Collection
La Réussite

# Mathématiques

$2^{nde}$ C

## Livre du professeur

Vallesse

# Sommaire

# Sommaire

Leçon 1

# ENSEMBLE DES NOMBRES RÉELS

## INSTALLATION DES HABILETÉS

### Activité 1 Ensemble des nombres rationnels et irrationnels

#### 1.1. Nombres irrationnels

1)

| | $\mathbb{Z}$ | $\mathbb{D}$ | $\mathbb{Q}$ |
|---|---|---|---|
| $-2$ | X | X | X |
| $253$ | X | X | X |
| $\frac{10}{5}$ | X | X | X |
| $-3{,}14$ | | X | X |
| $\frac{22}{7}$ | | | X |
| $\pi$ | | | |
| $-\frac{15}{2}$ | | X | X |
| $\sqrt{2}$ | | | |

2) Les nombres qui n'appartiennent à aucun ensemble sont $\pi$ et $\sqrt{2}$.

3) Un nombre rationnel est de la forme $\frac{a}{b}$, où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$

**Exercices de fixation**

**1-1-1** $-\pi \notin \mathbb{Z}$ ; $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ ; $-7 \notin \mathbb{N}$ ; $\pi \notin \mathbb{Q}$ ; $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$

**1-1-2** 1) $1{,}2 \in \mathbb{D}$, mais $1{,}2 \notin \mathbb{Z}$
2) $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
3) $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ , mais $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$

#### 1.2. Raisonnement par l'absurde

1) On suppose que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel, il pourrait s'écrire alors $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que la fraction $\frac{p}{q}$ soit irréductible.

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \Leftrightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2}$

$\Leftrightarrow 2 = p^2 = 2q^2$

2. a)

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Chiffre des unité de $p$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Chiffre des unité de $p^2$ | 0 | 1 | 4 | 9 | 6 | 5 | 6 | 9 | 4 | 1 |

b)

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Chiffre des unité de $q$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Chiffre des unité de $2q^2$ | 0 | 2 | 8 | 8 | 2 | 0 | 2 | 8 | 8 | 2 |

3. a) $p^2 = 2q^2$ cette égalité est vraie si $p$ et $q$ se terminent par 0 où $q \neq 0$.
b Les chiffres qui terminent p et q sont multiple de 2.
c) $\frac{p}{q}$ est divisible par 2.
d) Ce qui est contradictoire, donc $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

## Exercices de fixation

**1-2-1** On sait que $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

Supposons que $1+\sqrt{2}$ est un nombre rationnel,

donc $1+\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$

$1+\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{p-q}{q}$, $\frac{p-q}{q}$ est un nombre rationnel or $\sqrt{2}$ est un irrationnel ce qui est absurde.

Donc $\underline{1+\sqrt{2}}$ est un nombre irrationnel.

**1-2-2** Démontrons que $\sqrt{8}$ est un irrationnel

Supposons que $\sqrt{8}$ est un rationnel.

On sait que $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ c'est–à-dire $\sqrt{2} = \frac{\sqrt{8}}{2}$ ;

2 est un rationnel et si $\sqrt{8}$ est un rationnel alors $\frac{\sqrt{8}}{2}$ est un rationnel ce qui conduit à $\sqrt{2}$ est un rationnel.

Cela est absurde.

Donc 8 est un irrationnel.

## Activité 2 Ordre et addition

a) $A = (x+3)^2$ ; $B = x^2 + 9$

$A - B = 6x$, comme $x$ est positif ; $A - B$ est positif

b) $A > B$

c) Pour comparer deux nombres, on peut étudier le signe de leur différence.

2) $c = \sqrt{29}$ et $d = 3\sqrt{3}$

a) $c^2 = 29$ et $d^2 = 27$

b) $c^2 > d^2$ on a : $c > d$ car c et d sont positifs.

c) Pour comparer deux nombres réels positifs on peut comparer leur carrés.

3) $e = \frac{1}{13}$ ; $f = \frac{1}{5\sqrt{7}}$

a) On a : $13^2 < (5\sqrt{7})^2$ donc $13 < 5\sqrt{7}$

b) $13 < 5\sqrt{7}$ donc $\frac{1}{12} > \frac{1}{5\sqrt{7}}$ donc $e > f$.

c) Pour comparer deux nombres réels non nuls on peut comparer leurs inverses.

## Exercices de fixation

**2-1**

- $\frac{1}{6} = \frac{4}{24}$, on a : $\frac{4}{24} < \frac{5}{24}$
- $\frac{859}{857} - \frac{758}{757} = \frac{-200}{648749}$ et $\frac{-200}{648749} < 0$,

donc $\frac{859}{857} < \frac{758}{757}$

- $\left(2\sqrt{7}\right)^2 = 28$ et $\left(3\sqrt{5}\right)^2 = 45$. On a $28 < 45$

donc $2\sqrt{7} < 3\sqrt{5}$

- On sait que $8\sqrt{5} < 6\sqrt{10}$

$8\sqrt{5} < 6\sqrt{10} \Leftrightarrow -8\sqrt{5} > -6\sqrt{10}$

Donc $7 - 8\sqrt{5} > 7 - 6\sqrt{10}$

- $-3 > -5$ donc $-3 - \pi > -5 - \pi$

**2-2** a) $\frac{145}{8} < \frac{137}{5}$ ; b) $\frac{43}{117} > \frac{42}{116}$ ;

c) $-17 < -12\sqrt{2}$

**2-3** $\left(\sqrt{21}+\sqrt{11}\right)^2 = 32 + 2\sqrt{232}$ et

$\left(\sqrt{22}+\sqrt{10}\right)^2 = 32 + 2\sqrt{220}$,

On a $2\sqrt{232} > 2\sqrt{220}$

et $32 + 2\sqrt{232} > 32 + 2\sqrt{220}$

Donc $\sqrt{21}+\sqrt{11} > \sqrt{22}+\sqrt{10}$

## Activité 3 Minorant, majorant, minimum et maximum d'un ensemble

1. a) Cinq nombres plus grands et égaux aux éléments de E : 37 ; 39 ; 50 ; 51 ; 100

b) $37 \in E$

2. a) Cinq nombres plus petits et égaux aux éléments de E :

–30 ; –20 ; –15 ; –12 ; –10

b) $-10 \in E$

## Exercices de fixation

**3-1** 1- b ; 2- c ; 3- c

**3-2** 1. a) Deux majorants de A qui ne sont pas éléments de A sont : 2 ; 3

b) Le maximum de A est 1.

2. a) Deux minorants de A : $\frac{1}{9}$ ; $\frac{1}{10}$

b) $\frac{1}{8} < 1$ ; $\frac{1}{8} < \frac{1}{2}$ ; $\frac{1}{8} < \frac{1}{3}$ ; $\frac{1}{8} < \frac{1}{4}$ ; $\frac{1}{8} < \frac{1}{5}$ ; $\frac{1}{8} < \frac{1}{6}$ ; $\frac{1}{8} \leq \frac{1}{8}$.

$\frac{1}{8} \in$ A, donc $\frac{1}{8}$ est le minimum de A.

**3-3** $A = \left[-8 ; \frac{15}{8}\right]$

a) $\frac{15}{8} < 4$ d'où pour tout $x$ élément de A, $x < 4$ donc 4 est un majorant de A.

b) $-8 \in$ A et $-8$ est un minorant de A, donc $-8$ est le minimum de A.

## Activité 4 Valeur absolue et distance de deux nombres réels

### 4.1. Valeur absolue

1) $|a| = a$ si $a \geq 0$ et $|a| = -a$ si $a \leq 0$

2)

| N° | $a$ | $b$ | $\lvert a \rvert$ | $\lvert b \rvert$ | $\lvert a+b \rvert$ | $\lvert a \rvert + \lvert b \rvert$ | $\lvert ab \rvert$ | $\lvert a \rvert \times \lvert b \rvert$ | $\sqrt{a^2}$ | $\left\lvert \frac{a}{b} \right\rvert$ | $\frac{\lvert a \rvert}{\lvert b \rvert}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | –3 | 5 | 3 | 5 | 2 | 8 | 15 | 15 | 3 | $\frac{3}{5}$ | $\frac{3}{5}$ |
| 2 | 14 | 17 | 14 | 17 | 31 | 31 | 238 | 238 | 14 | $\frac{14}{17}$ | $\frac{14}{17}$ |
| 3 | –7 | –17 | 7 | 17 | 24 | 24 | 119 | 119 | 7 | $\frac{7}{17}$ | $\frac{7}{17}$ |
| 4 | $\frac{2}{3}$ | $-\frac{5}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{5}{2}$ | $\frac{11}{6}$ | $\frac{19}{6}$ | $\frac{5}{3}$ | $\frac{5}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{4}{15}$ | $\frac{4}{15}$ |

3) a) $|ab| = |a| \times |b|$ ; b) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ ; c) $\sqrt{a^2} = |a|$ ; d) $|a + b| \leq |a| + |b|$

## Exercices de fixation

**4-1-1** 1- Faux ; 2- Vrai ; 3- Faux

**4-1-2** $|-2| = 2$ ; $|-2 - \sqrt{5}| = 2 + \sqrt{5}$ ;
$|\pi - 3{,}14| = \pi - 3{,}14$ ; $|10^{-3}| = 10^{-3}$

**4-1-3** a) $|x| = 5 \Leftrightarrow x = 5$ ou $x = -5$

b) 


### 4.2. Distance de deux nombres réels

1) AB = |2,3 + 1,8| = 4,1 ; CD = $|x + 5{,}2|$ ; DB = $|2{,}3 - x|$

2) CD = 2 $\Leftrightarrow x + 5{,}2 = 2$ ou $x + 5{,}2 = -2 \Leftrightarrow x = -3{,}2$ ou $x = -7{,}2$

3) DB $\leq 3 \Leftrightarrow -0{,}7 \leq x \leq 5{,}3$

## Exercices de fixation

**4-2-1** La réponse juste est la réponse C.

**4-2-2** La distance entre –3 et 4 est |4 – (–3)| = 7

La distance entre 0 et –5 est |5 – 0| = 5

La distance entre $\frac{3}{2}$ et $\sqrt{3}$ est

$\left|\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right| = \sqrt{3} - \frac{3}{2}$

La distance entre 3 et $\pi$ est $|\pi - 3| = \pi - 3$

La distance entre $-\frac{7}{3}$ et $-\frac{9}{4}$ est

$\left|-\frac{9}{4} + \frac{7}{3}\right| = \frac{1}{12}$

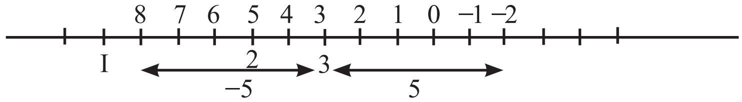
### 4.3. Résolution d'équation du type : $x \in \mathbb{R}$, $|x - a| = r$

1) $|x - 3| = 5 \Leftrightarrow x - 3 = 5$ ou $x - 3 = -5$

$\Leftrightarrow x = 8$ ou $x = -2$.

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est $\{-2 ; 8\}$.

2)




L'ensemble des solutions de (E) est $\{-2 ; 8\}$.

## Exercices de fixation

**4-3-1** 1) $|x - 2| = 5 \Leftrightarrow x - 2 = 5$ ou $x - 2 = -5$

$\Leftrightarrow x = 3$ ou $x = 7$.

$S = \{-3 ; 7\}$

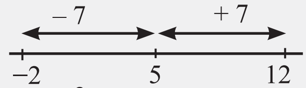
2) $|x + \frac{10}{3}| = \frac{7}{3} \Leftrightarrow x + \frac{10}{3} = \frac{7}{3}$ ou $x + \frac{10}{3} = -\frac{7}{3}$

$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = -\frac{17}{3}$ .

$S = \{-1 ; -\frac{17}{3}.\}$

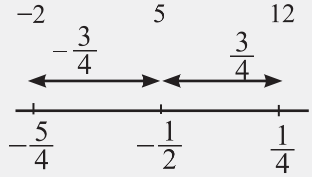
3) $|x - 0{,}6| = -3$ impossible $S = \varnothing$.

**4-3-2** 1)



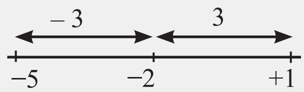

$S = \{-2 ; 12\}$

2)




$S = \{-\frac{5}{4} ; \frac{1}{4}\}$

3)




$S = \{-5 ; 1\}$

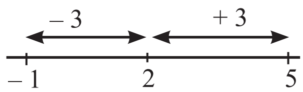
### 4.4. Résolution d'inéquation du type : $x \in \mathbb{R}$, $|x - a| \leq r$

1) $|x - 2| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x - 2 \leq 3$

$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 5$

$S = [-1 ; 5]$.

2)




$S = [-1 ; 5]$.

## Exercices de fixation

**4-4-1** 1) $|x - 4| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x - 4 \leq 3$

$\Leftrightarrow 1 \leq x \leq 7$

$S = [1 ; 7]$.

2) $|x - \frac{2}{3}| \leq \frac{5}{4} \Leftrightarrow -\frac{5}{4} \leq x - \frac{2}{3} \leq \frac{5}{4}$

$\Leftrightarrow -\frac{7}{12} \leq x \leq \frac{23}{12}$

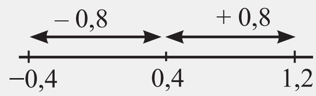
$S = [-\frac{7}{12} ; \frac{23}{12}]$.

3) $|x + 7| \leq 9 \Leftrightarrow -9 \leq x + 7 \leq 9$

$\Leftrightarrow -16 \leq x \leq 2$

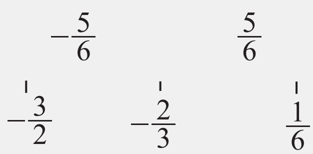
$S = [-16 ; 2]$.

**4-4-2** 1) $|x - 0{,}4| \leq 0{,}8$




$S = [-0{,}4 ; 1{,}2]$.

2) $|x + \frac{2}{3}| \leq \frac{5}{6}$




$S = [-\frac{3}{2} ; \frac{1}{6}]$.

## Activité 5 Calculs approchés

1. a) l'approximation décimale par défaut d'ordre 2 de $\sqrt{2}$ est 1,41

l'approximation décimale par défaut d'ordre 2 de $\frac{-22}{7}$ est –3,15

b) l'approximation décimale par excès d'ordre 6 de $\sqrt{2}$ est 1,416214

l'approximation décimale par excès d'ordre 6 de $\frac{-22}{7}$ est –3,142858

2) a) l'arrondi d'ordre 2 de $\sqrt{2}$ est 1,41

b) l'arrondi d'ordre 4 de $\frac{-22}{7}$ est –3,1429

3) $-1{,}73 < \sqrt{2} - \frac{22}{7} < -1{,}72$

## Exercices de fixation

**5-1** Soit : $a = 2{,}236067$.

La valeur approchée par excès de $a$ à $10^{-2}$ est : 2,24
La valeur approchée par excès de $a$ à $10^{-3}$ est 2,237
La valeur approchée par défaut de $a$ à $10^{-3}$ est 2,236
L'arrondi de $a$ à l'ordre 2 est : 2,24
L'arrondi de $a$ à l'ordre 3 est : 2,236

**5-2**
- $6{,}316 \leq 3 + \sqrt{11} \leq 6{,}317$
- $1{,}683 < 5 - \sqrt{11} < 1{,}684$
- $1{,}105 < \frac{\sqrt{11}}{3} < 1{,}106$
- $0{,}301 < \frac{1}{\sqrt{11}} < 0{,}302$

**5-3**
- $5{,}37 < \pi + \sqrt{5} < 5{,}39$
- $0{,}90 < \pi - \sqrt{5} < 0{,}92$
- $0{,}62 < \frac{\pi}{5} < 0{,}63$
- $-7{,}05 < -\pi\sqrt{5} < -7$

## Activité 6 Partie entière d'un nombre réel

1) $n = -3$ ; 2) $n = 7$

## Exercices de fixation

**6-1** a) Faux ; b) Vrai ;
c) Vrai ; d) Vrai ;
e) Vrai ; f) Faux.

**6-2** $E(\sqrt{3}) = 1$

$E\left(\frac{2}{3}\right) = 0$

$E(-\pi) = -4$

$E\left(\frac{22}{7}\right) = 3.$

# Exercices

## Exercices de renforcement

**1** a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$

b) $3 - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = 3 - \frac{1}{9} + \frac{3}{9}$

$3 - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = 3 + \frac{2}{9}$

$3 - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{29}{9}$

c) $\frac{5}{4} \times \frac{12}{35} = \frac{5 \times 4 \times 3}{4 \times 7 \times 5} = \frac{3}{7}$

d) $4 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = 4 \times \frac{2+3}{6}$

$= 4 \times \frac{5}{6}$

$4 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{10}{3}$

e) $\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3 + 5 \times 2}{15} \times \frac{4+3}{12}$

$= \frac{13 \times 7}{15 \times 12} = \frac{91}{180}$

**2** $a = 15 : \frac{5}{4} = 15 \times \frac{4}{5} = 12$

$b = \frac{7}{5} : \frac{14}{3} = \frac{7}{5} \times \frac{3}{14} = \frac{3}{10}$

$c = 3 - 2 \times \frac{5}{3} : \frac{20}{21} = 3 - \frac{10}{3} : \frac{20}{21}$

$c = 3 - \frac{10}{3} \times \frac{21}{20}$

$c = 3 - \frac{7}{2} = -\frac{1}{2}$

$d = \frac{5}{3} - \frac{4}{5} + \frac{2}{7} \times \frac{21}{3} = \frac{25 - 12}{15} + 2$

$d = \frac{13 + 2 \times 15}{15}$

$d = \frac{43}{15}$

$e = \left(1 + \frac{2}{5}\right) : \left(3 - \frac{1}{5}\right) = \frac{7}{5} : \frac{14}{5}$

$= \frac{7}{5} \times \frac{5}{14}$

$e = \frac{1}{2}$

**3** $A = \dfrac{5}{\dfrac{2}{\frac{2}{3}}} = \dfrac{5}{2 \times \frac{3}{2}}$

$A = \frac{5}{3}$

$B = \dfrac{2}{\frac{5}{6}} = 2 \times \frac{6}{5}$

$B = \frac{12}{5}$

$C = \dfrac{2 - \frac{1}{3}}{2 + \frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{7}{3}} = \frac{5}{3} \times \frac{3}{7}$

$C = \frac{5}{7}$

$D = \dfrac{\frac{2}{7} + \frac{5}{21}}{\frac{5}{9} - \frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{6 + 5}{21}}{\frac{5 - 3}{9}} = \frac{11}{21} \times \frac{9}{2}$

$D = \frac{33}{14}$

$E \dfrac{5\left(2 - \frac{19}{3}\right)}{\frac{11}{6} : \frac{5}{2}} = \dfrac{5\left(-\frac{13}{3}\right)}{\frac{11}{15}} = 5 \times \left(-\frac{13}{3}\right) \times \frac{15}{11}$

$E = -\frac{65 \times 25}{33} = -\frac{325}{11}$

$F = \dfrac{\frac{3}{5} - \frac{5}{6}}{\frac{1}{4} - \frac{2}{3}} = \dfrac{\frac{18 - 25}{30}}{\frac{3 - 8}{12}} = \frac{-7}{30} \times \frac{12}{-5}$

$F = \frac{14}{25}$

**4** a) $\dfrac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{7}}{\frac{2}{3} - \frac{4}{7} + \frac{1}{6}} = \dfrac{\frac{14 + 21 - 18}{42}}{\frac{28 - 24 + 7}{42}} = \frac{17}{42} \times \frac{42}{11}$

$\dfrac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{7}}{\frac{2}{3} - \frac{4}{7} + \frac{1}{6}} = \frac{17}{11}$

b) $3 + 5 \times \dfrac{\frac{7}{2} - 2}{\frac{7}{4} - \frac{1}{2}} = 3 + 5 \times \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{4}} = 3 + 5 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{5} = 9$

c)

$3 + \dfrac{1}{7 + \dfrac{1}{15 + \frac{1}{2}}} = 3 + \dfrac{1}{7 + \dfrac{1}{\frac{31}{2}}}$

$= 3 + \dfrac{1}{\frac{31 \times 7 + 2}{31}} = 3 + \dfrac{1}{\frac{217 + 2}{31}}$

$= 3 + \frac{31}{219} = \frac{3 \times 219 + 31}{219} = \frac{657 + 31}{219}$

$= \frac{688}{219}$

d) $\dfrac{\frac{90}{71}}{\frac{9}{29}} \times \dfrac{\frac{13}{58}}{\frac{39}{71}} = \frac{90}{71} \times \frac{29}{9} \times \frac{13}{58} \times \frac{71}{39}$

$= \frac{90 \times 29 \times 13 \times 71}{71 \times 9 \times 58 \times 39}$

$= \frac{9 \times 2 \times 5 \times 29 \times 13}{9 \times 29 \times 2 \times 13 \times 3}$

$\dfrac{\frac{90}{71}}{\frac{9}{29}} \times \dfrac{\frac{13}{58}}{\frac{39}{71}} = \frac{5}{3}$

**5** $\frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{75}} = \frac{5\sqrt{7} \times \sqrt{75}}{75} = \frac{\sqrt{7} \times 5\sqrt{5}}{15}$

$\frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{75}} = \frac{\sqrt{35}}{3}.$

$\sqrt{8} \times \sqrt{72} \times \sqrt{144} = \sqrt{4 \times 2} \times \sqrt{9 \times 8} \times \sqrt{12^2}$

$= 2\sqrt{2} \times 6\sqrt{2} \times 12$

$= 144 \times 2$

$\sqrt{8} \times \sqrt{72} \times \sqrt{144} = 288.$

$$\sqrt{7}\times\sqrt{0,0007}=\sqrt{7}\times\sqrt{7,10^{-4}}$$
$$=\sqrt{7}\times 10^{-2}\sqrt{7}=10^{-2}\times 7$$
$$\sqrt{7}\times\sqrt{0,0007}=0,07.$$
$$\sqrt{\sqrt{6^8}}=\sqrt{6^4}=6^2$$
$$\sqrt{\sqrt{6^8}}=36.$$

**6** $$\sqrt{3}+5\sqrt{0,12}=\sqrt{3}+5\sqrt{12\times10^{-2}}$$
$$=\sqrt{3}+5\times2\times10^{-1}\sqrt{3}$$
$$\sqrt{3}=\sqrt{3}+\sqrt{3}$$
$$\sqrt{3}+5\sqrt{0,12}=2\sqrt{3}.$$
$$\frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{2}\times\sqrt{3}}=\frac{2}{5\sqrt{2}}$$
$$\frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{5}.$$
$$\frac{2\sqrt{3}+1}{3\sqrt{3}}=\frac{(2\sqrt{3}+1)\sqrt{3}}{9}=\frac{6+\sqrt{3}}{9}$$
$$\frac{2\sqrt{3}+1}{3\sqrt{3}}=\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{3}}{9}.$$
$$\sqrt{3\times5^4}=5^2\sqrt{3}$$
$$\sqrt{3\times5^4}=25\sqrt{3}.$$
$$3\sqrt{50}-\sqrt{98}=3\sqrt{25\times2}-\sqrt{49\times2}$$
$$=15\sqrt{2}-7\sqrt{2}$$
$$3\sqrt{50}-\sqrt{98}=8\sqrt{2}$$
$$\sqrt{0,12}\times\sqrt{\frac{3}{125}}=\sqrt{12\times10^{-2}}\times\sqrt{\frac{3}{25\times5}}$$
$$10^{-1}\times2\sqrt{3}\times\frac{1}{5}\sqrt{\frac{3}{5}}=\frac{0,2}{5}\times\frac{3}{\sqrt{5}}$$
$$\sqrt{0,12}\times\sqrt{\frac{3}{125}}=\frac{0,6\sqrt{5}}{5}=\frac{0,12.\sqrt{5}}{5}=0,024\sqrt{5}$$
$$\frac{5}{5-\sqrt{5}}=\frac{5(5+\sqrt{5})}{20}=\frac{5+\sqrt{5}}{4}.$$
$$\frac{5-\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}-\frac{5+\sqrt{3}}{5-\sqrt{3}}=\frac{(5-\sqrt{3})^2-(5+\sqrt{3})^2}{20}$$
$$=\frac{25-10\sqrt{3}+3-(25+10\sqrt{3}+3)}{22}=\frac{20\sqrt{3}}{22}$$
$$=\frac{5-\sqrt{3}}{5-\sqrt{3}}-\frac{5+\sqrt{3}}{5-\sqrt{3}}=-\frac{1°\sqrt{3}}{11}.$$

**7** $a=(3^5)^{-3}\times16^3=3^{-15}\times16^3=3^{-15}\times(2^4)^3$
$a=2^{12}\times3^{-15}.$

$$b=\frac{27^3}{2^{-5}}=27^3\times2^5=(3^3)^3\times2^5$$
$b=2^5\times3^9.$

$$c=\left(\frac{2}{3}\right)^{11}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{12}=\left(\frac{2}{3}\right)^{11}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{11}\times\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}\right)^{11}\times\frac{3}{2}=3\times\frac{1}{2}$$
$c=2^{-1}\times3^1.$

$$d=\frac{(10^2)^4}{3^7\times5^8}=\frac{10^8}{3^7\times5^8}=\frac{2^8\times5^8}{3^7\times5^8}$$
$d=2^8\times3^{-7}.$

**8** $$A=\left(\frac{4}{3}\right)^{50}\times0,75^{51}=\left(\frac{4}{3}\right)^{50}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{51}$$
$$=\left(\frac{4}{3}\right)^{50}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{50}\times\frac{3}{4}$$
$$=\left(\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\right)^{50}\times\frac{3}{4}=1^{50}\times\frac{3}{4}$$
$$=\frac{3}{4}$$

$$B=-\frac{4}{11}\times\left(\frac{2}{11}\right)^{-3}\times(5,5)^{-1}$$
$$=-\frac{4}{11}\times\left(\frac{2}{11}\right)^{-3}\times\left(\frac{11}{2}\right)^{-1}$$
$$=-\frac{4}{11}\times\frac{2^{-3}}{11^{-3}}\times\frac{11^{-1}}{2^{-1}}=-\frac{2^2}{2^{-1}}\times\frac{2^{-3}}{11^{-2}}\times11^{-1}$$
$$=-2^3\times2^{-3}\times11^1=-2^{-0}\times11$$
$$=-11$$

$$C=\frac{(3^5\times2^{-2})^2}{(9^{-1}\times2^3)^3}=\frac{3^{10}\times2^{-4}}{3^{-3\times3}\times2^9}$$
$$C=\frac{3^{19}}{2^{+13}}$$

$$D=\frac{10^9-6^3}{25^4\times3\times2^{11}}=\frac{2^3\times2^6\times5^9-2^3\times3^3}{5^8\times3\times2^{11}}$$
$$=\frac{2^3(5^9\times2^6-3^3)}{2^3(5^8\times3\times2^8)}$$
$$D=\frac{5^9\times2^6-3^3}{5^8\times3\times2^8}$$

**9**

$$A = \frac{12^5 \times 35^{-2}}{49^{-3} \times 21^4} = \frac{(2^2 \times 3)^5 \times (7 \times 5)^{-2}}{7^{-6} \times 7^4 \times 3^4}$$

$$= 2^{10} \times 3 \times 5^{-2}$$

$$A = \frac{3 \times 2^{10}}{5^2}$$

$$B = \frac{(7^2 \times 3)^{-3} \times 5^2}{7 \times 3^{-3}} = \frac{7^{-6} \times 3^{-3} \times 5^2}{7 \times 3^{-3}} = 7^{-7} \times 5^2$$

$$B = \frac{5^2}{7^7}$$

$$C = \left(\frac{7^5 \times 3^{-3}}{9 \times 49}\right)^2 = \frac{7^{10} \times 3^{-6}}{(3^2 \times 7^2)^2}$$

$$= \frac{3^{10} \times 2^{-4}}{3^{-6} \times 2^9} = \frac{7^{10} \times 3^{-6}}{3^4 \times 7^4}$$

$$C = \frac{7^6}{3^{10}}$$

$$D = \frac{49 \times 105^2 \times 32}{(100 \times 7)^3} = \frac{7^2 \times 2^5 \times 3^2 \times 7^2 \times 5^2}{2^6 \times 5^6 \times 7^3}$$

$$= \frac{7^4 \times 5^2 \times 3^2 \times 2^5}{2^6 \times 5^6 \times 7^3} = 7 \times 5^{-4} \times 3^2 \times 2^{-1}$$

$$D = \frac{7 \times 3^2}{2 \times 5^4}$$

$$E = \frac{(4^{-3} \times 10^2)^2 \times 75^{-3}}{4000^{-1} \times 16} = \frac{2^{-12} \times 2^4 \times 5^4 \times 3^{-3} \times 5^{-3}}{2^{-2} \times 10^{-3} \times 2^4}$$

$$= \frac{2^{-8} \times 2^5 \times 5 \times 5^3 \times 2^{-4} \times 3^{-3}}{1} = 2^{-7} \times 5^4 \times 3^{-3}$$

$$E = \frac{5^4}{2^7 \times 3^3}$$

$$F = \frac{(3^3 \times 5^3)^3 \times 2^7}{5^2 \times (3 \times 2^3)^2} = \frac{3^9 \times 5^9 \times 2^7}{5^2 \times 3^2 \times 2^6} = 3^{9-2} \times 5^{9-2} \times 2^{7-1}$$

$$F = 2 \times 3^7 \times 5^7$$

$$G = \frac{(-2)^7 \times (-6)^5 (-3)^{10}}{18^4 \times (-12)^3} = \frac{-2^7 \times 3^5 \times 2^5 \times 3^{10}}{3^8 \times 2^4 \times 2^6 \times 3^3}$$

$$= -2^7 \times 2^{-4} \times 3^5 \times 3^{-8} \times 2^5 \times 3^{10} \times 2^{-6} \times 3^{-3}$$

$$G = -2^2 \times 3^4$$

**10** $A = (-a)^5 \times (-b)^4 = -(a^4) \times (b)^4.a = -(ab)^4.a$

$A = -a^5.b^4.$

$$B = -\frac{a^3 b^{-24}}{a^5 b^{-5}} = -\frac{a^3 b^{-24}}{a^5 b^{-5}}$$

$$B = -a^{-2} b^{-19}$$

$$C = -\frac{16a^2 b^5}{(2ab)^4} = \frac{-2^4 a^2 b^5}{2^4 a^4 b^4} = -a^{2-4} b^{5-4}$$

$$C = -a^{-2} b^1$$

$$D = \frac{(a^{-2} \times b)^4 \times (-a^2 \times b)^{-1}}{(-ab^{-1})^{-3}} = \frac{-a^{-8} \times b^4 \times a^{-2} \times b^{-1}}{-a^{-3} b^3}$$

$$= a^{-8} \times a^3 \times a^{-2} \times b^4 \times b^{-3} \times b^{-1}$$

$$D = a^{-7} \times b^0$$

$$D = a^{-7}$$

$$E = (a^{-4}b)^2 \times (a^2 b^{-1})^{-1} = a^{-8} \times b^2 \times a^{-2} \times b^1$$

$$= a^{-8} \times a^{-2} \times b^2 \times b^1$$

$$E = a^{-10} \times b^3$$

$$F = \frac{(a^2 b)^3 \times b^{-2} c^3}{a^2 c^{-1} (c^2 b)^2} = \frac{a^6 \times b^3 \times b^{-2} \times c^3}{a^2 \times c^{-1} \times c^4 \times b^2}$$

$$F = \frac{a^6 \times b \times c^3}{a^2 \times b^2 \times c^3} = a^{6-2} \times b^{1-2} \times c^{3-3}$$

$$F = a^4 b^{-1}$$

**11** $\frac{1}{2\sqrt{30}}$ et $\frac{1}{11}$

$(2\sqrt{30})^2 = 120$

$11^2 = 121$

$120 < 121$ donc $2\sqrt{30} < 11$

$\frac{1}{2\sqrt{30}} > \frac{1}{11}$.

$9 + \sqrt{10}$ et $12 + \sqrt{11}$

$9 < 12$ et $\sqrt{10} < \sqrt{12}$

On a : $9 + \sqrt{10} : 12 + \sqrt{11}$

$12 + \sqrt{11} > 9 + \sqrt{10}$.

$-7(1 + \sqrt{2})$ et $-5(1 + \sqrt{2})$.

$-7 < -5$

$1 - \sqrt{2} < 0$ donc $-7(1 - \sqrt{2}) > -5(1 - \sqrt{2})$.

$3-2\sqrt{7}$ et $3-3\sqrt{3}$

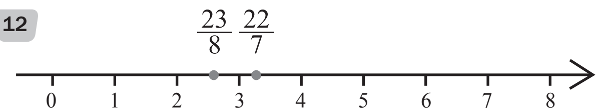
$(2\sqrt{7})^2=28$ et $(3\sqrt{3})^2=27$

$2\sqrt{7}>3\sqrt{3}$

$-2\sqrt{7}<-3\sqrt{3}$

$3-2\sqrt{7}<3-3\sqrt{3}$

**12**




$\frac{23}{8}<\frac{22}{7}$

**13** 1) $(5\sqrt{13})^2=325$. $18^2=324$. $5\sqrt{13}>18$.

2) $(11\sqrt{3})^2=363$. $9^2=81$.

$11\sqrt{3}>9$, donc $\frac{1}{11\sqrt{3}}<\frac{1}{9}$ .

3) $(\sqrt{21}+\sqrt{11})^2=21+11+2\sqrt{231}=32+2\sqrt{231}$

$(\sqrt{21}+\sqrt{10})^2=22+10+2\sqrt{220}=32+2\sqrt{220}$

$2\sqrt{231}>2\sqrt{220}$

$32+2\sqrt{231}>32+2\sqrt{220}$ ;

donc $\sqrt{21}+\sqrt{11}>\sqrt{22}+\sqrt{10}$ .

4) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2=7-2\sqrt{10}$

$(2-\sqrt{3})^2=7-4\sqrt{3}$

$(2\sqrt{10})^2=40$

$(4\sqrt{3})^2=48$

$2\sqrt{10}<4\sqrt{3}$

$-2\sqrt{10}>-4\sqrt{3}$

$7-2\sqrt{10}>7-4\sqrt{3}$

$\sqrt{5}-\sqrt{2}>2-\sqrt{3}$

$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}<\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ .

**14** a) $4-7\sqrt{2}$ et $4-4\sqrt{6}$

$(7\sqrt{2})^2=98$ et $(4\sqrt{6})^2=96$

$7\sqrt{2}>4\sqrt{6}$

$-7\sqrt{2}<-4\sqrt{6}$ .

Donc : $4-7\sqrt{2}<4-4\sqrt{6}$ .

b) $(2\sqrt{7})^2=28$ et $(2\sqrt{3})^2=12$

$2\sqrt{7}>2\sqrt{3}$

$19>13$.

Donc : $19+2\sqrt{7}>13+2\sqrt{3}$ .

c) $1-\sqrt{3}<0$ et $2+\sqrt{5}>0$ ;

donc $\frac{1}{1-\sqrt{3}}<\frac{1}{2+\sqrt{5}}$ .

d) $(\sqrt{5}+\sqrt{13})^2=18+2\sqrt{65}$

$(\sqrt{3}+\sqrt{14})^2=17+2\sqrt{42}$

$2\sqrt{65}>2\sqrt{42}$

$18>17$

$18+2\sqrt{42}>17+2\sqrt{42}$ ;

donc $\sqrt{5}+\sqrt{13}>\sqrt{3}+\sqrt{14}$ .

$(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2=5+2-2\sqrt{10}=7-2\sqrt{10}$

$(2-\sqrt{3})^2=4+3-4\sqrt{3}=7-4\sqrt{3}$

or $(2\sqrt{10})^2=40$ et $(4\sqrt{3})^2=48$

e) donc $2\sqrt{10}<4\sqrt{3}$

$-4\sqrt{3}<-2\sqrt{10}$

$7-4\sqrt{3}<7-2\sqrt{10}$

Donc : $2-\sqrt{3}<\sqrt{5}-\sqrt{2}$

**15** a) $\sqrt{3-\sqrt{5}}$ et $\sqrt{5-\sqrt{3}}$

$\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2=3-\sqrt{5}$

$\left(\sqrt{5-\sqrt{3}}\right)^2=5-\sqrt{3}$

$(3-\sqrt{5})-(5-\sqrt{3})=-2+\sqrt{3}-\sqrt{5}$

$\sqrt{3}-\sqrt{5}<0$ et $-2<0$ ;

donc $(3-\sqrt{5})-(5-\sqrt{5})<0$ ;

$3-\sqrt{5}<5-\sqrt{3}$

$\sqrt{3-\sqrt{5}}<\sqrt{5-\sqrt{3}}$

b) Posons $A=2\sqrt{2}-4\sqrt{3}$ et $B=4\sqrt{5}-9$

$A=\sqrt{8}-\sqrt{48}$ .

• $36<48<49$ donc $6<\sqrt{48}<7$

$-7<-\sqrt{48}<-6$.

• $4<8<9$

$2<\sqrt{8}<3$

donc $2-7<\sqrt{8}-\sqrt{48}<3-6$

$-5<A<-3$.

$B=\sqrt{80}-9$

$64<80<81$

$8<\sqrt{80}<9$

$-9+8<\sqrt{80}-9<9-9$

$-1<B<0$ donc $A<B$ ; $2\sqrt{2}-4\sqrt{3}<4\sqrt{5}-9$

c) $\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$ et $9-4\sqrt{5}$

$$\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}=\frac{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}-2)}{5-4}=9-4\sqrt{5}$$

Donc $\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}=9-4\sqrt{5}$

**16** 1) $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+1}{b+1}$

$\frac{a}{b}-\frac{a+1}{b+1}=\frac{a-b}{b(b+1)}<0$

car $b>a>0$.

$\frac{a}{b}<\frac{a+1}{b+1}$.

2) $\frac{c}{a}$ et $\frac{c}{b}$

$a<b<0$

$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

$\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$ car $c>0$.

3) $\frac{a+b}{2}$ et $\frac{2ab}{a+b}$

$\frac{a+b}{2}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a+b)^2-4ab}{2(a+b)}=\frac{a^2-2ab+b^2}{2(a+b)}$

$=\frac{(a+b)^2}{2(a+b)}\geq 0.$

Donc $\frac{a+b}{2}\geq\frac{2ab}{a+b}$.

**17** 1) $\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+c}=\frac{ab+ac-ab-bc}{b(b+c)}=\frac{c(a-b)}{b(b+c)}$

a) $c>0$ et $b>a>0$, d'où $\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+c}<0$ ;
donc $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}$ .

b) $c>0$ et $a>b>0$, d'où $\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+c}>0$ ;
donc $\frac{a}{b}>\frac{a+c}{b+c}$.

2. a) $2<5$, donc $\frac{2}{5}<\frac{2+\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}$ ;

b) $\sqrt{11}>\sqrt{3}$ , donc $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}}>\frac{\sqrt{11}+\sqrt{173}}{\sqrt{3}+\sqrt{173}}$

**18** 1) $A-B=\frac{n-2}{n+2}-\frac{n-1}{n+3}=\frac{-4}{(n+2)(n+3)}$ ;
d'où $A<B$

2) $A-B=\frac{2\sqrt{3}}{5(5+\sqrt{3})}$ ; d'où $A>B$.

2ème méthode :

$5<5+\sqrt{3}$

$\frac{1}{5}>\frac{1}{5+\sqrt{3}}$

$\frac{2}{5}>\frac{2}{5+\sqrt{3}}$ ; d'où $A>B$.

3) $A-B=-a-b-2<0$ ; d'où $A<B$.

**19** 1) $a>1$

• $\frac{1}{a}<1$

$a^2>a$

$\sqrt{a}>1$

$\frac{1}{\sqrt{a}}<1$

$\frac{1}{a^2}<\frac{1}{a}$.

• $\sqrt{a}>1$

$\sqrt{a}\,.\sqrt{a}>\sqrt{a}$

$a>\sqrt{a}$

$\frac{1}{a}<\frac{1}{\sqrt{a}}$

Donc : $\frac{1}{a^2}<\frac{1}{a}<\frac{1}{\sqrt{a}}<\sqrt{a}<a<a^2$.

2) $0<a<1$

• $a^2<a$

• $\sqrt{a}<1$

$\sqrt{a}\,.\sqrt{a}<\sqrt{a}$

$a<\sqrt{a}$ .

• $a^2<a$

$\frac{1}{a^2}>\frac{1}{a}$.

• $\sqrt{a}<1$

$\frac{1}{\sqrt{a}}>1$.

• $a<\sqrt{a}$

$\frac{1}{a}>\frac{1}{\sqrt{a}}$

• $a<1$

$\frac{1}{a}>1$

Donc : $a^2<a<\sqrt{a}<\frac{1}{\sqrt{a}}<\frac{1}{a}<\frac{1}{a^2}$ .

**20** $\frac{1}{a+b}$ et $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}$

$\frac{1}{a+b}-\frac{a+b}{ab}=\frac{ab-(a+b)^2}{ab(a+b)}=\frac{-a^2-b^2-ab}{ab(a+b)}$

$\frac{1}{a+b}-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)<0$

Donc : $\frac{1}{a+b}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

**21** $(\sqrt{a+b})^2=a+b$

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}$

Donc : $\sqrt{a+b}<\sqrt{a}+\sqrt{b}$ .

**22** 1) $\frac{a-1}{a}>\frac{b-1}{b}$

$\frac{a-1}{a}-\frac{b-1}{b}>0$

$\frac{a-b}{ab}>0$. Donc $\frac{a-1}{a}>\frac{b-1}{b}$ si $a>b$.

2) $\begin{matrix} a = 987654322 \\ a-1 = 987654321 \end{matrix}$ donc $\dfrac{a-1}{a} = \dfrac{987654321}{987654322}$

$\begin{matrix} b = 987654323 \\ b-1 = 987654322 \end{matrix}$ donc $\dfrac{b-1}{b} = \dfrac{987654322}{987654323}$

Comme b > a donc $\dfrac{b-1}{b} > \dfrac{a-1}{a}$.

**23** Trois minorants de B sont : –6 ; –5 ; –4. Trois majorants de B sont : 8 ; 9 ; 10.
Le maximum de B : 7. B n' a pas de minimum.
L'ensemble de tous les majorants de B : M = [7 ; +∞[.
L'ensemble de tous les minorants de B : $m = ]-\infty ; -2]$.

**24** Le minimum de A : –1.
Le maximum de A : 8.
$B = [-3 ; \sqrt{13}\,[ \cap \mathbb{Z} = \{-3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3\}$.
Le minimum de B : –3.
Le maximum de B : 3.
C = {–2 ; –1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9}.
Le minimum de C est –2.
Le maximum de C est : 9.
D = {0 ; 1 ; 2 ; 3}.
Le minimum de D est 0.
Le maximum de D est 3.
E n'a pas de minimum.
Le maximum de E est $\sqrt{5}$.

**25** 1) Trois éléments de A : 1 ; $\frac{1}{2}$ ; $\frac{1}{3}$.
2) a. $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 1$, $\frac{1}{n} \leq 1$ ; d'où 1 est majorant de A.
b. $1 = \frac{1}{1} \in$ A ; d'où 1 est le maximum de A.
3) $n \in \mathbb{N}^*$ ; d'où $\frac{1}{n} \geq 0$. 0 est un minorant de A.
0 n'a pas d'inverse d'où 0 n'est pas le minimum de A.

**26** 1) $0 = \dfrac{0}{0+2}$ ; d'où $0 \in$ B.
$n \geq 0$ et $n + 2 \geq 2$ ;
d'où $\dfrac{n}{n+2} \geq 0$ ; par conséquent, 0 est le minimum de B.

2) $n + 2 \geq n$ ;
$\dfrac{1}{n+2} \leq \dfrac{1}{n}$ ;
$\dfrac{n}{n+2} \leq \dfrac{n}{n}$ ;
$\dfrac{n}{n+2} \leq 1$ ; d'où 1 est un majorant de B.
Supposons que $1 \in$ B ; il existe un entier naturel tel que $\dfrac{n}{n+2} = 1$ ; $n = n + 2$ ; $0 = 2$. Ce qui est absurde.
Par conséquent, 1 n'est pas le maximum de B.

**27** 1. a) Trois éléments de C : 1 ; $\frac{3}{2}$ ; $\frac{5}{3}$.
b) $n \geq 1$
$\frac{1}{n} \leq 1$ ;
$-\frac{1}{n} \geq -1$ ;
$2 - \frac{1}{n} \geq 1$ ; d'où 1 est un minorant de C.
c) $1 = 2 - \frac{1}{1}$ ; $1 \in$ C.
1 est le minimum de C.

2. a) $n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{1}{n} \leq 1$,
$2 - \frac{1}{n} \leq 2$ ; d'où C est majoré par 2.
b) Supposons que 2 est le maximum. Donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$, tel que $2 - \frac{1}{n} = 2$
$-\frac{1}{n} = 0$.
Ce qui est absurde.

3) C est majoré par 2 et minoré par 1. Donc C est borné.

**28** a) $|x + 2| = 5$.
$x + 2 = 5$ ou $x + 2 = -5$.
$x = 3$ ou $x = -7$.
S = {–7 ; 3}.

b) $\left|x - \frac{2}{3}\right| = \frac{7}{4}$.
$x - \frac{2}{3} = \frac{7}{4}$ ou $x - \frac{2}{3} = -\frac{7}{4}$.
$x = \frac{29}{12}$ ou $x = -\frac{13}{12}$.
$S = \left\{-\frac{13}{2} ; \frac{29}{12}\right\}$.

c) $|x - 1| = -10$. Impossible $S = \varnothing$.

d) $|5x - 6| = 15$.
$5x - 6 = 15$ ou $5x - 6 = -15$.
$x = \frac{21}{5}$ ou $x = -\frac{9}{5}$.
$S = \left\{-\frac{9}{5} ; \frac{21}{5}\right\}$.

e) $|2x + 5| = 3$.
$2x + 5 = 3$ ou $2x + 5 = -3$.
$x = -1$ ou $x = -4$.
S = {–4 ; –1}.

**29** 1. a) $\left|x + \frac{2}{7}\right| < \frac{9}{7}$
$-\frac{9}{7} < x + \frac{2}{7} < \frac{9}{7}$
$-\frac{11}{7} < x < 1$
$S = \left]-\frac{11}{7} ; 1\right[$

b) $|2 - x| \leq 5$
$-5 \leq 2 - x \leq 5$.
S = [–3 ; 7].

c) $|2x-5|<1$.
$-1<2x-5<1$
$S=]2\,;3[$.

d) $|3-2x|\leq\frac{1}{2}$.
$-\frac{1}{2}\leq 3-2x\leq\frac{1}{2}$.

$S=\left[\frac{5}{4};\frac{7}{4}\right]$.

2) Graphiquement

a) $|2x-1|=4 \Leftrightarrow \left|x-\frac{1}{2}\right|=2$

$\frac{1}{2}-2 \qquad \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2}+2$

$S=\left\{-\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right\}$

b) $|-4x+1|=8 \Leftrightarrow \left|x-\frac{1}{4}\right|=2$.

$\frac{1}{4}-2 \qquad \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{4}+2$

$S=\left\{-\frac{7}{4};\frac{9}{4}\right\}$

c) $|-3x-6|=12 \Leftrightarrow |x+2|=4$
$|x-(2)|=4$.

$-2-4 \qquad -2 \qquad -2+4$

$S=\{-6\,;2\}$.

d) $|-x-1|=3. \Leftrightarrow |x+1|=3$
$|x-(-1)|=3$.

$-1-3 \qquad -1 \qquad -1+3$

$S=\{-4\,;2\}$.

**30** a) $|x-6|\leq 5$.

$6-5 \qquad 6 \qquad 6+5$

$S=[1\,;11]$.

b) $\left|x+\frac{2}{7}\right|<\frac{9}{7}. \Leftrightarrow \left|x-\left(-\frac{2}{7}\right)\right|<\frac{9}{7}$.

$-\frac{2}{7}-\frac{9}{7} \qquad -\frac{2}{7} \qquad -\frac{2}{7}+\frac{9}{7}$

$-\frac{11}{7} \qquad 1$

$S=\left]-\frac{11}{7};1\right[$ .

c) $|2x-3|\leq\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|x-\frac{3}{2}\right|\leq\frac{1}{4}$

$\frac{3}{2}-\frac{1}{4} \qquad \frac{3}{2} \qquad \frac{3}{2}+\frac{1}{4}$

$\frac{5}{4} \qquad \frac{7}{4}$

$S=\left[\frac{5}{4};\frac{7}{4}\right]$.

d) $|-3x+5|<1. \Leftrightarrow \left|x-\frac{5}{3}\right|<\frac{1}{3}$.

$\frac{5}{3}-\frac{1}{3} \qquad \frac{5}{3} \qquad \frac{5}{3}+\frac{1}{3}$

$\frac{4}{3} \qquad 2$

$S=\left]-\frac{4}{3};2\right[$

e) $\left|x-\sqrt{3}\right|\leq 2-\sqrt{3}$

$\sqrt{3}-2+\sqrt{3} \qquad \sqrt{3} \qquad \sqrt{3}+2-\sqrt{3}$

$-2+2\sqrt{3} \qquad 2$

$S=\left[-2+2\sqrt{3}\,;2\right]$.

f) $|-3x+1|\leq 3. \Leftrightarrow \left|x-\frac{1}{3}\right|\leq 1$.

$\frac{1}{3}-1 \qquad \frac{1}{3} \qquad \frac{1}{3}+1$

$S=\left[-\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right]$.

**31**
- $-1\leq x\leq 3 \Rightarrow 0\leq x+1\leq 4 \Rightarrow |x+1|=x+1$.
- $-4\leq x-3\leq 0 \Rightarrow |x-3|=-x+3$.
- $0\leq 2x+2\leq 7 \Rightarrow |2x+2|=2x+2$.
  Ou $|2x+2|=|2(x+1)|=2|x+1|=2x+2$.
- $\left|\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{2}|x-3|$.
  D'où $\left|\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right|=\frac{-1}{2}x+\frac{3}{2}$.
- $4\leq x+5\leq 8$
  $|x+5|=x+5$.

**32** $|x-2|<0{,}1$ $\quad$ $|y-2|<0{,}2$

$-0{,}1<x-2<0{,}1$ $\quad$ $-0{,}2<y-2<0{,}2$

$1{,}9<x<2{,}1$ $\quad$ $1{,}8<y<2{,}2$.

• $3{,}7<x+y<4{,}3$ $\quad$ $|x+y|<4{,}3$.

• $-2{,}2<-y<-1{,}8$

$-0{,}3<x-y<0{,}3$ $\quad$ $|x-y|<0{,}3$.

• $3{,}42<xy<4{,}62$ $\quad$ $|xy|<4{,}62$.

• $\frac{1}{2{,}2}<\frac{1}{y}<\frac{1}{1{,}8}$

$\frac{1{,}9}{2{,}2}<\frac{x}{y}<\frac{2{,}1}{1{,}8}$ $\quad$ $0{,}86<\frac{x}{y}<1{,}17$.

**33** • $2{,}288<2\sqrt{2}<2{,}83$

$-1{,}733<-\sqrt{3}<-1{,}732$

$0{,}555<2\sqrt{2}-\sqrt{3}<1{,}098$

$0{,}111<\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{5}<0{,}2196$.

• $1{,}144<\sqrt{2}<1{,}415$

$-5{,}199<-3\sqrt{3}<-3{,}781$

$-4{,}055<\sqrt{2}-3\sqrt{3}<-3{,}781$

$-6{,}0825<\frac{3(\sqrt{2}-3\sqrt{3})}{2}<-5{,}6715$.

**34** *Amplitude de* : $a<x<b$ ;

C'est la longueur $b-a$ de l'intervalle.

a) $3(1{,}76)^2+2(2{,}43)<3a^2+b<3(1{,}78)^2+2(2{,}45)$

$14{,}1528<3a^2+2b<14{,}4052$.

*Amplitude de* : 0,2524.

b) $2{,}43^2-3(1{,}78)+5<b^2-3a+5<2{,}45^2-3(1{,}76)+5$

$5{,}5649<b^2-3a+5<5{,}7225$.

*Amplitude de* : 0,1576.

c) $3(2{,}43)-2\times(1{,}78)<3b-2a<3(2{,}45)-2(1{,}76)$

$3{,}73<3b-2a<3{,}83$.

*Amplitude de* : 0,01.

d) $\frac{1}{1{,}78}+\frac{1}{2{,}45}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{1}{1{,}76}+\frac{1}{2{,}43}$

$0{,}96<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<0{,}98$.

*Amplitude de* : 0,02.

e) $\sqrt{1{,}76}+\sqrt{2{,}43}<\sqrt{a}+\sqrt{b}<\sqrt{1{,}78}+\sqrt{2{,}45}$

$2{,}88<\sqrt{a}+\sqrt{b}<2{,}90$.

*Amplitude de* : 0,02.

**35** $\frac{7}{2}<x+y<\frac{14}{3}$

$4<x<5$

$\frac{1}{3}<-y<\frac{1}{2}$

$\frac{4}{3}<xy<\frac{5}{2}$.

$-\frac{5}{2}<xy<-\frac{4}{3}$.

$\frac{13}{3}<x-y<\frac{11}{2}$

$16<x^2<25$

$\frac{1}{9}<y^2<\frac{1}{4}$

$-3<\frac{1}{y}<-2$

$2<-\frac{1}{y}<3$

$8<-\frac{x}{y}<15$

$-15<\frac{x}{y}<-8$.

**36**

| | V. A par excès à $10^{-3}$ près. | V. A par défaut à $10^{-3}$ près. | Arrondi d'ordre 2 | Arrondi d'ordre 3 |
|---|---|---|---|---|
| 465,76543 | 465,766 | 465,765 | 465,77 | 465,765 |
| -78,98554 | –78,985 | –78,986 | –78,98 | |
| $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ | −0,617 | −0,618 | −0,60 | −0,618 |
| $\frac{1}{4}\pi\left(\frac{5}{7}\right)^3$ | 0,287 | 0,286 | 0,29 | 0,286 |
| $\frac{3\pi}{2}$ | 4,713 | 4,712 | 4,71 | 4,712 |

## Exercices d'approfondissement

**37** • Supposons que A est rationnel ; il existe $a\in\mathbb{Z}$ et $b\in\mathbb{Z}^*$ tels que

$2+\sqrt{3}=\frac{a}{b}$

$\sqrt{3}=\frac{a}{b}-2$.

Or, $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$, d'où $\frac{a}{b}-2\notin\mathbb{Q}$ est absurde.

• Supposons que B est rationnel ; il existe $a\in\mathbb{Z}$ et $b\in\mathbb{Z}^*$ tels que

$\frac{2-\sqrt{3}}{3}=\frac{a}{b}$

$\sqrt{3}=\frac{3a}{b}+2$.

Or, $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$, alors $\frac{-3a}{b}+2\notin\mathbb{Q}$ est absurde.

**38** 1) 3 ; 9 ; 1 ; 13 ; … appartiennent à E.

2) Les valeurs sont supérieures ou égales à 1.

3. a) Développons $2\left[(x+1)^2+\frac{1}{2}\right]$.

$$\left[(x+1)^2+\frac{1}{2}\right]=2\left[x^2+2x+1+\frac{1}{2}\right]$$
$$=2x^2+4x+2+1$$
$$=2x^2+4x+3.$$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$ , $(x+2)^2 \geq 0$

$(x+1)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$

$2\left[(x+1)^2 + \frac{1}{2}\right] \geq 1.$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $2x^2 + 4x + 3 \geq 1$ et d'où 1 est un minorant de E.

4) Si $x = -1$, alors $2(-1)^2 + 4(-1) + 3 = 1$.

5) $\forall x \in \mathbb{R}$, $2x^2 + 4x + 3 \geq 1$ et pour $x = -1$, $2x^2 + 4x + 3 = 1$ ; d'où 1 est le minimum de E.

**39** $a = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{5}{2}}}}$

$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \frac{2}{5}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{12}{5}}}$

$= 1 + \cfrac{1}{2 + \frac{5}{12}} = 1 + \cfrac{1}{\frac{29}{12}} = 1 + \frac{12}{29}$

$a = \frac{41}{29}$

$b = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \sqrt{2} - 1}}$

$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \sqrt{2}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \sqrt{2} - 1}$

$= 1 + \cfrac{1}{\sqrt{2} + 1} = 1 + \sqrt{2} - 1$

$b = \sqrt{2}$

$c = \cfrac{1 - \frac{1}{3} + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{3}}}{1 - \frac{1}{3} + \cfrac{1}{1 - \frac{1}{3}}} = \cfrac{\frac{2}{3} + \cfrac{1}{\frac{4}{3}}}{\frac{2}{3} + \cfrac{1}{\frac{2}{3}}} = \cfrac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}{\frac{2}{3} + \frac{3}{2}} = \cfrac{\frac{17}{12}}{\frac{13}{6}}$

$= \frac{17}{12} \times \frac{6}{13}$

$c = \frac{17}{26}$

**40** $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $|a| \geq a$ et $|a| \geq -a$

$|b| \geq b$ et $|b| \geq -b$

$|a| + |b| \geq a + b$ et $|a| + |b| \geq -(a+b)$

Or, $|a+b| = a + b$ si $a + b \geq 0$ et $|a+b| = -(a+b)$ si $a + b < 0$.

Alors $|a| + |b| \geq |a+b|$.

**41** 1) $(a-b)^2 \geq 0$

$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

$a^2 + b^2 \geq 2ab$

$\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab.$

2) D'après la question 1, $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ ; $bc \leq \frac{b^2+c^2}{2}$ ; $ac \leq \frac{a^2+c^2}{2}$.

En aditionnant membre à membre on a :

$ab + bc + ac \leq a^2 + b^2 + c^2$.

3) $(a+b+c)^2 - (3ab + 3bc + 3ac)$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc - 3ab - 3bc - 3ac$

$= a^2 + b^2 + c^2 - (ab + ac + bc)$

Or $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$.

Donc $a^2 + b^2 + c^2 - (ab + ac + bc) \geq 0$.

Par conséquent, $(a+b+c)^2 \geq 3ab + 3bc + 3ac$.

**42** 1) $m - x = \frac{x+y}{2} - x$

$= \frac{y-x}{2}.$

Or $y \geq x$ alors $m - x \geq 0$

$m \geq x.$

$y - m = y - \frac{x+y}{2}$

$= \frac{y-x}{2}.$

$y - m \geq 0$

$y \geq m$ ; d'où $x \leq m \leq y$.

2) $0 < x \leq y$

$0 < x^2 \leq xy$

$0 < \sqrt{x^2} \leq \sqrt{xy}$

$0 < x \leq g.$

$0 < x \leq y$

$0 < xy \leq y^2$

$\sqrt{xy} \leq \sqrt{y^2}$

$g \leq y.$

D'où $x \leq g \leq y$.

3) Comparons $m^2$ et $g^2$.

$m^2 = \frac{x^2 + y^2 + 2xy}{4}$ $g^2 = xy$

$m^2 - g^2 = \frac{x^2 + y^2 - 2xy}{4}$

$= \frac{(x-y)^2}{4} \geq 0$ ;

d'où $m^2 \geq g^2$

$m \geq g.$

On a $x \leq g \leq m \leq y$.

4) $\frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{x+y}{xy}\right)$

$h = \frac{2xy}{x+y}$

$0 < x \leq y$

$x + y \leq 2y$

$\frac{1}{x+y} \geq \frac{1}{2y}$

$\frac{2xy}{x+y} \geq \frac{2xy}{2y}$

$h \geq x.$

$2x \leq x + y$

$\dfrac{1}{2x} \geq \dfrac{1}{x+y}$

$\dfrac{2xy}{2x} \geq \dfrac{2xy}{x+y}$

$y \geq h.$

D'où $x \leq h \leq y$

5. a) $\dfrac{1}{h} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$

$= \dfrac{x+y}{2xy}$

$= \dfrac{x+y}{2} . \dfrac{1}{xy}$

$= m.\dfrac{1}{xy}$

$\dfrac{1}{g} = \dfrac{1}{\sqrt{xy}} = \dfrac{\sqrt{xy}}{xy} = \dfrac{g}{xy}.$

Or $g \leq m$

$\dfrac{g}{xy} \leq \dfrac{m}{xy}$

$\dfrac{1}{g} \leq \dfrac{1}{h}.$

b) $\dfrac{1}{g} \leq \dfrac{1}{h}$ ; donc $g \geq h$.

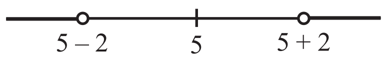
$x \leq h \leq g \leq m \leq y.$

**43** $|2x + 3| = |(x - 2) + (x + 5)|$

$|2x + 3| \leq |x - 2| + |x + 5|.$

**44** a) Résolution graphique

$|x - 5| > 2.$




$S = ]-\infty\,;\,3[\cup]7\,;\,+\infty[.$

Résolution algébrique.

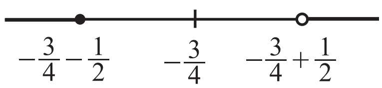
$|x - 5| > 2$. On a :

$x - 5 > 2$ ou $x - 5 < -2$

$x > 7$ ou $x < 3.$

$S = ]-\infty\,;\,3[\cup]7\,;\,+\infty[.$

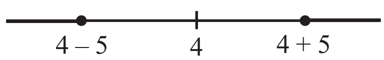
b) $\left|x - \left(-\dfrac{3}{4}\right)\right| \geq \dfrac{1}{2}.$




$S = ]-\infty\,;-\dfrac{5}{4}[\cup]-\dfrac{1}{4}\,;+\infty[.$

c) $|3x - 12| \geq 15$

$|x - 4| \geq 5.$




$S = ]-\infty\,;\,-1]\cup[9\,;\,+\infty[.$

**45** $x = (x - y) + y$

$|x| \leq |x - y| + |y|$

$|x| - |y| \leq |x - y|$

$y = (y - x) + x$

$|y| \leq |y - x| + |x|$

$|y| - |x| \leq |y - x|.$

D'où $|(|x| - |y|)| \leq |x - y|.$

**46** 1) 1^er^ cas : $xy \geq 0$

On a : $x \geq 0$ et $y \geq 0$ ou $x \leq 0$ et $y \leq 0$

donc $|x| = x$ et $|y| = y$ ou $|x| = -x$ et $|y| = -y$

$|xy| = xy = (-x)\,(-y) = |x| \times |y|.$

2^ème^ cas : $xy < 0$ ;

On a : $x < 0$ et $y > 0$ ou $x > 0$ *et* $y < 0$

donc $|x| = -x$ et $|y| = y$ ou $|x| = x$ et $|y| = -y.$

$|xy| = -xy = (-x)y = x\,(-y) = |x|.|y|$

2) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \left|x\dfrac{1}{y}\right|$

$= |x|\left|\dfrac{1}{y}\right|$

$= |x|.\dfrac{1}{|y|}$

$= \dfrac{|x|}{|y|}.$

**47** 1) $IB = \dfrac{1}{2}AB$ ; $IB = \dfrac{1}{2}.$

IBC est un triangle rectangle en B.

$IC^2 = IB^2 + BC^2$

$IC = \sqrt{\dfrac{1}{4} + 1}$

$IC = \dfrac{\sqrt{5}}{2}.$

$IP = IC$

$AP = AI + IP$

$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$AP = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}.$

2) $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{AP}{1} = AP = \phi.$

$\dfrac{AB}{BP} = \dfrac{1}{AP - AB} = \dfrac{1}{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - 1}$

$= \dfrac{2}{\sqrt{5} - 1}$

$= \dfrac{2(\sqrt{5}+1)}{4} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

$\dfrac{AB}{BP} = \varphi.$

3. a) $\varphi^2 = \dfrac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4}$

$= \dfrac{6 + 2\sqrt{5}}{4}$

$\varphi^2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

$= \dfrac{1+\sqrt{5}+2}{2}$

$= \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+1$

$\varphi^2 = \varphi + 1.$

b) $\varphi^2 = \varphi + 1$

$\dfrac{\varphi^2}{\varphi} = \dfrac{\varphi}{\varphi} + \dfrac{1}{\varphi}$

$\varphi = 1 + \dfrac{1}{\varphi}$

$\dfrac{1}{\varphi} = \varphi - 1$

On a : $\varphi^2 = \varphi + 1$

$\varphi = \dfrac{1}{\varphi} + 1$ ; d'où $\varphi^2 = \dfrac{1}{\varphi} + 1 + 1$

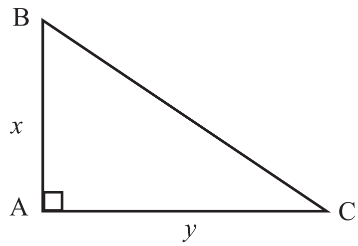
$= \dfrac{1}{\varphi} + 2$

$\varphi^2 = \dfrac{1+2\varphi}{\varphi}$

$\varphi^3 = 2\varphi + 1.$

## Situation d'évaluation

**48**




1) BC = $\sqrt{x^2+y^2}$

$30{,}21^2 + 40{,}52^2 < x^2 + y^2 < 30{,}22^2 + 40{,}53^2$

$50{,}542 < \sqrt{x^2+y^2} < 50{,}556$

$50{,}5\ m < \sqrt{x^2+y^2} < 50{,}6\ m.$

2) La longueur de l'hypoténuse est 50,6 m par excès.

Leçon 2

# POLYNÔME ET FRACTIONS RATIONNELLES

## INSTALLATION DES HABILETÉS

### Activité 1 Généralités sur les polynômes

#### 1.1. Définition d'un polynôme

1) Le premier $x - 1$
Le second $x$
Le troisième $x + 1$.
Donc $(x - 1)\,x(x + 1) + x = x(x^2 - 1) + x$
$= x^3 - x + x$
$= x^3$.

2) Le premier $x$
Le deuxième $x + 1$
Le troisième $x + 2$.
Donc $x(x + 1)\,(x + 2) + (x + 1) = (x + 1)\,(x(x + 2) + 1)$
$= (x + 1)(x^2 + 2x + 1)$
$= (x + 1)\,(x + 1)^2$
$= (x + 1)^3$.

3) L'affirmation est donc correcte car
$x(x + 1)(x + 2) + (x + 1) = (x + 1)^3$.

**Exercices de fixation**

**1-1-1** $2x^3 + x$ ; $4$ ; $-2x + 3$.

**1-1-2** Vrai ; Faux ; Faux ; Vrai.

#### 1.2. Forme développée réduite et ordonnée d'un polynôme

$P(x) = (1 - 2x)(x^2 - 3) - x^2\,(4 - x) + 5$
$= x^2 - 3 - 2x^3 + 6x - 4x^2 + x^3 + 5$
$-2x^3 + x^3 + x^2 - 4x^2 + 6x - 3 + 5$
$P(x) = -x^3 - 3x^2 + 6x + 2$.

**Exercices de fixation**

**1-2-1** $\mathrm{R}(x) = (x^2 - 1)(2x + 3) - x^2 + 9$
$= 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 - x^2 + 9$
$= 2x^3 + 2x^2 - 2x + 6$.

$\mathrm{S}(x) = (9x - 1)(9x + 1)(x - 7)^2 + 10$
$= (9x^2 - 1)\,(x - 7)^2 + 10$
$= (9x^2 - 1)(x^2 - 14x + 49) + 10$
$= 9x^4 - 126x^3 + 441x^2 - x^2 + 14x - 49 + 10$
$\mathrm{S}(x) = 9x^4 - 126x^3 + 440x^2 + 14x - 39$.

**1-2-2** $\mathrm{P}(x) = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$

$\mathrm{Q}(x) = (x - 2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.

#### 1.3. Degré, coefficient d'un polynôme

$\mathrm{P}(x) = x^8 + 3x^7 - x^5 + 4x^3 - x^2 - 2019$.
1) Le coefficient du monôme de degré 3 est 4.
2) Le plus grand degré des monômes est : 8.

## Exercices de fixation

**1-3-1** Les coefficients du polynôme sont :
$-17$ ; $-1$ ; $1$ ; $-100$ et $3$.

**1-3-2** a) $d°(P) = 8$ ; c) $d°(P) = 0$ ;
b) $d°(P) = 1$ ; d) $d°(P) = 4$.

### 1.4. Zéro d'un polynôme

$$\begin{aligned} P(-1) &= (-1)^3 + 4 \times (-1)^2 + (-1) = 2. \\ &= -1 + 4 - 1 - 2 \\ &= -4 + 4 \\ &= 0. \end{aligned}$$

## Exercices de fixation

a) $P(1) = 2 \times (1)^3 + 1^2 - 5 \times 1 + 2$
$= 2 + 1 - 5 + 2$
$= 5 - 5$
$P(1) = 0.$
Donc 1 est un zéro de P ;

b) $P(-2) = -(-2)^4 - 2 \times (-2)^3 + (-2)^2 - 4$
$= -16 + 2 \times 8 + 4 - 4$
$P(-2) = -16 + 16 = 0.$
Donc $-2$ est un zéro de P.

c) $P(2) = -2^4 + 2(2)^3 + (2)^2 - 2 - 2$
$= -16 + 16 + 4 - 4$
$= 0$ .

d) $P(\sqrt{2}) = -\frac{1}{2}(\sqrt{2})^3 + \frac{3}{4}(\sqrt{2})^4 + \sqrt{2} - 3$
$= -\sqrt{2} + 3 + \sqrt{2} - 3$
$= 0.$
Donc $\sqrt{2}$ st un zéro de P.

### 1.5. Somme et produit de deux polynômes

1) • $R(x) + T(x) = -x^5 + 2x^4 - x^2 + 2 + (x^5 - 4x^3 - 8x^2 + 2x + 1)$
$= -x^5 + x^5 + 2x^4 - 4x^3 - x^2 - 8x^2 + 2x + 2 + 1$
$= 2x^4 - 4x^3 - 9x^2 + 2x + 3.$

• $R(x) \times T(x) = (-x^5 + 2x^4 - x^2 + 2)(x^5 - 4x^3 - 8x^2 + 2x + 1)$
$= -x^{10} + 4x^8 + 8x^7 - 2x^6 - x^5 + 2x^9 - 8x^7 - 16x^6 + 4x^5 + 2x^4 - x^7 + 4x^5 + 8x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x^5 - 8x^3 - 16x^2 + 4x + 2$
$= -x^{10} + 2x^9 + 4x^8 + 8x^7 - 8x^7 - x^7 - 2x^6 - 16x^6 - x^5 + 4x^5 + 4x^5 + 2x^5 + 8x^4 + 2x^4 - 2x^3 - 8x^3 - x^2 - 16x^2 + 4x + 2$
$= -x^{10} + 2x^9 + 4x^8 - x^7 - 18x^6 + 9x^5 + 10x^4 - 10x^3 - 17x^2 + 4x + 2$ .

2) a)
- R + T est un polynôme de degré 4.
- R × T est un polynôme de degré 10.

b) $d°(R + T) \leq d°(R)$.
$d°(R \times T) = d°(R) + d°(T)$.

## Exercices de fixation

1) $P(x) = (x^3 + x + 1)(-5x^7 + 3x^2 - 4) + 5x\,(x^9 - 1)$
$= -5x^{10} + 3x^5 - 4x^3 - 5x^8 + 3x^3 - 4x - 5x^7 + 3x^2 - 4 + 5x^{10} - 5x$
$= -5x^{10} - 5x^{10} - 5x^8 - 5x^7 + 3x^5 - 4x^3 + 3x^3 + 3x^2 - 4x - 5x - 4$
$P(x) = -5x^8 - 5x^7 + 3x^5 - x^3 + 3x^2 - 9x - 4$

2) $d°(P) = 8$, $d°(Q) = 3n$, $d°(QR) = d°(Q) + d°(R)$
$= 3n + 2n = 5n.$
$d°(Q + R) = 3n.$

## 1.6. Factorisation d'un polynôme

$P(x) = 4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x - 3)(2x + 3).$

$R(x) = x^3 + 64 = x^3 + 4^3 = (x + 4)(x^2 - 4x + 16).$

$T(x) = (2x - 1)^2 - (x + 2)^2 = (2x - 1 + x + 2)(2x - 1 - x - 2)$
$= (3x + 1)(x - 3).$

### Exercices de fixation

$Q(x) = x^2 - 49 = x^2 - 7^2 = (x - 7)(x + 7).$

$S(x) = x^2 - 5 = x^2 - (\sqrt{5})^2 = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}).$

$H(x) = (2x + 1)^2 - 9 = (2x + 1)^2 - 3^2$
$= (2x + 1 - 3)(2x + 1 + 3)$
$= (2x - 2)(2x + 4)$
$= 4(x - 1)(x + 2).$

## 1.7. Factorisation par $x - a$

1) $P(2) = -2 \times (2)^3 + 7 \times 2^2 - 7 \times 2 + 2$
$= -16 + 28 - 14 + 2$
$P(2) = -30 + 30 = 0.$

2) Justifions que
$P(x) = -2x^3 + 7x^2 - 7x + 2 - (-2 \times 2^3 + 7 \times 2^2 - 7 \times 2 + 2)$

On a $P(x) - P(2) =$
$-2x^3 + 7x^2 - 7x + 2 - (-2 \times 2^3 + 7 \times 2^2 - 7 \times 2 + 2)$

Or $P(2) = 0$

Donc :
$P(x) = -2x^3 + 7x^2 - 7x + 2 - (-2 \times 2^3 + 7 \times 2^2 - 7 \times 2 + 2)$

3) $P(x) = -2x^3 + 7x^2 - 7x + 2 - 0$
$= -2x^3 + 7x^2 - 7x + 2 - P(-2)$
$= -2x^3 + 7x^2 - 7x + 2 - (-2 \times 2^3 + 7 \times 2^2 - 7 \times 2 + 2)$
$= -2x^3 + 2 \times 2^3 + 7x^2 - 7 \times 2^2 - 7x + 7 \times 2$
$= -2(x^3 - 2^3) + 7(x^2 - 2^2) - 7(x - 2)$
$= -2(x - 2)(x^2 + 2x + 4) + 7(x - 2)(x + 2) - 7(x - 2)$
$= (x - 2)[-2x^2 - 4x - 8 + 7x + 14 - 7]$

$P(x) = (x - 2)(-2x^2 + 3x - 1).$

Donc $Q(x) = -2x^2 + 3x - 1.$

### Exercices de fixation

**1-7-1** 1) $P(x) = 3x^4 + x^3 + 2x^2 - 6.$
$P(1) = 3 \times 1^4 + 1^3 + 2 \times 1^2 - 6$
$= 3 + 1 + 2 - 6 = 6 - 6 = 0.$

2)
$$\begin{array}{l|l} 3x^4 + x^3 + 2x^2 - 6 & x - 1 \\ \cline{2-2} \underline{-3x^4 + 3x^3} & 3x^3 + 4x^2 + 6x + 6 \\ \quad 4x^3 + 2x^2 & \\ \quad \underline{-4x^3 + 4x^2} & \\ \qquad 6x^2 - 6 & \\ \qquad \underline{-6x^2 + 6x} & \\ \qquad\quad 6x - 6 & \\ \qquad\quad \underline{-6x + 6} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Donc $Q(x) = 3x^3 + 4x^2 + 6x + 6.$

**1-7-2** $P(x) = -2x^3 - 4x^2 + 10x + 12$
1) $P(-1) = -2 \times (-1)^3 - 4 \times (-1)^2 + 10 \times (-1) + 12$
$= 2 - 4 - 10 + 12$
$= 14 - 14 = 0.$
$P(-1) = 0$ donc il existe $Q$ tels que : $P(x) = (x + 1)$ $Q(x)$ et $d°(Q) = 2.$

2) Soit $Q(x) = ax^2 + bx + c$ ; $a \neq 0.$
On a : $(x + 1)\,Q(x) = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$
$= ax^3 + bx^2 + cx + ax^2 + bx + c$
$= ax^3 + (b + a)x^2 + (c + b)x + c.$

$P(x) = (x + 1)\,Q(x) \Leftrightarrow -2x^3 - 4x^2 + 10x + 12$
$= ax^3 + (b + a)x^2 + (c + b)x + c.$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} a = -2 \\ b + a = -4 \\ c + b = 10 \\ c = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -2 \\ c = 12 \end{cases}$$

Ainsi, $Q(x) = -2x^2 - 2x + 12.$

**1-7-3** $P(x) = -2x^3 - 4x^2 + 10x + 12.$
1) $P(-3) = -2 \times (-3)^3 - 4 \times (-3)^2 + 10 \times (-3) + 12$
$= 54 - 36 - 30 + 12$
$P(-3) = 66 - 66 = 0.$
$P(-3) = 0$ donc il existe $Q$ tel que :
$P(x) = (x + 3)Q(x).$

2)
$$\begin{array}{l|l} -2x^3 - 4x^2 + 10x + 12 & x + 3 \\ \cline{2-2} \underline{+2x^3 + 6x^2} & -2x^2 + 2x + 4 \\ \quad 2x^2 + 10x & \\ \quad \underline{-2x^2 - 6x} & \\ \qquad 4x + 12 & \\ \qquad \underline{-(4x + 12)} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Le $P(x) = (x + 3)(-2x^2 + 2x + 4),$
d'où $Q(x) = -2x^2 + 2x + 4$ .

## 1.8. Signe d'un polynôme du premier degré

Signe d'un polynôme du 1er degré.
$ax + b$ ; $a \neq 0$.

1) Pour $a > 0$, on a :
- $ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow x > \frac{-b}{a}$
- $ax + b < 0 \Leftrightarrow ax < -b \Leftrightarrow x < \frac{-b}{a}$.

2) Pour $a < 0$, on a :
- $ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow x < \frac{-b}{a}$
- $ax + b < 0 \Leftrightarrow ax < -b \Leftrightarrow x > \frac{-b}{a}$

3) Si $a > 0$

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{b}{a}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $ax + b$ | - | 0 | + |

Si $a < 0$

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{b}{a}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $ax + b$ | + | 0 | − |

### Exercices de fixation

a) $P(x) = 5x - 7$ ; $a = 5$ ; $a > 0$

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{7}{5}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $p(x)$ | − | 0 | + |

b) $P(x) = -2x + 34$ ; $a = -2$ ; $a < 0$

| $x$ | $-\infty$ | 17 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $p(x)$ | + | 0 | − |

c) $P(x) = -x - 1$ ; $a = -1$ ; $a < 0$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $p(x)$ | + | 0 | − |

## Activité 2 Forme canonique d'un polynôme du second degré

Soit $Q(x) = x^2 - 2x - 8$.
1) $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ et $x^2 - 2x$ est le début de $(x-1)^2$.

2) a) On a : $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$, d'où $b = -1$.
b) $Q(x) = x^2 - 2x - 8$
$= (x-1)^2 - 1 - 8 = (x-1)^2 - 9$.

### Exercices de fixation

**2-1** a) $P(x) = x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 - 1 + 4 = (x-1)^2 + 3$.
b) $P(t) = t^2 + 4t + 3 = (t+2)^2 - 4 + 3 = (t+2)^2 - 1$.
c) $P(x) = 3x^2 - 6x - 6 = 3(x^2 - 2x - 3)$
$= 3[(x-1)^2 - 1 - 3] = 3[(x-1)^2 - 4]$
d) $P(x) = -x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{1}{3} = -\left(x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{1}{3}\right)$
$= -\left[\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{36} - \frac{1}{3}\right]$
$= -\left[\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{36} - \frac{12}{36}\right] = \left[\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{37}{36}\right]$

**2-2** $Q(t) = -2t^2 - 2t + 12$.
1) a) $Q(t) = -2(t^2 + t - 6)$
$= -2\left[\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 6\right]$
$= -2\left[\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right]$.

b) $Q(t) = -2\left[\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2\right]$
$= -2\left(t + \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right)\left(t + \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\right)$
$= (-2t - 6)(t - 2)$.

2) Signe de Q(t).

| $t$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-2t - 6$ | + | 0 | | − | | − | |
| $t - 2$ | − | | | − | 0 | + | |
| $Q(t)$ | − | 0 | | + | 0 | − | |

$$\begin{cases} \forall t \in ]-\infty;-3[\cup]2;+\infty[ \text{ ; } Q(t) < 0 \\ \forall t \in ]-3;2[, \ Q(t) > 0 \\ Pour\ t \in \{-3;2\}, \ Q(t) = 0 \end{cases}$$

## Activité 3 Fractions rationnelles

$f(x) = x(x-2)$ ; $g(x) = x^2 - 4$.

1) $h(x) = \dfrac{9x^2}{4} - \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{9x^2}{4} - \dfrac{x(x-2)}{x^2-4}$.

2) $x \in D_h \Leftrightarrow x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ et $x \neq -2$.

$D_h = \mathbb{R} \setminus \{-2\,;\,2\}$.

3) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\,;\,2\}$, $h(x) = \dfrac{9x^2}{4} - \dfrac{x}{x+2}$

$$h(x) = \frac{9x^2(x+2)-4x}{4(x+2)} = \frac{9x^3+18x^2-4x}{4(x+2)} = \frac{x(9x^2+18x-4)}{4(x+2)}$$

$$= = \frac{9x\left(x^2+2x-\frac{4}{9}\right)}{4(x+2)} = \frac{9x\left[(x+1)^2-1-\frac{4}{9}\right]}{4(x+2)} = \frac{9x\left[(x+1)^2-\frac{13}{9}\right]}{4(x+2)}$$

$$h(x) = \frac{9x\left(x+1+\frac{\sqrt{13}}{3}\right)\left(x+1-\frac{\sqrt{13}}{3}\right)}{4(x+2)} = \frac{9x\left(x-\left(-1-\frac{\sqrt{13}}{3}\right)\right)\left(x-\left(-1+\frac{\sqrt{13}}{3}\right)\right)}{4(x+2)}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1-\frac{\sqrt{13}}{3}$ | | $-2$ | | $0$ | | $-1+\frac{\sqrt{13}}{3}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $9x$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x-\left(-1-\frac{\sqrt{13}}{3}\right)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x-\left(-1-\frac{\sqrt{13}}{3}\right)$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $4(x-2)$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ | $+$ | |

$$\begin{cases} \forall x \in \left]-\infty\,;-1-\frac{\sqrt{13}}{3}\right[ \cup \left]0\,;-1+\frac{\sqrt{13}}{3}\right[ \cup \left]2\,;+\infty\right[, h(x) > 0 \\ \forall x \in \left]-1-\frac{\sqrt{13}}{3}\,;-2\right[ \cup \left]-2\,;0\right[ \cup \left]-1+\frac{\sqrt{13}}{3}\,;2\right[,\ h(x) < 0 \\ \forall x \in \left\{-1-\frac{\sqrt{13}}{3}\,;0\,;-1+\frac{\sqrt{13}}{3}\right\},\ h(x) = 0 \end{cases}$$

### Exercices de fixation

**3-1** $F(x) = \dfrac{-9x^2+6x-14}{-x+1}$

$$\begin{array}{r|l} -9x^2+6x-14 & -x+1 \\ \cline{2-2} \underline{9x^2+9x\phantom{-14}} & 9x+3 \\ -3x-14 & \\ \underline{-3x-3} & \\ -17 & \end{array}$$

Ainsi, $F(x) = \dfrac{(-x+1)(9x+3)-17}{-x+1} = 9x+3-\dfrac{17}{-x+1}$

Donc $a = 9$ ; $b = -3$ et $c = -17$.

**3-2** Étude du signe de

1) $F(x) = \dfrac{x^3-2x^2+x}{x}$

$D_F = \mathbb{R} - \{0\}$.

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $F(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $F(x) \geq 0$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(x)$ | | $+$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $+$ | |

Pour $x \in \mathbb{R} - \{0\,;\,1\}$, $F(x) > 0$

$x = 1$, $F(x) = 0$.

2) $\forall x \neq -2$,

$$G(x) = x-3+\frac{4}{x+2}$$
$$= \frac{x^2-x-2}{x+2}$$
$$= \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-2}{x+2}$$
$$= \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}{x+2}$$
$$= \frac{(x-2)(x+1)}{x+2}$$

Tableau de signe.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-2$ | | $-$ | \| | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x+1$ | | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | |
| $x+2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | \| | $+$ | |
| $G(x)$ | | $-$ | \|\| | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$$\begin{cases} \forall x \in ]-\infty;-2[\cup]-1;2[;G(x)<0 \\ \forall x \in ]-2;-1[\cup]2;+\infty[;G(x)>0 \\ \forall x \in \{-1;2\};G(x)=0 \end{cases}$$

# Exercices

## Exercices de renforcement

**1** $d°(R) = 3$
$d°(S) = 7$
$d°(P) = 4.$

**2** $d°(P) = 3$
$d°(Q) = 3$
$d°(R) = 2$
$d°(P+Q) = 2$
$d°(P+R) = 3$
$d°(PR) = 5.$

**3** 1) $P(x) = 3\left(x^2-\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}\right)$

$$= 3\left[\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{2}{3}\right]$$
$$= 3\left[\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25+24}{36}\right]$$
$$= 3\left[\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{49}{36}\right] = 3(x-2)\left(x+\frac{1}{3}\right)$$

2) $P(x) = 4\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)$

$$= 3\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\frac{9}{4}\right]$$
$$= 3\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$$

3) $P(x) = -2\left(x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right) = -2\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\right]$

$$= -2x(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

4) $P(t) = -2\left(t^2+\frac{t}{2}-5\right)$

$$= -2\left[\left(t-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}-5\right]$$
$$= -2\left[\left(t-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{81}{16}\right]$$
$$= -2\left(t-\frac{5}{2}\right)(t+2)$$

5) $P(x) = 5\left(x^2+\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}\right)$

$$= 5\left[\left(x+\frac{1}{5}\right)^2-\frac{1}{25}+\frac{3}{5}\right]$$
$$= 5\left[\left(x+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{14}{25}\right]$$

6) $P(t) = -(t^2+t+1)$

$$= -\left[\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1\right]$$
$$= -\left[\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]$$

**4** $T(x) = (2x+1)^2-9 = (2x+1+3)(2x+1-3)$
$= (2x-2)(2x+4)$
$T(x) = 4(x-1)(x+2).$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | |
| $x-1$ | | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $T(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$$\begin{cases} \forall x \in ]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[, T(x)>0 \\ \forall x \in ]-2;1[, T(x)<0 \\ Pour\ x \in, \{-2;1\},\ T(x)=0 \end{cases}$$

$A(x) = 2x^2-9 = (\sqrt{2}x-3)(\sqrt{2}x+3)$

$$= 2\left(x-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ | | $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+\frac{3\sqrt{2}}{2}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $A(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$$\begin{cases} \forall x \in \left]-\infty\,;-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right[ \cup \left]\frac{3\sqrt{2}}{2}\,;+\infty\right[, A(x) > 0 \\ \forall x \in \left]-\frac{3\sqrt{2}}{2}\,;\frac{3\sqrt{2}}{2}\right[, A(x) < 0 \\ Pour\ x \in, \left\{-\frac{3\sqrt{2}}{2}\,;\frac{3\sqrt{2}}{2}\right\},\ A(x) = 0 \end{cases}$$

$$B(x) = 2 - \frac{x^2}{2} = \frac{4-x^2}{2} = \frac{(2-x)(2+x)}{2}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2+x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $2-x$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $B(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

$$\begin{cases} \forall x \in ]-\infty\,;-2[ \cup ]2\,;+\infty[, B(x) < 0 \\ \forall x \in ]-2\,;2[, B(x) > 0 \\ Pour\ x \in, \{-2\,;2\},\ B(x) = 0 \end{cases}$$

$P(x) = 2x - 5$

$P(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{2}$

$\forall x \in \left]-\infty\,;\frac{5}{2}\right[, P(x) < 0.$

$\forall x \in \left]\frac{5}{2}\,;+\infty\right[, P(x) > 0.$

*Pour* $x = \frac{5}{2}$; $P(x) = 0.$

$N(x) = -2(x+1)(3x-1)(x+2).$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $\frac{1}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x+2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $3x-1$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $N(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$$\begin{cases} \forall x \in ]-\infty\,;-2[ \cup \left]-1\,;\frac{1}{3}\right[, N(x) < 0 \\ \forall x \in ]-2\,;-1[ \cup \left]\frac{1}{3}\,;+\infty\right[, N(x) > 0 \\ Pour\ x \in, \left\{-2\,;1\,;\frac{1}{3}\right\},\ N(x) = 0 \end{cases}$$

**5**

$$\begin{array}{r|l} 3x^4 - 4x^3 + 1 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2} -(3x^4 - 6x^3 + 3x^2) & 3x^2 + 2x + 1 \\ \hline 2x^3 - 3x^2 + 1 & \\ -(2x^3 - 4x^2 + 2x) & \\ \hline x^2 - 2x + 1 & \\ x^2 - 2x + 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc $3x^4 - 4x^3 + 1 = (x-1)^2\,(3x^2 + 2x + 1)$.

Ainsi, $a = 3$ ; $b = 2$ et $c = 1$.

**6** 1) $x \in D_g \Leftrightarrow 2x - 5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{5}{2}$.

$D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{3}\right\}$.

2. a)

$$\begin{array}{r|l} 6x + 2 & 2x - 5 \\ \cline{2-2} -6x + 15 & 3 \\ \hline 17 & \end{array}$$

D'où $\frac{6x+2}{2x-5} = 3 + \frac{17}{2x-5}$ ; d'où $a = 3$ et $b = 17$.

b) $x \in \left[-\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{4}\right]$ ; $-\frac{1}{2} \leq x \leq -\frac{1}{4}$

$$-1 \leq 2x \leq -\frac{1}{2}$$

$$-6 \leq 2x - 5 \leq -\frac{11}{2}$$

$$-\frac{2}{11} \leq \frac{1}{2x-5} \leq -\frac{1}{6}$$

$$-\frac{17}{11} \leq \frac{17}{2x-5} \leq \frac{17}{6}$$

$$-\frac{16}{11} \leq 3 + \frac{17}{2x-5} \leq \frac{1}{6}$$

**7** $x \in D_R \Leftrightarrow 2x - 5 \neq 0$ et $x - 7 \neq 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$ et $x \neq 7$.

$D_R = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{2}\,;7\right\}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-7$ | | $1$ | | $\frac{5}{2}$ | | $7$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+7$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $2x+5$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x+7$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $R(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $-$ | | $+$ | |

$$\begin{cases} \forall x \in ]-\infty\,;-7[ \cup \left]1\,;\frac{5}{2}\right[ \cup ]7\,;+\infty[, R(x) > 0 \\ \forall x \in ]-7\,;-1[ \cup \left]\frac{5}{2}\,;7\right[, R(x) < 0 \\ Pour\ x \in, \{-7\,;1\},\ R(x) = 0 \end{cases}$$

$x \in D_S \Leftrightarrow 4x + 7 \neq 0$ et $5x - 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{7}{4}$ et $x \neq \frac{1}{5}$

$D_S = \mathbb{R} \backslash \left\{-\frac{7}{4}; \frac{1}{5}\right\}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \backslash \left\{-\frac{7}{4}; \frac{1}{5}\right\}$, $S(x) = \frac{4x-7}{4x+7}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{7}{4}$ | | $\frac{1}{5}$ | | $\frac{7}{4}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4x+7$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $4x+7$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $S(x)$ | | $+$ | \|\| | $-$ | \|\| | $-$ | 0 | $+$ | |

$$\begin{cases} \forall x \in \left]-\infty ; -\frac{7}{4}\right[ \cup \left]\frac{7}{4} ; +\infty\right[, S(x) > 0 \\ \forall x \in \left]-\frac{7}{4} ; \frac{1}{5}\right[ \cup \left]\frac{1}{5} ; \frac{7}{4}\right[, S(x) < 0 \\ Pour\ x = \frac{7}{4} ;\ S(x) = 0 \end{cases}$$

**8** 1) P(3) = $3^3 - 7 \times 3 - 6 = 27 - 21 - 6 = 27 - 27 = 0$.
Donc 3 est un zéro de P($x$).

2)
$$\begin{array}{r|l} x^3 - 7x - 6 & x - 3 \\ \cline{2-2} -x^3 + 3x^2 & x^2 + 3x + 2 \\ \cline{1-1} 3x^2 - 7x & \\ -3x^2 + 9x & \\ \cline{1-1} 2x - 6 & \\ -2x + 6 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

On a : $x^3 - 7x - 6 = (x - 3)(x^2 + 3x + 2)$ d'où
$Q(x) = x^2 + 3x + 2$.

3) $Q(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$.

$Q(x) = \left(x + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) = (x + 1)(x + 2)$.

Ainsi, $P(x) = (x - 3)(x + 1)(x + 2)$.

4)

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+2$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x+1$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $x-3$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $P(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

$$\begin{cases} \forall x \in ]-\infty ; -2[ \cup ]-1 ; 3[, P(x) < 0 \\ \forall x \in ]-2 ; -1[ \cup ]3 ; +\infty[, P(x) > 0 \\ Pour\ x \in, \{-2 ; 1 ; 3\},\ P(x) = 0 \end{cases}$$

5) $-0{,}5 \in ]-2 ; -1[$, donc $P(-0{,}5) > 0$ ;
$0 \in ]-1 ; 3[$, $P(0) < 0$ ;
$\sqrt{2} \in ]-1 ; 3[$, $P(\sqrt{2}) < 0$.
$-\frac{7}{2} \in ]-\infty ; -2[$, $P\left(-\frac{7}{2}\right) < 0$ ; $2\sqrt{3} \in ]3 ; +\infty[$ ;
$P(2\sqrt{3}) > 0$.

**9** $S(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - \delta x - 2x + \lambda$.
$S(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + (-\delta - 2)x + \lambda$. Or $R(x) = x^3 + 3x^3 - 4$.

$$R(x) = S(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 3 \\ \delta - 2 = 0 \\ \lambda = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 3 \\ \delta = 2 \\ \lambda = -4. \end{cases}$$

**10** $P(-1) = -2 \times (-1)^3 - 4 \times (-1)^2 + 10 \times (-1) + 12$
$= 2 - 4 - 10 + 12 = 0$.
$-1$ est un zéro de $P(0)$ donc $P(x) = (x + 1)\, Q(x)$.

$$\begin{array}{r|l} -2x^3 - 4x^2 + 10x + 12 & x + 1 \\ \cline{2-2} +2x^3 + 2x^2 & -2x^2 - 2x + 12 \\ \cline{1-1} -2x^2 + 10x & \\ +2x^2 + 2x & \\ \cline{1-1} 12x + 12 & \\ -12x - 12 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Ainsi, $Q(x) = -2x^2 - 2x + 12$.

$Q(x) = -2(x^2 + x - 6)$

$= -2\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 6\right]$

$Q(x) = -2\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right]$.

Donc $Q(x) = -2\left(x + \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right)$

$Q(x) = -2(x + 3)(x - 2)$.

Par suite, $P(x) = (x + 1)Q(x)$

$P(x) = -2(x + 1)(x - 2)(x + 3)$

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+3$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x+1$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $x-2$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $P(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

$$\begin{cases} \forall x \in ]-\infty ; -3[ \cup ]-1 ; 2[, P(x) > 0 \\ \forall x \in ]-3 ; -1[ \cup ]2 ; +\infty[, P(x) < 0 \\ Pour\ x \in, \{-3 ; -1 ; 2\},\ P(x) = 0 \end{cases}$$

**11** $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-3\ ;\ 3\}$, on a :

$$\frac{1}{x^2-9} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+3}$$
$$= \frac{ax+3a+bx-3b}{x^2-9}$$
$$\frac{1}{x^2-9} = \frac{(a+b)x+3a-3b}{x^2-9}.$$

Par identification on a :

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 3a-3b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b \\ a-b=\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=\frac{1}{3} \\ b=-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{6} \\ b=\frac{-1}{6} \end{cases}$$

**12** 1) $x \in D_F \Leftrightarrow 2x+3 \neq 0$ et $x-1 \neq 0$.

$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$ et $x \neq 1$.

$D_F = \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{3}{2};1\right\}$.

