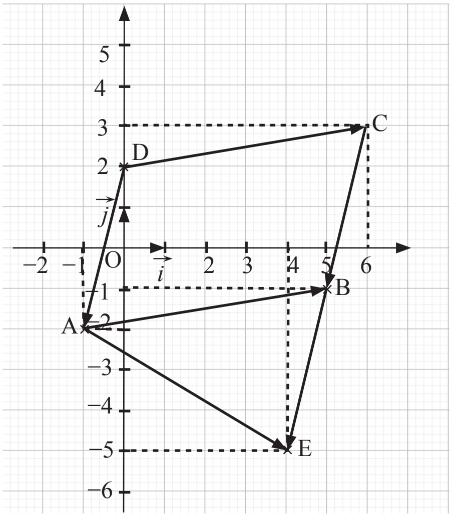
Exercice 43

1) Démontrons que ABCD est un parallélogramme.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc ABCD est un parallélogramme.

2. a) Construisons le point E :



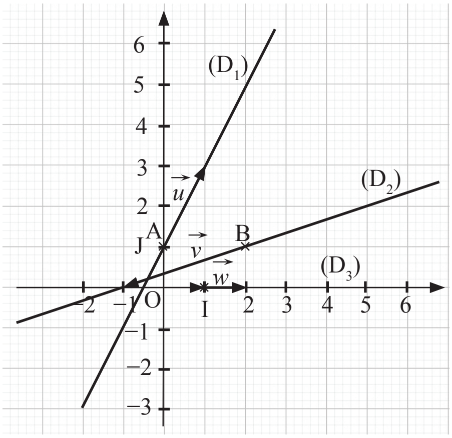
b) Déterminons les coordonnées du point E : E(4 ; −5).

3.a) $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$; donc $\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{CB}$;

donc $\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CE}$; d'où B est milieu de [CE].

Exercice 44



Exercice 45

1) $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $3\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$;

On a $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$. Donc A, B et C sont alignés.

2) $\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AO}\right) = -1 \neq 0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AO}$ ne sont pas colinéaires, d'où O $\notin$ (AB).

3) D $\in$ (AB) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires ; donc $\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right) = 0$.

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & y+3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{7}{3}$; d'où $D\left(3;\frac{7}{3}\right)$.

4) E $\in$ (AB) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires ; donc $\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE}\right) = 0$;

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 & x+5 \\ 2 & x+3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x = 1$, donc E(1 ; 1).

IV.4. Situation d'évaluation

Exercice 46

1) A(0 ; 0); B(0 ; 1) ; C(1 ; 1) ; D(0 ; 1)

$E\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$; $F\left(1;\frac{1}{2}\right)$; $G\left(-1;\frac{1}{2}\right)$.

2) $\overrightarrow{EF}\left(\frac{1}{2};0\right)$; $\overrightarrow{EG}\left(-\frac{3}{2};0\right)$.

$\overrightarrow{EG} = -3\,\overrightarrow{EF}$ donc les points E, F et G sont alignés.

Leçon 3 Généralités sur les fonctions

IV. Exercices
IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

L1 → $\boxed{\text{Vrai}}$
L2 → $\boxed{\text{Faux}}$
L3 → $\boxed{\text{Vrai}}$
L4 → $\boxed{\text{Faux}}$

Exercice 2

1) $f(-2) = 1$

2) $g(4) = -5$

3) $h(3) = 10$

4) $p(0) = -1$

5) $h(-3) = -7$ et $h(8) = -7$

6) $k(2) = 5$ et $k(-3) = 5$.

Exercice 3

$f(-2) = (-2)^2 - (-2) - 2 = 4$
$f(-1) = 0$; $f(1) = -2$; $f(2) = 0$.

Les antécédents de –2 :

$f(x) = x^2 - x - 2 = -2 \Leftrightarrow x(x-1) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$.

Donc les antécédents de –2 sont 0 et 1.

En effet, $f(0) = -2$ et $f(1) = -2$.

Exercice 4

- L'image de –3 est 4.
- –1 n'est pas dans l'ensemble de départ donc il n'est pas possible de déterminer l'image de –1 par g.
- L'image de 1 est –4.
- L'image de 4 est 3.
- L'antécédent de 0 est $\frac{1}{2}$.
- –2 n'est pas dans l'ensemble d'arrivée de g donc il n'est pas possible de déterminer l'antécédent de –2.

Exercice 5

1) L'image de –2 est 2.
L'image de 0 est –1.
L'image de 2 est 0.
L'image de 4 est –3.

2) 3 n'a pas d'antécédent.
Les antécédents de 0 sont : –1 ; 2 et 3,5.
Les antécédents de –1 sont : 0 ; 1 et 3,7.

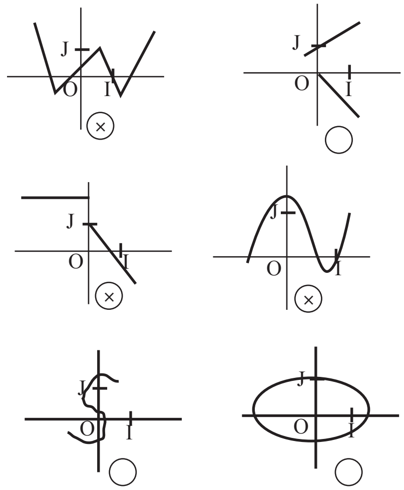
Exercice 6

L'image par cette fonction :

* de 5 est : $\frac{1}{5-2} - 3 = \frac{1}{3} - 3 = \frac{-8}{3}$.

* de –3 est : $\frac{1}{-3-2} - 3 = -\frac{1}{5} - 3 = -\frac{16}{5}$.

Exercice 7



Exercice 8

$x \longmapsto \dfrac{2}{x-2}$	•
$x \longmapsto x^2 - 1$	•
$x \longmapsto \dfrac{2-x}{x-2}$	•
$x \longmapsto \sqrt{2-x}$	•
$x \longmapsto \dfrac{-3}{x^2-3}$	•
$x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$	•

•	$]-\infty;2]$
•	$[2;+\infty[$
•	$]-\infty;-3[\cup]-3;+\infty[$
•	$\mathbb{R}$-{-1;1}
•	$\mathbb{R}$
•	$]3;+\infty[$
•	$\mathbb{R}$-{2}
•	$\mathbb{R}$-{-$\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$ }.

Exercice 9

● f est une fonction polynôme, donc $D_f = \mathbb{R}$.

● $x \in D_g \Leftrightarrow 2x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{3}{2}$.

Donc $D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

● $x \in D_h \Leftrightarrow x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$.

Donc $D_h = [-2 ; +\infty[$.

● $x \in D_k \Leftrightarrow x^2 - 4 \neq 0$

$\Leftrightarrow x^2 \neq 4$

$\Leftrightarrow x \neq \sqrt{4}$ et $x \neq -\sqrt{4}$

$\Leftrightarrow x \neq 2$ et $x \neq -2$;

Donc $D_k = \mathbb{R} \setminus \{-2 ; 2\}$.

Exercice 10

On a : $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}$.

$x^3 + x = x(x^2 + 1)$

$\dfrac{x^3+x}{x^2+1} = x$; ainsi pour tout élément x de $\mathbb{R}$;

$f(x) = g(x)$. Donc f et g sont égales.

Exercice 11

1) f est une fonction polynôme ; donc $D_f = \mathbb{R}$.

$x \in D_g \Leftrightarrow x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$. Donc $D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Comme $D_f \neq D_g$ alors f et g ne sont pas égales.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$,

$g(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}$

$g(x) = x + 2$.

Donc $g(x) = f(x)$.

Exercice 12

1) $D_h = [-4 ; 5]$.

2) L'image directe par h de :

* $[-2 ; 2]$ est $[-3 ; 0]$
* $[3 ; 5]$ est $[2 ; 3]$.
* $[-4 ; 2]$ est $[-3 ; 2]$.

Exercice 13

1) $D_h = [-3 ; 5]$.

2) L'image réciproque par h de :

● $[1 ; 2]$ est : $[-2 ; 2]$

● $[-3 ; -1]$ est : $[3 ; 5]$.

● $[-1 ; 2]$ est : $[-3 ; -1] \cup [1 ; 3]$.

Exercice 14

• Dans l'énoncé, remplacer 2 par $f(2)$ et 3 par $f(3)$.

Si pour $x \in [-1 ; 6]$, $f(x) \geq f(2)$, alors $f(2)$ est le minimum de f sur $[-1 ; 6]$.

Si pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq f(3)$, alors $f(3)$ est le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15

Pour $x \in \mathbb{R}$, $(x-2)^2 \geq 0$; $-(x-2)^2 \leq 0$;

$-(x-2)^2 + 4 \leq 4 \Leftrightarrow f(x) \leq 4$.

De plus, $f(x) = 4 \Leftrightarrow -(x-2)^2 + 4 = 4 \Leftrightarrow -(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Donc 4 est le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

Ce maximum est atteint pour $x = 2$.

Exercice 16

Pour $x \in [-2\ ;+\infty[$, $x \geq -2 \Leftrightarrow x + 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} + 3 \geq 3$.

$\Leftrightarrow f(x) \geq 3$.

$f(x) = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} + 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 0$

$\Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Donc 3 est le minimum de f sur $[-2\ ;+\infty[$.

Ce minimum est atteint pour $x = -2$.

Exercice 17

1) Complétons :
- La fonction f est croissante sur $[-3\ ;2]$;
- La fonction f est décroissante sur $[-5\ ;-3]$ et sur $[2\ ;5]$;

2) Tableau de variation

x	-5		-3		2		5
$f(x)$	$-0,5$	↘	$-3,5$	↗	$3,5$	↘	$0,5$

3) Le minimum de f est $-3,5$.

Le maximum de f est 3,5.

Exercice 18

De haut en bas, on a : F- F- F- V.

Exercice 19

1) $\boxed{\text{a) } f(2) > f(-1)}$

2) $\boxed{\text{b) } g(6) < g(3)}$

3) $\boxed{\text{c) } h(-2) = h(0)}$

Exercice 20

a) Complétons le tableau de variation.

x	-2		-1		2		4		5
$f(x)$	2	↗	3	↘	-1	↗	1	↘	0

b) Déterminons le minimum et le maximum de $f(x)$ sur $[-2\ ;5]$.

Sur $[-2\ ;5]$:
- le minimum de f est -1 ;
- le maximum de f est 3.

IV.2. Exercices de renforcement

Exercice 21

1) L'image de -3 par f est 12.
2) Les antécédents de 2 par f sont : -1 et 2.
3) Les nombres qui ont pour antécédent 0 par f sont : 0 et 1.

Exercice 22

1) $f(-1) = -(-1)^2 + 4 = -1 + 4 = 3$.

$f(\sqrt{2}) = 2$; $f(0) = 4$; $f(1) = 3$; $f(\sqrt{5}) = -1$.

2) $f(x) = 4 \Leftrightarrow x = 0$ donc l'antécédent de 4 par f est 0.

$f(x) = -5 \Leftrightarrow -x^2 + 4 = -5 \Leftrightarrow -x^2 = -9$

$\Leftrightarrow x = -3$ ou $x = 3$.

Les antécédents de -5 par f sont : -3 et 3.
Les antécédents de 0 par f sont : -2 et 2.

$f(x) = 5 \Leftrightarrow x^2 = -1$ impossible ; donc 5 n'a pas d'antécédent par f.

Exercice 23

1) $x \in D_f \Leftrightarrow 3x + 5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{5}{3}$, donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{3}\}$.

2) $f(-2) = 1$; $f(0) = \frac{3}{5}$; $f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}+3}{7}$.

3) $f(x) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{8}{5}$, donc l'antécédent par f de -1 est $-\frac{8}{5}$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$, donc l'antécédent par f de 0 est $-\frac{3}{2}$.

L'antécédent de $\frac{2}{3}$ n'existe pas.

Exercice 24

a) $f(0) = -2$

b) L'image de 3 par f est 4.

c) Ce sont : –2 et 3.

d) Pas d'antécédent de –3 par f.

e) C'est 1 et 0.

f) 6,6

g) –1 et 2.

Exercice 25

$D_f = [-5 ; 4]$; $D_g = [-5 ; -2] \cup [-1 ; 5]$;

$D_k =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 5]$.

Exercice 26

1) $h(0) = -\frac{1}{4}$; donc $A \in (\mathscr{C}_h)$.

$h(-1) = 0$, donc $B \notin (\mathscr{C}_h)$.

$h(4) = \frac{5}{13} \neq -3$, donc $C \notin (\mathscr{C}_h)$.

$D \notin (\mathscr{C}_h)$; $h(1) = -\frac{2}{3}$, donc $F \in (\mathscr{C}_h)$

2) $h\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{12}{35}$, donc l'ordonnée du point d'abscisse $\frac{1}{3}$ est $-\frac{12}{35}$.

3) $h\left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{5}{32}$; donc l'ordonnée du point d'abscisse $-\frac{2}{5}$ est $-\frac{5}{32}$.

Exercice 27

• Dans le d) de l'énoncé, $g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$.

a) $D_f = \mathbb{R}$; $D_g = \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, $|x| = \sqrt{x^2}$, donc $f(x) = g(x)$; d'où $f = g$.

b) $D_f = \mathbb{R}$; $D_g = \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$g(x) = \frac{x(x^2+1)}{x^2+1} = x = f(x)$; donc $f = g$;

c) $D_f = \mathbb{R}$; $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$,

$g(x) = \frac{x(x^2-1)}{x^2-1} = x = f(x)$, donc f et g ne sont pas égales mais coïncident sur $\mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$.

d) $D_f = [0 ; +\infty[$; $D_g = [0 ; +\infty[$.

Pour $x \in [0 ; +\infty[$,

$g(x) = \frac{(x-1)(\sqrt{x}-1)}{x-1} = \sqrt{x} - 1 = f(x)$;

donc $f = g$.

IV.3. Exercices d'approfondissement

Exercice 28

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 3 \neq 0$, donc $D_f = \mathbb{R}$,

$D_g = \mathbb{R} \setminus \{5 ; -2\}$.

$D_h = [-4 ; 2]$.

$x \in D_i \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+1} \geq 0$ et $x + 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \in (\,]-\infty : -1[\cup [2 ; +\infty[\,) \cap \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$\Leftrightarrow x \in]-\infty ; -1[\cup [2 ; +\infty[$,

donc $D_i =]-\infty ; -1[\cup [2 ; +\infty[$.

J est une fonction polynôme ; donc $D_J = \mathbb{R}$.

Exercice 29

1) $D_f = [-5,5 ; 4,5]$.

2) Complétons le tableau

x	–3	–1	0	–5,5	–4,5	0,5
$f(x)$	–1,5	0	2	–4	–3	3

3) $f([-2 ; 4]) = [-1 ; 3]$

$f([-3 ; 0]) = [-1,5 ; 2]$.

4) L'image réciproque de $[-3 ; -2{,}5]$ est $[-4{,}5 ; -4]$.
L'image réciproque de $[-1 ; 4]$ est $[-2{,}5 ; 4{,}5]$.

5)

x	$-5{,}5$		$-2{,}5$		$-1{,}5$		$0{,}5$		$4{,}5$
$f(x)$	-4	$\nearrow$	-1	$\rightarrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1

Exercice 30

1. a) Soient $a \in [2 ; +\infty[$; $b \in [2 ; +\infty[$ tels que $a \leq b$.

Alors $a - 2 \leq b - 2$; $(a-2)^2 \leq (b-2)^2$ car $a - 2 \geq 0$, $b - 2 \geq 0$;

$(a-2)^2 + 1 \leq (b-2)^2 + 1$ donc $f(a) \leq f(b)$, d'où f est croissante sur $[2 ; +\infty[$.

b) Soient $a \in]-\infty ; 2]$; $b \in]-\infty ; 2]$ tels que $a \leq b$.

Alors $a - 2 \leq b - 2$; $(a-2)^2 \geq (b-2)^2$ car $a - 2 \leq 0$, $b - 2 \leq 0$;

$(a-2)^2 + 1 \geq (b-2)^2 + 1$ donc $f(a) \geq f(b)$, d'où f est décroissante sur $]-\infty ; 2]$.

2) Tableau de variation :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Exercice 31

1) Soient $a \in [3 ; +\infty[$; $b \in [3 ; +\infty[$ tels que $a \leq b$.

Alors $a - 3 \leq b - 3$; $(a-3)^2 \leq (b-3)^2$ car $a - 3 \geq 0$, $b - 3 \geq 0$;
$-(a-3)^2 \geq -(b-3)^2$; $-(a-3)^2 + 2 \geq -(b-3)^2 + 2$ donc $f(a) \geq f(b)$,
d'où f est décroissante sur $[3 ; +\infty[$.

b) Soient $a \in]-\infty ; 3]$; $b \in]-\infty ; 3]$ tels que $a \leq b$.

Alors $a - 3 \leq b - 3$; $(a-3)^2 \geq (b-3)^2$ car $a - 3 \leq 0$, $b - 3 \leq 0$;
$-(a-3)^2 \leq -(b-3)^2$; $-(a-3)^2 + 2 \leq -(b-3)^2 + 2$ donc $f(a) \leq f(b)$, d'où f est croissante sur $]-\infty ; 3]$.

2) Tableau de variation :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	2	$\searrow$	

Exercice 32

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 3 > 0$, donc $D_f = \mathbb{R}$.

Soient $a \in]-\infty ; 0]$, $b \in]-\infty ; 0]$ tels que $a \leq b$ alors $a^2 \geq b^2$ car $a \leq 0$, $b \leq 0$, $a^2 + 3 \geq b^2 + 3$; $\frac{1}{a^2+3} \leq \frac{1}{b^2+3}$, $\frac{2}{a^2+3} \leq \frac{2}{b^2+3}$, donc $f(a) \leq f(b)$ d'où f est croissante sur $]-\infty ; 0]$.
De même, f est décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

3) Tableau de variation.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	

4) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$x^2 \geq 0$, $x^2 + 3 \geq 3$; $\frac{1}{x^2+3} \leq \frac{1}{3}$.
$\frac{2}{x^2+3} \leq \frac{2}{3}$; $f(x) \leq \frac{2}{3}$ et $f(0) = \frac{2}{3}$ donc $\frac{2}{3}$ est le maximum de f sur D_f.

Exercice 33

- Dans l'énoncé, $h(x) = \frac{-2}{\sqrt{5-x}}$

1) $D_h =]-\infty ; 5[$

2) Soient $x \in]-\infty ; 5[$ et $y \in [-\infty ; 5[$ tels que $x < y$. Alors $x < y < 5 \Rightarrow -x > -y > -5$

$$\Rightarrow 5 - x > 5 - y > 0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{5-x} < \frac{1}{5-y}$$
$$\Rightarrow \frac{-2}{5-x} > \frac{-2}{5-y}$$
$$\Rightarrow \text{donc } h(x) \geq h(y)$$

D'où h est décroissante sur $]-\infty ; 5[$.

3)

x	$-\infty$		5
$h(x)$		$\searrow$	

IV.4. Situation d'évaluation

Exercice 34

1) f est croissante sur [9 ; 12].
f est décroissante sur [12 ; 14].
f est croissante sur [14 ; 18].
f est décroissante sur [18 ; 20].

2) Tableau de variation.

x	9	12	14	18	20
$f(x)$	2 ↗	8 ↘	4 ↗	9 ↘	7

3) L'heure à laquelle l'attente est minimale est 9h.

Leçon 4 Utilisation des symétries et translations

IV. Exercices

IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

1- F ; 2- F ; 3- F ; 4- V.

Exercice 2

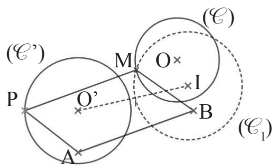
Soit t cette translation.
$t(A) = A'$ et $t(B) = B' \Longrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.
On déduit de cette égalité que ABB'A' est un parallélogramme.

Exercice 3

ABMP étant un parallélogramme, on a :
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PM}$.
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PM} \Longrightarrow M = t_{\overrightarrow{AB}}(P)$.

Programme de construction :

- Construire l'image $(\mathscr{C}_1)$ de $(\mathscr{C}')$ par $t_{\overrightarrow{AB}}$ en construisant le point $I = t_{\overrightarrow{AB}}(O)$ et le cercle de centre I et de même rayon que $(\mathscr{C})$.
- $(\mathscr{C}_1)$ coupe $(\mathscr{C}')$ en deux points. Tracer la parallèle à (AB) passant par un de ces points nommé M. Cette parallèle coupe $(\mathscr{C}')$ en P.

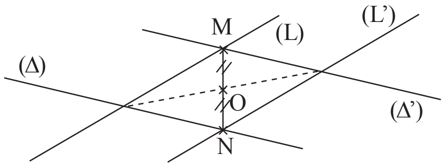


Exercice 4

Comme O est le milieu de [MN], on a :
$M = S_O(N)$.

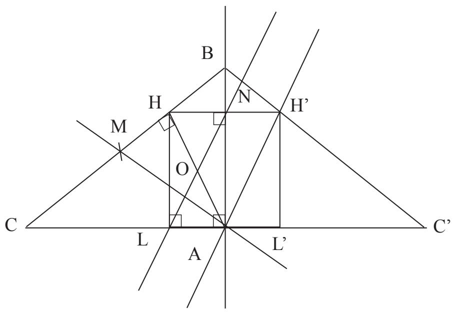
Programme de construction :

- Construire le symétrique (L') de (L) par rapport à O. (L') coupe (Δ) en N.
- Construire le symétrique (Δ') de (Δ) par rapport à O. (Δ') coupe (L) en M.



Exercice 5

Figure



• Soit $S_{(AB)}$ la symétrie orthogonale d'axe (AB).
On a :

$S_{(AB)}$	
A	A
B	B
N	N
H	H'
C	C'

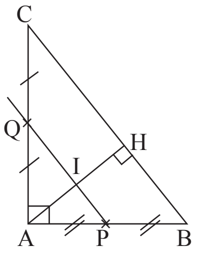
• Dans le triangle BCC', M est le milieu de [BC] et A milieu de [CC'].
Donc (MA) // (BC').

• $S_{(AB)}$ (H) = H' donc N est le milieu de [HH'].
Les diagonales du rectangle ANHL se coupent en leur milieu O.
Dans le triangle AH'H, (ON) // (AH') donc
(NL) // (AH')

• (AH) $\perp$ (BC) et $S_{(AB)}$ ((AH)) = (AH'),
$S_{(AB)}$ ((BC)) = (BC') donc (AH') $\perp$ (BC')
(MA) // (BC') et (BC') $\perp$ (AH') donc (MA) $\perp$ (AH')
(NL) // (AH') et (MA) $\perp$ (AH') donc
(NL) $\perp$ (MA)

Exercice 6

P est le milieu de [AB] et Q celui de [AC].
D'après la propriété des droites des milieux dans le triangle ABC,
(PQ) // (BC).
Or (AH)⊥(BC), donc (AH)⊥(PQ).
Soit {I} = (PQ)∩(AH) et dans le triangle ABH,



P étant milieu de [AB] et (PI)//(BH) d'après la même propriété, I est le milieu de [AH].
(PQ)⊥(AH) et (PQ)∩(AH) = {I} et I étant le milieu de [AH]. On déduit que (PQ) est la médiatrice de [AH].

Exercice 7

I est milieu de [MM'], M ∈ (D).
Soit S_I la symétrie de centre I.
On a : S_I(M) = M'.
Soit (D') = S_I(D).
M ∈ (D), M' ∈ S_I(D).
L'ensemble des points M' lorsque M décrit (D) est la droite (D') image de (D) par S_I.

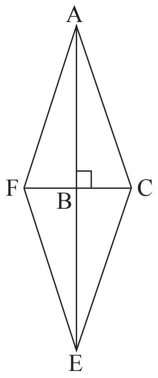
Exercice 8

Considérons la translation $t_{\overrightarrow{IJ}}$ de vecteur $\overrightarrow{IJ}$.
M' = $t_{\overrightarrow{IJ}}$ (M).
Si M ∈ (D) alors M'∈ $t_{\overrightarrow{IJ}}$ (D).
Donc l'ensemble des points M' du plan tels que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{IJ}$ est la droite (D') image de (D) par $t_{\overrightarrow{IJ}}$.
NB : Si (IJ) // (D), alors (D') et (D) sont confondues.

IV.2. Exercices de renforcement

Exercice 9

1) Construisons la figure.



2) Démonstration

S_B	
A	E
C	F

B milieu de [AE] et [CF].
Le quadrilatère ACEF est un parallélogramme car ses diagonales se coupent en leur milieu.

Aussi, ce parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires car (BC)⊥(AB).
Donc ACEF est un losange.

3) Calculons le côté du losange.

On sait que AC = CE = EF = AF.

Or $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}$.

$$AC = 2\sqrt{10}.$$

Donc la longueur du côté du losange est $2\sqrt{10}$ cm .

Exercice 10

Soit S_I la symétrie de centre I.

[AC] et [BD] sont deux diamètres du cercle de centre I. On a :

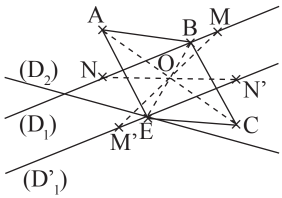
S_I	
A	C
B	D

Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme car ses diagonales [AC] et [BD] se coupent en I leur milieu.

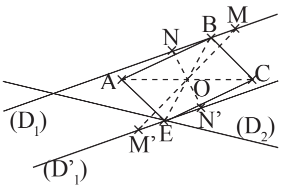
De plus, AC = BD donc ABCD est un rectangle.

Exercice 11

1[er] cas de figure :



2[ème] cas de figure :



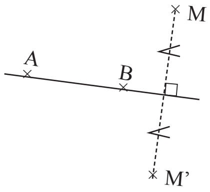
Programme de construction :

Considérons S_O, la symétrie de centre O.

- On construit $C = S_O(A)$
- On construit $S_O(D_1) = (D_1')$
- (D_1') coupe (D_2) en E, $E \in (D_2)$
- On construit $S_O(E) = B$. B appartient à (D_1).

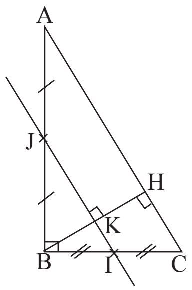
Donc ABCE est un parallélogramme de centre O tel que $B \in (D_1)$ et $E \in (D_2)$.

Exercice 12



Exercice 13

1) Construisons les points I, J et K.



2) Démonstration

I milieu de [BC], J milieu de [AB], d'après la propriété des droites de milieu dans le triangle ; (IJ) // (AC), or (BH) ⊥ (AC) ; donc (IJ) ⊥ (BH).

Soit {K} = (IJ) ∩ (BH), donc K est milieu de [BH] d'après la même propriété.

(IJ) ⊥ (BH) et (IJ) passe par le milieu de [BH]. Donc (IJ) est la médiatrice de [BH].

3) Considérons $S_{(IJ)}$ la symétrie d'axe (IJ).

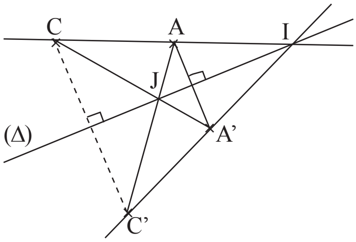
S_B	
I	I
B	H
J	J
(IB)	(IH)
(JB)	(JH)

Or (IB) ⊥ (JB)

donc (IH) ⊥ (JH) d'après la propriété des symétries orthogonales.

Exercice 14

Dans l'énoncé, supprimer "et à l'équerre"



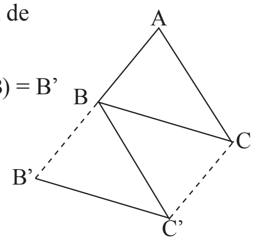
- On trace la droite (CA). (CA) coupe (Δ) en I.
- On trace (A'C). Elle coupe (Δ) en J.
- On trace (IA') et (AJ).
- (IA') ∩ (AJ) = {C'}.

Donc C' = $S_{(\Delta)}(C)$.

Exercice 15

Soit la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, $t_{\overrightarrow{AB}}$

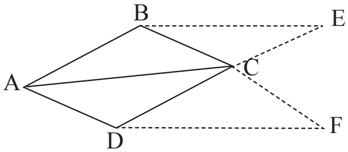
$t_{\overrightarrow{AB}}(A) = B$, $t_{\overrightarrow{AB}}(B) = B'$ et $t_{\overrightarrow{AB}}(C) = C'$.



Exercice 16

Donc $t_{\overrightarrow{AB}}(ABC) = BB'C'$.

1)



2) $t_{\overrightarrow{AC}}(B) = E \Leftrightarrow \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$.

$t_{\overrightarrow{AC}}(D) = F \Leftrightarrow \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AC}$.

Voir figure.

3) D'après les égalités précédentes, on a :

$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DF}$. D'où BEFD est un parallélogramme donc [BF] et [DE] ont un même milieu.

Aussi, $t_{\overrightarrow{AC}}(A) = C$, $t_{\overrightarrow{AC}}(B) = E$, ABEC est un parallélogramme. On sait aussi que ABCD est un parallélogramme.

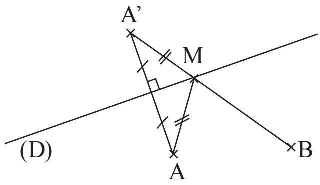
On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

ainsi $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DC}$, donc C est milieu de [ED].

On conclut que C est le milieu de [BF] et [DE].

IV.3. Exercices d'approfondissement

Exercice 17



Soit A' est l'image de A par $S_{(D)}$.

Place le point M, intersection de (D) et [AA'].

On a : MA + MB = MA' + MB car MA' = MA.

= A'B car M ∈ [A'B].

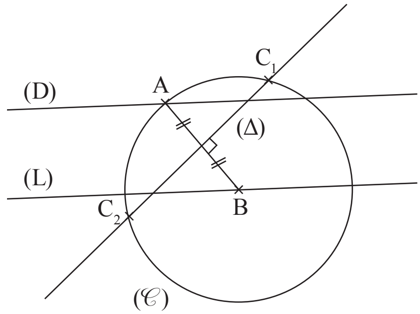
Pour tout point N ∈ (D), N ≠ M, ANB est un triangle. Donc AN + NB > A'B.

On a : AN + NB > MA + MB. Donc M est le point de (D) tel que AM + MB est minimale.

