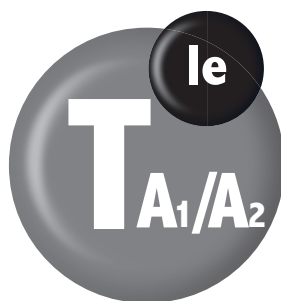


# Mathématiques



# Corrigé

## Auteurs

ARRICO Lucie  
Professeur de lycée

AKÉ Djebri Antonin  
Professeur de lycée





© Vallesse Éditions, Abidjan, 2021

ISBN : 978-2-902594-89-4

Toute reproduction interdite sous peine de poursuites judiciaires.



# Leçon

# 1

## Étude de fonctions polynômes et de fonctions rationnelles

### IV. Exercices

#### IV.1. Exercices de fixation

##### Exercice 1

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} 5 = 5.$$

##### Exercice 2

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{3}{2}x - 7 \right) = -4 ;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (x^2 - 4x + 3) = \frac{5}{4} ;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -4} (x^3 - 6x^2) = -160 ;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} (5x - 8)(2x - 3) = 24.$$

##### Exercice 3

$$1) 1 ; 2) -\frac{8}{3}$$

##### Exercice 4

$$1) -\infty ; 2) +\infty$$

##### Exercice 5

$$1) -\infty ; 2) +\infty$$

##### Exercice 6

$$1) -\infty ; 2) +\infty$$

##### Exercice 7

$$1. B ; 2. C ; 3. B.$$

##### Exercice 8

$$1. A ; 2. B ; 3. D.$$

##### Exercice 9

$$1. C ; 2. C ; 3. B.$$

##### Exercice 10

$$1) +\infty ; 2) +\infty ; 3) -\infty ; 4) +\infty$$

##### Exercice 11

$$1) \frac{3}{2} ; 2) \frac{3}{2} ; 3) \frac{1}{2} ; 4) \frac{1}{2}.$$

##### Exercice 12

$$1) +\infty ; 2) -\infty ; 3) -\infty.$$

##### Exercice 13

$$1) -\infty ; 2) +\infty$$

##### Exercice 14

$$1) -3 ; 2) 4$$

##### Exercice 15

$$1) A ; 2) B ; 3) B ; 4) B ; 5) C.$$

##### Exercice 16

$$1) f'(x) = \frac{3}{2} ; 2) f'(x) = 4 - \frac{1}{x^2} ;$$

$$3) f'(x) = x^2 - 3x + \frac{1}{3}$$

##### Exercice 17

$$a) f'(x) = (x-2)^2 + 2x(x-2) = (x-2)(3x-2) ;$$

$$b) f'(x) = 2x(2x-1)^3 + 6x^2(2x-1)^2 = 2x(5x-1)(2x-1)^2.$$

**Exercice 18**

a)  $f'(x) = \frac{11}{(5x+3)^2}$  ;

b)  $f'(x) = \frac{-2}{(2x-5)^2}$  ;

c)  $f'(x) = \frac{(2x+1)(x-3) - 1 \times (x^2+x-1)}{(x-3)^2}$   
 $= \frac{x^2-6x-2}{(x-3)^2}$ .

**Exercice 19**

$f'(x) = 2x - 2$ .

$f'(x) \geq 0$  ssi  $x \geq 1$  et  $f'(x) \leq 0$  ssi  $x \leq 1$ .

- $f$  est décroissante sur  $]-\infty ; 1]$  ;
- $f$  est croissante sur  $[1 ; +\infty[$ .

**Exercice 20**

$f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2}$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,  $f'(x) < 0$ .

- $f$  est décroissante sur  $]-\infty ; 1[$  ;
- $f$  est décroissante sur  $]1 ; +\infty[$ .

**Exercice 21**Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$ .

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	-	+

 $f$  est dérivable et strictement croissante sur  $]1 ; +\infty[$ , en particulier sur  $[2 ; 3]$ .De plus  $f(2) = -3$  et  $f(3) = 13$ , d'où  $f(2) \times f(3) < 0$ .On conclut alors que l'équation  $f(x) = 0$ , admet une solution unique dans l'intervalle  $[2 ; 3]$ .**Exercice 22** $f$  est dérivable et strictement croissante sur  $[4 ; 5]$  de plus  $f(4) \times f(5) < 0$ . Donc l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique dans l'intervalle  $[4 ; 5]$ .**Exercice 23**

1)  $f'(x) = 3(x-2)(x+2)$ .

 $f$  est dérivable et strictement croissante sur  $[-4 ; -3]$  de plus  $f(-4) \times f(-3) < 0$ . Donc l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $[-4 ; -3]$ .

2)  $f(-4) \times f(-3) < 0$ , donc  $-4 < \alpha < -3$  ;

$f(-4) \times f(-3,5) < 0$ , donc  $-4 < \alpha < -3,5$  ;

$f(-3,75) \times f(-3,5) < 0$ , donc  $-3,75 < \alpha < -3,5$  ;

$f(-3,75) \times f(-3,625) < 0$ ,

donc  $-3,75 < \alpha < -3,625$ . Donc  $-3,7 < \alpha < -3,6$ .**Exercice 24**

1)  $f'(x) = 3(x-2)(x+2)$ .

 $f$  est dérivable et strictement croissante sur  $[3 ; 4]$  de plus  $f(3) \times f(4) < 0$ . Donc l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $[3 ; 4]$ .

2)

$x$	3	3,1	3,2	3,3
$f(x)$	-	-	-	+

Donc  $3,2 < \alpha < 3,3$ .**Exercice 25**

1)  $f'(x) = 3(x-2)(x+2)$

 $f$  est dérivable et strictement décroissante sur  $[0 ; 1]$  de plus  $f(0) \times f(1) < 0$ . Donc l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $[0 ; 1]$ .

2)  $0,4 < \alpha < 0,5$

**Exercice 26**La droite d'équation  $x = 1$  est asymptote à la courbe représentative de la fonction  $f$ .**Exercice 27**La droite d'équation  $x = -3$  est asymptote à la courbe représentative de la fonction  $f$ .**Exercice 28**La droite d'équation  $y = -\frac{1}{2}$  est asymptote à la courbe représentative de la fonction  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

**Exercice 29**

La droite d'équation  $y = 7$  est asymptote à la courbe représentative de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .

La droite d'équation  $y = -\frac{1}{2}$  est asymptote à la courbe représentative de la fonction  $f$  en  $-\infty$ .

**Exercice 30**

1) La droite d'équation  $y = x + 2$  est asymptote à la courbe représentative de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .

2) La droite d'équation  $y = x + 2$  est asymptote à la courbe représentative de la fonction  $f$  en  $-\infty$ .

**Exercice 31**

1) La droite d'équation  $y = x$  est asymptote à la courbe représentative de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .

2) La droite d'équation  $y = 2x - 3$  est asymptote à la courbe représentative de la fonction  $f$  en  $-\infty$ .

**Exercice 32**

La courbe représentative de  $f$  est au-dessus de la droite d'équation  $y = x + 7$  sur  $]-\infty; 2]$ .

**Exercice 33**

La courbe représentative de  $f$  est au-dessous de la droite d'équation  $y = x$ .

**IV.2. Exercices de renforcement****Exercice 34**

1)  $f(x) - (x - 3) < 0$

$x^2 - 3x < 0$

$x(x - 3) < 0$

$S_1 = ]0; 3[$ .

2) La courbe représentative de  $f$  est au-dessous de la droite d'équation  $y = x - 3$  sur  $]0; 3[$ .

**Exercice 35**

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{3}{2}$  ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{3}{2}$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$  ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$ .

**Exercice 36**

1) Pour tout nombre réel  $x$ ,  $f'(x) = 3x^2 - 12$ .

2)  $f'(x) = 3(x - 2)(x + 2)$ .

3)  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$  ou  $x = 2$

Tableau de signe de  $f'$

$x$	$-\infty$	$-2$	$2$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

4) Tableau de variation

•  $f$  est croissante sur  $]-\infty; -2]$  et sur  $[2; +\infty[$

•  $f$  est croissante sur  $]-2; 2]$ .

$x$	$-\infty$	$-2$	$2$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 21$	$\searrow -11$	$\nearrow +\infty$	

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

**Exercice 37**

Identique avec 23.

**Exercice 38**

Identique avec 24.

**Exercice 39**

1) a) Pour tout nombre réel  $x$ ,

$f(x) = -2x^2 + 8x - 6$

Les zéros de  $f$  sont :  $x = 1$  et  $x = 3$ .

Tableau de signe

$x$	$-\infty$	$1$	$3$	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$

b) La courbe représentative de  $f$  est au-dessous de l'axe des abscisses sur  $]-\infty; 1[$  et sur  $]3; +\infty[$ . Elle est au-dessous de cet axe sur  $]1; 3[$ . Elle coupe cet axe aux points d'abscisses 1 et 3.

2) a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

b) Pour tout nombre réel  $x$ ,  $f'(x) = -4x + 8$

c)  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Tableau de signe

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$

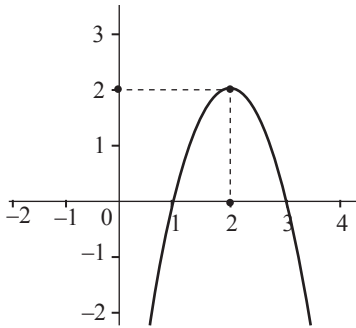
•  $f$  est croissante  $]-\infty ; 2]$

•  $f$  est décroissante  $[2 ; +\infty[$

d) Tableau de variation de  $f$

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ $2$ $\searrow$	$-\infty$

3)



**Exercice 40**

1) a) Pour tout  $x$  élément de  $[-3,5 ; 1,5]$ ,

$$f'(x) = 3x^2 + 5x - 2$$

$$\Delta = 49, x_1 = -2 \text{ et } x_2 = \frac{1}{3}$$

Pour tout  $x$  élément de  $[-3,5 ; 2]$ ,

$$f'(x) = 3(x+2)(x - \frac{1}{3})$$

$$f'(x) = (x+2)(3x-1)$$

b) Tableau de variation de  $f$

$x$	$-4$	$-2$	$\frac{1}{3}$	$2$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$-\frac{35}{2}$	$\nearrow$ $\frac{9}{2}$	$\searrow$ $-\frac{50}{27}$	$\nearrow$ $\frac{25}{2}$	

2) a)  $A(0 ; -\frac{3}{2})$

b)  $B(-3 ; 0)$ ,  $C(-\frac{1}{2} ; 0)$ ,  $D(1 ; 0)$

3) Équation de la tangente au point d'abscisse 1.

$$y = f'(1)(x-1) + f(1), \text{ soit } y = 6x - 6.$$

Équation de la tangente au point d'abscisse  $-1$ .

$$y = f'(-1)(x+1) + f(-1), \text{ soit } y = -4x - 2.$$

4. a)  $f$  est dérivable et strictement croissante sur  $[-4 ; -2]$ .

De plus  $f(-4) = -17,5$  et  $f(-2) = 4,5$

d'où  $f(-4) < 1 < f(-2)$ .

Donc l'équation  $f(x) = 1$  admet une solution unique dans l'intervalle  $[-4 ; -2]$ .

• Un raisonnement analogue permet de démontrer que l'équation  $f(x) = 1$  admet une unique solution dans chacun des intervalles

$$[-2; \frac{1}{3}] \text{ et } [\frac{1}{3}; 2].$$

• Conclusion : L'équation  $f(x) = 1$  admet exactement trois solutions dans  $[-4 ; 2]$ .

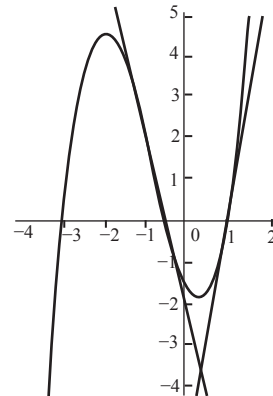
b)

$x$	$-3,5$	$-3$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$1,5$
$f(x)$	$-6,75$	$0$	$4,5$	$2$	$-1,5$	$0$	$4,5$

c) Soit  $u ; v$  et  $w$ , ces solutions telles que  $u < v < w$ .

On a :  $-3 < u < -2$  ;  $-1 < v < 0$  et  $1 < w < 2$ .

5)



### Exercice 41

1) a) Pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle

$$]-1; +\infty[, f'(x) = 2x - 2.$$

$$\bullet f'(x) \leq 0, \text{ si } x \in ]-1; 1]$$

$$\bullet f'(x) \geq 0, \text{ si } x \in [1; +\infty[$$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

c) Tableau de variation de  $f$

$x$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		1		$+\infty$
			-3	

2) a) Pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle

$$]-1; +\infty[, g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

$$\forall x \in ]-1; +\infty[, g'(x) > 0$$

b)  $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 3$ .

c)  $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -\infty$ , donc la droite d'équation

$x = -1$  est asymptote à  $(\mathcal{C}_g)$ .

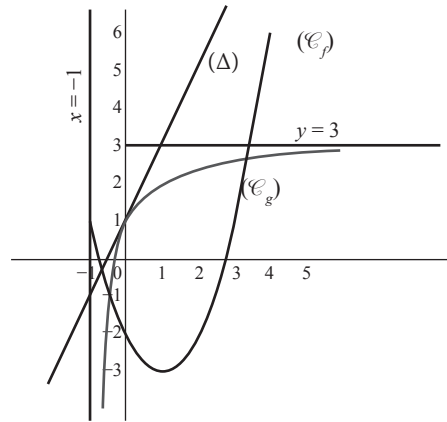
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 3, \text{ donc la droite d'équation } y = 3$$

est asymptote à  $(\mathcal{C}_g)$ .

d) Tableau de variation

$x$	-1	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$		$-\infty$
		$+\infty$

3) a)  $(\Delta) : y = g'(0)(x - 0) + g(0)$   
 $y = 2x + 1.$



b) Soit  $a$  et  $b$  des abscisses.

$$-1 < a < 0 \text{ et } 3 < b < 4$$

3) b) Pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $[3; 4]$ ,

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = \frac{3x + 1}{x + 1}$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - 2x - 2) = 3x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^3 + x^2 - 7x - 3 = 0.$$

4) a) Pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle

$$[3; 4], h'(x) = 3x^2 + 2x - 7.$$

Pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $[3; 4]$ ,

$$h'(x) > 0.$$

b)  $h$  est dérivable et strictement croissante

sur  $[3; 4]$ , donc l'équation  $h(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  sur  $[3; 4]$ .

c)  $f(3,35) \times f(3,36) < 0$ , donc  $3,35 < x_0 < 3,36$ .

### Exercice 42

1) L'équation  $f(x) = 3$  admet deux solutions sur  $]1; +\infty[$ .

2) a)  $f$  n'est pas défini en 1 et de plus  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$  donc la droite (D) d'équation  $x = 1$  est asymptote verticale à  $(\mathcal{C})$ .

b)  $c = 1$

3) a) Pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle

$$]1; +\infty[, f'(x) = a - \frac{b}{(x-1)^2}$$

b) D'après le tableau,  $f'(3) = 0$  et  $f(3) = 2,5$

soit :  $a - \frac{b}{4} = 0$  et  $3a + \frac{b}{2} = 2,5$

donc  $a = \frac{1}{2}$  et  $b = 2$

4) Pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle

$$]1; +\infty[, f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{2}{x-1}$$

$$f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{2}{x-1}; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \frac{1}{2}x = 0, \text{ donc}$$

la droite d'équation  $y = \frac{1}{2}x$  est asymptote à  $(\mathcal{C})$ .

5) Pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $]1; +\infty[$ ,

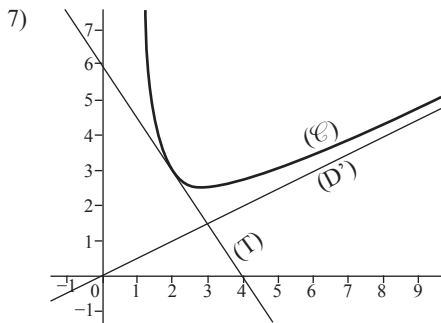
$$f(x) = 3 \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{2}{x-1} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$S_{\mathbb{R}} = \{2; 5\}.$$

6) a) Pour tout nombre réel  $x$  de  $]1; +\infty[$ .

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{(x-1)^2}.$$

$$\text{b) } y = -\frac{3}{2}x + 6.$$



### IV.3. Exercices d'approfondissement

#### Exercice 43

1)  $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ .

2) a)  $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$   
 $= 3(x^2 - 4x + 3)$ .

Pour  $x^2 - 4x + 3$ ,  $\Delta = 4$ ;  $x_1 = 1$  et  $x_2 = 3$ .

Donc  $f'(x) = 3(x-1)(x-3)$ .

b)  $f'(x) = 0$  si  $x \in \{1; 3\}$ .

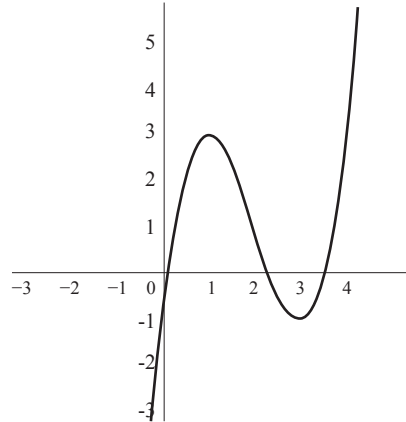
$f'(x) > 0$  si  $x \in ]-\infty; 1[ \cup ]3; +\infty[$ .

$f'(x) < 0$  si  $x \in ]1; 3[$ .

3)

$x$	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$		3		$+\infty$

4) Trace  $(\mathcal{C}_f)$ .



#### Exercice 44

1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

2) a) Pour tout nombre réel  $x$ ,

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 12x + 12$$

$$= 12(x^3 - x^2 - x + 1)$$

$$= 12(x^2(x-1) - (x-1))$$

$$f'(x) = 12(x^2 - 1)(x-1) = 12(x-1)^2(x-1)$$

b) Pour tout nombre réel  $x$ , on a  $12(x-1)^2 \geq 0$ .

Donc  $f'(x)$  a le même signe que  $x-1$ .

$f$  est décroissante sur  $]-\infty; -1[$  et  $f$  est

croissante sur  $[-1; +\infty[$ .

3) Tableau de variation

$x$	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$

4) Deux solutions.

5) 1 et  $\alpha$  où  $-2 < \alpha < -1$ .

$$-1,67 < \alpha < -1,66.$$

$$\alpha \approx -1,67$$

### Exercice 45

1) a)  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$

La droite d'équation  $x = -2$  est asymptote à  $(\mathcal{C})$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

2) a) Pour tout nombre réel  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ ,

$$x + 3 + \frac{1}{x + 2} = \frac{x^2 + 5x + 7}{x + 2}$$

Donc pour tout nombre réel  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ ,

$$f(x) = x + 3 + \frac{1}{x + 2}$$

b) Pour tout nombre réel  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ ,

$$f(x) - (x + 3) = \frac{1}{x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 3)] = 0 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 3)] = 0.$$

Donc la droite d'équation  $y = x + 3$  est asymptote à  $(\mathcal{C})$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

3) Pour tout nombre réel  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ ,

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x + 2)^2}$$

4) Pour tout nombre réel  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ ,

$$f'(x) = \frac{(x + 1)(x + 3)}{(x + 2)^2}.$$

$$f'(x) > 0 \text{ si } x \in ]-\infty; -3[ \cup ]-1; +\infty[.$$

$$f'(x) < 0 \text{ si } x \in ]-3; -2[ \cup ]-2; -1[.$$

$f$  est strictement croissante sur  $]-\infty; -3[$

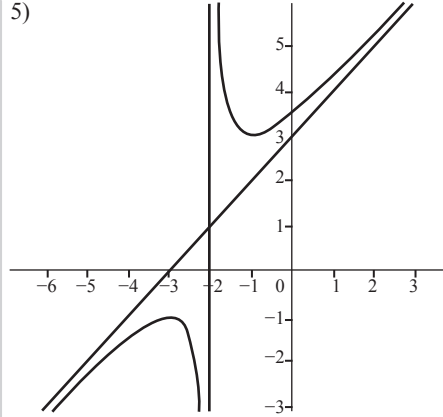
et sur  $]-1; +\infty[$ .

$f$  est strictement décroissante sur  $]-3; -2[$

et sur  $]-2; -1[$ .

$x$	$-\infty$	$-3$	$-2$	$-1$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$	$3$	$+\infty$	

5)



### Exercice 46

1) a)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ .

La droite d'équation  $x = 1$  est asymptote à  $(\mathcal{C})$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .

2) Pour tout nombre réel  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,

$$\begin{aligned} -3 + \frac{x^2}{x - 1} &= \frac{-3x^2(x - 1) + x^2}{x - 1} \\ &= \frac{-2x^2 + 3x}{x - 1} \end{aligned}$$

Donc pour tout nombre réel  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,

$$f(x) = -3x + \frac{x^2}{x - 1}.$$

3) a) Pour tout nombre réel différent de 1, on a

$$ax + b + \frac{c}{x - 1} = \frac{ax^2 + (-b - a)x + c - b}{x - 1}$$

Par identification :  $a = -2$  ;  $b - a = 3$  et  $c - b = 0$ .

D'où  $a = -2$  ;  $b = 1$  et  $c = 1$ .

$$\text{Donc } f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x - 1}.$$

b) Pour tout nombre réel  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,

$$f(x) - (-2x + 1) = \frac{1}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-2x + 1)] = 0 \text{ et}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-2x + 1)] = 0$ , donc la droite d'équation  $y = -2x + 1$  est asymptote à  $(\mathcal{C})$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

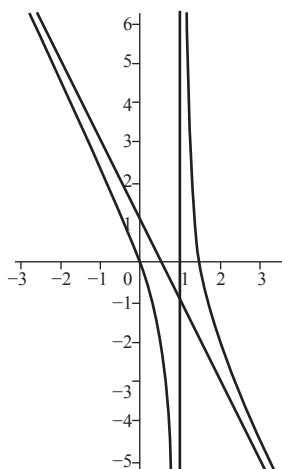
4) Pour tout nombre réel  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,

$$f'(x) = -2 - \frac{1}{(x-1)^2}$$

5) Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,  $f'(x) > 0$ . Donc  $f$  est strictement décroissante sur  $]-\infty; 1[$  et sur  $]1; +\infty[$ .

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘ $-\infty$

5)



### Exercice 47

1) D'après les conditions, on a :

- $f(0) = 5$  ;
- $f'(0) = 0$  ;
- $f'(1) = -3$  ;

$f(0) = 5$ , donc  $\frac{c}{-2} = 5$ , soit  $c = -10$ .

$$f'(x) = \frac{ax^2 - 4ax - 2b - c}{(x-2)^2}$$

$f'(0) = 0$ , donc  $\frac{-2b-c}{4} = 0$ , soit  $b = \frac{-c}{2} = 5$ .

$f'(1) = -3$ , donc  $-3a - 2b - c = -3$ , soit  $a = 1$ .

$$\text{Finalement, } f(x) = \frac{x^2 + 5x - 10}{x-2}$$

2) Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+5)(x-2) - 1 \times (x^2 + 5x - 10)}{(x-2)^2} \\ &= \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

$f'(x)$  a le même signe que  $x^2 - 4x$ .

$f$  est strictement croissante sur  $]-\infty; 0[$

et sur  $]4; +\infty[$ .

$f$  est strictement décroissante sur  $]0; 2[$

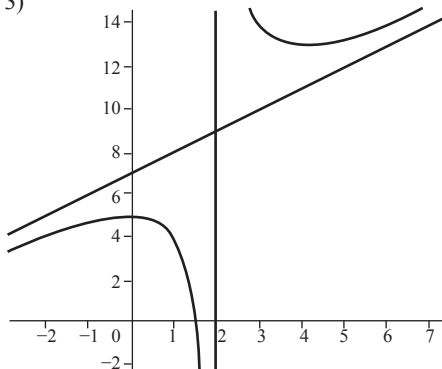
et sur  $]2; 4[$ .

$x$	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ 5 ↘ $-\infty$			$+\infty$ ↘ 13 ↗ $+\infty$		

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

3)



### IV.4. Situation d'évaluation

#### Exercice 43

$$f(x) = -2x^3 + 54x^2 - 336$$

Pour tout  $x$  élément de  $[9; 18]$ ,

$$f'(x) = -6x^2 + 108x - 336 = -6(x-4)(x-14)$$

Pour tout  $x$  élément de  $[9; 18]$ ,  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 14$

$x$	9	14	18
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		↗ 392 ↘	

Le bénéfice est maximal pour 14 machines à coudre fabriquées par jour.

Ce bénéfice est de 392 000 F

# Leçon 2 Probabilité

## IV. Exercices

### IV.1. Exercices de fixation

#### Exercice 1

Notons  $E_1$  et  $E_2$  les univers des possibles respectifs des expériences  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$ .

$E_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  et  $E_2 = \{(P, F), (P, P), (F, P), (F, F)\}$ .

#### Exercice 2

« Obtenir un chiffre pair » est un évènement de l'expérience  $\mathcal{E}_1$ .

« Obtenir une fois le côté pile » est un évènement de l'expérience  $\mathcal{E}_2$ .

#### Exercice 3

« Obtenir un chiffre inférieur à 3 » et « Obtenir un chiffre supérieur à 4 » sont deux évènements incompatibles de l'expérience  $\mathcal{E}_1$ .

