Mathématiques

Tle D

Corrigé

Auteurs

KONÉ Talnan Lucien Benoit
Inspecteur en chef

ARRICO Lucie
Professeur de lycée

Vallesse

© Vallesse Éditions, Abidjan, 2021
ISBN : 978-2-38403-016-3
Toute reproduction interdite sous peine de poursuites judiciaires.

IV. Exercices

IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

1. V ; 2. F ; 3. F.

Exercice 2

1. F ; 2. V ; 3. V ; 4. F ; 5. F ; 6. V.

Exercice 3

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{x^2+5x+4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-x-6}{2x^2-5x-3} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{2x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

Exercice 4

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^5+4x^3-4x+2$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} -3x^5 = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2-x-10}{2x^2-4x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2}{2x^2}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x}{tanx} = 1$, car $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$

d) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$, car $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$, car $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Exercice 5

1- Vrai ; 2- Faux ; 3- Faux

Exercice 6

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 + x\,cos(x)$

On a : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \cos x \geq -1 \Leftrightarrow x\cos x \geq -x$

$\Leftrightarrow x^3 + x\cos x \geq x^3 - x \quad (1)$

Par ailleurs $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 - x = +\infty.\ (2)$.

De (1) et (2), on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 + x\,cos(x) = +\infty$

Exercice 7

a) Posons $f(x) = 2x+1+3\sin x$

On sait que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin x \leq 1$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, -3 \leq 3\sin x \leq 3$

$\Leftrightarrow -2 \leq 1+3\sin x \leq 4$

$\Leftrightarrow 2x-2 \leq 2x+1+3\sin x \leq 2x+4$

$\Leftrightarrow 2x-2 \leq f(x) \leq 2x+4$

De plus $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-2) = \lim\limits_{x\to-\infty}(2x+4) = -\infty$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

b) Posons : $\forall x \in]1\ ; +\infty[$,

$g(x) = \dfrac{1}{x+\cos x}$.

On sait que : $\forall x \in]1\ ; +\infty[, -1 \leq \cos x \leq 1$.

Donc $x-1 \leq x+\cos x \leq x+1$.

$\dfrac{1}{x+1} \leq \dfrac{1}{x+\cos x} \leq \dfrac{1}{x-1}$

$\dfrac{1}{x+1} \leq g(x) \leq \dfrac{1}{x-1}$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$,

on en déduit que : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

c) Posons $h(x) = \dfrac{2x\sin(5x^2)}{x^2+1}$

$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, -1 \leq \sin(5x^2) \leq 1$

$\Leftrightarrow -2x \leq 2x\sin(5x^2) \leq 2x$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2x}{x^2+1} \leq \dfrac{2x\sin(5x^2)}{x^2+1} \leq \dfrac{2x}{x^2+1}$

car $x^2+1 \geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2x}{x^2+1} \leq h(x) \leq \dfrac{2x}{x^2+1}$

De plus on a

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2}{x} = 0$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x^2+1} = 0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$

d) Posons $p(x)=\dfrac{x^2+\sin(3x)}{2x^3}$

$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, -1 \le \sin(3x) \le 1$

$\Leftrightarrow x^2-1 \le x^2+\sin 3x \le x^2+1$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-1}{2x^3} \le \dfrac{x^2+\sin 3x}{2x^3} \le \dfrac{x^2+1}{2x^3}$

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{2x^3}=0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+\sin 3x}{2x^3}=0$

Exercice 8

a) Posons $f(x)=\sqrt{-2+x}=\text{goh}(x)$ avec $h(x)=-2+x$ et $g(x)=\sqrt{x}$.

On a $\lim\limits_{x\to 2}h(x)=\lim\limits_{x\to 2}-2+x=0$ et

$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}=0$

D'où $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}}f(x)=0$

b) Posons g(x) = $\sqrt{\dfrac{4x^2+3}{1+9x^2}}$ = foh(x) avec

$h(x)=\dfrac{4x^2+3}{1+9x^2}$ et $f(x)=\sqrt{x}$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^2}{9x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{9}=\dfrac{4}{9}$ et

$\lim\limits_{x\to\frac{4}{9}}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{4}{9}}\sqrt{x}=\dfrac{2}{3}$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\dfrac{2}{3}$.

c) Posons $h(x)=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=fog(x)$

avec $g(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$ et $f(x)=\sqrt{x}$.

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}(1+x)\times\dfrac{1}{1-x}=+\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

D'où $\lim\limits_{x\to 1}h(x)=+\infty$

d) Posons $f(x)=\left(\dfrac{2x}{-x+3}\right)^5=goh(x)$

avec $h(x)=\dfrac{2x}{-x+3}$ et $g(x)=x^5$.

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}}h(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}}(2x)\times\dfrac{1}{-x+3}=-\infty$

et $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^5=-\infty$

D'où $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}}f(x)=-\infty$

Exercice 9

a) Posons $f(x)=\sqrt{x^2+x-2}=\text{goh}(x)$ avec $h(x)=x^2+x-2$ et $g(x)=\sqrt{x}$.

On a $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+x-2)=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

Alors $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

b) Posons k(x) = $\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}$ = foh(x) avec

$h(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$ et $f(x)=\sqrt{x}$

On a :

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}1=1$

et $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x}=1$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}k(x)=1$.

c) Posons $g(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)=foh(x)$

avec $h(x)=\dfrac{1}{x}$ et $f(x)=\sin x$.

On a $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$

et $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0.$

Alors $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=0$

d) Soit $g(x)=x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=foh(x)$

avec $h(x)=\dfrac{1}{x}$ et $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

et $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)=1$.

Exercice 10

a) On a : $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

$=(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\times\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$=\dfrac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=+\infty$

b) On a : $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$

$=\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\times\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$

$=\dfrac{x^2+1-x^2+1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}}=0$

c) On a $\sqrt{x^2-4x+3}-(x+2)$

$=\dfrac{(\sqrt{x^2+4x+3}-(x+2))(\sqrt{x^2+4x+3}+(x+2))}{\sqrt{x^2+4x+3}+(x+2)}$

$=\dfrac{x^2+4x+3-(x+2)^2}{\sqrt{x^2+4x+3}+(x+2)}$

$=-\dfrac{+1}{\sqrt{x^2+4x+3+(x+2)}}$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4x+3}-(x-2)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{1}{\sqrt{x2+4x+3}+x+2}=0$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4x+3}+x+2=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x-3}}{x-3}=\lim\limits_{\substack{x\to3\\ >}}\dfrac{\sqrt{x-3}}{(\sqrt{x-3})^2}$

$=\lim\limits_{\substack{x\to3\\ >}}\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}=+\infty$

car $\lim\limits_{x\to3}\sqrt{x-3}=0$ et $\sqrt{x-3}>0$

e) $\dfrac{3-\sqrt{x+8}}{x-1}=\dfrac{(3-\sqrt{x+8})(3+\sqrt{x+8})}{(x-1)(3+\sqrt{x+8})}$

$=\dfrac{-(x-1)}{(x-1)(3+\sqrt{x+8})}$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3-\sqrt{x+8}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-(x-1)}{(x-1)(3+\sqrt{x+8})}$

$=\lim\limits_{x\to1}-\dfrac{1}{3+\sqrt{x+8}}=-\dfrac{1}{6}$

Exercice 11

1) Posons $f(x)=\sqrt{4x^2+1}+x$

On a :

$f(x)=\sqrt{x^2\left(4+\dfrac{1}{x^2}\right)}+x$

$=|x|\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}+x=-x\left(\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}+1\right),$

pour $x<0$

Donc

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}-x\left(\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)=+\infty$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}-x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}+1=3$

D'où $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

2) Posons h(x) = $\sqrt{2x^2+5x+1}+x+1$

On a : $h(x)=\sqrt{x^2\left(2+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}+x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

$=|x|\sqrt{\left(2+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}+x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

Pour $x<0$,

$h(x)=-x\sqrt{\left(2+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}+x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

$=x\left[-\sqrt{2+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1+\dfrac{1}{x}\right]$

Donc

$\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left[-\sqrt{2+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1+\dfrac{1}{x}\right]$

$=+\infty$

car $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ et

$\lim\limits_{x\to-\infty}-\sqrt{2+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1+\dfrac{1}{x}=(-\sqrt{2}+1)$

et $-\sqrt{2}+1<0$.

3) Posons $p(x)=\sqrt{4x^2+5x+1}-3x+1$

On a :

$p(x)=\sqrt{x^2\left(4+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}+x\left(-3+\dfrac{1}{x}\right)$

$=|x|\sqrt{\left(4+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}+x\left(-3+\dfrac{1}{x}\right)$

pour $x>0$

$p(x)=x\sqrt{\left(4+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}+x\left(-3+\dfrac{1}{x}\right)$

$=x\left[\sqrt{4+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-3+\dfrac{1}{x}\right]$

Donc

$\lim\limits_{x\to+\infty}p(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{4+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-3+\dfrac{1}{x}\right)$

$=-\infty$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-3+\dfrac{1}{x}=-1$

Exercice 12

a) Posons $g(x)=\sqrt{x}+x$ alors $g(1)=2$ et

$g'(x)=1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Ainsi

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}+x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)$

Or $g'(1)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

Donc $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x}+x-2}{x-1}=\frac{3}{2}$

b) Posons $h(x)=\sqrt{x}$ alors $h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $h(4)=2$

Ainsi

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{h(x)-h(4)}{x-4}=h'(4)$$

Or $h'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$

Donc $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\frac{1}{4}$

c) Posons $k(x)=\sqrt{2x-2}$ alors

$k'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-2}}$ et $k(3)=2$

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{2x-2}-2}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{k(x)-k(3)}{x-3}=k'(3).$$

Or $k'(3)=\frac{1}{2}$. Donc $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{2x-2}-2}{x-3}=\frac{1}{2}$.

d) Posons $f(x)=\cos x$ alors $f'(x)=-\sin x$

On a $f(\frac{\pi}{3})=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

Donc

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{3}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}=f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Or $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) On a

$$\frac{2\sin x-1}{6x-\pi}=\frac{2\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)}{6\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{3}\times\frac{\sin x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{6}}$$

Posons $f(x)=\sin x$ alors $f'(x)=\cos x$

$$\text{Ainsi }\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x-1}{6x-\pi}=\frac{1}{3}\times\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{1}{3}\times f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Or $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x-1}{6x-\pi}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}$

Exercice 13

1- V ; 2- F ; 3- F ; 4- F ; 5- V

Exercice 14

1. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{x}$

a) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\sqrt{x}$

alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ car

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$.

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

$$\text{On a }\frac{f(x)}{x}=\frac{\frac{1}{x}+\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x^2}+\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$.

b) Interprétation graphique des résultats.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$, la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de (OI) en $+\infty$.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=x^3+x$

a) Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$

$$\text{Et }\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty$$

<u>Conclusion</u> : $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=+\infty$

b) Interprétation graphique des résultats.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=+\infty$, la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de (OJ) en $-\infty$.

Exercice 15

1- Faux ; 2- Vrai

Exercice 16

1- F ; 2- F ; 3- V ; 4- V ; 5- F

Exercice 17

a) Étudions la continuité de f en -1 $f(-1) = -1$

On a $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} (x^2-2) = -1$

et $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} (-2-x) = -1$

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x) = f(-1)$

alors f est continue en -1.

b) Étudions la continuité de g en 2.

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \sqrt{x-1} = 1$

et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \dfrac{8}{x^2-1} = \dfrac{8}{3}$

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} g(x) \neq \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} g(x)$

alors g n'est pas continue en 2.

c) Étudions la continuité de h en 2.

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \dfrac{x-1}{x-3} = -1$

et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \left(-\dfrac{1}{2}x\right) = -1$

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} h(x) \neq h(2)$

alors h n'est pas continue en 2.

Exercice 18

• $2 \notin D_g$

Calculons $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$.

$$\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} \frac{-2(x-2)}{(x-2)(3+\sqrt{2x+5})}$$
$$= \lim_{x\to 2} \frac{-2}{3+\sqrt{2x+5}} = -\frac{1}{3}$$

$-\dfrac{1}{3} \in \mathbb{R}$ donc g est prolongeable par continuité en 2.

Soit h le prolongement par continuité de g en 2.

Alors h est définie sur $\left[-\dfrac{5}{2};+\infty\right[$ par :

$$\begin{cases} h(x) = g(x) \ si \ x \in \left[-\dfrac{5}{2};+\infty\right[\setminus \{2\} \\ h(x) = -\dfrac{1}{3} \ si \ x = 2 \end{cases}$$

Exercice 19

1 b ; 2 a ; 3 c ; 4 b

Exercice 20

1. f est continue sur $\mathbb{R}$ car elle est une fonction polynôme.
2. On a $Df = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$
f est continue sur $Df = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$ car f est une fonction rationnelle.
3. $Df = \left[\dfrac{3}{2};+\infty\right[$
f est continue sur $Df = \left[\dfrac{3}{2};+\infty\right[$ car f est la composée de deux fonctions continue sur $\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right[$.

Exercice 21

1. f est continue sur $[-3\ ;-1]$; et $f'(x) = 2x$ et f est décroissante sur $[-3\ ;-1]$.
$f([-3;-1]) = [f(-1); f(-3) = [0;8]$
2. $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-3\}, f'(x) = \dfrac{1}{(x+3)^2} > 0$
donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.
f est continue et croissante sur $]2;+\infty[$.
Par conséquent
$f(]2;+\infty[) = \left]\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[= \left]\dfrac{9}{5};2\right[$

Exercice 22

1- Faux ; 2- Vrai ; 3- Vrai.

Exercice 23

Déterminons à l'aide du tableau de variations l'image par f de chacun des intervalles

* Sur $]-\infty;-2[$, f est continue et strictement croissante.

$f]-\infty;-2[= \left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x); \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x)\right[=]-1;2[$

* Sur $[-2;5]$ f est continue mais n'est pas monotone.

$f([-2;5]) = [m\,;M] = [-3;4]$.

Donc $f([-2\ ;5]) = [-3\ ;4]$.

* Sur $]5;+\infty[$, f est continue et strictement décroissante

$f(]5;+\infty[) = \left]\lim_{x\to+\infty} f(x); \lim_{\substack{x\to5\\>}} f(x)\right[=]-\infty;4[$

Exercice 24

1- b ; 2- c ; 3- a.

Exercice 25

1- Faux ; 2- Vrai ; 3- Faux ; 4- Faux.

Exercice 26

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 3x^2 + 1$.
Donc $g'(x) > 0$.
Sur l'intervalle $]-2;-1[$, g est continue et strictement croissante et de plus $g(-2) \times g(-1) < 0$, car $g(-2) = -7$ et $g(-1) = 1$.
Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]-2 ; -1[$.

2. • $g\left(\frac{-2-1}{2}\right) = g(-1{,}5) \simeq -1{,}8$
$g(-1{,}5) \times g(-1) < 0$ donc $-1{,}5 < \alpha < -1$

• $g\left(\frac{-1{,}5-1}{2}\right) = g(-1{,}25) \simeq -0{,}2$

$g(-1{,}25) \times g(1) < 0$ donc $-1{,}25 < \alpha < -1$

• $g\left(\frac{-1{,}25-1}{2}\right) = g(-1{,}125) \simeq +0{,}45$

$g(-1{,}25) \times g(-1{,}125) < 0$, donc

$-1{,}25 < \alpha < -1{,}125$

Conclusion : $-1{,}2 < \alpha < -1{,}1$.

Exercice 27

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -3x2 - 3 = -3(x2 + 1)$.
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x)$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

D'une part f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

D'autre part $f(0) = 3$ et $f(1) = -1$,

d'où $f(0) \times f(1) < 0$.

On en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0 ; 1]$.

2. $0 < \alpha < 1$

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
$f(x)$	+	+	+	+	+	+	+	–

Donc $0{,}6 < \alpha < 0{,}7$.

Exercice 28

1. $\sqrt[3]{7^4} \times \sqrt{7^4} = 7^{\frac{4}{3}} \times 7^2 = 7^{\frac{10}{3}}$
$\sqrt[3]{7^2} \times \sqrt{7^4} = 7^{\frac{2}{3}} \times 7^2 = 7^{\frac{8}{3}}$

2. $$\frac{5^{\frac{3}{2}} \times 10^{-\frac{7}{6}}}{2^{-\frac{3}{4}} \times 5^{\frac{1}{3}}} = \frac{5^{\frac{3}{2}} \times 5^{-\frac{7}{6}} \times 2^{-\frac{7}{6}}}{2^{-\frac{3}{4}} \times 5^{\frac{1}{3}}}$$
$$= 5^{\frac{3}{2}-\frac{7}{6}-\frac{1}{3}} \times 2^{-\frac{7}{6}+\frac{3}{4}}$$
$$= 5^0 \times 2^{-\frac{5}{12}} = 2^{-\frac{5}{12}}$$

3. $\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{6}{5}} \times \sqrt[5]{2^7} = 2^{\frac{9}{5}} \times 2^{\frac{7}{5}} = 2^{\frac{16}{5}}$

Exercice 29

1. 5x = 15625 or 15625 = 56.
On a : $5^x = 5^6$

Ainsi $x = 6$; $S = \{6\}$.

2. $0{,}5^x + 3 = e \Longleftrightarrow 0{,}5^x = e - 3$.
Or $0{,}5^x > 0$ et $e - 3 < 0$.
Donc l'égalité est impossible. Et donc $S = \{\}$.

3. $4^x = 3^{x+1} \Longleftrightarrow e^{x\ln 4} = e^{(x+1)\ln 3}$
$\Longleftrightarrow x\ln 4 = (x+1)\ln 3$
$\Longleftrightarrow x = \frac{\ln 3}{\ln 4 - \ln 3}$

$S = \left\{\frac{\ln 3}{\ln 4 - \ln 3}\right\}$

IV.2. Exercices de renforcement

Exercice 30

On a $\lim_{\substack{x\to0\\>}} g(x) = \lim_{\substack{x\to0\\>}} \frac{1}{x} = +\infty$

Et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+4} - x$

On a : $\sqrt{x^2+4} - x = \frac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}$ (en utilisant l'expression conjuguée)

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+4} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{\sqrt{x^2+4}+x} = 0$$

D'où $\lim_{\substack{x\to0\\>}} fog(x) = 0$

Exercice 31

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{\sqrt{x}}{\sin x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{\sqrt{x}}{x} \times \dfrac{x}{\sin x}$

$= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{1}{\sqrt{x}} \times \dfrac{x}{\sin x} = +\infty.$

Car $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1.$

b) On a : $\dfrac{1-\cos x}{x\sin x} = \dfrac{1-\cos x}{x^2} \times \dfrac{x}{\sin x}$
et

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$

Par suite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x\sin x} = \dfrac{1}{2}$

c) On a : $\dfrac{\sin(\pi x)}{\tan x} = \dfrac{\sin(\pi x)}{(\pi x)} \times \dfrac{(\pi x)}{\tan x}$

$= \dfrac{\sin(\pi x)}{(\pi x)} \times \dfrac{(x)}{\tan x} \times \pi$

donc

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\pi x)}{\tan x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\pi x)}{(\pi x)} \times \dfrac{x}{\tan x} \times \pi = \pi$

car $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\pi x)}{(\pi x)} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\tan x} = 1$

d) On a :

$$\dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \dfrac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)} \times \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$$

$$= \dfrac{1-\cos^2 x}{1+\cos(x)} \times \dfrac{1}{x^2}$$

$$= \dfrac{1}{1+\cos(x)} \times \dfrac{\sin^2 x}{x^2}$$

car $1-\cos^2 x = \sin^2 x$

donc

$$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+\cos x} \times \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$$

$$= \dfrac{1}{2} \times 1$$

d'où $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 32

a) On a

$$\sqrt{x^2+4x} - x = \dfrac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x} = \dfrac{4}{1+\sqrt{1+\dfrac{4}{x}}}$$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{1+\sqrt{1+\dfrac{4}{x}}} = 2$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+4x} - x = 2$

b) Soit $f(x) = \sqrt{x^2+5x+1} + x + 1$

$= \dfrac{3x}{\sqrt{x^2+5x+1} - (x+1)}$

$$\sqrt{x^2+5x+1} + x + 1 = \dfrac{3x}{|x|\sqrt{1+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}} - (x+1)}$$

$$= \dfrac{3x}{x\left(-\sqrt{1+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}} - 1 - \dfrac{1}{x}\right)}$$

car $x < 0$

$$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{\left(-\sqrt{1+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}} - 1 - \dfrac{1}{x}\right)}$$

$$= -\dfrac{3}{2}$$

Exercice 33

1. f est continue et strictement croissante sur $]5\,;+\infty[$ de plus $1 \in f(\,]5\,;+\infty[\,) =]-3\,;+\infty[$, l'équation : $f(x) = 1$ admet une solution unique dans $]5\,;+\infty[$.

f est continue sur $]-\infty\,;5[$, $(f(]-\infty\,;5[) =]-\infty\,;0[$ mais $1 \notin]-\infty\,;0[$, $f(x) = 1$ n'admet pas de solution dans $]-\infty\,;5[$.

Donc l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

2. f est continue et strictement croissante sur $]-\infty\,;-3[$, f est une bijection de $]-\infty\,;-3[$ sur $f(\,]-\infty\,;-3[\,) =]-\infty\,;0[$ et comme $-2 \in f(\,]-\infty\,;-3[\,)$ on a : l'équation : $f(x) = -2$ admet une solution unique dans $]-\infty\,;-3[$.

f est continue et strictement décroissante sur $[-3\,;5]$ de plus $-2 \in f(\,[-3\,;5]\,) = [-3\,;0]$.

on a : l'équation : $f(x) = -2$ admet une solution unique dans $[-3\,;5]$.

f est continue et strictement croissante sur $]5\,;+\infty[$ et comme $-2 \in f(\,]5\,;+\infty[\,) =]-3\,;+\infty[$ on a : l'équation : $f(x) = -2$ admet une solution unique dans $]5\,;+\infty[$.

Donc l'équation $f(x) = -2$ admet trois solutions sur $\mathbb{R}$.

Exercice 34

1. Dressons le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$

On a $\Delta = 4 - 4 \times 3 \times 1 = -8$

Comme $\Delta < 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$ par conséquent f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

2. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ or $0 \in \mathbb{R}$ alors $f(x) = 0$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}$, notée α.

3. On a $f(-0.9) \times f(-0.8) = (-0.439 \times 0.048)$

Comme $f(-0.9) \times f(-0.8) < 0$

On a : $-0.9 < \alpha < -0.8$

Exercice 35

1. $\forall x \in \left]\frac{5}{2} ; +\infty\right[, f'(x) = \dfrac{11}{(5-2x)^2}$.

Comme $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur $\left]\frac{5}{2} ; +\infty\right[$.

f étant continue et strictement croissante sur $\left]\frac{5}{2} ; +\infty\right[$ alors f est une bijection de $\left]\frac{5}{2} ; +\infty\right[$ sur $f\left(\left]\frac{5}{2} ; +\infty\right[\right) = \left]-\infty ; -\frac{3}{2}\right[$.

2. $\forall y \in \left]-\infty ; -\frac{3}{2}\right[, \forall x \in \left]\frac{5}{2} ; +\infty\right[$,

$y = f(x) \Leftrightarrow y = \dfrac{3x-2}{5-2x} \Leftrightarrow y(5-2x) = 3x - 2$

$\Leftrightarrow 5y - 2xy = 3x - 2$

$\Leftrightarrow -2xy - 3x = -5y - 2$

$\Leftrightarrow x(-2y - 3) = -5y - 2$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{5y+2}{3+2y}$, pour $y \neq \dfrac{-3}{2}$.

D'où $f^{-1}(y) = \dfrac{5y+2}{3+2y}$; $\forall y \in \left]-\infty ; -\frac{3}{2}\right[$.

f^{-1} est la bijection de $\left]-\infty ; -\frac{3}{2}\right[$ sur $\left]\frac{5}{2} ; +\infty\right[$ définie par : $f^{-1}(x) = \dfrac{5x+2}{3+2x}$.

Exercice 36

1. $\forall x \in \left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right[, f'(x) = 8x + 4$ et

$\forall x \in \left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right[, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\left]-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$

Comme f est strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ alors f est bijective de $\left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ sur

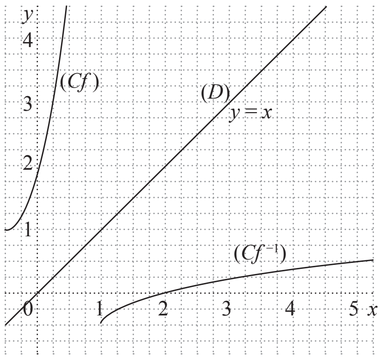
$\left[f\left(-\frac{1}{2}\right) ; \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right[= [1 ; +\infty[$.

2. Étude de variation de f^{-1}

f^{-1} et f ont le même sens de variation

D'où f^{-1} est strictement croissante de $[1 ; +\infty[$ sur $\left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.

3.



4. Posons

$y = 4x^2 + 4x + 2 = 4\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right]$

$x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{y}{4} - \frac{1}{4}}$

Donc $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{x}{4} - \frac{1}{4}}$

IV.3. Exercices d'approfondissement

Exercice 37

f est définie continue et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{3}{2}\right\}$ et $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{3}{2}\right\}$,

$f'(x) = \frac{-(2x+3)-2(1-x)}{(2x+3)^2} = \frac{-5}{(2x+3)^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{3}{2}\right\}$, $f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur $\left]-\infty\,;-\frac{3}{2}\right[$ et sur $\left]\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$-$
$f'(x)$	$-\frac{1}{2}$ ↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘ $-\frac{1}{2}$

Sur $\left]-\infty\,;-\frac{3}{2}\right[$, f est continue et strictement décroissante.

$f\left(\left]-\infty\,;-\frac{3}{2}\right[\right) = \left]\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{3}{2}\\ <}} f(x)\,;\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$

$= \left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right[$

$[1\,;+\infty[\subset \left]-\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$. Sur $[1\,;+\infty[$, f est continue et strictement décroissante

$f(]1\,;+\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\,; f(1)\right[$

$= \left]-\frac{1}{2}\,;0\right[$

Exercice 38

1. f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,
$f'(x) = 4x^3 + 4 = 4(x^3 + 1) = 4(x + 1)(x^2 - x + 1)$
Donc $\forall x \in]-\infty\,;-1[$, $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante, f est une bijection de $]-\infty\,;-1[$ sur $]-2\,;+\infty[$ et $0 \in]-2\,;+\infty[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]-\infty\,;-1[$.
De plus $f(-2) \times f(-1) < 0$, donc $\alpha \in]-2\,;-1[$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f'(x)$	$+\infty$ ↘	-2	↗ $+\infty$

De même
$\forall x \in]-1\,;+\infty[$, $f'(x) > 0$ alors f strictement croissante, f est une bijection de $]-1\,;+\infty[$ sur $]-2\,;+\infty[$ et $0 \in]-2\,;+\infty[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β dans $]-1\,;+\infty[$ de plus, $f(-1) \times f(0) < 0$,
donc $\beta \in]-1\,;0[$.

2. $-1{,}5 < \alpha < -1{,}4$ et $-0{,}3 < \alpha < -0{,}2$.

Exercice 39

1. Démontrons que f peut s'écrire sous la forme :
$f(x) = x + 3 + \frac{5}{2(x-1)^2}$.

On a : $x + 3 + \frac{5}{2(x-1)^2}$
$= \frac{5 + 2(x+3)(x-1)^2}{2(x-1)^2}$
$= \frac{2x^3 + 2x^2 - 10x + 11}{2(x-1)^2}$
$= f(x)$.

D'où f peut s'écrire sous la forme :
$f(x) = x + 3 + \frac{5}{2(x-1)^2}$.

2. a) Démontrons que la droite (Δ) d'équation : $y = x + 3$ est asymptote à (C).

On a : $f(x) - y = \frac{5}{2(x-1)^2}$ et

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5}{2(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5}{2(x-1)^2} = 0$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - y = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - y = 0$
donc la droite (Δ) d'équation : $y = x + 3$ est asymptote à (C) en $+\infty$ et $-\infty$.

b) Donnons l'équation de l'autre asymptote à (C).
On a $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ <}} f(x) = +\infty = \lim\limits_{\substack{x\to1\\ >}} f(x)$ alors la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à (C).

Maths Tle D corrigé 06102021.indd 11 06/10/2021 09:45

c) Étudions la position relative de la courbe (C) et de la droite (Δ).

On a $f(x) - y = \dfrac{5}{2(x-1)^2} > 0$

donc $\forall x \in\ ]-\infty\ ;\ 1[\ \cup\ ]\ 1\ ;\ +\infty[$ (C) est au-dessus de (Δ).

3. a) Montrons que l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas solution dans l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.

Sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ f est positive car elle admet un minimum positif qui est 6,5.

Par conséquent l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas solution dans l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.

b) Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]-4\ ;\ -1[$.

Sur l'intervalle $]-4\ ;\ -1[$. f est continue et strictement croissante .

De plus $f(-4) \times f(-1) < 0$ alors $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]-4\ ;\ -1[$.

Utilisons la méthode de dichotomie

On a $f\left(\dfrac{-4-1}{2}\right) = f(-2.5) > 0$

Alors $\alpha \in\ ]-4\ ;\ -2.5[$.

On a $f\left(\dfrac{-4-2.5}{2}\right) = f(-3.25) < 0$

Alors $\alpha \in\ ]-3.25\ ;\ -2.5[$.

On a $f\left(\dfrac{-3.25-2.5}{2}\right) = f(-2.875) < 0$

Alors $\alpha \in\ ]-2.875\ ;\ -2.5[$.

On a $f\left(\dfrac{-2.875-2.5}{2}\right) = f(-2.6875) > 0$

Alors $\alpha \in\ ]-2.6\ ;\ -2.5[$.

c) Déterminons le nombre de solution de l'équation $f(x) = 10$ dans l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.

$10 \in [6{,}5\ ;\ +\infty[\ = f(]1\ ;\ 27])$ or f est continue et strictement décroissante sur $]1;\ 27]$.

Donc l'équation $f(x) = 10$ admet une seule solution dans $]1;\ 27]$

De même $10 \in [6{,}5\ ;\ +\infty[\ = f([27\ ;\ +\infty[)$ or f est continue et strictement croissante sur $[27\ ;\ +\infty[$.

L'équation $f(x) = 10$ admet une seule solution dans $[27\ ;\ +\infty[$

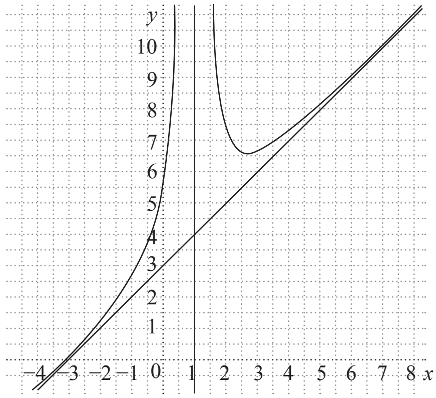
Donc l'équation $f(x) = 10$ admet deux solutions dans l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.

4. Déterminons les points d'intersection de (C) avec l'axe des ordonnées et l'axe des abscisses

- Pour l'axe des ordonnées on remplace x par 0 et on trouve le point $A\left(0\ ;\ \dfrac{11}{2}\right)$.

Pour l'axe des abscisses on résout l'équation $f(x) = 0$ et d'après la question 3.b on obtient $B(\alpha\ ;0)$.

5. Traçons dans le repère (O, I, J) les asymptotes, la courbe C, α et les points d'intersection avec les axes.



IV.4. Situation d'évaluation

Exercice 40

1. - Pour 100 articles le bénéfice de l'Artisan sera : $f(100) = 404\,000$;

- Pour 1000 articles, le bénéfice de l'Artisan sera $f(1000) = 4\,004\,000$.

2. Recherche de l'évolution du bénéfice pour

$x > 1$, $f'(x) = \dfrac{4000(x^2 - 100)}{x^2}$,

D'après le tableau de variation

- si le nombre d'articles produits est inférieur à 10, le bénéfice baisse.
- si le nombre d'articles produits est supérieur à 10, le bénéfice augmente.

x	$-\infty$		10		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	404000	↘	80000	↗	$+\infty$

IV. Exercices

IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

1. a) et b) ; 2. a) ; 3. b).

Exercice 2

$$P(A/A) = \frac{P(A \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1\,;$$

$$P(\overline{A}/A) = \frac{P(\overline{A} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\emptyset)}{P(A)} = 0\,;$$

$$P(A/\overline{A}) = \frac{P(A \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(\emptyset)}{P(\overline{A})} = 0\,.$$

Exercice 3

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}.$$

Or $A \subset B$ donc $B \cap A = A$

On en déduit :

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1\,.$$

Exercice 4

Soit A l'évènement : « La somme est paire »
B l'évènement : « Les nombres sont distincts ».

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{12}{30} = 0{,}4$$

Exercice 5

On entoure les lettres b ; d et e.

Exercice 6

a) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$= 0{,}2$ et $P(A) \times P(B) = 0{,}2$

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ donc les évènements A et B sont indépendants.

b) $P(A \cap B) = 0{,}2$. Comme $P(A \cap B) \neq 0$, on conclut que A et B ne sont pas incompatibles.

Exercice 7

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

$$= 0{,}52$$

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})$$

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A}) \times P(\overline{B})$$

$$= 0{,}92$$

Exercice 8

a) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$= \frac{4}{5} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{10}.$

b) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times P(\overline{B})$

$= P(A) \times (1 - P(B)$

$= \frac{4}{5} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{10}.$

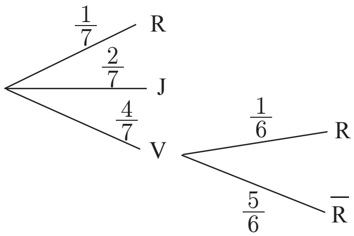
c) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \times P(\overline{B})$

$= P(1 - P(A))(1 - P(B))$

$= \frac{4}{5} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{40}.$

Exercice 9

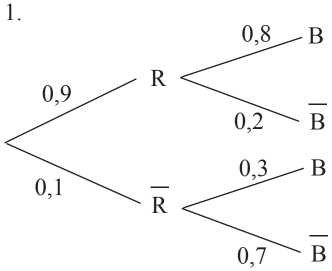
On considère les évènements suivants :
R : « Tirer une boule rouge »
J : « Tirer une boule jaune »
V : « Tirer une boule verte »



Maths Tle D corrigé 06102021.indd 13 06/10/2021 09:45

Exercice 10

1.



2. $$\begin{aligned} P(R \cap B) &= P(R) \times P_R(B) \\ &= 0,9 \times 0,8 \\ &= 0,72 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\overline{R} \cap B) &= P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(B) \\ &= 0,1 \times 0,3 \\ &= 0,03 \end{aligned}$$

Exercice 11

La probabilité que l'élève ait un BAC est :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap R) + P(B \cap \overline{R}) \\ &= 0,9 \times 0,8 + 0,1 \times 0,3 \\ &= 0,75 \end{aligned}$$

Exercice 12

$A \cap B = \emptyset$; $A \cap C = \emptyset$;

$C \cap B = \emptyset$; $A \cup B \cup C = \Omega$;

$P(E) = P(E \cap A) + P(E \cap B) + P(E \cap C)$;

$P(E \cap A) = P_A(E) \times P(A)$.

Exercice 13

1. $X(\Omega) = \{0 ; 1000 ; 5000 ; 200000\}$.

2.

x_i	0	1000	5000	200000
$P(X = x_i)$	$\frac{100}{120}$	$\frac{15}{120}$	$\frac{4}{120}$	$\frac{1}{120}$

Exercice 14

1. Soit F cette fonction de répartition. On a :

si $x < 2$, alors $F(x) = 0$

si $2 \leq x < 3$, alors $F(x) = 0,10$

si $3 \leq x < 5$, alors $F(x) = 0,26$

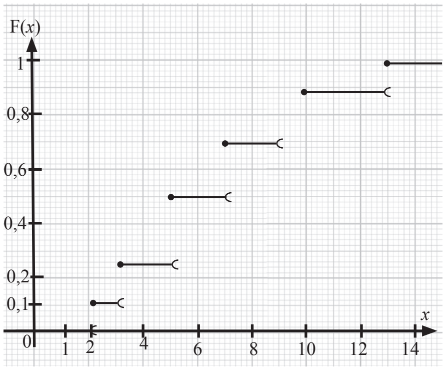
si $5 \leq x < 7$, alors $F(x) = 0,5$

si $7 \leq x < 9$, alors $F(x) = 0,75$

si $9 \leq x < 13$, alors $F(x) = 0,9$

si $x \geq 13$, alors $F(x) = 1$

2. Représentation graphique



Exercice 15

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{2}{15} + 4 \times \frac{1}{3} + 5 \times \frac{1}{15} + 8 \times \frac{4}{15} = \frac{89}{15}.$$

Exercice 16

* Espérance mathématique

$E(X) = 0,6 + 0,6 + 0,4 + 0,2 = 1,8$

* Variance

$$\begin{aligned} V(X) &= (4 \times 0,3 + 9 \times 0,2 + 16 \times 0,1 + 25 \times 0,4) - 1,8^2 \\ &= 11,36 \end{aligned}$$

* Écart-type

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{11,36} \approx 3,37$

Exercice 17

1. Vrai ; 2. Faux ; 3. Vrai ; 4. Vrai ; 5. Vrai ; 6. Vrai.

Exercice 18

1. $X(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$.

2. $P(X = k) = C_5^k (0,4)^k (0,6)^{5-k}$ avec $k \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$.

Maths Tle D corrigé 06102021.indd 14 06/10/2021 09:45

3. $P(X \leq 3) = P(X=0)+P(X=1)$
$+P(X=2)+P(X=3)$
$= 0{,}91296$

4. $P(X \geq 1) = 1-(P(X=0)+P(X=1))$
$= 0{,}66304$

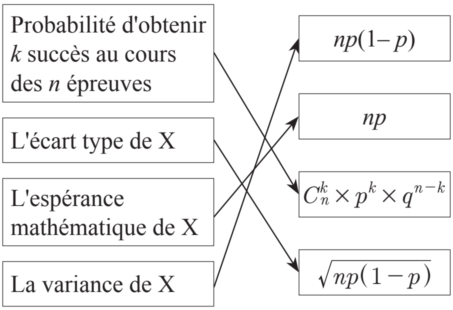
Exercice 19

$\mathrm{E(X)} = 4 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$; $\mathrm{V(X)} = 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$

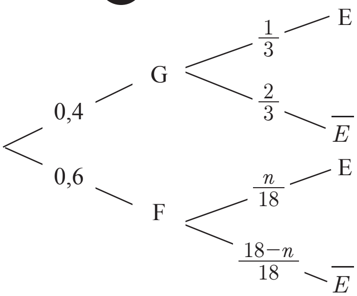
et $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

IV.2. Exercices de renforcement

Exercice 20



Exercice 21



$P(E \cap G) = 0{,}4 \times \frac{1}{3} = \frac{0{,}4}{3}$

$P(E) = 0{,}4 \times \frac{1}{3} + \frac{0{,}6n}{18} = \frac{2{,}4+0{,}6n}{18}$

$P(G) = 0{,}4$. On a :

$P(E) \times P(G) = 0{,}4 \times \frac{2{,}4+0{,}6n}{18}$

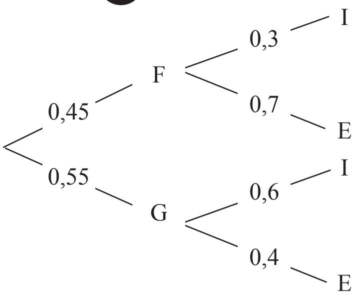
E et G sont indépendants si

P(E ∩ G) = P(E) ×P(G), c'est-à-dire $n = 6$.

Conclusion

- si $n = 6$, alors E et G sont indépendants
- si $n \neq 6$, alors E et G ne sont pas indépendants

Exercice 22

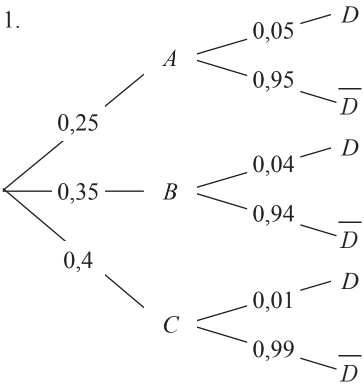


1. $P(E \cap F) = P(F) \times P_F(E) = 0{,}45 \times 0{,}7$
$= 0{,}315$

2. $P(I) = 0{,}4 \times 03 + 0{,}55 \times 0{,}6 = 0{,}465$

Exercice 23

1.



Les données sont les suivantes :

P(A) = 0,25 ; P(B) = 0,35 ; P(C) = 0,4 ;

$P_A(D) = 0{,}05$; $P_B(D) = 0{,}04$; $P_C(D) = 0{,}01$.

2. Utilisons la formule des probabilités totales pour calculer P(D) :

P(D) = P(D ∩ A) + P(D ∩ B) + P(D ∩ C)
$= P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D)$
$+ P(C) \times P_C(D)$
$= 0{,}25 \times 0{,}05 + 0{,}35 \times 0{,}04 + 0{,}4 \times 0{,}01$
$= 0{,}0125 + 0{,}014 + 0{,}0004$

P(D) = 0,0305.

3. $P(A/D) = \dfrac{P(D \cap A)}{P(D)} = 0{,}4098$

4. $P(C/\overline{D}) = \dfrac{P(\overline{D} \cap C)}{P(\overline{D})} = 0{,}4085$

Exercice 24

a) Les points possibles sont les suivants :

face	1	2	3	4	5	6
gain	–1	–2	+3	–4	–5	6

La loi de probabilité associée à cette épreuve est donc :

k	–1	–2	3	–4	–5	6
P(X=k)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

b) L'espérance est :

$$E = -1 \times \frac{1}{6} - 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} - 4 \times \frac{1}{6}$$
$$-5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6}$$
$$= -0{,}5$$

L'espérance de cette loi est –0,50.

Calcul de la variance :

$$V = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - E^2$$
$$= 1 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 9 \times \frac{1}{6} + 16 \times \frac{1}{6}$$
$$+ 25 \times \frac{1}{6} + 36 \times \frac{1}{6} - 0{,}5^2$$
$$\approx 14{,}92$$

La variance de cette loi est environ 14,92.

Exercice 25

On a : P(E) = 0,05 ; P(C) = 0,1 donc
$P(\overline{E}) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$ et
$P(\overline{C}) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$

1. Yao oublie le chargeur de son ordinateur chez lui et il n'y ait pas de coupure d'électricité est l'évènement $(C \cap \overline{E})$. De plus comme C et E sont indépendants donc C et $\overline{E}$ sont aussi indépendants.
On en déduit :
$$P(C \cap \overline{E}) = P(C) \times P(\overline{E}) = 0{,}1 \times 0{,}95$$
$$= 0{,}095$$

2. Yao ne peut pas se servir de son ordinateur portable un jour de travail donné lorsque l'évènement E ou C se produit. La probabilité cherchée est : P(C ∪ E).
On a : P(C ∪ E) = P(C) + P(E) − P(C ∩ E)
P(C ∪ E) = P(C) + P(E) − P(C) × P(E)
= 0,1 + 0,05 − 0,1 × 0,05 = 0,145

3. Notons X la variable aléatoire représentant le nombre de fois où Yao a oublié son chargeur chez lui. X suit la loi binomiale de paramètre n = 5 et p = 0,1. La probabilité cherchée est celle de l'évènement (X ≥ 1).
$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - 0{,}1)^5$
$= 1 - (0{,}9)^5 = 0{,}40951.$

Exercice 26

1. X(Ω) = {−1 ; 1 ; 2 ; 3}

$$P(X = -1) = \frac{C_3^0 \times 5 \times 5 \times 5}{6^3} = \frac{125}{216}$$
$$P(X = +1) = \frac{C_3^1 \times 1 \times 5 \times 5}{6^3} = \frac{75}{216}$$
$$P(X = +2) = \frac{C_3^2 \times 1 \times 1 \times 5}{6^3} = \frac{15}{216}$$
$$P(X = +3) = \frac{C_3^3 \times 1 \times 1 \times 1}{6^3} = \frac{1}{216}$$

Loi de X.

x_i	−1	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

2. $E(X) = \dfrac{125 + 75 + 30 + 3}{216} = -\dfrac{17}{216}$

3. $V(X) = \dfrac{1}{216}[125 + 75 + 60 + 9] - \left(\dfrac{17}{216}\right)^2$
$$= \frac{269}{216} = \frac{289}{216^2} = \frac{269 \times 216 - 289}{216^2}$$
$$= \frac{57815}{216^2}$$

Écart - type : $\sigma(X) = \dfrac{\sqrt{57815}}{216}$

Exercice 27

1. Loi de X.
Valeurs prises par X : X(Ω) = {−500 ; 0 ; 1000}

k	−500	0	1000
$P(X = k)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

2. La fonction de répartition de X est la fonction F définie par :

si $x < -500$, alors $F(x) = 0$

si $-500 \leq x < 0$, alors $F(x) = \dfrac{25}{36}$

si $0 \leq x < 1000$, alors $F(x) = \dfrac{35}{36}$

si $x \geq 1000$, alors $F(x) = 1$.