Exercice 18

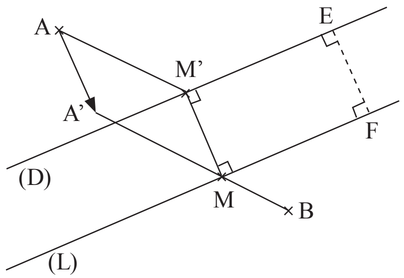
Programme :

- Place un point B sur (L).
- Trace la médiatrice de [AB].
- Construis le cercle ($\mathscr{C}$) de centre B et de rayon AB.
- ($\mathscr{C}$) coupe la médiatrice en deux points C_1 et C_2 ; ABC_1, ABC_2 sont les triangles cherchés.



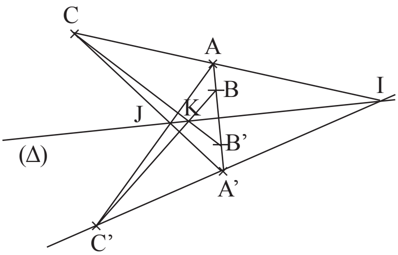
Exercice 19

(D) // (L)



- Soit A' = $t_{\overrightarrow{EF}}$(A).
- Soit le segment [A'B], ce segment coupe la droite (L) en un point M.
- Soit M' le projeté orthogonal de M sur la droite (D).
- La distance minimale de A à B est la ligne brisée AM'MB.

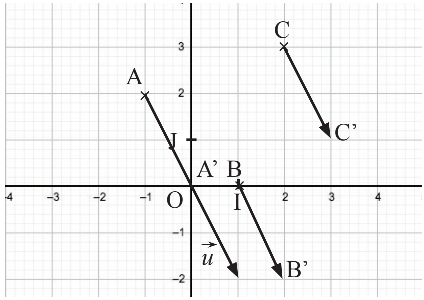
Exercice 20



- Place un point C tel que (CA) et (Δ) ne soient pas parallèles ;
- trace (CA), elle coupe (Δ) en I ;
- trace (IA') ;
- trace (A'C), elle coupe (Δ) en J ;
- trace (AJ), elle coupe (A'I) en C' ;
- trace (BC'), elle coupe (Δ) en K ;
- trace la droite (CK), elle coupe [A'A] en B' ; B' est le symétrique de B par rapport à (Δ).

Exercice 21

1) a) Construction des images A', B', C'.



b) A'(0 ; 0) ; B'(2 ; −2) et C'(3 ; 1).

2) a) M' = $t_{\vec{u}}$(M) ⇔ $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x+1 \\ y' = y-2 \end{cases}.$$

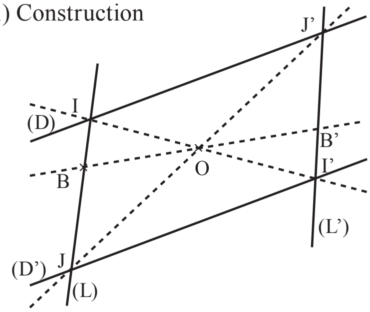
b) $t_{\vec{u}}(D) = A \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = x+1 \\ 2 = y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$

Donc D(−2 ; 4).

IV.4. Situation d'évaluation

Exercice 22

1) Construction



- On construit une sécante (L) à (D) et (D') passant par B.
- (L) coupe (D) en I et (D') en J.
- On construit les droites (OI) et (OJ).

(OI) coupe (D') en I' et (OJ) coupe (D) en J'.

- On trace la droite (I'J') = (L') image de (L) par S_O.

2) L'élève a raison.

<u>Programme de construction</u> :

- On trace (BO) et (BO) coupe la droite (L') en B'.
- B' est l'image de B par S_O.

Leçon 5 Droites et plans de l'espace

IV. Exercices
IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

L1 → $\boxed{\text{Faux}}$; L2 → $\boxed{\text{Vrai}}$; L3 → $\boxed{\text{Faux}}$;

L4 → $\boxed{\text{Vrai}}$.

Exercice 2

(HF) est une droite, elle est définie par deux points distincts H et F. C ∉ (HF), H, F et C sont trois points distincts non alignés. Donc (HF) et C définissent un plan.

Exercice 3

L1 → $\boxed{\text{Vrai}}$; L2 → $\boxed{\text{Vrai}}$; L3 → $\boxed{\text{Faux}}$;
L4 → $\boxed{\text{Vrai}}$.

Exercice 4

● Les couples de droites coplanaires : (EA) et (FB) ; (EH) et (CB) ; (GA) et (CA), (AG) et (BH).
● Les couples de droites non coplanaires : (HC) et (AD) ; (HB) et (DA).

Exercice 5

Deux droites coplanaires : (AB) et (AC).
Deux droites non coplanaires : (DC) et (AB).

Exercice 6

1- a ; 2- a ; 3- c ; 4- a.

Exercice 7

● Un plan parallèle à la droite (IJ) est : (ABC).
● Les plans sécants à la droite (IJ) sont : (SBC) ; (SAD).
● Les plans contenant (IJ) : (SAB) ; (IJK).

Exercice 8

L1 → a ; L2→c ; L3→c.

Exercice 9

1- V ; 2- V ; 3- F ; 4- V ; 5- V ; 6- V ; 7- F.

Exercice 10

1) I ∈ (AIE) et I ∈ (BIG) ; B ∈ (AIE) et B ∈ (BIG).
Donc (AIE) ∩ (BIG) = (BI).
2) A ∈ (BJC) ; D ∈ (BJC) et J ∈ (BJC). (ADI) et (BJC) sont confondus.
Donc (ADI) ∩ (BJC) = (ADI) ou (BJC).
3) Les plans (HEF) et (BJC) sont parallèles car ils sont deux faces parallèles du cube ABCDEFGH.
Donc (HEF) ∩ (BJC) = ∅.

Exercice 11

ACGE est un parallélogramme dans le cube ABCDEFGH.
Donc (AC) // (EG).

Exercice 12

M est milieu de [AB], N est milieu de [BC].
Dans le triangle ABC, (MN) et (AC) sont parallèles, d'après la propriété des droites des milieux.
Or (AC) // (EG), donc (MN) // (EG).

Exercice 13

(IJ) et (AB) sont parallèles d'après les droites des milieux dans le triangle ABD.
(AB) ⊂ (ABC). Donc (IJ) est parallèle à (ABC).

Exercice 14

(EG) // (AC) et (AC) ⊂ (ABC) donc (EG) // (ABC).

Exercice 15

T ∈ [FB] et T ≠ F, donc les droites (ET) et (AB) ne sont pas parallèles.
Elles sont sécantes et (AB) ⊂ (ABC).
Donc (ET) est sécante au plan (ABC).

Exercice 16

S ∈ (SAI), S ∈ (SCD).
C ∉ (SAI), D ∉ (SAI). Donc les plans (SAI) et (SDC) ne sont pas confondus et ont un point en commun.
Donc (SAI) et (SCD) sont sécants.
(SAI) ∩ (SCD) = (SP) avec {P} = (AI) ∩ (DC).

Exercice 17

1) D ∈ (DIJ), D ∈ (BCD), I ∈ (DIJ), I ∈ (BCD) car I est un point de [BC] et J ∈ (DIJ) et J ∉ (BCD).
Donc (DIJ) et (BCD) sont sécants et on a :
(DIJ) ∩ (BCD) = (DI).

2) J ∈ (DIJ), J ∈ (AD), on a J ∈ (ABD), D ∈ (DIJ) et D ∈ (ABD).
Aussi on a : B ∈ (ABD) et B ∉ (DIJ), donc (DIJ) et (ABD) ne sont pas confondus, mais strictement sécants.
On a : (DIJ) ∩ (ABD) = (JD).

Exercice 18

(IK) // (AC) et (JK) // (BC), (JK) et (IK) sont sécantes.
Aussi, on a : (IK) ⊂ (IJK), (JK) ⊂ (IJK) de même (AC) et (BC) sont des droites sécantes de (ABC).
Donc (IJK) // (ABC).

Exercice 19

Les droites (IJ) et (HF) sont parallèles de même (JK) est parallèle à (FB).
Or : (IJ) et (JK) sont des droites sécantes de (IJK) et (HF) ⊂ (HFB) ; (FB) ⊂ (HFB).
Donc les plans (IJK) et (HFB) sont parallèles.

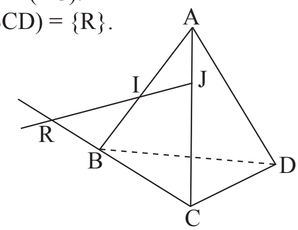
IV.2. Exercices de renforcement

Exercice 20

D ∈ (BCD); D ∈ (B'C'D).
E ∈ (BCD) et E ∈ (B'C'D) car (B'C') ∩ (DC) = {E}.
Donc (BCD) ∩ (B' C' D) = (DE).

Exercice 21

(IJ) et (BC) ne sont pas parallèles ; elles sont sécantes.
Soit {R} = (IJ) ∩ (BC).
Donc (IJ) ∩ (BCD) = {R}.



Exercice 22

(KJ) // (BC) et (IJ) // (AB).
(KJ) et (IJ) sont deux droites sécantes de (IJK).
(BC) et (AB) sont deux droites sécantes de (ABC).
Donc (IJK) // (ABC).

Exercice 23

(IJ) // (BC), on a : (IJ) // (BCD).
On a : K ∈ (IJK), K ∈ (BCD), L ∈ (IKJ) et L ∈ (BCD).
Ainsi (IKJ) ∩ (BCD) = (KL).
Donc (KL) // (IJ).

Exercice 24

- (IJ) // (BE). Or (BE) // (AD), donc (IJ) // (AD).
- (ABC) // (DEF) car base du prisme droit.

(AI)⊂(ABC), il existe une droite de (EDF) parallèle à (AI). Or (IJ) // (AD) et IJ = AD car nous sommes dans un prisme droit. IJDA est un parallélogramme.
Donc (AI) // (DJ).

Exercice 25

1) a) [DC] ; [EF] et [HG].
b) [AE] ; [FB], [AD] et [BC].
c) [HD] ; [GC] ; [FG] et [HE].

2) a) EFGH ; DCGH.
b) FGCB ; AEHD.
3) a) EFGH.
b) HGCD ; EFBA ; BCGF et AEHD.

Exercice 26

Soit les plans (IJK) et (BCD).
(IJ) ∩ (BC) = {E}.
(KI) ∩ (BD) = {F}.
(JK) ∩ (CD) = {G}.
Les plans (IJK) et (BCD) sont sécants en une droite contenant les points E, F et G.
Donc E, F et G sont alignés.

Exercice 27

A, B, C sont trois points non alignés, donc (ABC) est un plan.
(BC) coupe (P) en A', (AB) coupe (P) en C' et (AC) coupe (P) en B'. Le plan (ABC) est sécant à (P), en une droite.
Soit (ABC) ∩ (P) = (Δ). On a : A' ∈ (Δ), B' ∈ (Δ) et C' ∈ (Δ).
Donc A', B' et C' sont alignés.

Exercice 28

1) I ∈ [AB], J ∈ (CD), on a : I ∈ (AJB), J ∈ (CID).
J ∈ (AJB) et J ∈ (CD) donc J ∈ (CID).
Donc I ∈ (AJB) et I ∈ (CID) ;
J ∈ (AJB) et I ∈ (CID).

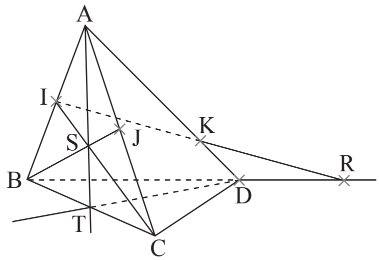
2) (AJB) ∩ (CID) = (IJ).

Exercice 29

1) I ∈ (AIJ), J ∈ (AIJ)
I ∈ (BC), on a : I ∈ (BCD)
J ∈ (CD), on a : J∈ (BCD).
Donc (AIJ) ∩ (BCD) = (IJ).
2. a) N ∈ (AJ), M ∈ (AI)
(AI) et (AJ) sont sécants en A.
(AIJ) est un plan contenant M, N, J et I.
b) (MN) ∩ (BCD) = {P}.
(MN) ⊂ (AIJ).
P ∈ (NM) et P ∈ (BCD)
et comme (BCD) ∩ (AIJ) = (IJ), on a P ∈ (IJ).

Exercice 30

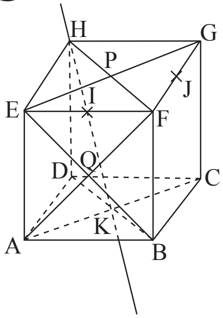
1) Construction des points I, J et K.



2) S est le centre de gravité du triangle ABC.
3) Soit {T} = (AS) ∩ (BC). D ∈ (ASD) et D ∈ (BDC). T ∈ (ASD) et T ∈ (BDC).
Donc (ASD) ∩ (BDC) = (TD).
4) (IK) et (BD) ne sont pas parallèles.
Soit {R} = (IK) ∩ (BD).
Donc (IK) ∩ (BCD) = {R}.

IV.3. Exercices d'approfondissement

Exercice 31

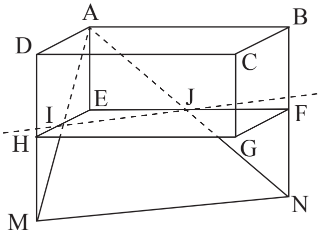


1) (IJF) est un plan et D ∉ (IJF). Les droites (DF) et (IJ) sont non coplanaires.

2) H ∈ (BDF), H ∈ (ACH).
On a : H ∈ (BDF) ∩ (ACH).
Par ailleurs, (BD) et (AC) sont sécantes.
Soit {K} = (BD) ∩ (AC), K ∈ (BDF) ∩ (ACH).
Donc (ACH) ∩ (BDF) = (HK).

3) P est milieu de [HF], Q est le milieu de [FA]. Dans le plan (AFH), la droite (PQ) passe par les milieux des côtés [FH] et [FA] du triangle AFH.
D'où (PQ) // (AH). Or (AH) ⊂ (ADH),
donc (PQ) // (ADH).

Exercice 32



● Dans le plan (ABF)
(AE) // (BF). Donc E ∈ (ABF) et J ∈ (ABF).
Considérons la symétrie S_J de centre J.

S_J

E	F
J	J
(AJ)	(AJ)
(AE)	(BF)
(AJ)∩(AE)	(AJ)∩(BF)

Or (AJ)∩(AE) = {A} et (AJ)∩(BF) ={N} ;
donc S_J(A)=N.
J est milieu de [AN].

● Dans le plan (ADH)
(AE) // (DH), E ∈ (ADH) et I ∈ (ADH).
Considérons la symétrie S_I de centre I.

S_I

E	H
(AE)	(DH)
(AI)	(AI)
(AE)∩(AI)	(DH)∩(AI)

On sait que (AE)∩(AI) = {A} et (DH)∩(AH) = {M} ;
donc S_I(A) = M.
I est milieu de [AM].
Dans le triangle AMN : I est milieu de [AM] et J milieu [AN].
Donc (IJ) // (MN).

Exercice 33

Les plans (EFG) et (ABC) sont strictement parallèles.
(HF) ⊂ (EFG). M ∈ [AB] et (AB) ne coupe pas (EFG).
Donc M ∉ (EFG).
Le plan (FHM) est sécant au plan (EFG).
Lorsque deux plans sont parallèles, tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et leurs droites d'intersection sont parallèles.
(HFM) ∩ (EFG) = (HF)
(HFM) ∩ (ABC) = (PM) et (ABC) ∩ (FEG) = ∅
c'est-à-dire (ABC) et (FEG) sont parallèles.
Donc (HF) // (PM).

Exercice 34

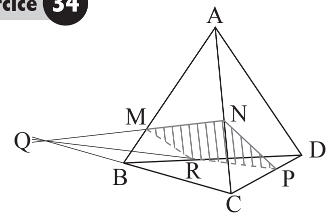


Figure 1

M ∈ [AB], N ∈ [AC], (MN) ⊂ (ABC) et (MN) ∩ (BC) = {Q}, (PQ) ⊂ (BCD) et (PQ) est sécante à (BD) en R.
La section du solide par le plan (MNP) est la plaque délimitée par la ligne brisée.
[MN] ∪ [NP] ∪ [PR] ∪ [RM].

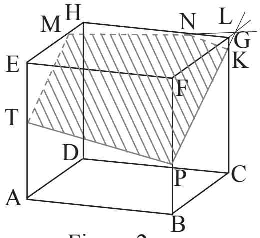


Figure 2

$M \in [EH]$, $N \in [HG]$, donc $(MN) \subset (EFG)$.
Les droites (MN) et (FG) sont sécantes en L.
$(LP) \subset (BCG)$. (LP) est sécante à (GC) en K.
Le plan (LPM) est sécant aux plans parallèles (BCG) et (ADH). Leurs intersections sont aussi parallèles. On trace la parallèle à (CP) passant par M. Cette droite coupe (AE) en T.
$T \in [EA]$ et $P \in [BE]$.
(MNP) coupe (ABP) en (TP).
Donc la section du solide est la plaque délimitée par : $[MN] \cup [NK] \cup [KP] \cup [PT] \cup [TM]$.

Exercice 35

1) Construisons la section du tétraèdre :

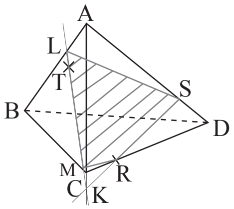


Figure 1

Soit K l'intersection de (RS) et (AC), M l'intersection de (KT) et (BC).
L, l'intersection de (KT) et (AB).
La section du solide est la plaque : SRML.

2) Construisons la section du cube :

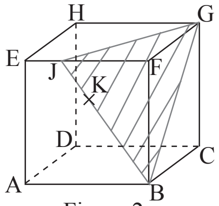


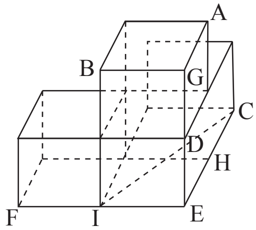
Figure 2

$(BG) \subset (BCF)$.
Soit $\{J\} = (BI) \cap (EF)$. $J \in (EFG)$.
La section est la plaque BJG.

IV.4. Situation d'évaluation

Exercice 36

1. a) Traçons les arêtes cachées sur la figure.



b) Notons a l'arête de chaque cube.
Dans le triangle BGC rectangle G.
$BC^2 = BG^2 + GC^2$.
On a : $BC^2 = a^2 + GE^2 + EC^2$
$BC^2 = a^2 + 4a^2 + 4a^2 = 9a^2$.
Donc $BC = 3a$.

2) $AB = BD = DA = a\sqrt{2}$.
Le triangle ABD est équilatéral.
3) Soit H le milieu de [EC]. I est le milieu de [EF].
Donc (IH) // (FC).
Par la suite, (AB) // (FC), donc A, B, C et F sont coplanaires.

4) $M_C = \dfrac{2400}{4} = 600$ kg/m^3.
$M = f \times v$ or $v = 4a^3$.
$M = 600 \times 4a^3 = 2400a^3$ kg.

IV. Exercices
IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

De haut en bas, on a : V - F - F.

Exercice 2

Entourer 5.

Exercice 3

Les fonctions polynômes sont :
$h(x) = 2 - x + x^2 + 4x^3$.
$d°(h) = 3$ et coefficients : 4 ; 1 ; -1 et 2.
$g(x) = x^2 + 1$
$d°(g) = 2$ et coefficients : 1 ; 0 et 1.

Exercice 4

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
et $Q(x) = -5x^3 + x - 7$
$P(x) = Q(x)$ pour $a = -5$; $b = 1$; $c = 0$ et $d = -7$.

Exercice 5

$P(x) = 3x^2 - 7x + 2$ et
$Q(x) = a(x^2 - 3) + b(x - 1) + c$
$Q(x) = ax^2 - 3a + bx - b + c$
$= ax^2 + bx + c - b - 3a.$
$P(x) = Q(x)$ pour $a = 3$, $b = -7$ et $c - b - 3a = 2$;
Donc $c = 2 + b + 3a = 2 + (-7) + 9 = 4$.

Exercice 6

a) $P(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$
$P(1) = 1^3 + 1^2 - 5 \times 1 + 3 = 1 + 1 + 3 - 5 = 5 - 5 = 0.$
1 est un zéro de $P(x)$.
b) $P(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 4$
$P(-2) = (-2)^4 + 2(-2)^3 + (-2)^2 + 4$
$= 16 - 16 - 4 + 4 = 20 - 20 = 0.$
-2 est un zéro de $P(x)$.

Exercice 7

De haut en bas, on a : F - V - F - F - V - V.

Exercice 8

1) $P(x) = x^2 - 3x + 9$ et $Q(x) = -x^2 + 1$.
$P(x) + Q(x) = x^2 - 3x + 9 + (-x^2 + 1) = -3x + 10$
$P(x) \times Q(x) = (x^2 - 3x + 9)(-x^2 + 1)$
$= -x^4 + x^2 + 3x^3 - 3x - 9x^2 + 9$
$= -x^4 + 3x^3 - 8x^2 + 9.$
2) $P(x) = 2x^3 - 3x + 1$ et $Q(x) = 4x - 7$
$P(x) + Q(x) = 2x^3 - 3x + 1 + 4x - 7 = 2x^3 + x - 6.$
$P(x) \times Q(x) = (2x^3 - 3x + 1)(4x - 7)$
$= 8x^4 - 14x^3 - 12x^2 + 21x + 4x - 7$
$= 8x^4 - 14x^3 - 12x^2 + 25x - 7.$
3) $P(x) = 3x + 4$ et $Q(x) = -x^3 + 2x^2 - 1$.
$P(x) + Q(x) = 3x + 4 - x^3 + 2x^2 - 1$
$= -x^3 + 2x^2 + 3x + 3.$
$P(x) \times Q(x) = (3x + 4)(-x^3 + 2x^2 - 1)$
$= -3x^4 + 6x^3 - 3x - 4x^3 + 8x^2 - 4$
$= -3x^4 + 2x^3 + 8x^2 - 3x - 4.$

Exercice 9

$P(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$ et $Q(x) = 3x^2 - 4x + 2$
1) $P(x) + Q(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3 + 3x^2 - 4x + 2$
$= x^3 + 4x^2 - 9x + 5$
$P(x) \times Q(x) = (x^3 + x^2 - 5x + 3)(3x^2 - 4x + 2)$
$= 3x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 3x^4 - 4x^3 + 2x^2$
$-15x^3 + 20x^2 - 10x + 9x^2 - 12x + 6$
$P(x) \times Q(x) = 3x^5 - x^4 - 17x^3 + 31x^2 - 22x + 6.$
2) $d°P = 3$, $d°Q = 2$.
$d°(P + Q) = 3$ et $d°(P \times Q) = 5$.

Exercice 10

$(a+b)^3$	$a^2+2ab+b^2$
$(a-b)^3$	$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
a^3-b^3	a^2-b^2
a^3+b^3	$a^2-2ab+b^2$
$(a+b)^2$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$(a-b)^2$	$(a-b)\,(a^2+ab+b^2)$
$(a-b)(a+b)$	$(a+b)\,(a^2-ab+b^2)$

Exercice 11

$\mathrm{P}(x)=4x^2-9=(2x)^2-3^2=(2x-3)(2x+3)$

$\mathrm{Q}(x)=x^2-8=x^2-(2\sqrt{2})^2$

$\quad=(x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})$

$\mathrm{R}(x)=x^3+27=x^3+3^3=(x+3)(x^2-3x+9)$

$\mathrm{S}(x)=x^3-8=x^3-2^3=(x-2)(x^2+2x+4)$

$\mathrm{T}(x)=(2x-1)^2-(x+2)^2$

$\quad=[(2x-1)+(x+2)][(2x-1)-(x+2)]$

$\mathrm{T}(x)=(3x+1)(x-3)$.

Exercice 12

Les formes canoniques

- $2[(x+5)^2+1]$
- $5(x-3)^2$
- $9[(x-1)^2-3]$.

Exercice 13

$\mathrm{P}(x)=x^2-5x+3=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2+3$

$\quad=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+\frac{12}{4}$

$\mathrm{P}(x)=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$.

$\mathrm{Q}(x)=x^2-3x+2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+2$

$\quad=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\frac{8}{4}=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$.

$\mathrm{R}(x)=x^2-4x+6=(x-2)^2-4+6$

$\quad=(x-2)^2+2$.

$\mathrm{T}(x)=x^2+x-3=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-3$

$\quad=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1+12}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$.

Exercice 14

- $\mathrm{P}(x)=5(x-2)(x+1)$

$\mathrm{P}(x)=0 \Leftrightarrow x=2$ ou $x=-1$.

Tableau de signe.

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$\mathrm{P}(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\forall\, x \in\,]-\infty\,;-1[\cup]2\,;+\infty[$, $\mathrm{P}(x)>0$.

$\forall\, x \in\,]-1\,;2[$, $\mathrm{P}(x)<0$.

$\forall\, x \in \{-1\,;2\}$ $\mathrm{P}(x)=0$.

- $\mathrm{Q}(x)=(3-x)x$

$\mathrm{Q}(x)=0 \Leftrightarrow x=3$ ou $x=0$.

Tableau de signe.

x	$-\infty$	0		3	$+\infty$
x	$-$	0	$+$	0	$+$
$3-x$	$+$		$+$		$-$
$\mathrm{Q}(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\forall\, x \in\,]-\infty\,;0[\cup]3\,;+\infty[$, $\mathrm{Q}(x)<0$.

$\forall\, x \in\,]0\,;3[$, $\mathrm{Q}(x)>0$.

$\forall\, x \in \{0\,;3\}$ $\mathrm{Q}(x)=0$.

- $\mathrm{R}(x)=-(x+5)^2$

$\mathrm{R}(x)=0 \Leftrightarrow x=-5$.

Tableau de signe.

x	$-\infty$	-5	$+\infty$
$(x+5)^2$	$+$	0	$+$
$\mathrm{R}(x)$	$-$	0	$-$

$\forall\, x \in\,]-\infty\,;-5[\cup]-5\,;+\infty[$, $\mathrm{R}(x)<0$.

Pour $x=-5$; $\mathrm{R}(x)=0$.

- $\mathrm{S}(x)=2(x-1)^2$

$\mathrm{S}(x)=0 \Leftrightarrow x=1$.

Tableau de signe.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$(x-1)^2$	$+$	0	$+$
$\mathrm{S}(x)$	$+$	0	

$\forall\, x \in\ ]-\infty\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$, $S(x) > 0$.
Pour $x = 1$; $S(x) = 0$.

Exercice 15

1) Utilisons la division euclidienne.

$$\begin{array}{r|l}
7x^3-4x^2+5x-8 & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{-7x^3+7x^2} & 7x^2+3x+8 \\
3x^2+5x-8 & \\
\underline{-3x^2+3x} & \\
8x-8 & \\
\underline{-8x+8} & \\
0 &
\end{array}$$

Donc $g(x) = 7x^2 + 3x + 8$.

2) Utilisons la division euclidienne.

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt{3}\,x^3+x^2+(1-\sqrt{3})x-2 & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{-\sqrt{3}\,x^3+\sqrt{3}\,x^2\phantom{+(1-\sqrt{3})x-2}} & \sqrt{3}\,x^2+(1+\sqrt{3})x+2 \\
(1+\sqrt{3})x^2+(1-\sqrt{3})x-2 & \\
\underline{-(1+\sqrt{3})x^2+(1+\sqrt{3})x} & \\
2x-2 & \\
\underline{-2x+2} & \\
0 &
\end{array}$$

Donc $g(x) = \sqrt{3}\,x^2 + (1 + \sqrt{3})x + 2$.

Exercice 16

1) $f(x) = -x^3 + 5x^2 + 2x - 10$ et $\alpha = 5$.

$f(5) = -5^3 + 5 \times 5^2 + 2 \times 5 - 10$

$= -5^3 + 5^3 + 10 - 10 = 0$.

Utilisons la division euclidienne.

$$\begin{array}{r|l}
-x^3+5x^2+2x-10 & x-5 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3-5x^2} & -x^2+2 \\
0\qquad 2x-10 & \\
\underline{-2x+10} & \\
0 &
\end{array}$$

$f(x) = (x - 5)(-x^2 + 2)$.

2) $f(x) = 2x^3 + x^2 + 12$ et $\alpha = -2$.

$f(-2) = 2(-2)^3 + (-2)^2 + 12 = -16 + 4 + 12$

$= 16 - 16 = 0$.

Utilisons l'identification des coefficients.

$f(x) = (x + 2)(ax^2 + bx + c)$

$= ax^3 + bx^2 + cx + 2ax^2 + 2bx + 2c$

$= ax^3 + (b + 2a)x^2 + (c + 2b)\,x + 2c$

$= 2x^3 + x^2 + 12$.

Par identification, on a :

$$\begin{cases} a = 2 \\ b + 2a = 1 \\ c + 2b = 0 \\ 2c = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = 6 \\ b = -\dfrac{c}{2} = -3 \end{cases}.$$

Donc $f(x) = (x + 2)(2x^2 - 3x + 6)$.

Exercice 17

De haut en bas, on a : Vrai - Vrai - Faux.

Exercice 18

$f(x) = \dfrac{-2x + 5}{x - 3}$,

$-2x + 5 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{5}{2}$; $\quad x - 3 = 0 \Longrightarrow x = 3$.

Tableau de signe.

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		3		$+\infty$
$-2x+5$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$		$-$	

$\forall\, x \in\ ]-\infty\ ;\ \dfrac{5}{2}[\cup]3\ ;\ +\infty[$, $f(x) < 0$.

$\forall\, x \in\ ]\dfrac{5}{2}\ ;\ 3[$, $f(x) > 0$.

$\forall\, x \in \{\dfrac{5}{2}\}$, $f(x) = 0$.

Exercice 19

$f(x) = \dfrac{x - 7}{(4x + 1)(x - 2)}$

- $x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = 7$.
- $(4x + 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -\dfrac{1}{4}$.

Tableau de signe.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$		2		7	$+\infty$
$x-7$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$4x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$-$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$

$\forall\, x \in \left]-\infty\,; -\frac{1}{4}\right[\cup]2\,;7[,\ \ f(x) < 0.$

$\forall\, x \in \left]-\frac{1}{4}\,;2\right[\cup]7\,;+\infty[,\ \ f(x) > 0.$

$\forall\, x \in \{7\}\ ,\ \ f(x) = 0.$

Exercice 20

$$f(x) = \frac{2x^2 - x + 3}{2x+1}.$$

Par division euclidienne.

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 - x + 3 & 2x+5 \\ \cline{2-2} \underline{-2x^2 - x} & x-1 \\ -2x + 3 & \\ \underline{2x+1} & \\ 4 & \end{array}$$

Donc $f(x) = x - 1 + \dfrac{4}{2x+1}$; $a = 1,\ b = -1$ et $c = 4$.