« Obtenir deux fois le côté pile » et « Obtenir deux fois le côté face » sont deux évènements incompatibles de l'expérience  $\mathcal{E}_2$ .

#### Exercice 4

« Obtenir un chiffre pair » et « Obtenir un chiffre impair » sont deux évènements contraires de l'expérience  $\mathcal{E}_1$ .

« Obtenir le côté pile premièrement » et « Obtenir le côté face premièrement » sont deux évènements contraires de l'expérience  $\mathcal{E}_2$ .

#### Exercice 5

$\{1 ; 2 ; 3\}$

#### Exercice 6

$A = \{(P, F) ; (P, P)\}$ .

$B = \{(P, P) ; (F, P)\}$ .

#### Exercice 7

Entourer la réponse c.

#### Exercice 8

Soit A « obtenir un chiffre pair supérieur ou égal à 4 ».  $A = \{4 ; 6\}$ .

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

#### Exercice 9

Entourer la réponse c).

#### Exercice 10

Entourer la réponse b).

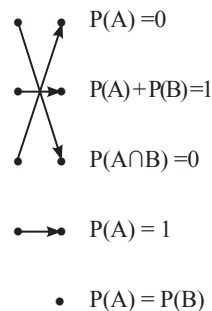
#### Exercice 11

A et B sont incompatibles

A et B sont contraires

A est un évènement impossible

A est un évènement certain



#### Exercice 12

Cocher la case de  $\frac{C_4^1 \times C_5^2}{C_8^3}$ .

#### Exercice 13

Cocher la case de  $\frac{A_3^1 \times A_5^2}{A_8^3}$ .

#### Exercice 14

L'ensemble des valeurs prises par X est  $\{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12\}$ .

### Exercice 15

L'ensemble des valeurs prises par Y est  $\{0; 1; 2; 3\}$ .

### Exercice 16

$x_i$	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$
7	8	9	10	11	12
$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

### Exercice 17

$y_i$	0	1
$P(Y=y_i)$	$\frac{C_3^0 \times C_5^3}{C_8^3} = \frac{10}{56}$	$\frac{C_3^1 \times C_5^2}{C_8^3} = \frac{30}{56}$
2	3	
$\frac{C_3^2 \times C_5^1}{C_8^3} = \frac{15}{56}$	$\frac{C_3^3 \times C_5^0}{C_8^3} = \frac{1}{56}$	

### Exercice 18

Espérance mathématique

Écart type

Variance

$$p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \dots + p_n x_n^2 - [E(X)]^2$$

$$\sqrt{p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \dots + p_n x_n^2 - [E(X)]^2}$$

$$x_1 p_1 + x_1 p_1 + \dots + x_n p_n$$

### Exercice 19

Notons  $E(X)$  l'espérance mathématique de la variable aléatoire X,  $V(X)$  la variance de X et  $\sigma(X)$  l'écart-type de X. On a :

$$E(X) = \frac{1}{36}(2 \times 1 + 3 \times 2 + 4 \times 3 + 5 \times 4 + 6 \times 5 + 7 \times 6 + 8 \times 5 + 9 \times 4 + 10 \times 3 + 11 \times 2 + 12 \times 1) = \frac{252}{36} = 7.$$

$$V(X) = \frac{1}{36}(2^2 \times 1 + 3^2 \times 2 + 4^2 \times 3 + 5^2 \times 4 + 6^2 \times 5 + 7^2 \times 6 + 8^2 \times 5 + 9^2 \times 4 + 10^2 \times 3 + 11^2 \times 2 + 12^2 \times 1) - 7^2 = \frac{1932}{36} - 7.$$

$$V(X) = \frac{140}{3}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 6,83.$$

Notons  $E(Y)$  l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y,  $V(Y)$  la variance de Y et  $\sigma(Y)$  l'écart-type de Y. On a :

$$E(Y) = \left(0 \times \frac{5}{28}\right) + \left(1 \times \frac{30}{56}\right) + \left(2 \times \frac{15}{56}\right) + \left(3 \times \frac{1}{56}\right) = \frac{9}{8}.$$

$$V(Y) = \frac{10}{56}\left(0 - \frac{9}{8}\right)^2 + \frac{30}{56}\left(1 - \frac{9}{8}\right)^2 + \frac{15}{56}\left(2 - \frac{9}{8}\right)^2 + \frac{1}{56}\left(3 - \frac{9}{8}\right)^2 = \frac{1800}{3584} = \frac{225}{448}.$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} \approx 0,71.$$

## IV.2. Exercices de renforcement

### Exercice 20

De haut en bas : F- ; F- ; V- ; F.

### Exercice 21

1)  $E_1 = (2; 3)$  ;  $E_2 = (1; 6)$  ;  $E_3 = (5; 4)$ .

2) Soit  $\Omega$  l'univers des possibles on a :

$\text{Card } \Omega = 6^2 = 36.$

$$3) P(A) = \frac{3 \times 6}{36} = 0,5 ; P(B) = \frac{10}{36}$$

### Exercice 22

1) Les différentes valeurs prises par X sont :

0 ; 1 ; 2 ; 3.

2) Loi de probabilité de X.

$x_i$	0	1
$P(X=x_i)$	$\frac{A_5^3}{A_8^3} = \frac{5}{28}$	$\frac{3 \times A_3^1 \times A_3^1}{A_8^3} = \frac{15}{28}$

2	3
$\frac{3 \times A_3^2 \times A_5^1}{A_8^3} = \frac{15}{56}$	$\frac{A_3^3}{A_8^3} = \frac{1}{56}$

3) Notons  $E(X)$  l'espérance mathématique de  $X$

$$E(X) = 0 \times \frac{5}{28} + 1 \times \frac{15}{28} + 2 \times \frac{15}{56} + 3 \times \frac{1}{56} = \frac{61}{56}.$$

4) Notons  $V(X)$  la variance de  $X$

$$V(X) = 0^2 \times \frac{5}{28} + 1^2 \times \frac{15}{28} + 2^2 \times \frac{15}{56} + 3^2 \times \frac{1}{56} - \left(\frac{61}{56}\right)^2.$$

$$V(X) \approx 0,6.$$

5) Notons  $\sigma(X)$  l'écart-type de  $X$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 0,8$$

### Exercice 23

$$P(A) = \frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{2}{7}; P(B) = \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{1}{7};$$

$$P(C) = \frac{C_3^1 \times C_4^1}{C_7^2} = \frac{4}{7}$$

### Exercice 24

$$P(A) = \frac{C_{18}^2}{C_{20}^3} = \frac{51}{380}; P(B) = \frac{C_{18}^3}{C_{20}^3} = \frac{68}{95};$$

$$P(C) = \frac{C_{18}^1}{C_{20}^3} = \frac{3}{190}$$

### Exercice 25

Il y a 6 billets qui se terminent par 0 ou 5 et 9 billets dont les numéros se terminent par 3 ; 6 ou 9.

1) a) Soit  $P_1$  la probabilité demandée.

$$\text{On a : } P_1 = \frac{9}{30}$$

b) Soit  $P_2$  la probabilité demandée.

$$\text{On a : } P_2 = \frac{6}{30}$$

2) a) On a :  $1500F = 500F + 500F + 500F$  ou  $1500F = 1000F + 500F + 0F$

Soit  $P_3$  la probabilité demandée. On a :

$$P_3 = \frac{C_9^3}{C_{26}^3} = \frac{21}{650}.$$

b) Soit  $P_4$  la probabilité demandée. On a :

$$P_4 = \frac{C_{15}^3}{C_{26}^3} = \frac{91}{520} = \frac{7}{40}.$$

### Exercice 26

$$P(A) = \frac{C_3^3 + C_4^3}{C_9^3} = \frac{1}{21};$$

$$P(B) = \frac{C_2^2 \times C_7^1 + C_3^2 \times C_6^1 + C_4^2 \times C_5^1}{C_9^3} = \frac{55}{84};$$

$$P(C) = \frac{C_4^1 \times C_6^2}{C_9^3} = \frac{15}{28};$$

$$P(D) = \frac{C_2^1 \times C_4^1 \times C_4^1}{C_9^3} = \frac{2}{7}.$$

## IV.3. Exercices d'approfondissement

### Exercice 27

1) Le nombre de personnes qui pratiquent le football est :  $\frac{20 \times 55}{100} = 11$

Le nombre de personnes qui pratiquent

le karaté est :  $\frac{20 \times 35}{100} = 7.$

Le nombre de personnes qui pratiquent les

deux sports est :  $\frac{20 \times 10}{100} = 2.$

Le nombre de personnes qui pratiquent uniquement le football est :  $11 - 2 = 9.$

Le nombre de personnes qui pratiquent uniquement le karaté est :  $7 - 2 = 5.$

Le nombre de personnes qui ne pratiquent aucun sport est :  $20 - (9+5+2) = 4.$

2) Soit  $P_1$  la probabilité demandée.

Le cardinal de l'univers des possibles est :

$$C_{20}^5 = 15504.$$

$$P_1 = \frac{C_{16}^5}{15504} = \frac{4368}{15504} = \frac{91}{323}.$$

3) Soit  $P_2$  la probabilité demandée. On a :

$$P_2 = \frac{C_9^3 \times C_5^2}{15504} = \frac{35}{646}.$$

4) Soit  $P_3$  la probabilité demandée. On a :

$$P_3 = \frac{C_3^1 C_9^2 + C_{11}^4 \times C_9^1 + C_{11}^5}{15504} = \frac{781}{1292}$$

5) Soit  $P_4$  la probabilité demandée. On a :

$$P_4 = 1 - \frac{C_{13}^5}{15504} = \frac{4739}{5168}$$

### Exercice 28

1) Un tirage successif sans remise est un arrangement.

On a :  $N = A_{10}^3 = 720$ .

2) a)  $P(A) = \frac{A_7^3}{720} = \frac{7}{24}$  ;

$P(B) = \frac{A_3^3}{720} = \frac{1}{120}$  ;

$P(C) = \frac{(3 \times A_3^1 \times A_7^2) + (3 \times A_3^2 \times A_7^1) + A_3^3}{720}$

$= \frac{510}{720}$ . Ou bien  $P(C) = 1 - P(A)$  car

l'événement C est le contraire de l'événement A.

b) Soit P la probabilité demandée.

On a :  $P = \frac{3 \times A_3^2 \times A_7^1}{720} = \frac{7}{40}$ .

### Exercice 29

1) Soit N le nombre de choix possibles.

On a :  $N = C_{20}^2 = 190$ .

2)  $P(A) = \frac{C_6^2}{190} = \frac{3}{38}$  ;

$P(B) = \frac{C_6^2 + C_5^2 + C_9^2}{190} = \frac{61}{190}$  ;

$P(C) = \frac{C_6^1 \times (C_5^1 + C_9^1) + C_6^2}{190} = \frac{99}{190}$

3) a) Les différentes valeurs prises par X sont 2 ; 3 et 4.

b) Loi de probabilité

$x_i$	2
$P(X=x_i)$	$\frac{C_6^1 \times (C_5^1 + C_9^1) + C_6^2}{190} = \frac{99}{190}$

3	4
$\frac{C_5^1 \times C_9^1 + C_5^2}{190} = \frac{11}{38}$	$\frac{C_9^2}{190} = \frac{18}{95}$

c) L'espérance mathématique de X est :

$$E(X) = 2 \times \frac{99}{190} + 3 \times \frac{11}{38} + 4 \times \frac{18}{95} = \frac{507}{190} \approx 2,7.$$

### Exercice 30

#### PARTIE A

1) Soit N le nombre de codes secrets qu'une banque peut distribuer à ses clients.

$N = 10^4 = 10\ 000$ .

2) Soit  $P_1$  la probabilité demandée.

On a :  $P_1 = \frac{1 \times 10^3}{10\ 000} = \frac{1}{10}$

3) Soit  $P_2$  la probabilité demandée.

On a :  $P_2 = \frac{4!}{10\ 000} = \frac{3}{1250}$

#### PARTIE B

Supprimer la question 3, la question 4 devient la question 3 (dans le cahier).

1)  $P(E) = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$

$P(F) = \frac{23}{24} \times \frac{1}{23} = \frac{1}{24}$

2)  $G = E \cup F$  et  $E \cap F = \emptyset$

$P(G) = P(E) + P(F) = \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{12}$

3) a) Loi de probabilité de X

Les différentes valeurs prises par X sont 30 ; 90 et 120.

$x_i$	30	90
$P(=x_i)$	$P(E) = \frac{1}{24}$	$P(F) = \frac{1}{24}$

120
$\frac{23}{24} \times \frac{22}{23} = \frac{11}{12}$

b) Notons  $E(X)$  l'espérance mathématique de  $X$   
 $E(X) = (30 \times \frac{1}{24}) + (90 \times \frac{1}{24}) + (120 \times \frac{11}{12})$   
 $= 115.$

#### IV.4. Situation d'évaluation

##### Exercice 31

1) La probabilité de gagner est :  $1 - \frac{C_7^2}{C_{10}^2} = \frac{8}{15}.$

Soit 53%.

2) C'est le voisin qui a raison.

## Leçon 3 Fonction logarithme népérien

### IV. Exercices

#### IV.1. Exercices de fixation

##### Exercice 1

1.C ; 2.B ; 3.C ; 4.B

##### Exercice 2

$$\ln 6 = \ln(2 \times 3) = \ln 2 + \ln 3 = 1,8$$

$$\ln 4 = \ln(2^2) = 2\ln 2 = 1,4$$

$$\ln 9 = \ln(3^2) = 2\ln 3 = 2,2$$

$$\ln 8 = \ln(2^3) = 3\ln 2 = 2,1$$

$$\ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln 3 - \ln 2 = 0,4$$

##### Exercice 3

	A	B	C
$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x =$	$+\infty$	0	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x =$	$+\infty$	0	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} =$	$+\infty$	0	$-\infty$

##### Exercice 4

La fonction  $\ln$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ . Comme  $5 < 7$ , on a :  $\ln 5 < \ln 7.$

##### Exercice 5

Entourer la courbe 4.

##### Exercice 6

a)  $V = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\} = ]0; +\infty[.$   
 $\ln x = 0 \Leftrightarrow x \in V$  et  $x = 1$  or  $1 \in V$  d'où  $S = \{1\}$

b)  $V = \{x \in \mathbb{R}, x - 5 > 0 \text{ et } 2x + 1 > 0\}$   
 Pour  $x \in \mathbb{R}, x - 5 > 0$  et  $2x + 1 > 0$  on a :  $x > 5$  et  
 $x > -\frac{1}{2}$  c'est-à-dire  $x \in ]5; +\infty[$  d'où :  
 $V = ]5; +\infty[.$

$\ln(x - 5) = \ln(2x + 1) \Leftrightarrow x \in V$  et  $x - 5 = 2x + 1$   
 $x - 5 = 2x + 1 \Leftrightarrow x = -6$  or  $-6 \notin V$  d'où :  $S = \emptyset$

c)  $V = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\} = ]0; +\infty[.$   
 pour  $2\ln(x) = 1$  on a :  $\ln(x^2) = \ln e$   
 $\ln(x^2) = \ln e \Leftrightarrow x \in V$  et  $x^2 = e$  ;  
 $(x \in V \text{ et } x^2 = e)$  donne :  $x = \sqrt{e}$  d'où :  
 $S = \{\sqrt{e}\}$

##### Exercice 7

a)  $V = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\} = ]0; +\infty[.$   
 $\ln(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in ]0; 1[$  et d'où  $S = ]0; 1[$

b)  $V = \{x \in \mathbb{R}, 4x > 0\} = ]0; +\infty[.$   
 $\ln(4x) \geq \ln 3 \Leftrightarrow x \in V$  et  $4x \geq 3$   
 $(x \in V \text{ et } 4x \geq 3)$  donne  $x \geq \frac{3}{4}$  d'où :  
 $S = [\frac{3}{4}; +\infty[$

c)  $V = \{x \in \mathbb{R}, x - 5 > 0 \text{ et } 2x + 1 > 0\} = ]5; +\infty[.$

Pour tout  $x \in V, \ln(x - 5) = \ln(2x + 1)$

$$x - 5 = 2x + 1$$

$$x = -6$$

$$x \notin V, \text{ donc}$$

$$S = \emptyset$$

### Exercice 8

1) Pour tout  $x \in ]\frac{3}{2}; +\infty[, f'(x) = \frac{2}{2x-3}.$

2) Pour tout  $x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+5}.$

3) Pour tout  $x \in ]1, +\infty[, f'(x) = \frac{2x}{x^2-1}.$

## IV.2. Exercices de renforcement

### Exercice 9

a)  $V = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\} = ]0; +\infty[.$

$$\ln(x) - 2 < 0 \Leftrightarrow \ln(x) < 2\ln e$$

$$\ln(x) < 2\ln e \Leftrightarrow x \in V \text{ et } x < e^2$$

$$\text{d'où } S = ]0; e^2[$$

b)  $V = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\} = ]0; +\infty[.$

$$\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x \in ]1; +\infty[ \text{ (voir le signe de } \ln x)$$

$$\text{d'où } : S = ]1; +\infty[.$$

c)  $V = \{x \in \mathbb{R}, x - 5 > 0 \text{ et } 2x + 1 > 0\} = ]5; +\infty[$

$$\ln(x - 5) < -\ln(2x + 1)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x - 5) + \ln(2x + 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(5 - x)(2x + 1) < \ln 1$$

$$(x - 5)(2x + 1) < 1 \text{ donne } x \in V \text{ et } 2x^2 - 9x - 6 < 0$$

$$\text{Résolution de } 2x^2 - 9x - 6 < 0$$

$$\text{Le discriminant } \Delta = 129$$

$$x_1 = \frac{9 + \sqrt{129}}{4} \text{ et } x_2 = \frac{9 - \sqrt{129}}{4} \text{ sont les zéros de } 2x^2 - 9x - 6 \text{ d'où :}$$

$$2x^2 - 9x - 6 < 0$$

$$\Leftrightarrow x \in ]-\infty; \frac{9 - \sqrt{129}}{4} [ \cup ] \frac{9 + \sqrt{129}}{4}; +\infty[$$

$$\frac{9 - \sqrt{129}}{4} \approx -0,58 \text{ et } \frac{9 + \sqrt{129}}{4} \approx 5,08$$

$$x \in V \text{ et } 2x^2 - 9x - 6 < 0 \text{ donne}$$

$$x \in ] \frac{9 + \sqrt{129}}{4}; +\infty[ \text{ d'où :}$$

$$S = ] \frac{9 + \sqrt{129}}{4}; +\infty[$$

### Exercice 10

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x - 1 - \ln(x)) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (3x + \ln(x)) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +3} \ln x = \ln 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +2} (-4x + 7 - \ln x) = -1 - \ln 2$$

### Exercice 11

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x + 5 - \ln x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x - 2 + \ln x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x^2 - x + 3) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x + 1) = +\infty$$

### Exercice 12

1. B ; 2. C ; 3. C ; 4. A

### Exercice 13

a)  $f'(x) = -2 + \frac{1}{x}$

b)  $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$

c)  $f'(x) = \frac{4x-3}{2x^2-3x+1}$

### Exercice 14

$$\ln 5 - \ln 8 < 0 ; \ln\left(\frac{1}{2}\right) < 0 ; \ln\left(\frac{1}{3}\right) < 0 ;$$

$$\ln\left(\frac{2}{3}\right) < 0 ; \ln\left(\frac{5}{3}\right) > 0 ; \ln(\sqrt{2}) > 0 ;$$

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 0.$$

### Exercice 15

$$\ln 24 = 3\ln 2 + \ln 3 ; \ln 18 = \ln 2 + 2\ln 3 ;$$

$$\ln\left(\frac{16}{27}\right) = 4\ln 2 - 3\ln 3$$

**Exercice 16**

$$\ln 8 + \ln 5 = \ln 40 ; \ln 100 - \ln 20 = \ln 5 ;$$

$$2\ln 3 + \ln 2 = \ln 18 ; 5\ln 2 - 3\ln 4 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) ;$$

$$4\ln\sqrt{2} - \left(\frac{1}{2}\right)\ln 2 = \ln(2\sqrt{2}) .$$

**Exercice 17**

$$1) \ln 2 \approx 0,7 \text{ et } \ln 3 \approx 1,1$$

$$2) \ln 16 = 4\ln 2 \approx 2,8 ; \ln\left(\frac{1}{6}\right) = -\ln 2 - \ln 3 \approx -1,8$$

$$\ln 9 = 2\ln 3 \approx 2,2 ; \ln\left(\frac{1}{27}\right) = -3\ln 3 \approx -3,3 ;$$

$$\ln(\sqrt{12}) = \frac{1}{2}(\ln 3 + 2\ln 2) \approx 1,25 ;$$

$$\ln(2,25) = \ln(1,5^2) = 2\ln\left(\frac{3}{2}\right) = 2(\ln 3 - \ln 2) \approx 0,8$$

**Exercice 18**

$$1) \text{ Pour tout } x \text{ de } ]0 ; +\infty[ ,$$

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}$$

$$2) a) f'(x) > 0 \text{ pour } x \in ]\frac{1}{2} ; +\infty[$$

$$f'(x) < 0 \text{ pour } x \in ]0 ; \frac{1}{2}[$$

$$b) f \text{ est décroissante sur } ]0 ; \frac{1}{2}[ \text{ et croissante sur } ]\frac{1}{2} ; +\infty[ .$$

**Exercice 19**

$$1) \text{ Pour tout } x \text{ de l'intervalle } ]4 ; +\infty[ ,$$

$$g'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x-4} .$$

$$2) a) g'(x) > 0 \text{ pour } x \in ]4 ; +\infty[ .$$

$$b) g \text{ est croissante sur } ]4 ; +\infty[$$

**IV.3. Exercices d'approfondissement****Exercice 20**

$$1) P(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$$

$$2) a) x^3 - 6x^2 + 8x = 0$$

$$x(x-4)(x-2) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = 4 \text{ ou } x = 2$$

$$S = \{0 ; 4 ; 2\}$$

$$b) V ]0 ; +\infty[$$

Posons  $X = \ln x$ . L'équation devient :

$$X^3 - 6X^2 + 8X = 0$$

$$D^3 \text{ où } X = 0 \text{ ou } X = 4 \text{ ou } X = 2$$

Par suite  $\ln x = 0$  ou  $\ln x = 4$  ou  $\ln x = 2$

$$x = 1 \text{ ou } x = e^4 \text{ ou } x = e^2 .$$

$$S = \{1 ; e^4 ; e^2\}$$

$$3. a) x^3 - 6x^2 + 8x > 0 \Leftrightarrow x(x-4)(x-2) > 0 :$$

$$S = ]0 ; 2[ \cup ]4 ; +\infty[$$

3. b) On pose :  $X = \ln x$  d'où :

$$(\ln x)^3 - 6(\ln x)^2 + 8\ln x > 0$$

$$X^3 - 6X^2 + 8X > 0$$

$$X \in ]0 ; 2[ \cup ]4 ; +\infty[$$

$$\ln x \in ]0 ; 2[ \cup ]4 ; +\infty[$$

$$x \in ]1 ; e^2[ \cup ]e^4 ; +\infty[$$

$$d^3 \text{ où } : S = ]1 ; e^2[ \cup ]e^4 ; +\infty[$$

**Exercice 21**

$$1) x^2 - x - 20 = 0$$

le discriminant  $\Delta = 81$  et les solutions sont  $-4$  et  $5$ .

$$2) (E) : x \in \mathbb{R}, \ln(x+3) + \ln(x-4) = 3\ln 2$$

$$a) V(E) = \{x \in \mathbb{R}, x+3 > 0 \text{ et } x-4 > 0\}$$

$$(x+3 > 0 \text{ et } x-4 > 0) \text{ donne } x > 4 \text{ d'où :}$$

$$V(E) = ]4 ; +\infty[$$

$$b) x \in V(E), \ln(x+3)(x-4) = \ln 8$$

$$x \in V(E), (x+3)(x-4) = 8$$

$$x \in V(E), x^2 - x - 20 = 0$$

$$x = -4 \text{ ou } x = 5 \text{ or } -4 \notin V(E) \text{ d'où } S(E) = \{5\}$$

$$3) \text{ Ensemble de validité : } V = ]4 ; +\infty[ .$$

$$\ln(x+3) + \ln(x-4) \geq 3\ln 2$$

$$\ln(x+3)(x-4) \geq \ln 8$$

$$x^2 - x - 20 \geq 0$$

$$x \in ]-\infty ; -4] \cup ]5 ; +\infty[$$

$$\text{or } x \in V \text{ d'où : } S(I) = [5 ; +\infty[$$

**Exercice 22**

$$1. a) Df = \{x \in \mathbb{R}, x^2 + x - 2 > 0\}$$

$$x^2 + x - 2 > 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty ; -2[ \cup ]1 ; +\infty[$$

$$d^3 \text{ où } Df = ]-\infty ; -2[ \cup ]1 ; +\infty[$$

$$b) Dg = \{x \in \mathbb{R}, x-1 > 0 \text{ et } x+2\}$$

$(x - 1 > 0 \text{ et } x + 2)$  on donne  $x > 1$

d'où  $Dg = ]1 ; +\infty[$

2) Pour  $x \in ]1 ; +\infty[$ ,

$$g(x) = \ln(x - 1) + \ln(x + 2) = \ln(x - 1)(x + 2)$$

$$= \ln(x^2 + x - 2) = f(x)$$

Donc  $g(x) = f(x)$  pour tout réel  $x$  strictement supérieur à 1.