3. Espérance mathématique

$$E(X) = \frac{1}{36}(-500 \times 25 + 0 \times 10 + 1000 \times 1)$$
$$= -\frac{11500}{36}$$

Exercice 28

1. $X(\Omega) = \{0 ; 100\,000 ; 500\,000 ; 5\,000\,000\}$

$$P(X = 5\,000\,000) = \frac{1}{10\,000} = 0{,}0001$$
$$P(X = 5\,00\,000) = \frac{10}{10\,000} = 0{,}001$$
$$P(X = 1\,00\,000) = \frac{20}{10\,000} = 0{,}002$$
$$P(X = 0) = \frac{10\,000 - 31}{10\,000} = \frac{9\,969}{10\,000} = 0{,}9969$$

x_i	0	100 000	500 000	5 000 000
$P(X = x_i)$	0,9969	0,002	0,001	0,0001

2. Espérance mathématique

$E(X) = \dfrac{1}{10000}$ $(0 \times 9969 + 20 \times 100000 + 10 \times 500000 + 1 \times 5000000) = 1200$.

3. Espérance mathématique

$E(X) = \dfrac{1}{10000}$ $(-2000 \times 9969 + 20 \times (100000 - 2000) + 10 \times (500000 - 2000) + 10 \times (500000 - 2000) + 1 \times (500000 - 2000))$.

$E(X) = -2000 + 1200 = -800$

En moyenne, un joueur perd 800 F.

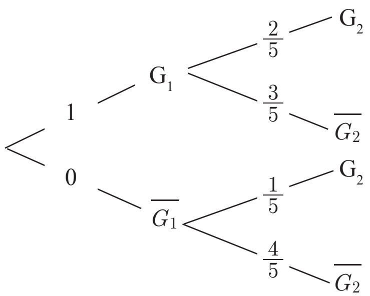
4. Soit m ce prix. Pour être rentable aux organisateurs, on doit avoir $E(X) < 0$.
C'est-à-dire
$\dfrac{1}{10000}$ $(-m \times 9969 + 20 \times (100000 - m) + 10 \times (500000 - m) + 1 \times (5000000 - m) < 0$
On obtient : $-m + 1200 < 0$.
Donc $m > 1200$.

IV.2. Exercices d'approfondisement

Exercice 29

Partie A

1. Démontrons par récurrence que : pour tout entier naturel non nul n, $P_{n+1} = \dfrac{1}{5}P_n + \dfrac{1}{5}$.
$P_1 = 1$.
Calculons P_2.
On a l'arbre des probabilités suivant :



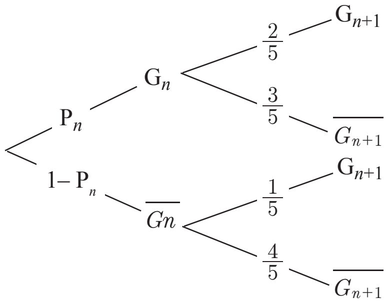
On a : $P_2 = P(G_2) = 1 \times \dfrac{2}{5} + 0 \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{2}{5}$.

Donc $P_{1+1} = \dfrac{1}{5} \times 1 + \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{5} \times P_1 + \dfrac{1}{5}$.

La propriété est vraie à l'ordre 1.
Supposons qu'il existe un entier naturel $n \geq 1$ tel que $P_n = \dfrac{1}{5}P_{n-1} + \dfrac{1}{5}$.

Démontrons que : $P_{n+1} = \dfrac{1}{5}P_n + \dfrac{1}{5}$.

On a l'arbre des probabilités suivant :



On a :
$$P_{n+1} = P(G_{n+1}) = \frac{2}{5} \times P_n + (1 - P_n) \times \frac{1}{5}$$
$$= \frac{1}{5}P_n + \frac{1}{5}$$

Donc la propriété est vraie à l'ordre $n+1$.
Conclusion : pour tout entier naturel non nul n, $P_{n+1} = \dfrac{1}{5}P_n + \dfrac{1}{5}$.

2.a) $u_{n+1} = P_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{5}P_n + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} = \frac{1}{5}u_n$

et $u_1 = P_1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

(u_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $\frac{3}{4}$.

b) $u_n = P_n - \frac{1}{4}$, donc $P_n = u_n + \frac{1}{4}$.

Or $u_n = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$, donc $P_n = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = \frac{1}{4}$

Partie B

1. a) Chaque partie est une épreuve de Bernoulli. Comme les parties sont indépendantes, identiques et répétées 10 fois, donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{4}$.

b) La probabilité de gagner au moins une partie est : $p_1 = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$; P1 $\simeq$ 0,94.

c) Le gain moyen est : $E(X) = np = 10 \times \frac{1}{4} = 2{,}4$

2. a) Loi de X

Soit k le nombre de partie gagné. On a :

k	0	1
Gain	–3000	–2200
P(X = k)	$C_{10}^{0}\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$	$C_{10}^{1}\left(\frac{1}{4}\right)^{1}\left(\frac{3}{4}\right)^{9}$

k	2	3
Gain	–1400	–600
P(X = k)	$C_{10}^{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{8}$	$C_{10}^{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{7}$

k	4	5
Gain	200	1000
P(X = k)	$C_{10}^{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{6}$	$C_{10}^{5}\left(\frac{1}{4}\right)^{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{5}$

k	6	7
Gain	1800	2600
P(X = k)	$C_{10}^{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{6}\left(\frac{3}{4}\right)^{4}$	$C_{10}^{7}\left(\frac{1}{4}\right)^{7}\left(\frac{3}{4}\right)^{3}$

k	8	9
Gain	3400	4200
P(X = k)	$C_{10}^{8}\left(\frac{1}{4}\right)^{8}\left(\frac{3}{4}\right)^{2}$	$C_{10}^{9}\left(\frac{1}{4}\right)^{9}\left(\frac{3}{4}\right)^{1}$

k	10
Gain	5000
P(X = k)	$C_{10}^{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}$

L'espérance mathématique est :

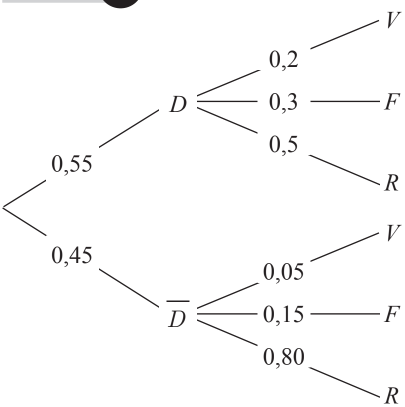
$$E(X) = \frac{-1\,233\,468\,000 + 132\,404\,000}{4^{10}}$$
$$= \frac{-1\,101\,064\,000}{1\,048\,576} \approx -1050$$

E(X) < 0 donc le jeu est défavorable au joueur.

b) La probabilité d'obtenir un gain supérieur à 4000 F est : P(X = 9) + P(X = 10).

$$P(X=9)+P(X=10)$$
$$= C_{10}^{9}\left(\frac{1}{4}\right)^{9}\left(\frac{3}{4}\right)^{1} + C_{10}^{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}$$
$$= \frac{10\times 3+1}{4^{10}} = \frac{31}{1\,048\,576}$$

Exercice 30



1. Probabilité que l'étudiant ait un ordinateur et un violon

$P(D \cap V) = 0{,}55 \times 0{,}2 = 0{,}11$.

2. Probabilité que l'étudiant ait un violon et pas d'ordinateur

$P(\overline{D} \cap V) = 0{,}45 \times 0{,}05 = 0{,}0225$

Maths Tle D corrigé 06102021.indd 18 06/10/2021 09:45

3. $P(V)=P(D\cap V)+P(\overline{D}\cap V)$
$\qquad = 0,11+0,0225=0,1325$

4. $P(F)=P(D\cap F)+P(\overline{D}\cap F)$
$\qquad = 0,55\times 0,3+0,45\times 0,15$
$\qquad = 0,2325$

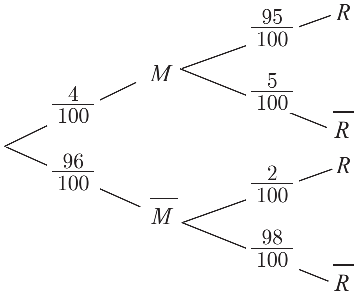
5. Probabilité qu'un étudiant ait un ordinateur sachant qu'il a une flûte

$$P_F(D)=\frac{P(D\cap F)}{P(F)}=\frac{0,55\times 0,3}{0,2325}\approx 0,71.$$

IV.4. Situation d'évaluation

Exercice 31

Soit $\overline{\text{M}}$: « Le microprocesseur en bon état. »
M : « Le microprocesseur en mauvais état. »
R : « Le microprocesseur rejeté. »
$\overline{\text{R}}$: « Le microprocesseur accepté. »



Il y a erreur si le microprocesseur est défectueux et accepté ou en bon état et rejeté.
Donc la probabilité qu'il y ait une erreur est :

$$P(M\cap\overline{R})+P(\overline{M}\cap R)=\frac{4}{100}\times\frac{5}{100}+\frac{96}{100}\times\frac{2}{100}$$
$$=\frac{1}{25}\times\frac{1}{20}+\frac{24}{25}\times\frac{1}{50}$$
$$=\frac{53}{2500}=0,0212$$

Leçon 3 Dérivabilité et étude de fonction

IV. Exercices

IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

1. $\boxed{]a\,;x_0]}$; 2. $\boxed{[x_0\,;a[}$; 3. $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$

Exercice 2

$l_1=\sqrt{3}$ et $l_2=+\infty$	(C_f) admet une tangente au point A $(a\,;f(a))$
$l_1=+\infty$ et $l_2=-\infty$	(C_f) admet une tangente à droite et une tangente à gauche au point A $(a\,;f(a))$
$l_1=1$ et $l_2=1$	(C_f) admet une tangente à gauche et une tangente verticale au point A $(a\,;f(a))$
$l_1=-\infty$ et $l_2=\dfrac{3}{2}$	(C_f) admet une tangente à droite et une tangente verticale au point A $(a\,;f(a))$
$l_1=2$ et $l_2=-2$	(C_f) admet une tangente verticale au point A $(a\,;f(a))$

Maths Tle D corrigé 06102021.indd 19 06/10/2021 09:45

Exercice 3

1\. $f(x) = 2x\,|x|$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$
$$= \lim_{x \to 0} 2|x|.$$

On a : $f'(0) = f'_g(0) = f'_d(0) = 0$.

2\. $g(x) = \sqrt{x^2-1}$ sur $[1\ ;+\infty[$.

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} = +\infty$

Donc g n'est pas dérivable en 1.

Exercice 4

1\. On dit que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]a\ ;b]$ lorsque f est dérivable en tout élément de $]a\ ;b[$ et dérivable à gauche en b.

2\. On dit que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[a\ ;b[$ lorsque f est dérivable en tout élément de $]a\ ;b[$ et dérivable à droite en a.

3\. On dit que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]a\ ;b[$ lorsque f est dérivable en tout élément de $]a\ ;b[$.

4\. On dit que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[a\ ;b]$ lorsque f est dérivable en tout élément de $]a\ ;b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b.

Exercice 5

La bonne notation est : $\dfrac{d^n f}{dx^n}$.

Exercice 6

1\. $f(x) = 3x^4 - x^2 - 2x + 2$; $f^{(1)}(x) = 12x^3 - 2x - 2$;

$f^{(2)}(x) = 36x^2 - 2$; $f^{(3)}(x) = 72x$; $f^{(4)}(x) = 72$.

2\. $f(x) = \sin\dfrac{x}{2}$; $f^{(1)}(x) = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}$;

$f^{(2)}(x) = -\dfrac{1}{4}\sin\dfrac{x}{2}$; $f^{(3)}(x) = -\dfrac{1}{8}\cos\dfrac{x}{2}$;

$f^{(4)}(x) = \dfrac{1}{16}\sin\dfrac{x}{2}$.

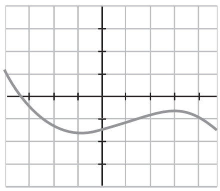
3\. $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$; $f^{(1)}(x) = \dfrac{-1}{(x-2)^2}$;

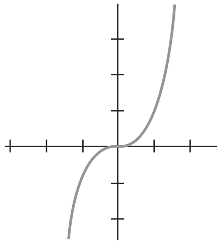
$f^{(2)}(x) = \dfrac{2}{(x-2)^3}$; $f^{(3)}(x) = \dfrac{-6}{(x-2)^4}$;

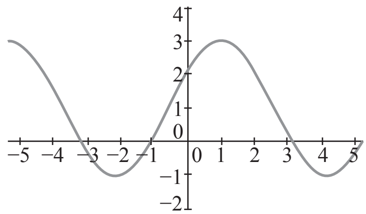
Exercice 7

En A, la courbe (C_f) traverse sa tangente.
Donc le point d'inflexion de (C_f) est A.

Exercice 8







Exercice 9

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 4x^3 - 12x$ et
$f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1)$.
$f''(x)$ a le même signe que $x^2 - 1$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$f''(x)$ s'annule en -1 et en 1 en changeant de signe.
Donc (Cf) admet deux points d'inflexion.
Ce sont les points $A(-1\ ;f(-1))$ et $B(1\ ;f(1))$, c-à-d $A(-1\ ;-4)$ et $B(1\ ;-4)$.

Exercice 10

1\. $f'(x) = 6x^2(x^3-2)$

2\. $g'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}}$

3\. $h'(x) = -\dfrac{1}{\pi^2+2}\cos\left(\dfrac{\pi - x}{\pi^2+2}\right)$

4\. $k'(x) = -\dfrac{5}{(5x+3)^2}$

Maths Tle D corrigé 06102021.indd 20 06/10/2021 09:45

Exercice 11

a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 + 1$.
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
b) $f(1) = 3$.
c) $f^{-1}(3) = 1$ et $f'(1) = 4$.
$f'(1) \neq 0$ donc f^{-1} est dérivable en 3 et
$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{4}$.

Exercice 12

a) $u(x) = \tan x$
$\forall x \in]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[, u'(x) = 1 + \tan^2 x$
$\forall x \in]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[, u'(x) > 0$ donc u est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$.
On a : $u( ]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[ ) = \mathbb{R}$.

b) u et u^{-1} ont le même sens de variation.
Comme u est croissante donc u^{-1} est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13

f est dérivable sur $[2 ; 5]$ et $1 \leq f'(x) \leq 4, \forall x \in [2 ; 5]$
D'après l'inégalité des accroissements finis on a
$1(5-2) \leq f(5) - f(2) \leq 4(5-2)$
$3 \leq f(5) - f(2) \leq 12$

Exercice 14

Posons : $f(x) = \sqrt{x}$
$\forall x \in]0 ; +\infty[$, on a $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
$f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0 ;+\infty[$.
$\forall x \in [a ; b]$ tel que $0 < a < b$, on a $a \leq x \leq b$,
$2\sqrt{a} \leq 2\sqrt{x} \leq 2\sqrt{b}$, $\frac{1}{2\sqrt{b}} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}$
D'après l'inégalité des accroissements finis on a :

$$\frac{1}{2\sqrt{b}}(b-a) < f(b) - f(a) < \frac{1}{2\sqrt{a}}(b-a).$$

Ainsi $\frac{1}{2\sqrt{b}} < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < \frac{1}{2\sqrt{a}}$

$$\frac{1}{2\sqrt{b}} < \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a} < \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

IV.2. Exercices de renforcement

Exercice 15

$f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$, $D_f = \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} = x^4 = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} = x^4 = +\infty$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x-2)(x+2)$.

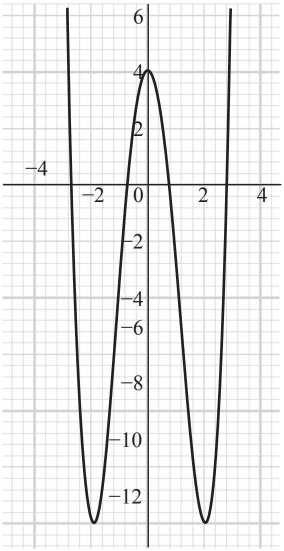
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$ ou $x = -2$.

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2-4	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

f est strictement décroissante sur $]-\infty ; -2[$ et sur $]0 ; 2[$.
f est strictement croissante sur $]-2 ; 0[$ et sur $]2 ; +\infty[$.

Tableau de variation

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-12	$\nearrow$	4	$\searrow$	-12	$\nearrow$	



Exercice 16

$f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, $D_f = \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} = \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0.$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} = \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0.$

- $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{(x^2-1)-2x(x)}{(x^2-1)^2}$

$$= \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{(1-x)(x+1)}{(x^2+1)^2}$$

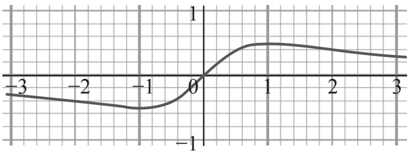
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

f est décroissante sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]1\,;+\infty[$.
f est croissante sur $]-1\,;1[$.

Tableau de variation

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0



Exercice 17

$h(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1$.

a) $h'(x) = 3x^2 + 8x + 4 = (x+2)(3x+2)$

$\forall x \in]-\infty\,;-2[\cup]-\dfrac{2}{3}\,;+\infty[$, $h'(x) > 0$.

$\forall x \in]-2;\ -\dfrac{2}{3}[$, $h'(x) < 0$.

h est croissante sur $]-\infty;2[$ et sur $]-\dfrac{2}{3}\,;+\infty[$;

h est décroissante sur $]-2;-\dfrac{2}{3}[$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} = x^3 = -\infty$

  $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} = x^3 = +\infty.$

x	$-\infty$		-2		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\frac{5}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

b) Les extremums relatifs sont :
Maximum : 1 atteint pour $x = -2$.
Minimum : $-\dfrac{5}{27}$ atteint pour $x = -\dfrac{2}{3}$.

c) On obtient le point $I\left(\dfrac{-4}{3}\,;\dfrac{11}{27}\right)$.
Car $f''(x) = 0$ en $-\dfrac{4}{3}$ en changeant de signe.

Exercice 18

- $f(x) = (x^2+3)^5$

$f(x) = 5(x^2+3)'\,(x^2+3)^4 = 10x(x^2+3)^4$

- $g(x) = \sqrt{3x^2-5x+4}$

$g'(x) = \dfrac{\left(3x^2-5x+4\right)'}{2\sqrt{3x^2-5x+4}} = \dfrac{6x-5}{2\sqrt{3x^2-5x+4}}.$

- $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+2x^2}}$

$h'(x) = \dfrac{-\left(\sqrt{1+2x^2}\right)'}{\left(\sqrt{1+2x^2}\right)^2} = \dfrac{-\dfrac{(2x^2+1)'}{2\sqrt{1+2x^2}}}{1+2x^2}$

$h'(x) = \dfrac{-2x}{\sqrt{1+2x^2}} \times \dfrac{1}{1+2x^2}$

- $k(x) = (1+\cos^2 x)^4$

$k'(x) = 4(1+\cos^2 x)'\,(1+\cos^2 x)^3$

$k'(x) = 4 \times (-\sin x) \times 2\cos x\,(1+\cos^2 x)^3$

$k'(x) = -8(\sin x)(\cos x)(1+\cos^2 x)$

- $t(x) = \sin^3 2x$

$t'(x) = 3(\sin 2x)'\sin^2 2x$

$t'(x) = 3 \times 2\cos 2x \sin^2 2x$

$t'(x) = 6\cos 2x.\sin^2 2x$

Maths Tle D corrigé 06102021.indd 22 06/10/2021 09:45

Exercice 19

Il faut que f soit continue en 0.

- $f(0) = 3(0)^2 + 0 + a = a$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} bx + 2 = 2$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} 3x^2 + x + a = a$;

donc f continue en 0 $\Leftrightarrow a = 2$.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{bx + 2 - 2}{x} = b \,;$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{3x^2 + x + 2 - 2}{x}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} 3x + 1 = 1.$$

Donc f est dérivable en 0 $\Leftrightarrow b = 1$.

Conclusion : $a = 2$ et $b = 1$.

Exercice 20

1. $g(1) = 1^2 + 2 = 3$.

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{x^2 + 2 - 3}{x - 1}$

$$= \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{(x-1) \times (x+1)}{x - 1}$$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} x + 1 = 2,\ f_g(1) = 2.$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{g(x) - g(2)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{\frac{x + 2}{x} - 3}{x - 1}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{x + 2 - 3x}{x(x - 1)}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{-2x + 2}{x(x - 1)}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{-2(x - 1)}{x(x - 1)}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{-2}{x} = -2$$

$f'_d(1) = -2$.

$f'_g(1) \neq f'_d(1)$, donc f n'est pas dérivable en 1.

2. (C_g) admet au point d'abscisse 1 une tangente à gauche et une autre tangente à droite.

Exercice 21

$f(x) = x^3 + 3x^2 + 4$

1. a) $f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -2$.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$3x$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- f est croissante sur $]-\infty;-2[$ et sur $]0;+\infty[$.
- f est décroissante sur $]-2\,;\,0[$.

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$.

d)

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	8	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 4 = -8 + 12 + 4 = 8$

e) $f'(1) = 9$, $f(1) = 8$.

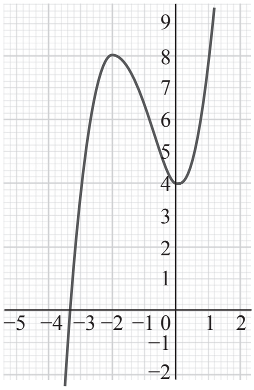
(T) : $y = 9(x - 1) + 8 \Longrightarrow y = 9x - 1$.

2. a) $f''(x) = 6x + 6$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$; $f(-1) = 6$.

Le point d'inflexion de $(\mathscr{C}_f)$ est A$(-1\,;\,6)$.

b) Voir courbe.



Exercice 22

Partie A

1. $g(x) = 2x^3 + x - 2$.
$g'(x) = 6x^2 + 1$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) > 0$.
g est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. a) g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
g est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$,
car $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
Comme $0 \in \mathbb{R}$, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.

b) $g(0) = -2$ et $g(1) = 1$ donc $\alpha \in]0;1[$.

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$g(x)$	–	–	–	–	–	–	–	–	+	+

De la même manière on montre que
$0{,}83 < \alpha < 0{,}84$

3. $\forall x \in]-\infty;\alpha[$, $g(x) < 0$.
$\forall x \in]\alpha;+\infty[$, $g(x)>0$.
$g(\alpha) = 0$.

Partie B

1. $f(x) = \sqrt{x^4 + (x-2)^2}$

$$f'(x) = \frac{4x^3 + 2(x-2)}{2\sqrt{x^4 + (x-2)^2}} = \frac{2x^3 + x - 2}{\sqrt{x^4 + (x-2)^2}}$$

$\forall x \in f'(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$, donc $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.

$\forall x \in]-\infty;\alpha[$, $f'(x) < 0$, donc f est décroissante sur $]-\infty;\alpha[$.

$\forall x \in]\alpha;+\infty[$, $f'(x) > 0$, donc f est croissante sur $]\alpha;+\infty[$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4 + (x-2)^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$,
donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 + (x-2)^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$,
donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		–	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\alpha\sqrt{\alpha(\alpha-2)}$	↗	$+\infty$

Exercice 23

1. a) $(\mathscr{C}_f)$ admet en N et en Q une tangente horizontale ; donc $f'(1) = 0$ et $f'(3) = 0$.
Déterminons le coefficient directeur de la tangente (Δ) en P à $(\mathscr{C}_f)$.

$$a = \frac{1 - \frac{5}{2}}{3-2} = 1 - \frac{5}{2} = \frac{2-5}{2} = -\frac{3}{2}$$

donc $f'(2) = -\dfrac{3}{2}$.

b) Équation de (Δ) : $y = -\dfrac{3}{2}x + b$.

$S \in (\Delta)$, donc

$1 = -\dfrac{3}{2} \times 3 + b \Longrightarrow b = 1 + \dfrac{9}{2} = \dfrac{11}{2}$.

(Δ) : $y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{11}{2}$.

2. $f(x) = 3$.
La parallèle à $(O ; \vec{i})$ passant par le point de coordonnées $(0 ; 3)$ coupe $(\mathscr{C}_f)$ en 3 points distincts ; donc le nombre de solution de $f(x) = 3$ est 3.

3. f est croissante sur $[0;1]$.
f est décroissante sur $[1;3]$.
f est croissante sur $[3;4]$.

4. $\forall x \in [0 ; 4]$, $f'(x) = a(x-1)(x-3)$.

a) $f'(2) = -\dfrac{3}{2} \Longleftrightarrow a(2-1)(2-3) = -\dfrac{3}{2}$

$$\Longleftrightarrow -a = -\frac{3}{2} \Longrightarrow a = \frac{3}{2}$$

b) Pour $a = \dfrac{3}{2}$

$$f'(x) = \frac{3}{2}(x-1)(x-3) = \frac{3}{2}(x^2 - 4x + 3)$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{9}{2}$$

c) La forme générale de $f(x)$ est :

$$f(x) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{3}x^3 - 6 \times \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}x + c$$

$f(x) = \dfrac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \dfrac{9}{2}x + c$; comme $f(0) = \dfrac{3}{2}$

donc $c = \dfrac{3}{2}$.

Donc $f(x) = \dfrac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \dfrac{9}{2}x + \dfrac{3}{2}$.

Maths Tle D corrigé 06102021.indd 24 06/10/2021 09:45

Exercice 24

$$h(x)=\frac{4x^2+4x+1}{x^2+1}$$

1. $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$h'(x)=\frac{(8x+4)(x^2+1)-2x(4x^2+4x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{8x^3+8x+4x^2+4-8x^3-8x^2-2x}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{-4x^2+6x+4}{(x^2+1)^2}=\frac{2(-2x^2+3x+2)}{(x^2+1)^2}$$

$-2x^2+3x+2=0$

$\Delta = 9-4(-2)\times 2 = 9+16 = 25$

$x_1=\frac{-3-5}{-4}=\frac{-8}{-4}=2$;

$x_2=\frac{-3+5}{-4}=\frac{-2}{4}=\frac{1}{2}$

$$h'(x)=\frac{2\left(-2(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{-2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2}$$

2. Tableau de signe

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
-2	$-$		$-$		$-$		
$x-2$	$-$		$-$		0	$+$	
$2x+1$	$-$	0	$+$		$+$		
$h'(x)$	$-$	0	$+$		0	$-$	

$\forall x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[$, $h'(x) < 0$, donc h est décroissante sur $]-\infty; -\frac{1}{2}[$.

$\forall x \in]-\frac{1}{2}$; $2[$, $h'(x) > 0$, donc f est croissante sur $]-\frac{1}{2}$; $2[$.

$\forall x \in]2$; $-\infty[$, $h'(x) < 0$, donc h est décroissante sur $]2$; $-\infty[$.

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x^2}{x^2} = 4$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{x^2} = 4$

La droite d'équation $y = 4$ est asymptote horizontale à $(\mathscr{C}_h)$.

4.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	4

5. $h(x)-y=\frac{4x^2+4x+1}{x^2+1}-4$

$$=\frac{4x^2+4x+1-4x^2-4}{x^2+1}=\frac{4x-3}{x^2+1}$$

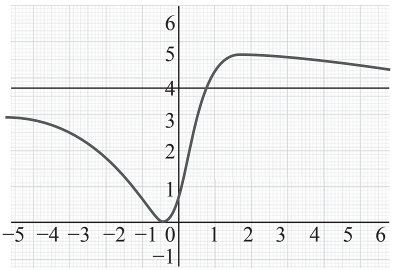
• $h(x)-y<0 \Leftrightarrow 4x-3<0 \Leftrightarrow x<\frac{3}{4}$;

$(\mathscr{C}_h)$ est en dessous de (D) sur $]-\infty; \frac{3}{4}[$.

• $h(x)-y>0 \Leftrightarrow x>\frac{3}{4}$;

$(\mathscr{C}_h)$ est au-dessus de (D) sur $]\frac{3}{4}$;$+\infty[$.

6. Voir courbe.



Exercice 25

$f(x) = 6\sin x - 3\cos 2x + 2\sin 3x.$

1. $f'(x) = 6\cos x + 6\sin 2x + 6\cos 3x$

$f'(x) = 6(\cos x + \sin 2x + \cos 3x)$

• $\sin 2x = 2\cos x\sin x$

• $\cos 3x = \cos(x + 2x)$

$= \cos x\cos 2x - \sin x\sin 2x$

$= \cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) - \sin x(2\cos x\sin x)$

$= \cos^3 x - \cos x\sin^2 x - 2\cos x\sin^2 x$

$= \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x$

Donc, $f'(x) = 6[\cos x + 2\cos x\sin x + \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x]$

$f'(x) = 6\cos x[1 + 2\sin x + (1 - \sin^2 x) - 3\sin^2 x]$

$= 6\cos x(1 + 2\sin x + 1 - 4\sin^2 x)$

$f'(x) = 12\cos x(1 + \sin x - 2\sin^2 x).$

Maths Tle D corrigé 06102021.indd 25 06/10/2021 09:45

Posons $X = \sin x$, on a : $-2X^2 + X + 1 = 0$
$\Delta = 1 - 4(-2) \times 1 = 1 + 8 = 9$

$$X_1 = \frac{-1-3}{-4} = 1\ ,\ X_2 = \frac{-1+3}{-4} = -\frac{1}{2}\ .$$

$$-2X^2 + X + 1 = -2\,(X+1)\,(X+\frac{1}{2})$$
$$= (1-X)\,(1+2X)$$

donc $1 + \sin x - 2\sin^2 x = (1 - \sin x)(1 + 2\sin x)$
Donc $f'(x) = 12\cos x(1 - \sin x)(1 + 2\sin x)$.

2. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$ ou $1 - \sin x = 0$ ou
$1 + 2\sin x = 0$

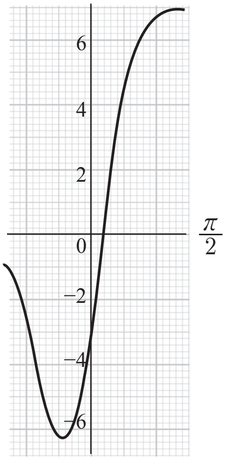
- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2}$ ou $x = \dfrac{\pi}{2}$;
- $1 - \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$;
- $1 + 2\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{6}$.

Tableau de signe

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$12\cos x$	0	+		+	0
$1-\sin x$		+		+	0
$1+2\sin x$		–	0	+	
$f'(x)$	0	–	0	+	0

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	–	0	+	0
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-\frac{7}{2}$	$\nearrow$	7

3. Voir courbe.



Exercice 26

1. $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 3$.

a) $P(x) = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - 2 = (x - 1)^3 - 2$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $P'(x) = 3(x - 1)^2 > 0$.
Donc P est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Si $x \leq \dfrac{11}{5}$ alors $P(x) \leq P(\dfrac{11}{5})$ car P est croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\text{Or } P\Big(\frac{11}{5}\Big) = \Big(\frac{11}{5} - 1\Big)^3 - 2$$
$$= -\frac{34}{125} \leq -\frac{25}{125} = -\frac{1}{5}$$

Donc : $P(x) \leq -\dfrac{1}{5}$

2. $f(x) = x + 1 + \dfrac{3}{x-2} - \dfrac{1}{(x-2)^2}$.

a) $x^3 - 6x^2 + 9x = x(x^2 - 6x + 9)$

$= x(x^2 - 2 \times 3x + 3^2) = x(x - 3)^2$.

$\forall x \in\ ]-\infty;0[$, $x^3 - 6x^2 + 9x < 0$

$\forall x \in\ ]0;3[\ \cup\ ]3;+\infty[$, $x^3 - 6x^2 + 9x > 0$

$\forall x \in \{0;3\}$, $x^3 - 6x^2 + 9x = 0$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}-\{2\}$,

$$f'(x) = 1 - \frac{3}{(x-2)^2} + \frac{2(x-2)}{(x-2)^4}$$
$$= 1 - \frac{3}{(x-2)^2} + \frac{2}{(x-2)^3}$$
$$= \frac{(x-2)^3 - 3(x-2) + 2}{(x-2)^3}$$
$$= \frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{(x-2)^3}.$$

c) $\forall x \in \mathbb{R}-\{2\}$,

$$f'(x) = \frac{x(x-3)^2}{(x-2)^3} = \frac{x(x-3)^2}{(x-2)(x-2)^2}.$$

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$12\cos x$		–	0	+		+		+	
$1-\sin x$		–		–	0	+		+	
$1+2\sin x$		+		+		+	0	+	
$f'(x)$		+	0	–	‖	+	0	+	

- $\forall x \in\ ]-\infty;0[\ \cup\ ]2;+\infty[$, $f'(x) \geq 0$ donc f est croissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]2;+\infty[$.
- $\forall x \in]0;2[$, $f'(x) < 0$ donc f est décroissante sur $]0;2[$.

3. a) $f(x) - y = \dfrac{3}{x-2} - \dfrac{1}{(x-2)^2}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - y = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - y = 0$; donc (Δ) : $y = x + 1$ est asymptote à $(\mathscr{C}_f)$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) $f(x) - y = 0 \Leftrightarrow \dfrac{3}{x-2} = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

$\Leftrightarrow 3(x-2)^2 = (x-2)$.

$3(x-2)^2 = (x-2) \Rightarrow 3(x-2) = 1$

$\Leftrightarrow 3x - 6 = 1$

$\Leftrightarrow 3x = 7 \Rightarrow x = \dfrac{7}{3}$.

$x + 1 = \dfrac{7}{3} + 1 = \dfrac{10}{3}$. $A\left(\dfrac{7}{3} ; \dfrac{10}{3}\right)$.

c)

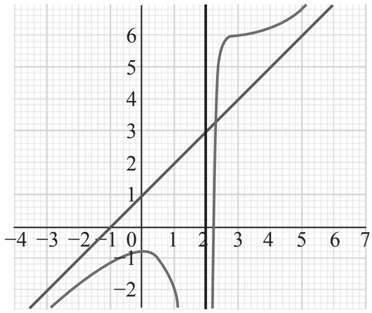
$$f(x) - y = \frac{3}{(x-2)} - \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{3(x-2)-1}{(x-2)^2} = \frac{3x-6-1}{(x-2)^2} = \frac{3x-7}{(x-2)^2}$$

$f(x) - y > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{7}{3}$, $f(x) - y < 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{7}{3}$.

Sur $\left]\dfrac{7}{3} ; +\infty\right[$, $(\mathscr{C}_f)$ est au-dessus de (Δ).

Sur $\left]-\infty ; \dfrac{7}{3}\right[$, $(\mathscr{C}_f)$ est en-dessous de (Δ).

4. Voir courbe.



Exercice 27

1. $D_f = \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+1}} = -f(x)$.

Donc f est une fonction impaire.

2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 < 1$

$$x^2 < x^2 + 1$$

$$|x| < \sqrt{x^2+1}$$

$$-\sqrt{x^2+1} < x < \sqrt{x^2+1}$$

$$-1 < \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1$$

$$-1 < f(x) < 1$$

3. • $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{-\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}} = -1$

La droite d'équation $y = -1$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}} = 1$

La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

4. $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{1 \times \sqrt{x^2+1} - x \times \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^2+1} - \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

5. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$

$$x^2 + 1 \geq 1$$

$$(x^2+1)^3 \geq 1$$

$$\sqrt{(x^2+1)^3} \geq 1$$

$$(x^2+1)\sqrt{x^2+1} \geq 1$$

$$0 < \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \leq 1$$

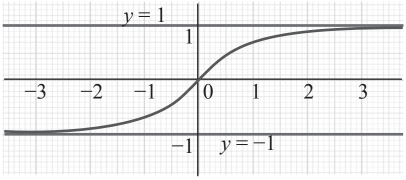
$$0 < f'(x) \leq 1$$

6.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1

Maths Tle D corrigé 06102021.indd 27 06/10/2021 09:45

7. Voir courbe.



Exercice 28

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x \in D_g \Leftrightarrow x^2 - 3x > 0 \Leftrightarrow x(x-3) > 0$.
Donc $D_g =]-\infty;0[\cup]3;+\infty[$.

2. • $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{-\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}} = -1$

La droite d'équation $y = -1$ est asymptote à la courbe représentative de g en $-\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}} = 1$

La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe représentative de g en $+\infty$.

• $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}} x \times \dfrac{1}{\sqrt{x(x-3)}} = +\infty$

La droite d'équation $x = 3$ est asymptote à la courbe représentative de g.

3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \dfrac{\sqrt{x^2-3x}}{x-3} = 0$

g n'est pas définie en 0 mais admet une limite finie en 0. Donc g est prolongeable par continuité en 0.
Son prolongement est la fonction h définie par : $h(x) = g(x)$ si $x \in D_g$ et $h(0) = 0$.

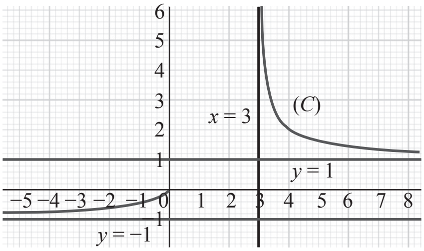
4. $\forall x \in]-\infty;0[\cup]3;+\infty[$,

$$g'(x) = \frac{1\times\sqrt{x^2-3x} - x\times\dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}}{\left(\sqrt{x^2-3x}\right)^2}$$
$$= \frac{2(x^2-3x)-2(x^2-3x)}{(x^2-3x)\sqrt{x^2-3x}}$$
$$= \frac{-3x}{(x^2-3x)\sqrt{x^2-3x}}$$

5. $\forall x \in]-\infty;0[\cup]3;+\infty[$,
$(x^2-3x)\sqrt{x^2-3x} > 0$, donc $g'(x)$ a le même signe que $-3x$.

Ainsi si $x \in]-\infty;0[$, alors $g'(x) > 0$ et si $x \in]3;+\infty[$, alors $g'(x) < 0$.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x		$+$		//////		-	
$(x-2)^3$	-1	↗	0	//////	$+\infty$	↘	1



Exercice 29

1. $f(x) = x + \sqrt{x^2-4x}$, si $x \in]-\infty;0[\cup [4;+\infty[$
$f(x) = x + \sqrt{4x-x^2}$, si $x \in [0;4[$

2. • $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \dfrac{x+\sqrt{x^2-4x}}{x}$
$= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} 1 - \sqrt{1-\dfrac{4}{x}}$
$= -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{x+\sqrt{4x-x^2}}{x}$
$= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} 1 + \sqrt{\dfrac{4}{x}-1}$
$= +\infty$

f n'est pas dérivable en 0. (C) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.

• $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ <}} \dfrac{f(x)-f(4)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 4\\ <}} \dfrac{x-4+\sqrt{4x-x^2}}{x-4} = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ >}} \dfrac{f(x)-f(4)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 4\\ >}} \dfrac{x-4+\sqrt{x^2-4x}}{x-4} = +\infty$

f n'est pas dérivable en 4. (C) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 4.

3\. a) • $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-4x}+x\right)\left(\sqrt{x^2-4x}-x\right)}{\sqrt{x^2-4x}-x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-4x}{\sqrt{x^2-4x}-x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-4}{-\sqrt{1-\frac{4}{x}}-1}$$

$$= 2$$

La droite d'équation $y = 2$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (2x-2)$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2-4x}-x+2\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-4x}-x\right)\left(\sqrt{x^2-4x}+x\right)}{\sqrt{x^2-4x}+x}+2$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-4x}{\sqrt{x^2-4x}+x}+2$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-4}{\sqrt{1-\frac{4}{x}}+1}+2$$

$$= -2+2$$

$$= 0$$

Donc la droite d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

4\. a) Pour tout x élément de $]-\infty\,;0[\cup]4\,;+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2-4x}+x-2}{\sqrt{x^2-4x}}.$$

b) Pour tout x élément de $]0\,;4[$,

$$f'(x) = \frac{\sqrt{4x-x^2}+2-x}{\sqrt{4x-x^2}}.$$

5\. • Pour tout x élément de $]-\infty\,;0[$, $f'(x) < 0$ équivaut à $\sqrt{x^2-4x} < -x+2$ soit $0 < 4$.

Par suite, pour tout x élément de $]-\infty\,;0[$, $f'(x) < 0$.

• Pour tout x élément de $]0\,;4[$,

$$f'(x) = \frac{\sqrt{4x-x^2}+2-x}{\sqrt{4x-x^2}}.$$

Si $x \in]0\,;2[$, $f'(x) > 0$.

$\sqrt{4x-x^2}+2-x<0$; $\sqrt{4x-x^2} < x-2$;

$4x-x^2 < x^2-4x+4$; $x^2-4x+2>0$.

$\Delta = 8, x_1 = 2-\sqrt{2}$ et $x_2 = 2+\sqrt{2}$.

Tableau de signe de $f'(x)$.

x	2		$2+\sqrt{2}$		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

• Pour tout x élément de $]4\,;+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2-4x}+x-2}{\sqrt{x^2-4x}}.$$

Donc $f'(x) > 0$.

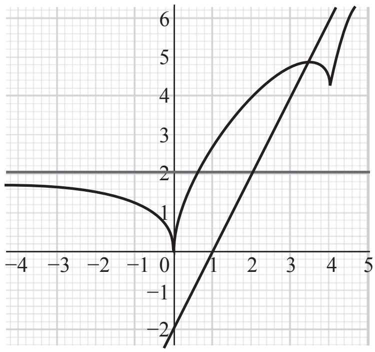
En définitive :

pour tout x élément de $]-\infty\,;0[\cup]2+\sqrt{2}\,;4[$, $f'(x) < 0$;

pour tout x élément de $]0\,;2+\sqrt{2}\,[\cup]4\,;+\infty[$ $f'(x) > 0$.

Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		$2+\sqrt{2}$		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	//////	$+$		$-$	//////	$+$	
$f(x)$	2	↘	0	↗	$f(2+\sqrt{2})$	↘	4	↗	$+\infty$



IV.4. Situation d'évaluation

Exercice 30

• Notons x la hauteur des bords relevés.

La gouttière obtenue a la forme d'un pavé droit dont les dimensions sont :

$L = 200$ cm ; $\ell = 12 - 2x$ cm ; $h = x$ cm.

Donc le volume $V(x)$ est :

$V(x) = \ell \times L \times h$

$V(x) = x(12 - 2x) \times 200$.

Soit $V(x) = 400(6x - x^2)$.

Maths Tle D corrigé 06102021.indd 29 06/10/2021 09:46

• Déterminons le maximum de la fonction V.
$D_V = [0\ ;6]$.
$\forall x\ D_V$, $V'(x) = 800(3 - x)$
$V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$
V est croissante sur [0 ; 3].
V est décroissante sur [3 ; 6].

Tableau de variation.

x	0		3		6
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	3600	↘	0

Le maximum de V est 3 600 cm³ atteint pour $x = 3$ cm.

<u>Conclusion</u> :
La hauteur des bords relevés pour obtenir un volume maximal est donc 3 cm.