Exercice 21

$$f(x) = \frac{-1}{x^2-4} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$$

Or, $\dfrac{a}{x-2} + \dfrac{b}{x+2} = \dfrac{(a+b)x + 2a - 2b}{x^2-4}$,

Donc par identification, on a :

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a - 2b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ 4a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{4} \\ b = \dfrac{1}{4} \end{cases}.$$

$$f(x) = \frac{-\frac{1}{4}}{x-2} + \frac{\frac{1}{4}}{x+2}.$$

Donc $f(x) = x - 1 + \dfrac{4}{2x+1}$; $a = 1,\ b = -1$ et $c = 4$.

IV.2. Exercices de renforcement

Exercice 22

1) $f(x) = x^2 - 5x + 6.$

$$x^2 - 5x + 6 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 6$$
$$= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + \frac{24}{4}$$
$$= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$= \left(x - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2).$

$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = 2.$

Tableau de signe

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\forall\, x \in]-\infty\,; 2[\cup]3\,; +\infty[,\ \ f(x) > 0.$

$\forall\, x \in]2\,; +3[,\ \ f(x) < 0.$

$\forall\, x \in \{2\,; 3\}\ \ \ f(x) = 0.$

2) $g(x) = -3x^2 + 2x + 5$

$$g(x) = -3\left[x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}\right]$$
$$= -3\left[\left(x - \frac{2}{6}\right)^2 - \left(\frac{2}{6}\right)^2 - \frac{5}{3}\right]$$
$$= -3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} - \frac{15}{9}\right]$$
$$= -3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{16}{9}\right]$$
$$= -3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2\right]$$
$$= -3\left(x - \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3} + \frac{4}{3}\right)$$
$$= -3\left(x - \frac{5}{3}\right)(x+1)$$
$$= (-3x + 5)(x + 1).$$

Tableau

x	$-\infty$		-1			$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$			$+$	
$-3x+5$		$+$		$+$		0	$-$	
$g(x)$		$-$	0	$+$		0	$-$	

$\forall x \in]-\infty\,;-1[\cup]\frac{5}{3}\,;+\infty[,\ g(x) < 0.$

$\forall x \in]-1\,;\frac{5}{3}[,\ g(x) > 0.$

$\forall x \in \{-1\,;\frac{5}{3}\},\ g(x) = 0.$

3) $h(x) = 2x^2 + 3x + 6.$

$$2x^2 + 3x + 6 = 2\left[x^2 - \frac{3}{2}x + 3\right]$$
$$= 2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + 3\right]$$
$$= 2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{48}{16}\right]$$
$$= 2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{39}{16}\right].$$

$\forall x \in \mathbb{R}, 2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{39}{16}\right] > 0$

$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) > 0.$

4) $i(x) = -x^2 + 6x - 9 = -(x^2 - 6x + 9)$

$= -[(x-3)^2 - 9 + 9]$

$i(x) = -(x-3)^2.$

$\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{3\}$, $i(x) < 0$ et $i(3) = 0$.

5) $j(x) = (2x-3)^2 - (3x+2)^2$

$= [2x - 3 - 3x - 2][2x - 3 + 3x + 2]$

$= (-x-5)(5x-1) = -(x+5)(5x-1).$

x	$-\infty$		-5			$\frac{1}{5}$		$+\infty$
$-x-5$		$+$	0	$-$			$-$	
$5x-1$		$-$		$-$		0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$		0	$-$	

$\forall x \in]-\infty\,;-5[\cup]\frac{1}{5}\,;+\infty[,\ j(x) < 0.$

$\forall x \in]-5\,;\frac{1}{5}[,\ j(x) > 0.$

$\forall x \in \{-5\,;\frac{1}{5}\},\ j(x) = 0.$

6) $k(x) = x^3 - 125 = x^3 - 5^3 = (x-5)(x^2 + 5x + 25)$

$$= (x-5)\left[\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 25\right]$$
$$= (x-5)\left[\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{100-25}{4}\right]$$

$k(x) = (x-5)\left[\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{75}{4}\right].$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{75}{4} > 0$; donc le signe de $k(x)$ est celui de $x - 5$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}\ ]-\infty\,; 5[,\ k(x) < 0$

$\forall\, x \in]5\,; +\infty[,\ k(x) > 0$

$\forall\, x \in \{5\},\ k(x) = 0.$

7) $\frac{x^3}{64} + 1 = \left(\frac{x}{4}\right)^3 + 1^3$

$$= \left(\frac{x}{4} + 1\right)\left(\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{x}{4} - 1\right)$$
$$= \left(\frac{x}{4} + 1\right)\left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{4} + 1\right)$$

$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4} + 1 > 0.$

$\forall\, x \in]-\infty\,; -4[,\ l(x) < 0, \forall\, x \in]-4\,; +\infty[,\ l(x) > 0.$

$\forall\, x \in \{-4\},\ l(x) = 0.$

8) $m(x) = x^4 - 1$

$m(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$

$= (x-1)(x+1)(x^2+1)$

Le signe de $m(x)$ est de $(x - 1)\ (x + 1)$.

$\forall\, x \in]-\infty\,; -1[\cup]1\,; +\infty[,\ m(x) > 0$

$\forall\, x \in]-1\,; 1[,\ m(x) < 0$

$\forall\, x \in \{-1\,; 1\},\ m(x) = 0.$

Exercice 23

a) $P(x) = x^2 + 3x + 5 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 5$

$$= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{20}{4}$$

$= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$. On ne peut pas factoriser.

MATHS 2nde C_CORRIGE_CAHIER_27102021.indd 39 27/10/2021 13:48

b) $P(x) = x^2 - \frac{13}{2}x - \frac{7}{2}$

$P(x) = \left(x - \frac{13}{4}\right)^2 - \left(\frac{13}{4}\right)^2 - \frac{7}{2}$

$= \left(x - \frac{13}{4}\right)^2 - \frac{169}{16} - \frac{56}{16}$

$P(x) = \left(x - \frac{13}{4}\right)^2 - \frac{225}{16}$

$= \left(x - \frac{13}{4}\right)^2 - \left(\frac{15}{4}\right)^2$

$= \left(x - \frac{13}{4} - \frac{15}{4}\right)\left(x - \frac{13}{4} + \frac{15}{4}\right)$

$= \left(x - \frac{28}{4}\right)\left(x + \frac{2}{4}\right)$

$P(x) = (x-7)\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

Exercice 24

1) $P(x) = 2x^3 + x^2 - 4x + 1$

$P(1) = 2(1)^3 + 1^2 - 4(1) + 1 = 2 + 1 - 4 + 1 = 4 - 4 = 0$.

Donc il existe Q tel que $P(x) = (x-1)Q(x)$.

2) a) $d°Q = 2$

b) $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$

$= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c$

$= ax^3 + (c-a)x^2 + (c-b)x - c$.

Par identification, on a :

$$\begin{cases} a = 2 \\ c - a = 1 \\ c - b = -4 \\ -c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = a + 1 \\ c = b - 4 \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = -1 \end{cases}$$

$Q(x) = 2x^2 + 3x - 1$.

Exercice 25

1) $F(x) = x^3 + 2x^2 - 13x + 10$.

$F(2) = 2^3 + 2 \times 2^2 - 13 \times 2 + 10$.

$F(2) = 8 + 8 - 26 + 10 = 26 - 26 = 0$;

donc il existe $P(x)$ tel que $F(x) = (x-2)P(x)$.

2)
$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2x^2 - 13x + 10 & x - 2 \\ \cline{2-2} \underline{-x^3 + 2x^2} \quad\quad\quad\quad & x^2 + 4x - 5 \\ 4x^2 - 13x + 10 & \\ \underline{-4x^2 + 8x} \quad\quad & \\ -5x + 10 & \\ \underline{5x - 10} & \\ 0 & \end{array}$$

Donc $P(x) = x^2 + 4x - 5$.

Exercice 26

$P(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$

$\frac{2x^2 - 5x + 4}{x-2} = \frac{(ax+b)(x-2)+c}{x-2}$

$= \frac{ax^2 - 2ax + bx - 2b + c}{x-2}$

$= \frac{ax^2 + (b-2a)x + c - 2b}{x-2}$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - 2a = -5 \\ c - 2b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$$

Donc pour tout nombre réel x différent de 2,

$P(x) = 2x - 1 + \frac{2}{x-2}$.

Exercice 27

$F(x) = \frac{3x^2 - 2x + 7}{-x + 1}$.

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 - 2x + 7 & -x + 1 \\ \cline{2-2} \underline{-3x^2 + 3x} \quad\quad & -3x - 1 \\ x + 7 & \\ \underline{-x + 1} & \\ 8 & \end{array}$$

On a : $a = -3$, $b = -1$ et $c = 8$.

Donc pour tout nombre réel x différent de 1,

$F(x) = -3x - 1 + \frac{8}{-x+1}$.

Exercice 28

• $f(x)=\dfrac{-x}{x-2}$, $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$-x$		+	0	−		−	
$x-2$		−		−	0	+	
$f(x)$		−	0	+	‖	−	

$\forall x \in]-\infty\,;0[\cup]2\,;+\infty[$, $f(x)<0$.
$\forall x \in]0\,;2[$, $f(x)>0$ et $\forall x \in\{0\}$, $f(x)=0$.

• $g(x)=\dfrac{3x-2}{2x+5}$, $3x-2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{3}$
et $2x+5=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{5}{2}$.

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$3x-2$		−		−	0	+	
$2x+5$		−	0	+		+	
$g(x)$		+	‖	−	0	+	

$\forall x \in \left]-\infty\,;-\dfrac{5}{2}\right[\cup\left]\dfrac{2}{3}\,;+\infty\right[$, $g(x)>0$.

$\forall x \in \left]-\dfrac{5}{2}\,;\dfrac{2}{3}\right[$, $g(x)<0$.

$\forall x \in \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$, $g(x)=0$.

• $h(x)=\dfrac{x^2}{1-x}$
$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.
Le signe de $h(x)$ est celui de $1-x$.
$1-x<0 \Leftrightarrow -x<-1 \Leftrightarrow x>1$;
$1-x>0 \Leftrightarrow -x>-1 \Leftrightarrow x<1$.
$h(x)>0$ pour $x \in]-\infty\,;+1[$
$h(x)<0$ pour $x \in]1\,;+\infty[$.
$h(x)=0$ pour $x=0$.

• $j(x)=\dfrac{4x-3}{x^2+2}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+2>0$ donc le signe de $j(x)$ est celui de $4x-3$.
Or $4x-3>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{3}{4}$

$4x-3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{4}$

$4x-3<0 \Leftrightarrow x<\dfrac{3}{4}$.

Donc $\forall x \in \left]-\infty\,;\dfrac{3}{4}\right[$, $j(x)<0$

$\forall x \in \left]\dfrac{3}{4}\,;+\infty\right[$, $j(x)>0$

$\forall x \in \left\{\dfrac{3}{4}\right\}$, $j(x)=0$.

Exercice 29

• $A(x)=\dfrac{(x-2)(x+3)}{(2x+5)(x-2)}$

$\forall x \in \mathbb{R}-\left\{2\,;-\dfrac{5}{2}\right\}$, $A(x)=\dfrac{x+3}{2x+5}$.

• $B(x)=\dfrac{(4x-7)(1-x)}{(4x+7)(x-1)}$

$\forall x \in \mathbb{R}-\left\{-\dfrac{7}{4}\,;1\right\}$,

$B(x)=\dfrac{(7-4x)(x-1)}{(4x+7)(x-1)}=\dfrac{7-4x}{7+4x}$

• $C(x)=\dfrac{x^2-9}{(2x-6)(x-9)}$

$\forall x \in \mathbb{R}-\{3\,;9\}$,

$C(x)=\dfrac{(x-3)(x+3)}{2(x-3)(x-9)}=\dfrac{x+3}{2(x-9)}$.

• $D(x)=\dfrac{x-5}{x^2-25}$

$\forall x \in \mathbb{R}-\{-5\,;5\}$, $D(x)=\dfrac{x-5}{(x-5)(x+5)}$

$=\dfrac{1}{x+5}$

Exercice 30

On peut donner : $(x+3)^2\,(x+2)$ ou $(x+3)\,(x-2)^2$.

Exercice 31

On peut donner : $(x-2)^2(x+2)^2$ ou $(x-1)^2(x+1)^2$.

Exercice 32

On peut donner : x^2+2 ou $3x^2+2$.

IV.3. Exercices d'approfondissement

Exercice 33

1) $P(x) = -x^4 + x^3 + x^2 - 2x - 1.$

$P(-1) = -(1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 - 2(-1) - 1$
$= -1 - 1 + 1 + 2 - 1$
$= 2 - 2 = 0.$

2. a) $d°Q = 4 - 1 = 3$

b) $P(x) = (x + 1)(ax^3 + bx^2 + cx + d)$
$= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + ax^3 + bx^2 + cx + d$
$= ax^4 + (b + a)x^3 + (c + b)x^2 + (d + c)x + d$

Par identification

$$\begin{cases} a = -1 \\ b + a = 1 \\ c + b = -2 \\ d = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = -1 \\ d = -1 \end{cases}$$

Donc $Q(x) = -x^3 + 2x^2 - x - 1.$

Exercice 34

1) $P(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 3x + 6$

$P(2) = 2^5 - 2(2)^4 + 3(2)^3 - 6(2)^2 - 3(2) + 6$
$= 2^5 - 2^5 + 6(2)^2 - 6(2)^2 - 6 + 6 = 0.$

$P(x) = (x - 2)\,Q(x)$ et $\deg°Q = \deg P - 1 = 4$

2)
$$\begin{array}{r|l} x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 3x + 6 & x - 2 \\ \hline \underline{-x^5 + 2x^4} \qquad\qquad\qquad\qquad & x^4 + 3x^2 - 3 \\ 3x^3 - 6x^2 \qquad\quad & \\ \underline{-3x^3 + 6x^2} \qquad\quad & \\ -3x + 6 & \\ \underline{3x - 6} & \\ 0 & \end{array}$$

$Q(x) = x^4 + 3x^2 - 3.$

Exercice 35

$$\begin{array}{l|l} 2x^2 + 3x + 7 & x^2 + 2x + 3 \\ \hline \underline{-2x^2 - 4x - 6} & 2 \\ -x + 1 & \end{array}$$

Donc $g(x) = 2 + \dfrac{-x + 1}{x^2 + 2x + 3}$

Ainsi $c = 2$; $a = -1$ et $b = 1$.

Exercice 36

1) $-x^2 + 4x - 3 = -(x^2 - 4x + 3)$
$= -(x^2 - 4x + 3)$
$= -[(x - 2)^2 - 4 + 3]$
$= -[(x - 2)^2 - 1]$
$= -(x - 2 - 1)(x - 2 + 1)$
$= -(x - 3)(x - 1).$

$x \in Dg \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{3 ; 1\}.$

Donc $Dg = \mathbb{R} - \{1 ; 3\}.$

2) $g(x) = a + \dfrac{bx + c}{x^2 - 4x + 3}$

$g(x) = \dfrac{a(x^2 - 4x + 3) + bx + c}{x^2 - 4x + 3}$
$= \dfrac{ax^2 + x(-4a + b) + 3a + c}{x^2 - 4x + 3}$

Or $g(x) = \dfrac{-x^2 - x + 2}{x^2 - 4x + 3}$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} a = -1 \\ -4a + b = -1 \\ 3a + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -5 \\ c = 5 \end{cases}$$

Donc pour tout élément x de D,

$g(x) = -1 + \dfrac{-5x + 5}{x^2 - 4x + 3}.$

Exercice 37

1) $U(x) = 2x^2 - 5x - 3$

$= 2\left[x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right]$

$= 2\left[\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{25}{16}\right) - \frac{3}{2}\right]$

$= 2\left[\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25 + 24}{16}\right]$

$= 2\left[\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right]$

$= 2\left[\left(x - \frac{5}{4} - \frac{7}{4}\right)\left(x - \frac{5}{4} + \frac{7}{4}\right)\right]$

$= 2\left(x - \frac{12}{4}\right)\left(x + \frac{2}{4}\right)$

$= 2(x - 3)\left(x + \frac{1}{2}\right).$

$V(x) = -3x^2 - 2x + 8.$

$= -3\left[x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}\right]$

$= -3\left[\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} - \frac{8}{3}\right]$

MATHS 2nde C_CORRIGE_CAHIER_27102021.indd 42 27/10/2021 13:49

$$= -3\left[\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1+24}{9}\right]$$

$$\mathrm{V}(x) = -3\left[\left(x+\frac{1}{3}-\frac{5}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}+\frac{5}{3}\right)\right]$$

$$\mathrm{V}(x) = -3\left[\left(x-\frac{4}{3}\right)(x+2)\right]$$

$$\mathrm{V}(x) = -3\left(x-\frac{4}{3}\right)\left(x+2\right).$$

2) $f(x) = \dfrac{2x^2-5x-3}{-3x^2-2x+8} = -\dfrac{2}{3} \times \dfrac{(x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{4}{3}\right)(x+2)}$

Tableau de signe

x	$-\infty$	-2		$-\frac{1}{2}$		$\frac{4}{3}$		3	$+\infty$
$-\frac{2}{3}$	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$
$x-3$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+\frac{1}{2}$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-\frac{4}{3}$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$f(x)$	$-$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$

● $\forall\, x \in]-\infty\,;2[\cup]-\frac{1}{2}\,;\,\frac{4}{3}[\cup]3\,;+\infty[$, $f(x) < 0$.

● $\forall\, x \in]-2\,;-\frac{1}{2}[\cup]\frac{4}{3}\,;3[$, $f(x) > 0$.

● $\forall\, x \in \{-\frac{1}{2}\,;3\}$, $f(x) = 0$.

IV.4. Situations d'évaluation

Exercice 38

1) Soit x l'âge du fils et y l'âge du professeur.

a) Dans 4 ans : $y + 4 = 2(x+4)$

$y = 2x + 8 - 4$

$y = 2x + 4$ donc $xy = x(2x+4) = 2x^2 + 4x$.

b) Forme canonique

$2x^2 + 4x - 720 = 2[x^2 + 2x - 360]$

$= 2[(x+1)^2 - 1^2 - 360]$

$= 2[(x+1)^2 - 361]$

2) Actuellement :

$xy = 720$

Donc $2x^2 + 4x = 720$

$2x^2 + 4x - 720 = 0$

$= 2[(x+1)^2 - 361] = 0$

$= 2[(x+1)^2 - 19^2] = 0$

$= 2[(x+1-19)(x+1+19)] = 0$

$= 2(x-18)(x+20) = 0$

$x = 18$ ou $x = -20$.

Comme $-20 < 0$, donc l'âge du fils est 18 ans.

L'âge du professeur est $xy = 720$

$y = \dfrac{720}{x}$

$y = \dfrac{720}{18} = 40.$

L'âge du professeur est de 40 ans.

Exercice 39

1. a) x la hauteur en m du fût.
L (longueur), l (largeur) et H (hauteur).
$H = x$, $l = 2x + 1$ et $L = 2x + 2$
$V = x(2x + 1)(2x + 2) = x(4x^2 + 4x + 2x + 2)$
$= x(4x^2 + 6x + 2) = 4x^3 + 6x^2 + 2x$

b) $(x - 1)(4x^2 + 10x^2 + 12)$
$= 4x^2 + 10x^2 + 12x - 4x^2 - 10x - 12$
$= 4x^3 + 6x^2 + 2x - 12$

c) $4x^2 + 10x + 12 = 4[x^2 + \frac{5}{2}x + 3]$
$4\left[\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 + 3\right]$
$= 4\left[\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} + \frac{48}{16}\right]$
$= 4\left[\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{25}{16}\right] = 4\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{23}{4}$

2) $4x^3 + 6x^2 + 2x - 12 = 0$
$\Leftrightarrow (x - 1)(4x^2 + 10x + 12) = 0$
$\Leftrightarrow (x - 1)\left[4\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{23}{4}\right] = 0$
$\Leftrightarrow x = 1.$
Donc H = 1 m, l = 3 m et L = 4 m.
Les dimensions de ce fût sont :
longueur 4 m, largeur 3 m et hauteur 1 m.

Leçon 7 Angles inscrits

IV. Exercices

IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

1. F 2. F 3. V 4. V 5. F

Exercice 2

- $\text{mes}\widehat{MEN} = \frac{1}{2}\ \text{mes}\widehat{MON}$
- $\text{mes}\widehat{AMN} = 180° - \frac{1}{2}\ \text{mes}\widehat{MON}$
- $\text{mes}\widehat{MFN} = 180° - \frac{1}{2}\ \text{mes}\widehat{MON}$
- $\text{mes}\widehat{A'MN} = \frac{1}{2}\ \text{mes}\widehat{MON}$

Exercice 3

$\text{mes}\widehat{PRQ} = \frac{1}{2}\ \text{mes}\ \widehat{POQ} = \frac{1}{2}(43°) = 21{,}5°.$

Exercice 4

Des angles inscrits dans un cercle qui interceptent le même arc ont la même mesure.

Exercice 5

Soit O le centre du cercle.
- L'angle inscrit $\widehat{KMI}$ et l'angle au centre $\widehat{KOI}$ sont associés. Donc mes $\widehat{KMI} = \frac{1}{2}\ \widehat{KOI}$.
- L'angle inscrit $\widehat{JNL}$ et l'angle au centre $\widehat{JOL}$ sont associés. Donc mes $\widehat{JNL} = \frac{1}{2}\ \widehat{JOL}$.

Or $\widehat{IOK}$ et $\widehat{JOL}$ sont opposés par le sommet.
On a : mes $\widehat{IOK}$ = mes $\widehat{JOL}$.
Donc : mes $\widehat{JNL}$ = mes $\widehat{KMI}$.

Exercice 6

Des angles inscrits dans un cercle qui interceptent des arcs de même longueur ont la même mesure.

Exercice 7

ABC est un triangle équilatéral inscrit dans le cercle ($\mathscr{C}$). Donc l'arc $\overset{\frown}{AC}$ et l'arc $\overset{\frown}{BC}$ ont la même longueur.
$\widehat{BHC}$ et $\widehat{AHC}$ sont deux angles inscrits dans

le cercle ($\mathscr{C}$) et qui interceptent des arcs de même longueur ; donc mes $\widehat{BHC}$ = mes $\widehat{AHC}$.

Exercice 8

1) R appartient à la médiatrice de [DE] ; donc DR = RE. Donc DRE est un triangle isocèle en R et inscrit dans le cercle ($\mathscr{C}$). Donc $\overset{\frown}{DR}$ et $\overset{\frown}{ER}$ sont des arcs du cercle ($\mathscr{C}$) de même longueur.

2) $\widehat{DTE}$ est un angle aigu inscrit dans ($\mathscr{C}$) ; donc mes $\widehat{DRE}$ = $\frac{1}{2}$ mes $\widehat{DOE}$, O étant le centre de ($\mathscr{C}$).

$\widehat{DRE}$ est un angle obtus inscrit dans ($\mathscr{C}$) ; donc mes $\widehat{DRE}$ = 180° − $\frac{1}{2}$ mes $\widehat{DOE}$.

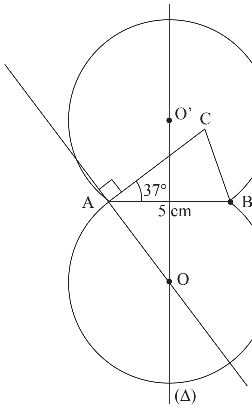
D'où mes $\widehat{DTE}$ + mes $\widehat{DRE}$ = $\frac{1}{2}$ mes $\widehat{DOE}$ + 180° − $\frac{1}{2}$ mes $\widehat{DOE}$.

Donc : $\widehat{DRE}$ + mes $\widehat{DTE}$ = 180°.

Exercice 9

Programme de construction :

- Construire un segment [AB] de longueur 5 cm et sa médiatrice (Δ).
- Construire un point C tel que mes $\widehat{BAC}$ = 37°.
- Construire la perpendiculaire à (AC) passant par A. Elle coupe (Δ) en O.
- Construire dans le demi-plan de bord (AB) contenant O, l'arc de cercle de centre O et d'extrémités A et B.
- Construire le symétrique de l'arc précédent par rapport à (AB).



Exercice 10

• Dans la question 3 de l'énoncé, on a CE = b et non CE = 6, et à la fin $\frac{ebc}{2\mathscr{A}}$ et non $\frac{abc}{2\mathscr{A}}$.

1. V 2. F 3. V.

Exercice 11

AB = 7 cm, AC = 4 cm, mes $\widehat{BAC}$ =30°.

$$S = \frac{AB \times AC\sin\widehat{BAC}}{2} = \frac{7 \times 4 \times 0,5}{2}$$

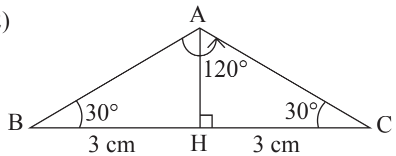
S = 7 cm^2.

Exercice 12

1) $\tan 60° = \sqrt{3} = \frac{BH}{AH} \Longrightarrow AH\sqrt{3} = BH$

$AH = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

2)



$$\text{Aire de ABC} = \frac{BC \times AH}{2} = \frac{6 \times \sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$S = \frac{1}{2}\ BC \times AC \sin \widehat{C}$.

Donc : $AC = \dfrac{2S}{BC\sin\widehat{C}} = \dfrac{2 \times 3\sqrt{3}}{6 \times \frac{1}{2}} = 2\sqrt{3}$.

$2R = \dfrac{AC}{\sin\widehat{ABC}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sin 30^\circ} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow R = \dfrac{4\sqrt{3}}{2}$; $R = 2\sqrt{3}$.

Exercice 13

Nombre de côtés du polygone	3	4	6	10	12	5	20
Mesure de l'angle au centre $\widehat{AOB}$	120°	90°	60°	36°	30°	24°	18°

Remarque :

• Le nombre d'angles au centre est égal au nombre de côtés.

• La somme des mesures des angles au centre est 360°.

• Les angles au centre ont la même mesure.

Exemple :

• Soit α la mesure de $\widehat{AOB}$.

On a : $3\alpha = 360°$, donc $\alpha = \dfrac{360^\circ}{3} = 120°$.

• Soit n le nombre de côtés.

mes $\widehat{AOB} = 90°$ donc $n \times 90° = 360°$.

donc $n = \dfrac{360^\circ}{90^\circ} = 4$.

IV.2. Exercices de renforcement

Exercice 14

• ABC est un triangle. BC = 12 cm,

mes $\widehat{B} = 62°$ et mes $\widehat{C} = 50°$.

mes $\widehat{A}$ + mes $\widehat{B}$ + mes $\widehat{C}$ = 180°.

Donc mes $\widehat{A}$ = 180° − mes $\widehat{B}$ − mes $\widehat{C}$

mes $\widehat{A}$ = 180° − (62° + 50°) = 68°.

• $\dfrac{BC}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{AC}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{AB}{\sin\widehat{C}}$

Donc $\dfrac{BC}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{AC}{\sin\widehat{B}}$ et $AC = \dfrac{\sin\widehat{B}}{\sin\widehat{A}} \times BC$

$AC = \dfrac{\sin 62^\circ}{\sin 68^\circ} \times 12 \approx 11{,}43\ \text{cm}$

$\dfrac{BC}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{AB}{\sin\widehat{C}} \Rightarrow AB = \dfrac{\sin\widehat{C}}{\sin\widehat{A}} \times BC$

$AB = \dfrac{\sin 50^\circ}{\sin 68^\circ} \times 12 \approx 9{,}91\ \text{cm}$

Exercice 15

• Dans l'énoncé, à la fin de la 1ère phrase, c'est 53 et 61 et non 41 et 36.

1) mes $\widehat{ABC}$ = 180° − (48° + 57°) = 75°

$\dfrac{BC}{\sin\widehat{BAC}} = \dfrac{AB}{\sin\widehat{BCA}} \Rightarrow AB = \dfrac{\sin 57^\circ}{\sin 48^\circ} \times 47$

AB = 53 cm

$\dfrac{AC}{\sin 75^\circ} = \dfrac{BC}{\sin 48^\circ} \Rightarrow AC = \dfrac{\sin 75^\circ}{\sin 48^\circ} \times 47$

AC = 61 cm

2) $\dfrac{BC}{\sin\widehat{BAC}} = 2R \Rightarrow R = \dfrac{BC}{2\sin\widehat{BAC}} = \dfrac{47^\circ}{2\sin 48^\circ}$.

= 31, 62

R = 32 cm.

Exercice 16

ABC est un triangle.

$$\frac{AC}{\sin\widehat{B}} = \frac{BC}{\sin\widehat{A}} = \frac{AB}{\sin\widehat{C}}$$

- $\dfrac{AC}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{BC}{\sin\widehat{A}}$ donc $\sin\widehat{A} = \dfrac{BC \times \sin\widehat{B}}{AC}$

$\Rightarrow \sin\widehat{A} = 0{,}66.$

mes $\widehat{A} \approx 41°$

- mes $\widehat{C} = 180° - (\text{mes }\widehat{B} + \text{mes }\widehat{A}) = 67°$

$$\frac{AC}{\sin\widehat{B}} = \frac{AB}{\sin\widehat{C}} \text{ donc } AB = \frac{AC\sin\widehat{C}}{\sin\widehat{B}}$$

$$= \frac{36 \times \sin\widehat{C}}{\sin\widehat{B}} = \frac{36 \times \sin 67°}{\sin 72°}$$

AB = 34,84

Donc AB ≈ 35 cm.

Exercice 17

- Dans l'énoncé, permuter 125 et 100 sur la figure b)

Figure a)

- $\beta = 180° - (77° + 41°) = 62°.$
- $\dfrac{10{,}5}{\sin 41°} = \dfrac{b}{\sin\widehat{\beta}} \Rightarrow b = \dfrac{10{,}5\sin\widehat{\beta}}{\sin 41°}.$

$$= \frac{10{,}5 \sin 62°}{\sin 41°} = 14{,}13$$

Donc $b = 14{,}1$ mm

- $\dfrac{10{,}5}{\sin 41°} = \dfrac{c}{\sin 77°} \Rightarrow c = \dfrac{10{,}5 \times \sin 77°}{\sin 41°}$

$c = 15{,}59$

Donc $c = 15{,}6$ mm.