### Exercice 23

1)  $Dg = ]0 ; +\infty[$

2)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$  ;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 1 + \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = 1$$

3. a) Pour  $x \in ]0 ; +\infty[$ ,  $g'(x) = \frac{x-1}{x}$

b)  $g$  est strictement croissante sur  $]1 ; +\infty[$  et strictement décroissante sur  $]0 ; 1[$

c) Tableau de variation de  $g$ .

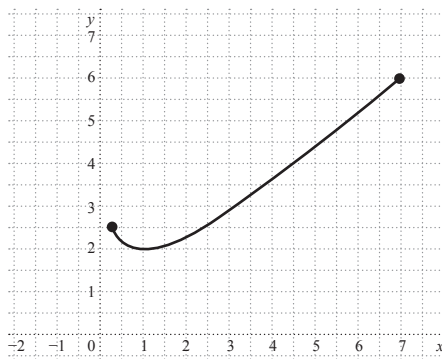
$x$	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$

4) Tableau de valeurs

$x$	0,25	0,5	1	1,5
Arrondi d'ordre 1 de $g(x)$	2,6	2,5	2	2,1

2	3	4	5	6	7
2,3	2,9	3,6	4,4	5,2	6,1

### Représentation graphique



### Exercice 24

1)  $Df = ]0 ; +\infty[$

2. a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  ; la droite d'équation  $x = 0$  est une asymptote à la représentation graphique de  $f$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( -2 + \frac{3}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) = -\infty$   
 car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -2 + \frac{3}{x} \right) = -2$

3. a) Pour  $x \in ]0 ; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{1-2x}{x}$

b)  $f$  est strictement croissante sur  $]0 ; \frac{1}{2}[$  et décroissante sur  $]\frac{1}{2} ; +\infty[$

c) Tableau de variation de  $g$ .

$x$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-
$f(x)$	$-\infty$	1,3	1,3	$-\infty$

4)  $f$  est dérivable et strictement décroissant sur  $[1,5 ; 2]$ .

De plus,  $f(1,5) \approx 0,4$  et  $f(2) \approx -0,3$   
 d'où  $f(1,5) \times f(2) < 0$ . Donc l'équation  $x \in [1,5 ; 2]$ ,

$f(x) = 0$  admet une solution unique.

5. La tangente (T) a pour équation :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

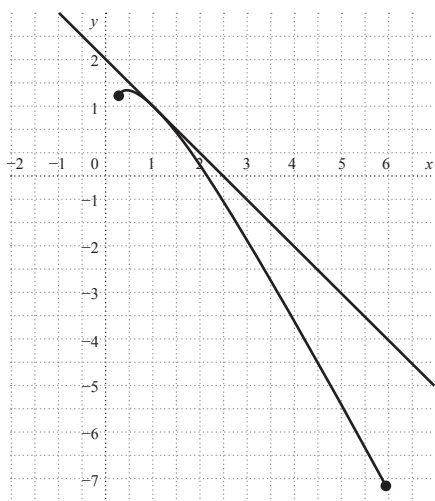
(T) :  $y = -x + 2$ .

6. Tableau de valeurs

$x$	0,25	0,5	0,75	1	1,5
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$	1,1	1,3	1,2	2	0,4

2	2,5	3	4	5	6
-0,3	-1,1	-1,9	-3,6	-5,4	-7,2

Représentation graphique



**Exercice 25**

1)  $Dh = \{x \in \mathbb{R}, x^2 - 3x + 4 > 0\}$

Le discriminant de  $x^2 - 3x + 4$  est  $-7$  qui est un nombre négatif d'où pour tout nombre réel  $x$ ,  $x^2 - 3x + 4 > 0$  et  $Dh = \mathbb{R}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

3. a) Pour tout nombre réel  $x$ ,

$$h'(x) = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 4}$$

b)  $h$  est strictement croissante sur  $]\frac{3}{2}; +\infty[$  et strictement décroissante sur  $]0; \frac{3}{2}[$ .

c) Tableau de variation de  $h$

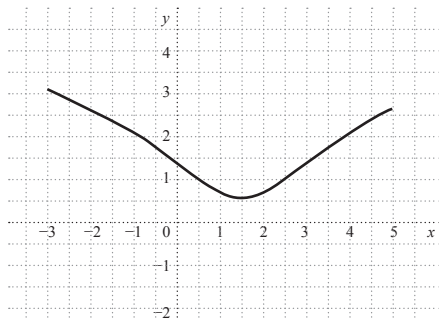
$x$	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-
$h$	$+\infty$	$\ln \frac{7}{4}$	$+\infty$

4) Tableau des valeurs

$x$	-3	-2	-1	0
Arrondi d'ordre 1 de $h(x)$	3,1	2,6	2,1	1,4

1	2	3	4	5
0,7	0,7	1,1	2,1	2,6

5) Représentation graphique



**Exercice 26**

1)

Planète	Mercure	Vénus	Terre
$\ln(r)$	-0,9491	-0,3239	0
$\ln(T)$	-1,4238	-0,4858	0

Mars	Jupiter	Saturne
0,4213	1,6492	2,2554
0,6318	2,4732	03,3830

2) On justifie par les calculs que la valeur de chaque case du tableau vérifie l'égalité :

$$\ln(T) = 1,5\ln(r)$$

$$\ln(T) = 1,5\ln(r) \Leftrightarrow \ln(T) = \frac{3}{2}\ln(r)$$

$$\Leftrightarrow 2\ln(T) = 3\ln(r)$$

$$\Leftrightarrow \ln(T^2) = \ln(r^3)$$

$$\Leftrightarrow T^2 = r^3$$

3) Oui on peut connaître la période de rotation d'une planète si on connaît la distance qui la sépare du soleil car de l'égalité  $T^2 = r^3$  on peut calculer T connaissant r.

## IV.4. Situation d'évaluation

### Exercice 27

$$Co \times (1,05)^n = 2 Co$$

$$(1,05)^n = 2$$

$$n\ln(1,05) = \ln 2$$

$$n = \frac{\ln 2}{\ln 1,05}$$

$$n = 14,34$$

$$n \approx 15 \text{ ans}$$

Donc le capital initial double effectivement après 15 ans.

## Leçon 4

## Fonction exponentielle népérienne

### IV. Exercices

#### IV.1. Exercices de fixation

##### Exercice 1

$\ln(a) = 7$  (avec  $a > 0$ ) équivaut à  $a = e^7$

$\ln(a) = -3,5$  (avec  $a > 0$ ) équivaut à  $a = e^{-3,5}$

$\ln(a) = 0$  (avec  $a > 0$ ) équivaut à  $a = e^0 = 1$

$e^a = 10$  équivaut à  $a = \ln 10$

$e^a = \frac{2}{7}$  équivaut à  $a = \ln\left(\frac{2}{7}\right)$

$e^a = 1$  équivaut à  $a = \ln 1 = 0$

##### Exercice 2

$e^{\ln 25}$		$\frac{1}{11}$
$e^{2\ln 3}$		28
$e^{\ln(7) + \ln(4)}$		25
$e^{-\ln(11)}$		15
$e^{\ln 6 + e^{\ln 9}}$		9

##### Exercice 3

$$A = 8,13 \quad ; \quad B = -2 \quad ; \quad C = \sqrt{2} \quad ;$$

$$D = e^{-\ln 5} = e^{\ln\left(\frac{1}{5}\right)} = \frac{1}{5}$$

##### Exercice 4

$e^{a+b} =$	$e^a + e^b$	$e^a \times e^b$	$a + b$
$e^{-a} =$	$-e^a$	$\frac{1}{e^a}$	$\frac{1}{e^a}$
$e^{a-b} =$	$\frac{e^a}{e^b}$	$e^a - e^b$	$a - b$
$(e^a)^r =$	$re^a$	$e^{ra}$	$e^a \times e^r$

##### Exercice 5

$$A = (e^3)^4 \times e^{-3} = e^9; \quad B = \frac{e \times e^8}{e^4} = e^5$$

$$C = (e^{-2})^3 \times \frac{e^4}{e^{-5}} = e^3;$$

$$D = \frac{e^9 \times e^{-4}}{e^3 \times e^2} = 1.$$

##### Exercice 6

Remplacer dans b)  $e^{(-2x)^5}$  par  $(e^{-2x})^5$ .

$$e^{-4x+1} \times (e^x)^4 = e^{-4x+1} \times e^{4x} = e;$$

$$(e^x)^3 \times (e^{-2x})^5 = e^{3x} \times e^{-10x} = e^{-7x};$$

$$(e^x - 2)(e^x + 2) = (e^x)^2 - 2^2 = e^{2x} - 4.$$

**Exercice 7**

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0. \text{ Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + e^x) = -\infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x + 3) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x + 3 + e^x) = +\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 8)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x + 8e^x) = 0, \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} (7 - 5x)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (7e^x - 5xe^x) = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$$

**Exercice 8**

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^x) = +\infty.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(9 + \frac{e^x}{x}\right) = +\infty, \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x}\right) = +\infty.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x + 1) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^x) = -\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x + 1 - e^x) = -\infty.$$

**Exercice 9**

1. a) Pour tout nombre réel  $x$  non nul,

$$3x + 2 - e^x = 3x + x \times \frac{2}{x} - x \times \frac{e^x}{x} = x \left(3 + \frac{2}{x} - \frac{e^x}{x}\right)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x + 2 - e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(3 + \frac{2}{x} - \frac{e^x}{x}\right) = -\infty, \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

2) • Pour tout nombre réel  $x$  non nul,

$$4x - 7 - e^x = 3x - x \times \frac{7}{x} - x \times \frac{e^x}{x} = x \left(4 - \frac{7}{x} - \frac{e^x}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (4x - 7 - e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(4 - \frac{7}{x} - \frac{e^x}{x}\right) = -\infty, \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

• Pour tout nombre réel  $x$  non nul,

$$-4x + 3 + e^x = -4x + x \times \frac{3}{x} + x \times \frac{e^x}{x}$$

$$= x \left(-4 + \frac{3}{x} + \frac{e^x}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-4x + 3 + e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(-4 + \frac{3}{x} + \frac{e^x}{x}\right)$$

$$= +\infty, \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

**Exercice 10**

$$1) f'(x) = -4 + e^x$$

$$1) g'(x) = 7 - e^x$$

$$1) h'(x) = -3e^x + (8 - 3x)e^x = (5 - 3x)e^x$$

**Exercice 11**

$$1) f'(x) = 1 + e^x$$

Pour tout nombre réel  $x$ , on a  $f'(x) > 0$ .

Donc  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

$$2) f'(x) = e^x + xe^x = (x + 1)e^x;$$

$f'(x) < 0$  pour  $x < -1$  et  $f'(x) \geq 0$  pour  $x \geq -1$ .

Donc  $f$  est décroissante sur  $] -\infty ; -1]$  et croissante sur  $]-1 ; +\infty[$ .

$$3) f'(x) = \frac{e^x(x+2) - e^x}{(x+2)^2} = \frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2};$$

Donc  $f$  est décroissante sur  $]-2 ; -1]$

et croissante sur  $]-1 ; +\infty[$ .

**Exercice 12**

C'est la courbe 2.

**Exercice 13**

$$1) e^{2x-3} = e^{x+1}$$

$$2x - 3 = x + 1$$

$$x = 4$$

$$S = \{4\}$$

$$2) e^{x+2} = e^{-x+3}$$

$$x + 2 = -x + 3$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$3) e^{4x+5} = e$$

$$4x + 5 = 1$$

$$4x = -4$$

$$x = -1 \quad S = \{-1\}$$

3)  $e^{x^2-3} = e^{2x}$   
 $x^2 - 3 = 2x$   
 $x^2 - 2x - 3 = 0$   
 $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$   
 $x_1 = \frac{2-4}{2} = -1$  et  $x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$   
 $S = \{-1; 3\}$

### Exercice 14

1)  $e^{x+5} = 11$   
 $x + 5 = \ln 11$   
 $x = \ln(11) - 5 \quad S = \{\ln(11) - 5\}$

2)  $e^{2x} - 9 = 0$   
 $e^{2x} = 9$   
 $2x = \ln 9$   
 $x = \frac{\ln 9}{2} \quad S = \left\{ \frac{\ln 9}{2} \right\}$

3)  $e^{9x+2} = -3$   
 Cette égalité est impossible car  $e^{9x+2} > 0$  et  $-3 < 0$ . Donc  $S = \emptyset$

4)  $e^{x^2} = 4$   
 $x^2 = \ln 4$   
 $x = \sqrt{\ln 4}$  ou  $x = -\sqrt{\ln 4}$   
 $S = \{ \sqrt{\ln 4}; -\sqrt{\ln 4} \}$

5)  $e^{2x-1} + 8 = 0$   
 $e^{2x-1} = -8$   
 Cette égalité est impossible car  $e^{2x-1} > 0$  pour tout nombre réel  $x$  et  $-8 < 0$ . Donc  $S = \emptyset$ .

### Exercice 15

1)  $2e^{3x} - 5 = 0$   
 $2e^{3x} = 5$   
 $e^{3x} = \frac{5}{2}$   
 $3x = \ln\left(\frac{5}{2}\right)$   
 $x = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{5}{2}\right); \quad S = \left\{ \frac{1}{3} \ln\left(\frac{5}{2}\right) \right\}$

2)  $-3e^{x-1} + 1 = 0$   
 $-3e^{x-1} = -1$   
 $e^{x-1} = \frac{1}{3}$   
 $x - 1 = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln 3$   
 $x = 1 - \ln 3; \quad S = \{1 - \ln 3\}$

3)  $8e^{4-x} + 9 = 0$   
 $8e^{4-x} = -9$ . Cette égalité est impossible car  $8e^{4-x} > 0$  et  $-9 < 0$ . Donc  $S = \emptyset$ .

### Exercice 16

1)  $e^{7x+3} \geq e^{5x+9}$   
 $7x + 3 \geq 5x + 9$   
 $2x \geq 6$   
 $x \geq 3; \quad S = [3; +\infty[$

2)  $e^{1-3x} \leq e^{x+4}$   
 $1 - 3x \leq x + 4$   
 $-4x \leq 3$   
 $x \geq -\frac{3}{4}; \quad S = \left[-\frac{3}{4}; +\infty\right[$

1)  $e^{x^2} \leq e$   
 $x^2 \leq 1$   
 $x^2 - 1 \leq 0$   
 $(x-1)(x+1) \leq 0;$   
 $S = [-1; 1]$

### Exercice 17

1)  $e^{-x+2} > 1$   
 $-x + 2 > \ln 1$   
 $-x + 2 > 0$   
 $-x > -2$   
 $x < 2; \quad S = ]-\infty; 2[$

2)  $e^{2x} \leq 2$   
 $2x \leq \ln 2$   
 $x \leq \frac{\ln 2}{2}; \quad S = \left] -\infty; \frac{\ln 2}{2} \right]$

3)  $e^{2-3x} < 3$   
 $2 - 3x < \ln 3$   
 $-3x < \ln(3) - 2$   
 $x > \frac{2 - \ln 3}{3}; \quad S = \left] \frac{2 - \ln 3}{3}; +\infty \right[$

4)  $12 - 3e^{2x} > 0$   
 $-3e^{2x} > -12$   
 $e^{2x} < 4$   
 $2x < \ln 4$   
 $x < \frac{\ln 4}{2}; \quad S = \left] -\infty; \frac{\ln 4}{2} \right[$

### Exercice 18

1)  $f'(x) = 2xe^{x^2-1};$   
 2)  $f'(x) = (2x+3)e^{x^2+3x-2}; \quad (f(x) = e^{x^2+3x-2})$   
 3)  $f'(x) = (-8x+1)e^{-4x^2+x+7};$   
 4)  $f'(x) = (x-8)e^{0,5x^2-8x-6}$

## IV.2. Exercices de renforcement

### Exercice 19

- 1)  $(e^x - 3)(e^x - 7) = 0$   
 $e^x - 3 = 0$  ou  $e^x - 7 = 0$   
 $x = \ln 3$  ou  $x = \ln 7$   
 $S = \{\ln 3 ; \ln 7\}$
- 2)  $e^x \left( e^x - \frac{2}{3} \right) = 0$   
 $e^x = 0$  (impossible) ou  $e^x - \frac{2}{3} = 0$   
 $e^x = \frac{2}{3}$   
 $x = \ln \left( \frac{2}{3} \right)$   
 $S = \left\{ \ln \left( \frac{2}{3} \right) \right\}$
- 3)  $(2x - 5)(e^x + 1) = 0$   
 $2x - 5 = 0$  ou  $e^x + 1 = 0$   
 $2x = 5$  ou  $e^x = -1$  (impossible)  
 $x = \frac{5}{2}$   
 $S = \left\{ \frac{5}{2} \right\}$

### Exercice 20

- 1)  $\frac{1 - e^x}{e^x + 1} = 1$   
 Pour tout nombre réel  $x$ ,  $e^x + 1 \neq 0$ .  
 Donc l'ensemble de validité est  $\mathbb{R}$ .  
 $1 - e^x = e^x + 1$   
 $1 - e^x - e^x - 1 = 0$   
 $-2e^x = 0$   
 $e^x = 0$  impossible  
 $S = \emptyset$
- 2)  $\frac{2e^x + 1}{e^x - 1} = 3$
- Soit  $V$  l'ensemble de validité.  
 Pour tout nombre réel  $x$ ,  $x \in V$  ssi  $e^x - 1 \neq 0$ .  
 On a :  $e^x - 1 = 0$   
 $e^x = 1$   
 $x = 0$   
 $V = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
  - $\frac{2e^x + 1}{e^x - 1} = 3$   
 $2e^x + 1 = 3(e^x - 1)$   
 $2e^x + 1 = 3e^x - 3$   
 $e^x = 4$   
 $x = \ln 4$   
 $S = \{\ln 4\}$

### Exercice 21

- 1) Pour tout nombre réel  $x$ ,  
 $(e^x - 1)(2e^x + 1) = 2e^{2x} + e^x - 2e^x - 1$   
 $= 2e^{2x} - e^x - 1$
- 2)  $2e^{2x} - e^x - 1 = 0$   
 $(e^x - 1)(2e^x + 1) = 0$   
 $e^x - 1 = 0$  ou  $2e^x + 1 = 0$   
 $e^x = 1$  ou  $e^x = -\frac{1}{2}$  (impossible)  
 $x = 0$   
 $S = \{0\}$

### Exercice 22

1. a) on a :  $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$   
 $(e^x)^2 - 5e^x + 6 = 0$   
 $X^2 - 5X + 6 = 0$ .  
 Donc résoudre l'équation (E) revient à résoudre :  
 $X^2 - 5X + 6 = 0$ .
- b)  $X^2 - 5X + 6 = 0$   
 $\Delta = 25 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1$  ;  
 $X_1 = \frac{5-1}{2} = 2$  et  $X_2 = \frac{5+1}{2} = 3$  ;  $S = \{2 ; 3\}$
- 2)  $X^2 - 5X + 6 = 0$  a pour solutions 2 et 3.  
 Pour  $X = 2$ , on a  $e^x = 2$ , soit  $x = \ln 2$   
 Pour  $X = 3$ , on a  $e^x = 3$ , soit  $x = \ln 3$   
 L'ensemble des solutions de (E) est  $S = \{\ln 2 ; \ln 3\}$

### Exercice 23

- 1)  $e^{-x} - 3 = 2e^x$   
 $1 - 3e^x = 2e^{2x}$   
 $2e^{2x} + 3e^x - 1 = 0$   
 On pose :  $X = e^x$   
 L'équation devient  $2X^2 + 3X - 1 = 0$   
 $\Delta = 9 - 4 \times 2 \times (-1) = 9 + 16 = 25$  ;  
 $X_1 = \frac{-3-5}{4} = -2$  et  $X_2 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$   
 Pour  $X = -2$ , on a  $e^x = -2$  (impossible)  
 Pour  $X = \frac{1}{2}$ , on a  $e^x = \frac{1}{2}$ , soit  $x = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$   
 $S = \{-\ln 2\}$
- 2)  $7e^{-x} - e^{-2x} = 6$   
 $7e^x - 1 = 6e^{2x}$   
 $6e^{2x} - 7e^x + 1 = 0$   
 On pose :  $X = e^x$   
 L'équation devient  $6X^2 - 7X + 1 = 0$   
 $\Delta = 49 - 4 \times 6 \times 1 = 49 - 24 = 25$  ;  
 $X_1 = \frac{7-5}{12} = \frac{1}{6}$  et  $X_2 = \frac{7+5}{12} = 1$

Pour  $X = \frac{1}{6}$ , on a  $e^x = \frac{1}{6}$  soit  $x = \ln\left(\frac{1}{6}\right) = -\ln 6$

Pour  $X = 1$ , on a  $e^x = 1$ , soit  $x = 0$

$S = \{-\ln 6; 0\}$

### Exercice 24

1)  $(e^x - 2)(3 - e^x) \geq 0$

$x$	$-\infty$	$\ln 2$	$\ln 3$	$+\infty$
$e^x - 2$	-	0	+	+
$3 - e^x$	+	+	0	-
$(e^x - 2)(3 - e^x)$	-	0	+	-

$S = [\ln 2; \ln 3]$

2)  $(9 - x^2)e^x < 0$

$x$	$-\infty$	$-3$	$3$	$+\infty$
$9 - x^2$	-	0	+	0
$e^x$	+	+	+	+
$(9 - x^2)e^x$	-	0	+	0

$S = ]-\infty; -3[ \cup ]3; +\infty[$

3)  $(x - 1)(e^x - 2) \leq 0$

$x$	$-\infty$	$\ln 2$	$1$	$+\infty$
$x - 1$	-	-	0	+
$e^x - 2$	-	0	+	+
$(x - 1)(e^x - 2)$	+	0	-	0

$S = [\ln 2; 1]$

### Exercice 25

1)  $P(1) = 1 - 7 + 6 = 0$ .

2)  $P(x) = (x - 1)(x^2 + ax + b)$   
 $= x^3 + ax^2 + bx - x^2 - ax - b$   
 $= x^3 + (a - 1)x^2 + (b - a)x - b$

Par identification  $a - 1 = 0$ ;  $b - a = -7$  et  $-b = 6$

D'où  $a = 1$  et  $b = -6$

Par suite  $P(x) = (x - 1)(x^2 + x - 6)$ .

3. a)  $P(x) = 0$

$(x - 1)(x^2 + x - 6) = 0$   
 $x - 1 = 0$  ou  $x^2 + x - 6 = 0$   
 $x = 1$  ou  $x^2 + x - 6 = 0$

Le discriminant de  $x^2 + x - 6 = 0$  est

$\Delta = 1 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$ .

Ses solutions sont :  $x_1 = \frac{-1 - 5}{2} = -3$

et  $x_2 = \frac{-1 + 5}{2} = 2$ .

L'ensemble des solutions de l'équation  $P(x) = 0$  est  $S = \{1; -3; 2\}$

b)  $P(x) > 0$

$(x - 1)(x^2 + x - 6) > 0$

$x$	$-\infty$	$-3$	$1$	$2$	$+\infty$
$x - 1$	-	-	0	+	+
$x^2 + x - 6$	+	0	-	-	0
$P(x)$	-	0	+	0	+

$S = ]-3; 1[ \cup ]2; +\infty[$

4. a)  $e^{3x} - 7e^x + 6 = 0$

$(e^x)^3 - 7e^x + 6 = 0$

$e^x = -3$  (impossible) ou  $e^x = 1$  ou  $e^x = 2$

$x = 0$  ou  $x = \ln 2$

$S = \{0; \ln 2\}$

b)  $e^{3x} - 7e^x + 6 > 0$

$(e^x)^3 - 7e^x + 6 > 0$

$e^x \in ]-3; 1[ \cup ]2; +\infty[$

$e^x < 1$  ou  $e^x > 2$

$x < 0$  ou  $x = \ln 2$

$S = ]-\infty; 0[ \cup ]\ln 2; +\infty[$

## IV.3. Exercices d'approfondissement

### Exercice 26

1) Pour nombre réel  $x$ ,  $g^2(x) = e^x - 1$ .

2. a)  $e^x - 1 \geq 0$

$e^x \geq 1$

$x \geq 0$

Par suite  $g^2(x) = 0$  pour  $x = 0$ ;  $g^2(x) > 0$  sur

$]0; +\infty[$  et  $g^2(x) < 0$  sur  $]-\infty; 0[$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$g^2(x)$	-	0	+
$g(x)$			

b) D'après la question précédente, pour tout nombre réel  $x$ , on a  $g(x) \geq 1$

C'est-à-dire  $e^x - x \geq 1$ ;  $e^x \geq x + 1$ .

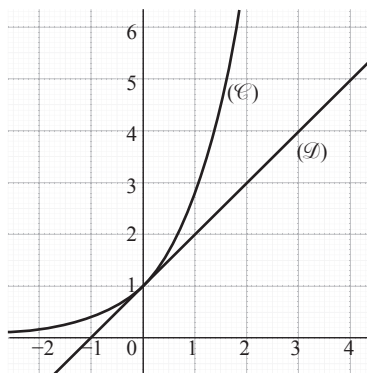
3) a) (D) :  $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$= 1(x - 0) + 1$

$= x + 1$ .

b) D'après la question précédente, pour tout nombre réel, on a  $e^x \geq x + 1$ .