Leçon 4 Primitives

IV. Exercices

IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

1. V ; 2. F ; 3. F ; 4. F

Exercice 2

$x \mapsto \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x}$	$x \mapsto \frac{3}{x^3} - \frac{2}{x^4}$	$x \mapsto \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}$

$x \mapsto \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x}$	$x \mapsto \frac{1}{x^3} - \frac{3}{x^4}$
✖	

Exercice 3

Fonction f	Une primitive de f
$x \mapsto a$	$x \mapsto x$ ✖
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto \frac{x^n}{n+1}$ ✖
$x \mapsto \frac{1}{x^n}$	$x \mapsto -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ ✖
$x \mapsto \frac{1}{x^r}$	$x \mapsto -\frac{1}{(n-1)x^{r-1}}$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$ ✖
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$ ✖
$x \mapsto 1 + \tan^2 x$	$x \mapsto \tan x$

Exercice 4

$u' + v' \longrightarrow u + v + c$

$\frac{u'v - uv'}{v^2} \longrightarrow \frac{u}{v} + c$

$\frac{u'}{u^n} \longrightarrow -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + c$

$\frac{u'}{\sqrt{u}} \longrightarrow 2\sqrt{u} + c$

$u'u^n \longrightarrow \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$

$u'v + uv' \longrightarrow u \times v + c$

$u' \cos u \longrightarrow -\sin u + c$

$u' \sin u \longrightarrow \cos u + c$

$u' \times v'ou \longrightarrow vou + c$

Exercice 5

a) F : $x \mapsto 7x$
b) F : $x \mapsto x^2 - 3x$
c) F : $x \mapsto \frac{1}{10}x^{10}$
d) F : $-\frac{1}{4x^4}$

Exercice 6

a) F : $x \mapsto 4x - 4\sqrt{x} + c$, $c \in \mathbb{R}$

b) F : $x \mapsto \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{x} + c$, $c \in \mathbb{R}$

c) F : $x \mapsto x^4 - 4x^3 + x\sqrt{2} + c$, $c \in \mathbb{R}$

d) F : $x \mapsto x^3 - \frac{3}{2x^2} + c$, $c \in \mathbb{R}$

Exercice 7

a) F : $x \mapsto \frac{1}{4}(x^2 + 2x - 3)^4$

b) F : $x \mapsto -\frac{5}{24}(x^3 - 7)^8$

c) F : $x \mapsto \frac{4}{15}x^{\frac{5}{2}}$

d) F : $x \mapsto -\frac{1}{4}\cos^4 x$

Exercice 8

a) F : $x \mapsto \frac{-1}{1-4x} + c$, $c \in \mathbb{R}$

b) F : $x \mapsto \frac{7}{9}\sqrt{9x^2+1} + c$, $c \in \mathbb{R}$

c) F : $x \mapsto -\frac{2}{3} \times \frac{1}{(x^2 - 5x + 8)^3} + c$, $c \in \mathbb{R}$

d) F : $x \mapsto -\frac{1}{\sin x} + c$, $c \in \mathbb{R}$

Exercice 9

a) F : $x \mapsto -\frac{1}{2}\cos 2x$

b) F : $x \mapsto -\frac{1}{4}\sin(4x + 3)$

c) F : $x \mapsto -\frac{1}{3}\cos(x^2 + 1)$

d) F : $x \mapsto \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\sin 4x + 2\sin 2x + 3x\right)$

Exercice 10

1. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} - 2\sqrt{x} + c$, $c \in \mathbb{R}$

$F(1) = 0 \Leftrightarrow c = \frac{5}{2}$

Donc F : $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 2\sqrt{x} + c$.

2. $G(x) = \frac{1}{24}(2x-1)^{12} + c$, $c \in \mathbb{R}$

$G(1) = 1 \Leftrightarrow c = \frac{23}{24}$

Donc G : $x \mapsto \frac{1}{24}(2x-1)^{12} + \frac{23}{24}$.

IV.2. Exercices de renforcement

Exercice 11

1. F : $x \mapsto \frac{12}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^2 + 2x + c$, $c \in \mathbb{R}$
2. F : $x \mapsto 2\cos x + \sin x + c$, $c \in \mathbb{R}$
3. F : $x \mapsto \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{x^2} + c$, $c \in \mathbb{R}$
4. F : $x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1} + c$, $c \in \mathbb{R}$
5. F : $x \mapsto \frac{-5}{14(x^2+1)^7} + c$, $c \in \mathbb{R}$
6. F : $x \mapsto 2\tan x - \cos x + c$, $c \in \mathbb{R}$

Exercice 12

1. $\forall x \in \left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[$,

$$F'(x) = \frac{1}{15}(12x-1)\sqrt{1-2x} + \frac{1}{15}(6x^2 - x - 1)\frac{-2}{2\sqrt{1-2x}}$$

$$F'(x) = \frac{1}{15\sqrt{1-2x}}\left[(12x-1)(1-2x) - (6x^2 - x - 1)\right]$$

$$F'(x) = \frac{1}{15\sqrt{1-2x}}(15x - 30x^2) = \frac{15x(1-2x)\sqrt{1-2x}}{15(1-2x)}$$

$F'(x) = x\sqrt{1-2x} = f(x)$

Donc F est une primitive de f sur $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[$.

2. Les primitives de f sur $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[$ sont les fonctions :

$x \mapsto \frac{1}{15}(6x^2 - x - 1)\sqrt{1-2x} + c$, $c \in \mathbb{R}$.

3. $G(x) = \frac{1}{15}(6x^2 - x - 1)\sqrt{1-2x} + c$, $c \in \mathbb{R}$

$G(0) = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{15}$.

Donc G : $\frac{1}{15}(6x^2 - x - 1)\sqrt{1-2x} + \frac{1}{15}$.

Maths Tle D corrigé 06102021.indd 31 06/10/2021 09:46

Exercice 13

1. $\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}$, $h(x) = x - 3 + \dfrac{4}{(x-1)^2}$.

2. Les primitives de h sur $]1\ ;+\infty[$ sont les fonctions : $x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2 - 3x - \dfrac{4}{x-1} + c$, $c \in \mathbb{R}$

3. $H(2) = 2 \Leftrightarrow c = 10$.

Donc H : $x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2 - 3x + 10 - \dfrac{4}{x-1}$.

Exercice 14

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos^5 x = \cos^4 x \cos x$

$f(x) = (\cos^2 x)^2 \cos x = (1 - \sin^2 x)^2 \cos x$

$= (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x)\cos x$

$= \cos x - 2\cos x \sin^2 x + \cos x \sin^4 x$.

2. Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions :

$x \mapsto \sin x - \dfrac{2}{3}\sin^3 x + \dfrac{1}{5}\sin^5 x + c$, $c \in \mathbb{R}$

3. $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow c = \dfrac{-8}{15}$.

Donc F : $x \mapsto \sin x - \dfrac{2}{3}\sin 3x + \dfrac{1}{5}\sin 5x - \dfrac{8}{15}$

IV.3. Exercices d'approfondissement

Exercice 15

1. $\forall x \in]-1\ ;2[$, $g(x) = \dfrac{2}{(x-2)^2} - \dfrac{2}{(x+1)^2}$.

2. Les primitives de g sur $]-1\ ;2[$ sont les fonctions : $x \longmapsto -\dfrac{2}{x-2} + \dfrac{2}{x+1} + k$, $k \in \mathbb{R}$.

3. Soit G cette fonction. $G(0) = 0 \Leftrightarrow k = -3$.

Donc G : $x \longmapsto -\dfrac{2}{x-2} + \dfrac{2}{x+1} - 3$

Exercice 16

1. F : $x \longmapsto x + \dfrac{12}{x} + \dfrac{8}{x^2} + k$, $k \in \mathbb{R}$.

$F(4) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow k = -7$.

Donc F : $x \longmapsto x + \dfrac{12}{x} + \dfrac{8}{x^2} - 7$

2. (T) : $y = F'(2)(x-2) + F(2) = f(2)(x-2) + F(2)$

Soit (T) : $y = -4x + 11$.

3. a) $\lim\limits_{x \mapsto 0} F(x) = +\infty$.

La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe représentative de F.

b) $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} F(x) = +\infty$.

4. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} F(x) = +\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} (F(x) + (x+7)) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left(\dfrac{12}{x} + \dfrac{8}{x^2}\right) = 0$

Donc la droite d'équation : $y = x - 7$ est une asymptote à la courbe représentative de F en $+\infty$

Exercice 17

1. $f(x) = \dfrac{-4}{x^2+3}$.

2. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = 0$

3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$.

Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ et strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

4. (T) : $y = f'(1)(x-1) + f(1) = g(1)(x-1) + f(1)$.

D'où (T) : $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}$.

IV.4. Situation d'évaluation

Exercice 18

1. $B'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1{,}5$; . $B'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1{,}5$ et $B'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1{,}5$.

x	1		1,5		3
$B'(x)$		+	0	−	
$B(x)$	20	$\nearrow$	B(1,5)	$\searrow$	B(3)

Il devra fabriquer 1 500 glaces par jour pour que le bénéfice soit maximal.

2. $B(x) = -10x^2 + 30x + c$, $c \in \mathbb{R}$. Or $B(1) = 20$, donc $c = 0$. Par suite $B(x) = -10x^2 + 30x$.

Le bénéfice maximal est B(1,5) et B(1,5) = 22,5. Donc le bénéfice maximal est 22 500 F.

Leçon 5 Fonctions logarithmes

IV. Exercices

IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

	La fonction ln est définie sur			Pour tout $x > 0$, on a : $\ln'(x) =$		
	$\mathbb{R}$	$]0;+\infty[$	$]0;1[$	x	$-\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$
Réponse	F	V	F	F	F	V

	ln1 =		
	1	0	10
Réponse	F	V	F

Exercice 2

lna + lnb $\boxed{\times}$

Exercice 3

$A = \ln(2-\sqrt{3}) + \ln(2+\sqrt{3})$

$= \ln(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$

$= \ln(4-3) = \ln 1 = 0.$

$B = \ln 0{,}125 + \ln 8 = \ln 0{,}125 \times 8 = \ln 1 = 0.$

$C = \ln\frac{6}{5} + \ln\frac{5}{3} = \ln\frac{6}{5}\times\frac{5}{3} = \ln\frac{6}{3} = \ln 2.$

Exercice 4

$E = 4\ln\sqrt{3} - \frac{1}{4}\ln 27$

$= 4 \times \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{4} \times 3\ln 3$

$= 2\ln 3 - \frac{3}{4}\ln 3 = \frac{5}{4}\ln 3.$

$F = 2\ln 9 - \ln(9e^2)$

$= 2\ln 9 - \ln 9 - \ln(e^2)$

$= \ln 9 - 2\ln e = 2\ln 3 - 2 \times 1 = 2\ln 3 - 2.$

Exercice 5

$\lim\limits_{x \mapsto 0} \ln x =$	☐ 0	☐ $+\infty$	☒ $-\infty$
$\lim\limits_{x \mapsto 0} x\ln x =$	☒ 0	☐ $+\infty$	☐ $-\infty$
$\lim\limits_{x \mapsto 1} \frac{\ln(x)}{x-1} =$	☐ 0	☒ 1	☐ $+\infty$
$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \ln x =$	☐ 0	☒ $+\infty$	☐ $-\infty$
$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{\ln x}{x} =$	☒ 0	☐ 1	☐ $+\infty$

Exercice 6

a) $f(x) = x\ln 2x = \frac{1}{2}(2x)\ln 2x$

On a : $\lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} X\ln X = 0$, donc

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

b) $f(x) = x\ln x - x^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{\ln x}{x} - 1\right)$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x} - 1\right) = 0 - 1 = -1$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

c) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 2\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$,

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

d) $f(x) = x^2 - x + 1 - 2\ln x$

$= x^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} - 2\frac{\ln x}{x^2}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3} = 0$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\times\frac{1}{x} = 0$, donc par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} - 2\frac{\ln x}{x^2}\right) = 1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} - 2\frac{\ln x}{x^2}\right) = 1$,

donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Maths Tle D corrigé 06102021.indd 33 06/10/2021 09:46

Exercice 7

a) $\ln x = \ln 4$

- Soit V l'ensemble de validité.

On a : $V =]0 ; +\infty[$

- $\forall x \in V$, $\ln x = \ln 4 \Leftrightarrow x = 4$.

Donc $S = \{4\}$

b) $\ln(x) = 2$

- L'ensemble de validité est $]0 ; +\infty[$
- $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $\ln(x) = 2 \Leftrightarrow x = e^2$.

Donc $S = \{e^2\}$

c) $2\ln x = \ln 9$

- L'ensemble de validité est $]0 ; +\infty[$
- $\forall x \in V$, $2\ln x = \ln 9 \Leftrightarrow \ln(x^2) = \ln 9 \Leftrightarrow x^2 = 9$

$\Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3$.

Comme $-3 \notin V$, on a : $S = \{3\}$

d) $(\ln x)^2 - 2\ln x + 1 = 0$

- L'ensemble de validité est $]0 ; +\infty[$
- $\forall x \in V$, on pose $X = \ln x$.

$(\ln x)^2 - 2\ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 2X + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (X-1)^2 = 0 \Leftrightarrow X = 1$

$X = 1 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$

$S = \{e\}$

Exercice 8

a) • $V =]0 ; +\infty[$

- $\forall x \in V$, $\ln x \leq \ln 2 \Leftrightarrow x \leq 2$. Donc $S =]0;2]$

b) • $V =]0 ; +\infty[$

- $\forall x \in V$, $\ln x \geq -5 \Leftrightarrow x \geq e^{-5}$.

Donc $S =]e^{-5};+\infty[$

c) • $V =]0 ; +\infty[$

- $\forall x \in V$, $\ln x < 2\ln 4 \Leftrightarrow \ln x < \ln 16 \Leftrightarrow x < 16$.

Donc $S =]0;16[$

d) • $V =]0 ; +\infty[$

- $\forall x \in V$, $\ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow x < 1$.

Donc $S =]0;1[$

Exercice 9

a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 2x - 3 > 0\} = \left]\frac{3}{2};+\infty\right[$

b) $D_g = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 0\} =]0;+\infty[$

c) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 7 - x > 0 \text{ et } x > 0\} =]0;7[$

d) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, |4x+5| > 0\} = \mathbb{R} - \left\{-\frac{5}{4}\right\}$

Exercice 10

a) $f'(x) = 3 + \frac{1}{x}$

b) $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

c) $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$

d) $f'(x) = \ln x + x\left(\frac{1}{x}\right) - 1$

$= \ln x + 1 - 1 = \ln x$

e) $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$, avec $u(x) = \frac{5+x}{5-x}$.

On a : $u'(x) = \frac{1(5-x)-(-1)(5+x)}{(5-x)^2}$

$= \frac{10}{(5-x)^2}$

Donc $f'(x) = \frac{10}{(5-x)^2} \times \frac{5-x}{5+x}$

$= \frac{10}{(5-x)(5+x)} = \frac{10}{25-x^2}$

Exercice 11

a) $f'(x) = \frac{1}{x}$

b) $f'(x) = \frac{2}{2x-3}$

c) $f'(x) = 2x(4 - \ln|x|) + x^2 \times \left(-\frac{1}{x}\right)$

$= x[2(4 - \ln|x|) - 1]$

$= x(7 - \ln|x|)$

d) $f'(x) = \frac{\frac{1}{x+1}(x+1) - 1 \times \ln|x+1|}{(x+1)^2}$

$= \frac{1 - \ln|x+1|}{(x+1)^2}$

e) $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$, avec $u(x) = \frac{5+x}{5-x}$.

On a : $u'(x) = \frac{1(5-x)-(-1)(5+x)}{(5-x)^2}$

$= \frac{10}{(5-x)^2}$

Donc $f'(x) = \frac{10}{(5-x)^2} \times \frac{5-x}{5+x}$

$= \frac{10}{(5-x)(5+x)} = \frac{10}{25-x^2}$

Exercice 12

a) $F : x \longmapsto -7\ln x$

b) $F : x \longmapsto \frac{1}{3}x^3 + 11x^2 - \ln x$

c) $F : x \longmapsto \ln(5x-3)$

d) $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x-2}{x^2-2x+2}$,

donc $F : x \longmapsto \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+2)$

Exercice 13

	La fonction log est définie sur		
	$\mathbb{R}$	$]0;+\infty[$	$]0;10[$
Réponse	F	V	F

	Pour tout $x > 0$, on a : $\log(x) =$		
	$\ln(10) \times \ln(x)$	$\ln(10) + \ln(x)$	$\frac{\ln x}{\ln 10}$
Réponse	F	F	V

	$\log 10 =$		
	1	0	10
Réponse	V	F	F

Exercice 14

$\bullet \log 1000 = \frac{\ln 1000}{\ln 10} = \frac{\ln 10^3}{\ln 10} = \frac{9\ln 10}{\ln 10} = 9$

$\bullet \log(0{,}000001) = \frac{\ln(10^{-6})}{\ln 10} = -6\frac{\ln 10}{\ln 10} = -6$

$\bullet \log\sqrt{10.000\,000} = \frac{\ln(10^3\sqrt{10})}{\ln 10} = \frac{3\ln 10}{\ln 10} +$

$\frac{1}{2} \times \frac{\ln 10}{\ln 10} = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

$\bullet \log 8 + \log 125 = \frac{\ln 8}{\ln 10} + \frac{\ln 125}{\ln 10}$

$= \frac{\ln(8 \times 125)}{\ln 10}$

$= \frac{\ln 1000}{\ln 10} = 3$

$\bullet \log_8^2 = \frac{\ln 2}{\ln 8} = \frac{\ln 2}{\ln 2^3} = \frac{\ln 2}{3\ln 2} = \frac{1}{3}$

$\bullet 256 = 2^8$ donc $\log_2^{256} = \frac{\ln 256}{\ln 2} = \frac{\ln 2^8}{\ln 2}$

$= \frac{8\ln 2}{\ln 2} = 8$

$\bullet \frac{1}{256} = 5^{-4}$ donc $\log^{\left(\frac{1}{256}\right)} = \log\frac{5^{-1}}{5}$

$= \frac{-4\ln 5}{\ln 5} = -4$

Exercice 15

1. $\log(3x-2) = 7$
   - Soit V l'ensemble de validité :

   $\forall x \in \mathbb{R}, x \in V \Leftrightarrow 3x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$

   Donc $V =]\frac{2}{3};+\infty[$
   - $\forall x \in V, \log(3x-2) = 7$

   $\Leftrightarrow \log(3x-2) = \log(10^7) \Leftrightarrow 3x - 2 = 10^7$

   $\Leftrightarrow x = \frac{2+10^7}{3}$

   $S = \left\{\frac{2+10^7}{3}\right\}$

2. $\log(1-x) \leq 3$
   - Soit V l'ensemble de validité :

   $\forall x \in \mathbb{R}, x \in V \Leftrightarrow 1 - x > 0 \Leftrightarrow 1 > x$

   Donc $V =]-\infty;1[$
   - $\forall x \in V, \log(1-x) \leq 3$

   $\Leftrightarrow \log(1-x) \leq \log(10^3) \Leftrightarrow 1 - x \leq 10^3$

   $\Leftrightarrow x \geq 1 - 10^3$

   $S =]1 - 10^3;1[$

IV.2. Exercices de renforcement

Exercice 16

a) $(1 - \log x)(3 + \log x) = 0$

$\Leftrightarrow \log(x) = 1$ ou $\log(x) = -3$

$\Leftrightarrow \log(x) = \log(10)$ ou $\log(x) = \log 10^{-3}$

$\Leftrightarrow x = 10$ ou $x = 10^{-3}$

$S_{\mathbb{R}} = \{10;10^{-3}\}$

b) $(\log_3 x)(\log_9 x) = 8 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln 3} \times \frac{\ln x}{\ln 9} = 8$

$\Leftrightarrow \frac{(\ln x)^2}{2(\ln 3)^2} = 8 \Leftrightarrow \left(\frac{\ln x}{\ln 3}\right)^2 = 16$

$\Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln 3} = 4$ ou $\frac{\ln x}{\ln 3} = -4$

$\Leftrightarrow x = 3^4$ ou $x = 3^{-4}$

$S_{\mathbb{R}} = \{81; \frac{1}{81}\}$

Exercice 17

a) $\log_7 x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln 7} \leq 1$; V = $\mathbb{R}_+^*$

$\Leftrightarrow \ln x \leq \ln 7 \Leftrightarrow x \leq 7$

S =]0;7]

b) $\log_2 x > \log_8(5x-4)$; V = $]\frac{4}{5};+\infty[$

$\log_2 x > \log_8(5x-4) \Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln 2} > \frac{\ln(5x-4)}{\ln 8}$

$\Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln 2} > \frac{\ln(5x-4)}{3\ln 2} \Leftrightarrow 3\ln x > \ln(5x-4)$

$\Leftrightarrow \ln(x^3) > \ln(5x-4) \Leftrightarrow x^3 > 5x-4$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-4) > 0$

Résolvons l'équation : $x^2+x-4=0$

$\Delta = 17$; les solutions de $x^2+x-4=0$ sont :

$x_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$.

L'ensemble solutions de l'inéquation $(x-1)(x^2+x-4) > 0$ est :

$\left]\frac{-1-\sqrt{17}}{2};1\right[\cup \left]\frac{-1+\sqrt{17}}{2};+\infty\right[$.

L'ensemble solutions de l'inéquation $(x-1)(x^2+x-4) > 0$ est :

$\left]\frac{4}{5};1\right[\cup \left]\frac{-1+\sqrt{17}}{2};+\infty\right[$.

Exercice 18

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\ln x = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln 2x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln 2x}{2x} \times \frac{2x}{x^2+1} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 1$

Posons : X = ln$x$, lorsque $x \to +\infty$, X $\to +\infty$,

on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2X^2-5X+1 = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 1 = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{\ln x} = \lim\limits_{x\to 0} \ln(1-x) \times \frac{1}{\ln x}$

$= 0$

car $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1-x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\ln x} = 0$

e)

$\lim\limits_{x\to 0} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0}(x\ln(1+x) - x\ln x)$

$= 0$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$;

avec $X = \frac{1}{x}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3\ln(1+3x)}{3x} = 3$

Exercice 19

a) $\ln(x-1) - \ln(3x+4) = \ln(5x)$

- Soit V l'ensemble de validité :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x \in$ V $\Leftrightarrow x-1 > 0$, $3x+4 > 0$ et $5x > 0 \Leftrightarrow x > 1$, $x > -\frac{4}{3}$ et $x > 0$.

Donc V =]1;+∞[

- $\forall x \in$ V, $\ln(x-1) - \ln(3x+4) = \ln(5x)$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x-1}{3x+4}\right) = \ln(5x) \Leftrightarrow \frac{x-1}{3x+4} = 5x$

$\Leftrightarrow x-1 = 5x(3x+4) \Leftrightarrow 15x^2+19x+1$

$\Delta = 19^2 - 4\times 15\times 1 = 301$;

$x_1 = \frac{-19-\sqrt{301}}{30}$ et $x_2 = \frac{-19+\sqrt{301}}{30}$

Or $\frac{-19-\sqrt{301}}{30} \notin]1;+\infty[$ et

$\frac{-19+\sqrt{301}}{30} \notin]1;+\infty[$, donc S = Ø.

b) $\ln(x+8) = 1 + \ln(26-x)$

- Soit V l'ensemble de validité :

V = $\{x \in \mathbb{R} / x+8 > 0 \text{ et } 26-x > 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / x > -8 \text{ et } x < 26\}$

=]−8 ; 26[

- $\forall x \in$ V, $\ln(x+8) = 1 + \ln(26-x)$

$\Leftrightarrow \ln(x+8) = \ln e + \ln(26-x)$

$\Leftrightarrow \ln(x+8) = \ln e(26-x)$

$\Leftrightarrow x+8 = e(26-x) \Leftrightarrow x = \frac{26e-8}{e+1}$

S = $\left\{\frac{26e-8}{e+1}\right\}$

c) $\ln(|x-1|) = \ln(2x-1)$

- Soit V l'ensemble de validité :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x \in$ V $\Leftrightarrow |x-1| > 0$ et $2x-1 > 0$

$\Leftrightarrow x-1 \neq 0$ et $x > \frac{1}{2}$.

Donc V = $]\frac{1}{2}$; +∞[\ {1}

- $\forall x \in$ V, $\ln(|x-1|) = \ln(2x-1)$

$\Leftrightarrow |x-1| = 2x-1$

$\Leftrightarrow x-1 = 2x-1$ ou $x-1 = -2x+1$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{2}{3}$

Or $0 \notin V$, donc $S = \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$.

d) $\ln\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right) = \ln(x+1) - \ln(x-2)$

• Soit V l'ensemble de validité :

$\forall x \in \mathbb{R}, x \in V \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{x+1} > 0$ et $x + 1 \neq 0$, $x + 1 > 0$ et $x - 2 > 0$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty;-1[\cup]2;+\infty[$, $x > -1$ et $x > 2$

Donc $V =]2 ; +\infty[$

• $\forall x \in V$, $\ln\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right) = \ln(x+1) - \ln(x-2)$

$\Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-2}{x+1} = \dfrac{x+1}{x-2} \Leftrightarrow (x-2)^2 = (x+1)^2$

$\Leftrightarrow (x - 2 - x - 1)(x - 2 + x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow -3(2x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

Or $0 \notin V$, donc $S = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

Exercice 20

a) $\ln(2x^2 + 5x + 3) < 0$

• Soit V l'ensemble de validité :

$\forall x \in \mathbb{R}, x \in V \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 3 > 0$

$\Delta = 25 - 24 = 1$; $x_1 = \dfrac{-5-1}{4} = -\dfrac{3}{2}$

et $x_2 = \dfrac{-5+1}{4} = -1$

$V =]-\infty; -\dfrac{3}{2}[\cup]-1;+\infty[$

• $\forall x \in V$, $\ln(2x^2 + 5x + 3) < 0$

$\Leftrightarrow \ln(2x^2 + 5x + 3) < \ln 1$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 3 < 1$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 2 < 0$

$\Delta = 25 - 16 = 9$; $x_1 = \dfrac{-5+3}{4} = -\dfrac{1}{2}$

et $x_2 = \dfrac{-5-3}{4} = -2$

D'où $x \in]-2; -\dfrac{1}{2}[$

$S = V \cap]-2; -\dfrac{1}{2}[=]-2; -\dfrac{3}{2}[\cup]-1; -\dfrac{1}{2}[$

b) $\ln(x + 1) + \ln(x - 2) \geq 2\ln(3 - x)$

• Soit V l'ensemble de validité :

$\forall x \in \mathbb{R}, x \in V \Leftrightarrow x + 1 > 0, x - 2 > 0$ et $3 - x > 0$

$\Leftrightarrow x > -1, x > 2$ et $x < 3 \Leftrightarrow x \in]2;3[$

$V =]2;3[$

• $\forall x \in V$, $\ln(x + 1) + \ln(x - 2) \geq 2\ln(3 - x)$

$\Leftrightarrow \ln[(x + 1)(x - 2)] \geq \ln[(3 - x)^2]$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + x - 2 \geq 9 - 6x + x^2$

$\Leftrightarrow 5x \geq 11 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{11}{5}$

$S =]\dfrac{11}{5};3[$

IV.3. Exercices d'approfondissement

Exercice 21

1. $(x - 2)(x + 2)(x - 1) = (x^2 - 4)(x - 1)$
$= x^3 - x^2 - 4x + 4$

2. a) $(\ln x)^3 - \ln^2 x - 4\ln x + 4 = 0$

L'ensemble de validité est $]0;+\infty[$

Posons $X = \ln x$.

L'équation devient $X^3 - X^2 - 4X + 4 = 0$.

$X^3 - X^2 - 4X + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (X - 2)(X + 2)(X - 1) = 0$

$\Leftrightarrow X = 2$ ou $X = -2$ ou $X = 1$

$\Leftrightarrow \ln x = 2$ ou $\ln x = -2$ ou $\ln x = 1$

$\Leftrightarrow x = e^2$ ou $x = e^{-2}$ ou $x = e$

Donc $S = \{e^2 ; e^{-2} ; e\}$.

b) $\ln(x^3 - x^2) = \ln(4x - 4)$

• L'équation est définie si $x^3 - x^2 > 0$ et $4x - 4 > 0 \Leftrightarrow x^2(x - 1) > 0$ et $4(x - 1) > 0$

$\Leftrightarrow x \neq 0, x - 1 > 0$ et $x - 1 > 0$

$\Leftrightarrow x \neq 0$ et $x > 1 \Leftrightarrow x \in]1;+\infty[$

• $\forall x \in]1;+\infty[$, $\ln(x^3 - x^2) = \ln(4x - 4)$

$\Leftrightarrow x^3 - x^2 = 4x - 4 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$ ou $x = 1$

• $S = \{2\}$.

c) $\ln(x^2 - 4) = \ln(x^3 - 4x)$

• Soit V l'ensemble de validité

$\forall x \in \mathbb{R}, x \in V \Leftrightarrow x^2 - 4 > 0$ et $x^3 - 4x > 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4 > 0$ et $x(x^2 - 4) > 0$

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$x^2 - 4$	+	0	−		−	0	+
x	−		−	0	+		+
$x(x^2 - 4)$	−		+		−		+

$V =]2;+\infty[$

• $\forall x \in]2;+\infty[$, $\ln(x^2 - 4) = \ln(x^3 - 4x)$

$\Leftrightarrow x^2 - 4 = x^3 - 4x \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - 4x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$ ou $x = 1$.

• $S = \emptyset$ car 2 ; −2 et 1 n'appartiennent pas à V.

Maths Tle D corrigé 06102021.indd 37 06/10/2021 09:46

Exercice 22

a) $\begin{cases} -2\ln x + 3\ln y = 1 \\ 3\ln x - 4\ln y = -2 \end{cases}$

Le système existe si $x > 0$ et $y > 0$

$\begin{cases} -2\ln x + 3\ln y = 1 \\ 3\ln x - 4\ln y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6\ln x + 9\ln y = 3 \\ 6\ln x - 8\ln y = -4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\ln x + 3\ln y = 1 \\ \ln y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = -2 \\ \ln y = -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = e^{-2} \\ y = e^{-1} \end{cases}$

$S = \{(e^{-2}, e^{-1})\}$.

b) $\begin{cases} \ln xy = 4 \\ (\ln x)(\ln y) = -12 \end{cases}$

Le système existe si $x > 0$ et $y > 0$

$\begin{cases} \ln xy = 4 \\ (\ln x)(\ln y) = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x + \ln y = 4 \\ (\ln x)(\ln y) = -12 \end{cases}$

On pose $X = \ln x$ et $Y = \ln y$.

Le système devient : $\begin{cases} X + Y = 4 \\ XY = -12 \end{cases}$

X et Y sont des solutions de l'équation
$t^2 - 4t - 12 = 0$.
$\Delta = 16 + 48 = 64$. Ses solutions sont :

$t_1 = \dfrac{4 - \sqrt{64}}{2} = -2$ et $t_2 = \dfrac{4 + \sqrt{64}}{2} = 6$

Si $X = -2$, alors $Y = 6$ et si $X = 6$, alors $Y = -2$.
Par suite, si $\ln x = -2$, alors $\ln y = 6$ et si $\ln x = 6$, alors $\ln y = -2$.
C'est-à-dire si $x = e^{-2}$, alors $y = e^6$ et si $x = e^6$, alors $y = e^{-2}$.

$S = \{(e^{-2}\,;\, e^6), (e^6\,;\, e^{-2})\}$.

c) $\begin{cases} -2x + y = 1 \\ \ln x + \ln y = 0 \end{cases}$

Le système existe si $x > 0$ et $y > 0$

$\begin{cases} -2x + y = 1 \\ \ln x + \ln y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ \ln x(1 + 2x) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ x(1 + 2x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ 2x^2 + x - 1 = 0 \end{cases}$

Résolvons l'équation : $2x^2 + x - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 8 = 9$; $x_1 = \dfrac{-1 - 3}{4} = -1$ et

$x_2 = \dfrac{-1 + 3}{4} = \dfrac{1}{2}$

Seul $x = \dfrac{1}{2}$ convient car $-1 < 0$.

Par suite $y = 1 + 2 \times \dfrac{1}{2} = 2$. $S = \{(\dfrac{1}{2}, 2)\}$.

Exercice 23

1. Déterminons le temps de doublement d'un capital.
Soit C le capital.
On a : $(1 + t\%)^n C = 2C \Leftrightarrow (1 + t\%)^n = 2$

$\Leftrightarrow n\ln(1 + t\%) = \ln 2 \Leftrightarrow n = \dfrac{\ln 2}{\ln(1 + t\%)}$

2. Calculons le temps de doublement pour $t = 5\%$

$n = \dfrac{\ln 2}{\ln(1{,}05)} \approx 14{,}2$

Soit 15 ans.

Exercice 24

1. $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$

2. Déterminons les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

3. a) $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = +\infty$

La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à (C).

b) $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = -\infty$

La droite d'équation $x = 1$ est asymptote à (C).

4. a) Déterminons la dérivée de g

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$; $g'(x) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{x}{x-1}$

$= \dfrac{-x^2 + x + 2}{2x(x-1)}$

$= \dfrac{-(x+1)(x-2)}{2x(x-1)}$

b) Étudions les variations de g

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$-x^2 + x + 2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x(x - 1)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	

g est croissante sur $]-1;0[$ et sur $]1;2[$;
g est strictement décroissante sur $]-\infty;-1[$, sur $]0;1[$ et $]2;+\infty[$.

Maths Tle D corrigé 06102021.indd 38 06/10/2021 09:46

Tableau de variation de g

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$0{,}5+\ln 2$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-1-\ln 2$	↘	$-\infty$

c) Démontrons que l'équation $g(x) = 0$, admet une solution unique α et que : $\frac{2}{5} < \alpha < \frac{9}{20}$.

$\forall x \in\,]-\infty\,;0[$, $g(x) > 0$ et $\forall x \in\,]1\,;+\infty[$, $g(x) < 0$.

$g(x)$ ne s'annule pas dans $]-\infty\,;0[$ et dans $]1\,;+\infty[$.

g est continue et strictement décroissante sur $]0\,;1[$.

On a : $g(]0\,;1[) = \mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$.

Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$ et comme $g(\frac{2}{5}) > 0$ et $g(\frac{9}{20}) < 0$.

Donc : $\frac{2}{5} < \alpha < \frac{9}{20}$.

5. a) Démontre que la droite (D) d'équation : $y = -\frac{x}{2}$ est asymptote à (C).

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(g(x)+\frac{x}{2}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)+\frac{x}{2}\right) = 0$

donc la droite d'équation : $y = -\frac{x}{2}$ est asymptote à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Précisons les positions de (D) et de (C).

Soit $g(x)+\frac{x}{2} = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$.

(C) est au-dessus de (D) sur $\left]\frac{1}{2};1\right[$ et sur $]-\infty\,;0[$;

(C) est au-dessous de (D) sur $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ et sur $]1\,;+\infty[$.

6. a) $g(1-x)+g(x)$

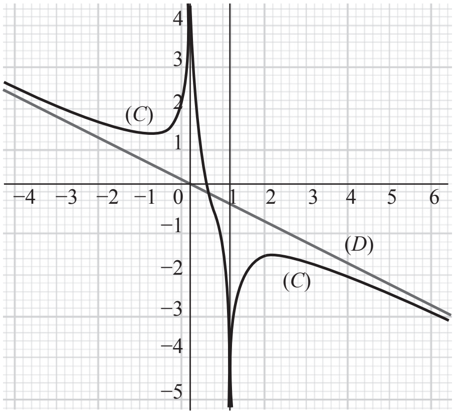
$$= \frac{x-1}{2} + \ln\left|\frac{-x}{1-x}\right| - \frac{x}{2} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$$

$$= -\frac{1}{2} = 2\times\left(-\frac{1}{4}\right)$$

Donc K est centre de symétrie de (C).

b) Une équation de la tangente (T) au point K.

(T) : $y = -\frac{9}{2}x + \frac{17}{4}$.



Exercice 25

1. Continuité de f en 0

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(x^2\ln x - \frac{3}{2}x^2\right) = 0,$$

car $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$.

On a : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, donc f est continue en 0.

Dérivabilité de f en 0

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{2}\left(\ln x - \frac{3}{2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(x\ln x - \frac{3}{2}x\right) = 0$$

car $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$.

Cette limite étant finie, on conclut que f est dérivable en 0.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x - \frac{3}{2} = +\infty$.

Donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3. a) $\forall x \in\,]0;+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{2x}{2}\left(\ln x - \frac{3}{2}\right) + \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= x\left(\ln x - \frac{3}{2}\right) + \frac{x}{2}$$

$$= x\left(\ln x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= x(\ln x - 1)$$

b) <u>Signe de $f'(x)$</u>

x	0	e	$+\infty$
x	$+$		$+$
$\ln x - 1$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

<u>Variations de f</u>

f est strictement décroissante sur $]0;e[$ et strictement croissante sur $]e;+\infty[$.

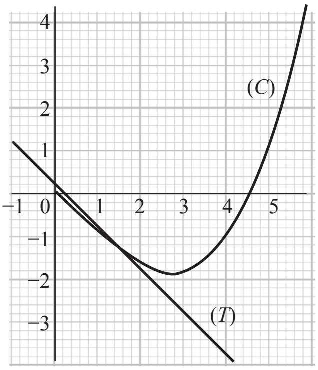
x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0 ↘	$-\frac{e^2}{4}$	↗ $+\infty$

4. Soit (T) la tangente à (C) au point d'abscisse 1.

(T) : $y = f'(1)(x-1) + f(1) = -1(x-1) - \frac{3}{4}$.

Donc (T) : $y = -x + \frac{1}{4}$.

5. Tracé de (T) et (C) dans le repère (O,I,J).



Exercice 26

Partie A

1. $\forall x \in [0;+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{2x(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$

$\forall x \in [0;1[$, $g'(x) > 0$ et $\forall x \in]1;+\infty[$, $g'(x) > 0$.

Donc g est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$ et croissante sur $]0;1[$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, $g(0) > 0$.

<u>Tableau de variation</u>

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	0 ↗	$1 - \ln 2$	↘ $-\infty$

2. g est continue et strictement décroissante sur $]1;+\infty[$. De plus $g(\,]1;+\infty[\,) =]-\infty;1-\ln 2[$

Et $0 \in]-\infty;1-\ln 2[$. Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]1;+\infty[$.

$g(1) \approx 0{,}3$ et $g(2) \approx -0{,}009$.

$g(1) \times g(2) < 0$ donc $1 < \alpha < 2$.

3. $\forall x \in]0;\alpha[$, $g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha;+\infty[$, $g(x) < 0$; $g(0) = g(\alpha) = 0$.

Partie B

1. Étudions la continuité de f en 0.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = 0$.

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = f(0)$

car $f(0) = 0 + \ln(1-0) = 0$.

f est continue en 0.

Étudions la dérivabilité de f en 0.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2} = 1 = f'_d(0)$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} 1 + \frac{\ln(1-x)}{x}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} 1 - \frac{\ln(1+(-x))}{-x}$$

$$= 0 = f'_g(0)$$

$f'_d(0) \neq f'_g(0)$, donc f n'est pas dérivable en 0.

2. Calculons les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\left(1 + \frac{\ln(1-x)}{1-x} \times \frac{1-x}{x}\right)$$
$$= -\infty$$

car $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(1-x)}{1-x} = 0$ et

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-x}{x} = -1$

Maths Tle D corrigé 06102021.indd 40 06/10/2021 09:46

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} \times \frac{\frac{1}{x^2}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} \times \frac{1}{x^3}$$

$$= 0$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\ln x}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0$.

3. a) Démontrons que pour tout $x > 0$,

$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

$\forall x > 0,\ f'(x) = \dfrac{\frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

b) $\forall x < 0, f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1-x}$

$\forall x < 0, f'(x) = 1 - \dfrac{-x}{1-x}$

b) Étudions le signe de $f'(x)$.

Si $x < 0$, alors $1 - x < 0$ et $f'(x) > 0$

Si $x > 0$, $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$. On a :

$\forall x \in]0 ; \alpha[$, $g(x) > 0$, $f'(x) > 0$

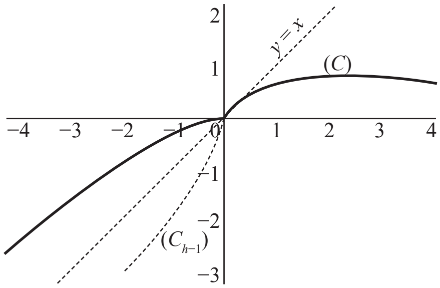
$\forall x \in]\alpha ; +\infty[$, $g(x) < 0$, $f'(x) < 0$

$\forall x \in]-\infty ; 0[$, $f'(x) > 0$

4. Dressons le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$f(\alpha)$	↘	0

5. Courbe représentative de f.



6. a) h est continue et strictement croissante sur $]-\infty;0[$, donc h est une bijection de $]-\infty;0[$ sur $h(\,]-\infty;0[\,) =]-\infty;0[$. h admet une bijection réciproque h^{-1} définie sur $]-\infty;0[$.

Courbe de h^{-1}

La courbe deh^{-1} est le symétrique de celle de h (restriction de f à $]-\infty ; 0[$) par rapport à la droite d'équation : $y = x$.

(Voir question précédente)

b) Calculons $h(-1)$ et $(h^{-1})'(-1 + \ln 2)$

$h(-1) = f(-1) = -1 + \ln 2$, h étant dérivable en -1, h^{-1} est dérivable en $-1 + \ln 2$ et

$$(h^{-1})'(-1+\ln 2) = \frac{1}{h'(h^{-1}(-1+\ln 2))}$$

$$= \frac{1}{h'(-1)} = \frac{1}{2}$$

Exercice 27

Partie A

1. Calculons les limites de g en 0 et $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

2. Démontrons que : $\forall x \in]0;+\infty[$,

$g'(x) = \dfrac{2x^2-1}{x}$

$\forall x \in]0;+\infty[$, $g'(x) = 2x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2-1}{x}$

3. Déterminons les variations de g.

g est décroissante sur $\left]0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ et croissante sur $\left]\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$.

Maths Tle D corrigé 06102021.indd 41 06/10/2021 09:46

Tableau de variation

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}(-1+\ln 2)$	$\nearrow$	$+\infty$

4. a) Calculons $g(1)$.
$g(1) = 0$.

b) Démontrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0;\frac{\sqrt{2}}{2}[$.
g est continue et strictement décroissante sur $]0;\frac{\sqrt{2}}{2}[$.
De plus $g(]0;\frac{\sqrt{2}}{2}[) =]\frac{\ln(2)-1}{2};+\infty[$ et $0 \in]\frac{\ln(2)-1}{2};+\infty[$.
Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0;\frac{\sqrt{2}}{2}[$.
$g(0{,}4) \approx 0{,}07$ et $g(0{,}5) \approx -0{,}05$, on a :
$g(0{,}4) \times g(0{,}5) < 0$, donc $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$.

5. Déduis de tout ce qui précède que :
si $x \in]0;\alpha[\cup]1;+\infty[$, alors $g(x) > 0$;
si $x \in]\alpha;1[$, alors $g(x) < 0$.
g est continue et strictement décroissante sur $]0;\alpha[$ et sur $]\alpha;\frac{\sqrt{2}}{2}[$.
$x \in]0;\alpha[$, $x < \alpha \Rightarrow g(x) > g(\alpha)$ car g est décroissante sur $]0;\alpha[$ et on a : $g(x) > 0$,
$x \in]\alpha;\frac{\sqrt{2}}{2}[$, $x > \alpha \Rightarrow g(x) < g(\alpha) \Rightarrow g(x) < 0$ car g est continue et strictement décroissante sur $]\alpha;\frac{\sqrt{2}}{2}[$ et sur $]1;+\infty[$,
$x \in]\frac{\sqrt{2}}{2};1[$, $x < 1 \Rightarrow g(x) < g(1)$ car g est croissante sur $]\frac{\sqrt{2}}{2};1[$ et on a : $g(x) < 0$,
$x \in]1;+\infty[$, $x > 1 \Rightarrow g(x) > g(1)$ on a : $g(x) > 0$.

Conclusion :
$\forall x \in]0;\alpha[\cup]1;+\infty[$, $g(x) > 0$,
$\forall x \in]\alpha;1[$, $g(x) < 0$.

Partie B

1. a) Déterminons la limite de f en 0.
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x + \frac{1}{x}(2+\ln x) = -\infty$ car
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (2+\ln x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x} = +\infty$ et
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x = 0$

b) Interprétation du résultat précédent.
La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à (C).

c) Déterminons la limite de f en $+\infty$.
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x} = +\infty$$

2. Démontrons que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
$\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1-\ln x}{x^2}$
$$= \frac{x^2-1-\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

3. a) Démontrons que $f(\alpha) = 2\alpha + \frac{1}{\alpha}$
$f(\alpha) = \alpha + \frac{2}{\alpha} + \frac{\ln\alpha}{\alpha}$
or $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha = \alpha^2 - 1$
Donc $f(\alpha) = \alpha + \frac{2}{\alpha} + \frac{\alpha^2-1}{\alpha} = 2\alpha + \frac{1}{\alpha}$

b) Étudions les variations de f.
$\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ et $x^2 > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.
D'après la question **A-5**, on a :
$\forall x \in]0;\alpha[\cup]1;+\infty[$, $f'(x) > 0$,
$\forall x \in]\alpha;1[$, $f'(x) < 0$ et $\forall x \in \{\alpha;1\}$, $f'(x) = 0$.
Donc f est strictement croissante sur $]0;\alpha[$ et sur $]1;+\infty[$, f est strictement décroissante sur $]\alpha;1[$.