Figure b)

- $\dfrac{125}{\sin 67°} = \dfrac{100}{\sin\gamma}$

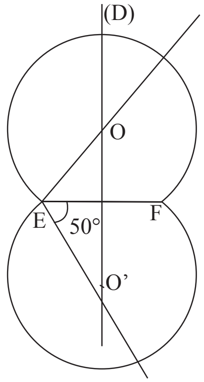
$\Rightarrow \sin\gamma = \dfrac{100 \times \sin 67°}{125°} = 0{,}736.$

Donc $\gamma = 47°$

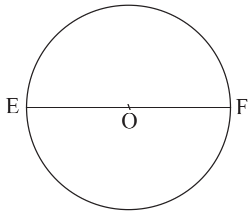
- $\beta = 180° - (67° + 47°) = 66°$
- $\dfrac{b}{\sin 66°} = \dfrac{125}{\sin 67°} \Rightarrow b = \dfrac{125 \times \sin 66°}{\sin 67°} = 124$

Exercice 18

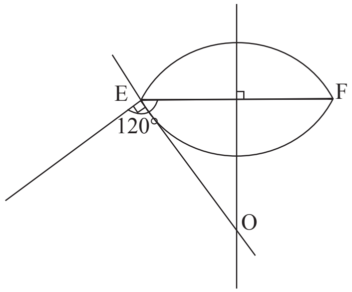
a)



b)



c)



IV.3. Exercices d'approfondissement

Exercice 19

BC = 36, mes $\widehat{B} = 45°$ et mes $\widehat{C} = 62°$,

donc mes $\widehat{A} = 180° - (46° + 62°) = 73°.$

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} \Rightarrow b = a \times \frac{\sin\widehat{B}}{\sin\widehat{A}}$$

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2} ab\sin\widehat{C}$$

$$= \frac{1}{2} aa\frac{\sin\widehat{B}}{\sin\widehat{A}} \times \sin\widehat{C}$$

$$= \frac{1}{2}\, aa \frac{\sin\widehat{B}}{\sin\widehat{A}} \times \sin\widehat{C}$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times \frac{a^2 \sin\widehat{B} \times \sin\widehat{C}}{\sin\widehat{A}}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{36^2 \sin 45° \times \sin 62°}{\sin 73°}$$

$\mathcal{A} = 423$ cm^2.

Exercice 20

Les angles $\widehat{B'O'A'}$ et $\widehat{AO'B}$ sont opposés par le sommet O' donc mes $\widehat{B'O'A'}$ = mes $\widehat{AO'B}$.

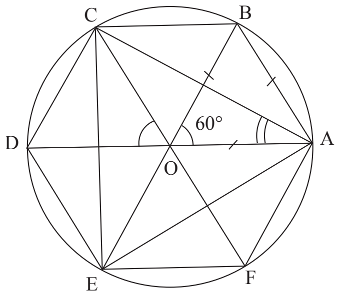
$\widehat{AO'B}$ est associé à $\widehat{AOB}$.

Donc mes $\widehat{AO'B} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$.

Donc mes $\widehat{B'O'A'} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$.

Exercice 21

1) 360° : 6 = 60°.



2) Voir figure

3) Voir figure

4. a) mes $\widehat{EAC}$ = mes $\widehat{EAD}$ + mes $\widehat{DAC}$.

$\widehat{CAD}$ est associé à $\widehat{COD}$.

mes $\widehat{CAD} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{COD}$.

De même, mes $\widehat{DAE} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{DOE}$.

mes $\widehat{EAC}$ = mes $\widehat{EAD}$ + mes $\widehat{DAC}$

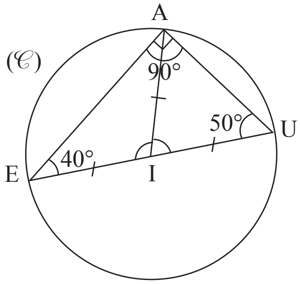
$$= \frac{1}{2}\ \widehat{(DOE)} + \frac{1}{2}\ \widehat{COD}$$

$= 30° + 30° = 60°$.

mes $\widehat{EAC} = 60°$.

b) On montre de même que mes $\widehat{CEA}$ = mes $\widehat{ECA}$ = 60°, donc ABC est équilatéral

Exercice 22



1) mes $\widehat{EAU} = 180° - (40° + 50°) = 180° - 90° = 90°$.

EAU est rectangle en A.

2) Centre : I.

Rayon : $\frac{5}{2} = 2{,}5$ cm.

3) EIA est isocèle en I.

mes $\widehat{AEI}$ = mes $\widehat{EAI}$ = 40°.

mes $\widehat{EIA} = 180° - 80° = 100°$.

AIU est isocèle en I.

mes $\widehat{IUA}$ = mes $\widehat{UAI}$ = 50° ;

donc mes $\widehat{AIU} = 180° - 100° = 80°$.

4) $$\frac{EU}{\sin\widehat{EAU}} = \frac{AE}{\sin\widehat{AUE}} = \frac{AU}{\sin\widehat{AEU}}$$

$$AE = \frac{\sin\widehat{AUE}}{\sin\widehat{EAU}} \times EU \quad \text{et} \quad AU = \frac{\sin\widehat{AEU}}{\sin\widehat{EAU}} \times EU$$

$$\mathcal{A} = \frac{AE \times AU}{2} = \frac{\sin\widehat{AUE}}{\sin\widehat{EAU}} \times \frac{\sin\widehat{AEU}}{\sin\widehat{EAU}} \times \frac{EU^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{EU^2 \times \sin\widehat{AUE} \times \sin\widehat{AEU}}{\sin^2\widehat{EAU}}$$

$\mathcal{A} = 6{,}15$ cm^2.

Exercice 23

$\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = 2R \Longrightarrow a = 2R\sin\widehat{A}$.

De même, $b = 2R\sin\widehat{B}$

$c = 2R\sin\widehat{C}$.

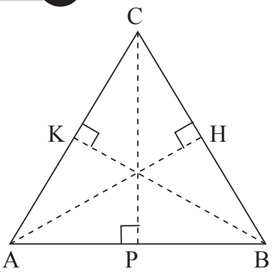
Donc $a + b + c = 2R(\sin\widehat{A} + \sin\widehat{B} + \sin\widehat{C})$.

On en déduit que :

$\sin\widehat{A} + \sin\widehat{B} + \sin\widehat{C} = \dfrac{a+b+c}{2R}$;

Soit : $\sin\widehat{A} + \sin\widehat{B} + \sin\widehat{C} = \dfrac{P}{2R}$.

Exercice 24



On sait que

$\dfrac{BC}{\sin\widehat{BAC}} = \dfrac{AC}{\sin\widehat{ABC}} = \dfrac{AB}{\sin\widehat{ACB}}$ (1)

Dans le triangle rectangle BCK,

$\sin\widehat{ACB} = \dfrac{BK}{BC}$,

on a : $BC = \dfrac{BK}{\sin\widehat{ACB}}$.

Dans le triangle rectangle ACP,

$\sin\widehat{BAC} = \dfrac{CP}{AC}$,

on a : $AC = \dfrac{CP}{\sin\widehat{BAC}}$.

Dans le triangle rectangle ABH,

$\sin\widehat{ABC} = \dfrac{AH}{AB}$,

on a $AB = \dfrac{AH}{\sin\widehat{ABC}}$.

En remplaçant, BC, AC et AB dans (1) on a :

$\dfrac{BK}{\sin\widehat{ACB} \times \sin\widehat{BAC}} = \dfrac{CP}{\sin\widehat{BAC}.\sin\widehat{ABC}}$

$= \dfrac{AH}{\sin\widehat{ABC} \times \sin\widehat{ACB}}$

Exercice 25

• ABC est un triangle inscrit dans le cercle $(\mathscr{C})$ de rayon R soit $\mathscr{A}$ son aire.

On a : $\dfrac{AB \times BC \times CA}{2\mathscr{A}} = 2R$,

on a : $AB \times BC \times CA = 4R\mathscr{A}$

• DEF est un triangle inscrit dans le cercle $(\mathscr{C})$ de rayon R soit $\mathscr{A}'$ son aire.

On a : $\dfrac{DE \times DF \times EF}{2\mathscr{A}} = 2R$,

on a : $DE \times DF \times EF = 4R\mathscr{A}'$

De (1) et (2) on a :

$\dfrac{AB \times BC \times CA}{DE \times DF \times EF} = \dfrac{4R\mathscr{A}}{4R\mathscr{A}'}$

Donc $\dfrac{AB \times BC \times CA}{DE \times DF \times EF} = \dfrac{\mathscr{A}}{\mathscr{A}'}$

Exercice 26

O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. OC est le rayon du cercle.

Calculons le rayon R de ce cercle.

$\dfrac{AB}{\sin 30°} = 2R$ car $mes\,\widehat{C} = 180° - (110 + 40) = 30°$

On a : $R = \dfrac{AB}{2\sin 30°} = \dfrac{6}{2 \times \frac{1}{2}} = 6$

Donc OC = 6 cm.

Exercice 27

Dans l'énoncé,

• remplacer B par P sur la 5ème ligne ;

• la consigne est : calcule la distance entre A et B et la distance du pied de la montagne à son sommet.

ABP est un triangle.

$mes\widehat{B} = 180 - (mes\widehat{A} + mes\widehat{P})$

$= 180 - (21 + 65) = 94°$

• Calculons la distance entre A et P.

$\dfrac{AP}{\sin 94°} = \dfrac{AB}{\sin 65°} \Longleftrightarrow AP = \dfrac{AB \times \sin 94°}{\sin 65°}$

$AP = \dfrac{2 \times \sin 94°}{\sin 65°} = 2,2$ km

• Déterminons BP :

$\dfrac{BP}{\sin 21°} = \dfrac{AB}{\sin 65°}$ On a : $BP = \dfrac{AB \times \sin 21°}{\sin 65°}$

donc BP = 0,8 km.

IV.4. Situation d'évaluation

Exercice 28

1) mes $\widehat{B} = \frac{1}{2}\text{mes}\widehat{AOC} = 60°$

2) On sait que

$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = 2R$, on a : $a = 2R\sin\widehat{A}$

de même $b = 2R\sin\widehat{B}$; $c = 2R\sin\widehat{C}$.

$a + b + c = 2R(\sin\widehat{A} + \sin\widehat{B} + \sin\widehat{C})$

donc $\mathscr{P} = 2R(\sin\widehat{A} + \sin\widehat{B} + \sin\widehat{C})$.

Déterminons R :

$\mathscr{A} = \pi R^2 = 900\pi \iff R^2 = 900$

donc R = 30 m.

P = 2 × 30 (sin 80° + sin 60° + sin 40°)

= 60 (sin 40° + sin 60° + sin80°)

3) Déterminons la somme à débourser pour l'achat du grillage.

S = 149,61 × 800 F = 119 688 F, car P = 149,61 m

119 688 F < 180 000 F.

Donc l'argent dont dispose le trésorier peut suffir pour la clôture du jardin.

Leçon 8 Équations et inéquations dans $\mathbb{R}$

IV. Exercices

IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

L1 → $\boxed{\text{Vrai}}$; L2 → $\boxed{\text{Vrai}}$;

L3 → $\boxed{\text{Faux}}$; L4 → $\boxed{\text{Vrai}}$;

L5 → $\boxed{\text{Vrai}}$; L6 → $\boxed{\text{Faux}}$;

L7 → $\boxed{\text{Vrai}}$.

Exercice 2

L1 → $\boxed{\text{Faux}}$; L2 → $\boxed{\text{Faux}}$;

L3 → $\boxed{\text{Vrai}}$; L4 → $\boxed{\text{Faux}}$;

L5 → $\boxed{\text{Vrai}}$; L6 → $\boxed{\text{Faux}}$.

Exercice 3

N° 1 → c → −2 ; N° 2 → b → 0 ;

N° 3 → c → 1 ; N° 4 → c → 4

N° 5 → b → −7 et 11 ; N° 6 → c $\{0 ; -9\}$.

Exercice 4

a) $(2x + 3)^2 = (4x + 1)(x - 5) \iff 31x + 14 = 0$

$\iff x = -\frac{14}{31}$.

La solution est $-\frac{14}{31}$.

b) $x(x - 1)(x - 2) = 3x(x - 1)(3 - 2x \iff x = 0$ ou

$x = 1$ ou $7x - 11 = 0 \iff x = 0$; $x = 1$; $x = \frac{11}{7}$.

Les solutions sont : 0 ; 1 et $\frac{11}{7}$.

c) $(x + 4)^2 = 4(2x + 1)^2 \iff (-3x + 2)(5x + 6) = 0$

$\iff x = -\frac{6}{5}$ ou $x = \frac{2}{3}$.

Les solutions sont : $-\frac{6}{5}$ et $\frac{2}{3}$.

d) $9x^2 - 6x + 1 = 0 \iff (3x - 1)^2 = 0 \iff x = \frac{1}{3}$

La solution est : $\frac{1}{3}$.

e) $x^2 - 5x + 6 = 0$

$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$

$(x - 2)(x - 3) = 0$

$x = 2$ ou $x = 3$

$S_{\mathbb{R}} = \{2 ; 3\}$.

Exercice 5

1) Division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} x^3+3x^2+x-5 & x-1 \\ \cline{2-2} -x^3+x^2 & x^2+4x+5 \\ \cline{1-1} 4x^2+x & \\ -4x^2+4x & \\ \cline{1-1} 5x-5 & \\ -5x+5 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$x^3+3x^2+x-5=(x-1)(x^2+4x+5)$

2) $x^3+3x^2+x-5=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+4x+5)=0$

$\Leftrightarrow x-1=0$ ou $x^2+4x+5=0$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+4x+5=(x+2)^2+1$,

donc $x^2+4x+5>0$.

D'où l'ensemble des solutions est $\{1\}$.

Exercice 6

a) Condition d'existence :

(E) existe si seulement si $x \neq -1$ et $x \neq 2$.

$\dfrac{x+2}{x+1}=\dfrac{x}{x-2}$.

$\Leftrightarrow x^2-4=x^2+x \Leftrightarrow x=-4$.

La solution est -4.

b) L'ensemble de validité de l'équation est

$\mathbb{R}-\{-1\,;1\}$.

$\dfrac{x-2}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{-3}{x+1}-\dfrac{2}{x^2-1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-2)(x-1)+x+1}{(x^2-1)}=\dfrac{-3(x-1)-2}{x^2-1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-2x+3}{x^2-1}=\dfrac{-3x+1}{x^2-1}$

$\Leftrightarrow x^2-2x+3=-3x+1$

$\Leftrightarrow x^2+x+2=0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+x+2>0$, donc l'ensemble des solutions de l'équation proposée est $\emptyset$.

Exercice 7

a) $|3-2x|=11 \Leftrightarrow 3-2x=11$ ou $3-2x=-11$

$\Leftrightarrow -2x=8$ ou $-2x=-14 \Leftrightarrow x=-4$ ou $x=7$.

Donc $S_{\mathbb{R}}=\{-4\,;7\}$.

b) $|2x+3|=|3x-7|$

$\Leftrightarrow 2x+3=3x-7$ ou $2x+3=-3x+7$

$\Leftrightarrow x=10$ ou $5x=4 \Leftrightarrow x=10$ ou $x=\dfrac{4}{5}$.

L'ensemble des solutions de cette équation est :

$\left\{\dfrac{4}{5};10\right\}$.

Exercice 8

Soit $f(x)=|3x+1|+|x-2|$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	2 $+\infty$
$\lvert 3x+1\rvert$	$-3x-1$	$3x+1$	$3x+1$
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$	$-x+2$	$x-2$
$f(x)$	$-4x+1$	$2x+3$	$4x-1$

Pour $x \in \left]-\infty\,;-\frac{1}{3}\right]$, $f(x)=-4x+1$.

Pour $x \in \left]-\frac{1}{3}\,;2\right]$, $f(x)=2x+3$.

Pour $x \in]2\,;+\infty[$, $f(x)=4x-1$.

Résolution de l'équation $f(x)=9$.

• Pour $x \in \left]-\infty\,;-\frac{1}{3}\right]$,

$f(x)=9 \Leftrightarrow -4x+1=9$

$\Leftrightarrow x=-2\,;\ -2 \in \left]-\infty\,;-\frac{1}{3}\right]$.

• Pour $x \in \left]-\frac{1}{3}\,;2\right]$,

$f(x)=9 \Leftrightarrow 2x+3=9$

$\Leftrightarrow x=3\,;\ 3 \notin \left]-\frac{1}{3}\,;2\right[$.

• Pour $x \in]2\,;+\infty[$,

$f(x)=9 \Leftrightarrow 4x-1=9$

$\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}\,;\ \frac{5}{2} \in [2\,;+\infty[$.

Donc $S_{\mathbb{R}}=\left\{-2\,;\frac{5}{2}\right\}$.

Exercice 9

L1→ $\boxed{\text{Vrai}}$; L2→ $\boxed{\text{Faux}}$

L3→ $\boxed{\text{Faux}}$; L4→ $\boxed{\text{Vrai}}$

L5→ $\boxed{\text{Vrai}}$

Exercice 10

L1→ $\boxed{\text{Faux}}$; L2→ $\boxed{\text{Faux}}$

L3→ $\boxed{\text{Faux}}$; L4→ $\boxed{\text{Faux}}$

L5→ $\boxed{\text{Faux}}$; L6→ $\boxed{\text{Faux}}$.

Exercice 11

Dans l'énoncé, remplacer $]-\infty\,;-1[$ par $]-\infty\,;4[$ sur la ligne n° 4.

$1 \to c$; $2 \to b$; $3 \to b$; $4 \to a$.

Exercice 12

a) $\dfrac{3x}{4} < 1 + 4 - \dfrac{x-2}{2} \Leftrightarrow \dfrac{3x + 2x - 4}{4} < 5$

$\Leftrightarrow 5x - 4 < 20 \Leftrightarrow x < \dfrac{24}{5}$.

L'ensemble des solutions est : $\left]-\infty; \dfrac{24}{5}\right[$.

b) $2x(x + 1) \geq (1 - 3x)(x + 1)$

$\Leftrightarrow (x + 1)(2x - 1 + 3x) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)(5x - 1) \geq 0$.

L'ensemble des solutions est :

$\left]-\infty; -1\right[\cup \left[\dfrac{1}{5}; +\infty\right[$

c) $2x^2 - 15x + 7 \leq 0 \Leftrightarrow 2(x - \dfrac{1}{2})(x - 7) \leq 0$.

L'ensemble des solutions est : $\left[\dfrac{1}{2}\,;7\right]$.

d) $4x^2 - 5x + 4 > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$4x^2 - 5x + 4 = 4\left[(x - \dfrac{5}{8})^2 + \dfrac{39}{64}\right]$

donc $4x^2 - 5x + 4 > 0$.

D'où $S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$.

Exercice 13

a) Ensemble de validité de l'équation (I)

$V = R \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{5}{2}\right\}$

Résolution

$\dfrac{2x+5}{1+2x} \leq \dfrac{1-2x}{5-2x} \Leftrightarrow \dfrac{2x+5}{1+2x} - \dfrac{1-2x}{5-2x} \leq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{24}{(1+2x)(5-2x)} \leq 0$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$1+2x$		$-$	0	$+$		$+$	
$5-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
S		$-$	‖	$+$	‖	$-$	

$S_{\mathbb{R}} = \left]-\infty\,; -\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]\dfrac{5}{2}\,;+\infty\right[$.

b) Ensemble de validité de l'inéquation

$V = \mathbb{R} \setminus \{-1\,;1\}$.

Résolution

$\dfrac{2x^2}{x^2-1} > \dfrac{2x-3}{x^2-1} + \dfrac{3}{x-1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x(2x-5)}{x^2-1} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x(2x-5)}{(x-1)(x+1)} > 0$

x	$-\infty$		-1		0		1		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2x-5$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
I		$+$	‖	$-$		$+$	‖	$-$		$+$	

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty\,;-1[\cup]0\,;1[\cup \left]\dfrac{5}{2}; +\infty\right[$.

Exercice 14

a) $|x - 2| < 5 \Leftrightarrow -5 < x - 2 < 5$

$\Leftrightarrow -3 < x < 7$

$S_{\mathbb{R}} =]-3\,;7\,[$.

b) $|x - 3| \geq 2 \Leftrightarrow (x - 3)^2 \geq 4$

$(x - 5)(x - 1) \geq 0$.

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty\,;1] \cup [5\,;+\infty[$.

c) $|x - 7| \leq |5 + x| \Leftrightarrow (x - 7)^2 \leq (5 - x)^2$

$\Leftrightarrow -2(2x - 12) \leq 0 \Leftrightarrow -4(x - 6) \leq 0 \Leftrightarrow x - 6 \geq 0$

$S_{\mathbb{R}} = [6\,;+\infty[$.

d) $|5 - 2x| > |2x + 1| \Leftrightarrow (5 - 2x)^2 > (2x + 1)$

$\Leftrightarrow -24\,(1 - x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$.

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty\,;1[$.

IV.2. Exercices de renforcement

Exercice 15

a) $(x+2)(x-2)=0 \Leftrightarrow x+2=0$ ou $x-2=0$

$\Leftrightarrow x=-2$ ou $x=2$.

$S_{\mathbb{R}}=\{-2\ ;\ 2\}$.

b) $(3x-4)^2+x(4-3x)=0 \Leftrightarrow (3x-4)(2x-4)=0$

$\Leftrightarrow 3x-4=0$ ou $2x-4=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{4}{3}$ ou $x=2$.

$S_{\mathbb{R}}=\left\{\dfrac{4}{3};2\right\}$.

c) $25x^2-1+(5x-1)^2=-5x+1$

$\Leftrightarrow (5x-1)(5x+1)+(5x-1)^2=-(5x-1)$

$\Leftrightarrow (5x-1)(10x+1)=0$

$x=\dfrac{1}{5}$ ou $x=-\dfrac{1}{10}$.

$S_{\mathbb{R}}=\left\{-\dfrac{1}{10};\dfrac{1}{5}\right\}$.

d) $\left(\dfrac{5x}{3}-\dfrac{3}{4}\right)^2-\left(\dfrac{3x}{2}-\dfrac{2}{3}\right)^2=0.$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{5x}{3}-\dfrac{3}{4}+\dfrac{3x}{2}-\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{5x}{3}-\dfrac{3}{4}-\dfrac{3x}{2}+\dfrac{2}{3}\right)$
$=0$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{19}{6}x-\dfrac{17}{12}\right)\left(\dfrac{1}{6}x-\dfrac{1}{12}\right)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{19}{6}x-\dfrac{17}{12}=0$ ou $\dfrac{1}{6}x-\dfrac{1}{12}=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{17}{38}$ ou $x=\dfrac{1}{2}$.

$S_{\mathbb{R}}=\left\{\dfrac{17}{38};\dfrac{1}{2}\right\}$.

Exercice 16

a) $(x+2)x=0 \Leftrightarrow x+2=0$ ou $x=0$

$\Leftrightarrow x=-2$ ou $x=0$

$S_{\mathbb{R}}=\{-2\ ;\ 0\}$.

b) $(x-4)^2+x(4-x)=0 \Leftrightarrow (x-4)^2-x(x-4)=0$

$\Leftrightarrow (x-4)(x-4-x)=0$

$\Leftrightarrow -4(x-4)=0$

$\Leftrightarrow x-4=0 \Leftrightarrow x=4$.

$S_{\mathbb{R}}=\{4\}$.

c) $4x^2-1+(2x-1)^2=-2x+1$

$\Leftrightarrow (2x-1)(2x+1)+(2x-1)^2=-(2x-1)$

$\Leftrightarrow (2x-1)(4x+1)=0$

$\Leftrightarrow 2x-1=0$ ou $4x-1=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ ou $x=-\dfrac{1}{4}$.

$S_{\mathbb{R}}=\left\{\dfrac{1}{2};\dfrac{-1}{4}\right\}$.

Exercice 17

a) $\dfrac{x-3}{3}+\dfrac{x-2}{6}>3 \Leftrightarrow 3x-8>18$

$\Leftrightarrow 3x>26 \Leftrightarrow x>\dfrac{26}{3}$.

$S_{\mathbb{R}}=\left]\dfrac{26}{3};+\infty\right[$

b) $x+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{3}\leq x-1$

$\Leftrightarrow \dfrac{7}{6}x\leq x-1 \Leftrightarrow \dfrac{7}{6}x-x\leq -1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{6}x\leq -1$

$\Leftrightarrow x\leq -6$.

$S_{\mathbb{R}}=]-\infty\ ;-6]$.

c) $\dfrac{x+1}{4}<\dfrac{x-2}{3} \Leftrightarrow 3x+3<4x-8$

$\Leftrightarrow x-11>0 \Leftrightarrow x>11$.

$S_{\mathbb{R}}=]11\ ;+\infty[$.

Exercice 18

a) $x^2-x<0 \Leftrightarrow x(x-1)<0$.

$S_{\mathbb{R}}=]0\ ;1[$.

b) $(x+5)(1-2x)>0$.

$S_{\mathbb{R}}=\left]-5;\dfrac{1}{2}\right[$.

c) $x(x+2)(3x-7)\leq 0$.

$S_{\mathbb{R}}=]-\infty\ ;-2]\cup\left[0;\dfrac{7}{3}\right]$.

d) $(16x^2-49)(1-x)<0$

$\Leftrightarrow (4x-7)(4x+7)(1-x)<0$.

$S_{\mathbb{R}}=\left]-\dfrac{7}{4};1\right[\cup\left]\dfrac{7}{4};+\infty\right[$

Exercice 19

a) $|7x-13|=1 \Leftrightarrow 7x-13=1$ ou $7x-13=-1$

$\Leftrightarrow 7x=14$ ou $7x=12$

$\Leftrightarrow x=2$ ou $x=\dfrac{12}{7}$.

$S_{\mathbb{R}}=\left\{\dfrac{12}{7}\,;2\right\}$.

b) $|8x-9|=|5-2x|$

$\Leftrightarrow$ $8x-9=5-2x$ ou $8x-9=-5+2x$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{\dfrac{7}{5};\dfrac{2}{3}\right\}$.

c) $|4x-3|=x^2+1$

$\Leftrightarrow 4x-3=x^2+1$ ou $4x-3=-x^2-1$

$\Leftrightarrow x^2-4x+4=0$ ou $x^2+4x-2=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2=0$ ou $(x+2)^2-6=0$

$\Leftrightarrow x=2$ ou $(x+2+\sqrt{6})(x+2-\sqrt{6})=0$

$\Leftrightarrow x=2$ ou $x=-2-\sqrt{6}$ ou $x=-2+\sqrt{6}$

$S_{\mathbb{R}}=\{2\,;-2-\sqrt{6}\,;-2+\sqrt{6}\}$.

d) $|x^2-x+2|=|2x| \Leftrightarrow x^2-x+2=2x$

ou $x^2-x+2=-2x \Leftrightarrow x^2-3x+2=0$

ou $x^2+x+2=0 \Leftrightarrow x=2$ ou $x=1$

$S_{\mathbb{R}}=\{1\,;2\}$.

Exercice 20

$-6n^2+9>-37 \Leftrightarrow -6n^2>-46$

$\Leftrightarrow n^2<\dfrac{46}{6}$

$\Leftrightarrow \left(n-\sqrt{\dfrac{46}{6}}\right)\left(n+\sqrt{\dfrac{46}{6}}\right)<0$

$\Leftrightarrow \left(n-\sqrt{\dfrac{23}{3}}\right)\left(n+\sqrt{\dfrac{23}{3}}\right)<0$

$n\in\left]-\sqrt{\dfrac{23}{3}};\sqrt{\dfrac{23}{3}}\right[$

$S_{\mathbb{R}}=\left[0\,;\sqrt{\dfrac{23}{3}}\right[\cap\mathbb{N}=\{0\,;1\,;2\}$.

IV.3. Exercices d'approfondissement

Exercice 21

a) $x^2-x<0 \Leftrightarrow x(x-1)<0$.

$S_{\mathbb{R}}=]0\,;1[$.

b) $(x+5)(1-2x)>0$.

$S_{\mathbb{R}}=\left]-5\,;\dfrac{1}{2}\right[$.

c) $(16x^2-49)(1-x)<0$

$\Leftrightarrow(4x-7)(4x+7)(1-x)<0$;

$S_{\mathbb{R}}=\left]-\dfrac{7}{4};1\right[\cup\left]\dfrac{7}{4};+\infty\right[$.

d) $(x+1)(-2x+5)\leq x^2-1$

$\Leftrightarrow(x+1)(-2x+5)-(x^2-1)\leq 0$;

$\Leftrightarrow -3(x+1)(x-2)\leq 0$

$\Leftrightarrow 3(x+1)(x-2)\geq 0$.

$S_{\mathbb{R}}=]-\infty\,;-1]\cup[2\,;+\infty[$.

Exercice 22

a) $|12x-3|<1 \Leftrightarrow -1<12x-3<1$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{6}<x<\dfrac{1}{3}$;

$S_{\mathbb{R}}=\left]\dfrac{1}{6};\dfrac{1}{3}\right[$.

b) $\left|x-\dfrac{5}{4}\right|\leq|2-x| \Leftrightarrow \left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2-(2-x)^2\leq 0$;

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{4}\left(2x-\dfrac{13}{4}\right)\leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2}\left(x-\dfrac{13}{8}\right)\leq 0$.

$S_{\mathbb{R}}=\left]-\infty;\dfrac{13}{8}\right]$.

Exercice 23

Soit $f(x)=|x-5|+|4x+2|$

x	$-\infty$	$-\dfrac{1}{2}$	5 $\quad+\infty$
$\lvert x-5\rvert$	$-x+5$	$-x+5$	$x-5$
$\lvert 4x+2\rvert$	$-4x-2$	$4x+2$	$4x+2$
$f(x)$	$-5x+3$	$3x+7$	$5x-3$

• Pour $x\in\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right[$, $f(x)=3 \Leftrightarrow -5x+3=3$

$\Leftrightarrow x=0$ et $0\notin\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right[$

• Pour $x\in\left[-\dfrac{1}{2}\,;5\right]$, $f(x)=3 \Leftrightarrow 3x+7=3$

$\Leftrightarrow x=-\dfrac{4}{3}$ et $-\dfrac{4}{3}\notin\left[-\dfrac{1}{2}\,;5\right]$

• Pour $x\in[5\,;+\infty]$, $f(x)=3 \Leftrightarrow 5x-3=3$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{6}{5}$ et $\dfrac{6}{5}\notin[5\,;+\infty]$.

Donc $S_{\mathbb{R}}=\phi$.

Exercice 24

a) $x^3 - 3x^2 - 5x + 15 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-3) - 5(x-3) = 0.$

$\Leftrightarrow (x-3)(x^2-5) = 0$

$\Leftrightarrow x - 3 = 0$ ou $x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

ou $x = \sqrt{5}$ ou $x = -\sqrt{5}$.