Donc la courbe de la fonction exponentielle népérienne est au-dessus de sa tangente en son point d'abscisse 0.



### Exercice 27

1) Pour nombre réel  $x$ ,  $f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$   
Son signe.

Pour nombre réel  $x$ ,  $e^x > 0$  donc  $f'(x)$  a le même signe que  $x+1$ .

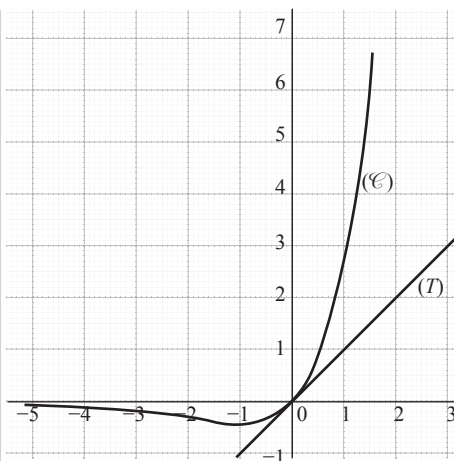
$f'(x) = 0$  pour  $x = -1$ ;  $f'(x) > 0$  sur  $]-1; +\infty[$  et  $f'(x) < 0$  sur  $]-\infty; -1[$ .

2) Tableau de variation de  $f$  pour  $x \in \left] -5; \frac{3}{2} \right]$

$x$	-5	-1	$\frac{3}{2}$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$-5e^{-5}$	↘ 0 ↗	$\frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}}$

3) (T) :  $y = f'(0)(x-0) + f(0) = 1(x-0) + 0$ .  
D'où (T) :  $y = x$ .

4)



### Exercice 28

1.a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+3 - e^x) = -\infty$ , car  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+3) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x+3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) = 0$ .

Donc la droite (D) d'équation  $y = x+3$  est asymptote à (C) en  $-\infty$ .

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{3}{x} - \frac{e^x}{x} \right) = -\infty$   
car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$  et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{e^x}{x} \right) = -\infty$$

2) Pour tout nombre réel  $x$ ,  $f'(x) = 1 - e^x$

Son signe.

$$1 - e^x \geq 0$$

$$1 \geq e^x$$

$$0 \geq e^x$$

$f'(x) = 0$  pour  $x = 0$ ;  $f'(x) > 0$  sur  $]-\infty; 0[$  et

$f'(x) < 0$  sur  $]0; +\infty[$ .

3)  $f$  est croissante  $]-\infty; 0]$  sur et décroissante sur  $]0; +\infty[$

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	↘	2	↘

4) •  $f$  est dérivable et strictement décroissante sur  $]1; 2]$ .

De plus  $f(1) \approx 1,28$ ,  $f(2) = 5 - e^2 \approx -2,4$  et  $f(1) \times f(2) < 0$ .

Donc l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique dans l'intervalle  $[1; 2]$ .

•  $f$  est dérivable et strictement croissante sur  $[-3; -2]$ .

De plus  $f(-3) \approx -0,05$ ,  $f(-2) \approx 0,8$  et  $f(-2) \times f(-3) < 0$ .

Donc l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\beta$  dans l'intervalle  $[-3; -2]$ .

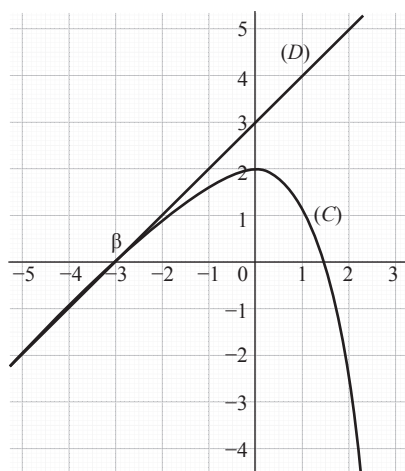
$x$	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
$f(x)$	+	+	+	+	+	+	-

$1,5 < \alpha < 1,6$

$x$	1,5	1,51
$f(x)$	+	-

$1,50 < \alpha < 1,51$

5)



### Exercice 29

1.a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x - 2e^x) = 0$ , car  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ .

Interprétation graphique : la droite d'équation  $y = 0$  est asymptote horizontale à (C) en  $-\infty$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2)e^x = +\infty$ , car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ .

2) Pour tout nombre réel  $x$ ,  $f'(x) = e^x + (x-2)e^x = (x-1)e^x$   
Son signe.

Pour tout nombre réel  $x$ ,  $e^x > 0$  donc  $f'(x)$  a le même signe que  $x-1$ .

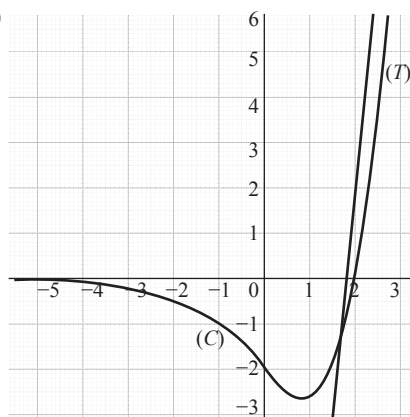
$f'(x) = 0$  pour  $x = 1$ ;  $f'(x) > 0$  sur  $]1; +\infty[$  et  $f'(x) < 0$  sur  $]-\infty; 1[$ .

3) est strictement décroissante sur  $]-\infty; 1[$  et strictement croissante  $]1; +\infty[$

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	$-e$	$+\infty$

4) (T) :  $y = f'(2)(x-2) + f(2) = e^2(x-2) + 0$ .  
D'où (T) :  $y = e^2(x-2)$ .

5)



### Exercice 30

1.a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x-1} \times e^x = 0$ , car  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x-1} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ .

Interprétation graphique : la droite d'équation  $y = 0$  est asymptote horizontale à (C) en  $-\infty$ .

b)  $\lim_{x < \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x < \frac{1}{2}} \left( \frac{1}{2x-1} \times e^x \right) = -\infty$ , car  $\lim_{x < \frac{1}{2}} \frac{1}{2x-1} = -\infty$  et  $\lim_{x < \frac{1}{2}} e^x = e^{\frac{1}{2}}$ .

$\lim_{x > \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x > \frac{1}{2}} \left( \frac{1}{2x-1} \times e^x \right) = +\infty$ , car

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{2} \\ x > \frac{1}{2}}} \frac{1}{2x-1} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} e^x = e^{\frac{1}{2}}.$$

Interprétation graphique : la droite d'équation

$x = \frac{1}{2}$  est asymptote verticale à (C) en  $-\infty$ .

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \times \frac{x}{2x-1} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x-1} = \frac{1}{2}.$$

2) Pour tout nombre réel  $x$  de  $\mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ ,

$$f'(x) = \frac{e^x(2x-1) - 2e^x}{(2x-1)^2} = \frac{(2x-3)e^x}{(2x-1)^2}.$$

3) Pour tout nombre réel  $x$  de  $\mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ ,

$(2x-1)^2 > 0$  et  $e^x > 0$  donc  $f'(x)$  a le même signe que  $2x-3$ .

$$f'(x) = 0 \text{ pour } x = \frac{3}{2}; f'(x) > 0 \text{ sur } \left] \frac{3}{2}; +\infty \right[ \text{ et}$$

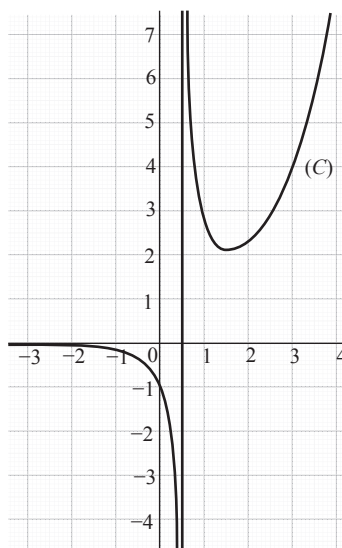
$$f'(x) < 0 \text{ sur } ]-\infty; \frac{1}{2}[ \cup \left] \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right[.$$

$f$  est strictement décroissante sur  $] -\infty; \frac{1}{2}[$  et sur  $\left] \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right[$ .

$f$  est strictement croissante sur  $\left] \frac{3}{2}; +\infty \right[$ .

$x$	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$	-		-	0	+
$f(x)$	0		$+\infty$	$\frac{e^{\frac{3}{2}}}{2}$	$+\infty$

4)



#### IV.4. Situation d'évaluation

##### Exercice 31

Pour tout nombre réel  $x$ , avec  $x \geq 0,5$ ,

$$f'(x) = -2e^x + (4-2x)e^x = (2-2x)e^x$$

Son signe.

Pour nombre réel  $x$ , avec  $x \geq 0,5$ ,  $e^x > 0$  donc

$f'(x)$  a le même signe que  $2-2x$ .

$f'(x) = 0$  pour  $x = 1$ ;  $f'(x) < 0$  sur  $]1; +\infty[$  et

$f'(x) > 0$  sur  $]0,5; 1[$ .

$f$  est strictement croissante sur  $]0,5; 1[$  et strictement décroissante sur  $]1; +\infty[$

$x$	0,5	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		$2e$	

Le bénéfice maximal est atteint lorsque l'entreprise fabrique 1 000 matériaux.

Le bénéfice maximal est alors  $2e \times 1\,000\,000$ , soit environ 5 436 640 F.

Lorsque l'entreprise fabrique entre 500 et 1 000 matériaux, les bénéfices sont en constante augmentation. Mais au-delà de 1 000 matériaux, ces bénéfices diminuent.

L'entreprise réalise même des pertes lorsqu'elle fabrique plus de 2 000 matériaux car  $f(2) = 0$ .

# Leçon 5 Statistique

## IV. Exercices

### IV.1. Exercices de fixation

#### Exercice 1

Une série statistique double se définit à partir de	un caractère	
	deux caractères	×
	trois caractères	
Un nuage de points est un ensemble	de points alignés	
	deux points moyens	
	de points	×
Le point moyen a pour abscisse	la somme des abscisses des points du nuage de points	
	la moyenne des abscisses des points du nuage de points	×
	le produit des abscisses des points du nuage de points	

#### Exercice 2 (A1 Seulement)

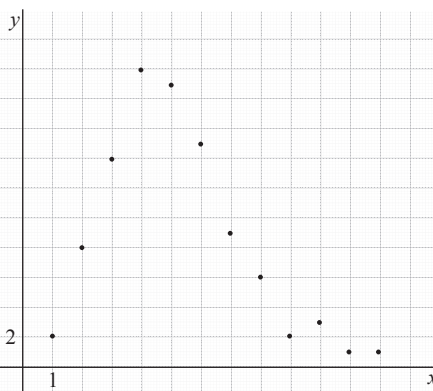
1) Tableau des séries marginales du caractère X

Classe	TA1	TA2	TA3
Effectif	66	66	55
Fréquence	0,27	0,27	0,23
TA4	Total		
55	242		
0,23	1		

1) Tableau des séries marginales du caractère Y

LV1	Anglais	Allemand
Effectif	118	50
Fréquence	0,49	0,21
Espagnol	Total	
74	242	
0,30	1	

#### Exercice 3



#### Exercice 4

$$\bar{X} = \frac{78}{12} = 6,5$$

$$\bar{Y} = \frac{100}{12} \approx 8,33$$

#### Exercice 5

$$\bar{X} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8}{8} = \frac{36}{8}$$

$$= 4,5 \text{ et}$$

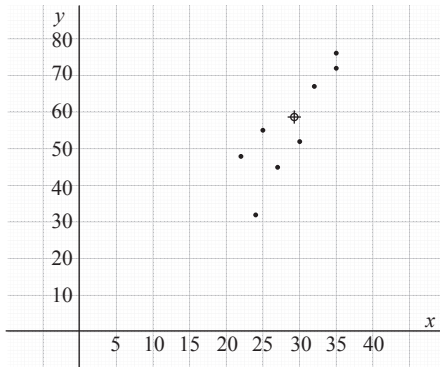
$$\bar{Y} = \frac{16 + 19 + 22 + 23 + 24 + 26 + 27 + 30}{8}$$

$$= \frac{187}{8} = 23,375$$

Donc le point moyen est (4,5 ; 23,375)

**Exercice 6**

1)



2)

$$\bar{X} = \frac{30 + 27 + 32 + 25 + 35 + 22 + 24 + 35}{8}$$

$$= \frac{230}{8} = 28,75 \text{ et}$$

$$\bar{Y} = \frac{52 + 45 + 67 + 55 + 76 + 48 + 32 + 72}{8}$$

$$= \frac{447}{8} = 55,875$$

Donc le point moyen est G(28,75 ; 55,875)

**Exercice 7**

$y = -2x - 2$	$x = 2y + 2$	$y = 2x - 2$
		x

$x - 3 = 2y - 4$

**Exercice 8 (A1 Seulement)**

$x_i$	$y_i$	$n_i$	$x_i y_i$	$x_i^2$
12	26	1	312	144
20	47	1	940	400
15	24	1	360	225
23	54	1	1242	529
8	5	1	40	64
30	81	1	2430	900

	24	61	1	1464	576
Total	132	298	7	6788	2838

$$1) \bar{X} = \frac{132}{7} = 18,85$$

$$V(x) = \frac{2838}{7} - 18,85^2 \approx 50,1$$

$$2) \bar{Y} = \frac{298}{7} = 42,57$$

$$\text{Cov}(X,Y) = \frac{6788}{7} - 18,85 \times 42,57$$

**Exercice 9 (A1 Seulement)**

$x_i$	$y_i$	$y_i^2$	$x_i^2$	$x_i y_i$	
1	32	1	1024	32	
2	38	4	1444	76	
4	44	16	1936	176	
6	48	36	2304	288	
8	51	64	2601	408	
10	53	100	2809	530	
12	56	144	3136	672	
Total	43	322	365	15254	2182

$$\bar{X} = \frac{43}{7} = 6,14, \quad \bar{Y} = \frac{322}{7} = 46$$

$$V(X) = \frac{365}{7} - (6,14)^2 = 52,14 - 37,70 = 14,40$$

$$V(Y) = \frac{15254}{7} - (46)^2 = 2179,14 - 2116 = 63,14$$

$$\text{Cov}(X,Y) = \frac{2182}{7} - 6,14 \times 46$$

$$= 311,71 - 282,44 = 29,27$$

Le coefficient de corrélation linéaire est :

$$r = \frac{29,27}{\sqrt{14,44 \times 63,14}} = \frac{29,27}{3,8 \times 7,94}$$

$$= \frac{29,27}{30,17} = 0,97$$

Interprétation : Il y a une forte corrélation entre X et Y, car  $0,86 < r < 1$ .

**Exercice 10**

1)

1	2,5	3	3,5	4	4
15	14	13	13,5	13	12,5

$$\bar{X}_1 = \frac{1 + 2,5 + 3 + 3,5 + 4 + 4}{6} = 3 \text{ et}$$

$$\bar{Y}_1 = \frac{15 + 14 + 13 + 13,5 + 13 + 12,5}{6} = 13,5$$

donc  $G_1(3; 13,5)$ .

5	5,5	5,5	6	8	9
12	11,5	12	11,5	11	11

$$\bar{X}_2 = \frac{5 + 5,5 + 5,5 + 6 + 8 + 9}{6} = 6,5 \text{ et}$$

$$\bar{Y}_2 = \frac{12 + 11,5 + 12 + 11,5 + 11 + 11}{6} = 11,5$$

donc  $G_2(6,5; 11,5)$ .

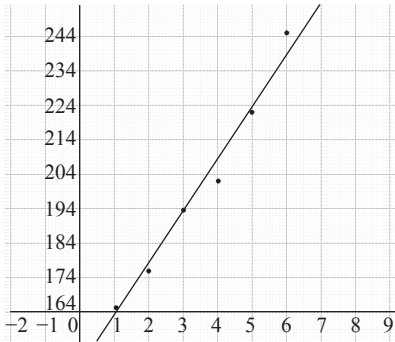
2) Une équation de la droite ( $G_1, G_2$ ) est :

$$y - 13,5 = \frac{11,5 - 13,5}{6,5 - 3}(x - 3).$$

On obtient :  $y = -2x + 19,5$ .

### Exercice 11

1)



2)

1	2	3
165	176	193

$$\bar{X}_1 = \frac{1 + 2 + 3}{3} = 2 \text{ et}$$

$$\bar{Y}_1 = \frac{165 + 176 + 193}{3} = 178 ; \text{ soit } G_1(2; 178).$$

4	5	6
202	222	245

$$\bar{X}_2 = \frac{4 + 5 + 6}{3} = 5 \text{ et}$$

$$\bar{Y}_2 = \frac{202 + 222 + 245}{3} = 223$$

soit  $G_2(5; 223)$ .

Une équation de ( $G_1, G_2$ ) est  $y = 15x + 148$ .

### Exercice 12 (A1 Seulement)

Une équation de la droite de régression de Y en X est de la forme :

$$y = ax + b \text{ avec } a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)} \text{ et } b = \bar{Y} - a\bar{X}$$

$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$x_i y_i$
1	10	1	10
2	11	4	22
3	12	9	36
4	13	16	52
Total	10	46	30

$$\bar{X} = \frac{10}{4} = 2,5, \quad \bar{Y} = \frac{46}{4} = 11,5;$$

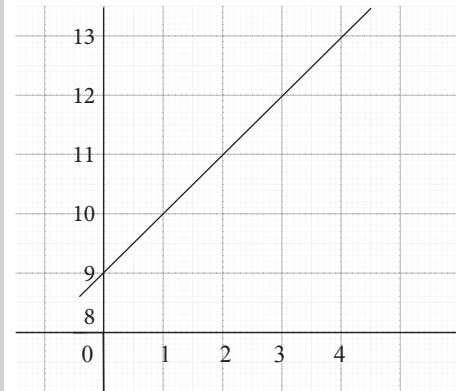
$$V(X) = \frac{30}{4} - (2,5)^2 = 1,25$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{120}{4} - (2,5)(11,5) = 1,25.$$

$$a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{1,25}{1,25} = 1 \text{ et } b = \bar{Y} - a\bar{X}$$

$$= 11,5 - 2,5 = 9.$$

Donc  $y = x + 9$ .



### Exercice 13

$$x = a'y + b' \text{ avec } a' = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(Y)}$$

$$\text{et } b' = \bar{Y} - a'\bar{X}$$

$x_i$	1	2	3	4
$y_i$	325	328	331	333
$y_i^2$	105625	107584	109561	110889
$x_i y_i$	325	656	993	1332

5	6	7	8
337	341	342	345
113569	116281	116964	119025
1685	2046	2394	2760

		Total
9	10	55
346	345	3373
119716	119025	1138239
3114	3450	18755

$$\bar{X} = \frac{55}{10} = 5,5; \bar{Y} = \frac{3373}{10} = 337,3;$$

$$V(Y) = \frac{1138239}{10} - (337,3)^2$$

$$= 113823,9 - 113771,29 = 52,61$$

$$Cov(X, Y) = \frac{18755}{10} - 5,5 \times 337,3$$

$$= 1875,5 - 1855,15 = 20,35.$$

$$\text{Donc } a' = \frac{20,35}{52,61} = 0,3868 \text{ et}$$

$$b' = 337,3 - 0,3868 \times 5,5 = 335,17.$$

On obtient :  $x = 0,3868y + 335,17$

### Exercice 14

Pour  $x = 11$ , on a :  $y = 1,6 \times 11 + 23 = 40,6$ .  
Donc  $Y$  peut être estimé à 40,6.

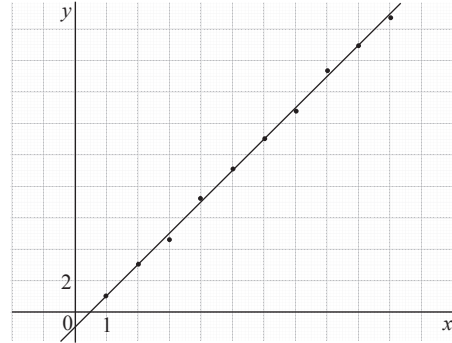
### Exercice 15

Graphiquement, la température s'estime à 10° C.

## IV.2. Exercices de renforcement

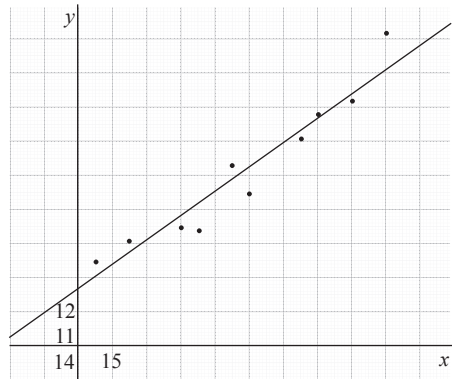
### Exercice 16

- 1) Nuage de points (Voir graphique)
- 2)  $G(5,5; 10,06)$
- 3)  $G_1(3; 5,08)$  et  $G_2(8; 15,04)$ .  
Donc  $y = 2,008x - 0,944$  est une équation de la droite de Mayer.
- 4) Voir graphique
- 5) Pour  $x = 6,3$ ,  $y$  s'estime à 11,7064.



### Exercice 17

- 1) Voir graphique
- 2) Point moyen :  $G(23,7; 16,16)$ .
- 3) Équation de la droite de Mayer.  
On a :  $G_1(19,2; 14,56)$  et  $G_2(28,2; 17,76)$ .  
Donc  $y = 3,2x - 61,44$ .
- 4) Si la température est 40° alors  $y = 66,56$ , c.à.d qu'on peut estimer le nombre de pulsation à 66,56.

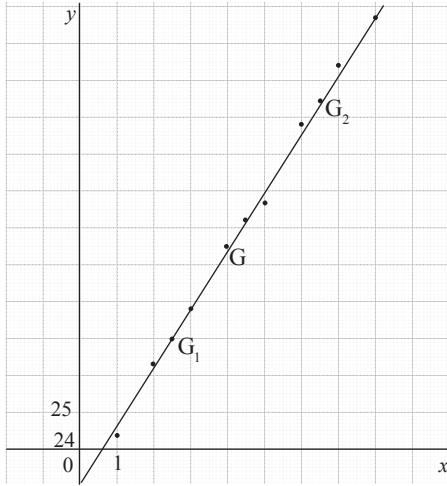


### Exercice 18

- 1) Nuage de points (Voir Graphique).
- 2) Point moyen  $G(4,5; 30,2)$ .
- 3) a)  $G_1(2,5; 27)$  et  $G_2(6,5; 33,4)$ .  
b) Voir Graphique.
- 4) Une équation de la droite de Mayer est :  
 $y = 1,6x + 23$ .
- 5) a) Pour l'année 2010,  $x = 11$  donc  
 $y = 1,6 \times 11 + 23 = 40,6$ . En 2010 la

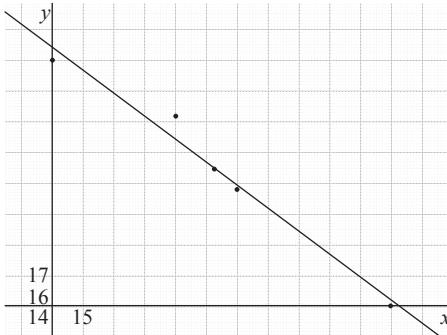
fréquentation sera de 40600.

b) Pour  $y = 45$ , on a  $x = 14$ . En 2013, la fréquentation dépassera 45000.



### Exercice 19

1) Nuage de points.



2) Point Moyen :  $G(1925 ; 205)$

3) a)  $G_1(1700 ; 219)$  et  $G_2(2150 ; 191)$ .

Une équation de la droite de Mayer est :

$$y = -0,062x + 324,4.$$

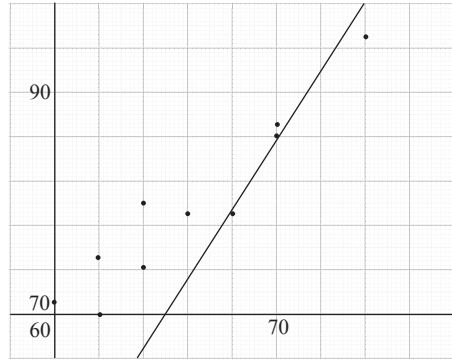
b) Voir graphique.

4) Le chiffre d'affaires le plus élevé est obtenu à la 4<sup>ème</sup> année. Il est de 2 500 000 F.

5) Pour  $x = 3\,000\,000$  F, le nombre d'exemplaires vendus est :  $y = -0,08 \times 3000 + 349 = 109$ .

### Exercice 20

1) Nuage de points.