2. a) $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{3}{2};1\right\}$, $F(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(2x+3)(x-1)}$

$F(x) = \frac{x+1}{2x+3}$.

b) $F(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}+3} = \frac{(\sqrt{2}+1)(3-2\sqrt{2})}{9^2-(2\sqrt{2})^2}$

$= 3\sqrt{2} - 4 + 3 - 2\sqrt{2}$.

$= \sqrt{2}-1$.

3)
$$\begin{array}{r|l} x+1 & 2x+3 \\ \cline{2-2} -x-\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \cline{1-1} -\frac{1}{2} & \end{array}$$

D'où $F(x) = \frac{x+1}{2x+3} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{2x+3}$. Ainsi, $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$.

$F(x) = \frac{x^2-1}{(2x+3)(x-1)} = \frac{x^2-1}{2x^2+x-3} = \frac{x+1}{2x+3}$

$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{3}{2};1\right\}$.

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{3}{2}$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x+3$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x+1$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $F(x)$ | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | |

$$\begin{cases} \forall x \in \left]-\infty;-\frac{3}{2}\right[ \cup \left]-1;-1\right[ \cup \left]1;+\infty\right[, F(x) > 0 \\ \forall x \in \left]-\frac{3}{2};-1\right[, F(x) < 0 \end{cases}$$

Pour $x = -1$, $F(x) = 0$

**13** 1. a) $P(1) = 3(1)^3 + 7(1)^2 - 18 \times 1 + 8$
$= 3 + 7 - 18 + 8$
$= 18 - 18 = 0$.

b) $P(x) = (x-1)(3x^2 + 10x - 8)$ à l'aide d'une division euclidienne, on a $Q(x) = 3x^2 + 10x - 8$

2. a) $Q(x) = 3\left[x^2 + \frac{10}{3}x - \frac{8}{3}\right]$

$= 3\left[\left(x+\frac{5}{3}\right)^2 - \frac{25}{9} - \frac{8}{3}\right]$

$= 3\left[\left(x+\frac{5}{3}\right)^2 - \frac{49}{9}\right]$

b) $Q(x) = 3\left(x+\frac{5}{3}-\frac{7}{3}\right)\left(x+\frac{5}{3}+\frac{7}{3}\right)$

$= 3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x+4)$

$= (3x-2)(x+4)$

Donc $P(x) = (x-1)(x+4)(3x-2)$

**14** 1. a) $P(-2) = (-2)^3 - 5 \times (-2)^2 - 2 \times (-2) + 24$
$= -8 - 20 + 4 + 24 = -28+28 = 0$.

b)
$$\begin{array}{r|l} x^3 - 5x^2 - 2x + 24 & x+2 \\ \cline{2-2} -x^3 - 2x^2 \quad\quad\quad & x^2 - 7x + 12 \\ \cline{1-1} -7x^2 - 2x \quad\quad & \\ +7x^2 + 14x \quad\quad & \\ \cline{1-1} 12x + 24 & \\ -12x + 24 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Donc $Q(x) = x^2 - 7x + 12$.

2. a) $Q(x) = \left(x-\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + 12$

$Q(x) = \left(x-\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$.

b) Factorisation de Q

$Q(x) = \left(x-\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\right)$

$Q(x) = (x-4)(x-3)$.

c) $P(x) = (x+2)Q(x)$
$= (x+2)(x-4)(x-3)$.

d) Signe de $P(x)$.

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $3$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+2$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x-3$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x-4$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $P(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$$\begin{cases} \forall x \in ]-\infty\,;-2[\cup]3\,;4[,\ P(x)<0 \\ \forall x \in ]-2\,;3[\cup]4\,;+\infty[,\ P(x)>0 \\ Pour\ x \in, \{-2\,;3\,;4\},\ P(x)=0 \end{cases}$$

**15** 1. a) $P(2) = 2 \times 2^3 - 16 \times 2^2 + 10 \times 2 + 28$
$= 16 - 64 + 20 + 28$
$= 64 - 64 = 0.$

b)

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 16x^2 + 10x + 28 & x-2 \\ \cline{2-2} \underline{-2x^3 + 4x^2} \quad\quad\quad\quad & +2x^2 - 12x - 14 \\ -12x^2 + 10x \quad\quad & \\ \underline{+12x^2 - 24x} \quad\quad & \\ -14x + 28 & \\ \underline{+14x - 28} & \\ 0 & \end{array}$$

Ainsi, $P(x) = (x-2)(2x^2 - 12x - 14)$.
$a = 2$ ; $b = -12$ et $c = -14$.

a) $Q(x) = 2(x^2 - 6x - 7)$
$Q(x) = 2[(x-3)^2 - 16]$.

b) $Q(x) = 2(x - 3 - 4)(x - 3 + 4)$
$Q(x) = (x-7)(x+1)$.
Or $P(x) = (x-2)Q(x)$.
$= (x-7)(x+1)(x-2)$.

c)

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $7$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x-2$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x-7$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $P(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$$\begin{cases} \forall x \in ]-\infty\,;-2[\cup]2\,;7[,\ P(x)<0 \\ \forall x \in ]-1\,;2[\cup]7\,;+\infty[,\ P(x)>0 \\ Pour\ x \in, \{-1\,;2\,;7\},\ P(x)=0 \end{cases}$$

**16** 1. a) $P(x) = x^2 - 3x - 4$
$= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 4$
$P(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$
$= \left(x - \frac{3}{2} - \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2} + \frac{5}{2}\right)$
$P(x) = (x-4)(x+1)$.

b) $x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 \neq 0$
$\Leftrightarrow (x+1)(x-4) \neq 0$
$\Leftrightarrow x \neq -1$ et $x \neq 4$.

$D_f = \mathbb{R} \backslash \{-1\,;4\}$.

2. a) On a : $h(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$
On a $h(-1) = -1 + 2 + 5 - 6$
$= 0.$

D'où $h(x) = (x+1)(x^2 + x - 6)$
$= (x+1)(x-2)(x+3)$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\,;4\}$,

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-2)(x+3)}{(x+1)(x-4)} = \frac{(x-2)(x+3)}{x-4}.$$

b)

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-1$ | | $2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x-2$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x-4$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\|$ | $+$ | |

b) $$\begin{cases} \forall x \in ]-\infty\,;-3[\cup]2\,;4[,\ f(x)<0 \\ \forall x \in ]-3\,;-1[\cup]-1\,;2[\cup]4\,;+\infty[,\ f(x)>0 \\ Pour\ x \in, \{-3\,;2\},\ f(x)=0 \end{cases}$$

3) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 4} = x + 5 + \dfrac{14}{x-4}$ ;
$a = 1$ ; $b = 5$ et $c = 14$.

**17** 1. a) $P(2) = 2^3 - 3 \times 2^2 - 10 \times 2 + 24$
$= 8 - 12 - 20 + 24$
$= 32 - 32 = 0.$
Donc 2 est un zéro de $P(x)$.

2. a) $P(x) = (x-2)Q(x)$.
On a : $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = (x-2)(x^2 - x - 12)$.
D'où $Q(x) = x^2 - x - 12$
$= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 12$
$Q(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}$.
$Q(x) = \left(x - \frac{1}{2} - \frac{7}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{7}{2}\right)$
$Q(x) = (x-4)(x+3)$.

b) On a : $P(x) = (x-2)Q(x)$
$= (x-2)(x-4)(x+3)$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x-2$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x-4$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $P(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$$\begin{cases} \forall x \in ]-\infty\,;-3[\cup]2\,;4[,\ P(x) < 0 \\ \forall x \in ]-3\,;-2[\cup]4\,;+\infty[,\ P(x) > 0 \\ Pour\ x \in, \{-3\,;2;4\}, P(x) = 0 \end{cases}$$

**18** 1) $Q(x) = 2x^2 + (\sqrt{2}+1)x + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 2\left(x^2 + \frac{\sqrt{3}+1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

$= 2\left[\left(x + \frac{\sqrt{3}+1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\right]$

$= 2\left[\left(x + \frac{\sqrt{3}+1}{4}\right)^2 - \left(\frac{4+2\sqrt{3}}{16}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}\right]$

$= 2\left[\left(x + \frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)^2 - \frac{+4+2\sqrt{3}-4\sqrt{3}}{16}\right]$

$= 2\left[\left(x + \frac{\sqrt{3}+1}{4}\right)^2 - \left(\frac{4-2\sqrt{3}}{16}\right)\right].$

2) $Q(x) = 2\left[\left(x + \frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)^2\right]$

$=2\left(x + \frac{1+\sqrt{3}}{4} + \frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)\left(x + \frac{1+\sqrt{3}}{4} - \frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)$

$= 2\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \left(x + \frac{1}{2}\right)(2x + \sqrt{3})$

3) $F(x) = \dfrac{1-4x^2}{Q(x)}.$

$x \in D_F \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} \neq 0\ \ et\ \ 2x + \sqrt{3} \neq 0\,;$

$\Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{2}\ \ et\ \ x \neq -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

$D_F = \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{2}\,;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$

2) $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{2}\,;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right\},$

$F(x) = \dfrac{(1-2x)(1+2x)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x+\sqrt{3})}$

$= \dfrac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)(1-2x)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x+\sqrt{3})}$

$= \dfrac{2(1-2x)}{2x+\sqrt{3}}.$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x+\sqrt{3}$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $1-2x$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $F(x)$ | | $-$ | ‖ | $+$ | ‖ | $+$ | 0 | $-$ | |

$$\begin{cases} \forall x \in \left]-\infty\,;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[,\ F(x) < 0 \\ \forall x \in \left]-\frac{\sqrt{3}}{2}\,;-\frac{1}{2}\right[\cup\left]-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right[,\ F(x) > 0 \\ Pour\ x = \frac{1}{2}\,;\ F(x) = 0 \end{cases}$$

**19** 1)

$(x-1)^3 + 6(x-1)^2 + 9(x-1) = x^3 - 3x^2 + 3x^1 + 6x^2 - 12x + 6 + 9x - 9$

$= x^3 + 3x - 4.$

2\. a) $P(1) = 1^2 + 3 \times 1^2 - 4 = 4 - 4 = 0.$

b) $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 2x + d$

$= ax^3 + bx^2 + (c-2)x + d.$

$$P(x) = Q(x)\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c - 2 = 0 \\ d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 0 \\ d = -4 \end{cases}$$

Ainsi $Q(x) = x^3 + x(3x-2) - 2x - 4.$

**20** 1) $R(x) = 3x^3 + 3x^3 - 6$

$= 3(x^2 + x - 2)$

$= 3\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2\right]$

$= 3\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right].$

2) $R(x) = 0 \Leftrightarrow 3\left(x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow 3(x-1)(x+2) = 0$

$\Leftrightarrow x - 1 = 0$ ou $x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x - 1$ ou $x = -2.$

Les zéros de R sont 1 et –2.

**21** 1) $P(3) = -2 \times 3^3 + 5 \times 3^2 + 4 \times 3 - 3$

$= -54 + 45 + 12 - 3$

$= 57 - 57 = 0.$

$P(x) = (x-3)(-2x^2 - x + 1).$

2) a) $Q(x) = -2\left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right).$

$= -2\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - \frac{1}{2}\right]$

$Q(x) = -2\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right]$

b) $Q(x) = -2\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right]$

$= -2\left(x + \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right)\left(x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right).$

$Q(x) = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+1).$

c) $P(x) = (x-3)Q(x) = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+1)(x-3)$

$P(x) = (-2x+1)(x+1)(x-3).$

3\. a) Signe de P($x$)

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\frac{1}{2}$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $-2x+1$ | | $+$ | | $+$ | 0 | $-$ | | $-$ | |
| $x-3$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $P(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

$\forall x \in ]-\infty ; -1[ \cup \left]\frac{1}{2} ; 3\right[, P(x) > 0$

$\forall x \in \left]-1 ; \frac{1}{2}\right[ \cup ]3 ; +\infty[, P(x) < 0$

*Pour* $x \in, \left\{-1 ; \frac{1}{2} ; 3\right\}, P(x) = 0$

b) $x \in D_g \Leftrightarrow P(x) \geq 0.$

Donc $D_g = ]-\infty ; -1] \cup \left[\frac{1}{2} ; 3\right].$

**22** 1. a) $P(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 1 - 1$
$= -1 + 3 - 1 - 1 = 3 - 3 = 0.$

b) $-1$ est un zéro de P ; donc

$P(x) = (x + 1)(x^2 + 2x - 1)$
$= (x + 1)((x + 1)^2 - 1 - 1)$
$= (x + 1)((x + 1)^2 - (\sqrt{2})^2\ )$
$P(x) = (x + 1)(x + 1 + \sqrt{2}\,)(x + 1 - \sqrt{2}\,).$

2) $F(x) = \dfrac{P(x)}{x^2 - x - 2}$

a) $x \in D_F \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \neq 0$
$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) \neq 0$
$\Leftrightarrow x \neq -1$ et $x \neq 2.$

$D_F = \mathbb{R} \backslash \{-1 ; 2\}.$

b) $\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{-1 ; 2\}$ ;

$$F(x) = \frac{(x+1)(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})}{(x+1)(x-1)}$$

$$F(x) = \frac{(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})}{x-2}$$

3. a)

| $x$ | $-\infty$ | $-1-\sqrt{2}$ | | $-1$ | | $-1+\sqrt{2}$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+1+\sqrt{2}$ | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $x+1-\sqrt{2}$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ |
| $x-2$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $F(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | ‖ | $+$ | 0 | $-$ | ‖ | $+$ |

$\forall x \in ]-\infty ; -1-\sqrt{2}[ \cup ]-1+\sqrt{2} ; 2[, F(x) < 0$
$\forall x \in ]-1-\sqrt{2} ; -1[ \cup ]-1 ; -1+\sqrt{2}[ \cup ]2 ; +\infty[, F(x) > 0$
$\forall x \in \{-1-\sqrt{2} ; -1+\sqrt{2}\} ; F(x) = 0$

b) $x \in D_g \Leftrightarrow - F(x) \geq 0$

$\Leftrightarrow F(x) \leq 0.$

Donc $D_g = ]-\infty ; -1 - \sqrt{2}\,] \cup [-1 + \sqrt{2} ; 2[.$

c) $\forall x \in D_F$, $F(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x - 2}$

$F(x) = x + 4 + \dfrac{7}{x-2}.$

$a = 1$ ; $b = 4$ et $c = 7.$

## Exercices d'approfondissement

**23** 1) $h(x) = 4x^2 + 4x + 1$
$= 4\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right)$
$h(x) = 4\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right] = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2.$

2. a) $g(x) = x^2 + 2x + 4$
$= (x + 1)^2 - 1 + 4$
$g(x) = (x + 1)^2 + 3.$

b) $g(x)$ est la somme de deux carrés donc g n'est pas factorisable.

3) a) $f(x) = x^3 - 8 + (x^2 + 2x + 4)(4x^2 + 3x + 3)$
$= x^3 - 2^3 + (x^2 + 2x + 4)(4x^2 + 3x + 3)$
$= (x - 2)(x^2 + 2x + 4) + (x^2 + 2x + 4)(4x^2 + 3x + 3)$
$= (x^2 + 2x + 4)(x - 2 + 4x^2 + 3x + 3)$
$= (x^2 + 2x + 4)(4x^2 + 4x + 1) = (x^2 + 2x + 4)h(x).$
$f(x) = 4(x^2 + 2x + 4)\left(x + \frac{1}{2}\right)^2.$

b) $f(x) = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2((x+1)^2 - 1 + 3)$
$f(x) = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2((x+1)^2 + 2).$
Donc $f(x) = 0 \Leftrightarrow 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2((x+1)^2 + 2) = 0$
$\Leftrightarrow x + \frac{1}{2} = 0$ car $(x+1)^2 + 2 \neq 0.$
$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$

Donc $-\frac{1}{2}$ est le zéro de $f$.

**24** $d°(R) = 3$, donc $R(x) = ax^3 + bx^2 + c + d$ ; $a \neq 0$.
De plus, $R(0) = 0$.

On a :
$R(x + 1) = a(x + 1)^3 + b(x+1)^2 + c(x + 1) + d$
$= a(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + b(x^2 + 2x + 1) + cx + c + d$
$= ax^3 + (3a + b)x^2 + (3a + 2b + c)x + a + c + d$
Et $R(x+1) - R(x) = 3ax^2 + (3a + 2b)x + a + c$

Donc
$$R(x+1) - R(x) = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 1 \\ 3a + 2b = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} \text{ Par identification}$$

$$R(x+1) - R(x) = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

De plus, $R(0) = 0$ donc $d = 0$.
Ainsi, $R(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x.$

**25** $F(x) = \dfrac{x^5 x^4 + 1}{x^3 - x}$

1. a) $x \in D_F \Leftrightarrow x^3 - x \neq 0$
$\Leftrightarrow x(x^2 - 1) \neq 0$
$\Leftrightarrow x(x - 1)(x + 1) \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 0$ et $x \neq 1$ et $x \neq -1$.

$D_F = \mathbb{R}\backslash\{0\ ;\ 1\ ;\ -1\}$.

On a :

$$\begin{array}{l|l} x^5+x^4+1 & x^3-x \\ \cline{2-2} -x^5+x^3 & x^2+x+1 \\ \cline{1-1} x^4+x^3 & \\ -x^4+x^2 & \\ \cline{1-1} x^3+x^2 & \\ -x^3+x & \\ \cline{1-1} x^3+x+1 & \end{array}$$

Donc

$F(x) = x^2+x+1+\dfrac{x^2+x+1}{x^3-x}$.

Donc $G(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^3-x}$.

2) On a : $G(x) = \dfrac{d}{x}+\dfrac{e}{x+1}+\dfrac{f}{x-1}$ (1).

a) On a $xG(x) = d+\dfrac{ex}{x+1}+\dfrac{fx}{x-1}$.

En remplaçant $x$ par 0, on a :

$xG(x) = x \times \dfrac{x^2+x+1}{x(x+1)(x-1)}$

$= \dfrac{x^2+x+1}{(x+1)(x-1)}$.

D'où $\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)(x-1)} = d+\dfrac{ex}{x+1}+\dfrac{fx}{x-1}$

*(Pour x = 0).*

$-1 = d$

b) • $(x+1)G(x) = \dfrac{d(x+1)}{x}+e+\dfrac{f(x+1)}{x-1}$

$\dfrac{x+x+1}{x(x-1)} = e+(x+1)\left(\dfrac{d}{x}+\dfrac{f}{x-1}\right)$.

Pour $x = -1$ ; on a : $\dfrac{1}{2} = $ e.

• $(x-1)G(x) = \dfrac{d(x-1)}{x}+\dfrac{e(x-1)}{x+1}+f$ ;

$\dfrac{x^2+x+1}{x(x-1)} = f+(x+1)\left(\dfrac{d}{x}+\dfrac{e}{x+1}\right)$.

Pour $x = 1$ ; on a : $\dfrac{3}{2} = f$.

Ainsi, $G(x) = \dfrac{-1}{x}+\dfrac{\frac{1}{2}}{x+1}+\dfrac{\frac{3}{2}}{x-1}$.

## Situation d'évaluation

**26** 1er ligne

1) $(x+1)^2 = (x-2)^2+2^2$ avec $x > 2$.

$x^2+2x+1 = x^2-4x+4+4$

$6x = 7$

$x = \dfrac{7}{6}$. Or $\dfrac{7}{6} < 2$ ; donc il n'existe pas de $x$.

1er ligne

2) $(x+1)^2+(x-2)^2 = 10^2$ ; $(x > 1)$.

$x^2+2x+1+x^2-2x+1 = 100$

$2x^2+2 = 100$

$2x^2 = 98$

$x^2 = 49 \Leftrightarrow x = 7$ ou $x = -7$.

Or $x > 1$, donc $x$ existe et est égale à 7. $x = 7$.

**27** Soit $x$ la part du dernier ;

alors le deuxième reçoit $x + 100$ et l'aîné reçoit $(x + 100) + 200$.

On a donc : $x + x + 100 + x + 300 = 1600$

$3x + 400 = 1600$

$3x = 1200$

$x = 400$.

Le dernier a 400 hectares, le deuxième 500 hectares et l'aîné a 700 hectares

L'entreprise sera satisfaite car 400 < 500.

**28** 1) Soit $x$ le plus petit ; alors $(x \in \mathbb{N})$.

$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2 = (x+3)^2+(x+4)^2$ ;

$x^2+x^2+2x+1+x^2+4x+4 = x^2+6x+9+x^3+8x+16$

$3x^2+6x+5 = 2x^2+14x+25$

$x^2-8x-20 = 0$.

2) $(x-4)^2-16-20 = 0$ ;

$(x-4)^2-36 = 0$

$(x-4)^2-6^2 = 0$

$(x-4-6)(x-4+6) = 0$

$(x-10)(x+2) = 0$.

$x = 10$ ou $x = -2$. Or $-2 \in \mathbb{Z}$. Ainsi $x = 10$.

Donc il n'existe pas d'autre série.

**29** 1. a) $\mathcal{A}_{HMPB} = \dfrac{(BH+PM)\times HM}{2}$.

Or $HM = OM - OH = x - 3$

$BH = OC = 4$.

Le triangle AHB est rectangle isocèle en H car AH = 4 = OC = BH. Donc le triangle AMP est rectangle isocèle en M ; donc MP = AM.

Or AM = OA – OM = $7 - x$.

Ainsi, BH + PM = $4 + 7 - x = 11 - x$.

D'où $\mathcal{A}_{HMPB} = \dfrac{(11-x)(x-3)}{2}$

b) Aire de la partie hachurée /

$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{OHBC} + \mathcal{A}_{HMPB}$

$= 3 \times 4 + \dfrac{11x-33-x^2+3x}{2}$

$= \dfrac{-x^2+14x-9}{2}$

$= -\dfrac{1}{2}x^2+7x-\dfrac{9}{2}$.

2) On a : $\mathcal{A}_p = 18 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}x^2+7x-\dfrac{9}{2} = 18$

$\Leftrightarrow -x^2+14x-9-36 = 0$

$\Leftrightarrow -x^2+14x-45 = 0$

$\Leftrightarrow -(x^2-14x+45) = 0$

$\Leftrightarrow -(x-7-2)(x-7+2) = 0$

$\Leftrightarrow -(x-9)(x-5) = 0$

$\Leftrightarrow x = 9$ ou $x = 5$.

Comme $3 \leq x \leq 7$ alors $x = 5$. OM = 5.

Leçon 3

# ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS DANS $\mathbb{R}$

## INSTALLATION DES HABILETÉS

### Activité 1 Équations dans $\mathbb{R}$

#### 1.1. Définition d'une équation dans $\mathbb{R}$

1. (E) : $x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)$

2. a) $Df = \mathbb{R}$.

$x \in Dg \Leftrightarrow x \neq 0$ et $x \neq 3$ ; donc $Dg = \mathbb{R} - \{0\ ;\ 3\}$.

b) L'équation (E) a un sens si $x \in Df \cap Dg$. Or $Df \cap Dg = \mathbb{R} - \{0\ ;\ 3\}$ donc (E) a un sens pour $x \in \mathbb{R} - \{0\ ;\ 3\}$.

3. $f\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{20+1}{3} = \frac{21}{3} = 7$

$$g\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{\frac{10}{3}\left(\frac{10}{3} - 1\right)}{\left(\frac{10}{3}\right)^2 - 3\left(\frac{10}{3}\right)} = \frac{\frac{70}{9}}{\frac{10}{9}} = \frac{70}{9} \times \frac{9}{10} = 7$$

donc $f\left(\frac{10}{3}\right) = g\left(\frac{10}{3}\right)$

4. $f(-2) = -4 + \frac{1}{3} = -\frac{11}{3}$

$$g(-2) = \frac{-2(-2-1)}{(-2)^2 - 3(-2)} = \frac{6}{4+6} = \frac{3}{5}$$

$f(-2) \neq g(-2)$

**Exercices de fixation**

1-1-1 1- F ; 2- V ; 3- F

1-1-2 1- b ; 2- a ; 3- c

#### 1.2. Équations équivalentes

a) $(E_1) : |x| = 2$ et $(E_2) : x^2 - 4 = 0$

- $|x| = 2 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$, $S_{E_1} = \{-2\ ;\ 2\}$
- $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$, $S_{E_2} = \{-2\ ;\ 2\}$

$S_{E_1} = S_{E_2}$

b) $(E_1) : x(x-1) = 0$ et $(E_2) : x^2 + x = 2x$

- $x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$, $S_{E_1} = \{0\ ;\ 1\}$
- $x^2 - x = 2x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$, $S_{E_2} = \{0\ ;\ 1\}$

$S_{E_1} = S_{E_2}$

c) $(E_1) : \frac{1}{x} = x$ et $(E_2) : x^2 - 1 = 0$

- $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\frac{1}{x} = x \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$

$S_{E_1} = \{-1\ ;\ 1\}$ et $S_{E_2} = \{-1\ ;\ 1\}$

donc $S_{E_1} = S_{E_2}$

**Exercices de fixation**

1-2-1 $(E_1) : x^2 = 1$ ; $(E_2) : 1 - |x| = 0$ et $(E_4) : \frac{1}{x} = x$ .

1-2-2 1. vrai.
2. faux.

## 1.3. Équations dans ℝ dont les membres sont des polynômes

1. $(E_1) : (3x-4)^2 = -x(4-3x)$

$\Leftrightarrow (3x-4)^2 - x(3x-4) = 0$

$\Leftrightarrow (3x-4)(3x-4-x) = 0$

$\Leftrightarrow (3x-4)(2x-4) = 0.$

$\Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$ ou $x = 0.$

$S_{E_1} = \left\{\frac{4}{3} ; 2\right\}$

2. $(E_2) : 49x^2 + (7x+2)^2 = -14x$

$49x^2 + 14x + (7x+2)^2 = 0$

$7x(7x+2) + (7x+2)^2 = 0$

$(7x+2)(14x+2) = 0.$

$x = -\frac{2}{7}$ ou $x = -\frac{1}{7}$

$S_{E_2} = \left\{-\frac{2}{7} ; -\frac{1}{7}\right\}$

3. $(E_3) : 25x^2 - 1 - (5x+2)^2 = -5x + 1$

$(5x-1)(5x+1) + 5x - 1 - (5x+2)^2 = 0$

$(5x-1)(5x+2) - (5x+2)^2 = 0$

$(5x+2)(5x-1-5x-2) = 0$

$-3(5x+2) = 0$

$x = -\frac{2}{5}$

$S_{E_3} = \left\{-\frac{2}{5}\right\}$

### Exercices de fixation

**1-3-1** a) $(E_1) : x \in \mathbb{R},\ x + \frac{x+6}{5} + \frac{x-3}{2} = 6 - \frac{3-5x}{4}$

$x + \frac{x+6}{5} + \frac{2x-6}{4} - 6 + \frac{3-5x}{4} = 0$

$x - 6 + \frac{x+6}{5} + \frac{-3x-3}{4} = 0$

$\frac{20x - 120 + 4x + 24 - 15x - 15}{20} = 0$

$\frac{9x - 111}{20} = 0$ , $x = \frac{111}{9} = \frac{37}{3}$

$S_{E_1} = \left\{\frac{37}{3}\right\}$

b) $(E_2) : x \in \mathbb{R}, (3x+6)(3x-1) = (x+2)(2x-4)$

$3(x+2)(3x-1) - (x+2)(2x-4) = 0$

$(x+2)(9x - 3 - 2x + 4) = 0$

$(x+2)(7x+1) = 0$

$x = -2$ ou $x = -\frac{1}{7}$ . $S_{E_1} = \left\{-2 ; -\frac{1}{7}\right\}$

c) $(E_3) : x \in \mathbb{R}, (3x+1)(1-6x) - (3x+7)(3x+1) = 0.$

$(3x+1)[1 - 6x - 3x - 7] = 0$

$(3x+1)(-9x-6) = 0$

$x = -\frac{1}{3}$ ou $x = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3}$

$S_{E_3} = \left\{-\frac{1}{3} ; -\frac{2}{3}\right\}$

**1-3-2** a) $x^2 = 121$

$x^2 - 11^2 = 0$

$(x-11)(x+11) = 0$

$x = 11$ ou $x = -11$

$S_{\mathbb{R}} = \{-11 ; 11\}.$

b) $x^2 = 11$

$x^2 - (\sqrt{11})^2 = 0$

$(x - \sqrt{11})(x + \sqrt{11}) = 0$

$x = \sqrt{11}$ ou $x = -\sqrt{11} = 0$

$S_{\mathbb{R}} = \{-\sqrt{11} ; \sqrt{11}\}.$

c) $x^2 = -9$

$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$ or $-9 < 0$

donc $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \neq -9$

$S_{\mathbb{R}} = \varnothing.$

d) $x^2 + 5 = 30$

$x^2 = 25$

$x^2 - 5^2 = 30$

$(x-5)(x+5) = 0$

$x = 5$ ou $x = -5$

$S_{\mathbb{R}} = \{-5 ; 5\}.$

e) $(x+5)^2 = 49$

$(x+5)^2 - 7^2 = 0$

$(x+5-7)(x+5+7) = 0$

$(x-2)(x+12) = 0$

$x = 2$ ou $x = -12$

$S_{\mathbb{R}} = \{-12 ; 2\}.$

f) $(x-4)^2 + 1 = 2$

$(x-4)^2 = 1$

$(x-4)^2 - 1^2 = 0$

$(x-4-1)(x-4+1) = 0$

$(x-5)(x-3) = 0$

$x = 5$ ou $x = 3$

$S_{\mathbb{R}} = \{3 ; 5\}.$

## 1.4. Équations dans ℝ dont les membres sont des fractions rationnelles

1) $(E_1) : \frac{4-x}{x-3} = 0$

$\frac{4-x}{x-3}$ existe pour $x - 3 \neq 0$

$x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$

$V = \mathbb{R} - \{3\}$ est l'ensemble de validitéde $(E_1)$

$\frac{4-x}{x-3} = 0 \Leftrightarrow 4 - x = 0 \Leftrightarrow x = 4$

$4 \in V$ donc $S_{\mathbb{R}} = \{4\}.$

2) $(E_2) : \frac{x^2}{x-1} - 1 = \frac{1}{x-1}$

$\frac{x^2}{x-1}$ et $\frac{1}{x-1}$ existe pour $x - 1 \neq 0$

$x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

$V = \mathbb{R} - \{1\}$ est l'ensemble de validitéde $(E_2)$

$\frac{x^2}{x-1} - 1 = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x-1} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow x + 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$0 \in V$, donc $S_{\mathbb{R}} = \{0\}.$

3) $(E_3)$ : $\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{x-4}{x^2+2x}$.

$\dfrac{3}{x+2}$ existe pour $x \neq -2$ ; $\dfrac{2}{x}$ existe pour $x \neq 0$

$\dfrac{x-4}{x^2+2x}$ existe pour $x \neq 0$ et $x \neq -2$

donc $\vee = \mathbb{R} - \{-2;0\}$ est l'ensemble de validité de $(E_3)$

$$\frac{3x-2x-4}{x(x+2)}=\frac{x-4}{x(x+2)}$$

$$\frac{x-4}{x(x+2)}=\frac{x-4}{x(x+2)}$$

Tout élément de $\vee$ est solution de $(E_3)$

donc $S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \setminus \{-2;0\}$.

## Exercices de fixation

**1-4-1** a) $(E_1)$ : $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{3x-3}{x+1}=0$

$\vee = \mathbb{R} - \{-1\}$

$\dfrac{3x-3}{x+1}=0 \Leftrightarrow 3(x-1)=0 \Leftrightarrow x=1$

$1 \in \vee$ donc $S_{\mathbb{R}} = \{1\}$

b) $(E_2)$ : $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{x+2}{x-3}$

$\dfrac{x+1}{x-1}$ existe pour $x \neq 1$ ;

$\dfrac{x+2}{x-3}$ existe pour $x \neq 3$

donc $\vee = \mathbb{R} - \{1;3\}$ est l'ensemble de validité de $(E_2)$

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{x+2}{x-3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-3)-(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-3)}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x-3-(x^2+x-2)}{(x-1)(x-3)}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3x-1}{(x-1)(x-3)}=0 \Leftrightarrow 3x+1=0$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$$

$-\dfrac{1}{3} \in \vee$ donc $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$.

**1-4-2** a) $(E_1)$ : $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{1}{x}$

$\vee = \mathbb{R} - \{0;-1\}$ est l'ensemble de validité de $(E_1)$

$$\frac{2}{x+1}=\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{2}{x+1}-\frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow \frac{2x-x-1}{x(x+1)}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{x(x+1)}=0 \Leftrightarrow x=1.$$

$1 \in \vee$ donc $S_{\mathbb{R}} = \{1\}$

b) $(E_2)$ : $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x-1}=0$

$\vee = \mathbb{R} - \{-2\ ;\ 1\}$

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-1}=0 \Leftrightarrow \frac{x-1+x+2}{(x+2)(x-1)}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+1}{(x+2)(x-1)}=0$$

$$\Leftrightarrow 2x+1=0$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$$

$-\dfrac{1}{2} \in \vee$ donc $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

## 1.5. Équations avec valeur absolue

1. $(E_1)$ : $x \in \mathbb{R}$, $|x-3|=1$

$|x-3|=1 \Leftrightarrow x-3=1$ ou $x-3=-1$

$\Leftrightarrow x=4$ ou $x=2$

$S_{\mathbb{R}} = \{2;4\}$

2. $(E_2)$ : $x \in \mathbb{R}$, $|4x-2|=5$

$|4x-2|=5 \Leftrightarrow 4x-2=5$ ou $4x-2=-5$

$\Leftrightarrow 4x=7$ ou $4x=-3$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{7}{4}$ ou $x=-\dfrac{3}{4}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{\dfrac{7}{4};-\dfrac{3}{4}\right\}$

3. $(E_3)$ : $x \in \mathbb{R}$, $|2x+3|=|3x-7|$

$|2x+3|=|3x-7| \Leftrightarrow 2x+3=3x-7$ ou $2x+3=-3x+7$

$\Leftrightarrow x=10$ ou $x=\dfrac{4}{5}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{\dfrac{4}{5};10\right\}$

**Exercices de fixation**

1-5-1 1. $(E_1) : x \in \mathbb{R},\ |x-1| = 4$

$|x-1| = 4 \Leftrightarrow x-1=4$ ou $x-1=-4$

$x=5$ ou $x=-3$

$S_{\mathbb{R}} = \{-3;5\}$

2. $(E_2) : x \in \mathbb{R},\ |x-5| = -2$

$\forall x \in \mathbb{R},\ |x-5| \geq 0$ or $-2 < 0$

donc $\forall x \in \mathbb{R},\ |x-5| \neq -2$

$S_{\mathbb{R}} = \phi$

3. $(E_3) : x \in \mathbb{R},\ |2x+8| = 3$

$|2x+8| = 3 \Leftrightarrow 2x+8=3$ ou $2x+8=-3$

$\Leftrightarrow 2x=-5$ ou $2x=-11$

$\Leftrightarrow x = \frac{-5}{2}$ ou $x = \frac{-11}{2}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{-11}{2}; \frac{-5}{2}\right\}$

1-5-2 1. $(E_1) : x \in \mathbb{R},\ |x-1| = |x-5|$

$|x-1| = |x-5| \Leftrightarrow x-1 = x-5$ ou $x-1 = -x+5$

$\Leftrightarrow 0x = -4$ ou $2x = 6$

$x$ n'existe pas $\quad x = 3$

$S_{\mathbb{R}} = \{3\}$

2. $(E_2) : x \in \mathbb{R},\ |x+5| = |x|$

$|x+5| = |x| \Leftrightarrow x+5 = x$ ou $x+5 = -x$

$\Leftrightarrow 0x = -5$ ou $2x = -5$

$x$ n'existe pas $\quad x = \frac{-5}{2}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{-5}{2}\right\}$

## Activité 2 Inéquations dans $\mathbb{R}$

### 2.1. Définition d'une inéquation dans $\mathbb{R}$

1. (I) : $x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq g(x)$

2. a) • $x \in Df \Leftrightarrow x \neq 0$, $Df = \mathbb{R} - \{0\}$

• $Dg = \mathbb{R}$ car $g$ est une fonction polynôme.

b) $Df \cap Dg = \mathbb{R} - \{0\}$

c) L'inéquation (I) a un sens si et seulement si $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

3. $f(-2) = \dfrac{2(-2-3)}{3(-2)} = \dfrac{5}{3}$ ; $g(-2) = \dfrac{1-2(-2)}{6} = +\dfrac{5}{6}$

$f(-2) \geq g(-2)$

4. $f(-5) = \dfrac{2(-5-3)}{3(-5)} = \dfrac{+16}{15}$ ; $g(-5) = \dfrac{1-2(-5)}{6} = \dfrac{11}{6}$

$f(-5) < g(-5)$

**Exercices de fixation**

2-1-1 1. faux ; 2. vrai ; 3. faux

2-1-2 1. C ; 2. A

### 2.2. Inéquations équivalentes

a) $(I_1)$ : $\frac{x}{2} - 1 \geq x - 4$

$\frac{x}{2} - x \geq -4 + 1$

$-\frac{x}{2} \geq 3$

$-x \geq -6$

$x \leq 6$

$S_{I_1} = ]-\infty ; 6]$

$(I_2)$ : $2x - 5 \leq 7$

$2x \leq 12$

$x \leq 6$

$S_{I_1} = ]-\infty ; 6]$

$S_{I_1} = S_{I_2}$

b) $\frac{x+2}{x} < 1$

$\frac{x+2}{x} - 1 < 0$

$\frac{x+2-x}{x} < 0$

$\frac{2}{x} < 0$

$x < 0$

$S_{I_1} = ]-\infty ; +0[$

$I_2 : 2x < 0$

$x < 0$

$S_{I_2} = ]-\infty ; 0[$

$S_{I_1} = S_{I_2}$

## Exercices de fixation

**2-2-1** Les inéquations équivalentes sont $(I_1)$ et $(I_2)$.

**2-2-2** 1. • $-2x(x-4) \leq 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty\,;0] \cup [4\,;+\infty[$

$S_{\mathbb{R}} = ]-\infty\,;0] \cup [4\,;+\infty[$

• $\dfrac{x-4}{2x} \geq 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty\,;0[ \cup [4\,;+\infty[$

$S_{\mathbb{R}} = ]-\infty\,;0[ \cup [4\,;+\infty[$

$]-\infty\,;0] \cup [4\,;+\infty[ \neq ]-\infty\,;0[ \cup [4\,;+\infty[$

donc $(I_1)$ et $(I_2)$ ne sont pas équivalentes.

2. $-4x-8>0$

$-4x > 8$

$x < -2$

$S_{\mathbb{R}} = ]-\infty\,;-2[$

$x+2 < 0$

$x < -2$

$S_{\mathbb{R}} = ]-\infty\,;-2[$

$(I_1)$ et $(I_2)$ sont équivalentes.

### 2.3. Inéquations dans $\mathbb{R}$ dont les membres sont deux fonctions polynômes

1. $(I_1)$ : $(x-1)(2x+4)<0$

$2(x-1)(x+2)<0$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x+2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $2(x-1)(x+2)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$S_{\mathbb{R}} = ]-2\,;1[$

2. $(I_2)$ : $(x-3)^2 < (1-x)^2$

$(x-3)^2 - (1-x)^2 < 0$

$(x-3-1+x)(x-3+1-x) < 0$

$(2x-4)(-2) < 0$

$-4(x-2) < 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-4$ | | $-$ | | $-$ | |
| $x-2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $-4(x-2)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

$S_{\mathbb{R}} = ]2\,;+\infty[$

3. $(I_3)$ : $2x(x-3)+x^2 \geq 9$

$2x(x-3)+x^2-9 \geq 0$

$2x(x-3)+(x-3)(x+3) \geq 0$

$(x-3)(2x+x+3) \geq 0$

$(x-3)(3x+3) \geq 0$

$3(x-3)(x+1) \geq 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-3$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $3(x-3)(x+1)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$S_{\mathbb{R}} = ]+\infty\,;-1] \cup [3\,;+\infty[$

## Exercices de fixation

**2-3-1** a) $(I_1)$ : $x \in \mathbb{R}$, $(x-3)(x-1) \leq 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-3$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $(x-3)(x-1)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$S_{\mathbb{R}} = [1\,;3]$

b) $(I_2)$ : $x \in \mathbb{R}$, $(x-9)(x-5) < 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $5$ | | $9$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-9$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x-5$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $(x-9)(x-5)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$S = ]5\,;9[$

**2-3-2** a) $(I_1) : x \in \mathbb{R},\ (2-x)(6x+3) \geq 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $6x+3$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $2-x$ | | $+$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $(2-x)(6x+3)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

$S_{\mathbb{R}} = \left[-\frac{1}{2} ; 2\right]$

b) $(I_2) : x \in \mathbb{R},\ x(7-x) + (x-1)(2x-14) \leq 0$

$-x(x-7) + 2(x-1)(x-7) \leq 0$

$(x-7)\,[-x + 2\,(x-1)] \leq 0$

$(x-7)(x-2) \leq 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $7$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-7$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $x-2$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $(x-2)(x-7)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

$S = [2 ; 7]$

## 2.4. Inéquations dans ℝ dont les membres sont deux fractions rationnelles

1. $(I_1) : \quad \dfrac{1}{x+1} < 2$

$$\frac{1}{x+1} < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} - 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{-2x-1}{x+1} < 0$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-2x-1$ | | $+$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $x+1$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $\dfrac{-2x-1}{x+1}$ | | $-$ | $\|$ | $+$ | 0 | $-$ | |

$S_{\mathbb{R}} = ]-\infty ; -1[ \cup \left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.

2. $(I_2) : \quad \dfrac{x}{x-2} \geq \dfrac{x+5}{x+1}$

$$\frac{x}{x-2} - \frac{x+5}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x+1)-(x-2)(x+5)}{(x-2)(x+1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+x-x^2-5x+2x+10}{(x-2)(x+1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x+10}{(x-2)(x+1)} \geq 0$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-2x+10$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $x+1$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x-2$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $\dfrac{-2x+10}{(x-2)(x+1)}$ | | $+$ | $\|$ | $-$ | $\|$ | $+$ | 0 | $-$ | |

$S_{\mathbb{R}} = ]-\infty ; -1[ \cup ]2 ; 5]$

### Exercices de fixation

**2-4-1** a) $(I_1) : x \in \mathbb{R},\ \dfrac{x-3}{x+1} \leq 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-3$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $x+1$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $\dfrac{x-3}{x+1}$ | | $+$ | $\|$ | $-$ | 0 | $+$ | |

$S_{\mathbb{R}} = ]-1 ; 3]$

b) $(I_2) : x \in \mathbb{R},\ \dfrac{x+4}{x-6} > 0$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $6$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+4$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $x-6$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $\dfrac{x+4}{x-6}$ | | $+$ | 0 | $-$ | $\|$ | $+$ | |

$S_{\mathbb{R}} = \ ]-\infty ; -4[ \cup ]6 ; +\infty[$

## Exercices de fixation

**2-4-2** a) $(I_1) : x \in \mathbb{R},\ \frac{2x+8}{x-1} > 1$

$\frac{2x+8}{x-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{2x+8-x+1}{x-1} > 0$

$\Leftrightarrow \frac{x+9}{x-1} > 0$

| $x$ | $-\infty$ $\quad -9 \quad$ $1$ $\quad +\infty$ | | |
|---|---|---|---|
| $x+9$ | $-$ $\quad 0$ | $+$ | $+$ |
| $x-1$ | $-$ | $-$ $\quad 0$ | $+$ |
| $\frac{x+9}{x-1}$ | $+$ $\quad 0$ | $-$ $\quad \Vert$ | $+$ |

$S = ]-\infty\,;-9[ \cup ]1\,;+\infty[$

b) $(I_2) : x \in \mathbb{R},\ \frac{x+1}{3-x} \geq \frac{-2}{x-3}$

$\frac{x+1}{3-x} \geq \frac{-2}{x-3} \Leftrightarrow \frac{-x-1}{3-x} + \frac{-2}{x-3} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{-x+1}{x-3} \geq 0$

| $x$ | $-\infty$ $\quad 1 \quad$ $3$ $\quad +\infty$ | | |
|---|---|---|---|
| $-x+1$ | $+$ $\quad 0$ | $-$ | $-$ |
| $x-3$ | $-$ | $-$ $\quad 0$ | $+$ |
| $\frac{-x+1}{x-3}$ | $-$ $\quad 0$ | $+$ $\quad \Vert$ | $-$ |

$S_{\mathbb{R}} = [1\,;3[$

## 2.5. Inéquations dans ℝ avec valeur absolue

1. $(I_1) : |x-3| \leq 5$

$|x-3| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x-3 \leq 5$

$\Leftrightarrow -5+3 \leq x \leq 5+3$

$\Leftrightarrow -2 \leq x \leq 8$

$S_{\mathbb{R}} = [-2\,;8]$

2. $(I_2) : |x-1| \leq |x+3|$

$|x-1| \leq |x+3| \Leftrightarrow (x-1)^2 \leq (x+3)^2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 - (x+3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1-x-3)(x-1-x+3) \leq 0$

$\Leftrightarrow -4(2x+2) \leq 0 \Leftrightarrow -8(x+1) \leq 0$

$\Leftrightarrow x+1 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \geq -1$

$S_{\mathbb{R}} = [-1\,;+\infty[$

## Exercices de fixation

**2-5-1** $(I_1) : \left|x-\frac{1}{2}\right| \leq 3$

$|x-0{,}5| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x-\frac{1}{2} \leq 3$

$\Leftrightarrow 3+\frac{1}{2} \leq x \leq 3+\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-5}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}$

$S_{\mathbb{R}} = \left[-\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right]$

$(I_2) : |2-3x| < 7$

$-7 < 2-3x < 7$

$-9 < -3x < 5$

$\frac{-5}{2} < x < 3$

$S_{\mathbb{R}} = \left]\frac{-5}{3};3\right[$.

**2-5-2** $(I) : x \in \mathbb{R},\ |5-2x| > |2x+3|$

$|5-2x| > |2x+3| \Leftrightarrow (5-2x)^2 > (2x+3)^2$

$\Leftrightarrow [5-2x-2x-3)\,(5-2x+2x+3) > 0$

$\Leftrightarrow (2-4x)(8) > 0$

$\Leftrightarrow 16(1-2x) > 0 \Leftrightarrow 1-2x > 0$

$\Leftrightarrow -2x > -1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$

$S_{\mathbb{R}} = \left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$.

## Exercices de renforcement

**1** Résolvons dans $\mathbb{R}$, les équations.

1) $(x+1)(3x-2)=0 \Leftrightarrow x=-1$ ou $x=\frac{2}{3}$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{-1;\frac{2}{3}\right\}$

2) $2(1-x)(2x-5)=0 \Leftrightarrow 1-x=0$ ou $2x-5=0$

$\Leftrightarrow x=1$ ou $x=\frac{5}{2}$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{-1;\frac{5}{2}\right\}$

3) $(x+1)^2(x-3)=0 \Leftrightarrow x+1=0$ ou $x-3=0$

$\Leftrightarrow x=-1$ ou $x=3$

$S_{\mathbb{R}}=\{-1\,;3\}$

4) $(4x-2)(7x+1)(12x-6)=0$

$\Leftrightarrow 4x-2=0$ ou $7x+1=0$ ou $12x-6=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ ou $x=-\frac{1}{7}$ ou $x=\frac{1}{2}$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{1}{2};-\frac{1}{7}\right\}$.

**2** 1) $(2x-1)^2=(2x-1)(x+3) \Leftrightarrow (2x-1)^2-(2x-1)(x+3)=0$

$\Leftrightarrow (2x-1)(2x-1-x-3)=0$

$\Leftrightarrow (2x-1)(x-4)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ ou $x=4$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{1}{2};4\right\}$.

2) $(3x+1)^2-(x+1)^2=0$

$\Leftrightarrow [(3x+1)-(x+1)]\,(3x+1+x+1)=0$

$\Leftrightarrow 2x(4x+2)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=-\frac{1}{2}$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{0;-\frac{1}{2}\right\}$.

**3** $(4x^2-9)-2(2x-3)+x(2x-3)=0$

$\Leftrightarrow (2x-3)(2x+3)-2(2x-3)+x(2x-3)=0$

$\Leftrightarrow (2x-3)(2x+3-2+x)=0$

$\Leftrightarrow 2x-3=0$ ou $3x+1=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$ ou $x=-\frac{1}{3}$.

$S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{1}{3};\frac{3}{2}\right\}$.

**4** 1) $P(x)=0$

$\Leftrightarrow 9-49x^2-(4x+11)(12-28x)-(3-7x)^2=0$

$\Leftrightarrow (3-7x)(3+7x)-(4x+11)4(3-7x)-(3-7x)^2=0$

$\Leftrightarrow (3-7x)[3+7x-16x-44-3+7x]=0$

$\Leftrightarrow (3-7x)(-2x-44)=0$

$\Leftrightarrow 3-7x=0$ ou $-2x-44=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{3}{7}$ ou $x=-22$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{3}{7};-22\right\}$.

2)

$P(x)+12=0 \Leftrightarrow 21-49x^2-(4x+11)(12-28x)-(3-7x)^2=0$

$\Leftrightarrow 21-49x^2-48x+112x^2-132+308x-9+42x-49x^2=0$

$\Leftrightarrow 14x^2+302x-120=0$

$\Leftrightarrow 14\left(x^2-\frac{302}{14}x-\frac{120}{14}\right)=0$

$\Leftrightarrow 14\left[\left(x-\frac{151}{14}\right)^2-\left(\frac{151}{14}\right)^2-\frac{60}{7}\right]=0$

$\Leftrightarrow 14\left[\left(x-\frac{151}{14}\right)^2-\frac{24481}{7196}\right]=0$

$\Leftrightarrow 14\left(x-\frac{151}{14}-\frac{\sqrt{24481}}{7196}\right)\left(x-\frac{151}{14}+\frac{\sqrt{24481}}{7196}\right)=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{151+\sqrt{24481}}{14}$ ou $x=\frac{151-\sqrt{24481}}{14}$

$S=\left\{\frac{151+\sqrt{24481}}{14};\frac{151-\sqrt{24481}}{14}\right\}$

3) $P(x)=9-49x^2$

$\Leftrightarrow (4x+11)(12-28x)+(3-7x)^2=0$

$\Leftrightarrow 4(4x+11)(3-7x)+(3-7x)^2=0$

$\Leftrightarrow (3-7x)(16x+44+3-7x)=0$

$\Leftrightarrow 3-7x=0$ ou $9x+47=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{3}{7}$ ou $x=-\frac{47}{9}$.

$S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{47}{9};\frac{3}{7}\right\}$.

4) $P(x)=13x^2+20x-13$.

$\Leftrightarrow 9-49x^2+112x^2+260x-132-49x^2+42x-9=13x^2+20x-13$

$\Leftrightarrow -98x^2+112x^2-13x^2+302x-20x-132+13=0$

$\Leftrightarrow 14x^2-13x^2+282x-119=0$

$\Leftrightarrow x^2+282x-119=0$

$\Leftrightarrow (x+141)^2-141^2-119=0$

$\Leftrightarrow (x+141)^2-19762=0$

$\Leftrightarrow (x+141-\sqrt{19762})(x+141+\sqrt{19762})=0$

$\Leftrightarrow x=-141+\sqrt{19762}$ ou $x=-141-\sqrt{19762}$.

$S=\{-141+\sqrt{19762};-141-\sqrt{19762}\}$

**5** 1) $x^2-6x+9=0 \Leftrightarrow (x-3)^2=0$

$\Leftrightarrow x-3=0$

$\Leftrightarrow x=3$

$S_{\mathbb{R}}=\{3\}$.

2) $3x^2-6x+3=0 \Leftrightarrow 3(x^2-2x+1)=0$

$\Leftrightarrow 3(x-1)^2=0$

$\Leftrightarrow x=1$

$S_{\mathbb{R}}=\{1\}$.

3) $x^3-4x^2-4x= \Leftrightarrow x(x^2-4x+4)=0$

$\Leftrightarrow x(x-2)^2=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x-2=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=2$

$S_{\mathbb{R}}=\{0\,;2\}$.

**6** 1) $x \in V \Leftrightarrow x + 1 \neq 0$
$\Leftrightarrow x \neq -1$
$V = \mathbb{R} - \{-1$
$\forall x \in V, (I) \Leftrightarrow 3x + 3 = 2$
$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$ ; $-\frac{1}{3} \in$ V donc
$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

2) $x \in V \Leftrightarrow 3x - 2 \neq 0$
$\Leftrightarrow x \neq \frac{2}{3}$.
$V = \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$.
$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$, (E) $\Leftrightarrow 2x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$
$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

3) $x \in V \Leftrightarrow 2x - 3 \neq 0$
$\Leftrightarrow x \neq \frac{3}{2}$
$V = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$
$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$, (E) $\Leftrightarrow 4x - 6 = 7x + 1$
$\Leftrightarrow 3x = -7$
$\Leftrightarrow x = -\frac{7}{3}$
$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{7}{3}\right\}$

4) $x \in V \Leftrightarrow 2 + x \neq 0$
$\Leftrightarrow x \neq -2$.
$V = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$
$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, (E) $\Leftrightarrow x^2 - 2x = 0$
$\Leftrightarrow x(x - 2) \neq 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$
$S_{\mathbb{R}} = \{0 ; 2\}$.

**7** 1) $x \in V \Leftrightarrow 3x \neq 0$
$\Leftrightarrow x \neq 0$.
$V = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, (E) $\Leftrightarrow x^2 - 9 = 0$
$\Leftrightarrow (x - 3)(x + 3) = 0$
$\Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3$
$S_{\mathbb{R}} = \{-3 ; 3\}$.

2) $x \in V \Leftrightarrow 3 - 2x \neq 0$
$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$
$V = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$
$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$, (E) $\Leftrightarrow \frac{x-2}{6-4x} = 2$
$\Leftrightarrow x - 2 + 8x - 12 = 0$
$\Leftrightarrow 9x - 14 = 0$
$\Leftrightarrow x = \frac{14}{9}$
$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{14}{9}\right\}$.

3) $x \in V \Leftrightarrow x + 1 \neq 0$ et $x - 1 \neq 0$
$\Leftrightarrow x \neq -1$ et $x \neq 1$
$V = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$
$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$, $(E) \Leftrightarrow \frac{x - 1 - 2x - 2}{x^2 - 1} = 0$
$\Leftrightarrow \frac{-x - 3}{x^2 - 1} = 0$
$\Leftrightarrow x = -3$
$S_{\mathbb{R}} = \{-3\}$.

**8** a) $x \in V \Leftrightarrow x - 3 \neq 0$
$\Leftrightarrow x \neq 3$
$V = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $(E) \Leftrightarrow x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow x = -1$
$S_3 = \{-1\}$.

b) $x \in V \Leftrightarrow x - 8 \neq 0$
$\Leftrightarrow x \neq 8$
$V = \mathbb{R} \setminus \{8\}$
$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{8\}$, $(E) \Leftrightarrow (3 - x)(x - 6) = 0$
$\Leftrightarrow x = 3$ ou $x = 6$
$S_{\mathbb{R}} = \{3 ; 6\}$.

c) $x \in V \Leftrightarrow 3x + 1 \neq 0$
$\Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{3}$
$V = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$
$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$, (E) $\Leftrightarrow (2x - 4)(x - 6) = 0$
$\Leftrightarrow x = 2$ ou $x = 6$
$S_{\mathbb{R}} = \{2 ; 6\}$.

d) $x \in V \Leftrightarrow 8 - x^2 \neq 0$
$\Leftrightarrow x \neq 2\sqrt{2}$ et $x \neq -2\sqrt{2}$
$V = \mathbb{R} \setminus \{-2\sqrt{2} ; 2\sqrt{2}\}$
$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\sqrt{2} ; 2\sqrt{2}\}$, $(E) \Leftrightarrow (-7x + 7)(4x - 6) = 0$
$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = \frac{3}{2}$
$S_{\mathbb{R}} = \left\{1 ; \frac{3}{2}\right\}$.

**9** a) $x \in V \Leftrightarrow x + 2 \neq 0$
$\Leftrightarrow x \neq -2$
$V = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$
$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $(E) \Leftrightarrow \frac{x + 1 - (2x + 4)}{x + 2} = 0$
$\Leftrightarrow \frac{-x - 3}{x + 2} = 0$
$\Leftrightarrow -3$
$S_{\mathbb{R}} = \{-3\}$.

b) $x \in V \Leftrightarrow x + 6 \neq 0$
$\Leftrightarrow x \neq -6$
$V = \mathbb{R} \setminus \{-6\}$

$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-6\}$, (E) $\Leftrightarrow \dfrac{2x-1+x+6}{x+6}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3x+5}{x+6}=0$

$\Leftrightarrow 3x+5=0$

$\Leftrightarrow x=-\dfrac{5}{3}$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{-\dfrac{5}{3}\right\}$.

c) $x \in V \Leftrightarrow 3x+2 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq -\dfrac{2}{3}$

$V=\mathbb{R}\backslash\left\{-\dfrac{2}{3}\right\}$

$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{-\dfrac{2}{3}\right\}$, $(E) \Leftrightarrow x-1-9x-6=0$

$\Leftrightarrow -8x-7=0$

$\Leftrightarrow x=-\dfrac{7}{8}$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{-\dfrac{7}{8}\right\}$.

d) $x \in V \Leftrightarrow 2-2x \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 1$

$V=\mathbb{R}\backslash\{1\}$

$V=\mathbb{R}\backslash\{1\}$, $(E) \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{-2(x-1)}=-1$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}=-1$. Absurde.

$S_{\mathbb{R}}=\varnothing$.

**10** a) $x \in V \Leftrightarrow x+1 \neq 0$ et $x \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq -1$ et $x \neq 0$

$V=\mathbb{R}\backslash\{-1;0\}$

$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\,;0\}$, (E) $\Leftrightarrow \dfrac{2x-x-1}{x(x+1)}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x(x+1)}=0$

$\Leftrightarrow x=1$

$S_{\mathbb{R}}=\{1\}$.

b) $x \in V \Leftrightarrow x+2 \neq 0$ et $x-1 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq -2$ et $x \neq 1$

$V=\mathbb{R}\backslash\{-2\,;1\}$

$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\,;1\}$, (E) $\Leftrightarrow \dfrac{x-1+x+2}{(x+2)(x-1)}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x+1}{(x+2)(x-1)}=0$.

$\Leftrightarrow 2x+1=0$

$\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

$S_{\mathbb{R}}=\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

c) $x \in V \Leftrightarrow 2x-1 \neq 0$ et $x-4 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq \dfrac{1}{2}$ et $x \neq 4$.

$V=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{1}{2};4\right\}$.

$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{1}{2};4\right\}$, (E) $\Leftrightarrow x-4=4x-2$

$\Leftrightarrow 3x=-2$

$\Leftrightarrow x=-\dfrac{2}{3}$.

Comme $-\dfrac{2}{3} \in \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{1}{2};4\right\}$ alors $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\dfrac{2}{3}\right\}$.

d) $x \in V \Leftrightarrow 3x+3 \neq 0$ et $2-x \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq -1$ et $x \neq 2$.

$V=\mathbb{R}\backslash\{-1\,;2\}$.

$V=\mathbb{R}\backslash\{-1\,;2\}$, (E) $\Leftrightarrow 6x+6=8-4x$.

$\Leftrightarrow 10x=2$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{5}$.

$S_3=\left\{\dfrac{1}{5}\right\}$.

**11** 1) $x \in V \Leftrightarrow x+1 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq -1$.

$V=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $(E) \Leftrightarrow (x+1)(5-x)-9=0$

$\Leftrightarrow -x^2+5x-x+5-9=0$.

$\Leftrightarrow -x^2+4x-4=0$

$\Leftrightarrow -(x^2-4x+4)=0$.

$\Leftrightarrow -(x-2)^2=0$

$\Leftrightarrow x-2=0$

$\Leftrightarrow x=2$

$S_{\mathbb{R}}=\{2\}$.

2) $x \in V \Leftrightarrow x-2 \neq 0$ et $x-1 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq +2$ et $x \neq 1$.

$V=\mathbb{R}\backslash\{+2\,;1\}$.

$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{+2\,;1\}$,

$(E) \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)^2+(x-2)^2}{(x-2)(x-1)}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-2x+1+x^2-4x+4}{(x-2)(x-1)}=0$

$\Leftrightarrow 2x^2-6x+5=0$

$=2\left[\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}+\dfrac{5}{2}\right]=0$

$\Leftrightarrow 2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}=0$

Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}=0$ ; donc $S=\phi$.

3) $x \in V \Leftrightarrow x-1 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 1$

$V=\mathbb{R}\backslash\{1\}$

$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $(E) \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{x-1}=\dfrac{x}{x-1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-x}{x-1}=0$.

$\Leftrightarrow \dfrac{x(x-1)}{x-1}=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=1$

Or $1 \notin \mathbb{R}\backslash\{1\}$, donc $S_{\mathbb{R}}=\{0\}$.

4) $x \in V \Leftrightarrow 2x - 7 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq \dfrac{7}{2}$

$V = \mathbb{R} \backslash \left\{\dfrac{7}{2}\right\}$

$\forall x \in \mathbb{R} \backslash \left\{\dfrac{7}{2}\right\}$, $(E) \Leftrightarrow (2x - 7)^2 = 2^2$

$\Leftrightarrow 2x - 7 = 2$ ou $2x - 7 = -2$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{9}{2}$ ou $x = \dfrac{5}{2}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{\dfrac{9}{2} ; \dfrac{5}{2}\right\}$.

5) $x \in V \Leftrightarrow x^2 - 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 1$ et $x \neq -1$

$V = \mathbb{R} \backslash \{1 ; -1\}$

$\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{1; -1\}$, (E) $\Leftrightarrow \dfrac{x^2 + 4x - 3 - x^2 + 1}{x^2 - 1} = 0$

$\Leftrightarrow 4x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

6) $x \in V \Leftrightarrow x \neq -2$ et $x \neq -\dfrac{5}{3}$

$V = \mathbb{R} \backslash \left\{-2 ; -\dfrac{5}{3}\right\}$

$\forall x \in \mathbb{R} \backslash \left\{-2 ; -\dfrac{5}{3}\right\}$, (E) $\Leftrightarrow 9x^2 - 25 = 0$

$\Leftrightarrow (3x - 5)(3x + 5) = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{5}{3}$ ou $x = -\dfrac{5}{3}$

$-\dfrac{5}{3} \notin \mathbb{R} \backslash \left\{-2 ; -\dfrac{5}{3}\right\}$, donc

$S_{\mathbb{R}} = \left\{\dfrac{5}{3}\right\}$.

7) $x \in V \Leftrightarrow x \neq 0$ et $x - 2 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 0$ et $x \neq 2$

$V = \mathbb{R} \backslash \{0 ; 2\}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{0 ; 2\}$, $(E) \Leftrightarrow \dfrac{(x+2)^2 + x^2}{x(x-2)} = 0$

$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + x^2 = 0$ impossible.

Donc, $S_{\mathbb{R}} = \varnothing$.

**12** 1) $|x - 3| = 5 \Leftrightarrow x - 3 = 5$ ou $x - 3 = -5$

$\Leftrightarrow x = 8$ ou $x = -2$

$S_{\mathbb{R}} = \{8 ; -2\}$.

2) $|x + 4| = 1 \Leftrightarrow x + 4 = 1$ ou $x + 4 = -1$

$\Leftrightarrow x = -3$ ou $x = -5$

$S_{\mathbb{R}} = \{-3 ; -5\}$.

3) $|2x - 1| = 7 \Leftrightarrow 2x - 1 = 7$ ou $2x - 1 = -7$

$\Leftrightarrow x = 4$ ou $x = -3$

$S_{\mathbb{R}} = \{4 ; -3\}$.

4) $|5x + 10| = 6 \Leftrightarrow 5x + 10 = 6$ ou $5x + 10 = -6$

$\Leftrightarrow 5x = -4$ ou $5x = -18$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{4}{5}$ ou $x = -\dfrac{18}{5}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\dfrac{4}{5} ; -\dfrac{18}{5}\right\}$.

**13** 1) $|x - 3| = |x + 4| \Leftrightarrow x - 3 = x + 4$ ou $x - 3 = -x - 4$

$\Leftrightarrow 3 = 4$ Impossible ou $2x = -1$

$x = -\dfrac{1}{2}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

2) $|2x - 1| = 2|x| \Leftrightarrow |2x - 1| = |2x|$

$\Leftrightarrow 2x - 1 = 2x$ Impossible ou $2x - 1 = -2x$.

$4x = 1$

$x = \dfrac{1}{4}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{\dfrac{1}{4}\right\}$.

3) $|8 + x| = |x - 3| \Leftrightarrow x + 8 = x - 3$ Impossible

ou $x + 8 = -x + 3$

$\Leftrightarrow 2x = -5$

$x = -\dfrac{5}{2}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\dfrac{5}{2}\right\}$.

**14** À l'aide d'un tableau de signe

a)

| $x$ | $-\infty$ | 1 | | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x - 3$ | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $x - 1$ | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ |
| $(x - 3)(x - 1)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |

$S_{\mathbb{R}} = [1 ; 3]$.

b) $x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 9$ et $x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$

| $x$ | $-\infty$ | 5 | | 9 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x - 9$ | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $x - 5$ | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ |
| $(x - 9)(x - 5)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |

$S_{\mathbb{R}} = ]5 ; 9[$.

c) $2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ et $3x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2x + 4$ | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ |
| $3x - 3$ | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $(2x+4)(3x-3)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |

$S_{\mathbb{R}} = ]-\infty ; -2[ \cup [1 ; +\infty[$

d) $15 - 5x = 0 \Leftrightarrow x = 3$ et $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x - 1$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $15 - 5x$ | | $+$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $(15-5x)(x+1)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

$S_{\mathbb{R}} = ]-1\ ;\ 3[$.

**15** a) $(3x - 4)(x + 7) > 0$

$3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{3}$ ; $x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = -7$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-7$ | | $\frac{4}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x - 7$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $3x - 4$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $(x+7)(3x-4)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

$S_{\mathbb{R}} = ]-\infty\ ;\ -7[ \cup ]\frac{4}{3}\ ;\ +\infty[$.

b) $2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ et $10x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $10x + 5$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $2x - 8$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $(2x+8)(10x-5)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

$S_{\mathbb{R}} = \left]-\frac{1}{2} ; 4\right[$.

c) $2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$ et $6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $6x + 3$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $2 - x$ | | $+$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $(2-x)(6x+3)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

$S_{\mathbb{R}} = \left]-\frac{1}{2} ; 2\right[$.

d) $7 - x = 0 \Leftrightarrow x = 7$ et $6x + 18 = 0 \Leftrightarrow x = -3$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $7$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $7 - x$ | | $+$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $6x + 18$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $(7-x)(6x+18)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

$S_{\mathbb{R}} = ]-\infty\ ;\ -3] \cup [7\ ;\ +\infty[$

**16** a) $x - 9 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 9$ ; $2x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -4$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $9$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x + 8$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $x - 9$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $\dfrac{2x+8}{x-9}$ | | $+$ | 0 | $-$ | \|\| | $+$ | |

$S_{\mathbb{R}} = ]-\infty\ ;\ -4[ \cup ]9\ ;\ +\infty[$.

b) $x \in V \Leftrightarrow 7 - x \neq 0$.
$\Leftrightarrow x \neq 7$
$V = \mathbb{R} \setminus \{7\}$.
$6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{6}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{6}$ | | $7$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $6x + 1$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $7 - x$ | | $+$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $\dfrac{6x+1}{7-x}$ | | $-$ | 0 | $+$ | \|\| | $-$ | |

$S_{\mathbb{R}} = \left[-\frac{1}{6} ; 7\right[$.

c) $x \in V \Leftrightarrow 3x - 5 \neq 0$
$\Leftrightarrow x \neq \dfrac{5}{3}$
$V = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{3}\right\}$.
$x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-5$ | | $\frac{5}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x + 5$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $3x - 5$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $\dfrac{x+5}{3x-5}$ | | $+$ | 0 | $-$ | \|\| | $+$ | |

$S_{\mathbb{R}} = \left[-5 ; \frac{5}{3}\right[$.

d) $x \in V \Leftrightarrow 4 - 3x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{4}{3}$.
$-2x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = 5$.

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{4}{3}$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-2x + 10$ | | $+$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $4 - 3x$ | | $+$ | 0 | $-$ | | $-$ | |
| $\dfrac{-2x+10}{4-3x}$ | | $+$ | \|\| | $-$ | 0 | $+$ | |

$S_{\mathbb{R}} = \left]-\infty ; \frac{4}{3}\right[ \cup [5 ; +\infty[$.

**17** a) $x \in V \Leftrightarrow x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1.$

$V = \mathbb{R}\backslash\{1\}.$

$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\},\ (I) \Leftrightarrow \dfrac{-x+1+8+2x}{x-1} > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+9}{x-1} > 0\,.$

Étudions le signe de $\dfrac{x+9}{x-1}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-9$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+9$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\dfrac{x+9}{x-1}$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $+$ | |

$S_{\mathbb{R}} = ]-\infty\,;-9[\,\cup\,]1\,;+\infty[.$

b) $x \in V \Leftrightarrow 3-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3.$

Donc $V = \mathbb{R}\backslash\{3\}.$

$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{3\},\ (I) \Leftrightarrow \dfrac{x+1+6-2x}{3-x} \geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-x+7}{3-x} \geq 0\,.$

Étudions le signe de $\dfrac{-x+7}{3-x} = g(x)\,.$

| $x$ | $-\infty$ | | $3$ | | $7$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x+7$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $3-x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| $g(x)$ | | $+$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

$S_{\mathbb{R}} = ]-\infty\,;3[\,\cup\,[7\,;+\infty[.$

c) $x \in V \Leftrightarrow\ x-5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 5.$

Donc $V = \mathbb{R}\backslash\{5\}.$

$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{5\},\ (I) \Leftrightarrow \dfrac{x+4}{x-5} - 2 \leq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+4-2x+10}{x-5} \leq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-x+14}{x-5} \leq 0\,.$

Étudions le signe de $\dfrac{-x+14}{x-5} = f(x).$

| $x$ | $-\infty$ | | $5$ | | $14$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x+14$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $x-5$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | | $-$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

$S_3 = ]-\infty\,;5[\,\cup\,[14\,;+\infty[.$

d) $x \in V \Leftrightarrow\ x-4.$

$V = \mathbb{R}\backslash\{4\}.$

$V = \mathbb{R}\backslash\{4\},\ (I) \Leftrightarrow \dfrac{-2x+10}{x-4} - 3 \geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2x+10-3x+12}{x-4} \geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-5x+22}{x-4} \geq 0\,.$

| $x$ | $-\infty$ | | $4$ | | $\dfrac{22}{5}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-5x+22$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $x-4$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $\dfrac{-5x+22}{x-4}$ | | $-$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

$S_{\mathbb{R}} = \left]4\,;\dfrac{22}{5}\right].$

**18** 1) $|x-2| < 4 \Leftrightarrow -4 < x-2 < 4$

$\Leftrightarrow -2 < x < 6.$

$S_{\mathbb{R}} = ]-2\,;6[.$

2) $|x+2| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x+2 \leq 1$

$\Leftrightarrow -3 \leq x \leq -1.$

$S_{\mathbb{R}} = [-3\,;-1].$

3) $|2x-7| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq 2x-7 \leq 5$

$\Leftrightarrow 2 \leq 2x \leq 12$

$\Leftrightarrow 1 \leq x \leq 6.$

$S_{\mathbb{R}} = [1\,;6].$

4) $|3x+6| \leq 12 \Leftrightarrow -12 \leq 3x+6 \leq 12$

$\Leftrightarrow -18 \leq 3x \leq 6$

$\Leftrightarrow -6 \leq x \leq 2.$

$S_{\mathbb{R}} = [-6\,;2].$

**19** 1) (I) : $|x-2| < x.$

- Si $x < 0$, (I) n'a pas de solution
- Si $x \geq 0$, (I) $\Leftrightarrow (x-2)^2 < x^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 < x^2$

$\Leftrightarrow -4x < -4$

$\Leftrightarrow x < 1$

$S = ]1\,;+\infty[.$

2) $|x+2| \leq |x-5| \Leftrightarrow (x+2)^2 - (x-5)^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow (x+2+x-5)(x+2-x+5) \leq 0$

$\Leftrightarrow (2x-3)7 \leq 0$

$\Leftrightarrow 2x-3 \leq 0$

$\Leftrightarrow x \leq \dfrac{3}{2}\,.$

$S_{\mathbb{R}} = \left]-\infty\,;\dfrac{3}{2}\right].$

3) $|2x-7| \leq |2x+1| \Leftrightarrow (2x-7)^2 \leq (2x+1)^2$
$\Leftrightarrow (2x-7)^2 - (2x+1)^2 \leq 0$
$\Leftrightarrow (2x-7+2x+1)(2x-7-2x-1) \leq 0$
$\Leftrightarrow -8(4x-6) \leq 0$
$\Leftrightarrow 4x-6 \geq 0$
$\Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$.

$S_{\mathbb{R}} = \left[\frac{3}{2} ; +\infty\right[$.

## Exercices d'approfondissement

**20** a) $(2x-1)(3x+1) \leq (4-x)(3x+1)$
$\Leftrightarrow (2x-1)(3x+1) - (4-x)(3x+1) \leq 0$
$\Leftrightarrow (3x+1)(2x-1-4+x) \leq 0$
$\Leftrightarrow (3x+1)(3x-5) \leq 0$.
Étudions le signe de $(3x+1)(3x-5)$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{3}$ | | $\frac{5}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x+1$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $3x-5$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $(3x+1)(3x-5)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

$S_{\mathbb{R}} = \left[-\frac{1}{3} ; \frac{5}{3}\right]$.

b) $(I) \Leftrightarrow (x-2)(x+1) - 2(x+1)(2x+1) \geq 0$
$\Leftrightarrow (x+1)(x-2-4x-2) \geq 0$
$\Leftrightarrow (x+1)(-3x-4) \geq 0$.

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{-4}{3}$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $-3x-4$ | | $+$ | 0 | $-$ | | $-$ | |
| $(x+1)(-3x-4)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

$S_{\mathbb{R}} = \left[-\frac{4}{3} ; -1\right]$.

c) $(I) \Leftrightarrow (x+1)^2(3x+1) - (x+1)(x-1) \leq 0$
$\Leftrightarrow (x+1)((x+1)(3x+1) - (x-1)) \leq 0$
$\Leftrightarrow (x+1)(3x^2+4x+1-x+1) \leq 0$
$\Leftrightarrow (x+1)(3x^2+3x+2) \leq 0$
$\Leftrightarrow 3(x+1)\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right) \leq 0$
$\Leftrightarrow 3(x+1)\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{12}\right) \leq 0$
$\Leftrightarrow (x+1) \leq 0$
$\Leftrightarrow x \leq -1$.

$S_{\mathbb{R}} = ]-\infty ; -1]$.

d) $(I) \Leftrightarrow (3-x)(2x+3) - (x-3)(2x+6) < 0$
$\Leftrightarrow (3-x)(2x+3+2x+6) < 0$
$\Leftrightarrow (3-x)(4x+9) < 0$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{9}{4}$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3-x$ | | $+$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $4x+9$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $(3-x)(4x+9)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

$S_{\mathbb{R}} = \left]-\infty ; -\frac{9}{4}\right[ \cup ]3 ; +\infty[$

**21** 1) $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3-5x+1 < 0 \\ x+4-3x+2 \geq 0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x-2 < 0 \\ -2x+6 \geq 0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{2}{3} \\ x \leq 3 \end{cases}$

$S_{\mathbb{R}} = \left]-\frac{2}{3} ; 3\right]$

2) $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-3-x-\frac{1}{2} > 0 \\ x+1-2x-1 \geq 0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-\frac{7}{2} > 0 \\ -x \leq 0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x > \frac{7}{4} \end{cases}$

$S_{\mathbb{R}} = \left]\frac{7}{4} ; +\infty\right[$

**22** 1. a) $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}_{ABCD} - 4\mathcal{A}_{AMQ}$
$= 8^2 - 4 \times \left(\frac{(8-x)x}{2}\right)$
$= 64 - (16x - 2x^2)$
$\mathcal{A}(x) = 2x^2 - 16x + 64$.

b) $\mathcal{A}(x) = 2(x^2 - 8x + 32) = 2[(x-4)^2 - 16 + 32]$
$\mathcal{A}(x) = 2(x-4)^2 + 32$.

2) $\mathcal{A}(x) = 50 \Leftrightarrow 2(x-4)^2 + 32 = 50$
$\Leftrightarrow (x-4)^2 = 9$
$\Leftrightarrow x-4 = 3$ ou $x-4 = -3$
$\Leftrightarrow x = 7$ ou $x = 1$.

**23** Soit $x$, ce nombre. On a :
(I) : $\frac{3+x}{7+x} > \frac{2}{3}$.
$x \in V \Leftrightarrow x \neq -7$,
$V = 3\backslash\{7\}$.

$\forall x \in \mathbb{R}-\{-7\},\ (I) \Leftrightarrow \frac{3+x}{7+x} - \frac{2}{3} > 0$

$\Leftrightarrow \frac{9+3x-14-2x}{3(7+x)}$

$\Leftrightarrow \frac{x-5}{3(7+x)} > 0$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-7$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-5$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $7+x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $\frac{x-5}{7+x}$ | | $+$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

$S_{\mathbb{R}} = ]-\infty\,;-7[\cup]5\,;+\infty[$.

**24** 1) $2^3 - 2\times 2^2 - 2 + 2 = 8 - 8 - 2 + 2 = 0$.
Donc 2 est une solution de $(E)$.

2) $(E) \Leftrightarrow (x-2)(x^2-1) = 0$.
$\Leftrightarrow x-2 = 0$ ou $x-1 = 0$ ou $x+1 = 0$
$\Leftrightarrow x = 2$ ou $x = 1$ ou $x = -1$
$S_{\mathbb{R}} = \{2\,;1\,;-1\}$.

3) $(E) \Leftrightarrow (x-2)(x-1)(x+1) < 0$.

| $x$ | $-\infty$ | | $3$ | | $7$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x-2$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $(x-2)(x-2)(x+1)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$S_{\mathbb{R}} = ]-\infty\,;-1[\cup]1\,;2[$.

**25** 1) On a : $2^3 - 2\times 2^2 + 4\times 2 - 8 = 8 - 8 + 8 - 8 = 0$.
Donc 2 est une solution de (E).

2)
$$\begin{array}{r|l} x^3-2x^2+4x-8 & x-2 \\ \cline{2-2} \underline{x^3-2x^2} \phantom{+4x-8} & x^2+4 \\ \underline{0+4x-8} & \\ \underline{4x-8} & \\ 0 & \end{array}$$

Donc $x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = (x-2)(x^2+4)$.
$(E) \Leftrightarrow (x-2)(x^2+4) \geq 0$
$\Leftrightarrow x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$, $S_{\mathbb{R}} = \{2\}$.
3) $(I) \Leftrightarrow (x-2)(x^2+4) \geq 0$
$\Leftrightarrow (x-2) \geq 0$ car $x^2+4 > 0$.
$\Leftrightarrow x \geq 2$

$S_{\mathbb{R}} = [2\,;+\infty[$.

**26** 1) On a : $1^3 - 5\times 1^2 + 9\times 1 - 5 = 1 - 5 + 9 - 5 = 0$.
Donc 1 est une solution de (E).

2. a) On a : $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 - 4 + 5$
$= (x-2)^2 + 1$.

**26** b)
$$\begin{array}{r|l} x^3-5x^2+9x-5 & x-1 \\ \cline{2-2} \underline{x^3-x^2} \phantom{+9x-5} & x^2-4x+5 \\ -4x^2+9x \phantom{-5} & \\ \underline{+4x^2-4x} \phantom{-5} & \\ 5x-5 & \\ \underline{-5x+5} & \\ 0 & \end{array}$$

Donc $x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = (x-1)(x^2-4x+5)$.
D'où (E) $\Leftrightarrow (x-1)(x^2-4x+5) = 0$
$\Leftrightarrow x = 1$ ou $(x-2)^2 + 1 = 0$ (impossible).
$\Leftrightarrow x = 1$
$S_{\mathbb{R}} = \{1\}$.

3) (I) $\Leftrightarrow (x-1)((x-2)^2+1) \geq 0$.
$\Leftrightarrow x - 1 \geq 0$ car $(x-2)^2 + 1 > 0$.
$\Leftrightarrow x \geq 1$.
$S_{\mathbb{R}} = [1\,;+\infty\,[$.

## Situation d'évaluation

**27** Calculons la distance parcourue en aller et retour pour récupérer le foulard.

$V = \frac{d}{t}$ donc $d = V.t$
$V = 10$ km /h$= \frac{10000}{3600} = \frac{25}{9}$ m/s ;
t = 3 min 18 s = 198 s.
$d = \frac{25}{9} \times 198 + 25 \times 22 = 550$ m.
Distance parcourue par la colonne de défilé
$550 - 2(250) = 50$ m.

Vitesse du défilé :
$V = \frac{d}{t} = \frac{50m}{198\,s} = \frac{25}{99} m/s \simeq 0{,}91$ km/h

**28** $\mathcal{A}_{ABCD} = 80 \times 120 = 9600\ m^2$.
On a : $\mathcal{A}_{ABI} = \frac{AB \times AI}{2} = \frac{120 \times 40}{2}$
$= 120 \times 20 = 2400\ m^2$

$\mathcal{A}_{IDM} = \frac{ID \times DM}{2} = \frac{40 \times x}{2} = 20x$

$\mathcal{A}_{BCM} = \frac{BC \times MC}{2} = \frac{80\times(120-x)}{2} = 40(120-x)$
On a : $\mathcal{A}_{BMI} = \mathcal{A}_{ABCD} - (\mathcal{A}_{ABI} + \mathcal{A}_{IDM} + \mathcal{A}_{BCM})$
$= 9600 - (2400 + 20x + 4800 - 40x)$
$\mathcal{A}_{BMI} = 20x + 2400$.

On dit : $\mathcal{A}_{BMI} \leq \frac{1}{3}\mathcal{A}_{ABCD}$.
Donc $20x + 2400 \leq 3200$
$20x \leq 800$
$x \leq 40$. Or $x > 0$.
Donc $x \in ]0\,;40]$.

Leçon 4

# ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS DANS $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

## INSTALLATION DES HABILETÉS

### Activité 1 Équation linéaire à deux inconnues

### 1.1. Équation linéaire à deux inconnues

- $x + y = 13$
- $x \times y = 36$

**Exercices de fixation**

**1-1-1** a) Faux
b) Faux
c) Vrai

**1-1-2**
- $12x + 10y = 19200$
- $x - y = 500$

**1-1-3**
- $2 \times 5 + 5 \times 3 = 25$ et $25 \neq 26$ donc (5 ; 3) n'est pas solution de l'équation.
- $2 \times 3 + 5 \times 4 = 26$ donc (3 ; 4) est solution de l'équation.
- $2 \times 8 + 5 \times 2 = 26$ donc (8 ; 2) est solution de l'équation.

### 1.2. Système de deux équations linéaires à deux inconnues

Soit $x$ le prix du ticket au tarif-parent et y le prix du ticket au tarif-enfant.
- Achat de M. Koffi : $2x + 3y = 2500$ F
- Achat de M. Koné : $3x + 5y = 3900$ F
- Si le couple $(x ; y)$ existe, il est solution du système : $\begin{cases} 2x+3y=2500 \\ 3x+5y=3900 \end{cases}$.

**Exercices de fixation**

**1-2-1** 1- F ; 2- V

**1-2-2** Le système traduisant cette situation est : $\begin{cases} 500x+200y=15300 \\ x+y=45 \end{cases}$.

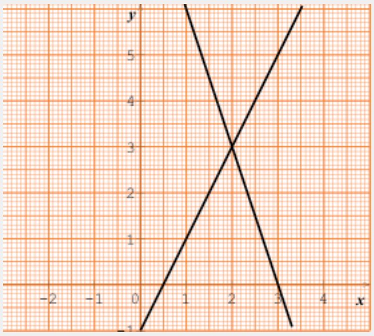
**1-2-3** Le couple (21 ; 24) est solution du système.

### 1.3. Interprétation graphique du système (S) de deux équations linéaires à deux inconnues

1) Les droites (D) et (D') sont sécantes en un point. Le système $(S_1)$ admet une solution unique.
2) Les droites (D) et (D') sont strictement parallèles. Le système $(S_2)$ n'a pas de solution.
3) Les droites (D) et (D') sont confondues. Le système $(S_3)$ admet une infinité de solutions.

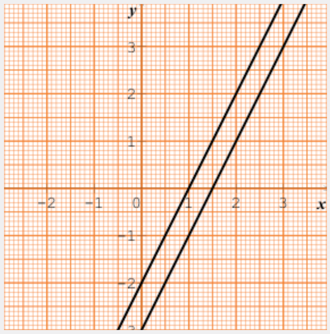
## Exercices de fixation

**1-3-1**



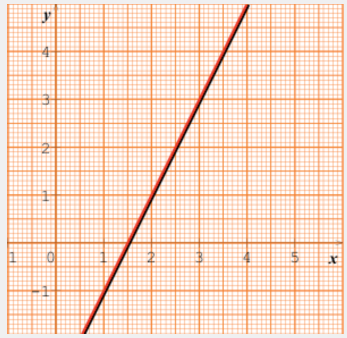

Le couple (2 ; 3) est la solution du système.

**1-3-2**




Les droites sont parallèles.
Le système n'a pas de solution.

**1-3-3**




Les droites sont confondues. Le système a une infinité de solutions.

## 1.4. Déterminant d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues

$(-2) \times (-2) - 4 \times 3 = -8.$

## Exercices de fixation

**1-4-1** Le déterminant du système est :
$2 \times 9 - (4) \times (-1) = 22.$

**1-4-2** Le déterminant du système est :
$2 \times (-6) - (4) \times (-3) = 0.$

**1-4-3** Le déterminant du système est :
$2 \times (-9) - (6) \times (-3) = 0.$

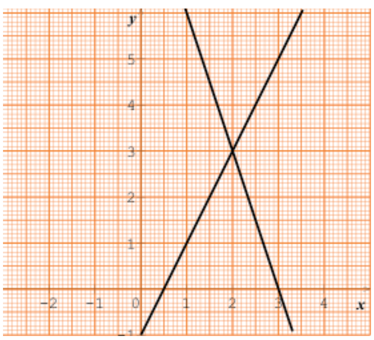
## 1.5. Propriété sur l'unicité éventuelle de la solution d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues

1)

$(S_1)$ : le déterminant est : $2 \times (1) - (3) \times (-1) = 5.$
$(S_2)$ : le déterminant est : $-2 \times (-1) - (2) \times (1) = 0.$
$(S_3)$ : le déterminant est : $-2 \times (-2) - (4) \times (1) = 0.$

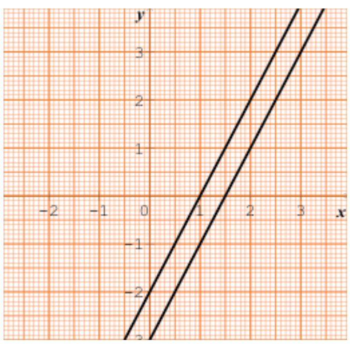
2)

$(S_1)$



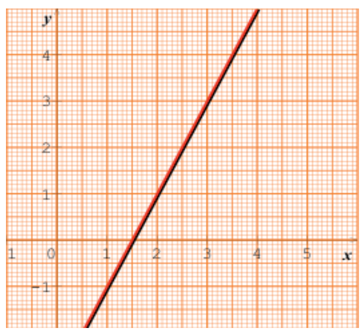

Le déterminant est différent de 0. Le système a une solution unique

$(S_2)$




Le déterminant est égale à 0. Le système n'a pas de solution.

$(S_3)$




Le déterminant est égale à 0. Le système a une infinité de solutions.

## Exercices de fixation

**1-5-1** 1. V
2. F
3. F

**1-5-2** Le déterminant de (S) est :
$1 \times 2 - (-1) \times 2 = 4$
$4 \neq 0$ donc (S) admet une solution unique.

**1-5-3** Le déterminant de (S) est :
$2 \times 3 - (1) \times 6 = 0$
donc (S) admet soit une infinité de solutions, soit n'admet pas de solution.

## Activité 2 Méthodes de résolution d'un système de deux équations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

### 2.1. Résolution par substitution

$x + 2y = 4$ donc $x = 4 - 2y$. En remplaçant $x$ par cette expression dans la première équation on a :
$12(4 - 2y) + 10y = 19200$. On obtient : $y = -1368$
Donc $x = 4 - 2(-1368)$, c'est à dire $x = 2740$.
Le couple (2740 ; –1368) est la solution du système

## Exercices de fixation

**2-1-1** Le système $\begin{cases} 500x + 200y = 153000 \\ x + y = 45 \end{cases}$

est équivalent à $\begin{cases} 5x + 2y = 1530 \\ x + y = 45 \end{cases}$.

On a : $x = 45 - y$ et $5(45 - y) + 2y = 1530$.
On obtient : $y = -435$.
On en déduit : $x = 480$.
Le couple (480 ; –435) est la solution du système.

**2-1-2** La première équation donne : $x = 3y - 1$.
La deuxième équation devient : $2(3y - 1) + y = 5$
$y = 1$ et $x = 2$.
Le couple (2 ; 1) est la solution du système.

**2-1-3** La deuxième équation donne : $y = x + 8$.
La première devient : $x + 2(x + 8) = 4$.
$x = -4$ et $y = 4$.
Le couple (–4 ; 4) est la solution du système.

### 2.2. Résolution par combinaison linéaire

$\begin{cases} 2x + 3y = 2500 \\ 3x + 5y = 3900 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 6x + 9y = 7500 \\ -6x - 10y = -7800 \end{cases}$ en additionnant membre à membre, on a : $y = 300$.

$\begin{cases} 2x + 3y = 2500 \\ 3x + 5y = 3900 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 10x + 15y = 12500 \\ -9x - 15y = -11700 \end{cases}$ en additionnant membre à membre, on a : $x = 800$.

Le couple (800 ; 300) est la solution du système.

## Exercices de fixation

**2-2-1** $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 4x + 9y = -11 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 4x + 6y = 24 \\ -4x - 9y = 11 \end{cases}$
en additionnant membre à membre, on a : $y = -\dfrac{7}{3}$.

$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 4x + 9y = -11 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 6x + 9y = 36 \\ 4x + 9y = -11 \end{cases}$
en additionnant membre à membre, on a : $x = \dfrac{5}{2}$.
Le couple $\left(\dfrac{5}{2} ; -\dfrac{7}{3}\right)$ est la solution du système.

**2-2-2** $\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ -3x - 6y = -21 \end{cases}$
en additionnant membre à membre, on a : $y = 8$.

$\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ -2x - 4y = -14 \end{cases}$
en additionnant membre à membre, on a : $x = -9$.
Le couple (–9 ; 8) est la solution du système.

**2-2-3** $\begin{cases} -2x+3y=-7 \\ 4x+5y=9 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} -4x+6y=-14 \\ 4x+5y=9 \end{cases}$ en additionnant membre à membre, on a : $y = -\dfrac{5}{11}$.

$\begin{cases} -2x+3y=-5 \\ 4x+5y=9 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 10x-15y=35 \\ 12x+15y=27 \end{cases}$ en additionnant membre à membre, on a : $x = \dfrac{31}{11}$.

Le couple $\left(\dfrac{31}{11}\,;-\dfrac{5}{11}\right)$ est la solution du système.

### 2.3. Propriété relative au déterminant nul

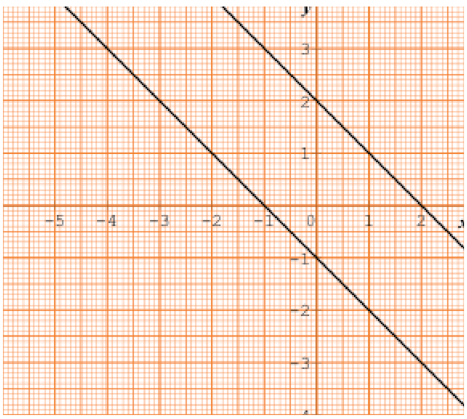
1) Déterminant de $(S_2)$ : (1) × (1) – (1) × (1) = 0

Déterminant de $(S_3)$ : (–1) × (–2) – (2) × (1) = 0.

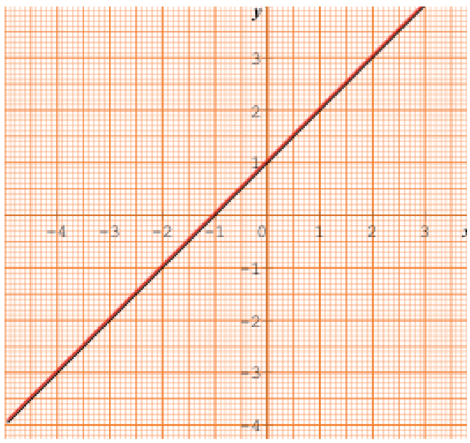
2) $(S_2)$ est équivalente à : $\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=-1 \end{cases}$

$(S_2)$ est équivalente à : $\begin{cases} x-y=-1 \\ x-y=-1 \end{cases}$

3)



$(S_2)$ n'a pas de solution



$(S_3)$ a une infinité de solutions

**Exercices de fixation**

**2-3-1** Déterminant de (S) : 2 × (– 6) – 4 × 3 = 0.

$\begin{cases} 2x+3y=12 \\ 4x-6y=20 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 2x+3y=12 \\ 2x-3y=10 \end{cases}$

**2-3-2** Déterminant de (S) : 2 × (– 9) – 3 × 6 = 0.

$\begin{cases} 2x+3y=12 \\ 6x-9y=36 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 2x+3y=12 \\ 2x-3y=12 \end{cases}$

### 2.4. Système n'admettant aucune solution

1) $\begin{cases} 2x-3y=12 \\ 4x-6x=20 \end{cases}$ est équivalent à $\begin{cases} 2x-3y=12 \\ 2x-3x=10 \end{cases}$

2) Les premiers membres des équations du système sont les mêmes et les seconds membres sont différents, donc le système n'a pas de solution.

**Exercices de fixation**

**2-4-1** $\begin{cases} -3x+6y=21 \\ -x+2y=8 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} -x+2y=7 \\ -x+2y=8 \end{cases}$

Les premiers membres des équations du système sont les mêmes et les seconds membres sont différents, donc le système n'a pas de solution.

**2-4-2** $\begin{cases} 5x-10y=35 \\ x-2y=-5 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x+2y=7 \\ x-2y=-5 \end{cases}$

Les premiers membres des équations du système sont les mêmes et les seconds membres sont différents, donc le système n'a pas de solution.

**2-4-3** $\begin{cases} -6x+2y=10 \\ 9x-3y=3 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 3x-y=-5 \\ 3x-y=1 \end{cases}$

Les premiers membres des équations du système sont les mêmes et les seconds membres sont différents, donc le système n'a pas de solution.

### 2.5. Système admettant une infinité de solutions

1) $\begin{cases} 2x-3y=12 \\ 6x-9x=36 \end{cases}$ est équivalent à $\begin{cases} 2x-3y=12 \\ 2x-3y=12 \end{cases}$

2) Les premiers membres des équations du système sont les mêmes et les seconds membres sont aussi les même, donc le système a une infinité de solutions.

**Exercices de fixation**

**2-5-1** $\begin{cases} 3x+6y=12 \\ x+y=4 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x+2y=4 \\ x+y=4 \end{cases}$

Les premiers membres des équations du système sont différents, donc le système a une solution.

**2-5-2** $\begin{cases} -8x+20y=-28 \\ -2x+5y=-7 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} -2x+5y=-7 \\ -2x+5y=-7 \end{cases}$

Les premiers membres des équations du système sont les mêmes et les seconds membres sont aussi les mêmes, donc le système a une infinité de solutions.

**2-5-3** $\begin{cases} -3x+3y=5 \\ 2x-6y=-10 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} -x+3y=5 \\ -x+3y=5 \end{cases}$

Les premiers membres des équations du système sont les mêmes et les seconds membres sont aussi les mêmes, donc le système a une infinité de solutions.