$S_{\mathbb{R}} = \{-\sqrt{5}\ ;\ \sqrt{5}\ ;\ 3\}.$

b) $x^3 + 8 - 2(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2 - 2x + 4)$

$- 2(x+2)(x-2) = 0.$

$\Leftrightarrow (x+2)(x^2 - 4x + 8) = 0$

$\Leftrightarrow (x + 2) = 0$ car pour $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 8 > 0$.

$x = -2.$

$S_{\mathbb{R}} = \{-2\}.$

IV.4. Situation d'évaluation

Exercice 25

1) Exprimons TV^2 en fonction de x et RT^2 en fonction de x :

* TVU est un triangle rectangle en U, donc d'après la propriété de Pythagore,

$TV^2 = TU^2 + UV^2$

$TV^2 = x^2 + 4.$

* RST est un triangle rectangle en S, d'après la propriété de Pythagore

$RT^2 = RS^2 + ST^2 = RS^2 + ((US - UT)^2)$

$RT^2 = 4^2 + (5 - x^2).$

2) $x^2 + 4 = (5 - x)^2 + 16$

$\Leftrightarrow x^2 + 4 = 25 - 10x + x^2 + 16$

$\Leftrightarrow -10x = -37 \Leftrightarrow x = \dfrac{37}{10} \Leftrightarrow x = 3{,}7.$

$S_{\mathbb{R}} = \{3{,}7\}$

3) Pour que RT et TV soient égales, il faut que TU soit égal à 3,7 cm.

Leçon 9 Angles orientés et trigonométrie

IV. Exercices
IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

Mesures en degrés (en °C)	60°	45°	10°	150°	205°	75°	330°
Mesures en radians (en rad)	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{41\pi}{36}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{6}$

Exercice 2

Mesures (en rad)	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{7}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{4}$
Mesures (en °C)	150	120	25,7	22,5	75	135

Exercice 3

Rayon	4 cm	$\frac{25}{3}$ dm	12 m
mes $\widehat{AOB}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{\pi}{6}$
Longueur de $\overset{\frown}{AB}$	$\frac{\pi}{3}$ cm	5π dm	2π m

Exercice 4

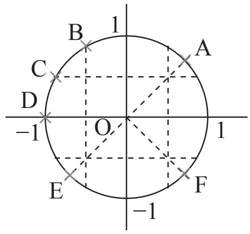
- Sur un cercle, il y a deux sens de parcours.

- Un synonyme de ''sens direct'' est ''sens contraire des aiguilles d'une montre''.

- Un cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1 et orienté dans le sens direct.

Exercice 5

Soit A, B, C, D, E et F les points images respectifs de $\frac{\pi}{4}$; $\frac{2\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{6}$; π ; $\frac{3\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{4}$.



Exercice 6

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{DA}}\right)=\frac{\pi}{2}$.

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}}\right)=0$.

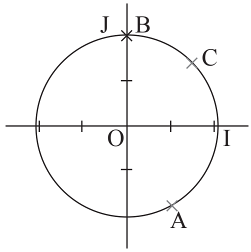
$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$.

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{BC}}\right)=-\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{2\pi}{3}$.

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BD}}\right)=\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BC}}\right)=\frac{\pi}{3}$.

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}}\right)=\frac{\pi}{3}\div 2=\frac{\pi}{6}$.

Exercice 7



Exercice 8

• Le point K est, sur le cercle, le point d'ordonnée $\frac{1}{2}$ placé entre I et L.

• Le point M a pour ordonnée $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et placé sur le cercle entre J et P.

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OK}}\right)=\frac{\pi}{6}$.

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OL}}\right)=\frac{\pi}{3}$.

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}}\right)=\frac{\pi}{2}$.

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}}\right)=\frac{3\pi}{4}$.

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OP}}\right)=\pi$.

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OQ}}\right)=-\frac{5\pi}{6}$.

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OR}}\right)=-\frac{\pi}{2}$.

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OS}}\right)=-\frac{\pi}{3}$.

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OJ}}\right)=-\frac{\pi}{2}$.

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OK},\overrightarrow{OJ}}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$.

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OS},\overrightarrow{OR}}\right)=-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\pi}{6}$.

Exercice 9

$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$.

$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 10

L1 → $\boxed{\text{Vrai}}$; L2 → $\boxed{\text{Faux}}$;

L3 → $\boxed{\text{Vrai}}$; L4 → $\boxed{\text{Faux}}$;

L5 → $\boxed{\text{Faux}}$; L6 → $\boxed{\text{Vrai}}$.

Exercice 11

- Calcul de cos α.

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\alpha \in \left]-\pi; -\frac{\pi}{2}\right] \Longrightarrow \cos\alpha < 0$.

Donc $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- Calcul de tan α

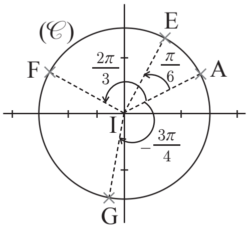
$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

$\tan\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

IV.2. Exercices de renforcement

Exercice 12

1) Construction des points E, F et G.



2) Détermination de la mesure principale.

- $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{IF}, \overrightarrow{IG}}\right) = ?$

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{IF}, \overrightarrow{IG}}\right) + \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{IG}, \overrightarrow{IA}}\right) + \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IF}}\right) = 2\pi$.

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{IF}, \overrightarrow{IG}}\right) + \frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = 2\pi$

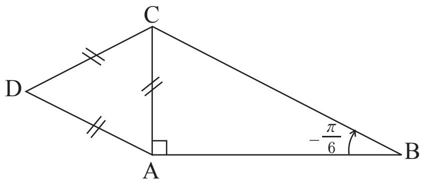
$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{IF}, \overrightarrow{IG}}\right) = \frac{7\pi}{12}$.

- $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{IE}, \overrightarrow{IG}}\right) = ?$

$$\begin{aligned}\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{IE}, \overrightarrow{IG}}\right) &= \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{IE}, \overrightarrow{IA}}\right) + \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IG}}\right)\\ &= -\frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{4}\\ &= -\frac{11\pi}{12}.\end{aligned}$$

Exercice 13

1) Construisons les points A, B, C et D.



2) Détermination de la mesure principale.

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) = \frac{2\pi}{3}$

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}}\right) = -\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{5\pi}{6}$

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AC}}\right) = \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}}\right) = \frac{\pi}{3}$

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BA}}\right) = \frac{5\pi}{6}$.

IV.3. Exercices d'approfondissement

Exercice 14

1) $x = \frac{\pi}{6}$; 2) $x = -\frac{\pi}{6}$; 3) $x = \frac{3\pi}{4}$

Exercice 15

1) $\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}=1.$

$\sin^2\frac{\pi}{8} = 1-\cos^2\frac{\pi}{8}$

$= 1-\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

$= \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$

Comme $0<\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{2}$;

on a : $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$

2) $\tan\frac{\pi}{8} = \frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{4-4\sqrt{2}+2}{4-2}}$

$= \sqrt{3-2\sqrt{2}}.$

Exercice 16

1) Pour tout nombre réel x, on a :
$(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2$
$=\cos^2 x+2\sin x\cos x+\sin x^2+\cos^2 x-2\sin x\cos x+\sin^2 x$
$=\cos^2 x+\sin^2 x+\cos^2 x+\sin^2 x$
$=1+1$
$=2.$

2) On a : $\cos x-\sin x=\frac{1}{2}$,
D'après la question 1, on a :
$(\cos x+\sin x)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=2$

$(\cos x+\sin x)^2=\frac{7}{4}$, $\cos x+\sin x=\frac{\sqrt{7}}{2}$ ou $\cos x+\sin x=-\frac{\sqrt{7}}{2}.$

• Si $\cos x+\sin x=\frac{\sqrt{7}}{2}$,

alors $\begin{cases}\cos x-\sin x=\frac{1}{2}\\ \cos x+\sin x=\frac{\sqrt{7}}{2}\end{cases}$

donne $\cos x=\frac{1+\sqrt{7}}{4}$ et $\sin x=\frac{-1+\sqrt{7}}{4}$

• Si $\cos x+\sin x=-\frac{\sqrt{7}}{2}$, alors

$\begin{cases}\cos x-\sin x=\frac{1}{2}\\ \cos x+\sin x=-\frac{\sqrt{7}}{2}\end{cases}$

donne $\cos x=\frac{1-\sqrt{7}}{4}$ et $\sin x=\frac{-1-\sqrt{7}}{4}$

IV.4. Situation d'évaluation

Exercice 17

1\. a) Explication :

• $\tan\widehat{MAN}=\frac{MN}{AM}$, donc $MN=AM\times\tan 42°$.

• $\tan\widehat{MBN}=\frac{MN}{AM+AB}$,

donc $MN=(AM+10)\times\tan 27°$.

b) De ce qui précède, on a :

$AM\times\tan(42)=(AM+20)\times\tan(27)$;

d'où $AM=\frac{10\tan 27}{\tan 42-\tan 27}\simeq 13$ m.

2) La longueur de la tour est MN.

$MN=AM\times\tan 42°=13\times\tan 42°=11{,}70.$
soit 1170 cm.

Leçon 10 Produit scalaire

IV. Exercices

IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

En utilisant la formule :

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$, on a :

1) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 1 \times 2 \times \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

2) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 4 \times 3 \times \cos\frac{2\pi}{3} = -6$

3) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \sqrt{3} \times 5 \times \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{15}{2}$

4) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 8 \times 13 \times \cos\frac{\pi}{2} = 0$

5) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$.

Exercice 2

• Dans l'énoncé, remplacer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$
par $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ sur les lignes n°3 et 4.

1- b ; 2 - a ; 3 -c ; 4 -a ; 5 -a ; 6 - b.

Exercice 3

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH}$
	$-\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH}$
	$AC \times AI$
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$	$-AC \times AI$
	$AB \times AJ$
	$-AB \times AJ$
$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$	$AD \times AK$
	$-AD \times AK$

Exercice 4

a) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = BU \times BC = 1 \times (1 + 2) = 3.$

b) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = -CU \times CB$
$= -2 \times (2 + 1) = -6.$

Exercice 5

1- a ; 2- e ; 3- b ; 4- d ; 5- c.

Exercice 6

a) $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{QP} = QP \times QP = 36.$

b) $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PN} = \overline{MN} \times \overline{NN} = 0.$

c) $\overrightarrow{IN}\cdot\overrightarrow{IP} = IN \times II = 0.$

d) $\overrightarrow{QI}\cdot\overrightarrow{NI} = -QI \times NI = -(QI)^2$

$= -(\frac{1}{2}\ QN)^2$

$= -\frac{1}{4}(QP^2 + PN^2)$

$= -\frac{1}{4}\ (6^2 + 6^2)$

$= -18.$

Exercice 7

Figure 1

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AB = 9.$

Figure 2

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -AB \times AC = -3 \times 1 = -3.$

Figure 3

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AB = 4.$

Exercice 8

1er Cas : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -2 \times 1 = -2.$

2ème cas : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 6 \times 3 = 18.$

3ème cas : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -3 \times 4 = -12.$

Exercice 9

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$	M appartient à la perpendiculaire à(AB) passant par A.
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$	M appartient au cercle de centre A et de rayon r.
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$	M appartient au cercle de diamètre [AB].

Exercice 10

1 → V ; 2 → V ; 3 → F ;

4 → F ; 5 → F ; 6 → V.

Exercice 11

a) $\left(3\vec{i}-\vec{j}\right)\left(-\vec{i}+2\vec{j}\right)$

$= -3\vec{i}^{\,2} + 6\vec{i}.\vec{j} + \vec{i}.\vec{j} - 2\vec{j}^{\,2}$

$= -3\vec{i}^{\,2} + 7\vec{i}.\vec{j} - 2\vec{j}^{\,2}$

$= -3 \times 2 + 7(-4) - 2 \times 9$

$= -52.$

b) $\left(\vec{i}-3\vec{j}\right)^2 = \vec{i}^{\,2} - 6\vec{i}.\vec{j} + 9\vec{j}^{\,2}$

$= 2 + 24 + 9 \times 9$

$= 107.$

c) $\left\| 2\vec{i}-3\vec{j} \right\|^2 = \left(2\vec{i}-3\vec{j}\right)^2$

$= 4\vec{i}^{\,2} - 12\vec{i}.\vec{j} + 9\vec{j}^{\,2}$

$= 8 + 48 + 81$

$= 137.$

Donc $\left\| 2\vec{i}-3\vec{j} \right\| = \sqrt{137}$.

Exercice 12

Calculons mes $\widehat{ABC}$

$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA \times BC \times \cos\widehat{ABC}$

$1849 = 2304 + 1225 - 2 \times 48 \times 35 \times \cos\widehat{ABC}$

$\cos\widehat{ABC} = \frac{1}{2}$.

Donc mes $\widehat{ABC} = 60°$.

* Calculons mes $\widehat{ACB}$:

$AB^2 = CA^2 + BC^2 - 2CA \times CB \times \cos\widehat{ACB}$

$2304 = 1849 + 1225 - 2 \times 43 \times 35 \times \cos\widehat{ACB}$

$\cos\widehat{ACB} = \frac{77}{301} = 0{,}2558.$

mes $\widehat{ACB} \simeq 75°$.

* Calculons mes $\widehat{BAC}$

mes $\widehat{BAC} = 180 - ($mes $\widehat{BAC}$ + mes $\widehat{BAC})$

$= 45°.$

Exercice 13

• Dans l'énoncé, remplacer [AC] par [BC]

* Calculons BC

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$

$= 64 + 9 - 2 \times 8 \times 3 \times \frac{1}{2}$

$= 49.$

Donc BC = 7.

* Calculons mes $\widehat{ABC}$

$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA \times BC \times \cos\widehat{ABC}$

$9 = 64 + 49 - 2 \times 8 \times 7 \times \cos\widehat{ABC}$

$\cos\widehat{ABC} = \frac{104}{112} = \frac{13}{14}$.

Donc mes $\widehat{ABC} = 22°$

* Calculons mes $\widehat{ACB}$

mes $\widehat{ACB} = 180° - ($mes $\widehat{BAC}$ + mes $\widehat{ABC})$

$= 180 - (60 + 22) = 98°$

Exercice 14

On a : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$.

Donc $AI^2 = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC^2\right)$

$= \frac{1}{2}\left(64 + 9 - \frac{1}{2} \times 49\right)$

$= \frac{97}{4}$.

$AI = \frac{1}{2}\sqrt{97}$.

Exercice 15

D'après le théorème de la médiane :

$\overrightarrow{FE}.\overrightarrow{FG} = FK^2 - \frac{1}{4}EG^2$.

Donc $FK^2 = \overrightarrow{FE}.\overrightarrow{FG} + \frac{1}{4}EG^2$

$= 21 + \frac{1}{4} \times 4^2$

$= 25.$

Par suite, FK = 5.

La longueur de la médiane issue de F est 5 cm.

Exercice 16

a) $\vec{u}.\vec{v} = 2 \times 5 + (-3) \times 3 = 1.$

b) $\vec{v}.\vec{u} = 5 \times 2 + 3 \times (-3) = 1$

c) $\vec{u}.\vec{u} = 2 \times 2 + (-3) \times (-3) = 13.$

d) $\vec{v}.\vec{v} = 5 \times 5 + 3 \times 3 = 34.$

e) $\|\vec{v}\| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$.

f) $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$.

g) $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
$= 13 + 2 \times 1 + 34$
$= 49.$

h) $(\vec{v} - \vec{u})^2 = \vec{v}^2 - 2\vec{v}.\vec{u} + \vec{u}^2$
$= 34 - 2 \times 1 + 13$
$= 45.$

Exercice 17

(AM) et (MS) sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{MS}$ sont orthogonaux.

On a : $\overrightarrow{AM}$ (− 7 ; 2) et $\overrightarrow{MS}$ (4 ; 14).

$\overrightarrow{AM} . \overrightarrow{MS} = - 7 \times 4 + 2 \times 14 = 0.$

Par conséquent, $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{MS}$. On en déduit que (AM)⊥(MS).

Exercice 18

Entourer :

$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 1 = 0$; $x^2 + y^2 - 4 = 0$
et $x^2 + y^2 + 8y - 13 = 0.$

Exercice 19

1) Soit ($\mathscr{C}$) le cercle de centre A et de rayon 5.
Pour tout point M du plan,

$M \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow AM = 5$
$\Leftrightarrow AM^2 = 25$
$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$
$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 + y^2 - 2y + 1 = 25$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y - 22 = 0.$

Une équation cartésienne de ($\mathscr{C}$) est :
$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 22 = 0.$

2) Soit ($\mathscr{C}$') le cercle de centre B et de rayon 1.
Pour tout point M du plan,

$M \in (\mathscr{C}') \Leftrightarrow BM = 1$
$\Leftrightarrow BM^2 = 1$
$\Leftrightarrow (x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 1$
$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 1$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6x - 8y + 24 = 0.$

Une équation cartésienne de ($\mathscr{C}$') est :
$x^2 + y^2 + 6x - 8y + 24 = 0.$

Exercice 20

1) Soit ($\mathscr{C}$) le cercle de diamètre [AB].
Pour tout point M du plan,

$M \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

Or $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix} -x \\ -6-y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix} -2-x \\ 2-y \end{pmatrix}$

Donc $M \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow (-x)(-2-x) + (-6-y)(2-y) = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 12 + 4y + y^2 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x + 4y - 12 = 0$

Une équation cartésienne du cercle de diamètre [AB] est : $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 12 = 0.$

2) Soit ($\mathscr{C}$') le cercle de diamètre [AE]. Pour tout point M du plan,

$M \in (\mathscr{C}') \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{EM} = 0$

Or $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x \\ y+6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EM}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-5 \end{pmatrix}$

Donc $M \in (\mathscr{C}') \Leftrightarrow x(x+1) + (y+6)(y-5) = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + x + y^2 + y - 30 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + x + y - 30 = 0$

Une équation cartésienne du cercle de diamètre [AE] est : $x^2 + y^2 + x + y - 30 = 0.$

Exercice 21

$x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 - 6y = 0$
$\Leftrightarrow (x - 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 = 0$
$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 3)^2 - 13 = 0.$
$a = 2$; $b = 3$ et $d = -13.$

Exercice 22

$x^2 + y^2 - 10x + 4y + 36 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 10x + y^2 + 4y + 36 = 0$
$\Leftrightarrow (x - 5)^2 - 25 + (y + 2)^2 - 4 + 36 = 0$
$\Leftrightarrow (x - 5)^2 + (y + 2)^2 + 7 = 0.$
$a = 5$; $b = -2$ et $d = 7.$

Exercice 23

$M(x, y) \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$
$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 2^2$

Donc $(\mathscr{C})$ est le cercle de centre A(2 ; −3) et de rayon 2.

Exercice 24

$M(x, y) \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - x - \frac{35}{4} = 0$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + y^2 - \frac{35}{4} = 0$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 9$

$\Leftrightarrow AM^2 = 9$, avec $A\left(\frac{1}{2} ; 0\right)$.

$\Leftrightarrow AM = 3$.

Donc $(\mathscr{C})$ est le cercle de centre $A\left(\frac{1}{2} ; 0\right)$ et de rayon 3.

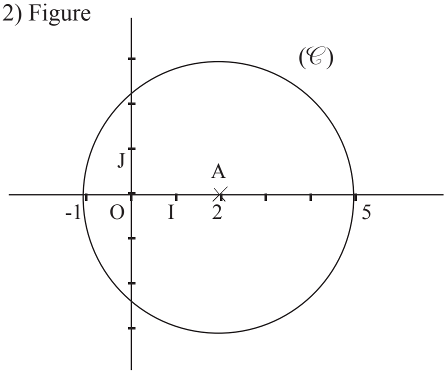
IV.2. Exercices de renforcement

Exercice 25

1) $M(x, y) \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0.$
$\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 9$
$\Leftrightarrow AM = 3$, avec A(2 ; 0).

$(\mathscr{C})$ est le cercle de centre A(2 ; 0) et de rayon 3.

2) Figure



Exercice 26

a) Soit $(\mathscr{C})$ cet ensemble.

$M(x, y) \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x - 2y + 2 = 0$
$\Leftrightarrow (x+2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 + 2 = 0$
$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 = 3$
$\Leftrightarrow AM^2 = 3$, avec A(−2 ; 1)
$\Leftrightarrow AM = \sqrt{3}$.

L'ensemble des points M est le cercle $(\mathscr{C}_1)$ de centre A (− 2 ; 1) et de rayon $\sqrt{3}$.

b) Soit $(\mathscr{C}_2)$ cet ensemble

$M(x, y) \in (\mathscr{C}_2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y - 14 = 0$
$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y-1)^2 - 1 - 14 = 0$
$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 16$
$\Leftrightarrow BM = 4$, avec B(1 ; 1)

$(\mathscr{C}_2)$ est le cercle de centre B(1 ; 1) et de rayon 4.

c) Soit $(\mathscr{C}_3)$ cet ensemble.

$M(x, y) \in (\mathscr{C}_3) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 8x + 6y + 25 = 0$
$\Leftrightarrow (x+4)^2 - 16 + (y+3)^2 - 9 + 25 = 0$
$\Leftrightarrow (x+4)^2 + (y+3)^2 = 0$
$\Leftrightarrow (x+4)^2 = 0$ et $(y+3)^2 = 0$
$\Leftrightarrow x = -4$ et $y = -3$.

$(\mathscr{C}_3)$ est le point E(−4 ;−3).

Exercice 27

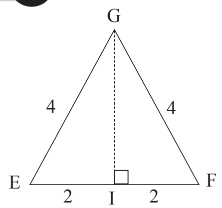
1) On a : $\overrightarrow{EB}$ (−3 ; −1) et $\overrightarrow{EN}$ (2 ; −6).

Donc $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EN} = (-3) \times 2 + (-1) \times (-6)$
$= -6 + 6 = 0.$

2) $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EN} = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{EB} \perp \overrightarrow{EN}$.

Donc le triangle BEN est rectangle en E.

Exercice 28

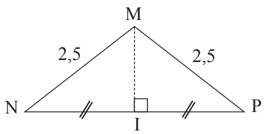


1) $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = EF \times EG \times \cos \widehat{FEG}$
$= 4 \times 4 \times \frac{1}{2}$
$= 8.$

2) $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EI} = \overline{EF} \times \overline{EI} = 4 \times 2 = 8.$

3) $\overrightarrow{IE} \cdot \overrightarrow{FI} = \overline{IE} \times \overline{FI} = 2 \times 2 = 4.$

Exercice 29



MATHS 2nde C_CORRIGE_CAHIER_27102021.indd 62 27/10/2021 13:53

1) * $\overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{NM}$ = NP × NM × cos $\widehat{MNP}$.

* $\overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{NM} = \overline{NP} \times \overline{NI}$ = NP × NI.

2) NP × NM × cos $\widehat{MNP}$ =NP × NI

cos $\widehat{MNP} = \dfrac{NI}{NM} = \dfrac{1,5}{2,5} = 0,6$.

Donc mes $\widehat{MNP} \simeq 53,1°$.

Exercice 30

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})^2$

$= \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$

$= \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + \|\vec{v}\|^2$

$= 9 + 2 \times 3 \times 2 \times \cos\dfrac{\pi}{3} + 4 = 13 + 6 = 19$

Donc $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{19}$.

Exercice 31

Avec les points A, B, C et D, on peut avoir les droites (AB), (AC), (AD), (BC), (BD) et (CD).

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}$.

On remarque que :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (-3) \times (-4) + 4 \times (-3)$

$= 12 - 12 = 0.$

D'où $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$. On en déduit que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Exercice 32

a) $\vec{u}.\vec{v} = -5m - 12$

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{12}{5}$.

b) $\vec{u}.\vec{v} = 2m - m(3 - m) = m^2 - m$.

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow m = 0$ ou $m = 1$.

c) $\vec{u}.\vec{v} = 2m(m - 4) + (3 - m)(2m + 1)$

$= 2m^2 - 8m + 6m + 3 - 2m^2 - m$

$= -3m + 3.$

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Exercice 33

1) $\vec{u}.\vec{v} = 1 \times 4 + (-1) \times (-3) = 7.$

$\vec{w}.\vec{u} = 1 \times 1 + (-1) \times 1 = 0.$

2) * $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

$7 = \sqrt{2} \times 5 \times \cos(\vec{u},\vec{v})$

$\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \dfrac{7\sqrt{2}}{10}$.

Donc mes$(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \simeq 8°$.

* $\vec{w}.\vec{u} = 0$ donc $\vec{w} \perp \vec{u}$,

et donc mes$(\widehat{\vec{w},\vec{u}}) = 90°$.

Exercice 34

1) $\overrightarrow{EX}\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{TA}\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{EX} = \overrightarrow{TA}$.

2) $\overrightarrow{EX}\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ET}\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$,

donc $\overrightarrow{EX} \cdot \overrightarrow{ET} = 6 \times 0 + 0 \times (-4) = 0$.

3) * De $\overrightarrow{EX} = \overrightarrow{TA}$, on déduit que TAXE est un parallélogramme.

* $\overrightarrow{EX} \cdot \overrightarrow{ET} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{EX} \perp \overrightarrow{ET}$.

TAXE est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de supports perpendiculaires. Donc TAXE est un rectangle.

Exercice 35

1) D'après le théorème de la médiane, on a :

$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \dfrac{1}{2}BC^2$.

Donc $AI^2 = \dfrac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - \dfrac{1}{2}BC^2)$

$AI^2 = \dfrac{1}{2}(64 + 81 - 50) = 47,5$.

Par suite, $AI = \sqrt{47,5} \simeq 6,89$.

2) Soit J le milieu de [AB] et K celui de [AC]. En raisonnant comme ci-dessus, on a :

$CJ^2 = \dfrac{1}{2}(CA^2 + CB^2 - \dfrac{1}{2}AB^2)$ et

$BK^2 = \dfrac{1}{2}(BA^2 + BC^2 - \dfrac{1}{2}AC^2)$.

* $CJ^2 = \frac{1}{2}(81 + 100 - 32) = 74,5$;

$CJ = \sqrt{74,5} \simeq 8,63$.

* $BK^2 = \frac{1}{2}(64 + 100 - 40,5) = 30,875$;

$BK = \sqrt{30,875} \simeq 5,56$.

IV.3. Exercices d'approfondissement

Exercice 36

$R(x ; y) \in (C) \Leftrightarrow \overrightarrow{RM} . \overrightarrow{RN} = 0$.

$\Leftrightarrow (2 - x)(-3 - x) + (2 - y)(6 - y) = 0$

$\Leftrightarrow -6 - 2x + 3x + x^2 + 12 - 2y - 6y + y^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - 8y + 6 = 0$.

Une équation du cercle de diamètre [MN] est :

$x^2 + y^2 + x - 8y + 6 = 0$.

Exercice 37

a) $M(x ; y) \in (C)\cap(D) \Leftrightarrow 2x - y - 5 = 0$ et $x^2 + y^2 = 25$

$\Leftrightarrow y = 2x - 5$ et $x^2 + (2x - 5)^2 = 25$

$\Leftrightarrow y = 2x - 5$ et $x^2 + 4x^2 - 20x + 25 = 25$

$\Leftrightarrow y = 2x - 5$ et $5x^2 - 20x = 0$

$\Leftrightarrow y = 2x - 5$ et $5x(x - 4) = 0$.

On a : $5x(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 4$.

Pour $x = 0$, on a $y = 2 \times 0 - 5 = -5$.

Pour $x = 4$, on a $y = 2 \times 4 - 5 = 3$.

Conclusion : (C) et (D) ont pour intersection les points A(0 ; −5) et B(4 ; 3).

b) $M(x ; y) \in (C)\cap(D) \Leftrightarrow 3x - 4y - 19 = 0$

et $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

$\Leftrightarrow y = \frac{3}{4} - \frac{19}{4}$ (1)

et $x^2 + y^2 - 4x - 6y^2 - 12 = 0$ (2).

Remplaçons y par son expression dans (2). On obtient :

$x^2 + \left(\frac{3}{4}x - \frac{19}{4}\right)^2 - 4x - 6\left(\frac{3}{4}x - \frac{19}{4}\right) - 12 = 0$

$x^2 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{57}{8}x + \frac{361}{16} - 4x - \frac{9}{2}x + \frac{57}{2} - 12 = 0.$

$16x^2 + 9x^2 - 114x + 361 - 64x - 72x + 456 - 192 = 0.$

$25x^2 - 250x + 625 = 0$

$x^2 - 10x + 25 = 0$.

$(x - 5)^2 = 0$

$x = 5$.

En remplaçant x par 5 dans (1), on a : $y = -1$.

Conclusion : (C) et (D) ont un seul point d'intersection qui est le point A(5 ; −1).

Exercice 38

* Avec l'axe des abscisses :

$M(x ; y) \in (OI) \cap (\mathscr{C})$

$\Leftrightarrow y = 0$ et $x^2 + y^2 + 15x - 12y + 36 = 0$.

$\Leftrightarrow y = 0$ et $x^2 + 15x + 36 = 0$

Résolvons l'équation : $x^2 + 15x + 36 = 0$.

$x^2 + 15x + 36 = 0$

$\left(x + \frac{15}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{2}\right)^2 + 36 = 0$

$\left(x + \frac{15}{2}\right)^2 - \frac{81}{4} = 0$

$\left(x + \frac{15}{2} - \frac{9}{2}\right)\left(x + \frac{15}{2} + \frac{9}{2}\right) = 0$

$(x + 3)(x + 12) = 0$.

$x = -3$ ou $x = -12$.

$(\mathscr{C})$ et (OI) ont pour point d'intersection A(−3 ; 0) et B(−12 ; 0).

* Avec l'axe des ordonnées :

$M(x ; y) \in (\mathscr{C})\cap(OJ) \Leftrightarrow x = 0$

et $x^2 + y^2 + 15x - 12y + 36 = 0$.

$\Leftrightarrow x = 0$ et $y^2 - 12y + 36 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ et $(y - 6)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ et $y = 6$.

$(\mathscr{C})$ et (OJ) ont pour point d'intersection P(0 ; 6).

Exercice 39

a) Soit (E_1) cet ensemble.

$M(x ; y) \in (E_1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$.

$\Leftrightarrow (x - 2)^2 - 4 + (y + 3)^2 - 9 - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$

$\Leftrightarrow AM^2 = 16$, avec A(2 ; –3).

$\Leftrightarrow AM = 4$.

(E_1) est le cercle de centre A(2 ; −3) et de rayon 4.

b) Soit (E_2) cet ensemble.

$M(x ; y) \in (E_2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$.

$\Leftrightarrow (x - 2)^2 - 4 + (y + 3)^2 - 9 + 13 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0$ et $(y + 3)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$ et $y = -3$.