$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$y_i^2$	$x_i y_i$	
70	87	4900	7568	6090	
60	71	3600	5041	4260	
68	79	4624	6241	5214	
64	74	4096	5476	4736	
66	79	4356	6241	5214	
64	80	4096	6400	5120	
62	75	3844	5625	4650	
70	86	4900	7396	6020	
74	95	5476	9025	7030	
62	70	3844	4900	4340	
<b>Total</b>	<b>660</b>	<b>796</b>	<b>43736</b>	<b>63913</b>	<b>52832</b>

2) Point moyen  $G$

$$\bar{X} = \frac{660}{10} = 66. \quad \bar{Y} = \frac{796}{10} = 79,6$$

3) Coefficient de corrélation linéaire

$$V(X) = \frac{43736}{10} - (66)^2 = 17,6.$$

$$V(Y) = \frac{63913}{10} - (79,6)^2 = 55,14.$$

$$Cov(X, Y) = \frac{52832}{10} - 66 \times 79,6 = 29,6.$$

$$r = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{V(X) V(Y)}} = \frac{29,6}{\sqrt{17,6 \times 55,14}} = 0,95.$$

4) Une équation de la droite de régression de Y en X est de la forme :

$$y = ax + b \text{ avec } a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)} \text{ et } b = \bar{Y} - a\bar{X}$$

$$a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{29,6}{17,6} = 1,68 \text{ et}$$

$$b = \bar{Y} - a\bar{X} = 79,6 - 1,68 \times 66 = -31,28.$$

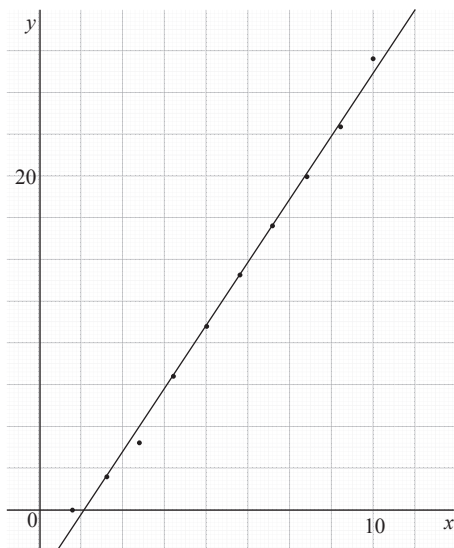
$$\text{Donc } y = 1,68x - 31,28.$$

5) Pour  $x = 77$ ,  $y = 1,68 \times 77 - 31,28 = 98,08$

Donc pour un acier qui a une teneur en carbone de 77, on peut estimer sa charge de rupture à 98 kg

### Exercice 21 (A1 Seulement)

1) Nuage de points.



$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$y_i^2$	$x_i y_i$
1	0	1	0	0
2	2	4	4	4
3	4	9	16	12
4	8	16	64	32
5	11	25	121	55
6	14	36	196	84
7	17	49	289	119
8	20	64	400	160
9	23	81	529	207
10	27	100	729	270
Total	55	126	385	2348

b) Point moyen

$$G(5,5 ; 12,6)$$

$$2) r = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{25}{\sqrt{76,04 \times 8,25}} = \frac{25}{25,05} = 0,998$$

Il y a une forte corrélation entre le nombre de semestres et le pourcentage car  $0,86 < r < 1$ .

$$3. a) \text{Cov}(X, Y) = \frac{943}{10} - 5,5 \times 12,6 = 25.$$

b) Droite Y en X

$$V(X) = \frac{385}{10} - (5,5)^2 = 8,25.$$

$$a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{25}{8,25} = 3,03 \text{ et}$$

$$b = \bar{Y} - a\bar{X} = 12,6 - 3,03 \times 5,5 = -4,065.$$

$$\text{Donc } y = 3,03x + 4,065.$$

c) Droite de régression de X en Y

$$x = a'y + b' \text{ avec } a' = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(Y)} \text{ et } b' = \bar{X} - a'\bar{Y}$$

$$V(Y) = \frac{2348}{10} - 12,6^2 = 76,04$$

$$a' = 0,33 \text{ et } b' = 1,342$$

$$\text{Donc } x = 0,33y + 1,342.$$

4) Pour  $x = 12$  on a  $y = 3,03 \times 12 - 4,065 = 32,3$ .

Donc pour 12 semestres d'utilisation, on peut estimer à 32,3 % les circuits ayant une panne.

### IV.3. Exercices d'approfondissement

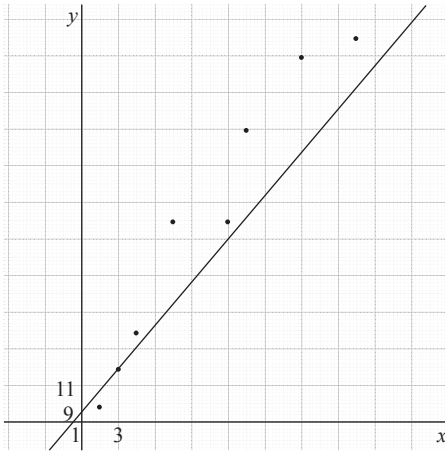
#### Exercice 22

1)

Frais de pub en F	20	30	40	60
Ventes en F	1000	1200	1400	2000

90	100	130	160
2000	2500	2900	3000

2) Nuage de points.



3. a)  $\bar{X} = 78,75$ ;  $\bar{Y} = 1865$ ; G(78,75 ; 1865)

b) A.

Frais de pub	20	30	40	60
Ventes	1000	1200	1400	2000

$$\bar{X} = 37,5; \quad \bar{Y} = 950; \quad A(37,5; 950)$$

Frais de pub	20	30	40	60
Ventes	1000	1200	1400	2000

$$\bar{X} = 120; \quad \bar{Y} = 1925; \quad B(120; 1925)$$

c) (AB) :  $y = 11,8x + 509$ .

4) a) Pour  $x = 200$ , on a  $y = 2869$ .

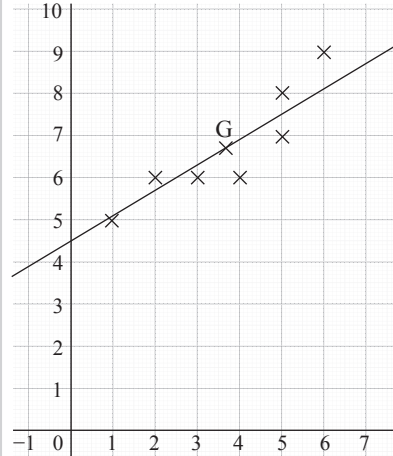
Le montant des ventes est 2 869 000 F.

b) Par le graphique, pour  $x = 200$ , on a  $y = 2870$ .

#### Exercice 23 (A1 Seulement)

$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$y_i^2$	$x_i y_i$
2	6	4	36	12
6	9	36	81	54
5	7	25	49	35
4	6	16	36	24
1	5	1	25	5
5	8	25	64	40
3	6	9	36	18
Total	26	47	116	327

1) Nuage de point.



2) Point moyen G.

$$\bar{X} = \frac{26}{7} \approx 3,71; \quad \bar{Y} = \frac{47}{7} \approx 6,71. \quad \text{Donc}$$

G(3,71 ; 6,71)

3) Coefficient de corrélation linéaire

$$V(X) = \frac{116}{7} - (3,71)^2 \approx 2,81.$$

$$V(Y) = \frac{327}{7} - (6,71)^2$$

$$Cov(X, Y) = \frac{188}{7} - 3,71 \times 6,71 \approx 1,96.$$

$$r = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{V(X) V(Y)}} = \frac{1,96}{\sqrt{2,81 \times 1,69}} = 0,9$$

Interprétation :

$0,87 < r < 1$ , donc il y a une forte corrélation entre X et Y.

4. Une équation de la droite de régression de Yen X est de la forme :  $y = ax + b$  avec

$$a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)} \text{ et } b = \bar{Y} - a\bar{X}.$$

$$a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{1,69}{2,81} \approx 0,6 \text{ et}$$

$$b = 6,71 - 0,6 \times 3,71 \approx 4,48.$$

Une équation de la droite de régression de Yen X est :  $y = 0,6x + 4,48$ .

5. Avoir sept enfants correspond à  $x = 7$ .

En remplaçant  $x$  par 7 dans l'équation ci-dessus, on obtient :  $y = 0,6 \times 7 + 4,48 = 8,68$ .

Pour une famille composée de neuf enfants, on estime le nombre d'inscriptions aux différentes activités sportives à 9.

## IV.4. Situation d'évaluation

### Exercice 24

Nuage de point

$$\bar{X}_1 = \frac{1 + 2 + 3}{3} = 2 ;$$

$$\bar{Y}_1 = \frac{405 + 458 + 460}{3} = 441$$

donc  $G_1(2 ; 441)$ .

$$\bar{X}_2 = \frac{4 + 5 + 6}{3} = 5 ;$$

$$\bar{Y}_2 = \frac{525 + 586 + 612}{3} = 574$$

donc  $G_2(5 ; 574)$ .

Courbe

Équation de la droite (D) de Mayer :

$$\frac{y - 441}{x - 2} = \frac{574 - 441}{5 - 2}$$

$$\text{On a : } y = 44x + 352$$

$$\text{En 2022, on a } x = 10.$$

$$\text{Alors, } y = 44 \times 10 + 352 = 792$$

On peut donc estimer le nombre d'admis en 2022 à 792.

## Leçon 6 Primitives et calcul intégral

### IV. Exercices

#### IV.1. Exercices de fixation

##### Exercice 1

1- V ; 2- F ; 3- F ; 4- F.

##### Exercice 2

$x \mapsto \frac{1}{x^2} - x^2$	
$x \mapsto -\frac{1}{x} - \frac{1}{4}x^4$	×
$x \mapsto -\frac{1}{x} + \frac{1}{4}x^4$	
$x \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{4}x^4$	

##### Exercice 3

Pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g'(x) = 2x$  ;  $g'(x) = f(x)$ . Donc  $g$  est une primitive de  $f$ .

Autres primitives : F :  $x \mapsto x^2 + 1$

$$K : x \mapsto x^2 - 1$$

$$P : x \mapsto x^2 + 7$$

$$Q : x \mapsto x^2 + 5$$

##### Exercice 4

$$1) F(x) = x^2 - c. F(2) = -1, \text{ donc } c = -5.$$

$$F : x \mapsto x^2 - 5.$$

$$2) F(x) = 3x + c. F(2) = 0, \text{ donc } c = -6.$$

$$F : x \mapsto 3x - 6.$$

**Exercice 5**

La fonction $f$	Une primitive $F$ de $f$
$f(x) = 7$	$F(x) = 7x$
$f(x) = -3x$	$F(x) = -\frac{3}{2}x^2$
$f(x) = 5x - 2$	$F(x) = \frac{5}{2}x^2 - 2x$
$f(x) = x^3$	$F(x) = \frac{1}{4}x^4$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$
$f(x) = -\frac{1}{x^2}$	$F(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \frac{1}{x^5}$	$F(x) = -\frac{1}{4x^4}$

**Exercice 6**

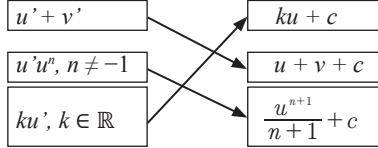
- a)  $F : x \mapsto 7x + c, c \in \mathbb{R}$   
 b)  $F : x \mapsto \frac{3}{2}x^2 + c, c \in \mathbb{R}$   
 c)  $F : x \mapsto \frac{1}{4}x^2 + c, c \in \mathbb{R}$   
 d)  $F : x \mapsto x^2 - 3x + c, c \in \mathbb{R}$   
 e)  $F : x \mapsto -\frac{1}{x} + c, c \in \mathbb{R}$   
 f)  $F : x \mapsto 2\sqrt{x} + c, c \in \mathbb{R}$

**Exercice 7**

- a) On a :  $f(x) = \frac{3}{x} = 3 \times \frac{1}{x}$ .  
 D'où  $F : x \mapsto 3 \ln x$ .  
 b) On a :  $f(x) = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x}$ .  
 D'où  $F : x \mapsto \frac{1}{2} \ln x$ .  
 c) On a :  $f(x) = \frac{4}{x-1}$ , une primitive  $F$  sur  $]1; +\infty[$  de  $f$  est  $F(x) = 4 \ln(x-1)$ .

**Exercice 8**

- 1)  $F : x \mapsto e^x$ ;  
 2)  $F : x \mapsto e^{2x-3}$ ;  
 3)  $F : x \mapsto e^{x^2+x+1}$ .

**Exercice 9****Exercice 10**

- a) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $F'(x) = 3x^2 - 5x - 2 = f(x)$ .  
 D'où  $F$  est une primitive de  $f$ .  
 b) Pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $F'(x) = 3 + 2x = f(x)$ .  
 Donc  $F$  est une primitive de  $f$ .  
 c) Pour  $x \in ]-\infty; 0[$ ,  $F'(x) = 5x^4 - x^2 - \frac{1}{x^2} = f(x)$ .  
 Alors  $F$  est une primitive de  $f$ .

**Exercice 11**

Pour tous nombres réels  $a$  et  $b$  de  $I$ , le nombre réel  $\int_a^b f(x) dx$  est égal à :

- $F(a) + F(b)$  ;   $F(a) - F(b)$  ;  
  $F(b) - F(a)$  ;   $F(a - b)$ .

**Exercice 12**

- a)  $I = \int_{-1}^3 5x dx$   
 $= \left[ \frac{5}{2}x^2 \right]_{-1}^3$   
 $= \frac{5}{2}(3^2 - 1)$  ;  $I = 20$
- b)  $I = \int_2^5 x^2 dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 \right]_2^5$   
 $= \frac{1}{3}(5^3 - 2^3) = 39$
- c)  $I = \int_{-1}^3 (x^2 + x + 3) dx$   
 $= \left[ \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x \right]_{-1}^3$   
 $= \left( \frac{27}{3} + \frac{9}{2} + 9 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 3 \right)$   
 $= \frac{76}{3}$

$$\begin{aligned} \text{d) } I &= \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2} dx \\ &= \left[ -\frac{1}{x} \right]_{-2}^{-1} \\ &= \left( 1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } I &= \int_1^2 \frac{1}{x^3} dx \\ &= \left[ -\frac{1}{2x^2} \right]_1^2 = \frac{-1}{2} \left( \frac{1}{4} - 1 \right) \\ I &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } I &= \int_1^2 \left( \frac{1}{x^2} + x^2 \right) dx \\ &= \left[ -\frac{1}{x} + \frac{1}{3}x^3 \right]_1^2 \\ &= \left( -\frac{1}{2} + \frac{8}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{17}{6} \end{aligned}$$

### Exercice 13

1) Sur l'intervalle  $[2 ; 3]$ ,  $(C_f)$  est au-dessus de  $(O)$ .

$$A = \int_2^3 f(x) dx . ua$$

$$\begin{aligned} A &= \left[ \frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_2^3 . ua \\ &= \left( 9 + 9 - \frac{8}{3} - 4 \right) \times 1 \text{cm}^2 \\ &= \frac{34}{3} \text{cm}^2 \end{aligned}$$

2) Sur l'intervalle  $[0 ; 4]$ ,  $(C_f)$  est au-dessus de  $(O)$ .

$$A = - \int_0^4 f(x) dx . ua$$

$$\begin{aligned} A &= \left[ \frac{1}{3}x^3 + 3x \right]_0^4 . ua \\ &= \left( \frac{64}{3} + 12 \right) \times 1 \text{cm}^2 \\ &= \frac{100}{3} \text{cm}^2 \end{aligned}$$

### Exercice 14

1) Sur l'intervalle  $[2 ; 3]$  la courbe représentative de  $f$  est au-dessus de celle de  $g$ .

$$\begin{aligned} A &= \int_2^3 (f(x) - g(x)) dx . ua \\ &= \int_2^3 (x^2 + 2x - 2x) dx . ua = \int_2^3 x^2 dx . ua \\ &= \left[ \frac{1}{3}x^3 \right]_2^3 . ua \end{aligned}$$

$$A = \frac{1}{3}(27 - 8) \times 1 \text{cm}^2 = \frac{19}{3} \text{cm}^3$$

2) Sur l'intervalle  $[0 ; 4]$  la courbe représentative de  $g$  est au-dessus de celle de  $f$ .

$$\begin{aligned} A &= \int_0^4 (g(x) - f(x)) dx . ua \\ &= \int_0^4 (x^2 + x^2 + 3) dx . ua \\ &= \int_0^4 (2x^2 + 3) dx . ua \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \left[ \frac{2}{3}x^3 + 3x \right]_0^4 . ua = \left( \frac{2}{3} \times 64 + 12 - 0 \right) \times 1 \text{cm}^2 \\ &= \frac{164}{3} \text{cm}^2 \end{aligned}$$

## IV.2. Exercices de renforcement

### Exercice 15

a) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $F'(x) = -(-1 \times e^{1-x}) = e^{1-x}$   
 $F'(x) = f(x)$ . Donc  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

b) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $F'(x) = -\frac{1}{2}(-2xe^{-x^2})$   
 $F'(x) = xe^{-x^2} = f(x)$ .

Donc  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

c) Pour tout  $x \in ]0 ; +\infty[$ ,

$$F'(x) = \frac{1}{2}(2x) - \frac{1}{x} = x - \frac{1}{x} = f(x).$$

Donc  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$ .

d) Pour tout  $x \in ]0 ; +\infty[$ ,

$$F'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x.$$

$$F'(x) = f(x).$$

Donc  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$ .

### Exercice 16

a)  $F : x \mapsto x^3 - \frac{1}{2}x^2$  ; b)  $F : x \mapsto x^2 - \frac{1}{6}x^6$

c)  $F : x \mapsto -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3$  ; d)  $F : x \mapsto -x^3 + \frac{2}{x}$

**Exercice 17**

1)  $F(x) = x^2 + c, c \in \mathbb{R}.$

$F(2) = -1$

$4 + c = -1$

$c = -5.$

Donc  $F : x \mapsto x^2 - 5.$

2)  $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + c, c \in \mathbb{R}.$

$F(2) = 0$

$4 + c = 0$

$c = -4.$

Donc  $F : x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - 4.$

3)  $F(x) = -\frac{1}{x} + c, c \in \mathbb{R}.$

$F(1) = 1$

$-1 + c = 1$

$c = 2.$

Donc  $F : x \mapsto -\frac{1}{x} + 2.$

4)  $F(x) = -\frac{1}{x-1} + c, c \in \mathbb{R}.$

$F(2) = 1$

$-1 + c = 1$

$c = 2.$

Donc  $F : x \mapsto -\frac{1}{x-1} + 2.$

5)  $F(x) = \frac{1}{2x^2} + c, c \in \mathbb{R}.$

$F(1) = 2$

$\frac{1}{2} + c = 2$

$c = \frac{3}{2}.$

Donc  $F : x \mapsto \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{2}.$

**Exercice 18**

1)  $F(x) = \ln x + \frac{1}{2}x^2 + c$

$F(1) = 2$

$0 + \frac{1}{2} + c = 2$

$c = \frac{3}{2}$

Donc  $F : x \mapsto \ln x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}.$

2)  $F(x) = -e^{-x+2} + c, c \in \mathbb{R}$

$F(1) = 1$

$-e^{-1} + c = 1$

$c = 1 + e^{-1}.$

Donc  $F : x \mapsto -e^{-x+2} + 1 + e^{-1}.$

3)  $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x+1} + c, c \in \mathbb{R}.$

$F(0) = 1$

$\frac{1}{2}e + c = 1$

$c = 1 - \frac{1}{2}e.$

Donc  $F : x \mapsto \frac{1}{2}e^{2x+1} + 1 - \frac{1}{2}e.$

4)  $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \ln(x+1) + c, c \in \mathbb{R}.$

$F(0) = 3$

$0 - 0 - 0 + c = 3$

$c = 3.$

Donc  $F : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - x - 3 + \ln(x+1).$

**Exercice 19**

a) On a  $f(x) = -\frac{7}{x} = -7 \times \frac{1}{x}.$

Les primitives de  $f$  sur  $]0; +\infty[$  sont les fonctions :  $x \mapsto -7 \ln x + k, k \in \mathbb{R}.$ b) Les primitives de  $f$  sur  $]0; +\infty[$  sont les fonctions :  $x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \ln x + c, c \in \mathbb{R}.$ c) Les primitives de  $f$  sur  $]0; +\infty[$  sont les fonctions :  $x \mapsto 3 \ln x - \frac{1}{x} - 10\sqrt{x} + k, k \in \mathbb{R}.$ d) Les primitives de  $f$  sur  $] -\infty; \frac{3}{5}[$  sont les fonctions :  $x \mapsto \ln |5x - 3|.$ **Exercice 20**

a)  $F : x \mapsto -\frac{1}{2}e^{-2x} - \frac{3}{2}x^2 + 2x.$

b)  $F : x \mapsto x^2 + e^{-3x}.$

c)  $F : x \mapsto \frac{1}{2}e^{x^2}.$

d)  $F : x \mapsto -e^{\frac{1}{x}}.$

**Exercice 21**

$$\begin{aligned} \text{a) } I &= \int_1^e \frac{1}{(x+2)^2} dx & \text{b) } I &= \int_1^3 e^x dx \\ &= \left[ -\frac{1}{x+2} \right]_1^e & &= [e^x]_1^3 \\ &= \left( \frac{-1}{e+2} + \frac{1}{3} \right) & &= (e^3 - e^1) \\ I &= \frac{e-1}{3(e+2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } I &= \int_0^2 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^2 \\ &= (-e^{-2} + e^0) \end{aligned}$$

$$I = 1 - e^{-2}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } I &= \int_1^2 e^{2x-1} dx \\ &= \left[ \frac{1}{2} e^{2x-1} \right]_1^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} (e^3 - e^1)$$

$$I = \frac{e^3 - e}{2}$$

$$\text{e) } I = \int_1^e \frac{1}{x} dx$$

$$= [\ln x]_1^e$$

$$= (\ln e - \ln 1) = 1$$

$$\text{f) } I = \int_1^2 \frac{1}{x+1} dx$$

$$= [\ln(x+1)]_1^2$$

$$= (\ln 3 - \ln 2)$$

$$= \ln \frac{3}{2}$$

$$\text{g) } I = \int_1^2 \left( x + 1 + \frac{1}{x} \right) dx$$

$$= \left[ \frac{1}{2} x^2 + x + \ln x \right]_1^2$$

$$= \left( \frac{1}{2} \times 2^2 + 2 + \ln 2 - \frac{1}{2} - 1 - \ln 1 \right)$$

$$I = \ln 2 + \frac{5}{2}$$

$$\text{h) } I = \int_0^1 (x - 1 - e^{-x}) dx$$

$$= \left[ \frac{1}{2} x^2 - x + e^{-x} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - 1 + e^{-1} - 1$$

$$= e^{-1} - \frac{3}{2}$$

### Exercice 22

1)  $f(x) = x^2 - 2x$  et  $a = 2$  ;  $b = 3$ .

Étudions le signe de  $f(x) = x^2 - 2x = x(x - 2)$

Donc  $x(x - 2) \geq 0$  sur  $[2 ; 3]$ .

$$\begin{aligned} \text{Par conséquent } \mathcal{A} &= \int_2^3 f(x) dx \text{ u.a} \\ &= \int_2^3 (x^2 - 2x) dx \text{ u.a} \\ &= \left[ \frac{1}{3} x^3 - x^2 \right]_2^3 \end{aligned}$$

$$\mathcal{A} = \frac{4}{3} \text{ cm}^2$$

2)  $f$  est négative sur  $\mathbb{R}$  donc

$$\mathcal{A} = - \int_{-4}^{-2} f(x) dx \text{ u.a}$$

$$= - \int_{-4}^{-2} \left( -2 - \frac{1}{x^2} \right) dx \text{ u.a}$$

$$= \left[ 2x - \frac{1}{x} \right]_{-4}^{-2} \text{ u.a}$$

$$\mathcal{A} = \frac{11}{4} \text{ cm}^2$$

3)  $f$  est négative sur  $\mathbb{R}$  donc

$$\mathcal{A} = - \int_2^4 f(x) dx \text{ u.a}$$

$$= - \int_2^4 - \frac{1}{(x-1)^2} dx$$

$$= \left[ -\frac{1}{x-1} \right]_2^4$$

$$= -\frac{1}{3} + 1$$

$$\mathcal{A} = \frac{2}{3} \text{ cm}^2$$

4)  $f$  est positive sur  $\left[ \frac{1}{e} ; e \right]$

$$\mathcal{A} = \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{1}{x} dx \text{ u.a}$$

$$= [\ln x]_{\frac{1}{e}}^e \text{ u.a}$$

$$\mathcal{A} = 2 \text{ cm}^2$$

5) sur  $[1 ; e]$   $f$  est positive donc

$$\mathcal{A} = \int_1^e \left( \frac{2}{x} + 2 \right) dx \text{ cm}^2$$

$$= [2 \ln x + 2x]_1^e \text{ cm}^2$$

$$\mathcal{A} = 2e \text{ cm}^2$$

6)  $f$  est positive sur  $[0; 1]$  donc

$$\mathcal{A} = \int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 u.a = (e - 1) \text{ cm}^2$$

7)  $f$  est négative sur  $[2; 4]$

$$\begin{aligned} \text{alors } \mathcal{A} &= - \int_2^4 f(x) dx \text{ cm}^2 \\ &= - \int_2^4 -e^{-x+2} dx \text{ cm}^2 \\ &= [-e^{-x+2}]_2^4 \text{ cm}^2 = 1 - e^{-2} \text{ cm}^2 \\ \mathcal{A} &= 1 - \frac{1}{e^2} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

### Exercice 23

Démontrons que  $F$  et  $G$  sont des primitives sur  $] -1; +\infty [$  d'une même fonction  $f$

On a  $F(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$  et  $G(x) = x - 2 + \frac{1}{x + 1}$

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} \\ &= \frac{x^2 + x}{x + 1} + \frac{1}{x + 1} \\ &= x + \frac{1}{x + 1} \end{aligned}$$

$$F(x) = G(x) + 2$$

Par conséquent  $F'(x) = G'(x)$  donc  $F$  et  $G$  sont des primitives sur  $] -1; +\infty [$  d'une même fonction  $f$

**Autre méthode :**

On peut dériver les deux fonctions et voir qu'elles ont la même fonction dérivée.