## Activité 3 Système d'inéquations dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

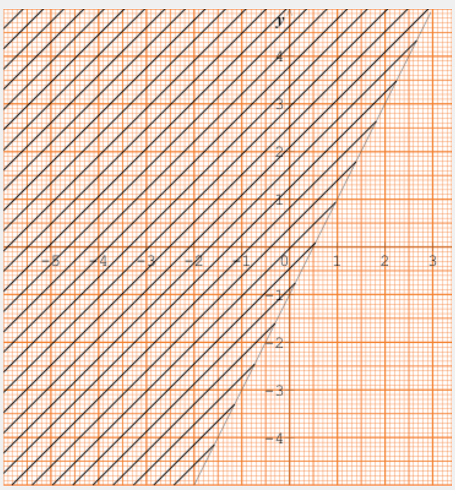
### 3.1. Inéquation linéaire à deux inconnues

- Somme inférieure à 5 : $x+y<5$.
- Produit supérieur à 2 : $xy>2$.

**Exercices de fixation**

**3-1-1** a) F ; b) F ; c) V

**3-1-2**



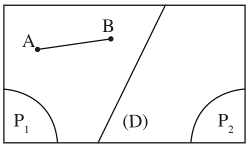
## 3.2. Interprétation géométrique d'une inéquation du premier degré dans ℝ×ℝ

1. a) Points de $(P_1)$ : O, I, J, A, C et F

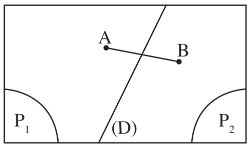
   b) Points de $(P_2)$ : B et E.

2) (D), $(P_1)$ et $(P_2)$ forment une partition du plan, donc tout point M appartient à l'un seulement de ces trois ensembles.

3. a)




3. b)



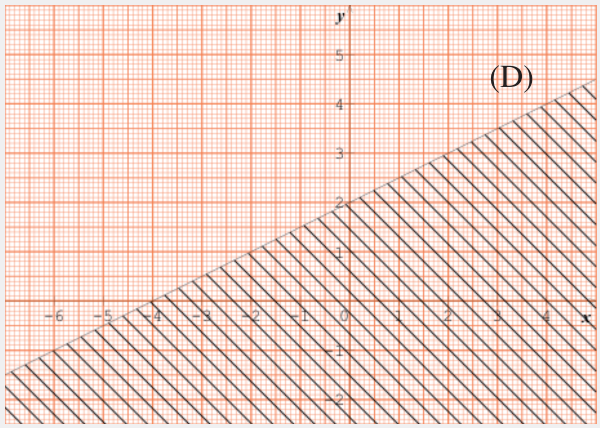

### Exercices de fixation

1) A(0 ; 2) : $0 - 2(2) + 4 = 0$,
A n'appartient pas à (Q).

B(2 ; 0) : $2 - 2(0) + 4 = 6$ et $6 > 0$,
B appartient à (Q).

De même C(8 ; 0) appartient à (Q) et D(7 ; 1) appartient à (Q).

2)




Q est la partie hachurée, la droite (D) exclue.

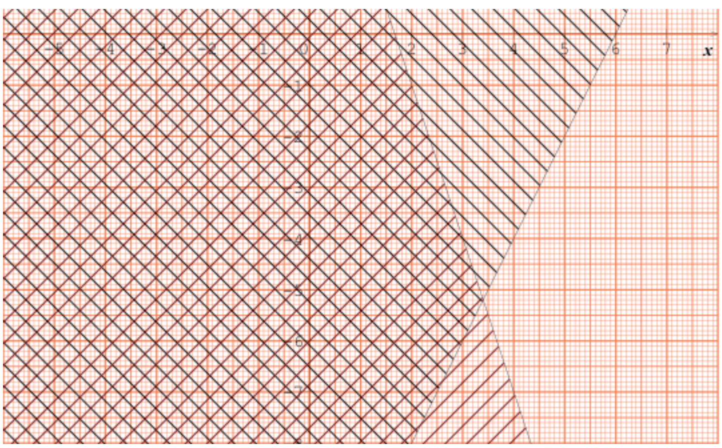
## 3.3. Système de deux inéquations linéaires dans ℝ×ℝ

- Prix des 3 lapins et des 4 poulets : $3x + 4y \leq 10\,000$.
- Différence de prix : $x - y \leq 400$

### Exercices de fixation

1. F
2. V

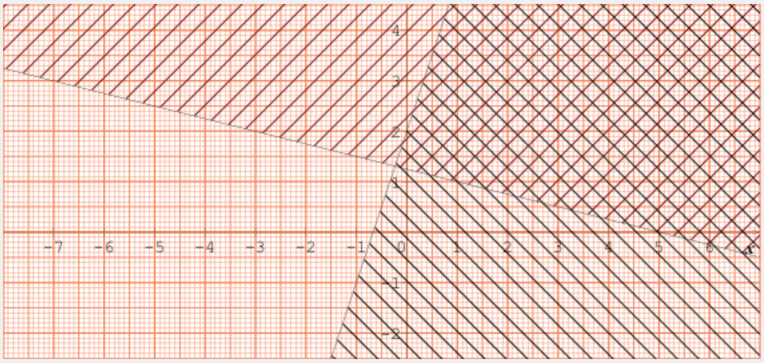
## 3.4. Résolution graphique d'un système de deux inéquations linéaires dans ℝ×ℝ



L'ensemble des solutions est l'ensemble des couples de coordonnées des points de la partie hachurée deux fois.

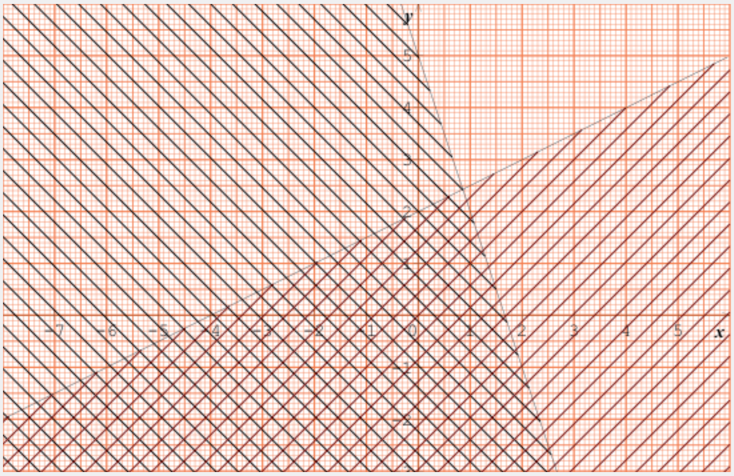
## Exercices de fixation

**3-4-1**



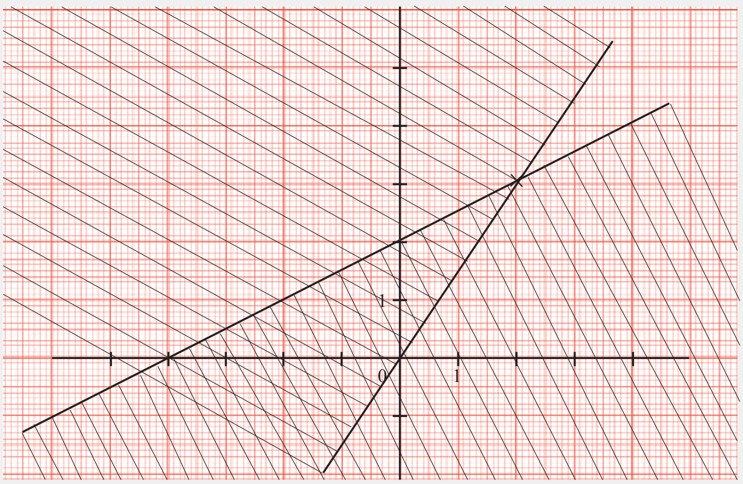
L'ensemble des solutions est l'ensemble des couples de coordonnées des points de la partie hachurée deux fois.

**3-4-2**



L'ensemble des solutions est l'ensemble des couples de coordonnées des points de la partie hachurée deux fois.

**3-4-3** Resous graphiquement le système (S) suivant :



L'ensemble des solutions est l'ensemble des couples de coordonnées des points de la partie hachurée deux fois.

## Exercices de renforcement

**1** a) $8 \times 15 - 4 \times 5 = 120 - 20 = 100.$
b) $3 \times (-4) - 4 \times (-3) = -12 + 12 = 0.$
c) $0{,}1 \times (-2) - 1 \times 0{,}2 = -0{,}2 - 0{,}2 = -0{,}4.$

**2** 1. a) $6 \times 5 - 4 \times 7 = 30 - 28 = 2$ et $2 \neq 0$, donc le système admet une seule solution.

b) $3 \times (-2) - 1 \times (-5) = -6 + 5 = -1$ et $-1 \neq 0$, donc le système admet une seule solution.

c) $3 \times (-5) - 4 \times 2 = -15 - 8 = -23$ et $-23 \neq 0$, donc le système admet une seule solution.

2. a) Combinaison $\begin{cases} 24x + 28y = 20 \\ -24x - 30y = -24 \end{cases}$

$$-2y = -4$$
$$y = 2.$$

Donc : $x = -\dfrac{3}{2}$.

$S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \left\{\left(-\dfrac{3}{2};2\right)\right\}.$

b) Substitution

On a : $x = \dfrac{2}{3} + 2y.$

Donc $3x - 5y = \dfrac{3}{4}$, $2 + 6y - 5y = \dfrac{3}{4}$

$$y = \frac{3}{4} - 2$$

$$y = -\frac{5}{4} \text{ d'où } x = -\frac{11}{6}.$$

$S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \left\{\left(-\dfrac{11}{6};-\dfrac{5}{4}\right)\right\}.$

c) Combinaison

$12x + 8y = 44$
$-12x + 15y = 48$

$$23y = 92$$
$$y = \frac{92}{23}$$
$y = 4$, donc $x = 1$.

$S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{(1\,;4)\}.$

**3** a) $4 \times (-1) - 6 \times 1 = -4 - 6 = -10.$
$10x = 8 \Leftrightarrow x = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$ d'où $y = -\dfrac{6}{5}$.

$S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \left\{\left(\dfrac{4}{5};-\dfrac{6}{5}\right)\right\}.$

b) $8 \times (-15) - 30x(-4) = -120 + 120 = 0.$
$(1\,;0)$ est solution de la 2ème équation mais pas de la 1ère équation donc $S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \phi$.

c) $2{,}46 \times (-2{,}5) + 0{,}82 \times 7{,}5 = -6{,}15 + 6{,}15 = 0.$
$(0\,;-1{,}6)$ est solution de la 2ème équation mais pas de la 1ère équation, donc $S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \phi$.

d) $12 \times (-5) - 3 \times (-15) = -60 + 45 = -15$
$12x - 15y = 7$
$-9x + 15y = 6$

$$3x = 13$$
$$x = \frac{13}{3} \text{ d'où } y = 3.$$

$S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \left\{\left(-\dfrac{13}{3};3\right)\right\}.$

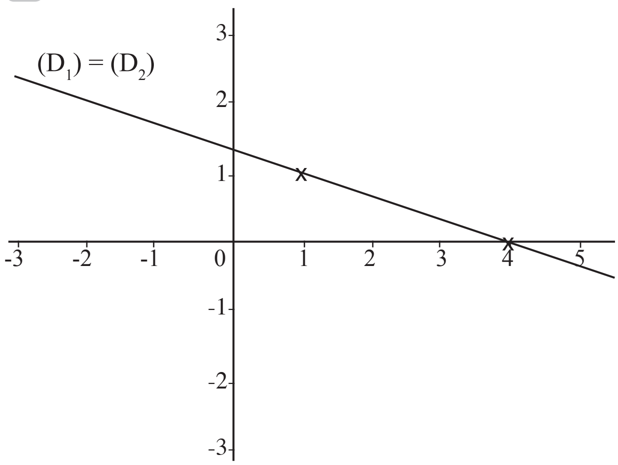
e) $2 \times \left(-\dfrac{5}{2}\right) - 1 \times 16 = -5 - 16 = -21.$
$2x + 16y = 18$
$-2x + 5y = 12$

$$21y = 30$$

$y = \dfrac{30}{21}$ donc $x = -\dfrac{177}{21}$.

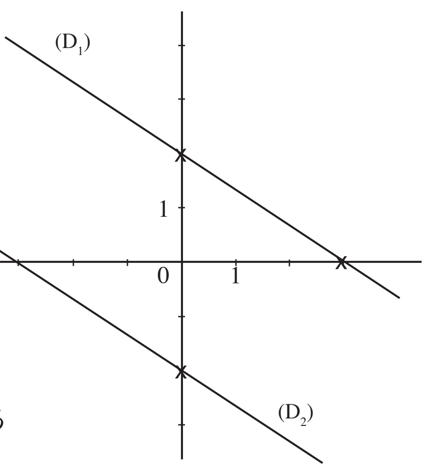
$S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \left\{\left(-\dfrac{177}{21};\dfrac{30}{21}\right)\right\}$

**4** a)



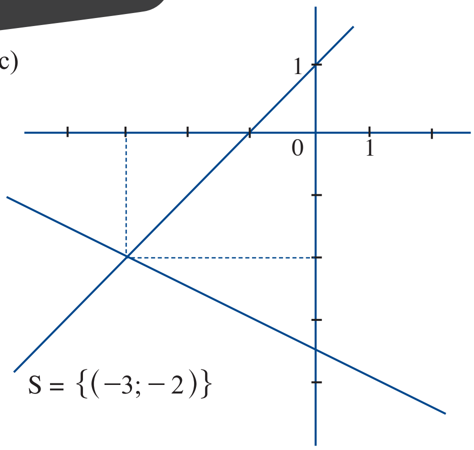

$S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{(t\,;\mathbb{R} - 2t)\,;\ t \in \mathbb{R}\}$,

b)




$S = \phi$

c)




**5** a) $3\sqrt{2}x+2y=3\sqrt{2}$.

$$\frac{-3\sqrt{2}\,x-6\sqrt{6}\,y=-3\sqrt{2}}{\left(2-6\sqrt{6}\right)y=0}$$

$$y=0.$$

Donc $x = 1$.
$S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{(1\ ;0)\}$.

b) $\begin{cases} 3x+\dfrac{7y-x}{2}=3 \\ 7x-(3x+7y)=2 \end{cases}$.

$\begin{cases} 6x+7y-x=6 \\ 7x-3x+7y=2 \end{cases}$

$\begin{cases} 5x+7y=6 \\ 4x+7y=2 \end{cases}$

$x = 4$, donc $y = -2$.
$S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{(4\ ;-2)\}$.

**6** $a \times (-7) - 3 \times b = 0$
$-7a - 3b = 0$

et $\dfrac{12}{14}=\dfrac{-b}{7}=\dfrac{a}{3}$

donc $a=\dfrac{18}{7}$ et $b = -6$.

**7** $y = ax^2 + bx - 1$. Soit $(\mathscr{C})$ cette courbe.
$(\mathscr{C})$ passe par $(1\ ;-2)$, donc $-2 = a + b - 1$
$(\mathscr{C})$ passe par $(-1\ ;4)$, donc $4 = a - b - 1$.

D'où $\begin{cases} a+b=-1 \\ a-b=5 \end{cases}$ d'où $2a = 4$

$a = 2.$
Donc $b = -3$.

D'où $a = 2$ et $b = -3$.

**8** 1) $S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{(1\ ;1)\}$.

2) On a : $1 + 3 \times 1 = 4$, donc $(1\ ;1)$ est solution de $x + 3y = 4$.

3) $S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{(1\ ;1)\}$.

**9** 1) $(4\ ;0)$ est solution de (S').

2) On a $4 - 3 \times 0 = 4$ et $4 \neq -1$ donc $(4\ ;0)$ n'est pas solution de $x - 3y = -1$.

3) Ainsi, $S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \phi$.

**10** 1) $x^2 - y^2 = 21$ donc $(x + y)(x - y) = 21$ ; or $x + y = 3$, donc $3(x - y) = 21$ d'où $x - y = 7$.

2) Ainsi, $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=7 \end{cases}$, d'où $x = 5\ ; y = -2$

$S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{(5\ ;-2)\}$.

**11** $\begin{cases} x-y=7 \\ (x-y)(x+y)=357 \end{cases}$

$\begin{cases} x-y=7 \\ x+y=51 \end{cases}$

$2x = 58$ ; $x = 29$
Donc $y = 22$.
$S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{(29\ ;22)\}$.

**12** Soit $x$ et $y$ ces deux nombres ; on a :

$\begin{cases} x+y=1715 \\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{3} \end{cases}$

$\begin{cases} x+y=1715 \\ 3x-2y=0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x+2y=3430 \\ 3x-2y=0 \end{cases}$

$5x = 3430$
$x = 686$ d'où $y = 1029$

Ces deux nombres sont 686 et 1029.

**13** Soit $x$ et $y$ ces deux nombres.

$\begin{cases} x-y=24 \\ x+8=3((y+8)) \end{cases}$

$\begin{cases} x-y=24 \\ x-3y=16 \end{cases}$

$2y=8$
$y=4$ ,

donc $x = 28$.
Le plus grand est 28 et le plus petit est 4.

**14** 1) $\begin{cases} -7x-7y=-2450 \\ 8x+7y=2600 \end{cases}$

$$x = 150$$

D'où $y = 200$.

$S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{(150\,;\,200)\}$.

2) Après une baisse de 20 %, on a :

$x - \frac{20}{100}x = \frac{80}{100}x = \frac{4}{5}x.$

3) Soit $x$ le pris d'un livret et $y$ celui d'un stylo ; on $a$ : $x + y = 350$

et $\left(x - \frac{20}{100}x\right) + \left(y - \frac{30}{100}y\right) = 260.$

$\frac{80}{100}x + \frac{70}{100}y = 260.$

$\frac{8}{10}x + \frac{7}{10}y = 260$ d'où $8x + 7y = 2600$.

On a donc $\begin{cases} x+y=350 \\ 8x+7y=2600 \end{cases}$

D'après la question 1), on a :
Le prix d'un livret est 150 F.
Le prix d'un stylo est 200 F.

**15** 1) $24x + 9y = 11850$

$-7x - 9y = -5050$

$17x = 6800$

$x = 400$ ; d'où $y = 250$.

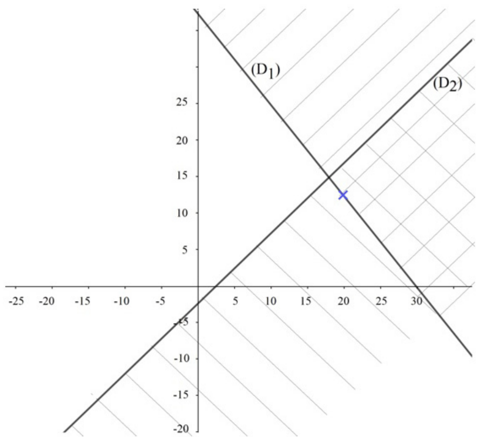
$S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{(400\,;\,250)\}$.

2) Soit $x$ le prix du ticket d'un adulte et $y$ le prix du ticket d'un enfant.

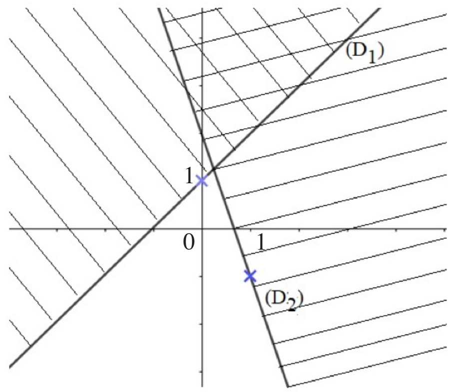
On a : $\begin{cases} 8x+3y=3950 \\ 7x+9y=5050 \end{cases}$

D'après, $x = 400$ et $y = 250$.

**16** On a : $1 - 2 = -1$ et $-1 < 32$
et $2 \times 1 - 3 \times (-2) = 2 + 6 = 8$ et $8 < 9$ ;
donc $(1\,;-2)$ n'est pas solution du système.

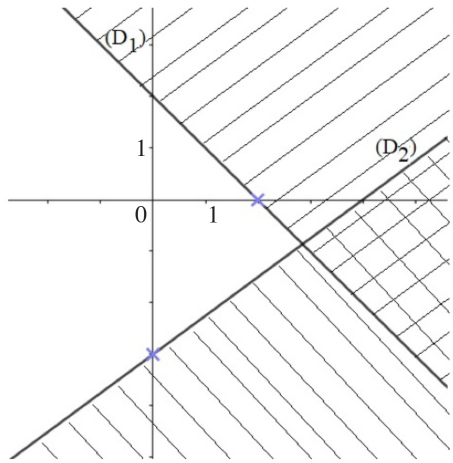



**17** a)



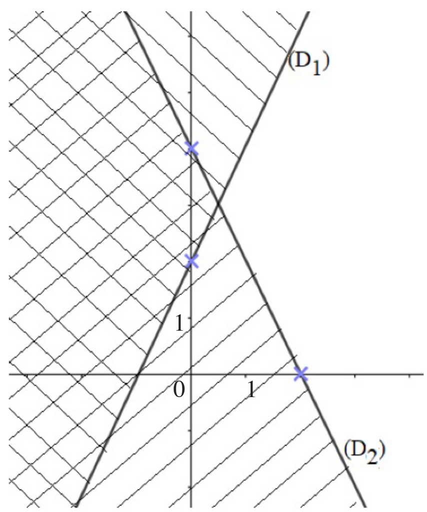

L'ensemble des solutions est l'ensemble des couples de coordonnées des points de la partie du plan hachurée deux fois.

b)




L'ensemble des solutions est l'ensemble des couples de coordonnées des points de la partie du plan hachurée deux fois.

c)




L'ensemble des solutions est l'ensemble des couples de coordonnées des points de la partie du plan hachurée deux fois.

**18** Graphique 1

$$\begin{cases} y \leq 1 \\ y \geq -1 \end{cases}$$

Graphique 2

$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 3 \\ 5x - 2y \geq -3 \end{cases}$$

Graphique 3

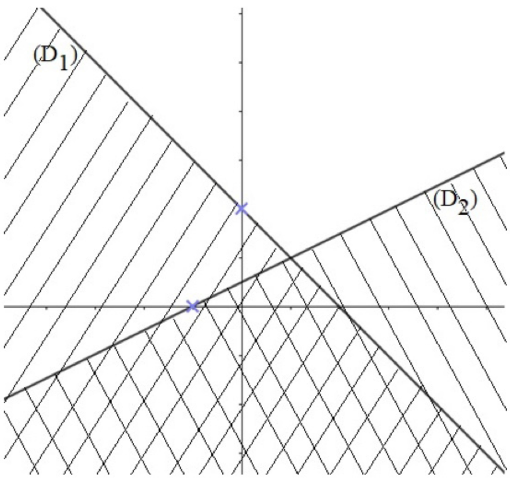
$$\begin{cases} 3x + 2y \geq 16 \\ x - 3y \leq 17 \\ 2x - y \geq -13 \end{cases}$$

**19**

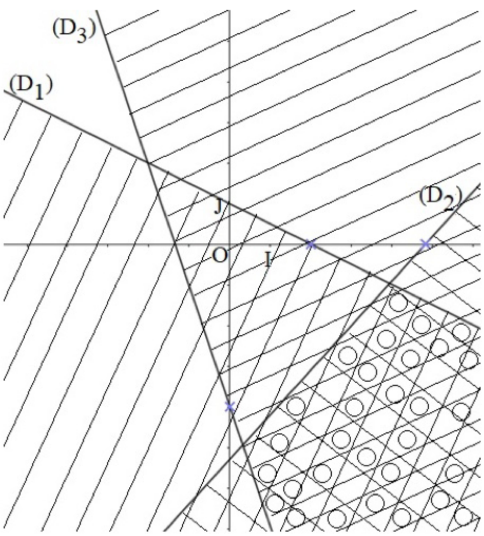
1) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + y \leq 6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x + y > 6 \\ x - y > 2 \end{cases}$

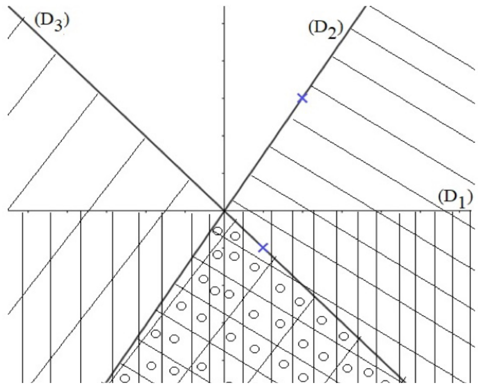
**20**



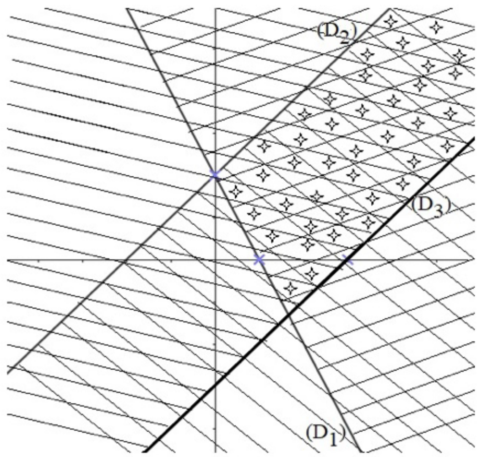

**21**



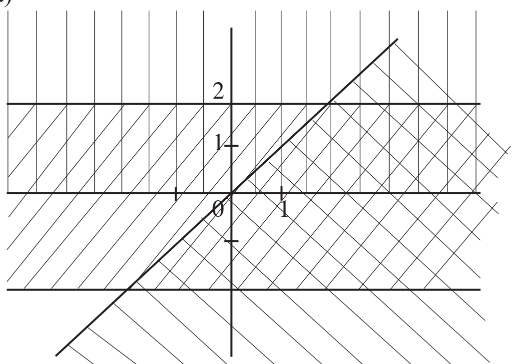

**22**



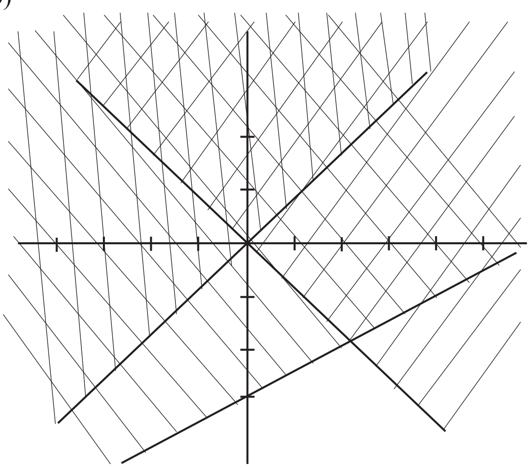

**23**




**24** a)




b)



## Exercices d'approfondissement

**25** Soit $x$ le plus grand et $y$ le plus petit. On a :

$$\begin{cases} 3x-2y=10 \\ 2x+3y=37 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} 9x-6y=30 \\ 4x+6y=74 \\ \hline 13x=104. \end{array}$$

$x=8$, donc $y=7$.

Le plus grand est 8 et le plus petit est 7.

**26** 1) Soit $x$ la longueur et $y$ sa largeur.

On a : $\begin{cases} 2(x+y)=220 \\ (x-2)(y+2)=xy+16 \end{cases}$

$$\begin{cases} x+y=110 \\ xy+2x-2y-4=xy+16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=110 \\ 2(x-y)=20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=110 \\ x-y=10 \end{cases}$$

$2x=120$
$x=60$, d'où $y=50$.

La longueur du terrain rectangulaire est 60 m et sa largeur est de 50 m.

**27** 1) $(x+y)^2=9 \Leftrightarrow x+y=3$ ou $x+y=-3$.

2) On a donc $(S_1)$ : $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ x+y=3 \end{cases}$

$(S_1)$ $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ -3x-3y=-9 \end{cases}$

$$-y=-2$$

$y=2$ donc $x=1$

Pour $(S_1)$, $S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}=\{(1\,;2)\}$ ;

On a $(S_2)$ : $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ x+y=-3 \end{cases}$

$(S_2)$ : $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ -3x-3y=-9 \end{cases}$

$-y=16$
$y=-16$
d'où $x=13$.

Pour $(S_2)$, $S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}=\{(13\,;-16)\}$

Conclusion : $S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}=\{(1\,;2)\,;(13\,;-16)\}$.

**28** Posons $\frac{1}{x}=X$ et $\frac{1}{y-4}=Y$.

(S) devient : $\begin{cases} X-3Y=2 \\ 8X-2Y=3 \end{cases}$

$$\begin{array}{l} -8X+24Y=-16 \\ 8X+2Y=3 \\ \hline 22Y=-13 \end{array}$$

donc $X=2+3\times\left(-\frac{13}{22}\right)$

$Y=-\frac{13}{22}$ $\qquad X=2-\frac{39}{22}=\frac{5}{22}$.

Ainsi, $\frac{1}{x}=\frac{5}{22}$ d'où $x=\frac{22}{5}$

et $\frac{1}{y-4}=-\frac{13}{22}$ d'où $y-4=-\frac{22}{13}$

$13y-52=-22$
$13y=30$
$y=\frac{30}{13}$.

$S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}=\left\{\left(\frac{22}{5};\frac{30}{13}\right)\right\}$.

**29** a) Posons $\frac{1}{x}=X$ et $\frac{1}{y}=Y$.

(S) devient : $\begin{cases} 4X+3Y=2 \\ -7+5Y=\frac{1}{12} \end{cases}$

$$\begin{array}{l} 28X+21Y=14 \\ -28X+20Y=\frac{1}{3} \\ \hline 41Y=\frac{43}{3} \end{array}$$

$Y=\frac{13}{3\times 41}=\frac{43}{123}$

donc $X=\frac{39}{164}$

Ainsi, $\frac{1}{x}=\frac{39}{164}$ d'où $x=\frac{164}{39}$ et $\frac{1}{y}=\frac{43}{123}$

d'où $y=\frac{123}{43}$.

$S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}=\left\{\left(\frac{164}{39};\frac{123}{43}\right)\right\}$.

b) Posons $\frac{1}{x}=X$ et $y^2=Y$ donc (S) devient :

$$\begin{cases} 3X+2Y=11 \\ 2X+Y=6 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} 3X+2Y=11 \\ -4X+2Y=-12 \\ \hline -X=-1 \end{array}$$

$X=1$ d'où $Y=4$.

Ainsi $\frac{1}{x} = 1$, d'où $x = 1$ et $y^2 = 4$ d'où $y = 2$ ou $y = -2$.

$S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{(1 ; -2) ; (1 ; 2)\}$.

**30** On a : $3x + 2y = 1$

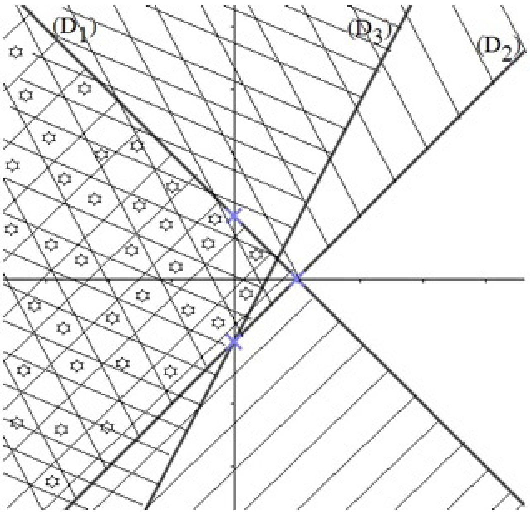
$$\begin{array}{r} 4x - 2y = -8 \\ \hline 7x = -7 \end{array}$$

$x = -1$ donc $y = 2$.

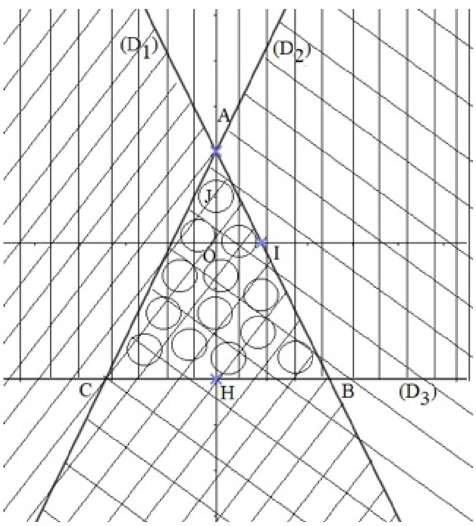
De plus, $2 \times (-1) + (3 \times 2) = -2 + 6 = 4$.

Donc $S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{(-1 ; 2)\}$.

**31**




**32** 1)




2) $(D_1) \cap (D_2)$

$$\begin{cases} 2x - y + 2 = 0 \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ et $y = 2$ ; A(0 ; 2).

$(D_2) \cap (D_3)$

$$\begin{cases} -2x - y + 2 = 0 \\ \qquad\quad y = -3 \end{cases}$$

$x = \frac{5}{2}$ et $y = -3$ ; $B\left(\frac{5}{2} ; -3\right)$.

$(D_2) \cap (D_3)$

$$\begin{cases} 2x - y + 2 = 0 \\ \qquad y = -3 \end{cases}$$

$x = \frac{5}{2}$ et $y = -3$ ; $C\left(-\frac{5}{2} ; -3\right)$.

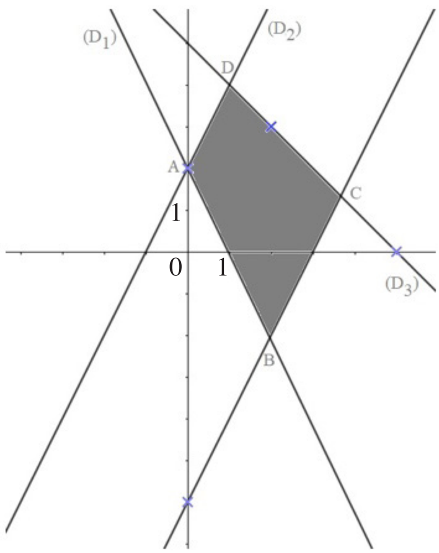
ABC est un triangle.

$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AH \times BC}{2}$ or $AH = 5$ et

$BC = \sqrt{(5)^2 + 0^2} = 5$.

$\mathcal{A} = \frac{5 \times 5}{2} = \frac{25}{2}$ cm$^2$.

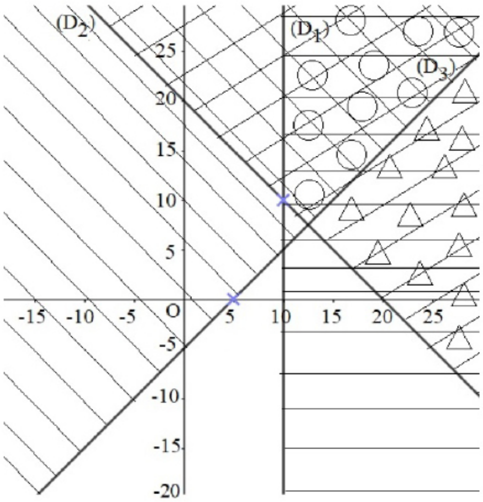
**33**



## Situation d'évaluation

**34** On a : $\begin{cases} x \geq 10 \\ \dfrac{x+y}{2} \geq 10 \\ |x-y| \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 10 \\ x+y \geq 20 \\ |x-y| \leq 5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 10 \\ x+y \geq 20 \\ x-y \leq 5 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x \geq 10 \\ x+y \geq 20 \\ y-x \leq 5 \end{cases}$




**35** 1) • Au moins 2 romans donc $x \geq 2$.

• Plus d'encyclopédies que de roman : $y > x$.

• La dépense inférieure à 90 000 :

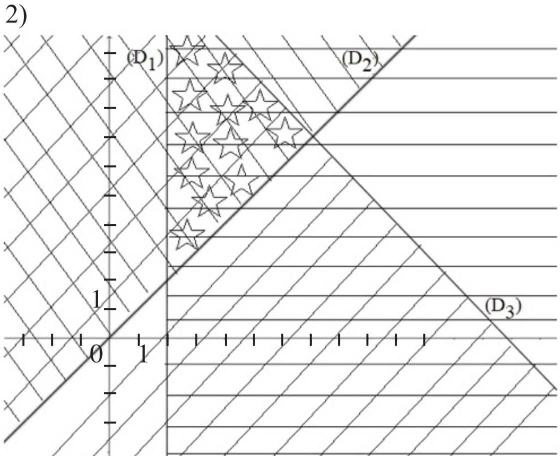
$6000x + 1212000\,y \leq 90\,000$

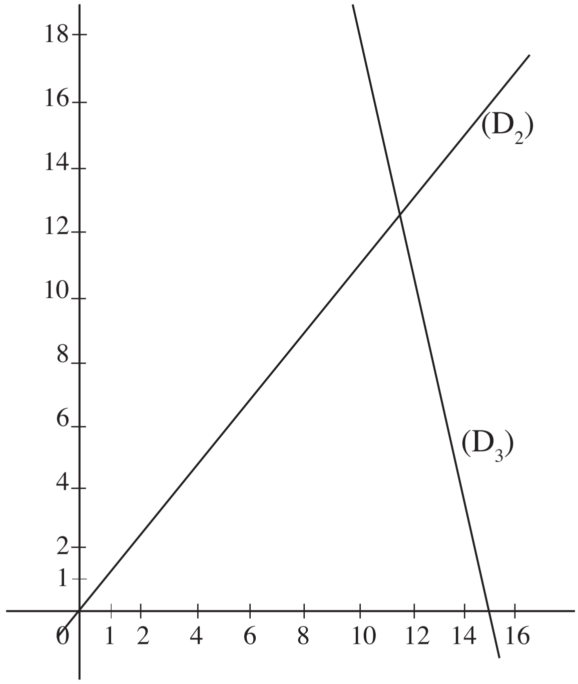
Donc $(x\,;y)$ est

solution de : $\begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq x \\ 6000x + 12000y \leq 90\,000 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq 2 \\ y > x \\ 60x + 12y \leq 900 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ y > x \\ 5x + y \leq 75 \end{cases}$

2)




3) Les diverses possibilités sont : (La première composante de chaque couple est le nombre de romans et la seconde le nombre d'encyclopédies).

(2 ; 3) , ( 2 ; 4),.....,(2 ; 65) ;

(3 ; 4) , ( 3 ; 5),.....,(3 ; 60) ;

(4 ; 5) , ( 4 ; 6),.....,(4 ; 55) ;

.

.

.

(11 ; 12) , (11 ; 13),.....,(11 ; 20) ;

(12 ; 13) , (12 ; 14) , (12 ; 15).

Leçon 5

# GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

## INSTALLATION DES HABILETÉS

### Activité 1 Notion de fonction

#### 1.1. Définition d'une fonction

1) a - F ; b - F ; c - V

2. a) Les éléments de A sont : 1 et 2.
   b) Aucun élément de A ne correspond à b dans l'ensemble B.
   c) Un seul élément de A correspond à c dans l'ensemble B : c'est 3.

**Exercices de fixation**

1-1-1 C'est la correspondance 1 et 4.

1-1-2 1) $\sqrt{7}$ est l'image de 3 par la fonction $f$.
2) 3 est un antécédent de $\sqrt{7}$ par la fonction $f$.

1-1-3 1- faux ; 2- vrai ; 3- vrai

1-1-4

| En français | En mathématique |
|---|---|
| L'image de 6 est 2 | $f(6) = 2$ |
| –4 est l'image de 3 | $f(3) = -4$ |
| 9 est l'antécédent de 5 | $f(9) = 5$ |
| –6 est l'antécédent de 1 | $f(-6) = 1$ |

#### 1.2. Fonction définie par une formule explicite

1) Soit $x$ le nombre des rouges à lèvres livrés.
   P = 1500$x$ + 1000, P étant le prix à payer au nombre de rouges à lèvres livrés.
2) Pour un nombre de rouges à lèvres livrés donné , on fait correspondre un et un seul prix.
Celle relation est une fonction.

**Exercices de fixation**

1-2-1 1- c ; 2- b ; 3- b ; 4- b.

1-2-2 1) $f(-2) = 4$ ; $f(-1) = 1$ ; $f(0) = 0$ ; $f(\sqrt{2}) = 2$.
2) –1 n'a pas d'antécédent par $f$.
0 est l'antécédent de 0 par $f$.
Les antécédents de 9 par $f$ sont –3 et 3.

1-2-3 • Déterminer les antécédents de 1 par $f$, revient à résoudre l'équation $f(x) = 1$.

$f(x) = 1 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 1 = 1$

$\Leftrightarrow x(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -3$

Les antécédents du nombre 1 par $f$ sont : 0 et –3.

• Les antécédents de 1 par g :

$$g(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{2x^2}{x^2+4} = 1$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 = x^2 + 4$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 4$$
$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = 2$$

Les antécédents de 1 par $g$ sont : $-2$ et 2.

### 1.3. Fonction définie par un schéma de calcul ou un algorithme de calcul

1) $f(-5) = 256$ ; $f\left(\frac{3}{2}\right) = 9$

2) $f(x) = 4(x - 3)^2$

**Exercices de fixation**

**1-3-1** 1) $f(x) = x^2 - 2x + 2$

2) l'image de 2 par ce programme est 2.

3) l'image de –1 est 5.

**1-3-2** $h(3) = -\frac{9}{8}$ ; $h(-2) = \frac{11}{8}$

### 1.4. Fonction définie par un tableau de valeurs

1) À une quantité donnée, on fait correspondre zéro ou un prix de vente.
$f$ est une fonction.

2) $f(2) = 9000$ ; 4 n'a pas d'image par $f$.
$f(10) = 38000$ ; $f(20) = 77000$

3) L'antécédent de 5000 par $f$ est 1.
L'antécédent de 38 000 par $f$ est 10.
40 000 n'a pas d'antécédent par $f$.
L'antécédent de 77 000 par $f$ est 20.

**Exercices de fixation**

**1-4-1** 1- Faux ; 2- Vrai ; 3- Vrai ; 4- Faux.

**1-4-2** 1) L'image de –1,5 par $f$ est 0.
L'image de 0 par $f$ est 2.
L'image de 1 par $f$ est 0,5.
L'image de 2 par $f$ est –1.

2) –1 a pour antécédents –2 et 2 par $f$
–1,5 n'a pas d'antécédent par $f$.
2 a pour antécédent 0 par $f$.

### 1.5. Fonction définie par une représentation graphique

1) Le graphique est celui d'une fonction car chaque élément de l'intervalle [2011 ; 2017] a zéro ou une image par la fonction représentée par le graphique.

2) Le tonnage de cacao produit en 2013 est 1 400 000
le tonnage de cacao produit en 2015 est 1 800 000.

3) Les années où la production a atteint 1 500 000 sont : 2012 et 2016 puis entre 2013 et 2014.

**Exercices de fixation**

**1-5-1** a) ; c) et e).

**1-5-2** $A \notin (C_f)$ ; $B \in (C_f)$ ; $C \notin (C_f)$ ; $D \in (C_f)$ ; $E \in (C_f)$ ; $F \notin (C_f)$.

### 1.6. Ensemble de définition d'une fonction

1) $\frac{x+2}{x+2}$ existe si et seulement si $x - 1 \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq 1$.

2) l'ensemble des réels x qui ont une image par $f$ est $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

**Exercices de fixation**

**1-6-1** $D_f = ]-5 ; -2] \cup [-1 ; 5]$
$D_g = ]-\infty ; -1[ \cup ]-1 ; 5]$
$D_h = ]-5 ; 4[$

**1-6-2**

| | |
|---|---|
| $f : x \to \dfrac{1}{x+5}$ | $[5\ ;+\infty[$ |
| $g : x \to (x-5)^2$ | $]-\infty\ ;-5[\cup]-5\ ;+\infty[$ |
| $h : x \to \dfrac{1}{x-5}$ | $]-\infty\ ;+\infty[$ |
| $k : x \to \sqrt{x-5}$ | $]5\ ;+\infty[$ |
| $l : x \to \dfrac{1}{x^2-5}$ | $]-\infty\ ;5[\cup]5\ ;+\infty[$ |
| $m : x \to \dfrac{1}{\sqrt{x-5}}$ | $]-\infty\ ;\sqrt{5}\ [\cup]-\sqrt{5}\ ;\sqrt{5}\ [\cup]\sqrt{5}\ ;+\infty[$ |

**1-6-3** $D_f = \{-3\ ;-2\ ;-1\ ;0\ ;1\ ;2\ ;3\ ;4\ ;5\}$

**1-6-4**
- $D_f = \mathbb{R}$
- $x \in D_g \iff x \geq 0$ donc $D_g = \mathbb{R}_+$ ou $D_g = [0\ ;+\infty[$ ;
- $D_h = [-1;+\infty[$
- $x \in D_i \iff x \neq 0$ donc $D_i = ]-\infty\ ;0[\cup]0\ ;+\infty[$
- $D_j = ]-\infty\ ;-\dfrac{3}{2}[\cup]-\dfrac{3}{2}\ ;+\infty[$ ;
- $D_k = ]-\infty\ ;-2[\cup]-2\ ;2[\cup]2\ ;+\infty[$ ;
- $D_l = \mathbb{R}$.

## 1.7. Fonctions égales sur un ensemble

1. a) $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = ]-\infty\ ;0[\cup]0\ ;+\infty[$

b) $D_f \neq D_g$.

2) pour $x \in D_g$, $g(x) = \dfrac{x^2}{x} = x$.

Donc pour $x \neq 0$ ; $g(x) = f(x)$

3) $f(x) = g(x)$ ; pour $x \in ]-\infty\ ;0[\cup]0\ ;+\infty[$

### Exercices de fixation

**1-7-1** 1) $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = ]-\infty\ ;-2[\cup]-2\ ;+\infty[$

2) L'ensemble sur lequel $f$ et $g$ sont égales est : $]-\infty\ ;-2[\cup]-2\ ;+\infty[$.

**1-7-2** Le grand ensemble sur lequel $f$ et $g$ sont égales est $]-\infty\ ;1]$

**1-7-3** $D_f = [0\ ;1[\cup]1\ ;+\infty[$ et $D_g = [0\ ;+\infty[$

$\forall x \in [0\ ;1[\cup]1\ ;+\infty[$ ,

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}+1$$

$f(x) = g(x)$

donc $f$ et $g$ sont égales sur $[0\ ;1[\cup]1\ ;+\infty[$

# Activité 2 Étude graphique d'une fonction

## 2.1. Lecture d'image et d'antécédents d'un nombre

1. a)

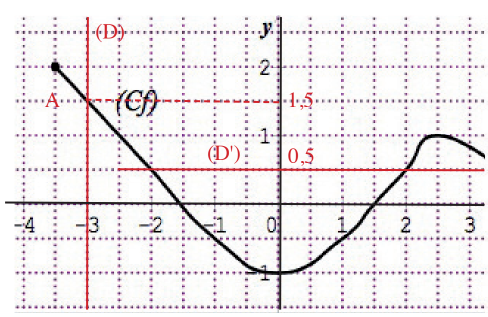
b) Voir figure

c) L'ordonnée du point A est 1,5

2. a) Voir figure

b) Voir figure

c) Les abscisses sont : $-2$ et 2.



## Exercices de fixation

**2-1-1** 1- Faux ; 2- Vrai ; 3- Vrai ; 4- Vrai ; 5- Vrai

**2-1-2** <u>**Tableau 1**</u>

| $x$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Image de $x$ | 2 | 0 | $\frac{3}{4}$ | 2 | 3 | 1 | -2 |

<u>**Tableau 2**</u>

| $y$ | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| Antécédent(s) de $y$ | 2,75 | −2 ; 2,4 | 2 ; -0,75 ; -2,75 | -3 ; 0 ; 1,6 | 1 |

## 2.2. Extremum d'une fonction

1) L'ensemble de définition de $f$ est [–4 ; 4]

2. a) L'ordonnée M de ce point est 4
   b) Il est atteint pour $x = 2$

3. a)
   b) L'ordonnée $m$ de ce point est : –1
   c) Il est atteint pour $x = –2$

## Exercices de fixation

**2-2-1** 2 est le maximum de $f$ sur. [–3 ; 4], il est atteint en $x = –3$.
−2 est le minimum de $f$ sur [–3 ; 4], il est atteint en $x = 0$.

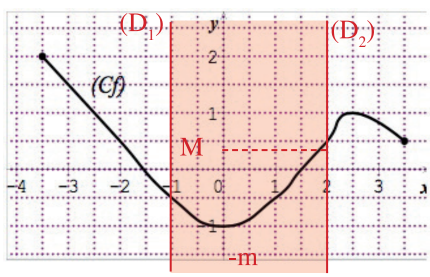
**2-2-2** Le minimum de g sur [–5 ; 6] est –2
Le maximum de g sur [–5 ; 6] est 4

**2-2-3** 1. a) Le maximum de $f$ sur [–4 ; 0] est 3,5.
b) Le minimum de $f$ sur [–4 ; 0] est –1.

2. a) Le maximum de $f$ sur [0 ; 3] est 4.
b) Le minimum de $f$ sur [0 ; 3] est 0.

3) Le maximum de $f$ sur [–4 ; 3] est 4.
Le minimum de $f$ sur [–4 ; 3] est –1.

## 2.3. Image directe d'un ensemble




1. a)
   b) Voir figure

2) Voir figure

3) Maximum M = 0,5
   Minimum $m$ = –1

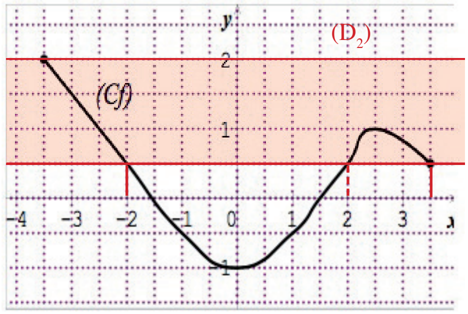
4. a) L'image de tout élément de [–1 ; 2] appartient à l'intervalle [–1 ; 0,5].
   b) Tout élément de [–1 ; 0,5] a un antécédent par $f$ dans l'intervalle [–1 ; 2].
   c) Donc l'image directe de l'intervalle [–1 ; 2] est [–1 ; 0,5].

## Exercices de fixation

**2-3-1** 1- Faux ; 2- Faux ; 3- Faux ; 4- Vrai ; 5- Vrai.

**2-3-2** a) L'image directe de [–4 ; –2] par $f$ est : [–1 ; 3,5]
b) L'image directe de [–2 ; 1] par $f$ est : [–1 ; 2]
c) L'image directe de ]0 ; 3[ par $f$ est : [0 ; 4[

## 2.4. Image réciproque d'un ensemble




1. a)

   b) Voir figure

2) Voir figure

3) Les intervalles constitués des abscisses des points d'extrémités des parties de la courbe sont : $[-3{,}5\ ;\ -2]$ et $[2\ ;\ 3{,}5]$

4. a) Tout élément de $[\frac{1}{2}\ ;\ 2]$ a son antécédent dans $[-3{,}5\ ;\ -2] \cup [2\ ;\ 3{,}5]$

   b) Tout élément de $[-3{,}5\ ;\ -2] \cup [2\ ;\ 3{,}5]$ a son image dans $[\frac{1}{2}\ ;\ 2]$

### Exercices de fixation

1- Vrai ; 2- Faux ; 3- Faux

## Activité 3 Variation d'une fonction

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 2$

1) L'ensemble de définition de $f$ est : $]-\infty\ ;\ +\infty[$

2. a) Soient $a$ et $b$ deux éléments de $]-\infty\ ;\ 0[$ tels que : $a \leq b$

$a \leq b \leq 0$ , on a : $a^2 \geq b^2$

$a^2 - 2 \geq b^2 - 2$

donc : $f(a) \geq f(b)$

b) soient $a$ et $b$ deux éléments de $[0\ ;\ +\infty[$ tels que $a \leq b$

$0 \leq a \leq b$ donc $a^2 \leq b^2$

$a^2 - 2 \leq b^2 - 2$

donc $f(a) \leq f(b)$

### Exercices de fixation

**3-1** * $f$ est une fonction croissante sur $[-3\ ;\ 4]$

$-1$ et $-2$ sont deux éléments de l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$

$-1 > -2$ donc $f(-1) > f(-2)$

* $f$ est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$

$-5$ et $3$ sont deux éléments de $\mathbb{R}$

$-5 < 3$ donc $f(-5) > f(3)$

* $f$ est une fonction constante sur $]-\infty\ ;\ 10]$

$-17$ et $5$ sont deux éléments sur $]-\infty\ ;\ 10]$

Donc $f(-17) = f(5)$

**3-2** 1- Vrai ; 2- Vrai ; 3- Faux ; 4- Faux 5- Vrai ; 6- Vrai

**3-3** 1) $f$ est croissante sur l'intervalle $[-4\ ;\ -1]$

$f$ est décroissante sur chacun des intervalles $[-5\ ;\ -4]$ et $[-1\ ;\ 3]$

2) Tableau de variation de $f$.

| $x$ | $-5$ | $-4$ | $-1$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ↘ | $-1$ | ↗ ↘ | $-1$ |

**3-4** $f$ est une fonction numérique définie par :

$f(x) = \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$

Soient $a$ et $b$ deux éléments de l'intervalles $[0\ ;\ +\infty[$ tels que $a \leq b$.

On a : $a \leq b$ donc $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

$f(a) \leq f(b)$

$f$ est donc une fonction croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$

Tableau de variation

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | ↗ |

**3-5** Soit la fonction numérique $g$ définie par : $g(x) = x^2$

Sur $]-\infty\ ;\ 0]$ prenons $a$ et $b$ sur $]-\infty\ ;\ 0]$ tels que $a \leq b$

On a : $a^2 \geq b^2$

Donc $g(a) \geq g(b)$ g est donc décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$

Soient $a$ et $b$ deux éléments de $[0\ ;\ +\infty[$ tels que $a \leq b$

On a : $a \leq b$ et $a^2 \leq b^2$ donc $g(a) \leq g(b)$. $g$ est donc croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$

Tableau de variation

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | ↘ | $0$ | ↗ |

**3-6** Soit $h$ la fonction numérique définie par : $h(x) = \frac{1}{x}$.

• Sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ pour $a$ et $b$ deux éléments de l'intervalle tels que $a \leq b$

on a : $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

D'où $h(a) \geq h(b)$

Donc $h$ est décroissante Sur $]0 ; +\infty[$

• Sur l'intervalle$]-\infty ; 0[$ pour $a$ et $b$ deux éléments de l'intervalle tels que $a \leq b$

on a : $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

Donc $h(a) \geq h(b)$

La fonction $h$ est décroissante sur$]-\infty ; 0[$

Tableau de variation sur $\mathbb{R}^*$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\searrow$ | $\|$ | $\searrow$ |

# Exercices

## Exercices de renforcement

**1** Fig. 1 D$f$ $= ]-5 ; 3{,}5[$.

Fig. 3 D$f$ $= ]-3 ; 2[$.

Fig. 5 D$f$ $= ]-3 ; -1[ \cup ]1 ; 3[$.

**2** 1) $D_f = \mathbb{R}$ car $f$ est une fonction polynôme.

2) $x \in D_g \Leftrightarrow x \in \mathbb{R},\ 2x - 8 \neq 0$ ;

$x \neq 4$.

$D_g = \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

3) $x \in Dh \Leftrightarrow x \in \mathbb{R},\ 2x - 6 \geq 0$ ;

$x \geq 3$.

$D_h = [3 ; +\infty[$.

4) $x \in D_i \Leftrightarrow x^2 - 4 \neq 0$ ;

$D_i = \mathbb{R} \setminus \{-2 ; 2\}$.

5) $x \in D_j \Leftrightarrow x \in \mathbb{R},\ (x-3)(x+2) \neq 0$

$D_j = \mathbb{R} \setminus \{-2 ; 3\}$.

6) $x \in D_k \Leftrightarrow x \in \mathbb{R},\ x - 3 \neq 0$ et $x + 2 \neq 0$ ;

$D_k = \mathbb{R} \setminus \{-2 ; 3\}$.

7) $x \in D_l \Leftrightarrow x \in \mathbb{R},\ 3x^2 + 5 \neq 0$.

Or $\forall x \in \mathbb{R},\ 3x^2 + 5 \neq 0$, donc $D_l = \mathbb{R}$.

8) $x \in D_m \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}, (x-1)^2 \neq 0$ ;

$x - 1 \neq 0$

$D_m = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

**3** 1) $x \in Df \Leftrightarrow x \in \mathbb{R},\ 2 - x \geq 0$ et $2 + x \geq 0$ ;

$x \leq 2$ et $x \geq -2$.

$Df = [-2 ; 2]$.

2) $x \in Df \Leftrightarrow x \in \mathbb{R},\ (x-2)^2 - 9 \neq 0$ ;

$(x - 2 - 3)(x - 2 + 3) \neq 0$

$(x-5)(x+1) \neq 0$

$x - 5 \neq 0$ et $x + 1 \neq 0$

$Df = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 5\}$.

3) $x \in Df \Leftrightarrow x + 1 \geq 0$ et $x + 1 \neq 0$ ;

$Df = ]-1 ; +\infty[$.

4) $x \in Df \Leftrightarrow x \in \mathbb{R},\ 5 + x \geq 0$ et $x - 4 \neq 0$

$x \geq -5$ et $x \neq 4$.

$Df = [-5 ; +\infty[ \setminus \{4\} = [-5 ; 4[ \cup ]4 ; +\infty[$.

5) $x \in Df \Leftrightarrow x \in \mathbb{R},\ x + 2 > 0$ ;

$x > -2$.

$Df = ]-2 ; +\infty[$.

6) $x \in Df \Leftrightarrow x \in \mathbb{R},\ 2x - 12 > 0$

$x > 6$.

$Df = ]6 ; +\infty[$.

7) $x \in Df \Leftrightarrow x \in \mathbb{R},\ 4 - x \geq 0$ et $x + 5 \neq 0$ ;

$x \leq 4$ et $x \neq -5$.

$Df = ]-\infty ; 4] \setminus \{-5\} = ]-\infty ; -5[ \cup ]-5 ; 4]$.

8) $x \in Df \Leftrightarrow x \in \mathbb{R},\ x + 9 \geq 0$ et $x - 3 \neq 0$ ;

$Df = [-9 ; 3[ \cup ]3 ; +\infty[ = [-9 ; +\infty[ \setminus \{3\}$.

**4** D$f$ = ]–3 ; 3[

D$g$ = ]–3 ; –1,5] ∪ [0,5 ; 2[.

D$k$ = ]–2 ; 2[.

D$h$ = ]–3 ; 1[ ∪ ]1 ; 3[.

**5** 1) $f(\sqrt{2}) = -12$ ; $f(-3) = 9 - 3 - 12$

$f(-3) = -6$.

$f(\sqrt{2}) = 2 + \sqrt{2} - 12$

$f(\sqrt{2}) = -10 + \sqrt{2}$.

2) $f(2) = 4 + 2 - 12$ ; $f(2) = -6$, donc A(2 ; –6) ∈ (C$f$).

$f(-1) = 1 - 1 - 12$ ; $f(-1) = -12$ ;

donc B(–1 ; –12) ∈ (C$f$).

3) $f(x) = -12$

$x^2 + x - 12 = -12$

$x^2 + x = 0$

$x(x + 1) = 0$

$x = 0$ ou $x = -1$.

Les antécédents de –12 par $f$ sont 0 et –1.

4) $(x - 3)(x + 4) = x^2 + 4x - 3x - 12$

$= x^2 + x - 12$

Donc $f(x) = (x - 3)(x + 4)$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 4) = 0$

$\Leftrightarrow x - 3 = 0$ ou $x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -4$.

Les antécédents de 0 par $f$ sont 3 et –4.

**6** 1) $x \in$ D$f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$ ;

D$f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

2) $f(7) = -\frac{49}{10} + \frac{4}{7}$ ; $f(7) = -\frac{303}{70}$.

$f(\sqrt{5}) = -\frac{5}{10} + \frac{4}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{2} + \frac{4\sqrt{5}}{10}$ ;

$f(\sqrt{5}) = \frac{-5 + 4\sqrt{5}}{10}$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{10} \times \frac{4}{9} + \frac{12}{2}$ ; $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{268}{45}$.

3) Calculons $f\left(\frac{5}{2}\right)$

$f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{10} \times \frac{25}{4} + 4 \times \frac{2}{5}$

$= -\frac{5}{8} + \frac{8}{5} = \frac{39}{40}$

Donc $\frac{5}{2}$ est un antécédent de $\frac{39}{40}$.

**7** 1) D$f$ = {–5 ; –2 ; 0 ; 1 ; 6 ; 10 ; 12}.

2) $f(-5) = 20$ ; $f(10) = 95$ ; $f(0) = -5$.

3) Les antécédents de – 5 par $f$ sont : 0 et 12.

**8** 1) Programme A

$(-2 + 3)^2 - 2 = -1$.

$(2 + 3)^2 - 2 = 23$

$(0 + 3)^2 - 2 = 7$

$\left(\frac{1}{2} - 3\right)^2 - 2 = \frac{17}{4}$

$\left(-\frac{4}{5} - 3\right)^2 - 2 = \frac{311}{25}$.

Programme B

$\frac{1}{-2 - 2} - 3 = -\frac{13}{4}$.

Pas possible pour 2.

$\frac{1}{0 - 2} - 3 = -\frac{7}{2}$

$\frac{1}{-\frac{4}{5} - 2} - 3 = -\frac{47}{14}$.

2) Programme A

Soit $x$ un nombre ; $f(x) = (x + 3)^2 - 2$.

Programme B

Soit $x$ un nombre différent de 2.

$g(x) = \frac{1}{x - 2} - 3$.

3) $f(x) = 0$

$(x + 3)^2 - 2 = 0$

$(x + 3 - \sqrt{2})(x + 3 + \sqrt{2}) = 0$

$x = -3 + \sqrt{2}$ ou $x = -3 - \sqrt{2}$.

Les antécédents de 0 par $f$ sont $-3\sqrt{2}$ et $-3 - \sqrt{2}$.

$f(x) = 3$

$(x + 3)^2 - 2 = 3$

$(x + 3)^2 - 5 = 0$

$(x + 3 - \sqrt{5})(x + 3 + \sqrt{5}) = 0$

$x = -3 + \sqrt{5}$ ou $x = -3 - \sqrt{5}$.

Les antécédents de 3 par $f$ sont $-3 + \sqrt{5}$ et $-3 - \sqrt{5}$.

$g(x) = 0$

$\frac{1}{x - 2} - 3 = 0$

$\frac{1}{x - 2} = 3$

$3x - 6 = 1$

$x = \frac{7}{3}$

L'antécédent de 0 par g est $\frac{7}{3}$.

$g(x) = 3$

$\frac{1}{x - 2} = 6$

$x - 2 = \frac{1}{6}$

$x = -\frac{11}{6}$.

L'antécédent de 3 par g est $-\frac{11}{6}$.

**9** a) $Df = [-12\ ;\ 6]$

b) $f(-6) = 8$, $f(4) = 0$.

c) $-4$ n'a pas d'antécédents par $f$.
Les antécédents de 4 par $f$ sont $-10$ ; $-2$ et 2.

d) Le maximum de $f$ et 8 atteint en $-6$.
Le minimum de $f$ est $-2$ atteint en 6.

e) $f([0\ ;\ 6]) = [-2\ ;\ 6]$.

*f)* L'image réciproque par $f$ de $]0\ ;\ 4[$ est
$]-12\ ;\ -10[\ \cup\ ]2\ ;\ 6[$.

g)

| $x$ | $-12$ | | $-6$ | | $-2$ | | $0$ | | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | $\nearrow$ | 8 | $\searrow$ | 4 | $\nearrow$ | 6 | $\searrow$ | $-2$ |

**10** 1) $Df = [-4\ ;\ 2]$.

2)

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-0{,}5$ | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1,5 | 0 | $-0{,}5$ | 0 | 1 |

3) L'antécédent de $-0{,}5$ par $f$ est 0.
Les antécédents de 0 par $f$ sont : $-2$ et 1.
Les antécédents de 1 par $f$ sont : $-4$ ; $-2{,}5$ et 2.

4) La solution de l'inéquation $f(x) \geq 1$ est
$[-4\ ;\ -2{,}5] \cup \{2\}$.

**11** 1. a) $f(2) = 2$ ; $f(0) = -2$ ; $f(-3) = 7$.

b) $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{17}{9}$ ; $f\left(\sqrt{2}\right) = 0$.
$f\left(1-\sqrt{2}\right) = 1 - 2\sqrt{2}$.

2) Les antécédents de 2.
$f(x) = 2$
$x^2 - 2 = 2$
$x^2 = 4$
$x = 2$ ou $-2$.
Les antécédents de 2 sont 2 et $-2$.

**12** 1) $x \in Df \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$, $2x + 1 \geq 0$ et $x - 4 \neq 0$.
$Df = \left[-\frac{1}{2}\ ;+\infty\right[-\{4\}$

2) $f(3) = -\sqrt{7}$.

3) $f(x) = 0$
$\sqrt{2x+1} = 0$
$2x + 1 = 0$
$x = -\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$ est l'antécédent de 0 par $f$.

**13** a) $x \in Dg \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$, $x + 4 \neq 0$.
$Dg = \mathbb{R}\backslash\{-4\}$.

b) $g(-2) = -\frac{11}{2}$ ; $g\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{18}{11}$.

2) $g(x) = 1$
$3x - 5 = x + 4$
$x = \frac{9}{2}$.
L'antécédent de 1 par $g$ est $\frac{9}{2}$.

$g(x) = 5$
$3x - 5 = 5x + 20$
$x = -\frac{25}{2}$.
L'antécédent de 5 par g est $-\frac{25}{2}$.

1) $Df = \mathbb{R}$ ; $Dg = \mathbb{R}$.

**14** 2)

| $x$ | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $2x-2$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $\lvert 2x-2\rvert$ | $-2x+2$ | 0 | $2x-2$ |
| $1-x$ | $+$ | 0 | $-$ |
| $\lvert 1-x\rvert$ | $1-x$ | 0 | $x-1$ |
| $f(x)$ | $-3x+3$ | 0 | $3x-3$ |

$f$ et $g$ sont égales sur $D = [1\ ;+\infty[$.

**15** 1) $Df = \mathbb{R}$ ; $Dg = \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{|x|^2 - 1}{|x|+1}$

$= \dfrac{(|x|-1)(|x|+1)}{|x|+1}$

$= |x| - 1$.

$f(x) = g(x)$ et $Df = Dg$. Donc $f = g$.

2) $Df = \mathbb{R}$ et $Dg = \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{(x^2+3)\left(\sqrt{x^2+3}\right)}{\sqrt{x^2+3}.\sqrt{x^2+3}}$

$= \dfrac{(x^2+3)\left(\sqrt{x^2+3}\right)}{x^2+3}$

$f(x) = \sqrt{x^2+3}$
$f(x) = g(x)$.

$Df = Dg = \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$ Donc $f = g$.

3) D$f$ = $\mathbb{R}\backslash\{-1 ; 1\}$, D$g$ = $\mathbb{R}\backslash\{-1 ; 1\}$

$\forall x \in \mathbb{R},\backslash\{-1 ; 1\}$, $g(x) = \dfrac{1(x+1)-1(x-1)}{(x-1)(x+1)}$

$= \dfrac{2}{x^2-1} = f(x)$

D$f$ =D$g$ et $\forall\, x \in$ D$f$, $f(x) = g(x)$. Donc $f = g$.

**16** 1) $x \in$ D$f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$, $|x-2| \neq 0$

$x - 2 \neq 0$

$x \neq 2.$

D$f$ = $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.

D$g$ = $\mathbb{R}$.

2)

| $x$ | $-\infty$ | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x-2$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $\lvert x-2\rvert$ | $-x+2$ | 0 | $x-2$ |
| $f(x)$ | $-1$ | ‖ | 1 |

$f$ et $g$ coïncident sur $]-\infty ; 2[$.

**17** 1) Tableau de variation de $f$.

| $x$ | $-4$ | | $-2$ | | 2 | | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | ↗ | 2 | ↘ | $-2$ | ↗ | 1 |

Tableau de variation de $g$.

| $x$ | $-4$ | | 1 | | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-2$ | ↗ | 1 | ↘ | $-3$ |

2) Le maximum de $f$ est 2.
Le minimum de $f$ est $-2$.
Le maximum de $g$ est 1.
Le minimum de $g$ est $-3$.

3) ($Cf$) et ($Cg$) se coupent aux points d'abscisses 0 et 3.
Les solutions de l'équation $x \in [-4 ; 4]$, $f(x) = g(x)$ sont 0 et 3.

4) ($Cf$) est au-dessus de (OI) sur $[-4 ; 0]$ et $[3{,}6 ; 4]$.
$S = [-4 ; 0] \cup [3{,}6 ; 4]$.
($Cg$) est au-dessus de (OI) sur $[0 ; 2]$.
$S = [0 ; 2]$.

5) ($Cf$) est au-dessus de ($Cg$) sur $[-4 ; 0]$ et sur $[3 ; 4]$.
D'où $S = [-4 ; 0] \cup [3 ; 4]$.

**18** 1) D$f$ = $\mathbb{R}\backslash\{3\} = ]-\infty ; 3[ \cup ]3 ; +\infty[$ ;

2) • $3 < x \leq 7$

$0 < x - 3 \leq 4$

$\dfrac{1}{x-3} \geq \dfrac{1}{4}$

$\dfrac{2}{x-3} \geq \dfrac{1}{2}$

$f(]3 ; 7]) = \left[\dfrac{1}{2} ; +\infty\right[$.

• $0 \leq x \leq 2$

$-3 \leq x - 3 \leq -1$

$-1 \leq \dfrac{1}{x-3} \leq -\dfrac{1}{3}$

$-2 \leq g(x) \leq -\dfrac{2}{3}$

$g([0 ; 2]) = \left[-2 ; -\dfrac{2}{3}\right]$

• $[1 ; 5] = [1 ; 3[ \cup ]3 ; 5] \cup \{3\}$.

$3 \notin$ D$g$ donc $g([1 ; 5]) = g[1 ; 3[ \cup g([3 ; 5])$.

$1 \leq x < 3$

$-2 \leq x - 3 < 0$

$\dfrac{1}{x-3} \leq -\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{2}{x-3} \leq -1.$

$g([0 ; 3[) = ]-\infty ; -1]$

$3 < x \leq 5$

$0 < x - 3 \leq 21$

$\dfrac{1}{x-3} \geq \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{2}{x-3} \geq 1$

$g(]3 ; 5]) = [1 ; +\infty[$.

Donc $g([1 ; 5]) = ]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[$.

**19** 1) D$f$ = $\mathbb{R}$.

2) • $f(-3) = 3$ ; $f(2) = 2$.

D'où $f(\{-3 ; 2\}) = \{2 ; 3\}$.

• $-3 \leq x \leq -2$

$2 \leq -x \leq 3$

$2 \leq |x| \leq 3$, car $x < 0$ donc $|x| = -x$

D'où $f([-3 ; -2]) = [2 ; 3]$.

• $[-1 ; 3] = [-1 ; 0[ \cup [0 ; 3]$

$-1 \leq x < 0$ $\qquad$ $0 \leq x \leq 3$

$0 < -x \leq 1$ $\qquad$ $0 \leq |x| \leq 3$

$0 < |x| \leq 1$

$f([-1 ; 0[) = ]0 ; 1]$

$f([0\ ;3]) = [0\ ;3]$
$]0\ ;1] \cup [0\ ;3] = [0\ ;3]$.
$f([-1\ ;3]) = [0\ ;3]$.

3) $f(x) = 4$
$|x| = 4$
$x = -4$ ou $x = 4$.
D'où l'image réciproque de $\{4\}$ par $f$ est $\{-4;4\}$.

**20** 1) $Dg = [-3\ ;3]$

2. a) $g([-3\ ;-1]) = [-1\ ;1]$

b) $g(]-1\ ;3[) = ]0\ ;2]$

c) $g([-3\ ;3]) = [-1\ ;2]$.

3. a) L'image réciproque de $]-1\ ;1[$ par $g$ est $]-3\ ;-2[ \cup ]2\ ;3]$.

b) L'image réciproque de $[1\ ;2]$ par $g$ est $[-1\ ;2]$.

**21** 1) $Df = [-3,5\ ;3,5]$.

2) a) $f([-1\ ;1]) = [-4\ ;1]$.

b) $f(]1\ ;2[) = ]1\ ;2]$.

c) $f([-3\ ;3]) = [-5\ ;2]$.

3) a) L'image réciproque par $f$ de $]-1\ ;1[$ est $]-0,5\ ;1[$.

b) L'image réciproque par $f$ de $[1\ ;2,5]$ est $[1\ ;2]$.

c) L'image réciproque par $f$ de $[-3\ ;0]$ est $[-3,5\ ;-2,5] \cup [-0,5\ ;0,5] \cup [2,5\ ;-3,5]$.

**22** 1) Tableau de variation

| $x$ | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $1$ | ↘ | $-1$ | → | $-1$ |

2) a) Ce maximum de $f$ sur $[-2\ ;2]$ est 1.

b) Ce maximum est atteint pour $x = -1$.

**23** 1) a) $h$ est décroissante sur $[-2\ ;0]$. $-2 < -1$, donc $h(-2 > h(-1))$.

b) $h$ est décroissante sur $[-2\ ;0]$ et croissante sur $[0\ ;3]$. Or $-1,5 \in [-2\ ;0]$ et $0,5 \in [0\ ;3]$, donc on ne peut pas comparer $h(-1,5)$ et $h(0,5)$.

c) $h$ est décroissante sur $[3\ ;4]$. $3,6 < 3,7$, donc $h(3,6 > h(3,7))$.

d) $h$ est croissante sur $[0\ ;3]$. $0,1 < 1,9$, donc $h(0,1 < h(1,9))$.

**24** 1)

| $x$ | $-4$ | | $-2$ | | $2$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ ◊ | -3 | ↘ | -1 | ↗ | 4 | ↘ | 1 |

| $x$ | $-4$ | | $-2$ | | $0$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ ◊ | -1 | ↗ | 4 | ↘ | 0 | ↗ | 3 |

2) $Df = [-4\ ;4]$
Le maximum de $f$ sur $Df$ est 4 et son minimum est $-1$.
$Dg = [-4\ ;4]$
Le maximum de $g$ sur $Dg$ est 4 et son minimum est $-1$.

**25** 1) $a \in ]0\ ;+\infty[$, $b \in ]0\ ;+\infty[$ ;
$a < b$
$a^2 < b^2$
$\frac{1}{a^2} > \frac{1}{b^2}$
$-\frac{1}{a^2} < -\frac{1}{b^2}$
$1 - \frac{1}{a^2} < 1 - \frac{1}{b^2}$
$f(a) < f(b)$.
$f$ est croissante sur $]0\ ;+\infty[$.

$a \in ]-\infty\ ;0[$, $b \in ]-\infty\ ;0[$ ;
$a < b$
$a^2 > b^2$
$\frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^2}$
$-\frac{1}{a^2} > -\frac{1}{b^2}$
$1 - \frac{1}{a^2} > 1 - \frac{1}{b^2}$
$f(a) > f(b)$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ ◊ | | ↘ | ‖ | ↗ | |

$f$ est décroissante sur $]-\infty\ ;0[$.

2) Sur $\mathbb{R}$, $g$ n'est ni croissante ni décroissante.
3) $a > b > 1$.
$a - 1 > b - 1 > 0$
$\frac{1}{a-1} < \frac{1}{b-1}$
$\frac{2}{a-1} < \frac{2}{b-1}$
$2 + \frac{2}{a-1} < 2 + \frac{2}{b-1}$
$h(a) < h(b)$
$h$ est décroissante sur $]1\ ;+\infty[$.

| $x$ | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $h(x)$ ◊ | ‖ | ↘ | |

**26** 1. a) $a > b \geq 3$.

$a - 3 > b - 3 \geq 0$

$(a - 3)^2 > (b - 3)^2$

$-(a - 3)^2 < -(b - 3)^2$

$-(a - 3)^2 + 4 < -(b - 3)^2 + 4$

$f(a) < f(b)$

$f$ est donc décroissante sur $[3 ; +\infty[$.

b) $a < b \leq 3$

$a - 3 < b - 3 \leq 0$

$(a - 3)^2 > (b - 3)^2$

$-(a - 3)^2 < -(b - 3)^2$

$-(a - 3)^2 + 4 < -(b - 3)^2 + 4$

$f(a) < f(b)$

$f$ est croissante sur $]-\infty ; 3]$.

2. a) Tableau de variation de $f$.

| $x$ | $-\infty$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | |

$f(3) = 4$.

b) Sur $[1 ; 3]$, $f$ est croissante.
Sur $[3 ; 5]$ $f$ est décroissante. Par conséquent, elle n'est ni croissante, ni décroissante sur $(1 ; 5)$.

3) $\forall x \in \mathbb{R}, (x - 3)^2 \geq 0$.
$-(x - 3)^2 \leq 0$
$-(x - 3)^2 + 4 \leq 4$.
$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 4$.

Résolvons l'équation $f(x) = 4$.
$-(x - 3)^2 + 4 = 4$
$-(x - 3)^2 = 0$
$x - 3 = 0$
$x = 3$.
Par conséquent, 4 est le maximum de $f$ sur $\mathbb{R}$.

**27** 1) $a > b > 1$.

$a - 1 > b - 1 > 0$

$\frac{1}{a-1} < \frac{1}{b-1}$

$-\frac{4}{a-1} > -\frac{4}{b-1}$

$3 - \frac{4}{a-1} > 3 - \frac{4}{b-1}$

$f(a) > f(b)$.

$f$ est croissante sur $]1 ; +\infty[$.

$a < b < 1$

$a - 1 < b - 1 < 0$

$\frac{1}{a-1} > \frac{1}{b-1}$

$-\frac{4}{a-1} < -\frac{4}{b-1}$

$3 - \frac{4}{a-1} < 3 - \frac{4}{b-1}$

$f(a) < f(b)$.

$f$ est croissante sur $]-\infty ; 1[$.

2) $a < b \leq -2$

$a + 2 < b + 2 \leq 0$

$(a + 2)^2 > (b + 2)^2$

$(a + 2)^2 - 5 > (b + 2)^2 - 5$

$f(a) > f(b)$.

$f$ est décroissante sur $]-\infty ; -2]$.

$a > b \geq -2$

$a + 2 > b + 2 \geq 0$

$(a + 2)^2 > (b + 2)^2$

$(a + 2)^2 - 5 > (b + 2)^2 - 5$

$f(a) > f(b)$.

$f$ est croissante sur $]-2 ; +\infty]$.

**28** 1) D$h$ $= \mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2 \neq 0$.

2) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.

$x^2 + 2 \geq 2$

$\frac{1}{x^2+2} \leq \frac{1}{2}$

$\frac{3}{x^2+2} \leq \frac{3}{2}$

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq \frac{3}{2}$.

Résolvons l'équation $x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{3}{2}$

$\frac{3}{x^2+2} = \frac{3}{2}$

$3x^2 + 6 = 6$

$x^2 = 0$

$x = 0$.

D'où $\frac{3}{2}$ est le maximum de $f$ sur $\mathbb{R}$.

**29** 1) D$g$ $= ]1 ; 8[$.

2) $g$ n'a ni maximum, ni minimum $m$ D$g$.

3) $g$ est croissante sur $]1 ; 3]$ et sur $[5 ; 8[$.
$g$ est décroissante sur $[3 ; 5]$.

4)

| $x$ | $1$ | | $3$ | | $5$ | | $8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $2$ | $\nearrow$ | |

## Exercices d'approfondissement

**30** 1) $\forall x \in [-3\,;+\infty[,\ 2-\dfrac{7}{x+5} = \dfrac{2x+10-7}{x+5}$

$$= \frac{2x+3}{x+5}$$

D'où $\forall x \in [-3\,;+\infty[,\ f(x) = 2-\dfrac{7}{x+5}$.

2) $a > b \geq -3$.

$a+5 > b+5 \geq 2$

$\dfrac{1}{a+5} < \dfrac{1}{b+5}$

$-\dfrac{7}{a+5} > -\dfrac{7}{b+5}$

$2-\dfrac{7}{a+5} > 2-\dfrac{7}{b+5}$

$f(a) > f(b)$.

$f$ est croissante sur $]-3\,;+\infty[$.

3) a) $\forall x \geq -3,\ x+5 \geq 2$

$$0 \leq \frac{1}{x+5} \leq \frac{1}{2}$$

$$0 \geq -\frac{7}{x+5} \geq -\frac{7}{2}$$

$$2 \geq 2-\frac{7}{x+5} \geq -\frac{3}{4}$$

$$-\frac{3}{4} \leq f(x) \leq 2.$$

D'où, $\forall x\ [-3\,;+\infty[,\ f(x) \geq -\dfrac{3}{4}$.

Résolvons l'équation $x \in [-3\,;+\infty[, f(x) = -\dfrac{3}{4}$

$2-\dfrac{7}{x+5} = -\dfrac{3}{4}$

$-\dfrac{7}{x+5} = -\dfrac{11}{4}$.

$-11(x+5) = -28$

$x = \dfrac{28}{11} - 5$

$= -\dfrac{27}{11}$.

$-\dfrac{27}{11} \in [-3\,;+\infty[$.

D'où $-\dfrac{3}{4}$ est le minimum de $f$ sur $[-3\,;+\infty[$.

b) $f$ est majorée par 2 car $\forall x \in [-3\,;+\infty[, f(x) \leq 2$.

c) $f$ est majorée par 2 et minorée par $-\dfrac{3}{4}$. Donc $f$ est bornée.

$\forall x\ [-3\,;+\infty[,\ -\dfrac{3}{4} \leq f(x) \leq 2$.

**31** 1) Développons $9-(x-2)^2$.

$9-(x-2)^2 = 9-(x^2-4x+4)$

$= -x^2+4x+5$.

D'où $f(x) = 9-(x-2)^2$.

2) $f(x) = 9$

$9-(x-2)^2 = 9$

$-(x-2)^2 = 0$

$x = 2$.

$S = \{2\}$.

3) $\forall x \in [-3\,;6],\ (x-2)^2 \geq 0$.

$-(x-2)^2 \leq 0$

$9-(x-2)^2 \leq 9$

$f(x) \leq 9$.

De plus, $f(2) = 9$. Donc 9 est le maximum de $f$ sur $[-3\,;6]$.

**32** $Df = \mathbb{R}$

- $a < b \leq 1$

$a-1 < b-1 \leq 0$

$(a-1)^2 > (b-1)^2$

$(a-1)^2+2 > (b-1)^2+2$

$\sqrt{(a-1)^2+2} > \sqrt{(b-1)^2+2}$

$\dfrac{1}{\sqrt{(a-1)^2+2}} < \dfrac{1}{\sqrt{(a-1)^2+2}}$

$-\dfrac{2}{\sqrt{(a-1)^2+2}} > -\dfrac{2}{\sqrt{(a-1)^2+2}}$

$f(a) > f(b)$.

$f$ est décroissante sur $]-\infty\,;-1]$.

- $a > b \geq 1$

$a-1 > b-1 \geq 0$

$(a-1)^2 > (b-1)^2$

$(a-1)^2+2 > (b-1)^2+2$

$\sqrt{(a-1)^2+2} > \sqrt{(b-1)^2+2}$

$\dfrac{1}{\sqrt{(a-1)^2+2}} < \dfrac{1}{\sqrt{(b-1)^2+2}}$

$\dfrac{-2}{\sqrt{(a-1)^2+2}} > \dfrac{-2}{\sqrt{(b-1)^2+2}}$

$f(a) > f(b)$.

$f$ est croissante sur $[1\,;+\infty[$.

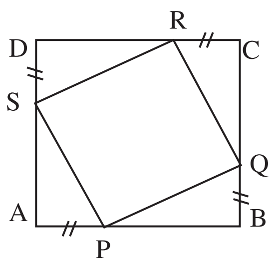
**33** 1) $-3x^2 - 6x + 45 = -3\,[x^2 + 2x - 15]$
$= -3[(x+1)^2 - 1 - 15]$
$= -3[(x+1)^2 - 16]$
$= -3(x+1)^2 + 48$

$\alpha = -1$ ; $\beta = 48$.

2) $a < b \leq -1$
$a + 1 < b + 1 \leq 0$
$(a+1)^2 > (b+1)^2$
$-3(a+1)^2 < -3(b+1)^2$
$-3(a+1)^2 + 48 < -3(b+1)^2 + 48$
$f(a) < f(b)$.
$f$ est croissante sur $]-\infty\,;\,-1]$.

$a > b \geq -1$
$a + 1 > b + 1 \geq 0$
$(a+1)^2 > (b+1)^2$
$-3(a+1)^2 < -3(b+1)^2$
$-3(a+1)^2 + 48 < -3(b+1)^2 + 48$
$f(a) < f(b)$.
$f$ est décroissante sur $[-1\,;\,+\infty[$.

**34**




1) $x \in [0\,;\,4]$

2. a) $\mathcal{A} = \dfrac{h \times b}{2} = \dfrac{AP \times AS}{2}$

$\mathcal{A} = \dfrac{x(4-x)}{2}$

$\mathcal{A} = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x.$

b) L'aire du quadrilatère PQRS $= 4^2 - 4 \times \mathcal{A}$
$= 16 + 2x^2 - 8x$
$= 2x^2 - 8x + 16.$

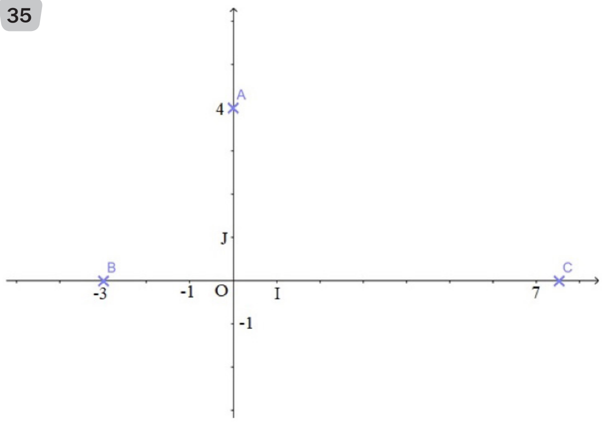
3) $\forall x \in [0\,;\,4]$, $f(x) = 2[x^2 - 4x + 8]$
$= 2[(x-2)^2 - 4 + 8]$
$= 2(x-2)^2 + 8.$

4. a) $\forall x \in [0\,;\,4]$, $(x-2)^2 \geq 0$
$2(x-2)^2 \geq 0$
$2(x-2)^2 + 8 \geq 8$
$\forall x \in [0\,;\,4]$, $f(x) \geq 8$.

b) L'aire est minimale.
Si $f(x) = 8$, donc $x = 2$.
P est situé à 2 de A, c'est à dire P est le milieu de [AB].

c) $f(x) = 10$.
$2(x-2)^2 + 8 = 10$
$(x-2)^2 = 1$
$x - 2 = 1$ ou $x - 2 = -1$
$x = 3$ ou $x = 1$.

**35**




1) $Df = [-3\,;\,7,5]$.

2. a) Tableau de variations de $f$.
$f : [-3\,;\,7,5] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto AM$

$f(x) = \sqrt{x^2 + 4^2}$
$= \sqrt{x^2 + 16}$

$a < b \leq 0$
$a^2 > b^2$
$a^2 + 4 > b^2 + 4$
$f(a) > f(b)$
$f$ est croissante sur $[0\,;\,7,5]$.

Tableau de variation

| $x$ | $-3$ | | $0$ | | $7,5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $5$ | ↘ | $4$ | ↗ | $\dfrac{17}{2}$ |

b) $f(x) = 3$. $S = \emptyset$ car le minimum de $f$ est 4.
$f(x) = 4$. $S = \{0\}$.
$f(x) = 5$ . $\sqrt{x^2 + 16} = 5$
$x^2 = 25 - 16$
$x^2 = 9 \Longrightarrow x = -3$ ou $x = 3$.
$S = \{-3\,;\,3\}$.
$f(x) = 9$ ; $S = \emptyset$ car le maximum de $f$ est 8,5.

3) $f(x) = 4,1$

$x^2 + 16 = 16,81$

$x^2 = 0,81$

$x = -0,9$ ou $x = 0,9$.

$S = \{-0,9 ; 0,9\}$.

$f(x) = 5,8$

$x^2 + 16 = 33,64$

$x^2 = 17,64$

$x = -4,2$ ou $x = 4,2$.

$S = \{4,2\}$ car $-4,2 \notin Df$.

**36** 1. a) $\mathcal{A} = 432$

$xy = 432$

$y = \dfrac{432}{x}$.

b) L'aire totale de la feuille.

$\mathcal{A} = (y + 6)(x + 8)$

$= \left(\dfrac{432}{x} + 6\right)(x + 8)$

$\mathcal{A} = 6x + \dfrac{3456}{x} + 480$

2) $\forall x \in ]0 ; +\infty[$, $f(x) = \mathcal{A}$.

## Situation d'évaluation

**37** 1) Méthode graphique :

$f(5) = 30$.

Au bout de 5 s, la hauteur du ballon est de 30 m.

2) Les antécédents de 40 par $f$ sont : 1,5 et 4,5.

Le ballon atteint 40 m au bout de 1,5 s et de 4,5 s.

3) Le maximum de la fonction est 54. Il est atteint pour $t = 3$.

La hauteur maximale 54 m est atteint au bout de 3 s.

4) Par calcul, $p(t) = -6[t^2 - 6t]$.

$= -6[(t - 3)^2 - 9]$.

$\forall t \in [0 ; 6]$, $(t - 3)^2 \geq 0$

$(t - 3)^2 - 9 \geq -9$

$-6[(t - 3)^2 - 9] \leq 54$

$f(t) \leq 54$.

Résolvons l'équation $f(t) = 54$.

$-6[(t - 3)^2 - 9] = 54$

$(t - 3)^2 - 9 = -9$

$(t - 3)^2 = 0$

$t = 3$.

D'où 54 est le maximum de la trajectoire.

5) Variation de P

$a < b \leq 3$

$a - 3 < b - 3 \leq 0$

$(a - 3)^2 > (b - 3)^2$

$(a - 3)^2 - 9 > (b - 3)^2 - 9$

$-6[(a - 3)^2 - 9] < -6[(b - 3)^2 - 9]$

$P(a) < P(b)$.

P est croissante sur [0 ; 3] ;

$a > b \geq 3$

$a - 3 > b - 3 \geq 0$

$(a - 3)^2 > (b - 3)^2 \geq 0$

$(a - 3)^2 - 9 > (b - 3)^2$ -9

$-6[(a - 3)^2 - 9] < -6[(b - 3)^2 - 9]$

$P(a) < P(b)$.

P est décroissante sur [3 ; 6] ;

| $t$ | 0 | 3 | 6 |
|---|---|---|---|
| $p(t)$ | 0 | ↗ 54 ↘ | 0 |

Leçon 6

# ÉTUDES DE FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

## INSTALLATION DES HABILETÉS

**Activité 1** Fonctions de référence

### 1.1. Fonction affine

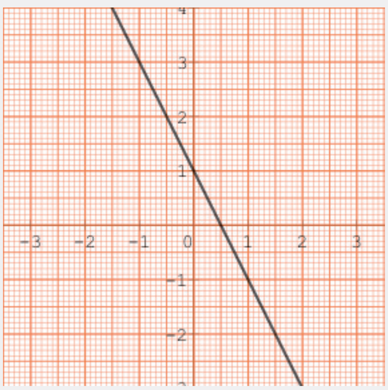
• On suppose $a > 0$.
Soit $x_1$ et $x_2$ deux nombres réels tels que : $x_1 < x_2$.
On a : $ax_1 + b < ax_2 + b$ donc, $f(x_1) < f(x_2)$.
$f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

• On suppose $a < 0$.
Soit $x_1$ et $x_2$ deux nombres réels tels que : $x_1 < x_2$.
On a : $ax_1 + b > ax_2 + b$ donc, $f(x_1) > f(x_2)$.
$f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

#### Exercices de fixation

**1-1-1**
• Coefficient : 0,0012
• Ordonnée à l'origine : 0,5
• 0,0012 > 0 donc $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

**1-1-2**



**1-1-3** a) oui.
• Coefficient : –4
• Sens de variation : décroissant

b) oui.
• Coefficient : $-\frac{1}{2}$
• $g$ est décroissante

c) Non

d) Oui.
• Coefficient : 18
• $u$ est croissante

e) Oui.
• Coefficient : $-\frac{1}{7}$
• $v$ est décroissante

### 1.2. Fonction carré

1) $f$ est une fonction polynôme donc $f$ est définie sur $\mathbb{R}$.

2) Soit $x_1$ et $x_2$ deux nombres réels de $]-\infty ; 0]$ tels que : $x_1 < x_2$.
On a : $(x_1)^2 > (x_2)^2$ donc $f(x_1) > f(x_2)$. $f$ est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$.

3) Soit $x_1$ et $x_2$ deux nombres réels de $[0 ; +\infty[$ tels que : $x_1 < x_2$.
On a : $(x_1)^2 < (x_2)^2$ donc $f(x_1) < f(x_2)$. $f$ est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

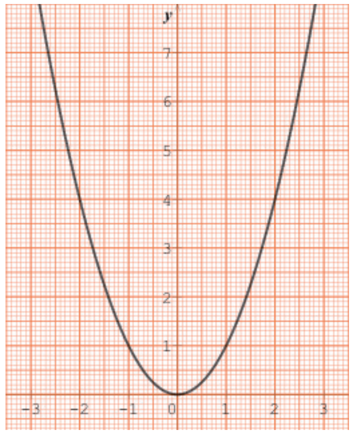
4) Tableau de variation

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ↘ | 0 | ↗ |

5)

| $x$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $-0{,}5$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 16 | 9 | 4 | 1 | 0,25 | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 |

6)



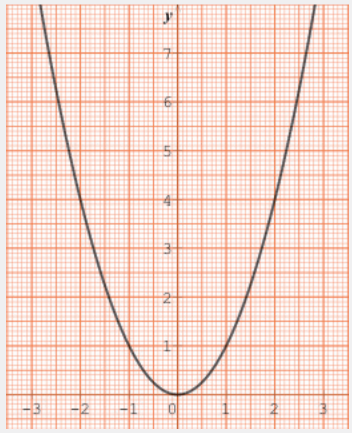
## Exercices de fixation

**1-2-1** La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$.

La fonction carré est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty\ [$.

| $x$ | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x^2$ | ↘ | 0 | ↗ |

**1-2-2**



**1-2-3** $f(-\pi) > f(-3)$.

$f(1) < f(5)$.

$f(0) < f(10)$

## 1.3. Fonction cube

1) $f$ est une fonction polynôme donc $f$ est définie sur $\mathbb{R}$.

2. a) Identité remarquable : $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

b) Soit $x_1$ et $x_2$ deux nombres réels tels que : $x_1 < x_2$.

On a : $x_1 - x_2 < 0$ donc $(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) < 0$.

On en déduit que : $(x_1)^3 < (x_2)^3$.

$f(x_1) < f(x_2)$. Donc $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

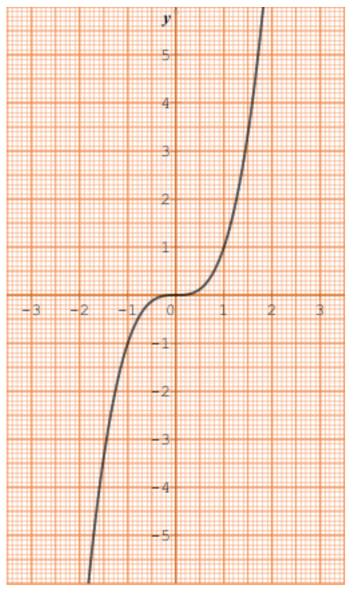
3) Tableau de variation.