(E_1) est le singleton $\{A\}$ où $A(2\,;-3)$.

c) Soit (E_3) cet ensemble.

$M(x\,;y) \in (E_3) \Leftrightarrow (x-2)(x+1)+y(y-1)=0.$

$$\Leftrightarrow x^2+x-2x-2+y^2-y=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2-x-y-2=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-2=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{10}{4}$$
$$\Leftrightarrow BM^2=\frac{10}{4}, \text{ avec } B\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right).$$
$$\Leftrightarrow BM=\frac{\sqrt{10}}{2}.$$

(E_3) est le cercle de centre $B\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Exercice 40

Figure 1 :

$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$

$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = 3 \times 5 \times \cos 60°$

$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \frac{15}{2}$.

Figure 2 :

$A(2\,;2)$; $B(-1\,;0)$ et $C(3\,;0)$.

Par suite, $\overrightarrow{AB}\,(-3\,;-2)$ et $\overrightarrow{AC}\,(1\,;-2)$.

Donc $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = -3 \times 1 + (-2) \times (-2) = 1$.

Figure 3 :

$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC} = 9\cos\widehat{BAC}$

Or mes $\widehat{BAC} = 180 - 2 \times 75 = 30°$.

Donc $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}\ \ 9 \times \cos 30° = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

Figure 4 :

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}\ \ \frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-\left\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right\|^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}(AB^2+AC^2-BC^2)$$
$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}\ \ \frac{1}{2}(16+36-9)=\frac{43}{2}=21{,}5$$

Exercice 41

1) $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$

$-12\sqrt{3} = 24\cos\widehat{BAC}$

$\cos\widehat{BAC} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Mes $\widehat{BAC} = \frac{5\pi}{6}$.

2) Soit $\mathscr{A}$ son aire.

$\mathscr{A} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin\widehat{BAC} = 12\sin\widehat{BAC}$

$\sin^2\widehat{BAC} = 1 - \cos^2\widehat{BAC} = \frac{1}{4}$.

Comme $\mathscr{A} > 0$, on prend $\sin\widehat{BAC} = \frac{1}{2}$.

Donc $\mathscr{A} = 12 \times \frac{1}{2} = 6\text{ cm}^2$.

Exercice 42

* $\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BC} = \overline{BO} \times \overline{BC} = BO \times BC$
  $= 2 \times 4 = 8.$
* $\overrightarrow{BO}\,.\,\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{BO}\,.\,\overrightarrow{BA} = \overline{BO} \times \overline{BO} = BO^2.$
  $= 4.$
* $\overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{AO} = 0$, car $(BC) \perp (AO)$.
* $\overrightarrow{JI}\,.\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$
  $= AB^2 \times \cos\widehat{BAC}$.

• mes $\widehat{BAC} = \pi - 2 \times \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ et $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

• $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$

$16 = 2AB^2 - 2AB^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$AB^2 = \frac{16}{2-\sqrt{2}} = 8(2+\sqrt{2})$.

On déduit de ces deux points que

$\overrightarrow{JI}\,.\,\overrightarrow{AC} = 8(2+\sqrt{2}) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 8 + 8\sqrt{2}$

$= 8(1+\sqrt{2})$.

Exercice 43

1) $\overrightarrow{BA}\,(2\,;2)$ et $\overrightarrow{BC}\,(4\,;-3)$.

Donc $BC = \sqrt{4^2+(-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

et $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 2\times 4 + 2\times(-3) = 2$.

2. a) H étant le projeté orthogonal de A sur (BC), on a : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \overline{BH}\times\overline{BC}$ et $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC} = \overline{BH}\times\overline{BC}$. Donc $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC}$

b) On a : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 2$, donc $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} > 0$.

Or, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \overline{BH}\times\overline{BC}$, donc $\overline{BH}\times\overline{BC} > 0$.

Cela prouve que $\overline{BH}$ et $\overline{BC}$ ont le même signe. On en déduit que H appartient au segment [BC].

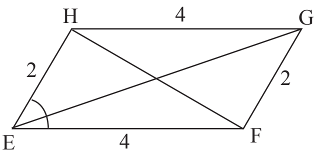
c) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = BH\times BC$

$2 = BH\times 5$

$BH = \dfrac{2}{5} = 0{,}4.$

$HC = BC - BH = 5 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{23}{5} = 4{,}6.$

Exercice 44



1) $(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH})^2 = EF^2+EH^2+2\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EH}$

$= EF^2+EH^2+2EF\times EH\times\cos\widehat{FEH}$

$= 16+4+2\times 4\times 2\times\dfrac{1}{2}$

$= 20.$

$(\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{EH})^2 = EF^2+EH^2-2\,\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EH}$

$= EF^2+EH^2-2EF.EH\cos\widehat{FEH}$

$= 16+4-2\times 4\times 2\times\dfrac{1}{2}$

$= 12.$

2. a) $(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH})^2 = 20$

$(\overrightarrow{EG})^2 = 20$

$EG^2 = 20$

$EG = \sqrt{20}$

$EG = 2\sqrt{5}$

• $(\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{EH})^2 = 12$

$(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{HE})^2 = 12$

$\overrightarrow{HF}^{\,2} = 12$

$HF^2 = 12$

$HF = \sqrt{12}$

$HF = 2\sqrt{3}$

b) Dans le triangle EFG, on a :

$FG^2 = EF^2+EG^2-2EF\times EG\times\cos\widehat{FEG}$

$4 = 16+28-16\sqrt{7}\cos\widehat{FEG}$

$\cos\widehat{FEG} = \dfrac{5}{2\sqrt{7}}.$

Donc mes $\widehat{FEG}\simeq 19°$.

Exercice 45

Dans la figure de l'énoncé, marquer l'angle $\widehat{BOC}$ par α.

1) $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = (\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC})$

$= \overrightarrow{OA}^{\,2}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$= \overrightarrow{OA}^{\,2}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ car $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AB}$

donc $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OA} = 0$.

2) Dans la figure, marquer l'angle $\widehat{BOC}$ par α.

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = OB\times OC\times\cos\alpha.$

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = OA^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 900+15\times 5$

$= 975.$

$OB^2 = OA^2+AB^2 = 1125 \Longrightarrow OB = 15\sqrt{5}$.

$OC^2 = OA^2+AC^2 = 1300 \Longrightarrow OC = 10\sqrt{13}$.

$975 = 15\sqrt{5}\times 10\sqrt{13}\times\cos\alpha$

$\Longrightarrow \cos\alpha = \dfrac{13}{12\sqrt{65}}.$

Donc $\alpha\simeq 82{,}3°$.

Exercice 46

1) a) En utilisant le théorème d'Al-Kashi, on a :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$

$49 = 64 + 9 - 48\cos \widehat{BAC}$

$\cos \widehat{BAC} = \dfrac{1}{2}$.

b) $\sin^2 \widehat{BAC} = 1 - \cos^2 \widehat{BAC} = \dfrac{3}{4}$.

$\sin \widehat{BAC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2) $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2} AB \times AC \times \sin \widehat{BAC}$

$= \dfrac{1}{2} \times 8 \times 3 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\mathcal{A} = 6\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

Exercice 47

• Dans l'énoncé, remplacer " à la somme des carrés des côtés " par " au double de la somme des carrés des côtés ".

1. a) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2$

$= (\vec{u} + \vec{v})^2 - (\vec{u} - \vec{v})^2$

$= \vec{u}^{\,2} + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^{\,2} - (\vec{u}^{\,2} - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^{\,2})$

$= 4\vec{u}\cdot\vec{v}$.

b) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2$

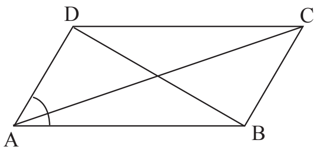
$= (\vec{u} + \vec{v})^2 + (\vec{u} - \vec{v})^2$

$= \vec{u}^{\,2} + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^{\,2} + \vec{u}^{\,2} - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^{\,2}$

$= 2\vec{u}^{\,2} + 2\vec{v}^{\,2}$

$= 2\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\right)$

2)



Soit ABCD un parallélogramme.

$AC^2 = \overrightarrow{AC}^{\,2} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})^2$

$BD^2 = \overrightarrow{BD}^{\,2} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})^2$

$= (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})^2$

$AC^2 + BD^2 = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB})^2 + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})^2$

$= \|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\|^2$

$= 2\left(\|\overrightarrow{AD}\|^2 + \|\overrightarrow{AB}\|^2\right)$

$= 2(AD^2 + AB^2)$.

Conclusion : La somme des carrés des diagonales est égale au double de la somme des carrés des côtés.

Exercice 48

Considérons le repère $(A\,;\ \overrightarrow{AB}\,;\ \overrightarrow{AD})$.
Ce repère est orthonormé.
Dans ce repère, on a :
$A(0\,;0)$; $B(1\,;0)$; $C(1\,;1)$; $D(0\,;1)$;

$I\left(\dfrac{1}{2}\,;0\right)$; $J\left(0\,;\dfrac{1}{2}\right)$ et $K\left(\dfrac{0+\frac{1}{2}}{2};\dfrac{1+0}{2}\right)$,

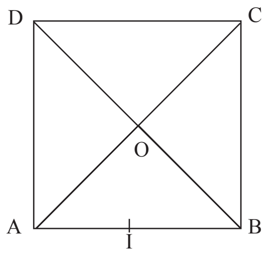
soit $K\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right)$.

Par suite, $\overrightarrow{AK}\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{BJ}\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$.

Alors $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BJ} = \dfrac{1}{4} \times (-1) + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = 0$.

On en déduit que $\overrightarrow{AK} \perp \overrightarrow{BJ}$, c'est-à-dire que $(AK) \perp (BJ)$.

Exercice 49



1) Soit (E) cet ensemble.

$M \in (E) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = 2$

$\Leftrightarrow \overline{AB} \times \overline{AH} = 2$, où H est le projeté orthogonal de M sur (AB).

$M \in (E) \Leftrightarrow AB \times AH = 2$ et $H \in [AB]$

$\Leftrightarrow 2AH = 2$ et $H \in [AB]$

$\Leftrightarrow AH = 1$ et $H \in [AB]$.

(E) est la perpendiculaire à (AB) en I, c'est-à-dire la droite (OI).

2. a) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})$.

$= (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA})$

$= (\overrightarrow{MI})^2 - (\overrightarrow{IA})^2$

$= MI^2 - IA^2$

$= MI^2 - 1$.

b) Soit $(\mathscr{C})$ cet ensemble.

$M \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 4$

$\Leftrightarrow MI^2 - 1 = 4$

$\Leftrightarrow MI^2 = 5$

$\Leftrightarrow IM = \sqrt{5}$.

$(\mathscr{C})$ est le cercle de I et de rayon $\sqrt{5}$.

On a : $IC^2 = IB^2 + BC^2 = 1^2 + 2^2 = 5$.

D'où $IC = \sqrt{5}$.

On en déduit que $(\mathscr{C})$ est le cercle de centre I passant par C.

IV.4. Situations d'évaluation

Exercice 50

1) * $AC^2 = BA^2 + BC^2 = 5^2 + 3^2 = 34$

$AC = \sqrt{34}$.

* $DE^2 = AD^2 + AE^2 = 3^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{61}{4}$.

$DE = \frac{\sqrt{61}}{2}$.

2) * $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}$

* $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DE} = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}).(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE})$

$= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AE}$

$= 0 + AB \times AE + \overrightarrow{BC}.(-\overrightarrow{BC}) + 0$

$= AB \times AE - BC^2$

$= \frac{25}{2} - 9$

$= \frac{7}{2} = 3{,}5$.

3) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DE} = AC \times DE \times \cos\theta$.

$3{,}5 = \sqrt{34} \times \frac{\sqrt{61}}{2} \cos\theta$

$\cos\theta = \frac{7}{\sqrt{2074}}$.

Donc $\theta \simeq 81{,}158 \simeq 81{,}16°$.

Exercice 51

1) $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ} = \overline{AP} \times \overline{AQ}$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP'} = \overline{AP} \times \overline{AQ}$ car le triangle PQP' est rectangle en Q étant donné que [PP'] est diamètre du cercle.

On déduit de ces deux égalités que

$\overline{AP} \times \overline{AQ} = \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP'}$.

2) $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP'} = (\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}).(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP'})$.

$= (\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}).(\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{OP})$

$= \overrightarrow{AO}^{\,2} - \overrightarrow{OP}^{\,2}$

$= AO^2 - OP^2$

$= AO^2 - r^2$.

3) $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP'}$ et $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP'} = AO^2 - r^2$.

donc $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ} = AO^2 - r^2$.

Les points A et O ainsi que le nombre r étant fixes, le nombre $AO^2 - r^2$ est fixe, c'est-à-dire constant.

Ceci confirme la propriété.

Leçon 11 Étude de fonctions élémentaires

IV. Exercices
IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

b ; d

Exercice 2

$g(-1{,}03) = E(-1{,}03) = -2$.
$g(4{,}9) = E(4{,}9) = 4$.
$g(-0{,}999) = E(-0{,}999) = -1$.
$g(\pi) = E(\pi) = 3$.
$g(1) = E(1) = 1$.
$g(-5) = -5$.

Exercice 3

L1 → $\boxed{\text{Faux}}$
L2 → $\boxed{\text{Vrai}}$
L3 → $\boxed{\text{Vrai}}$
L4 → $\boxed{\text{Faux}}$
L5 → $\boxed{\text{Vrai}}$
L6 → $\boxed{\text{Vrai}}$.

Exercice 4

• Dans l'énoncé, la lettre de la fonction k est d et non c.
a → 2 ; b → 4 ; c → 3 ; d → 1 ; e → 5.

Exercice 5

1 → a ; 2 → a ; 3 → c ; 4 → b.

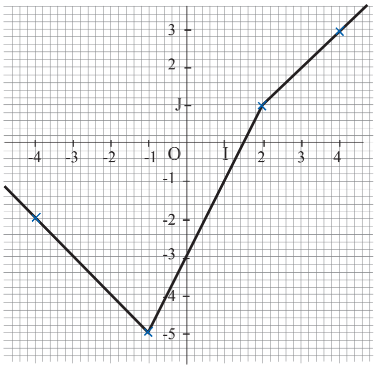
IV.2. Exercices de renforcement

Exercice 6

• Dans l'énoncé, remplacer $-1 \leq x \leq -2$ par $-1 < x \leq 2$ et $x \geq 2$ et $x > 2$.

1) $\mathscr{D}_g =]-\infty;-1] \cup]-1;2] \cup]2;+\infty[$, donc $\mathscr{D}_g = \mathbb{R}$.
2) $g(-1) = -5$; $g(0) = -3$; $g(4{,}3) = 3{,}3$; $g(2) = 1$.
3)
$$g(x) = \begin{cases} -x-6 \text{ pour } x \in [-3;-1] \\ 2x-3 \text{ pour } x \in [-1;2] \\ x-1 \text{ pour } x \in [2;4]. \end{cases}$$

Soient $x \in [-3 ; -1]$ et $y \in [-3 ; -1]$
tels que : $x \leq y$.
$x \leq y \Leftrightarrow -x \geq -y$.
$\Leftrightarrow -x-6 \geq -y-6$.
$\Leftrightarrow g(x) \geq g(y)$.
Donc g est décroissante sur $[-3 ; -1]$.
De même, g est croissante sur $]-1 ; 2]$ et sur $]2 ; 4]$.
4)



Exercice 7

1) • Sur l'intervalle $[-3 ; -1]$, on a :
$f(x) = ax + b$.

$$\begin{cases} f(-3)=0 \\ f(-1)=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} -3a+b=0 \\ -a+b=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-1 \\ b=-3 \end{cases}$$

D'où $f(x) = -x - 3$.
• Sur l'intervalle $[-1 ; 1]$, on a :
$f(x) = px + q$.

$$\begin{cases} f(-1)=-2 \\ f(1)=2 \end{cases} \quad \begin{cases} -p+q=-2 \\ p+q=2 \end{cases} \quad \begin{cases} p=2 \\ q=0 \end{cases}$$

$f(x) = 2x$.

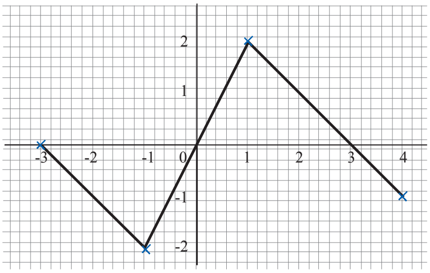
• Sur l'intervalle [1 ; 4], on a :

$f(x) = ux + v$.

$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(4) = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} u + v = 2 \\ 4u + v = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} u = -1 \\ v = 3 \end{cases}$

$f(x) = -x + 3$.

2)



Exercice 8

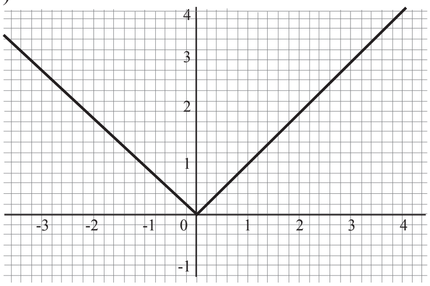
1) $|x| = \begin{cases} -x \text{ pour } x \\ x \text{ pour } x \end{cases}$

2) e est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$.
e est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

3) Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

4)



Exercice 9

1) Soient $x \in]-\infty\ ;\ 0]$, $y \in]-\infty\ ;\ 0]$ tels que $x \leq y$.

$x \leq y \Longrightarrow x^2 \geq y^2 \Longrightarrow h(x) \geq h(y)$.

Donc h est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$.

De même, h est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

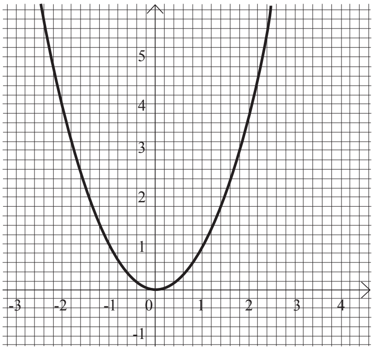
2)Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

3) Complétons le tableau

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$h(x)$	9	4	1	0	1	4	9

3) Construisons ($\mathscr{C}_h$).



Exercice 10

1) Soient $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$; $x \leq y \Longrightarrow x^3 \leq y^3$,
$i(x) \leq i(y)$, donc i est croissante sur $\mathbb{R}$.

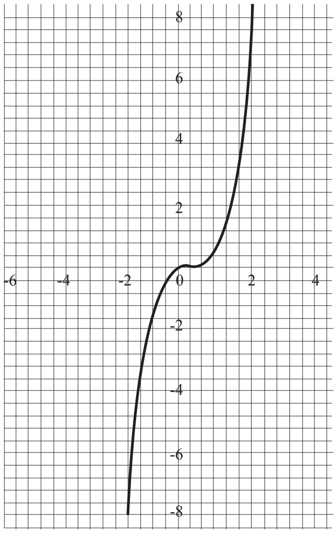
2) Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
i	$\nearrow$	0	$\nearrow$

3) Complétons le tableau de valeurs.

x	-2	-1	0	1	2
$i(x)$	-8	-1	0	1	8

4) Représentation graphique.



Exercice 11

1) $x \in \mathscr{D}_f \Leftrightarrow x \neq 0$, donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

2) Soient $x \in]-\infty\,;0[$ et $y \in]-\infty\,;0[$ tels que $x < y$.

$x < y \Longrightarrow \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$, donc $f(x) > f(y)$.

D'où f est décroissante sur $]-\infty\,;0[$.

De même, f est décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

3) Tableau de variation.

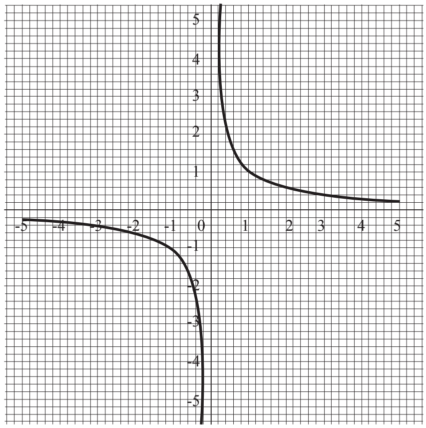
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘		↘

4) Complétons le tableau de valeurs :

x	-5	-2	-1	$-0{,}2$	$-0{,}5$	$0{,}2$
$f(x)$	$-0{,}2$	$-0{,}8$	-1	$-0{,}5$	-2	5

0,5	1	2	5
2	1	0,5	0,2

5) Construisons la représentation graphique de f sur $[-5\,;5]-\{0\}$.



IV.3. Exercices d'approfondissement

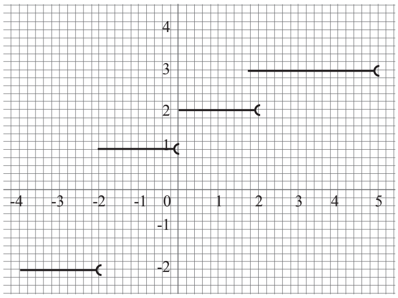
Exercice 12

1) $\mathscr{D}_f = [-4\,;5[$.

2) Sur chacun des intervalles, f coïncide avec une fonction constante, donc f est une fonction en escalier.

3) $f(-3) = -2$; $f(0) = 2$; $f(3) = 3$.

4) Construisons la représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$:



Exercice 13

1) $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.

2) Pour $x\ ]-\infty\,;-2[$, $f(x) = -x - 2$.

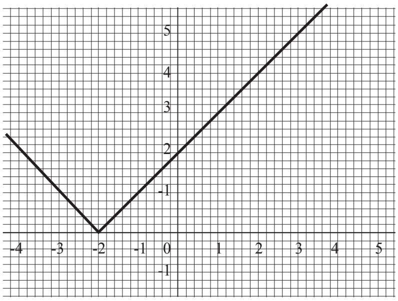
Pour $x \in [-2\,;+\infty[$, $f(x) = x + 2$.

Donc f est une fonction affine par intervalles.

3) Tableau de variation

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↗

4) Construisons la représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$



Exercice 14

1) $\mathscr{D}_g = [-2\ ;3[$.

2) $g(-1{,}8) = -2$; $g(-0{,}3) = -1$.
$g(0{,}99) = 0$; $g(2{,}5) = 2$.

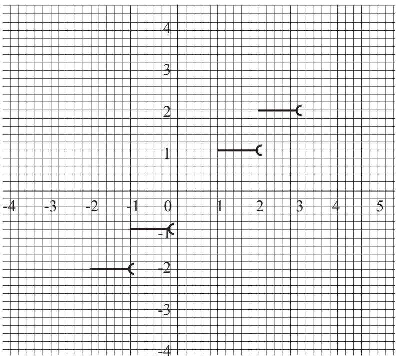
3)Tableau

x	$[-2;1[$	$[-1;0[$	$[0;1[$	$[1;2[$	$[2;3[$
$E(x)$	-2	-1	0	1	2

4) Le sens de variation de g sur Dg :

$\forall x \in \mathscr{D}_g$ et $\forall y \in \mathscr{D}_g$, $x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$.
Donc g est croissante sur $\mathscr{D}_g$.

5) Construisons la représentation graphique de g.



IV.4. Situation d'évaluation

Exercice 15

1) a) Pour $x \in]0\ ;1]$, $f(x) = 100$.

Pour $x \in]1\ ;2]$, $f(x) = 190$.

Pour $x \in]2\ ;3]$, $f(x) = 260$.

Pour $x \in]3\ ;4]$, $f(x) = 320$.

Pour $x \in]4\ ;5]$, $f(x) = 360$.

Pour $x \in]5\ ;6]$, $f(x) = 380$.

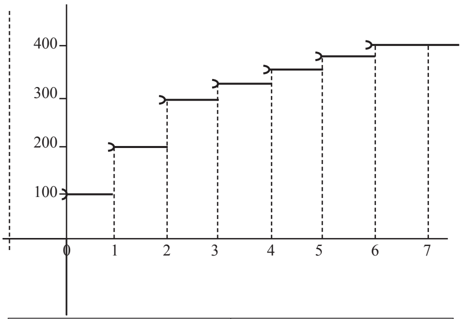
Pour $x \in]6\ ;7]$, $f(x) = 390$.

Pour $x \in]7\ ;+\infty]$, $f(x) = 390$.

b) Pour tout $x \in]0\ ;7]$; $y \in]0\ ;7]$,

$x \geq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$, donc f est croissante sur $]0\ ;7]$.

2) Représentation graphique de f.



Temps (en min)	Montant (en F)
0	0
7	390
2	190
3	260
5	360
10	390

Leçon 12 Homothéties

IV. Exercices
IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

L1 → $\boxed{\text{Vrai}}$
L2 → $\boxed{\text{Faux}}$
L3 → $\boxed{\text{Faux}}$

Exercice 2

L1 → 2 ; L2 → $\frac{1}{5}$;

L3 → $h\left(A, \frac{3}{2}\right)$

L4 → $\overrightarrow{OH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OG}$

Exercice 3

$\overrightarrow{OA'} = -3\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OB'} = -3\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{A'B'}$

Exercice 4

L1 → $\boxed{\text{Faux}}$ L2 → $\boxed{\text{Vrai}}$

L3 → $\boxed{\text{Faux}}$ L4 → $\boxed{\text{Vrai}}$

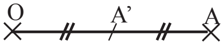
L5 → $\boxed{\text{Vrai}}$.

Exercice 5

L1 → $\boxed{\text{Faux}}$ L2 → $\boxed{\text{Faux}}$

L3 → $\boxed{\text{Faux}}$ L4 → $\boxed{\text{Vrai}}$.

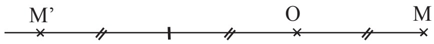
Exercice 6



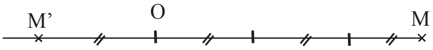
$\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$

Exercice 7

1) $\overrightarrow{OM'} = -2\overrightarrow{OM}$



2) $\overrightarrow{OM'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OM}$

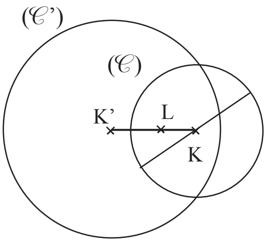


3) $\overrightarrow{OM'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OM}$

4) $\overrightarrow{OM'} = 5\overrightarrow{OM}$

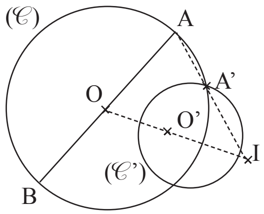
Exercice 8

a) Le centre de ($\mathscr{C}$') est le point K' tel que :
$\overrightarrow{LK'} = -2\overrightarrow{LK}$.
Le rayon de ($\mathscr{C}$') est $|-2| \times 1{,}5$, soit 3 cm.

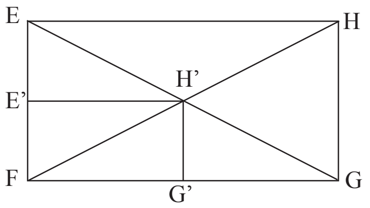


b) Le centre de ($\mathscr{C}$') est le point O' tel que :
$\overrightarrow{IO'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IO}$.

- $A' = h_{(I, \frac{1}{2})}(A) \Leftrightarrow \overrightarrow{IA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IA}$.
- ($\mathscr{C}$') est le cercle de centre O' et de rayon O'A'.



Exercice 9



Exercice 10

L1 → 2 ; L2 → $\frac{1}{5}$;

L3 → $h\left(A, \frac{3}{2}\right)$ L4 → $\overrightarrow{OH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OG}$

Exercice 11

L1 → $\boxed{\text{Faux}}$

L2 → $\boxed{\text{Faux}}$

L3 → $\boxed{\text{Vrai}}$.

Exercice 12

1) $k = \frac{2}{5}$; 2) $k = -\frac{1}{2}$

3) $k = 2$; 4) $k = 5$

Exercice 13

Dans l'énoncé :

- b) $11\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}$ au lieu de $11\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AB}$.
- e) $-\overrightarrow{BA} = 4\overrightarrow{CA}$ au lieu de $-\overrightarrow{CA} = 4\overrightarrow{AC}$.

a) $\overrightarrow{AB} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{7}{5}\overrightarrow{AB}$ et $k = \frac{7}{5}$.

b) $11\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = -\frac{2}{11}\overrightarrow{AB}$
et $k = -\frac{2}{11}$.

c) $-\overrightarrow{AB} = \sqrt{3}\,\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{AB}$
et $k = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $-2\overrightarrow{AB} = 9\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{2}{9}\overrightarrow{AB}$ et $k = \frac{2}{9}$

e) $-\overrightarrow{BA} = 4\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $k = \frac{1}{4}$.

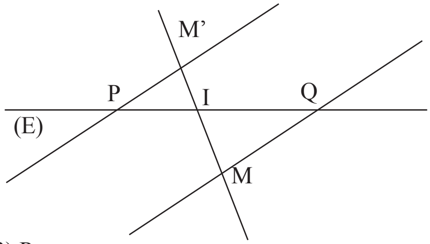
Exercice 14

Le centre est aligné avec les points E et B d'une part et aligné avec les points D et A d'autre part. C'est donc le point C. Le rapport est $-\frac{1}{2}$.

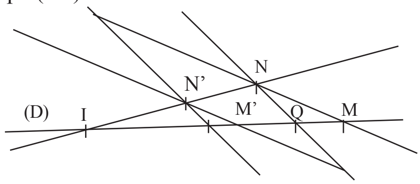
IV.2. Exercices de renforcement

Exercice 15

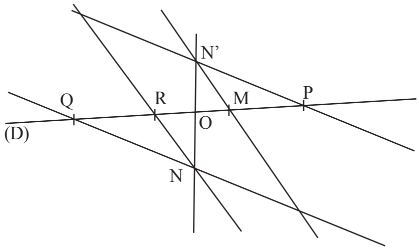
1) Programme
- Trace (IM) ;
- Trace (QM) ;
- Trace la parallèle à (QM) passant par P ;
M'est l'intersection de cette parallèle avec (IM).



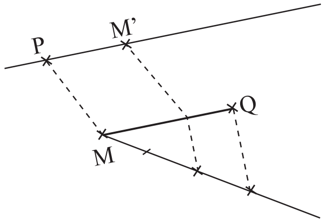
2) Programme
- Prends N ∉ (IM) ;
- Trace (NQ) ;
- Trace la parallèle à (NQ) passant par P ; elle coupe (IN) en N' ;
- Trace la parallèle à (NM) passant par N' ; elle coupe (IM) en M'.



3) Programme
- Prends $N \notin (D)$;
- Comme dans 1), construis N' ;
- Trace (NN') ; elle coupe (D) en O.