Tableau de variation de f

x	0		α		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2\alpha+\frac{1}{\alpha}$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

4. a) Démontrons que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x} = 0$.

Maths Tle D corrigé 06102021.indd 42 06/10/2021 09:46

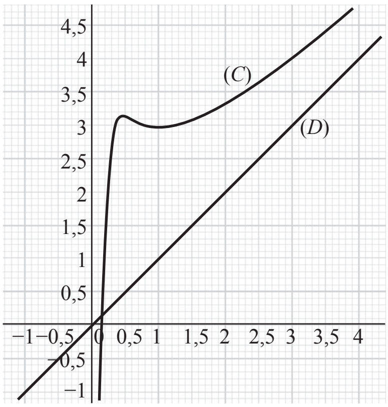
Donc la droite (D) est asymptote à (C) en $+\infty$.

b) Étudions les positions relatives de (C) et de (D).

$f(x)-x=\dfrac{2+\ln x}{x}$ et $x>0$.

Donc (C) est au-dessus de (D) sur $]e^{-2};+\infty[$ et en-dessous de (D) sur $]0; e^{-2}[$.

c)



IV.4. Situation d'évaluation

Exercice 28

1. Son âge est $f(0,35)$

On a : $f(0,35) = 1 - 8310 \ln(0,35) \approx 8725,0218$

Un fossile qui contient encore 35% de son carbone 14 a environ 8725 ans.

2. Il s'agit de trouver x tel que : $f(x) = 15000$

$f(x) = 15000 \Leftrightarrow 1 - 8310 \ln x = 15000$

$$\Leftrightarrow \ln x = \frac{1-15000}{8310}$$

$$\Leftrightarrow \ln x = e^{\frac{1-15000}{8310}} = 0,164$$

Soit environ 16,4%.

Il est possible de vérifier la teneur en carbone 14 des os vieux de 15 000 ans.

Leçon 6 Nombres complexes

IV. Exercices

IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

Le nombre complexe $2+i\sqrt{3}$ a pour partie réelle	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{3}+2$

Exercice 2

Le nombre complexe $-3+4i$ a pour partie imaginaire	4	-3	$4i$

Exercice 3

$(7 - 2i) + (3 + 7i) = 10 + 5i$

$(1 - 2i)(3 + 4i) = 11 - 2i$

$$\frac{1}{2-i} = \frac{2+i}{(2-i)+(2-i)} = \frac{2+i}{2^2+1^2} = \frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$$

$$\frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)+(2+i)} = \frac{2+i+2i-1}{2^2+1^2}$$

$$= \frac{1+3i}{5} = \frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$$

Exercice 4

$i^{2019} = i^{504\times4+3} = -i$

$i^{2020} = i^{505\times4} = 1$

$i^{2021} = i^{504\times4+1} = i$

$i^{2022} = i^{504\times4+2} = -1$

Exercice 5

Calcule $(2 + 3i)^4$

$(2+3i)^4 = C_4^0\, 2^4(3i)^0 + C_4^1\, 2^3(3i)^1 + C_4^2\, 2^2(3i)^2$
$+ C_4^3\, 2^1(3i)^3 + C_4^4\, 2^0(3i)^4 = -119 - 120i$

Maths Tle D corrigé 06102021.indd 43 06/10/2021 09:46

Exercice 6

$$(4-i)^5 = C_5^0\,4^5(-i)^0 + C_5^1\,4^4(-i)^1 + C_5^2\,4^3(-i)^2 + C_5^3\,4^2(-i)^3 + C_5^4\,4^1(-i)^4 + C_5^5\,4^0(-i)^5 = 404 - 1121i$$

Exercice 7

$2+3i$ a pour conjugué $2-3i$

$1-4i$ a pour conjugué $1+4i$

$3+i$ a pour conjugué $3-i$

$3-i$ a pour conjugué $3+i$

5 a pour conjugué 5

$2i$ a pour conjugué $-2i$

$5i-2$ a pour conjugué $-5i-2$

Exercice 8

a) Le conjugué du nombre complexe $\dfrac{1-i}{2+i}$ est $\dfrac{1+i}{2-i}$.

Le conjugué du nombre complexe $(2-i)(4+3i)$ est $(2+i)(4-3i)$.

b) La forme algébrique du conjugué du nombre $\dfrac{2+3i}{3+i}$ est la forme algébrique de $\dfrac{2-3i}{3-i}$.

$$\frac{2-3i}{3-i} = \frac{(2-3i)(3+i)}{10} = \frac{9}{10} - \frac{7i}{10}$$

Exercice 9

Le nombre complexe $2+3i$ a pour module	5	13	$\sqrt{5}$	$\sqrt{13}$
Le nombre complexe $4-3i$ a pour module	1	25	$\sqrt{7}$	5

Exercice 10

$|-2| = 2$ $\quad$ $|-4i| = 4$

$|3| = 3$ $\quad$ $|1+3i| = \sqrt{10}$

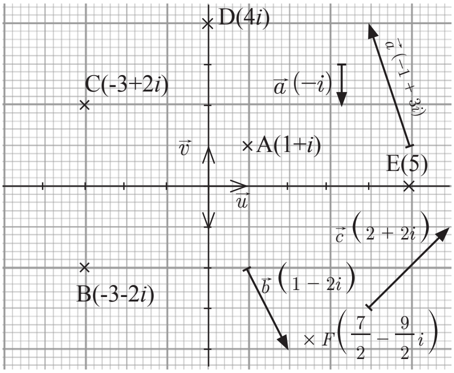
$|i\sqrt{2}\,| = \sqrt{2}$ $\quad$ $|4-5i| = \sqrt{41}$

Exercice 11

1. $z_A = 2+3i$; $z_B = -2+2i$; $z_C = -1$ et $z_D = -2i$ et $Z_E = 4-i$

2. $z_{\overrightarrow{OA}} = 2+3i$; $z_{\overrightarrow{OB}} = -2+2i$ et $z_{\overrightarrow{AB}} = -4-i$

Exercice 12



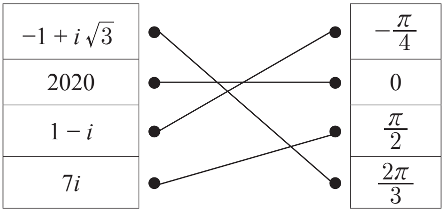
Exercice 13

$\text{Arg}(2) = 0$; $\text{Arg}(-5) = +\pi$;

$\text{Arg}(3i) = \dfrac{\pi}{2}$; $\text{Arg}(-4i) = -\dfrac{\pi}{2}$

$\text{Arg}(1+i) = \dfrac{\pi}{4}$; $\text{Arg}(3-i\sqrt{3}\,) = -\dfrac{\pi}{6}$

Exercice 14



Exercice 15

a)

Exercice 16

• $|z_1| = 2$ et $\text{Arg}(z_1) = \frac{\pi}{6}$

Donc $z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$.

• $|z_2| = 7$ et $\text{Arg}(z_2) = \frac{-\pi}{2}$

Donc $z_2 = 7(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}))$.

Maths Tle D corrigé 06102021.indd 44 06/10/2021 09:46

- $z_3 = -3 + i\sqrt{3}$
  $= 2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$
  $= 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

Exercice 17

$2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Exercice 18

- $z_1 = 1 - i = \sqrt{2}\left(+\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
  $= \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$
- $z_2 = 13 = 13e^{i0}$
- $z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

Exercice 19

La partie réelle du nombre complexe $\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^3$ est $\cos 3\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

La partie réelle du nombre complexe

$\left(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}\right)^{15}$ est

$\cos\frac{15\pi}{15} = \cos\pi = -1$

Exercice 20

La partie imaginaire du nombre complexe $\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^4$ est $\sin\left(4\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

La partie imaginaire du nombre complexe $\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^5$ est $\sin\left(5\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

Exercice 21

$$\frac{e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2} = 2\cos\frac{\pi}{4} = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Exercice 22

$$\frac{e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2i} = 2\sin\frac{\pi}{3} = 2\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Exercice 23

D)

Exercice 24

Les racines carrées du nombre complexe -5 sont $i\sqrt{5}$ et $-i\sqrt{5}$

Les racines carrées du nombre complexe $2i$ sont $1 + i$ et $-1 - i$

Les racines carrées du nombre complexe $5 - 12i$ sont $3 - 2i$ et $-3 + 2i$

Exercice 25

- Résolution de : $z^2 + z + 1 = 0$.

Le discriminant est : $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$

Les racines carrées de -3 sont $i\sqrt{3}$ et $-i\sqrt{3}$ d'où les solutions de cette équation sont

$\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$.

Donc $S = \left\{\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} ; \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right\}$

- Résolution de : $z^2 - 4z + 3 = 0$.

Le discriminant est : $\Delta = (-4^2) - 4 \times 1 \times 3 = 4$

Les racines carrées de 4 sont 2 et -2 d'où les solutions de cette équation sont $\frac{4+2}{2}$ et $\frac{4-2}{2}$ c'est-à-dire 3 et 1.

Donc $S = \{3;1\}$.

Exercice 26

- Résolution de : $z^2 - 3iz - 3 - i = 0$

Le discriminant est :
$\Delta = (-3i)^2 - 4 \times 1 \times (-3 - i) = 3 + 4i$

Les racines carrées de $3 + 4i$ sont les nombres $x + iy$ tel que :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |3 + 4i| \\ x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |3 + 4i| = 5 \\ x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 = 4 \\ xy = 2 \end{cases}$$

D'où les racines carrées de $3 + 4i$ sont $2 + i$ et $-2 - i$ et les solutions de l'équation

Maths Tle D corrigé 06102021.indd 45 06/10/2021 09:47

$z^2 - 3iz - 3 - i = 0$ sont $\dfrac{3i+2+i}{2}$ et $\dfrac{3i-2-i}{2}$ c'est-à-dire $1 + 2i$ et $-1 + i$.

Donc S = $\{1 + 2i \,;\, -1 + i\}$

• Résolution de : $2z^2 - (3 + i)z - 1 - 3i = 0$

Le discriminant Δ est tel que :

$\Delta = (-(3 + i))^2 - 4 \times 2 \times (-1 - 3i) = 16 + 30i$

Les racines carrées de $16 + 30i$ sont les nombres $x + iy$ tel que :

$$\begin{cases} x^2+y^2=|16+30i|=34 \\ x^2-y^2=16 \\ 2xy=30 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=34 \\ x^2=25 \\ xy=15 \end{cases}$$

D'où les racines carrées de Δ sont $5 + 3i$ et $-5 - 3i$ et les solutions de l'équation $2z^2 - (3 + i)z - 1 - 3i = 0$ sont $\dfrac{3+i+5+3i}{4}$ et $\dfrac{3+i-5-3i}{4}$ c'est-à-dire $2 + i$ et $\dfrac{-1-i}{2}$.

Donc S = $\{2 + i \,;\, \dfrac{-1-i}{2}\}$.

Exercice 27

• Détermination des racines cubiques de $-8i$

Pour déterminer les racines cubiques de $-8i$, on résout dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = -8i$.

On écrit la forme trigonométrique de $-8i$

$-8i = 8\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$ d'où les racines cubiques de $-8i$ sont les nombres complexes de la forme

$\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2k\pi}{3}\right)$

avec $k \in \{0 \,;\, 1 \,;\, 2\}$.

Donc les racines cubiques de $-8i$ sont

$2\left(\cos\left(\dfrac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{-\pi}{6}\right)\right)$;

$2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ et

$2\left(\cos\left(\dfrac{-5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{-5\pi}{6}\right)\right)$ ou $\sqrt{3} - i$; $2i$ et $-\sqrt{3} - i$

• Détermination des racines cubiques de 1

Pour déterminer les racines cubiques de 1, on résout dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$.

On écrit la forme trigonométrique de 1.

$1 = \cos 0 + i\sin 0$ d'où les racines cubiques de 1 sont les nombres complexes de la forme

$\cos\left(\dfrac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{2k\pi}{3}\right)$ avec $k \in \{0 \,;\, 1 \,;\, 2\}$.

Donc les racines cubiques de 1 sont 1 ;

$\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ et

$\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)$ ou 1 ; $-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 28

Résolution dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^n = 1 - i$ où n est un entier naturel plus grand que 1.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^n = 1 - i$ c'est déterminer les racines $n^{\text{ième}}$ du nombre complexe $1 - i$.

On écrit la forme trigonométrique de $1 - i$

$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$ d'où les racines $n^{\text{ième}}$ du nombre complexe $1 - i$ sont les nombres complexes de la forme

$\sqrt[n]{\sqrt{2}}\cos\left(-\dfrac{\pi}{4n}+\dfrac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4n}+\dfrac{2k\pi}{n}\right)$

avec $k \in \{0 \,;\, 1 \,;\, 2 \,;\, \ldots n - 1\}$

IV.2. Exercices de renforcement

Exercice 29

Affirmations	Réponses
z est imaginaire pur équivalent à $\mathrm{Im}(z) \neq 0$	F
Le nombre -1 n'a pas de racine carrée dans $\mathbb{C}$	F
$\arg(z \times z') = \arg(z) \times \arg(z') + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$	F
$\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$	V
$\lvert z^n \rvert = \lvert z \rvert^n$	V
$\lvert z + z' \rvert = \lvert z \rvert + \lvert z' \rvert$	F
$\lvert z \times z' \rvert = \lvert z \rvert \times \lvert z' \rvert$	V

Exercice 30

$\left|\dfrac{1-i}{1+i}\right| = 1$; $\left|\dfrac{2-3i}{3+2i}\right| = 1$ et $\left|\dfrac{(3+i)(1-4i)}{(2+3i)(1-i)}\right| = \dfrac{\sqrt{255}}{3}$

$\left(\dfrac{\overline{1-i}}{1+i}\right) = \dfrac{1+i}{1-i}$; $\left(\dfrac{\overline{2-3i}}{(3+2i}\right) = \dfrac{2+3i}{3-2i}$;

$\left(\overline{\frac{(3+i)(1-4i)}{(2+3i)(1-i)}}\right) = \frac{(3-i)(1+4i)}{(2-3i)(1+i)}$

Exercice 31

$\frac{2-i}{3+i} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ et $(1+i)\left(\frac{3-5i}{4+i}\right) = \frac{30}{17} - \frac{16}{17}i$

Exercice 32

$iz^8 + iz^4 + 1 + i = 0$

Posons : $X = z^4$. L'équation devient :

$iX^2 + iX + 1 + i = 0$

$\Delta = -1 - 4i(1+i) = 3 - 4i.$

Les racines carrées de Δ sont $2 - i$ et $-2 + i$.

Les solutions de l'équation $iX^2 + iX + 1 + i = 0$ sont $X_1 = \dfrac{-i+2-i}{2i} = -1 - i$ et $X_2 = i$.

Par suite, $z^4 = i$ ou $z^4 = -1 - i$.

- Résolution de l'équation : $z^4 = -1 - i$

Posons $z = re^{i\theta}$

$z^4 = -1 - i \Leftrightarrow r^4e^{i\theta} = e^{-i\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow r^4 = 1$ et

$4\theta = -\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow r = 1$ et $\theta = -\dfrac{3\pi}{16} + k\dfrac{\pi}{2},\ k \in \{0; 1; 2; 3\}$

$\Leftrightarrow z \in \left\{e^{-i\frac{3\pi}{16}}; e^{i\frac{5\pi}{16}}; e^{i\frac{13\pi}{16}}; e^{-i\frac{11\pi}{16}}\right\}$

- Résolution de l'équation : $z^4 = i$

Posons $z = re^{i\theta}$ et on a :

$z^4 = i \Leftrightarrow r^4e^{i4\theta} = e^{i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow r = 1$ et $\theta = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}$,

$k \in \{0;1;2;3\}$.

$z \in \left\{e^{i\frac{\pi}{8}}; e^{i\frac{5\pi}{8}}; e^{-i\frac{7\pi}{8}}; e^{-i\frac{3\pi}{8}}\right\}$

Conclusion :

$$S = \left\{\begin{matrix} e^{i\frac{\pi}{8}}; e^{i\frac{5\pi}{8}}; e^{-i\frac{7\pi}{8}}; e^{-i\frac{3\pi}{8}}; e^{-i\frac{3\pi}{16}}; e^{i\frac{5\pi}{16}}; \\ e^{i\frac{13\pi}{16}}; e^{-i\frac{11\pi}{16}} \end{matrix}\right\}$$

Exercice 33

- $-4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$;
- $6i = 6\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$;
- $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;
- $1 - i\sqrt{3} = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$;
- $\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5} = \cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)$
- $-2\left(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right) = 2\left(\cos\left(-6\frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(-6\frac{\pi}{7}\right)\right)$

Exercice 34

1. $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$
2. $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^{2019} = 2^{2019}e^{673i\pi}$

Exercice 35

1. $(\cos x + i\sin x)^4$

$= (\cos x)^4 + 4(\cos x)^3(i\sin x) + 6(\cos x)^2(i\sin x)^2 + 4(\cos x)(i\sin x)^3 + (i\sin x)^4$

$= \cos^4 x + 4i\cos^3 x\sin x - 6\cos^2 x\sin x^2 x - 4i\cos x\sin^3 x + \sin^4 x = \cos^4 x - 6\cos^2 x\sin^2 x + i(4\cos^3 x\sin x - 4\cos x\sin^3 x)$.

2. D'après la formule de Moivre, on a :

$(\cos x + i\sin x)^4 = \cos 4x + i\sin 4x$.

Par identification, on a :

$\sin 4x = 4\cos^3 x\sin x - 4\cos x\sin^3 x$.

Exercice 36

- $4 - 4i\sqrt{3} = 8\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

d'où les racines cubiques de $4 - 4i\sqrt{3}$ sont les nombres complexes z_k tel que :

$z_k = \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{9} + 2k\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{9} + 2k\frac{\pi}{3}\right)\right]$ avec $k \in \{0 ; 1 ; 2\}$.

$z_0 = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{9}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{9}\right)\right]$;

$z_1 = 2\left[\cos\left(5\frac{\pi}{9}\right) + i\sin\left(5\frac{\pi}{9}\right)\right]$;

$z_2 = 2\left[\cos\left(-7\frac{\pi}{9}\right) + i\sin\left(-7\frac{\pi}{9}\right)\right]$.

- On utilise le même procédé pour trouver que les racines cubiques de $8i$ sont :

$z_0 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$;

$z_1 = 2\left[\cos\left(5\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(5\frac{\pi}{6}\right)\right]$;

$z_2 = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$.

Exercice 37

• $\sin^5 x =$

$\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}\right)^5 = \frac{1}{32i}\left(e^{ix}-e^{ix}\right)^5$

$\frac{1}{32i}\left(e^{5ix}-5e^{4ix}e^{-ix}+10e^{3ix}e^{-2ix}\right.$

$\left.-10e^{2ix}e^{-3ix}+5e^{ix}e^{-4ix}-e^{3ix}e^{-5ix}\right)$

$= \frac{1}{16}\left(\frac{e^{5ix}-e^{-5ix}}{2i}\right)-5\left(\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}\right)+10\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)$

Donc $\sin^5 x = \frac{1}{16}\sin 5x - \frac{5}{16}\sin 3x + \frac{5}{8}\sin x$.

• $\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^3$

$= \frac{1}{8}\left(e^{3ix}+3e^{2ix}e^{-ix}+3e^{ix}e^{-2ix}+e^{-3ix}\right)$

$= \frac{1}{4}\left[\left(\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2}\right)+3\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\right]$

$= \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$

• $\sin^4 2x = \left(\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}\right)^4$

$= \frac{1}{16}\left(e^{8ix}-4e^{6ix}e^{-2ix}+6e^{4ix}e^{-4ix}-\right.$

$\left.4e^{2ix}e^{-6ix}+e^{-8ix}\right)$

$= \frac{1}{16}\left(e^{8ix}+e^{-8ix}-4e^{4ix}-4e^{-4ix}+6\right)$

$= \frac{1}{16}\left(2\cos 8x - 8\cos 4x + 6\right)$

$= \frac{1}{8}\left(\cos 8x - 4\cos 4x + 3\right)$

Exercice 38

a) $2z^2 + (-3+2i)z + 1 - 2i = 0$.

$\Delta = (-3+2i)^2 - 8(1-2i) = -3+4i$

On détermine les racines carrées de Δ

Les racines carrées de Δ sont $1+2i$ et $-1-2i$ d'où les solutions de (E) sont 1 et $\frac{1}{2} - i$

Donc $S = \{1 ; \frac{1}{2} - i\}$

b) $z^2 - 2z + 5 = 0$.

$\Delta = 4 - 20 = -16 = (4i)^2$

$z_1 = \frac{2-4i}{2} = 1-2i$ et $z_2 = \frac{2+4i}{2} = 1+2i$.

c) $(1+i)z^2 + (-1+i)z - 2 + 4i = 0$.

$\Delta = (1+i)^2 - 4(1+i)(-2+4) = 24 - 10i$

$= (5-i)^2$

Les racines carrées de Δ sont $5-i$ et $-5+i$ d'où les solutions de (E) sont $1-2i$ et $-1+i$

Donc $S = \{1-2i ; -1+i\}$.

Exercice 39

1. a)

$P(3i) = (3i)^3 + (1-2i)(3i)^2 + (3+2i)(3i) + 15$

$= -27i - 9 + 18i + 9i - 6 + 15 = 0$

D'où $3i$ est un zéro de P est solution de (E)

b) On a $P(z) = (z-3i)(z^2+az+b)$

$= z^3 + (a-3i)z^2 + (b-3az) + b) - 3ib$

Par identification :

$a - 3i = 1 - 2i$; $b - 3ai = 3 + 2i$ et $-3ib = 15$

D'où $a = 1 + i$ et $b = 5i$.

Par conséquent :

$P(z) = (z-3i)(z^2 + (1+i)z + 5i)$

2. $z^3 + (1-2i)z^2 + (3+2i)z + 15 = 0$

$(z-3i)(z^2 + (1+i)z + 5i) = 0$

$z = 3i$ ou $z^2 + (1+i)z + 5i = 0$

$\Delta = (1+i)2 - 4 \times 5i = -18i$

Soit $\delta = x + iy$

$$\delta^2 = \Delta \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 18 \\ x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -18 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 9 \\ xy = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ xy = -9 \end{cases}$$

On prend $\delta = 3 - 3i$

On a $z_1 = \frac{-1-i+3-3i}{2} = 1 - 2i$ et

$z_2 = \frac{-1-i-3+3i}{2} = -2 + i$

Conclusion : $S = \{3i ; 1-2i ; -2+i\}$

Exercice 40

1. • Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, α est solution de (E) si et seulement si $\alpha^4 - (1+i)\alpha^3 + 6i\alpha^2 + 8(1-i)\alpha - 10 = 0$.

$$\begin{cases} \alpha^4 - \alpha^3 + 8\alpha - 10 = 0 & (1) \\ -\alpha^3 + 6\alpha^2 - 8\alpha = 0 & (2) \end{cases}$$

Maths Tle D corrigé 06102021.indd 48 06/10/2021 09:47

(2) $\Leftrightarrow \alpha^2 - 6\alpha + 8 = 0$ d'où $\alpha = 0$

$\Delta = 36 - 32 = 2^2$

$\alpha_1 = \dfrac{6-2}{2} = 2$ et $\alpha_2 = 4$.

2 vérifie (1) mais 4 et 0 ne vérifient pas (1) d'où (E) admet une solution réelle unique qui est 2.

• Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ α, iα est solution de (E) si et seulement si

$$\begin{cases} \alpha^4 - \alpha^3 + 8\alpha - 10 = 0 & (1) \\ \alpha^3 - 6\alpha^2 + 8\alpha = 0 & (2) \end{cases}$$

2 vérifie (1) mais pas 0 et 4 d'où l'équation admet une unique solution imaginaire pure qui et $2i$.

2. 2 et 2i sont des solutions de (E) d'où il existe deux nombres complexes a et b

(E) $\Leftrightarrow (z-2)(z-2i)(z^2 + az + b) = 0$

On a : $a = \dfrac{-3}{4} - \dfrac{3}{4}i$ et $b = \dfrac{5}{2}i$ par identification

(E) $\Leftrightarrow z = 2$ ou $z = 2i$ ou

$z^2 + \left(\dfrac{-3}{4} - \dfrac{3}{4}i\right)z + \dfrac{5}{2}i = 0$

Résolution de $z^2 + \left(\dfrac{-3}{4} - \dfrac{3}{4}i\right)z + \dfrac{5}{2}i = 0$

$z^2 + \left(\dfrac{-3}{4} - \dfrac{3}{4}i\right)z + \dfrac{5}{2}i = 0 \Leftrightarrow$

$4z^2 + (-3 - 3i)z + 10i = 0$

$\Delta = (-3 - 3i)^2 - 20i = -2i = (1+i)^2$

Les solutions de $4z^2 + (-3 - 3i)z + 10i = 0$ sont $z_1 = 4 + 4i$ et $z_2 = 2 + 2i$.

Donc les solutions de (E) sont 2 ; $2i$; $2 + 2i$; $4 + 4i$.

IV.3. Exercices d'approfondissement

Exercice 41

1. $|z_A| = 4$; $|z_B| = 4$; $|z_C| = 4$

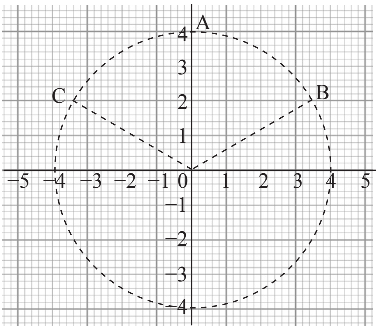
$\mathrm{Arg}(z_A) = \dfrac{\pi}{2}$; $\mathrm{Arg}(z_B) = \dfrac{\pi}{6}$; $\mathrm{Arg}(z_C) = \dfrac{5\pi}{6}$

2. D'après la question précédente, on a :

• OA = OB = OC = 4, donc A, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 4 ;

• $\mathrm{mes}\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OA}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, $\mathrm{mes}\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OB}}\right) = \dfrac{\pi}{6}$ et $\mathrm{mes}\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OC}}\right) = \dfrac{5\pi}{6}$.

D'où la figure suivante



3. $AB = |z_A - z_B| = |2\sqrt{3} - 2i| = 4$

Or OA = 4 et OB = 4, donc le triangle BOA est un triangle équilatéral.

4. $AC = |z_C - z_A| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2)^2} = 4$

OB = BA = AC = CO = 4

Donc le quadrilatère OBAC est un losange.

Exercice 42

$f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$, $z \neq -i$

1. $f(z)$ est un réel si et seulement si $\overline{f(z)} = f(z)$

$$\begin{aligned} \overline{f(z)} = f(z) &\Leftrightarrow \frac{\overline{z}+i}{\overline{z}-i} = \frac{z-i}{z+i} \\ &\Leftrightarrow (\overline{z}+i)(z+i) = (\overline{z}-i)(z-i) \\ &\Leftrightarrow \overline{z}z + i\overline{z} + iz - 1 = \overline{z}z - i\overline{z} - iz - 1 \\ &\Leftrightarrow z + \overline{z} = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0 \end{aligned}$$

d'où z est imaginaire pur.

L'ensemble cherché est $i\mathbb{R}$.

2. $f(z)$ est un imaginaire pur si et seulement si $\overline{f(z)} = -f(z)$

$$\begin{aligned} \overline{f(z)} = -f(z) &\Leftrightarrow \frac{\overline{z}+i}{\overline{z}-i} = -\frac{z-i}{z+i} \\ &\Leftrightarrow (\overline{z}+i)(z+i) = -(\overline{z}-i)(z-i) \\ &\Leftrightarrow \overline{z}z + i\overline{z} + iz - 1 = -\overline{z}z + i\overline{z} + iz + 1 \\ &\Leftrightarrow |z| = 1 \end{aligned}$$

d'où l'ensemble cherché est le cercle trigonométrique privé du point J'($-i$).

Maths Tle D corrigé 06102021.indd 49 06/10/2021 09:47

Exercice 43

$f(z) = \overline{z}^2$, $z \in \mathbb{C}$

1. $f(z) = z \Leftrightarrow \overline{z}^2 = z$

Posons $z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

$\overline{z}^2 = z \Leftrightarrow (x - iy)^2 = x + iy$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - x = 0 & (1) \\ -2xy - y = 0 & (2) \end{cases}$

(2) $\Rightarrow y(1 + 2x) = 0$

$y = 0$ ou $x = -\frac{1}{2}$

Quand on remplace y par 0 dans l'équation (1) on a :

$\frac{1}{4} - y^2 + \frac{1}{2} = 0$ c'est-à-dire $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $y = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ d'où les nombres complexes z tels que $f(z) = z$ sont : 0 ; 1 ; $-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

2. a) $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

On a :

$$\frac{(\overline{z})^2}{z} = \frac{(x-iy)^2}{x+iy} = \frac{x^2 - y^2 - 2ixy}{x+iy}$$
$$= \frac{(x^2 - y^2 - 2ixy)(x - iy)}{x^2 + y^2}$$
$$= \frac{x(x^2 - y^2) - 2xy^2 - i\left(y(x^2 - y^2) + 2x^2y\right)}{x^2 + y^2}$$
$$= \frac{x(x^2 - 3y^2)}{x^2 + y^2} + i\frac{y(y^2 - 3x^2)}{x^2 + y^2}$$

Donc $\frac{(\overline{z})^2}{z}$ est imaginaire pur si $x(x^2 - 3y^2) = 0$

b) OMM' est un triangle rectangle en 0 si et seulement si $\frac{z_{M'} - z_0}{z_M - z_0} \in i\mathbb{R}$

$\frac{z_{M'} - z_0}{z_M - z_0} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{\overline{z}^2}{z} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow x(x^2 - 3y^2) = 0$

$x(x^2 - 3y^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2 - 3y^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = y\sqrt{3}$ ou $x = -y\sqrt{3}$

3. a) $|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1$

$\Leftrightarrow z\overline{z} = 1$

$\Leftrightarrow (z\overline{z})^2 = 1$

$\Leftrightarrow z^2(\overline{z})^2 = 1$

$\Leftrightarrow (\overline{\overline{z}})^2(\overline{z})^2 = 1$

$\Leftrightarrow |f(z)|^2 = 1$

$\Leftrightarrow |f(z)| = 1$

b) Soit z tel que $f(z) = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\sqrt{5}}{3}$

$|f(z)| = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$ d'où $\exists\ \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$

$f(z) = (\cos\alpha - i\sin\alpha)^2 = \cos2\alpha - i\sin2\alpha$

$f(z) = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \cos(-2\alpha) + i\sin(-2\alpha)$

$\Leftrightarrow -2\alpha = \frac{2\pi}{3} + 2h\pi$, $h \in \{0;1\}$

$\alpha = -\frac{\pi}{3} - h\pi$, $h \in \{0;1\}$

Les antécédents de $\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ sont :

$z_0 = \cos(\frac{-\pi}{3}) + i\sin(\frac{-\pi}{3})$ et

$z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$

Exercice 44

$u \in [0;1]$

1. (E) : $z^2 - 2z\cos^2u + \cos^2u = 0$

$\Delta = 4\cos^4u - 4\cos^2u = 4\cos^2u(\cos^2u - 1)$

$= -4\cos^2u \times \sin^2u = (2i\cos u \sin u)^2$

Les solutions de (E) sont :

$z_1 = \frac{2\cos^2u + i\cos u \sin u}{2} = \cos^2u + i\cos u \sin u$

et $z_2 = \cos^2u - i\cos u \sin u$

2. • $|z_1| = \sqrt{\cos^4u + \cos^2u\sin^2u} = |\cos u|$

Si $u \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$ alors $|z_1| = \cos u$ et

$z_1 = \cos u(\cos u + i\sin u)$ et $\arg(z_1) = u + 2k\pi$, $k \in \mathbb{R}$

Si $u \in]\frac{\pi}{2} ; \pi] \Rightarrow |z_1| = -\cos u$ et

$z_1 = -\cos u(-\cos u - i\sin u)$

$= -\cos u[\cos(\pi + u) + i\sin(\pi + u)]$

et $\arg(z_1) = u + (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

• $|z_2| = |\cos u|$

Si $u \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$ alors $|z_2| = \cos u$ et

$z_2 = \cos u(\cos u - i\sin u)$

$= \cos u[\cos(-u) + i\sin(-u)]$

et $\arg(z_2) = -u + 2k\pi$, $k \in \mathbb{R}$

Si $u \in]\frac{\pi}{2}; \pi]$ alors $|z_2| = -\cos u$ et

$z_2 = -\cos u(-\cos u + i\sin u)$

$= -\cos u[\cos(\pi - u) + i\sin(\pi - u)]$

et $\arg(z_2) = -u + (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 45

1. a) $z = (\sqrt{3}-1) + i(1+\sqrt{3})$

$z^2 = -4\sqrt{3} + 4i$

$|z^2| = 8$

$z^2 = 8\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 8\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$\operatorname{Arg}(z^2) = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

b) $|z^2| = 8 \Rightarrow |z| = 2\sqrt{2}$

$\operatorname{Arg}(z^2) = 2\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

d'où $\operatorname{Arg}(z) = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

2) $z = (\sqrt{3}-1) + i(1+\sqrt{3})$

$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$

d'où $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Exercice 46

1. $\cos\frac{\pi}{6} = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{12}\right) = \cos^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12}$

$= 2\cos^2\frac{\pi}{12} - 1$

$\cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$

$\frac{\pi}{12} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos\frac{\pi}{12} > 0$, d'où

$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

$\sin^2\frac{\pi}{2} = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$

$\frac{\pi}{12} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sin\frac{\pi}{12} > 0$, d'où

$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

2. $z^4 = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Posons : $Z = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$|Z| = \sqrt{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}} = 2$

Posons arg z = Θ

$\cos\theta = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

D'après la question 1, $\Theta = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

D'où les solutions de l'équation

$z^4 = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$ sont les complexes tels que :

$z_k = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{48} + \frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{48} + \frac{k\pi}{2}\right)\right]$

$k \in \{0; 1; 2; 3\}$

$z_0 = \sqrt[4]{2}\left[\cos\frac{\pi}{48} + i\sin\frac{\pi}{48}\right]$

$z_1 = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{25\pi}{48}\right) + i\sin\left(\frac{25\pi}{48}\right)\right]$

$z_2 = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{-47\pi}{48}\right) + i\sin\left(\frac{-47\pi}{48}\right)\right]$

$z_3 = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{-25\pi}{48}\right) + i\sin\left(\frac{-25\pi}{48}\right)\right]$

Exercice 47

1. $z_{c'} = f(i) = \frac{1+i}{-i} = -1+i$

D'où $c'(-1;0)$.

2. a) Soit u l'affixe de c''.

On a : $\frac{u+1}{u-2i} = z_c$

$\frac{u+1}{u-2i} = i$

$u + 1 = ui + 2$

$u = \frac{1}{1-i}$

$u = \frac{1+i}{2}$

$u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

Donc c'' est le point d'affixe $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

3. $(\Sigma) = \{M(z), f(z) \in \mathbb{R}^-\}$.

$f(z) \in \mathbb{R}^- \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z+1}{z-2i}\right)} = \frac{z+1}{z-2i}$

$\Leftrightarrow \frac{\overline{z}+1}{\overline{z}+2i} = \frac{z+1}{z-2i}$

$\Leftrightarrow (\overline{z}+1)(z-2i) = (\overline{z}+2i)(z+1)$

$\Leftrightarrow 2i(z+\overline{z}) - (z-\overline{z}) + 4i = 0$

Posons $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

On a : $2i(2x) - (2iy) + 4i = 0$

$y = 2 + 2x$ d'où $z = x + i(2 + 2x)$

$$z' = \frac{z+1}{z-2i} = \frac{(x+1)+i(2+2x)}{x+2ix}$$
$$= \frac{5x(x+1)}{5x^2}$$
$$= 5x(x+1)$$

$z' \leq 0 \Rightarrow x \in [-1;0]$

$y = 2 + 2x$ et $x \in [-1;0]$

Pour $x = -1 \Rightarrow y = 0$

$x = 0 \Rightarrow y = 2$ où A(0 ; 2) et B(−1 ; 0).

L'ensemble (Σ) est le segment [AB] privé du point B.

4. $(\Gamma) = \{M(z), M'(z') \in \mathscr{C}(0,1)\}$.

$M' \in \mathscr{C}(0,1)\} \Leftrightarrow |z'| = 1$.

$$|z'| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z+1}{z-2i}\right| = 1$$
$$\Leftrightarrow |z+1| = |z-2i|$$
$$\Leftrightarrow BM = AM$$

(Γ) est la médiatrice de segment [AB].

5. $P(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$

A(2i), B(−1) et C(i)

$P(2i) = -8ai - 4b + 2ic + d$

$P(-1) = -a + b - c + d$

$P(i) = -ai - b + ic + d$

$P(2i) = 0$, $P(-1) = 0$ et $P(i) = 0$

$$\begin{cases} -8ai - 4b + 2ic + d = 0 & (1) \\ -a + b - c + d = 0 & (2) \\ -ai - b + ic + d = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8ai - 4b + 2ic + d = 0 & (1) \\ a(1-8ai) - 5b + c(1+2i) = 0 & (2') \\ -7ai - 3b + ic = 0 & (3') \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8ai - 4b + 2ic + d = 0 & (1) \\ a(1-8ai) - 5b + c(1+2i) = 0 & (2') \\ a(-3-11i) - c(3+i) = 0 & (3'') \end{cases}$$

$$3'' \Longrightarrow c = \frac{-a(-3-11i)}{3+i} = -a(2+3i)$$

On procède par substitution dans les autres équations et on trouve $b = a(1 - 3i)$,
$c = -a\,(2 + 3i)$ et $d = -2ai$.
On donne une valeur à a et on obtient les valeurs de b, c et d.

IV.4. Situation d'évaluation

Exercice 48

1. On a : $z_P = 8 + i$, $z_E = 5 + i$ et $z_F = 2 + i$.

Donc $z_P \times z_E \times z_F = (8 + i)(5 + i)(2 + i)$
$= (39 + 13i)(2 + i) = 13(1 + i)(2 + i)$
$= 13(5 + 5i) = 65(1 + i)$

2. On a : $z_P \times z_E \times z_F = 65(1 + i)$.

Donc $\arg(z_P \times z_E \times z_F) = \arg(65(1 + i)) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\arg(z_P) + \arg(z_E) + \arg(z_F) = \arg(1 + i) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{mes}\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AP}}\right) + \text{mes}\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AE}}\right) + \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AF}}\right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

En conclusion, c'est le voisin ayant affirmé que l'égalité est vraie dans tous les cas qui a raison car quelle que soit la longueur du côté du carré, le repère (A ; $\vec{u}, \vec{v}$) conduit toujours au résultat ci-dessus.

Leçon 7 Fonctions exponentielles et fonctions puissances

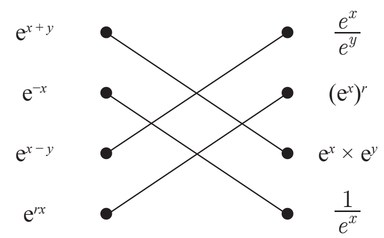
IV. Exercices

IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

Égalités	Réponses
$E^O = 0$	Faux
$\ln(e^2) = 2$	Vrai
$e^1 = e$	Vrai
$e^{\ln(e)} = e$	Vrai
$\ln(e^{-5}) = \frac{1}{5}$	Faux
$e^{-3} < 0$	Faux
$\ln(\ln e) = 1$	Faux

Exercice 2



Exercice 3

1. b ; 2. a ; 3. c ; 4. b ; 5. b ; 6. c.

Exercice 4

a) $\frac{e^8}{e^5} = e^3$; b) $\frac{(e^{-2})^3}{e^{-5}} = e^{-1}$;

c) $e^3 \times e^{-6} = e^{-3}$; d) $\frac{e}{e^2} = e^{-1}$

Exercice 5

$$A = \frac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}}$$
$$= \frac{e^{7-4}}{e^{-5}} = \frac{e^3}{e^{-5}}$$
$$= e^{3+5}$$
$$A = e^8$$

$$B = (e^5)^{-6} \times e^{29}$$
$$= e^{-30} \times e^{29}$$
$$= e^{-30+29}$$
$$B = e^{-1}$$

$$C = \frac{1}{e^{-6}} + \frac{e^{-4}}{e^{2-6}}$$
$$= e^6 + \frac{e^{-4}}{e^{-4}}$$
$$C = e^6 + 1$$

Exercice 6

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x =$	$-\infty$	0	1
$\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x =$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x+3} =$	$+\infty$	0	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} =$	$+\infty$	0	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x =$	$+\infty$	0	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x-1}{e^x-1} =$	$+\infty$	1	$-\infty$

Exercice 7

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

c) On a $x - e^x = x(1 - \frac{e^x}{x})$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x - e^x = -\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ et

$\lim\limits_{x\to-\infty} x = +\infty$.

Maths Tle D corrigé 06102021.indd 53 06/10/2021 09:47

Exercice 8

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-x}{e^{2x}-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{x}{e^x}}{e^x-\dfrac{1}{e^x}}=0$ car

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{x}{e^x}\right)=1$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-\dfrac{1}{e^x}\right)=+\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^{2x}-1}=0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}-1=+\infty$.

• $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}}\dfrac{e^x-3}{x-3}=+\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}}\dfrac{e^x-3}{x-3}=-\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+x+5)e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{e^x}+\dfrac{x}{e^x}+\dfrac{5}{e^x}\right)=0$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{e^x}=0$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x-5)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}(3xe^x-5e^x)=0$

car $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}5e^x=0$.

Exercice 9

1. $e^{2x+3}=e^{x-1}\Leftrightarrow 2x+3=x-1\Leftrightarrow 2x-x=-3-1\Leftrightarrow x=-4$

$S_{\mathbb{R}}=\{-4\}$.

2. $e^{x-2}=e\Leftrightarrow e^{x-2}=e^1$

$\Leftrightarrow x-2=1$

$\Leftrightarrow x=3$

$S_{\mathbb{R}}=\{3\}$.

3. $e^{5x-2}=1\Leftrightarrow e^{5x-2}=e^0$

$\Leftrightarrow 5x-2=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{5}$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{\dfrac{2}{5}\right\}$.

4. $e^x=7\Leftrightarrow e^x=e^{\ln 7}$

$\Leftrightarrow x=\ln 7$

$S_{\mathbb{R}}=\{\ln 7\}$

5. $e^{2x}=-3$
Cette équation n'a pas de solution, car $e^{2x}>0$ et $-3<0$.

$S_{\mathbb{R}}=\varnothing$.

6. $e^x(e^{-3x}-2)=0$
$e^x(e^{-3x}-2)=0\Leftrightarrow e^{-3x}-2=0$ car $e^x>0$

$\Leftrightarrow e^{-3x}=e^{\ln 2}$

$\Leftrightarrow x=-\dfrac{\ln 2}{3}$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{-\dfrac{\ln 2}{3}\right\}$.

Exercice 10

Résolvons dans ℝ, chacune des équations suivantes :

1. $e^{3x}\le e^{x+1}\Leftrightarrow 3x\le x+1$

$\Leftrightarrow 2x\le 1\Leftrightarrow x\le\dfrac{1}{2}$

$S_{\mathbb{R}}=\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right]$

2. $e^{-2x+2}-2>0\Leftrightarrow e^{-2x+2}>2$

$\Leftrightarrow -2x+2>\ln 2$

$\Leftrightarrow -2x>\ln 2-2$

$\Leftrightarrow x<-\dfrac{\ln 2-2}{2}$

$S_{\mathbb{R}}=\left]-\infty;-\dfrac{\ln 2-2}{2}\right[$

3. $e^{3x}+3>0$. Pour tout x élément de ℝ, $e^{2x}>0$ et $3>0$. Alors l'inégalité est toujours vraie. $S_{\mathbb{R}}=\mathbb{R}$.

4. $e^{2x+1}+5\le 0$. Pour tout x élément de ℝ, $e^{2x+1}+5>0$. Alors l'inéquation n'admet pas de solution dans ℝ.
$S_{\mathbb{R}}=\varnothing$.

Exercice 11

a) $D_f=\mathbb{R}$.
b) $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\ge 0\}=[0\,;+\infty[$
c) $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x+1\neq 0\}$
$=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$
d) $D_f=\mathbb{R}$.
e) $D_f=\mathbb{R}^*$.

Exercice 12

1. c ; 2. b ; 3. a ; 4. a.