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f(x)$ | ↗ | |

4)

| $x$ | $-2$ | $-1{,}5$ | $-1$ | $-0{,}5$ | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-8$ | $-3{,}375$ | $-1$ | $-0{,}125$ | 0 | 0,125 | 1 | 3,375 | 8 |

5)

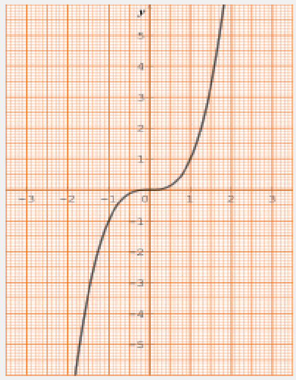


## Exercices de fixation

**1-3-1** La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

| $x$ | $-\infty$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f(x)$ | $\nearrow$ |

**1-3-2**



**1-3-3** a) $f(-\pi) < f(-3)$

b) $f(-10) < f(2)$

c) $f(\sqrt{7}) > f\left(\frac{1}{7}\right)$.

## 1.4. Fonction inverse

1) $f(x)$ existe pour $x \neq 0$. Donc $f$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

2) Soit $x_1$ et $x_2$ deux nombres réels de $]-\infty\,;0[$ tels que : $x_1 < x_2$.

On a : $-x_1 > -x_2$, $\frac{1}{-x_1} < \frac{1}{-x_2}$ , $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$ donc $f(x_1) > f(x_2)$. $f$ est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$.

3) Soit $x_1$ et $x_2$ deux nombres réels de $]0\,;+\infty[$ tels que : $x_1 < x_2$.

On a : $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$ , donc $f(x_1) > f(x_2)$. $f$ est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

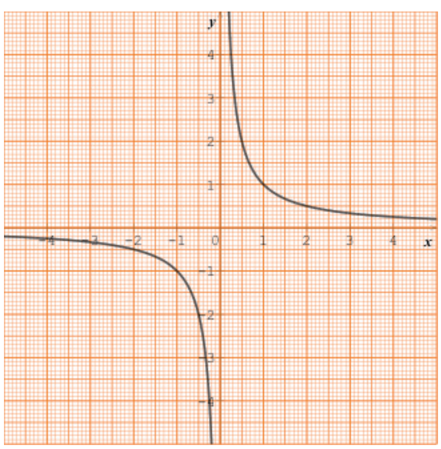
4) Tableau de variation

| $x$ | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\searrow$ | | $\searrow$ |

5)

| $x$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $-0,5$ | 0 | 0,5 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-0,25$ | $-\frac{1}{3}$ | $-0,5$ | $-1$ | $-2$ | | 2 | 1 | 0,5 | $\frac{1}{3}$ | 0,25 |

6) Représentation graphique



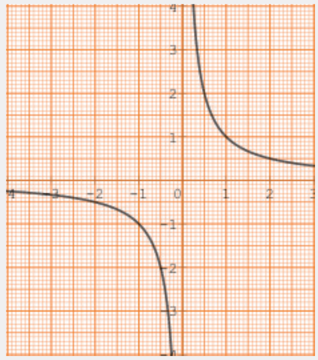
## Exercices de fixation

**1-4-1** Sens de variation :
La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

Tableau de variation.

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{x}$ | $\searrow$ | (interdite) | $\searrow$ |

**1-4-2**



**1-4-3** a) $f(-\pi) > f(-1)$
b) $f(2) > f(4)$
c) $f\left(\frac{1}{2}\right) > f\left(\frac{1}{3}\right)$

### 1.5. Fonction racine carrée

1) $f(x)$ existe si $x \geq 0$. Donc $f$ est définie sur $[0\,;+\infty[$.

2) Soit $x_1$ et $x_2$ deux nombres réels de $[0\,;+\infty[$ tels que : $x_1 < x_2$.
On a : $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$ . Donc $f(x_1) < f(x_2)$.
$f$ est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

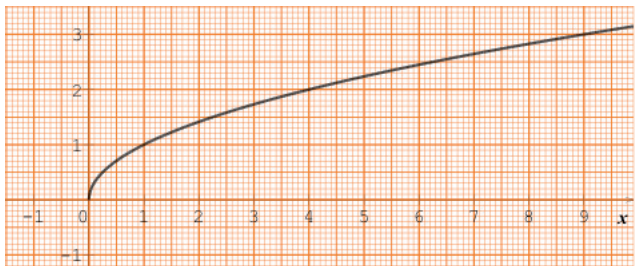
3) Tableau de variation

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $\nearrow$ | |

4)

| $x$ | 0 | 0,5 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | $\sqrt{0,5}$ | 1 | $\sqrt{2}$ | $\sqrt{3}$ | 2 |

5) Représentation graphique



## Exercice de fixation

a) $f(2) < f(5)$
b) $f(11) > f(\sqrt{21})$
c) $f\left(\frac{7}{3}\right) > f\left(\frac{3}{7}\right)$.

### 1.6. Fonction valeur absolue

1) Pour tout $x \in\, ]-\infty\,;0]$, $x \leq 0$ et $|x| = -x$. Donc $f(x) = -x$.
$f$ coincide avec une fonction affine de coefficient $-1$. $f$ est décroissante sur.

2) Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $x \geq 0$ et $|x| = x$. Donc $f(x) = x$.
$f$ coincide avec une fonction affine de coefficient 1. $f$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

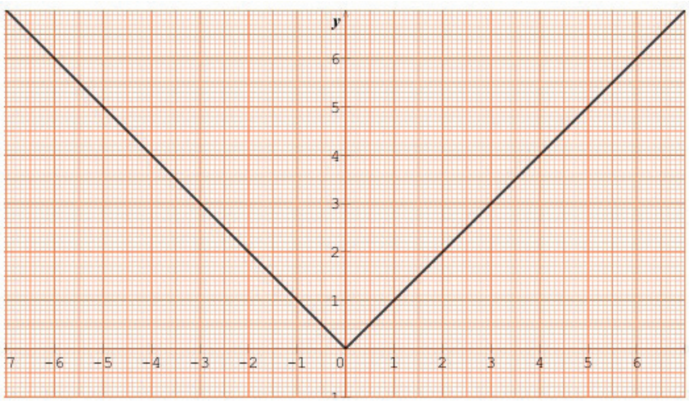
3) Tableau de variation

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ |

4)

| $x$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $-0{,}5$ | $0$ | $0{,}5$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $4$ | $3$ | $2$ | $1$ | $0{,}5$ | $0$ | $0{,}5$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ |

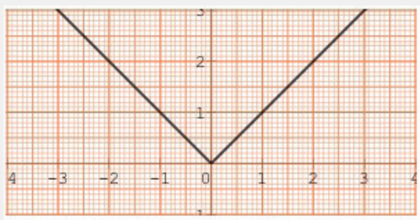
5) Représentation graphique




## Exercices de fixation

**1-6-1** La fonction valeur absolue est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

**1-6-2**




**1-6-3** a) $f(-1) < f(-3)$

b) $f(2) < f(3)$

c) $f(0) < f(4)$.

## Activité 2 Fonctions affines par intervalles

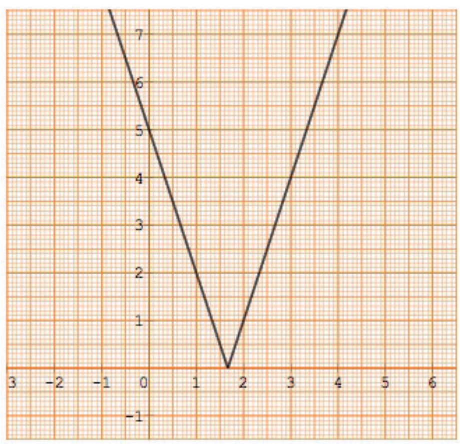
### 2.1. Définition

1) $3x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{3}$.

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{5}{3}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $3x - 5$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $\lvert 3x - 5\rvert$ | $-3x + 5$ | $0$ | $3x - 5$ |

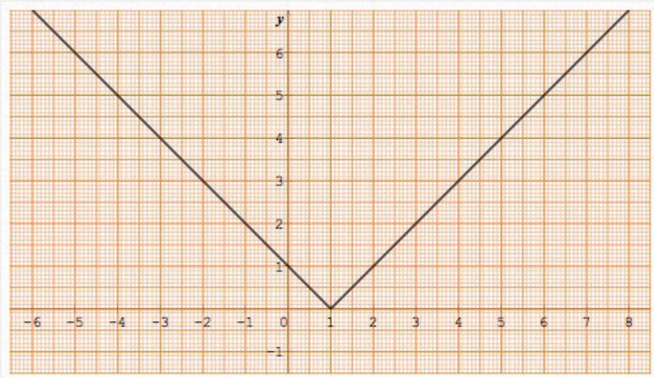
- Pour tout $x \in \left]-\infty\ ;\ \dfrac{5}{3}\right]$, $f(x) = -3x + 5$.
- Pour tout $x \in \left[\dfrac{5}{3}\ ;\ -\infty\right[$, $f(x) = 3x - 5$.

2) Représentation graphique

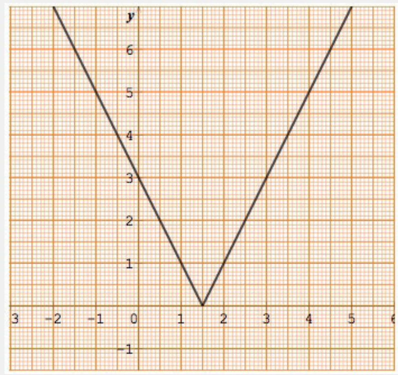


## Exercices de fixation

**2-1-1**



**2-1-2**

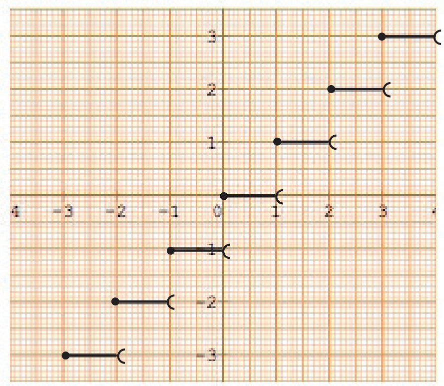


### 2.2. Fonction partie entière

1)

- Pour tout $x \in [-4\ ;-3[$, $E(x) = -4$.
- Pour tout $x \in [-3\ ;-2[$, $E(x) = -3$
- Pour tout $x \in [-2\ ;-1[$, $E(x) = -2$
- Pour tout $x \in [-1\ ;0[$, $E(x) = -1$
- Pour tout $x \in [0\ ;1[$, $E(x) = 0$
- Pour tout $x \in [1\ ;2[$, $E(x) = 1$
- Pour tout $x \in [2\ ;3[$, $E(x) = 2$
- Pour tout $x \in [3\ ;4[$, $E(x) = 3$

2)

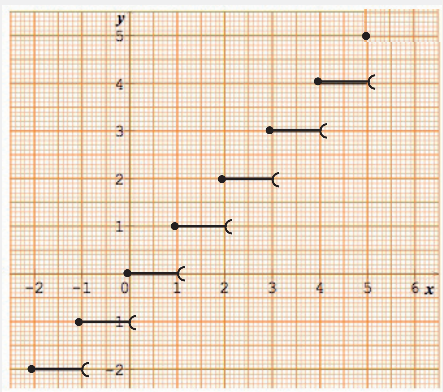


## Exercices de fixation

**2-2-1**

- $f(-2{,}3) = -3$
- $f(0) = 0$
- $f(-0{,}25) = -1$
- $f(0{,}35) = 0$

**2-2-2**



## Activité 3 Fonctions du type : $x \mapsto ax^2$ $(a \in \mathbb{R})$

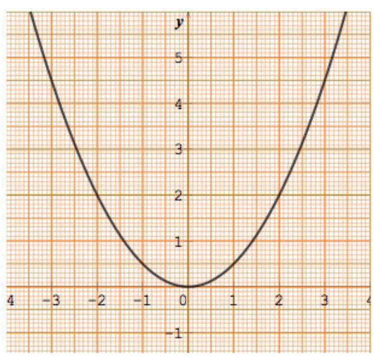
1. a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$. Comme $x \longmapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty\ ;0]$, $f$ l'est aussi.

b) De même, comme $x \longmapsto x^2$ est croissante sur $[0\ ;+\infty[$, $f$ l'est aussi.

c)

| $x$ | $-6$ | $-4$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $4$ | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 18 | 8 | 2 | 0 | 2 | 8 | 18 |

d)



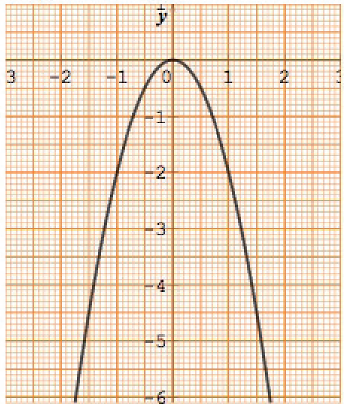
2. a) $g(x) = -2x^2$. Comme $x \longmapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty ; 0]$, $g$ est croissante sur $]-\infty , 0]$.

b) De même, comme $x \longmapsto x^2$ est croissante sur $[0 ; +\infty[$, $g$ est décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

c)

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-18$ | $-8$ | $-2$ | $0$ | $-2$ | $-8$ | $-18$ |

d)

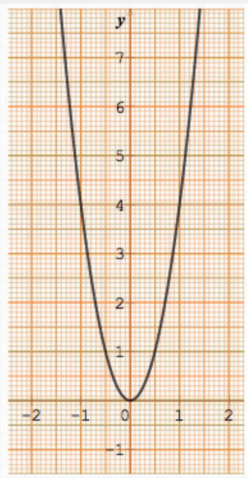


## Exercices de fixation

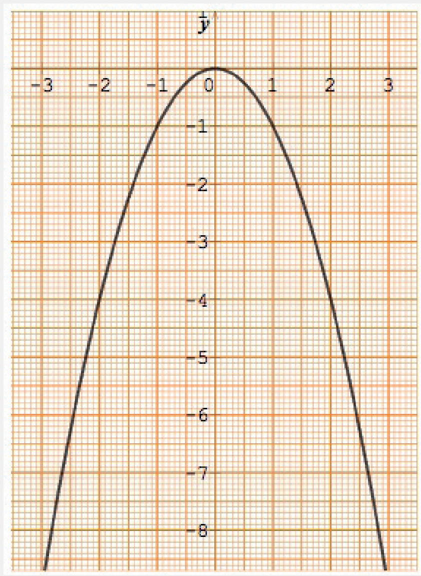
**3-1**

- a) $f(-2) < f(-4)$
- b) $f(0) < f(1)$
- c) $f\left(\frac{1}{2}\right) > f\left(\frac{1}{3}\right)$

**3-2**



**3-3**



## Activité 4 Fonctions du type : $x \mapsto \frac{a}{x}$ $(a \in \mathbb{R})$

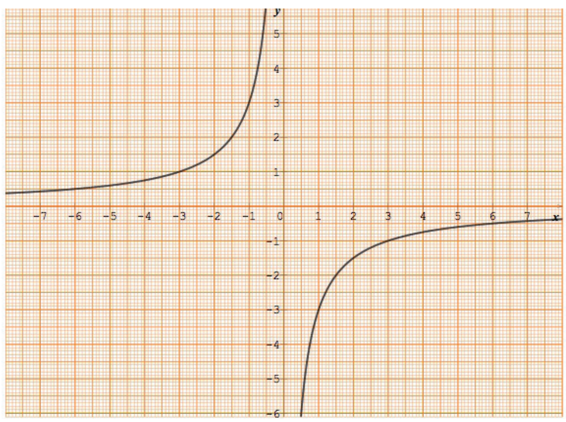
1. a) La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$, donc $f$ est croissante sur $]-\infty , 0[$.

b) La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$, donc $f$ est croissante sur $]0 ; +\infty[$.

c)

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $1$ | $1,5$ | $3$ | | $-3$ | $-1,5$ | $-1$ |

d) Représentation graphique



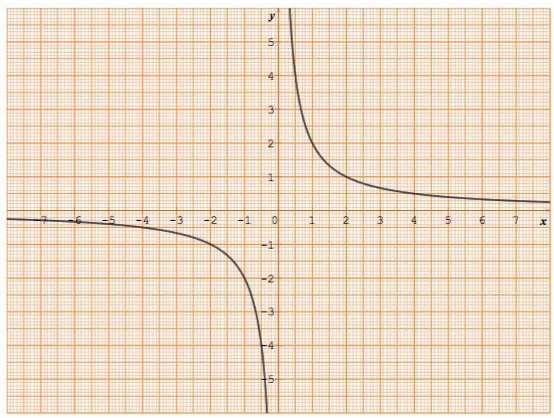
2. a) La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$, donc $g$ est décroissante sur $]-\infty\,,\,0[$.

b) La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$, donc $g$ est décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

c)

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-\frac{2}{3}$ | $-1$ | $-2$ | | $2$ | $1$ | $\frac{2}{3}$ |

d) Représentation graphique




## Exercices de fixation

**4-1** $h(x) = \frac{-1}{x}$ ; $a = -1$ et $a < 0$. $h$ est croissante sur $]-\infty\,;\,0[$, et sur $]0\,;\,+\infty[$.

**4-2** $f(x) = \frac{3}{x}$ ; $a = 3$ et $a > 0$. $f$ est décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$, et sur $]0\,;\,+\infty[$.

**4-3** $g(x) = -\frac{2}{x}$

a) $a = -2$ et $a < 0$. $g$ est croissante sur $]-\infty\,;\,0[$, et sur $]0\,;\,+\infty[$.

$-3 > -2$ donc $g(-3) < g(-2)$.

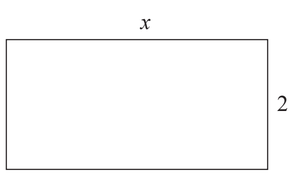
b) $0 < 4$ donc $g(0) < g(4)$.

c) $-\frac{2}{5} < -\frac{1}{3}$ donc $g(-\frac{2}{5}) < g(-\frac{1}{3})$.

# Exercices

## Exercices de renforcement

**1** 1. a)




$f(x)$ : le périmètre du rectangle.

$\forall \in \mathbb{R}_+^*$ $f(x) = 2(x + 2)$

$f(x) = 2x + 4$.

b) $f$ est une fonction affine car $f(x)$ est de la forme $ax + b$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

2. a) $g$ est l'aire de ce rectangle.

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = 2x$.

b) $g$ est une fonction affine car $g(x)$ est de la forme $ax + b$ avec $a = 2$ *et* $b = 0$.

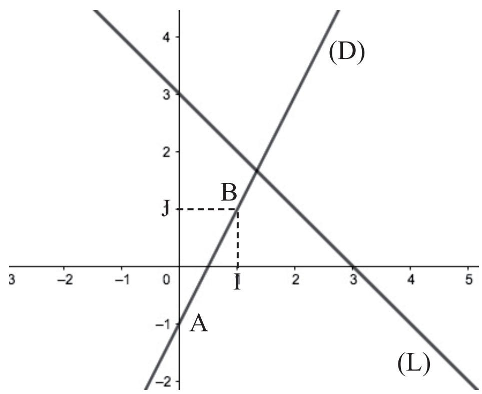
**2** Soit $f(x)$ le périmètre du carré et $g(x)$ son aire.

$\forall\, x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = 4x$ et $g(x) = x^2$

$f(x)$ est l'expression d'une fonction affine car de la forme $ax + b$ avec $a = 4$ *et* $b = 0$.

**3** (D) la courbe de $f$

(L) la courbe de $g$



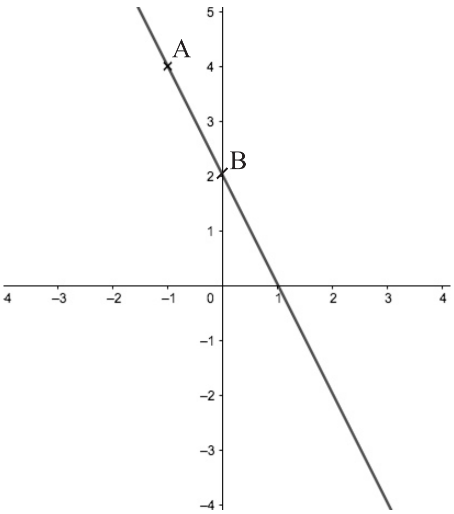
(D) : $y = 2x - 1$

| | A | B |
|---|---|---|
| $x$ | 0 | 1 |
| $y$ | –1 | 1 |

(L) : $y = -x + 3$

| | C | D |
|---|---|---|
| $x$ | 3 | 0 |
| $y$ | 0 | 3 |

**4** 1)




2) $A \in (AB)$ ; $y_A = ax_A + b$

$B \in (AB)$ ; $y_B = ax_B + b$

$$\begin{cases} -a + b = 4 \\ 0 + b = 2 \end{cases}$$

d'où $b = 2$ et $a = -2$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 2$

**5** Soit $f$ cette fonction affine.

On a $f(x) = ax + b$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

$A \in (AB) \Rightarrow 5 = -3a + b$

$B \in (AB) \Rightarrow -15 = 2a + b$

D'où $a = -4$ et $b = -3$

Donc $f$ est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

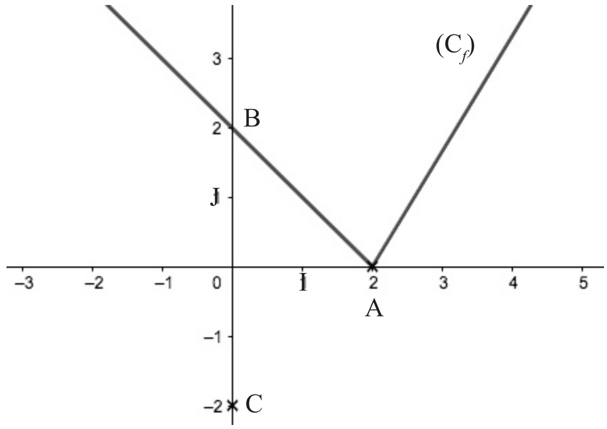
$f(x) = -4x - 3$.

**6** (D) : $y = 2 - x$

| | A | B |
|---|---|---|
| $x$ | 2 | 0 |
| $y$ | 0 | 2 |

(L) : $y = x - 2$

| | C | A |
|---|---|---|
| $x$ | 0 | 2 |
| $y$ | –2 | 0 |

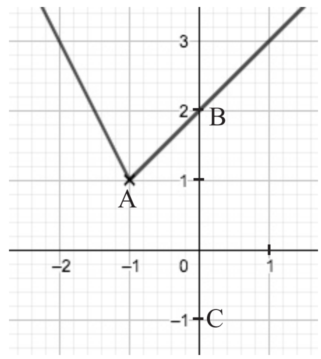



**7** $y = x + 2$

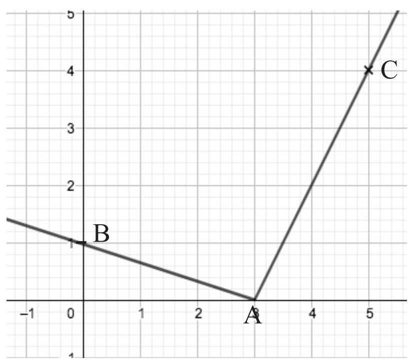
| | A | B |
|---|---|---|
| $x$ | –1 | 0 |
| $y$ | 1 | 2 |

$y = -2x - 1$

| | A | C |
|---|---|---|
| $x$ | –1 | 0 |
| $y$ | 1 | –1 |




**8**




$y = -\dfrac{1}{3}x + 1$

| | A | B |
|---|---|---|
| $x$ | 3 | 0 |
| $y$ | 0 | 1 |

$y = 2x - 6$

| | A | B |
|---|---|---|
| $x$ | 3 | 5 |
| $y$ | 0 | 4 |

**9** Le prix payé par un client.

$$250000\text{ F} - \left(250\,000 \times \frac{15}{100}\right) - \left(250\,000 \times \frac{5}{100}\right)$$

$= 200\,000$ F.

**10** * 1$^{\text{ère}}$ ligne

- Coefficient : $\dfrac{56000}{80000} = 0,7$
- Variation : baisse de 30 %

* 2$^{\text{ème}}$ ligne

- Coefficient : $\dfrac{30000}{24000} = 1,25$
- Variation : hausse de 25 %

* 3$^{\text{ème}}$ ligne

- Coefficient : $\dfrac{22500}{45000} = 0,5$
- Variation : baisse de 50 %

* 4$^{\text{ème}}$ ligne

- Coefficient : $\dfrac{38000}{19000} = 2$
- Variation : hausse de 100 %

**11** $g(x) = x^2$ et $h(x) = x \times x. = x^2$
Donc $g$ est la fonction carré ainsi que $h$.

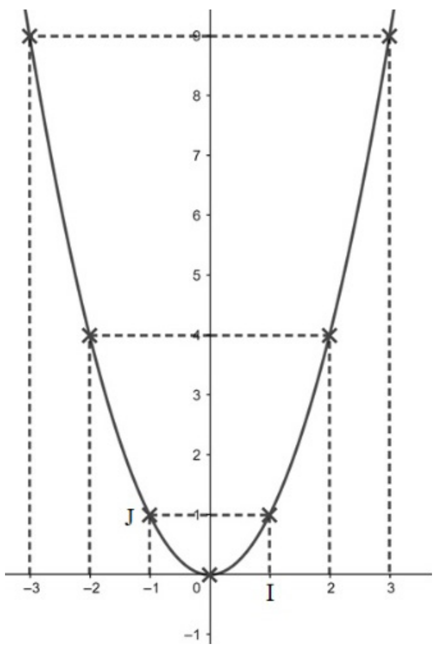
**12** $f(x) = x^2 + x - x = x^2$. $f$ est la fonction carré.
$g(x) = x^2 + 5x^2 - 3x^2 = x^2$. $g$ est la fonction carré.
$h(x) = x^2 - 2x + 1 + 2x - 1 = x^2$. $h$ est la fonction carré.

**13** 1)

| $x$ | –3 | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 |

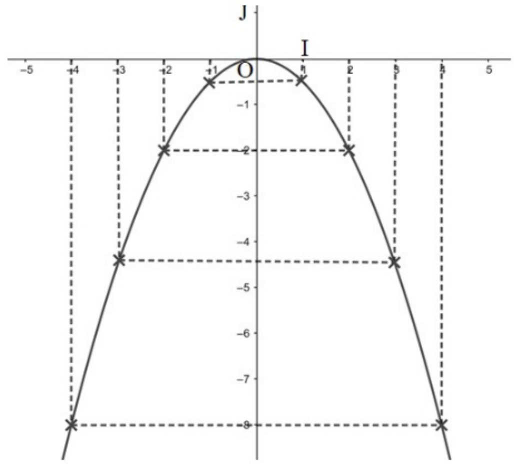
2. a) $f(-3) = 9$ alors $A(-3 ; 9) \in (Cf)$

b)



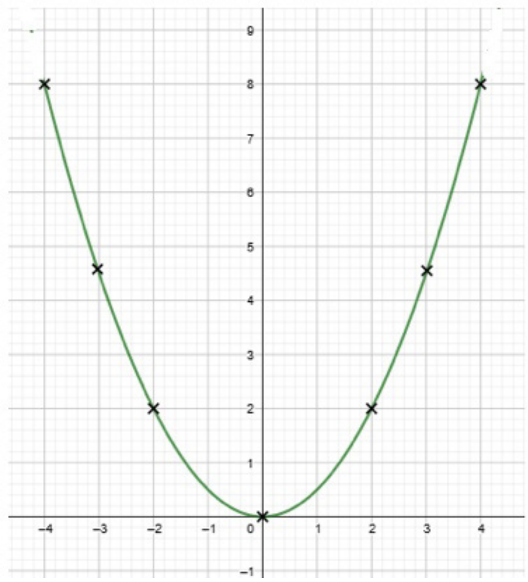

**14**

| $x$ | –4 | –3 | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | +8 | –4,5 | –2 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | –2 | –4,5 | –8 |




**15**

| $x$ | – 4 | – 3 | – 2 | – 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 8 | 4,5 | 2 | 0,5 | 0 | 0,5 | 2 | 4,5 | 8 |



**16** $g(x) = \dfrac{1}{x}$ et

$h(x) = \dfrac{2x+1}{x} - 2 = 2 + \dfrac{1}{x} - 2 = \dfrac{1}{x}$

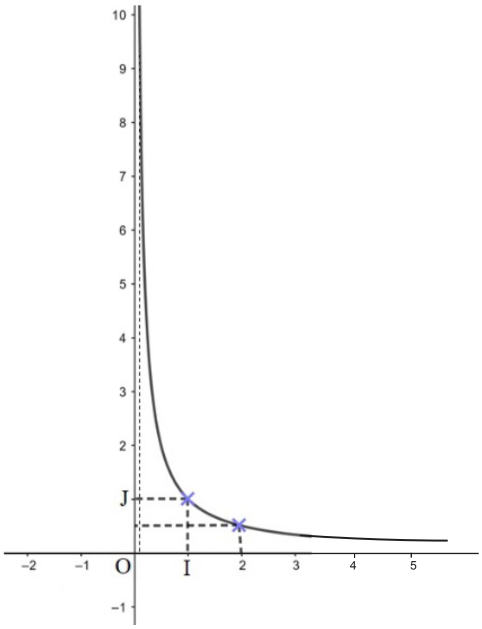
Donc $g$ est est la fonction inverse ainsi que $h$.

**17** 1)

| $x$ | 0,1 | 0,2 | 0,5 | 1 | 2 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 10 | 0,5 | 0,2 | 1 | 0,5 | 0,25 | 0,2 |

2. a) $f(0,1) = 10$ d'ou $A(0,1 ; 10) \in (Cf)$

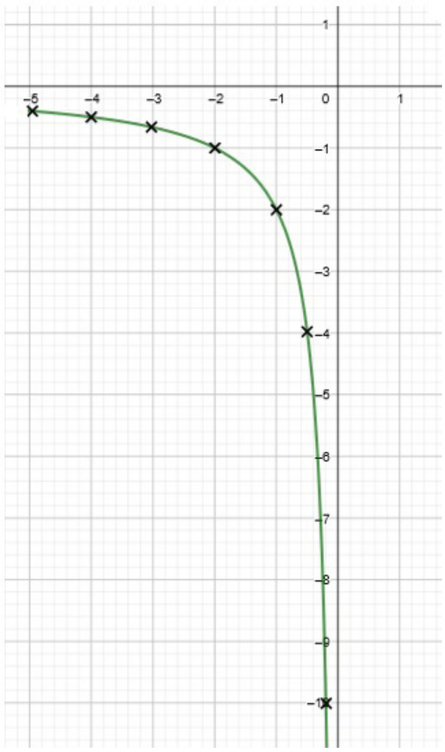
b)




**18** 1)

| $x$ | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 0,5 | 0,8 | 1 | 2 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 20 | 10 | 5 | 4 | 2,5 | 2 | 1 | 0,5 | 0,4 |

2. a)



2. b) Voir figure

**19** 1) Tableau de variation

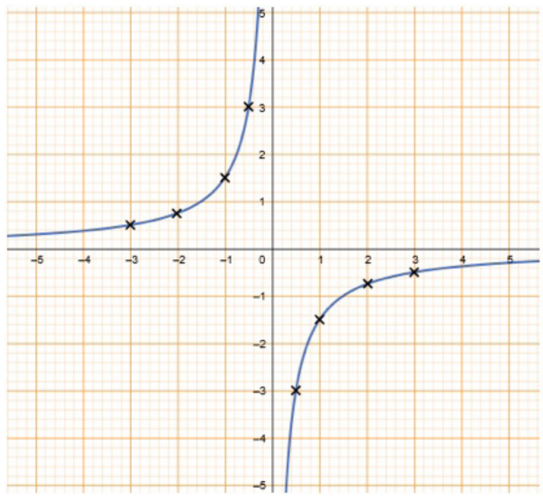
$f(x)$ est de la forme $\frac{a}{x}$ avec $a = -\frac{3}{2}$. d'où le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ↗ | | ↗ |

2)

| $x$ | –3 | –2 | –1 | –0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0,5 | 0,75 | 1,5 | 3 | | –3 | –1,5 | –0,75 | –0,5 |

3)



**20** $x^2 + x - 2 = 0$

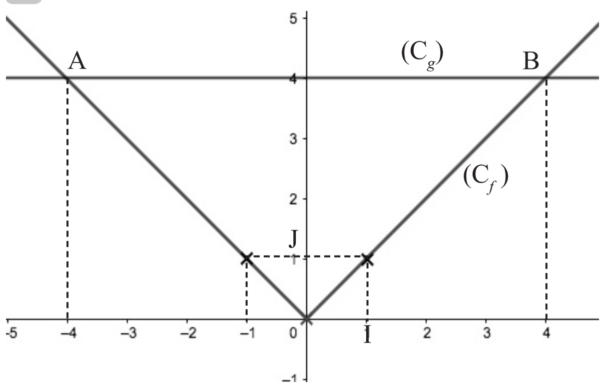
$-x^2 = x - 2.$

Déterminons graphiquement $(Cf) \cap (Cg)$.

$(Cf)$ et $(Cg)$ se coupent en A et B.

A(–2 ; –4) et B(1 ; –1), d'où S ={–2 ; –1}.

**21** 1)




2) Graphiquement $(Cf)$ et $(Cg)$ se coupent en A(–4 ; 4) et B(4 ; 4).

S = {–4 ; 4}.

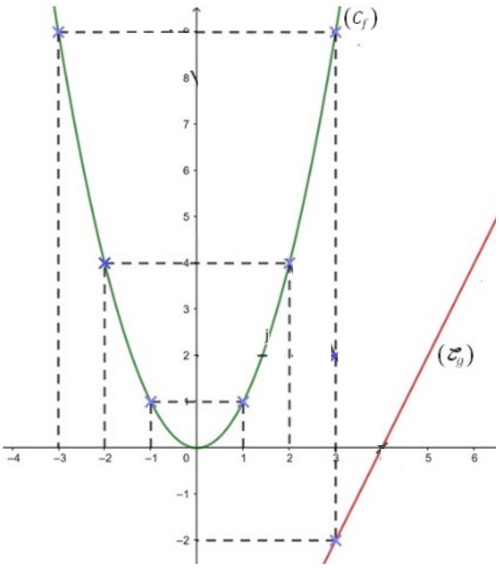
**22** 1) (D) : $y = 2x - 8$

| | A | B |
|---|---|---|
| $x$ | 4 | 3 |
| $y$ | 0 | $-2$ |

2) $x^2 - 2x + 8 = 0 \iff x^2 = 2x - 8$

$\iff f(x) = g(x)$

($C_f$) et ($C_g$) n'ont pas de point d'intersection, donc l'équation $x^2 - 2x + 8 = 0$ n'a pas de solution.




**23** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

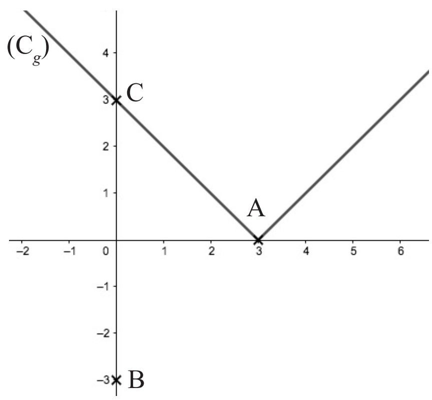
$x \longmapsto |x - 3|.$

$f(x) = x - 3$ si $x \geq 3$ (L) : $y = x - 3$

$f(x) = -x + 3$ si $x \leq 3$ (D) : $y = -x + 3$.

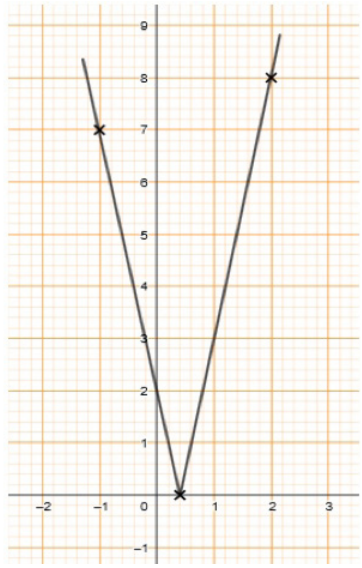
| | A | B |
|---|---|---|
| $x$ | 3 | 0 |
| $y$ | 0 | $-3$ |

| | C | A |
|---|---|---|
| $x$ | 0 | 3 |
| $y$ | 3 | 0 |



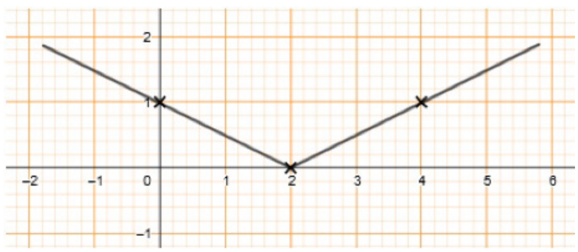

**24** $f(x) = 2 - 5x$ si $x \leq \frac{2}{5}$ et $f(x) = 5x - 2$ si $x \geq \frac{2}{5}$

| $x$ | $-1$ | $\frac{2}{5}$ | 2 |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 7 | 0 | 8 |



**25** $f(x) = 1 - \frac{x}{2}$ si $x \leq 2$ et $f(x) = \frac{x}{2} - 1$ si $x \geq 2$

| $x$ | 0 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 0 | 1 |

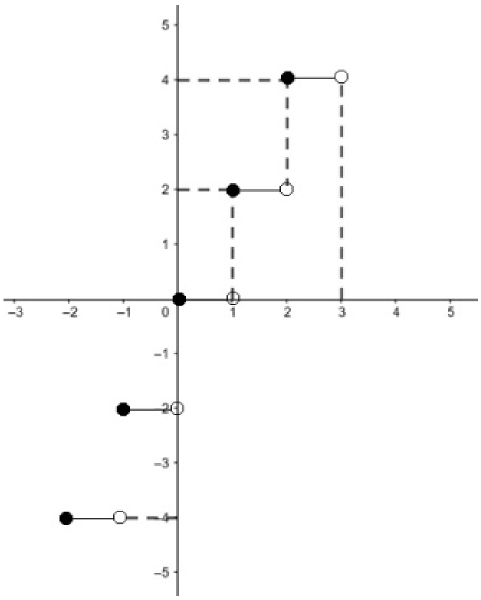


**26** $\forall x \in [-2 ; -1[$, $E(x) = -2$, donc $f(x) = -4$

$\forall x \in [-1 ; 0[$, $E(x) = -1$, donc $f(x) = -2$

$\forall x \in [0 ; 1[$, $E(x) = 0$, donc $f(x) = 0$

$\forall x \in [1 ; 2[$, $E(x) = 1$, donc $f(x) = 2$



**27** $\forall x \in [-4\ ;-3[$, $E(x) = -4$, donc $f(x) = -1$

$\forall x \in [-3\ ;-2[$, $E(x) = -3$, donc $f(x) = -\dfrac{3}{4}$

$\forall x \in [-2\ ;-1[$, $E(x) = -2$, donc $f(x) = -\dfrac{1}{2}$

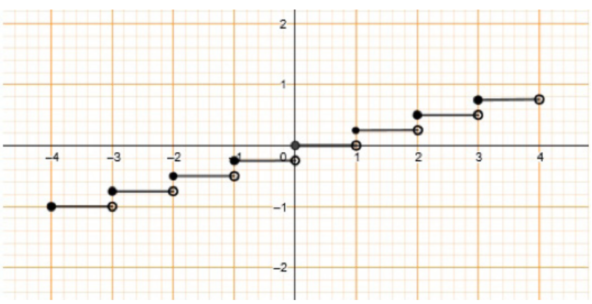
$\forall x \in [-1\ ;0[$, $E(x) = -1$, donc $f(x) = -\dfrac{1}{4}$

$\forall x \in [0\ ;1[$, $E(x) = 0$, donc $f(x) = 0$

$\forall x \in [1\ ;2[$, $E(x) = 1$, donc $f(x) = \dfrac{1}{4}$

$\forall x \in [2\ ;3[$, $E(x) = 2$, donc $f(x) = \dfrac{1}{2}$

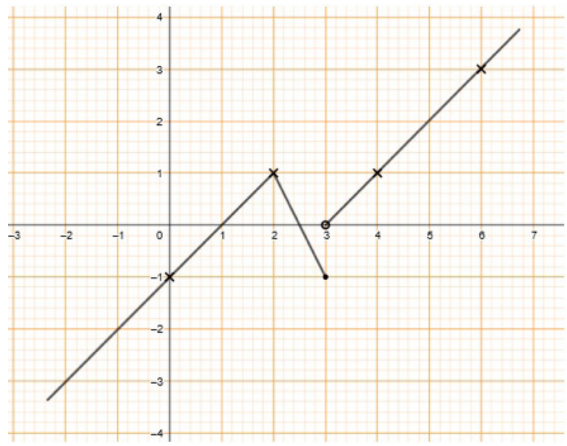
$\forall x \in [3\ ;4[$, $E(x) = 3$, donc $f(x) = \dfrac{3}{4}$



## Exercices d'approfondissement

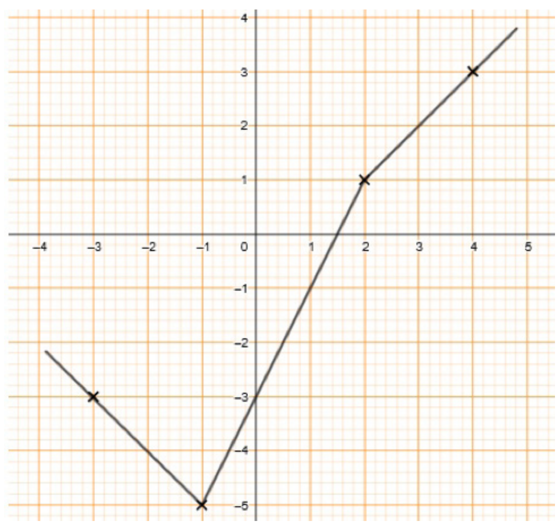
**28**

| $x$ | 0 | 2 | 3 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | −1 | 1 | −1 | 1 | 3 |

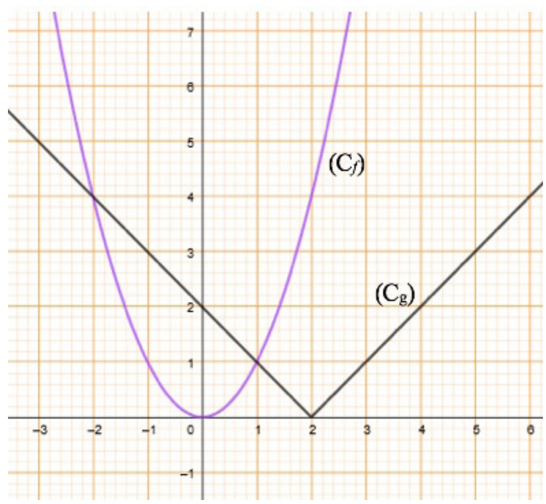


**29**

| $x$ | −3 | −1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | −3 | −5 | 1 | 3 |



**30** 1)



2) $x^2 - |x - 2| = 0 \Leftrightarrow x^2 - |x - 2|$

$\Leftrightarrow f(x) = g(x)$

Comme (C$f$) et (C$g$) se coupent en deux points d'abscisses –2 et 1, on conclut que l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 - |x - 2| = 0$ est $\{-2 ; 1\}$

**31** Si $(x + 2) \in [-2 ; -1[$, c.-à-d. $-4 \leq x < -3$, alors
$E(x + 2) = -2$ ; donc $f(x) = -2$

Si $(x + 2) \in [-1 ; 0[$, c.-à-d. $-3 \leq x < -2$, alors
$E(x + 2) = -1$ ; donc $f(x) = -1$

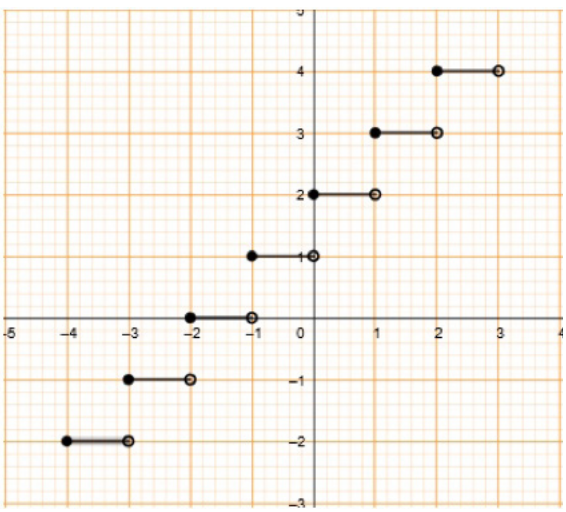
Si $(x + 2) \in [0 ; 1[$, c.-à-d. $-2 \leq x < -1$, alors
$E(x + 2) = 0$ ; donc $f(x) = 0$

Si $(x + 2) \in [1 ; 2[$, c.-à-d. $-1 \leq x < 0$, alors
$E(x + 2) = 1$ ; donc $f(x) = 1$

Si $(x + 2) \in [2 ; 3[$, c.-à-d. $0 \leq x < 1$, alors
$E(x + 2) = 2$ ; donc $f(x) = 2$

Si $(x + 2) \in [3 ; 4[$, c.-à-d. $1 \leq x < 2$, alors
$E(x + 2) = 3$ ; donc $f(x) = 3$

Si $(x + 2) \in [4 ; 5[$, c.-à-d. $2 \leq x < 3$, alors
$E(x + 2) = 4$ ; donc $f(x) = 4$



**32** $\forall x \in [-4 ; -3[$, $E(x) = -4$, donc $f(x) = -2$

$\forall x \in [-3 ; -2[$, $E(x) = -3$, donc $f(x) = -1$

$\forall x \in [-2 ; -1[$, $E(x) = -2$, donc $f(x) = 0$

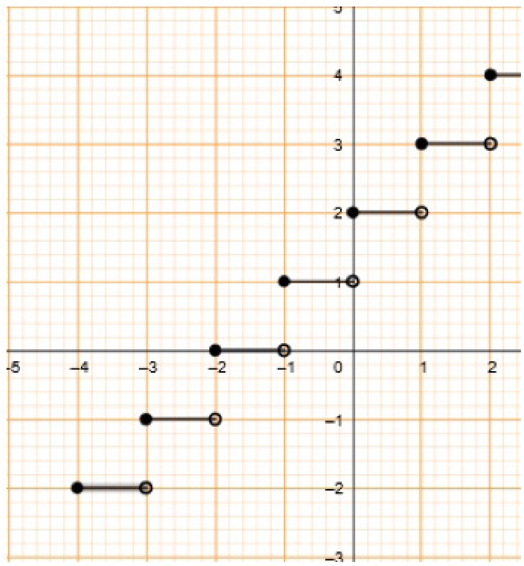
$\forall x \in [-1 ; 0[$, $E(x) = -1$, donc $f(x) = 2$

$\forall x \in [0 ; 1[$, $E(x) = 0$, donc $f(x) = 2$

$\forall x \in [1 ; 2[$, $E(x) = 1$, donc $f(x) = 3$

$\forall x \in [2 ; 3[$, $E(x) = 2$, donc $f(x) = 4$

$\forall x \in [3 ; 4[$, $E(x) = 3$, donc $f(x) = 5$



**33** Si $(2x) \in [-4 ; -3[$, c.-à-d. $-2 \leq x < -\frac{3}{2}$, alors
$E(2x) = -4$ ; donc $f(x) = -4$

Si $(x + 2) \in [-3 ; -2[$, c.-à-d. $-\frac{3}{2} \leq x < -1$, alors
$E(2x) = -3$ ; donc $f(x) = -3$

Si $(2x) \in [-2 ; -1[$, c.-à-d. $-1 \leq x < -\frac{1}{2}$, alors
$E(2x) = -2$ ; donc $f(x) = -2$

Si $(x + 2) \in [-1 ; 0[$, c.-à-d. $-\frac{1}{2} \leq x < 0$, alors
$E(2x) = -1$ ; donc $f(x) = -1$

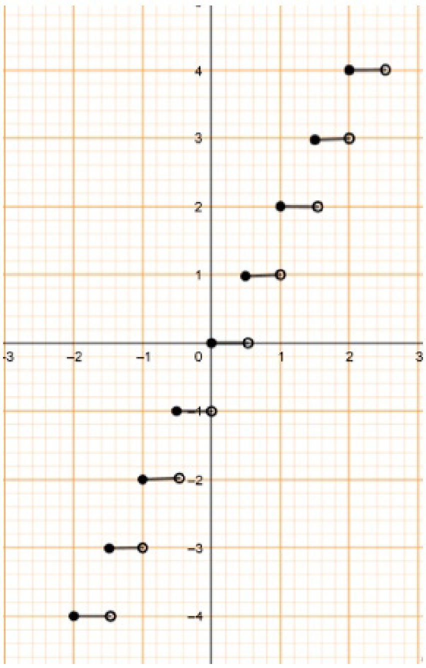
Si $(2x) \in [0 ; 1[$, c.-à-d. $0 \leq x < \frac{1}{2}$, alors
$E(2x) = 0$ ; donc $f(x) = 0$

Si $(2x) \in [1 ; 2[$, c.-à-d. $\frac{1}{2} \leq x < 1$, alors
$E(2x) = 1$ ; donc $f(x) = 1$

Si $(2x) \in [2 ; 3[$, c.-à-d. $1 \leq x < \frac{3}{2}$, alors
$E(2x) = 2$ ; donc $f(x) = 2$

Si $(2x) \in [3 ; 4[$, c.-à-d. $\frac{3}{2} \leq x < 2$, alors
$E(2x) = 3$ ; donc $f(x) = 3$

Si $(2x) \in [4 ; 5[$, c.-à-d. $2 \leq x < \frac{5}{2}$, alors
$E(2x) = 4$ ; donc $f(x) = 4$



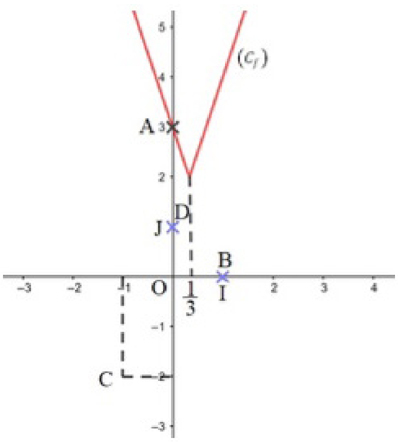
**34**

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{1}{3}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\|3x-1\|$ | $-3x+1$ | 0 | $3x-1$ |
| $f(x)$ | $-3x+3$ | | $3x+1$ |

(L) : $y = -3x + 3$ (D) : $y = 3x + 1$

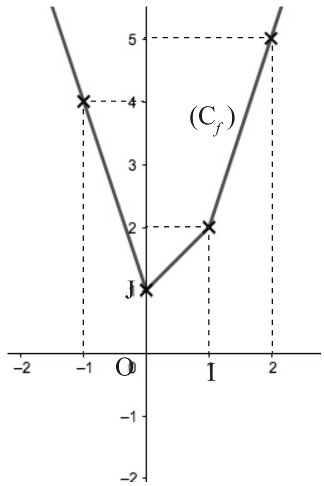
| | A | B |
|---|---|---|
| $x$ | 0 | 1 |
| $y$ | 3 | 0 |

| | C | D |
|---|---|---|
| $x$ | $-1$ | 0 |
| $y$ | $-2$ | 1 |




**35**

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $\|x-1\|$ | | $-x+1$ | | $-x+1$ | 0 | $x-1$ | |
| $2x$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $\|2x\|$ | | $-2x$ | 0 | $2x$ | | $2x$ | |
| $f(x)$ | | $-3x+1$ | | $x+1$ | | $3x-1$ | |




**36** 1) a- Vrai ; b- Faux ; c- Faux ; d- Faux ; e- Faux ; f-Vrai.

2. a) $\frac{1}{x} < x^2$ ; si $x \in ]-\infty ; 0[ \cup ]1 ; +\infty[$

b) $x \leq x^2$ ; si $x \in ]-\infty ; 0] \cup [1 ; +\infty[$

c) $x > 1$ ; alors on a : $\frac{1}{x} < \sqrt{x} < x < x^2$

d) $0 < x < 1$, alors $x^2 < x < \sqrt{x} < \frac{1}{x}$.

## Situation d'évaluation

**37**

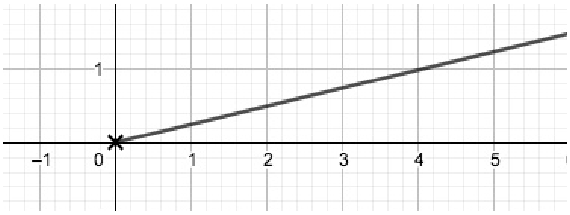
**38** Pour une bouteille, il faut 0,8 × 5 kg = 4 kg de pétales de rose.

D'où

| Nombre de bouteilles | Quantité de pétales |
|---|---|
| 1 | 4 |
| $y$ | $x$ |

$\frac{y}{1} = \frac{x}{4}$

$y = \frac{1}{4}x$




**39** 1) $x \in [0\ ;\ 100]$, $B(x) = 81000\,x - x^3$

$= (90)^2x - x^3$

$= (90^2 - x^2)x$

$= (90 - x)(90 + x)x$.

| $x$ | 0 | | 90 | | 100 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | + | \| | + | |
| $90 - x$ | | + | 0 | – | |
| $90 + x$ | | + | \| | + | |
| $B(x)$ | | + | 0 | – | |

2) $B(x) < 0$ pour $x > 90$ kg.

$B(x) > 0$ pour $x < 90$ kg.

La mine dégage des bénéfices lorsque la production est inférieur à 90 kg et fait des pertes lorsque la production est entre 90 kg et 100 kg.
L'affirmation de l'élève est fausse.

Leçon 7

# POLYNÔME ET FRACTIONS FRACTIONNELLES

## INSTALLATION DES HABILETÉS

### Activité 1 Effectif cumulé décroissant - Fréquence cumulée décroissante

#### 1.1. Définitions

1. Le nombre de ruches qui ont une production supérieure ou égale à 23 kg est :
$5 + 3 + 2 + 3 + 1 + 5$, soit 19.

2. Le nombre de ruches qui ont une production supérieure ou égale à 25 kg est :
$2 + 3 + 1 + 5$, soit 11.

3. La fréquence en pourcentage de ruches qui ont une production supérieure ou égale à 25 kg est $\frac{11}{22} \times 100$, soit 50 %.

**Exercices de fixation**

**1-1-1** 1) L'effectif cumulé décroissant de 3 est :
$2 + 9 + 32 + 41$, soit 84.

2. L'effectif cumulé décroissant de 6 est 2.

**1-1-2** 1) L'effectif cumulé décroissant de la classe [6 ; 10[ est : $4 + 6$, soit 10.

2) L'effectif cumulé décroissant de la classe [0 ; 2[ est : $4 + 6 + 5 + 7 + 3$, soit 25.

**1-1-3** 1) La fréquence cumulée décroissant de 4 est :
$\frac{32+9+2}{200} = \frac{43}{200} = 0,215$.
La fréquence cumulée décroissante de 6 est :
$\frac{2}{200} = 0{,}01$.

2) La fréquence cumulée décroissante de la classe [4 ; 6[ est : $\frac{5+6+4}{25} = \frac{15}{25} = 0,6$.
La fréquence cumulée décroissante de la classe [0 ; 2[ est : $\frac{25}{25} = 1$.

#### 1.2. Tableau des effectifs cumulés décroissants - Tableau des fréquences cumulées décroissantes

1.

| Tailles (en cm) | 155 | 160 | 162 | 165 | 168 | 170 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 18 | 9 | 9 | 27 | 18 | 9 |
| Effectifs cumulés décroissants | 90 | 72 | 63 | 54 | 27 | 9 |

2.

| Tailles (en cm) | 155 | 160 | 162 | 165 | 168 | 170 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Fréquences | 0,2 | 0,1 | 0,1 | 0,3 | 0,2 | 0,1 |
| Fréquences cumulées décroissantes | 1 | 0,8 | 0,7 | 0,6 | 0,3 | 0,1 |

**Exercices de fixation**

**1-2-1**

| Modalités | $-15$ | $-7$ | 0 | 3 | 8 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 10 | 15 | 29 | 18 | 9 | 7 |
| Effectifs cumulés décroissants | 88 | 78 | 63 | 34 | 16 | 7 |

**1-2-2**

| Modalités | [0;5[ | [5;10[ | [10;15[ | [15;20[ |
|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 3 | 7 | 5 | 6 |
| Effectifs cumulés décroissants | 21 | 18 | 11 | 6 |

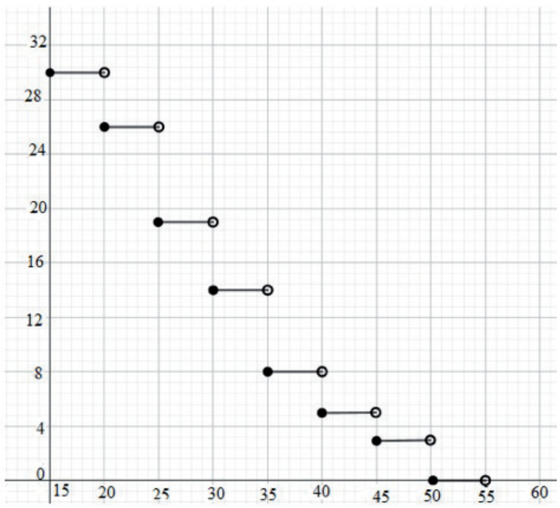
1-2-3

| Modalités | [0,5 ; 1[ | [1 ; 1,5[ | [1,5 ; 2[ | [2 ; 2,5[ | [2,5 ; 3[ | [3 ; 3,5[ | [3,5 ; 4[ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 7 | 21 | 11 | 45 | 39 | 50 | 13 |
| Fréquences | 0,04 | 0,11 | 0,06 | 0,24 | 0,21 | 0,27 | 0,07 |
| Fréquences cumulées décroissantes | 1 | 0,96 | 0,85 | 0,79 | 0,55 | 0,34 | 0,07 |

## Activité 2 Diagrammes cumulatifs - Polygones cumulatifs

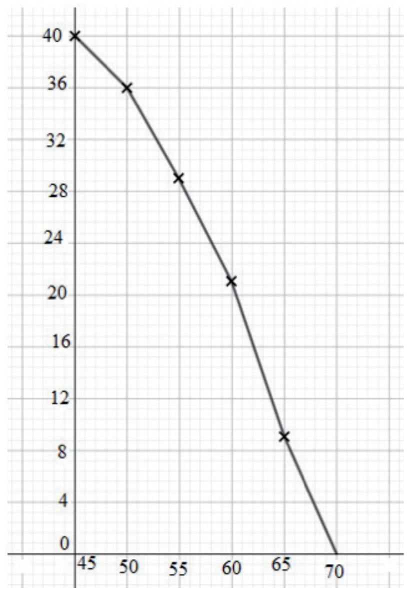
### 2.1. Diagramme des effectifs cumulés décroissants - Polygone des effectifs cumulés décroissants

1. a)




b) Voir figure

2. a)



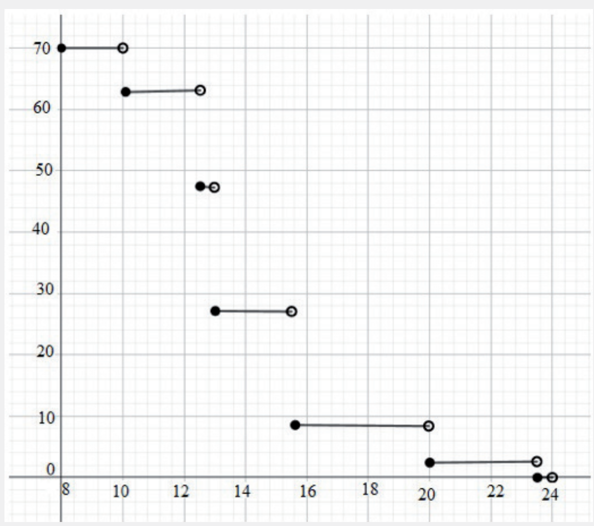

b) Voir figure

c) Voir figure

## Exercices de fixation

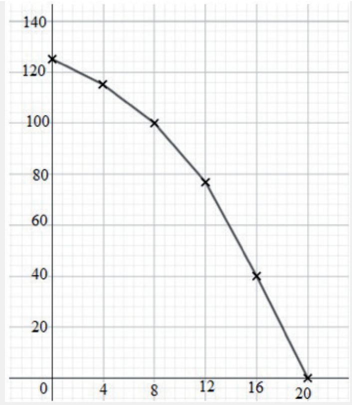
2-1-1

| Modalités | 10 | 12,5 | 13 | 15,5 | 20 | 23,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 8 | 15 | 20 | 18 | 7 | 2 |
| Effectifs cumulés décroissants | 70 | 62 | 47 | 27 | 9 | 2 |



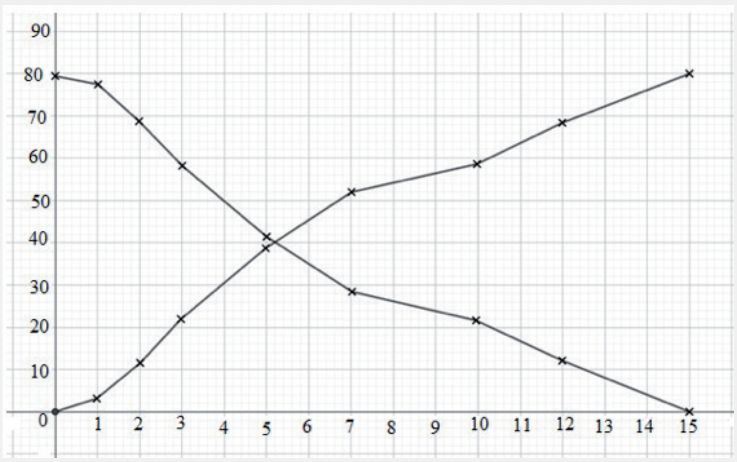
2-1-2

| Modalités | [0;4[ | [4;8[ | [8;12[ | [12;16[ | [16;20] |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 10 | 15 | 23 | 37 | 40 |
| Effectifs cumulés décroissants | 125 | 115 | 100 | 77 | 40 |



2-1-3

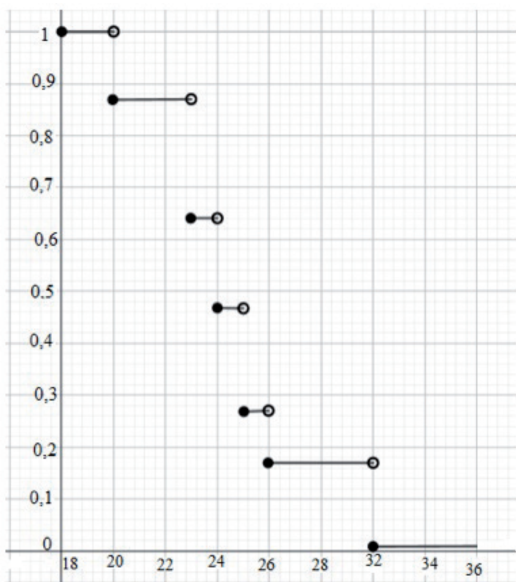
| Modalités | [0 ; 1[ | [1; 2[ | [2 ; 3[ | [3 ; 5[ | [5 ; 7[ | [7 ; 10[ | [10 ; 12[ | [12 ; 15[ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 3 | 8 | 11 | 17 | 13 | 7 | 9 | 12 |
| Effectifs cumulés croissants | 3 | 11 | 22 | 39 | 52 | 59 | 68 | 80 |
| Effectifs cumulés décroissants | 80 | 77 | 69 | 58 | 41 | 28 | 21 | 12 |



## 2.2. Diagramme des fréquences cumulées décroissantes - Polygone des fréquences cumulées décroissantes

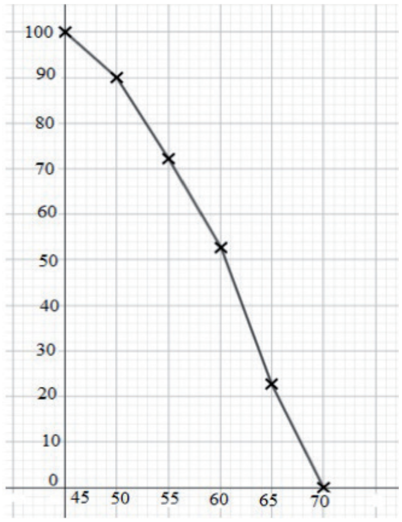
1.

| Notes | 20 | 23 | 24 | 25 | 26 | 30 | 36 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Fréquences | 0,13 | 0,23 | 0,17 | 0,2 | 0,1 | 0,07 | 0,1 |
| Fréquences cumulées croissantes | 1 | 0,87 | 0,64 | 0,47 | 0,27 | 0,17 | 0,1 |



2.

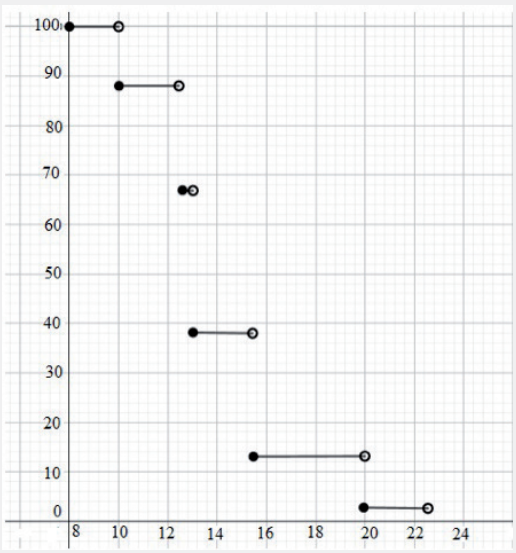
| Poids | [45;50[ | [50;55[ | [55;60[ | [60;65[ | [65;70] |
|---|---|---|---|---|---|
| Fréquences (en %) | 10 | 17,5 | 20 | 30 | 22,5 |
| Fréquences cumulés décroissantes | 100 | 90 | 72,5 | 52,5 | 22,5 |



## Exercices de fixation

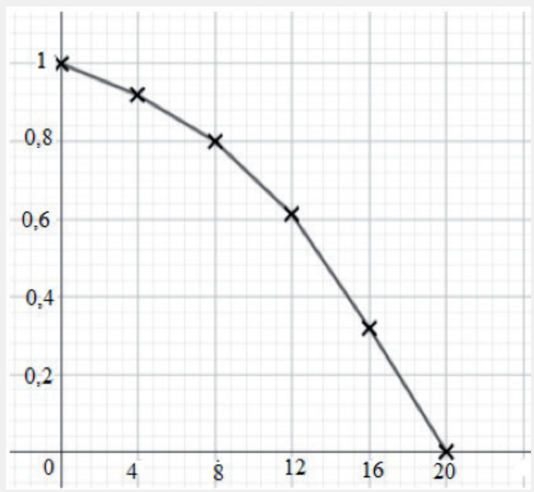
2-2-1

| Modalités | 10 | 12,5 | 13 | 15,5 | 20 | 23,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Fréquences | 11,4 | 21,4 | 28,6 | 25,7 | 10 | 2,9 |
| Fréquences cumulés décroissantes | 100 | 88,6 | 67,2 | 38,6 | 12,9 | 2,9 |



2-2-2

| Modalités | [0;4[ | [4;8[ | [8;12[ | [12;16[ | [16;20] |
|---|---|---|---|---|---|
| Fréquences | 0,08 | 0,12 | 0,184 | 0,296 | 0,32 |
| Fréquences cumulés décroissantes | 1 | 0,92 | 0,8 | 0,616 | 0,32 |



2-2-3

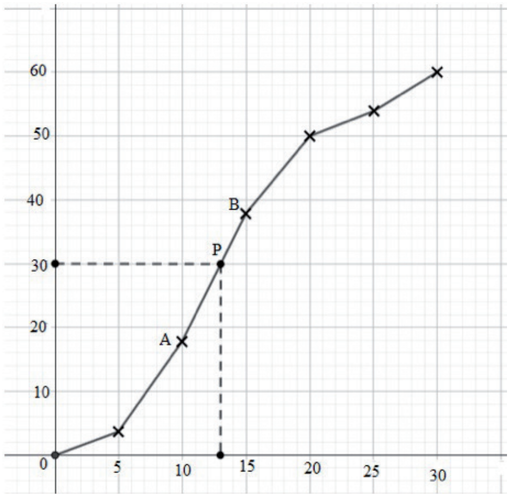
| Modalités | [0;1[ | [1;2[ | [2;3[ | [3;5[ | [5;7] | [7;10] | [10;12] | [12;15] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Fréquences | 3,75 | 10 | 13,75 | 21,25 | 16,25 | 8,75 | 11,25 | 15 |
| Fréquences cumulés croissantes (%) | 3,75 | 13,75 | 27,5 | 48,75 | 65 | 73,75 | 85 | 100 |
| Fréquences cumulés décroissantes (%) | 100 | 96,25 | 86,25 | 72,5 | 51,25 | 35 | 26,25 | 15 |

## Activité 3 Paramètre de position (médiane)

1. Tableau des effectifs cumulés croissants.

| Ancienneté | [0 ; 5[ | [5 ; 10[ | [10 ; 15[ | [15 ; 20[ | [20 ; 25[ | [25 ; 30] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Effectifs** | 4 | 14 | 20 | 12 | 4 | 6 |
| **Effectifs cumulés croissants (%)** | 4 | 18 | 38 | 50 | 54 | 60 |

2. a)




b) L'abscisse du point du polygone des effectifs cumulés croissants dont l'ordonnée est la moitié de l'effectif total est 13.

3. Le coefficient directeur de la droite (AB) est $a = \frac{38-18}{15-10} = 4$ et celui de la droite (AP) est

$a' = \frac{30-18}{M_e - 10} = \frac{12}{M_e - 10}$

Comme (AB) et (AP) ont le même le coefficient directeur, on a $\frac{12}{M_e - 10} = 4$ , soit

$4(M_e - 10) = 12$. Donc $M_e = 13$.

## Exercices de fixation

**3-1**

| Classes | Effectif | Éffectif cumulé croissant |
|---|---|---|
| [0 ; 50 000[ | 30 | 30 |
| [50 000 ; 75 000[ | 45 | 75 |
| [75 000 ; 100 000[ | 110 | 185 |
| [100 000 ; 125 000[ | 250 | 435 |
| [125 000 ; 150 000[ | 150 | 585 |
| [150 000 ; 175 000[ | 60 | 645 |
| [175 000 ; 200 000[ | 35 | 680 |
| [200 000 ; 250 000[ | 20 | 700 |

$700 \div 2 = 350$ et $185 < 350 < 435$, donc la médiane est dans l'intervalle [100 000 ; 125 000[.

C'est le nombre $M_e$ tel que :

$\frac{M_e - 100\,000}{125\,000 - 100\,000} = \frac{350-185}{435-185}$ ,

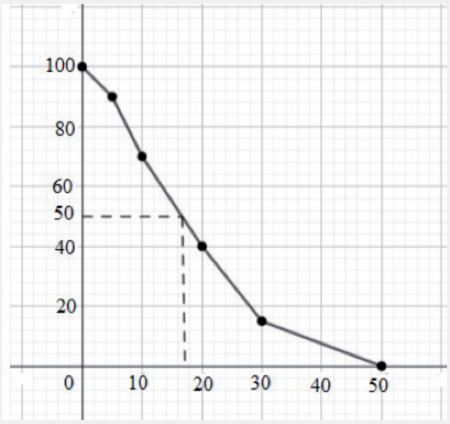
soit $\frac{M_e - 100\,000}{25\,000} = \frac{165}{250}$.

Par suite, $M_e = 100\,000 + 25\,000 \times \frac{165}{250} = 103\,250$

**3-2** Tableau des effectifs cumulés décroissants

| Modalités | ]0 ; 5[ | [5 ; 10[ | [10 ; 20[ | [20 ; 30[ | [30 ; 50[ |
|---|---|---|---|---|---|
| **Effectifs** | 10 | 20 | 30 | 25 | 15 |
| **Éffectifs cumulés décroissants** | 100 | 90 | 70 | 40 | 15 |

Polygone des effectifs cumulés décroissants




La médiane est l'abscisse du point du polygone des effectifs cumulés décroissants dont l'ordonnée est la moitié de l'effectif total.
D'après le graphique, la médiane est 17.

**3-3** Détermine la médiane de la série statistique suivante :

| **Âge** | ]6 ; 10[ | [10 ; 14[ | [14 ; 19[ | [19 ; 24[ | [24 ; 34[ | [34 ; 49[ | [49 ; 59[ | [59 ; 100[ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Fréquence** | 0,092 | 0,085 | 0,11 | 0,102 | 0,176 | 0,225 | 0,107 | 0,103 |
| **Fréquence cumulés décroissants** | 1 | 0,908 | 0,823 | 0,713 | 0,611 | 0,435 | 0,21 | 0,103 |

0,435 < 0,5 < 0,611 donc 24 < $M_e$ < 34. $\frac{M_e - 24}{34 - 24} = \frac{0,5 - 0,435}{0,611 - 0,435}$ , soit $\frac{M_e - 24}{10} = \frac{0,065}{0,176}$ .
Par suite, $M_e = 24 + 10 \times \frac{65}{176} \approx 27,7$

## Activité 4 Étude graphique d'une fonction

### 4.1. Écart moyen

1. Moyenne : $\overline{x} = \frac{14 \times 5 + 10 \times 15 + 16 \times 15 + 17 \times 8 + 18 \times 4}{42} = \frac{668}{42} = 15,9$

2.

| $x$ | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Effectifs ($n$)** | 5 | 10 | 15 | 8 | 4 | 42 |
| $\lvert x - \overline{x} \rvert$ | 1,9 | 0,9 | 0,1 | 1,1 | 21,1 | |
| $n \times \lvert x - \overline{x} \rvert$ | 9,5 | 9 | 1,5 | 8,8 | 8,4 | 37,2 |

3. $\frac{S}{N} = \frac{37,2}{42} \approx 15,9$

## Exercices de fixation

**4-1-1**

| $x$ | 160 | 165 | 170 | 175 | 180 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Effectifs ($n$)** | 4 | 10 | 6 | 3 | 2 | 25 |
| $nx$ | 640 | 1650 | 1020 | 525 | 360 | 4195 |
| $\lvert x - \overline{x} \rvert$ | 7,8 | 2,8 | 2,2 | 7,2 | 12,2 | |
| $n \times \lvert x - \overline{x} \rvert$ | 31,2 | 28 | 13,2 | 21,6 | 24,4 | 118,5 |

Moyenne : $\overline{x} = \frac{4195}{25} = 167,8$

Écart moyen : $e_m = \frac{118,5}{25} = 4,74$

4-1-2

| Classe | [15 ; 25[ | [25 ; 35[ | [35 ; 45[ | [45 ; 55[ | [55 ; 65[ | [65 ; 75[ | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Centre ($x$) | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | |
| Fréquence ($f$) | 2,6 | 19 | 21,6 | 35,8 | 18,4 | 2,6 | 100 |
| $fx$ | 52 | 570 | 864 | 920 | 1104 | 182 | 3692 |
| $\lvert x - \overline{x} \rvert$ | 16,92 | 6,92 | 3,08 | 13,08 | 23,08 | 33,08 | |
| $f \times \lvert x - \overline{x} \rvert$ | 43,992 | 131,48 | 66,528 | 468,264 | 424,672 | 86,008 | 1220,944 |

Moyenne : $\overline{x} = \dfrac{3692}{100} = 36,92$

Écart moyen : $e_m = \dfrac{1220,944}{25} \approx 12,21$

## 4.2. Variance et écart type

1.

| $x$ | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs ($n$) | 5 | 10 | 15 | 8 | 4 | 40 |
| $x - \overline{x}$ | −2,7 | −1,7 | −0,7 | 0,3 | 1,3 | |
| $(x - \overline{x})$ | 7,19 | 2,89 | 0,49 | 0,09 | 1,69 | |
| $n \times (x - \overline{x})^2$ | 35,95 | 28,9 | 7,35 | 0,72 | 6,76 | 79,68 |

2) $\dfrac{S}{N} = \dfrac{79,68}{40} = 1,992.$

3) $\sqrt{1,992} \approx 1,41.$

### Exercices de fixation

4-2-1 Moyenne : $\overline{x} = \dfrac{8+8+9+10+10+11+12+12}{8} = \dfrac{72}{8} = 9$

Variance : $V = \dfrac{8^2+8^2+9^2+10^2+10^2+11^2+12^2+12^2}{8} - 9^2 = \dfrac{818}{8} - 81 = 21,25$

Écart type : $\sigma = \sqrt{V} \approx 4,61$

4-2-2

| Taille ($x$) | 160 | 165 | 170 | 175 | 180 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Éffectif ($n$) | 4 | 10 | 6 | 3 | 2 | 25 |
| $nx$ | 640 | 1650 | 1020 | 525 | 360 | 4195 |
| $x^2$ | 25600 | 27225 | 28900 | 30625 | 32400 | |
| $nx^2$ | 102400 | 272250 | 173400 | 91875 | 64800 | 704725 |

Moyenne : $m = \dfrac{4195}{25} = 167,8.$

Variance : $V = \dfrac{704725}{25} - 167,8^2 = 32,16.$

Écart type : $\sigma = \sqrt{V} \approx 5,67$

4-2-3

| Classe | [15 ; 25[ | [25 ; 35[ | [35 ; 45[ | [45 ; 55[ | [55 ; 65[ | [65 ; 75[ | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Centre ($x$) | 17,5 | 27,5 | 37,5 | 47,5 | 57,5 | 67,5 | |
| Fréquence (en %) | 2,6 | 19 | 21,6 | 35,8 | 18,4 | 2,6 | 100 |
| $fx$ | 45,5 | 522,5 | 810 | 1700,5 | 1058 | 175,5 | 4312 |
| $x^2$ | 306,25 | 756,25 | 1406,08 | 2256,25 | 3306,25 | 4556,25 | |
| $fx^2$ | 796,25 | 14368,75 | 30375 | 80773,75 | 60835 | 11846,25 | 198995 |

Moyenne : $m = \dfrac{4312}{100} = 43,12$

Variance : $V = \dfrac{198995}{100} - 43,12^2 = 130,6156$

Écart type : $\sigma = \sqrt{V} \approx 11,43$

## Exercices de renforcement

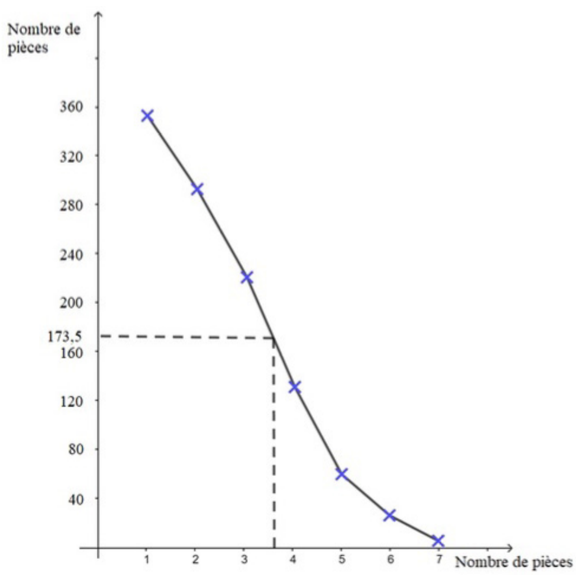
**1**

| Âge | [18 ; 20[ | [20 ; 30[ | [30 ; 40[ | [40 ; 50[ | [50 ; 60[ | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 200 | 700 | 1200 | 1600 | 1300 | 5000 |
| E.C.C | 200 | 900 | 2100 | 3700 | 5000 | |
| E.C.D | 5000 | 4800 | 4100 | 2900 | 1300 | |
| Fréquence | $\frac{2}{50}$ | $\frac{7}{50}$ | $\frac{12}{50}$ | $\frac{16}{50}$ | $\frac{13}{50}$ | 1 |
| F .C.C | $\frac{2}{50}$ | $\frac{9}{50}$ | $\frac{21}{50}$ | $\frac{37}{50}$ | $\frac{50}{50}$ | |
| F.C.D | $\frac{50}{50}$ | $\frac{48}{50}$ | $\frac{41}{50}$ | $\frac{29}{50}$ | $\frac{13}{50}$ | |

**2** 1)

| Nombre de pièces | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre d'appartements | 48 | 72 | 96 | 64 | 39 | 25 | 3 | 347 |
| E.C.D | 347 | 299 | 227 | 131 | 67 | 28 | 3 | |

2) Polygones des effectifs cumulés décroissants




3) La médiane de la série statistique est l'abscisse du point d'ordonnée $\frac{347}{2}$ = 173,5. Donc $M_e$ = 3,5.

**3** 1) Classe modale de la série statistique

| Note | [0 ; 4[ | [4 ; 8[ | [8 ; 10[ | [10 ; 12[ | [12 ; 16[ | [16 ; 20[ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 8 | 22 | 30 | 45 | 80 | 15 |
| Amplitude | 4 | 4 | 2 | 2 | 4 | 4 |
| Densité | 2 | 5,5 | 15 | 22,5 | 20 | 3,75 |

La classe modale est [10 ;12[ car elle a la plus forte densité.

2) Moyenne de mathématiques de l'établissement.

| Centre $C_i$ | 2 | 6 | 9 | 11 | 14 | 18 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif $n_i$ | 8 | 22 | 30 | 45 | 80 | 15 | 200 |
| $n_iC_i$ | 16 | 132 | 270 | 495 | 1120 | 270 | 2303 |

$\overline{x} = \dfrac{2303}{200} = 11,515.$

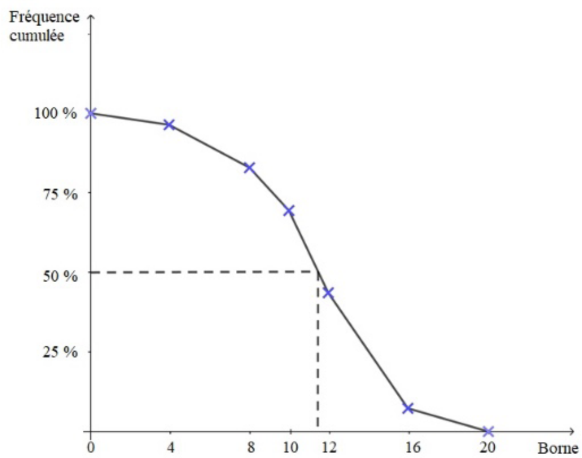
La moyenne de Maths est 11,5.

3. a) Complétons

| Note | [0 ; 4[ | [4 ; 8[ | [8 ; 10[ | [10 ; 12[ | [12 ; 16[ | [12 ; 16[ | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 8 | 22 | 30 | 45 | 80 | 15 | 200 |
| E.C.D | 200 | 192 | 170 | 140 | 95 | 15 | |
| Fréquence | 4 % | 11 % | 15 % | 22,5 % | 40 % | 7,5 % | 100 % |
| F.C.D | 100 % | 96 % | 85 % | 70 % | 47,5 % | 7,5 % | |

b) Polygone des fréquences cumulées décroissantes

| Borne | 0 | 4 | 8 | 10 | 12 | 16 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F.C.D | 100 | 96 | 85 | 70 | 47,5 | 7,5 | 0 |




c) L'antécédent de 50 % est 11.
Interprétation : La médiane de la serie est 11.

**4** 1) Classe modale de la série statistique

| Centre $C_i$ | 0,125 | 0,375 | 0,75 | 1,75 | 3,75 | 7,5 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif $n_i$ | 137 | 106 | 112 | 154 | 100 | 33 | 642 |
| $n_iC_i$ | 17,125 | 39,75 | 84 | 269,5 | 375 | 247,5 | 1032,875 |
| $n_iC_i^2$ | 2,14 | 14,90 | 63 | 475,62 | 1406,25 | 1856,25 | 3814,16 |

$\overline{x} = \dfrac{1032,875}{642} = 1,60.$

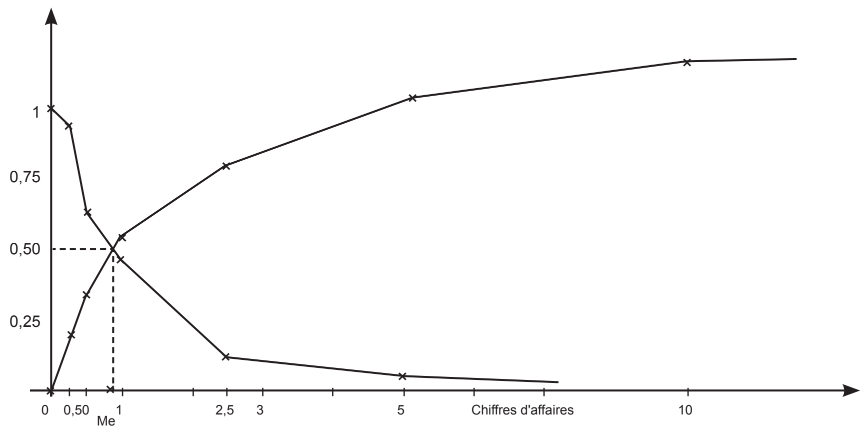
Le chiffre d'affaires moyen est 1,6 millions de dollars

La variance : $V = \dfrac{3814,16}{642} - 1,60^2 = 3,38.$ L'écart-type : $\sigma = \sqrt{V} = 1,84.$

2)

| Chiffre d'affaires | [0 ; 0,25[ | [0,25 ; 0,5[ | [0,5 ; 1[ | [1 ; 2,5[ | [2,5 ; 5[ | [5 ; 10[ | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Fréquence | 0,21 | 0,17 | 0,17 | 0,24 | 0,16 | 0,05 | 1 |
| F.C.C | 0,21 | 0,38 | 0,55 | 0,79 | 0,95 | 1 | X |
| F.C.D | 1 | 0,79 | 0,62 | 0,45 | 0,21 | 0,05 | X |

| Borne | 0 | 0,25 | 0,5 | 1 | 2,5 | 5 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F.C.C | 0 | 0,21 | 0,38 | 0,55 | 0,79 | 0,95 | 1 |
| F.C.D | 1 | 0,79 | 0,62 | 0,45 | 0,21 | 0,05 | 0 |




3) Graphique $M_e \simeq 0{,}9$.

Algébriquement

Dans la classe [0,5 ; 1[, on a : la fréquence cumulée croissante et la fréquence cumulée décroissante sont toutes deux supérieures à 0,5. D'où $M_e \in [0{,}5 ; 1[$.

Par interpolation linéaire :

$$\frac{Me - 0{,}5}{0{,}5 - 0{,}38} = \frac{1 - 0{,}5}{0{,}55 - 0{,}38}. \text{ D'où } M_e = 0{,}85.$$

4) La proportion des entreprises au chiffre d'affaires supérieur ou égal à 3 millions est de 0,2, soit 20 %.

**5** Écart-moyen : $\frac{1}{N} \sum n_i |x_i - \overline{x}|$.

Variance : $\frac{1}{N} \sum n_i (x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{N} \sum n_i x_i^2 - \overline{x}^2$.

Écart-type : $\sqrt{V}$.

**6**

| | Moyenne | Etendue | Médiane | Écart-moyen | Écart-type | Mode |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Paramètre de position | × | | × | | | × |
| Paramètre de dispersion | | × | | × | × | |

**7**

| Note($x_i$) | 3 | 4 | 5 | 8 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 16 | 18 | 20 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif($n_i$) | 2 | 1 | 3 | 5 | 4 | 2 | 3 | 4 | 3 | 4 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 38 |
| $ni\,x_i$ | 6 | 4 | 15 | 30 | 28 | 16 | 27 | 40 | 33 | 48 | 13 | 28 | 32 | 18 | 20 | 358 |
| $n_i x_i^2$ | 18 | 16 | 75 | 180 | 128 | 128 | 243 | 400 | 363 | 576 | 169 | 392 | 512 | 324 | 400 | 3992 |

1) $\overline{x} = \dfrac{358}{38} = 9{,}42.$

2) $V(X) = \dfrac{3992}{38} - 9{,}42^2 = 16{,}32.$

$\sigma(X) = 4{,}04.$

**8**

| $x$ | $n$ | $nx$ | $n\lvert x-\overline{x}\rvert$ | $nx^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 38 | 3 | 114 | 6,375 | 4332 |
| 38,5 | 5 | 192,6 | 8,125 | 7411,25 |
| 39 | 8 | 312 | 9 | 12168 |
| 39,5 | 10 | 395 | 6,25 | 15602,5 |
| 40 | 16 | 640 | 2 | 25600 |
| 40,5 | 43 | 1741,5 | 16,125 | 70530,75 |
| 41 | 10 | 410 | 8,75 | 16810 |
| 41,5 | 5 | 207,5 | 6,875 | 8611,25 |
| Totaux | 100 | 4012,5 | 63,5 | 161065,75 |

1) Moyenne : $\overline{x} = \dfrac{4912,5}{100} = 40{,}125$

La durée moyenne de gestation est de 40 semaines.

2) Écart moyen : $e_m = \dfrac{63,5}{100} = 0{,}635$

Variance : $V = \dfrac{161065,75}{100} = -\,40{,}125^2 = 0{,}641875$

Écart type : $\sigma = \sqrt{0,641875} \approx 0{,}8$

**9** 1)

| Salaires annuels | Fréquences (%) | Fréquences cumulées croissantes |
|---|---|---|
| ]0 ; 30[ | 20 | 20 |
| [30 ; 60[ | 28 | 48 |
| [60 ; 90[ | 36 | 84 |
| [90 ; 120[ | 16 | 100 |
| Total | 100 | |

| | | |
|---|---|---|
| 60 | Me | 90 |
| 48 | 50 | 84 |

$\dfrac{M_e - 60}{50 - 48} = \dfrac{90 - 60}{84 - 48}$ ; $\dfrac{M_e - 60}{18} = \dfrac{30}{36}$ ; $M_e = 75.$

Le salaire médian est 750 000 F CFA

<u>Interprétation</u> : La moitié des employés de cette entreprise a un salaire inférieur ou égal à 750 000 F et salariés l'autre moitié a un salaire supérieur ou égal à 750 000 F.

2. Moyenne : $\overline{x} = 0{,}20 \times 15 + 0{,}28 \times 45 + 0{,}36 \times 75 + 0{,}16 \times 105 = 56{,}4.$
Le salaire moyen est 564 000 F.

3. Variance : $V = 0{,}20 \times 152 + 0{,}28 \times 452 + 0{,}36 \times 752 + 0{,}16 \times 1052 = 4401$
Écart type : $\sigma = \sqrt{4401} \approx 66{,}34$

**10** 1) • Médiane :

Les effectifs cumulés croissants sont : 12 ; 102 ; 172 ; 218 ; 268 ; 350

$350 \div 2 = 175$ et $172 < 175 < 218$, donc $42 < M_e < 54$

$\dfrac{M_e - 42}{54 - 42} = \dfrac{175 - 172}{218 - 172}$ , donc $M_e = \dfrac{3}{46} \times 12 + 42 \approx 42{,}78$

• Moyenne : $\overline{x} = \dfrac{12 \times 24 + 90 \times 33 + 70 \times 39 + 46 \times 48 + 50 \times 57 + 82 \times 63}{350}$

$\overline{x} = \dfrac{16212}{350} = 46{,}32$

• Étendue : 66 – 18 = 48

• Interprétations :

– Médiane : La moitié des familles a un salaire annuel inférieur ou égal à 532 200 F et l'autre moitié a un salaire annuel supérieur ou égal à 532 500 F.

– Moyenne : Chaque famille a un salaire annuel moyen de 463 200 F.

– Étendue : La différence entre le revenu annuel le plus élevé et revenu annuel le plus bas est 480 000 F

2) • Variance : $V = \dfrac{12 \times 24^2 + 90 \times 33^2 + 70 \times 39^2 + 46 \times 48^2 + 50 \times 57^2 + 82 \times 63^2}{350} = 46{,}32^2$

$V \approx 155{,}27$

• Écart type : $\sigma = \sqrt{155{,}27} \approx 12{,}46$

• Fréquences cumulées décroissantes

| Revenus | Fréquences | Fréquences cumulées décroissantes | Fréquences cumulées croissantes |
|---|---|---|---|
| [18 ; 30[ | 0,03 | 1 | 0,03 |
| [30 ; 36[ | 0,26 | 0,97 | 0,29 |
| [36 ; 42[ | 0,20 | 0,71 | 0,49 |
| [42 ; 54[ | 0,13 | 0,51 | 0,62 |
| [54 ; 60[ | 0,14 | 0,38 | 0,76 |
| [60 ; 66[ | 0,24 | 0,24 | 1 |

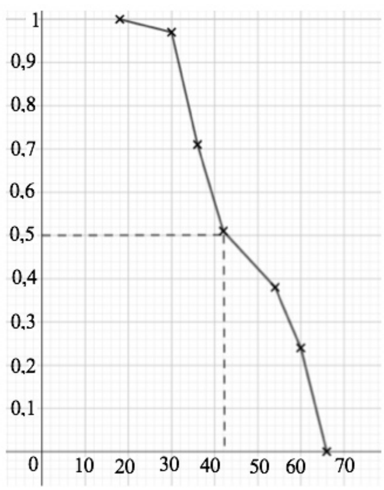
• Médiane

– Algébriquement

| | | |
|---|---|---|
| 42 | $M_e$ | 54 |
| 0,49 | 0,5 | 0,62 |

$\dfrac{M_e - 42}{54 - 42} = \dfrac{0{,}5 - 0{,}49}{0{,}62 - 0{,}49}$ , $\dfrac{M_e - 42}{12} = \dfrac{0{,}01}{0{,}13}$ ; $M_e \approx 42{,}9$

– Graphiquement




La médiane est l'abscisse du point du polygone de fréquences cumulées croissantes dont l'ordonnée est 0,5.

D'après le graphique, $M_e = 42{,}5$.

**11** 1)

| Poids | Fréquences | Fréquences cumulées décroissantes |
|---|---|---|
| [0,55 ; 0,65[ | 0,04 | 1 |
| [0,65 ; 0,85[ | 0,17 | 0,96 |
| [0,85 ; 1,05[ | 0,32 | 0,79 |
| [1,05 ; 1,25[ | 0,33 | 0,47 |
| [1,25 ; 1,45[ | 0,14 | 0,14 |

2) • Classe modale

| Poids | Fréquences | Densité des fréquences |
|---|---|---|
| [0,55 ; 0,65[ | 0,04 | 0,2 |
| [0,65 ; 0,85[ | 0,17 | 0,85 |
| [0,85 ; 1,05[ | 0,32 | 1,6 |
| [1,05 ; 1,25[ | 0,33 | 1,65 |
| [1,25 ; 1,45[ | 0,14 | 0,7 |

La classe modale est [1,05 ; 1,25[ car elle a la plus grande densité

• Médiane

| | | |
|---|---|---|
| 1,05 | $M_e$ | 1,25 |
| 0,47 | 0,5 | 0,79 |

$\frac{M_e - 1{,}05}{1{,}25 - 1{,}05} = \frac{0{,}5 - 0{,}47}{0{,}79 - 0{,}47}$ , $\frac{M_e - 0{,}85}{0{,}2} = \frac{0{,}03}{0{,}32}$ ; $M_e \approx 1{,}06$.

3)

| Classes | Centres | Fréquences |
|---|---|---|
| [0,55 ; 0,65[ | 0,55 | 0,04 |
| [0,65 ; 0,85[ | 0,75 | 0,17 |
| [0,85 ; 1,05[ | 0,95 | 1,32 |
| [1,05 ; 1,25[ | 0,15 | 1,33 |
| [1,25 ; 1,45[ | 0,53 | 0,14 |

• Moyenne :

$\overline{x} = 0{,}04 \times 0{,}55 + 0{,}17 \times 0{,}75 + 0{,}32 \times 0{,}95 + 0{,}33 \times 1{,}15 + 0{,}14 \times 1{,}53$

$\overline{x} = 1{,}022$

• Variance :

$V = 0{,}04 \times 0{,}55^2 + 0{,}17 \times 0{,}75^2 + 0{,}32 \times 0{,}95^2 + 0{,}33 \times 1{,}15^2 + 0{,}14 \times 1{,}53^2$

$V \approx 0{,}04$

• Écart type : $\sigma = \sqrt{0{,}04} = 0{,}2$

**12** 1) La fréquence la plus élevée est $\frac{35}{128}$. Donc 3 et 4 sont les modes.

| Nombre de piles | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F.C.C | $\frac{1}{128}$ | $\frac{8}{128}$ | $\frac{29}{128}$ | $\frac{64}{128}$ | $\frac{99}{128}$ | $\frac{120}{128}$ | $\frac{127}{128}$ | $\frac{128}{128}$ |

$M_e = 3$ car sa fréquence cumulée croissante est 0,5.