### Exercice 24

$$\begin{aligned} 1) \text{ On a } x - 2 + \frac{1}{x + 1} &= \frac{(x - 2)(x + 1) + 1}{x + 1} \\ &= \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } f(x) = x - 2 + \frac{1}{x + 1}$$

2) Une primitive  $F$  de  $f$  est définie par

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln(x + 1).$$

### Exercice 25

1) On a :  $F'(x) = \frac{x}{2} + 3 = f(x)$ , donc  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

2)  $\mathcal{A} = \left( \int_{-1}^1 f(x) dx \right) \times 1 \text{ cm}^2$  car  $f$  est positive sur  $[-1; 2]$ .

$$\begin{aligned} &= [F(x)]_{-1}^1 \text{ cm}^2 \\ &= F(2) - F(-1) \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\mathcal{A} = \frac{39}{4} \text{ cm}^2$$

### Exercice 26

1) Une primitive  $F$  de  $f$  est  $F :$

$$x \mapsto \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x.$$

2) On a  $\mathcal{A} = \left( \int_{-3}^0 f(x) dx \right) \times 4 \text{ cm}^2$  car  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} &= \int_{-3}^0 (x^2 + 4x + 5) dx \times 4 \text{ cm}^2 \\ &= (F(0) - F(-3)) \times 4 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\mathcal{A} = 24 \text{ cm}^2$$

### Exercice 27

$$\begin{aligned} 1) \text{ On a } F'(x) &= 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 \\ &= \ln(x) + 1 - 1 \\ &= \ln(x) = f(x) \end{aligned}$$

Donc  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

2)

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_1^2 f(x) dx u.a = (F(2) - F(1)) \times 4 \text{ cm}^2 \\ &= 4(2 \ln(2) - 1) \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

### IV.3. Exercices d'approfondissement

#### Exercice 28

1) On a  $f(x) = -x^2 + 4x - 3 = -(x-1)(x-3)$   
 $f$  est un polynôme de degré 2 donc  $f$  est du  
 signe de  $a = -1$  sauf à l'intérieur  
 de ses racines qui sont 1 et 3.

Par conséquent :

- $f(x) = 0$  pour  $x \in \{1; 3\}$ .
- $f(x) < 0$  pour  $x \in ]3; 4]$
- $f(x) > 0$  pour  $x \in ]1; 3[$

$$2) \mathcal{A} = \left( \int_1^3 f(x) dx - \int_3^4 f(x) dx \right) u.a$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \left( \left[ -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x \right]_1^3 \right. \\ &\quad \left. - \left[ -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x \right]_3^4 \right) u.a \\ &= \left( -\frac{4}{3} - \left( -\frac{4}{3} \right) \right) u.a \end{aligned}$$

$$\mathcal{A} = \frac{8}{3} u.a$$

#### Exercice 29

$$1) \text{ On a } f(x) - (2x + 1) = \frac{1}{x+2}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+2} = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y) = 0.$$

Alors la droite (D) d'équation :  $y = 2x + 1$  est  
 asymptote de  $(C_f)$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

$$\text{On a } f(x) - y = \frac{1}{x+2}$$

Sur  $] -\infty ; -2[$ ,  $f(x) - y < 0$  alors la droite (D)  
 est au-dessus de  $(C_f)$ .

Sur  $] -2 ; +\infty[$ ,  $f(x) - y > 0$  alors  $(C_f)$  est au-  
 dessus de la droite (D).

$$2) \text{ On a : } \mathcal{A} = \int_{-1}^2 (f(x) - y) dx \text{ cm}^2$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-1}^2 \left( \frac{1}{x+2} \right) dx \text{ cm}^2 \\ &= \left[ \ln(x+2) \right]_{-1}^2 \text{ cm}^2 \\ &= \ln 4 - \ln 1 = \ln 4 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\mathcal{A} = \ln 4 \text{ cm}^2$$

$$3) \mathcal{A}' = - \int_{-5}^{-3} f(x) dx \text{ car } f \text{ est négative sur cet}$$

intervalle

$$= - \int_{-5}^{-3} \left( 2x + 1 + \frac{1}{x+2} \right) dx \text{ cm}^2$$

$$= \left[ x^2 + x + \ln|x+2| \right]_{-5}^{-3} \text{ cm}^2$$

$$\mathcal{A}' = 14 - \ln 3 \text{ cm}^2$$

#### Exercice 30

$$1. \text{ a) On a } f(x) - (-x + 2) = -\frac{4}{x-1}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x-1} = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - y = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y = 0.$$

Alors la droite (D) d'équation :  $y = -x + 2$  est  
 asymptote de  $(C_f)$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

$$\text{b) On a } f(x) - y = -\frac{4}{x-1}.$$

Sur  $] -\infty ; 1[$ ,  $f(x) - y > 0$  alors la droite (D) est  
 au-dessous de  $(C_f)$ .

Sur  $] 1 ; +\infty[$ ,  $f(x) - y < 0$  alors  $(C_f)$  est au-dessous  
 de la droite (D).

$$2) \mathcal{A} = - \int_2^5 (f(x) - (-x + 2)) dx \text{ ua}$$

$$\begin{aligned} &= - \int_2^5 - \left( \frac{4}{x-1} \right) dx \text{ ua} \\ &= \left[ 4 \ln|x-1| \right]_2^5 u.a \end{aligned}$$

$$\mathcal{A} = 4 \ln 4 \text{ cm}^2$$

#### Exercice 31

1) On admet que  $f(x) > 0$ , sur  $] 3 ; 4[$  et  $f(x) < 0$   
 sur  $] 5 ; 7[$

$$\text{On a : } g'(x) = -x + 2 + \ln(x) + 1$$

$$= -x + 3 + \ln(x) = f(x)$$

D'où la fonction  $g$  est une primitive de la fonc-  
 tion  $f$  sur  $] 0 ; +\infty[$ .

$$2) \text{ On a : } \mathcal{A} = \left( \int_1^4 f(x) dx \right) \times 2 \text{ cm}^2$$

$$= (g(4) - g(1)) \times 2 \text{ cm}^2$$

$$\mathcal{A} = 8 \ln 4 - 3 \text{ cm}^2$$

$$3) \text{ On a : } \mathcal{A}' = \left( - \int_5^7 f(x) dx \right) \times 2 \text{ cm}^2$$

$$= (-g(7) + g(5)) \times 2 \text{ cm}^2$$

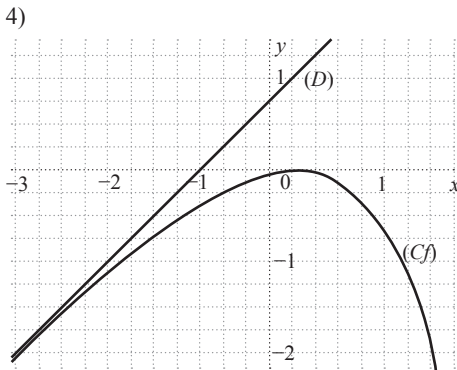
$$\mathcal{A}' = 2(8 + 5 \ln 5 - 7 \ln 7) \text{ cm}^2$$

**Exercice 32**

1. a) On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1 - e^x)$   
 $= -\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$   
 et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 = -\infty$
- b) On a  $f(x) - y = -e^x$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -e^x = 0$   
 donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - y) = 0$
- c) On a  $f(x) - y = -e^x$  et  $-e^x < 0$  pour tout réel  $x$ .  
 Donc (Cf) est au-dessous de (D) sur  $\mathbb{R}$ .
- 2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 + \frac{1}{x} - \frac{e^x}{x})$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$   
 et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} - \frac{e^x}{x} = -\infty$
- 3) a) On a :  $f'(x) = 1 - e^x$ .  
 On a :  $1 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1$   
 $\Leftrightarrow x < 0$ .
- D'où  $\forall x \in ]-\infty; 0[ f'(x) > 0$  et  $\forall x \in ]0; +\infty[ f'(x) < 0$

b)

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$0$	$-\infty$



5) Soit  $\mathcal{A}$  cette aire.

$$\begin{aligned} \text{On a } \mathcal{A} &= \int_{-3}^0 (y - f(x)) dx \text{ u.a} \\ &= \int_{-3}^0 e^x dx \text{ u.a} \\ &= [e^x]_{-3}^0 \text{ u.a} \\ \mathcal{A} &= (1 - e^{-3}) \times 4 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

**IV.4. Situation d'évaluation**

**Exercice 33**

Remplacer mètres par centimètres.

- Déterminons une primitive de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; 600]$ .

$$f(x) = \frac{x^2}{1600} - \frac{x}{4} + 124,$$

Une primitive  $F$  de  $f$  définie par :

$$F(x) = \frac{x^3}{3 \times 1600} - \frac{x^2}{8} + 124x$$

- Déterminons l'aire de la partie limitée par la courbe et les droites d'équations  $x = 0$  et  $y = 600$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^{600} f(x) dx \text{ u.a} \\ &= (F(600) - F(0)) \text{ u.a} \\ &= (74400 - 0) \text{ u.a} \\ &= 74400 \text{ u.a} \end{aligned}$$

L'aire du terrain est  $74400 \times 1600$ ,  
 soit  $119\,040\,000 \text{ cm}^2$ .

# Leçon 7 Suites numériques

## IV. Exercices

### IV.1. Exercices de fixation

#### Exercice 1

1)  $u_n = 7n - 3$

Pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} - u_n = 7(n+1) - 3 - (7n - 3) = 7n + 7 - 3 - 7n + 3 = 7 \text{ et } 7 > 0.$$

Donc  $(u_n)$  est croissante.

2)  $u_n = -0,5n$

Pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} - u_n = -0,5(n+1) - (-0,5n) = -0,5n - 0,5 + 0,5n = -0,5 \text{ et } -0,5 < 0.$$

Donc  $(u_n)$  est décroissante.

3)  $u_n = (-1)^n$

Si  $n$  est pair, alors  $u_n = 1$  et si  $n$  est impair, alors

$$u_n = -1.$$

Donc  $(u_n)$  n'est ni croissante ni décroissante.

4)  $u_n = n^2$ .

Pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1 \text{ et } 2n + 1 > 0.$$

Donc  $(u_n)$  est croissante.

#### Exercice 2

1)  $u_n = n^2 + 2n$

Pour tout entier naturel  $n$ ,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)^2 - 2(n+1) - (n^2 + 2n) \\ &= n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 - n^2 + 2n \\ &= 2n + 1 \end{aligned}$$

Or  $2n + 1 > 0$ , donc  $(u_n)$  est croissante.

2)  $u_n = \frac{1}{n}$

Pour tout entier naturel  $n$ ,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n - (n+1)}{n(n+1)} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)} \end{aligned}$$

Or  $-1 < 0$  et  $n(n+1) > 0$ , donc  $\frac{-1}{n(n+1)} < 0$ .

Par conséquent  $(u_n)$  est décroissante.

3)  $u_n = 2^n$

Pour tout entier naturel  $n$ ,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = \frac{2^n \times 2}{2^n} = 2 \text{ et } 2 > 1.$$

Donc  $(u_n)$  est croissante.

4)  $u_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n$ .

Pour tout entier naturel  $n$ ,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{\left(\frac{3}{5}\right)^n} = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n \times \left(\frac{3}{5}\right)}{\left(\frac{3}{5}\right)^n} = \frac{3}{5} \text{ et}$$

$0 < \frac{3}{5} < 1$ . Donc  $(u_n)$  est décroissante.

#### Exercice 3

a) 4 ; 7 ; 10 ; 13 ; 16 ; 19 ; 21 ; 24

b) 20 ; 18 ; 16 ; 14 ; 12 ; 10 ; 8 ; 6

c) 2,5 ; 5 ; 7,5 ; 10 ; 12,5 ; 15 ; 17,5 ; 20

d) 100 ; 65 ; 30 ; -5 ; -40 ; -75 ; -110 ; -145

#### Exercice 4

1) Pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = u_n + 7$ .

Donc  $(u_n)$  est une suite arithmétique de raison 7 et de premier terme 3.

2) Pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} - u_n = 5(n+1) + 12 - (5n + 12) = 5.$$

Donc  $(u_n)$  est une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme  $u_0 = 12$ .

3) Pour tout entier naturel  $n$  non nul,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2}{n+1} + 3 - \left(\frac{2}{n} + 3\right) \\ &= \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n} \\ &= \frac{-2}{n(n+1)} \end{aligned}$$

$u_{n+1} - u_n$  n'est pas une constante.

Donc  $(u_n)$  n'est pas une suite arithmétique.

4) Pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n = 3u_n - 13$ .

$u_{n+1} - u_n$  n'est pas une constante. Donc  $(u_n)$  n'est pas une suite arithmétique.

**Exercice 5**

1) Pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n = 10$ .

Donc  $(u_n)$  est une suite arithmétique de raison 10 et de 1<sup>er</sup> terme -9.

2) Pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} - u_n = 1,5 - 0,5(n+1) - (1,5 - 0,5n) = -0,5.$$

Donc  $(u_n)$  est une suite arithmétique de raison -0,5 et de premier terme -9.

3) Pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 9 - (n^2 - 9) =$$

$$n^2 + 2n + 1 - 9 - n^2 + 9 = 2n + 1$$

$u_{n+1} - u_n$  n'est pas une constante. Donc  $(u_n)$  n'est pas une suite arithmétique.

4) Pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n = -2u_n + 1$ .

$u_{n+1} - u_n$  n'est pas constante.

Donc  $(u_n)$  n'est pas une suite arithmétique.

**Exercice 6**

a)  $u_n = 5 + 7n$ ; b)  $u_n = -12 + 0,5n$ ;

c)  $u_n = \frac{4}{3} - 6(n-1) = -6n + \frac{22}{3}$ ;

d)  $u_n = 7 + 2,5(n-6) = 2,5n - 8$ .

**Exercice 7**

1)  $u_{21} = u_{15} + (21 - 15)r = u_{15} + 6r$

2)  $u_{75} = u_{47} + 28r$

3)  $u_6 = u_{11} - 5r$

4)  $u_{32} = u_{47} - 15r$

**Exercice 8**

1)  $u_{10} = u_0 + 10r$

$31 = 1 + 10r$ .

$r = 3$

2)  $u_{37} = u_{12} + (37 - 12)r$

$28 = 103 + 25r$

$r = -3$

3)  $u_{17} = u_{40} + (17 - 40)r$

$24 = 70 - 23r$

$r = 2$

4)  $u_{36} = u_{98} + (36 - 98)r$

$15 = 15 - 61r$

$r = 0$ .

**Exercice 9**

Dans chaque cas,  $u_n$  est de la forme  $u_n = u_0 + nr$

1) La raison de  $(u_n)$  est 3 et  $3 > 0$ , donc  $(u_n)$  est croissante.

2) La raison de  $(u_n)$  est -1 et  $-1 < 0$ , donc  $(u_n)$  est décroissante.

3) La raison de  $(u_n)$  est  $\frac{11}{9}$  et  $\frac{11}{9} > 0$ , donc  $(u_n)$  est croissante.

4) La raison de  $(u_n)$  est 1 et  $1 > 0$ , donc  $(u_n)$  est croissante.

**Exercice 10**

1)  $(u_n)$  est une suite arithmétique de raison 12 et  $12 > 0$ , donc  $(u_n)$  est croissante.

2)  $(u_n)$  est une suite arithmétique de raison -7 et  $-7 < 0$ , donc  $(u_n)$  est décroissante.

3) Pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = u_n$ .

Donc  $(u_n)$  est constante.

**Exercice 11**

1)  $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{20}$

$$= (20 + 1) \frac{u_0 + u_{20}}{2}$$

$$= 21 \frac{5 + 5 + 20 \times 7}{2} = 21 \times \frac{150}{2} = 1575.$$

2)  $T = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

$$= (n + 1) \frac{u_0 + u_n}{2}$$

$$= (n + 1) \frac{5 + 5 + 7n}{2}$$

$$= \frac{(n + 1)(10 + 7n)}{2}$$

**Exercice 12**

1)  $S = u_7 + u_1 + u_2 + \dots + u_{28}$

$$= (28 - 7 + 1) \frac{u_7 + u_{28}}{2}$$

$$= 22 \times \frac{u_7 + u_7 + (28 - 7) \times 8}{2}$$

$$= \frac{22 \times 162}{2} = 1782$$

$$2) T = u_7 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$= (n - 7 + 1) \frac{u_7 + u_n}{2}$$

$$= (n - 6) \frac{u_7 + u_7 + (n - 7) \times 8}{2}$$

$$= (n - 6)(4n - 31).$$

### Exercice 13

- a) 3 ; 6 ; 12 ; 24 ; 48 ; 96 ; 192 ; 384.  
 b) 8 ; 4 ; 2 ; 1 ; 0,5 ; 0,25 ; 0,125 ; 0,0625.  
 c) 1 ; -3 ; 9 ; -27 ; 81 ; -243 ; 729 ; -2 187.  
 d) 10 ; 100 ; 1 000 ; 10 000 ; 10 000 ; 100 000 ;  
 1 000 000 ; 10 000 000 ; 100 000 000.

### Exercice 14

- 1) 3 ; 15 ; 75 ; 375  
 2)  $2 ; -\frac{4}{3} ; \frac{8}{9} ; -\frac{16}{27}$ .

### Exercice 15

- 1)  $v_0 = -3 ; v_1 = 10$  et  $v_2 = 23$ .  
 On a  $\frac{v_1}{v_0} = -\frac{10}{3}$  et  $\frac{v_2}{v_1} = \frac{63}{23}$ .  
 Comme  $\frac{v_1}{v_0} \neq \frac{v_2}{v_1}$ ,  $(v_n)$  n'est pas une suite géométrique.  
 2)  $v_0 = 0 ; v_1 = 1$  et  $v_2 = 8$ .  
 $\frac{v_1}{v_0}$  n'existe pas et  $\frac{v_2}{v_1} = 8$ , donc  $(v_n)$  n'est pas une suite géométrique.  
 3) Pour tout entier naturel  $n$ ,  

$$v_{n+1} = 7 \times \left(\frac{5}{11}\right)^{n+1}$$

$$= 7 \times \left(\frac{5}{11}\right)^n \times \frac{5}{11} = \frac{5}{11} v_n$$
 Donc  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{5}{11}$  et de premier terme  $v_0 = 7 \times \left(\frac{5}{11}\right)^0 = 7$ .  
 4) Pour tout entier naturel  $n$  non nul,  

$$v_{n+1} = 4v_n.$$

Donc  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 4 et de premier terme  $v_1 = \frac{2}{7}$

### Exercice 16

- 1) Pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_{n+1} = -5v_n$ .  
 Donc  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison -5 et de premier terme  $v_1 = 3$ .  
 2)  $v_0 = 0 ; v_1 = 7$  et  $v_2 = 14$ .  
 $\frac{v_1}{v_0}$  n'existe pas et  $\frac{v_2}{v_1} = 2$ , donc  $(v_n)$  n'est pas une suite géométrique.  
 3) Pour tout entier naturel  $n$ ,  

$$v_{n+1} = 7 \times 0,5^{n+1} = 7 \times 0,5^n \times 0,5 = 0,5v_n$$
 Donc  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme  $v_0 = 6 \times 0,5^0 = 6$   
 4)  $v_0 = -5 ; v_1 = 25$  et  $v_2 = 625$ .  
 $\frac{v_1}{v_0} = -5$  et  $\frac{v_2}{v_1} = 25$ . On a  $\frac{v_1}{v_0} \neq \frac{v_2}{v_1}$   
 donc  $(v_n)$  n'est pas une suite géométrique.

### Exercice 17

- a)  $v_n = 100 \times 0,2^n$ ; b)  $v_n = 7 \times 3^{n-2}$ ;  
 c)  $v_n = \frac{11}{6} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n$ ; d)  $v_n = 0,3 \times 0,1^{n-9}$

### Exercice 18

- 1)  $u_{10} = u_6 \times q^4$   
 2)  $u_{15} = u_{29} \times q^{-14}$   
 3)  $u_0 = u_7 \times q^{-7}$   
 4)  $u_{56} = u_{39} \times q^{17}$

### Exercice 19

- 1)  $v_2 = v_0 \times q^2$                       2)  $v_{16} = v_{10} \times q^6$   
 $81 = 9 \times q^2$                                $1000 = 0,001 \times q^6$   
 $q^2 = 9$                                        $q^6 = 1\ 000\ 000$   
 $q = 3$                                          $q = 10$   
 3)  $v_{75} = v_9 \times q^{66}$   
 $38 = 38 \times q^{66}$   
 $q^{66} = 1$   
 $q = 1$

**Exercice 20**

Dans chaque cas,  $v_n$  est de la forme  $v_n = v_0 \times q^n$

1)  $v_0 = 1$  et  $q = 7$ . On a  $v_0 > 0$  et  $q > 1$ , donc  $(v_n)$  est croissante.

2)  $v_0 = 1$  et  $q = 0,25$ . On a  $v_0 > 0$  et  $0 < q < 1$ , donc  $(v_n)$  est décroissante.

3) On a  $q = 1$ , donc  $(v_n)$  est constante.

4)  $v_0 = 1$  et  $q = -3$ . On a  $q < 0$ , donc  $(v_n)$  n'est ni croissante ni décroissante.

5)  $v_0 = -4$  et  $q = 9$ . On a  $v_0 < 0$  et  $q > 1$ , donc  $(v_n)$  est décroissante.

6)  $v_0 = 10$  et  $q = \frac{8}{13}$ . On a  $v_0 > 0$  et  $0 < q < 1$ , donc  $(v_n)$  est décroissante.

7)  $v_0 = 10$  et  $q = \frac{15}{11}$ . On a  $v_0 > 0$  et  $q > 1$ , donc  $(v_n)$  est croissante.

**Exercice 21**

1)  $v_0 = -10$  et  $q = 0,9$ . On a  $v_0 < 0$  et  $0 < q < 1$ , donc  $(v_n)$  est croissante.

2) On a  $q = 1$ , donc  $(v_n)$  est constante.

3)  $v_0 = -7,4$  et  $q = 6$ . On a  $v_0 < 0$  et  $q > 1$ , donc  $(v_n)$  est décroissante.

4)  $v_0 = 8$  et  $q = \frac{5}{2}$ . On a  $v_0 > 0$  et  $q > 1$ , donc  $(v_n)$  est croissante.

5)  $v_0 = 0,3$  et  $q = 1,01$ . On a  $v_0 > 0$  et  $q > 1$ , donc  $(v_n)$  est croissante.

**Exercice 22**

$$1) S = v_0 + v_1 + \dots + v_{10}$$

$$= v_0 \times \frac{1 - q^{10+1}}{1 - q}$$

$$= 5 \times \frac{1 - 2^{11}}{1 - 2}$$

$$= 5 \times \frac{-2047}{-1} = 10235.$$

$$2) T = v_4 + v_5 + \dots + v_n$$

$$= v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$= 5 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 5(2^{n+1} - 1).$$

**Exercice 23**

$$1) S = v_4 + v_5 + \dots + v_9$$

$$= v_4 \times \frac{1 - q^{9-4+1}}{1 - q}$$

$$= 12 \times \frac{1 - 3^6}{1 - 3}$$

$$= 12 \times \frac{-728}{-2} = 4368$$

$$2) T = v_4 + v_5 + \dots + v_n$$

$$= v_4 \times \frac{1 - q^{n-4+1}}{1 - q}$$

$$= 12 \times \frac{1 - 3^{n-3}}{1 - 3} = 6(3^{n-3} - 1).$$

**IV.2. Exercices de renforcement****Exercice 24**

$$a) 3 - 1 = 5 - 3 = 7 - 5 = 9 - 7 = 2.$$

Donc ce sont les termes d'une suite arithmétique de raison 2.

$$b) 6 \div 2 = 18 \div 6 = 54 \div 18 = 162 \div 54 = 3.$$

Donc ce sont les termes d'une suite géométrique de raison 2.

$$c) 40 - 45 = 35 - 40 = 30 - 35 = 25 - 30 = -5.$$

Donc ce sont les termes d'une suite arithmétique de raison -5.

$$d) (4 - 2) \neq (4 - 4) \text{ et } (4 \div 2) \neq (4 \div 4).$$

Donc ce ne sont les termes ni d'une suite arithmétique ni d'une suite géométrique.

$$e) \frac{1}{2} \div 1 = \frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Donc ce sont les termes d'une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ .

**Exercice 25**

- 1)  $a_n = 7 + 13n$  et  $n \geq 0$  ;  $(a_n)$  est une suite arithmétique de raison 13
- 2)  $b_n = \frac{2}{3^n} = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$  et  $n \geq 0$  ;  $(b_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{3}$
- 3)  $c_{n+1} = c_n + 0,7$  ;  $c_n = 1,7 c_{n-1}$  ;  $(c_n)$  est une suite géométrique de raison 1,7
- 4)  $d_{n+1} = \frac{d_n}{5} = \frac{1}{5} d_n$  ;  $(d_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{5}$ .
- 5)  $e_{n+1} = e_n - 1$  ;  $(e_n)$  est une suite arithmétique de raison -1.
- 6)  $e_{n+1} = 2e_n - 2$  ;  $(e_n)$  n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique de raison.