4) $h(Q) = P$ et $h(M) = M' \Longrightarrow \overrightarrow{PM'} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{QM}$.



- Subdiviser le segment [MQ] en segments de même longueur.
- Tracer la parallèle à (QM) passant par P.
- Placer sur cette droite le point M' tel que $\overrightarrow{PM'} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{QM}$.

Exercice 16

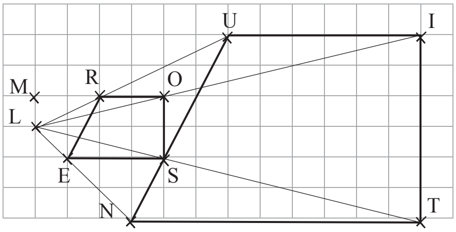
a) $\overrightarrow{CA} = -\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}$

donc $k = \dfrac{1}{6}$

b) $\overrightarrow{BC} + 5\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = -4\overrightarrow{AB}$

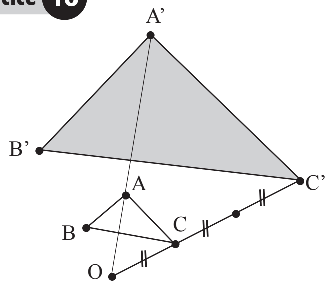
donc $k = -4$

Exercice 17



1) Il s'agit de l'homothétie de centre L et de rapport +3.
2) Il s'agit de l'homothétie de centre L et de rapport $\dfrac{1}{3}$.

Exercice 18



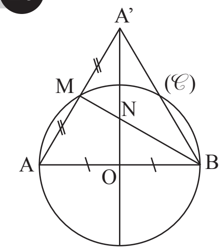
1) On a : $\overrightarrow{OC'} = +3\overrightarrow{OC}$.
L'image de A est A' et celle de B est B'.
L'homothétie a donc pour centre O et pour rapport 3.
2) Le triangle A'B'C' est rectangle en A' car une homothétie conserve l'orthogonalité.
3) • À l'aide de Pythagore, on trouve BC = 10.
Le périmètre de ABC est donc 24 cm.
• L'aire de ABC est $\dfrac{1}{2}$ AB × AC, soit 24 cm^2.
4) • Le périmètre de A'B'C' est 3 × 24, soit 72 cm.
• L'aire de A'B'C' est $3^2 \times 24$, soit 216 cm^2.

Exercice 19

a) L'image de E est E. Donc le centre est E.
b) IE = 5EC, donc IE = 15.
c) De même, SA = 27.
d) mes$\widehat{AIN}$ = 50°.

IV.3. Exercices d'approfondissement

Exercice 20



1) On a : $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AM}$.
A' décrit le cercle ($\mathscr{C}$'), image de ($\mathscr{C}$) par l'homothétie $h_{(A,2)}$.

2. a) (A'O) est une médiane du triangle AA'B car O est le milieu de [AB].
(BM) est une médiane du triangle AA'B car M est le milieu de [AA']. N n'étant qu'une intersection de ces deux médianes est donc le centre de gravité du triangle AA'B.

b) D'après a), $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BM}$.

Donc N décrit le cercle ($\mathscr{C}$'')image de ($\mathscr{C}$) par l'homothétie $h_{(B, \frac{1}{3})}$.

Exercice 21

1) On a :M' = h(M) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{KM'} = 2\overrightarrow{KM}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' + 1 = 2(x+1) \\ y' - 3 = 2(y-3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = 1 + 2x \\ y' = -3 + 2y \end{cases}$$

2) T' a pour coordonnées (7 ; 3).

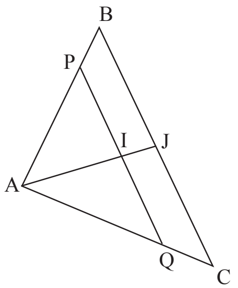
3) h(F) = E. On résout $\begin{cases} 1 + 2x = -3 \\ -3 + 2y = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Donc F a pour coordonnées (−2 ; 2).

Exercice 22

1. a) Construisons le triangle ABC.



b) Construisons les points P , Q , I et J. (Voir a).).

2) $h = h_{(A\,;\,\frac{3}{4})}$.

On a : $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$. Donc h(B) = P.

$\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

Donc h(C) = Q.

3) h([BC]) = [PQ].

J milieu de [BC] ; I, milieu de [PQ].

Donc h(J) = I. Ce qui prouve que A, I, J alignés.

Propriété : une homothétie conserve le milieu.

4) h(B) = P et h(C) = Q, donc $\overrightarrow{PQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{PQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} \Rightarrow$ (PQ) // (BC).

Exercice 23

En utilisant la définition du barycentre, on obtient :

a) $\overrightarrow{AC} = -\frac{7}{4}\overrightarrow{AB}$. Donc $k = -\frac{7}{4}$.

b) $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Donc $k = \frac{1}{3}$.

Exercice 24

On a : $\overrightarrow{MM'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM'} = \frac{7}{4}\overrightarrow{AM}$.
L'application est donc l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{7}{4}$.

Exercice 25

1) BD = 5 (Propriété de Pythagore).

2) mes$\widehat{FDB}$ = 90°.

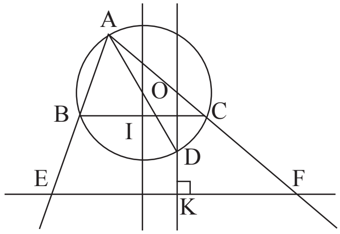
3) Le rapport de l'homothétie est $\frac{1,2}{3} = 0,4$.

$\mathscr{A}$(A'B'F'D') = $\mathscr{A}$(A'B'O') + $\mathscr{A}$(O'F'B')

$= 0,4^2\left(\frac{12}{2} + \frac{25}{2}\right)$ cm² = 2,96 cm².

Exercice 26

1)



2) O étant le milieu de segment [AD], on a :

$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$. Donc $h(O) = D$.

3) • C'est la droite parallèle à (IO) et passant par D.

• I est le milieu de [BC] et OB = OC, donc (IO) est la médiatrice de [BC]. Par conséquent (IO) $\perp$ (BC).

Aussi, $h(B) = E$ et $h(C) = F$, doù (BC) // (EF).

Comme (IO) $\perp$ (BC) et (BC) // (EF), on a (IO) $\perp$ (EF).

4. a) (BC) // (EF) et I $\in$ (BC), donc h(I) $\in$ (EF).

(OI) $\perp$ (EF) et (DK) $\perp$ (EF), donc (OI) // (DK).

De plus I $\in$ (OI), donc h(I) $\in$ (DK).

Finalement, h(I) = (EF) $\cap$ (DK), donc h(I) = K.

b) De h([BC]) = [EF], I milieu de [BC] et h(I) = K, on déduit que K est le milieu du segment [EF].

IV.4. Situation d'évaluation

Exercice 27

1) Soit S' = h(S). On a : $\overrightarrow{OS'} = 2\overrightarrow{OS}$.

Placer le point S'.

2) Construire les images A', B', C', D', E', F', G', H' et I' respectives de A, B, C, D, E, F, G, H et I par h.

Puis terminer la construction en traçant les segments [A'B'], [B'C'], ...

Leçon 13 Rotations

IV. Exercices

IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

- L'angle est Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IN}}\right)$.
- Le point invariant est I.

Exercice 2

Dans l'énoncé :

• 1ère phrase : Sur la figure ci-contre, ABCD est un carré de centre O.

• 2. b) " B en D " et non " J en D ".

1) Entourer la réponse c).

2) Entourer la réponse b).

Exercice 3

• Dans l'énoncé, remplacer B par A dans la question 2).

1. a) L'image de B est A'.

2) AA'B est un triangle équilatéral de sens direct et de centre O.

Donc $\begin{cases} OA = OA' \\ \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OA}}\right) = -\dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$

Donc $r(A') = A$.

Exercice 4

A'B' = AB ; $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'}}\right) = \dfrac{\pi}{5}$

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}}\right) = \dfrac{\pi}{5}$

Exercice 5

L1 → $\boxed{\text{Vrai}}$; L2 → $\boxed{\text{Vrai}}$

L3 → $\boxed{\text{Vrai}}$; L4 → $\boxed{\text{Vrai}}$

L5 → $\boxed{\text{Faux}}$; L6 → $\boxed{\text{Vrai}}$

L7 → $\boxed{\text{Vrai}}$.

Exercice 6

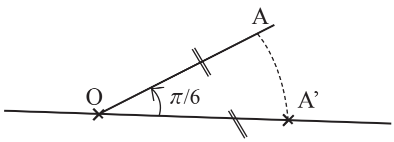
L1→ $\boxed{\text{Vrai}}$; L2→ $\boxed{\text{Faux}}$

L3→ $\boxed{\text{Vrai}}$; L4→ $\boxed{\text{Faux}}$

L5→ $\boxed{\text{Faux}}$; L6→ $\boxed{\text{Vrai}}$

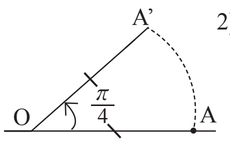
L7→ $\boxed{\text{Faux}}$; L8→ $\boxed{\text{Vrai}}$.

Exercice 7

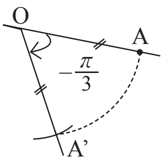


Exercice 8

1)

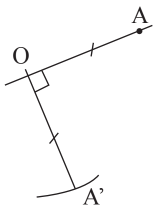


2)



3)

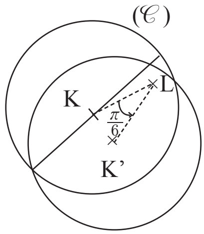
4)



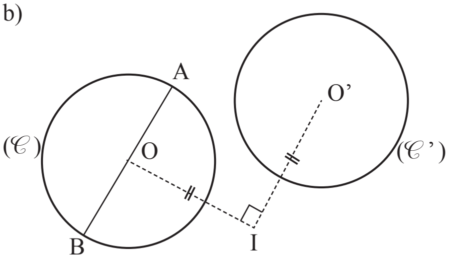
Exercice 9

a) $K' = r_{(L,\ \frac{\pi}{6})}(K)$

$(\mathscr{C}')$ est le cercle
de centre K' et
de même rayon que $(\mathscr{C})$



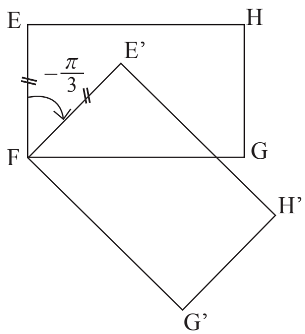
b)



• $O' = r_{(I,\ \frac{-\pi}{2})}(O)$

• $(\mathscr{C}')$ est le cercle de centre O' et de même rayon que $(\mathscr{C})$.

Exercice 10



Exercice 11

L1 → A

L2 → R

L3 → $\dfrac{2\pi}{3}$.

Exercice 12

1) OA'= OA et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}}) = -\dfrac{\pi}{3}$.

Donc $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$.

2) OA'= OA et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}}) = -\dfrac{\pi}{2}$.

Donc $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$.

3) OA'= OA et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}}) = -\dfrac{\pi}{2}$.

Donc $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$.

4) OA'= OA et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}}) = \dfrac{2\pi}{3}$.

Donc $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$.

Exercice 13

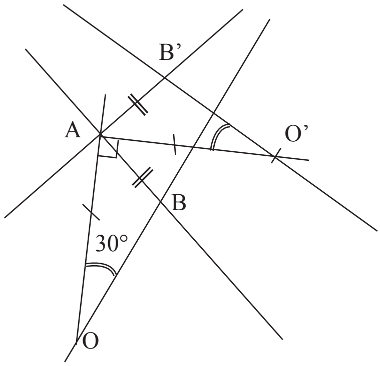
Il s'agit de la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

En effet, $\begin{cases} OJ = OK \\ \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OJ}}) = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

et $\begin{cases} OL = OI \\ \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OL}}) = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

IV.2. Exercices de renforcément

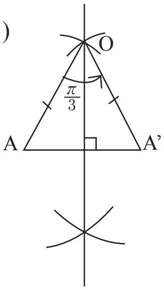
Exercice 14



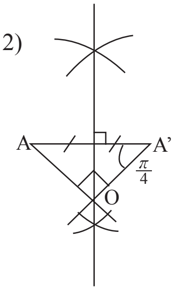
2) Le centre de la rotation est A, donc A' = A. D'après la propriété fondamentale des rotations, on a : mes $\widehat{AO'B'}$ = mes $\widehat{AOB}$ = 30°.

Exercice 15

1)

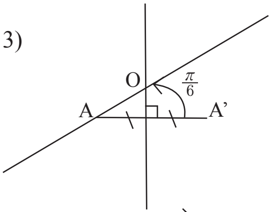


2)

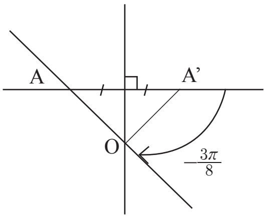


OA = OA' = AA'

3)

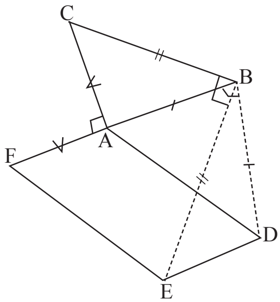


4)



Exercice 16

1)



2) a) Soit $r = r_{(B, \frac{\pi}{2})}$ et $r' = r_{(A, \frac{\pi}{2})}$.

• On a r(A) = D et r(C) = E, donc DE = AC et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DE}}) = \dfrac{\pi}{2}$.

• On a r'(A) = A et r'(C) = F, donc AF = AC et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF}}) = \dfrac{\pi}{2}$.

• De DE = AC et AF = AC, on déduit que DE = AF.

• On a $(\widehat{\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{AF}}) = (\widehat{\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{AC}}) + (\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF}})$

$= -(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DE}}) + (\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF}})$

Or Mes$(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DE}})$ = Mes$(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF}})$,

donc Mes $(\widehat{\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{AF}}) = 0$.

2) b) Comme Mes $(\widehat{\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{AF}}) = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires. Donc les droites (DE) et (AF) sont parallèles. Aussi DE = AF. Ainsi les segments [AF] et [DE] ont la même longueur et ont des supports parallèles. On en déduit que le quadrilatère DAFE est un parallélogramme.

IV.3. Exercices d'approfondissement

Exercice 17

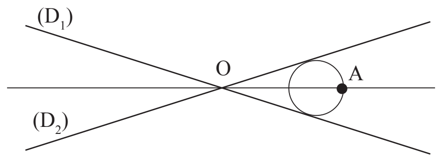
Le triangle EFG est isocèle en G de sens direct puisque Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EG}}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Les angles orientés $\left(\widehat{\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EG}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{FG}, \overrightarrow{FE}}\right)$ ont la même mesure.

Il en résulte que Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{GE}, \overrightarrow{GF}}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

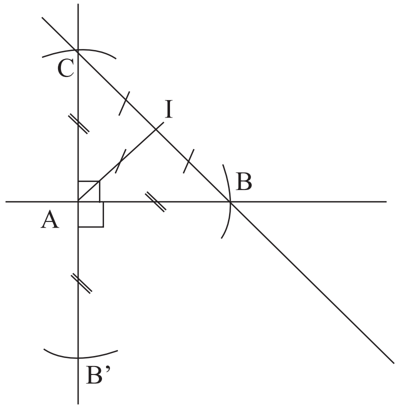
L'angle de la rotation est $\frac{2\pi}{3}$.

Exercice 18



Exercice 19

1) Construisons le triangle ABC rectangle isocèle.



2. a) ABC est un triangle rectangle et I est le milieu de l'hypoténuse [BC]. Donc I est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. D'où IA = IB = IC.

On en déduit que le triangle ICA est isocèle en I.

• Dans le triangle ABC rectangle et isocèle en A, on a mes $\widehat{C}$ = mes $\widehat{B}$ et mes $\widehat{C}$ + mes $\widehat{B}$ = 90°.

Donc mes $\widehat{C}$ = 45°.

D'où Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Comme $I \in [CB]$, on a Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CI}}\right) = \frac{\pi}{4}$.

b) Le triangle ICA est rectangle isocèle et Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CI}}\right) = \frac{\pi}{4}$. Donc il est de sens direct.

3)a) r (A) = B, r (C) = A et r' (C) = B.

b) Voir figure

c) $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB'}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}}\right)$

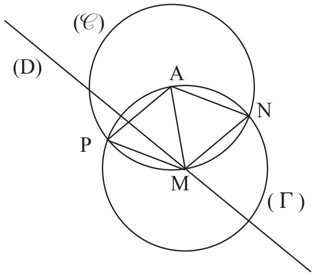
Or Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}\right) = -\frac{\pi}{2}$ car r'(C) = B et

Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}}\right) = -\frac{\pi}{2}$ car r'(B) = B'.

Donc Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB'}}\right) = -\pi$.

On en déduit que les points C, A, B' sont alignés.

Exercice 20

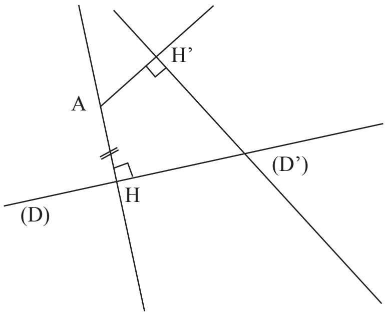


1) P et N sont sur le cercle de centre A, de rayon AM et sur le cercle de centre M, de rayon AM. A est sur le cercle de centre M, de rayon AM. Finalement, AN = NM = AM et AN = NM = AM. Les deux triangles sont donc équilatéraux.

2) La rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ envoie M et N.
Donc N décrit l'image (D) par la rotation r.

Exercice 21

1)



2) Justification : (AH) ⊥ (D).
L'image de la droite (AH) par la rotation r est la droite (AH'). H ∈ (D) et H' = r(H). Donc l'image de la droite (D), c'est la droite perpendiculaire à (AH') en H' puisqu'une rotation conserve l'orthogonalité et le contact.

IV.4. Situations d'évaluation

Exercice 22

• Dans l'énoncé, remplacer $\frac{\pi}{2}$ par $\frac{\pi}{3}$ sur la 2e ligne.

1) D'après les données, le triangle MCD est isocèle de sommet M. Les angles inscrits dans le cercle, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{AMC}$ interceptent le même arc. Ils ont donc la même mesure. Donc mes $\widehat{AMC} = 60°$.

Un triangle isocèle qui a un angle de 60° est équilatéral. Donc le triangle DMC est équilatéral.
2) Les triangles CBA et CMD sont équilatéraux de sens indirect.

Donc $\begin{cases} CD = CM \\ \text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CD}}) = -\frac{\pi}{3} \end{cases}$

et $\begin{cases} CA = CB \\ \text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}}) = -\frac{\pi}{3} \end{cases}$

Il en résulte que F(M) = D; F(B) = A et comme F(C) = C, on obtient le résultat.

3) On a : MA = MD + DA. Or DA = MB et MD = MC d'après les questions précédentes. Donc MA = MB + MC.

Exercice 23

1) On a r(A) = B. D'autre part AI = BJ et

Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{BJ}}\right) = \frac{\pi}{2}$.

D'après la propriété fondamentale des rotations, on a r(I) = J.

2) La rotation r envoie A en B, B en C, C en D, D en A et I en J.
Donc (BI) ⊥ (CJ) et (IC) ⊥ (DJ). Il en résulte que les droites (IH) et (JH) sont des hauteurs du triangle CIJ.
Donc H est l'orthocentre du triangle CIJ.

Leçon 14 Inéquations dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

IV. Exercices

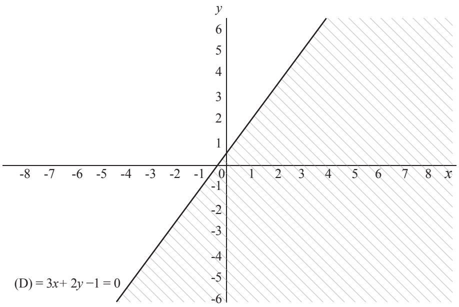
IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

1) Résolution graphique de l'inéquation linéaire $2y - 3x \leq 1$.

On trace la droite (D) d'équation $2y - 3x - 1 = 0$

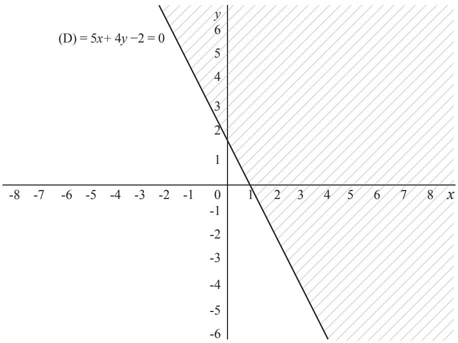
Les coordonnées du point O vérifient l'inéquation $2y - 3x \leq 1$ d'où l'ensemble des solutions de l'inéquation linéaire $2y - 3x \leq 1$ est l'ensemble des couples de coordonnées des points appartenant à la partie hachurée y compris la droite (D).



2) Résolution graphique de l'inéquation linéaire $4y + 5x \geq 2$.

On trace la droite (L) d'équation : $4y + 5x - 2 = 0$

Les coordonnées du point O ne vérifient pas l'inéquation $4y + 5x \geq 2$ d'où l'ensemble des solutions de l'inéquation linéaire $4y + 5x \geq 2$ est l'ensemble des couples de coordonnées des points appartenant la partie hachurée y compris la droite (L).

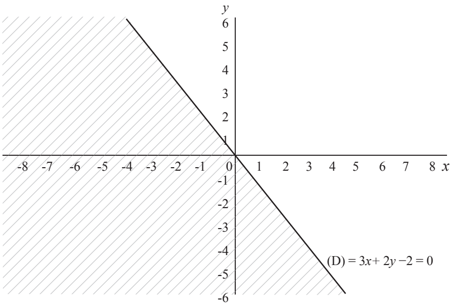


Exercice 2

1) Résolution graphique de l'inéquation linéaire $3x + 2y < 1$.

On trace la droite (D) d'équation $3x + 2y - 1 = 0$

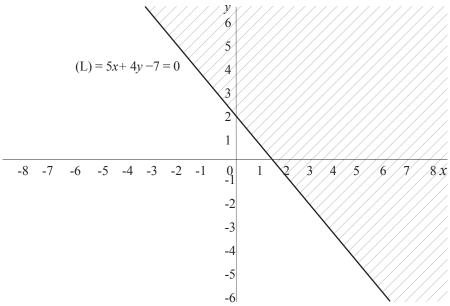
Les coordonnées du point O vérifient l'inéquation $3x + 2y < 1$ d'où l'ensemble des solutions de l'inéquation linéaire $3x + 2y < 1$ est représentée par la partie hachurée privée de la droite (D).



2) Résolution graphique de l'inéquation linéaire $4y + 5x > 7$.

On trace la droite (L) d'équation $4y + 5x - 7 = 0$

Les coordonnées du point O ne vérifient pas l'inéquation $4y + 5x > 7$ d'où l'ensemble des solutions de l'inéquation linéaire $4y + 5x > 7$ est représentée par la partie hachurée privée de la droite (L).



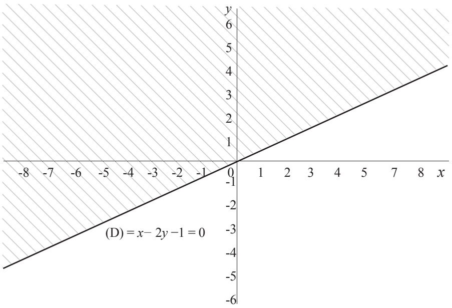
Exercice 3

1) Résolution graphique de l'inéquation linéaire $x - 1 \leq 2y$.

On trace la droite (D) d'équation $x - 2y - 1 = 0$

Les coordonnées du point O vérifient

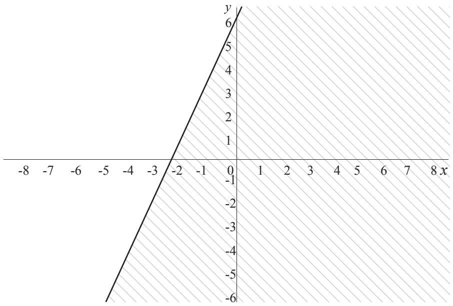
l'inéquation $x - 1 \leq 2y$ d'où l'ensemble des solutions de l'inéquation linéaire $x - 1 \leq 2y$ est représentée par la partie hachurée y compris la droite (D).



2) Résolution graphique de l'inéquation linéaire $3x + 7 \geq y$.

On trace la droite (L) d'équation $3x - y + 7 = 0$

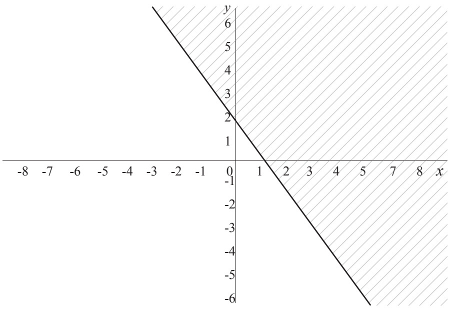
Les coordonnées du point O vérifient l'inéquation $3x + 7 \geq y$ d'où l'ensemble des solutions de l'inéquation linéaire $3x + 7 \geq y$ est représentée par la partie hachurée *y* compris la droite (L).



3) Résolution graphique de l'inéquation linéaire $2y + 3x - 5 > 0$.

On trace la droite (Δ) d'équation $2y + 3x - 5 = 0$

Les coordonnées du point O ne vérifient pas l'inéquation $2y + 3x - 5 > 0$ d'où l'ensemble des solutions de l'inéquation linéaire $2y + 3x - 5 > 0$ est représentée par la partie hachurée privée de la droite (T).



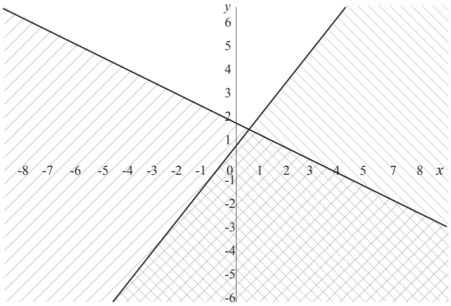
Exercice 4

1) Résolution graphique du système de deux inéquations linéaires suivant :

$$(S_1) : \begin{cases} x + 2y < -3 \\ 3x - 2y \geq 2 \end{cases}$$

La méthodologie est analogue à celle appliquée aux exercices 1, 2 et 3.

L'ensemble des solutions de (S_1) est l'ensemble des couples de coordonnées des points appartenant à la partie hachurée deux fois.

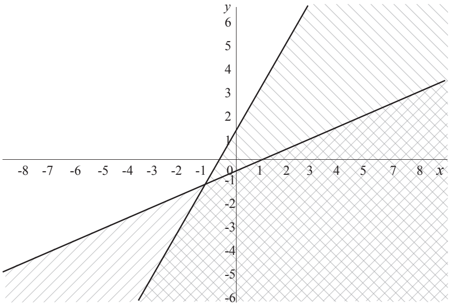


2) Résolution graphique du système de deux inéquations linéaires suivant :

$$(S_2) : \begin{cases} 3x - 5y \geq 1 \\ -2x + y < 2 \end{cases}$$

La méthodologie est représentée par analogue à celle appliquée aux exercices 1, 2 et 3.

L'ensemble des solutions de (S_2) est l'ensemble des couples de coordonnées des points appartenant à la partie hachurée deux fois.

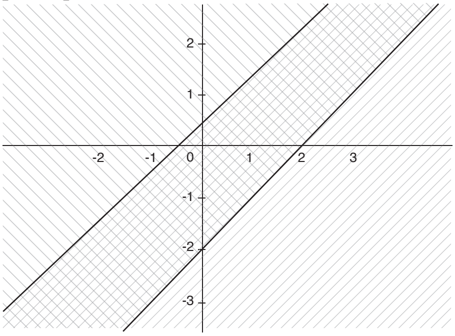


Exercice 5

1) Résolution graphique du système de deux inéquations linéaires suivant :

$$(S_1) : \begin{cases} x - y \leq 2 \\ -2x + 2y \leq 1 \end{cases}$$

La méthodologie est analogue à celle appliquée aux exercices 1, 2 et 3.
L'ensemble des solutions de (S_2) est représenté par la partie hachurée deux fois.

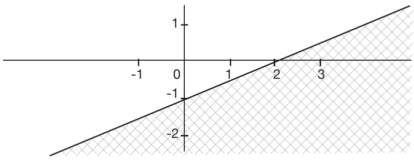


2) Résolution graphique du système de deux inéquations linéaires suivant :

$$(S_2) : \begin{cases} x - 2y \leq 2 \\ -x + 2y \leq -2 \end{cases}$$

La méthodologie est analogue à celle appliquée aux exercices 1, 2 et 3.

L'ensemble des solutions de (S_2) est représenté par la partie hachurée deux fois.
C'est la droite d'équation $x - 2y = 2$.



Exercice 6

1) Résolution graphique du système de deux inéquations linéaires suivant :

$$(S_1) : \begin{cases} 2x + 3y \leq 1 \\ x + \frac{3}{2}y > 2 \end{cases}$$

La méthodologie est analogue à celle appliquée aux exercices 1, 2 et 3.

Ici l'ensemble des solutions est l'ensemble vide car il n'y a pas de partie hachurée deux fois.

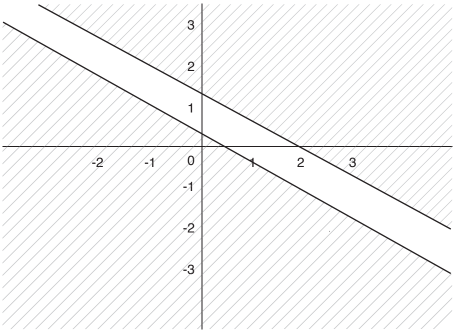
2) Résolution graphique du système de deux inéquations linéaires suivant :

$$(S_2) : \begin{cases} x + y - 5 \leq 0 \\ \frac{-x}{4} + y > 1 \end{cases}$$

La méthodologie est analogue à celle appliquée aux exercices 1, 2 et 3.

L'ensemble des solutions de (S_2) est représenté par la partie hachurée deux fois.

Ici l'ensemble des solutions est l'ensemble vide car il n'y a pas de partie hachurée deux fois.



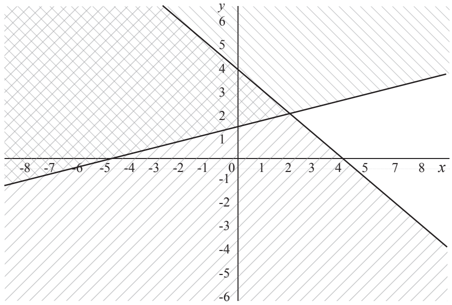
2) Résolution graphique du système de deux inéquations linéaires suivant :

$$(S_2) : \begin{cases} x + y - 5 \leq 0 \\ \frac{-x}{4} + y > 1 \end{cases}$$

La méthodologie est analogue à celle appliquée aux exercices 1, 2 et 3.