2)

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | $\frac{1}{128}$ | $\frac{7}{128}$ | $\frac{21}{128}$ | $\frac{35}{128}$ | $\frac{35}{128}$ | $\frac{21}{128}$ | $\frac{7}{128}$ | $\frac{1}{128}$ | 1 |
| $f_ix_i$ | 0 | $\frac{7}{128}$ | $\frac{42}{128}$ | $\frac{105}{128}$ | $\frac{140}{128}$ | $\frac{105}{128}$ | $\frac{42}{128}$ | $\frac{7}{128}$ | $\frac{448}{128}$ |
| $f_i\lvert x_i - \overline{x}\rvert$ | $\frac{3,5}{128}$ | $\frac{17,5}{128}$ | $\frac{31,5}{128}$ | $\frac{17,5}{128}$ | $\frac{17,5}{128}$ | $\frac{31,5}{128}$ | $\frac{17,5}{128}$ | $\frac{3,5}{128}$ | $\frac{140}{128}$ |
| $f_ix_i^2$ | 0 | $\frac{7}{128}$ | $\frac{84}{128}$ | $\frac{315}{128}$ | $\frac{560}{128}$ | $\frac{525}{128}$ | $\frac{252}{128}$ | $\frac{49}{128}$ | $\frac{1792}{128}$ |

Moyenne : $\overline{x} = \frac{448}{128} = 3,5$.

Écart-moyen :

$e_m = \frac{140}{128} \approx 1,1$

Variance : $V = \frac{1792}{128} - 3,5^2 = 1,75$.

Écart-type : $\sigma = \sqrt{1,75} \approx 1,3$

**13** 1)

| Masses | Effectifs | Densité | Effectifs cumulés croissants |
|---|---|---|---|
| [44,5 ; 54,5[ | 5 | 0,5 | 5 |
| [54,5 ; 59,5[ | 14 | 2,8 | 19 |
| [59,5 ; 64,5[ | 33 | 6,6 | 52 |
| [64,5 ; 69,5[ | 47 | 9,4 | 99 |
| [69,5 ; 74,5[ | 26 | 5,2 | 125 |
| [74,5 ; 79,5[ | 13 | 2,6 | 138 |
| [79,5 ; 84,5[ | 2 | 0,4 | 140 |

La classe modale est [64,5 ; 69,5[ car elle a la plus grande densité

• Médiane

| 64,5 | $M_e$ | 69,5 |
|---|---|---|
| 52 | 70 | 99 |

$\frac{M_e - 64,5}{69,5 - 64,5} = \frac{70 - 52}{99 - 52}$ , $\frac{M_e - 64,5}{5} = \frac{18}{47}$ ; $M_e \approx 66,4$.

• Moyenne

| Centres ($x$) | Effectifs ($n$) | $nx$ | $nx^2$ |
|---|---|---|---|
| 49,5 | 5 | 247,5 | 12251,25 |
| 57 | 14 | 798 | 45486 |
| 62 | 33 | 2046 | 126852 |
| 67 | 47 | 3149 | 210983 |
| 72 | 26 | 1872 | 134784 |
| 77 | 13 | 1001 | 77077 |
| 82 | 2 | 164 | 13448 |
| Totaux | 140 | 9277,5 | 620881,5 |

$\overline{x} = \dfrac{9277,5}{140} \approx 66{,}27$

• Étendue : 84 – 45 = 39

• Interprétations :

– Médiane : La moitié des étudiants a une masse inférieure ou égale à 66,4 kg et l'autre moitié a une masse supérieure ou égale à 66,4 kg.

– Moyenne : Chaque étudiant pèse en moyenne 66,27 kg.

– Étendue : La différence entre la masse la plus élevée et la masse la plus basse est 39 kg.

2) • Variance :

$V = \dfrac{620881,5}{140} - \left(\dfrac{9277,5}{140}\right)^2.$

$V \approx 43{,}44$

• Écart type : $\sigma = \sqrt{43,44} \approx 6{,}6$

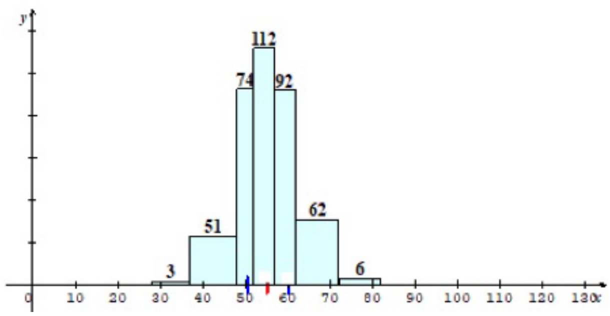
**14** $1 \rightarrow$ B ; $2 \rightarrow$ A ; $3 \rightarrow$ A ; $4 \rightarrow$ C ; $5 \rightarrow$ B.

## Exercices d'approfondissement

**15** 1)

| Classe | Effectif | Amplitude | Densité |
|---|---|---|---|
| [28 ; 37[ | 3 | 9 | 0,33 |
| [37 ; 48[ | 51 | 11 | 4,6 |
| [48 ; 52[ | 74 | 4 | 18,5 |
| [52 ; 57[ | 112 | 5 | 22,4 |
| [57 ; 62[ | 92 | 5 | 18,4 |
| [62 ; 72[ | 62 | 10 | 6,2 |
| [72 ; 82[ | 6 | 10 | 0,6 |

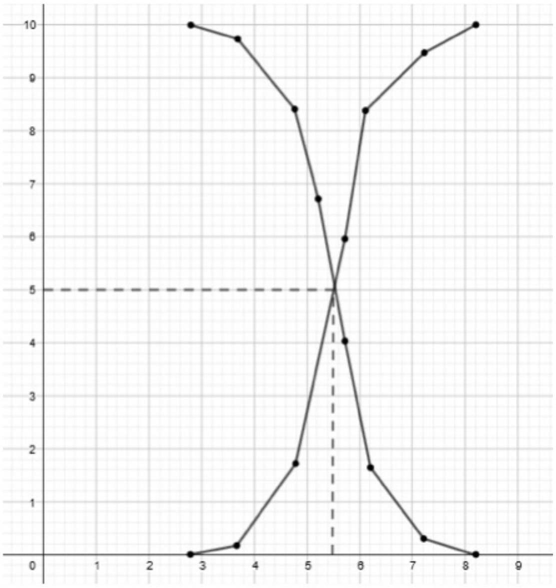
Histogramme des effectifs




2)

| Classe | Effectif | Effectifs cumulés croissants | Effectifs cumulés décroissants |
|---|---|---|---|
| [28 ; 37[ | 3 | 3 | 400 |
| [37 ; 48[ | 51 | 53 | 397 |
| [48 ; 52[ | 74 | 128 | 346 |
| [52 ; 57[ | 112 | 240 | 272 |
| [57 ; 62[ | 92 | 332 | 160 |
| [62 ; 72[ | 62 | 394 | 68 |
| [72 ; 82[ | 6 | 400 | 6 |

3) Polygones des effectifs




4) • Détermination graphique de la médiane
La médiane est l'abscisse du point d'intersection des deux polygones des effectifs cumulés.
D'après le graphique, $M_e = 55$.

• Détermination de la médiane par le calcul

| | | |
|---|---|---|
| 52 | $M_e$ | 57 |
| 128 | 200 | 240 |

$$\frac{M_e - 52}{57 - 52} = \frac{200 - 128}{240 - 128} \ ;$$

$$\frac{M_e - 52}{5} = \frac{72}{112} \ ;$$

$M_e \approx 55{,}2$.

5)

| Centres ($c$) | Effectifs ($n$) | $nc$ | $nc^2$ |
|---|---|---|---|
| 32,5 | 3 | 97,5 | 3168,75 |
| 32,5 | 51 | 2167,5 | 92118,75 |
| 50 | 74 | 3700 | 185000 |
| 54,5 | 112 | 6104 | 332668 |
| 59,5 | 92 | 5474 | 325703 |
| 67 | 62 | 4154 | 278318 |
| 77 | 6 | 462 | 35574 |
| Total | 400 | 22159 | 1252550,5 |

Moyenne : $\overline{x} = \frac{22159}{400} = 55{,}3975$

La variance : $V = \frac{1252550{,}5}{400} - 55{,}3975^2 \approx 62{,}5$.

L'écart-type : $\sigma = \sqrt{V} \approx 7{,}9$.

L'étendue : 82 – 28 = 54

**16** 1)

| Centre | $\frac{x+50}{2}$ | 75 | 150 | 250 | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 30 | 40 | 20 | 10 | 100 |
| $n_iC_i$ | $15x + 750$ | 3000 | 3000 | 2500 | $5x + 9250$ |

$$\frac{15x + 9250}{100} = 94 \text{ donc } x = 10.$$

2) • Médiane

| | | |
|---|---|---|
| 50 | $M_e$ | 100 |
| 30 | 50 | 70 |

$$\frac{M_e - 50}{100 - 50} = \frac{50 - 30}{70 - 30} \ , \ \frac{M_e - 50}{50} = \frac{20}{40} \ ; M_e = 75.$$

• Interprétation : 50% des employés de cette PME ont un salaire inférieur ou égal à 750 000 F et 50% de ces employés ont un salaire supérieur ou égal à 750 000 F.

3) Variance : $V = \dfrac{30 \times 30^2 + 40 \times 75^2 + 20 \times 150^2 + 10 \times 250^2}{100} - 9,4^2$

V = 13181,64

Écart type : $\sigma = \sqrt{V} \approx 114,8$

**17**

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i(x_i - \overline{x})^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i^2 - 2\overline{x}\sum_{i=1}^{n} n_i x_i^2 + \overline{x}^2 \sum_{i=1}^{n} n_i}{N}$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n_i} n_i x_i^2 - 2\overline{x}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} n_i x_i + \frac{N}{N}\overline{x}^2$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} n_i x_i^2 - 2\overline{x}^2 + \overline{x}^2$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} n_i x_i^2 - 2\overline{x}^2.$$

**18** 1)

| $x_i$ | 155 | 160 | 165 | 170 | 175 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 6 | 9 | 5 | 3 | 1 | 24 |
| $n_i x_i$ | 930 | 1440 | 825 | 510 | 175 | 3880 |
| $n_i\lvert x_i - \overline{x}\rvert$ | 136 | 9 | 20 | 27 | 14 | 106 |
| $n_i x_i^2$ | 144150 | 230400 | 136125 | 86700 | 30625 | 628000 |

La moyenne : $\overline{x} = \dfrac{3880}{24} = 161,67$.

La médiane est 160.

L'étendue : e = 175 – 155 = 20

La variance : V ≈ 29,47.

Écart-type : σ ≈ 5,42.

Écart-moyen : $e_m = \dfrac{106}{24} \approx 4,41$.

2) 15,65 > 5,6 donc la 2ᵉ distribution est la plus homogène.

**19** 1) Tableau des effectifs des notes des filles

| Note | 6 | 8 | 9 | 10 | 12 | 13 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Éffectif | 1 | 2 | 3 | 2 | 4 | 2 | 1 |

Tableau des effectifs des notes des filles

| Note | 5 | 7 | 9 | 10 | 11 | 13 | 14 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Éffectif | 1 | 2 | 1 | 6 | 2 | 3 | 2 | 1 | 2 |

2) $m_1 = \dfrac{6 + 2 \times 8 + 3 \times 9 + 2 \times 10 + 4 \times 12 + 2 \times 13 + 15}{1 + 2 + 3 + 2 + 4 + 2 + 1} = \dfrac{158}{15} = 10,53$

$m_1 = \dfrac{158}{15} \backsimeq 10,53$

$V_1 = \dfrac{6^2 + 2 \times 8^2 + 3 \times 9^2 + 2 \times 10^2 + 4 \times 12^2 + 2 \times 13^2 + 15^2}{15} = \left(\dfrac{158}{15}\right)^2$

$V_1 = \backsimeq 5,43$

$\sigma_1 = \sqrt{V_1} \backsimeq 2,33$

3) $m_2 = \dfrac{5 + 2 \times 7 + 9 + 6 \times 10 + 2 \times 11 + 3 \times 13 + 2 \times 14 + 16 + 2 \times 17}{1 + 2 + 1 + 6 + 2 + 3 + 2 + 1 + 2} = \dfrac{158}{15} = 10,53$

$m_2 = \dfrac{227}{20} = 11,35$

$V_2 = \dfrac{5^2 + 2 \times 7^2 + 9^2 + 6 \times 10^2 + 2 \times 11^2 + 3 \times 13^2 + 2 \times 14^2 + 16^2 + 2 \times 17^2}{20} = 11,35^2$

$V_2 = 10,1275$

$\sigma_2 = \sqrt{V_2} \backsimeq 3,2$

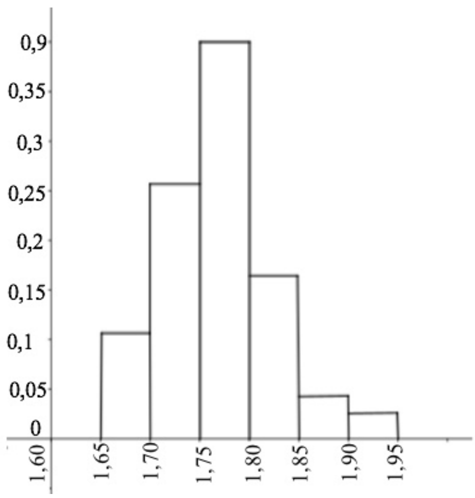
4)

| Note ($x$) | Effectif ($n$) | $nx$ | $nx^2$ |
|---|---|---|---|
| 5 | 1 | 5 | 25 |
| 6 | 1 | 6 | 36 |
| 7 | 2 | 14 | 98 |
| 8 | 2 | 16 | 128 |
| 9 | 4 | 36 | 324 |
| 10 | 8 | 80 | 800 |
| 11 | 2 | 22 | 242 |
| 12 | 4 | 48 | 576 |
| 13 | 5 | 65 | 845 |
| 14 | 2 | 28 | 392 |
| 15 | 1 | 15 | 225 |
| 16 | 1 | 16 | 256 |
| 17 | 2 | 34 | 578 |
| Total | 35 | 385 | 4525 |

Moyenne : $m = \dfrac{385}{35} = 11$

L'écart-type : $\sigma = \sqrt{\dfrac{4525}{35} - 11^2} \approx 2{,}89.$

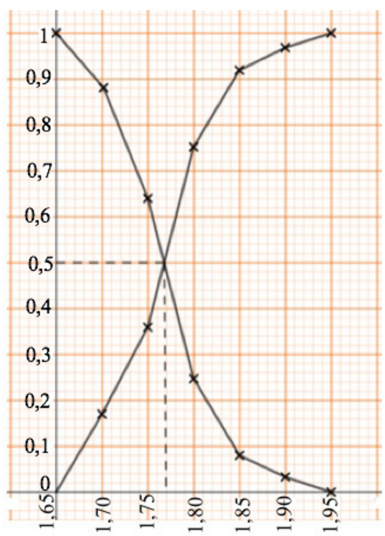
**20** 1) Histogramme des fréquences




2)

| Tailles | Fréquences | Fréquences cumulées croissantes | Fréquences cumulées décroissantes |
|---|---|---|---|
| [1,65 ; 1,70[ | 0,107 | 0,107 | 1 |
| [1,70 ; 1,75[ | 0,253 | 0,360 | 0,893 |
| [1,75 ; 1,80[ | 0,393 | 0,753 | 0,640 |
| [1,80 ; 1,85[ | 0,167 | 0,920 | 0,247 |
| [1,85 ; 1,90[ | 0,047 | 0,967 | 0,080 |
| [1,90 ; 1,95[ | 0,033 | 1 | 0,033 |

3)



4) • Par le graphique
La médiane est l'abscisse du point d'intersection des deux polygones des fréquences cumulées.
D'après le graphique, $M_e = 1,77$.

• Par le calcul

| | | |
|---|---|---|
| 1,75 | $M_e$ | 1,80 |
| 1,75 | 0,5 | 0,753 |

$$\frac{M_e - 1,75}{1,80 - 1,75} = \frac{0,5 - 0,36}{0,753 - 0,36}, \quad \frac{M_e - 1,75}{0,05} = \frac{0,14}{0,393} \quad ; M_e = 1,75$$

5)
• La moyenne :
$\overline{x} = 0,107 \times 1,675 + 0,253 \times 1,725 + 0,393 \times 1,775 + 0,167 \times 1,825 + 0,047 \times 1,875 + 0,033 \times 1,925$
$\overline{x} = 1,16965$

• La variance :
$V = 0,107 \times 1,675^2 + 0,253 \times 1,725^2 + 0,393 \times 1,775^2 + 0,167 \times 1,825^2 + 0,047 \times 1,875^2 + 0,033 \times 1,925^2$
$V = 3,134965$

• L'écart-type : $\sigma = \sqrt{V} \approx 1,77$

• L'étendue : 1,95 – 1,65 = 0,3

**21** 1) Salaire moyen de la filiale A :
$$M = \frac{5 \times 150 + 10 \times 250 + 13 \times 350 + 4 \times 450}{5 + 10 + 13 + 4} = \frac{9600}{32} = 300$$
Le salaire annuel moyen de la filiale A est 300 000 000 F CFA.

Salaire moyen de la filiale B :
$$M' = \frac{4 \times 150 + 12 \times 250 + 14 \times 350 + 6 \times 450}{5 + 10 + 13 + 4} = \frac{11200}{36} \approx 311,11$$
Le salaire annuel moyen de la filiale B est d'environ 311 111 000 F CFA.

2) Variance de la filiale A :
$$V = \frac{5 \times 150^2 + 10 \times 250^2 + 13 \times 350^2 + 4 \times 450^2}{5 + 10 + 13 + 4} - 300^2$$
$V = 8125$
Écart type de la filiale A :
$\sigma = \sqrt{V} \approx 90,14$
Variance de la filiale B :
$$V' = \frac{4 \times 150^2 + 12 \times 250^2 + 14 \times 350^2 + 6 \times 450^2}{5 + 10 + 13 + 4} - \left(\frac{11200}{36}\right)^2$$
$V' = 7932,1$
Écart type de la filiale B :
$\sigma' = \sqrt{V} \approx 89,06$

3) $\sigma > \sigma'$ donc la dispersion (répartition autour de la moyenne) de la filiale A est plus grande que celle de la filiale B.

**22** 1) $\overline{x} = \dfrac{10 \times 750 + 14 \times 1250 + 16 \times 1750 + 2250n}{40 + n}$

$= \dfrac{52000 + 2250n}{40 + n}$

2)

| Classe | [500 ; 1000[ | [1000 ; 1500[ | [1500 ; 2000[ | [2000 ; 2500[ |
|---|---|---|---|---|
| E.C.C | 10 | 24 | 40 | $40 + n$ |

$M_e = 1531{,}25$ d'où $M_e \in [1500 ; 2000[$, d'où

| 1500 | $M_e$ | 2000 |
|---|---|---|
| 24 | $\dfrac{40+n}{2}$ | 40 |

car $\dfrac{N}{2} = \dfrac{40+n}{2}$.

$$\frac{M_e - 1500}{\frac{40+n}{2} - 24} = \frac{2000 - 1500}{40 - 24}$$

$$\frac{M_e - 1500}{\frac{n-8}{2}} = \frac{500}{16}$$

$$M_e = 31{,}25\left(\frac{n-8}{2}\right) + 1500.$$

3) $31{,}25\left(\dfrac{n-8}{2}\right) + 1500 = 1531{,}25$

$\dfrac{n-8}{2} = 1$

$n = 10$

La moyenne est $\overline{x} = 1490$

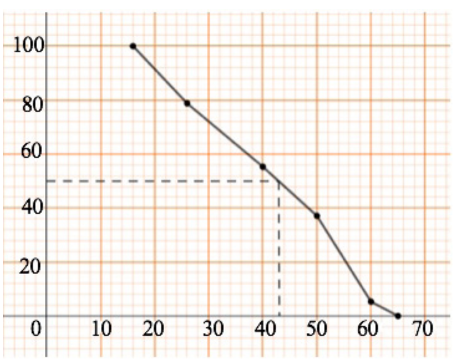
**23** 1) Tableaux des fréquences cumulées décroissantes des hommes

| Âge | Fréquences (%) | Fréquences cumulées décroissantes |
|---|---|---|
| [16 ; 26[ | 21,2 | 100 |
| [26 ; 40[ | 23,5 | 78,8 |
| [40 ; 50[ | 18,2 | 55,3 |
| [50 ; 60[ | 31,8 | 37,1 |
| [60 ; 65] | 5,3 | 5,3 |

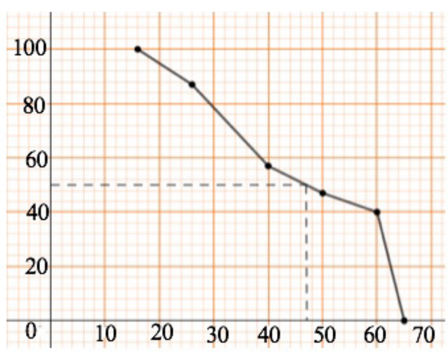
Tableaux des fréquences cumulées décroissantes des femmes

| Âge | Fréquences (%) | Fréquences cumulées décroissantes |
|---|---|---|
| [16 ; 26[ | 13 | 100 |
| [26 ; 40[ | 30 | 87 |
| [40 ; 50[ | 10 | 57 |
| [50 ; 60[ | 43 | 47 |
| [60 ; 65] | 4 | 4 |

Polygone des fréquences cumulées décroissantes des hommes




Polygone des fréquences cumulées décroissantes des femmes



2) Par lecture graphique, l'âge médian des demandeurs d'emploi de sexe masculin est 43 ans et celui des demandeurs d'emploi de sexe féminin est 47 ans.

3) Moyenne de la série des âges des hommes :

$$M = \frac{280 \times 21 + 310 \times 33 + 240 \times 45 + 70 \times 62,5}{280 + 310 + 240 + 420 + 70}$$

$$M = \frac{54385}{1320} \approx 41$$

Moyenne de la série des âges des femmes :

$$M' = \frac{160 \times 21 + 360 \times 33 + 120 \times 45 + 530 \times 55 + 50 \times 62,5}{160 + 360 + 120 + 530 + 50}$$

$$M' = \frac{52915}{1220} \approx 43$$

L'âge moyen des demandeurs d'emploi de sexe masculin est 41 ans et celui des demandeurs d'emploi de sexe féminin est 43 ans.

4)

| Âge | Centres ($c$) | Effectifs ($n$) | $nc$ | Fréquences cumulées décroissantes |
|---|---|---|---|---|
| [16 ; 26[ | 21 | 440 | 2240 | 440 |
| [26 ; 40[ | 33 | 670 | 22110 | 1110 |
| [40 ; 50[ | 45 | 360 | 16200 | 1470 |
| [50 ; 60[ | 55 | 950 | 52250 | 2420 |
| [60 ; 65] | 62,5 | 120 | 7500 | 2540 |
| Total | | 2540 | 107300 | |

Moyenne : $M = \frac{107300}{2540} \approx 42,24$

Médiane :

| | | |
|---|---|---|
| 1,75 | $M_e$ | 1,80 |
| 1,75 | 0,5 | 0,753 |

$$\frac{M_e - 40}{50 - 40} = \frac{1270 - 1110}{1470 - 1110}, \quad \frac{M_e - 40}{10} = \frac{130}{360} \text{ ; } M_e = 43,6$$

L'âge médian de ces demandeurs d'emploi est environ 43 ans et demi et leur âge moyen est environ 42 ans.

**24** 1) 2 – 2,5 – 2,5 – 5 – 5,5 – 6 – 6 – 7 – 7 – 7,5 – 7,5 – 8 – 8 – 9 – 9,5 – 10 – 10 – 11 – 12 – 12 – 13 – 13,5 – 14 – 15,5 – 17 – 17,5 – 18,5.

$\frac{N}{2} = \frac{27}{2} = 13,5$. Donc la médiane est le 14$^{\text{ème}}$ nombre cette liste ordonnée, c.-à-d. : 9.

2) La moyenne est la somme de tous ces nombres divisée par l'effectif total

$$M = \frac{257}{27} \approx 9,5$$

La variance est la racine carrée de l'écart-type, celui-ci étant la moyenne des carrés moins le carré de la moyenne.

$$\sigma = \sqrt{\frac{2987,5}{27} - \left(\frac{257}{27}\right)^2} \approx 4,48$$

3)

| Notes | Effectifs | Effectifs cumulés croissantes |
|---|---|---|
| [0 ; 4[ | 3 | 3 |
| [4 ; 8[ | 8 | 11 |
| [8 ; 12[ | 7 | 18 |
| [12 ; 16[ | 6 | 24 |
| [16 ; 20] | 3 | 27 |

a) La médiane

| | | |
|---|---|---|
| 8 | $M_e$ | 12 |
| 11 | 13,5 | 18 |

$$\frac{M_e - 8}{12 - 8} = \frac{13,5 - 11}{18 - 11} \; ; \; \frac{M_e - 8}{4} = \frac{2,5}{7} \; ; M_e \approx 9,4$$

b) La moyenne :

$$M = \frac{3 \times 2 + 8 \times 6 + 7 \times 10 + 6 \times 14 + 3 \times 18}{27} \approx 9,7$$

L'écart-type : $\sigma = \sqrt{V}$, avec

$$V = \frac{3 \times 2^2 + 8 \times 6^2 + 7 \times 10^2 + 6 \times 14^2 + 3 \times 18^2}{27} = -9,7^2$$

$V \approx 22,5$

Donc $\sigma \approx 4,7$

## Situation d'évaluation

**25** L'effectif de chaque modalité est : $80 \times \frac{f}{100}$ où $f$ est sa fréquence.

Pour la 2nde $C_1$

| Notes | Centres ($x$) | Effectifs ($n$) | $nx$ |
|---|---|---|---|
| [0 ; 2[ | 1 | 6 | 6 |
| [2 ; 6[ | 4 | 10 | 40 |
| [6 ; 10[ | 8 | 5 | 40 |
| [10 ; 15[ | 12,5 | 6 | 75 |
| [15 ; 25] | 20 | 9 | 180 |
| [25 ; 50] | 37,5 | 9 | 337,5 |
| [50 ; 60] | 55 | 6 | 330 |
| Totaux | | 51 | 1008,5 |

Pour la 2nde $C_2$

| Notes | Centres ($x$) | Effectifs ($n$) | $nx$ |
|---|---|---|---|
| [0 ; 2[ | 1 | 2 | 2 |
| [2 ; 6[ | 4 | 6 | 24 |
| [6 ; 10[ | 8 | 5 | 40 |
| [10 ; 15[ | 12,5 | 4 | 50 |
| [15 ; 25] | 20 | 5 | 100 |
| [25 ; 50] | 37,5 | 4 | 150 |
| [50 ; 60] | 55 | 3 | 165 |
| Totaux | | 29 | 531 |

1) Moyenne de la 2nde $C_1$

$$\overline{x} = = \frac{1008,5}{51} \approx 19,77$$

Moyenne de la 2nde $C_2$

$$\overline{x'} = \frac{531}{29} \approx 18,31$$

2) Pour la 2nde $C_1$

| Centres ($x$) | Effectifs ($n$) | $n\lvert x - \overline{x}\rvert$ | $nx^2$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 112,62 | 6 |
| 4 | 10 | 157,7 | 160 |
| 8 | 5 | 58,85 | 320 |
| 12,5 | 6 | 43,62 | 937,5 |
| 20 | 9 | 2,07 | 3600 |
| 37,5 | 9 | 159,57 | 12656,25 |
| 55 | 6 | 211,38 | 18150 |
| Totaux | 51 | 745,81 | 35859,75 |

- Écart moyen : $e_m = \frac{745,81}{51} \approx 14,62$
- Variance : $V = \frac{35859,75}{61} - 19,77^2 \approx 318,28$
- Écart type : $\sigma = \sqrt{V} \approx 17,84$

Pour la 2nde $C_2$

| Centres ($x$) | Effectifs ($n$) | $n\lvert x-\overline{x'}\rvert$ | $nx^2$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 34,62 | 2 |
| 4 | 6 | 85,86 | 96 |
| 8 | 5 | 51,55 | 320 |
| 12,5 | 4 | 23,24 | 625 |
| 20 | 5 | 8,45 | 2000 |
| 37,5 | 4 | 76,76 | 5625 |
| 55 | 3 | 110,07 | 9075 |
| Totaux | 29 | 390,55 | 17745 |

• Écart moyen : $e'_m = \dfrac{390,55}{29} \approx 13,47$

• Variance : $V = \dfrac{17745}{29} - 18,31^2 \approx 276,64$

• Écart type : $\sigma = \sqrt{V'} \approx 16,63$

3) On a $\left(\overline{x'}\right) < \overline{x'}$ .
Comme $e'_m < e_m$ et σ' < σ, on déduit que les notes de la 2nde $C_2$ sont plus homogènes.
En conclusion, la moyenne de la 2nde $C_2$ est inférieure à celle de la 2nde $C_1$ les notes de la 2nde $C_2$ sont plus homogènes.
Donc le chef de classe de la 2nde $C_2$ a raison en ce qui concerne l'homogénéité des notes mais pas au niveau de la moyenne.

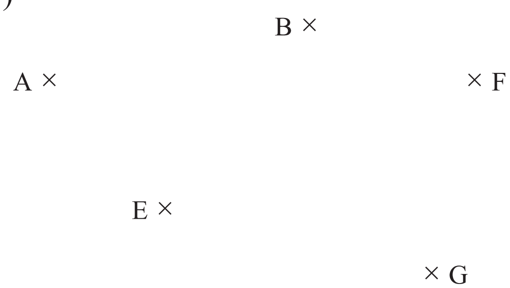
# Leçon 8 VECTEURS ET POINTS DU PLAN

## INSTALLATION DES HABILETÉS

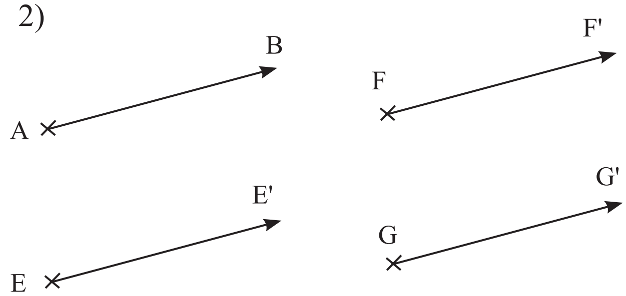
### Activité 1 Vecteurs

#### 1.1. Présentation et notations

1)

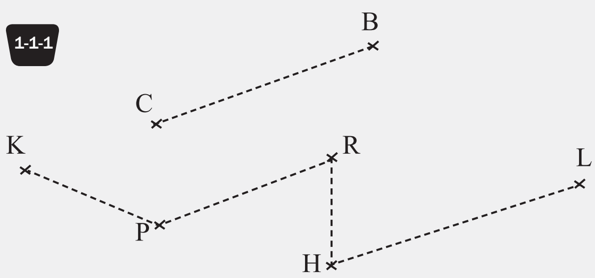



2)




**Exercices de fixation**

1-1-1

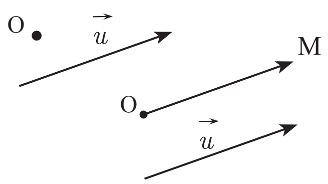



1-1-2 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ; $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{ED}$ ; $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{EA}$ ; $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{FA}$

#### 1.2. Propriété fondamentale

1)

2)

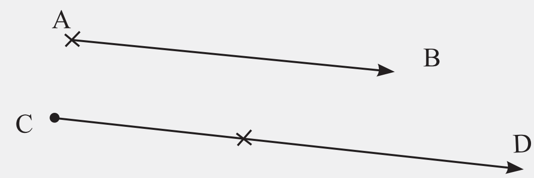



3) On a $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ ; supposons qu'il existe N tel que $N \neq M$, $\overrightarrow{ON} = \vec{u}$ ,
d'où $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON}$ donc M = N ce qui est absurde du M = N.

## Exercices de fization

1)


2)




### 1.3. Somme de vecteurs

1) D'après la propriété fondamentale, il existe un unique point R tel que $\overrightarrow{PR} = \vec{u}$ et un unique point S tel que $\overrightarrow{RS} = \vec{v}$ .

2) D'après la propriété fondamentale, il existe un unique point R' et un unique point S' tels que $\overrightarrow{P'R'} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{R'S'} = \vec{v}$ .

3. a) $\overrightarrow{PR} = \vec{u} = \overrightarrow{P'R'}$ et $\overrightarrow{RS} = \vec{v} = \overrightarrow{R'S'}$ .

b) On a $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{P'R'}$ et $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{R'S'}$ .

$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{P'R'}$ donc $\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'R} = \overrightarrow{P'R} + \overrightarrow{RR'}$, d'où $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{RR'}$ .

On montre de même que $\overrightarrow{RR'} = \overrightarrow{SS'}$ .

c) On a $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{P'R'}$ et $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{R'S'}$

Donc $\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{P'R'} + \overrightarrow{R'S'}$ ; et donc $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{P'S'}$ .

## Exercices de fixation

**13-1** 1- a ; 2- c ; 3- b ; 4- c

**13-2**

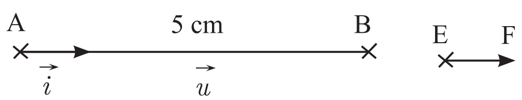
$$\begin{aligned}\vec{u} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA}\\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} + \vec{O}\\ &= \overrightarrow{AA} + \vec{O}\\ &= \vec{O}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CA}\\ &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA}\\ &= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{CD}\\ &= \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{CD}\\ &= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DD} = \vec{O}.\end{aligned}$$

### 1.4. Norme d'un vecteur - Vecteur unitaire

1. a)




b)


c) $\overrightarrow{CD} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ donc $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ ,
d'où $CD = AB$.

2. a) $\vec{i} = \frac{1}{5}\vec{u}$ (Voir figure 1.a)

b) $\overrightarrow{EF} = \vec{i}$ (Voir figure 1.a)

c) $\overrightarrow{EF} = \vec{u}$ or $\vec{i} = \frac{1}{5}\vec{u}$ d'où $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{5}\vec{u}$ ,

donc $EF = \frac{1}{5}AB = \frac{1}{5} \times 5 = 1$ .

## Exercices de fixation

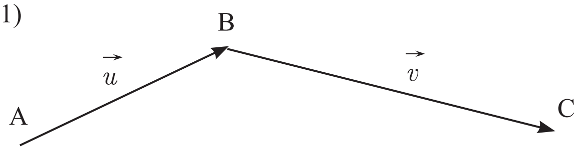
$\|\overrightarrow{AD}\| = 8$ ; $\|\overrightarrow{BE}\| = 4$ ; $\|\overrightarrow{GO}\| = 4$ ;

$AB^2 + BO^2 = AO^2$ d'où $AO^2 = 4^2 + 4^2 = 2 \times 4^2$ (Pythagore),

d'où $\|\overrightarrow{AO}\| = 4\sqrt{2}$ .

### 1.5. Quelques propriétés de la norme

1)




a) On a : AC $\leq$ AB + AC.

b) $\|\overrightarrow{AC}\| \leq \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{AC}\|$

$\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{w}\| + \|\vec{v}\|$.

2) $\|\vec{w}\| = 3$. Soit (E, F) un représentant de $\vec{w}$. Alors $\|\vec{w}\|$ = EF

$\|5\vec{w}\| = 5\text{EF} = 5 \times 3 = 15.$

$\|-8\vec{w}\| = 8\text{EF} = 8 \times 3 = 24$

$\left\|\frac{1}{5}\vec{w}\right\| = \frac{1}{5}\text{EF} = \frac{1}{5} \times 3 = \frac{3}{5}.$

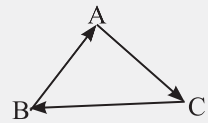
## Exercices de fixation

**1-5-1** 1) $\|\vec{u}+\vec{w}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{w}\|$.

2) $\|\vec{u}\| = 5$ donc

- $\|-\vec{u}\| = \|\vec{u}\| = 5$
- $\|2\vec{u}\| = 2 \times 5 = 10$
- $\|-3\vec{u}\| = |\,3\,|\,\|\vec{u}\| = 3 \times 5 = 15.$

**1-5-2**




1) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ et
$\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\| \leq \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{AC}\|$
donc AC $\leq$ AB + BC

2) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ et
$\|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\| \leq \|\overrightarrow{AC}\| + \|\overrightarrow{CB}\|$
donc AB $\leq$ AC +BC

3) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$
$\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\| \leq \|\overrightarrow{BA}\| + \overrightarrow{AC}$
donc BC $\leq$ BA +AC.

### 1.6. Vecteurs colinéaires

1) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
donc il existe un nombre réel $k$ tel que
$\vec{v} = k\vec{u}$ ou $\vec{u} = k\vec{v}$
donc $k\vec{u} - \vec{v} = \vec{0}$ ou $-k\vec{v} + \vec{u} = \vec{0}$.

2) $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$, $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$.

a) $\alpha \neq 0$ donc : $\vec{u} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{v}$.

b) $\beta \neq 0$ donc : $\vec{v} = -\frac{\alpha}{\beta}\vec{v}$.

3) D'après la question 1), si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors il exite deux nombres réels $a$ et $b$ tous deux non nuls tels que $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$.

D'après la question 2), s'il existe un couple de nombres réels $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ tel que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

## Exercices de fixation

$\overrightarrow{NQ} - 5\overrightarrow{NS} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{NQ}$ et $\overrightarrow{NS}$ sont colinéaires car (1 ; − 5) ≠ (0 ; 0).

## Activité 2 Bases et repères

### 2.1. Définitions

1) Pour aller de la piscine à la pharmacie, on se déplace horizontalement de 5 cases puis verticalement de 1 case.

2) Poste (8 ; 3) ; École primaire (3 ; 1) ; Boucherie (7 ; 1).

## Exercices de fixation

1) A(3 ; 2) ; B(1 ; 1) ; E(−3 ; 0) ; D(2 ; −2).

2) a) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires car n'ont pas la même direction, donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est une base de $\mathcal{V}$.

b) Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{ED}$ n'ont pas la même direction ; donc les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{ED}$ ne sont pas colinéaires ; d'où $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{ED})$ est une base de $\mathcal{V}$.

## 2.2. Coordonnées d'un vecteur

1) a) Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont non colinéaires.

b) $\vec{u} = 2\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}$ ; $\vec{v} = 3\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$ ; $\vec{w} = -2\vec{i} - \vec{j}$.

2) $\vec{u} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ et $\vec{u} = \alpha'\vec{a} + \beta'\vec{b}$ donc $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \alpha'\vec{a} + \beta'\vec{b}$.

d'où $(\alpha - \alpha')\vec{a} + (\beta - \beta')\vec{b} = \vec{0}$ or $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont non colinéaires.

donc $\alpha - \alpha' = 0$ et $\beta - \beta' = 0$

$\alpha = \alpha' =$ et $\beta = \beta'$

## Exercices de fixation

**2-2-1**

$\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{j} + 3\vec{j}$

$= -\vec{i} - 2\vec{j}$

d'où $\vec{u}(-1 ; -2)$.

$\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{15}{2}\vec{j}$

$= -\vec{i} + 7\vec{i}$

$\vec{v}(-1 ; 7)$.

**2-2-2** On a :

$\overrightarrow{AB}(-2 ; -\sqrt{2})$ d'où $\overrightarrow{AB} = -2\vec{i} - \sqrt{2}\vec{j}$

Soit P($x$ ; $y$) ;

$\overrightarrow{AP} = (x-1)\vec{i} + (y - \sqrt{2})\vec{j}$.

Or $-\sqrt{2}\,\overrightarrow{AB} = 2\sqrt{2}\vec{j} + 2\vec{j}$.

Ainsi

$\overrightarrow{AP} = -\sqrt{2}\,\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow x - 1 = 2\sqrt{2}$ et $y - \sqrt{2} = 2$ ;

$\Leftrightarrow x = 2\sqrt{2} + 1$ et $y = 2 + \sqrt{2}$.

d'où $P(1 + 2\sqrt{2} ; 2 + 2\sqrt{2})$.

## 2.3. Coordonnées d'une combinaison linéaires de vecteurs

1. a)

- $\vec{u} + \vec{v} = \frac{1}{2}\vec{i} - 3\vec{j} - \frac{4}{3}\vec{i} + \frac{5}{2}\vec{j}$.

  $= -\frac{5}{6}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$.

- $\vec{u} - \vec{v} = \frac{1}{2}\vec{i} - 3\vec{j} + \frac{4}{3}\vec{i} - \frac{5}{2}\vec{j} = \frac{11}{6}\vec{i} - \frac{11}{2}\vec{j}$.

- $\frac{3}{7}\vec{u} - \vec{v} = \frac{3}{14}\vec{i} - \frac{9}{7}\vec{i} + \frac{4}{3}\vec{i} - \frac{5}{2}\vec{j}$.

  $= \frac{65}{42}\vec{i} - \frac{53}{14}\vec{j}$.

- $\frac{11}{3}\vec{u} - \frac{4}{7}\vec{v} = \frac{11}{6}\vec{i} - 11\vec{j} + \frac{16}{21}\vec{i} - \frac{10}{7}\vec{j}$

  $= \frac{77 + 32}{42}\vec{i} - \frac{77 + 10}{7}\vec{j}$

  $= \frac{109}{42}\vec{i} - \frac{87}{7}\vec{j}$.

b) $(\vec{u} + \vec{v})\left(-\frac{5}{6} ; -\frac{1}{2}\right)$

$\left(\frac{3}{7}\vec{u} - \vec{v}\right)\left(\frac{65}{42} ; -\frac{53}{14}\right)$.

## Exercices de fixation

- $\vec{u}+\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{4}{3}\vec{i}-3\vec{j}+\frac{5}{2}\vec{j}$

  $=-\frac{5}{6}\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}$ d'où $(\vec{u}+\vec{v})\left(-\frac{5}{6};-\frac{1}{2}\right)$.

- $\vec{u}-\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{4}{3}\vec{i}-3\vec{j}-\frac{5}{2}\vec{j}$

  $=\frac{11}{6}\vec{i}-\frac{11}{2}\vec{j}$ donc $(\vec{u}-\vec{v})\left(\frac{11}{6};\frac{11}{2}\right)$

- $\left(\frac{3}{7}\vec{u}-\vec{v}\right)\left(\frac{65}{42};-\frac{53}{14}\right)$

- $\left(\frac{11}{3}\vec{u}-\frac{4}{7}\vec{v}\right)\left(\frac{109}{42};-\frac{87}{7}\right)$.

## 2.4. Déterminant de deux vecteurs dans une base

1) a) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc $\vec{u}=k\vec{v}$, d'où $x=kx'$ et $y=ky'$.

b) $xy'-yx'=kx'y'-ky'x'=0$

2) $xy'-yx'=0$ donc $xy'=yx'$ d'où $\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=k$.

Ainsi, $x=kx'$ et $y=ky'$, d'où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

## Exercices de fixation

**2-4-1**

$\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\begin{vmatrix}-1 & 7\\ 2 & -3\end{vmatrix}=3-14=-11$

$\det\left(\vec{u};\vec{w}\right)=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=-4-4=-8$

$\det\left(2\vec{w};\vec{u}\right)=\begin{vmatrix}4 & -1\\ 8 & 2\end{vmatrix}=8+8=16$

$\det\left(-\vec{v};\vec{w}\right)=\begin{vmatrix}-7 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-28-6=-34.$

**2-4-2**

a) $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\begin{vmatrix}\sqrt{2} & 1\\ 2 & \sqrt{2}\end{vmatrix}=2-2=0$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

b) $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\begin{vmatrix}2 & -4\\ 7 & 14\end{vmatrix}=28+28=56$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.

c) $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\begin{vmatrix}\frac{5}{2} & 2+\sqrt{3}\\ 2-\sqrt{3} & \frac{3}{5}\end{vmatrix}=1-1=0$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

**2-4-3**

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ $\det \vec{u},\vec{v}=0$.

$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}3 & 2\\ m & -3\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow-9-2m=0\Leftrightarrow m=-\frac{9}{2}$.

## Activité 3 Mesure algébrique

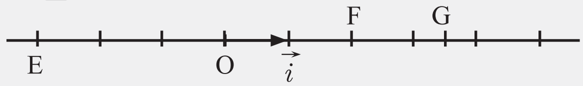
1) $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{i}$ sont dans le même sens, donc $\alpha > 0$ ;
$\overrightarrow{FB}$ et $\vec{i}$ sont de sens contraire, donc $\beta < 0$ .

2) $\overrightarrow{AB} = 5\vec{i}$ $\quad$ $\overrightarrow{BC} = \vec{i}$
$\overrightarrow{FB} = -3\vec{i}$ $\quad$ $\overrightarrow{EF} = 6\vec{i}$
$\overrightarrow{CE} = -4\vec{i}$

### Exercices de fixation

**3-1** $\overline{AB} = 7$ ; $\overline{AC} = 4$ ; $\overline{BC} = -3$ ; $\overline{OA} = -2.$

**3-2**




# Exercices

### Exercices de renforcement

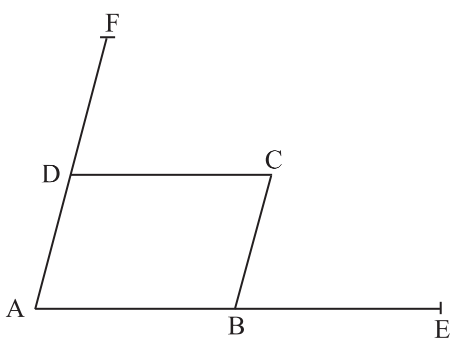
**1**

1. Faux
2. Vrai
3. Faux
4. Faux
5. Faux
6. Faux
7. Vrai
8. Faux
9. Faux
10. Vrai
11. Faux
12. Vrai.

**2** 1) $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$
Donc $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA}.$
D'où $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}.$
Par suite, le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

2) On a : $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}.$
Donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BD}.$
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DE}.$

**3** 1)




2) On a : $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BE}$ (1) et $\overrightarrow{DF} = -\overrightarrow{CB}$ (2).
(1) − (2) donne $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CB}$
$\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{CE}.$
Donc le point C est le milieu de [EF].

**4** 1) I = mil [AB], $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}.$
On a donc $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM}.$
$= 2\overrightarrow{IM}.$

2. a) $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB}.$
L'ensemble des points M est la droite passant par C et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ ou la droite passant par C et parallèle à (AB) privé du point C.

b) $\overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{AB}, k \in \mathbb{R}$
Si $k = 0$, alors C = M. Donc (E)=$\{C\}$.
Si $k \neq 0$, alors (E) est la droite passant par C
et parallèle à la droite (AB), privée du point C.

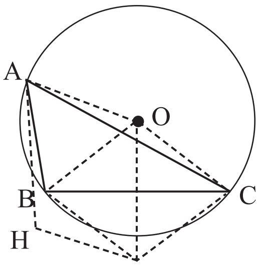
c) $\|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}\| = 8 \Leftrightarrow \|2\overrightarrow{IM}\| = 8 \Leftrightarrow IM = 4$ .
(E) est le cercle de centre I et de rayon 4.

**5** On a : $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}1-\sqrt{2}\\\sqrt{2}-2\end{pmatrix}$.

De plus, $\det\left(\overrightarrow{CE} ; \overrightarrow{CD}\right) = \begin{vmatrix}1-\sqrt{2} & \sqrt{2}\\\sqrt{2}-2 & 2\end{vmatrix}$
$= 2 - 2\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2}$
$= 0.$

Comme $\det\left(\overrightarrow{CE}\,;\overrightarrow{CD}\right) = 0$ alors les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires d'où les points C, E et D sont alignés.

**6** 1. a) Construction




b) On a : $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ donc $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OC}$.

Donc le quadrilatère OBDC est un parallélogramme.

2. a) Construction

b) On a :

$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$ donc $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$ ; d'où $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{OA}$, donc le quadrilatère OAHD est un parallélogramme.

**7** 1)

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2}-1.$$

2. a) On a :

$$\vec{S}\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\,;\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) \text{ et } \vec{T}\left(2(\sqrt{2}-1)\,;\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right).$$

Donc

$$\vec{S}\left(\sqrt{2}-1\,;\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) \text{ et } \vec{T}\left(2(\sqrt{2}-1)\,;\sqrt{2}-1\right).$$

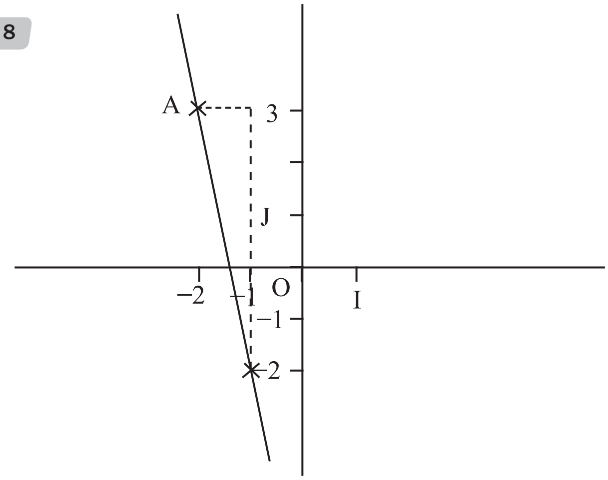
On peut remarquer que $\vec{T} = 2\vec{S}$ ou bien

$$\det\left(\vec{S}\,;\vec{T}\right) = \begin{vmatrix} \sqrt{2}-1 & 2(\sqrt{2}-1) \\ \dfrac{\sqrt{2}-1}{2} & \sqrt{2}-1 \end{vmatrix}$$
$$= (\sqrt{2}-1)^2 - (\sqrt{2}-1)^2 = 0$$

Donc les vecteurs $\vec{S}$ et $\vec{T}$ sont colinéaires.

b) $$\|\vec{T}\| = \sqrt{\left(2(\sqrt{2}-1)\right)^2 + (\sqrt{2}-1)^2}$$
$$= \sqrt{4(\sqrt{2}-1)^2 + (\sqrt{2}-1)^2}$$
$$= \sqrt{5(\sqrt{2}-1)^2} = |\sqrt{2}-1|\sqrt{5}$$
$$= (\sqrt{2}-1)\sqrt{5} = \sqrt{5}(\sqrt{2}-1).$$

**8**




**9** 1. $\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{HC}$ ; 2. $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{IH} = \overrightarrow{GG}$ ;
3. $\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{AA}$ 4. $\overrightarrow{JF} + \overrightarrow{IH} = \overrightarrow{DH}$ ;
5. $\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{HI} = \overrightarrow{GI}$ ; 6. $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AH}$ .

**10** $\overrightarrow{BP} = 3\vec{v}$ ; $\overrightarrow{OC} =. -3\vec{u} - \vec{v}$ ;

$\overrightarrow{EP} = -\vec{u} + 3\vec{v}$ ; $\overrightarrow{MA} = -2\vec{u} - 4\vec{v}$ ;

$\overrightarrow{CQ} = 2\vec{u} + \vec{v}$ ; $\overrightarrow{SL} + \overrightarrow{FK} = (-2\vec{u} - \vec{v}) + (2\vec{v} - \vec{u})$
$= -3\vec{u} + \vec{v}$

$\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{PK} = (2\vec{v} - 4\vec{u}) + (\vec{u} - 2\vec{u})$
$= -3\vec{u}$

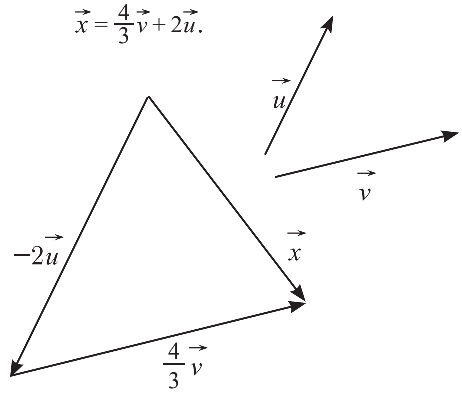
$\overrightarrow{BF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EN} = \left(2\vec{u} - \vec{v}\right) + \frac{1}{2}\left(\vec{u} + \vec{v}\right)$
$= \frac{5}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$

$\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{RO} = \vec{v} + (\vec{u} - \vec{v})$
$= \vec{u}$

$\overrightarrow{GD} + 2\overrightarrow{RJ} = (\vec{v} - 2\vec{u}) + 2(\vec{u} - 3\vec{v})$
$= -2\vec{v}$

**11** On a : $2\left(\vec{x} + 3\vec{u}\right) - 2\vec{v} = \frac{1}{2}\left(4\vec{v} - 2\vec{x}\right)$.

Donc $2\vec{x} + 6\vec{u} - 2\vec{v} - 2\vec{v} + \vec{x} = \vec{0}$
$3\vec{x} = 4\vec{v} - 6\vec{u}$
$\vec{x} = \frac{4}{3}\vec{v} + 2\vec{u}$.



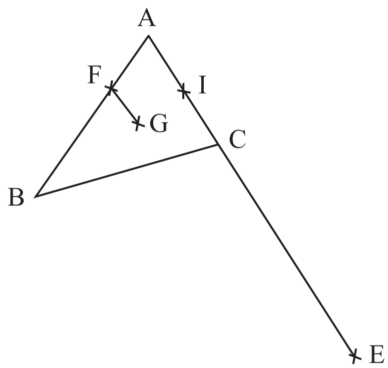
**12** $\overrightarrow{EM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ; $\overrightarrow{GF}\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{EM} = -2\overrightarrow{EF} - 3\overrightarrow{GF} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = -2\times 2 - 3\times 5 \\ y-2 = -2(-3) - 3\times(-6) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -18 \\ y = 24 \end{cases}$$

d'où M(−18 ; 24).

**13** 1. Faux ; 2. Faux ; 3. Vrai.

**14** 1) Construction




2. a) $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AF}$

donc $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} = 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AF})$

$\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{FC}$.

b) $\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{FC}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{FC}$ sont colinéaires, d'où les droites (BE) et (FC) sont parallèles.

3. a) $\overrightarrow{BF} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

b) $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

4. a) I = mil [AC], donc $\overrightarrow{AI} = +\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, d'où $\overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

c) $\frac{2}{3}\overrightarrow{BI} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

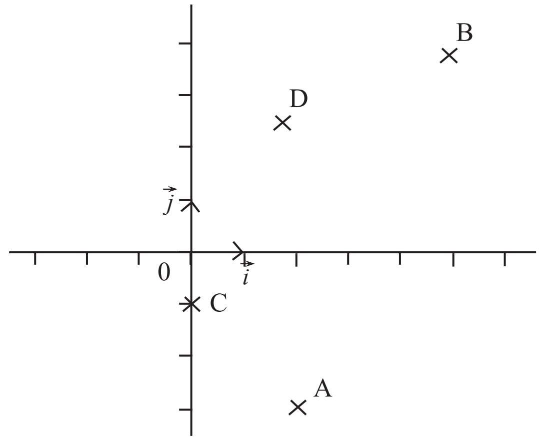
d) On a :

$\overrightarrow{BG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\frac{2}{3}\overrightarrow{BI} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ ;

donc $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont colinéaires, donc les points B, G et I sont alignés.

**15** 1) Construction




2) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$ on peut remarquer que

$\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, d'où (AB) et (CD) sont parallèles.

3) $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

$$\det(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = \begin{vmatrix} -2 & -\frac{7}{2} \\ 2 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = 3 + 7 = 10.$$

$10 \neq 0$ donc $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ ne sont pas colinéaires ; d'où les droites (AC) et (BD) sont sécantes.

**16**

a) $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} x-1 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix}$.

A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

$\Leftrightarrow x = 1$.

b) $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -3 \\ 3-x \end{pmatrix}$.

A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -3 \\ -2 & 3-x \end{vmatrix} = 0.$$

$\Leftrightarrow x = 15$.

c) $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} x-1 \\ 2-x \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 0 \\ -2-x \end{pmatrix}$.

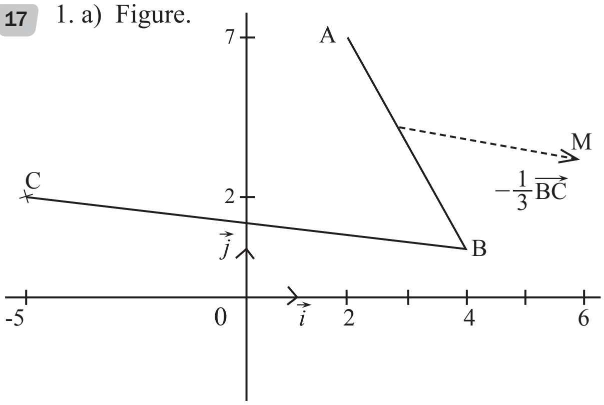
A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow$ dét$\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\right)=0$.

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ 2-x & -2-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(-2-x)=0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x=-2.$$

**17** 1. a) Figure.




$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ ; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -7 \\ -5 \end{pmatrix}$.

b) $AB=\sqrt{7^2+5^2}=\sqrt{74}$.

$AC=\sqrt{2^2+(-6)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$.

$BC=\sqrt{2^2+(-6)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$.

2. a) Construction du point M ;

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

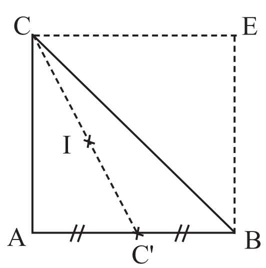
b) Soit M($x$ ; $y$). On a $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-7 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=1+3 \\ y-7=-3-\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=\frac{11}{3} \end{cases}.$$

**18** 1)

A(0 ; 0)
B(1 ; 0)
C(0 ; 1)




2) C' = mil[AB] donc C' $\left(\frac{1}{2}\,;0\right)$.

I = mil[CC'], donc I $\left(\dfrac{\frac{1}{2}+0}{2}\,;\dfrac{0+1}{2}\right)$; I$\left(\frac{1}{4}\,;\frac{1}{2}\right)$.

3. a) Voir figure 1).

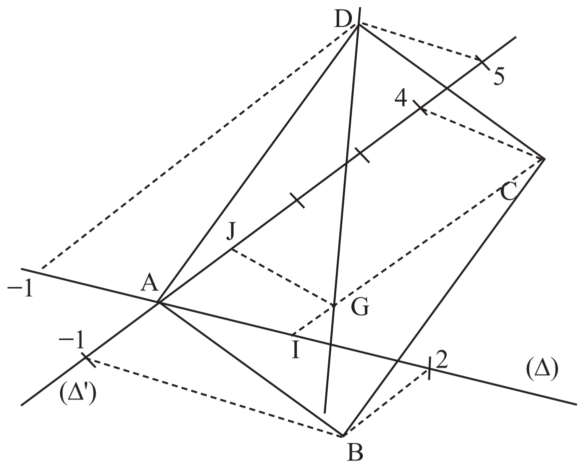
b) $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$ où M($x$ ; $y$)

$$M \in (\Delta) \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{EM}\,,\overrightarrow{BC}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ y-1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow x+y-2=0.$$

Une équation de $(\Delta)$ est : $x+y-2=0$

**19**




1) A, I et J ne sont pas alignés donc $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ ne sont pas colinéaires. D'où $\left(\overrightarrow{AI}\,,\overrightarrow{AJ}\right)$ est une base de $\mathcal{V}$.

2. a) Voir figure

b) On a : $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$
$=-2\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{AI}+4\overrightarrow{AJ}=-\overrightarrow{AI}+5\overrightarrow{AJ}$.

Ainsi, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

3. a) A(0 ; 0) ; B(2 ; −1) et C(1 ; 4).

G$\left(\frac{0+2+1}{3}\,;\frac{0-1+4}{3}\right)$ d'où G(1 ; 1).

b) ABCD est un parallélogramme ssi $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

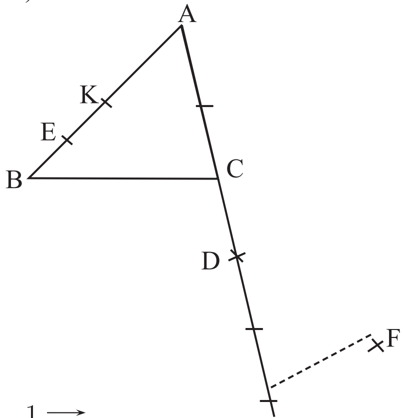
Posons D($x$ ; $y$).

$$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x=2 \\ 4-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=5 \end{cases}.$$

4) On a : $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On a : $\overrightarrow{BD}=-3\overrightarrow{BG}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont colinéaires d'où les points B, D et G sont alignés.

**20** 1) Construction




$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$ .

$\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ .

$\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{2}\overrightarrow{AC}$ .

2. a) $\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{DF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$, car $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{DF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$

D'autre part, $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ ,

d'où $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ ; d'où $\overrightarrow{ED} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE}$ ;

De plus, $\overrightarrow{AE} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$ . Ainsi $\overrightarrow{ED} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ .

$\overrightarrow{DE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}.$

b) On a : $\overrightarrow{DE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

donc $\overrightarrow{DE} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{DF}.$

D'où les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires. Ainsi, les points D, E et F sont alignés

3. a) Voir figure.

b) K = mil[AB], donc $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right)$ .

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right)$

$= \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}.$

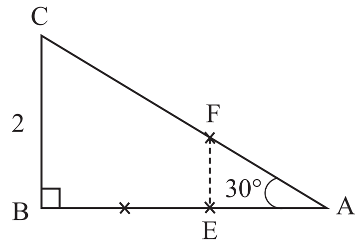
c) On a : $\overrightarrow{DE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CK}$ , donc les droites (CK) et (DE) sont parallèles.

**21** 1) $\vec{u} + \vec{v} = (3x-1)\vec{i} + (3y+7)\vec{j}$ .

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{w} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 = 5 \\ 3y + 7 = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}.$$

2) Dans ce cas, $\vec{u}$ (3 ; 5) ; $\vec{v}$ (2 ; −7) et $\vec{w}$ (5 ; −2).

**22**




1) On a : $\sin 30° = \frac{BC}{AC}$ .

D'où $AC = \frac{BC}{\frac{1}{2}} = 2BC = 4.$

D'autre part, $\cos 30° = \frac{BC}{AC'}$ ,

d'où $AB = AC\cos 30° = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ .

2) $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ , donc $AE = \frac{1}{3}AB = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ;

D'après Thalès, dans le triangle ABC, on a :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} \text{ d'où : } EF = \frac{AE \times BC}{AB} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3} \times 2}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$$

$$AF = \frac{AE \times AC}{AB} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3} \times 4}{2\sqrt{3}} = \frac{4}{3}$$

**23** $\vec{w} = -3\vec{a} + 2\vec{b}$

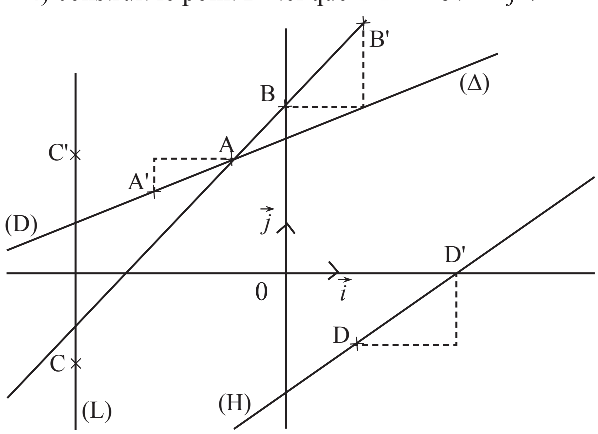
$\vec{v} = -\frac{5}{3}\vec{a} - \frac{7}{3}\vec{b}$

**24** 1) On construit le point A' tel que $\overrightarrow{AA'} = -2\vec{i} - \vec{j}$ .

2) On construit le point B' tel que $\overrightarrow{BB'} = \vec{i} + \vec{j}$ .

3) On construit le point C' tel que $\overrightarrow{CC'} = 4\vec{j}$ .

4) construit le point D' tel que $\overrightarrow{DD'} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ .

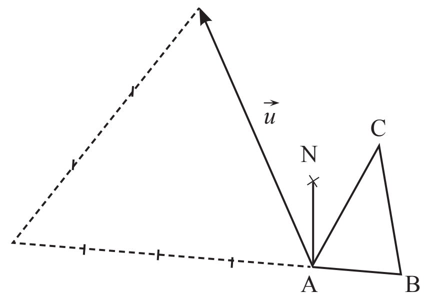


**25** 1) $\vec{u} = \overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$ .

On a : $\vec{u} = \overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{AC}$

$= -4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.

2)




3) $2\overrightarrow{NA} - \overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC} = \vec{0}$

$2\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NA} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{NA} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$2\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$

$\overrightarrow{NA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ ; donc le point N est unique.

4) Voir figure.

**26** 1) $\det\left(\vec{u} \,;\vec{v}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -8 - 6 = -14$ .

On a : $(\vec{u} - 3\vec{v})\begin{pmatrix} -4 \\ 15 \end{pmatrix}$ et $-\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$; $(\vec{v} + \vec{u})\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ainsi $\det\left(\vec{u} - 3\vec{v} \,,\vec{v} + \vec{u}\right) = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 15 & -1 \end{vmatrix} = 4 - 60 = -56.$

$\det\left(\vec{v} \,,-\vec{u}\right) = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 8 = -14.$

2) a) $\det\left(\vec{u} \,,\vec{w}\right) = \begin{vmatrix} 2 & \alpha \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 3\alpha$ .

$\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires et si seulement si $-4 - 3\alpha = 0$,

d'où $\alpha = -\frac{4}{3}$ .

b) $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{v}, \vec{w}) = 0$

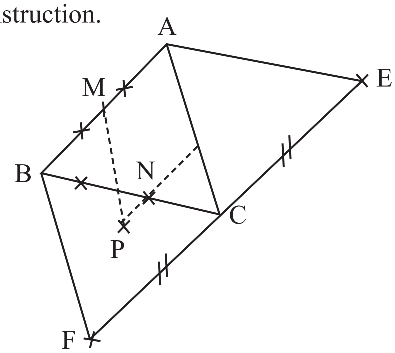
$\det(\vec{v} \,;\vec{w}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & \alpha \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 0$ .

$\Longleftrightarrow 4 + 4\alpha = 0$

$\Longleftrightarrow \alpha = -1.$

$\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires si et seulement si $\alpha = -1$.

**27** 1) Construction.




2) $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$ ;

donc $\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$ ;

$\overrightarrow{MN} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Donc les droites (MN) et (AC) sont parallèles.

3) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$ , donc $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AC}$ ,

donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CF}$

Ainsi , $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{CF}$ , donc C = mil[EF].

**28** 1) On a : $5\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$3\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ ;

D'où le point G est unique.

Autre méthode : Soit G' un point tel que $5\overrightarrow{G'A} - 2\overrightarrow{G'B} = \vec{0}$

donc $5\overrightarrow{GA} - 5\overrightarrow{G'A'} = 2\left(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BG'}\right)$

$\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$

d'où G' = G

2) On a : $5\overrightarrow{GO} + 5\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{GO} - 2\overrightarrow{OB} = \vec{0}$

$3\overrightarrow{GO} = -5\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OG} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{AO} - \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$ .

Ainsi, $\overrightarrow{OG}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ .

3. a) $\overrightarrow{OA}\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

$\|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = 1$ .

D'où $\overrightarrow{OG}$ est un vecteur unitaire.

b) $\overrightarrow{OG} = \frac{5}{3}\overrightarrow{OA} - \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$

$= \frac{5}{3}\left(\frac{3}{5}\overrightarrow{OI} + \frac{4}{5}\overrightarrow{OJ}\right) - \frac{2}{3}\left(-2\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OJ}\right)$

$= \overrightarrow{OI} + \frac{4}{3}\overrightarrow{OJ} + \frac{4}{3}\overrightarrow{OI} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OJ}$

$\overrightarrow{OG} = \frac{7}{3}\overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OJ}$.

Ainsi, $G\left(\frac{7}{3}, 2\right)$ dans le repère (O , I , J).

**29** 1) $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} a-3 \\ -3 \end{pmatrix}$ ; $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} a+3 \\ -3 \end{pmatrix}$ ; $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix} -3 \\ b-3 \end{pmatrix}$ ;

$\overrightarrow{BN}\begin{pmatrix} 3 \\ b-3 \end{pmatrix}$ ; $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} a-3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2) $\det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}\right) = \begin{vmatrix} a-3 & -3 \\ -3 & b-3 \end{vmatrix} = (a-3)(b-3)-9$

$\det\left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{BN}\right) = \begin{vmatrix} a-3 & 3 \\ 3 & b-3 \end{vmatrix} = (a-3)(b-3)-9.$

Ainsi, $\det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}\right) = \det\left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{BN}\right)$.

3) Si A, M et N sont alignés, alors $\det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}\right) = 0$, d'où $\det\left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{BN}\right) = 0$.

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{BN}$ sont colinéaires, d'où les droites (CM) et (BN) sont parallèles.

4) Si (CM) // (BN), alors $\det\left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{BN}\right) = 0$, d'où $\det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}\right) = 0$ ; donc les points A, M et N sont alignés.

## Exercices d'approfondissement

**30** 1) $3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}.$

$3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$ Donc G est le centre de gravité du triangle ABC.

2) $G\left(\dfrac{-1+1+4}{3} ; \dfrac{3-2+2}{3}\right)$ ; $G\left(\dfrac{4}{3} ; 1\right)$.

3) a) A, B et C ne sont pas alignés, donc (A , B , C) est un repère du plan.

b) $3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ ;

D'où $G\left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$

**31** 1. a) On a : $\overrightarrow{MN}(-2 ; -1)$ et $\overrightarrow{MP}(3 ; -2)$ ;

donc $(2\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP})\begin{pmatrix} -4+3 \\ -2-2 \end{pmatrix}$ ; $(2\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP})\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

b) Soit $D(x_D ; y_D)$ ; $\overrightarrow{MD}\begin{pmatrix} x_D+1 \\ y_D-4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D + 1 = -1 \\ y_D - 4 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -2 \\ y_D = 0 \end{cases}.$

D (−2 ; 0).

2) $\overrightarrow{NE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{NP}$. Posons $(x_E ; y_E)$ les coordonnées de E :

$\overrightarrow{NE}\begin{pmatrix} x_E+3 \\ y_E-3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{NP}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, ainsi $\frac{1}{3}\overrightarrow{NP}\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

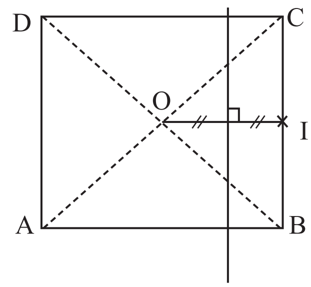
$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{NP} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E + 3 = \frac{5}{3} \\ y_E - 3 = -\frac{1}{3} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_E = -\frac{4}{3} \\ y_E = \frac{8}{3} \end{cases}$

$E\left(-\frac{4}{3} ; \frac{8}{3}\right)$.

3) On a : $\overrightarrow{MD}\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ME}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{ME}$, donc les points M, D et E sont alignés.

**32**




1. a) O = mil[AC] et O = mil[DB] donc

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$.

Ainsi, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}$

$= 4\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$

$= 4\overrightarrow{MO}.$

2) $\left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \right\| = 4MO$ et

$\left\| -\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \right\| = \left\| 2\overrightarrow{MI} \right\|$ car I = mil[BC]

$= 2MI$

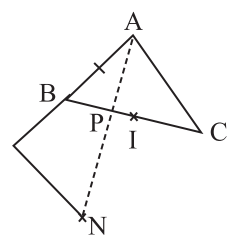
Ainsi, $\left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \right\| = 2\left\| -\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \right\|$

$\Leftrightarrow$ 4MO = 4MI

$\Leftrightarrow$ MO = MI.

L'ensemble cherché est la médiatrice du segment [OI].

**33**



2\. a) $3\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{BC}=\vec{0}$ donc $\overrightarrow{BP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$

b) Voir figure.

3\. a) $\overrightarrow{BP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}.$

$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}.$

b) $\overrightarrow{AN}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}.$

donc $5\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AN}.$

c) Les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires ; donc les points A, P et N sont alignés.

4\. a) A, B et C ne sont pas alignés, donc $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AB}\right)$ est une base de $\mathcal{V}$.

b) $\overrightarrow{AN}\left(\frac{3}{2};1\right)$, et $\overrightarrow{AP}\left(\frac{3}{5};\frac{2}{5}\right)$.

c) $\det\left(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AN}\right)=\begin{vmatrix}\frac{3}{5} & \frac{3}{2}\\ \frac{2}{5} & 1\end{vmatrix}=\frac{3}{5}-\frac{3}{5}=0.$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires d'où les points A, P et N sont alignés.

5\) $I=\text{mil}[BC]$, donc $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AI}$

$\overrightarrow{AN}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}.$

$\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IN}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}.$

$\overrightarrow{IN}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{IN}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$

Donc $N\left(1;\frac{1}{2}\right)$ dans le repère $\left(I,\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$,

• $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}.$

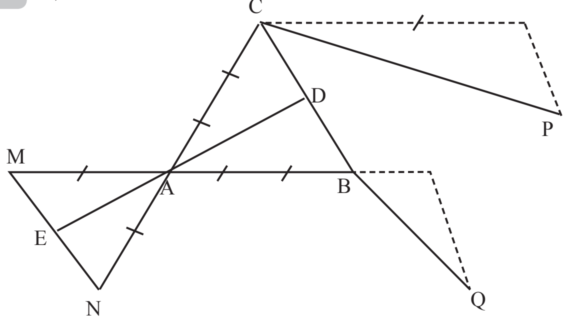
$\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IP}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}.$

$\overrightarrow{IP}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$

$=\frac{1}{10}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{10}\overrightarrow{AC}.$

Donc $P\left(\frac{1}{10};-\frac{1}{10}\right)$ dans le repère $\left(I,\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$.

**34** 1) Construction




2\. a) $\overrightarrow{AM}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$

$\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}.$

$\overrightarrow{MN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

b) $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires donc les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

c) $D=\text{mil}[BC]$ donc $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}.$

$E=\text{mil}[MN]$ donc $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{AE}$.

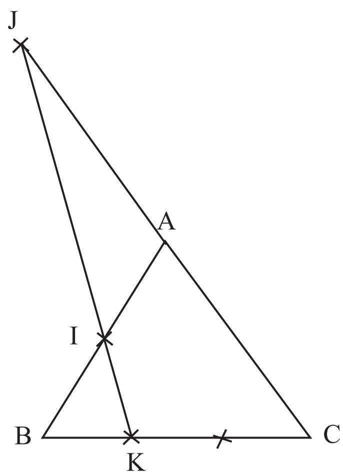
Or $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=-\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).$

Donc $2\overrightarrow{AE}=-\frac{2}{3}\times 2\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AE}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}.$

$\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires donc les points A, E et D sont alignés.

**35**




1\) On a :

● $\overrightarrow{JC}=2\overrightarrow{JA}$, donc $\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{JA}$

d'où $\overrightarrow{JA}=\overrightarrow{AC}$

donc $\overrightarrow{AJ}=-\overrightarrow{AC}$.

● $\overrightarrow{KB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{KC}$, donc $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{KA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

d'où $\frac{3}{2}\overrightarrow{KA}=-\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{KA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$

2\) Dans le repère (A ; B ; C)

$A(0\,;0)$ ; $I=\left(\frac{1}{2};0\right)$ ; $J(0\,;-1)$ ; $K=\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$.

$\overrightarrow{IJ}\left(-\frac{1}{2};-1\right)$

$\overrightarrow{IK}\left(\frac{1}{6};\frac{1}{3}\right)$

$$\det\left(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IK}\right)=\begin{vmatrix}\frac{-1}{2} & \frac{1}{6}\\ -1 & \frac{1}{3}\end{vmatrix}$$
$$=-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=0.$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires ; d'où les points I, J et K sont alignés.

## Situation d'évaluation

**36** 1) $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $I\left(\frac{2}{3};0\right)$;

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ donc $C(1;1)$.

$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

donc $K\left(\frac{2}{3};\frac{1}{2}\right)$

$D(0;1)$

b) $\overrightarrow{DI}\left(-\frac{2}{3};1\right)$; $M(x\,;y)$ ; $\overrightarrow{DM}(x;y-1)$.

$M\in(DI)\Leftrightarrow\det\left(\overrightarrow{DM},\overrightarrow{DI}\right)=0$

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x & -\frac{2}{3}\\ y-1 & 1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow x+\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}=0$$
$$\Leftrightarrow 3x+2y-2=0$$

$(DI) : 3x+2y-2=0.$

c) $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ donc $J\left(0;\frac{1}{2}\right)$;

$\overrightarrow{BJ}\left(-1;\frac{1}{2}\right)$; $\overrightarrow{BM}(x-1;y)$.

$M\in(BJ)\Leftrightarrow\det\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BJ}\right)=0$

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-1 & -1\\ y & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+y=0$$
$$\Leftrightarrow x+2y-1=0$$

$(BJ) : x+2y-1=0.$

2) $M\in(BJ)\cap(ID)$ ; donc les coordonnées de M vérifient le système.

$$(S)\begin{cases}3x+2y-2=0\\ x+2y-1=0\end{cases}$$

$$(S)\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y-1=0\\ -4y+1=0\end{cases}$$

$x=\frac{1}{2}$ et $y=\frac{1}{4}$.

D'où $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$.

$\overrightarrow{MK}\left(\frac{1}{6};\frac{1}{4}\right)$ et $\overrightarrow{MC}\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$

On a $\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MK}$ donc les points M, K et C sont alignés. Mariam a raison.

**37** 1. a) O(0 ; 0) ; A(3 ; 0) ; B(3 ; 3) ; C(0 ;3) ; D(4 ; 0) ; E(4 ; 1) ; F(3 ; 1).

Déterminons une équation des droites (OF) et (CE).

$\overrightarrow{OF}(3;1)$ ; $\overrightarrow{CE}(4;-2)$.

Soit $M(x\,;y)$ ; $\overrightarrow{OM}(x;y)$ ; $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x\\ y-3\end{pmatrix}$.

• $M\in(OF)\Leftrightarrow\det\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OF}\right)=0$

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x & 3\\ y & 1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow x-3y=0.$$

Une équation de la droite (OF) est : $x-3y=0$

• $M\in(CE)\Leftrightarrow\det\left(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CE}\right)=0$

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x & 4\\ y-3 & -2\end{vmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow -2x-4y+12=0$$
$$\Leftrightarrow x+2y-6=0$$

Une équation de la droite (CE) est : $x+2y-6=0$.

Déterminons le point d'intersection des droites (OF) et (CE).

Les coordonnées du point S d'intersection sont solutions de :

$$(S)\begin{cases}x-3y=0\\ x+2y-6=0\end{cases}$$

$x=\frac{18}{5}$ ; $y=\frac{6}{5}$.

$S\left(\frac{18}{5};\frac{6}{5}\right)$.

Déterminons une équation de la droite (BD) .

$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ; $\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix} x-4 \\ y \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} M \in (BD) &\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{BD}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-4 & 1 \\ y & -3 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow -3x + 12 - y = 0 \\ &\Leftrightarrow -3x - y + 12 = 0 \end{aligned}$$

Une équation de la droite (BD) est : $3x + y - 12 = 0$

De plus, $3 \times \frac{18}{5} + \frac{6}{5} - 12 = \frac{54+6}{5} - 12$

$$\begin{aligned} &= \frac{60}{5} - 12 \\ &= 12 - 12 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc le point S ∈ (BD).

Les droites (BD), (OF) et (CE) sont concourantes.

La construction d'un échangeur est donc nécessaire.

Leçon 9

# POLYNÔME ET FRACTIONS FRACTIONNELLES

## INSTALLATION DES HABILETÉS

### Activité 1 Angles inscrits

#### 1.1. Relation entre mesure d'un angle incrit et celle de l'angle au centre associé

1. Dans chacune des figures 1 et 2, l'angle $\widehat{AMB}$ est un angle inscrit et l'angle $\widehat{AOB}$ est un angle au centre.
2. a) Dans la figure 1 :
   L' angle $\widehat{AMB}$ intercepte l'arc $\widehat{AB}$ et l'angle $\widehat{AOB}$ intercepte l'arc $\widehat{AB}$ .
   Dans la figure 2 :
   L' angle $\widehat{AMB}$ intercepte l'arc $\widehat{AB}$ et l'angle $\widehat{AOB}$ intercepte l'arc $\widehat{AB}$ .
   b) Dans la figure 1, mes $\widehat{AMB}$ $= 45°$ et mes $\widehat{AOB} = 90°$
   Dans la figure 2, mes $\widehat{AMB}$ $= 128°$ et mes $\widehat{AOB} = 360 - 104 = 256°$.
   c) mes $\widehat{AMB}$ $= \frac{1}{2} \times$ mes $\widehat{AOB}$ .
3. a) mes $\widehat{MBN}$ $= 55°$ et mes $\widehat{MAN} = 125°$.
   b) mes $\widehat{MBN}$ + mes $\widehat{MAN} = 180°$.

**Exercices de fixation**

**1-1-1** L'angle $\widehat{AEB}$ est un angle aigu inscrit dans le cercle et l'angle $\widehat{AOB}$ est l'angle au centre qui lui est associé. Donc mes $\widehat{AEB}$ $= \frac{1}{2} \times$ mes $\widehat{AOB}$ $= \frac{1}{2} \times 100$.
Ainsi mes $\widehat{AEB} = 50°$.

**1-1-2** L'angle $\widehat{AFB}$ est un angle obtus inscrit dans le cercle et l'angle $\widehat{AOB}$ est l'angle au centre qui lui est associé.
Donc mes $\widehat{AFB} = 180° - \frac{1}{2} \times$ mes $\widehat{AOB}$ $= 180° - \frac{1}{2} \times 100$.
Ainsi mes $\widehat{AFB}$ $= 130°$.

**1-1-3** L'angle $\widehat{AEB}$ est un angle aigu inscrit dans le cercle et l'angle $\widehat{AOB}$ est l'angle au centre qui lui est associé, donc mes $\widehat{AEB}$ $= \frac{1}{2} \times$ mes $\widehat{AOB}$. Par conséquent mes $\widehat{AOB} = 2 \times$ mes $\widehat{AEB} = 2 \times 60$.
En définitive, mes $\widehat{AOB} = 120°$

#### 1.2. Angle inscrit défini par une corde et une demi-tangente

1. (EF) est la tangente à (C) en A, donc (AF)⊥(OA). Comme (OA) n'est pas diamètre de (C), (OI) n'est pas perpendiculaire à (OA). Par conséquent les droites (OI) et (AF) sont sécantes.

2. Le triangle AOE est rectangle en A, donc mes $\widehat{AOE} = 90 -$ mes $\widehat{AEO}$ , soit mes $\widehat{AOI} = 90 -$ mes $\widehat{AEI}$ .
Le triangle AIE est rectangle en I car le triangle AVO est isocèle en O et I est le milieu de [AB].
Donc mes $\widehat{EAI}$ $= 90 -$ mes $\widehat{AEI}$ , soit mes $\widehat{EAB}$ $= 90 -$ mes $\widehat{AEI}$
On conclut alors que : mes $\widehat{EAB}$ = mes $\widehat{AOI}$ .

3) On a mes $\widehat{EAB}$ = mes $\widehat{AOI}$ . Or [OI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$ . Donc mes $\widehat{EAB}$ $= \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$ .

4) On a mes $\widehat{FBA} = 180 -$ mes $\widehat{EAB}$ . Donc mes $\widehat{FAB}$ $= 180 - \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$

## Exercices de fixation

**1-2-1** (NI) est la tangente à (C) en I, donc mes $\widehat{NIJ} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{IOJ}$.
Or mes $\widehat{IOJ} = 2 \times$ mes $\widehat{IKJ}$.
Donc mes $\widehat{NIJ} = \frac{1}{2} \times 2 \times$ mes $\widehat{IKJ}$ = mes $\widehat{IKJ} = 46°$.

**1-2-2** (NI) est la tangente à (C) en I, donc
mes $\widehat{JIM} = 180° - \frac{1}{2}$ mes $\widehat{IOJ}$. Or mes $\widehat{IOJ} = 2 \times$ mes $\widehat{IKJ}$.
Donc mes $\widehat{NIJ} = \frac{1}{2} \times 2 \times$ mes $\widehat{IKJ}$ = mes $\widehat{IKJ} = 46°$.

### 1.3. Angles inscrits interceptant le même arc

1. Les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ interceptent le même arc, donc ils ont la même mesure.
2. Soit O le centre de ($\mathscr{C}$). La droite (AE) est tangente à ($\mathscr{C}$) en A, donc mes $\widehat{BAE} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$.
Or mes $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$, donc mes $\widehat{AMB}$ = mes $\widehat{BAE}$.

## Exercices de fixation

**1-3-1** La droite (FA) est la tangente au cercle ($\mathscr{C}$) en A.
De plus $\widehat{FAE}$ et $\widehat{ABE}$ inetrceptent le même arc.
Donc mes $\widehat{FAE}$ = mes $\widehat{ABE} = 37°$

**1-3-2** La droite (PS) est la tangente au cercle ($\mathscr{C}$) en P.
De plus $\widehat{PRQ}$ et $\widehat{SPQ}$ interceptent le même arc.
Donc mes $\widehat{PRQ}$ = mes $\widehat{SPQ} = 29°$

### 1.4. Angles interceptant des arcs de même longueur

1. Dans un cercle, si des arcs ont la même longueur, alors ils sont interceptés par des angles au centre de même mesure. Donc mes $\widehat{AOB}$ = mes $\widehat{EOF}$ = mes $\widehat{GOH}$.
2. On a mes $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$, mes $\widehat{ENF} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{EOF}$ et mes $\widehat{IGH} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{GOH}$.
Or mes $\widehat{AOB}$ = mes $\widehat{EOF}$ = mes $\widehat{GOH}$. Donc mes $\widehat{AMB}$ = mes $\widehat{ENF}$ = mes $\widehat{IGH}$.

## Exercices de fixation

**1-4-1** Les points A, B, C, D, E, F, G et H sont régulièrement repartis sur le cercle (ils sont tels que le cercle est subdivisé en 8 arcs de même longueur).
Or si des angles inscrits dans un cercle et interceptent des arcs de même longueur, alors ils ont la même mesure.
Donc $\widehat{CDB}$ = mes $\widehat{DBE}$ = mes $\widehat{BEA}$ = mes $\widehat{EAF}$ = mes $\widehat{AFH}$ = mes $\widehat{FHB} = 22,5°$

**1-4-2** Les angles $\widehat{DUR}$ et $\widehat{OSE}$ sont inscrits dans le cercle ($\mathscr{C}$) et interceptent des arcs de même longueur.
Donc mes $\widehat{DUR}$ = mes $\widehat{OSE} = 43°$

### 1.5. Angle inscrit et bissectrice

1. a) Les angles $\widehat{API}$ et $\widehat{BPI}$ ont la même mesure car la demi-droite [PI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{APB}$.
b) Les angles $\widehat{API}$ et $\widehat{BPI}$ sont inscrits dans le cercle et ont la même mesure. Donc les arcs qu'ils interceptent ont la même longueur. Par conséquent les arcs $\overset{\frown}{AI}$ et $\overset{\frown}{BI}$ ont la même longueur.

2. a) Les angles $\widehat{ABI}$ et $\widehat{EBI}$ ont la même mesure car la demi-droite [BI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABE}$.
b) Les angles $\widehat{ABI}$ et $\widehat{EBI}$ sont inscrits dans le cercle et ont la même mesure. Donc les arcs qu'ils interceptent ont la même longueur. Par conséquent les arcs $\overset{\frown}{AI}$ et $\overset{\frown}{BI}$ ont la même longueur.

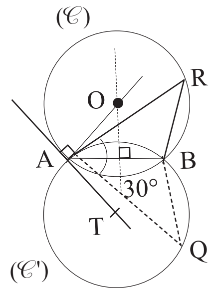
## Exercices de fixation

**1-5-1** La demi-droite [MI] est la bissectrice de l'angle inscrit $\widehat{AMN}$. Or la bissectrice d'un angle inscrit dans un cercle partage l'arc qu'il intercepte en deux arcs de même longueur.
Donc les arcs $\overset{\frown}{AI}$ et $\overset{\frown}{NI}$ ont la même longueur.

**1-5-2** La demi-droite [OK] est la bissectrice de l'angle inscrit $\widehat{DON}$. Or la bissectrice d'un angle inscrit dans un cercle partage l'arc qu'il intercepte en deux arcs de même longueur.
Donc les arcs $\overset{\frown}{KO}$ et $\overset{\frown}{KD}$ ont la même longueur.

## Activité 2 Arcs capables

1) ; 2) ; 3)




4. Le centre O du cercle (𝒞) appartient à la perpendiculaire à la droite (AT) en A et (𝒞) a pour rayon OA. Donc (AT) est la tangente en A à (𝒞).

Le centre O du cercle (𝒞) appartient à la médiatrice de [AB], donc B appartient à (𝒞).

5. Comme la perpendiculaire à la droite (AT) en A et la médiatrice de [AB] sont sécantes, le cercle (C) passant par B et tangent à (AT) est unique
Étant donné que mes $\widehat{APB}$ = mes $\widehat{BAT}$ = 60°, on déduit que P appartient à (C).

6. Les angles $\widehat{ARB}$ et $\widehat{BAT}$ sont inscrits dans le cercle et interceptent le même arc.
Donc mes $\widehat{ARB}$ = mes $\widehat{BAT}$ = 60°.

7. Voir figure.

8. mes $\widehat{AQB}$ = 30°.

## Exercices de fixation

**2-1** Programme de construction
- Tracer le segment [AB] de longueur 8 cm
- Placer un point T tel que mes $\widehat{(TAB)}$ = 60°
- Construire la perpendiculaire à (AT) en A et de la médiatrice de [AB]. Noter O leur point d'intersection
- Construire l'arc de cercle de centre O et de rayon OA situé dans le demi-plan de bord (AB) ne contenant pas le point T
- Construire le symétrique de cet arc de cercle par rapport à (AB)
- L'ensemble cherché est la réunion de deux arcs de cercle symétriques par rapport à (AB).

**2-2** L'ensemble décrit par le point M sur la figure est l'ensemble des points M tels que mes $\widehat{EMF}$ = 38°.

## Activité 3 Relations métriques dans un triangle

### 3.1. Aire d'un triangle

1. $\mathscr{A} = \dfrac{AB \times HC}{2}$

2. Dans le triangle CHA rectangle en H,
on a $\sin \widehat{BAC} = \dfrac{CH}{CA}$

3. $\mathscr{A} = \dfrac{1}{2}\, AB \times AC \times \sin \widehat{BAC}$.

4. $\mathscr{A} = \dfrac{1}{2}\, BA \times BC \times \sin \widehat{ABC}$
et $\mathscr{A} = \dfrac{1}{2}\, CA \times CB \times \sin \widehat{ACB}$.

## Exercices de fixation

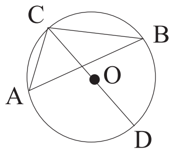
**3-1-1** L'aire de ce triangle est
$\mathscr{A} = \dfrac{1}{2} BA \times BC \times \sin \widehat{ABC}$
$= \dfrac{1}{2} \times 5 \times 3 \times \sin 30°$
$= 3{,}75 \text{ cm}^2$

**3-1-2** $\dfrac{1}{2} CA \times CB \times \sin \widehat{ACB} = 12$
$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \times 7 \times CB \times \sin 60° = 12$
$\Leftrightarrow \dfrac{7\sqrt{3}}{4} CB = 12$
$\Leftrightarrow BC = \dfrac{7\sqrt{3}}{4}$ cm.

**3-1-3** $\mathscr{A} = \dfrac{1}{2} AB \times AC \times \sin \widehat{BAC}$
$\mathscr{A} = \dfrac{1}{2} \times 9 \times 6 \times \sin \widehat{BAC}$
$= 24 \Leftrightarrow \sin \widehat{BAC} = \dfrac{8}{9}$.
Donc mes $\widehat{BAC} \approx 63°$.

## 3.2. Théorème des sinus

1. a)




b) Sachant que $\mathscr{A} = \frac{1}{2}$ AB × AC × sin $\widehat{A}$ , on a sin $\widehat{A} = \dfrac{2\mathscr{A}}{AB \times AC}$ .

Donc $\dfrac{BC}{\sin \widehat{A}} = \dfrac{BC \times AB \times AC}{2\mathscr{A}}$.

2. a) Les angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{CDB}$ sont inscrits dans le cercle et ils interceptent le même arc. Donc ils ont la même meure .

b) On a mes $\widehat{CAB}$ = mes $\widehat{CDB}$ , donc sin $\widehat{CAB}$ = sin $\widehat{CDB}$ .
Dans le triangle BCD rectangle en B, on a

$\sin \widehat{CDB} = \dfrac{BC}{CD} = \dfrac{BC}{2r}$ .

Par conséquent $\dfrac{BC}{\sin \widehat{A}} = \dfrac{BC}{\sin \widehat{CDB}} = \dfrac{BC}{\frac{BC}{2r}} = BC \times \dfrac{2r}{BC} = 2r$ .

### Exercices de fixation

**3-2-1** L'aire du triangle ABC est $\frac{1}{2}$ AC × BC × sin $\widehat{ACB}$
$= \frac{1}{2} \times 7 \times 5 \times \sin 30° = 8{,}75$ cm.

**3-2-2** $\dfrac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = 2r$ ,

Donc $r = \dfrac{2BC}{\sin \widehat{BAC}}$

$= \dfrac{2 \times 5}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{20\sqrt{3}}{3}$

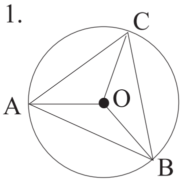
**3-2-3** $\dfrac{AC}{\sin \widehat{ABC}} = 2r$ ,

Donc AC = $2r \times \sin \widehat{ABC}$

$= 2 \times 1{,}5 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

## Activité 4 Polygones réguliers

1.

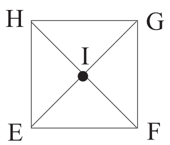



• Le traingle ABC est équilatéral donc ses trois angles ont la même mesure.
mes $\widehat{ABC}$ = mes $\widehat{ACB}$ = mes $\widehat{BAC}$ = 60°.

• Le triangle AOC est isocèle en O, donc mes $\widehat{ACO}$ = mes $\widehat{CAO}$ . D'autre part [AO) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ , donc mes $\widehat{CAO}$ = 30°. Par conséquent mes $\widehat{ACO}$ = 180 – 2×30 = 120°.

• De même mes $\widehat{BOA}$ = mes $\widehat{BOC}$ = 60°.

2.




• EFGH étant un carré, on a mes $\widehat{EFG}$ = mes $\widehat{FGH}$ = mes $\widehat{GHE}$ = mes $\widehat{HEF}$ = 90°.

• Les diagonales d'un carré sont perpendiculaires, donc
mes $\widehat{EIF}$ = mes $\widehat{FIG}$ = mes $\widehat{GIH}$ = mes $\widehat{HIE}$ = 90°.

### Exercices de fixation

**4-1** a) Le polygone ABCDE n'est pas un polygone régulier car tous ses angles n'ont pas la même mesure (bien que ses côtés aient la même longueur).

b) Le polygone BIEN est un polygone régulier car tous ses côtés ont la même longueur et tous ses angles ont la même mesure.

c) Le polygone RIGOLADE est un polygone régulier car tous ses côtés ont la même longueur et tous ses angles ont la même mesure.