Exercice 13

1. $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=3e^{3x-5}$;
2. $\forall x\in\,]0;+\infty[, f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$;

Maths Tle D corrigé 06102021.indd 54 06/10/2021 09:47

3. $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}, f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2} e^{\frac{x-1}{x+1}}$;

4. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (2x-1)e^{x^2-x+1}$;

5. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2} e^{\frac{1}{x^2+1}}$;

6. $\forall x \in]-\infty;0[, f'(x) = \dfrac{-(1+x)e^x}{(xe^x)^2}$

Exercice 14

a) $F: x \mapsto \frac{1}{3}e^{3x+5}$; b) $F: x \mapsto \frac{1}{2}e^{x^2}$

c) $F: x \mapsto -e^{\frac{1}{x}}$; d) $F: x \mapsto \ln(e^x+1)$

Exercice 15

1. b ; 2. c ; 3. a.

Exercice 16

1. Faux ; 2. Vrai ; 3. Vrai ; 4. Faux.

Exercice 17

a) $3^x = 3^{1-3x} \Leftrightarrow x = 1-3x$

$\Leftrightarrow 4x = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{1}{4}\right\}$

b) $5^x = 6 \Leftrightarrow e^{x\ln 5} = e^{\ln 6}$

$\Leftrightarrow x\ln 5 = \ln 6$

$\Leftrightarrow x = \frac{\ln 6}{\ln 5}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\ln 6}{\ln 5}\right\}$

c) $(0,1)^x = 10 \Leftrightarrow e^{x\ln 0,1} = e^{\ln 10}$

$\Leftrightarrow x\ln 0,1 = \ln 10$

$\Leftrightarrow x = \frac{\ln 10}{\ln(0,1)}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\ln 10}{-\ln(10)}$

$\Leftrightarrow x = -1$

$S_{\mathbb{R}} = \{-1\}$

d) $2^x = 8^{x-1} \Leftrightarrow 2^x = (2^3)^{x-1}$

$\Leftrightarrow 2^x = 2^{3x-3}$

$\Leftrightarrow x = 3x-3$

$\Leftrightarrow -2x = -3$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

e) $3^{2x} = 5^{1-x} \Leftrightarrow e^{2x\ln 3} = e^{(1-x)\ln 5}$

$\Leftrightarrow 2x\ln 3 = (1-x)\ln 5$

$\Leftrightarrow 2x\ln 3 + x\ln 5 = \ln 5$

$\Leftrightarrow x(2\ln 3 + \ln 5) = \ln 5$

$\Leftrightarrow x = \frac{\ln 5}{2\ln 3 + \ln 5}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\ln 5}{2\ln 3 + \ln 5}\right\}$

Exercice 18

1. $2^x > 10 \Leftrightarrow e^{x\ln 2} > e^{\ln 10}$

$\Leftrightarrow x\ln 2 > \ln 10 \Leftrightarrow x > \frac{\ln 10}{\ln 2}$

$S_{\mathbb{R}} = \left]\frac{\ln 10}{\ln 2}; +\infty\right[$

2. $(0,5)^x < 6 \Leftrightarrow e^{x\ln 0,5} < e^{\ln 6}$

$\Leftrightarrow x\ln 0,5 < \ln 6 \Leftrightarrow x > \frac{\ln 6}{\ln 0,5}$

$\Leftrightarrow x > -\frac{\ln 6}{\ln 2}$

$S_{\mathbb{R}} = \left]-\frac{\ln 6}{\ln 2}; +\infty\right[$

3. $(0,2)^x \geq (0,2)^{-x+2} \Leftrightarrow x \geq -x+2$

$\Leftrightarrow 2x \geq 2$

$\Leftrightarrow x \geq 1$

$S_{\mathbb{R}} = [1; +\infty[$

4. $(3)^{2x-1} \leq (3)^x \Leftrightarrow 2x-1 \leq x$

$\Leftrightarrow x \leq 1$

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty; 1]$

Exercice 19

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x =$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} 0,4^x =$	0	$+\infty$	$-\infty$

Maths Tle D corrigé 06102021.indd 55 06/10/2021 09:47

$\lim\limits_{x\to+\infty} 0,9^x =$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{3}^{\,x} =$	0	$+\infty$	$-\infty$

Exercice 20

$(a^x)' = \ln(a)e^{x\ln(a)} = \ln(a)a^x$ avec a un nombre réel.

a) $f'(x) = \ln(5)e^{x\ln 5} = \ln(5)5^x$

b) $f'(x) = \ln(0,3)e^{x\ln(0,3)} = \ln(0,3)(0,3)^x$

c) $f'(x) = (\ln\pi)e^{x\ln\pi} = (\ln\pi)\pi^x$

Exercice 21

a) $f(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$

$f'(x) = \dfrac{1}{4}x^{\frac{-3}{4}}$

b) $f'(x) = \dfrac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$; **c)** $f'(x) = \pi x^{\pi-1}$

Exercice 22

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^r}$	$-\infty$	0	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{e^x}$	$-\infty$	0	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^r}$	$+\infty$	0	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^r}{e^x}$	$+\infty$	0	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^r \ln x$	$+\infty$	0	$-\infty$

Exercice 23

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2-2}$

On a : $\dfrac{e^x}{x^2-2} = \dfrac{e^x}{x^2\left(1-\dfrac{2}{x^2}\right)}$

$$\frac{e^x}{x^2-2} = \frac{e^x}{x^2} \times \frac{1}{\left(1-\dfrac{2}{x^2}\right)}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\left(1-\dfrac{2}{x^2}\right)} = 1$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2-2} = +\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - e^x$

On a : $x^2 - e^x = x^2\left(1-\dfrac{e^x}{x^2}\right)$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - e^x = -\infty$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3e^x = 0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} x^\alpha e^x = 0$.

- $\lim\limits_{x\to 0} x^5 \ln x = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} x(\ln(x))^2 = \left(\sqrt{x}\ln(x)\right)^2$

$= \left(x^{\frac{1}{2}}\ln(x)\right)^2 = 0.$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) - x^3$.

On a : $\ln(x) - x^3 = x^3\left(\dfrac{\ln x}{x^3} - 1\right)$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^3} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) - x^3 = -\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - \ln(x)$.

On a : $e^x - \ln(x) = e^x\left(1-\dfrac{\ln x}{e^x}\right)$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - \ln x = +\infty$.

IV.2. Exercices de renforcement

Exercice 24

Affirmations	Réponses
La fonction $x \mapsto e^x$ est toujours strictement croissante sur $\mathbb{R}$.	Vrai
La fonction $x \mapsto 0,5^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.	Vrai
La fonction $x \mapsto (\sqrt{2})^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.	Faux
La fonction $x \mapsto x^{\frac{2}{3}}$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.	Faux
La fonction $x \mapsto x^{-\frac{7}{3}}$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.	Vrai

Exercice 25

$u'u^{\alpha}$	$e^{u(x)}$
$u'e^{u}$	$\dfrac{1}{\ln a}a^{x}$
a^{x}	$\dfrac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$

Exercice 26

a) $f(x)=2^{x}=e^{x\ln 2}$; $F : x \mapsto \dfrac{2^{x}}{\ln 2}$

b) $f(x)=0,3^{x}=e^{x\ln(0,3)}$; $F : x \mapsto \dfrac{0,3^{x}}{\ln 0,3}$

c) $f(x)=\dfrac{1}{x^{5}}$; $F : x \mapsto \dfrac{-1}{4x^{4}}$

d) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$; $F : x \mapsto \dfrac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}$.

Exercice 27

1. $e^{x}+3+2e^{-x}=0 \Leftrightarrow \dfrac{e^{2x}+3e^{x}+2}{e^{x}}=0$

$\Leftrightarrow e^{2x}+3e^{x}+2=0$

Posons : X = e^x l'équation devient :
(X + 1)(X + 2) = 0 $\Leftrightarrow$ X = −1 ou X = −2.

En remplaçant X par e^x on obtient donc :
$e^x = -1$ ou $e^x = -2$ impossible car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$.

2. $e^{2x+1}+3e^{x+1}-4e=0 \Leftrightarrow e^{2x}\times e+3e^{x}\times e-4e=0$
$\Leftrightarrow e(e^{2x}+3e^{x}-4)=0 \Leftrightarrow (e^{2x}+3e^{x}-4)=0.$
Posons X = e^x l'équation devient :
$X^2+3X-4=0 \Leftrightarrow (X-1)(X+4)=0$
$\Leftrightarrow$ X = 1 ou X = −4
$S_{\mathbb{R}} = \{0\}$.

Exercice 28

1. Posons X = e^x l'inéquation $-2e^{2x}+5e^{x}+3<0$ devient : $-2X^2+5X+3<0$.

(X−3)(−2X−1) < 0.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$-2x^2+5x+3$		−		+		−	

(X−3)(−2X − 1) < 0, X $\in\ ]-\infty ; -\frac{1}{2}[\cup]3;+\infty[$
On a : $e^x \in\ ]-\infty ; -\frac{1}{2}[\cup]3 ; +\infty[$, $e^x \in\ ]3 ; +\infty[$,
$e^x \notin\ ]-\infty ; -\frac{1}{2}[$ car $e^x > 0$.
Ainsi $e^x > 3$ d'où $x > \ln 3$.
Donc : $S_{\mathbb{R}} =]\ln 3 ; +\infty[$.
Posons X = e^x l'inéquation devient :

2. $X^2-3X-4 \leq 0 \Rightarrow (X-4)(X+1) \geq 0$

x	$-\infty$		−1		3		$+\infty$
$-2x^2+5x+3$		−		+		−	

$(X-4)(X+1) \geq 0 \Rightarrow X \in [-1;4] \Rightarrow -1 \leq X \leq 4$
On a : $-1 \leq e^x \leq 4$, ainsi $e^x \leq 4 \Rightarrow x \leq \ln 4$.

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty ; \ln 4[$.

3. Résolution de $(e^x-1)(e^x-4) \leq 0$.
Posons $x = e^x$ l'inéquation $(e^x-1)(e^x-4) \leq 0$ dévient $(x-1)(x-4) \leq 0$.

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$(x-1)(x-4)$		+		−		+	

$x \in [1 ; 4] \Rightarrow -1 \leq x \leq 4$

on a : $1 \leq e^x \leq 4$; $0 \leq x \leq \ln 4$

$S_{\mathbb{R}}$ [0 ; ln4]

Exercice 29

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} e^{\frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$.

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} e^{\frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$.

Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} e^{\frac{1}{x}} = 0$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)e^{-x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} exe^{-x} + \lim\limits_{x \to +\infty} ee^{-x}$
$= 0$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x-1-2e^{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x}\left(\dfrac{x}{e^{x}}-2-\dfrac{1}{e^{x}}\right)$
$= -\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^{x}}-2-\dfrac{1}{e^{x}} = -2$

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{1}{e^x-1} = -\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x-2)e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} 3xe^x + \lim\limits_{x\to-\infty} -2e^x = 0$

  car $\lim\limits_{x\to-\infty} 3xe^x = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{e^x-e}{x-1}$

Posons $f(x) = e^x$. On remarque que $f(1) = e$.

On a donc

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{e^x-e}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$.

$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$ soit $f'(1) = e^1 = e$

d'où $\lim\limits_{x\to 1} \frac{e^x-e}{x-1} = e$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} + 3e^{2x} - 2$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 3e^{2x} = 0$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} + 3e^{2x} - 2 = +\infty$.

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{e^x-1}{x^2}$

On a $\frac{e^x-1}{x^2} = \frac{e^x-1}{x} \times \frac{1}{x}$

or $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{e^x-1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x} = +\infty$

donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{e^x-1}{x^2} = +\infty$.

Exercice 30

Déterminons les nombres réels a et b tels que la fonction F définie par $F(x) = (ax + b)e^x$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
Si F est une primitive de f alors $F'(x) = f(x)$.
Dérivons alors F.
On a alors : $F'(x) = (a + b + ax)e^x$
$\Leftrightarrow F'(x) = (ax + a + b)e^x = f(x)$
Par identification avec $f(x)$ on a :
$(ax + a + b)e^x = (x + 2)e^x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ a+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ 1+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$

D'où $F(x) = (x + 1)e^x$.

Exercice 31

1. Justifions que $\frac{1}{e^x+1} = 1 - \frac{e^x}{e^x+1}$

Calculons $1 - \frac{e^x}{e^x+1}$

On a : $1 - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x+1-e^x}{e^x+1} = \frac{1}{e^x+1}$.

D'où $\frac{1}{e^x+1} = 1 - \frac{e^x}{e^x+1}$.

2. Déterminons une primitive F de

$f(x) = \frac{1}{e^x+1}$ sur $\mathbb{R}$.

On sait que $\frac{1}{e^x+1} = 1 - \frac{e^x}{e^x+1}$

donc une primitive de $f(x) = \frac{1}{e^x+1}$ est :

$F(x) = x - \ln(e^x + 1)$.

Conclusion

Une primitive F de f est : $F(x) = x - \ln(e^x + 1)$.

IV.3. Exercices d'approfondissement

Exercice 32

a) $\begin{cases} 3e^x - 4e^y = 6 \\ 2e^x + e^y = 7 \end{cases}$

Posons $x = e^x$ et $y = e^y$.

On a $\begin{cases} 3x - 4y = 6 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$

On obtient $x = 2$ et $y = 3$.
Par suite $e^x = 2$ et $e^y = 3$ soit $x = \ln 2$ et $y = \ln 3$.
$S = \{(\ln 2 ; \ln 3)\}$.

b) $\begin{cases} e^x e^y = 8 \\ e^x + e^y = 6 \end{cases}$

e^x et e^y sont solutions de l'équation :
$x^2 - 6x + 8 = 0$.
Cette équation a pour solutions 2 et 4.
On a alors $e^x = 2$ et $e^y = 4$, ou $e^x = 4$ et $e^y = 2$.
Ce qui donne $x = \ln 2$ et $y = \ln 4$, ou $x = \ln 4$ et $y = \ln 2$.
$S = \{(\ln 2 ; \ln 4), (\ln 4 ; \ln 2)\}$.

c) $\begin{cases} 2^x - 4\times 2^y = 0 \\ 2^x + 4\times 2^y = 8 \end{cases}$

$2 \times 2^x = 8$
$2^x = 4$
$e^{x\ln 2} = 4$
$x\ln 2 = \ln 4$
$x = \frac{\ln 4}{\ln 2} = \frac{2\ln 2}{\ln 2} = 2$

$2^x - 4 \times 2^y = 0$

$2^2 - 4 \times 2^y = 0$

$2^y = 1$

$y = 0.$

$S = \{(2\ ;\ 0)\}.$

d) $\begin{cases} 3^{x+y} = 4 \\ 3^x + 3^y = 3\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \times 3^y = 4 \\ 3^x + 3^y = 3\sqrt{2} \end{cases}$

3^x et 3^y sont solutions de l'équation

$x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$.

$\Delta = 18 - 16 = 2.$

$x_1 = \dfrac{3\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ et

$x_2 = \dfrac{3\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

Par suite : $3^x = \sqrt{2}$ et $3^y = 2\sqrt{2}$

$e^{x\ln 3} = \sqrt{2}$ et $e^{y\ln 3} = 2\sqrt{2}$

$x = \dfrac{\ln\sqrt{2}}{\ln 3}$ et $y = \dfrac{\ln 2\sqrt{2}}{\ln 3}$

ou bien $3^x = 2\sqrt{2}$ et $3^y = \sqrt{2}$

$e^{x\ln 3} = 2\sqrt{2}$ et $e^{y\ln 3} = \sqrt{2}$

$x = \dfrac{\ln 2\sqrt{2}}{\ln 3}$ et $y = \dfrac{\ln\sqrt{2}}{\ln 3}$

$S = \{(\dfrac{\ln\sqrt{2}}{\ln 3}\ ;\ \dfrac{\ln 2\sqrt{2}}{\ln 3}),(\dfrac{\ln 2\sqrt{2}}{\ln 3}\ ;\ \dfrac{\ln\sqrt{2}}{\ln 3})\}.$

Exercice 33

1. a) Justifions que :

$P(x) = (x + 1)(x - 4)(2x - 1)$

Calculons $(x + 1)(x - 4)(2x - 1)$

$(x + 1)(x - 4)(2x - 1)$

$= (x^2 - 4x + x - 4)(2x - 1)$

$= 2x^3 - x^2 - 8x^2 + 4x + 2x^2 - x - 8x + 4$

$= 2x^3 - 7x^2 - 5x + 4 = P(x)$

D'où $P(x) = 2x^3 - 7x^2 - 5x + 4$.

b) Résolvons dans $\mathbb{R}$, $P(x) \geq 0$

On a : $P(x) \geq 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 4)(2x - 1) \geq 0$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		4		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où $P(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1\ ;\ \frac{1}{2}] \cup [4\ ;\ +\infty[$

$S_{\mathbb{R}} = [-1\ ;\ \frac{1}{2}] \cup [4\ ;\ +\infty[$

2. Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation :

$2e^{3x} - 7e^{2x} - 5e^x + 4 = 0.$

Posons $X = e^x$, l'équation devient donc :

$P(x) = 2X^3 - 7X^2 - 5X + 4$

D'après **1.** $X = -1$ ou $X = 4$ ou $X = \frac{1}{2}$

Soit $e^x = -1$ ou $e^x = 4$ ou $e^x = \frac{1}{2}$

or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.

D'où $x = \ln 4$ ou $x = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$

$S_{\mathbb{R}} = \{\ln 4\ ;\ -\ln 2\}.$

3. Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation :

$2e^{3x} - 7e^{2x} - 5e^x + 4 \geq 0.$

Posons $X = e^x$, l'équation devient donc :

$2X^3 - 7X^2 - 5X + 4 \geq 0$

D'après **1.** $X \in [-1\ ;\ \frac{1}{2}] \cup [4\ ;\ +\infty[$

$\Leftrightarrow e^x \leq \frac{1}{2}$ ou $e^x \geq 4$

$\Leftrightarrow x \leq -\ln 2$ ou $x \geq \ln 4$

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty\ ;\ -\ln 2] \cup [\ln 4\ ;\ +\infty[$

Exercice 34

$f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

1. Déterminons les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition de f.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} = -1$

car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

La droite d'équation $y = -1$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ en $-\infty$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} = 1$

car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$.

La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ en $+\infty$.

2. a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geq 0$, $f'(x) = \left(\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)'$

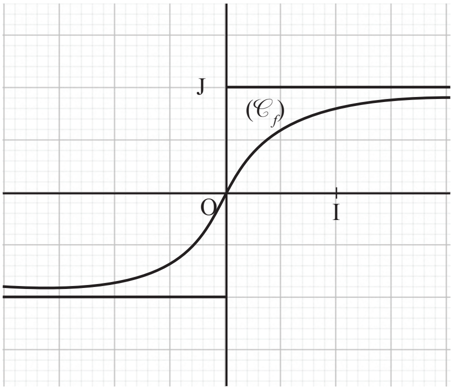
$$f'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$$

b) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1

3)



Exercice 35

Partie A

1. Étudions les variations de la fonction g :

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = (2 - x)e^x$,

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ donc le signe de g est celui de $2 - x$,

$\forall\, x \in \,]-\infty\,;\,2[$, $g'(x) \geq 0$, g est strictement croissante,

$\forall\, x \in \,]2\,;\,+\infty[$, $g'(x) < 0$, g est strictement décroissante.

Tableau de variation.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e^2}+2$	$\searrow$	0

2. a) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que : $-1 < \alpha < 0$.

- Sur $[2\,;\,+\infty[$, $g(x) > 0$, donc $g(x) = 0$ n'a pas de solutions dans $[2\,;\,+\infty[$.
- Sur $]-\infty\,;\,2[$, g est continue et strictement croissante, g est une bijection de $]-\infty\,;\,2[$.
- Sur $g(]-\infty\,;\,2[) = \,]-\infty\,;\,\frac{1}{e^2}+2\,[$, de plus $0 \in \,]-\infty\,;\,\frac{1}{e^2}+2\,[$, donc $g(x) = 0$ admet une solution unique dans $]-\infty\,;\,2[$.

De plus $g(-1) \times g(0) = (-2e + 1) \times 1 < 0$

D'où $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que : $-1 < \alpha < 0$.

b) Donne un encadrement de α à 10^{-1} près.

Par la méthode de balayage, on a :

$-1{,}0 < \alpha < 0{,}9$.

c) Déterminons le signe de g sur $\mathbb{R}$

$\forall\, x \in \,]-\infty\,;\,\alpha[$, $x < \alpha$, $g(x) < g(\alpha)$,

$g(x) < 0$ car g est croissante.

$\forall\, x \in \,]\,\alpha\,;\,+\infty[$, g est continue,

$g(]-\infty\,;\,2[) = \,]0\,;\,\frac{1}{e^2}+2\,[$, donc $g(x) > 0$.

Partie B

1. a) Calculons les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

$f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x + 1 - xe^{-x}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} x\left(2 + \frac{1}{x} - e^{-x}\right) = +\infty$$

car $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2 + \frac{1}{x} - e^{-x}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x + 1 - xe^{-x}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} 2x + 1 - \frac{x}{e^x} = +\infty$$

car $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

b) Calcule f'.

$f'(x) = (x - 1)e^{-x} + 2 = g(x)$

c) Étudions les variation de f et dressons son tableau de variation :
$\forall\, x \in\,]-\infty\,;\,\alpha[$, $g(x) < 0$, donc $f'(x) < 0$ d'où f est strictement décroissante,
$\forall\, x \in\,]\alpha\,;\,+\infty[$, $g(x) > 0$, donc $f'(x) > 0$, f est strictement croissante.

Tableau de variation.

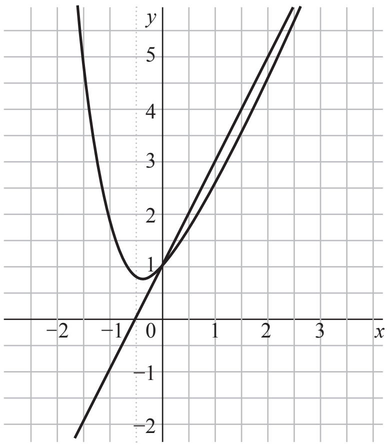
x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

2) a) Démontrons que la droite (D) d'équation : $y = 2x + 1$ est asymptote à (Cf) en $+\infty$.
$f(x) - y = (x - 1)e^{-x} + 2 - 2x + 1 = -xe^{-x}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-y\right) = \lim_{x\to+\infty} -xe^{-x} = 0\,.$$

D'où la droite (D) d'équation : $y = 2x + 1$ est asymptote à (Cf) en $+\infty$.
b) Étudie la position relative de (D) et de (Cf).
On a : $f(x) - y = -xe^{-x}$. Le signe de $f(x) - y$ est celui de $-x$.
$x \in\,]-\infty\,;\,0]$, $f(x) - y > 0$, soit donc $f(x) > y$ alors (Cf) est au-dessus de (D) sur $]-\infty\,;\,0]$.
$x \in [0\,;\,+\infty[$, $f(x) - y < 0$, soit donc $f(x) < y$ alors (Cf) est en dessous de (D) sur $]0\,;\,+\infty]$.

3)

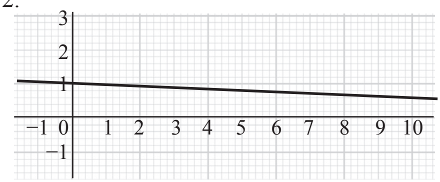


IV.4. Situation d'évaluation

Exercice 36

1. Comme t désigne le nombre d'années, la fonction A : $t \mapsto 0{,}95^t$ est définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.
$\forall\, t \geq 0$, $A'(t) = (\ln 0{,}95) \times 0{,}95^t$.
Comme $\ln 0{,}95 < 0$ et $0{,}95^t > 0$,
on a 0, $A'(t) < 0$ et A est strictement décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

2.



3. Il s'agit de trouver t tel que :

$A(t) = \dfrac{1}{2}A(0)$

$0{,}95^t = \dfrac{1}{2}$

$t = \dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}95}$

$t \simeq 13{,}51$.

Ce sera dans 14 ans.

Leçon 8 Nombres complexes et géométrie du plan

IV. Exercices
IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

Soit K le milieu du segment [AB].

1) $z_k = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{2-3i-1+i}{2} = \dfrac{1}{2} - i$

2) $z_k = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{7+31+9i}{2} = 19 + \dfrac{9}{2}i$

3) $z_k = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{8+5i-5i}{2} = 4$

Exercice 2

1) $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 3 - 2i - (1+i) = 4 - 3i$;

2) $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 5 + 3i - \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i\right)$
$= \dfrac{11}{2} + \dfrac{3}{2}i$

3) $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 1 + i\sqrt{3} - (-3) = 4 + i\sqrt{3}$

Exercice 3

1) $AB = |z_B - z_A| = |-3+4i| = 5$
2) $AB = |z_B - z_A| = |24+9i| = 3\sqrt{73}$
3) $AB = |z_B - z_A| = |-8-10i| = 2\sqrt{41}$

Exercice 4

C'est la réponse a) qu'il faut entourer.

Exercice 5

1) $\text{Mes}\left(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{\mathbf{AB}}}\right) = \text{Arg}(z_B - z_A) = \text{Arg}(1+i) = \dfrac{\pi}{4}$

2) $\text{Mes}\left(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{\mathbf{AB}}}\right) = \text{Arg}(z_B - z_A)$
$= \text{Arg}\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \dfrac{2\pi}{3}$

3) $\text{Mes}\left(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{\mathbf{AB}}}\right) = \text{Arg}(z_B - z_A) = \text{Arg}(10) = \pi$

Exercice 6

1) $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = \text{Arg}\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$
$= \text{Arg}(-1+i) = \dfrac{3\pi}{4}$

2) $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = \text{Arg}\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \text{Arg}(4) = 0$

3) $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = \text{Arg}\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$
$= \text{Arg}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right) = -\dfrac{5\pi}{6}$

Exercice 7

1) $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}}\right) = \text{Arg}\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \text{Arg}(-2i)$
$= -\dfrac{\pi}{2}$

2) $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}}\right) = \text{Arg}\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) =$
$\text{Arg}(-1+i) = \dfrac{3\pi}{4}$

Exercice 8

1) $|z - (4-3i)| = 2 \Leftrightarrow |z - z_A| = 2 \Leftrightarrow AM = 2$, avec $A(4-3i)$
L'ensemble des points M est le cercle de centre A et de rayon 2.

2) $|z + 1 - 2i| = 3 \Leftrightarrow |z - (-1+2i)| = 3$
$\Leftrightarrow |z - z_B| = 3 \Leftrightarrow BM = 2$, avec $B(-1\ ;\ 2)$
L'ensemble des points M est le cercle de centre B et de rayon 3.

3) $|z + 7i| = |z - 9 + i| \Leftrightarrow |z - (-7i)|$
$= |z - (9-i)| \Leftrightarrow |z - z_E| = |z - z_F| \Leftrightarrow$
$ME = MF$, avec $E(-7i)$ et $F(9-i)$; $|z+8+4i|=|z|$.
L'ensemble des points M est la médiatrice du segment [EF].

4) $|z + 8 + 4i| = |z| \Leftrightarrow |z - (-8-4i)| = |z| \Leftrightarrow$
$MG = MO$, avec $G(-8-4i)$
L'ensemble des points M est la médiatrice du segment [OG].

Maths Tle D corrigé 06102021.indd 62 06/10/2021 09:48

Exercice 9

Le cercle de centre A et de rayon 1	$\lvert 2z+2+2i\rvert = 4$
La médiatrice du segment [AB]	$\lvert z-1-i\rvert = 1$
Le cercle de centre C et de rayon 2	$\lvert z-1-i\rvert = \lvert z+2i\rvert$
La médiatrice du segment [CD]	$\lvert z+i\rvert = \lvert z+1+i\rvert$

Exercice 10

Le triangle ABC est un triangle rectangle en A si et seulement si	$\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}^*$
Le triangle ABC est un triangle rectangle et isocèle en A si et seulement si	$\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in i\mathbb{R}^*$
Le triangle ABC est un triangle équilatéral si et seulement si	$\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \{-i, i\}$
Les points A, B et C sont alignés si et seulement si	$\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \{e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{-i\frac{\pi}{3}}\}$

Exercice 11

1) $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \dfrac{2+i}{-1-2i} = \dfrac{(2+i)(-1+2i)}{4+1}$
$= \dfrac{1}{5}(4+3i)$ et $\left| = \dfrac{1}{5}(4+3i) \right| = 1.$
Donc le triangle ABC est un triangle isocèle

2) $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \dfrac{1-2i}{2+i} = \dfrac{(1-2i)(2-i)}{4+1}$
$= \dfrac{1}{5}(4+3i).$
Donc le triangle ABC est un triangle rectangle et isocèle en A.

3) $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \dfrac{2+\frac{\sqrt{3}}{2}i}{2-\frac{\sqrt{3}}{2}i} = \dfrac{4+i\sqrt{3}}{4+i\sqrt{3}}$
$= \left|\dfrac{4+i\sqrt{3}}{4+i\sqrt{3}}\right| = 1$
Donc le triangle ABC est un triangle isocèle

$\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2i} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}.$
Donc le triangle ABC est un triangle équilatéral.

4) $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \dfrac{2i}{\sqrt{3}+i} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$
$\left|\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1$
Le triangle ABC est un triangle isocèle.
$\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$, donc ABC est un triangle équilatéral.

Exercice 12

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{3+i}{12+4i} = \frac{1}{4} \times \frac{3+i}{3+i} = \frac{1}{4}$$

et $\dfrac{1}{4} \in \mathbb{R}$. Donc les points A, B et C sont alignés.

Exercice 13

les points P, Q, R et S d'affixes respectives z_P, z_Q, z_R et z_S sont cocycliques si et seulement si	$\dfrac{z_Q - z_S}{z_R - z_Q} \times \dfrac{z_Q - z_P}{z_R - z_P} \in \mathbb{R}^*$	
	$\dfrac{z_Q - z_S}{z_P - z_S} \times \dfrac{z_P - z_R}{z_Q - z_R} \in \mathbb{R}^*$	×
	$\dfrac{z_P - z_Q}{z_R - z_Q} \times \dfrac{z_S - z_P}{z_R - z_P} \in \mathbb{R}^*$	

Exercice 14

$$\frac{b-a}{c-a} = \frac{-3+9i}{2+4i} = \frac{3}{2} \times \frac{-1+3i}{1+2i} = \frac{3}{2}(1+i)$$

et $\dfrac{b-d}{c-d} = \dfrac{3+9i}{8+4i} = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1+3i}{2+i} = \dfrac{3}{4}(1+i)$

Maths Tle D corrigé 06102021.indd 63 06/10/2021 09:48

on a : $\dfrac{b-a}{c-a} \div \dfrac{b-d}{c-d} = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{4}{3} = 2 \in \mathbb{R}$.

Donc les points A, B, C et D sont cocycliques.

Exercice 15

1) $z' = z - i$

2) $z' = z + 8$

3) $z' = z - 12 + 7i$

Exercice 16

1) $z' - (2 - 3i) = -(z - (2 - 3i))$, c'est-à-dire $z' = -z + 4 - 6i$.

2) $z' - 0 = -(z - 0)$, c'est-à-dire $z' = -z$.

3) $z' - (1 + \frac{5}{7}i) = -(z - (1 + \frac{5}{7}i))$, c'est-à-dire. $z' = -z + 2 + \frac{10}{7}i$.

Exercice 17

1) $z' - (-1 - i) = 4(z - (-1 - i))$, c'est-à-dire $z' = 4z + 3 + 3i$.

2) $z' - 0 = -5(z - 0)$, c'est-à-dire $z' = -5z$.

3) $z' - 5 = \sqrt{2}\,(z - 5)$, c'est-à-dire $z' = \sqrt{2}\,z - 5(1 - \sqrt{2}\,)$.

Exercice 18

1) $z' - (1 - i) = e^{i\frac{\pi}{4}}(z - (1 - i))$.

2) $z' - 0 = e^{i\frac{\pi}{2}}\,(z - 0)$, c'est-à-dire $z' = iz$.

3) $z' - (-2) = e^{i\frac{2\pi}{3}}\,(z - (-2))$.

Exercice 19

Il faut entourer les numéros 1 ; 2 ; 4 et 7.

Exercice 20

1) $z' - (1 + i) = 5\,e^{i\frac{3\pi}{4}}(z - (-1 + i))$.

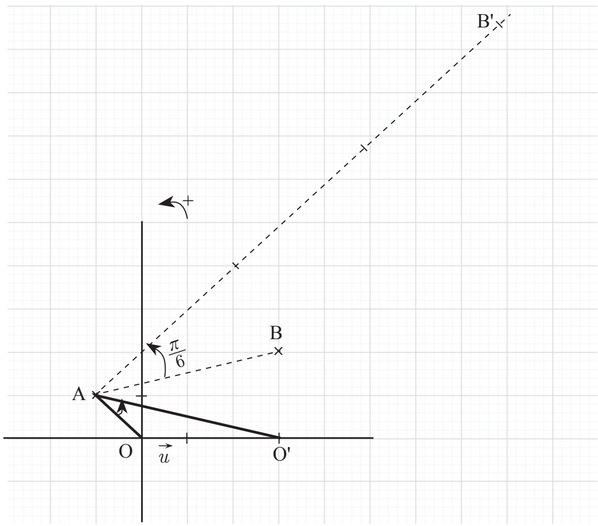
2) $z' - 0 = 2\,e^{i\frac{5\pi}{6}}\,(z - 0)$, c'est-à-dire $z' = (\sqrt{3} - i)z$.

3) $z' - i = \frac{4}{5}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}\,(z - i)$.

Exercice 21

Soit S la similitude directe de centre $A(-1 + i)$, de rapport 3 et d'angle $\frac{\pi}{6}$

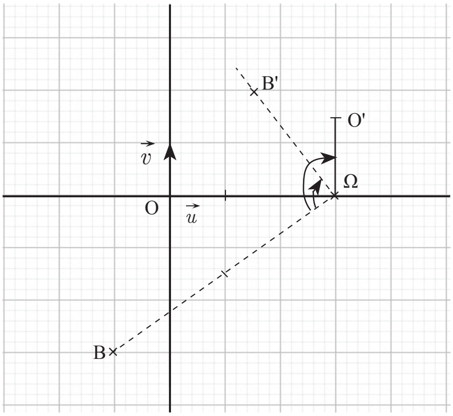
Construis à la règle et au compas l'image du point O et celui du point $B(3 + 2i)$ par S.



Exercice 22

Soit S la similitude directe de centre $\Omega(3)$, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Construis à la règle et au compas l'image du point O et celui du point $B(-1-3i)$ par S.



Exercice 23

1) z' est de la forme $z' = z + b$, avec $b \in \mathbb{C}$, donc f la translation de vecteur $\vec{w}\left(-\frac{4}{5}+i\right)$.

2) z' est de la forme $z' = z + b$, avec $b \in$ C, donc f la translation de vecteur $\vec{w}(i\sqrt{3})$.

3) z' est de la forme $z' - \omega = -(z - \omega)$, donc f la symétrie centrale de centre le point Ω d'affixe $\omega = 2 - i$.

4) z' est de la forme $z' - \omega = k(z - \omega)$, donc f l'homothétie de centre le point Ω d'affixe $\omega = -3 + 4i$ et de rapport 5.

5) z' est de la forme $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$, donc f la rotation de centre le point Ω d'affixe $\omega = 1 + 3i$ e d'angle $\frac{\pi}{6}$.

6) z' est de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{R}^*$. Donc f est l'homothétie de rapport 2 et de centre le point A d'affixe $\frac{-5+i}{1-2} = 5 - i$.

7) z' est de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{R}^*$. Donc f est l'homothétie de rapport –1 et de centre le point B d'affixe $\frac{13+\frac{3}{7}i}{1-(-1)} = \frac{13}{2} + \frac{3}{14}i$.

C'est la symétrie centrale de centre B.

8) z' est de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}$ et $|a| = 1$. Donc f est la rotation d'angle $\arg(a) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$ et de centre le point d'affixe $\frac{b}{1-a} = \frac{-2+2i}{1-(-i)} = \frac{-2+2i}{1+i}$

$= \frac{(-2+2i)(1-i)}{1+1} = +2i$.

9) z' est de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}$ et $|a| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$. Donc f est la rotation d'angle $\text{Arg}(a) = \text{Arg}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ et de centre le point d'affixe $\frac{b}{1-a} = \frac{-2i}{1-\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

$= \frac{-2i}{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-4i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{-4i(1+i\sqrt{3})}{1+3}$

$= \frac{4(\sqrt{3}-i)}{4} = (\sqrt{3}-i)$.

10) z' est de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}$ et $|a| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \neq 1$. Donc f est la similitude directe de rapport $|a| = \sqrt{2}$, d'angle $\text{Arg}(a) = \text{Arg}(-1+i) = \frac{3\pi}{4}$ et de centre le point d'affixe $\frac{b}{1-a} = \frac{6+i}{1-(-1+i)} = \frac{6+i}{2-i}$

$= \frac{(6+i)(2+i)}{4+1} = \frac{11+8i}{5}$

11) z' est de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}$ et $|a| = \sqrt{3+1} = 2 \neq 1$. Donc f est la similitude directe de rapport $|a| = 2$,

d'angle $\text{Arg}(a) = \text{Arg}(\sqrt{3}-i) = -\frac{\pi}{6}$ et de centre le point d'affixe $\frac{b}{1-a} = \frac{-1-i}{1-(\sqrt{3}-i)}$

$= \frac{-1-i}{1-\sqrt{3}+i} = \frac{(-1-i)(1-\sqrt{3}-i)}{(1-\sqrt{3})^2+1}$

$= \frac{-2+\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{(1-\sqrt{3})^2+1}$

12) z' est de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}$ et $|a| = \sqrt{1+3} = 2 \neq 1$.

Donc f est la similitude directe de rapport $|a| = 2$, d'angle $\text{Arg}(a) = \text{Arg}(1-i\sqrt{3})$

$= -\frac{2\pi}{3}$ et de centre le point d'affixe

$\frac{b}{1-a} = \frac{0}{1-(1-i\sqrt{3})} = 0$.

Maths Tle D corrigé 06102021.indd 65 06/10/2021 09:48

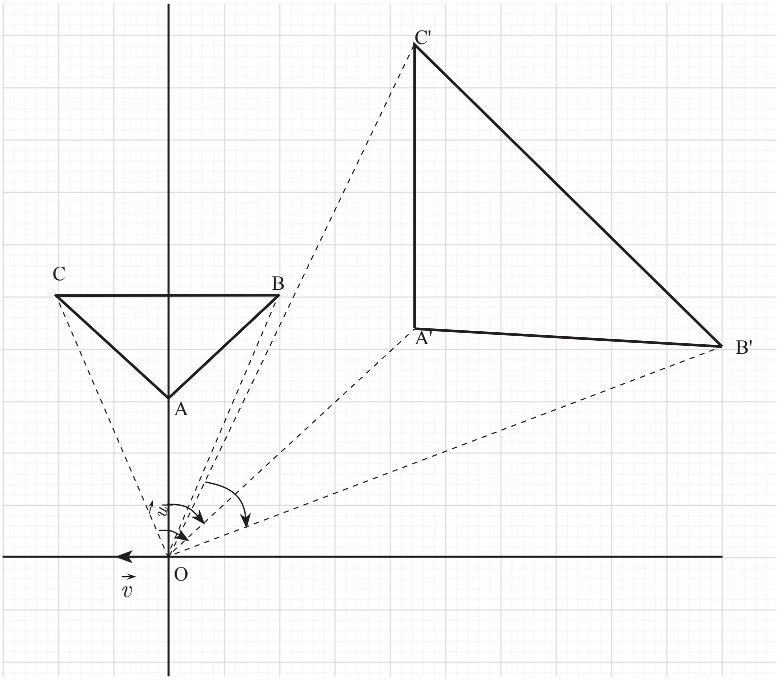
IV.2. Exercices de renforcement

Exercice 24

1) $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{2-2i}{2+2i} = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{1+1}$

$= \frac{-2i}{2} = -i$. Donc ABC est un triangle rectangle et isocèle en A.

2)



Exercice 25

ABCD est un parallélogramme ssi $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \overrightarrow{\mathbf{CD}}$

ssi $z_B - z_A = z_C - z_D$

ssi $z_D = z_C - z_B + z_A$

ssi $z_D = 4 + 4i$

Exercice 26

On a : $z_A = 1$, $z_B = i\sqrt{3}$ et $z_C = -1$

a) L'écriture complexe de la rotation de centre A et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ est :

$z' - 1 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}(z-1)$.

b) L'écriture complexe de l'homothétie de centre B et de rapport 7 est :

$z' - i\sqrt{3} = 7(z - i\sqrt{3})$, soit $z' = 7z - 6i\sqrt{3}$

c) On a $z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. Donc l'écriture complexe de la symétrie centrale de centre I est : $z' - \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = -\left(z - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$

d) On a $\overrightarrow{\mathbf{BC}}\begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Donc l'écriture complexe de la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathbf{BC}}$ est :

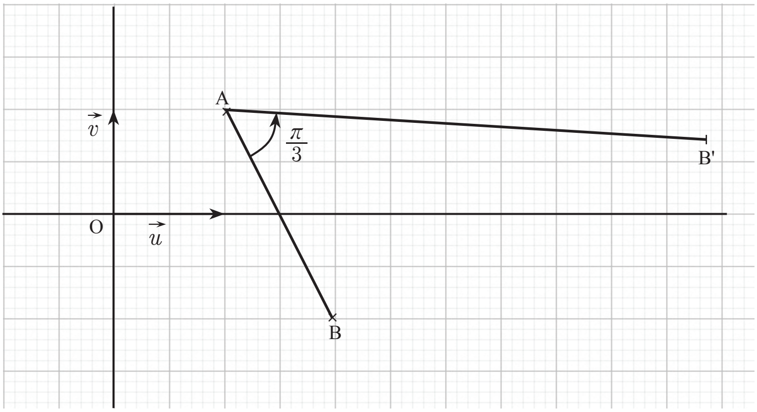
$z' = z - 1 - i\sqrt{3}$

Maths Tle D corrigé 06102021.indd 66 06/10/2021 09:48

Exercice 27

1) Construction de l'image B' du point B(2 ; −1) par s.

$$s(B) = B' \Leftrightarrow \begin{cases} AB' = 2AM \\ mes\left(\widehat{\overrightarrow{\mathbf{AB}}, \overrightarrow{\mathbf{AB'}}}\right) = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$



2. a) L'écriture complexe de s est :

$z' - (1 + i) = 2\, e^{-i\frac{2\pi}{3}} (z - (1 + i))$, soit

$z' = (-1 - i\sqrt{3})z + 2 - \sqrt{3} + (2 + \sqrt{3})i$

b) $z_{B'} = (-1 - i\sqrt{3})z_B + 2 - \sqrt{3} + (2 + \sqrt{3})i$

$= (-1 - i\sqrt{3})(2 - i) + 2 - \sqrt{3} + (2 + \sqrt{3})i$

$= -2 - \sqrt{3} + (1 - 2\sqrt{3})i + 2 - \sqrt{3} + (2 + \sqrt{3})i$

$= -2\sqrt{3} + (3 - \sqrt{3})i$

Donc $B(-2\sqrt{3}\ ;\ 3 - \sqrt{3})$

Exercice 28

1) Soit s cette similitude directe. Son écriture complexe est de la forme : $z' = az + b$,avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

$$\begin{cases} s(A) = C \\ s(B) = D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_C = az_A + b \\ z_D = az_A + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2 - i)a + b = 1 \\ (-1 + 2i)a + b = 1 + 6i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3 - 3i)a = -6i \\ b = 1 - (2 - i)a \end{cases}$$

L'écriture complexe de s est : $z' = (1 - i)z + 3i$.

2) Les éléments caractéristiques s sont :

– son angle : $\mathrm{Arg}(1 - i) = -\dfrac{\pi}{4}$

– son rapport : $|1 - i| = \sqrt{2}$

– son centre : le point d'affixe $\dfrac{3i}{1 - (1 - i)} = 3$

Exercice 29

1) $Z = \dfrac{z - 2 + i}{z + 2i} = \dfrac{x + iy - 2 + i}{x + iy + 2i}$

$= \dfrac{[(x-2)+(y+1)i][x-(y+2)i]}{x^2 + (y+2)^2}$

$Z = \dfrac{x(x-2) + (y+1)(y+2)}{x^2 + (y+2)^2}$

$+ \dfrac{i[x(y+1) - (x-2)(y+2)]}{x^2 + (y+2)^2}$

$= \dfrac{x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2}{x^2 + (y+2)^2} + i\dfrac{-x + 2y + 4}{x^2 + (y+2)^2}$

Donc $\mathrm{Re}(Z) = \dfrac{x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2}{x^2 + (y+2)^2}$ et

$\mathrm{Im}(Z) = \dfrac{-x + 2y + 4}{x^2 + (y+2)^2}$

a) $M \in (E) \Leftrightarrow \mathbb{Z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(Z) = 0$

$\Leftrightarrow -x + 2y + 4 = 0$ et $x \neq 0$; $y \neq -2$.