L'ensemble des solutions de (S_2) est représenté par la partie hachurée deux fois.

MATHS 2nde C_CORRIGE_CAHIER_27102021.indd 84 27/10/2021 13:57

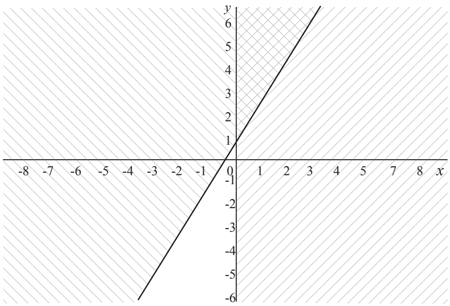


Exercice 7

1) Résolution graphique du système de deux inéquations linéaires suivant :

$$(S_1) : \begin{cases} 4x - 2y < 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

La méthodologie est analogue à celle appliquée aux exercices 1, 2 et 3.
L'ensemble des solutions de (S_1) est représenté par la partie hachurée en deux couleurs.

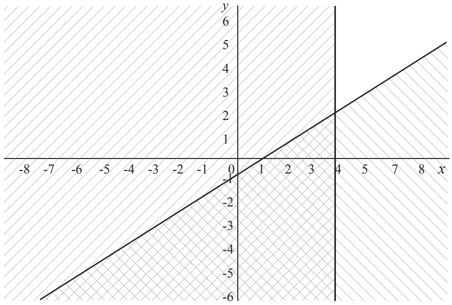


2) Résolution graphique du système de deux inéquations linéaires suivant :

$$(S_2) : \begin{cases} 2x - 3y \geq 3 \\ -2 + x < 2 \end{cases}$$

La méthodologie est analogue à celle appliquée aux exercices 1, 2 et 3.

L'ensemble des solutions (S_2) est représenté par la partie hachurée en deux couleurs.



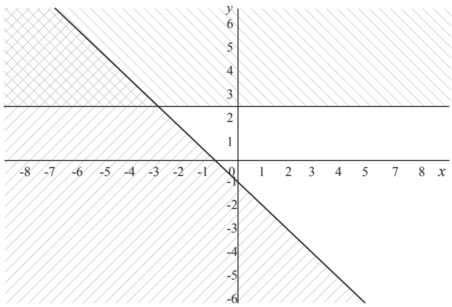
Exercice 8

1) Résolution graphique du système de deux inéquations linéaires suivant :

$$(S_1) : \begin{cases} x + y < -1 \\ y \geq 2 \end{cases}$$

La méthodologie est analogue à celle appliquée aux exercices 1, 2 et 3.

L'ensemble des solutions de (S_1) est représenté par la partie hachurée en deux couleurs.

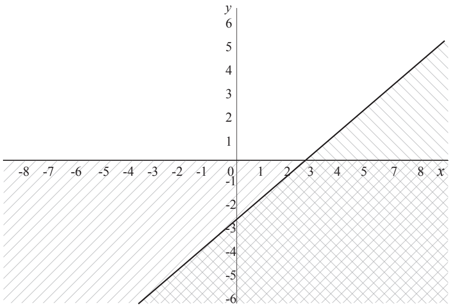


2) Résolution graphique du système de deux inéquations linéaires suivant :

$$(S_1) : \begin{cases} x - y \geq 4 \\ y < 0 \end{cases}$$

La méthodologie est analogue à celle appliquée aux exercices 1, 2 et 3.

L'ensemble des solutions de (S_1) est représenté par la partie hachurée en deux couleurs.



Exercice 9

Écrivons une inéquation qui traduit la situation.

$5000x + 7000y \leq 40000$ ou $5x + 7y \leq 40$.

Exercice 10

Soit x le nombre de chemises du type 1 et y le nombre de chemises du type 2. On a :

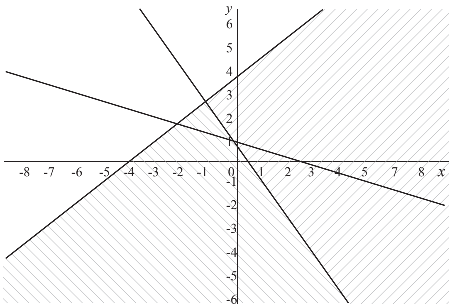
$$\begin{cases} 1,2x + 3y \leq 36 \\ 12x + 6y \leq 120. \end{cases}$$

Exercice 11

1) Résolution graphique du système

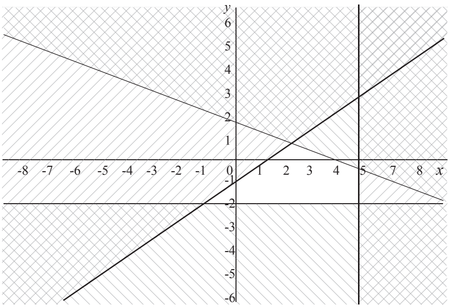
$$\begin{cases} 3x + 2y - 5 \geq 4 \\ x - y + 4 < 0 \\ x + 3y - 4 < 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système est representé par la partie hachurée en trois couleurs.



2) Résolution graphique du système

$$\begin{cases} 3x - 2y - 7 \geq 0 \\ 2x + 5y < 9 \\ y - 2 < 0 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

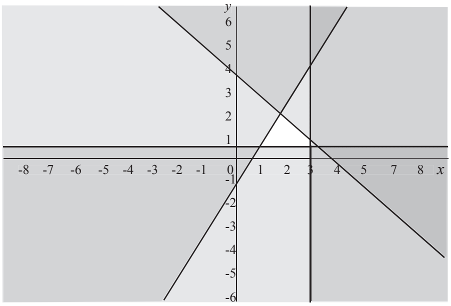


L'ensemble des solutions du système est représenté par la partie où passent les quatre couleurs.

3) Résolution graphique du système

$$\begin{cases} 2x - y \geq 2 \\ x - 3 \leq 0 \\ 2y - 1 \geq 0 \\ 4 - x \geq y \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système est représenté par la partie hachurée par les quatre couleurs.



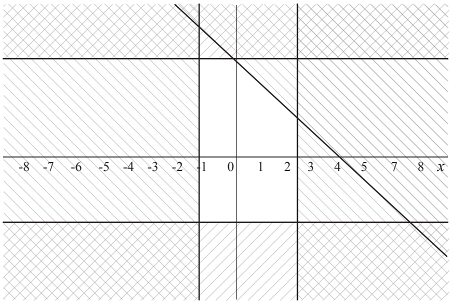
4) Résolution graphique du système

$$\begin{cases} x + y - 5 \leq 0 \\ -3 \leq y \leq 4 \\ -1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Le système $\begin{cases} -3 \leq y \leq 4 \\ -1 \leq x \leq 3 \end{cases}$ a pour solution l'intérieur d'un parallélogramme (y compris les côtés) dont les côtés ont pour supports les droites d'équation : $y = 4$, $y = -3$, $x = 3$ et $x = -1$

La solution est l'intersection de la solution de l'inéquation $x + y - 5 \leq 0$ et de l'intérieur du parallélogramme décrit ci-dessus.

C'est la partie non hachurée sur le graphique.



IV.2. Exercices de renforcement

Exercice 12

1. La droite (D) a pour équation : $y = 0{,}5x - 1$ ou $x - 2y - 2 = 0$

2. Le point O n'appartient pas à la représentation de l'ensemble solution d'où la partie hachurée est la représentation de l'ensemble solution de l'inéquation $x - 2y - 2 \geq 0$.

Exercice 13

1. Une équation de la droite (D) est :

$$y = \frac{2}{3}x + 2 \text{ ou } 2x - 3y + 6 = 0$$

2. Le point O n'appartient pas à la représentation de l'ensemble solution d'où la partie hachurée est la représentation de l'ensemble solution de l'inéquation $2x - 3y + 6 \leq 0$.

Exercice 14

La partie non hachurée comprise entre les droites (D) et (L) est la représentation de l'ensemble solution du système d'inéquations

$$\begin{cases} -0{,}5x + y - 1 > 0 \\ -x - 2y + 4 > 0 \end{cases}$$

ou $\begin{cases} x - 2y + 2 < 0 \\ x + 2y - 4 < 0 \end{cases}$

IV.3. Exercices d'approfondissement

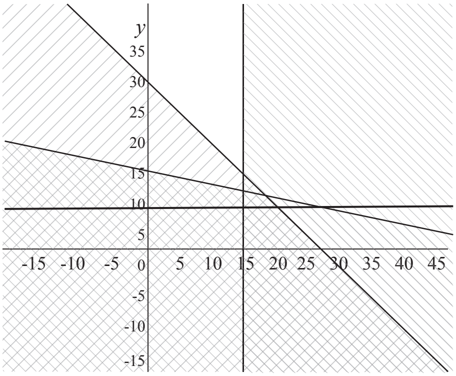
Exercice 15

Soit x le nombre de containers de matériel A et y le nombre de containers de matériel B.

Les différentes possibilités d'expédition sont les couples d'entiers naturels $(x\,;\,y)$ solutions du système d'inéquations

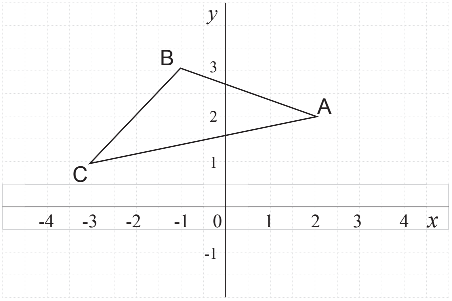
$$\begin{cases} x + y \leq 30 \\ 0{,}6x + 3y \leq 42 \\ x \geq 15 \\ y \geq 8 \end{cases}$$

Ce sont les coordonnées entières des points qui se trouvent où il y a les quatre couleurs.



Exercice 16

1) Voir graphique.



2) (AB) : $x + 3y - 8 = 0$; (AC) : $-x + 5y - 8 = 0$ et (BC) : $-2x + 2y - 8 = 0$.

3) L'intérieur du triangle ABC est la solution du système d'inéquations linéaires

$$\begin{cases} x + 3y - 8 \leq 0 \\ -x + 5y - 8 \geq 0 \\ -2x + 2y - 8 \leq 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x + 3y - 8 \leq 0 \\ -x + 5y + 8 \leq 0 \\ x - y + 4 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 17

Type A : Argent ⟶ 3,6 g
Zinc ⟶ 1,5 g
Travail ⟶ 5 h

Type B : Argent ⟶ 4,5 g
Zinc ⟶ 1,25 g
Travail ⟶ 5 h

- masse totale d'argent : 120 g
- masse totale de zinc : 80 g
- temps de travail : 50 h

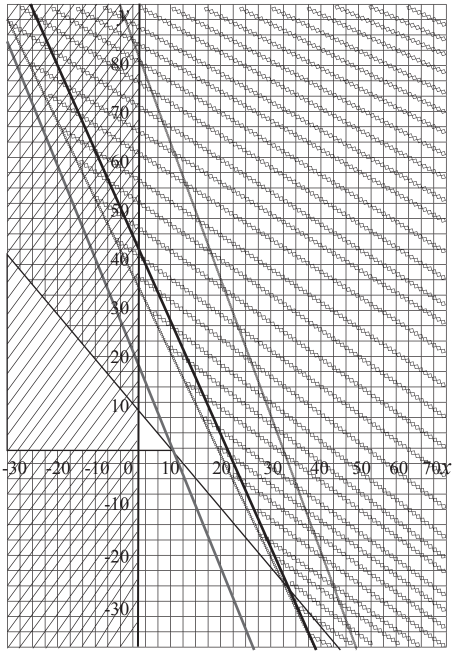
Soit x le nombre de bijoux de type A et y le nombre de bijoux de type B.

On a :

$$(S) : \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3,6x + 4,5y \leq 120 \\ 1,5x + 1,25y \leq 80 \\ 5x + 5y \leq 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 12x + 15y \leq 400 \\ 3x + 2,5y \leq 160 \\ x + y \leq 10 \end{cases}$$

2) $b = 5000x + 2500y$

3) a) Voir graphique



b) (L) : $5000x + 2500y = 100\,000$

(L) : $2x + y = 40$

4. a) Le bénéfice b est tel que : $b = 5000x + 2500y$ (L) a pour équation : $5000x + 2500y = 100\,000$ ou $2x + y = 40$ et correspond à un bénéfice de 100 000 Frs.

Lorsque le bénéfice b est réalisable et varie, l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;y)$ tels que $5000x + 2500y$ est constitué de droites parallèles à (L) et qui ont des points communs avec la solution de (S) (c'est-à-dire la partie non hachurée). Toutes ces droites coupent

l'axe (OJ) en un pont (0 ; $\frac{b}{2500}$) donc b est maximal pour la droite dont l'ordonnée du point d'intersection avec (OJ) est la plus grande.
Graphiquement on obtient la droite (D) , elle a en commun avec la solution de (S) le point de coordonnée (10 ; 0)
Pour réaliser un bénéfice maximal il faut fabriquer 10 bijoux de type A et 0 bijou de type B.
b) le bénéfice maximal est :
$b = 5000 \times 10 + 2500 \times 0 = 50\,000$ FCFA

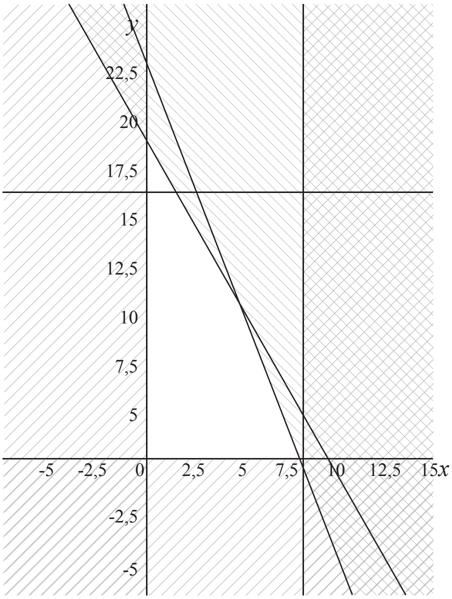
IV.4. Situation d'évaluation

Exercice 18

1. $\begin{cases} 0 \leq x \leq 8 \\ 0 \leq y \leq 15 \\ 55000\,x + 22000y \leq 506000 \\ 35x + 20y \geq 370 \end{cases}$

ou $\begin{cases} 0 \leq x \leq 8 \\ 0 \leq y \leq 15 \\ 55x + 22y \leq 506 \\ 7x + 4y \geq 74 \end{cases}$

2. Choix des unités : 2,5 unités pour 1 cm sur les deux axes.
L'ensemble solution est l'ensemble des couples de coordonnées des points appartenant à la partie non hachurée.



3. Soit A, B et C les points de couples de coordonnées respectifs (7 ; 7), (4 ; 12) et (2 ; 14). Il n'y a que le point C seulement qui se trouve dans la partie non hachurée. Donc c'est dans le 3ème cas que l'entreprise « Sabari » peut embaucher pour satisfaire ses besoins.

Leçon 15 Statistique

IV. Exercices
IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

L1 → $\boxed{\text{Faux}}$; L2 → $\boxed{\text{Vrai}}$.

Exercice 2

L1 → $\boxed{\text{Vrai}}$; L2 → $\boxed{\text{Faux}}$;

L3 → $\boxed{\text{Faux}}$.

Exercice 3

Modalités	0	1	2	3	4
Effectifs	6	10	8	14	10
Effectifs cumulés croissants	6	16	24	38	48

Exercice 4

Modalités	[0;5[	[5;10[	[10;15[	[15;20[	[20;25[
Effectifs	08	07	15	20	12
Effectifs cumulés décroissants	62	54	47	32	12

Exercice 5

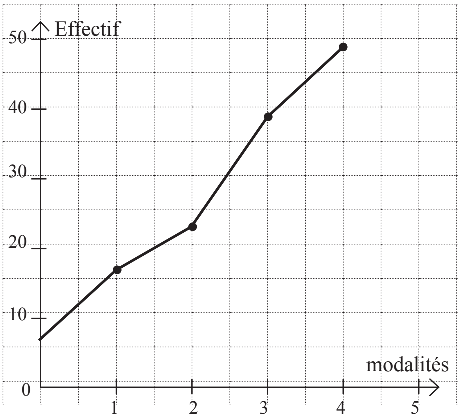
• Dans l'énoncé, sur la dernière ligne du tableau, c'est :
Fréquences cumulées croissantes.

Modalités	[5 ;7[	[7 ;9[	[9 ;11[	[11 ;13[
Fréquences (en %)	22	29,5	23	25,5
Fréquences cumulées croissantes	22	51,5	74,5	100

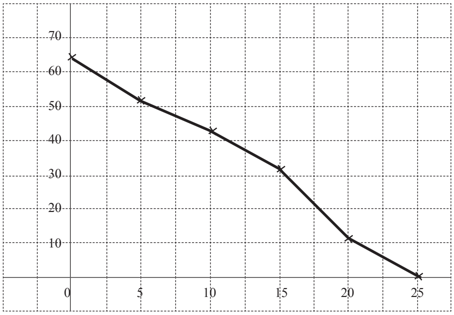
Exercice 6

Modalités	–10	–5	0	5
Fréquences	0,2	0,34	0,2	0,26
Fréquences cumulées décroissantes	1	0,8	0,46	0,26

Exercice 7



Exercice 8



Exercice 9

Exercice 10

• Dans l'énoncé,

1ère ligne : $\overline{x} = \dfrac{n_1x_1 - n_2x_2 - ... - n_px_p}{n_2 + n_2 + ... + n_p}$

2ème ligne : $\overline{x} = \dfrac{n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_px_p}{n_2 + n_2 + ... + n_p}$

L1 → $\boxed{\text{Faux}}$; L2 → $\boxed{\text{Vrai}}$;

L3 → $\boxed{\text{Faux}}$; L4 → $\boxed{\text{Faux}}$.

Exercice 11

- 1ère ligne : La médiane est 7.
  La moyenne est 6.
- 2ème ligne : La médiane est 9.
- 3ème ligne : La médiane est 10.
  La moyenne est 8.

Exercice 12

L1 → A.
L2 → B.
L3 → B.

Exercice 13

L'effectif total est 48 et $\dfrac{48}{2} = 24$. Or le point du polygone d'ordonnée 24 a pour abscisse 2. Donc la médiane est 2.

Exercice 14

La médiane est l'abscisse du point du polygone dont l'ordonnée est 50. Graphiquement, la médiane est 8,8.

Exercice 15

• Dans l'énoncé,

3ème ligne :

$$\frac{n_1\left|x_1 + \overline{x}\right| - n_2\left|x_2 + \overline{x}\right| - ... - n_p\left|x_p + \overline{x}\right|}{n_1 + n_2 + ... + n_p}$$

De haut en bas, on a :

F – V – F – V – F – F – V – F – V.

Exercice 16

De haut en bas, on a :
F – F – V – F – V – F.

Exercice 17

L1 → B ; L2 → C ; L3 → C.

IV.2. Exercices de renforcement

Exercice 18

1) Médiane : $M_e = \dfrac{9 + 10}{2} = 9{,}5$.

2) Moyenne : $\dfrac{64}{6} \simeq 10{,}67$.

Exercice 19

1) Médiane : 16.

2) Moyenne : $\dfrac{69}{7} \simeq 9{,}857 \simeq 10$.

Écart type :

x_i	25	–9	21	16	20	11	–15	
x_i^2	625	81	441	256	400	121	225	T= 2149

$$e_T = \sqrt{\frac{T}{7} - \overline{x}^2} = \sqrt{\frac{2149}{7} - 10^2} = 14{,}387.$$

Exercice 20

1) $\overline{X} = -8 \times 0{,}1 - 0{,}5 \times 0{,}3 + 2 \times 0{,}5 + 7 \times 0{,}1$

$\overline{X} = -0{,}8 - 0{,}15 + 1 + 0{,}7$

$\overline{X} = 0{,}75.$

2) $(-8)^2 \times 0{,}1 + (-0{,}5)^2 \times 0{,}3 + 2^2 \times 0{,}5 + 7^2 \times 0{,}1 - 0{,}75^2$

$= 6{,}4 + 0{,}075 + 2 + 4{,}9 - 0{,}5625$

$= 12{,}8125.$

3) $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{12{,}8125} \simeq 3{,}58.$

4) $e = |-0{,}8 - 0{,}75| \times 0{,}1 + |-0{,}5 - 0{,}75| \times 0{,}3 + |2 - 0{,}75| \times 0{,}5 + |7 - 0{,}75| \times 0{,}1$

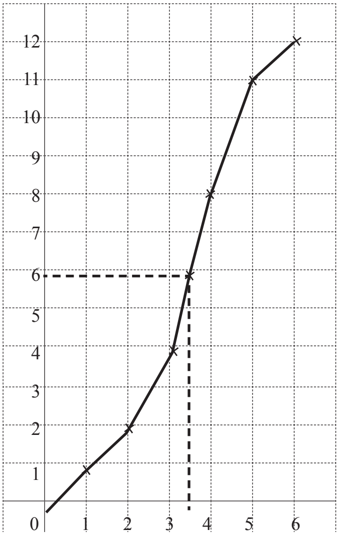
$e = 1{,}78.$

Exercice 21

1) Complétons le tableau

Valeurs	[0;1[	[1;2[	[2;3[	[3;4[	[4;5[	[5;6[
Effectifs	1	1	2	4	3	1
Effectifs cumulés croissants	1	2	4	8	11	12

2) Diagramme des E.C.C



3) La médiane est 3,5.

IV.3. Exercices d'approfondissement

Exercice 22

• Dans l'énoncé, supprimer la question 4.

1) La fréquence de la valeur 12 est :
$1 - (0{,}2 + 0{,}24 + 0{,}16 + 0{,}08) = 0{,}32.$

2) Tableau :

x_i	f_i	$x_i f_i$	x_i^2	$x_i^2 f_i$
09	0,2	1,8	81	16,2
11	0,24	2,64	121	29,04
12	0,32	3,84	144	46,08
13	0,16	0,08	169	27,04
15	0,08	1,2	225	18
	1	11,56		136,36

a) La moyenne est : $\overline{x} = 11{,}56.$

b) L'écart moyen est :

$e_m = |9 - 11{,}56| \times 0{,}2 + 0{,}24|11 - 11{,}56| + 0{,}32|12 - 11{,}56| + 0{,}16|13 - 11{,}56| + 0{,}08|15 - 11{,}56|$

$e_m = 1{,}2928.$

c) La variance est : $V = 136{,}36 - 11{,}56^2 = 2{,}7264.$

d) L'écart type est : $\sigma = \sqrt{V}$.

$\sigma \simeq 1{,}65.$

3) Complétons le tableau :

Valeurs x_i de la variance X	09	11	12	13	15
Fréquences cumulées croissantes	0,2	0,44	0,76	0,92	1
Fréquences cumulées décroissantes	1	0,8	0,56	0,24	0,08

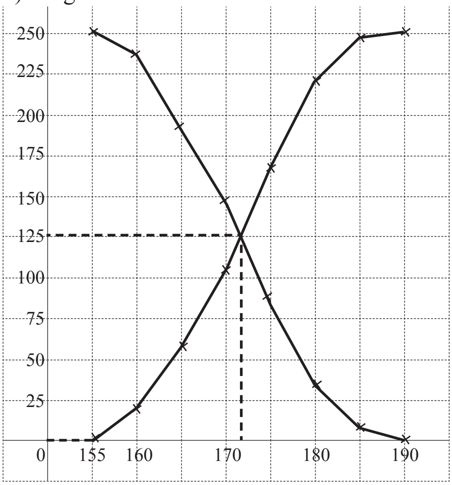
Supprimer la question 4)

Exercice 23

1) Complétons le tableau :

Tailles	Effec-tifs	ECD	ECC
[155 ; 160[	19	250	19
[160 ; 165[	40	231	59
[165 ; 170[	48	191	107
[170 ; 175[	61	143	168
[175 ; 180[	50	82	218
[180 ; 185[	26	32	244
[185 ; 190[	6	6	250

2) Diagramme des E.C.C.



3) Voir figure.

4) La médiane est 172.

Exercice 24

1) Moyenne :

$$M = \frac{2\times2+6\times10+10\times23+14\times10+18\times5}{2+10+23+10+5}$$

$$= \frac{524}{50} = 10{,}48.$$

2. a) Cela signifie que la classe [8 ;12[a le plus grand effectif.

b) Écart moyen :

$$e = \frac{145{,}6}{50} = 2{,}912$$

$e \simeq 3.$

Interprétation :

L'écart moyen est 3 : cela signifie que les notes s'écartent en moyenne de 3 de la moyenne.

c) Écart type :

$\sigma = \sqrt{V}$, avec V la variance.

$$V = \frac{2\times2^2+10\times6^2+23\times10^2+10\times14^2+5\times18^2}{50} - 10{,}48^2$$

$$V = \frac{6248}{50} - 109{,}8304 = 15{,}1296.$$

Donc $\sigma = \sqrt{15{,}1296} \simeq 3{,}89.$

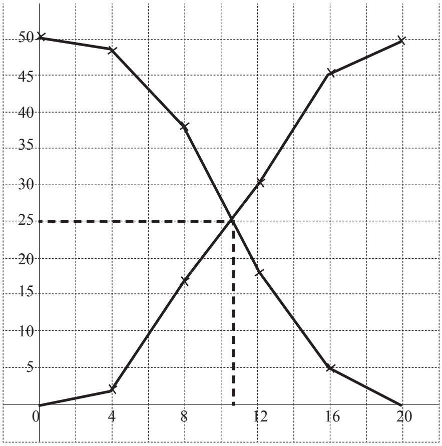
Interprétation :

La dispersion des notes autour de la moyenne est environ 3,89.

3) Complétons le tableau :

Notes	[0 ;4[	[4 ;8[	[8 ;12[	[12 ;16[	[16 ;20[
Effectifs	2	10	23	10	15
Effectifs cumulés croissants (E.C.C)	2	12	35	45	50
Effectifs cumulés décroissants (E.C.D)	50	48	38	15	5

Polygones de E.C.C et de E.C.D :



4) La médiane est l'abscisse du point d'intersection des polygones des ECC et des ECD.

La médiane est 10,2.

IV.4. Situation d'évaluation

Exercice 25

1) Élève 1 :

- Moyenne : $M_1 = \frac{1}{N}\sum n_i x_i = \frac{1035}{1} = 86{,}25$.
- Écart moyen : $e_1 = \frac{1}{N}\sum n_i|x_i - M_1|$

$$= \frac{175{,}5}{12} = 14{,}625.$$

- Variance : $V_1 = \frac{1}{N}\sum n_i x_i^2 - M_1^2$

$$= \frac{93721}{12} - 86{,}25\ ;$$

$$V_1 \simeq 371.$$

- Écart type : $\sigma_1 = \sqrt{V_1} \simeq 19{,}26$.

Élève 2 :

- Moyenne : $M_2 = \frac{1}{N}\sum n_i x_i = 91{,}33$.
- Écart moyen : $\frac{1}{N}\sum n_i|x_i - M_2| = \frac{560{,}66}{12}$

$$= 46{,}72.$$

- Variance : $V_2 = \frac{1}{N}\sum n_i x_i^2 - M_2^2$

$$= \frac{123718}{12} - 91{,}33^2\ ;$$

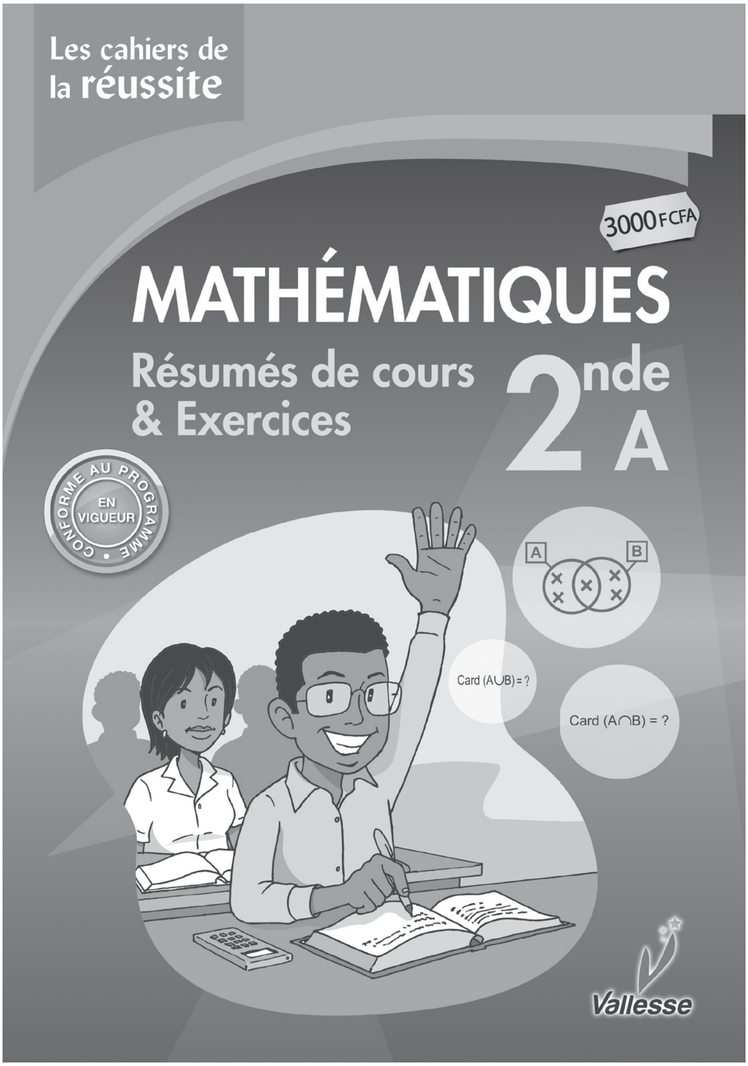
$$V_2 \simeq 1968{,}66.$$

- Écart type : $\sigma_2 = \sqrt{V_2} \simeq 44{,}37$.

2) On a : $e_1 < e_2$ et $\sigma_1 < \sigma_2$.

Donc l'élève 1 est plus régulier (il a des notes plus harmonieuses).

Dans la même collection



Mise en page : Vallesse Éditions
Tel : 2722410821/0101916125
Achevé d'imprimer en Côte d'Ivoire
3ème trimestre 2021
Dépôt légal : 17920 du 03 Sept. 2021