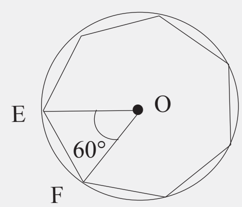
d) Le polygone PLU est un polygone régulier car tous ses côtés ont la même longueur et tous ses angles ont la même mesure. (Un triangle isocèle dont l'angle au sommet mesure 60° est un triangle équilatéral)

e) Le polygone MATH n'est pas un polygone régulier car tous les angles n'ont pas la même mesure (bien que ses côtés aient la même longueur).

f) Le polygone VITAL est un polygone régulier car il est inscrit dans un cercle et tous ses côtés ont la même longueur.

**4-2** Le polygone étant est un polygone régulier de centre O à 7 côtés, on a : mes $\widehat{AOB} = \dfrac{360}{7}$ .
mes $\widehat{AOB} \approx 51{,}4°$.

**4-3**



## Exercices de renforcement

**1** 1) $\text{mes } \widehat{EGF} = \frac{1}{2} \text{ mes } \widehat{EOF}$

$= \frac{65}{2} = 32,5°.$

2) L'angle au centre associé à $\widehat{EFG}$ est $\widehat{EOG}$.

$\text{mes } \widehat{EFG} = 180° - \frac{1}{2} \text{ mes } \widehat{EOG}$ ;

d'où $\text{mes } \widehat{EOG} = 2(180 - 155)$

$\text{mes } \widehat{EOG} = 2 \times 25 = 50°.$

**2** 1) $\alpha = 29 \times 2 = 58°$

2) $\alpha = 180 - \frac{1}{2} \times 72$

$\alpha = 180 - 36 = 144°.$

3) $\alpha = \frac{1}{2} \times 130 = 65°.$

4) $\alpha = 2 \times 37 = 74°.$

**3** $\alpha = 180 - (180 - (54 + 27))$

$= 180 - (180 - 81)$

$\alpha = 81°.$

**4** a) On a $\text{mes } \widehat{AO_1B} = \frac{1}{2} \text{ mes } \widehat{AO_2B} = \frac{1}{2}\alpha$ et

$\text{mes } \widehat{AO_1B} = 2 \text{ mes } \widehat{ACB} = 2\beta$.

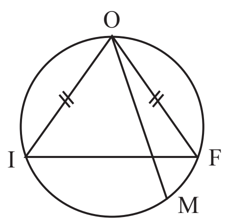
Donc $\frac{1}{2}\alpha = 2\beta$, c'est à dire $\alpha = 4\beta$.

b) On a : $\text{mes } \widehat{EGF} = \frac{1}{2}\beta$ or $\text{mes } \widehat{EGF} = \text{mes } \widehat{IGH}$ opposé par le sommet et $\text{mes } \widehat{IGH} = \frac{1}{2}\alpha$.

Ainsi $\beta = 2 \text{ mes } \widehat{EGF} = 2 \text{ mes } \widehat{IGH} = 2 \times \frac{1}{2}\alpha = \alpha.$

$\beta = \alpha.$

**5**



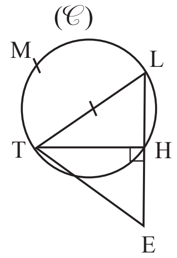

$\widehat{OMF}$ est inscrit et intercepte l'arc $\overset{\frown}{OF}$.

$\widehat{IMO}$ est inscrit et intercepte l'arc $\overset{\frown}{OI}$.

Or les arcs $\overset{\frown}{OF}$ et $\overset{\frown}{OI}$ ont la même mesure ;

donc $\text{mes } \widehat{OMF} = \text{mes } \widehat{IMO}$, d'où (OM) est la bissectrice de l'angle $\widehat{IMF}$.

**6**



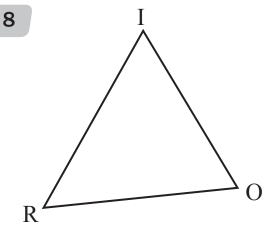

$\text{mes } \widehat{HML} = \text{mes } \widehat{HLT} = 30°.$

$\text{mes } \widehat{TMH} = \text{mes } \widehat{TLH} = 60°.$

$\text{mes } \widehat{TML} = 180 - 90 = 90°.$

**7** $1 \rightarrow c$ ; $2 \rightarrow a$ ; $3 \rightarrow b$ ; $4 \rightarrow c$ ; $5 \rightarrow a$ ; $6 \rightarrow a$.

**8**



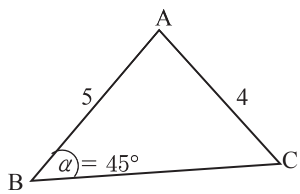

$\mathcal{A} = \frac{1}{2} RO \times RI \times \sin\widehat{R}$

$= \frac{1}{2} OR \times OI \sin\widehat{O}$

$= \frac{1}{2} IR \times IO \sin\widehat{I}$

**9** $\frac{BC}{\sin\widehat{A}} = \frac{AC}{\sin\widehat{B}} = \frac{AB}{\sin\widehat{C}} = 2r$

• $BC = \frac{AC}{\sin\widehat{B}} \times \sin\widehat{A} = \frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sin\widehat{A} = 4\sqrt{2} \sin\widehat{A}.$




• $\sin\widehat{C} = \frac{AB}{2r} = \frac{5}{4\sqrt{2}}$

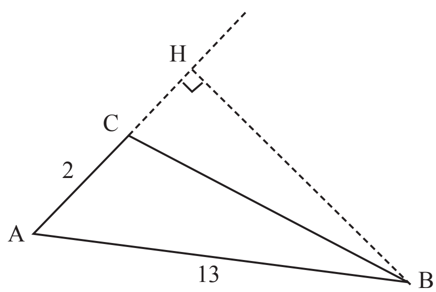
d'où $\text{mes}\widehat{C} \simeq 62°.$

Par suite

$\text{mes}\widehat{A} = 180 - (45 + 62) = 73°$

• Finalement $BC = 4\sqrt{2} \sin 73°$

**10**




• On a $S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin\widehat{A}$

$S = \frac{1}{2} \times 13 \times 2 \times \sin\widehat{A}$

$\sin\widehat{A} = \frac{5}{13}$

• Dans le triangle BAH, rectangle en H, on a :

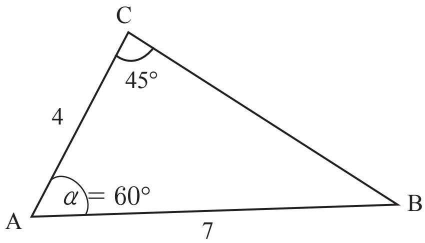
$\sin\widehat{A} = \frac{BH}{AB}$, d'où $BH = AB \times \sin\widehat{A} = 5$

D'après la propriété de Pythagore
$AB^2 = AH^2 + BH^2$
$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 13^2 - 5^2 = 144$
Donc AH = 12

- $HC = AH - AC = 12 - 2 = 10$
- Le triangle BCH est rectangle en H :

$BC^2 = BH^2 + CH^2 = 5^2 + 10^2 = 125$
Donc $BC = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

**11**




1) $\dfrac{AC}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{BC}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{AB}{\sin\widehat{C}}$.

$\dfrac{4}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{BC}{\sin 60°} = \dfrac{7}{\sin 45°}$

$BC = \dfrac{7\sin 60°}{\sin 45°} = \dfrac{7\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{7\sqrt{6}}{2}$

2) $\sin\widehat{B} = \dfrac{4\sin 45°}{7} = \dfrac{2\sqrt{2}}{7}$

**12** 1) On a $mes\,\widehat{A} = 180 - (65+47) = 180 - 112 = 68°$.

$\dfrac{AB}{\sin\widehat{C}} = \dfrac{BC}{\sin\widehat{A}}$ d'où $AB = \dfrac{BC\sin\widehat{C}}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{9 \times \sin 47}{\sin 68}$

$AB \simeq 7$.

2) $\dfrac{AC}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{BC}{\sin\widehat{A}}$ d'où $AC = \dfrac{BC\sin\widehat{B}}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{9 \times \sin 65}{\sin 68}$

$AC \simeq 88$.

**13** 1) $mes\,\widehat{A} = \pi - \left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{3}$

$\sin\widehat{A} = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{3} + \sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\widehat{A} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

2) $\dfrac{BC}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{AC}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{AB}{\sin\widehat{C}}$.

On a : $\dfrac{AC}{\sin\dfrac{\pi}{4}} = \dfrac{AB}{\sin\dfrac{\pi}{3}} = \dfrac{BC}{\sin\widehat{A}}$.

- $\dfrac{AB}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{4}{\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$ donc $AB = \dfrac{4 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$

$AB = \dfrac{8\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \dfrac{8(\sqrt{6}-3\sqrt{2})}{-4} = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$

- $\dfrac{AC}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{4}{\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$ donc $AC = \dfrac{4 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$

$AC = \dfrac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \dfrac{8\sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{-4}$

$= \dfrac{8(2-2\sqrt{3})}{-4} = 4(\sqrt{2}-1)$

3) $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2} BC \times BA \times \sin\widehat{B}$

$= \dfrac{1}{2} \times 4 \times 2(3\sqrt{2}-\sqrt{6}) \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\mathcal{A} = 4(3-\sqrt{3})$.

**14** Un polygone régulier est un polygone dont les côtés ont la même longueur et ont les angles ont la même mesure.

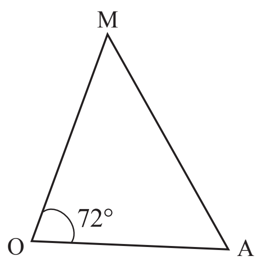
**15** La somme des angles d'un polygone à *n* côtés est égales à $(n-2)\times 180°$.

| | Angle au centre O | Angle au sommet associé en degré |
|---|---|---|
| Pentagone (5) | 72° | 108° |
| Hexagone (6) | 60° | 120° |
| Octogone (8) | 45° | 135° |
| Ennéagone (9) | 40° | 140° |
| Décagone (10) | 36° | 144° |
| Dodécagone (12) | 30° | 150° |

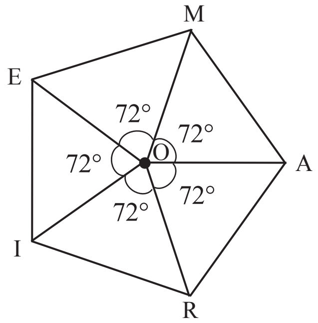
**16** Tous les côtés du polygone ABCDEFG ont la même longueur mais tous les angles n'ont pas la même mesure (par exemple $mes\widehat{ABO} = 60°$ et $mes\widehat{CBO} = 90°$) donc ce n'est pas un polygone régulier.

**17** 1) Mesure de l'angle $\widehat{MOA}$ : $\dfrac{360}{5} = 72°$.

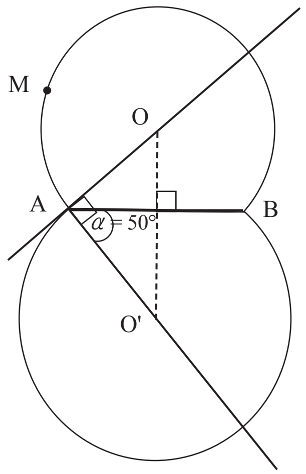
2) Construisons le triangle MOA



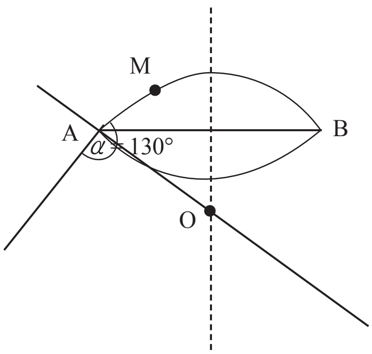
3) Construisons le pentagone MARIE.




**18**




**19**




## Exercices d'approfondissement

**20** Soit I le point d'intersection du cercle et de la perpendiculaire à (AO) en H.
Le triangle AIO est équilatéral (AO = OI car rayon du cercle et OI = AI car (HI) est la médiatrice de [AO]).
Ainsi mes $\widehat{HAI} = 60°$. Par suite $\alpha + 60 = 180 - 72$.
Donc $\alpha = 48°$.

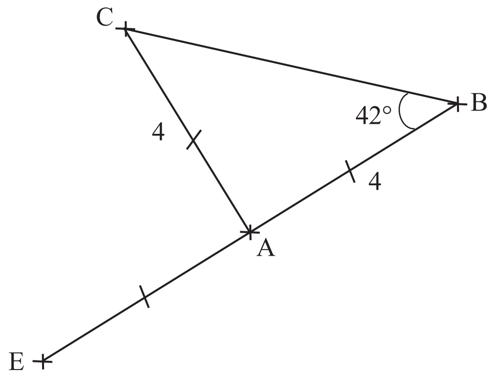
**21** Mes $\widehat{DEA} = 180° - \frac{1}{2}$ ms $\widehat{AOD}$ (angles associés).

$= 180° - \frac{1}{2} \times 72 \times 2$

$= 180° - 72$

$= 108°$.

**22** 1. a) Figure en vraie grandeur.




ABC est isocèle en A donc mes $\widehat{ACB} = 42°$,
d'où mes $\widehat{BAC} = 180 - 84$
$= 96°$.

b) Le triangle BCE est un rectangle en C car inscrit dans un cercle de diamètre [BE].

c) mes $\widehat{EAC} = 180 -$ mes $\widehat{CAB} = 180 - 96$
mes $\widehat{EAC} = 84°$.

2) $\widehat{EAC}$ est un angle au centre et $\widehat{ABC}$ est un angle aigu inscrit qui interceptent le même arc $\overset{\frown}{CE}$ que $\widehat{EAC}$. Donc mes $\widehat{EAC} = 2$mes $\widehat{ABC}$.

**23** a)

- $\gamma = 30°$ car angles inscrits interceptant le même arc.
- $\delta = \frac{1}{2} \times 80 = 40°$ car angle inscrit et angle au centre associé.
- $\beta = \frac{1}{2}(180 - 80) = \frac{1}{2} \times 100 = 50°$ (angle inscrit et angle au centre associé).
- $\alpha = \frac{1}{2}(180 - 80) = \frac{1}{2} \times 100 = 50°$. Angle au centre et angle au centre associé.

b)

- $\alpha = 180 - (75 + 55) = 180 - 130 = 50°$.
- $\gamma = 55°$ (angles inscrits interceptant le même arc).
- $\beta = 180 - (75 + 55) = 180 - 130 = 50°$ ou $\beta = \alpha$ car angles inscrits interceptant le même arc.

- On a $180 - 55 = 125$. Dans un triangle, on a :

$\alpha + 125 + \delta = 180$

$50 + 125 + \delta = 180$

$175 + \delta = 180$ ; $\delta = 5°$.

**24** $\alpha$ angle inscrit interceptant le même arc que l'angle au centre de mesure 72°.

D'où $\alpha = \frac{1}{2} \times 72 = 36°$.

**25** • On a :

mes $\widehat{EOB}$ = mes $\widehat{AOB}$ + mes $\widehat{EOA} = 72 + 72 = 144°$.

• $\widehat{EAB}$ est inscrit et intercepte l'arc $\overset{\smile}{EB}$ et $\widehat{EOB}$ est au centre et intercepte l'arc $\overset{\frown}{EB}$ ;

donc mes $\widehat{EAB} = 180 - \frac{1}{2}$ mes $\widehat{EOB}$

$= 180 - 72 = 108°$.

De plus, mes $\widehat{BAD} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{BOD}$ (angles associés).

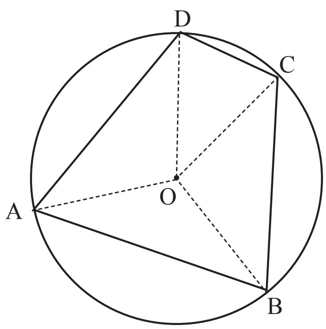
$= \frac{1}{2} \times 144 = 72°$.

Ainsi, $\gamma = 180 - (36 + 72)$

$= 180 - 108$

$= 72°$.

**26** Soit ABCD un quadrilatère inscrit dans un cercle.




Les angles opposés sont tels que soit l'un est aigu et l'autre obtus soit ils sont tous deux droits. Ici :

• mes $\widehat{BAD} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{BOD}$ et mes $\widehat{BCD} = 180 - \frac{1}{2}$ mes $\widehat{BOD}$.

Donc mes $\widehat{BAD}$ + mes $\widehat{BCD} = 180°$, et donc $\widehat{BAD}$ et $\widehat{BCD}$ sont supplémentaires.

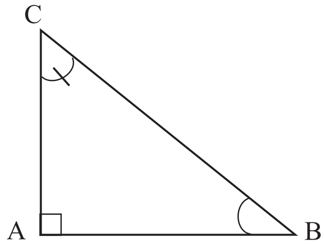
• mes $\widehat{ABC} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOC}$ et mes $\widehat{ADC} = 180 - \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOC}$.

Donc mes $\widehat{ABC}$ + mes $\widehat{ADC} = 180°$, et donc $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ sont supplémentaires.

<u>Conclusion</u> : Dans un quadrilatère inscrit dans un cercle, les angles opposés sont supplémentaires.

**27** ABC est un triangle rectangle en A.

Donc $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (1)




On a $\sin\widehat{A} = 1$ et d'après le théorème des sinus, on a :

$\frac{BC}{\sin\widehat{A}} = \frac{AC}{\sin\widehat{B}} = \frac{AB}{\sin\widehat{C}}$.

Donc $AC^2 = BC^2\sin^2\widehat{B}$ et $AB^2 = BC^2\sin^2\widehat{C}$.

D'où dans (1) on a $BC^2 = BC^2\sin^2\widehat{B} + BC^2\sin^2\widehat{C}$

$\sin^2\widehat{B} + \sin^2\widehat{C} = 1$

$\sin^2\widehat{B} + \sin^2\widehat{C} = \sin^2\widehat{A}$.

Ou bien $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont complémentaires ;

donc $\cos\widehat{B} = \sin\widehat{C}$.

$\cos^2\widehat{B} + \sin^2\widehat{B} = 1$ d'où $\sin^2\widehat{C} + \sin^2\widehat{B} = \sin^2\widehat{A}$.

Réciproquement,

Si $\sin^2\widehat{A} = \sin^2\widehat{B} + \sin^2\widehat{C}$, d'après le théorème des sinus, on a :

$\frac{BC}{\sin\widehat{A}} = \frac{AC}{\sin\widehat{B}} = \frac{AB}{\sin\widehat{C}}$. D'où $\sin^2\widehat{B} = \frac{AC^2}{BC^2}\sin^2\widehat{A}$

$\sin^2\widehat{C} = \frac{AB^2}{BC^2}\sin^2\widehat{A}$.

Ainsi, $\sin^2\widehat{B} + \sin^2\widehat{C} = \sin^2\widehat{A}$.

$\frac{AC^2}{BC^2}\sin^2\widehat{A} + \frac{AB^2}{BC^2}\sin^2\widehat{A} = \sin^2\widehat{A}$.

D'où $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ; le triangle est donc rectangle en A.

**28** En notant I le point d'intersection des diagonales, l'aire du quadrilatère ABCD est égale à la somme des aires des 4 triangles IAB, IAD, ICD et IBC.

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{AC}{2} \times \frac{BD}{2}\sin(\pi - \theta) + \frac{1}{2} \times \frac{AC}{2} \times \frac{BD}{2}\sin\theta$$

$$+ \frac{1}{2} \times \frac{AC}{2} \times \frac{BD}{2}\sin(\pi - \theta) + \frac{1}{2}\frac{AC}{2} \times \frac{BD}{2}\sin\theta$$

Comme $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$, on a :

$S = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{AC}{2} \times \frac{BD}{2}\sin\theta$.

Donc $S = \frac{1}{2} AC \times BD \times \sin\theta$

**29** 1) 20 min $= \frac{1}{3} h$ or $V = \frac{D}{t}$ donc $24 = \frac{BC}{\frac{1}{3}}$

d'où $BC = \frac{24}{3} = 8$.

2) ABC est un triangle donc $\frac{AB}{\sin\widehat{C}} = \frac{AC}{\sin\widehat{B}} = \frac{BC}{\sin\widehat{A}}$

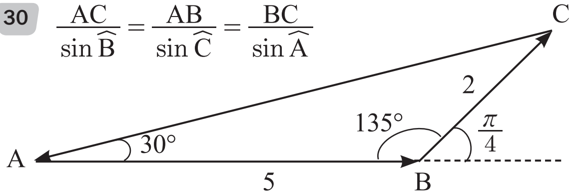
d'où $AC = \frac{BC\sin\widehat{B}}{\sin A} = \frac{8 \times \sin 32°}{\sin\widehat{A}}$ ;

Or mes $\widehat{BCA} = 180 - 57° = 123°$ ;
D'où mes $\widehat{BAC} = 180 - (32 + 123) = 180 - 155 = 25°$.

Donc $AC = \dfrac{8 \times \sin 32°}{\sin 25°} = \dfrac{8 \times 0,52}{0,42} = \dfrac{4,16}{0,42} = 9,90$.

3) On a : $V = \dfrac{D}{t}$ donc $t = \dfrac{D}{V} = \dfrac{AC}{V} = \dfrac{9,90}{24} = 0,4125\ h$.
soit $t = 24,75$ min.
Par suite, le bateau arrivera en A à
8 h 20 min + 25 min = 8 h 45 min environ.

**30** $\dfrac{AC}{\sin \widehat{B}} = \dfrac{AB}{\sin \widehat{C}} = \dfrac{BC}{\sin \widehat{A}}$



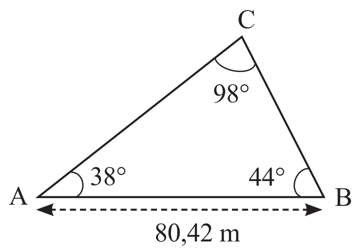

$\dfrac{AC}{\sin 135°} = \dfrac{BC}{\sin 30°} \Leftrightarrow \dfrac{AC}{0,70} = \dfrac{5}{0,5}$

$AC = \dfrac{0,7 \times 5}{0,5} = 7$

La distance sur laquelle il a couru est 7 km.

## Situation d'évaluation

**31**




1) ABC est un triangle.
D'après le théorème des sinus, on a :
$\dfrac{AB}{\sin\widehat{C}} = \dfrac{AC}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{BC}{\sin\widehat{A}}$.

D'où $AC = \dfrac{AB\sin\widehat{B}}{\sin\widehat{C}} = \dfrac{80,42 \times \sin 44°}{\sin 98°} = \dfrac{80,42 \times 0,69}{0,99}$

$= \dfrac{55,48}{0,99} = 56,05$

et $BC = \dfrac{AB \sin \widehat{A}}{\sin \widehat{C}} = \dfrac{80,42 \times \sin 38°}{\sin 98°} = \dfrac{80,42 \times 0,61}{0,99}$

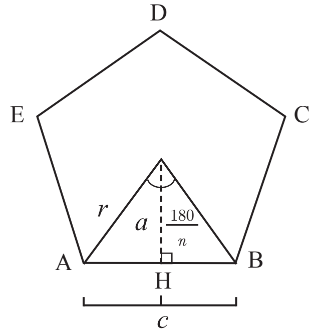
$= \dfrac{49,05}{0,99} = 49,55$.

2) $\mathcal{P} = AB + AC + BC = 80,42 + 56,05 + 49,55 = 186,02$ m.

$\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}\ AC \times AB \times \sin 38° = \dfrac{1}{2} \times 56,05 \times 80,42$ ;

$\mathcal{A} = \dfrac{2749,40}{2} = 1374,80\ m^2$.

**32** 1) Polygone régulier




$a$ = reppothère
$r$ = le rayon du cercle circonscrit
AB = $c$.

- Le périmètre

On a $\sin\left(\dfrac{180}{n}\right) = \dfrac{\frac{c}{2}}{r}$ d'où $r = \dfrac{c}{2\sin\left(\frac{180}{n}\right)}$.

Or $\mathcal{P} = AB \times n = nc$ et $c = 2r\sin\left(\dfrac{180}{n}\right)$.
Donc $\mathcal{P} = 2nr\sin\left(\dfrac{180}{n}\right)$.

- L'aire :

$\mathcal{A}_{\mathcal{P}} = \dfrac{b \times h}{2} \times n$ or $b$ = côté du polygone régulier.

$= \dfrac{x \times a}{2} \times n = \dfrac{\mathcal{P} \times a}{2} = \dfrac{\mathcal{P} \times \dfrac{c}{2\tan\left(\frac{180}{n}\right)}}{2}$

où $a = r\cos\left(\dfrac{180}{n}\right)$

$= \dfrac{2nr\sin\left(\frac{180}{n}\right) \times r\cos\left(\frac{180}{n}\right)}{2}$

$\mathcal{A}_{\mathcal{P}} = \dfrac{nr^2\sin\left(\frac{360}{n}\right)}{2}$ car $\sin a \cos a = \dfrac{1}{2} \sin 2a$.

2) Volume du cylindre :
$Vc = \pi \times R^2 \times h$
$= \pi \times 0,44^2 \times 10$
$Vc = 6,07\ m^3$.

- Pour le régulier ''Hexagone → $n = 6$''.

$V_1 = \mathcal{A} \times h$

$= \dfrac{6 \times 0,28^2 \times \sin(60)}{2} \times 10$

$= 30 \times 0,28^2 \sin 60$

$V_1 = 2,03\ m^3$.
Ainsi, le volume de béton à couler est :
$V_c - V_1 = 6,07 - 2,03 = 4,04\ m^3$.

- Pour le Fort ''Carré → $n = 4$''.

$V_2 = \mathcal{A} \times h = \dfrac{4 \times 0,28^2 \times \sin 90}{2} \times 10$

$= 20 \times 0,28^2 = 1,56 \text{ m}^3$.

Ainsi le volume de béton à couler est :

$V_c - V_2 = 6,07 - 1,56 = 4,51 \text{ m}^3$.

- Pour Extra-fort ''Triangle → $n = 3$''.

$V_3 = \mathcal{A} \times h$

$= \dfrac{3 \times 0,28^2 \times \sin 120}{2} \times 10$

$= 15 \times 0,28^2 \times 0,86$

$= 1,01 \text{ m}^3$.

Ainsi, le volume de béton à couler est :

$V_c - V_3 = 6,07 - 1,01$

$= 5,06 \text{ m}^3$.

Le chef n'a pas raison car c'est le modèle régulier qui utilise le moins de béton.

$$\underbrace{4,04 < 4,51 < 5,06}$$

*Régulier fort Extra-fort*

Leçon 10

# ANGLES ORIENTÉS ET TRIGONOMÉTRIE

## INSTALLATION DES HABILETÉS

### Activité 1 Le radian

#### 1.1. Mesure d'un angle en radian

1) L'expression du périmètre $\mathscr{P}$ d'un cercle en fonction du rayon $r$ est $\mathscr{P} = 2\pi r$.

2)

| Rayon $r$ (en cm) | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Longueur $l$ de l'arc (en cm) | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
| $\frac{l}{r}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{2}$ |

3) $\frac{l}{r} = \frac{\pi}{2}$

4) $\alpha = 90°$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$

5) • $\alpha = \frac{l}{r}$

• si $l = r$, alors $\alpha = 1$

**Exercices de fixation**

1. $\frac{1}{2}\mathscr{P} = 2\pi$.

2. $\frac{1}{4}\mathscr{P} = 2\pi$.

#### 1.2. Conversions degrés-radians

1. La mesure en radian d'un angle plat est $\pi$ rad.
2.

| Mesure de l'angle en degrés | 180 | $x$ |
|---|---|---|
| Mesure de l'angle en radians | $\pi$ | $\alpha$ |

D'où $\boxed{\frac{x}{180} = \frac{\alpha}{\pi}}$

3. On a : $x = \frac{\alpha}{\pi} \times 180$ et $\alpha = \pi \times \frac{x}{180}$

**Exercices de fixation**

**1-2-1** Recopie et complète le tableau suivant :

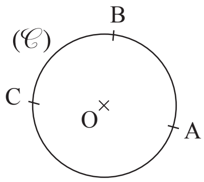
| Mesures en degrés | 30 | 45 | 60 | 120 | 135 | 150 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Mesures en radians | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{11}$ | $\frac{5\pi}{6}$ |

**1-2-2** $\frac{\pi}{8}$ correspond à $\frac{45°}{2} = 22{,}5°$ ; $\frac{5\pi}{12}$ correspond à 75° ; $\frac{\pi}{100}$ correspond à 1,8°.

**1-2-3** 25° correspond à $\frac{5\pi}{36}$ rad ; 100° correspond à $\frac{5\pi}{9}$ rad ; 170° correspond à $\frac{17\pi}{18}$ rad.

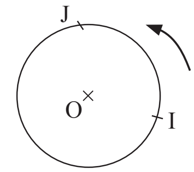
## Activité 2 Le cercle trigonométrique

1.




2. On peut parcourir le cercle (𝒞) de deux manières pour aller de A à B.

3.



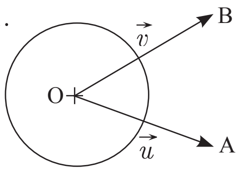

### Exercices de fixation

Figure 2

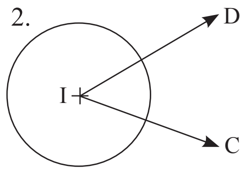
## Activité 3 Angle orienté de deux vecteurs

### 3.1. Définition d'un angle orienté

1.




2.

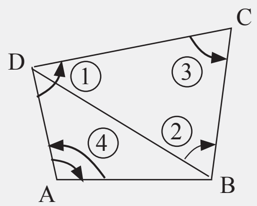



3. a) Les arcs $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{CD}$ ont la même longueur.

b) Le sens de parcours de A vers B est le même que celui de C vers D.

### Exercices de fixation

**3-1-1**




①: $\left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}}\right)$; ②: $\left(\widehat{\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC}}\right)$

③: $\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}}\right)$; ④: $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)$.

**3-1-2** Les angles marqués sont :

$\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DO}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CO}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OD}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}}\right)$.

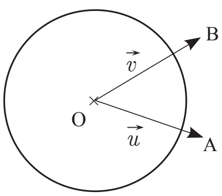
**3-1-3** Angle plat : $\left(\widehat{\overrightarrow{IG},\overrightarrow{IF}}\right)$

Angles opposés : $\left(\widehat{\overrightarrow{IE},\overrightarrow{IG}}\right)$

et $\left(\widehat{\overrightarrow{IG},\overrightarrow{IE}}\right)$.

### 3.2. Mesure principale d'un angle orienté

1.




2. • $\text{mes}\left(\widehat{BOA}\right) = 41°$

• $\text{mes}\left(\widehat{BOA}\right) = \dfrac{41\pi}{180}$

$-1 < \dfrac{41}{180} \leq 1$ donc $-\pi < \dfrac{41\pi}{180} \leq \pi$

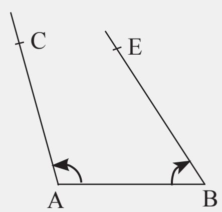
### Exercices de fixation

**3-2-1** $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ ;

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right) = \dfrac{-\pi}{3}$ ;

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$

**3-2-2**

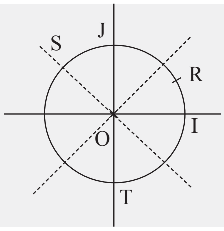



**3-2-3** $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ ;

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ ;

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}}\right) = \dfrac{-\pi}{4}$

3-2-4




## Activité 4 Cosinus, sinus et tangente d'un angle orienté

### 4.1. Définitions

1. $\cos\alpha = \dfrac{OH}{OM} = \dfrac{x_M}{1}$, donc $x_M = \cos\alpha$.

$\sin\alpha = \dfrac{HM}{OM} = \dfrac{OK}{OM} = \dfrac{y_M}{1}$, donc $y_M = \sin\alpha$

2. OIT est un triangle, M ∈ (OT), H ∈ (IO) tels que (HM) // (IT). D'après la conséquence de la propriété de Thalès on a :

$\dfrac{OH}{OI} = \dfrac{OM}{OT} = \dfrac{MH}{IT}$, ainsi : $\dfrac{OH}{OI} = \dfrac{MH}{IT}$ donc $IT = \dfrac{OI \times MH}{OH}$

$$IT = \frac{y_M}{x_M}$$

#### Exercices de fixation

4-1-1 $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$ ; $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4-1-2 $\tan\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sin\dfrac{\pi}{4}}{\cos\dfrac{\pi}{4}} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = 1$

### 4.2. Propriétés du sinus et du cosinus

1. a) $x_M \in [-1\ ;\ 1]$.

b) $y_M \in [-1\ ;\ 1]$.

2. a) OPM est un triangle rectangle en P on a : $OM^2 = OP^2 + PM^2$

b) Or OM = 1, $OP = x_p = \cos\alpha$ ; $PM = OQ = \sin\alpha$.

Donc on a : $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

#### Exercices de fixation

4-2-1 On sait que : $\sin x = \dfrac{2}{7}$. On a : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Donc $\cos^2 x = 1 - \left(\dfrac{2}{7}\right)^2 \Leftrightarrow \cos^2 x = \dfrac{45}{49}$

On a : $\cos x = \dfrac{-3\sqrt{5}}{7}$ ou $\cos x = \dfrac{3\sqrt{5}}{7}$ et comme $x \in \left]\dfrac{-\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$,

on a = $\cos x = \dfrac{3\sqrt{5}}{7}$

4-2-2 $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, on sait que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

D'où : $\sin^2 x = \dfrac{6}{9}$

Ainsi $\sin x = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ ou $\sin x = \dfrac{-\sqrt{6}}{3}$

Comme $x \in ]0\ ;\ \pi]$, on a $\sin x = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

### 4.3. Expression de tanα en fonction de cosα

On sait que $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,

$1 + \tan^2\alpha = 1 + \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$, or $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Donc $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

#### Exercices de fixation

On sait que $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$. Or $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, donc

$1 + \tan^2 x = \dfrac{9}{3}$. On a $\tan^2 x = \dfrac{6}{3} = 2$.

D'où $\tan x = \sqrt{2}$ ou $\tan x = -\sqrt{2}$. Et comme $x \in \left]\dfrac{-\pi}{2}\ ;0\right]$, on a $\tan x = -\sqrt{2}$.

## Exercices de renforcement

**1** $180° \leftrightarrow \pi$ rad

| Angles en degré | 18° | – 45° | 99° | 155° |
|---|---|---|---|---|
| Angles en radian | $\frac{\pi}{10}$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $\frac{11\pi}{20}$ | $\frac{31\pi}{36}$ |

$\times \frac{\pi}{180°}$

**2** $\pi$ rad $\leftrightarrow 180°$

| Angles en radian | 2,5π | $-\frac{2\pi}{5}$ | $\frac{7\pi}{18}$ |
|---|---|---|---|
| Angles en degré | 450° | – 72° | 70° |

$\times \frac{180°}{\pi}$

**3** 1) La mesure en radian de 27,5° est :

$\frac{27,5 \times \pi}{180} = \frac{11\pi}{72}$.

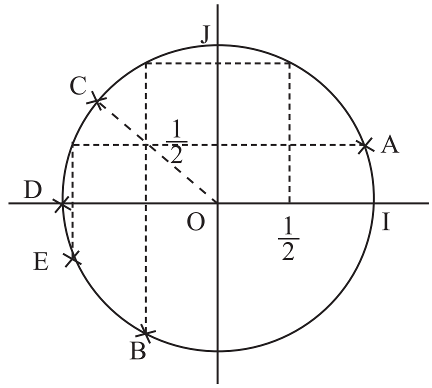
2) La mesure en degré de 0,56 rad est :

$\frac{0,56 \times 180}{\pi} = 32,09°$.

**4**

| Mesure en radians | $-\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Mesure en degrés | – 30° | 45° | – 60° | 90° | 120° |
| Cosinus | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ |
| Sinus | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |

**5** Soit $A\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $B\left(\frac{-2\pi}{3}\right)$, $C\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, $D(\pi)$ et $E\left(\frac{-5\pi}{6}\right)$




**6** 1- Vrai ; 2 - Faux ; 3 - Faux ; 4 - Vrai ; 5 - Vrai.

**7** $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{3}$ ; $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA}}\right) = -\frac{\pi}{2}$ ;

$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EA}}\right) = \frac{\pi}{2}$

$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ donc

$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}\right) = \frac{7\pi}{12}$

$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD}}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ donc

$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD}}\right) = \frac{5\pi}{6}$

$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BE}}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ donc

$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BE}}\right) = \frac{7\pi}{12}$.

**8** 1) un dégré (1°) correspond à $\frac{\pi}{180}$ rad.

2) un rad (1 rad) correspond à $\frac{180°}{\pi}$.

**9**

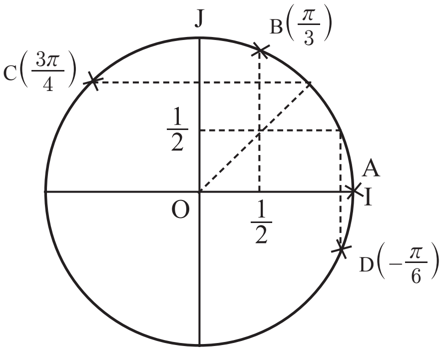
$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}}\right) = -\frac{2\pi}{5}$ ; $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OE}}\right) = \frac{4\pi}{5}$ ;

$$\begin{aligned}\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{DO},\overrightarrow{CD}}\right) &= \text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{DO},-\overrightarrow{DC}}\right)\\ &= \text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{DO},\overrightarrow{DC}}\right) - \pi\\ &= \frac{3\pi}{10} - \pi \ ;\end{aligned}$$

$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{DO},\overrightarrow{CD}}\right) = -\frac{7\pi}{10}$.

**10** 1- D ; 2- B ; 3- A ; 4- D ; 5- A.

**11** 1)




2) $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) = \text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}}\right) = \frac{\pi}{3}$

$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OA}}\right) = -\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OD}}\right) = \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$

$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}}\right) = \text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OC}}\right) - \text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}}\right)$.

$= \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{12}$

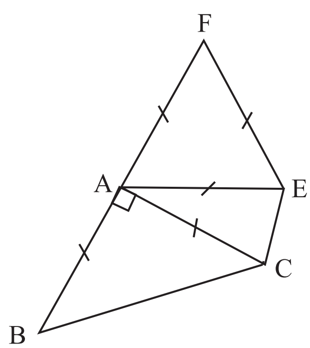
**12**

| | |
|---|---|
| $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ | $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ |

| | |
|---|---|
| $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ |
| $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ |

**13** 1) À 7 h : $-\frac{5\pi}{6}$ ; 2) À 10 h : $-\frac{\pi}{3}$ ; 3) À 1 h : $\frac{\pi}{6}$ ; 4) À 3 h : $\frac{\pi}{2}$ ; 5) À 6 h : $\pi$.

**14**




$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{5} = \frac{9\pi}{10}$ ;

$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AC}}\right) = -\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{5} = -\frac{11\pi}{15}$ ;

$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CE}}\right) = -\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{10} = -\frac{11\pi}{20}$ .

## Exercices d'approfondissement

**15** 1) $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ; $B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ; $E\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ; $F\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ; $G\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$; $H\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

2) $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}}\right) = -\frac{\pi}{4} - 0 = -\frac{\pi}{4}$ ;

$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OE}}\right) = \frac{\pi}{3}$ ;

$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}}\right) = \frac{3\pi}{4} - 0 = \frac{3\pi}{4}$ ;

$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OF}}\right) = -\frac{2\pi}{3}$ ;

$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OG}}\right) = \frac{\pi}{6}$ ;

$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}}\right) = -\frac{5\pi}{6}$.

**16** 1) $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \pi - \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{2}$

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) + \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}})$

$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$

$= \frac{5\pi}{6}$

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}}\right) = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA}}) + \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})$

$= \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$

$= \frac{2\pi}{3}$

2) $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AL},\overrightarrow{AK}}\right) = \text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AL},\overrightarrow{AC}}\right) + \text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AK}}\right)$

● ABC est un triangle rectangle en A et L est le milieu de [BC], donc LB = LA = LC. Par conséquent le triangle LAC est isocèle en L.

D'où $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AL},\overrightarrow{AC}}\right) = \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CL}}\right) = \frac{\pi}{3}$

● ACD est un triangle équilatéral et K est le milieu de [CD], donc [AK) est la bissectrice de $\widehat{CAD}$.

Par conséquent : $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AK}}\right) = \frac{\pi}{6}$

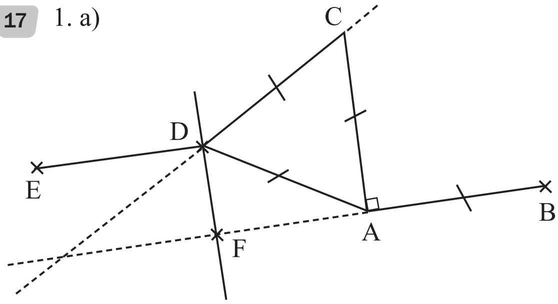
● Conclusion : $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AL},\overrightarrow{AK}}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

Donc le triangle ALK est rectangle en A

3) Le triangle LAC est équilatéral car il y a deux angles de mesure $\frac{\pi}{3}$. Ainsi AL = AC.

Dans le triangle équilatéral CAD, la hauteur est AK. D'où AC ≠ AK. Donc le triangle ALK n'est pas isocèle. (En effet, étant donné qu'il est rectangle en A, s'il doit être isocèle, ça ne peut être qu'en A).

**17** 1. a)




b) Voir figure
c) Voir figure
d) Voir figure
e) Voir figure

2. a) $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE}}) = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) + \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CD}}) + \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DE}})$

$$= \frac{\pi}{2} + \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \left(\frac{5\pi}{6} - \pi\right)$$

$$= \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{9} = \pi$$

D'où (AB) // (DE)

b) $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DF}}) = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) + \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CD}}) + \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DF}})$

$$= \frac{\pi}{2} + \pi - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{3\pi}{2}, \text{ donc } \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE}}) = -\frac{\pi}{2};$$

D'où (AB) ⊥ (DE)

**18** 1) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

$$\sin^2 x = 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2$$

$$= \frac{10 - 2\sqrt{5}}{16}$$

$$= \frac{5-\sqrt{5}}{8}.$$

Comme $x \in [0 ; \pi]$ alors $\sin x > 0$ et on a :

$$\sin x = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}.$$

2) $x \in [0 ; \pi]$ alors $x \in \left\{\frac{\pi}{5} ; \frac{4\pi}{5}\right\}$.
De plus, $\cos x > 0$ par conséquent, $x$ est aigu et on a :
$x = \frac{\pi}{5}$.

**19** 1) $(\cos x + 2\sin x)^2 + (2\cos x - \sin x)^2 =$

$= \cos^2 x + 4\cos x\sin x + 4\sin^2 x + 4\cos^2 x - 4\cos x\sin x + \sin^2 x$

$= \cos^2 x + \sin^2 x + 4(\sin^2 x + \cos^2 x)$

$= 1 + 4$

$= 5.$

**20** 1) $\cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8} = 1$, d'où $\cos^2\frac{\pi}{8} = 1 - \frac{2-\sqrt{2}}{4}$

$$= \frac{2+\sqrt{2}}{4}.$$

D'où $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ car $0 \le \frac{\pi}{8} \le \frac{\pi}{2}$

donc $\cos\frac{\pi}{8} > 0$.

2) $\tan\frac{\pi}{8} = \frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}}$ ; $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$

$$= \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{6-4\sqrt{2}}{2}}$$

$$\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

**21** 1) DA = DI = IA = DC, le triangle DCI est isocèle en D.
DIA est un triangle équilatéral. On a :

$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{DI},\overrightarrow{DC}}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.

- DIA est un triangle isocèle en A.

$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{DI},\overrightarrow{DC}}) + 2\,\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CI}}) = \pi$

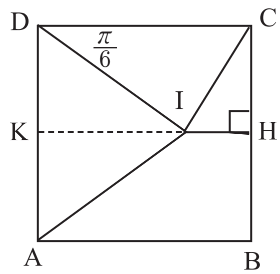
$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CI}}) = \frac{\pi - \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{5\pi}{12}$

$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CI},\overrightarrow{CH}}) = \frac{\pi}{2} - \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CI}})$

$= \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}$

$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CI},\overrightarrow{CH}}) = \frac{\pi}{12}$

2)




$IH = 1 - IK$

$= 1 - DI\sin\widehat{DIK}$

$= 1 - 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$IH = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

H est le milieu de [BC].

$CI^2 = IH^2 + CH^2$

$= \dfrac{7-4\sqrt{3}}{4} + \dfrac{1}{4}$

$CI^2 = 2-\sqrt{3}$

$CI = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ .

3) $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{CI},\overrightarrow{CH}}\right) = \dfrac{CH}{CI} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

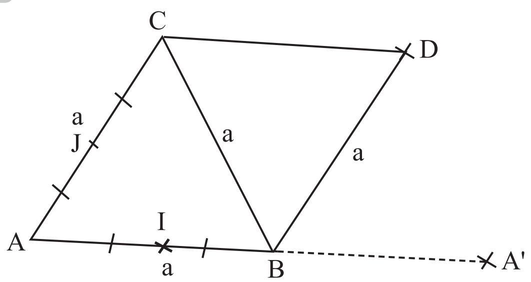
$= \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2\sqrt{2^2-\sqrt{2}}^{2}}$

$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{CI},\overrightarrow{CH}}\right) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

$\sin\left(\widehat{\overrightarrow{CI},\overrightarrow{CH}}\right) = \dfrac{IH}{CI} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

$= \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}^{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}$, donc $\sin\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ .

**22**




2) $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}}\right) = \text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right) + \text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}}\right)$

$= +\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{3\pi}{3}$

$= \dfrac{-2\pi}{3}$

De plus, BC = BD = a. Donc BCD est un triangle équilatéral.

On a BD = DC = BC ; AC = BC,
donc AB = BD = DC = CA. Le quadrilatère ABDC est un losange.

3) BA' = BD. $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{BD}}\right) = \text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$

car $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA'}$ .

$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{BD}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ .

Le triangle A'BD est un triangle isocèle qui a un angle de 60° d'où A'BD est un triangle équilatéral.

4) ABC est un triangle. I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [AC]. D'où (IJ) // (BC).

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IJ}}\right) = \text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right)$ car $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{IA}$ .

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IJ}}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$ .

## Situation d'évaluation

**23** 1) Trajet 1 : $\overset{\frown}{AB} = r = 150$ .

Trajet 2 : $2(r-r') + r' = 2r - r' = 250$
Le trajet 2 est le plus long.

2) Trajet 1 : $\overset{\frown}{AB} = 3r = 900$ .
Trajet 2 : $2(r-r') + 3r' = 2r + r' = 850$.
Le trajet 1 est le plus long.

3) Trajet 1 : $\overset{\frown}{AB} = r\alpha$ .
Trajet 2 : $2(r-r') + r'\alpha$ .
$r\alpha = 2r + (\alpha - 2)r'$ ;
$(r-r')(\alpha-2) = 0$.
$r > r'$, donc $r - r' \neq 0$. On a : $\alpha - 2 = 0$
$\alpha = 2$.
Il y a égalité des deux trajets si $\alpha = 2$ radians.

Leçon
11
# PRODUIT SCALAIRE

## INSTALLATION DES HABILETÉS

### Activité 1 Définition du produit scalaire

#### 1.1. Définition et propriétés

1) $Fx = F\cos\alpha$

2) $W = Fx \times AB = F \times AB \times \cos\alpha$

**Exercices de fixation**

**1-1-1** 1) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\frac{\pi}{3}$

$= 5 \times 5 \times \frac{1}{2} = \frac{25}{2}.$

2) $\vec{u}.\vec{v} = 3\sqrt{3} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 \times 3 = 9\,.$

**1-1-2** 1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 1 \times 5 \times \cos 90° = 0$

2) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2 \times 3 \times \cos 150°$

$= -2 \times 3 \times \cos 30°$

$= -2 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -3\sqrt{3}.$

3) $AB \times AC \times \cos 30° = 3\sqrt{3}.$

$2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times AC = 3\sqrt{3}$, donc $AC = 3$.

4) $AB \times AC \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = 2.$

$\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$

d'où $\text{mes}\left(\widehat{BAC}\right) = 45°.$

**1-1-3** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \sqrt{5} \times 7 \times \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2 \times 1 \times \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} AC = 2.$

$\Leftrightarrow AC = 2.$

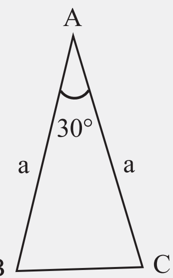
**1-1-4** $\text{mes}\left(\widehat{BAC}\right) = 180 - 45 = 135°.$

Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(135°)$

$= 2 \times 3 \times (-0{,}99)$

$= -5{,}97.$

**1-1-5**




$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos 30°$

$= a \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2.$

**1-1-6** a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos 60°$

$= 6^2 \times \frac{1}{2} = \frac{36}{2} = 18.$

b) $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{BC} = BK \times BC \times \cos 30°$

$= 3\sqrt{3} \times 6\frac{\sqrt{3}}{2} = 3 \times 9 = 27.$

c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BL} = -\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BL} = -BA \times BL \times \cos 30°$

$= -6 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-3 \times 9}{2} = \frac{-27}{2}$

Car $BK^2 = BA^2 - AK^2$ (Pythagore).

$BK^2 = 6^2 - 3^2 = 27$, d'où $BK = 3\sqrt{3}$

Or $BL = \frac{1}{2}BK = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$

d) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{KB} = 0$ car $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{KB}}\right) = 0,$

## 1.2. Interprétation géométrique

1) $\cos \widehat{HMP} = \dfrac{HM}{MP}$ donc $HM = MP\cos(\widehat{HMP})$.

2) On a : $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP} = MN \times MP \times \cos(\widehat{HMP})$

$= MN \times MP \times \cos(\widehat{HMP})$

$= \overline{MN} \times \overline{MH}.$

**Exercices de fixation**

**1-2-1** 1- c ; 2- a ; 3- b ; 4- a.

**1-2-2** 1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH = 5 \times 3 = 15.$

**1-2-3** a) $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{QP} = MN^2 = 5^2 = 25.$

b) $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PN} = 0$

c) $\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OP} = 0$

d) $\overrightarrow{QO}.\overrightarrow{NO} = \overline{QO} \times \overline{NO} = -QO^2.$

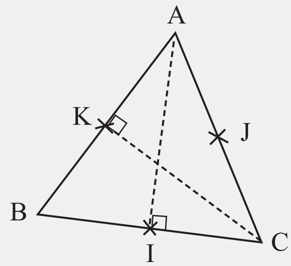
Or $(2QO)^2 = 2MN^2$, donc

$QO^2 = \dfrac{25}{2}.$

D'où $\overrightarrow{QO}.\overrightarrow{NO} = \dfrac{-25}{2}.$

**1-2-4**
- $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC} = BC^2 = 2^2 = 4.$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overline{AB} \times \overline{BA} = -AB^2 = -4.$
- $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BE} = \overline{AD} \times \overline{AD} = 2^2 = 4.$
- $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{BE} = \overline{DE} \times \overline{CE} = 4 \times 2 = 8.$

**1-2-5**




1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AK} = 6 \times 3 = 18.$

2) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI} = \overline{AI} \times \overline{AI} = AI^2 = (3\sqrt{3})^2 = 9 \times 3 = 27.$

3) $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AB} = \overline{KA} \times \overline{AB} = -AB \times AK$

$= -\dfrac{AB^2}{2} = -\dfrac{6^2}{2} = -18.$

On a $\overrightarrow{KJ} + \overrightarrow{KI} = \overrightarrow{KC}$ donc $\overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{KJ} + \overrightarrow{KI}) =$
$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{KC} = \overline{KC} \times \overline{KC} = KC^2 = (3\sqrt{3})^2 = 27.$

## 1.3. Carré scalaire

$\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}.\vec{u}})$

$= \|\vec{u}\|^2$, car $\cos(\widehat{\vec{u}.\vec{u}}) = 1$

**Exercices de fixation**

$\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = 5^2 = 25.$

$\vec{v}^2 = \|\vec{v}\|^2 = (\sqrt{2})^2 = 2.$

## 1.4. Règles de calculs

1) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

$= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{v},\vec{u}})$ car $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \cos(\widehat{\vec{v},\vec{u}})$

$= \vec{v}.\vec{u}$

2) $\vec{u}.(\alpha\vec{v}) = \|\vec{u}\| \times \|\alpha\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u},\alpha\vec{v}}) = |\alpha| \times \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u},\alpha\vec{v}})$

$\alpha\vec{u}.\vec{v} = \|\alpha\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\alpha\vec{u},\vec{v}}) = |\alpha| \times \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\alpha\vec{u},\vec{v}})$

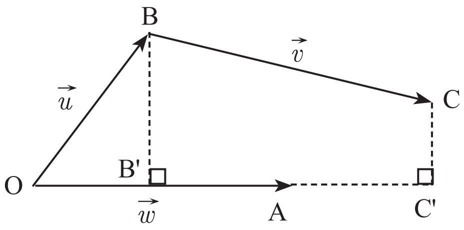
$\alpha(\vec{u}.\vec{v}) = \alpha\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v}).$

Si $\alpha > 0$, $\cos(\widehat{\vec{u},\alpha\vec{v}}) = \cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = \cos(\widehat{\alpha\vec{u},\vec{v}}) = \cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$; $et\,|\alpha| = \alpha$

Si $\alpha < 0$, $\cos(\widehat{\vec{u},\alpha\vec{v}}) = -\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = \cos(\widehat{\alpha\vec{u},\vec{v}}) = -\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ $et\,|\alpha| = -\alpha$

Donc $\vec{u}.(\alpha\vec{v}) = (\alpha\vec{v}).\vec{v} = \alpha(\vec{u},\vec{v}).$

3)




Soit O, A, B, et C quatre points du plan tels que :
$\overrightarrow{OA}=\vec{w}, \overrightarrow{OB}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC}=\vec{v}$.
Soit B' et C' les projetés orthogonaux respectifs de B et C sur (OA)

$$(\vec{u}+\vec{v})^2.\vec{w}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}).\overrightarrow{OA}$$
$$=\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}$$
$$=\overline{OC'}\times\overline{OA}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}.\vec{w}+\vec{v}.\vec{w} &= \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{OA}\\ &=\overline{OB'}\times\overline{OA}+\overline{B'C'}\times\overline{OA}\\ &=(\overline{OB'}+\overline{B'C'})\times\overline{OA}\\ &=\overline{OC'}\times\overline{OA}\end{aligned}$$

$Donc (\vec{u}+\vec{v}).\vec{w}=\vec{u}.\vec{w}+\vec{v}.\vec{w}$

4) On a : $\left|\cos\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)\right|\leq 1.$
Donc $\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\left|\cos\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)\right|\leq\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$
$|\vec{u}.\vec{v}|\leq\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|.$

5) On a : $(\vec{u}+\vec{v})^2=\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}.$
Donc $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2).$

6) On a : $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2.$

7) $(\vec{u}-\vec{v})^2=(\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2.$

8) $(\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2+\vec{u}.\vec{v}-\vec{u}.\vec{v}$
$=\vec{u}^2-\vec{v}^2.$

## Exercices de fixation

**1-4-1** $$\begin{aligned}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AK}).\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AB}\\ &=AB^2+\overline{AK}\times\overline{AK}\\ &=AB^2+AK^2\\ &=2^2+3 \text{ car } AK^2=AB^2-BK^2=4-1=3\\ &=7\end{aligned}$$

• $$\begin{aligned}(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KC}).\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{AB}\\ &=AK^2+\overline{KC}\times\overline{KB}\\ &=3^2+2\times(-1)=9-2=7.\end{aligned}$$

• $$\begin{aligned}(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KB})(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KC}) &= AK^2+\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KB}.\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KB}.\overrightarrow{KC}\\ &=3^2+0+0+\overline{KB}\times\overline{KC}\\ &=9-2=7.\end{aligned}$$

**1-4-2** • $\vec{u}.(2\vec{u}-7\vec{v})=2\vec{u}^2-7\vec{u}.\vec{v}=2\times3-7\times(-4)=6+27=33$

• $$\begin{aligned}(4\vec{u}-\vec{v}).(-\vec{u}+3\vec{v}) &= -4\vec{u}^2+13\vec{v}.\vec{v}-3\vec{v}^2=-4\times3+13\times(-4)-3\times3^2\\ &=-12-52-27=-91.\end{aligned}$$

• $(\vec{u}-5\vec{v})^2=\vec{u}^2-10\vec{u}.\vec{v}+25\vec{v}^2=3+40+25\times9=268.$

**1-4-3** 1) On a : $$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} &= \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\|^2-\|\overrightarrow{AB}\|^2-\|\overrightarrow{AD}\|^2)\\ &=\frac{1}{2}(AC^2-AB^2-AD^2), \text{Car } \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

2) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(6^2-4^2-3^2)=\frac{1}{2}(36-16-9)=\frac{11}{2}.$

3) $\cos\left(\widehat{BAD}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}}{AB\times AD}=\frac{11}{2}\times\frac{1}{4\times3}=\frac{11}{24}=0,45.$
Donc mes $\widehat{BAD}=63,25°$.

4) a) $(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})^2=BA^2+2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD}+AD^2=BA^2+AD^2-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

b) $(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})^2=4^2+3^2-2\times\frac{11}{2}=16+9-11=14.$

Donc $BD^2=14$ car $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$. D'où $BD=\sqrt{14}$ .

### 1.5. Vecteurs orthogonaux

1) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3} \times 2 \times 0 = 0.$

2) Si $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2$ on a

$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} \Leftrightarrow$

$2\vec{u}\vec{v} = 0.$ Donc $\vec{u}\vec{v} = 0$, par la suite $\vec{u} \perp \vec{v}$

Si $\vec{u} \perp \vec{v}$, alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$, donc $2\vec{u}.\vec{v} = 0$.

D'où $u^2 + v^2 + 2\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}^2 + \vec{v}^2$.

Ainsi, $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2$.

**Exercices de fixation**

On a $\vec{u}.(\vec{v}-\vec{\omega}) = 0$ et $\vec{v}.(\vec{\omega}-\vec{u}) = 0$

$\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{\omega}$ et $\vec{v}.\vec{\omega} = \vec{u}.\vec{v}$.

$\vec{u}.(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{\omega}\vec{u} - \vec{\omega}\vec{v}$ comme $\vec{\omega}\vec{u} = \vec{\omega}\vec{v}$

Donc $\vec{\omega}.(\vec{u}-\vec{v}) = 0$.

Donc $\vec{\omega} \perp (\vec{u}-\vec{v})$.

## Activité 2 Relations métriques dans un triangle rectangle

### 2.1.

1) $\overrightarrow{BC}.(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AH}) = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$ car $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AH}$

$= (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{BA} = BA^2 + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA}$. Car $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

2) ● Supposons que $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BH} = BA^2$.
Alors $BA^2 + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA} = BA^2$.
D'où $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA} = 0$. Par suite (AC) ⊥ (AB), donc ABC est rectangle en A.

● Supposons que ABC est rectangle en A.
Alors (AB) ⊥ (AC) d'où $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$, ou encore $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA} = 0$.
Par suite $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BH} = BA^2 + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA} = BA^2$.

● Conclusion $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BH} = BA^2$ ssi ABC est rectangle en A.

<u>Déduction</u>

On a $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BH} = \overline{BC} \times \overline{BH}$.
Or $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BH} = BA^2$, donc $BA^2 = \overline{BC} \times \overline{BH}$.

3. a) $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HC})^2 = BH^2 + CH^2 + 2\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{HC}$.

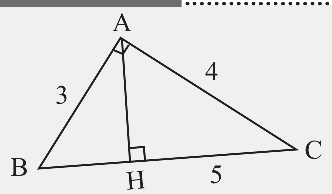
b) $BC^2 = AB^2 - AH^2 + CH^2 + 2\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{HC}$.

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2(AH^2 - \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{HC})$.

c) ABC est rectangle en A, donc $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ;
d'où $-2(AH^2 - \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{HC}) = 0$ ; d'où $AH^2 = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{HC}$ ; donc $AH^2 = \overline{BH} \times \overline{HC} = -\overline{BH} \times \overline{HC}$.

**Exercices de fixation**

**2-1-1**




1) $BC^2 = 5^2 = 25$ et $AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$.
Donc $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
D' où ABC est un triangle rctangle en A.

2) On a : $BA^2 = \overline{BC} \times \overline{BH}$ d'où $BH = \frac{BA^2}{BC} = \frac{9}{5}$.
On a BC = BH + HC
d' où $HC = 5 - \frac{9}{5} = \frac{25-9}{5} = \frac{16}{5}$ ;
d' où $AH^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC} = \frac{9}{5} \times \frac{16}{5} = \frac{144}{25} = \left(\frac{12}{5}\right)^2$.
Ainsi $AH = \frac{12}{5}$.

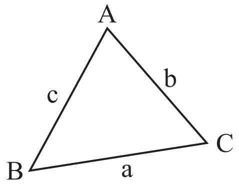
**2-1-2**

1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2 - AD^2) = \frac{1}{2}(8^2 - 7^2 - 3^2)$

$= \frac{1}{2}(64 - 49 - 9) = \frac{1}{2} \times 6 = 3.$

2) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos\widehat{BAD}$,
donc $\cos\widehat{BAD} = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}}{AB \times AD} = \frac{3}{7 \times 3} = \frac{1}{7}$.
On a : $\sin^2\widehat{BAD} + \cos^2\widehat{BAD} = 1$,
D'où $\sin^2\widehat{BAD} = 1 - \frac{1}{49} = \frac{48}{49}$ ;
Donc $\sin\widehat{BAD} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$.

## 2.2. Théorème d'Al kashi :



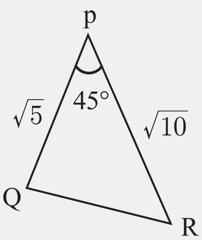

1) $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = BA^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = BA^2 + CA^2 - 2AC.AB\cos\widehat{BAC}$

$BC^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\widehat{A}.$

2) $BC^2 = a^2$, d'où $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\widehat{A}.$

### Exercices de fixation

2-1-1




(1) PQR est un triangle d'après Al Kashi.

On a : $QR^2 = PQ^2 + PR^2 - 2PQPR\cos\widehat{P}$

$= 5 + 10 - 2\sqrt{50} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$= 15 - 2 \times \sqrt{100} = 15 - 10 = 5.$

(2) D'où $QR = \sqrt{5}$.

1) $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC\ \cos\widehat{A}.$

$= 8^2 + 8^2 - 2 \times 8 \times 8 \times \dfrac{1}{2}$

$BC^2 = 2 \times 8^2 - 8^2 = 8^2.$

D'où $BC = 8$ ou ABC est équilatéral

2) ABC est équilatéral donc $mes\ \widehat{CBA} = mes\ \widehat{BAC} = 60°.$

2-1-2 1) $2AI^2 = AB^2 + AC^2 - \dfrac{BC^2}{2}$

$2AI^2 = 5^2 + 7^2 - \dfrac{11^2}{2} = 25 + 49 - \dfrac{121}{2}$

$= \dfrac{148 - 121}{2} = \dfrac{27}{2}.$

$AI^2 = \dfrac{27}{4}$ *d'où* $AI = \dfrac{\sqrt{27}}{2}.$

## 2.3. Théorie de la médiane

a) Demontrons que : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2.$

On a : $AB^2 + AC^2 = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC})^2$

$= AI^2 + 2\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IB} + IB^2 + AI^2 + 2\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IC} + IC^2$

$= 2AI^2 + 2\overrightarrow{AI}.(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) + IB^2 + IC^2 = 2AI^2 + 2IB^2$. Car $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IC}$ ou $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$= 2AI^2 + 2 \times \left(\dfrac{BC}{2}\right)^2 = 2AI^2 + \dfrac{1}{2}BC^2.$

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}).(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC})$

$= (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}).(\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB})$

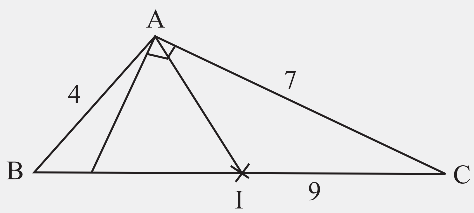
$= AI^2 - IB^2$

$= AI^2 - \left(\dfrac{BC}{2}\right)^2$

$= AI^2 - \dfrac{1}{4}BC^2$

### Exercices de fixation

2-3-1




ABC est un triangle, I = mil [BC] d'après la théorie de la médiane. On a :

$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \dfrac{BC^2}{2}$,

d' où $AI^2 + AB^2 = AC^2 - \dfrac{BC^2}{2}$

$2AI^2 = 4^2 + 7^2 - \dfrac{9^2}{2} = 16 + 49 - \dfrac{81}{2} = \dfrac{130 - 81}{2}$

$2AI^2 = \dfrac{49}{2}$, d'où $AI^2 = \dfrac{49}{2}$ donc $AI = \dfrac{7}{2}.$

## Exercices de fixation

**2-3-2** ABC un triangle, d'après le théorème de la médiane, on a :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AI^2 - \frac{1}{4}BC^2$.

Or $2AI^2 = AB^2 = AC^2 - \frac{BC^2}{2}$ d'où $AI^2 = \frac{AB^2}{2} + \frac{AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}$.

Ainsi $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{AB^2}{2} + \frac{AC^2}{2} - \frac{1}{2}BC^2$

$= \frac{5^2 + 4^2 - 7^2}{2} = \frac{41-49}{2} = \frac{-8}{2} = -4.$

## Activité 3 Forme analytique du produit scalaire

### 3.1.

1) a) $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$.

b) $\vec{u}.\vec{v} = xx'\vec{\imath}^2 + xy'\vec{\imath}.\vec{\jmath} + xy'\vec{\imath}\,\vec{\jmath} + yy'\vec{\jmath}^2$

$= xx' + yy'$ car $\vec{\imath}\,\vec{\jmath} = 0$ et $\vec{\imath}^2 = \vec{\jmath}^2 = 1$

2) Alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.

## Exercices de fixation

**3-1-1** 1)

a) $\vec{u}.\vec{v} = 2\times 5 - 4\times 1 = 10 - 4 = 6.$

b) $\vec{v}.\vec{u} = 2\times 5 - 4\times 1 = 10 - 4 = 6.$

c) $\vec{u}^2 = 2^2 + (-4)^2 = 4 + 16 = 20.$

d) $\vec{v}^2 = 5^2 + 1^2 = 25 + 1 = 26.$

e) $\|\vec{v}\| = \sqrt{26}$.

f) $\|\vec{u}\| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

g) $(\vec{v} + 2\vec{u})^2$ *or* $\vec{v} + 2\vec{u}\begin{pmatrix}12\\-2\end{pmatrix}$; donc

$(\vec{v} - 2\vec{u})^2 = \|\vec{v} - 2\vec{u}\|^2 = 12^2 + 2^2 = 144 + 4 = 148.$

h) $3\vec{v} - \vec{u}\begin{pmatrix}1\\-13\end{pmatrix}$; $\|3\vec{v} - \vec{u}\|^2 = 1^2 + 13^2 = 170.$

2) $\vec{u}\left(1; \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)$; $\vec{v}\left(\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}; -1\right)$

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}$

$= 2\sqrt{2}$.

**3-1-2** 1) $\vec{u}.\vec{v} = 3\times 2 - 1\times 6 = 0.$

2) $\vec{v}.\vec{u} = 0$ donc $\vec{v} \perp \vec{u}$.

**3-1-3** 1) $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}$ ; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3\\-9\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 6\times 3 - 2\times 9 = 18 - 18 = 0.$

2) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 0$, donc le triangle BAC est rectangle en B.

**3-1-4** $\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ ; $\overrightarrow{RT}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ ; $\overrightarrow{ST}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$.

On a : $RS = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ ; $RT = \sqrt{13}$ ; $ST = \sqrt{2}$.

$\overrightarrow{RS}.\overrightarrow{ST} = 6 + 6 = 12$

$\overrightarrow{RS}.\overrightarrow{ST} = -3 + 2 = -1$

$\overrightarrow{RT}.\overrightarrow{ST} = -2 + 3 = 1.$

Or $\overrightarrow{RS}.\overrightarrow{ST} = RS \times ST \times \cos\widehat{SRT}$

donc $\cos\widehat{SRT} = \frac{\overrightarrow{RS}.\overrightarrow{ST}}{RS\times RT} = \frac{12}{\sqrt{13}\times\sqrt{13}} = \frac{12}{13} = 0,9.$

d'où $mes\,\widehat{RST} = 23,07$.

D'autre part, $\cos\widehat{RST} = \frac{\overrightarrow{SR}.\overrightarrow{ST}}{SR\times ST} = \frac{1}{\sqrt{13}\times\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{26}}$

$= 0,19$;

d'où $mes\,\widehat{RST} = 79,04$.

Par suite, $mes\,\widehat{RTS} = 180 - (79,04 + 23,07)$

$= 180 - 102,11 = 77,89.$

### 3.2. Équation cartésienne de la droite passant par un point et de vecteur normal $\vec{n}$

Soit M($x$ ; $y$) un point de la droite (D) $(\overrightarrow{AM} \perp \vec{u})$.

$\overrightarrow{AM} \perp \vec{u} = 0 \Leftrightarrow -(x-1)+3(y-2)=0$

$\Leftrightarrow -x+1+3y-6=0$

$\Leftrightarrow -x+3y-5=0.$

(D) : $-x+3y-5=0.$

**Exercices de fixation**

**3-2-1** $M(x\,;y) \in (D)$, on a $\overrightarrow{RM} \perp \vec{u}$.

$\vec{u}.\overrightarrow{RM}=0 \Leftrightarrow 2\left(x-\frac{3}{5}\right)+1(y-1)=0$

$\Leftrightarrow 2x+y-\frac{11}{5}=0.$

(D) : $2x+y-\frac{11}{5}=0.$

**3-2-2** Soit I = mil [BC], $I\left(\frac{2-1}{2};\frac{6-5}{2}\right)$ ; $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Soit M ($x$ ; $y$ ∈ (D) ; $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}3\\11\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{IM}\left(x-\frac{1}{2};y-\frac{1}{2}\right)$.

$\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{IM}=0 \Leftrightarrow 3\left(x-\frac{1}{2}\right)+11\left(y-\frac{1}{2}\right)=0$

$\Leftrightarrow 3x-\frac{3}{2}+11y-\frac{11}{2}=0$

$\Leftrightarrow 3x+11y-7=0$

(D) : $3x+11y-7=0.$

### 3.3. Équation cartésienne de cercle

1) Soit $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$, donc (MA) ⊥ (MB), d'où M ∈ ($\mathscr{C}$) de diamètre [AB] car le triangle AMB est rectangle en M. Si M ∈ ($\mathscr{C}$) de diamètre [AB] alors (AM) ⊥ (MB) d'où $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$.

2) $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}x-3\\y+1\end{pmatrix}$ ; $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}x+1\\y+3\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1)+(y+1)(y+3)=0$.

$\Leftrightarrow x^2-2x-3+y^2+4y+3=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2x+4y=0.$

**Exercices de fixation**

**3-3-1** $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}x-3\\y+1\end{pmatrix}$ ; $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x+1\\y+3\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1)+(y+1)(y+3)=0$

$\Leftrightarrow x^2-2x-3+y^2+4y+3=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2x+4y=0.$

**3-3-2** $x^2+y^2+4x-3y-15=0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2-4+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-15=0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-19=0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{85}{4}.$

Ainsi, Ω le centre a pour coordonnées $\left(-2;\frac{3}{2}\right)$ et le rayon de (Γ) est $r=\left(\frac{\sqrt{85}}{2}\right)$.

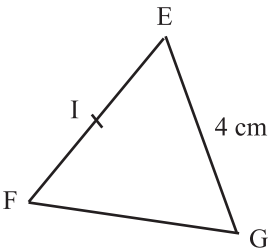
## Exercices de renforcement

**1** 1 → c, 2 → a, 3 → c, 4 → a, 5 → b, 6 → b.

**2** 1) → faux, 2) → faux, 3) → faux,
4) → vrai, 5) → vrai, 6) → vrai,

**3** a) $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EG} = EF \times EG \times \cos 60°.$
$= 4 \times 4\ \frac{1}{2} = 8.$

b) $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EI} = EF \times EI = 4 \times 2 = 8.$
c) $\overrightarrow{IE}.\overrightarrow{FI} = IE \times FI = 2 \times 2 = 4.$




**4** $\overrightarrow{TR}\begin{pmatrix} \frac{-23}{5} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{13}{2} \end{pmatrix}.$

On a $\overrightarrow{TR}.\overrightarrow{RS} = -\frac{23}{5} \times \frac{8}{5} + \frac{3}{2} \times \frac{13}{2}$
$= \frac{-736 + 975}{100} = \frac{239}{100}.$

Comme $\overrightarrow{TR}.\overrightarrow{RS} \neq 0$, donc les droites (TR) et (RS) ne sont pas perpendiculaire.

**5** 1. a) $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$
$= 4^2 + 7^2 - 2 \times 4 \times 7 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$
$= 93$

b) $BC^2 = 93$ donc $BC = \sqrt{93}$.

2) $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(BC^2 + CA^2 - AB^2) = \frac{1}{2} \times 126 = 63.$

3) ABC est un triangle.
$\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} = CB \times CA \times \cos \widehat{ACB}$ donc

$\cos \widehat{ACB} = \frac{\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}}{CB.CA} = \frac{63}{\sqrt{93} \times 7} = 0{,}933$, d'où

mes $\widehat{ACB} = 21{,}09°$

4) D'après le théorème de la médiane, on a :
$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$ donc

$AI^2 = \frac{AB^2 + CA^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{4^2 + 7^2}{2} - \frac{93}{4} = \frac{37}{4}.$

5) $\mathscr{A} = \frac{1}{2} AC \times AB \times \sin 120°$
$= \frac{1}{2} \times 7 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}.$

On a : $\frac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = 2R$ (théorème des sinus), d'où

$R = \frac{BC}{2 \sin \widehat{BAC}} = = \frac{\sqrt{93}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{31}.$

**6** $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$
$\Leftrightarrow 3 \times 4m + m - 2 = 0$
$\Leftrightarrow m = \frac{2}{13}.$

**7** $(\alpha\vec{u} + \vec{v}).(2\vec{u} - 3\vec{v}) = 0$
$\Leftrightarrow 2\alpha\|\vec{u}\|^2 - 3\alpha\vec{u}.\vec{v} + 2\vec{u}.\vec{v} - 3\|\vec{v}\|^2 = 0$
$\Leftrightarrow 2\alpha \times 3^2 - 3\alpha \times 10 + 2 \times 10 - 3 \times 5^2 = 0$
$\Leftrightarrow \alpha = \frac{55}{12}.$

**8** $\overrightarrow{EB}(-3;-1)$; $\overrightarrow{EN}(2;2)$; $\overrightarrow{BN}(5;3)$

1) $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{EN} = -3 \times 2 - 1 \times 2 = -8.$
$\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BE} = 5 \times 3 + 3 \times 1 = 15 + 3 = 18.$
$\overrightarrow{NB}.\overrightarrow{NE} = -5 \times (-2) + (-3) \times (-2) = 10 + 6 = 16.$

2) On a $EB = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ ;
$EN = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ et $BN = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$

- $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{EB};\overrightarrow{EN}}\right) = \frac{\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{EN}}{EB \times EN}$
$= \frac{-8}{\sqrt{10} \times 2\sqrt{2}} = \frac{-2}{\sqrt{5}} - \frac{2\sqrt{5}}{5},$

d'où mes$\left(\widehat{\overrightarrow{EB};\overrightarrow{EN}}\right) = 2{,}67$ radians.

- $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{BN};\overrightarrow{BE}}\right) = \frac{\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BE}}{BN \times BE}$
$= \frac{18}{\sqrt{34} \times \sqrt{10}} = 0{,}97,$

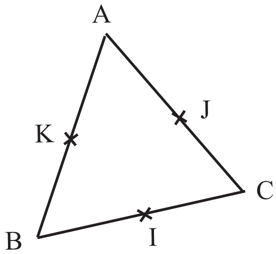
d'où mes$\left(\widehat{\overrightarrow{BN};\overrightarrow{BE}}\right) = 0{,}25$ radians.

- $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{NB};\overrightarrow{NE}}\right) = \frac{\overrightarrow{NB}.\overrightarrow{NE}}{NB \times NE}$
$= \frac{16}{2\sqrt{34} \times \sqrt{2}} = \frac{8}{68} = 0{,}97,$

d'où mes$\left(\widehat{\overrightarrow{NB};\overrightarrow{NE}}\right) = 0{,}25$ radians.

Comme mes$\left(\widehat{\overrightarrow{NB};\overrightarrow{NE}}\right) =$ mes$\left(\widehat{\overrightarrow{BN};\overrightarrow{BE}}\right)$, alors le triangle EBN est isocèle en E.

**9**




1) Le triangle AIB est rectangle en I d'après Pythagore.
$AI^2 = AB^2 - BI^2 = 6^2 - 3^2 = 27$, d'où $AI = 3\sqrt{3}$ ;
donc $AI = BJ = CK = 3\sqrt{3}$.

2. a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 6 \times 6 \times \cos 60°$
$= 6 \times 6 \times \frac{1}{2}$
$= 6 \times 6 = 6 \times 3 = 18;$

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AI} \times \overline{AI} = AI^2 = (3\sqrt{3}) = 27.$

c) $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AB} = \overline{BK} \times \overline{AB} = -3 \times 6 = -18.$

d) $\overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{KJ} + \overrightarrow{KI}) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{KC} = KC^2$
$= (3\sqrt{3})^2 = 27$

**10** 1) On a : $(\vec{u} \perp \vec{v}) \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$
$\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow 3 \times 4\,m - 1(-m+2) = 0.$
$\Leftrightarrow 12\,m + m - 2 = 0$
$\Leftrightarrow m = \frac{2}{13}.$

2) $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow -5\,m(m-1) + 4(-m + \frac{1}{4}) = 0.$
$\Leftrightarrow -5\,m^2 + 5 - 4\,m + 1 = 0$
$\Leftrightarrow -5\,m^2 + m + 1 = 0$
$\Leftrightarrow m = \frac{1+\sqrt{21}}{10}$ où $m = \frac{1-\sqrt{21}}{10}.$

**11** On a : $(2\vec{u} - \vec{v}).(\vec{u} + \vec{v}) = 2$
$\Leftrightarrow 2\,\|\vec{u}\|^2 + \vec{u}.\vec{v} - \|\vec{v}\|^2 = 2$
$\Leftrightarrow 8 + 2 \times \frac{1}{2} \times \|\vec{v}\| - \|\vec{v}\|^2 = 2$
$\Leftrightarrow \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v}\| - 6 = 0 \Leftrightarrow (\|\vec{v}\| - 3)(\|\vec{v}\| + 2) = 0$
$\|\vec{v}\| \Leftrightarrow 3$ ou $\|\vec{v}\| = -2.$
Or $\|\vec{v}\| > 0$ donc $\|\vec{v}\| = 3.$

**12** I. $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2,$
donc $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2).$

II. 1. $a)$ Dans I), en ramplaçant $\vec{u}$ par $\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}$ par $\overrightarrow{AC}$, on a :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\|^2).$
$= \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2).$

$b)$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(4^2 + 4^2 - (4\sqrt{3})^2)$
$= \frac{1}{2}(32 - 48)$
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -8.$

2) On a : $\cos \widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{-8}{4 \times 4} = \frac{-1}{2},$
d'où mes $\widehat{BAC} = 120°$

3) ABC est un triangle isocèle en A, donc
mes $\widehat{ABC} = (180 - 120) = \frac{60}{2} = 30°.$

4) $\mathscr{A} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \widehat{BAC}$
$= \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ *u.a*

D'après le théorème des sinus $\frac{a}{\sin \widehat{A}} = 2R$, d'où
$R = \frac{BC}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = 4.$

**13** 1) On a : $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ car $(BC) \perp (DC)$.

2. a) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AI} = \overline{BC} \times \overline{BC} = BC^2.$

b) $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CD}.(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CI})$
$= \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CI}$
$= \overline{CD} \times \overline{CI} + \overline{CD} \times \overline{AB} + 0$
$= 16 \times 8 + 16 \times (-17)$
$= -144$

3) $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AI} = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}).\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AI}$
$= -144 + 144$
$= 0$

On a : $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AI} = 0$, donc les droites (BD) et (AI) sont perpendiculaires

**14** 1. a) On a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$ donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE}$,
d'où $C = \text{mil}[DE]$.

b) ABC est un triangle rectangle en B. D'après Pythagore, on a :
$AC^2 = BC^2 + BA^2 = 2AB^2$ d'où $AC^2 = 2 \times 9 = 18.$
Ainsi $AC = 3\sqrt{2}$.

2. a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$ car $(AB) \perp (AD)$.

b) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BE} = AC \times BE = AC^2 = 18.$

c) $\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{CA} = \overline{CE} \times \overline{CD} = -CE^2 = -3^2 = -9.$

3. a) $(\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CA}) = CE^2 + 2\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{CA} + CA^2$

$= 3^2 + 2\times(-9) + 18 = 9$

$CE^2 + CA^2 = CE^2 + CA^2 = 3^2 + 18 = 27.$

b) $\| \overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CA} \|^2 = 9$ et $\| \overrightarrow{CE} \|^2 + \| \overrightarrow{CA} \|^2 = 27,$

donc $\| \overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CA} \|^2 \leq \| \overrightarrow{CE} \|^2 + \| \overrightarrow{CA} \|^2.$

4. a) CEF est un triangle. D'après la propriété d'Alkashi, on a :

$CE^2 = CF^2 + FE^2 - 2CF\times FE\times\cos\widehat{CFE}$

$= 2CF^2 - 2CF^2\cos 120°.$

$CE^2 = 2CF^2 - 2CF^2\times\left(-\frac{1}{2}\right) = 3CF^2$

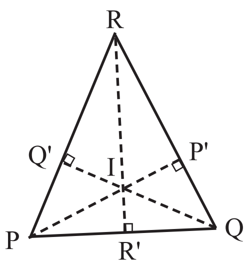
donc $CE^2 = \frac{1}{3}CF^2 = \frac{1}{3}\times 9 = 3$

Ainsi $CF = \sqrt{3}.$

b) On a : mes $\widehat{FCE}$ = mes $\widehat{FEC} = \frac{1}{2}(180-120) = 30°.$

mes $\widehat{CEF} = 120°$

**15**




1) On a : $(QQ') \perp (PR)$, or $(\overrightarrow{QQ'}) = \lambda\overrightarrow{QI}$.

$\overrightarrow{QI}.\overrightarrow{PR} = 0.$

2) On a : $\overrightarrow{PI}.\overrightarrow{PQ} = \overline{PR'}\times\overline{PQ} = \overline{PI}\times\overline{PP'}$

et $\overrightarrow{PI}.\overrightarrow{PR} = \overline{PI}\times\overline{PP'}$, donc $\overrightarrow{PI}.\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PI}.\overrightarrow{PR}.$

3) $\overrightarrow{IP}.\overrightarrow{IQ} = \overline{IP}\times\overline{IP'}$

$= \overline{IQ}\times\overline{IQ'}$

Où P' est le projeté orthogonal de Q sur (PI)
Q' est le projeté orthogonal de P sur (IQ)

4) $\overrightarrow{IP}.\overrightarrow{IR} = \overline{IP}\times\overline{IP'}$

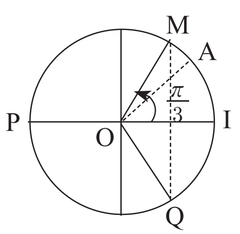
$= \overline{IR'}\times\overline{IR}$

$\overrightarrow{IR}.\overrightarrow{IQ} = \overline{IR}\times\overline{IR'} = \overrightarrow{IQ'}.\overrightarrow{IQ}$ ;

D'après ces 2 égalités et la question 3

on a : $\overrightarrow{IP}.\overrightarrow{IQ} = \overrightarrow{IR}.\overrightarrow{IQ} = \overrightarrow{IR}.\overrightarrow{IP}.$

**16** 1. a)




b) Voir figure

c) Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OQ}}\right) = -\frac{\pi}{3}$

2. a) Voir figure

b) M est à l'image $\frac{\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique ;

donc $M\left(\cos\frac{\pi}{3};\sin\frac{\pi}{3}\right)$ d'où $M\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3. a) $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $M\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

donc $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM} = \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$

b) On a : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM} = OA\times OM\times\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}}\right).$

Or $OA = OM = 1$ et Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}}\right) = \frac{\pi}{12},$

donc $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM} = \cos\frac{\pi}{12}.$

c) On a : $\cos\frac{\pi}{12} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$

Donc $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$

**17** 1) $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DA} = \overline{DA}\times\overline{DA} = DA^2 = 9$ car A est projeté orthogonal de B sur (AD).

2. a) $\overrightarrow{KE} = \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{AB}.$

car $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{KD}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.$

b) $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{KE} = (\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}).\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{AB}\right)$

$= \frac{1}{3}BC^2 + 3\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} - 3AB^2$

$= \frac{1}{3}BC^2 - 3AB^2 = \frac{1}{3}\times 3^2 - 3\times 1 = 0$

$= 0.$ Car $(BC)\perp(AB).$

On a : $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{KE} = 0$, donc $(BD)\perp(KE).$

3. a) $\overrightarrow{BE}(3:2)$ et $\overrightarrow{BD}(3:-1)$

$\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BD} = 3\times 3 - 2\times 1 = 9 - 2 = 7.$

b) Soit $M(x ; y)$ ; $\overrightarrow{EM}\begin{pmatrix}x-3\\y-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix}x-3\\y\end{pmatrix}.$

$(\mathscr{C})$ est le cercle de dimamètre [DE].

$M\in(\mathscr{C}) \Leftrightarrow \overrightarrow{EM}.\overrightarrow{DM} = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 + y(y-3) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6y - 3y + 9 = 0.$

Une équation du cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre $[DE]$ est donc : $x^2 + y^2 - 6x - 3y + 9 = 0.$

**18** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}.$

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 1\times 0 + 3\times(-1) = -3.$

b) $AB = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$ et $AC = \sqrt{3^2} = 3.$

c) On a : $\cos\widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB\times AC} = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$

donc mes $\widehat{BAC} = 135°.$

2) ABC est un triangle d'après Alkashi.

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$

$BC^2 = (\sqrt{2})^2 + 3^2 - 2\sqrt{2} \times 3 \times \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= 2 + 9 + 6 = 17$, d'où $BC = \sqrt{17}$.

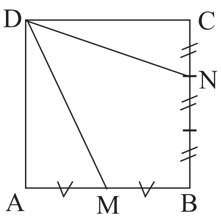
3) $I = \text{mil}\,[BC]$ donc $I\left(\dfrac{2+1}{2}\ \dfrac{-1+3}{2}\right)$

d'où $I\left(\dfrac{3}{2};1\right)$ or $\overrightarrow{DI}\left(\dfrac{1}{2};2\right)$.

De plus, $DI = \sqrt{\dfrac{1}{4}+4} = \sqrt{\dfrac{17}{4}} = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$.

Comme $ID = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$ alors D appartient au cercle de diamètre $[BC]$. Car le rayon du cercle de diamètre $[BC]$ est $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$.

**19** 1)




2) Dans le repère (A,B,D) : A(0;0) ; B(1;0) et (D(0 ;1)).

• $\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{DN} = \dfrac{1}{2}\left(DM^2 + DN^2 - \|\overrightarrow{DM} - \overrightarrow{DN}\|^2\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(DM^2 + DN^2 - NM^2\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5}{4} + \dfrac{10}{9} - \dfrac{25}{36}\right) = \dfrac{30}{36} = \dfrac{5}{6}$

$\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{DN} = \dfrac{5}{6}$

• $M\left(\dfrac{1}{2};0\right)$ et $N\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$ donc $\overrightarrow{DM}\left(\dfrac{1}{2};-1\right)$

et $\overrightarrow{DN}\left(1;-\dfrac{1}{3}\right)$, d'où $\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{DN} = \dfrac{1}{2} \times 1 + 1 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{6}$

3) $\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{DN} = DM \times DN \times \cos \widehat{MDN}$. Ainsi,

$\cos\widehat{MDN} = \dfrac{\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{DN}}{DM \times DN}$

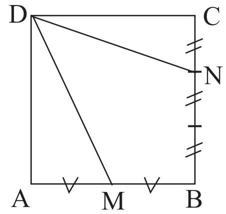
On a $DM = \sqrt{\dfrac{1}{4}+1} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ et

$DN = \sqrt{1+\dfrac{1}{9}} = \dfrac{\sqrt{10}}{9}$ donc

$\cos\widehat{MDN} = \dfrac{\dfrac{5}{6}}{\dfrac{\sqrt{5}}{2} \times \dfrac{\sqrt{10}}{3}} = \dfrac{5}{5\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\text{mes}(\widehat{MDN}) = \dfrac{\pi}{4}$.

**20** 1)




2. a) $\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{DN} = \dfrac{1}{2}\left(DM^2 + DN^2 - MN\right)$
où
$DM^2 = \dfrac{5}{4}AB^2$ ; $DN^2 = \dfrac{10}{9}AB^2$ et $MN^2 = \dfrac{25}{36}AB^2$

on a : $\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{DN} = \dfrac{5}{6}AB^2$

b) Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ ; on a

D(0 ; 1) ; $N\left(1;\dfrac{2}{3}\right)$ ; $M\left(\dfrac{1}{2};0\right)$, $\overrightarrow{DM}\left(\dfrac{1}{2};-1\right)$ et

$\overrightarrow{DN}\left(1;\dfrac{-1}{3}\right)$

$\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{DN} = \dfrac{1}{2} \times 1 + (-1) \times \left(\dfrac{-1}{3}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{6}$

Donc $\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{DN} = \dfrac{5}{6}$

3) $\cos(\widehat{MDN}) = \dfrac{\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{DN}}{DM.DN} = \dfrac{5}{\sqrt{50}}$

car $DM = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ et $DN = \dfrac{\sqrt{10}}{3}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{Mes}(\widehat{MDN}) = 45°$

**21** 1) $\overrightarrow{IJ}\left(\dfrac{7}{2};3\right)$ ; $\overrightarrow{KL}\left(-\dfrac{7}{2};-3\right)$ ; $\overrightarrow{IK}(-1;2)$ ;
$\overrightarrow{JL}(-8;-4)$ ; $\overrightarrow{IL}\left(-\dfrac{9}{2};-1\right)$ ; $\overrightarrow{JK}\left(-\dfrac{9}{2};-1\right)$.

2) $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{KL} = \dfrac{7}{2} \times \left(-\dfrac{7}{2}\right) + 3 \times (-3)$

$= -\dfrac{49}{4} - 9 = -\dfrac{85}{4}$.

$\overrightarrow{IK}.\overrightarrow{KJ} = -1 \times \dfrac{9}{2} + 2 \times (+1) = -\dfrac{9}{2} + 2 = -\dfrac{5}{2}$

$\overrightarrow{IL}.\overrightarrow{JK} = -\dfrac{9}{2} \times \left(-\dfrac{9}{2}\right) + (-1) \times (-1)$

$= +\dfrac{81}{4} + 1 = \dfrac{85}{4}$.

3) Soit M($x$ ; $y$). On a : $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}x+1\\y-1\end{pmatrix}$.

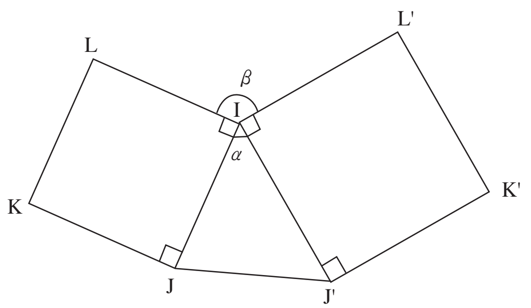
$$\overrightarrow{IM}=\overrightarrow{KL} \Leftrightarrow \begin{cases}x+1=-\dfrac{7}{2}\\ y-1=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{9}{2}\\ y=-2\end{cases}$$

donc $M\left(-\frac{9}{2}\ ;\ 2\right)$.

On a : $\cos\left(\widehat{JIM}\right)=\dfrac{\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IM}}{IJ\times IM}$
$=\dfrac{\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{KL}}{IJ\times KL}$
$=\dfrac{\frac{-85}{4}}{\frac{85}{4}}$
$=-1.$

Comme $\cos\widehat{JIM}=-1$ alors mes $(\widehat{JIM})=180°$.

**22**




1) On a : $\alpha=$ mes $(\widehat{JIJ'})$ et $\beta=$ mes $(\widehat{LIL'})$.

On a :
mes $\widehat{LIJ}$ + mes $\widehat{JIJ'}$ + mes $\widehat{J'IL'}$ + mes $\widehat{LIL'}=2\pi$,
Donc $\dfrac{\pi}{2}+\alpha+\dfrac{\pi}{2}+\beta=2\pi$
Ainsi $\alpha+\beta=2\pi-\pi=\pi$ d'où $\beta=\pi-\alpha$

2) $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IJ'}=IJ\times IJ'\times\cos\alpha$ et
$\overrightarrow{IL}.\overrightarrow{IL'}=IL\times IL'\times\cos\beta$
$=IL\times IL'\times\cos(\pi-\alpha)$
$=-IL\times IL'\times\cos(\alpha)$.

Or IL = JL et IL' = IJ' donc
$\overrightarrow{IL}.IL'=-IJ\times IJ'\ \cos\alpha=-\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IJ'}$.
Ainsi, $\overrightarrow{IL}.\overrightarrow{IL'}=-\overrightarrow{J'L}.\overrightarrow{IJ'}$.

3) $\overrightarrow{JL'}.\overrightarrow{J'L}=(\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{IL'}).(\overrightarrow{J'I}+\overrightarrow{IL})$
$=\overrightarrow{JI}.\overrightarrow{J'I}+\overrightarrow{JI}.\overrightarrow{IL}+\overrightarrow{IL'}.\overrightarrow{J'I}+\overrightarrow{IL'}.\overrightarrow{IL}$
$=\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IJ'}+\overrightarrow{IL}.\overrightarrow{IL'}+\overrightarrow{JI'}.\overrightarrow{IL}+\overrightarrow{IL'}.\overrightarrow{J'I}$
$=\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IJ'}-\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IJ'}-\overrightarrow{IL}.\overrightarrow{IJ}-\overrightarrow{IL'}.\overrightarrow{JI'}$
$=0.$ Car $(IL)\perp(IJ)$ et $(IL')\perp(IJ')$.

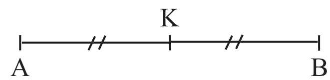
4) Comme $\overrightarrow{JL'}.\overrightarrow{JL'}=0$, les droites (JL') et (J'L) sont perpendiculaires.

**23** 1.a) $\vec{u}.\vec{v}=\dfrac{x^2-7x}{x+1}-3\times\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{x^3-7x-6}{x+1}$.

b) $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0$
$\Leftrightarrow 3^3-7x-6=0$ et $x\neq-1$
$\Leftrightarrow(x-3)(x+2)(x+1)=0$
$\Leftrightarrow x=3$ ou $x=-2$.

2) $\vec{u}(6,-2)$ *et* $\vec{v}(-1,-3)$ pour $x=-2$.
On a donc $3\vec{u}+2v(16\,;-12)$.
$\|3\vec{u}+2\vec{v}\|^2=9\|\vec{u}\|^2+12\vec{u}.\vec{v}+4\|\vec{v}\|^2$
$=9\|\vec{u}\|^2+4\|\vec{v}\|^2$ *car* $\vec{u}.\vec{v}=0$.
$\|3\vec{u}+2\vec{v}\|^2=9\times(6^2+2^2)+4(1^2+3^2)$
$=9\times40+40=40\times10=400.$
Donc $\|3\vec{u}+2\vec{v}\|=20$.