**Exercice 26**

- 1) • Calcul de
- $r$

$$u_{1000} = u_{100} + (1000 - 100)r$$

$$900 = 90 + 900r$$

$$r = \frac{810}{900} = 0,9$$

- Calcul de
- $u_0$
- .

$$u_{100} = u_0 + 100r$$

$$90 = u_0 + 100 \times 0,9$$

$$90 = u_0 + 90$$

$$u_0 = 0$$

- 2)
- $S = u_{100} + \dots + u_{1000}$

$$S = (1000 - 100 + 1) \frac{u_{100} + u_{1000}}{2}$$

$$= 901 \times \frac{990}{2} = 445\,995.$$

**Exercice 27**

Affirmations	Réponses
u est une suite arithmétique.	Vrai
u est une suite géométrique.	Faux
u est une suite décroissante.	Faux
u est une suite croissante.	Vrai

**Exercice 28**

1)  $u_6 = u_3 + (6 - 3)r$

$$324 = 12 + 3r$$

$$312 = 3r$$

$$r = 104$$

2)  $u_n = u_3 + (n - 3)r = 12 + 104(n - 3)$

$$u_n = 104n - 300$$

3)  $u_4 = 116$  ;  $u_7 = 428$  et  $u_0 = -300$ .

4) La suite  $(u_n)$  est croissante car  $r > 0$ .

5)  $u_n = 78\,732$

$$104n - 300 = 78\,732$$

$$104n = 79\,032$$

$$n \approx 759,923$$

Il n'existe pas de valeur de l'entier naturel  $n$  telle que  $u_n = 78\,732$ , car  $759,923 \notin \mathbb{N}$ .

**Exercice 29**

1)  $C_1 = C_0 + 0,04C_0 = 520\,000$

$$C_2 = C_1 + 0,04C_1 = 540\,000$$

2) a) Pour tout entier naturel  $n$ ,

$$C_{n+1} = C_n + 0,04C_n = C_n + 20\,000.$$

$(C_n)$  est donc une suite arithmétique de raison 20 000.

b)  $C_n = C_0 + nr = 500\,000 + 20000n.$

3) Le capital disponible aura doublé lorsque

$$C_n = 2C_0.$$

$$C_n = 2C_0.$$

$$500\,000 + 20000n = 1\,000\,000$$

$$20000n = 500\,000$$

$$n = 25.$$

Le capital va doubler à partir de la 25<sup>ème</sup> année.

**Exercice 30**

1)  $C_0 = 500\,000$  ;  $C_1 = C_0 + 0,035 C_0 = 517\,500$

et  $C_2 = C_1 + 0,035 C_1 = 535\,612,5$

2) a) Pour tout entier naturel  $n$ ,

$$C_{n+1} = C_n + 0,035C_n = 1,035C_n$$

$(C_n)$  est donc une suite géométrique de raison 1,035

$$\text{b) } C_n = 500\,000 \times 1,035^n$$

3. Le capital disponible aura doublé lorsque

$$C_n = 2C_0.$$

$$C_n = 2C_0$$

$$500\,000 \times 1,035^n = 1\,000\,000$$

$$1,035^n = 2$$

$$n \ln(1,035) = \ln 2$$

$$n = \frac{\ln 2}{\ln 1,035} \approx 20,15$$

Le capital va doubler à partir de la 21<sup>ème</sup> année.

### Exercice 31

$$u_{10} = u_1 \times r^9 = 0,9 \times 2^9 = 460,8$$

$$u_{35} = u_1 \times r^{34} = 0,9 \times 2^{34} = 15461882265,6.$$

### Exercice 32

$$u_5 = u_3 \times q^2, \text{ donc } q^2 = \frac{u_5}{u_3} = 4. \text{ Par suite } q = 2.$$

### Exercice 33

$$\text{On a : } \frac{a}{7} = \frac{8}{a}, \text{ donc } a^2 = 56, \text{ soit } a = \sqrt{56}$$

### Exercice 34

$$\bullet S = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + \dots + 59049$$

$$S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{10}.$$

S est la somme des 11 premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 3.

$$S = \frac{1 - 3^{11}}{1 - 3}$$

$$S = 88\,573$$

$$\bullet R = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 999$$

$$R = (2 \times 0 + 1) + (2 \times 1 + 1) + (2 \times 2 + 1) +$$

$$(2 \times 3 + 1) + (2 \times 4 + 1) + \dots + (2 \times 499 + 1).$$

R est la somme des 499 premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2.

$$R = (499 + 1) \times \frac{1 + 999}{2}$$

$$R = 250\,000.$$

$$\bullet T = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \dots + 4096$$

$$T = (-2)^0 + (-2)^1 + (-2)^2 + (-2)^3 + (-2)^4 + \dots + (-2)^{12}$$

T est la somme des 13 premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison -2.

$$T = \frac{1 - (-2)^{13}}{1 - (-2)}$$

$$T = 2\,731$$

### Exercice 35

1) Pour tout entier naturel  $n$ ,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 2u_n - 1 - 1 = 2u_n - 2 = 2(u_n - 1) = 2v_n.$$

Donc  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 2 et de 1<sup>er</sup> terme  $v_0 = u_0 - 1 = 9$

2) Pour tout entier naturel  $n$ ,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2\,000 = 0,95u_n + 100 - 2\,000$$

$$= 0,95u_n - 1\,900 = 0,95(u_n - 2\,000) = 0,95v_n.$$

Donc  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 0,95 et de 1<sup>er</sup> terme  $v_0 = u_0 - 2\,000 = -1\,500$ .

## IV.3. Exercices d'approfondissement

### Exercice 36

1) L'arbre a poussé chaque année de 0,5 m

2) Sa taille sera multipliée par 3.

3) a)  $(t_n)$  est une suite arithmétique de raison 0,5.

$$\text{b) } t_n = t_0 + 0,5n$$

$$t_n = 1 + 0,5n.$$

4)  $1 + 0,5n > 25$

$$n > \frac{24}{0,5}$$

$$n = 48$$

Dans 48 ans.

### Exercice 37

$$1) u_0 = 1 ; u_{n+1} = 3u_n ; v_n = \ln(u_n)$$

$(u_n)$  est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 3.

$$u_n = 3^n$$

$$2) v_n = \ln(3^n) = n \ln 3$$

$(v_n)$  est une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison  $\ln 3$ .

3)  $v_n = n \ln 3$ .

4- a)  $S_n = n \times \frac{v_0 + v_{n-1}}{2} = \frac{n(n-1) \ln 3}{2}$

b)  $P_n = e^{sn} = e^{\frac{n(n-1) \ln 3}{2}}$ .

**Exercice 38**

1) Pour 5 couches

$t_5 = 1+2+3+4+5 = 15$ .

$t_{12} = 1+2+\dots+12 = 66$ .

2)  $\frac{n(n+1)}{2} = 153$ , on trouve 17 couches.

3) 19 couches et il restera 10.

**Exercice 39**

1)  $\frac{P_{n+1} - P_n}{P_n} = 0,12$

donc  $P_{n+1} = 1,12 P_n$

2)  $P_n = (1,12)^n P_0$ .

3)  $P_n > P_0$

$(1,12)^n > 1$

$n \ln 1,12 > 0$

$(P_n)$  toujours supérieur à  $P_0$ .

**Exercice 40**

1)  $(a_n)$  est une suite géométrique de premier terme 200 000 et de raison 0,97.

$(b_n)$  est une suite géométrique de premier terme 150 000 et de raison 1,05.

2)  $a_n = 200\,000 (0,97)^n$

$b_n = 150\,000 (1,05)^n$ .

3) Il suffit de résoudre l'inéquation

$150\,000 (1,05)^n > 200\,000 (0,97)^n$

$15 (1,05)^n > 20 (0,97)^n$

$n > \frac{\ln 20 - \ln 15}{\ln(1,05) - \ln(0,97)}$

$n > 3,63$ .

Il faut au minimum 4 ans

**IV.4. Situations d'évaluation**

**Exercice 41**

Notons  $u_n$  la rémunération hebdomadaire avec l'option A.

Pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = u_n + 2\,000$ .

Donc  $(u_n)$  est une suite arithmétique de premier terme 10 000 et raison 2 000.

2) Notons  $v_n$  la rémunération hebdomadaire avec l'option B.

Pour tout entier naturel  $n$ ,

$v_{n+1} = v_n + \frac{15}{100} v_n = 1,15 v_n$ .

Donc  $(v_n)$  est une suite géométrique de premier terme 10 000 et raison 1,15.

Avec l'option A, le gain global est :

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \dots + u_{12} &= 12 \times \frac{u_1 + u_{12}}{2} \\ &= 12 \times \frac{u_1 + u_1 + 11 \times 2000}{2} \\ &= 252\,000 \end{aligned}$$

Avec l'option B, le gain global est :

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + \dots + v_{12} &= v_1 \times \frac{1 - 1,15^{12}}{1 - 1,15} \\ &= 10000 \times \frac{1 - 1,15^{12}}{1 - 1,15} \approx 290\,020. \end{aligned}$$

Conclusion : L'option B est plus avantageuse.

L'affirmation de la voisine est vraie.

**Exercice 42**

Notons  $u_n$  la population en 2010 +  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Pour tout entier naturel  $n$ ,

$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{100} u_n = u_n + 0,01 u_n = 1,01 u_n$ .

Donc  $(u_n)$  est une suite géométrique de premier terme  $u_0 = 6\,900\,000\,000$  et de raison 1,01.

$u_n = 6\,900\,000\,000 \times 1,01^n$ .

$u_n = 10\,000\,000\,000$

$6\,900\,000\,000 \times 1,01^n = 10\,000\,000\,000$

$1,01^n = \frac{10\,000\,000\,000}{6\,900\,000\,000} = \frac{100}{69}$

$n \ln(1,01) = \ln \frac{100}{69}$

$n = \frac{\ln \frac{100}{69}}{\ln 1,01}$

$n \approx 37,29$

Soit  $n = 38$ . Les 10 milliards d'habitants seront atteints en 2048.

L'affirmation du chef de classe n'est pas correcte

# Leçon

# 8

## Systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

### IV. Exercices

#### IV.1. Exercices de fixation

##### Exercice 1

$$a) \begin{cases} x + y = 28 \\ xy = 195 \end{cases}$$

Soit  $s = 28$  et  $p = 195$

Résolvons l'équation :  $x^2 - 28x + 195 = 0$

$$\Delta = 28^2 - 4 \times 195 = 4$$

$$\sqrt{\Delta} = 2 \text{ alors } x_1 = \frac{28-2}{2} \text{ et } x_2 = \frac{28+2}{2}$$

$$x_1 = 13 \text{ et } x_2 = 15$$

Les solutions du système sont  $(13; 15)$  et  $(15; 13)$

c'est-à-dire  $S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(13; 15); (15; 13)\}$

$$b) S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(5; 7); (7; 5)\}.$$

$$c) S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(7; -4); (-4; 7)\}.$$

##### Exercice 2

Résolvons chacun des systèmes suivants dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

$$a) \begin{cases} e^x + 3e^y = 5 \\ 2e^x - e^y = 3 \end{cases} \text{ on a : } \begin{cases} e^x + 3e^y = 5 \\ 6e^x - 3e^y = 9 \end{cases}$$

En additionnant membre à membre on a :

$$e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2)$$

On en déduit que  $e^y = 1 \Leftrightarrow y = 0$

$$S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(\ln 2; 0)\}$$

$$b) \begin{cases} \ln(x) - \ln(y) = 3 \\ \ln(x) + \ln(y) = 5 \end{cases}$$

Ensemble de validité de  $(\mathcal{C}) : x > 0$  et  $y > 0$ ,

$$D_v = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*.$$

En additionnant membre à membre on a :

$$2\ln(x) = 8 \text{ et } \ln(x) = 4.$$

De même on montre que  $\ln(y) = 1$

On en déduit que  $x = e^4$  et  $y = e$

$$S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(e^4; e)\}.$$

$$c) \begin{cases} 2e^x - e^y = 15 \\ e^x + 2e^y = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4e^x - 2e^y = 30 \\ e^x + 2e^y = 40 \end{cases}$$

En additionnant membre à membre, on a :

$$5e^x = 70, \text{ On a : } e^x = 14. \text{ De même, } e^y = 13.$$

On obtient donc :  $x = \ln 14$  et  $y = \ln 13$

$$S_{\mathbb{R}} = \{(\ln 13; \ln 14)\}.$$

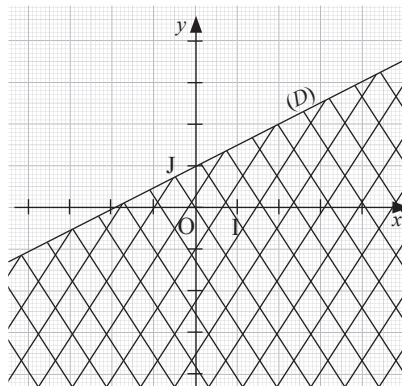
##### Exercice 3

Résolvons graphiquement  $x - 2y + 2 < 0$ .

• Soit (D) la droite d'équation  $x - 2y + 2 = 0$

•  $(0; 0)$  n'est pas solution.

L'ensemble solution est l'ensemble des couples de coordonnées des points de la partie non hachurée.



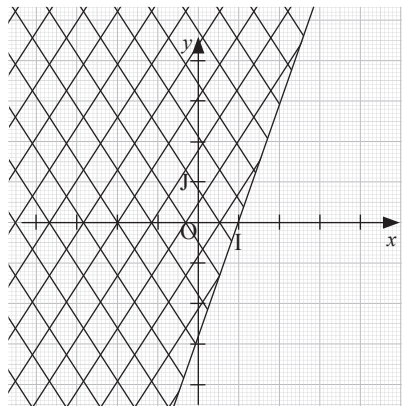
##### Exercice 4

Résolvons graphiquement  $3x - y \geq 3$ .

• Soit (D) la droite d'équation  $3x - y = 3$ .

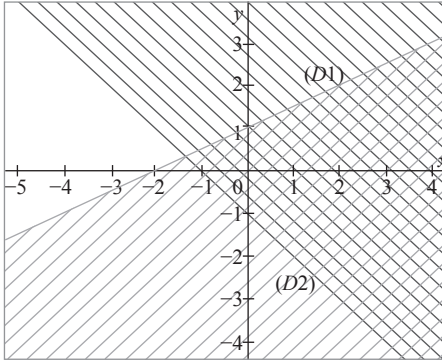
•  $(0; 0)$  n'est pas solution.

L'ensemble solution est l'ensemble des couples de coordonnées des points de la partie non hachurée.

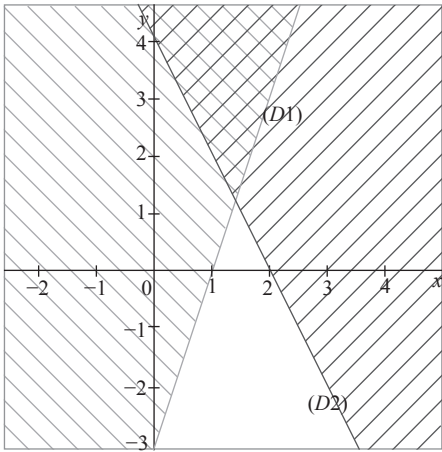


### Exercice 5

a) Soit  $(D_1)$  la droite d'équation :  $x - 2y + 2 = 0$  et  $(D_2)$  la droite d'équation :  $x + y + 1 = 0$ . L'ensemble des solutions est l'ensemble des couples de coordonnées des points de la partie non hachurée

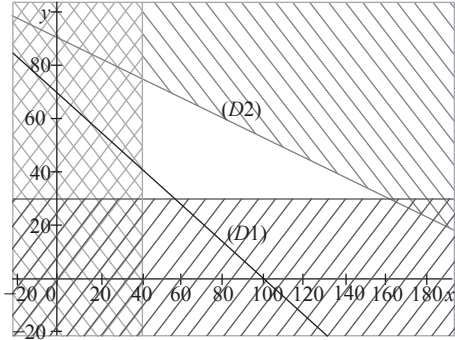


b) Soit  $(D_1)$  la droite d'équation :  $2x + y = 4$  et  $(D_2)$  la droite d'équation :  $3x - y = 3$ . L'ensemble solution est la partie non hachurée.

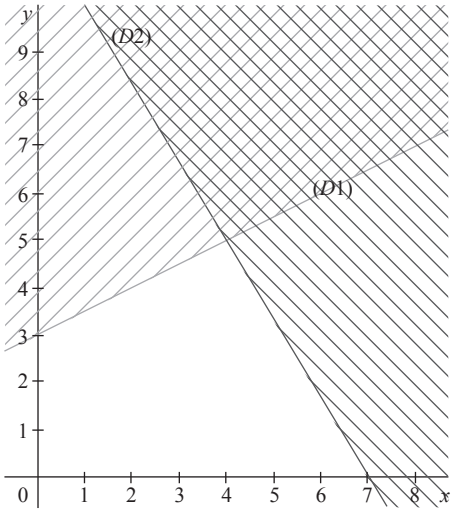


### Exercice 6

a) Soit  $(D_1)$  la droite d'équation :  $x - 2y + 2 = 0$  et  $(D_2)$  la droite d'équation :  $x + y + 1 = 0$ . L'ensemble des solutions est l'ensemble des couples de coordonnées des points de la partie non hachurée



b) Soit  $(D_1)$  la droite d'équation :  $x - 2y + 6 = 0$  et  $(D_2)$  la droite d'équation :  $5x + 3y - 35 = 0$ .



L'ensemble des solutions est l'ensemble des couples de coordonnées des points de la partie non hachurée.

## IV.2. Exercices de renforcement

### Exercice 7

Réolvons chacun des systèmes suivants :

1) Posons  $e^x = X$  et  $e^y = Y$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \begin{cases} X + Y = 8 \\ X - Y = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} X + Y = 8 \\ X = 4 + Y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4 + X + Y = 8 \\ X = 4 + Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2Y = 4 \\ X = 4 + Y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} Y = 2 \\ X = 6 \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient :  $e^x = 6$  et  $e^y = 2$

D'où  $x = \ln 6$  et  $y = \ln 2$

$$S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(\ln 6; \ln 2)\}.$$

$$2) \begin{cases} e^x + 2e^y = 3 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x + 2e^y = 3 \\ x = -y \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-y} + 2e^y = 3 \\ x = -y \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2e^{2y} + 3e^y + 1 = 0 \\ x = -y \end{cases}$$

Posons  $Y = e^y$  et résolvons  $2Y^2 - 3Y + 1 = 0$

$$2Y^2 - 3Y + 1 = 0 \Leftrightarrow Y = 1 \text{ ou } Y = \frac{1}{2}$$

Le système devient

$$\begin{cases} Y^2 - \frac{3}{2}Y + \frac{1}{2} = 0 \\ x = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = 1 \text{ ou } Y = \frac{1}{2} \\ x = -y \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ ou } y = -\ln 2 \\ x = -y \end{cases}$$

$$S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(0; 0), (\ln 2; -\ln 2)\}.$$

$$3) \begin{cases} xy = -15 \\ e^x e^y = e^{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x+y} = e^{-2} \\ xy = -15 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -2 \\ xy = -15 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} S = x + y = -2 \\ P = xy = -15 \end{cases}$$

$x$  et  $y$  sont solutions de l'équation  $x^2 + 2x - 15 = 0$

$$x^2 + 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -5$$

$$S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(3; -5); (-5; 3)\}$$

### Exercice 8

Résolvons chacun des systèmes suivants :

$$1) \begin{cases} \ln x + \ln y = \ln(266) \\ x + y = -33 \end{cases}$$

Ensemble de validité du système.

$$x > 0 \text{ et } y > 0, \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \{\ln(xy) = \ln(266) \\ x + y = -33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 266 \\ x + y = -33 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} S = x + y = -2 \\ P = xy = -15 \end{cases}$$

$x$  et  $y$  sont solutions de l'équation :

$$x^2 + 33x + 266 = 0$$

$$x^2 + 33x + 266 = 0 \Leftrightarrow x = -14 \text{ ou } x = -19$$

$$-19 \notin \mathbb{R}_+^* \text{ et } -14 \notin \mathbb{R}_+^*.$$

$$\text{Donc } S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \emptyset.$$

$$2) \begin{cases} xy = 198 \\ e^x \times e^y = e^{29} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x+y} = e^{29} \\ xy = 198 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 29 \\ xy = 198 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} S = x + y = 29 \\ P = xy = 198 \end{cases}$$

$x$  et  $y$  sont solutions de l'équation :

$$t^2 - 29t + 198 = 0$$

$$t = 18 \text{ et } t = 11$$

$$S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(11; 18), (18; 11)\}.$$

### Exercice 9

Résolvons chacun des systèmes suivants :

$$1) \begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 3 (\times 3) \\ 3x - 2y = 7 (\times 2) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 9y = 9 (1) \\ 6x - 4y = 14 (2) \end{cases}$$

$$(1) - (2) \Leftrightarrow -9y + 4y = -5 \Leftrightarrow -5y = -5 \Leftrightarrow y = 1$$

On en déduit que  $2x - 3 = 3 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$

$$S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(3; 1)\}.$$

$$2) \begin{cases} 2e^x - 3e^y = 3 \\ 3e^x - 2e^y = 7 \end{cases}$$

Posons  $X = e^x$  et  $Y = e^y$  on obtient donc :

$$\begin{cases} 2X - 3Y = 3 \\ 3X - 2Y = 7 \end{cases}$$

D'après la question 1)  $X = 3$  et  $Y = 1$

On a :  $e^x = 3$  et  $e^y = 1$  et on obtient :  $x = \ln 3$

et  $x = 0$

$$S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(\ln 3; 0)\}.$$

$$3) \begin{cases} 2 \ln(x) + \ln(y) = 3 \\ 3 \ln(x) - \ln(y) = 7 \end{cases}$$

Posons  $\ln x = X$  et  $\ln y = Y$

L'équation devient ;

$$\begin{cases} 2X + Y = 3 \\ 3X - Y = 7 \end{cases}$$

En additionnant les équations on a :  $5X = 10$

soit  $X = 2$

On obtient  $X = 2$  et  $Y = -1$   
 $\ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$  et  $\ln y = -1 \Leftrightarrow y = e^{-1}$   
 $S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(e^2; e^{-1})\}$

### Exercice 10

Résolvons chacun des systèmes suivants :

$$1) \begin{cases} 2x = y + 1 \\ 3x + 3 = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y+1}{2} \\ 3 \frac{y+1}{2} + 3 = 2y \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y+1}{2} \\ y = 9 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 9 \end{cases}$$

$$S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(5; 9)\}$$

$$2) \begin{cases} 2e^{-x} = e^y + 1 \\ 3e^{-x} + 3 = 2e^y \end{cases}$$

Posons  $X = e^{-x}$  et  $Y = e^y$

Le système devient donc :

$$\begin{cases} 2X = Y + 1 \\ 3X + 3 = 2Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = 2X - 1 \\ 3X + 3 = 2(2X - 1) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} Y = 2X - 1 \\ X = 5 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} Y = 9 \\ X = 5 \end{cases} \text{ d'où } e^{-x} = 5 \text{ et } e^y = 9$$

$$\text{Soit } e^x = \frac{1}{5} \text{ et } e^y = 9$$

Donc  $x = -\ln 5$  et  $y = \ln 9$

$$S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(-\ln 5; \ln 9)\}$$

$$3) \begin{cases} \ln(x) + \ln 4 = \ln 3 - \ln y \\ e^x = e^{2-y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x) + \ln(y) = \ln 3 - \ln 4 \\ x + y = 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(xy) = \ln \frac{3}{4} \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = \frac{3}{4} \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = xy = \frac{3}{4} \\ S = x + y = 2 \end{cases}$$

$x$  et  $y$  sont solutions de l'équation :

$$x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0$$

$$x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

$$\text{d'où } S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}); (\frac{3}{2}; \frac{1}{2})\}$$

### Exercice 11

Résolvons chacun des systèmes suivants

1) Résolvons dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \quad (1) \\ x + y = 2 \quad (2) \end{cases}$$

En faisant (1) - (2), on a :

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(5; -3)\}$$

$$2.a) \begin{cases} 2e^x + e^y = 7 \\ e^x + e^y = 2 \end{cases}$$

Posons  $X = e^x$  et  $Y = e^y$

$$\text{On obtient le système suivant : } \begin{cases} 2X + Y = 7 \\ X + Y = 2 \end{cases}$$

D'après la question 1), on a :  $X = 5$  et  $Y = -3$ .

$$\text{Soit } \begin{cases} e^x = 5 \\ e^y = -3 \end{cases} \text{ impossible car } y \in \mathbb{R}, e^y > 0.$$

Donc  $S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \emptyset$

b)

$$\begin{cases} 2 \ln x + \ln y = 7 \\ \ln x + \ln y = 2 \end{cases}$$

Ensemble de validité  $x > 0$  et  $y > 0$ .

$$\text{Posons } X = \ln x \text{ et } Y = \ln y$$

$$\text{On obtient le système suivant : } \begin{cases} 2X + Y = 7 \\ X + Y = 2 \end{cases}$$

$$\text{Soit } X = 5 \text{ et } Y = -3$$

$$\begin{cases} X = 5 \\ Y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = 5 \\ \ln y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^5 \\ y = e^{-3} \end{cases}$$

$$\text{Donc } S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(e^5; e^{-3})\}$$

c)

$$\begin{cases} 2e^{2x+1} + e^{y+1} = 7 \\ e^{2x+1} + e^{y+1} = 2 \end{cases}$$

$$\text{Posons } X = e^{2x+1} \text{ et } Y = e^{y+1}$$

$$\text{On obtient le système suivant : } \begin{cases} 2X + Y = 7 \\ X + Y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2X + Y = 7 \\ X + Y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 5 \\ Y = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{2x+1} = 5(1) \\ e^{y+1} = -3 \text{ impossible, } e^{y+1} > 0 \end{cases}$$

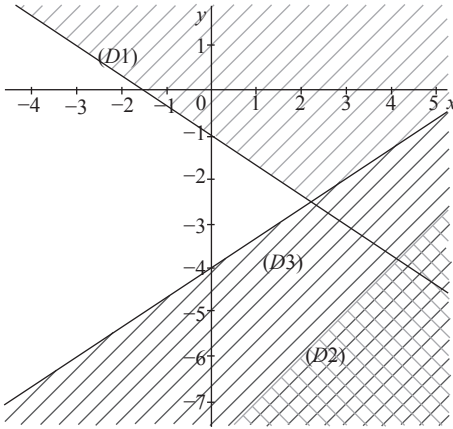
Donc  $S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \emptyset$

### Exercice 12

a) Soit  $(D_1)$  la droite d'équation :  $2x + 3y + 3 = 0$  ;

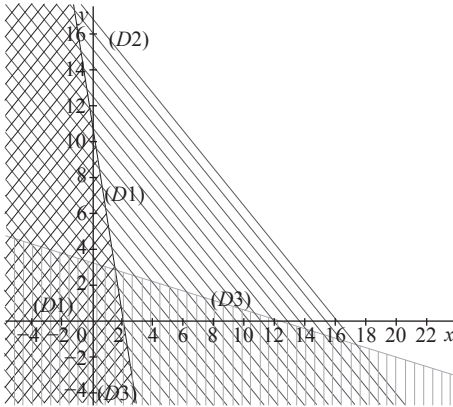
$(D_2)$  la droite d'équation :  $-x + y + 8 = 0$  et

$(D_3)$  la droite d'équation :  $2x - 3y - 12 = 0$ .