E est la droite d'équation : $-x + 2y + 4 = 0$ privée du point $A(-2i)$.

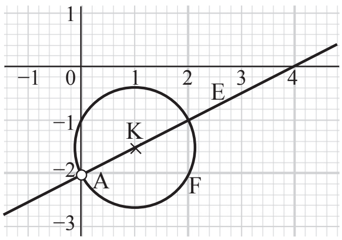
Maths Tle D corrigé 06102021.indd 67 06/10/2021 09:48

b) $M \in F \Leftrightarrow \mathbb{Z} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\mathrm{Re}(Z) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$

F est le cercle de centre $K\left(1\,;-\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$ privé du point $A(-2i)$



Exercice 30

1) $|2z - 6 + 3i| = 1 \Leftrightarrow \left|z - \left(3 - \frac{3}{2}i\right)\right| = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow |z - z_A| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow AM = \frac{1}{2}$,

avec $A\left(3 - \frac{3}{2}i\right)$

L'ensemble cherché est le cercle de centre $A\left(3 - \frac{3}{2}i\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$

2) $|\overline{z} - 2 + i| = 5 \Leftrightarrow \left|\overline{\overline{z} - 2 + i}\right| = 5$

$\Leftrightarrow |z - 2 - i| = 5 \Leftrightarrow BM = 5$, avec $B(2 + i)$

L'ensemble cherché est le cercle de centre $B(2 + i)$ et de rayon 5.

3) $|z + 8 + i| = |\overline{z} + 7i| \Leftrightarrow |z + 8 + i| = |z - 7i|$

$\Leftrightarrow EM = FM$, avec $E(-8\,; -i)$ et $F(7i)$

L'ensemble cherché est la médiatrice du segment [EF].

Exercice 31

1) $\frac{c-b}{a-b} = \frac{\sqrt{3}-i}{-2i} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Donc le triangle ABC est équilatéral.

2. a) $\frac{d-a}{c-a} = \frac{2 - 2i\sqrt{3}}{-i-\sqrt{3}}$

$= \frac{2(1 - i\sqrt{3})(-\sqrt{3} + i)}{1+3}$

$= \frac{2(-\sqrt{3} + i + 3i + \sqrt{3})}{4} = 2i.$

b) Le triangle ACD est rectangle en A.

3) L'écriture complexe de $r_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}$ est :

$z' - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_A)$,

soit $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - i\sqrt{3})$.

Donc $z_E = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2 + \sqrt{3} - 2i\sqrt{3})$

$+ \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - i\sqrt{3}) = 4 + \sqrt{3}$

4) L'écriture complexe de $t_{\overrightarrow{AC}}$ est :

$z' = z + z_{\overrightarrow{AC}} = z - \sqrt{3} - i$

Donc $z_F = z_D - \sqrt{3} - i = 2 - (1 + 2\sqrt{3})i$

$BE = |4 + \sqrt{3} - i| = \sqrt{20 + 8\sqrt{3}}$;

$BF = |2 - (1 + 2\sqrt{3})i - i| = \sqrt{20 + 8\sqrt{3}}$ et

$EF = |2 + \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})i| = \sqrt{20 + 8\sqrt{3}}$.

On a BE = BF = EF, donc le triangle BEF est équilatéral.

IV.3. Exercices d'approfondissement

Exercice 32

1. a) $B_1 = h_{(A,2)}(B) \Leftrightarrow z_{B_1} - z_A = \sqrt{2}\,(z_B - z_A)$

$z_{B_1} - i = \sqrt{2}\,(2 - i) \Leftrightarrow z_{B_1} = 2\sqrt{2} + (1 - \sqrt{2})i$.

b) $B' = r_{\left(A;\frac{\pi}{4}\right)}(B_1) \Leftrightarrow z_{B'} - z_A = e^{-i\frac{\pi}{4}}(z_{B_1} - z_A)$

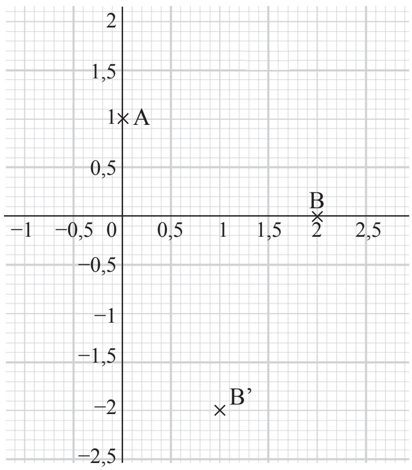
$\Leftrightarrow z_{B'} - i = e^{-i\frac{\pi}{4}}(2\sqrt{2} + (1 - \sqrt{2})i - i)$

$\Leftrightarrow z_{B'} - i = e^{-i\frac{\pi}{4}}(2\sqrt{2} - i\sqrt{2})$

$\Leftrightarrow z_{B'} - i = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i) \times \sqrt{2}\,(2 - i)$

$\Leftrightarrow z_{B'} = (1 - i)(2 - i) + i = 1 - 2i$

Plaçons les points A, B et B'.



2. a) $(1-i)z_B - 1 = (1-i)\times 2 - 1$
$= 2 - 2i - 1 = 1 - 2i = z_{B'}$
Donc f(B) = B'.

b) z' est de la forme $z' = az + b$ avec a $\in \mathbb{C}$ et $|a| = |1-i| = \sqrt{2} \neq 1$.

Donc f est la similitude directe :
- de rapport : $|a| = \sqrt{2}$;
- d'angle $\arg(\alpha) = -\frac{\pi}{4}\left(\text{car} \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right.$ et $\left.\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4}\right)$
- de centre d'affixe : $\frac{b}{1-a} = \frac{-1}{1-(1-i)}$
$= \frac{-1}{i} = i.$

Le centre est donc A.

c) Pour tout nombre complexe z distinct de i, on a :

$\frac{z'-z}{i-z} = \frac{(1-i)z-1-z}{i-z} = \frac{-iz-1}{i-z}$
$= \frac{i(-z+i)}{i-z} = i.$

Interprétation

$\frac{z'-z}{i-z} = i \Rightarrow \left|\frac{z'-z}{i-z}\right| = |i|$ et
$\arg\left(\frac{z'-z}{i-z}\right) = \arg i$
$\Rightarrow \left|\frac{z'-z}{i-z}\right| = 1$ et $\arg\left(\frac{z'-z}{i-z}\right) = \arg i$
$\Rightarrow \frac{MM'}{MA} = 1$ et $mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MM}}\right) = \frac{\pi}{2}$
$\Rightarrow$ MM' = MA et $mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MM}}\right) = \frac{\pi}{2}$

d) De MM' = MA et $mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MM}}\right) = \frac{\pi}{2}$, on déduit que le triangle AMM' est isocèle et rectangle en M.

Pour un point M quelconque distinct de A :
- on trace le segment [MA] ;
- on trace la perpendiculaire à (AM) en M ;
- on place sur cette perpendiculaire le point M' tel que MM' = MA et l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MM}}\right)$ est droit et positif.

Exercice 33

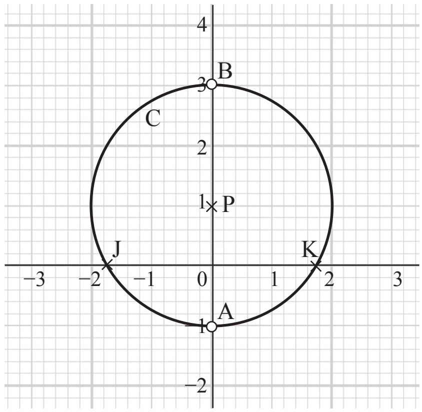
1. a) $f(M) = M \Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow \frac{iz+3}{z+i} = z + iz$
$= iz^2 + 3 \Leftrightarrow z^2 = 3 \Leftrightarrow z = \sqrt{3}$ ou $z = -\sqrt{3}$

Donc f admet deux points invariants J($\sqrt{3}$) et K($-\sqrt{3}$).

Le milieu du segment [AB] est le point P d'affixe $\frac{-i+3i}{2} = i$.

On a :PK = $|\sqrt{3} - i| = 2$; PJ = $|-\sqrt{3} - i| = 2$ et PK = $|-i-i| = 2$

Donc K et J appartiennent au cercle de diamètre [AB].



b) $z_{c'} = \frac{-2i-1+3}{-2+2i} = -1$. Comme $z_{c'} \in \mathbb{R}$, on conclut que C' appartient à l'axe des abscisses.

2. a) $z' \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z') = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{iz+3}{z+i}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow \arg(i) + \arg\left(\frac{z-3i}{z+i}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
mes $\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MM}}\right) = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

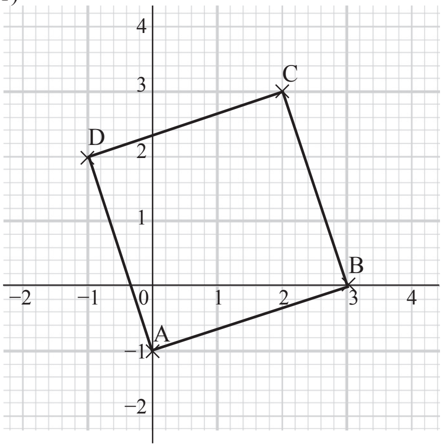
L'ensemble cherché est la droite (AB) privée des points A et B.

b) Soit M d'affixe z un point du cercle de diamètre [AB]privé des points A et B.
À quel ensemble appartient le point M' ?

Maths Tle D corrigé 06102021.indd 69 06/10/2021 09:48

Exercice 34

1)



2. a) Interprétation géométriquement du module :

$\left|\frac{z_C - z_A}{z_D - z_B}\right| = \frac{|z_C - z_A|}{|z_D - z_B|} = \frac{AC}{BD}$.

Interprétation géométriquement de l'argument :

$\text{Arg}\left(\frac{z_C - z_A}{z_D - z_B}\right) = \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{BD};\overrightarrow{AC}}\right)$

b) $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_B} = \frac{2+3i+i}{-1+2i-3} = \frac{2+4i}{-4+2i}$

$= \frac{1+2i}{-2+i} = \frac{(1+2i)(-2-i)2+4i}{4+1} = i$.

3) $\frac{AC}{BD} = |-i| = 1$, donc AC = BD.

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{BD};\overrightarrow{AC}}\right) = \text{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}$,

donc $\overrightarrow{\mathbf{BD}} \perp \overrightarrow{\mathbf{AC}}$.

Les diagonales du quadrilatère ABCD ont la même longueur et ont des supports perpendiculaires. Donc ABCD est un carré.

Exercice 35

1. a) On a :
$i^3 + (6 - 5i)i^2 + (1 - 20i)i - 14 - 5i = -i - 6$
$6 + 5i + i + 20 - 14 - 5i = 0$
Donc i est solution de (E).

b) $\Delta = (6 - 4i) - 4(5 - 14i)$
$= 36 - 48i - 16 - 20 + 56i = 8i$.

Soit $\delta = x - iy$. $\delta^2 = \Delta \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 8 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x^2 = 8 \\ 2y^2 = 8 \\ xy = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 4 \\ xy = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 2 \\ xy = 4 \end{cases}$

On prend $\delta = x - iy$; on a : $\delta_1 = 2 + 2i$ et $\delta_2 = -2 - 2i$.

Ainsi : $z_1 = \frac{-6+4i-2-2i}{2} = -4 + i$ et

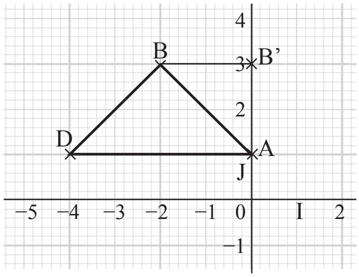
$z_1 = \frac{-6+4i+2+2i}{2} = -2 + 3i$.

S = $\{-4 + i \,;\, -2 + 3i\}$.

c) On a : $z^3 + (6 - 5i)\,z^2 + (1 - 20i)z - 14 - 5i$
$= (z - i)(z^2 + (6 - 4i)z + 5 - 14i)$ (utiliser la division euclidienne ou les coefficients indéterminés).

Donc $z^3 + (6 - 5i)\,z^2 + (1 - 20i)z - 14 - 5i = 0$
$\Leftrightarrow z = i$ ou $z^2 + (6 - 4i)z + 5 - 14i = 0$
$\Leftrightarrow z = i$ ou $z = -4 + i$ ou $z = -2 + 3i$
S = $\{i \,;\, -4 + i \,;\, -2 + 3i\}$.

2. a)



b) $Z = \frac{u-v}{t-v} = \frac{2-2i}{-2-2i} = \frac{-1+i}{1-i}$

$= \frac{(-1+i)(1-i)}{1+1} = i$

c) $Z = i \Longrightarrow \left|\frac{u-v}{t-v}\right| = |\,i\,|$ et $\text{Arg}\left(\frac{u-v}{t-v}\right)$

$= \text{Arg}(i) \Longrightarrow \frac{BA}{BD} = 1$ et $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BA}}\right) = \frac{\pi}{2}$

Donc le triangle BAD est rectangle et isocèle en B.

3. a) Donc le triangle BAD est rectangle et isocèle en B et a pour image B'AB par S.
Donc le triangle ABB' est rectangle et isocèle en B'.

b) Programme de construction de B'

- tracer la médiatrice de [AB] ;
- tracer le cercle de diamètre [AB] ;
- le point B' est le point d'intersection de la médiatrice et du cercle tel que

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AB'}}\right) = \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}}\right)$.

4. a) L'écriture complexe de S est de la forme :
z' = az + b, avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

$$\begin{cases} S(A) = A \\ S(B) = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_A = az_A + b \\ z_B = az_D + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} ia + b = i \\ (-4+i)a + b = -2+3i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2}(1-i) \\ b = \frac{1}{2}(-1+i) \end{cases}$$

L'écriture complexe de s est :

$$z' = \frac{1}{2}(1-i)z + \frac{1}{2}(-1+i)$$

b) L'affixe de B' est :

$$z_{B'} = \frac{1}{2}(1-i)z_B + \frac{1}{2}(-1+i)$$
$$= \frac{1}{2}(1-i)(-2+3i) + \frac{1}{2}(-1+i) = 3i$$

IV.4. Situation d'évaluation

Exercice 36

Pour tout entier naturel n, on note An le point d'affixe z_n définie par : $z_0 = 1$ et

$$z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z_n.$$

• Démontrons que, pour tout entier naturel n, A_{n+1} est l'image de A_n par une similitude directe

On a $z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z_n$. Cette égalité est de la forme : $z' = az + b$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

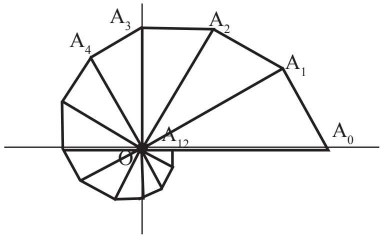
Donc A_{n+1} est l'image de A_n par la similitude directe S de centre O, de rapport

$\left|\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right| = \frac{\sqrt{3}}{4}$ et d'angle

$\text{Arg}\left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\pi}{6}$.

• Construction

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct,
- on place successivement les points A_0 d'affixe 1, $A_1 = S(A_0)$, $A_2 = S(A_1)$, A_3 $S(A_2)$,…, $A_{12} = S(A_{11})$;
- on trace la ligne brisée $A_0A_1A_2A_3\ldots A_{12}$;
- on trace les segments $[A_0A_1]$, $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, … , $[A_{11}A_{12}]$.



Leçon 9 Suites numériques

IV. Exercices

IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

$u_n = n^2 + n + 1$.
$u_0 = 1$, on a : 1 est impair.
• Supposons qu'il existe un entier naturel $k > 0$ tel que u_k soit impair.
Démontrons que u_{k+1} est impair.
$u_{k+1} = (k+1)^2 + (k+1) + 1 = (k^2 + k + 1) + 2(k+1)$
$= u_k + 2(k+1)$.
u_k est impair, $2(k+1)$ est pair donc $u_k + 2(k+1)$ est impair. On en déduit que u_{k+1} est impair.
Conclusion : Pour tout entier naturel n,
$u_n = n^2 + n + 1$ est impair.

Exercice 2

• $u_0 = 1$ or $0 \leq 1 \leq 1$
d'où $0 \leq u_0 \leq 1$
Supposons qu'il existe un entier naturel $k > 0$ tel que $0 \leq u_k \leq 1$ et démontrons que :
$0 \leq u_{k+1} \leq 1$.
$0 \leq u_k \leq 1 \Longrightarrow -1 \leq -u_n \leq 0$
$\Longrightarrow e^{-1} \leq e^{-uk} \leq e^0$
$\frac{1}{e} \leq u_{k+1} \leq 1$
$0 \leq u_{k+1} \leq 1$
On conclut que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

Maths Tle D corrigé 06102021.indd 71 06/10/2021 09:48

Exercice 3

$(u_n):\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$

• $u_1 = \sqrt{2+u_0} = \sqrt{7}$. $5 > \sqrt{7}$ donc $u_0 > u_1$ par suite $u_1 < u_0$.

• Supposons qu'il existe un entier naturel $k > 0$ tel que $u_{k+1} < u_k$ et démontrons que :
Démontrons que $u_{k+2} < u_{k+1}$.

Posons $f(x) = \sqrt{2+x}$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}$.
$\forall x \in [0 ; +\infty[, f'(x) > 0$.
f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.
On a : $u_{k+1} = f(u_k)$ et $u_{k+2} = f(u_{k+1})$.
$u_{k+1} < u_k$ donc $f(u_{k+1}) < f(u_k)$.
$u_{k+2} < u_{k+1}$.
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$.
La suite (u_n) est décroissante.

Exercice 4

$\forall x \in [1 ; +\infty[, f(x) = \dfrac{2x-3}{5x-1}$.
$f'(x) = \dfrac{13}{(5x-1)^2} > 0$.
f est strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$.

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\frac{1}{4} \nearrow \frac{2}{5}$

$\forall x \in [1 ; +\infty[, f(x) \geq -\dfrac{1}{4}$ or $u_n = f(n)$, donc
$\forall n \geq 1,\ u_n \geq -\dfrac{1}{4}$.
(u_n) est donc minorée par $-0{,}25$ à partir du rang 1.

Exercice 5

$-n + \sqrt{1+n^2} = \dfrac{1}{n+\sqrt{1+n^2}}$ et
$n+\sqrt{1+n^2} \geq 2n$ pour $n = 0$, $u_0 = 1 \leq 1$ et pour $n \geq 1$, $n+\sqrt{1+n^2} \geq 2$ c'est-à-dire
$\dfrac{1}{n+\sqrt{1+n^2}} \leq \dfrac{1}{2} < 1$, On conclut que la suite numérique (u_n) définie par
$u_n = -n + \sqrt{1+n^2}$

Exercice 6

$u_0 = 1$ or $1 \leq 1 \leq 2$ d'où $1 \leq u_0 \leq 2$
Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que : $1 \leq u_n \leq 2$.
$1 \leq u_n \leq 2 \Rightarrow \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{u_n} \leq 1$
$\Rightarrow \dfrac{3}{2} \leq 1 + \dfrac{1}{u_n} \leq 2$ d'où : $1 \leq u_{n+1} \leq 2$.
On conclut que la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$ est bornée par 1 et 2.

Exercice 7

1- Faux
2- Vrai
3- Faux
4- Vrai
5- Vrai

Exercice 8

Les suites convergentes sont :
(v_n), (w_n), (x_n), (y_n) et (t_n).

Exercice 9

1) Posons : $\forall x \in [1 ; +\infty[, f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$.
On a : $u_n = f(n)$, or $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = 1$.
(u_n) est convergente.

2) Posons : $\forall x \in [0 ; +\infty[, g(x) = 2 - x^2$.
On a : $u_n = g(n)$, or $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = -\infty$.
(u_n) est divergente.

3) Posons : $\forall x \in]0 ; +\infty[, h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.
On a : $u_n = h(n)$, or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = 0$.
(u_n) est convergente.

4) Posons : $\forall x \in]0 ; +\infty[, q(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
$q(x) = x \times \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)}$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)} = 1.$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, on a :

$\lim\limits_{x\to+\infty} q(x) = 1\times(+\infty) = +\infty.$

$u_n = q(n)$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = +\infty.$

(u_n) est divergente.

Exercice 10

1- Faux

2- Vrai

3- Faux

4- Faux

5- Vrai

Exercice 11

$$(u_n):\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n - (u_n)^2 \end{cases}$$

1) $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} - u_n = -(u_n)^2 \leq 0$, donc (u_n) est décroissante.

$u_0 = \frac{1}{2}$.

On a : $0 \leq \frac{1}{2} \leq 1$, donc $0 \leq u_0 \leq 1$.

Supposons qu'il existe un entier naturel $k \geq 0$ tel que : $0 \leq u_k \leq 1$.

Démontrons que $0 \leq u_{k+1} \leq 1$.

$$u_{k+1} = u_k - (u_k)^2 = -\left[\left(u_k - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]$$
$$= -\left(u_k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}.$$

Donc $0 \leq u_k \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq u_k - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow 0 \leq \left(u_k - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq -\left(u_k - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq -\left(u_k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}.$$

Donc $0 \leq u_{k+1} \leq \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow 0 \leq u_{k+1} \leq 1$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

3) (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc (u_n) est convergente.

Exercice 12

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + n\sqrt{5}$.

$u_{n+1} = 1 + (n+1)\sqrt{5} = 1 + \sqrt{5} + n\sqrt{5}$.

$u_{n+1} - u_n = (1 + \sqrt{5} + n\sqrt{5}) - (1 + n\sqrt{5}) = \sqrt{5}$.

$u_{n+1} - u_n > 0$ donc (u_n) est croissante.

2) (u_n) est croissante et non majorée donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 13

$u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$. $D_f = \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}$.

(u_n) est convergente, donc la limite l de (u_n) vérifie : $l = l^2 + \frac{3}{16}$.

On a : $l^2 - l + \frac{3}{16} = 0$.

$\Delta = 1 - 4\left(\frac{3}{16}\right) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$\sqrt{\Delta} = \frac{1}{2}$.

$l_1 = \dfrac{1+\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

$l_2 = \dfrac{1-\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0;\frac{1}{4}\right]$ et $\frac{3}{4} \notin \left[0;\frac{1}{4}\right]$.

Donc $l = \frac{1}{4}$.

Conclusion : (u_n) converge vers $\frac{1}{4}$.

Exercice 14

$$(u_n):\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12} \end{cases}$$

1) • f est continue sur $[0 ; +\infty[$

• $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0 ; +\infty[$

• $u_{n+1} = f(u_n)$

Comme (u_n) est convergente, on en déduit que la limite l de (u_n) est solution de l'équation $f(x) = x$.

2) • $f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{x+12} = x$

$\Leftrightarrow x + 12 = x^2$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0.$

$(\Delta) = (-1)^2 - 4(-12) = 1 + 48 = 49$

$\sqrt{\Delta} = 7$.

$x_1 = \frac{1+7}{2} = 4$, $x_2 = \frac{1-7}{2} = -3$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0 ; +\infty[$, $-3 \notin [0 ; +\infty[$.

Donc $l = x_1 = 4$.

(u_n) converge vers 4.

Exercice 15

1) $u_n = -n + \cos n$

$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \cos n \leq 1$.

$-n-1 \leq -n + \cos n \leq -n+1$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} -n-1 = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -n+1 = -\infty$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -n + \cos n = -\infty$.

(u_n) est divergente.

2) $v_n = \dfrac{\sin n}{n}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \sin n \leq 1$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{-1}{n} \leq \dfrac{\sin n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$.

or $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$.

(v_n) converge vers 0.

3) $w_n = \dfrac{2n^2 + \cos n}{n^2 - 1}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \cos n \leq 1$.

Donc $2n^2 - 1 \leq 2n^2 + \cos n \leq 2n^2 + 1$.

$\dfrac{2n^2 + \cos n}{n^2 - 1}$

$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \cos n \leq 1$.

Donc $2n^2 - 1 \leq 2n^2 + \cos n \leq 2n^2 + 1$.

$\dfrac{2n^2 - 1}{n^2 - 1} \leq \dfrac{2n + \cos n}{n^2} \leq \dfrac{2n^2 + 1}{n^2 - 1}$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2 - 1}{n^2 - 1} = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2 + 1}{n^2 - 1} = 2$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2 + \cos n}{n^2 - 1} = 2$.

(w_n) converge vers 2.

Exercice 16

• $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; 4 - \dfrac{3}{n} \leq u_n \leq \dfrac{n^2 - 2}{0,25n^2 + 1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 4 - \dfrac{3}{n} = 4$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2 - 2}{0,25n^2 + 1} = \dfrac{1}{0,25} = 4$,

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

• $\forall n \in \mathbb{N}, \; |v_n - \sqrt{3}| \leq \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{2}{7}\right)^n$

$-1 \leq \dfrac{2}{7} \leq 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - \sqrt{3} = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \sqrt{3}$.

Exercice 17

Affirmations	Réponses
Si $u_0 > 0$ alors (u_n) diverge sur $+\infty$	F
Si r > 0 alors (u_n) diverge sur $-\infty$	V
Si $r = 0$ alors (u_n) converge sur u_0	V

Exercice 18

Les nombres réels non nuls (u_0) et q sont respectivement le premier terme et la raison d'une suite géométrique (u_n).
Relie à chaque élément du tableau de gauche l'élément du tableau de droite correspondant.

Si $q > 1$ et $u_0 > 0$ alors	(u_n) n'a pas de limite
Si $-1 < q < 1$ alors	(u_n) diverge vers $+\infty$
Si $u_0 < 0$ et $q > 1$ alors	(u_n) converge vers 0
Si $q < -1$ alors	(u_n) diverge vers $-\infty$

Exercice 19

Les suites convergentes sont : (u_n) et (w_n).

Exercice 20

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{1}{4}}} = 0\,;\; \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{2^n} = 0\,;$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{1}{4}}}{5^n} = 0\,;\; \lim_{n\to+\infty} \frac{n^5}{\left(\frac{1}{4}\right)^n} = +\infty\,;$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{-3}}{2^n} = 0\,;\; \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{-2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = +\infty\,;$$

IV.2. Exercices de renforcement

Exercice 21

1) • $u_n = \dfrac{1 + 2n + n^2}{2 + n}$

Maths Tle D corrigé 06102021.indd 74 06/10/2021 09:48

Posons : $\forall x \in [0\,;+\infty[,\ f(x)=\dfrac{1+2x+x^2}{2+x}$

$u_n = f(n)$. $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{n\to+\infty} x = +\infty$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

• $v_n = 2+e^{-n}$

Posons : $\forall x \in [0\,;+\infty,\ f(x)=2+e^{-x}$

$v_n = f(n)$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} 2+e^{-x} = 2$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$.

• $(w_n)\ \dfrac{2}{1-\sqrt{n}}$

Posons : $\forall x \in]2\,;+\infty[,\ f(x)=\dfrac{2}{1-\sqrt{x}}$

$w_n = f(n)$. $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\sqrt{x} = -\infty$, donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{1-\sqrt{x}} = 0$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

• $x_n = 1+n+\ln(1+n)$

Posons : $\forall x \in [0\,;+\infty[,\ f(x)=1+x+\ln(1+x)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 1+x=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(1+x)=+\infty$,

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n) = +\infty$.

2) (u_n) est divergente car $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(v_n) est convergente car $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$.

(w_n) est convergente car $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

(x_n) est divergente car $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

Exercice 22

1. a) $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = 2+\ln(u_n)$

$u_0 = 5$ et $u_1 = 2+\ln(5) \approx 3{,}6$; $u_0 > u_1$.

Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que : $u_n > u_{n+1}$ et démontrons que $u_{n+1} > u_{n+2}$.

$u_n > u_{n+1} \Longrightarrow e^2 \times u_n > e^2 \times u_{n+1}$

$\ln(e^2 \times u_n) > \ln(e^2 \times u_{n+1})$ car la fonction ln est strictement croissante et $e^2 u_{n+1} > 0$ et $e^2 u_n > 0$

$\Longrightarrow 2+\ln(u_n) > 2+\ln(u_{n+1})$

$\Longrightarrow u_{n+1} > u_{n+2}$

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > u_{n+1}$.

b) $u_0 = 5 > 3$ d'où $u_0 > 3$.

Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que : $u_n > 3$ et démontrons que $u_{n+1} > 3$.

$u_n > 3 \Longrightarrow \ln(u_n) > \ln 3$

$\Longrightarrow 2+\ln(u_n) > 2+\ln 3 \approx 3{,}09$

$\Longrightarrow u_{n+1} > 3$.

2) La suite (u_n) est décroissante et minorée donc elle est convergente.

Exercice 23

$u_1 = 1$ et $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$

1. a) $u_2 = \dfrac{u_1}{1+u_1} = \dfrac{1}{2}$

$u_3 = \dfrac{u_2}{1+u_2} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3}$

$u_4 = \dfrac{u_3}{1+u_3} = \dfrac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{4}$

b) On conjecture que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{n}$

2) Démontrons par récurrence

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{n}$

$u_1 = 1 = \dfrac{1}{1}$

Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que :

$u_n = \dfrac{1}{n}$ et démontrons que : $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$

$u_n = \dfrac{1}{n} \Longrightarrow u_{n+1} = \dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1+n}{n}}$

$= \dfrac{1}{n} \times \dfrac{n}{1+n} = \dfrac{1}{n+1}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{n}$.

Exercice 24

$u_0 = 0$ et $u_n = n + u_{n-1}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Faisons une démonstration par récurrence

$u_0 = 0 = \dfrac{0(0+1)}{2}$ d'où la condition initiale est vérifiée.

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et vérifions que : $u_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$u_n = n + u_{n-1} \Longrightarrow u_{n+1} = n + 1 + u_n$$
$$= n + 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$
$$= \frac{2(n+1) + n(n+1)}{2}$$
$$u_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Exercice 25

$$u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{4^n}$$

1) Méthode 1

Démontrons par récurrence que

$$u_n = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right)$$

$u_0 = 1 = \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{4}{3}\left(1 - \dfrac{1}{4^{0+1}}\right)$ d'où la condition initiale est vérifiée.

Supposons que : $u_n = \dfrac{4}{3}\left(1 - \dfrac{1}{4^{n+1}}\right)$

et démontrons que $u_{n+1} = \dfrac{4}{3}\left(1 - \dfrac{1}{4^{n+2}}\right)$

$$u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{4^n}$$
$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{4^{n+1}}$$
$$= u_n + \frac{1}{4^n + 1}$$
$$= \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right) + \frac{1}{4^{n+1}}$$
$$= \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right) + \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4^{n+1}}$$
$$= \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{n+1}} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4^{n+1}}\right)$$
$$= \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4 \times 4^{n+1}}\right)$$
$$= \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{n+2}}\right)$$

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{4}{3}\left(1 - \dfrac{1}{4^{n+1}}\right)$

Méthode 2

$$u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{4^n}$$

Posons $x_n = \dfrac{1}{4^n}$

On a : $x_{n+1} = \dfrac{1}{4^{n+1}} = \dfrac{1}{4} x^n$

D'où est x_n le terme général d'une suite géométrique de 1[er] terme

$x_0 = 1$ et de raison $\dfrac{1}{4}$.

On a alors $u_n = x_0 + x_1 + ... + x_n$

$$u_n = \frac{x_{0(1-9^{n+1})}}{1-9} = \frac{1\left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right)}{1 - \frac{1}{4}}$$
$$u_n = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right)$$

2) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{4}{3}$ d'où la suite (u_n) converge $\dfrac{4}{3}$.

Exercice 26

$u_n = 3n$ un multiple de 3

$u_{n+1} = 3 + u_n$

$1963 = 654 \times 3 + 1 = u_{654} + 1$

$2029 = 676 \times 3 + 1 = u_{676} + 1$

Notons S la somme demandée.

$S = u_{655} + ... + u_{676}$

La suite (u_n) est une suite de raison 3.

$$S = \frac{(676 - 655 + 1)}{2}(u_{655} + u_{676})$$

$S = 11(1965 + 2028) = 43.923$

Exercice 27

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 1 - \frac{2}{n} \leq u_n \leq \frac{n^2 + 4}{1 + n^2}$$

$$\lim_{n \to +\infty}\left(1 - \frac{2}{n}\right) = 1\ ;\ \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2 + 4}{1 + n^2} = 1$$

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

Exercice 28

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + n - 1 \end{cases}$$

Pour $n = 0$, $u_0 = 1$

$$\frac{19}{4 \times 3^\circ} + \frac{6 \times 0 - 15}{4} = \frac{19}{4} - \frac{15}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$1 = \frac{19}{4 \times 3^\circ} + \frac{6 \times 0 - 15}{4}.$$

Donc $u_0 = \dfrac{19}{4 \times 3^\circ} + \dfrac{6 \times 0 - 15}{4}$.

Supposons qu'il existe un entier $k \geq 0$ tel que :

$u_k = \dfrac{19}{4\times 3^k} + \dfrac{6\times k - 15}{4}$, démontrons que

$u_{k+1} = \dfrac{19}{4\times 3^{k+1}} + \dfrac{6(k+1)-15}{4}$.

$$u_{k+1} = \frac{1}{3}u_k + k - 1$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{19}{4\times 3^k} + \frac{6k-15}{4}\right) + k - 1$$
$$= \frac{19}{4\times 3^{k+1}} + \frac{2k-5}{4} + k - 1$$
$$= \frac{19}{4\times 3^{k+1}} + \frac{6k-9}{4}$$
$$= \frac{19}{4\times 3^{k+1}} + \frac{6(k+1)-15}{4}$$

donc $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{19}{4\times 3^n} + \dfrac{6n-15}{4}$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{19}{4\times 3^n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6n-15}{4} = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

La suite (u_n) est divergente.

Exercice 29

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} =, \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3} = 1 \text{ et } v_n = \dfrac{1}{1+u_n} \end{cases}$$

1. a) $u_0 = 1 > -1$ condition initiale vérifiée.

Supposons que : $\exists\, n \in \mathbb{N}$, $u_n > -1$ et démontrons que $u_{n+1} > -1$.

$$u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 3} = 1 - \frac{4}{u_n + 3}$$
$$u_n > -1 \Rightarrow u_n + 3 > 2$$
$$\Rightarrow \frac{4}{u_n+3} < 2 \Rightarrow \frac{-4}{u_n+3} > -2$$
$$\Rightarrow 1 - \frac{4}{u_n+3} > -1$$
$$\Rightarrow u_{n+1} > -1$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > -1$.

b) $v_0 = \dfrac{1}{1-u_0} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{0+1}{2}$ condition initiale vérifiée.

Supposons que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{n+1}{2}$ et démontrons $v_{n+1} = \dfrac{n+2}{2}$

$$v_{n+1} = \frac{1}{1+u_{n+1}} = \frac{1}{1 + \dfrac{u_n+1}{u_n+3}} = \frac{u_n+3}{2u_n+2}$$

$v_n = \dfrac{1}{1+u_n} \Longrightarrow u_n = \dfrac{1}{v_n} - 1$ d'où

$$v_{n+1} = \frac{\dfrac{1}{v_n} + 2}{\dfrac{2}{v_n}} = \frac{1}{2} + v_n$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} = \frac{n+2}{2}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > -1$.

2) $u_n = \dfrac{1}{v_n} - 1 = \dfrac{2}{n+1} - 1$

$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{-n+1}{n+1} = \dfrac{1-n}{1+n}$

3) $|u_n + 1| \leq 10^5$

$u_n + 1 = \dfrac{2}{1+n} > 0 \Rightarrow |u_n + 1| = \dfrac{2}{1+n}$

$|u_n + 1| \leq 10^5 \Rightarrow \dfrac{2}{1+n} \leq 10^5$

$\Longrightarrow n \geq 2 \times 105 - 1$

$n_{min} = 0$.

IV.3. Exercices d'approfondissement

Exercice 30

$x \in [1\,;+\infty]$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

1) $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x}$

x	1	e	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	↗	$\dfrac{1}{e}$	↘

2) On déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < \dfrac{1}{e} = f(e)$

$e \approx 2{,}7$

$u_2 = 0{,}34$ et $u_3 = 0{,}36$.

D'où le plus grand des termes de la suite u_n est u_3.

Exercice 31

$u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$

$f(x) = \sqrt{x+6}$

1) 1) $f(3) = 3$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+6}}$

$\Rightarrow f''(x) = -\dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{(x+6)\sqrt{x+6}}$

Donc f' est décroissante et majoré par $f'(0)$ sur $[0\,;+\infty[$, d'où $\forall x \geq 0, 0 \leq f'(x) \leq 0{,}21$

et $f'(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{6}} \approx 0{,}20 \leq 0{,}21$

d'où $\forall x \geq 0, 0 \leq f'(x) \leq 0{,}21$.

Maths Tle D corrigé 06102021.indd 77 06/10/2021 09:48

2) $0 \leq f'(x) \leq 0{,}21 \Longrightarrow |f'(x)| \leq 0{,}21$ d'où d'après le théorème des accroissements finis on a :

$|f(u_n) - f(3)| \leq 0{,}21|u_n - 3|$

$f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(3) = 3$ on a : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} = 3| \leq 0{,}21|u_n - 3|$

3) $|u_1 - 3| \leq 0{,}21|u_0 - 3|$; $|u_2 - 3| \leq 0{,}21|u_1 - 3|$; $|u_{n-1} - 3| \leq 0{,}21|u_{n-2} - 3|$; $|u_n - 3| \leq 0{,}21|u_{n-1} - 3|$

Le produit membre à membre donne :

$|u_n - 3| \leq 0{,}21^n|u_0 - 3|$

Or $u_0 = 0$ d'où : on a :

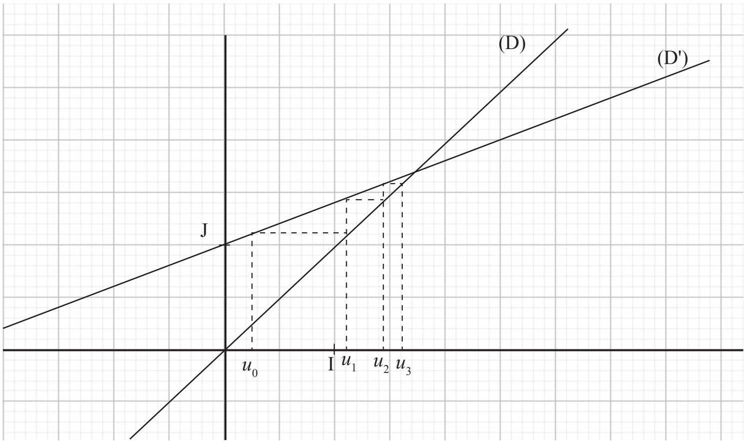
$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 3| \leq 3 \times 0{,}21^n$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 \times 0{,}21^n = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$

Exercice 32

$u_0 = \frac{1}{4}$ et $u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + 1$.

1. a ; 1. b voir figure.



2) $u_0 = \frac{1}{4} < \frac{5}{2}$

Supposons que : $\exists\, n \in \mathbb{N}$,

$u_n < \frac{5}{2}$ et démontrons que $u_{n+1} < \frac{5}{2}$

$u_n < \frac{5}{2} \Longrightarrow \frac{3}{5}u_n + 1 < \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$

$u_{n+1} < \frac{5}{2}$

Conclusion u_n est majoré.

3. a) $v_n = u_n - \frac{5}{2}$

$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{5}{2}$

$= \frac{3}{5}u_n + 1 - \frac{5}{2} = \frac{3}{5}(u_n - \frac{5}{2})$

$v_{n+1} = \frac{3}{5}v_n$ d'où (v_n) est une suite géométrique 1^er terme $v_0 = -\frac{9}{4}$ et de raison $\frac{3}{5}$

b) $v_n = -\left(\frac{3}{5}\right)^n \times \frac{9}{4}$

$u_n = v_n + \frac{5}{2} = \frac{5}{2} - \frac{9}{4}\left(\frac{3}{5}\right)^n$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{2} - \frac{9}{4}\left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{5}{2}$

Exercice 33

$u_0 = 4$ et $v_0 = 9$ et $\forall n \in \mathbb{N}$

$u_{n+1} = \frac{2u_n \times v_n}{u_n + v_n}$, $v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$

1) $u_0 = 4 > 0$ et $v_0 = 9 > 0$ d'où les conditions initiales sont vérifiées.

Maths Tle D corrigé 06102021.indd 78 06/10/2021 09:49

Supposons que $\exists n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$ et démontrons que $u_{n+1} > 0$ et $v_{n+1} > 0$.

$u_n > 0$ et $v_n > 0 \Longrightarrow u_n \times v_n > 0$ et $u_n + v_n > 0$ d'où $\dfrac{2u_n \times v_n}{u_n + v_n} > 0$, on a $u_{n+1} > 0$ et $v_{n+1} > 0$.

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et $v_n > 0$.

2\. a) $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + v_n) - \dfrac{2u_n \times v_n}{u_n + v_n}$

$$= \frac{(u_n + v_n)^2 - 4u_n v_n}{2(u_n + v_n)}$$

$$= \frac{u_n{}^2 + v_n{}^2 + 2u_n v_n - 4unv_n}{2(u_n + v_n)}$$

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$$

b) $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$ or $u_n > 0$ et $v_n > 0$ d'où $v_{n+1} - u_{n+1} \geq 0$ c'est-à-dire que : $v_{n+1} \leq u_{n+1}$

$v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + v_n) - \dfrac{2u_n \times v_n}{u_n + v_n}$

or $\dfrac{2u_n \times v_n}{u_n + v_n} > 0$. On a : $v_{n+1} - u_n \leq \dfrac{1}{2}(u_n + v_n)$

d'où $\dfrac{1}{2}(u_n + v_n) \geq \dfrac{1}{2}(u_n + v_n) - \dfrac{2u_n \times v_n}{u_n + v_n}$

c'est-à-dire que $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(u_n + v_n)$.

c) Faisons une démonstration par récurrence

$v_0 - u_0 = 5 \leq \dfrac{5}{2^0}$

Supposons qu'il existe $n \geq 0$ / : $v_n - u_n \leq \dfrac{5}{2^n}$

Démontrons que $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \dfrac{5}{2^{n+1}}$

$v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$

$= \dfrac{1}{2} \times (v_n - u_n) \times \dfrac{v_n - u_n}{u_n + v_n}$

$= \dfrac{v_n - u_n}{u_n + v_n} \leq 1$ et $v_n - u_n \leq \dfrac{5}{2^n}$

d'où : $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \dfrac{5}{2^{n+1}}$.

3\. a) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} - u_n$

$u_n(v_n - u_n) \geq 0$ d'où la suite (u_n) est croissante.

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{2}(u_n + v_n) - u_n = \dfrac{1}{2}(u_n + v_n) < 0$
d'où la suite (v_n) est décroissante.

b) La suite (u_n) est croissante $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_0$ d'où elle est convergente .

La suite (v_n) est décroissante et $\forall n \in \mathbb{N}, u_0 \leq v_n$ d'où elle est convergente.

c) $\forall n \in \mathbb{N}, v_n - u_n = \dfrac{5}{2^n}$ et $u_n \leq v_n$ et

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{2^n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$

or les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes par conséquent elles ont la même limite 1.

4\. a) $u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + v_n)$

$u_{n+1} v_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \times \dfrac{1}{2}(u_n + v_n) = u_n v_n$

b) La valeur exacte de ℓ est $\sqrt{4 \times 9} = 6$.

Exercice 34

1\. Soit $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = 1.$ Par conséquent

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1.$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1,$ donc u_n converge et

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1.$

2) $v_n = u_1 \times u_2 \times ... \times u_n$

a) $v_1 = u_1 \dfrac{1+2}{2^2} = \dfrac{3}{4} = \dfrac{1+2}{2(1+1)}$ d'où la condition initiale est vérifiée.

Supposons qu'il existe n tel que $v_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$ et démontrons que :

$$v_{n+1} = \frac{(n+1)+2}{2[(n+1)+1]}$$

$$v_{n+1} = u_1 \times u_2 \times ... \times u_n \times u_{n+1}$$

$$= v_n \times u_{n+1}$$

$$= \frac{n+2}{2(n+1)} \times \left[\frac{(n+1)^2 + 2(n+1)}{(n+2)^2}\right]$$

$$= \frac{n+2}{2(n+1)} \times \frac{(n+1)[n+1+2]}{(n+2)^2}$$

$$= \frac{n+3}{2(n+2)^2} = \frac{(n+1)+2}{2[(n+1)+2]}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \dfrac{n+1}{2(n+1)}$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$.