**24** 1)




2. a) $\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{KA}\times\overrightarrow{KB}$
$=\dfrac{1}{-2}\overrightarrow{AB}\times\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{-4}AB^2$.

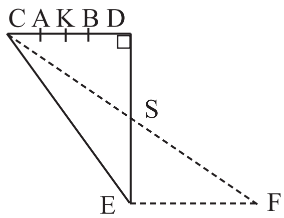
b) $\overrightarrow{KM}.(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB})=0$ car $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}=\vec{0}$.

3. a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KA}).(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KB})$.
$=MK^2+\overrightarrow{MK}.(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB})+\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KB}$
$=MK^2-\left(\frac{1}{2}AB\right)^2$
$=MK^2-\dfrac{1}{4}\times4$
$=MK^2-1$
$=-1+MK^2$.

b) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=8\Leftrightarrow-1+KM^2=8$
$\Leftrightarrow KM^2=9$
$\Leftrightarrow KM=3$
Donc $(\Gamma)$ est le cercle de centre K et de rayon 3.

## Exercices d'approfondissement

**25** 1. a)




b) CDE est un triangle rectangle en D d'après Pythagore on a :
$CE^2 = CD^2 + DE^2 = 4^2 + 8^2 = 16 + 64 = 80$,
donc $CE = 4\sqrt{5}$ .

2. a) $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{DE} = 0$ car $(CD) \perp (DE)$

$$\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{FE} = \overline{CD} \times \overline{FE} = -CD \times FE$$
$$= -CD^2 = -4^2 = -16$$

c) $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CE} = \overline{CD} \times \overline{CD} = CD^2$ car D est le projeté orthogonal de E sur $(CD)$.

3. a) $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$ or $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}$
On a $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CD}$ on a $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CE}$.

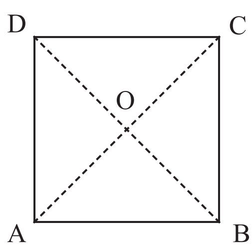
b) $CF^2 = (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CE})^2 = CD^2 + CE^2 + 2\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CE}$
$$= CD^2 + CE^2 + 2CD^2$$
car D est le projeté orthogonal de E sur (CD).
$$= 3CD^2 + CE^2$$
$$= 3 \times 4^2 + 80 = 128$$

Ainsi $CF = 8\sqrt{2}$ .

c) $\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\left(CF^2 + CE^2 - FE^2\right)$
$$= \frac{1}{2}\left(128 + 80 - 16\right) = 96.$$

Ainsi $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{CF}, \overrightarrow{CE}}\right) = \frac{\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{CE}}{CF \times CE} = \frac{96}{8\sqrt{2} \times 4\sqrt{5}}$
$$= \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$
donc $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{CF}, \overrightarrow{CE}}\right) = 18{,}43°$.

**26** 1. a)




b)

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AB} = AB^2 = 4^2 = 16.$
- $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AC} = \overline{AO} \times \overline{AC} = AO \times AC$
  Or $AC = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$ et $AO = \frac{1}{2}AC$. Donc
  $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AC} = 2\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} = 16$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overline{AB} \times \overline{BA} = -AB^2 = -16$
- $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0$ car $(AC) \perp (BD)$
- $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD} = 0$ car $(AD) \perp (CD)$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} = \overline{AB} \times \overline{BA} = -AB^2 = -16.$

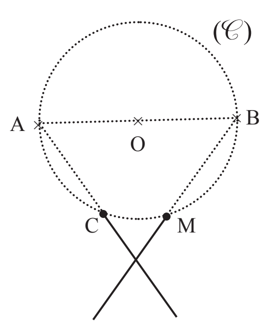
2) $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right).\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right) = AB^2 - AD^2 = 0,$
donc $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) \perp \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right).$

3. a) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})^2 = AB^2 + AD^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$
$$= AB^2 + AD^2 = 2AB^2 = 2 \times 16 = 32$$
$$(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})^2 = AB^2 + AD^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$$
$$= 2AB^2 = 2 \times 16 = 32.$$
$\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\|^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})^2 = 32$, donc
$\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\| = 4\sqrt{2}$
$\|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\|^2 = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})^2 = 32$. donc
$\|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\| = 4\sqrt{2}$.
D'où $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\| = \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\|$.

4. a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CM} = 0$ car $(CM) \perp (AB)$. L'ensemble des points est la perpendiculaire à (AB) passant par C. C'est la droite (CB).

b) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CM} = 0$ ,l'ensemble des points M est le cercle de diamètre [AC].

**27**



1) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overline{MA} \times \overline{MC} = \overline{MD} \times \overline{MB}$
car P le projété orthogonal de B sur (MA) est C et le P' projété orthogonal de B sur (MA) est D.

2) On a : $\overline{MA} \times \overline{MC} = \overline{MD} \times \overline{MB}$
donc $MA \times MC = MD \times MB$.

3) $$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB})\\ &= MO^2+\overrightarrow{MO}.(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}\\ &= MO^2-OA^2 \text{ car } \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{O}\\ &= MO^2-r^2\end{aligned}$$

4. a) $$\begin{aligned}MT^2 &= (\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OT})^2 = MO^2+2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OT}+\overrightarrow{OT}^2\\ &= MO^2-2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OT}+\overrightarrow{OT}^2\\ &= MO^2-2OT^2+OT^2\\ &= MO^2-OT^2\\ &= MO^2-r^2.\end{aligned}$$

b) $MO^2-r^2>0 \Leftrightarrow MO-r>0 \Leftrightarrow MO>r$
$\Leftrightarrow$ M est à l'extérieur du cercle ($\mathscr{C}$).

$MO^2-r^2=0 \Leftrightarrow MO=r$
$\Leftrightarrow$ M appartient au cercle ($\mathscr{C}$).

$MO^2-r^2<0 \Leftrightarrow MO<r$
$\Leftrightarrow$ M est à l'intérieur du cercle ($\mathscr{C}$).

**28** 1. a) On a : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM} = \overline{OA} \times \overline{OA} = OA^2 = R^2$ et
$\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OM} = \overline{ON} \times \overline{ON} = ON^2 = R^2$
donc $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM}$.

b) On a : $$\begin{aligned}\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{OM} &= (\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{ON}).\overrightarrow{OM}\\ &= \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OM}\\ &= -\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OM}\\ &= -R^2+R^2\\ &= 0.\end{aligned}$$

On a : $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{OM} = 0$ donc $(AN) \perp (OM)$.

2) Dans le triangle OAH, rectangle en H,
on a $\cos\alpha = \dfrac{OH}{OA}$, $OH = OA\cos\alpha$ or $OA = R$,
donc $OH = R\cos\alpha$.

3) $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.

a) $S_{(OH)}$

| | |
|---|---|
| O | O |
| A | N |
| H | H |

donc $\text{mes}(\widehat{AOM}) = \text{mes}(\widehat{NOH}) = \dfrac{\pi}{3}$
or $\text{mes}\,\widehat{AOB} = \pi$ donc $\text{mes}\,\widehat{NOB}$
$$\begin{aligned}&= \pi - (\text{mes}\,\widehat{AOM} + \text{mes}\,\widehat{NOH})\\ &= \pi - \left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right) = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$
Donc $\text{mes}\,\widehat{NOB} = \dfrac{\pi}{3}$.
On a : NO = OB = R, d'où le triangle NOB est isocèle avec $\text{mes}\,\widehat{NOB} = \dfrac{\pi}{3}$, donc le triangle NOB est équilatéral.

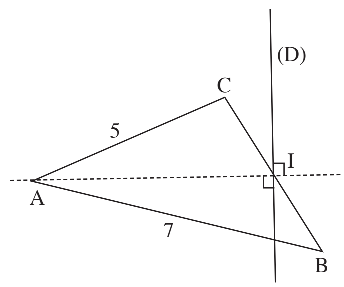
b) Dans le triangle ONK rectangle en K, on a :
$\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{OK}{ON}$ d'où $OK = ON\cos\dfrac{\pi}{3}$.
$OK = R\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}R$

Or $OH = R\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}R$. Par suite, OK = OH.

c) On a : $\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{ON} = \overline{OH} \times \overline{OH} = OH^2 = \dfrac{1}{4}R^2$ et
$\overrightarrow{OK}.\overrightarrow{ON} = \overline{OK} \times \overline{OK} = OK^2 = \dfrac{1}{4}R^2$.

d) $$\begin{aligned}\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{ON} &= (\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OK}).\overrightarrow{ON}\\ &= -\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OK}.\overrightarrow{ON}\\ &= -\frac{1}{4}R^2+\frac{1}{4}R^2\\ &= 0.\end{aligned}$$
On a : $\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{ON} = 0$, donc $(HK) \perp (ON)$.

**29**




1) ABC est un triangle, I milieu de [BC] d'après le théorème de la médiane.
$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \dfrac{1}{2}BC^2$.

Donc $AI^2 = \dfrac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-\dfrac{1}{2}BC^2\right)$
$AI^2 = \dfrac{1}{2}\left(7^2+5^2-\dfrac{4^2}{2}\right) = \dfrac{1}{2} \times 66 = 33$
$AI^2 = 33$, donc $AI = \sqrt{33}$.

2. a ) $2MA^2 - MB^2 - MC^2$

$= 2(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2 - (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2 - (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC})^2$

$= 2(MI^2 + IA^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA})$

$-(MI^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}) - (MI^2 + IC^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IC})$

$= 2IA^2 - IB^2 - IC^2 + 2\overrightarrow{MI}(-2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC})$

$= 2IA^2 - IB^2 - IC^2 + 2\overrightarrow{MI}(-2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{BI})$

$= 2IA^2 - IB^2 - IC^2 - 4\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}$, car $\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$

$= 2 \times 33 - 4 - 4 - 4\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}$

$= 58 + 4\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IM}$.

b) On a

$2MB^2 - MB^2 - MC^2 = 58 \Leftrightarrow 4\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IM} + 58 = 58$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IM} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{MI} = 0$

$\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{MI} = 0$ donc $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IA}$ sont orthogonaux.
L'ensemble (D) est donc la droite passant par I et perpendiculaire à la droite (IA).

**30** F(12 ; 18) ; G($x$ ; 0) ; H(0 ; y) car $G \in (0;\vec{i})$ et $H \in (0;\vec{j})$. On a $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix} x-12 \\ -18 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FH}\begin{pmatrix} -12 \\ y-18 \end{pmatrix}$.

mes $(\widehat{\overrightarrow{FG};.\overrightarrow{FH}}) = \dfrac{\pi}{2}$ donc $\overrightarrow{FG} \perp \overrightarrow{FH}$.

$\overrightarrow{FG} \perp \overrightarrow{FH} \iff \overrightarrow{FG}.\overrightarrow{FH} = 0$

$\Leftrightarrow -12(x-12) - 18(y-18) = 0$

$\Leftrightarrow -12x - 18y = -468$

$\Leftrightarrow 2x + 3y = 78.$

2. a) On a : $2(12 + 3k) + 3(18 - 2k) = 24 + 6k + 54 - 6k$ ;

$= 24 + 54$

$= 78.$

Donc les couples $(12 + 3k ; 18 - 2k)$ sont solutions de (E).

3) On a : $-6 \leq x \leq 21$ et $-5 \leq y \leq 14$ ;

Donc $-6 \leq 12 + 3k \leq 21$ et $-5 \leq y \leq 14$

$-6 \leq k \leq 3$ et $2 \leq k \leq 11{,}5$

D'où $k \in \{2;3\}$.

Pour $k = 2$ ; on a $x = 18$ et $y = 14$

$k = 3$ ; on a $x = 21$ et $y = 12$.

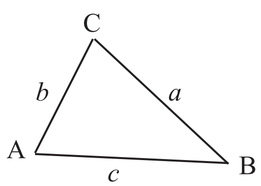
On a donc G(18 ; 0) et F(0 ;14)

et G(21 ; 0) et F(0 ;12).

Il y a donc deux couples de points (G;H).

Ainsi, Paul n'a pas raison.

**31**




1) ABC est un triangle, d'après la formule d'Al Kashi, on a :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$ , $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc\cos\widehat{A}$

d'où $4b^2c^2\cos^2\widehat{A} = (b^2 + c^2 - a^2)^2$

$4b^2c^2(1 - \sin^2\widehat{A}) = (b^2 + c^2 - a^2)^2$

$4b^2c^2\sin^2\widehat{A} = 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$.

b) Par suite $\sin^2 = \dfrac{4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}$

$= \dfrac{(2bc)^2 - (b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}$ ;

$\sin^2\widehat{A} = \dfrac{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)}{4b^2c^2}$

$= \dfrac{((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2)}{4b^2c^2}$

2) On pose $2p = a + b + c$

Or $b^2c^2\sin^2\widehat{A} =$

$= \dfrac{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4}$

$= \dfrac{2p(2p-2a)(2p-2c)(2p-2b)}{4}$

D'où$(b^2c^2)\sin^2\widehat{A} = \dfrac{2p \times 2 \times 2 \times 2(p-a)(p-b)(p-c)}{4}$

$(b^2c^2)\sin^2\widehat{A} = 4p(p-a)(p-b)(p-c)$.

On a : $bc\sin\widehat{A} = 2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Ainsi, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. car

$S = \dfrac{bc\sin\widehat{A}}{2}$

**32** On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-4 \end{pmatrix}$ où M($x$ ; $y$).

1) $M \in (AB) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & 2 \\ y-4 & -7 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -7(x-3) - 2(y-4) = 0$

$\Leftrightarrow -7x - 2y + 29 = 0.$

Donc une équation cartésienne de la droite (AB) est $7x + 2y - 29 = 0$

Soit K = mil [AB] alors $K\left(4;\dfrac{1}{2}\right)$ ; $\overrightarrow{KM}\begin{pmatrix} x-4 \\ y-\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$.

$M \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{KM}.\overrightarrow{AB} = 0$

$\Leftrightarrow 2(x-4) - 7\left(y - \dfrac{1}{2}\right) = 0.$

$M \in (\Delta) \Leftrightarrow 2x - 7 - \dfrac{9}{2} = 0$

$\Leftrightarrow 4x - 14y - 9 = 0.$

Une équation cartésienne de la droite (Δ) est :
$4x - 14y - 9 = 0$.

2) Soit D($x$ ; $y$) un point de (Δ) ; donc on a :
$4x - 14y - 9 = 0$.
D'autre part, $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OD} = -15 \Leftrightarrow 3x + 14y = -15$ ;
d'où ($x$ ; $y$) est solution du système.

$$\begin{cases} 3x + 4y = -15 \\ 4x - 14y = 9 \end{cases} \quad car\ \mathrm{M}(\Delta)$$

On obtient $x = -3$ *et* $y = \frac{-3}{2}$.

Ainsi $\mathrm{D}\left(-3;\frac{-3}{2}\right)$.

De plus $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix} 8 \\ \frac{-3}{2} \end{pmatrix}, \overrightarrow{DA}\begin{pmatrix} 6 \\ \frac{11}{2} \end{pmatrix}$,

$$\mathrm{DB} = \frac{\sqrt{265}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{DA} = \frac{\sqrt{265}}{2}$$

$$\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DA}. = 8 \times 6 - \frac{3}{2} \times \frac{11}{2} = \frac{159}{4}$$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA}}\right) = \frac{\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DA}}{\mathrm{DB} \times \mathrm{DA}} = \frac{\frac{159}{4}}{\frac{265}{4}} = \frac{159}{265} = \frac{3}{5}$$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA}}\right) = \frac{3}{5}$$

$$\mathrm{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA}}\right) = \frac{\pi}{300}\ \text{rad}$$

3. a) Soit C($x$ ; $y$)

$$\mathrm{C} \in (\mathrm{D}) \Leftrightarrow 4x - 14y - 9 = 0$$
$$\Leftrightarrow 4x - 14y = 9$$

ABC est un triangle rectangle en C et de sens direct si et seulement si $\mathrm{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{CB}.;\overrightarrow{CA}}\right) = \frac{\pi}{2}$

$\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} = 0$ ; or $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} 3-x \\ 3-y \end{pmatrix}$ ; $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} 5-x \\ -3-y \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} = 0 \Leftrightarrow (5-x)(3-x)-(3+y)(4-y) = 0$$
$$\Leftrightarrow 15 - 8x + x^2 - (12 + y - y^2) = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 + y^2 - y - 12 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8x - y + 3 = 0$$

donc ($x$ ; $y$) est solution du système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - y + 3 = 0 \\ 4x - 14y - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{14y + 9}{4} \\ x^2 + y^2 - 8x - y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{14y + 9}{4} \\ 212y^2 - 212y - 159 = 0 \end{cases}$$

En utilisant la forme canonique puis la forme factorisée de $212y^2 - 212y - 159$, on obtient :

$$y = \frac{212 - 424}{424} \quad \text{ou} \quad y = \frac{212 + 424}{424}$$

$$y = -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad y = \frac{3}{2}.$$

Comme ABC est de sens direct alors $y = \frac{1}{-2}$ ;

donc $x = \frac{-7 + 9}{4} = \frac{3}{4}$

$\sin\ \mathrm{C} = \left(\frac{3}{4}\ ;\ -\frac{1}{2}\right)$.

b) On a : $\overrightarrow{AC}.\left(-\frac{9}{4};-\frac{9}{2}\right)$ ; $\overrightarrow{AD}.\left(-6;\frac{-11}{2}\right)$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}}\right) = \frac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}}{\mathrm{AC} \times \mathrm{AD}} \text{ où } \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \frac{159}{4}.$$

$$\mathrm{AC} = \frac{9\sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \mathrm{AD} = \frac{\sqrt{265}}{4}$$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}}\right) = \frac{\frac{159}{4}}{\frac{9\sqrt{5}}{4} \times \frac{\sqrt{265}}{2}} = \frac{159 \times 2}{9\sqrt{5} \times \sqrt{265}} = 0,97$$

$$Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}}\right) = 0,24\ \text{rad}.$$

4) Soit E($x$ ; $y$)

$\mathrm{E} \in (\Delta) \Leftrightarrow 4x - 14y - 9 = 0$.

On a : $\overrightarrow{AB}$ (2 ; −7) donc AB = $\sqrt{4 + 49} = \sqrt{53}$.

$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-4 \end{pmatrix}$; $\mathrm{AE}^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2$

AEB est équilatéral si et seulement si

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-4)^2 = 53 \\ 4x - 14y - 9 = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x = \frac{14y + 9}{4} \\ 212y^2 - 212y - 583 = 0 \end{cases}$$

En utilisant la forme canonique puis la forme factorisée de $212y^2 - 212y - 583$, on obtient :
$y = -1,23$ ou $y = +2,23$
Comme AEB est de sens direct, on a :
$y = -1,23$ et $x = -2,05$
Donc E(−2,05 ; −1,23).

**33** a) On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IJ} = \overline{AB} \times \overline{IA} = -\mathrm{AB} \times \mathrm{AI}$
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = \overline{AB} \times \overline{AI} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AI}$

Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$

b) On a : $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{IJ}$
$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IJ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{IJ}$

$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AH}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}$

$= 0$ car $(AH) \perp (BC)$.

Donc $(AA') \perp (IJ)$.

## Situation d'évaluation

**34** a) Considérons le triangle CBD. D'après la formule de Heron, on a

$S_1 = \sqrt{p_1(p_1 - CD)(p_1 - CB)(p_1 - DB)}$ l'aire du triangle CBD.

Or $p_1 = (CD + CB + DB) \div 2$

$= (130 + 280 + 450) \div 2$

$p_1 = 430$

D'où $S_1 = \sqrt{430(860 - 130)(860 - 280)(860 - 450)}$

$S_1 = \sqrt{430 \times 730 \times 580 \times 410}$

$= \sqrt{74\,645\,420\,000}$

$\simeq 273\,213$

De même, l'aire du triangle DAB est

$S_2 = \sqrt{p_2(p_2 - DB)(p - DA)(p - AB)}$ 1

Or $p_2 = (200 + 230 + 450) \div 2$

$p_2 = 440.$

$S_2 = \sqrt{400(880 - 200)(880 - 230)(880 - 450)}$

$= \sqrt{83\,626\,400\,000}$

$S_2 \simeq 289\,182,3$

On a : $S = S_1 + S_2 \simeq 562\,395,3$

Leçon 12

# DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

## INSTALLATION DES HABILETÉS

**Activité 1** Déterminations d'un plan

### 1.1. Plan déterminé par trois points non alignés

1) Un plan vertical vu de face est : (ABF)
   Un plan horizontal (ABC)
   Un plan vertical vu de profil est (BCG)
2) Trois plans passant par les points E et F sont : (EFG) ; (EFA) et (EFC).
3) E ,F et G sont non alignés il y'a un seul plan qui passe par les points E,F et G.
4) Les points A, B et F sont non alignés, il y a un seul plan qui passe par A, B et F.
5) Il y'a un seul plan qui passe par les trois points non alignés B, c et G.

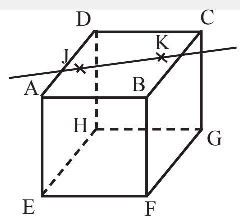
**Exercices de fixation**

**1-1-1** Le nombre de plans distincts que l'on peut avoir avec ces quatre points est 4 plans.

**1-1-2** 1- vrai 2- faux 3- vrai 4- faux

### 1.2. Droite incluse dans un plan

1) $J \in$ (ABC) et $K \in$ (ABC), donc (JK) $\subset$ (ABC)
2) Le plan (JKF).




**Exercices de fixation**

**1-2-1** (AB) $\subset$ (CBA) ; (DI) $\not\subset$ (BCI) ; (ID) $\subset$ (ABD) ; (DC) $\not\subset$ (ABD) ; (CI) $\subset$ (ABC)

**1-2-2** 1- vrai 2- vrai 3- faux 4- faux

### 1.3. Droites coplanaires, droites non coplanaires

1- vrai ; 2-faux ; 3- faux et 4- vrai.

**Exercices de fixation**

**1-3-1** 1.faux ; 2- vrai ; 3- faux ; 4- vrai ; 5- vrai ; 6- vrai.

**1-3-2** Les droites ((BG) et (HA) sont coplanaires, car ABGH est un parallélogramme.
Donc les (BG) et (AH) sont parallèles et sont dans le plan (ABG).

### 1.4. Plan déterminé par une droite et un point n'appartenant pas à cette droite

Soit B et C deux points de (D). Les points A, B et C ne sont pas alignés, ils déterminent un plan (P). (D) est incluse dans ce plan.

Tout plan contenant (D) et passant par A , passe par les trois points non alignés A, B et C. Or seul le plan (P) passe par ces trois points.
Donc (D) et A déterminent un unique plan.

**Exercices de fixation**

**1-4-1** 1- faux ; 2- vrai ; 3- faux ; 4- vrai.

**1-4-2** 1) Les plans contenant E sont : (DEF) ; (AEF), (ABD) et (ACE).
2) Deux plans qui contiennent (EF) sont : (DEF) , (AEF)

## 1.5. Plan déterminé par deux droites sécantes

Soit B un point de (D) distinct de A et C un point de (D') distinct de A. Les points A, B et C ne sont pas alignés. Ils déterminent un plan (P).
On a : $(D) \subset (P)$ et $(D') \subset (P)$.
Tout plan contenant les droites (D) et (D') passent par les points non alignés A, B et C. Or seul le plan (P) passe par A, B et C.
Donc les droites (D) et (D') déterminent un unique plan les contenant.

**Exercices de fixation**

**1-5-1** 1) Les droites (HA) et (AB) sont sécantes en A, dons elles déterminent un plan.
2) Les droites (BD) et (FG) sont non coplanaires, donc elles ne déterminent pas un plan.

**1-5-2** 1- vrai ; 2- faux ; 3- faux ; 4- vrai.

## 1.6. Plan déterminé par deux droites parallèles

Soit (D) et (D') deux droites parallèles. Soit $A \in (D')$ et $B \in (D')$ deux points distincts.
(D) et A déterminent un plan (P). On a $(D) \subset (P)$ et (D') // (D) donc (D') // (P).
(D) et B déterminent un plan (P'). On a $(D) \subset (P')$ et (D') // (D) donc (D') // (P').
La droite (AB) est la droite (D'), $A \in (P)$, $B \in (P')$, (AB) // (P) et (AB) // (P'), $(D) \subset (P)$ et $(D) \subset (P')$ ; (AB) // (P'),
La droite $(AB) \subset (P)$ et $(AB) \subset (P')$. Donc (P) et (P') sont identiques.
Donc (D) et (D') déterminent un unique plan.

**Exercices de fixation**

1- vrai ; 2- faux ; 3- vrai.

## 1.7. Démontrer que deux droites sont non coplanaires

Soit (D) et (D') deux droites.
Supposons (D) et (D') sont coplanaires, signifie qu'il existe un plan (P') contenant les droites (D) et (D').
Soit E et F deux points de (D) et B un autre point de (D').
(D) et (D') sont coplanaires, signifie que E, F et B appartiennent au même plan (P). Ce qui est contradictoire car B n'appartient pas à (P).
Donc les droites (D) et (D') sont non coplanaires.

**Exercices de fixation**

**1-7-1** Les droites (IJ) et (CD) sont non coplanaires.
Les droites (IJ) et (AB) sont coplanaires.

**1-7-2** Démontrons que (SB) et (DC) ne sont pas coplanaires.
(SB) ⊂ (SBC), C ∈ (SBC) et D ∉ (SBC) donc (DC) ⊄ (SBC)
donc les droites (SB) et (DC) ne sont pas coplanaires.

**1-7-3** Démontrons que (PQ) et (RS) ne sont pas coplanaires.
La droite (PQ) ⊂ (PQS), S ∈ (PQS) et le point R ∉ (PQS), car (SR) non parallèle à (PQ).
La droite (RS) ⊄ (PQS).
Donc les droites (PQ) et (RQ) sont non coplanaires.

## Activité 2 Droites et plans de l'espace

### 2.1. Positions relatives de deux droites

- (AE) et (IJ) sont sécantes.
- (HA) et (IJ) sont parallèles.
- (KE) et (EF) sont confondues.
- (HD) et (BC) sont non coplanaires.
- (AC) et (DB) sont sécantes
- (AC) et (HF) sont non coplanaires
- (HF) et (BD) sont parallèles.

**Exercices de fixation**

**2-1-1** 1- c ; 2- c ; 3- a ; 4- b.

**2-1-2** 1- vrai ; 2- vrai ; 3- faux ; 4- vrai.

**2-1-3** 1) (AB) et (CD) sont non coplanaires
2) I est milieu de [AB], K milieu de [AD], dans le triangle ABD, (IK) est parallèle (BD), d'après la propriété des droites des milieux, on a : (IK) // (BD).

**2-1-4** 1) (AH) // (BG) car AHGB est un parallélogramme, donc (AH) et (BG) sont coplanaires.
2) Justifions que (DH) et (FG) sont non coplanaires.
(DHG) est un plan contenant les points D, H et G.
F ∉ (DHG), donc les droites (DH) et (FG) sont non coplanaires.
3) Les droites (ED) et (AH) ; (AC) et (EG) ; (HF) et (DB) ; (BC) et (CG) .... sont respectivement coplanaires.
4) Les droites (EF) et (CG) ; (AF) et (BG) ; (DH) et (AC) ;... ne peuvent pas être respectivement sur un même plan.

### 2.2. Positions relatives d'une droite et d'un plan

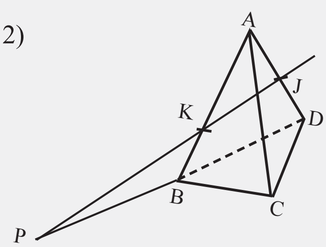
a) La droite (AB) et le plan (EFG) n'ont aucun point en commun.
b) La droite (IJ) et le plan (ABC) ont un point en commun.
c) La droite (IJ) est parallèle au plan (BFG) donc (IJ) et (BFG) n'ont aucun point en commun.
d) La droite (AC) est incluse dans le plan (ABD) donc (AC) et (ABD) ont une infinité de points en commun.

**Exercices de fixation**

**2-2-1** 1- vrai ; 2- vrai ; 3- vrai ; 4- faux ; 5- vrai ; 6- faux.

**2-2-2** 1) (KJ) n'est pas parallèle à (BD). (KJ) coupe (BD) en un point. Donc (KJ) est sécante au plan (BCD).

2)



## Activité 3 Plans de l'espace

### 3.1. Intersection de deux plans

1) E ∈ (DEF), la face ABFE contient le point E. E ∈ (ABF). On a : E ∈ (DEF) et E ∈ (ABF).

2) F ∈ (DEF) et F ∈ (ABF).

3) Comme E ∈ (DEF) et E ∈ (ABF) et F ∈ (DEF) et F ∈ (ABF) donc (EF)⊂(DEF) et (EF)⊂(ABF).

4) L'intersection des plans (DEF) et (ABF) est la droite (EF).

#### Exercices de fixation

**3-1-1** 1- a ; 2- d ; 3- c.

**3-1-2** 1) I ∈ (DIJ) et I ∈ [AB], donc I ∈ (ABC)
2) J ∈ (DIJ) et J ∈ [AC], donc J ∈ (ABC)
3) L'intersection de (DIJ) et (ABC) est (IJ).

**3-1-3** 1) I ∈ (AB), I ∈ (AJB) et I ∈ (CID). De même J ∈ (DC), J ∈ (CID) et J ∈ (AJB).
2) L'intersection de (AJB) et (CID) est la droite (IJ).

### 3.2. Positions relatives de deux plans

1) E ∈ (JFG), J ∈ (JFG) et G ∈ (JFG), donc les plans (EJG) et (JFG) sont confondus.

2) ABCDEFGH est un pavé droit, les faces EFGH et ABCD sont opposés et parallèles. Les plans (ABC) et (EFG) sont disjoints.

3.a) J ∈ (EF) on a : J ∈ (EFG), G ∈ (EFG) donc (JG) ⊂ (EFG).
b) I ∈ (IJG), mais I ∉ (EFG). Donc les plans (IJG) et (EFG) ne sont pas confondus.

4) Un plan quelconque peut être confondu, disjoint ou sécant au plan (EFG).

#### Exercices de fixation

1- (ABC) et (CFG) sont sécantes
2- (BDF) et (EHG) sont sécantes.
3- (ABC) et (DBC) sont confondus
4- (ABF) et (CHG) sont parallèles.

## Activité 4 Parallélisme de droites et de plans

### 4.1. Droites parallèles

1) (P) coupe (D) et comme (D) et (D') sont confondues, on a (P) coupe (D').

2) On suppose que (D) et (D') sont strictement parallèles.
Supposons que (P) coupe (D) en A et ne coupe pas (D').
Les droites (D) et (D') sont parallèles, elles déterminent un plan (P'). A∈(P) et A∈(P'). (P) et (P') sont sécants en une droite (Δ) contenant A.
(D), (D') et (Δ) sont des droites du plan (P'). (D) et (D') sont parallèles dans le plan (P'). (Δ) est sécante à (D) en A, coupe la droite (D') en un point B. B∈(Δ) donc B∈(P) et B∈(P') ce qui est contradictoire.
Donc (P) coupe (D').

#### Exercices de fixation

Les plans sécantes à la droite (D') sont : (EFG) ; (EFB) et (ABC) car (D) et (D') sont parallèles et (D) coupe tous ces plans.

### 4.2. Parallélisme de trois droites de l'espace

Soit (D), (D') et (Δ) trois droites qui ne sont pas incluses dans un même plan. Telles que (D) // (Δ) et (D') // (Δ)

1) Supposons que deux des droites (D), (D') et (Δ) sont confondus. Par exemple (D) et (Δ).

(D) ; (D') et (Δ) sont dans un même plan ce qui est contradiction car (D) ; (D') et (Δ) ne sont pas incluses dans un même plan donc (D) // (D')

2) Supposons que (D) ; (D') et (Δ) sont deux à deux distincts.

a) Soit A ∈ (D') et A ∉ (D).(D) et A détermine un plan (P) A ∈ (D'), A ∈ (P), (D) // (D'), (D) ⊂ (P), A ∈ (P), A ∈ (D'). Donc (D') ⊂ (P).

b) (D') ⊂ (P) et (Δ) // (D') on a (Δ) // (P). Or (D) // (Δ) et (D) // (P), donc (D) // (D').

**Exercices de fixation**

**4-2-1** (KI) // (DC). Or (DC) // (AB), donc (KI) // (AB).

**4-2-2** On sait que (BC) est parallèle à (ED) car BCDE est un carré et on sait aussi que (Δ) est parallèle à (ED). Donc (Δ) est parallèle à (BC).

## 4.3. Droite parallèle à un plan

1) Supposons qu'il existe une droite (Δ) ⊂ (P) et (Δ) // (D).
Démontrons que (D) est parallèle à (P).

- Si (D) et (Δ) sont confondues on a (D) ⊂ (P) et (Δ) ⊂ (P) donc (D)//(P).
- Si (Δ) et (D) sont coplanaires et disjoints.

Soit (P') le plan déterminé par les droites (Δ) et (D).
Les plans (P) et (P') sont égaux ou sécants suivant (Δ).
- Si (P) et (P') sont confondues, (D) ⊂ (P') et (D) ⊂ (P) donc (D) // (P).
- Si (P) et (P') sont sécants en (Δ), les seuls points communs aux plans sont les points de (Δ). Comme (Δ) et (D) sont parallèles. (D) ∩ (P) = $\phi$ donc (D) // (P).

2) Supposons que (D) // (P), démontrons qu'il existe une droite (Δ) contenue dans (P) telle que (D) // (Δ).
Soit A un point de (P). Le point A et (D) détermine un plan (P') qui coupe (P) suivant une droite (Δ) passant par A.
On a : (Δ) ⊂ (P). (Δ) n'a aucun point commun avec (D). Or (D) et (Δ) sont coplanaires. Donc (D) est parallèle à (Δ).

3) D'après ce qui précédé on a l'équivalence.

**Exercices de fixation**

**4-3-1** a) (EF) est parallèle à (ABD)
b) (EF) est incluse dans le plan (FGH), c'est-à-dire parallèle
c) (EF) parallèle à (BGD)

**4-3-2** (IJ) // (CD) d'après la droite des milieux et (CD) ⊂ (BCD). Donc (IJ) // (BCD).

**4-3-3**
- (IJ)//(HD) et (HD) ⊂ (AEH), donc (IJ) est parallèle à (AEH).
- (IJ)//(FB) et (FB) ⊂ (ABF), donc (IJ) est parallèle à (ABF).
- (IJ)//(CG) et (CG) ⊂ (BCG), donc (IJ) est parallèle à (BCG).
- (IJ)//(DH) et (DH) ⊂ (CGH), donc (IJ) est parallèle à (CGH).

## 4.4. Conséquence d'une droite parallèle à un plan

(D) est une droite parallèle à (P). Donc il existe une droite (Δ) incluse dans (P) telle que (D) // (Δ).
Comme (D') // (D), on a (D') // (Δ). Donc (D') // (Δ). Ce qui signifie que (D') est parallèle au plan (P).

**Exercices de fixation**

**4-4-1** 1) a) et c)
2) a)

**4-4-2** (D) // (BCD) car (D) // (IJ) et (IJ) // (ED) et (ED) ⊂ (BCD).

### 4.5. Théorème du toit

Soit $(P_1)$ et $(P_2)$ deux plans sécants en $(\Delta)$, sont A un point de $(\Delta)$

1) a) soit (D) une droite parallèle à $(P_1)$ signifie qu'il existe une droite $(D_1) \subset (P_1)$ et passant par A telle que $(D_1)$ // (D).
(D) // $(P_2)$ signifie qu'il existe une droite $(D_2) \subset (P_2)$ et passant par A telle que $(D_2)$ // (D).

b) (D) // $(D_1)$ et (D) // $(D_2)$ et comme $(D_1)$ // $(D_2)$ et ont un point commun donc $(D_1)$ et $(D_2)$ sont confondues.

2)a) Démontrons que $(D_1)$ et $(\Delta)$ sont parallèles.
Supposons que $(D_1)$ et $(\Delta)$ sont sécants mais non confondues.
Soit A leur point d'intersection. A (d) donc $A \in (P_1)$ et $(P_2)$.
(D) // $(D_2)$ et $(D_1)$ //$(D_2)$ et $A \in (D_1)$, $A \notin (D_2)$ et comme $(D_1)$ //$(D_2)$, $(D_1)$ passe par A, alors $(D_1)$ est une droite de $(P_2)$.
Donc $(D_1) \subset (P_1)$ et $(D_1)$ et $(P_2) \subset (P_2)$ donc $(D_1) = (\Delta)$ ce qui est absurde.
Donc $(D_1)$ // $(\Delta)$.

b) Comme $(D_1)$ // $(\Delta)$ et $(D_2)$ // $(D_1)$ donc $(D_2)$ // $(\Delta)$.

**Exercices de fixation**

**4-5-1** 1) $K \in (EB)$, $K \in (EFC)$ et $K \in (ADK)$.
2) (AD) // (EFC), (AD) // (ADK)
(AD) // $(\Delta)$, $(\Delta)$ la droite passant par K et parallèle à (AD) ou à (EF).

**4-5-2** $(DCS) \cap (ABS) = (\Delta)$.
$(\Delta)$ est la droite passant par S et parallèle à (DC) ou à (AB).

### 4.6. Deux plans parallèles

1) a) $(D_1)$ et $(D_2)$ sont sécantes, elles déterminent un plan.
Donc il existe un plan (Q) les contenants.

b) Supposons que les plans (P) et (Q) ne sont pas parallèles.
C'est-à-dire qu'ils sont sécants.
Soit $(D_1)$ et $(D_2)$ deux droites sécantes de (Q)
Soit $(\Delta)$ l'intersection (P) et (Q). D'après le théorème de Toit, $(\Delta)$ est parallèle à $(D_1)$ et $(D_1')$ une droite de (P) et $(D_2)$ // (D2')
Donc $(\Delta)$ est parallèle à deux droites sécantes. Ce qui est absurde. Donc (P) et (Q) sont parallèles.

2) Soit (P) et (Q) sont deux plans parallèles.
(P) et (Q) sont parallèles.
Soit $(D_1)$ et $(D_2)$ deux droites sécantes de (P).
$(D_1)$ // (Q), il existe une droite $(D_1')$ de (Q) tel que $(D_1)$ // $(D_1')$
De même $(D_2)$ // (Q), il existe une droite $(D_2')$ de (Q) telle que $(D_2)$ // $(D_2')$.
$(D_1)$ et $(D_2)$ forme le plan (P) et sont sécantes ; $(D_1')$ et $(D_2')$ sont aussi sécantes.

**Exercices de fixation**

**4-6-1** 1) $(IJ) \subset (IJK)$ ; $(JK) \subset (IJK)$ et $(IJ) \cap (JK) = \{J\}$ donc (IJ) et (Jk) sont sécantes.

2) a) (IJ) // (AB) d'après la droite des milieux

b) (JK) est aussi parallèle à (BC) d'après la droite des milieux

3) (IJ) et (JK) sont incluses dans (IJK) et sont sécantes. Elles sont parallèles respectives à (AB) et (BC) eux même sécantes.
Donc (DJK) et (ABC) sont parallèles.

**4-6-2** $(AD) \subset (ADH)$ ; $(AE) \subset (ADH)$, (AE) et (AD) sont sécantes
(AD) // (BC) et (AE) // (BF), donc (ADH) et (BFG) sont parallèles.

**4-6-3** La droite (IJ) // (CD) et $(CD) \subset (BCD)$ donc (IJ) // (BCD)

## 4.7. Intersection de deux plans sécants

(P) et (P') sont parallèles et (P'') est sécante à (P').
Supposons que (P'') n'est pas sécant à (P'). C'est-à-dire (P'') et (P') sont parallèles et distincts. Les plans (P'') et (P') seraient parallèles. Ce qui est absurde puisque (P'') coupe (P')
Soit (Δ') = (P) ∩ (P') et (Δ'') = (P') ∩ (P'').
(Δ') et (Δ'') sont coplanaires et sans point commun puisqu'elles sont situées dans deux plans parallèles distincts (P) et (P') donc (Δ') // ( Δ'')

### Exercices de fixation

**4-7-1** 1) ABCDEFGH est un cube, donc les faces ABCD et EFGH sont de supports parallèles.

Donc (ABC) et (EFG) sont parallèles.

2) (ABC) ∩ (CDE) = (CD)

3) (DC) // (EF), or (EF)⊂(EFG) donc (DC) // (EFG).

4) (EF) ⊂ (CDE) et (EF) ⊂ (EFG) et G ∈ (EFG) et G ∉ (CDE). Donc (EFG) et (CDE) sont sécants.

**4-7-2** 1) J ∈ (AEJ) et J ∈ (CGH), Aussi on a : A ∈ (AEJ)et A ∉ (CGH). Donc les plans (AEJ) et (CGH) sont sécants.

2) Soit (Δ) = (AEJ) ∩ (CGH), (Δ) est la droite passant par J et parallèle à la droite (AE).

## 4.8. Plans parallèles et droites

Soit (P), (P') deux plans et (D) une droite.

1) Supposons que (D) est parallèle à (P). (P) et (P') sont parallèles.
Démontrons que la droite (D) est parallèle à (P').
(D) est parallèle à (P), il existe une droite (Δ) de (P) tel que (D) // (Δ) or ((Δ) // (P'), on a (D) // (P').
Donc (D) est parallèle à (P').

2) On suppose que la droite (D) est sécante à (P).
Démontrons que (D) est sécante à (P').
(D) coupe (P) en A, il existe une droite (Δ) de (P) passant par A, tel que : (D) ∩ (Δ) = {A}.
(Δ) ⊂ (P) et comme (P) // (P'), il existe une droite (Δ') de (P') tel que (Δ) soit parallèle à (P'). (Δ) et (Δ') forme un plan (P'') et (Δ) // ((Δ'), dans le plan (P'). Comme (D) coupe (Δ), (D) coupe aussi (Δ'). (Δ') ⊂ (P') donc (D) coupe (P').

### Exercices de fixation

1) (IJ) // (ADH) or (ADH) //(BCG) donc (IJ) // (BCG).

2) (MN) est sécante au plan (ADH), car N ∈ (ADH) et N ∉ (ADH). On sait aussi que (ADH) // (BCG) et comme (MN) est sécante à (ADH). Donc (MN) est sécante aussi au plan (BCG).

## 4.9. Parallélisme de trois plans

On considère les plans (P), (P') et (P'') tels que (P) // (P'') et (P') // (P'').
Démontrons que (P') // (P)
On considère deux droites sécantes ($D_1$) et ($D_2$) de (P). Comme (P) // (P'') il existe deux droites ($D''_1$) et ($D''_2$) de (P'') parallèles respectivement à ($D_1$) et ($D_2$).
Aussi (P'') // (P'), il existe deux droites sécantes ($D'_1$) et ($D'_2$) de (P') telles que ($D''_1$) et ($D''_2$) soient paralleles respectivement à ($D'_1$) et ($D'_2$).
on a : ($D_1$) // ($D''_1$) et ($D'_1$) // ($D''_1$) donc ($D_1$) // ($D'_1$)
et ($D_2$) // ($D''_2$) et ($D'_2$) // ($D''_2$) donc ($D_2$) // ($D'_2$).
Comme ($D_1$) et ($D_2$) sont sécantes, on a (P) // (P').

## Exercices de fixation

**4-9-1** 1) (ADH) // (BCG).

2) (AE) et (EH) sont deux droites sécantes de (ADH).

(IK) // (AE) et (KJ) // (EH) et comme (IK) et (KJ) sont des droites sécantes de (IJK), donc les plans (IJK) et (ADH) sont parallèles.

3) (IJK) // (ADH) et (ADH) // (BCG), donc (IJK)//(BCG).

**4-9-2** 1) (I'K) // (HF) et (IK) // (FB) et (IK) est sécante à (IK) et sont dans le plan (I'KJ). Donc (I'KI) // (HFB).
2) De meme on montre que (J'K'J) // (HFB).

3) On a : (I'KI) // (HFB) et (J'K'J) // (HFB). Donc (I'KI) // (J'K'J).

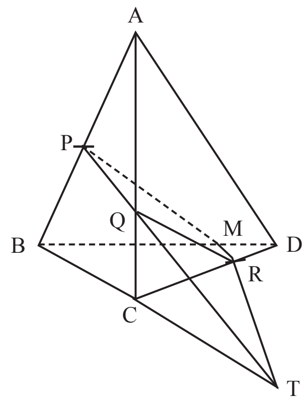
## Activité 5 Section plane d'un solide

1) a) (PQR) ∩ (ABC) = (PQ).
   b) voir figure.

2) a) T ∈ (BC) et T ∈ (PQ). Donc T ∈ (BCD) et T ∈ (PQR).
   b) R ∈ (CD), donc R ∈ (BCD)
   c) T ∈ (BCD) car T ∈ (BC) et T ∈ (PQR) car T ∈ (PQ) ;
R ∈ (BCD) car R ∈ (CD) et R ∈ (PQR).
Donc (PQR) ∩ (BCD) = (TR).

3) a) M ∈ (RT), donc M ∈ (PQR) ;
   M ∈ (BD), donc M ∈ (ABD).
   b) P ∈ (AB), donc P ∈ (ABC) et P ∈ (PQR).
   c) Donc (BQR) ∩ (ABD) = (PM).

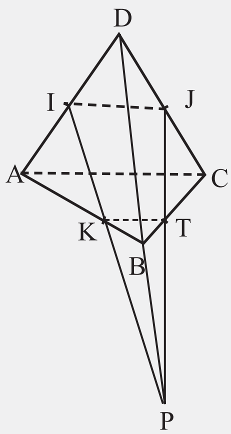
4) La section est PQRM.




## Exercices de fixation

**5-1** 1.a)
   c) (IJK) ∩ (BDC) = (PJ)

2) voir figure.
La section est IKTJ.




**5-2** 1) (I'K) // (HF) ; (KI) // (FB) et (I'K) et (KI) sont sécantes donc (I'KI) // (HFB).

2) (J'K') // (HF) ; (K'J) // (FB) et (J'K') et (K'J) sont sécantes donc (J'K'J) // (HFB).

3) (I'KI) // (HFB) et (J'K'J) // (HFB). Donc (I'KI) // (J'K'J).

## Exercices de renforcement

**1** 1) Les droites (AB) et (CD) sont parallèles. Donc la face ABCD détermine un plan.

2) Les points I, J et K sont non alignés. Donc (IJK) est un plan.
3) (AB) // (EF) car ABFE est un carré.
(DC) // (AB) car ABCD est carré.
Donc (EF) // (DC). (EF) et (DC) déterminent un plan.
4) Les plans (ABC) et (EFG) sont disjoints.
$(FG) \subset (EFG)$ et $(DC) \subset (ABC)$. (EF) // (DC) et $(EF) \neq (FG)$, d'où (DC) et (FG) sont disjoints et non parallèles par conséquent, elles ne sont pas coplanaires.

**2** 1. c ; 2. b ; 3. b ; 4. c ; 5. c.

**3** 1. c ; 2. c ; 3. c ; 4. b ; 5. a.

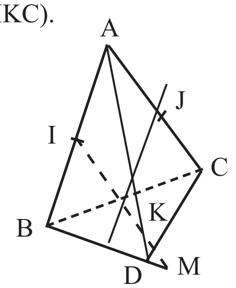
**4** 1. a ; 2. b ; 3. c ; 4. a ; 5. b.

**5** 1. a) $I \in$ (ABD), $K \in$ (ABD). I est le milieu de [AC] et K n'est pas le milieu de [AB], donc (IK) et (BD) ne sont pas parallèles.

$(BD) \subset (ABD)$, $(IK) \subset (ABD)$ et (IK) et (BD) ne sont pas parallèles, donc sécantes.

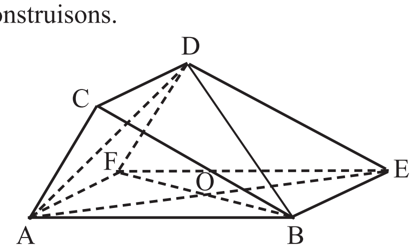
b) $M \in$ ((IK), donc $M \in$ (IKC).
$M \in$ (BD), donc $M \in$ (BCD).
2) $(IC) \cap (BC) = \{C\}$,

donc $(BCD) \cap (IKC) = (MC)$.




**6** 1) $(AFD) \cap (CBE) = (CD)$.

2) Construisons.




$(AD) \cap (BD) = \{D\}$

$(AE) \cap (BF) = \{O\}$

$(ADE) \cap (BFD) = (DO)$, O étant le centre du rectangle ABEF.

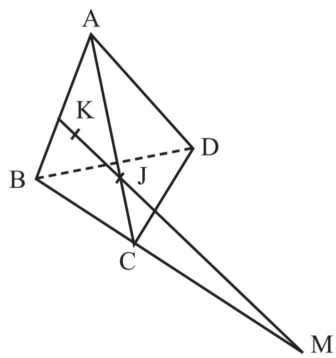
**7** 1) SAB est un triangle. I milieu [SA], J milieu de [SB].
On a (IJ) // (AB) d'après la propriété des droites des milieux.
ABCD est un carré ; donc (AB) // (CD). $(CD) \subset (SCD)$.
Donc (IJ) // (CD) et on a : (IJ) // (SCD).

2) K est le milieu de [SC] ;
(JK) // (BC) et $(DC) \subset (ABC)$.
Donc (JK) // (ABC).

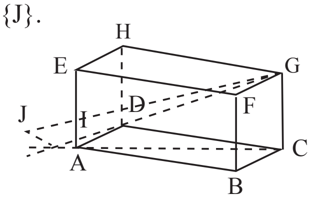
**8** 1) $(AIJ) \cap (BCD) = (IJ)$.

2) a) $I \in (AM)$, $N \in (AJ)$.
Les droites (IM) et (NJ) sont coplanaires.
b) On sait que $(AIJ) \cap (BCD) = (IJ)$.
$\{P\} = (MN) \cap (BCD)$, or $(MN) \subset (AIJ)$.
$P \in (AIJ) \cap (BCD)$, donc $P \in (IJ)$.

**9** 1) $(KI) \subset (ABC)$ et $(BC) \subset (ABC)$ et (KI) est non parallèles à (BC), par conséquent (KI) est sécante au plan (BCD).
2)




**10** 1) (AE) // (GC) et $I \in (AE)$ donc (AI) // (GC), on a donc A, C, G et I qui sont coplanaires.
2) $I \notin (ABC)$ et $G \notin (ABC)$, donc $(GI) \not\subset (ABC)$.
3) $I \neq A$ et $I \neq E$, (GI) et (AC) sont coplanaires.
$(GI) \cap (AC) = \{J\}$.




**11** 1) $(SBD) \cap (SAC) = (SO)$ où O est le centre du carré ABCD.
2) $(SAB) \cap (SDC) = (\Delta)$ où $(\Delta)$ est la parallèle à (AB) passant par S.
3) $(SBC) \cap (SAD) = (\Delta')$ où $(\Delta')$ est la droite passant par S et parallèle (BC).
4) $(\Delta)$ // (AB) et $(\Delta')$ // (BC) et or $(AB) \perp (BC)$, donc $(\Delta')$ et $(\Delta')$ sont orthogonales. De plus $(\Delta) \cap (\Delta') = \{S\}$.
Donc $(\Delta)$ et $(\Delta')$ sont perpendiculaires.

**12** 1) RMEI est un rectangle de centre O. (RE) et (MI) sont ses diagonales. (RE) et (MI) sont sécantes en O

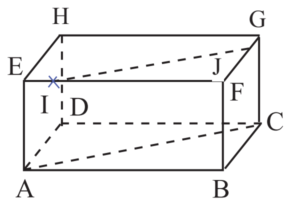
2) (PI) ⊂ (PIE) et (EM) ⊂ (REI). (PI) ∩ (RIE) = {I}.
(PI) et (EM) ne sont pas coplanaires.

3) (EM) ∩ (IPS) = {E}.

4) (SR) ∩ (PMR) = {R}.

5) (IRP) ∩ (IEM) = (IRP) ∩ (IRM) = (IR).

**13**




(EG) // (AC).

Traçons la parallèle à (EG) passant par I.

Elle coupe (GF) en J.

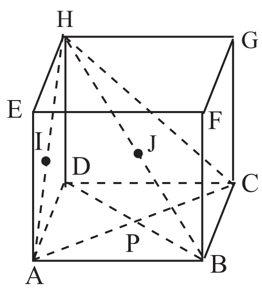
Donc (EFG) ∩ (ACI) = (IJ).

**14** 1) D ∉ (HIJ).

2. a) HAB est un triangle. I milieu [HA] et J milieu de [HB]. Donc (IJ) // (AB).

b) (IJ) // (AB) et (AB) // (DC) alors (IJ) // (DC).

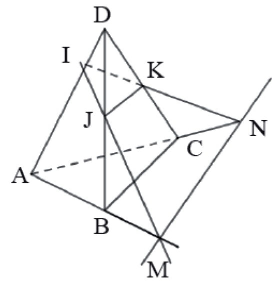
c) (IJ) // (DC), (DC) // (HG).
Donc (IJ) // (HG). (HG) et (DC) définissent le plan (DHG). Donc (IJ) // (DHG).
3. a) H est un point d'intersection des plans (HAC) et (HBD).
b) (AC) ∩ (BD) = {P}.
D'où a) (HAC) ∩ (HBD) = (BP)
Or P ∈ (BD), d'où (HAC) ∩ (HBD) = (HP).




**15** (ABC) est un plan.

(AB) ∩ (P) = {C'} et (AC) ∩ (P) = {B'}.
Donc (ABC) ∩ (P) = (B'C').
(BC) ⊂ (ABC), (BC) ∩ (P) = {A'}, A' ∈ (ABC) ∩ P.
D'où A' ∈ (B'C').
Les points A', B' et C' sont alignés.

**16** 1)

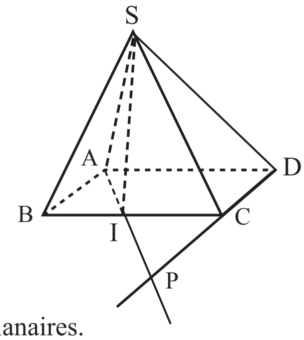



2) (ABC) ∩ (IJK) = (MN).
3) (JK) // (BC) d'après la propriété des droites des milieux et (BC) ⊂ (ABC), donc (JK) // (ABC).
4) (ABC) ∩ (JK) = (MN).

$$\left.\begin{array}{l}(IJ)\subset(IJK)\\(BC)\subset(ABC)\end{array}\right\}(IJ)\ //\ (BC),\text{ donc }(IJ)\ //\ (MN).$$

**17** 1) S ∈ (SAI) et S ∈ (SCD).
Donc S est un point d'intersection de (SAI) et (SCD).

2)




3) (AI) et (CD) sont coplanaires.
(AI) ∩ (CD) = {P}.
Donc (SAI) ∩ (SCD) = (SP).

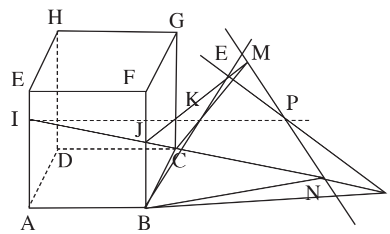
**18** 1) (CIA) = (ABC), donc (CIA) ∩ (BCD) = (BC).

2) (DIJ) = (DAI) donc (DAI) ∩ (ABD) = (AD).

3) (DAI) ∩ (ABC) = (AI) car A ∈ (DAI) ∩ (ABC) et I ∈ (ABC) ∩ (DAI).

**19**

$EI = \frac{1}{4}EA$ et
$GK = \frac{2}{3}GC$



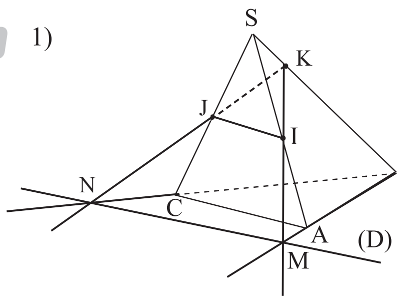

1) J ∈ (BF) et (BF) ⊂ (BCG), donc J ∈ (BCG).
De même K ∈ (CG) et (CG) ⊂ (BCG), donc K ∈ (BCG).
Ainsi (JK) ⊂ (BCG).
Comme (BC) ⊂ (BCG), alors les droites (JK) et (BC) sont coplanaires.
J est le milieu de [BF], K ∈ [GC] et $GK = \frac{2}{3}GC$.
K n'est pas milieu de [BC], donc (JK) et (BC) ne sont pas parallèles et comme elles sont coplanaires, (JK) et (BC) sont sécantes.

2) a) Voir figure.

b) $M \in (JK)$, $N \in (IJ)$, donc $M \in (IJK)$ et $N \in (IJK)$.
$M \in (BC)$ et $N \in (AB)$, donc $M \in (ABC)$ et $N \in (ABC)$.
Donc $(IJK) \cap (ABC) = (MN)$.

3) $(MN) \subset (IJK)$, donc les droites (IK) et (MN) sont coplanaires et comme elles ne sont pas parallèles, elles sont sécantes.
De plus $(MN) \subset (ABC)$, donc $(IK) \cap (MN) \in (ABC)$, $P \in (ABC)$.

**20** 1)




2. a) $(IK) \cap (BC) = \{N\}$ et $(IK) \cap (AB) = \{M\}$, donc $(D) = (MN)$.

b) Voir figure.

3) I milieu de [SA], J milieu de [SC] et $(CA) \subset (ABC)$
Donc (IJ) // (CA). Donc (IJ) // (ABC).

4) Les plans (CAB) et (IJK) sont sécantes suivant (D). De plus les droites (IJ) de (IJK) et (AC) de (ABC) sont parallèles.
D'après le théorème du toit, (D) est parallèle à (IJ) et (AC).

**21** $(AIE) \cap (BIG)$. On a : $I \in (AIE) \cap (BIG)$.
$(AIE) = (ABE)$. On a donc $B \in (AIE) \cap (BIG)$.
$(AIE) \cap (BIG) = (BI)$. $I \in (AB)$
donc $(AIE) \cap (BIG) = (AB)$.

2) (ADI) = (ADC). (BJC) = (ADC). (ADI) et (BJC) sont confondus.

3) (HEF) = (EFG) et (BJC) = (ABC). (HEF) et (BJC) sont parallèles (disjoints).

**22** 1- b ; 2- c ; 3- a ; 4- a ; 5- c ; 6- b.

**23** 1. a) F, I et J ne sont pas alignés et (FIJ) = (DEF).
$D \in (FIJ)$, $D \in (ABD)$, $E \in (FIJ)$ et $E \in (ABD)$,
donc $(FIJ) \cap (ABD) = (DE)$.

b) $I \in (DEF)$, $J \in (DEF)$, on a $(IJ) \subset (DEF)$ et $(IJ) \subset (CIJ)$, donc $(CIJ) \cap (DEF) = (IJ)$

c) $E \in (BE)$, $E \in (DIJ)$, $B \notin (DIJ)$,
donc $(BE) \cap (DIJ) = \{E\}$.

d) Les droites (BE) et (JK) ne s'interceptent pas, sinon elles seraient coplanaires, J serait sur la face (BCEF).

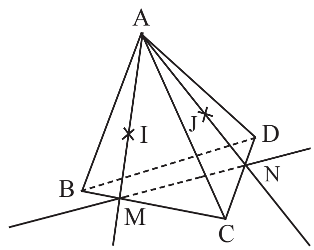
Les droites (BE) et (JK) sont non coplanaires, elles n'ont pas d'intersection.

2) a) (IJ) et (EF) sont sur le même plan, le plan (DEF), elles ne sont pas parallèles, donc elles sont sécantes en un point N.

b) $N \in (IJ)$, donc $N \in (IJK)$. $N \in (EF)$, donc $N \in (BEF)$.
Les deux plans ont un point en commun, donc (IJK) et (BEF) sont sécantes suivant une droite passant par N.

c) $K \in (IJK)$ et K est le centre de la face BCFE.
Donc $K \in (BEF)$, $K \in (IJK)$, $N \in (IJK)$ ; $K \in (BEF)$, $N \in (BEF)$.
Donc $(IJK) \cap (BEF) = (KN)$.

**24** $(AI) \subset (ABC)$
donc $(AI) \cap (BCD) = (AI) \cap (BC) = \{M\}$.
$(AJ) \subset (ACD)$ donc $(AJ) \cap (BCD) = (AJ) \cap (CD) = \{N\}$.
On a : $(AIJ) \cap (BCD) = (MN)$.




## Exercices d'approfondissement

**25** $C \in (AGC)$ et $C \in (CDE)$. Les plans (AGC) et (DCE) sont sécantes selon une droite.
$(AGC) \cap (CDE) = (D)$. (D) passe par C et parallèle à (DH).

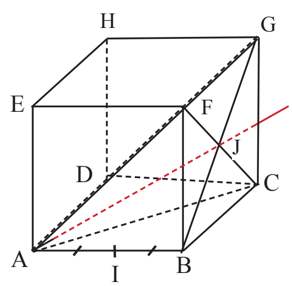
**26** 1) (MN) // (BC) et (BC) // (AD) car ABCD est un parallélogramme, donc (AD) // (MN).

2. a) $(AN) \subset (SAB)$ car $A \in (SAB)$ et $N \in (SAB)$.
Or $P \in (AN)$, donc $P \in (SAB)$. $P \in (DM)$ et $(DM) \subset (SDC)$.
Donc $P \in (SAB)$ et $P \in (SDC)$.

b) $S \in (SAB)$, $S \in (SDC)$, $P \in (SAB)$, $P \in (SDC)$.
Donc $(SAB) \cap (SDC) = (SP)$.

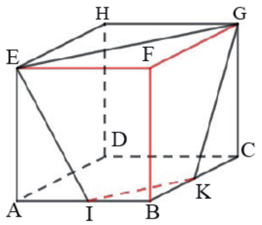
c) $(AB) \subset (SAB)$, $(CD) \subset (SDC)$ et (AB) // (CD).
D'après le théorème du toit, elles sont parallèles à l'intersection de ces deux plans en (SP).

**27** 1. a) $A \in (ABG) \cap (CAF)$ et $B \notin (CAF)$ par conséquent, les plans (ABG) et (CAF) sont sécants.



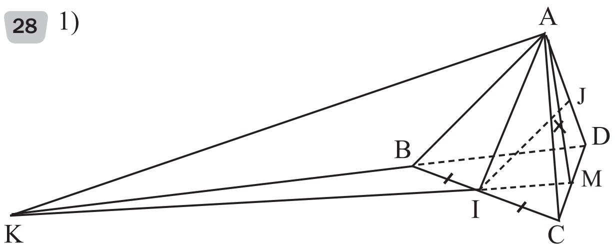
b) $(CF) \cap (BG) = \{J\}$ J étant le centre du carré BCGF.
$(ABG) \cap (CAF) = (AJ)$.

2)




K est le milieu de [BC].
BAC est un triangle.
I est le milieu de [AB] et $(EF) // (IK)$
Donc K est le milieu de [BC].
La section est IKGE.

**28** 1)




$\{M\} = (AJ) \cap (CD)$.
$I \in (AIJ)$ et $I \in (BCD)$ ; $M \in (AIJ)$ et $M \in (BCD)$.
$(AIJ) \cap (BCD) = (IM)$
2. a) $A \in (AIJ) \cap (ABD)$ et $J \notin (ABD)$, donc (AIJ) et (ABD) sont sécantes.
b) $(AIJ) \cap (ABD) = (\Delta)$.
$(\Delta)$ est la droite passant par A et parallèle (BD).

**29** 1. a) $E \in (EIJ)$ et $E \in (EHG)$.
b) $(IJ) // (AC)$ (droite des milieux).
$(AC) // (EG)$ donc $(IJ) // (EG)$. Par conséquent $(EG) \subset (EIJ)$.
$G \in (EIJ) \cap (EHG)$.
c) $(EIJ) \cap (EHG) = (EG)$.
2. a) $(ABC) = (ABI) = (ABJ)$ car $I \in (AD)$ et $J \in (CD)$.
$I \in (ABC)$ et $J \in (ABC)$.
$I \in (IJE)$ et $J \in (IJE)$.
b) $(ABC) \cap (IJE) = (IJ)$.
3) ABD est un triangle. I est le milieu de [AD] et J est le milieu de [CD]. Donc $(IJ) // (AC)$.
$(AC) // (EG)$ donc $(IJ) // (EG)$.
$(IJE) = (EGI)$ .

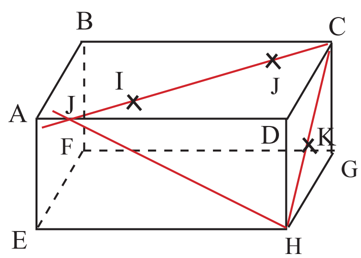
**30** 1) $(MN) // (BC)$ d'après la propriété des droites des millieux, et $(BC) // (AD)$ car ABCD est un parallélogramme, donc $(AD) // (MN)$.
2. a) $(AN) \subset (SAB)$ car $A \in (SAB)$ et $N \in (SAB)$.
Or $P \in (AN)$, donc $P \in (SAB)$.

b) $(S \in (SAB) \cap (SDC))$ et $\{P\} = (AN) \cap (DM)$.
$(AN) \subset (SAB)$ et $(DM) \subset (SDC)$
donc $(SAB) \cap (SDC) = (SP)$.
3) $(AB) \subset (SAB)$ ; $(CD) \subset (SDC)$ et $(AB) // (CD)$.
D'après le théorème du toit, elles sont parallèles à l'intersection de deux plans en (SP).

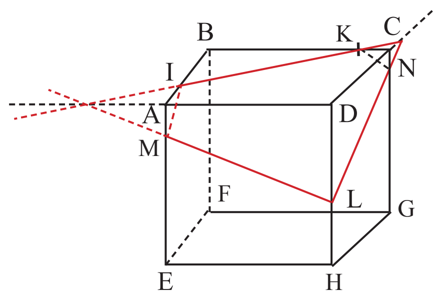
**31** 1. a) $S \in (CBS) \cap (SAB)$ et $B \in (CBS) \cap (SAB)$
donc $(CBS) \cap (SAB) = (SB)$.
b) $S \in (SBD)$ et $S \in (SAC)$.
$(BD) \subset (SBD)$ et $(AC) \subset (SAC)$. ABCD est un parallélogramme.
[AC] et [BD] sont les diagonales. Elles se coupent en O.
Donc $(SBD) \cap (SAC) = (SO)$.
c) $(SO) \cap (BAD) = \{O\}$, $O \in (BAD)$, car O est le centre de ABCD.
d) SBD est un triangle. J est le milieu de [SB] et O est le milieu de [BD]. (DJ) et (SO) sont deux médianes du triangle SBD. $(SO) \cap (DJ) = \{G\}$ avec G le centre de gravité du triangle SBD.
2. a) SAB est un triangle. I est le milieu de [SA] et J est le milieu de [SB].
Alors $(IJ) // (AB)$. ABCD est un parallélogramme. Donc $(AB // (CD))$.
Par conséquent $(IJ) // (CD)$.
b) $(SAB) \cap (CID) = (IJ)$.
3) $(IJ) // (AB)$, donc $(IJ) // (ABC)$.

**32**

La section est CJH.



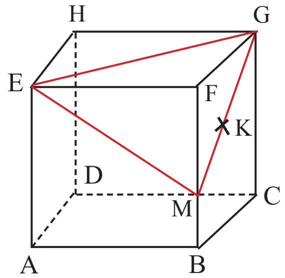

**33**



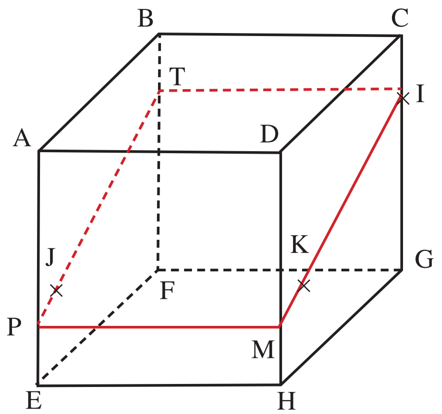

La section est KNLMI.

**34**

La section est EGM



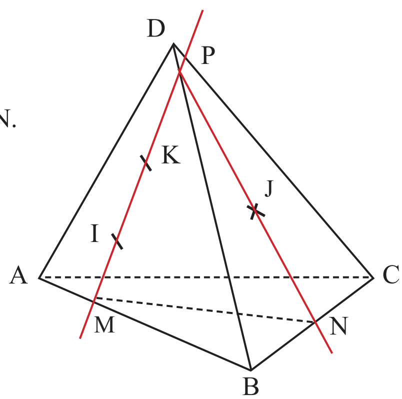

**35**



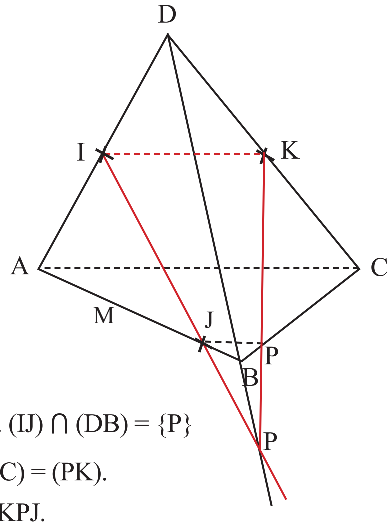

La section est PTIM.

**36**

La section est MPN.




**37** 1) Reproduisons la figure.




2) (Voir figure). $(IJ) \cap (DB) = \{P\}$

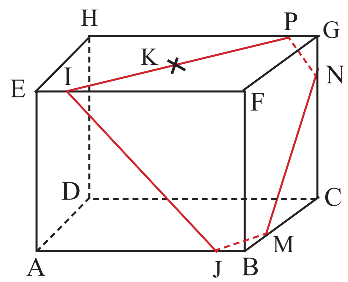
3) $(IJK) \cap (DBC) = (PK)$.

La section est IKPJ.

**38**

(JM) // (IK)

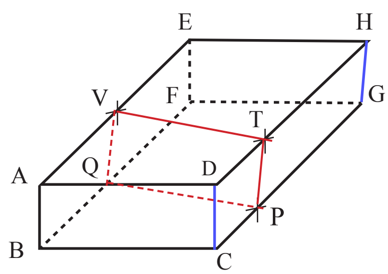
(PN) // (IJ).




La section est IPNMJ.

## Situation d'évaluation

**39**




(VQ) // (TP) .

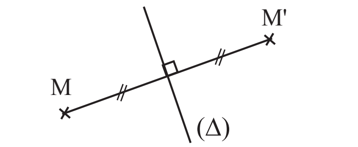
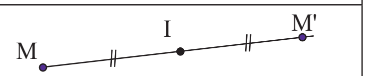
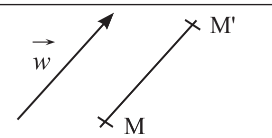
La section est VTPQ.

# Leçon 13 UTILISATION DES SYMÉTRIES ET TRANSLATIONS

## INSTALLATION DES HABILETÉS

### Activité 1 Généralités sur les polynômes

### 1.1. Image d'un point par une symétrie ou une translation

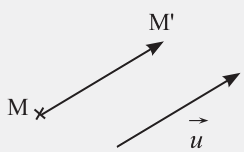
| Transformation | M a pour image M' signifie que | Illustration |
|---|---|---|
| Symétrie orthogonale | Si $M \in (\Delta)$, alors M' = M<br>Si $M \notin (\Delta)$, alors $(\Delta)$ est la médiatrice de [MM'] |  |
| Symétrie centrale de centre I | Si $M \neq I$, alors I est le milieu de [MM'].<br>Si M = I, alors M' = I. |  |
| Translation de vecteur $\vec{w}$ | $\overrightarrow{MM'} = \vec{w}$ |  |

#### Exercices de fixation

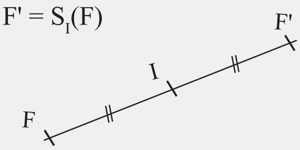
**1-1-1**

1) $t_{\overrightarrow{AB}}(D) = E \Leftrightarrow \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB}$.
2) $t_{\vec{v}}(A) = B \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{v}$.
3) $S_{(D)}(R) = K \Leftrightarrow$ (D) est la médiatrice de [PK].
4) $S_Y(X) = Z \Leftrightarrow$ Y est le milieu de [XZ].

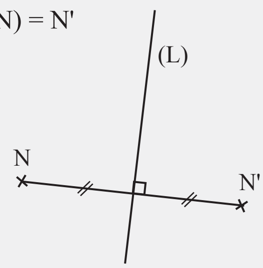
**1-1-2**




**1-1-3** $F' = S_I(F)$




**1-1-4** $S_{(L)}(N) = N'$




### 1.2. Propriété caractéristiques des translations

$t = t_{\vec{u}}$ et
$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{t_{\vec{u}}} \\ \hline M & M' \\ N & N' \end{array}$$

On a : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{NN'} = \vec{u}$.
Donc $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$ ; d'où $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM'} = \overrightarrow{NM'} + \overrightarrow{M'N'}$. Donc $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$.

## Exercices de fixation

**1-2-1**
1) Faux
2) Faux
3) Faux
4) Vrai.

**1-2-2**

$t_{\vec{u}}$

| | |
|---|---|
| A | A' |
| B | B' |

Donc $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$.

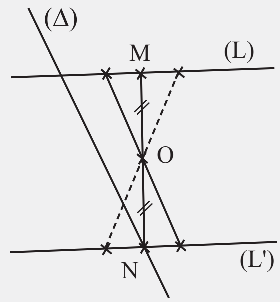
## Activité 2 Problème de construction

On a ABMP parallélogramme, donc $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{MP}$ .
On construit l'image $(\Gamma)$ de $(\mathscr{C})$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$ ; $(\Gamma)$ coupe $(\mathscr{C}')$ ) en au moins un point.
On note P l'un d'eux puis on construit l'image M de P par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ .

## Exercices de fixation

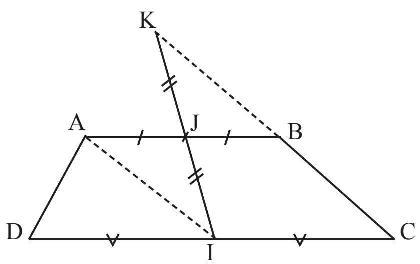
**2-1** Construis l'image de l'une des droites par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$ ; elle coupe l'autre en un point. Construis l'image de ce point par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ .

**2-2** On construit l'image de l'une des droites par la symétrie centrale de centre O. Elle coupe l'autre droite en un point. On construit l'image du point d'intersection par la symétrie centrale de centre O.



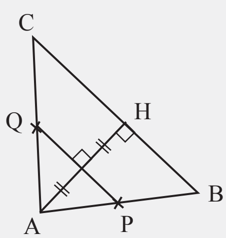

$S_O((L)) = (L')$ et $(L') \cap (\Delta) = \{N\}$.
De plus, $M = S_O(N)$.

## Activité 3 Démonstration d'une propriété




$K = t_{\overrightarrow{IA}}(B) \Leftrightarrow \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IA}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{JK} = \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JA}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{JK} = \overrightarrow{IJ}$ , car J étant le milieu de [AB],
on a $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{JA}$ .
De $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{IJ}$ , on déduit que J est le milieu de [IK].

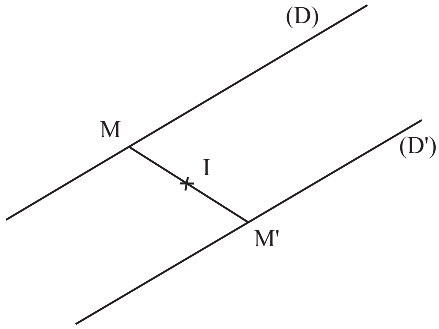
## Exercices de fixation




Dans le triangle ABC, on a P milieu de [AB] et Q milieu de [AC]. D'après le théorème de la droite des milieux, on a (PQ)//(BC). Or (BC) ⊥ (AH), donc (PQ) ⊥ (AH).
Considérant le triangle BAH, la droite (PQ) passe par le milieu P et [AB] et est parallèle à (BH). Donc (PQ) passe par le milieu de [AH].

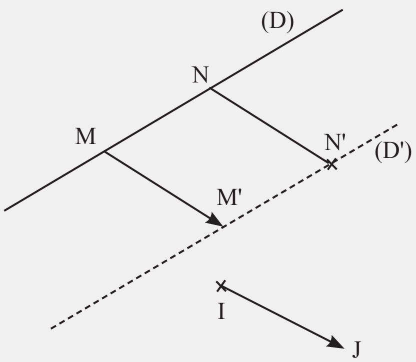
Conclusion
(PQ) est perpendiculaire à (AH) et passe par le milieu de [AH].
Donc (PQ) est la médiatrice de [AH].

## Activité 4 Détermination d'un lieu géométrique




$M' = S_I(M)$ ; $M \in (D)$ donc $M' \in (D')$ ou $(D') = S_I(D)$.

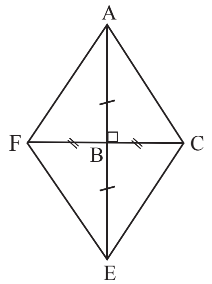
## Exercices de fixation




$M' = t_{\overrightarrow{IJ}}(M)$. Or $M \in (D)$ donc $M' \in (D')$ ou $(D') = t_{\overrightarrow{IJ}}((D))$.
L'ensemble des points M' est la droite (D') image de (D) par la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$ .

## Exercices de renforcement

**1** 1)

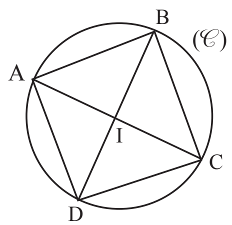



$S_B$

| | |
|---|---|
| A | E |
| C | F |
| E | A |
| F | C |
| B | B |

2) B milieu de [AE] et B milieu [CF].
Donc ACEF est un parallélogramme.
De plus, (BF) ⊥ (AE) car F ∈ (BC) et E ∈ (AB) et (BC) ⊥ (AB).
Donc ACEF est un losange.
3) Comme ACEF est un losange, alors
AC = CE = EF = FA.
ABC est un triangle rectangle en B. D'après la propriété de Pythagore, on a :
$AC^2 = AB^2 + BC^2$.
$AC = 2\sqrt{10}$.

**2**

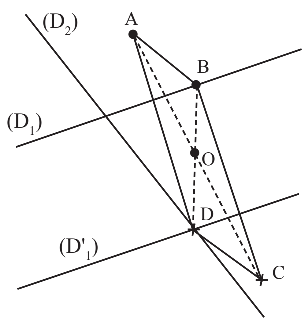



$S_I$

| | |
|---|---|
| A | C |
| B | D |
| C | A |
| D | B |
| [AB] | [CD] |
| [BC] | [DA] |

On a : AB = CD et BC = AD, donc ABCD est un parallélogramme.
Le triangle ABC est inscrit dans le cercle (𝒞) de diamètre [AC]. Alors, ABC est un triangle rectangle en B, (AB) ⊥ (BC).
Un parallélogramme qui a un angle droit est un rectangle. D'où ABCD est un rectangle.

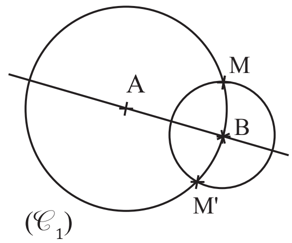
**3**




Programme de construction
- Construis le symétrique $(D'_1)$ de $(D_1)$ par rapport à O.
- $(D'_1)$ coupe $(D_2)$ en D.
- Trace la droite (DO). Elle coupe $(D_1)$ en B.
- Construis C, symétrique de A par rapport à O.

On a le parallélogramme ABCD de centre O.

**4**




$S_{(AB)}$

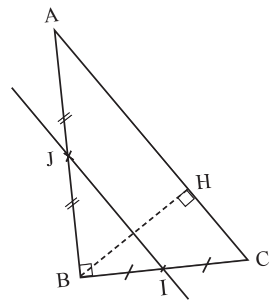
| | |
|---|---|
| M | M' |
| A | A |
| B | B |

AM = AM' et
BM = BM'

Programme de construction :
- On construit le cercle $(C_1)$ de centre A passant par M.
- On construit le cercle $(C_2)$ de centre B passant par M.

$(C_1)$ et $(C_2)$ se coupent en M'.

**5** 1)




2) ABC est un triangle. I est le milieu de [BC] et J milieu de [AB]. Donc (IJ) // (AC) (droite des milieux).
Comme (BH) ⊥ (AC) alors (IJ) ⊥ (BH).
BHC est un triangle. I est le milieu de [BC] et (IJ) // (HC) donc (IJ) passe par le milieu de [BH].
Par conséquent, (IJ) est la médiatrice de [BH].

3)

$S_{(IJ)}$

| | |
|---|---|
| I | I |
| J | J |
| B | H |

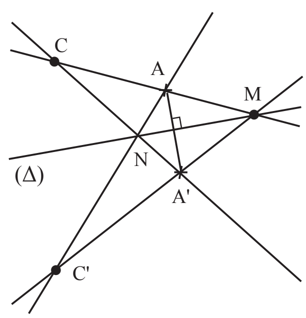
donc

$S_{(IJ)}$

| | |
|---|---|
| (BI) | (HI) |
| (BJ) | (HJ) |

Comme (BI) ⊥ (BJ), on a (HI) ⊥ (HJ).

**6**




$S_{(\Delta)}$

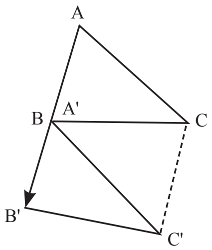
| | |
|---|---|
| A | A' |
| A' | A |
| M | M |
| N | N |
| C | C' |

$S_{(\Delta)}$

| | |
|---|---|
| (AM) | (A'M) |
| (A'N) | (AN) |

C ∈ (AM), donc C' ∈ (A'M)
C ∈ (A'N), donc C' ∈ (AN)
{C'} = (A'M) ∩ (AN)

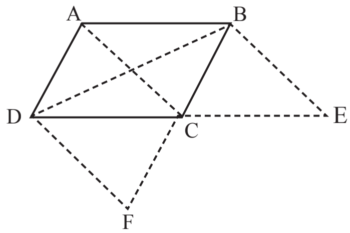
**7**




$t_{\overrightarrow{AB}}$

| | |
|---|---|
| A | B |
| B | B' |
| C | C' |

**8** 1)




2) Voir figure.

3) $t_{\overrightarrow{AC}}$

| | |
|---|---|
| A | C |
| B | E |
| D | F |

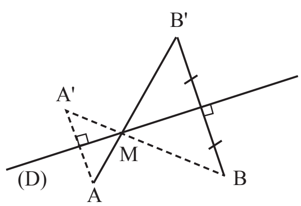
D'après la propriété fondamentale $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CF}$.
Comme ABCD est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ; donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CF}$.
On en déduit que C est le milieu de [BF].
ABCD est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

D'après la propriété fondamentale, on a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$.
On a donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE}$ et C est le milieu de [DE].

4) Le quadrilatère BEFD a ses diagonales [BF] et [BE] qui se coupent en leur milieu C. Donc BEFD est un parallélogramme. Donc $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{EF}$.

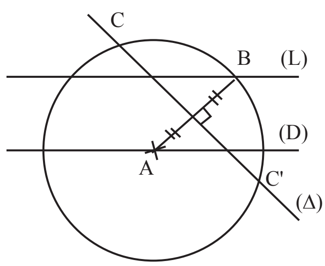
## Exercices d'approfondissement

**9**



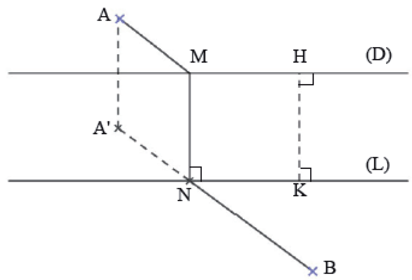

- On construit le symétrique B' de B par rapport à (D).
- On trace le segment [AB'] qui coupe (D) en M cherché.
  AM + MB = AM + MB' = AB'.

**10**



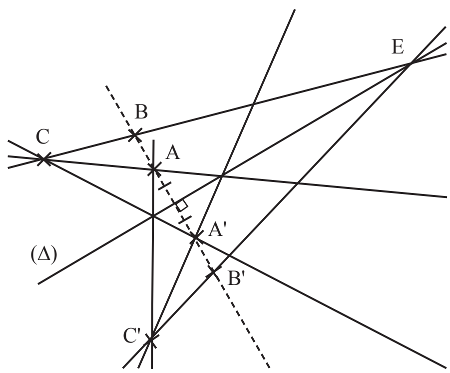

A étant fixé sur (D), on place un point B sur (L).
Soit (Δ) la médiatrice de [AB].
ABC étant étant un triangle équilatéral, on a : AB = CA = CB.
Par conséquent, C appartient à (Δ) (car AB = AC) et C appartient au cercle de centre A et de rayon AB (car AC = AB).
Programme de construction :
- Placer un point B sur (L).
- Tracer la médiatrice (Δ) de [AB].
- Tracer le cercle de centre A et de rayon AB. Ce cercle coupe (Δ) en deux points C et C'.
Les triangles ABC et ABC' sont solutions.

**11**




Soit H un point de (D) et K le point (L) tel que (HK) ⊥ (L).
Soit A' = $t_{\overrightarrow{HK}}$ (A). On a alors $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{HK} = \overrightarrow{MN}$.
$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MN} \Rightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'N}$.
$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'N}$.
Par suite AM + MN + NB = A'N + MN + NB
= (A'N + NB) + MN.
Le trajet est minimal lorsque A'N + NB est minimal, c'est à dire N ∈ [A'B].
Programme de construction :
- Construire A' = $t_{\overrightarrow{HK}}$ (A).
- Tracer le segment [A'B] : N est le point d'intersection de (L) et (A'B).
- Tracer la perpendiculaire à (D) passant par N, elle coupe (D) en M.

**12**




$S_{(\Delta)}$

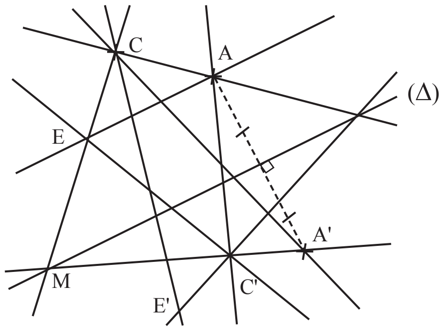
| | |
|---|---|
| A | A' |
| B | B' |
| C | C' |

B ∈ (AA') d'où B' ∈ (AA') car (AA') ⊥ (D)
C ∉ (AA') et (AC) non parallèle à (D).

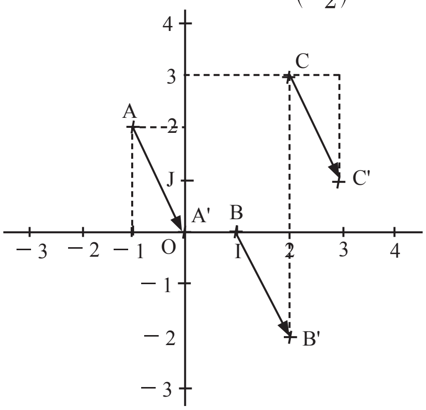
- On place un point C n'appartenant pas à (AA') et (AC) est sécante à (D).
- On construit C' symétrique de C par rapport à (Δ). (Voir ex. 6 p 219).
- On trace (EC').

Comme B ∈ (EC), on a B' ∈ (EC').
Donc {B'} = (EC) ∩ (AA').

**13** - Soit C tel que (AC) non parallèle à (Δ).
- On construit C' symétrique de C par rapport à (Δ). (Voir exercice 6 page 219).
- On construit E' selon le principe de C'.




**14** 1. a) Soit C tel que $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.




b)

| $t_{\vec{u}}$ | |
|---|---|
| A | A' |
| B | B' |
| C | C' |

$\overrightarrow{AA'} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} - x_A = 1 \\ y_{A'} - y_A = -2 \end{cases}$ ; $A'\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

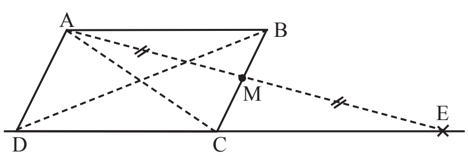
De même, $B'\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ; $C'\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. a) $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. On a $\begin{cases} x' = 1 + x \\ y' = -2 + y \end{cases}$.

b) $t(D) = A$. On a $\begin{cases} x_A = 1 + x_D \\ y_A = -2 + y_D \end{cases}$. $\begin{cases} x_D = -2 \\ y_D = 4 \end{cases}$.

$D(-2 ; 4)$.

**15**




1) (CE) // (AB) car la symétrie d'une droite par rapport à un point est une droite qui lui est parallèle.

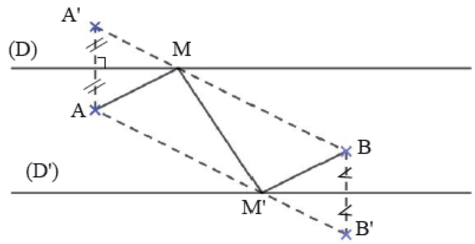
| $S_M$ | |
|---|---|
| A | E |
| B | C |
| (AB) | (CE) |

2) ABCD est un parallélogramme, donc (AB) // (AC).
Or (AB) // (AC), donc (DC) // (CE).
Par conséquent, D, C et E sont alignés.

3) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ . (AB) // (CE) et AB = CE, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$ .
On a : $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE}$ . C est donc le milieu de [DE].

**16** a) Voir exercice 11.

b)

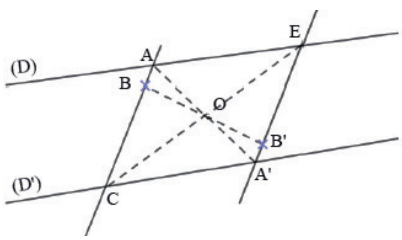



Soit A' le symétrique de A par rapport à (D) et B' le symétrique de B par rapport à (D').
On a AM + MB = A'M + MB. Le trajet de A à B en passant par M est minimal lorsque A'M + MB est minimal, c'est-à-dire M ∈ [A'B].
De même, le trajet de A à B en passant par M' est minimal lorsque M' ∈ [B'M].
Programme de construction :
- Construire le symétrique A' de A par rapport à (D) et le symétrique B' de B par rapport à (D').
- Tracer la droite (A'B) : elle coupe (D) en M.
- Tracer la droite (AB') : elle coupe (D') en M'.
- Tracer la ligne brisée AMM'B.

## Situation d'évaluation

**17**

1)




- Je trace une droite non parallèle à (D) et passant par B. Elle coupe (D) en A et (D') en C.
- Je trace la droite (OA) : elle coupe (D') en A'.
- Je trace la droite (OC) : elle coupe (D) en E.

Comme $S_O(A) = A'$ et $S_O(C) = E$, on a $S_O((AC)) = (A'E)$.
2) Soit $B' = S_O(B)$.
B ∈ (AC), donc B' ∈ (A'E).
La droite (OB) coupe donc (A'E) en B'.
Donc l'élève a raison.

Leçon 14

# HOMOTHÉTIES

## INSTALLATION DES HABILETÉS

### Activité 1 Définition et premières propriétés

#### 1.1. Homothétie de centre Ω et de rapport *k*

1) Justifions que $\overrightarrow{\Omega C} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega A}$ et que $\overrightarrow{\Omega G} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega E}$

Les points Ω, C, B et A sont alignés. De plus sur la figure codée on a : $\overrightarrow{\Omega C} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA}$.

$\overrightarrow{\Omega A} = \overrightarrow{\Omega C} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$.

$\overrightarrow{\Omega A} = 3\overrightarrow{\Omega C}$, car $\overrightarrow{\Omega C} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA}$ d'où $\overrightarrow{\Omega C} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega A}$.

De même on démontre que $\overrightarrow{\Omega G} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega E}$

2. a) Soit M'' un autre point tel que $\overrightarrow{\Omega M''} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{\Omega M'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega M}$.

Par soustraction on a : $\overrightarrow{M'M''} = \vec{O}$ donc M' = M''.

b) Si M = Ω, alors M' = Ω

si M ≠ Ω, il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega M}$.

Chaque point du plan admet un unique correspond.

Donc nous avons bien une application du plan dans le plan.

**Exercices de fixation**

**1-1-1** 1) $\overrightarrow{EB} = 5\overrightarrow{EC}$ ; 2) $\overrightarrow{SF} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{SG}$.

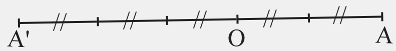
**1-1-2** 1) 1. V ; 2. F.

**1-1-3** 1) Soit C' l'image de C, on :

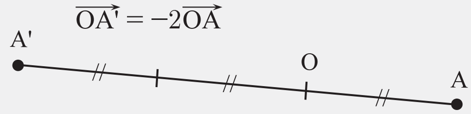
$\overrightarrow{AC'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. C'est le symétrique de O par rapport à A.

2) On a : $\overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{DO}$, donc l'image de O est B.

**1-1-4** $\overrightarrow{OA'} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}$.




**1-1-5** $\overrightarrow{OA'} = -2\overrightarrow{OA}$




#### 1.2. Point Invariant

$h(M) = M \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$ où $k \neq 0$

on a : $(1-k)\overrightarrow{\Omega M} = \vec{O}$.

Si $k = 1$, alors tous les points sont invariants. L'ensemble des points invariants est le plan.

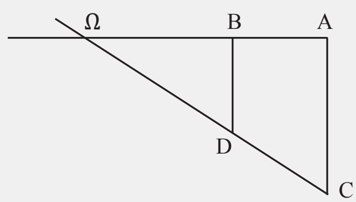
Si $k \neq 1$, $\overrightarrow{\Omega M} = \vec{O}$ ; $M = \Omega$. L'ensemble des points invariants est le singleton $\{0\}$.

Toute homothétie de rapport différent de 1 admet un seul point invariant. C'est le centre de l'homothétie.

**Exercices de fixation**

**1-2-1** 1. F ; 2. V ; 3. V

**1-2-2** Il suffit de prolonger le tracé des droites.



### 1.3. Réciproque

M' est l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport *k*, On a :

$\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$ et $k \neq 0$. D'où $\overrightarrow{\Omega M} = \frac{1}{k}\overrightarrow{\Omega M'}$

En définitive M est l'image de M' par l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{1}{k}$.

Sans évoquer la notion de bijection on peut faire admettre que : la réciproque de l'homothétie de centre Ω et de rapport $k$ ( $k \neq 0$) est l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{1}{k}$.

**Exercices de fixation**

**1-3-1** 1. F ; 2. F ; 3. F

**1-3-2** 1. F ; 2. F ; 3. V

**1-2-2** La réciproque de l'homothétie de centre A et de rapport −5 est l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{1}{5}$.

### 1.4. Propriété fondamentale

M' est l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport *k*, on a : $\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$

M est l'image de M' par l'homothétie de centre Ω et de rapport k, on a : $\overrightarrow{\Omega N'} = k\,\overrightarrow{\Omega N}$

Par soustraction membre à membre on obtient : $\overrightarrow{\Omega N'} - \overrightarrow{\Omega M'} = \mathrm{k}(\overrightarrow{\Omega N} - \overrightarrow{\Omega M})$

$$\overrightarrow{\Omega N'} + \overrightarrow{M'\Omega} = \mathrm{k}(\overrightarrow{\Omega N} + \overrightarrow{M\Omega})$$

**Exercices de fixation**

**1-4-1** $\overrightarrow{FG} = -7\overrightarrow{AB}$

**1-4-2** D'après la propriété fondamentale, on a :

$\overrightarrow{FG} = 13\overrightarrow{AB}$ donc (AB) et (EF) sont parallèles

**1-4-3** D'après la propriété fondamentale, on a :

$\overrightarrow{CD} = -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$ soit $\mathrm{CD} = \frac{5}{6}\mathrm{AB}$. Or AB = 12

donc CD = 10.

## Activité 2 Images de figures simples

### 2.1. Image d'une droite, d'une demi-droite

1) D'après la propriété fondamentale, on a : $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$ donc (AB) et (A'B') sont parallèles

2) $\overrightarrow{A'M'} = k\,\overrightarrow{AM}$

Comme M appartient à (AB), il existe une nombre réel α tel que $\overrightarrow{AM} = \alpha\,\overrightarrow{AB}$.