L'ensemble solution est représenté par la partie non hachurée.

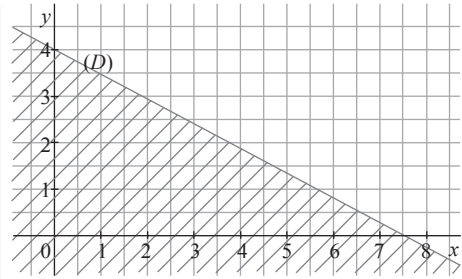
- b) Soit  $(D_1)$  la droite d'équation :  $5x + y = 10$  ;  
 $(D_2)$  la droite d'équation :  $x + y = 6$  et  
 $(D_3)$  la droite d'équation :  $x + 4y = 12$



L'ensemble solution est représenté par la partie non hachurée.

### Exercice 13

- 1) L'ensemble des couples  $(x, y)$  qui satisfont à la contrainte imposée est représenté par la zone hachurée solution de l'inéquation :  
 $4x + 7,5y \leq 30$ .  
 Soit  $(D)$  la droite d'équation  $4x + 7,5y = 30$ .



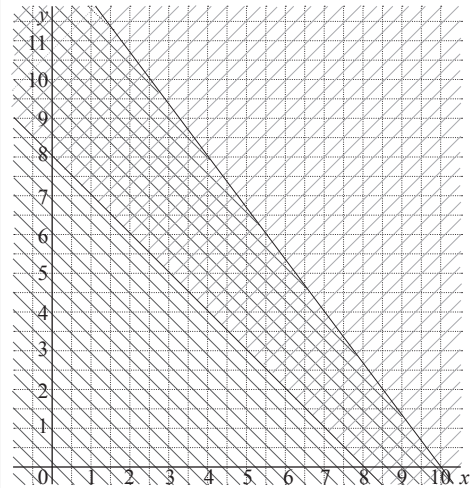
- 2) si  $x=2$ , on peut produire 1 ; 2 ou 3 chemisiers.

### Exercice 14

- 1) Si  $x$  désigne le nombre de bouteilles de jus d'orange et  $y$  le nombre de bouteilles de jus de pomme alors ils vérifient les contraintes suivantes :  
 $x \geq 0$  ;  $y \geq 0$  ;  $800x + 600y \leq 8000$  et  $x + y \geq 8$

$$\text{On a : } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 8 \\ 800x + 600y \leq 8000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 8 \\ 8x + 6y \leq 80 \end{cases}$$

- 2) Soit  $(D_1)$  la droite d'équation :  $x + y = 8$  et  
 $(D_2)$  la droite d'équation :  $8x + 6y = 80$ .



L'ensemble des solutions du système est l'ensemble des couples de nombres entiers naturels représentés dans la zone d'intersection des deux zones hachurées.

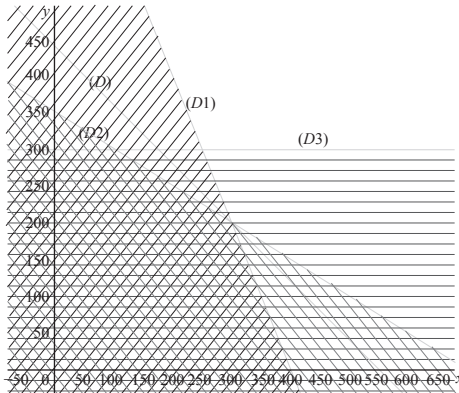
### Exercice 15

1) Soit  $x$  la quantité en kg de yaourt du type A et  $y$  la quantité en kg de yaourt du type B :

Les contraintes nous donnent le système suivant :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 800 \\ y \leq 300 \end{cases}$$

2) Soit  $(D_1)$  la droite d'équation  $2x + y = 800$ ,  $(D_2)$  la droite d'équation  $x + 2y = 700$  et  $(D_3)$  la droite d'équation  $y = 300$ .



3) Soit  $B$  le bénéfice réalisé  $B = 40x + 50y$ , la droite correspondant à ce bénéfice est la droite  $(D)$  d'équation :

$$y = -\frac{4}{5}x + \frac{B}{50}$$

Cette droite passe par le point  $I$  pour que le bénéfice soit maximum. En ce point  $x = 300$  et  $y = 200$ , le bénéfice est  $B = 40 \times 300 + 50 \times 200 = 22\,000$  F.

## IV.3. Exercices d'approfondissement

### Exercice 16

Déterminons les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  la courbe d'équation :  $y = ax^2 + bx + c$ , passe par les trois points :  $M(2; -3)$ ;  $N(-1; 3)$  et  $P(1; -3)$

Alors leurs coordonnées vérifient l'équation de droite : en remplaçant  $x$  et  $y$  par leur valeurs dans l'équation on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -3 = 4a + 2b + c & (1) \\ 3 = a - b + c & (2) \\ -3 = a + b + c & (3) \end{cases}$$

$$(2) - (3) \Leftrightarrow 6 = -2b \quad \Leftrightarrow b = -3$$

$$(1) - (3) \Leftrightarrow 0 = 3a + b \quad \Leftrightarrow a = -\frac{b}{3} = 1.$$

$$(2) \Leftrightarrow c = 3 + b - a = 3 - 3 - 1 = -1$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = -1 \end{cases}$$

Donc :  $y = x^2 - 3x - 1$ .

### Exercice 17

1) Résolvons dans l'ensemble des nombres réels l'équation :  $x^2 - 4x - 5 = 0$ .

$$x^2 - 4x - 5 = 0.$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 - 4 - 5 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 5)(x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \text{ ou } x = -1$$

$$S_{\mathbb{R}} = \{-1; 5\}$$

2) Déduisons-en la résolution dans l'ensemble des nombres réels, des équations suivantes :

a)  $(\ln x)^2 - 4 \ln x - 5 = 0$

L'ensemble de validité de (E) est  $V_E = ]0; +\infty[$

Posons  $\ln x = X$ , on a :  $X^2 - 4X - 5 = 0$ ,

d'après la question 1)  $X = 5$  ou  $X = -1$  soit  $\ln x = 5$  ou  $\ln x = -1$

$$x = e^5 \text{ ou } e^{-1}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \{e^5; e^{-1}\}.$$

b)  $\ln(x - 3) + \ln(x - 1) = \ln 8$

L'ensemble de validité de (E) est  $V_E = ]3; +\infty[$

$$\ln((x - 3)(x - 1)) = \ln 8 \Leftrightarrow \ln(x^2 - x - 3x + 3) = \ln 8$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2 - 4x + 3) = \ln 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$$

d'après la question 1)  $x = 5$  ou  $x = -1$

$$S_{\mathbb{R}} = \{5\} \text{ car } -1 \notin V_E$$

c)  $e^x - 4 = 5e^{-x}$

$$e^x - 4 = 5e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x = 5e^0 \Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x - 5 = 0$$

Posons  $X = e^x$

On obtient alors :

$$X^2 - 4X - 5 = 0. \text{ D'après 1) on a : } X = 5 \text{ ou } X = -1.$$

$$\text{Or } \forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0, \text{ alors } e^x = 5 \Leftrightarrow x = \ln 5$$

$$S_{\mathbb{R}} = \{\ln 5\}.$$

3. a) Résolvons le système suivant 
$$\begin{cases} xy = -5 \\ e^x \times e^y = e^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = -5 \\ e^{x+y} = e^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = -5 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

b)  $x$  et  $y$  sont solutions de l'équation :

$$u^2 - 4u - 5 = 0.$$

D'après 1) les nombres qui vérifient l'équation sont  $-1$  et  $5$ .

$$\text{Donc } S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(5; -1) (-1; 5)\}.$$

4) a)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ xy = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 34 \\ xy = -15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 4 \\ xy = -15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 2 \\ xy = -15 \end{cases}$$

$$\text{ou } \begin{cases} x+y = -2 \\ xy = -15 \end{cases}.$$

Soit  $S = x + y$  et  $P = xy$ . On a les deux systèmes

$$(1) \begin{cases} S = 2 \\ P = -15 \end{cases} \text{ ou } (2) \begin{cases} S = -2 \\ P = -15 \end{cases}.$$

$$\text{Résolution du système (1). On a : } \begin{cases} S = 2 \\ P = -15 \end{cases}$$

$x$  et  $y$  sont solutions de  $u^2 - 2u - 15 = 0$ .

On a  $x = -3$  ou  $x = 5$ .

Les solutions de 1) sont  $(-3; 5); (5; -3)$ .

$$\text{Résolution du système 2. On a : } \begin{cases} S = -2 \\ P = -15 \end{cases}.$$

$x$  et  $y$  sont solutions de  $u^2 + 2u - 15 = 0$ .

Les solutions de (2) sont  $(3; -5); (-5; 3)$ .

Les solutions du système donné sont :  $\{(-3; 5); (5; -3); (3; -5); (-5; 3)\}.$

b) 1) 
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -12 \end{cases}.$$

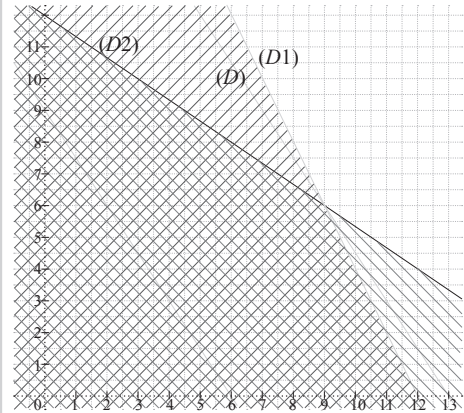
$x$  et  $y$  sont solutions de  $t^2 + t - 12 = 0$ .

$$\Delta = 49, t_1 = -5, t_2 = 4.$$

L'ensemble solution du système est  $\{(-5; 4); (4; -5)\}.$

### Exercice 18

A) Soit  $(D_1)$  et  $(D_2)$  les droites d'équations respectives  $2x + y = 24$  et  $2x + 3y = 36$ .



B) Soit  $x$  le nombre de portes en Iroko fabriquées et  $y$  le nombre de portes en Badi fabriquées par semaine ( $x$  et  $y$  sont des nombres entiers).

En raison de contraintes liées à l'approvisionnement, cet artisan ne peut produire plus de 9 portes en Badi par semaine. Cette phrase se traduit par  $0 \leq y \leq 9$ .

- La fabrication d'une porte en Iroko dure 4 heures et nécessite  $2 \text{ m}^2$  de bois. Celle d'une en Badi dure 2 heures et nécessite  $3 \text{ m}^2$  de bois.

- L'artisan ne travaille pas plus de 48 heures par semaine et il ne peut pas entreposer plus de  $36 \text{ m}^2$  de bois dans son atelier.

	Iroko	Badi
Quantité	2	3
Horaire	4	2

On le traduit par  $2x + 3y \leq 36$  et  $4x + 2y \leq 48$ .

On en déduit le système suivant :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 4x + 2y \leq 48 \\ 2x + 3y \leq 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 2x + y \leq 24 \\ 2x + 3y \leq 36 \end{cases}$$

2) a) Si l'artisan produit 5 portes en Iroko, Il peut produire au maximum 8 portes en Badi

b) Si l'artisan produit 3 portes en Badi, il peut fabriquer 10 portes au maximum en Iroko.

3) a) On note B le bénéfice total réalisé sur la vente de  $x$  portes en Iroko et de  $y$  portes en Badi.

L'artisan fait un bénéfice de 30 000 F sur une porte en Iroko et un bénéfice de 20 000 F sur une porte en Badi.

Exprimer B en fonction de  $x$  et de  $y$ .

$$B = 30\,000x + 20\,000y$$

b) voir graphique (D) :

$$3x + 2y = 18.$$

### Exercice 19

1) a) Soit  $x$  le nombre de lots A et  $y$  le nombre de lots B et  $x \geq 0$  et  $y \geq 0$

- Il faut 800 m au moins de guirlandes or le lot A en contient 2 et le lot B contient 2. On a ainsi :  $100x + 200y \geq 800$

- Il faut 12 étoiles des neiges au moins or le lot A en contient 2 et le lot B contient 2. On a ainsi :  $2x + 2y \geq 12$

- Il faut 8 sapins de Noël au moins or le lot A en contient 2 et le lot B1. On a ainsi :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 100x + 200y \geq 800 \\ 2x + 2y \geq 12 \\ 2x + y \geq 8 \end{cases}$$

b) Les nombres  $x$  et  $y$  sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 100x + 200y \geq 800 \\ 2x + 2y \geq 12 \\ 2x + y \geq 8 \end{cases}$$

Ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \geq 8 \\ x + y \geq 6 \\ 2x + y \geq 8 \end{cases}$$

c) Voir graphique (zone non hachurée).

Soient :  $(D_1) : x + 2y = 8$ ,  $(D_2) : x + y = 6$ ,  $(D_3) : 2x + y = 8$  et  $(D) : y = -\frac{5}{7}x + \frac{D}{980}$

2) Les commandes  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  correspondent aux points  $C_1(7 ; 1)$ ,  $C_2(3 ; 2)$  et  $C_3(6 ; 1)$  et aucun de ces points n'appartient à la zone non hachurée, donc ces commandes ne satisfont pas les contraintes.

3) a) Les lots A coûtent chacun 700 et les lots B coûtent 980, donc la dépense sera

$$D = 700x + 980y$$

Les droites correspondant à cette dépense ont

$$\text{pour équation } y = -\frac{5}{7}x + \frac{D}{980}$$

b) La commande  $C_1$  occasionne donc une dépense de  $7 \times 700 + 1 \times 980 = 5880$  F

La droite correspondant à cette dépense a pour

$$\text{pour équation } y = -\frac{5}{7}x + 6.$$

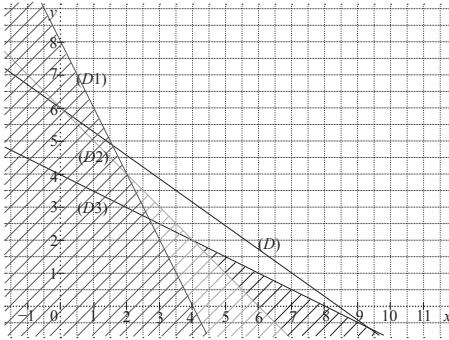
Cette droite passe par  $C_1$  et le point  $(0 ; 6)$ . Cette dépense convient. Elle n'est pas minimale car l'ordonnée à l'origine n'est pas minimale.

c) La droite qui correspond à la dépense minimale aura pour ordonnée à l'origine  $\frac{D}{980}$  la plus petite possible tout en passant par un point au moins de coordonnées entières du polygone.

Le graphique nous montre qu'elle passe par le point  $I(4 ; 2)$ .

La dépense est alors de :

$$D = 4 \times 700 + 2 \times 980 = 4\,760 \text{ F.}$$



#### IV.4. Situation d'évaluation

##### Exercice 20

1) Soit  $x$  le nombre d'assiettes de lots A et  $y$  le nombre d'assiettes de lots B.

	Assiettes plates	Assiettes creuses	
Assiettes de lot A	10	10	1 500
Assiettes de lot B	20	10	2 000
	70	40	

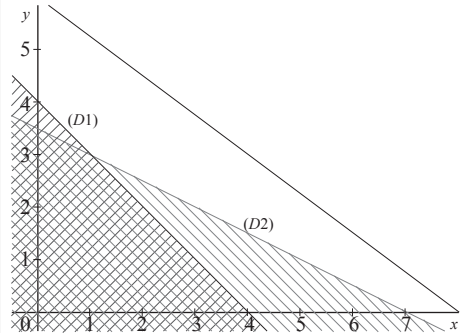
On a les inéquations suivantes :

$$10x + 20y \geq 70 \text{ et } 10x + 10y \geq 40 \text{ et } x \geq 0 ; y \geq 0$$

On a le système suivant :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 10x + 10y \leq 40 \\ 10x + 20y \leq 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 4 \\ x + 2y \leq 7 \end{cases}$$

2) Soit  $(D_1)$  et  $(D_2)$  les droites d'équations respectives  $x + y = 4$  et  $x + 2y = 7$



3) a) Exprimons en fonction de  $x$  et  $y$  la dépense occasionnée par l'achat de  $x$  lots A et de  $y$  lots B.  
 $C = 1500x + 2000y$ .

b)  $(D) = 1,5x + 2y = 12$ .

c) Pour que la dépense soit minimale la droite  $(\Delta)$  doit passer par le point  $I(1 ; 3)$ .

Il faut un lot de A et 3 lots de B.

La dépense minimale est :

$$C = 1500 \times 1 + 2000 \times 3 = 7\,500.$$

## BACCALAURÉAT - session 2019 - série A<sub>2</sub>

##### Exercice 1

1) a) Bénéfice en 2017

$$b_2 = 2\,000\,000 + 2\,000\,000 \times \frac{10}{100}$$

$$b_2 = 2\,200\,000$$

b)  $b_3 = b_2 + \frac{10}{100} b_2$

$$b_3 = 2\,420\,000$$

2) a)  $(b_n)$  est une suite géométrique de raison 1,1 et de premier terme  $b_1$  où  $b_1 = 2\,000\,000$ .

b)  $b_n = (1,1)^{n-1} \times 2\,000\,000$

3) a)  $b_n > 3\,000\,000$

$$\Leftrightarrow (1,1)^{n-1} \times 2\,000\,000 > 3\,000\,000$$

$$(n-1)\ln(1,1) > \ln \frac{3}{2}$$

$$n > 1 + \frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln(1,1)}$$

$$n > 5,25$$

$$n \geq 6$$

b) En 2016 + 6 soit en 2022.

### Exercice 2

1)  $C_7^4 = 35$

2) a)  $P(A) = \frac{C_4^2 \times C_3^2}{C_7^4}$

$P(A) = \frac{6 \times 3}{35}$

$P(A) = \frac{18}{35}$

b)  $P(B) = \frac{C_4^2 \times C_3^2 + C_4^1 \times C_3^3}{C_7^4}$

$P(B) = \frac{22}{35}$

c)  $P(C) = \frac{C_4^1}{C_7^4}$

$P(C) = \frac{1}{35}$

### Exercice 3

1) a)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-2x + 2 + \ln x)$   
 $= -\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ .

b) La droite d'équation  $x=0$  est asymptote à la courbe de  $f$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(-2 + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x})$   
 $= -\infty$

car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$ ,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x = 0 = +\infty$

3) a)  $f'(x) = -2 + \frac{1}{x}$ , pour  $x \in ]0; +\infty[$ .  
 $= \frac{-2x + 1}{x}$

b)  $f'(\frac{1}{2}) = \frac{-2 \times \frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{2}} = 0$

c) Le signe de  $f'(x)$  est celui de  $-2x + 1$  car  $x > 0$ .

$\forall x \in ]0; \frac{1}{2}[ f'(x) > 0$

$\forall x \in ]\frac{1}{2}; +\infty[ f'(x) < 0$

d)  $f$  est croissante sur  $]0; \frac{1}{2}[$  ;  $f$  est décroissante sur  $]\frac{1}{2}; +\infty[$

$x$	0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$		$f(\frac{1}{2})$ 	

4) a)  $f(1) = -2 \times 1 + 2 + \ln 1 = 0$

$f$  est décroissante sur  $]\frac{1}{2}; +\infty[$ ,  $\frac{1}{2} < 1$ , on en déduit que  $f(\frac{1}{2}) > f(1)$  donc  $f(\frac{1}{2}) > 0$ .

b)  $]0, 2; 0, 3[ \subset ]0; \frac{1}{2}[$ ,  $f$  est dérivable et strictement croissante sur  $]0, 2; 0, 3[$ .

$f(0,2) = -0,009$

$f(0,2) = 0,19$

$f(0,2) \times f(0,3) < 0$ .

Donc l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique dans  $]0, 2; 0, 3[$ .

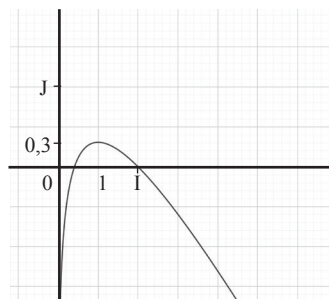
5)  $y = f'(1)(x-1) + f(1)$  avec  $f'(1) = -1$  et  $f(1) = 0$ .

Donc :  $y = x + 1$ .

6)

$x$	0,1	0,25	0,5	1	1,5	2
$f(x)$	-0,5	0,1	0,3	0	-0,5	-1,3

3	4
-2,9	-4,6



# BACCALAURÉAT BLANC UEMOA - session 2019 - série A<sub>2</sub>

## Exercice 1

- 1) Vrai                      2) Vrai                      3) Faux  
4) Faux                      5) Vrai                      6) Faux

## Exercice 2

1. C                      3. C                      3. A  
4. A                      5. B                      6. B.

## Exercice 3

$$f(x) = 2 - x + \ln x$$

1) a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  donc la droite d'équation  $n = 0$  est asymptote à (C).

2) a)  $f(x) = 2 - x + \ln x$   
 $= x \left( \frac{2}{x} - 1 + \frac{\ln x}{x} \right)$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

3) Pour  $x \in ]0; +\infty[$   $f'(x) = -1 + \frac{1}{x}$   
 $f'(x) = \frac{1-x}{x}$ ;

4) Le signe de  $f'(x)$  est celui de  $1-x$  car  $x > 0$ .

Pour  $x \in ]0; 1[$ ;  $f'(x) > 0$  donc  $f$  est croissante.

Pour  $x \in ]1; +\infty[$ ;  $f'(x) < 0$  donc  $f$  est décroissante.

5)

$x$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$			1	

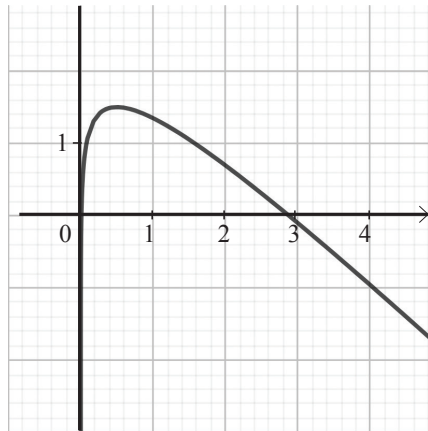
$-\infty$                        $-\infty$

6)  $f$  est dérivable et strictement décroissante sur  $]3,1 ; 3,2[$ ;  $f(3,1) = 0,03$  et  $f(3,2) = -0,03$  ;

$f(3,1) \times f(3,2) < 0$  donc l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique dans  $]3,1 ; 3,2[$ .

$x$	0,1	0,2	0,5	1	2	3
$f(x)$	-0,4	-0,19	0,8	1	-0,6	-0,09

4	5
-0,6	-1,3



## Exercice 4

$$C_8^3 = 56$$

Il peut acheter le stabilisateur s'il tire 3 boules blanches ou 2 boules blanches et une rouge.

$$P = \frac{C_8^3 + C_8^2 \times C_1^1}{C_8^3}$$

$$\frac{1 + 15}{56} = \frac{16}{56}$$

$$P = 0,27$$

Le Président du conseil scolaire n'a pas assez de chance de leur offrir ce stabilisateur, car il n'a que 27% de chance.

Mise en page : Vallesse Éditions

Tel : 2722410821/0101916125

Achévé d'imprimer en Côte d'Ivoire

3<sup>ème</sup> trimestre 2021

Dépôt légal N°17658 du 09 juillet 2021