3) $u_n - \dfrac{3}{4} = \dfrac{n^2 + 2n}{(n+1)^2} - \dfrac{3}{4}$

$$= \frac{(n+1)^2-4}{4(n+1)^2} = \frac{(n-1)(n+3)}{4(n+1)^2}$$

$\forall n \geq 1,\ \dfrac{(n-1)(n+3)}{4(n+1)^2} \geq 0$ d'où $\dfrac{3}{4} \leq u_n$

$u_n - 1 = \dfrac{n^2+2n}{(n+1)^2} - 1 = -\dfrac{1}{(n+1)^2} < 0$ d'où $u_n < 1$ on en déduit que :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{3}{4} \leq u_n < 1.$

4) $w_n = \ln(u_1) + \ln(u_2) + ... + \ln(u_n)$

a) D'après 3) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{3}{4} \leq u_n < 1$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(u_n) < 0$, par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n < 0.$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (\ln(u_1) + ... + \ln(u_n))$

$$= \lim_{n\to+\infty} \ln(u_1 \times u_2 \times ... \times u_n)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \ln(v_n)$$

$$= -\ln 2.$$

Exercice 35

$u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n + 1 = \dfrac{2u_n+3}{u_n}$ et

$v_n = \dfrac{u_n-3}{u_n+1}$. On sait que : $u_{n+1} = 2 + \dfrac{3}{u_n}$

1) $u_0 = 1$ et $1 \leq 1 \leq 5$ d'où $1 \leq u_0 \leq 5$

Condition initiale vérifiée

Supposons que : : $\exists\, n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 5$

Démontrons que $1 \leq u_{n+1} \leq 5$

$1 \leq u_n \leq 5 \Longrightarrow \dfrac{1}{5} \leq \dfrac{1}{u_n} \leq 1$

$\Longrightarrow \dfrac{3}{5} \leq \dfrac{3}{u_n} \leq 3$

$\Longrightarrow \dfrac{13}{5} \leq \dfrac{3}{u_n} + 2 \leq 5$

$1 \leq 2{,}6 \leq \dfrac{3+2u_n}{u_n} \leq 5 \Longrightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq 5.$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 5.$

2. a) $v_n = \dfrac{u_n-3}{u_n+1} \Longrightarrow v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-3}{u_{n+1}+1}$

$$v_{n+1} = \frac{\frac{2u_n+3}{u_n}-3}{\frac{2u_n+3}{u_n}+1} = \frac{3-u_n}{3(u_n+1)}$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{u_n-3}{u_n+1}\right)$$

$v_{n+1} = -\dfrac{1}{3}v_n$ d'où la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

b) $v_0 = \dfrac{u_0-3}{u_0+1} = \dfrac{1-3}{1+1} = -1$

$v_n = -\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$

3. a) $v_n = \dfrac{u_n-3}{u_n+1}$

$v_n = \dfrac{u_n-3}{u_n+1}$

$u_n(u_n+1) = u_n - 3$

$u_n(v_n - 1) = -3 - v_n$

$u_n = \dfrac{-3-v_n}{v_n-1} = \dfrac{3+v_n}{1-v_n}$

$$u_n = \frac{-3-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

Exercice 36

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3}{2}(u_n)^2 \end{cases}$$

$(v_n) : v_n = \ln\left(\dfrac{3}{2}u_n\right)$

1) $v_0 = \ln\left(\dfrac{3}{2}u_0\right) = \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$

2) $v_{n+1} = \ln\left(\dfrac{3}{2}u_{n+1}\right) = \ln\left(\dfrac{3}{2}\right) + \ln(u_{n+1})$

$$= \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}u_n^2\right)$$

$$= \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + 2\ln u_n$$

$$= 2\ln\left(\frac{3}{2}\right) + 2\ln u_n$$

$$= 2\ln\left(\frac{3}{2}u_n\right) = 2v_n$$

$v_{n+1} = 2v_n$

(v_n) est une suite géométrique de raison 2.

3) a) $v_0 = \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$, on sait que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 q^n$.

$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \ln\left(\dfrac{3}{2}\right) \times 2^n$.

b) $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right) > 0$ et $2 > 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n = +\infty$.

4) a) $v_n = \ln\left(\frac{3}{2}u_n\right) \Leftrightarrow e^{v_n} = \frac{3}{2}u_n$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{2}{3}e^{v_n}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} v_n = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = +\infty$.

5) a) $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1} = v_0\frac{1-q^n}{1-q}$

$S_n = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\times\frac{1-2^n}{1-2} = -(\ln 3 - \ln 2)(1-2^n)$

$S_n = (\ln 2 - \ln 3)(1 - 2^n)$.

b) $T_n = u_0 \times u_1 \times ... + u_{n-1}$.

$T_n = \left(\frac{2}{3}e^{v_0}\right)\times\left(\frac{2}{3}e^{v_1}\right)\times\left(\frac{2}{3}e^{v_2}\right)\times ... \times\left(\frac{2}{3}e^{v_{n-1}}\right)$

$T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{v_0+v_1+v_2+v_{n-1}}$

$T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n . e^{S_n}$

c) $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n . e^{(1-2^n)\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$

Exercice 37

$\forall x \in]0\,;+\infty[, f(x) = 4 - \frac{1}{4}\ln x$

1) $h(x) = f(x) - x = 4 - \frac{1}{4}\ln x - x$

$\forall x \in]0\,;+\infty[, h'(x) = -\frac{1}{4}\times\frac{1}{x} - 1 = -\left(\frac{1}{4x}+1\right)$

$\forall x \in]0\,;+\infty[, h'(x) < 0$.

h est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

$h(x) = 4 - \left(\frac{1}{4}\ln x + x\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = +\infty$.

Tableau de variation

x	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	
$h(x)$	$+\infty$	$-\infty$

h est continue et strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$. h est une bijection de $]0\,;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$. $0 \in \mathbb{R}$ donc il existe un unique réel $\alpha \in]0\,;+\infty[$ tel que $h(\alpha) = 0$.

Soit l'équation $f(x) = x$, admet une solution unique α.

$h(3) = 4 - \frac{\ln 3}{4} - 3 = 1 - \frac{\ln 3}{4} > 0$

$h(4) = 4 - \frac{\ln 4}{4} - 4 = -\frac{\ln 4}{4} < 0$

donc $\alpha \in]3\,;4[$.

2) a) $I =]3\,;4[$, $f(I) = f(]3\,;4[) =]f(4)\,;f(3)[$

$$\left.\begin{array}{l} f(3) = 4 - \frac{\ln 3}{4} \approx 3{,}72 \\ f(4) = 4 - \frac{\ln 4}{4} \approx 3{,}65 \end{array}\right\} f(I) =]3{,}65\,;3{,}72[$$

On a : $3 < 3{,}65 < 3{,}72 < 4$ donc $f(I) \subset I$.

b) $f'(x) = -\frac{1}{4x}$ et $f''(x) = -\frac{1}{4x^2}$.

x	3	4
$f''(x)$	$+$	
$f'(x)$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{16}$

$\forall x \in I,\ -\frac{1}{12} \le f'(x) \le -\frac{1}{16}$

$$\Rightarrow -\frac{1}{12} \le f'(x) \le +\frac{1}{12}$$

donc $|f'(x)| \le \frac{1}{12}$.

c) $\forall x \in I,\ |f'(x)| \le \frac{1}{12}$

d'après l'inégalité des accroissements finis

$\alpha \in I$, $\forall x \in I$.

$|f(x) - f(\alpha)| \le \frac{1}{12}|x - \alpha|$

or $f(\alpha) = \alpha$ donc $|f(x) - \alpha| \le \frac{1}{12}|x - \alpha|$.

3) $(u_n): \begin{cases} u_0 = \frac{7}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a) $u_0 = \frac{7}{2} = 3{,}5$; $3{,}5 \in I$, donc $u_0 \in I$.

Supposons qu'il existe un entier $k > 0$ tel que :

$u_k \in I$, démontrons que $u_{k+1} \in I$.

$u_{k+1} = f(u_k)$, $u_k \in I$ comme $f(I) \subset I$,

donc $f(u_k) \in I$ donc $u_{k+1} \in I$.

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.

b) $u_n \in I$ et $\alpha \in I$ donc

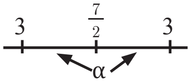
$|f(u_n) - f(\alpha)| \le \frac{1}{12}|u_n - \alpha|$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \le \frac{1}{12}|u_n - \alpha|$$

c) Démontrons par récurrence que

$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \le \frac{1}{2}\times\frac{1}{12}$

$u_0 = \frac{7}{2}$, $\frac{7}{2}$ est le centre de]3 ; 4[et α ∈ I.

$\alpha \in \left]3;\frac{7}{2}\right[$ ou $\alpha \in \left]\frac{7}{2};4\right[$ 

• Si $\alpha \in \left]3;\frac{7}{2}\right[$, $|u_0-\alpha| \le \frac{7}{2} - 3 = \frac{1}{2}$

• Si $\alpha \in \left]\frac{7}{2};4\right[$, $|u_0-\alpha| \le 4-\frac{7}{2} = \frac{1}{2}$, donc

$|u_0-\alpha| \le \frac{1}{2}$, donc $|u_0-\alpha| \le \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{12}\right)^0$.

Supposons un entier $k \ge 0$ tel que

$|u_k-\alpha| \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}\right)^n$, démontrons que

$|u_{k+1}-\alpha| \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}\right)^{k+1}$.

$|u_{k+1}-\alpha| \le \frac{1}{12}|u_k-\alpha| \le \frac{1}{12}\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}\right)^k$

donc $|u_{k+1}-\alpha| \le \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{12}\right)^{k+1}$.

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}$, $|u_n-\alpha| \le \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{12}\right)^n$.

4) a) $|u_n-\alpha| \le \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{12}\right)^n$

$-1 < \frac{1}{12} < 1$ donc la suite $\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{12}\right)^n$ géométrique de raison $\frac{1}{12}$ et de premier terme $\frac{1}{2}$ converge vers 0.

Donc la suite (u_n) converge vers α.

b) Il faut $|u_n-\alpha| \le \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{12}\right)^n \le 10^{-5}$.

On a : $\frac{1}{2(12)^n} \le \frac{1}{10^5} \Rightarrow 2(12)^n \ge 10^5$

$$\frac{1}{2(12)^n} \le \frac{1}{10^5} \Rightarrow 2(12)^n \ge 10^5$$
$$\Rightarrow \ln 2 + n\ln 12 \ge 5\ln 10$$
$$n\ln 12 \ge 5\ln 10 - \ln 2$$
$$n \ge \frac{5\ln 10 - \ln 2}{\ln 12}$$
$$n \ge 4{,}35$$

Le plus petit entier est $\boxed{n=5}$.

IV.4. Situation d'évaluation

Exercice 38

Pour tout entier naturel n, notons :

• a_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin A à la fin du *n-ième* jour de fonctionnement ;

• b_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin B à la fin du *n-ième* jour de fonctionnement.

Ainsi, $a_0 = 800$ et $b_0 = 1\,400$.

• Exprimons a_{n+1} en fonction de a_n.

1. Tous les jours :

• 15% de l'eau du bassin B est transférée au bassin A, soit $0{,}15 \times b_n$;

• 10% de l'eau du bassin A est transférée au bassin B, il reste donc dans le bassin A :

$0{,}90 \times a_n$;

On a alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1} = 0{,}15b_n + 0{,}9a_n$.

Or $a_n + b_n = 2\,200$, donc a_{n+1}

$= 0{,}15(2200 - a_n) + 0{,}9a_n = 330 + 0{,}75\,a_n$.

Donc $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 330$

2) Posons $u_n = a_n - 1320$, pour tout entier naturel n.

$\forall\, n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = a_{n+1} - 1320 = \frac{3}{4}a_n + 330$

$- 1320 = \frac{3}{4}a_n - 990$.

$u_{n+1} = \frac{3}{4}\left(a_n - 990\times\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}(a_n - 1320)$

$= \frac{3}{4}u_n$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de 1er terme $u_0 - a_0 - 1320 = 800 - 1320 = -520$.

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = -520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$

Comme $u_n = a_n - 1320$, on a $a_n = u_n + 1320$

Donc $a_n = 1320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$

3) On cherche n tel que $a_n = b_n = \frac{2200}{2}$

$a_n = b_n = \frac{2200}{2} \Leftrightarrow 1320 - 520 \times$

$\left(\frac{3}{4}\right)^n = 1100 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{220}{520} = \frac{11}{26}$

$$\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln\left(\frac{11}{26}\right) \Leftrightarrow n = \frac{\ln\left(\frac{11}{26}\right)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} \approx 2{,}9901.$$

Au bout de 3 jours, le bassin A a un volume de $a_3 \approx 1100{,}625$ m^3 et le bassin B un volume $b_3 \approx 1099{,}375$ m^3.

Ils ont alors, au mètre cube près, le même volume d'eau.

Le bassin A aura légèrement plus d'eau que le bassin B.

Leçon 10 Calcul intégral

IV. Exercices

IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

F(b) – F(a)

Exercice 2

V	$\int_5^3 (x^2-1)dx = -\int_3^5 (x^2-1)dx$
F	$\int_{-1}^{-1}(2x+7)dx = -1$

Exercice 3

- $I = \int_{-1}^{2}(2x+1)dx$

  $I = [x^2+x]_{-1}^{2} = 6$
- $J = \int_0^{\pi} \sin x\, dx$

  $J = [-\cos x]_0^{\pi} = 2$
- $K = \int_7^7 \ln x\, dx = 0$ car

$\int_a^a f(x)\,dx = 0$

Exercice 4

On considère la fonction f définie par :

$\forall x \in]-\infty\,;2]$, $f(\frac{1}{2}x) = x-1$ et $\forall x \in [2\,;+\infty[$,

$f(x) = \frac{1}{2}x$

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^2 (x)dx + \int_2^3 (x)dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_0^2 + \left[\frac{1}{4}x^2\right]_2^3 = \frac{5}{4}$$

Exercice 5

On détermine les différentes expressions de $|x+1|$ sur $[0\,;2]$ sans la valeur absolue.

$$\int_{-2}^{0}|x+1|dx = \int_{-2}^{-1}(-x-1)dx + \int_{-1}^{0}(x+1)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^2 - x\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} = 1$$

Exercice 6

$$\int_{-2}^{0}\left(\sqrt{3}\cos\pi x - \frac{2}{x+1}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{3}\cos(\pi x)dx - \int_0^1 \frac{2}{x+1}dx$$

$$= \left[\frac{\sqrt{3}}{\pi}(\pi x)\right]_0^1 - [2\ln(x+1)]_0^1 = \sqrt{3} - 2\ln 2$$

Exercice 7

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{cos2x}{2}dx$$

$$= \left[\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \left[\frac{sin2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

Exercice 8

Affirmations	Réponses
Si $\forall x \in [3\,;4], f(x) \le 2$ alors $\int_3^4 f(x)\,dx \le 2$	Vrai
Si $\int_3^4 f(x)\,dx \le 2$, alors $\forall x \in [3\,;4], f(x) \le 2$	Faux

Exercice 9

Pour $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$ on a : $0 \le \cos x \le \frac{1}{2}$ et

$0 \le x^3\cos x \le \frac{1}{2}x^3$

d'où : $0 \le \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} x^3 \cos x dx \le \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}x^3 dx$

c.-à-d. $0 \le \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} x^3 \cos x dx \le \frac{65\pi^4}{10368}$

Exercice 10

$\int_{-2}^{2} \frac{x^2+2}{x^6+\cos x}dx = 2\int_0^2 \frac{x^2+2}{x^6+\cos x}dx$	V

$\int_{-3}^{0} \frac{\cos x}{\ln(x^2+1)}dx = -\int_{0}^{3} \frac{\cos x}{\ln(x^2+1)}dx$	F
$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{sin5x}{e^{\lvert x\rvert}}dx = 0$	V
$\int_{-1}^{0} \frac{x^3}{x^4+1}dx = -\int_{0}^{1} \frac{x^3}{x^4+1}dx$	V
$\int_{-4}^{4} \frac{x}{x^2+1}dx = -\int_{0}^{4} \frac{x}{x^2+1}dx$	F

Exercice 11

Posons $f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$. f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et $f(-x) = \frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{1+e^x}{e^x-1} = -f(x)$ d'où f est impair et $\int_{-4}^{4} \frac{1+e^x}{1-e^x}dx = 0$.

Exercice 12

$\int_{0}^{2\pi} \sin x dx = -\int_{\pi}^{3\pi} \sin x dx$	V
$\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} tanx dx = -\int_{\pi}^{\frac{\pi}{4}} tanx dx$	F
$\int_{3\pi}^{4\pi} \cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)dx =$ $\int_{0}^{\pi} \cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)dx$	V

Exercice 13

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^3 x dx = \int_{0}^{2\pi} \cos^3 x dx$ car la fonction $x \mapsto \cos 3x$ est périodique de période 2π

Exercice 14

$F(1) = \frac{1}{\ln 2}$	F
$F'(x) = \frac{1}{\ln(1+x)}$	V
F est strictement croissante sur $[1 + \infty[$	V

Exercice 15

1) $\forall x \in [0\,;+\infty[$ $f'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$.

x	$0 \qquad\qquad +\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$

$\forall x \in [0\,;+\infty[$ $f(x) \geq 1$.

2) $\forall x \in \mathbb{R}^+, f'(x) = \frac{e^x}{x+1}$.

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\frac{e^x}{x+1} > 0$.

Donc f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 16

$\forall\, x \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$, $1 \leq \frac{1}{\sin x} \leq \sqrt{2}$ d'où :

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}dx \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\, dx$ c.-à-d.

$\frac{\pi}{4} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}dx \leq \sqrt{2}\frac{\pi}{4}$

Exercice 17

$\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow |\cos x| \leq 1$

Par ailleurs, la fonction $x \mapsto |\cos x|$ est paire

donc $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos x|dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |\cos x|dx$.

On a $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |\cos x|dx \leq \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} dx$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |\cos x|dx \leq [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$ donc

$\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos x|dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |\cos x|dx \leq 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$

Exercice 18

La valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a\,;b]$ est : $\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\,dx$

Maths Tle D corrigé 06102021.indd 84 06/10/2021 09:49

Exercice 19

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$. La valeur moyenne de la fonction sur f sur [2 ; 5] est $\dfrac{1}{5-2}\displaystyle\int_2^5 \dfrac{1}{x+1}dx$

$\dfrac{1}{5-2}\displaystyle\int_2^5 \dfrac{1}{x+1}dx = \dfrac{1}{3}\left[\ln(x+1)\right]_2^5 = \dfrac{\ln 2}{3}$.

b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. La valeur moyenne de la fonction sur f sur [−1 ; 4] est $\dfrac{1}{4+1}\displaystyle\int_{-1}^4 \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$\dfrac{1}{4+1}\displaystyle\int_{-1}^4 \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \dfrac{1}{5}\left[\sqrt{1+x^2}\right]_{-1}^4$

$= \dfrac{\sqrt{17}-\sqrt{2}}{5}$

Exercice 20

- $\displaystyle\int_0^2 (2x+x^2)\,dx = \left[x^2+\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{20}{3}$
- $\displaystyle\int_0^2 (x+1)^3 dx = \left[\frac{1}{4}(x+1)^4\right]_0^1$
  $= 4 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{15}{4}$
- $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} sinxdx = \left[-\cos x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0$
- $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} cos3xdx = \left[\frac{1}{3}sin3x\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$
- $\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \left[\sqrt{x^2-1}\right]_2^3 = \sqrt{8}-\sqrt{3}$
- $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)\sqrt{x^2+x+1}$
  $= \left[\dfrac{2}{3}(x^2+x+1)^{\frac{2}{3}}\right]_0^1 = \dfrac{2}{3}\left(3^{\frac{2}{3}}-1\right)$
  $= \dfrac{2}{3}\left(3\sqrt{2}-1\right)$

Exercice 21

$\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx = \left[\ln(e^x+e^{-x})\right]_0^{\ln 2}$

$= \ln\left(2+\dfrac{1}{2}\right) - \ln 2 = \ln\left(\dfrac{5}{4}\right)$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^4 x dx = \left[\frac{1}{5}\sin^5 x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{40}$;

$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)dx = \left[-\frac{1}{3}\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = 0$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{x-5}{(x^2-10x+1)^2}dx = \left[\frac{-1}{2(x^2-10x+1)}\right]_0^1$

$= \dfrac{7}{16}$

$\displaystyle\int_1^2 \frac{-4x+2}{x^2-x+1}dx = \left[-2\ln(x^2-x+1)\right]_1^2$

$= -2\ln 3$;

$\displaystyle\int_1^3 x\sqrt{x^2+1}\,dx = \left[\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^3$

$= \dfrac{2}{3}\left(10\sqrt{10}-2\sqrt{2}\right)$.

Exercice 22

$\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b v'(x)u(x)\,dx$	V
$\displaystyle\int_a^b u(x)v(x)\,dx = \left[u(x)v'(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$	F
$\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = \left[u(x)v'(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)v(x)\,dx$	F
$\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \left[u'(x)v'(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$	F

Exercice 23

Calcul de : $\displaystyle\int_0^1 (x-1)e^x dx$

Posons : $u(x) = x-1$ et $v'(x) = e^x$

on a : $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x$ d'où :

$\displaystyle\int_0^1 (x-1)e^x dx = \left[(x-1)e^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$

$= 2 - e.$

Calcul de : $\displaystyle\int_1^e (x+1)\,lnxdx$

Posons : $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x+1$

On a : $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = \dfrac{1}{2}x^2+x$ d'où :

$\displaystyle\int_1^e (x+1)\ln x dx = \left[\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\ln x\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{1}{2}x+1\right)dx$

$= \frac{1}{2}e^2 + e - \left[\frac{1}{4}x^2 + x\right]_1^e$

$= \frac{1}{4}e^2 + \frac{5}{4}$

Calcul de $\int_0^1 x\sqrt{2+x}\,dx$

Posons : $u(x) = x$ et

$v'(x) = \sqrt{2+x} = (2+x)^{\frac{1}{2}}$

On a : $u'(x) = 1$ et $v(x) = \frac{2}{3}(2+x)^{\frac{3}{2}}$ d'où :

$\int_0^1 x\sqrt{2+x}\,dx = \left[\frac{2}{3}x(2+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 -$

$\int_0^1 \frac{2}{3}(2+x)^{\frac{3}{2}}dx$

$= \frac{2}{3}(3)^{\frac{3}{2}} - \left[\frac{4}{15}(2+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$

$= \frac{16\sqrt{2} - 6\sqrt{3}}{15}$

Calcul de : $\int_0^{\pi} (x+2)\, cosx dx$

Posons : $u(x) = x + 2$ et $v'(x) = \cos x$

on a : $u'(x) = 1$ et $v(x) = \sin x$ d'où :

$\int_0^{\pi} (x+2)\cos x dx = [(x+2)\sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx$

$= -[-\cos x]_0^{\pi} = -2$

Exercice 24

$t = x + 1$ donc $x = t - 1$

$dx = dt$. $x = 0 \Leftrightarrow t = 1$

$x = 1 \Leftrightarrow t = 2$.

On a :

$= \int_1^{21}\left(1 + \frac{1}{t}\right)dt = [t + \ln t]_1^2 = 1 + \ln 2$

Conclusion : $\int_0^1 \frac{x+2}{x+1}dx = 1 + \ln 2$.

Exercice 25

Utilisons le changement de variable
$t = x - 1$ d'où $x = t + 1$ et $dx = dt$

$$\int_2^3 \frac{x^3 + x + 1}{(x-1)^3}dx = \int_2^3 \frac{t^3 + 3t^2 + 4t + 3}{t^3}dt$$

$$\int_2^3 \frac{t^3 + 3t^2 + 4t + 3}{t^3}dt =$$

$$\int_2^3 \left(1 + \frac{3}{t} + \frac{4}{t^2} + 3t^{-3}\right)dt =$$

$$\left[t + 3\ln t - \frac{4}{t} - \frac{3}{2t^2}\right]_1^2 = 3\ln 2 + \frac{33}{8}$$

Exercice 26

1) En untité d'aire on a :

$A = \int_{-1}^{1} |-x^2|dx = \int_{-1}^{1} +x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$

2) En untité d'aire on a :

$A = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \left|\frac{1}{x}\right|dx = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{x}dx = [\ln x]_{\frac{1}{e}}^{e} = 2$

Exercice 27

$(\mathscr{C}_f) : y = -x + e^x$

$(\mathscr{C}_g) : y = -0{,}5x^2 + 2$

$\forall x \in \left[-1; \frac{1}{2}\right], g(x) \geq f(x)$, donc l'aire $\mathscr{A}$ cherchée en unité d'aire est :

$= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (g(x) - f(x))dx$

$= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2}x^2 + x + 2 - e^x\right)dx$

$= \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x - e^x\right]_{-1}^{\frac{1}{2}}$

$\mathscr{A} = \frac{117}{48} + \frac{1}{e} - \sqrt{e}$.

IV.2. Exercices de renforcement

Exercice 28

Soit I = $\int_{-1}^{1} x^2 e^{-x} dx$

Posons $u(x) = x^2$ et $v'(x) = e^{-x}$

On a : $u'(x) = 2x$ et $v(x) = -e^{-x}$

I = $[-x^2 e^{-x}]_{-1}^{1} + 2\int_{-1}^{1} xe^{-x} dx$

Posons $w(x) = x$ et $r'(x) = +e^{-x}$

On a : $w'(x) = 1$ et $r'(x) = -e^{-x}$

$$\int_{-1}^{1} xe^{-x}dx = \left[-xe^{-x}\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} e^{-x}dx$$

$$= \left[-xe^{-x}\right]_{-1}^{1} + \left[-e^{-x}\right]_{-1}^{1} = \left[-(x+1)\,e^{-x}\right]_{-1}^{1}$$

$= -2e^{-1}$

$\mathrm{I} = e - 5e^{-1}$

$$\mathrm{J} = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x^2 \cos x dx$$

Posons $u(x) = x^2$ et $v'(x) = \sin x$

On a : $u'(x) = 2x$ et $v(x) = -\sin x$

$$\mathrm{J} = \left[x^2 \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin x dx$$

Posons $w(x) = x^2$ et $r'(x) = \sin x$

On a : $w'(x) = 2x$ et $r(x) = -\cos x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin x dx = \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx$$

$$= -\frac{\pi}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\mathrm{J} = \frac{\pi^2}{16} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}$$

$$= \frac{\pi^2\sqrt{2}}{32} + \frac{\pi\sqrt{2}}{4} - \sqrt{2}$$

Soit $\mathrm{K} = \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)\,e^{-3x} dx$

Posons $u(x) = x^2 - 1$ et $v'(x) = e^{-3x}$

On a : $u'(x) = 2x$ et $r(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x}$

$$\mathrm{K} = \left[-\frac{1}{3}(x^2 - 1)\,e^{-3x}\right]_{-1}^{1} + \frac{2}{3}\int_{-1}^{1} xe^{-3x}dx$$

$$= 0 + \frac{2}{3}\int_{-1}^{1} xe^{-3x}dx$$

Posons $w(x) = x$ et $r(x) = e^{-3x}$

On a : $w'(x) = 1$ et $r'(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x}$

$$\int_{-1}^{1} xe^{-3x}dx = \left[-\frac{1}{3}xe^{-3x}\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} e^{-3x}dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x}\right]_{-1}^{1}$$

$$\mathrm{K} = \frac{-8e^{-3} - 4e^{3}}{27}.$$

Exercice 29

Posons $f(x) = |x^2 + x - 2|$

$x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x^2 + x - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\forall x \in [-3\,;-2]$, $f(x) = x^2 + x - 2$

$\forall x \in [-2\,; 1]$, $f(x) = -x^2 - x + 2$

$\forall x \in [1\,; 2]$, $f(x) = x^2 + x - 2$

Donc $\int_{-3}^{2} |x^2 + x - 2|dx = \int_{-3}^{-2} |x^2 + x - 2|dx$

$$+ \int_{-2}^{1} |x^2 + x - 2|dx + \int_{1}^{2} |x^2 + x - 2|dx =$$

$$\int_{-3}^{-2} (x^2 + x - 2)dx + \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)dx +$$

$$\int_{1}^{2} (x^2 + x - 2)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_{-3}^{-2}$$

$$+ \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-2}^{1} + \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_{1}^{2}$$

$$= \left(\frac{10}{3} - \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{7}{6} + \frac{10}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{7}{6}\right) = \frac{49}{6}.$$

Exercice 30

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-in}}{2i}\right)^3.$

$$\sin^3 x = -\frac{1}{8i}\left(e^{3ix} - 3^{e2ix} \times e^{-ix} + 3^{eix} \times e^{-i2x} - e^{-3ix}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i}\right)^3 + \frac{3}{4}\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3$$

$$\sin^3 x = -\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\, dx = -\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x\, dx +$

$$\frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$$

$$= -\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{3}\cos 3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{4}\left[\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{1}{4}\left(0 + \frac{1}{3}\right) + \frac{3}{4}(1)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\, dx = \frac{8}{12}$$

IV.3. Exercices d'approfondissement

Exercice 31

On désigne par (Cf) et (Cg) les représentations graphiques respectives des fonctions f et g définies par : $f(x) = \frac{2}{x^2}$ et $g(x) = \frac{x}{4}$.

1) $f(x) - g(x) = \frac{8 - x^3}{4x^2} = \frac{(2 - x)(x^2 + 2x + 4)}{4x^2}$

$\forall\, x \in [1\,; 2[$, $f(x) - g(x) > 0$

$\forall\, x \in\,]2\,; +\infty[$, $f(x) - g(x) < 0$

$f(2) - g(2) = 0$

d'où : $(\mathcal{C}f)$ est au-dessus de $(\mathcal{C}g)$ sur $[1\,;2[$, $(\mathcal{C}f)$ est en-dessous de $(\mathcal{C}g)$ sur $]2\,;+\infty[$, $(\mathcal{C}f)$ et $(\mathcal{C}g)$ se coupent au point d'abscisse 2.

2) Soit $\mathcal{A}$ cette aire en unité d'aire.

$$\mathcal{A} = \int_1^2 (f(x)-g(x))dx + \int_2^3 (g(x)-f(x))dx$$

$$= \int_1^2 \frac{8-x^3}{4x^2}dx + \int_2^3 \frac{x^3-8}{4x^2}dx$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{2}{x^2}-\frac{x}{4}\right)dx + \int_2^3 \left(-\frac{2}{x^2}+\frac{x}{4}\right)dx$$

$$= \left[-\frac{2}{x}-\frac{x^2}{8}\right]_1^2 + \left[\frac{2}{x}+\frac{x^2}{8}\right]_2^3$$

$$= \frac{11}{12}.$$

Exercice 32

$A = \int_0^\pi x\cos^2 x\,dx$ et $B = \int_0^\pi x\sin^2 x\,dx$

1) $A+B = \int_0^\pi x\,dx = \pi$

2) $A-B = \int_0^\pi x\cos 2x\,dx$

Posons : $u(x) = x$ et $v'(x) = \cos 2x$

On a : $u'(x) = 1$ et $v(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$

$$A-B = \left[\frac{1}{2}x\sin 2x\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{2}\sin 2x\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^\pi$$

$A-B = 0.$

3) $\begin{cases} A+B=\pi \\ A-B=0 \end{cases}$

$A = \frac{\pi}{2}$ et $B = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 33

1) $f(x) = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$$f'(x) = \frac{\tan'\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \times \frac{\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\cos x}$$

2) $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n}{\cos x}dx$

a) $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}dx = f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f(0)$

$I_0 = \ln\left(\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)$

b) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x}dx = \left[-\ln(\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$I_1 = \ln 2$

c) Soit $K = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)^n \cos x\,dx$

$$K = \left[\frac{1}{n+1}(\sin x)^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$K = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$$

d) $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^{n+2}}{\cos x}dx$

$$I_{n+2} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^{n+2} - (\sin x)^n}{\cos x}dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n}{\cos x}(\sin^2 x - 1)dx$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)^n \cos x\,dx$$

$$I_{n+2} - I_n = -\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$$

e) $I_2 - I_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$I_2 = \ln\left(\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$I_3 - I_1 = -\frac{3}{8}$

$I_3 = (\ln 2) - \frac{3}{8}$

$I_4 - I_2 = -\frac{\sqrt{3}}{8}$

$I_4 = \ln\left(\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right) - \frac{\sqrt{3}}{8}$

$I_3 = (\ln 2) - \frac{33}{64}$

Maths Tle D corrigé 06102021.indd 88 06/10/2021 09:49

Exercice 34

1. a) Posons $\forall x \geq 0$, $g(x) = \dfrac{e^x}{x+1} - 1$.

On a : $g(x) = \dfrac{e^x - x - 1}{x+1}$

$g(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

$\forall x \geq 0$, $g(x) = \dfrac{e^x}{x+1} - 1$.

On a : $g'(x) = \dfrac{xe^x - x - 1}{(x+1)^2}$. $g'(x) \geq 0$

donc g est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

On en déduit que : $g(x) \geq 0$.

Donc $\dfrac{e^x}{x+1} - 1 \geq 0$.

On conclut que : $\forall x \geq 0$, $g(x) = \dfrac{e^x}{x+1} \geq 1$.

b) $f(2) = \displaystyle\int_1^2 \frac{e^t}{1+t} dt$.

$\forall t \geq 0$, $\dfrac{e^t}{1+t} \geq 1 \Rightarrow \displaystyle\int_1^2 \frac{e^t}{1+t} dt \geq \int_1^2 dt$.

On en déduit que : $f(2) \geq 1$.

2. a) f est la primitive sur $\mathbb{R}^+$ de $x \mapsto \dfrac{e^x}{x+1}$ qui s'annule en 1, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$.

b) $f(1) = 0$ et $f(2) \geq 1$, comme f est continue sur $[1 ; 2]$, donc il existe $c \in [1 ; 2]$ tel que $f(c) = 1$.

c) $\forall x \geq 0$, $f'(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$.

$\forall x \geq 0$, $f'(x) > 0$ donc f est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

d) $\forall x \geq 0$, $f'(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$.

$\forall x \geq 1$, $\dfrac{e^x}{x+1} \geq 1$

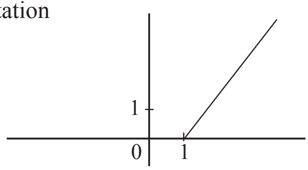
donc $\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{1+t} dt \geq \Rightarrow f(x) \geq x - 1$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3)

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

4) Représentation graphique.



Exercice 35

$u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt$

1) $\forall t \in [0 ; 1]$, $0 \leq t \leq 1$, donc pour $n \geq 0$, $0 \leq t^n \leq 1$

$1 \leq 1 + t^n \leq 2$.

On a : $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{1+t^n} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \dfrac{1}{1+t^n} \leq 1$

comme $t^n \geq 0$, on a : pour $t = 0$,

$\dfrac{0^n}{1+0^n} = 0 \leq 0^n = 0$.

Pour $t \in]0 ; 1]$, $t^n \in]0 ; 1]$, on obtient

$0 \leq \dfrac{t^n}{1+t^n} \leq t^n$.

Conclusion : $\forall t \in [0 ; 1]$, $0 \leq \dfrac{t^n}{1+t^n} \leq t^n$.

2) De $0 \leq \dfrac{t^n}{1+t^n} \leq t^n$, on déduit que :

$0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt \leq \int_0^1 t^n dt$

donc $0 \leq u_n \leq \left[\dfrac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ donc (u_n) converge vers 0.

Exercice 36

1. a) $\forall\, t \geq 0$, $1 \leq 1 + t$

$1 \leq 1 + t \Longrightarrow \dfrac{1}{1+t} \leq 1$

$\dfrac{1}{1+t} + (1 - t) = \dfrac{t^2}{1+t} \geq 0$, $\forall\, t \geq 0$.

D'où $1 - t \leq \dfrac{1}{1+t}$

On conclut que : $\forall\, t \geq 0$, $1 - t \leq \dfrac{1}{1+t} \leq 1$

b) $\forall\, t \geq 0$ et $x \geq 0$

$1 - t \leq \dfrac{1}{1+t} \leq 1$

$\Longrightarrow \displaystyle\int_0^x (1-t)\, dt \leq \int_0^x \frac{dt}{1+t} \leq \int_0^x dt$

$\Longrightarrow \left[t - \dfrac{1}{2}t^2\right]_0^x \leq [\ln(1+t)]_0^x \leq [\,t\,]_0^x$

$\Longrightarrow x - \dfrac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$

2) $\forall\, t \geq 0$, $\left(\dfrac{t}{2}\right)^2 \geq 0$ d'où

$\dfrac{t^2}{4} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{t^4}{16}\right) \leq \ln\left((1) + \left(\dfrac{t}{2}\right)^2\right) \leq \dfrac{t^2}{4}$

$8t^2 - t^4 \leq 32\ln\left(1 + \left(\dfrac{t}{2}\right)^2\right) \leq 8t^2$

3) $\ln(4 + t^2) = \ln 4 + \ln\left(1 + \left(\dfrac{t}{2}\right)^2\right)$

Maths Tle D corrigé 06102021.indd 89 06/10/2021 09:49

$$\int_0^1 (8t^2 - t^4)\,dt = \frac{37}{15}\ ;\ \int_0^1 8t^2\,dt = \frac{8}{3}$$

$$\int_0^1 ln\,(4+t^2)\,dt = \int_0^1 \left(\ln 4 + \ln\left(1+\left(\frac{t}{2}\right)^2\right)\right)dt$$

$$= \int_0^1 \ln 4dt + \int_0^1 \ln\left(1+\left(\frac{t}{2}\right)^2\right)dt$$

$$= \ln 4 + \int_0^1 \ln\left(1+\left(\frac{t}{2}\right)^2\right)dt$$

$$\int_0^1 \frac{1}{32}(8t^2 - t^2)\,dt \leq \int_0^1 \ln\left(1+\left(\frac{t}{2}\right)^2\right)dt \leq \int_0^1 \frac{1}{32}8t^2\,dt$$

$$\frac{1}{32}\times\frac{37}{15} \leq \int_0^1 \ln\left(1+\left(\frac{t}{2}\right)^2\right)dt \leq \frac{1}{32}\times\frac{8}{3}$$

$$\frac{37}{480} + \ln 4 \leq \ln 4 + \int_0^1 \ln\left(1+\left(\frac{t}{2}\right)^2\right)dt \leq \frac{1}{12} + \ln 4$$

$$\frac{37}{480} + \ln 4 \leq \int_0^1 \ln\left(14+t^2\right)dt \leq \frac{1}{12} + \ln 4$$

IV.4. Situation d'évaluation

Exercice 37

- Affirmation 1

Étudions la fonction f afin de la comparer à 4,5.

$\forall x \in [10\ ;\ 90]$, $f'(x) = 110\,\dfrac{3-\ln x}{x^2}$.

* $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in [10\ ;\ e^3]$ donc f est croissante sur $[10\ ;\ e^3]$.

* $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in [e^3\ ;\ 90]$ donc f est décroissante sur $[e^3\ ;\ 90]$.

* $f'(e^3) = \dfrac{110}{e^3} \simeq 5,48.$

x	10	e^3	90
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	3,3 ↗	5,48	↘ 3,05

* Sur $[10\ ;\ e^3]$, f est continue et strictement croissante et $4,5 \in f([10\ ;\ e^3]) = [3,3\ ;\ 5,48]$ donc il existe $\alpha \in [10\ ;\ e^3]$ tel que $f(\alpha) = 4,5$.

* De même il existe $\beta \in [e^3\ ;\ 90]$ tel que $f(\beta) = 4,5$.

On déduit que pour tout $x \in [\alpha\ ;\ \beta]$, $f(x) \leq 4,5$.

Conclusion : Dans la tranche d'âge $]\,\alpha\ ;\ \beta\,[$, la capacité pulmonaire est supérieure à 4,5 L.

- Affirmation 2

Calculons la valeur moyenne de f.

$$m = \frac{1}{70-20}\int_{20}^{70}\frac{110(\ln x - 2)}{x}dx$$

$$m = \frac{110}{50}\int_{20}^{70}\frac{1}{x}(\ln x - 2)dx$$

$$m = \frac{11}{5}\left[\frac{1}{2}(\ln x - 2)^2\right]_{20}^{70}$$

$$m = \frac{11}{10}\left[\frac{1}{2}(\ln 70 - 2)^2 - (\ln 20 - 2)^2\right]$$

$$m \simeq 4,06\,\mathrm{L}\,;\,4,06 < 5.$$

Donc la valeur moyenne de la capacité pulmonaire entre 20 et 70 ans est inférieure à 5 L.

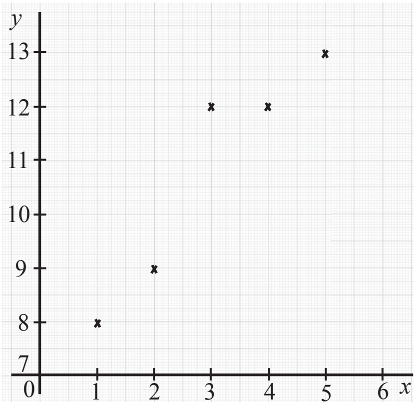
Leçon 11 Statistique à deux variables

IV. Exercices

IV.1. Exercices de fixation

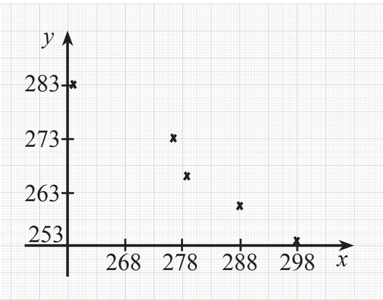
Exercice 1

Représentons le nuage de points associé à cette série statistique.



Exercice 2

Choix du repère : 1 cm pour 10 millions de F et 1 cm pour 10 mariages.
Prendre pour origine du repère le point de coordonnées (258 ; 253).



Exercice 3

Calculons les coordonnées du point moyen G.

$\overline{X} = \dfrac{\sum_1^{10} x_i}{10}$; $\overline{Y} = \dfrac{\sum_1^{10} y_i}{10}$

$\overline{X} = \dfrac{261}{10}$; $\overline{Y} = \dfrac{300}{10}$; $\overline{X} = \dfrac{261}{10}$; $\overline{X} = 26,1$ et

$\overline{Y} = 30,4$

$G(26,1 ; 30,4)$.

Exercice 4

Calculons les coordonnées du point moyen G.

$\overline{X} = \dfrac{\sum_1^{6} x_i}{6}$; $\overline{Y} = \dfrac{\sum_1^{6} y_i}{6}$

$\overline{X} = \dfrac{12093}{6} = 2015,5$; $\overline{Y} = \dfrac{328}{6} = \dfrac{164}{3}$

$G\left(2015,5 ; \dfrac{164}{3}\right)$.

Exercice 5

$\mathrm{cov}(x,y) = \dfrac{\sum n_{ij}x_iy_j}{n} - \overline{x}..$ ☐

$\mathrm{cov}(x,y) = \dfrac{\sum n_{ij}x_iy_j}{n} - .\overline{y}.$ ☐

$\mathrm{cov}(x,y) = \dfrac{\sum n_{ij}x_iy_j}{n} - \overline{x}.\overline{y}.$ ☒

Exercice 6

Coche la bonne réponse.
La covariance de la série statistique double x et de y est égale à :

$\mathrm{cov}(X,Y) = \dfrac{1\times 8 + 2\times 9 + 3\times 12 + 4\times 12 + 5\times 13}{5}$ ☐

$\mathrm{cov}(X,Y) = \dfrac{1\times 8 + 2\times 9 + 3\times 12 + 4\times 12 + 5\times 13}{5} - 5\times 10,8$ ☒

$\mathrm{cov}(X,Y) = \dfrac{1+8+2+9+3+12+4+12+5+13}{5}$ ☐

Exercice 7

Calculons Cov(*x, y*).

$$\overline{X} = \frac{261}{10} = 26,1 \,;\, \overline{Y} = \frac{304}{10} = 30,4$$

$$Cov(X,Y) = \frac{16\times 20 + 18\times 24 + 23\times 28 + 24\times 22 + 28\times 32 + 29\times 28 + 26\times 32 + 31\times 36 + 32\times 41 + 34\times 41}{10} - 26,1\times 30,4$$

$$Cov(X,Y) = 35,16$$

Exercice 8

$$r = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}} \quad \square$$

$$r = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(Y)}} \quad \square$$

$$r = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} \quad \boxed{\times}$$

Exercice 9

Calculons Cov(*x, y*)

$$r = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$$

$$r = \frac{25}{\sqrt{28}\sqrt{28}} = \frac{25}{28} = 0,8928$$

Interprétation : 0,8928 > 0,87 donc il y a une bonne corrélation entre x et y.

Exercice 10

1- V ; 2- F ; 3- F ; 4- V ; 5- F.

Exercice 11

$$r = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$$

$$r = \frac{0,875}{\sqrt{0,875}\sqrt{9,333}} = 0,887\,;$$

0,887 > 0,87, donc la corrélation est bonne. Donc X et Y sont liés.

Exercice 12

$$r = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$$

$$r = \frac{30,365}{\sqrt{4,05}\sqrt{249,69}} = 0,9548\,;$$

0,9548 > 0,87, donc la corrélation est bonne. Donc X et Y sont liés.

Exercice 13

Entoure dans chaque cas la bonne réponse.

1. La formule du coefficient de la droite de régression *y* en *x* par la méthode des moindres carrés d'une série statistique double est :

a) $a = \frac{\text{cov}(x,y)}{v(y)}$; b) $a = \frac{\text{cov}(x,y)}{v(x)\times v(y)}$;

c) $a = \frac{cov(x,y)}{v(x)}$

2. La formule du coefficient de la droite e régression *x* en *y* par la méthode des moindres carrés d'une série statistique double est :

a) $a' = \frac{\text{cov}(x,y)}{v(y)}$; b) $a' = \frac{\text{cov}(x,y)}{v(x)\times v(y)}$;

c) $a' = \frac{\text{cov}(x,y)}{v(x)}$

Exercice 14

Coche la bonne réponse

Une équation de la droite de régression par la méthode des moindres carrés a pour équation :

$$y = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)}x + \left(\overline{y} - \frac{Cov(X,Y)}{V(X)}\right) \quad \square$$

$$y = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)}x + \left(\overline{y} - \frac{Cov(X,Y)}{V(X)}\overline{x}\right) \quad \boxed{\times}$$

$$y = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)}x + \left(\overline{x} - \frac{Cov(X,Y)}{V(X)}\overline{y}\right) \quad \boxed{}$$

Exercice 15

Déterminons une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés.
La droite est de la forme :

$$y = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)}x + \left(\overline{y} - \frac{Cov(X,Y)}{V(X)}\overline{x}\right)$$

On sait que :

$\overline{x} = 26{,}1$; $\overline{y} = 30{,}4 Cov(X,Y) = 35{,}16$ et

$V(X) = 31{,}49.$

$\frac{Cov(X,Y)}{V(X)} = 1{,}116$ et

$\overline{y} - \frac{Cov(X,Y)}{V(X)}\overline{x} = 1{,}258$

$y = 1{,}116x + 1{,}258$.

Exercice 16

$G(8{,}65 ; 221{,}7)$

$\overline{X} = 8{,}65$ et $\overline{Y} = 221{,}7$

$x = a'y + b'$

$a' = \frac{Cov(X,Y)}{V(Y)} = 0{,}005, b' = \overline{Y} - a'\overline{X} = 7{,}56.$

La droite de régression de X en Y est :
$x = 0{,}005y + 7{,}56$.

IV.2. Exercices de renforcement

Exercice 17

1) Calculons les coordonnées du point moyen

$\overline{X} = \frac{\sum_1^{12} x_i}{12} = \frac{117}{12} = 9{,}75$ et

$\overline{Y} = \frac{\sum_1^{12} y_i}{12} = \frac{22{,}5}{12} = 1{,}875$

donc G(9,75 ; 1,875).

2) Calculons la variance de x, la variance de y et la covariance de x et y.

$V(X) = \frac{\sum_1^{12} x_i^2}{12} - \overline{X}^2,\ V(Y) = \frac{\sum_1^{12} y_i^2}{12} - \overline{Y}^2,$

$Cov(X,Y) = \frac{\sum_1^{12} x_i y_i}{12} - \overline{X}.\overline{Y}$

$V(X) = \frac{1121}{48}, \quad V(Y) = \frac{73}{192},$

$Cov(X,Y) = \frac{1457}{480}$

$V(X) = 23{,}354$; $V(Y) = 0{,}380$;

$Cov(X,Y) = 3{,}035$.

3) Déterminons le coefficient de la droite de régression de y en x par la méthode de moindres carrés.
Les coefficients sont :

$a = \frac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)}$ et $b = \overline{y} - \frac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)}\overline{x}$

$a = \frac{1457}{11240}$ et $b = -\frac{17741}{640}$

$a = 0{,}1296$ et $b = -27{,}72.$

Exercice 18

Pour le tableau 1 :

$\overline{x} = 2{,}4$; $\overline{y} = 83{,}4$, on a : $G(2{,}4 ; 83{,}4)$.
Le coefficient de corrélation de cette série est :
$r = -0{,}9952$.
L'ajustement linéaire est justifié car $|r| \geq 0{,}87$.

Pour le tableau 2 :

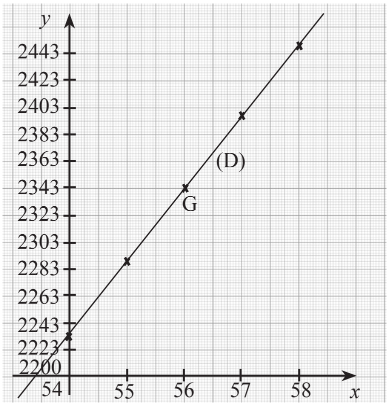
On a : G(2,4 ; 72)
Le coefficient de corrélation de cette série est :
$r = -0{,}8169$.
L'ajustement linéaire n'est pas justifié car
$|r| < 0{,}87$.

Pour le tableau 3 :

On a : G(2,4 ; 83,4)
Le coefficient de corrélation de cette série est :
$r = -0{,}4519$.
L'ajustement linéaire n'est pas justifié car
$|r| < 0{,}87$.

Exercice 19

1)



2) Déterminons les coordonnées du point moyen G.

G(56 ; 2339,4).

3) Donne une équation de la droite de régression de y en x, par la méthode des moindres carrés.

V(X) = 1,9999 ; Cov(X, Y) = 109,8

$y = ax + b$ avec $a = 54,9$ et $b = 2229,6$.

On a : $y = 54,9x - 735$.

4) Le coefficient de corrélation

$r = 0,99998$, il y a une bonne corrélation.

Si $x = 6$ c'est-à-dire à 60 ans alors

$y = 2\,559\,000$ F.

Si $x = 10$ c'est-à-dire à 64 ans alors

$y = 2\,778\,600$ F.

Exercice 20

1. b) Déterminons les coordonnées du point moyen G.

G(245 ; 216,75)

2) Calculons les variances V(X) et V(Y) et COV (X, Y).

V(X) = 6412,50 ; V(Y) = 12424,67

Cov(x, y) = 3275.

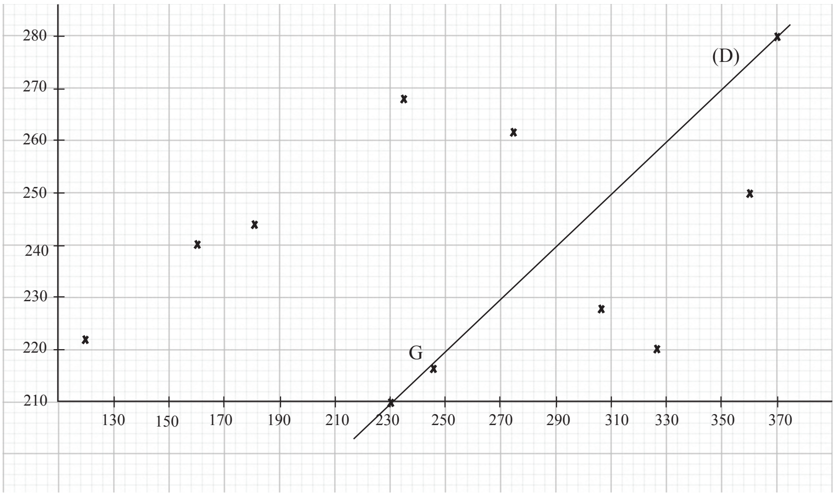
3) Le coefficient de corrélation est $r = 0,54$.

4) Déterminons une équation de (D), droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés.

$y = 0,51x + 91,62$.

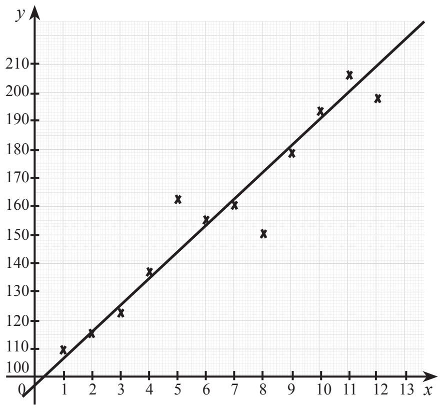
5) Il y a un lien entre x et y car $|r| \geq 0,87$.

$x = 0,58y + 119,15$.



Maths Tle D corrigé 06102021.indd 94 06/10/2021 09:49

Exercice 21



1) G(6,5 ; 157,417).

2) V(X) = 11,9166, cov(X, Y) = 102,542.

4) Justifions qu'une équation de la droite d'ajustement par la méthode des moindres carrés est : $y = 8{,}60x + 101{,}48$.

Soit $= ax + b$, avec $a = \dfrac{\text{cov}(x, y)}{V(X)}$ et

$b = \overline{y} - a\overline{x}$

$$a = \frac{102{,}542}{11{,}9166} = 8{,}60 \text{ et}$$

$$b = 157{,}417 - 8{,}6049 \times 6{,}5 = 101{,}48$$

donc $y = 8{,}60x + 101{,}48$

5) $r = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)} \times \sqrt{V(Y)}}$

$r = 0{,}958$, il y a une bonne corrélation entre X et Y.

6.a) Si $x = 36$ alors $y = 411{,}08$ environ 411 adhérents.

b) Si $y = 514$ alors $x = 47{,}96$.

$x \approx 48$ semaines, soit en décembre 2020.

Exercice 22

1) Déterminons la moyenne de X et de Y :

$\overline{X} = 2$ et $\overline{Y} = \dfrac{19 + a}{5}$.

Calculons V(X), cov(x, y).

V(X) = 0,5 ; cov(x, y) = $\dfrac{5 + 0{,}5a}{5}$.

$$y = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)}x + \left(\overline{y} - \frac{Cov(X,Y)}{V(X)}\overline{x}\right)$$

$\dfrac{Cov(X,Y)}{V(X)} = \dfrac{10 + a}{5}$ et par identification,

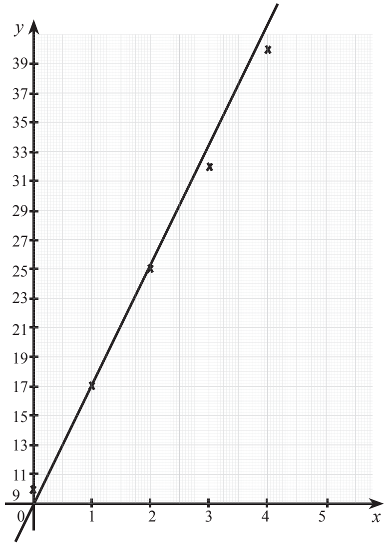
$\dfrac{10 + a}{5} = 3{,}5$, on a : $a = 7{,}5$.

2) Sachant que : V(X) = 0,5 ; V(Y) = 6,46 et cov(x, y) = 1,75.

Le coefficient de corrélation de cette série est : $r = 0{,}9737$.

Exercice 23

1)



2) Calculons les coordonnées du point moyen, V(X) et Cov(X, Y).

$G\left(2{,}5 ; \dfrac{88}{3}\right)$, V(X) = 2,916 ;

Cov(X, Y) = 23,833 .

Montrons qu'une équation à l'arrondi 0,01 près de la droite (D) d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés est :
$y = 8{,}17x + 8{,}90$.
Soit $y = ax + b$, la forme générale d'une équation de la droite d'ajustement, avec

$$a = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)} \text{ et } b = \overline{y} - \frac{Cov(X,Y)}{V(X)}\overline{x}.$$

Calculons a et b.

$$a = \frac{23{,}833}{2{,}916}, \text{on a} : a = 8{,}17 \text{ et}$$

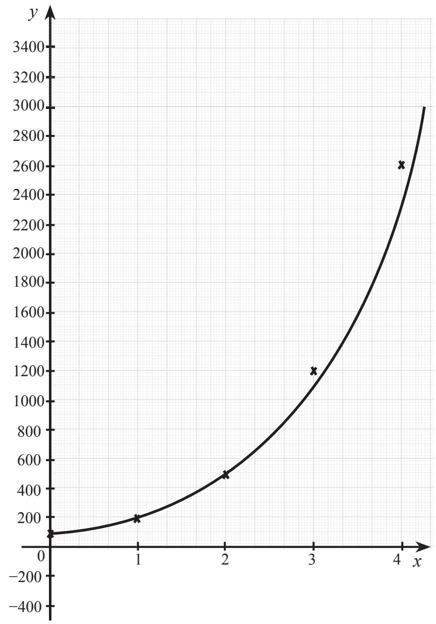
$b = 29{,}333 - (8{,}17 \times 2{,}5)$

$b = 8{,}90$.
Donc une équation de la droite (D) d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés est :
$y = 8{,}17 + 8{,}90$.

3) a) Déterminons une estimation du taux de connections des ménages de cette ville en 2020.
Si $x = 8$ c'est-à-dire en 2020 alors le taux de connection sera de 74,26%.
Si le taux de connections sera au moins de 90% c'est-à-dire si $y = 90$ alors $x = 9{,}92$, en l'an 2022.

Exercice 24

1.



N° de la mesure x_i	0	1	2	3	4
Nombre de bactéries par ml	100	230	500	1200	2600
$z_i = \ln y_i$	4,60	5,43	6,21	7,09	7,86

2. a) Calculons les coordonnées du point moyen G de la série statistique $(x_i ; z_i)$ et V(X), V(Z) et COV(X,Z) G(2 ; 6,226), V(X) = 2 ; V(Z) = 1,488 ; cov(X,Z) = 1,612.

Justifions l'ajustement affine de Z par rapport à X par la méthode des moindres carrés.
Pour cela calculons le coefficient de corrélation de X et de Z.

$$r = \frac{Cov(X,Z)}{\sqrt{V(X)} \times \sqrt{V(Z)}} \text{ on a} :$$

$$r = \frac{1{,}612}{\sqrt{2} \times \sqrt{1{,}488}} = 0{,}99$$

$r > 0{,}87$, la corrélation entre X et Z est justifiée.

b) Déterminons une équation de la droite de régression de Z en X.

Calculons les coefficients de l'équation (D).

$$a = \frac{Cov(X,Z)}{V(X)} \text{ et } b = \overline{Z} - \frac{Cov(X,Z)}{V(X)}\overline{x}.$$

Calculons a et b.

$a = \frac{1{,}612}{2}$, on a : $a = 0{,}806$ et

$b = 6{,}226 - (0{,}806 \times 2)$

$b = 4{,}614$.

Donc une équation de (D) est :

$z = 0{,}80x + 4{,}61$.

3) Déduisons que Y et X sont reliées par une relation $Y = Ae^{BX}$ où A et B sont des réels que l'on déterminera à 10^{-2} près.

On sait que : $z = 0{,}80x + 4{,}61$ or $= \ln y$,

donc $y = e^z$.

On a : $y = E^{O,80x+4,61}$ donc $y = 100{,}48E^{O,80x}$.

4) Voir graphique.

5) Pour 1000 bactéries par ml on mettra 57,50 min.

Maths Tle D corrigé 06102021.indd 96 06/10/2021 09:50

Exercice 25

1)

X \ Y	0	1	2	3	
1	4	1	0	0	5
2	0	2	7	1	10
3	0	1	1	3	5
	4	4	8	4	20

On a les séries marginales suivantes :

X	1	2	3
Effectif	5	10	5

Y	0	1	2	3
Effectif	4	4	8	4

2) Calculons la moyenne de chaque série.

$$\overline{X}=\frac{5\times 1+10\times 2+3\times 5}{20}\ ;$$

$$\overline{Y}=\frac{4\times 0+4\times 1+8\times 2+4\times 3}{20}$$

$\overline{X}=2\ ;\ \overline{Y}=1,6.$

3) Calculons V(X) et V(Y).

$$V(X)=\frac{\sum_1^3 n_i x_i^2}{N}-\overline{X}^2 \text{ et } V(Y)=\frac{\sum_1^3 n_i y_i^2}{N}-\overline{Y}^2$$

$$V(X)=\frac{5\times 1^2+10\times 2^2+5\times 3^2}{20}-2^2;$$

$$V(Y)=\frac{4\times 0^2+4\times 1^2+8\times 2^2+4\times 3^2}{20}-1,6^2$$

$V(X)=0,5$ et $V(Y)=1,04.$

4) Voir figure.

5) Détermine une équation de la droite de régression de Y en X.

Calculons COV(X, Y).

$$COV(X,Y)=\frac{\sum n_{ij}x_i y_j}{N}-\overline{x}.\overline{y}$$

$$COV(X,Y)=\frac{75}{20}-2\times 1,6=0,55$$

$$a=\frac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)} \text{ et } b=\overline{Y}-\frac{Cov(X,Z)}{V(X)}\overline{x}$$

$$a=\frac{0,55}{0,5}=1,1 \text{ et } b=1,6-1,1\times 2=-0,6.$$

Donc une équation de la droite de régression de y en x est : $y = 1,1x - 0,6$.

6) Déterminons une équation de la droite de régression de X en Y.

$$a'=\frac{\text{cov}(X,Y)}{V(Y)} \text{ et } b'=\overline{X}-\frac{Cov(X,Z)}{V(X)}\overline{y}$$

$$a=\frac{0,55}{1,04}=0,528 \text{ et}$$

$$b=2-0,528\times 1,6=1,1552.$$

Donc une équation de la droite de régression de x en y est : $x = 0,528y + 1,1552$.

IV.4. Situation d'évaluation

Exercice 26

1) Déterminons le coefficient de corrélation r_1 entre N et Y.

Calculons $\overline{X}=48$ et $\overline{Y}=129,38.$

V(N) = 1096, V(Y) = 7302,9976,

COV (N, Y) = 2818,76

$$r_1=\frac{\text{cov}(N,Y)}{V(N)}$$

$$r_1=\frac{2818,76}{1096}=0,996.$$

2) Déterminons le coefficient de corrélation r_2 entre X et Y.

Calculons $\overline{X}=1,82$ et $\overline{Y}=129,38.$

V(X) = 0,2376 ; V(Y) = 7302,9976,

COV(X, Y) = 37,1884

$$r_2=\frac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)}$$

$$r_1=\frac{37,1884}{0,2376}=0,892.$$

3. a) Déterminons la variable qui influence le chiffre d'affaires.

$r_1 > r_2$ ce sont les points de vente qui influencent plus le chiffre d'affaires.

Leçon 12 Équations différentielles

IV. Exercices
IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

Une équation différentielle est une équation ayant pour inconnue une fonction et dans laquelle figure au moins une des dérivées successives de la fonction inconnue.

Exercice 2

Cocher 2) ; 4) et 5).

Exercice 3

1) Pour $f(x) = e^{8x}$, $f'(x) = 8e^{x}$
on a : $f(x) - 8f'(x) = e^{8x} - 64e^{x} = -63e^{8x} \neq 0$.
Donc f n'est pas solution de l'équation différentielle $f - 8f' = 0$.
2) Pour $f(x) = 3e^{-2x} + e^{-x}$, on a : $f'(x) + 2f(x)$
$= -6e^{-2x} - e^{-x} + 6e^{-2x} + 2e^{-x} = e^{-x}$.
Donc f est solution de l'équation différentielle $f' + 2f = e^{-x}$.
3) Pour $f(x) = e^{11x} + e^{-11x}$,
on a : $f'(x) = 11e^{11x} - 11e^{-11x}$, et
$f''(x) = 121e^{11x} + 121e^{-11x}$.
Par suite $f''(x) - 121f(x) = 0$.
Donc f est solution de l'équation différentielle $f'' - 121f = 0$.

Exercice 4

a) $f' = 7$ a pour solution les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = 7x + k$; $k \in \mathbb{R}$.
b) $f' = 0$ a pour solution les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = k$; $k \in \mathbb{R}$.
c) $f' = -\sqrt{3}$ a pour solution les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = -x\sqrt{3} + k$; $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 5

a) $f' = 2f$ a pour solution les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = ke^{2x}$; $k \in \mathbb{R}$.
b) $f' = -7f$ a pour solution les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = ke^{-7x}$; $k \in \mathbb{R}$.
c) $f' - 13f = 0 \Leftrightarrow f' = 13f$.
Les solutions sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = ke^{13x}$; $k \in \mathbb{R}$.
d) $f' + 2f = 0 \Leftrightarrow f' = -2f$.
Les solutions sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = ke^{-2x}$; $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 6

a) $f' = \frac{2}{3}f$ a pour solution les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = ke^{\frac{2}{3}x}$; $k \in \mathbb{R}$.
b) $f' = \sqrt{5}f$ a pour solution les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = ke^{\sqrt{5}x}$; $k \in \mathbb{R}$.
c) $9f' - 2f = 0 \Leftrightarrow f' = \frac{2}{9}f$.
Les solutions sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = ke^{\frac{2}{9}x}$; $k \in \mathbb{R}$.
d) $12f' + 3f = 0 \Leftrightarrow f' = -\frac{1}{4}f$.
Les solutions sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = ke^{-\frac{1}{4}x}$; $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 7

a) $f' = 4f + 1$ a pour solution les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = ke^{4x} - \frac{1}{4}$; $k \in \mathbb{R}$.
b) $f' = -27f + 3$ a pour solution les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = ke^{-27x} + \frac{1}{9}$; $k \in \mathbb{R}$.
c) $f' - 3f = 2 \Leftrightarrow f' = 3f + 2$.
Les solutions sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = ke^{3x} - \frac{2}{3}$; $k \in \mathbb{R}$.
d) $f' = 2(f + 1) = 0 \Leftrightarrow f' = 2f + 2$.
Les solutions sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = ke^{2x} - 1$; $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 8

a) $f' = \frac{1}{2}f - 1$ a pour solutions les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = ke^{\frac{1}{2}x} + 2$; $k \in \mathbb{R}$.
b) $f' = -6f - 5$ a pour solutions les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = ke^{-6x} - \frac{5}{6}$; $k \in \mathbb{R}$.

c) $2f' - 5f = -3 \Leftrightarrow f' = \frac{5}{2}f - \frac{3}{2}$.
Les solutions sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = ke^{\frac{5}{2}x} + \frac{3}{5}$; $k \in \mathbb{R}$.

d) $f' - 5f + 10 = 0 \Leftrightarrow f' = 5f - 10$.
Les solutions sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = ke^{5x} + 2$; $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 9

a) $f' = -2f$ a pour solution les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = ke^{-2x}$; $k \in \mathbb{R}$.

$f(0) = 1 \Leftrightarrow k = 1$. La fonction cherchée est f_1.

$x \mapsto e^{-2x}$.

b) $f' + (\ln 2)f = 0 \Leftrightarrow f' = -(\ln 2)f$. Les solutions sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f_k(x) = ke^{-x\ln 2}$; $k \in \mathbb{R}$.

$f(2) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow ke^{-2\ln 2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}e^{2\ln 2}$.
La fonction cherchée est $f_2 : x \mapsto 2e^{-x\ln 2}$

c) $7f' + 4f = 0 \Leftrightarrow f' = -\frac{4}{7}f$.
Les solutions sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = ke^{-\frac{4}{7}x}$; $k \in \mathbb{R}$.

$f(7) = e^5 \Leftrightarrow ke^{-4} = e^5 \Leftrightarrow k = e^9$.

d) $f' = 2(f + 1) = 0 \Leftrightarrow f' = 2f + 2$.

Il s'agit de la fonction définie par :

$f(x) = e^{-\frac{4}{7}x+9}$.

Exercice 10

a) $f' = -4f - 3$ a pour solution les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = ke^{-4x} - \frac{3}{4}$; $k \in \mathbb{R}$.

$f(0) = 1 \Leftrightarrow k - \frac{3}{4} = 1 \Leftrightarrow k = \frac{7}{4}$.

La fonction cherchée est : $x \mapsto \frac{7}{4}e^{-4x} - \frac{3}{4}$.
b) $3f' - f = 3 \Leftrightarrow f' = \frac{1}{3}f + 1$.
Les solutions sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = ke^{\frac{x}{3}} - 3$; $k \in \mathbb{R}$.
$f(2) = -1 \Leftrightarrow ke^{\frac{2}{3}} - 3 = -1 \Leftrightarrow k = 2e^{-\frac{2}{3}}$.
La fonction cherchée est : $x \mapsto 2e^{\frac{x}{3}-\frac{2}{3}} - 3$.

c) $2f' + 4f - 1 = 0 \Leftrightarrow f' = -2f + \frac{1}{2}$.
Les solutions sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = ke^{-2x} + \frac{1}{4}$; $k \in \mathbb{R}$.

$f(-2) = -2 \Leftrightarrow ke^4 + \frac{1}{4} = -2$

$\Leftrightarrow k = -\frac{9}{4}e^{-2x-4} + \frac{1}{4}$.

La fonction cherchée est : $x \mapsto -\frac{9}{4}e^{-2x-4} + \frac{1}{4}$.

Exercice 11

a) $x \mapsto Ae^{5x} + Be^{-5x}$; $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

b) $x \mapsto Ae^{x} + Be^{-x}$; $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

c) $f'' - 9f = 0 \Leftrightarrow f'' = 9f$.

Solutions :

$x \mapsto Ae^{3x} + Be^{-3x}$; $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

d) $4f'' - 16f = 0 \Leftrightarrow f'' = 4f = 0$.

Solutions :

$x \mapsto Ae^{2x} + Be^{-2x}$; $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

Exercice 12

a) $x \mapsto Ae^{x\sqrt{7}} + Be^{-x\sqrt{7}}$; $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

b) $x \mapsto Ae^{\frac{\sqrt{3}}{2}x} + Be^{-\frac{\sqrt{3}}{2}x}$; $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

c) $x \mapsto A\exp\left(\sqrt{\frac{6}{5}}x\right) + B\exp\left(-\sqrt{\frac{6}{5}}x\right)$;
$A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

d) $x \mapsto Ae\frac{\sqrt{11}}{3}x + Be-\frac{\sqrt{11}}{3}x$; $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

Exercice 13

a) $x \mapsto A\cos(4x) + B\sin(4x)$; $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

b) $x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x)$; $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

c) $x \mapsto A\cos(11x) + B\sin(11x)$; $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

d) $x \mapsto A\cos\left(\frac{1}{6}x\right) + B\sin\left(\frac{1}{6}x\right)$;
$A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

Exercice 14

a) $x \mapsto A\cos(2x\sqrt{3}) + B\sin(-2x\sqrt{3})$;
$A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

b) $x \mapsto A\cos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right)$;
$A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

c) $x \mapsto A\cos\left(\frac{\sqrt{5}}{5}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{5}}{5}x\right)$;
$A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

d) $x \mapsto A\cos\left(x\sqrt{2}\right) + B\sin\left(x\sqrt{2}\right)$;
$A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

Exercice 15

g est définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = Ax + B$.
$g(2) = -1 \Leftrightarrow 2A + B = -1$ et $g'(-3) = 5$
$\Leftrightarrow A = 5$. Donc $g : x \mapsto 5x - 11$.

Exercice 16

a) $f'' = 4f$, donc $f(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x}$;
$A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.
$f(0) = 2 \Leftrightarrow A + B = 2$ et $f'(0) = 1 \Leftrightarrow 2A - 2B = 1$.
(car $f'(x) = 2Ae^{2x} - 2Be^{-2x}$).
Par suite $A = \frac{5}{4}$ et $B = \frac{3}{4}$.
Donc $f : x \mapsto \frac{5}{4}e^{2x} + \frac{3}{4}e^{-2x}$.
b) $4f'' + 9f = 0 \Leftrightarrow f'' = -\frac{9}{4}f$,
donc $f(x) = A\cos\left(\frac{3}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{3}{2}x\right)$;
$A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.
$f(\pi) = 2 \Leftrightarrow -B = 2$ et $f'(\pi) = -1 \Leftrightarrow +\frac{3}{2}A = -1$.
Par suite $A = \frac{2}{-3}$ et $B = -2$.
Donc $f : x \mapsto \frac{2}{-3}\cos\left(\frac{3}{2}x\right) - 2\sin\left(\frac{3}{2}x\right)$.
c) $f'' + \frac{1}{2}f = 0 \Leftrightarrow f'' = -\frac{1}{2}f$, donc
$f(x) = A\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$;
$A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.
$f(0) = -1 \Leftrightarrow A = -1$ et $f'(0) = 2 \Leftrightarrow +\frac{\sqrt{2}}{2}B = 2$.
Par suite $A = -1$ et $B = 2\sqrt{2}$.
Donc $f : x \mapsto -\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$.
d) $9f'' - 64f = 0 \Leftrightarrow f'' = +\frac{64}{9}f$,
donc $f(x) = Ae^{\frac{8}{3}x} + Be^{-\frac{8}{3}x}$; $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.
$f(0) = 6 \Leftrightarrow A + B = 6$ et $f'(0) = 24$.
$\Leftrightarrow \frac{8}{3}A - \frac{8}{3}B = 24$
(car $f'(x) = \frac{8}{3}Ae^{\frac{8}{3}x} - \frac{8}{3}Be^{-\frac{8}{3}x}$).
Par suite $A = \frac{15}{2}$ et $B = -\frac{3}{2}$.
Donc $f : x \mapsto \frac{15}{2}e^{\frac{8}{3}x} - \frac{3}{2}e^{-\frac{8}{3}x}$.

IV.2. Exercices de renforcement

Exercice 17

$f' = af$, $a \in \mathbb{R}$	$x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$; $k \in \mathbb{R}$
$f' = af + b$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$	$x \mapsto A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$; $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.
$f'' = 0$	$x \mapsto Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$; $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.
$f'' = \omega^2 f$, $\omega \in \mathbb{R}^*$	$x \mapsto Ax + B$; $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.
$f' = -\omega^2 f$, $\omega \in \mathbb{R}^*$	$x \mapsto ke^{ax}$

Exercice 18

a) $f : x \mapsto \frac{1}{2}\sin 2x + c$; $c \in \mathbb{R}$.
b) $f : x \mapsto x - e^x + c$; $c \in \mathbb{R}$.
c) $f : x \mapsto \frac{2}{3}x\sqrt{x} - x^2 + c$; $c \in \mathbb{R}$.

Exercice 19

a) On a $f''(x) = \sin x$, d'où $f'(x) = -\cos x + c$;
$c \in \mathbb{R}$.
Solutions : $x \mapsto -\sin x + cx + d$; $c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}$.
b) $25f' + 200f'' = 0 \Leftrightarrow f'' = -\frac{1}{4}f'$,
d'où $f' = ke^{-\frac{1}{4}x}$; $k \in \mathbb{R}$.
Solutions : $x \mapsto -4ke^{-\frac{1}{4}x}$; $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 20

a) Solutions générale : $x \mapsto ke^{\pi x}$; $k \in \mathbb{R}$.
$f(2) = e^{\pi} \Leftrightarrow k = e^{-\pi}$. Solution F : $x \mapsto e^{\pi x - \pi}$.

Maths Tle D corrigé 06102021.indd 100 06/10/2021 09:50

b) On a $f'' = 2x$, d'où $f'(x) = x^2 + c$; $c \in \mathbb{R}$ et

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + cx + d$; $c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}$.

$f(0) = 1 \Leftrightarrow d = 1$ et $f(1) = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{4}{3}$.

Solution : F : $x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x + 1$.

Exercice 21

a) $\forall \in \mathbb{R}$, $g'(x) = (-2ax + a - 2b)e^{-2x}$

g est solution de (E) ssi $g'(x) + 2g(x) = e^{-2x}$.

ssi $(-2ax + a - 2b)e^{-2x} + 2(ax + b)e^{-2x} = e^{-2x}$

ssi $ae^{-2x} = e^{-2x}$

ssi $a = 1$.

$g : x \mapsto (x + b)e^{-2x}$.

b) g est solution de (E) ssi $g'(x) + g(x) = \sin x$

ssi $\mathrm{A}\cos x - \mathrm{D}\sin x + \mathrm{A}\sin x + \mathrm{B}\cos x = \sin x$

ssi $(\mathrm{A} + \mathrm{B})\cos x + (\mathrm{A} - \mathrm{B})\sin x = \sin x$

ssi $\mathrm{A} + \mathrm{B} = 0$ et $\mathrm{A} - \mathrm{B} = 1$.

ssi $\mathrm{A} = \frac{1}{2}$ et $\mathrm{B} = -\frac{1}{2}$.

Donc $g : x \mapsto \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x$.

Exercice 22

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ et

$g''(x) = 6ax + 2b$.

g est solution de (E) ssi $g''(x) + g(x) = x^3 + 2$

ssi $6ax + 2b + ax^3 + bx^2 + cx + d = x^3 + 2$

ssi $ax^3 + bx^2 + (6a + c)x + 2b + d = x^3 + 2$

ssi $a = 1$; $b = 0$; $6a + c = 0$ et $2b + d = 2$

ssi $a = 1$; $b = 0$; $c = -6$ et $d = 2$

Donc $g : x \mapsto x^3 - 6x + 2$.

b) $g'(x) = [(\mathrm{A} + \mathrm{B})\sin x + (\mathrm{A} - \mathrm{B})\cos x]e^x$

$g''(x) = [2\mathrm{A}\cos x - 2\mathrm{B}\sin x]e^x$

$g''(x) = 16g(x) = -2e^x \sin x$

$[(2\mathrm{A} + 16\mathrm{B})\cos x + (-2\mathrm{B} + 16\mathrm{A})\sin x]e^x$

$= -2e^x \sin x$.

Par identification

$$\begin{cases} 2\mathrm{A} + 16\mathrm{B} = 0 \\ 16\mathrm{A} - 2\mathrm{B} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\mathrm{A} + 16\mathrm{B} = 0 \\ 128\mathrm{A} - 16\mathrm{B} = -16 \end{cases}$$

$130\mathrm{A} = -16 \Rightarrow \mathrm{A} = -\frac{16}{130} = -\frac{8}{65}$

$\mathrm{B} = \frac{-1}{65}$.

Donc $g : x \mapsto \left(-\frac{8}{65}\sin x - \frac{1}{65}\cos x\right)e^x$.

Exercice 23

1. $g'(x) + 2g(x) = 2 + 4x + 1 = 4x + 3$.

Donc g est une solution de l'équation différentielle (E) : $f' + 2f = 4x + 3$.

2. f est une solution de (E) ssi $f' + 2f = 4x + 3$.
g est aussi solution de (E) ssi $g' + 2g = 4x + 3$.
On a : $(f' + 2f) - (g' + 2g) = 0 \Leftrightarrow$

$(f' - g') + 2(f - g) = 0$.

Donc $f - g$ est solution de $(\mathrm{E_O})$.

3. Les solutions de $(\mathrm{E_O})$ sont les fonctions :

$x \mapsto ke^{-2x}$, $k \in \mathbb{R}$.

Les solutions de $(\mathrm{E_O})$ sont les fonctions :

$x \mapsto ke^{-2x} + 4x + 3$.

Exercice 24

1. a) Solutions : $x \mapsto \mathrm{A}\cos 3x + \mathrm{B}\sin 3x$; $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{B} \in \mathbb{R}$.

b) $g(0) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{A} = 1$ et $g'(0) = 3 \Leftrightarrow 3\mathrm{B} = 3$
$\Leftrightarrow \mathrm{B} = 1$. Donc $g : x \mapsto \cos 3x + \sin 3x$.

2. On a : $h(x) = \frac{1}{10}e^{-x}$, d'où $h'(x) = -\frac{1}{10}e^{-x}$

et $h''(x) = \frac{1}{10}e^{-x}$.

Par suite $h''(x) + 9h(x) = \frac{1}{10}e^{-x} + \frac{9}{10}e^{-x} = e^{-x}$.

Donc h est une solution de (E).

3. f est une solution de (E) si $f'' + 9f = e^{-x}$
ssi $f'' + 9f = g'' + 9g$, car $g''(x) + 9g(x) = e^{-x}$
ssi $(f - g)'' + 9(f - g) = 0$
ssi $(f - g)$ est une solution de $(\mathrm{E_O})$.

4. Les solutions de (E) sont les fonctions :

$x \mapsto \mathrm{A}\cos 3x + \mathrm{B}\sin 3x + \frac{1}{10}e^{-x}$; $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{B} \in \mathbb{R}$.

IV.3. Exercices d'approfondissement

Exercice 25

1. Les solutions de (E) sont les fonctions :

$x \mapsto ke^{3x} + \frac{5}{3}$, $k \in \mathbb{R}$.

2. $g(1) = 5 \Leftrightarrow ke^3 + \frac{5}{3} = 5 \Leftrightarrow k = \frac{10}{3}e^{-3}$.

Donc $g : x \mapsto \frac{10}{3}e^{3x-3} + \frac{5}{3}$.

Exercice 26

1. Les solutions de (E) sont les fonctions :
$x \mapsto \mathrm{A}\cos 2x + \mathrm{B}\sin 2x$; $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{B} \in \mathbb{R}$.

Maths Tle D corrigé 06102021.indd 101 06/10/2021 09:50

2) $g(0) = \sqrt{3} \Leftrightarrow A = \sqrt{3}$ et
$g'(0) = 2 \Leftrightarrow 2B = 2 \Leftrightarrow B = 1$.
Donc $g : x \mapsto \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x$.

3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x =$

$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) =$

$2\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos 2x + \cos\frac{\pi}{3}\sin 2x\right)$

$g(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

4. $g(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin 0 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$x \in [0 ; 2\pi[\Leftrightarrow 0 \leq -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{6} < 2\pi$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq k < \frac{13}{3} \Rightarrow k \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.

Donc $S = \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}; \frac{4\pi}{3}; \frac{11\pi}{6}\right\}$.

Exercice 27

1. $f' + f = 1 \Leftrightarrow f' = -f + 1$. Les solutions sont les fonctions : $x \mapsto ke^{-x} + 1, k \in \mathbb{R}$.
2. f est une solution de (E) ssi $f' + (1 + \tan x)f = \cos x$.
ssi $g'(x)\cos x - g(x)\sin x + (1 + \tan x)g(x)\cos x = \cos x$
ssi $g'(x)\cos x - g(x)\sin x + g(x)\cos x + g(x)\sin x = \cos x$
ssi $g'(x)\cos x + g(x)\cos x = \cos x$
ssi $g'(x) + g(x) = 1$, car $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos x \neq 0$.
ssi g est solution de (E_O).
3. $f(x) = g(x)\cos x = (ke^{-x} + 1)\cos(x)$, $k \in \mathbb{R}$, car g est solution de (E_O).
$f(0) = 0 \Leftrightarrow (kE^{O} + 1)\cos(0) = 0 \Leftrightarrow k = -1$.
La solution de (E) qui s'annule en 0 est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = (-e^{-x} + 1)\cos x$.

Exercice 28

1. $q'(x) = k(q(t) - 20)$, avec $k = -2{,}08$.
Donc $q'(x) = -2{,}08q(t) - 41{,}6$.
2. $q(x) = ke^{-2{,}08t} - \frac{41{,}6}{-2{,}08}$, $k \in \mathbb{R}$.
Et comme $q(0) = 100$, on a : $k = 80$.
Donc $q(x) = 80e^{-2{,}08t} + 20$.
3. $\forall t \in [0 ; +\infty[$, $q'(x) = -166{,}4e^{-2{,}08t}$,
$q'(t) < 0$, donc q est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$.
4. $\lim\limits_{t\to+8} q(t) = 20$.
Interprétation : Quel que soit le temps mis, la température ne descendra pas au-dessous de 20°C.
5. - Au bout de 20 min, la température est q(30), soit environ 20°C.
- Au bout de 20 min, la température est $q(30)$, soit environ 20°C.
6. Il s'agit de trouver t tel que $q(t) = 30$.

$q(t) = 30 \Leftrightarrow 80e^{-2{,}08t} + 30 = 30 \Leftrightarrow e^{-2{,}08t} = \frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow e^{-2{,}08t} = \frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow -2{,}08t = \ln\frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow t = \frac{\ln 8}{2{,}08}$.

La température sera de 30°C après $\frac{\ln 8}{2{,}08}$ min, soit 0,9997 min ou environ 1 min.

Exercice 29

1. On pose $y = U_C$. L'équation différentielle s'écrit alors : $E = RCy' + y$, soit $RCy' = -y + E$ ou encore : $y' = -\frac{1}{RC}y + \frac{E}{RC}$.
Cette équation est de la forme : $y' = ay + b$, avec $a = -\frac{1}{RC} \approx -28{,}4$ et $b = \frac{E}{RC} \approx 170{,}45$.
2. Les solutions générales de l'équation $y' = ay + b$ sont de la forme : $y = ke^{at} - \frac{b}{a}$, $k \in \mathbb{R}$.

Donc les solutions générales de l'équation $y' = -\frac{1}{RC}y + \frac{E}{RC}$ sont de la forme :

$y = ke^{-\frac{1}{RC}t} + E$, $k \in \mathbb{R}$.

Pour $t = 0$, on a $U_C = 0$ c-à-d $y = 0$.
Donc on a : $0 = k + E$, soit $k = -E$.
La solution de cette équation est :

$y = -Ee^{-\frac{1}{RC}t} + E$, soit $y = -6e^{-28{,}4t} + 6$.

3) Pour $t = 0{,}1$ on a $y = -6e^{-2{,}84} + 6 \approx 5{,}65$.
Donc au bout de 100 ms, $U_C \approx 5{,}65$ V.

IV.4. Situations d'évaluation

Exercice 30

1. La fonction $N : t \mapsto N(t)$ est solution de l'équation différentielle $f' = -0{,}0001238f$.

Donc $N(t) = ke^{-0{,}0001238t}$, $k \in \mathbb{R}$.

$N(0) = N_0 \Leftrightarrow kE^{O} = N_0 \Leftrightarrow k = N_0$.

Donc $N(t) = N_0e^{-0{,}0001238t}$.

2. Il faut trouver la valeur pour laquelle :

$N(t) = \frac{1}{2}N_0$.

$N(t) = \frac{1}{2}N_0 \Leftrightarrow N_0e^{-0{,}0001238t} = \frac{1}{2}N_0$.

$\Leftrightarrow -0{,}0001238t = \ln(0{,}5)$.

$\Leftrightarrow t = \dfrac{\ln(0{,}5)}{-0{,}0001238} \approx 5599$ ans.

La période (ou demi-vie) du ^{14}C est 5599 ans.

3. Puisque les fragments ont perdu 30% de leur teneur en ^{14}C, il leur en reste 70%.

Il faut trouver la valeur de t telle que :

$N(t) = 0{,}7N_0$.

$N(t) = 0{,}7N_0 \Leftrightarrow N_0e^{-0{,}0001238t} = 0{,}7N_0$

$\Leftrightarrow -0{,}0001238t = \ln(0{,}7)$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{\ln(0{,}7)}{-0{,}0001238} \approx 2281$.

Les fragments ont donc environ 2281 ans.

Exercice 31

1. La vitesse de diminution de la population est $p'(t)$, comme elle est à chaque instant proportionnelle à cette population, on a :

$p'(t) = ap(t)$, avec $a \in \mathbb{R}$.

On a alors $p(t) = ke^{at}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Ainsi : $p(0) = 512 \Leftrightarrow k = 512$.

Donc $p(t) = 512e^{at}$.

On a : $p(16) = 256 \Leftrightarrow 512e^{16a} = 256$

$\Leftrightarrow e^{16a} = 0{,}5$

$\Leftrightarrow 16a = \ln 0{,}5$

$\Leftrightarrow \frac{1}{16}\ln\frac{1}{2}$.

Donc : $p(t) = 512e^{\frac{1}{16}t\ln\frac{1}{2}}$

2. En l'an 2030, on a : $t = 30$.

On a : $p(30) = 512e^{\frac{30}{16}\ln\frac{1}{2}} \approx 139{,}6$.

En l'an 2030 il y aura encore environ 139 singes.

L'affirmation du chef de classe n'est pas juste.

Mise en page : Vallesse Éditions
Tel : 2722410821/0101916125
Achevé d'imprimer en Côte d'Ivoire
3ème trimestre 2021
Dépôt légal : n° 17791 du 06 août 2021