D'où $\overrightarrow{A'M'} = \alpha k\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$. Ainsi $\overrightarrow{A'M'} = \alpha\,\overrightarrow{A'B'}$ donc M' appartient à la droite (A'B').

3) Soit P' un point de (A'B') et soit P le point tel que $\overrightarrow{\Omega P} = \frac{1}{k}\overrightarrow{\Omega P'}$.

Il suffit de justifier que P appartient à (AB). Soit $\beta$ un nombre réel tel que

$\overrightarrow{A'P'} = \beta\,\overrightarrow{A'B'}$

$\overrightarrow{A'P'} = \beta k\,\overrightarrow{AB}$

En utilisant la relation $\overrightarrow{\Omega P} = \frac{1}{k}\overrightarrow{\Omega P'}$, on a : $\overrightarrow{A'P'} = k\,\overrightarrow{AP}$

$\overrightarrow{A'P'} = k\,\overrightarrow{AP} = \beta k\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AP} = \beta\overrightarrow{AB}$ donc P appartient à (AB).

$h'$(AB) ⊂ (A'B') et (A'B') ⊂ $h$(AB)

donc $h$(AB) = (A'B').

5) Soit [AB) la demi droite définie par les points M tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$ où $x \geq 0$.

Soit M' l'image de M par h. on obtient $\overrightarrow{A'M'} = x\overrightarrow{A'B'}$ où $x \geq 0$.

L'image de la demi-droite [AB) est la demi-droite [A'B') où A' et B' sont les images respectives de A et B.

## Exercices de fixation

**2-1-1** A, B et C sont alignés donc $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB}$ .

On démontre facilement que $\overrightarrow{A'C'} = \alpha\overrightarrow{A'B'}$ .

$\overrightarrow{A'C'} = 9\overrightarrow{AC} = 9\alpha\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{A'B'}$ .

Donc A', B' et C' sont alignés.

**2-1-2** $\overrightarrow{AD} = \dfrac{AD}{AB}\overrightarrow{AB}$ ; $\overrightarrow{AE} = \dfrac{AD}{AB}\overrightarrow{AC}$. ;

$h$

| | |
|---|---|
| A | A |
| B | D |
| C | E |

L'image de (BC) est (DE)
L'image de [BC] est [DE]

## 2.2. Image d'un segment

M ∈ [AB] signifie que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}$ , où α ∈ [0 ; 1].

On démonte que : $\overrightarrow{A'M'} = \alpha\overrightarrow{A'B'}$ , où α ∈ [0 ; 1].
Réciproquement
Si M' appartient à [A'B'], il existe M appartenant à [AB] tel que M' soit l'image de M.
l'image d'un segment est un segment. De plus
$\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ donc A'B' = $|k|$AB.
C'est un segment de longueur $|k|$.AB.

$h$

| | |
|---|---|
| O | O |
| A | A' |
| B | B' |
| M | M' |

## Exercices de fixation

**2-2-1**

$h$

| | |
|---|---|
| A | A |
| B | D |
| C | E |
| [BC] | [DE] |

L'image du segment [BC] est le segment [DE].
DE = $\dfrac{2}{5}$ BC, donc DE = 1.

**2-2-2** I est le milieu du segment [AB] signifie que : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$
Soit $h$ une homothétie de centre Ω et de rapport $k$.

$h$

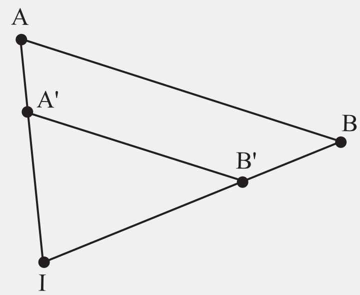
| | |
|---|---|
| A | A |
| A | A' |
| B | B' |
| I | I' |
| [AB] | [A'B'] |

$\overrightarrow{A'I'} = k\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{I'B'} = k\overrightarrow{IB}$
$\overrightarrow{A'I'} = k\overrightarrow{AI} = k\,\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{I'B'}$
$\overrightarrow{A'I'} = \overrightarrow{I'B'}$ donc I' est le milieu du segment [A'B'].

**2-2-3** Soit $h = h_{(I,\frac{2}{3})}$

$A' = h(A) \Leftrightarrow \overrightarrow{IA'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IA}$

$B' = h(B) \Leftrightarrow \overrightarrow{IB'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IB}$




**2-2-4** BE = 3 ; BF = 3,5 et EF = 3
GI = 1,5 × EF; GI = 4,5.
GB = 1,5 × BE = 4,5.
BI = 1,5 × BF = 5,25.

$h$

| | |
|---|---|
| B | B |
| E | G |
| F | I |

## 2.3. Image d'un cercle

1) Soit M un point de (C). O0n a : IM = $r$
I'M' = $|k|$IM
Donc I'M' = $|k|r$ et donc M' appartient à (C').
2) il suffit de choisir P tel que $\overrightarrow{\Omega P} = \dfrac{1}{k}\overrightarrow{\Omega P'}$
3) L'image de (C) est (C').

$h$

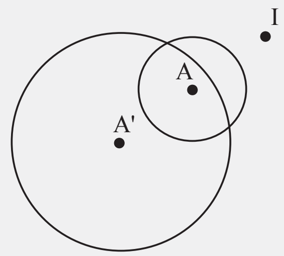
| | |
|---|---|
| I | I |
| M | M' |

## Exercices de fixation

**2-3-1** 1. F ; 2. F ; 3. V

**2-3-1** $r' = \dfrac{15}{2} \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{25}{4}$

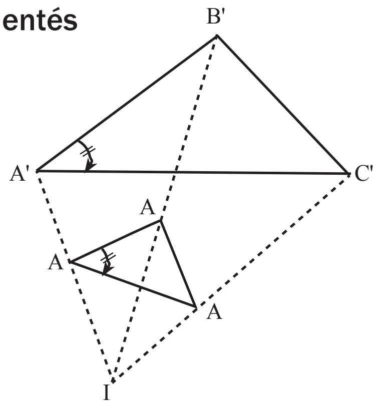
**2-3-3**

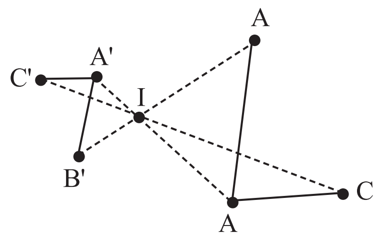



## Activité 3 Propriétés de conservation

### 3.1. Conservation des angles orientés

$$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C'}}\right) = \text{Mes}\left(\widehat{2\overrightarrow{AB};2\overrightarrow{AC}}\right)$$
$$= \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right).$$



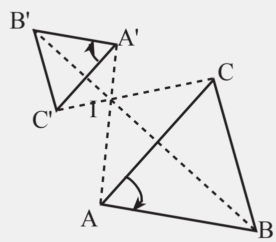




## Exercices de fixation

**3-1-1** $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C'}}\right) = \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$

$= \dfrac{\pi}{3}$

**3-1-2**




### 3.2. Conservation de l'orthogonalité et du parallélisme

1) Soit (D) et (L) deux droites perpendiculaires en A. Soit B un point de (D) et C un point de (L). Soient A', B' et C' les images respectives de A, B et C par une homothétie h. (D') et (L') les images respectives de (D) et (L) par *h*.
On sait que {A'} = (D') ∩ (L'), B' ∈ (D') et C' ∈ (L')
D'après la propriété précédente $\text{mes}\,\widehat{B'A'C'} = \text{mes}\,\widehat{BAC} = 90°$
Donc (D') perpendiculaire à (L').

2) En utilisant la propriété fondamentale, on obtient immédiatement le résultat.

## Exercices de fixation

**3-2-1** (D') et (L') sont par parallèles car (D) et (L) sont parallèles.

**3-2-2** Par conservation de l'orthogonalité le triangle A'B'C' est rectangle en A'.

**3-2-3** (D) et (L) sont parallèles, donc (D') et (L') sont parallèles. De plus B ∈ (L') car B est l'image d'un point de (L).
Il suffit de construire la parallèle à (D') passant par B.

### 3.3. Conservation du milieu d'un segment

I est le milieu du segment [AB], donc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ .
A', B' et I' sont les images respectives de A, B et I par l'homothétie *h*.
$\overrightarrow{A'I'} = k\,\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{I'B'} = k\,\overrightarrow{IB}$ .
On a : $\overrightarrow{A'I'} = k\,\overrightarrow{AI} = k\,\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{I'B'}$
$\overrightarrow{A'I'} = \overrightarrow{I'B'}$ . Donc I' est le milieu du segment [A'B'].

**Exercices de fixation**

**3-3-1** Par conservation du milieu, K' est le milieu du segment [A'B'].

**3-3-2** L'image de I est J.
L'image M est le milieu du segment [BE] car $h([AB]) = [BE]$.

**Activité 4** Diverses déterminations d'une homothétie

### 4.1. Homothétie définie par son centre, un point et son image

Soit un nombre réel *k* différent de 0 et 1. Soit deux points distincts A et B du plan.

1) Pour un point M donné et un vecteur $\vec{u}$ donné, il existe un et un seul point O tel : $\overrightarrow{MO} = \vec{u}$ .
Donc il existe un et un seul point O tel $\overrightarrow{AO} = \dfrac{1}{1-k}\overrightarrow{AB}$ .

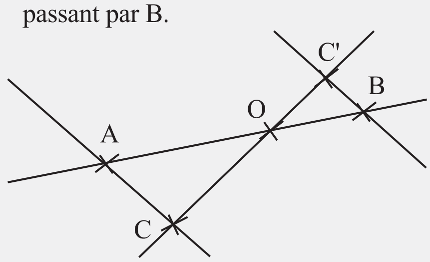
2) a) $\overrightarrow{AO} = \dfrac{1}{1-k}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (1-k)\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AO} - k\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$
$\Leftrightarrow k\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$

De $\overrightarrow{OB} = k\,\overrightarrow{OA}$ , on déduit qu'il existe une et une seule homothétie de centre O qui applique A sur B.
b) Le rapport de *h* est *k*.

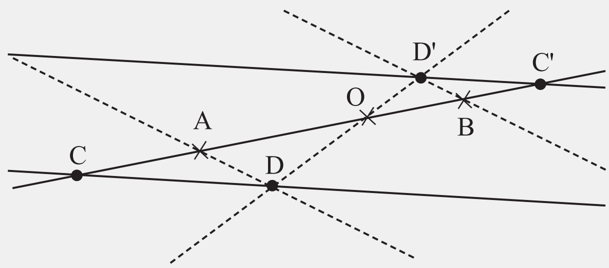
**Exercices de fixation**

**4-1-1** A, B et C sont trois points distinct et sont alignés donc Il existe une seule homothétie de centre C qui applique A sur B.

**4-1-2** Le point C' est le point d'intersection de la droite (OC) et de la parallèle à la droite (AC) passant par B.




**4-1-3** C' appartient à la droite (AB). Il faut choisir un point D extérieur à la droite (AB) et construire son image D'.




C'est le point d'intersection de (AB) et de la parallèle à (DC) passant par D'.

### 4.2. Homothétie définie par son rapport, un point et son image

Soit une homothétie *h* de rapport *k* qui applique A sur B. On sait qu'une homothétie est parfaitement déterminée par son centre et son rapport. Il suffit de démontrer que son centre est unique. Soit O le centre de cette homothétie.

$\overrightarrow{OB} = k\,\overrightarrow{OA}$
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{OA}$
$(k-1)\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$
$(1-k)\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{AB}$ , si $k \neq 1$.
Il existe un unique point O tel que : $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{AB}$ .
Ce point est le centre de l'homothétie de rapport $k$ qui applique A sur B.

## Exercices de fixation

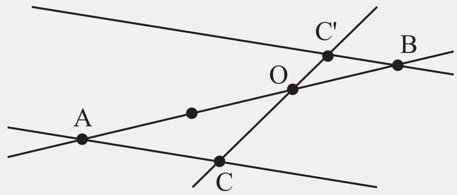
**4-2-1** 2 est différent de 0 et 1.
Donc il existe une seule homothétie de rapport 2 qui applique A sur B.

**4-2-2** Soit O le centre de l'homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$ qui applique A sur B.

$\overrightarrow{OB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{OA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

On construis le point O puis le point C'.




## 4.3. Homothétie définie par deux points et leurs images

Dans cet exercice on suppose que les droites (AB) et (A'B') sont gradués et orientés par le même vecteur unitaire cela est envisageable car les deux droites sont parallèles. Si non le rapport $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ n'aurait aucun sens mathématique.

1) $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ étant différent de 0 et 1, il existe une seule homothétie $h$ de rapport $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ qui applique A sur A' en utilisant la propriété précédente.

2) Justifions que $h$(B) = B'.

On sait que le rapport de $h$ est $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ . Soit O son centre. (AB) et (A'B') sont parallèles et dirigés par un même vecteur unitaire.

On a : $\overrightarrow{A'B'} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OA'} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}\overrightarrow{OA}\left(h(A) = A'\right)$

$\overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OB'} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$ on en déduit que $\overrightarrow{OB'} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}\overrightarrow{OB}$

Donc $h$(B) = B'

Si les droites (AA') et (BB') sont disjointes, alors O est le point d'intersection de ces deux droites.

## Exercices de fixation

**4-3-1** Un trapèze est un quadrilatère qui a deux côtés parallèles. Ici (AC) // (BD).

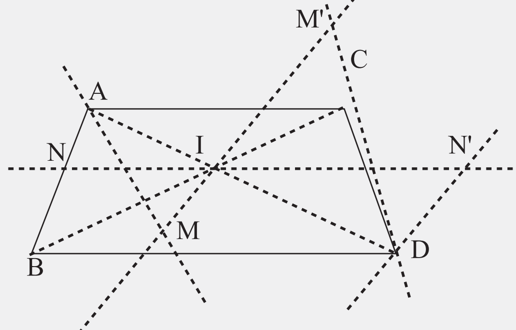
On a : (AC) // (BD) et $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BD}$
Donc il existe une homothétie qui transforme A en B et C en D.

**4-3-2** La centre est le point d'intersection de (AD) et (CB).

Ici le rapport est négatif, c'est $-\frac{BD}{AC}$ .

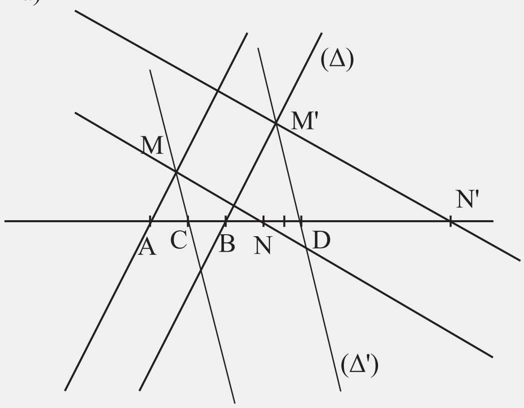
**4-3-3** Soit h cette homothétie.
Son centre I est le point d'intersection de (AD) et (CB).
Soit M' = h(M) et N' = h(N).

M' est le point d'intersection de (IM) et de la parallèle à (AM) pasnt par D.
N' est le point d'intersection de (IN) et la parallèle à AN) passant par D.

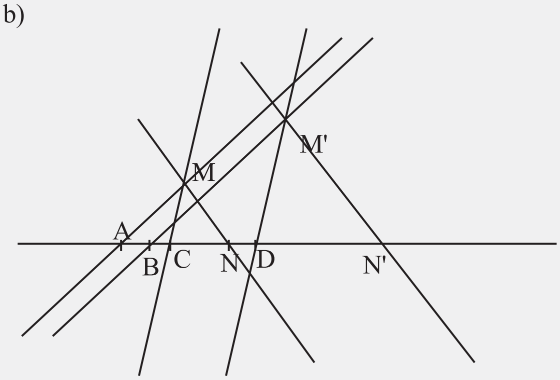


**4-3-4** Il y a erreur dans l’énoncé.

a)




b)




Construction de M'.
- Tracer la droite (AM) et la droite (Δ) parallèle à (AM) et passant par B.
- Tracer la droite (CM) et la droite (Δ') parallèle à (CM) et passant par D
- M' est le point d'intersection de (Δ) et (Δ').

Construction de N'.
- Tracer la droite (MN)
- Tracer la parallèle à (MN) passant par M'. Elle coupe la droite (AN) en N'.

## Exercices de renforcement

**1**

a) $\overrightarrow{AM'} = 3\overrightarrow{AM}$

$M' = h_{(A\,;\,3)}(M)$

b) $\overrightarrow{OA'} = -\overrightarrow{OB}$

$A' = h_{(O\,;\,-1)}(B)$

c) $5\overrightarrow{IH} = 3\overrightarrow{IC}$

$\overrightarrow{IH} = \frac{3}{5}\overrightarrow{IC}$

$C = h_{(I\,;\,\frac{3}{5})}(H)$

d) $\overrightarrow{\Omega A} + 3\overrightarrow{\Omega M} = \vec{O}$

$\overrightarrow{\Omega A} = -3\overrightarrow{\Omega M}$

$M = h_{(\Omega\,;\,-3)}(A)$

**2**

1) $\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$ ;

Le rapport est $-3$.

2) $\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Le rapport est $-\frac{1}{3}$.

3) $3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{O}$

$4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{O}$

$\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BA}$

Le rapport est 4.

4) $2\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} = \vec{O}$

$3\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{CA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$

Le rapport est $\frac{2}{3}$.

**3**

a) • Centre : B

• Rapport : $k = \frac{\overline{BC}}{\overline{BO}} = \frac{32}{8} = 4.$

• CA = 4OE

$OE = \frac{9}{2}$

• BA = 4BE ; $BE = \frac{20}{4}$

BE = 5.

b) • Centre : B

• Rapport : $k = \frac{\overline{BC}}{\overline{BO}} = \frac{-6,3}{9}$

$k = -\frac{7}{10}$

• $CA = |k|OE$ ; $OE = \frac{10}{7} \times 7$

OE = 10.

• BA = | k |BE

$4,2 = \frac{7}{10}BE$ ; $BE = \frac{42}{7}$

BE = 6.

**4**

• FIH est un triangle.

E ∈ [FI] ; G ∈ [FH] et (EG) // (IH) d'après la conséquence de la propriété de Thalès.

On a : $\frac{FE}{FI} = \frac{FG}{FH} = \frac{EG}{IH}$ ; d'où

$\frac{FE}{FI} = \frac{5}{8,5} = \frac{10}{17}.$

$\overrightarrow{FE} = \frac{10}{17}\overrightarrow{FI}$

Soit $h$ l'homothétie de centre F et de rapport $\frac{10}{17}$.

On a : $h(I) = E$ et $h(H) = G$.

• $FE = \frac{10}{17}FI$

$FI = \frac{17}{10}FE$

$FI = \frac{119}{20}$

• $FG = \frac{10}{17}FH$

$FH = \frac{51}{17}.$

**5**

• En raisonnant comme dans l'exercice 4,

on a : $\overrightarrow{RM} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{RS}.$

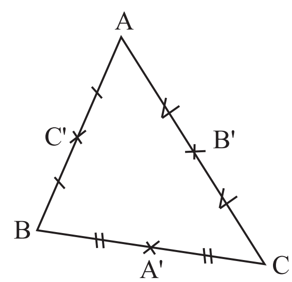
Soit $h$ l'homothétie de centre R et de rapport $-\frac{5}{2}$.

On a $h(T) = N$ et $h(S) = M$.

• $RT = \frac{2}{5} \times 3 = \frac{6}{5}$

• $ST = \frac{2}{5} \times 4 = \frac{8}{5}.$

**6**



1) ABC est un triangle. A' milieu de [BC] et B' milieu de [AC]. Donc (AB) // (A'B'). D'après la conséquence de la propriété de Thalès, $\frac{CB'}{CA} = \frac{CA'}{CB} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{1}{2}$.

$\overrightarrow{CB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

Soit $h = h_{(C\,;-\frac{1}{2})}$. On a :

$h$

| | |
|---|---|
| A | B' |
| B | A' |
| C | C |

2) $\mathscr{A} = (A'B'C') = \frac{1}{4}\ \mathscr{A} = (ABC)$

**7** 1) $\overrightarrow{OC'} = k\,\overrightarrow{OC}$

$k = \frac{OC'}{OC} = \frac{3}{1}$

$k = 3$.

Soit $h_{(O\,;\,3)}$

$h$

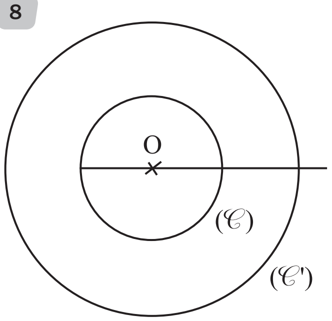
| | |
|---|---|
| O | O |
| A | A' |
| B | B' |
| C | C' |

2) (AB) ⊥ (AC) donc (A'B') ⊥ (A'C'). Le triangle A'B'C' est rectangle en A'.

3) BC = $\sqrt{AB^2 + AC^2} = 10$.
$P_{(ABC)} = AB + AC + BC = 24$ cm.

4) $P_{(A'B'C')} = 3P_{(ABC)} = 72$ cm.

**8**

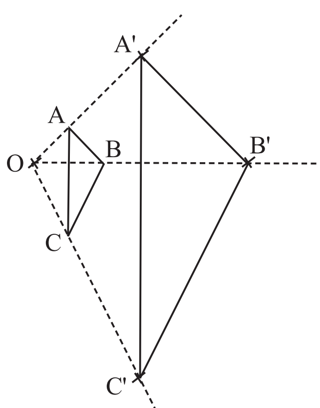



$h$

| | |
|---|---|
| O | O |
| (𝒞) | (𝒞') |

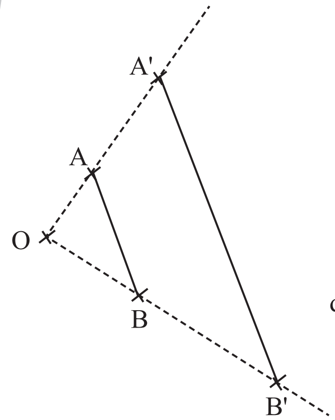
(𝒞') est le cercle de centre O et de rayon 3 cm.

**9**




$\overrightarrow{OA'} = 3\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB'} = 3\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC'} = 3\overrightarrow{OC}$

**10**



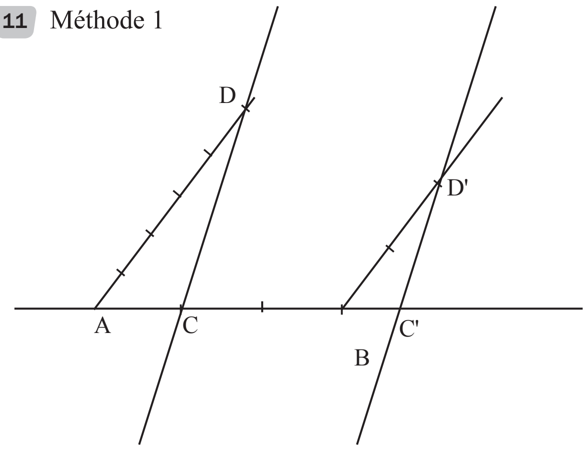

$h$

| | |
|---|---|
| O | O |
| A | A' |
| B | B' |

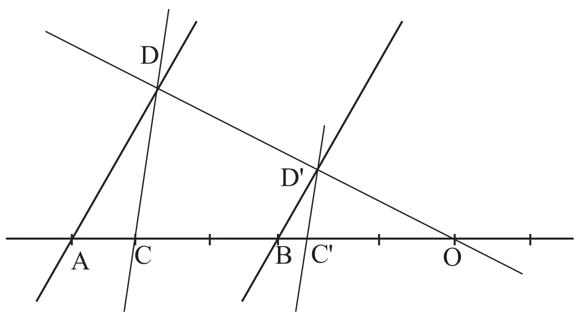
$\overrightarrow{A'B'} = 2{,}5\overrightarrow{AB}$

donc : $\frac{A'B'}{AB} = 2{,}5$.

**11** Méthode 1




Méthode 2




Soit O le centre de $h$.
$\overrightarrow{OB} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OA}$, donc $\overrightarrow{AO} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$.

(AD) // (BD') et (CD) // (C'D').

$\overrightarrow{BD'} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$

(BC') // (AC).

Comme A,C et B sont alignés alors C' ∈ (AB).

(CD) // (C'D').

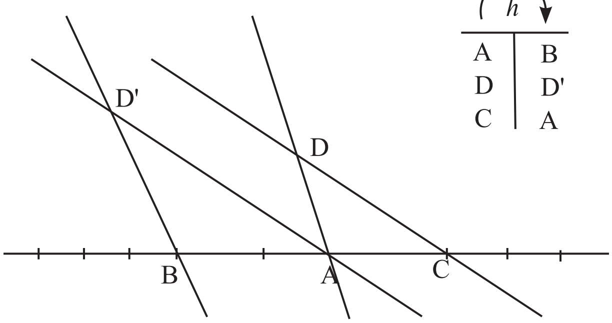
On construit la parallèle à (CD) passant par D'.

Cette droite coupe (AB) en C'.

$h$

| | |
|---|---|
| A | O |
| O | B |
| C | C' |
| D | D' |

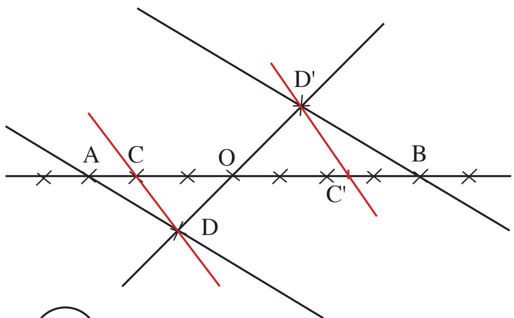
**12**




$h$

| | |
|---|---|
| A | B |
| D | D' |
| C | A |

**13**

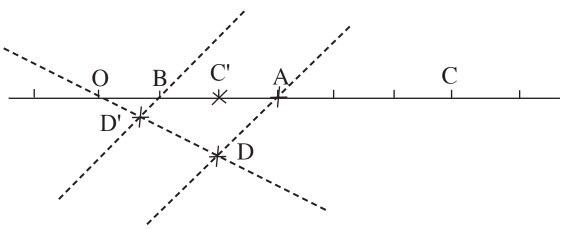



$h$

| | |
|---|---|
| O | O |
| A | B |
| C | C' |
| D | D' |

O, D et D' sont alignés.
(AD) // (BD') donc D' est le point d'intersection de (OD) et de la parallèle à (AD) passant par B.

**14**




$h$

| | |
|---|---|
| O | O |
| A | B |
| C | C' |
| D | D' |

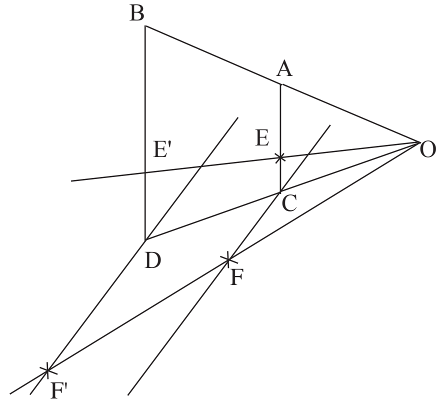
- $\overrightarrow{OB} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ donc

$\overrightarrow{OC'} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OC}$, $C \in [OC]$ et

$OC' = \dfrac{1}{3} \times 6 = 2.$

- (AD) // (BD') et D' ∈ (OD) d'où {D'} = (OD) ∩ (BD').

**15**

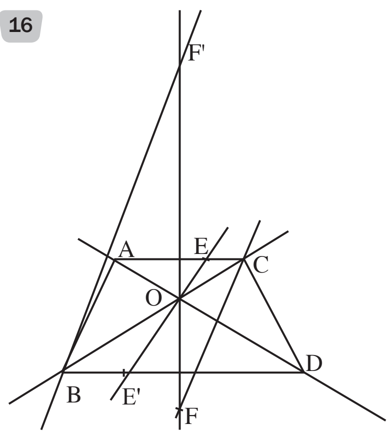



$h$

| | |
|---|---|
| E | E' |
| A | B |
| C | D |
| O | O |
| F | F' |

E ∈ [AC], donc E' ∈ [BD].
(AB) et (CD) se coupent en O centre de l'homothétie.
F' ∈ (OF) et (CF) // (DF').
F' est le point d'intersection de (OF) et la parallèle à (CF) passant par D.

**16**

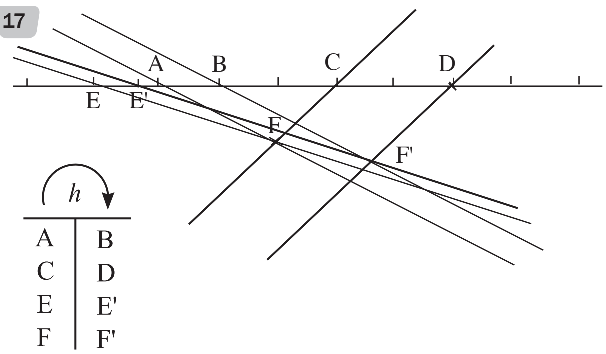



$h$

| | |
|---|---|
| O | O |
| A | D |
| C | B |
| E | E' |
| F | F' |

Programme
- On construit O, point d'intersection de (AD) et (CB).
- On trace la droite (OE). Elle coupe (BD) en E'.
- On trace (OF). La parallèle à (AF) passant par (D) coupe (OF) en F'.

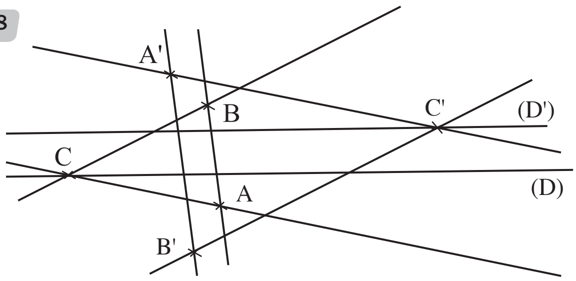
**17**




$h$

| | |
|---|---|
| A | B |
| C | D |
| E | E' |
| F | F' |

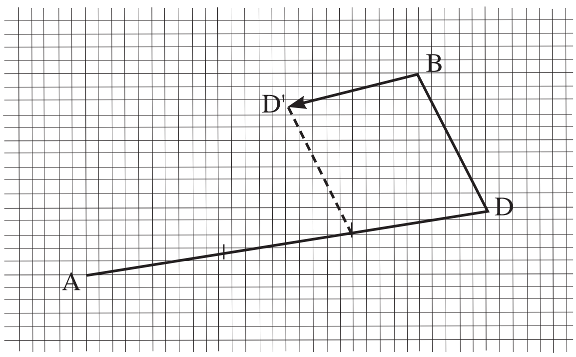
**18**




$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{h} \\ \hline B & B' \\ C & C' \\ A & A' \\ (D) & (D') \end{array}$$

• (AC) // (A'C')
Comme C ∈ (D) alors C' ∈ (D').
La parallèle à (AC) passant par A' coupe (D') en C'.
• (AB) // (A'B') et (BC) // (B'C') donc B' est le point d'intersection de la parallèle à (AB) passant par A' et la parallèle à (BC) passant par C'.

**19**




$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{h} \\ \hline O & O \\ A & B \\ D & D' \end{array}$$

$\overrightarrow{BD'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

**20** $\overrightarrow{\Omega M'} = 5\overrightarrow{\Omega M}$

$\begin{cases} x'-1 = 5(x-1) \\ y'-2 = 5(y-2) \end{cases}$ donc $\begin{cases} x' = 5x-4 \\ y' = 5y-8. \end{cases}$

**21** 1) $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+3 = x \\ -2y+1 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$

D'où $h$ admet un unique point invariant $\Omega\left(1;\frac{1}{3}\right)$

$\begin{cases} x'-1 = -2x+2 \\ y'-\frac{1}{3} = -2y+\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-1 = -2(x-1) \\ y'-1 = -2\left(y-\frac{1}{3}\right) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = -2\overrightarrow{\Omega M}$

On conclut que h est l'homothétie de centre $\Omega\left(1;\frac{1}{3}\right)$ et de rapport –2.

2) Déterminons l'image du point A.
$h(A) = A'$.

$\begin{cases} x'_A = -2\times 3+3 \\ y'_A = -2\times(-2)+1 \end{cases}$ $\begin{cases} x'_A = -3 \\ y'_A = 5 \end{cases}$ $A'\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

3) Déterminons l'image de la (AO) par $h$.

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{h} \\ \hline O & O' \\ A & A' \\ (OA) & (O'A') \end{array}$$

$O'\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4) Déterminons l'image de la droite (D) d'équation $y = x+3$ par $h$.
K ∈ (D) et L ∈ (D).

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{h} \\ \hline K & K' \\ L & L' \\ D & (D') \end{array}$$

$K\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ d'où $K'\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

$L\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ d'où $L'\begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix}$.

(D') : $y = ax + b$

K' ∈ (D') et (L') ∈ (D') : $\begin{cases} 3x+b = -5 & (1) \\ 9x+b = 11 & (2) \end{cases}$

(1) – (2) : $-6x = -16 \Rightarrow x = \frac{8}{3}$.

$b = -5-3\times\frac{8}{3} = -13$, d'où (D') : $y = \frac{8}{3}x - 13$.

5) Déterminons l'image du cercle de centre A et de rayon $\sqrt{5}$.

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{h} \\ \hline A & A' \\ (\mathscr{C}) & (\mathscr{C}') \end{array}$$

$(\mathscr{C}')$ est le cercle de centre $A'\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et de rayon $2\sqrt{5}$.

**22** 1) $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}x+3 = x \\ -\frac{1}{2}y+1 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$

D'où $h$ admet un unique point invariant $\Omega\left(2;\frac{2}{3}\right)$

$\begin{cases} x'-2 = -\frac{1}{2}x+1 \\ y'-\frac{2}{3} = -\frac{1}{2}y+\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-2 = -\frac{1}{2}(x-2) \\ y'-\frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(y-\frac{2}{3}\right) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega M}$

Donc $h$ est l'homothétie de centre $\Omega\left(2;\frac{2}{3}\right)$ et de rapport $\left(-\frac{1}{3}\right)$.

2) h(A) = A'

$\begin{cases} x_{A'} = -\frac{1}{2}\times 0+3 \\ y_{A'} = -\frac{1}{2}\times 1+1 \end{cases} \Rightarrow A'\left(3;\frac{1}{2}\right)$

h(B) = B'

$$\begin{cases} x_{B'} = -\frac{1}{2}\times 3+3 \\ y_{B'} = -\frac{1}{2}\times(-7)+1 \end{cases} \Rightarrow B'\left(\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right).$$

Donc l'image du cercle de diamètre [AB] est le cercle de diamètre [A'B'], avec $A'\left(3;\frac{1}{2}\right)$ et $B'\left(\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right)$

**23** 1) $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1 = x \\ 3y+2 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -1 \end{cases}$

D'où $h$ admet un unique point invariant $\Omega\left(\frac{1}{2};-1\right)$

$$\begin{cases} x'-\frac{1}{2} = 3x-\frac{3}{2} \\ y'+1 = 3y+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-\frac{1}{2} = 3\left(x-\frac{1}{2}\right) \\ y'+1 = 3(y+1) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = 3\overrightarrow{\Omega M}$$

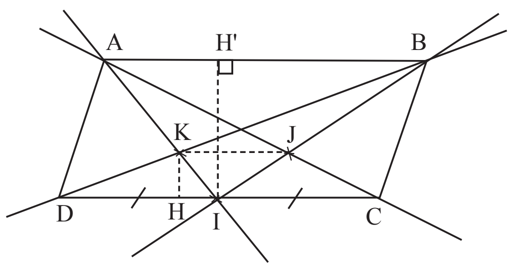
Donc $h$ est l'homothétie de centre $\Omega\left(\frac{1}{2};-1\right)$ et de rapport 3.

2) h(0) = 0'

$$\begin{cases} x_{0'} = 3\times 0-1 \\ y_{0'} = 3\times 0+2 \end{cases} \Rightarrow 0'(-1;2)$$

L'image du cercle de centre 0 et de rayon 1 est le cercle de centre 0' et de rayon $r' = kr = 3 \times 1 = 3$.

**24**




1) (AC) est une médiane du triangle BCD.
(BI) est une médiane du triangle BCD.
J est le point d'intersection de (AC) et (BI).
J est donc le centre de gravité du triangle BCD.

2) Déterminons $h$.
ACD est un triangle. (AI) est une médiane de ACD. (DB) est une médiane de ACD. K est le point d'intersection de (AI) et (DB). Donc K est le centre de gravité du triangle ACD.

$\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ d'où $\overrightarrow{IA} = 3\overrightarrow{IK}$.

$\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$ d'où $\overrightarrow{IB} = 3\overrightarrow{IJ}$.

| $h$ | |
|---|---|
| I | I |
| K | A |
| J | B |

$h = h_{(I\,;\,3)}$.

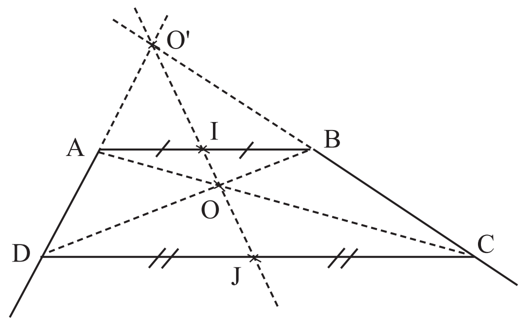
3) $\left.\begin{array}{l} h(J) = B \\ h(K) = A \end{array}\right\} \Rightarrow h((JK)) = (AB)$.

Donc (JK) // (AB).

4) $\mathcal{A}_{(IJK)} = \dfrac{KH \times JK}{2}$ et $\mathcal{A}_{(ABCD)} = IH' \times AB$
$= 3KH \times 3JK$
$= 9KH \times JK$

D'où $\mathcal{A}_{(ABCD)} = \mathcal{A}_{(IJK)}$.

**25**




1) A,O et C sont alignés. Il existe donc $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{OC} = k\,\overrightarrow{OA}$.

2) $h$(A) = C.

3) (AB)//(CD) et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$, donc il existe une unique homothétie qui applique A sur C et B sur D.
Comme $h$(A) = C, on a $h$(B) = D.

4) Justifions que O, I et J sont alignés.

| $h$ | |
|---|---|
| A | O |
| B | D |
| [AB] | [CD] |
| I | I' |

I est le milieu de [AB], alors I' est le milieu de [CD].
D'où J = I'.
Donc O, I et J sont alignés.

5) (AB)//(CD) et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$, donc il existe une unique homothétie $h'$ qui applique A sur D et B sur C.
Son centre est le point d'intersection de (AD) et (BC), c'est-à-dire O.
Comme $h$(A) = C, on a $h$(B) = D.
On a alors h'([AB]) = [DC].
I milieu de [AB] et J milieu de [CD] ; donc $h'$(I) = J.
On a : O', I et J alignés.
Or O ∈ (IJ), donc O, O', I et J alignés.

**26** 1) Justifions l'homothétie.
On a : (AD) // (JB) car (JB) = (BC). De plus, $\overrightarrow{AD} \neq \overrightarrow{JB}$ car ces vecteurs sont de sens contraires.
2) Justifions l'existence de l'homothétie.
(AB) // (DK) car (AB) // (CD) et K ∈ (CD).

$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{KD}$ car ces vecteurs sont de sens contraires. Donc il existe une unique homothétie qui transforme A en K et B en D.

Son centre est le point d'intersection de (AK) et (BD), c'est-à-dire I.

3) Déduisons $AI^2 = IJ \times IK$.

| $h$ | |
|---|---|
| I | I |
| A | J |
| D | B |

| $h'$ | |
|---|---|
| I | I |
| A | K |
| B | D |

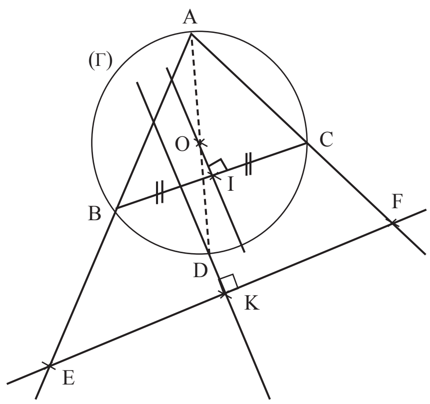
$\frac{IJ}{IA} = \frac{IB}{ID}$ et $\frac{IK}{IA} = \frac{ID}{IB}$.

On a : $\frac{IA}{IJ} = \frac{ID}{IB}$ et $\frac{IK}{IA} = \frac{ID}{IB}$.

D'où $\frac{IA}{IJ} = \frac{IK}{IA}$.

$AI^2 = IJ \times IK$

**27** 1) Construisons les points E et F.




2) O est le milieu de [AD] donc $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$, d'où $h(O) = D$.

3) • Comme h(O) = D, l'image de la droite (OI) est la droite parallèle à (OI) et passant par D.

• O est le centre du cercle (Γ).

On a : OB = OC d'où O appartient à la médiatrice de [BC].

(OI) est d'où $h((OI)) \perp h((BC))$.

Comme $h((BC)) = (EF)$, on conclut que l'image de (OI) par $h$ est perpendiculaire à (EF).

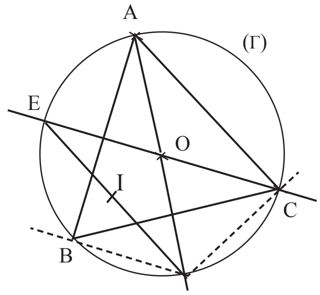
4) a) On a $h$ (B) = E, $h$ (C) = F et $h$ (O) = D.

Soit I' = $h$ (I). Comme (OI) est la médiatrice de [BC], on a (DI') médiatrice de (EF). Par conséquent, (DI') ⊥ (EF).

Donc I' = K, soit h(I) = K. Donc I' = K, soit $h$(I) = K.

b) $h(I) = K \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AI}$ ; par conséquent, I est le milieu de [AK].

**28** 1) Figure




2. a)

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} = \vec{O}$.

$\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OE} = \vec{O}$

$5\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{O}$.

ABC est un triangle équilatéral, O est aussi son centre de gravité ; d'où $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{O}$.

On a : $5\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IE} = \vec{O}$.

I milieu de [ED], donc $\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE} = \vec{O}$

D'où $5\overrightarrow{GO} + 2\overrightarrow{OI} = \vec{O}$.

$\overrightarrow{OG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OI}$.

b) Pour construire G tel que $\overrightarrow{OG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OI}$, utiliser la méthode vue en 3ème pour diviser le segment [OI] en 5 parts égales.

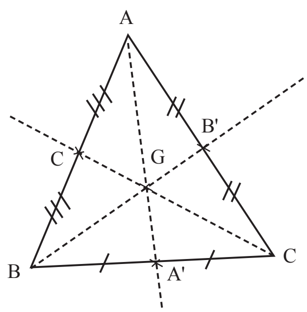
3) $\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{4}(5\overrightarrow{MG})$

$\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GM'} = \frac{5}{4}\overrightarrow{MG}$

$\overrightarrow{GM'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GM}$.

$h = h_{(G, -\frac{1}{4})}$.

**29**




1. a) $k = \frac{1}{2}$. On a : $\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC})$.

Soit G le centre de gravité du triangle ABC.

On a : $\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GM'} = \frac{1}{2}(3\overrightarrow{MG})$.

$\overrightarrow{GM'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GM}$.

$h_{(G; -\frac{1}{2})}$.

b) On sait que

$\overrightarrow{AA'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BB'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{CC'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CG}$.

$\overrightarrow{AA'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$.

| $h$ | |
|---|---|
| A | A' |
| B | B' |
| C | C' |

L'image du triangle ABC par $h$ est le triangle A'B'C', où A', B' et C' sont les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB].

2) $k = -1$. On a :

$$\overrightarrow{MM'} = -\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}\right)$$

$$\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right).$$

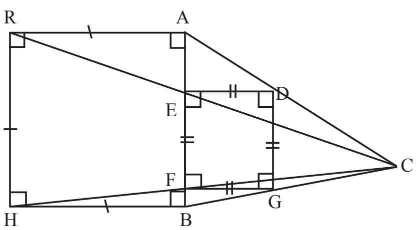
Or $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC'}$ et $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB'}$. De plus

$\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{C'A'}$ (doites des milieux).

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{C'A'} = \overrightarrow{AA'}.$$

Donc $f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

**30** 1) Construction du carré ARHB.



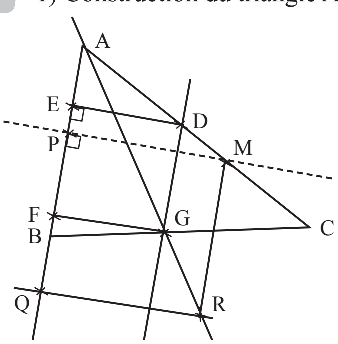

2) Construction du carré DEFG.

| $h$ | |
|---|---|
| C | C |
| A | D |
| R | E |
| H | F |
| B | G |

Programme :

- On trace les droites (CR) et (CH). Elles coupent respectivement (AB) en E et F.
- On trace respectivement les perpendiculaires à (AB) passant par E et F. Elles coupent (AC) en D et (BC) en G.

**31** 1) Construction du triangle ABC

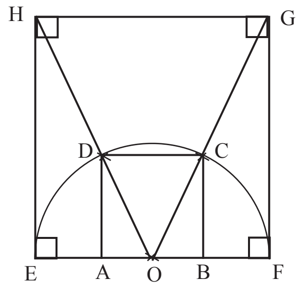



| $h$ | |
|---|---|
| A | A |
| M | D |
| P | E |
| Q | F |
| R | G |

Programme :

- On trace la parallèle à (RM) passant par G. Elle coupe (AC) en D.
- On trace la parallèle à (MP) passant par D. Elle coupe (AB) en E.
- On trace la parallèle à (DE) passant par G. Elle coupe (AB) en F. On a le carré DEFG.

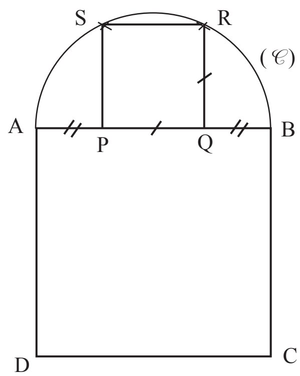
**32** Construction du carré ABCD




Programme :

- On construit un carré EFGH.
- On trace les segments [OG] et [OH]. Ils coupent ($\mathscr{C}$) respectivement en C et en D.
- On trace les parallèles respectivement à (EH) passant par A et à (FG) passant par B. Elles coupent ($\mathscr{C}$) en D et C. On a le carré ABCD.

**33**




1) Justification

$h(R) = B$ et $h(Q) = C \Rightarrow \overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{RQ}$

Comme $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{RQ}$ ont le même sens, on a $k = \dfrac{BC}{RQ}$.

Soit O le milieu de [PQ]. Dans le triangle OQR :

$OR^2 = OQ^2 + RQ^2$

$$\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \left(\frac{RQ}{2}\right)^2 + RQ^2, \text{car } OR = OA = OB$$

$$\frac{AB^2}{4} = \frac{5RQ^2}{4} \text{ donc } RQ = \frac{AB}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{D'où } k = \frac{BC}{RQ} = \frac{AB}{\frac{AB}{\sqrt{5}}} = \frac{AB \times \sqrt{5}}{AB}$$

$$k = \sqrt{5}$$

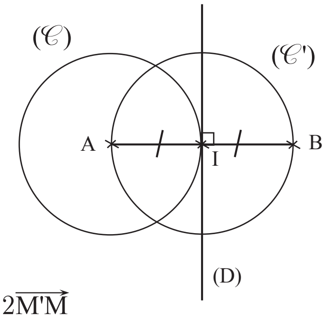
3) a) $AQ = AB - QB$

$$= AB - \left(\frac{AB}{2} - \frac{PQ}{2}\right)$$

$$= AB - \frac{AB}{2} + \frac{PQ}{2} = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}PQ$$

$$AQ = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

**34**




$\overrightarrow{M'A} = 2\overrightarrow{M'M}$

$\overrightarrow{M'A} = 2\overrightarrow{M'A} + 2\overrightarrow{AM}$

$\overrightarrow{AM'} = 2\overrightarrow{AM}$ . M' est l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport 2.

a) A, M et M' sont alignés.

Or M ∈ (AB), donc M' ∈ (AB).

M' décrit (AB) lorsque M décrit (AB).

b)

| $h$ | |
|---|---|
| A | A |
| M | M' |
| (D) | (D') |
| I | B |

M' décrit la parallèle à (D) passant par B.

c)

| $h$ | |
|---|---|
| A | A |
| I | B |
| (𝒞) | (𝒞') |

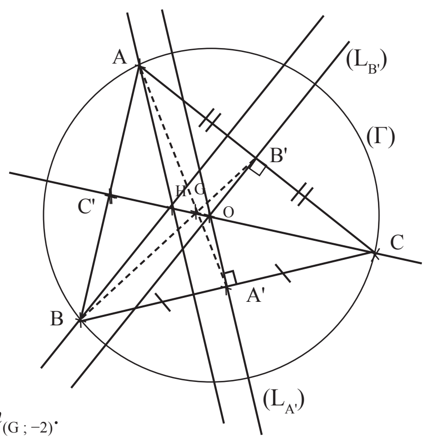
M' décrit le cercle de centre A passant par B.

d)

| $h$ | |
|---|---|
| I | B |
| A | A |
| (𝒞') | (𝒞'') |

M' décrit le cercle de centre B passant par A.

**35** 1)




Soit $h_{(G\,;\,-2)}$.

| $h$ | |
|---|---|
| G | G |
| A' | A |
| B' | B |
| (L$_{B'}$) | (BH) |
| (L$_{A'}$) | (AH) |

(L$_{A'}$) est la médiatrice de [BC].

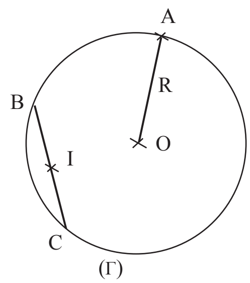
(L$_{B'}$) est la médiatrice de [AC].

(L$_{A'}$) et (L$_{B'}$) sont sécantes en G.

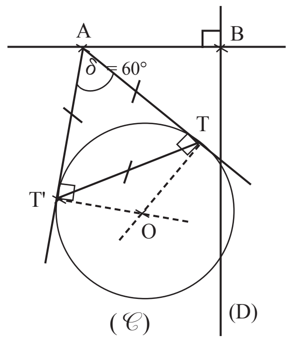
Alors $h$(G) est le point d'intersection de (AH) et (BH).

Donc $h$(G) = H.

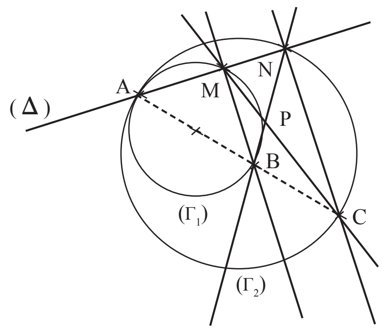
2)




**36**




**37**




1. a) ABM est un triangle inscrit dans le cercle (Γ$_1$) de diamètre [AB]. Donc (AM) ⊥ (BM)
ACN est un triangle inscrit dans le cercle (Γ$_2$) de diamètre [AC]. Donc (AN) ⊥ (CN).
Or A, M et N sont alignés, donc (AM) et (AN) sont confondues.
Donc (AM) = (AN). Par conséquent, (BM) // (CN).
b) On a (BM) // (CN). Si de plus (BN) // (CM), alors BMCN est un parallélogramme. Donc A est le milieu de [BC], donc $k = -1$.

2. a)

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{h} \\ \hline P & P \\ B & N \\ M & M' \end{array}$$

(BM) // (NM'). P, M et M' sont alignés.
M' est le point d'intersection de (PM) et de la parallèle à (BM) passant par N.
Donc M' = C. $h$(M) = C.

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{h'} \\ \hline P & P \\ B & N \\ M & C \end{array}$$

$k' = \dfrac{NC}{AB}$.

Soit $h'$ l'homothétie de centre A.

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{h'} \\ \hline A & A \\ B & C \\ M & N \end{array}$$

$k' = \dfrac{NC}{AB}$.

D'où $k' = -k$.

b) $\overrightarrow{PN} = k\,\overrightarrow{PB}$.

$$\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BN} = k\,\overrightarrow{PB}$$
$$\overrightarrow{BN} = (k'-1)\overrightarrow{PB}$$
$$\overrightarrow{BN} = (-k-1)\overrightarrow{PB}$$
$$\overrightarrow{BN} = (k+1)\overrightarrow{BP}$$
$$\overrightarrow{BN} = \frac{1}{|k+1|}\text{BN} \text{ car } k \neq -1.$$

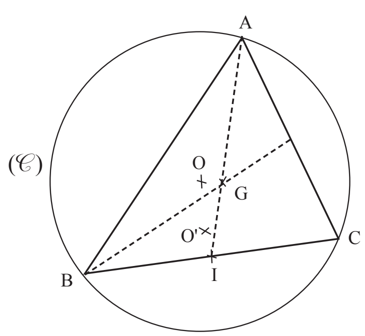
B, P et N sont alignés. Soit H l'homothétie de centre B qui transforme N en P.

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{H} \\ \hline B & B \\ N & P \\ (\Gamma_2) & (\Gamma'_2) \end{array}$$

N décrit $(\Gamma_2)$ privé de A et C.

**38**

G est le centre de gravité du triangle ABC.




$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{O}.$$
$$\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{O}.$$
$$3\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{O}.$$
$$\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}.$$

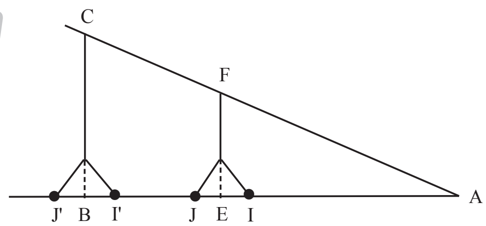
On a : $h(A) = G$, avec $h = h_{(I, \frac{1}{3})}$,

Lorsque A décrit $(\mathscr{C})$, le point G décrit l'image de $(\mathscr{C})$ par $h$. Cette image est le cercle de centre O' = $h$(O) et de rayon $\frac{1}{3}$ OB.

Le lieu géométrique des centres de gravité des triangles ABC est le cercle de centre h(O) et de rayon $\frac{1}{3}$ OB.

## Situation d'évaluation

**39**




$h$ est l'homothétie de centre A et de

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{h} \\ \hline A & A \\ I & I' \\ J & J' \\ E & B \\ F & C \end{array}$$

Déterminons son rapport $k$.

$k = \dfrac{I'J'}{IJ} = \dfrac{125}{10}$

$k$ = 12,5.

Déterminons la hauteur de la tour miniature.

$\dfrac{BC}{EF} = k$ d'où $EF = \dfrac{BC}{k}$

EF = 25,92 m.

Leçon 15

# ROTATIONS

## INSTALLATION DES HABILETÉS

### Activité 1 Définition et premières propriétés

#### 1.1. Rotation de centre O d'angle θ

1. On a : OS = OS'.

2. Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{OS};\overrightarrow{OS'}}\right)=\frac{\pi}{2}$.

3. Le point reste à la même position.

4. • OS = OS' et Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{OS};\overrightarrow{OS'}}\right)=\frac{\pi}{2}$ donc $r$(S) = S'

• OS' = $OS_1$ et Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{OS'};\overrightarrow{OS_1}}\right)=\frac{\pi}{2}$ donc $r$(S') = $S_1$

• $OS_1 = OS_2$ et Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{OS_1};\overrightarrow{OS_2}}\right)=\frac{\pi}{2}$ donc $r(S_1) = S_2$

• $OS_2$ = OS et Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{OS_2};\overrightarrow{OS}}\right)=\frac{\pi}{2}$ donc $r(S_2)$ = S.

**Exercices de fixation**

**1-1-1**

1. $r_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)}$(B) = D car AB = AD et Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}}\right)=\frac{\pi}{2}$

2. $r_{\left(C;\frac{\pi}{2}\right)}$(D) = B car CD = CB et Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB}}\right)=\frac{\pi}{2}$

3. $r_{\left(O;\frac{\pi}{2}\right)}$(A) = B car OA = OB et Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)=\frac{\pi}{2}$

$r_{\left(O;\frac{\pi}{2}\right)}$(B) = C car OB = OC et Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}}\right)=\frac{\pi}{2}$

$r_{\left(O;\frac{\pi}{2}\right)}$(C) = D car OC = OD et Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OD}}\right)=\frac{\pi}{2}$

$r_{\left(O;\frac{\pi}{2}\right)}$(D) = A car OD = OA et Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OA}}\right)=\frac{\pi}{2}$

**1-1-2**

a) Centre : C et angle : $\frac{\pi}{3}$

b) Centre : A et angle : $-\frac{\pi}{3}$

c) Centre : B et angle : $-\frac{\pi}{3}$.

#### 1.2. Point invariant

Supposons qu'il existe un point A (A ≠ O) tel que $r$(A) = A. On aurait OA = OA et Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA}}\right)=\theta$
or Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA}}\right)=0$ donc θ = 0 ce qui est contraire à θ ≠ 0.
O est donc l'unique point invariant.

**Exercices de fixation**

**1-2-1**

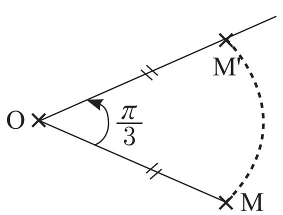
a) $r$(A) = B ; Centre : O et angle : $\frac{2\pi}{10}=\frac{\pi}{5}$

b) $r$(A) = I ; Centre : O et angle : $\frac{-4\pi}{10}=-\frac{2\pi}{5}$

**1-2-2** On peut passer du point A au point E par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

#### 1.3. Construction de l'image d'un point

1. Construction



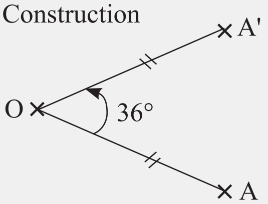

2. Programme

- Je trace la demi-droite [OX) telle que Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OX}}\right)=\frac{\pi}{3}$.
- Je trace un arc de cercle de centre O et de rayon OM : il coupe [OX) en M'.

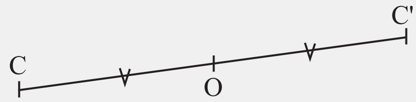
## Exercices de fixation

**1-3-1** $\frac{\pi}{5}$ correspondant à $\frac{180}{\pi} \times \frac{\pi}{5} = 36°$.

Construction




**1-3-2** Construction




les points C, O et C' sont alignés et O est le milieu de [CC'].

### 1.4. Réciproque

$$M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM' = OM \\ \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) = \Theta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} OM = OM' \\ \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM}}) = -\Theta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow M = r_{(O;-\theta)}(M')$$

## Exercices de fixation

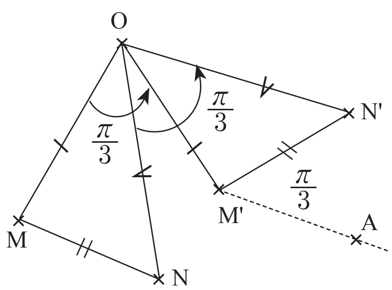
**1-4-1** $r_{\left(A;\frac{-\pi}{3}\right)}(B) = C \Leftrightarrow r_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)}(C) = B$. La rotation cherchée est $r_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)}$.

**1-4-2** $r_{\left(A;\frac{\pi}{5}\right)}(E) = F \Leftrightarrow r_{\left(A;-\frac{\pi}{5}\right)}(F) = E$. La rotation cherchée est $r_{\left(A;-\frac{\pi}{5}\right)}$.

**1-4-3** $r_{\left(O;\frac{\pi}{4}\right)}(A) = B \Leftrightarrow r_{\left(O;-\frac{\pi}{4}\right)}(B) = A$ donc l'image cherchée est A.

### 1.5. Propriété fondamentale

1.




2. a) Après mesure, on constate que MN = M'N'.

b) (MN) // (M'A).

En mesurant avec le rapporteur $\widehat{N'M'A}$, on constate que $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{M'N'}}\right) = \frac{\pi}{3}$.

## Exercices de fixation

**1-5-1**

$\xrightarrow{r_{\left(O;\frac{\pi}{2}\right)}}$

| | |
|---|---|
| A | B |
| C | D |

BD = AC et $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}}\right) = \frac{\pi}{2}$.

donc (AC) ⊥ (BD).

**1-5-2**

$\xrightarrow{r_{\left(C;-\frac{\pi}{3}\right)}}$

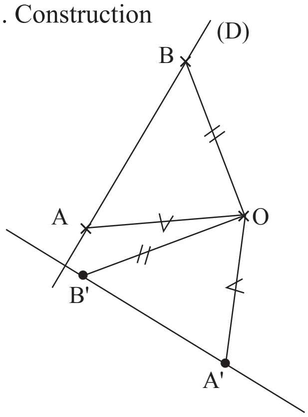
| | |
|---|---|
| A | B |
| D | E |

Donc AD = BE et $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{BE}}\right) = -\frac{\pi}{3}$.

## Activité 2 Images de figures simples

### 2.1. Image d'une droite, d'une demi-droite, d'un segment

1. Construction




2. a) M ∈ (D) donc A, M et B sont alignés.

| $r_{\left(O;\frac{\pi}{2}\right)}$ | |
|---|---|
| A | A' |
| B | B' |
| M | M' |

D'après la propriété fondamentale,

Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{A'B'}}\right) = \frac{\pi}{2}$ donc (AB) ⊥ (A'B').

D'après la propriété fondamentale (AM) ⊥ (A'M') or (AM) = (AB) donc (A'M') ⊥ (AB). On en déduit que (A'B') ⊥ (AB) et (A'M') ⊥ (AB)

donc (A'B') // (A'M') Par conséquent M' ∈ (A'B').

b) N' ∈ (A'B') donc A', B' et N' sont alignés

Soit N le point tel que : N = $r_{\left(O;-\frac{\pi}{2}\right)}$(N')

On a N' = $r_{\left(O;\frac{\pi}{2}\right)}$(N).

Justifions que N ∈ (D).

| $r_{\left(O;-\frac{\pi}{2}\right)}$ | |
|---|---|
| A' | A |
| B' | B |
| N' | N |

Par un raisonnement analogue au précédent on a : (AB) ⊥ (A'B') et (AN) ⊥ (A'B')

donc (AB) // (AN). D'où N ∈ (AB).

3. $r$(AB) = (A'B')

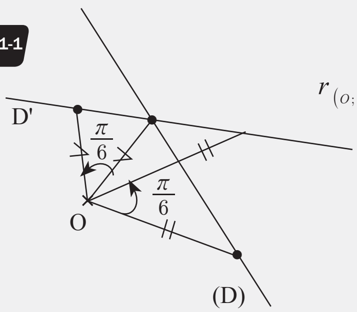
$r$([AB)) = [A'B')

$r$([AB]) = [A'B']

4. D'après la propriété fondamentale, AB = A'B'.

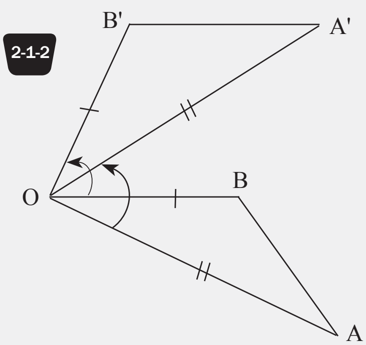
### Exercices de fixation

**2-1-1**




$r_{\left(O;\frac{\pi}{6}\right)}$(D) = (D')

**2-1-2**




| $r_{\left(O;\frac{\pi}{3}\right)}$ | |
|---|---|
| A | A' |
| B | B' |

donc $r$([AB]) = [A'B']

### 2.2. Image d'un cercle

1. M ∈ $\mathscr{C}$(O ; R) ⇔ OM = R

On a $r$(O) = O'

M' et $r$(M) = M' ;

donc O'M' = OM. D'où O'M' = R.

M' ∈ $\mathscr{C}$(O' ; R).

2. M' ∈ $\mathscr{C}$ (O' ; R) ⇔ O'M' = R

Soit M = $r$(Ω ; θ)(M') on a : M' = $r$(Ω ; θ)(M)

de même $r_{(\Omega;\theta)}$ (O) = O' ⇔ $r_{(\Omega;-\theta)}$ (O') = O.

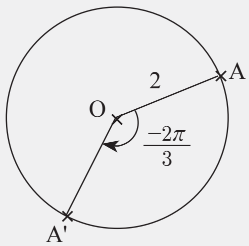
On en déduit O'M' = OM = R ;

donc M ∈ ($\mathscr{C}$) (O ; R) tel que

$r$(Ω ; θ)(M) = M'.

## Exercices de fixation

**2-2-1**



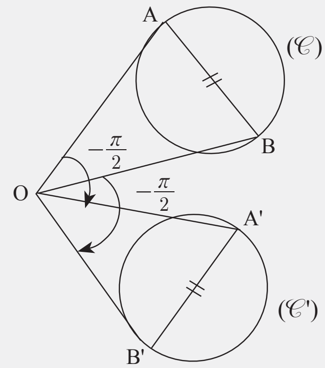

$r\ r_{(O;\frac{-2\pi}{3})}$

| O | O |
|---|---|
| A | A' |

On a : OA = OA' = 2
donc A' ∈ ($\mathscr{C}$) (O ; 2).

L'image de ($\mathscr{C}$) par $r\ r_{(O;\frac{-2\pi}{3})}$ est le cercle ($\mathscr{C}$) lui-même.

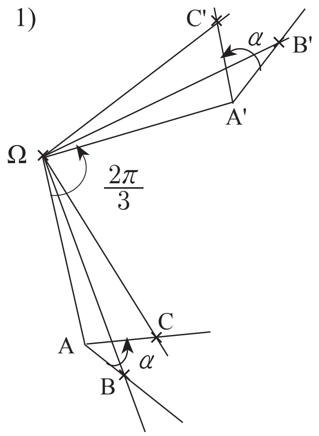
**2-2-2**




## Activité 3 Propriétés de conservation

### 3.1. Conservation des angles orientés

1)




2) • Les $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{A'C'} ; \overrightarrow{A'C'}\right)$ ont le sens.

• Comparons leurs mesures.

On a Mes $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}) = \frac{2\pi}{3}$ et Mes $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'C'}}) = \frac{2\pi}{3}$.

D'après la relation de Charles on a :

$$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}}\right) = \text{Mes}\,(\widehat{\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{A'B'}}) + \text{Mes}\,(\widehat{\overrightarrow{A'B'} ; \overrightarrow{A'C'}}) + \text{Mes}\,(\widehat{\overrightarrow{A'C'} ; \overrightarrow{AC}})$$

$$= \frac{2\pi}{3} + \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}}\right) + \left(\frac{-2\pi}{3}\right)$$

$$= \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}}\right)$$

donc : Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{A'B'} ; \overrightarrow{A'C'}}\right)$ = Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}}\right)$.

• Conclusion : Les angles $\left(\widehat{\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{A'B'} ; \overrightarrow{A'C'}}\right)$ sont égaux.

## Exercices de fixation

Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{6}$.

$r_{(A;\frac{\pi}{2})}$ conserve les angles orientés, donc Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}}\right) = \frac{\pi}{6}$.

### 3.2. Conservation du milieu d'un segment

1. Soit $r$ cette rotation.
On a $r$ ([AB]) = [A'B'] et I ∈ [AB].
Donc I' ∈ [A'B'].

2. On a I'A' = IA et I'B' = IB.
Or IA = IB, donc I'A' = I'B', donc I' est le milieu de [A'B'].
I' ∈ [A'B'] et I'A' = I'B', donc I' est le milieu de [A'B'].

## Exercices de fixation

**3-2-1** La rotation conserve le milieu donc J' est le milieu du segment [I'K'].

**3-2-2**
- Tracer les segments [AB] et [AI].
- Construire la demi-droite [AX) telle que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AX}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}}\right)$.
- La demi-droite [AX) coupe [B'C'] en I'.

### 3.3. Conservation de l'orthogonalité

Notons H le point d'intersection de (D) et (Δ)
A un autre point de (D) et B un autre point de (Δ)
$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}}\right) = \frac{\pi}{2}$ ou $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}}\right) = -\frac{\pi}{2}$.
Soit H' = $r$ (H), A' = $r$ (A) et B' = $r$ (B).
On a {H'} = (D') ∩ (Δ'), A' ∈ (Δ') et B' ∈ (Δ').

Les rotations conservent les angles en particulier les angles droits.
On a : $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{H'A'}, \overrightarrow{H'B'}}\right) = \frac{\pi}{2}$ ou $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{H'A'}, \overrightarrow{H'B'}}\right) = -\frac{\pi}{2}$
Donc (Δ') ⊥ (D').

#### Exercices de fixation

**3-3-1** $r_{(O;-\frac{\pi}{15})}$ conserve l'orthogonalité donc (L') et (U') sont perpendiculaires.

**3-3-2** On trace la perpendiculaires en A' à (D').

### 3.4. Conservation du parallélisme

(Δ) // (D). Soit (L) une droite perpendiculaire à (Δ).
On a : (L) ⊥ (Δ) et (L) ⊥ (D)
notons (L') l'image de (L) par $r$.

Comme $r$ conserve l'orthogonalité
On a : (L') ⊥ (Δ') et (L') ⊥ (D')
On en déduit que (D') // (D')

#### Exercices de fixation

**3-4-1** $r_{(O;-\frac{\pi}{12})}$ conserve le parallelisme.
Comme (L) // (U) donc (L') // (U').

**3-4-2** On trace la parallèle à (L') passant par A'.

## Activité 4 Caractérisation d'une rotation

1. a) $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) = \frac{\pi}{2}$ et OA = OB donc $r$(A) = B.

b) $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}}\right)$ a pour mesure $\frac{\pi}{2}$
or $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ colinéaires de même sens,
de même $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BC}$ colinéaires de même sens
donc $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM'}}\right) = \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}}\right) = \frac{\pi}{2}$

c) AM = BM' et $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM'}}\right) = \frac{\pi}{2}$
donc $r$(M) = M' car $r$(A) = B.

2. Supposons qu'il existe une rotation $r'$ de centre Ω d'angle $\alpha$ autre que $r$.
telle que $r'$(A) = B et $r'$(M) = M'.

Alors AM = BM' et $\left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM'}}\right) = \alpha$.
Or M ∈ [AB] et M' ∈ [BC]
donc $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM'}}\right) = \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}}\right) = \frac{\pi}{2}$
donc $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

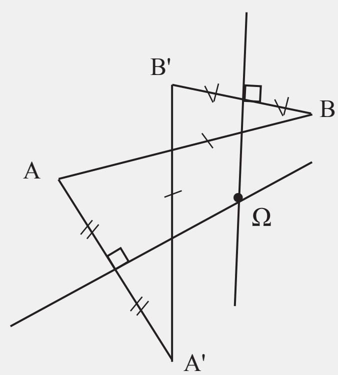
Centre :
$r'$(A) = B ⟺ ΩA = ΩB et $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}}\right) = \frac{\pi}{2}$
Ω appartient à la médiatrice de [AB] et au cercle de diamètre [AB].
Donc Ω = O
Conclusion $r = r'$.

#### Exercices de fixation

**4-1** Soit $r = r_{(A,\frac{\pi}{2})}$. AB' = AB et $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AB}}\right) = \frac{\pi}{2}$
donc $r$(B') = B.
AC = AC' et $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}}\right) = \frac{\pi}{2}$ donc $r$(C) = C'.
On en déduit que : B'C = BC'
B'C = BC' et $\overrightarrow{B'C} \neq \overrightarrow{BC'}$ donc il existe une unique rotation $r$ qui transforme C en C' et B en B'.

**4-2** Soit $r$ la rotation telle que $r$(C) = A et $r$(M) = M'.
M est un point de [AB] et M' un point de [AC] tels que CM' = AM''.
L'angle θ est la mesure de $\left(\widehat{\overrightarrow{CM}; \overrightarrow{AM'}}\right)$.

**4-3**



## Exercices de renforcement

**1** « Dans 2, remplacer G par F au début »

1) $B = r_{\left(O, \frac{\pi}{11}\right)}(A) \Leftrightarrow \begin{cases} OB = OA \\ \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) = \dfrac{\pi}{11} \end{cases}$.

2) F est l'image de G par la rotation de centre E et d'angle $\dfrac{2\pi}{13}$ signifie que $\begin{cases} EG = EF \\ \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{EG}, \overrightarrow{EF}}\right) = \dfrac{2\pi}{13} \end{cases}$.

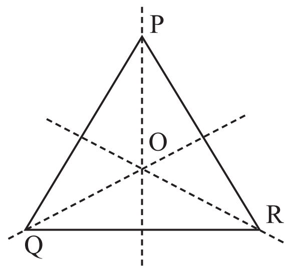
3) $\begin{cases} GB = GC \\ \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GC}}\right) = \dfrac{\pi}{7} \end{cases}$ signifie que $C = r_{\left(G;-\frac{\pi}{7}\right)}(B)$.

**2** 1) a. $r_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}(A) = B$.

b. $r_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}(B) = A$.

c. $r_{\left(O;\frac{3\pi}{2}\right)}(B) = r_{\left(O;\frac{\pi}{2}\right)}(B) = C$.

2) « On doit préciser le triangle PQR de sens direct. »




a. $r_{\left(O,\frac{2\pi}{3}\right)}(P) = Q$.

b. $r_{\left(O,\frac{2\pi}{3}\right)}(R) = Q$.

c. $r_{\left(O;\frac{\pi}{3}\right)}(P) = Q$.

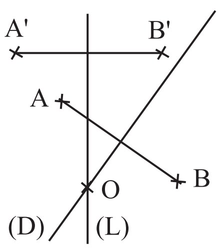
**3** $1 \rightarrow B$ ; $2 \rightarrow E$ ; $3 \rightarrow A$ ; $4 \rightarrow D$ ; $5 \rightarrow -\dfrac{2\pi}{3}$.

**4** Remplacer A' et B' en A et B par A et A' en B et B' »

$r$

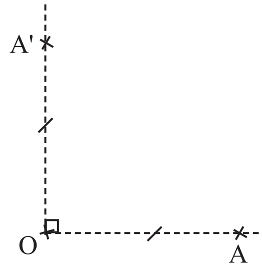
| | |
|---|---|
| O | O |
| A | B |
| A' | B' |

OA = OB donc O ∈ (D) médiatrice de [AB].
OA' = OB' donc O ∈ (L) médiatrice de [A'B'].




O est le point d'intersection de (L) et (D).

**5** 1) Construction




2) Justification : Soit $r = r_{\left(O;\frac{\pi}{2}\right)}$.

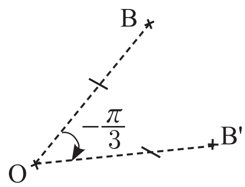
$r$

| | |
|---|---|
| O | O |
| A | A' |

Donc OA = OA' et mes$\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OA'}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

Le triangle OAA' est donc rectangle isocèle en O.

**6** 1) Construction




2) $r = r_{\left(O;-\frac{\pi}{3}\right)}$.

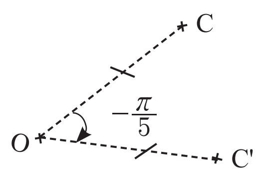
$r$

| | |
|---|---|
| O | O |
| B | B'' |

Donc OB = OB' et mes$\left(\widehat{\overrightarrow{OB}\,;\,\overrightarrow{OB'}}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$.

OBB' est un triangle isocèle dont la mesure d'un angle est 60°. Il est donc équilatéral.

**7** 1) Construction $\dfrac{\pi}{5} \longrightarrow \dfrac{180°}{5} = 36°$.

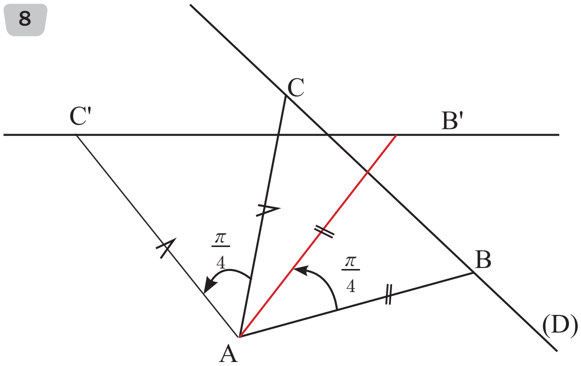



2) Le triangle OCC' est isocèle en O et

Mes $\widehat{OCC'} = \dfrac{\pi - \frac{\pi}{5}}{2}$ ;

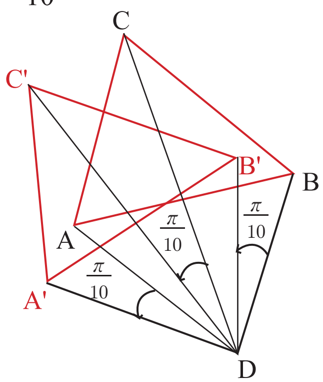
Mes $\widehat{OCC'} = \dfrac{2\pi}{5}$.

**8**

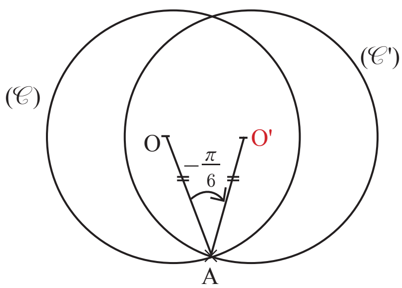



$r$(A) = B' et $r$(C) = C' donc l'image de la droite (D) en la droite (B'C').

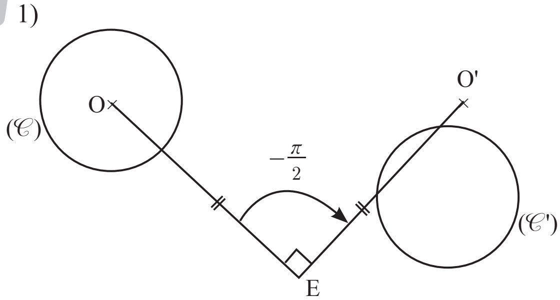
**9** $\frac{\pi}{10} \longrightarrow \frac{180°}{10} = 18°$




**10**



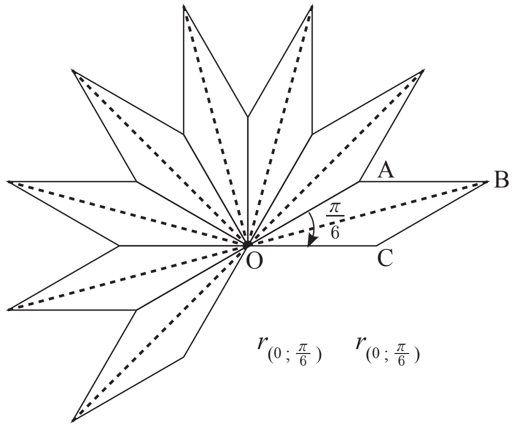

**11** 1)




2) Voir figure.

3) Aire ($\mathscr{C}$)=Aire ($\mathscr{C}$') car l'image d'un cercle ($\mathscr{C}$) par une rotation est un cercle de même rayon.

**12**




**13**

| | |
|---|---|
| O | O |
| A | A' |
| B | B' |
| I | I' |

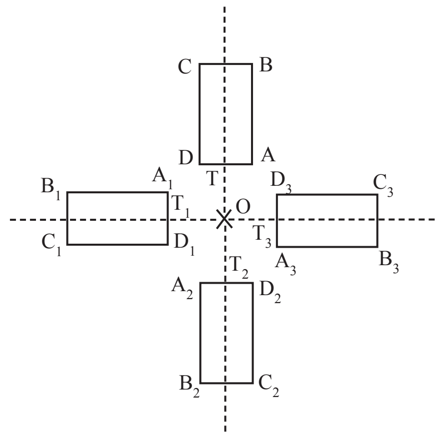
Comme I est le milieu [AB], alors I' est le milieu de [A'B'].

B' = $S_{I'}$ (B).

Programme :

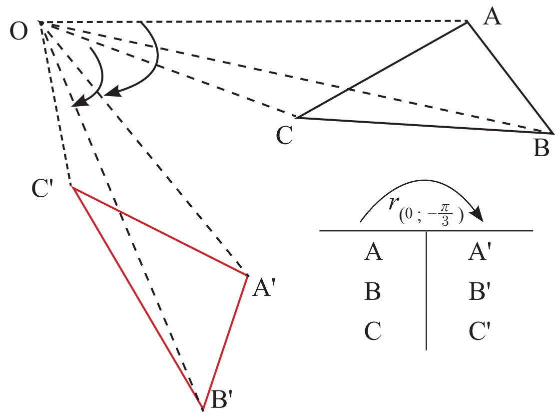
- Tracer [A'I') la demi-droite d'origine A' passant par I'.
- Construire B' tel que I' est milieu de [A'B'].

**14**




**15** Les angles de rotation qui permettent de passer d'une palette à l'autre : $\frac{2\pi}{3}$ ou $-\frac{2\pi}{3}$.

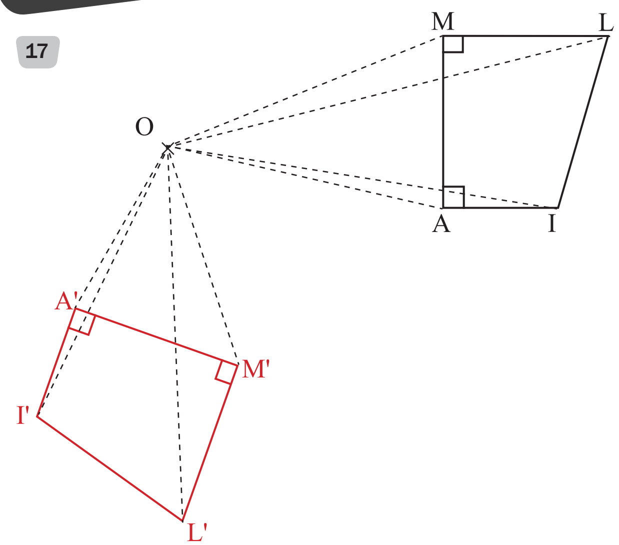
**16**




$r_{(O\,;\,-\frac{\pi}{3})}$

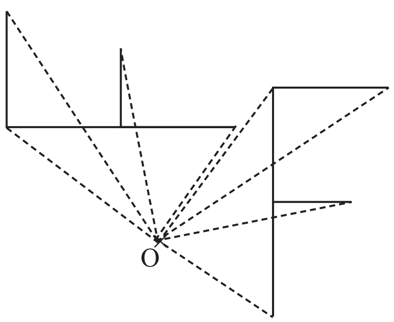
| | |
|---|---|
| A | A' |
| B | B' |
| C | C' |

**17**

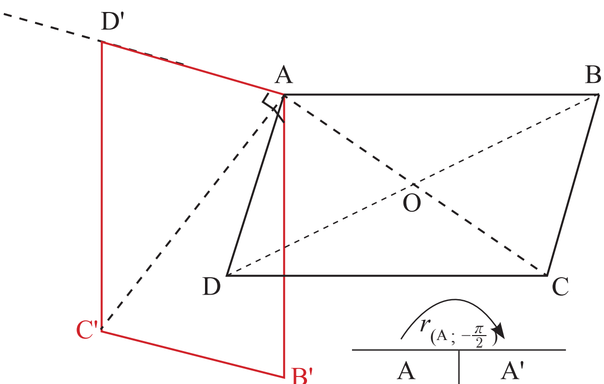



**18** Les cinq palettes du ventilateur sont regulièrement espacées, donc l'angle qui sépare deux palettes consécutives est $\dfrac{360}{5} = 72°$.
Les angles des deux rotations qui permettent de passer d'une palette à la suivante sont $\dfrac{2\pi}{5}$ et $-\dfrac{2\pi}{5}$

**19**

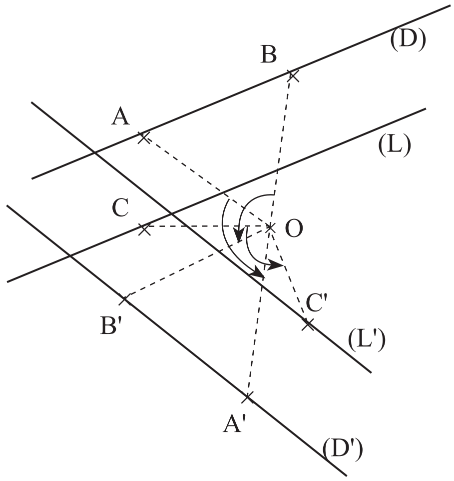



**20**




| $r_{(A\,;\,-\frac{\pi}{2})}$ | |
|---|---|
| A | A' |
| B | B' |
| C | C' |
| D | D' |

**21**




Soit A et B deux points de (D), et C un point de (L).

• A' est tel que OA'= OA et $Mes(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}}) = \dfrac{2\pi}{3}$

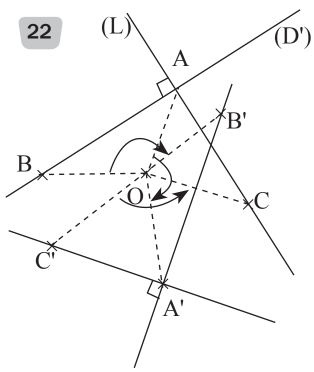
B' est tel que OB'= OB et $Mes(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'}}) = \dfrac{2\pi}{3}$

La droite (D') est la droite (A'B').

• C' est tel que OC' = OC et $Mes(\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OC'}}) = \dfrac{2\pi}{3}$

La droite (L') est la parallèle à (D') passant par C'.

**22**



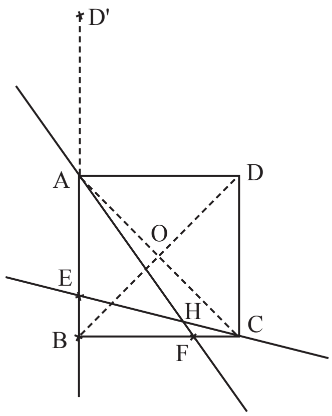

Soit A le point d'intersection de (D) et (L), B est un point de (D) et C un point de (L).
(D') est la droite (A'B') et (L') la droite (A'C') où :
A' est tel que OA' = OA et
$Mes(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}}) = -\dfrac{3\pi}{4}$.
B' est tel que OB' = OB et
$Mes(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'}}) = -\dfrac{3\pi}{4}$.
C' est tel que OC' = OC et
$Mes(\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OC'}}) = -\dfrac{3\pi}{4}$.

**23** 1)

$r$

| | |
|---|---|
| O | O |
| A | B |

L'angle de la rotation est
$Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OB}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.



2) $\overset{r}{\curvearrowright}$

| | |
|---|---|
| O | O |
| A | B |
| E | E' |
| B | C |

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OE}\,;\,\overrightarrow{OE'}}\right) = \frac{\pi}{2}$ (OE) $\perp$ (OE')

E $\in$ [AB) donc E' $\in$ [BC) et AE = BE' par conséquent F = E'.

Car $r$([AB)) = [BC).

3) a. $r$ (D) = A et $r$ (E) = F donc (DE) ⊥ (AF). Dans le triangle DEF, (AF) est la hauteur issue de F. $r$ (E) = F et $r$ (C) = D donc (EC) ⊥ (FD). Dans le triangle DEF, (EC) est la hauteur issue de E. Le point H est donc orthocentre de DEF.

b. Construction de D'. (voir figure)

c. $\overset{r}{\curvearrowright}$

| | |
|---|---|
| A | A |
| B | D |
| D | D' |

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}}\right) = \frac{\pi}{2}$

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AD'}}\right) = \frac{\pi}{2}$ ;

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD'}}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ ,

donc A , B et D' sont alignés. De plus, AD = AD' ; donc B est le milieu de [BD'].

**24** $r$ est la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

$\overset{r}{\curvearrowright}$

| | |
|---|---|
| D | A |
| B | F |
| (DB) | (AF') |

Donc $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{DB}\,;\,\overrightarrow{AF}}\right) = \frac{\pi}{2}$

Par conséquent (DB) $\perp$ (AF).

DB = AF.

**25** $r\left(A\,;-\frac{\pi}{3}\right)$

$\overset{r}{\curvearrowright}$

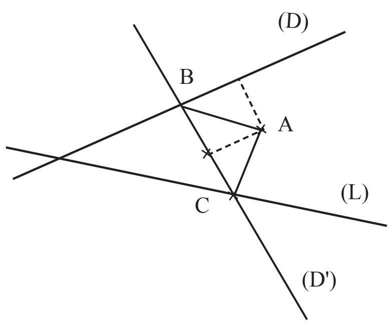
| | |
|---|---|
| E | B |
| D | C |
| (ED) | (BC)' |

Donc mes ED = BC

$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{ED}\,;\,\overrightarrow{BC}}\right) = -\frac{\pi}{3}$

Donc (ED) et (BC) forment un angle de 60°.

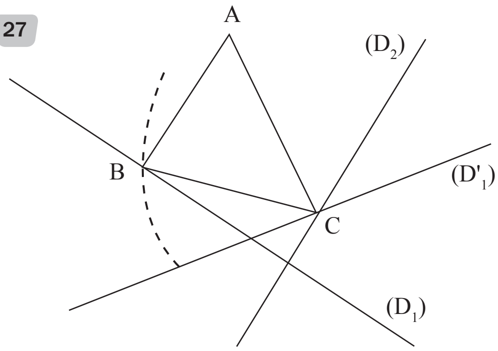
**26**




Programme

- Soit $r = r\left(A\,;-\frac{\pi}{3}\right)$.
- On construit (D') image de (D) par la rotation $r$. (D') coupe (L) en un point C.
- On trace la perpendiculaire à (AC) passant par A. Elle coupe (D) en B.
- ABC est rectangle isocèle en A.

**27**




Programme

- Soit $r\left(A;\frac{\pi}{3}\right)$.
- On construit $(D'_1)$ image de $(D_1)$ par $r$. $(D'_1)$ coupe $(D_2)$ en C.
- On construit B tel que C = $r$ (B). B $\in (D_1)$.

**28** Soit $r\left(A;\frac{\pi}{3}\right)$.

$\overset{r}{\curvearrowright}$

| | |
|---|---|
| A | A |
| M | M' |
| (AM) | (AM') |
| (D) | (D') |

M $\in$ (D) donc M' $\in$ (D').

(D) $\perp$ (D').

M' décrit (D').

Le lieu géométrique du point M' est la droite (D'), image de (D) par $r$.

**29** $r\left(A;\frac{\pi}{3}\right)$.

$\overset{r}{\curvearrowright}$

| | |
|---|---|
| A | A |
| B | C |
| (D) | (D') |

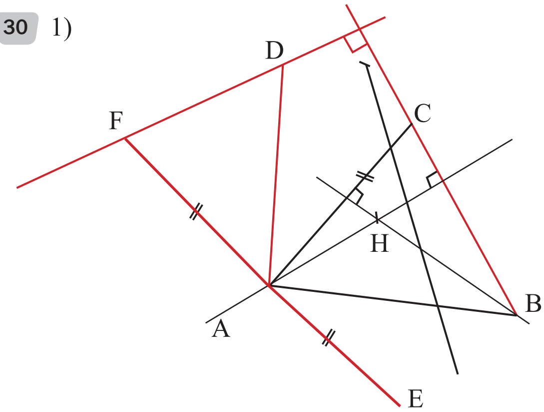
B $\in$ (D) donc C $\in$ (D').

C décrit (D').

Le lieu géométrique du point C est la droite (D'), image de (D) par $r$.

## Exercices d'approfondissement

**30** 1)




2) $r'(C)=E \Leftrightarrow r(E)=C \Leftrightarrow \begin{cases} AE = AC \\ \text{Mes}\,(\widehat{\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AC}}) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

De plus S(E) = F $\Leftrightarrow \begin{cases} AE = AF \\ \text{Mes}\,(\widehat{\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AF}}) = \pi \end{cases}$

On a : AF = AC

et Mes$(\widehat{\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AF}})$ = Mes $(\widehat{\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AC}})$+ Mes $(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AF}})$

$\pi = \dfrac{\pi}{2}$ +mes $(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AF}})$

donc Mes $(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AF}}) = \pi - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$

$\left.\begin{array}{c} AC = AF \\ \text{Mes}\,(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AF}}) = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\}$ donc $r$(C) = F.

$r$(C) = F et $r$(B) = D donc Mes$(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{DF}}) = \dfrac{\pi}{2}$

donc (BC) $\perp$ (DF).

3) (AH) est une hauteur de ABC, donc (AH $\perp$ (BC)

comme (AH) $\perp$ (BC) comme (BC) $\perp$ (DF)

(AH)//(DF).

• Dans le triangle DEF, A est le milieu de [FE] donc la parallèle (AH) à (DF) passant par A coupe le 3ème côté [DE] en son milieu, donc (AH) est la médiane de AED issue de A.

**31** 1) $r = r(A;\dfrac{\pi}{3})$ et $r' = r(C;-\dfrac{\pi}{3})$ , $r'' = r(B;\dfrac{\pi}{3})$

$r$

| | |
|---|---|
| A | A |
| A' | B |
| D | D' |

$r'$

| | |
|---|---|
| C | C |
| B' | B |
| D | C' |

2) A'D' = BD et BD = B'C'. donc A'D' = B'C'.

et Mes$(\widehat{\overrightarrow{A'D'};\overrightarrow{B'C'}})$= Mes$(\widehat{\overrightarrow{A'D'};\overrightarrow{BD}})$+Mes$(\widehat{\overrightarrow{BD};\overrightarrow{B'C'}})$

$= \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3} = 0$ .

Donc (A'D')//(B'C').

3) A'D' = B'C' et (A'D') // (BC') donc A'B'C'D est un parallélogramme.

4)

$r$

| | |
|---|---|
| A' | B |
| D' | D |

$r''$

| | |
|---|---|
| A' | A |
| B' | C |

$\left.\begin{array}{l} \text{donc A'D'} = \text{BD} \\ \text{donc A'B'} = \text{AC} \end{array}\right\}$ A'B' = A'D'

donc A'B'C'D' est un losange.

**32** 1) GD = GB donc G appartient à la médiatrice de [BD].

AD = AB donc A appartient à la médiatrice de [BD].

DC = BC donc C appartient à la médiatrice de [BD].

Donc, A, C et G sont alignés.

2) Soit $r = r_{(B,-\frac{\pi}{3})}$ .

$r$

| | |
|---|---|
| G | D |
| A | E |
| C | F |

comme A,C et G sont alignés

donc E, F et D sont alignés.

3) ABC est isocèle et rectangle en B.

$AC^2 = 2AB^2$ donc $AC = AB\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

or $r$(A) = E et $r$(C) = F donc AC =EF $=3\sqrt{2}$ .

**33** Soit $r = r_{(B,-\frac{\pi}{2})}$ .

$r$

| | |
|---|---|
| O | O |
| D | C |
| P | M |
| C | B |

On a : $r$ ([DC]) = [CB]

$r$ ([OP]) = [OM]

[DC]∩ [OP] = J et [CB]∩ [OM] = I

donc $r$ (J) = I.

$r$ (ODJ) = OCI

donc Aire (ODJ) = Aire (OCI).

Aire (ODC) = Aire (ODJ) + Aire (OJC).

= Aire (OCI) + Aire (OJC)

= Aire (OICJ)

= $\frac{1}{4}$ Aire (ABCD)

Donc Aire (OICJ) = $\frac{1}{4}$ Aire (ABCD).

Comme l'aire du carré ABCD est constante, on déduit que l'aire de OICJ est constante.

**34** 1) $r$ est une rotation de centre O.
$r$(A) = B, d'où O appartient à la médiatrice de [AB].
$r$(C) = D d'où O appartient à la médiatrice de [CD].
Les deux médiatrices se coupent en O.

2)

$\overset{r}{\curvearrowright}$

| | |
|---|---|
| A | B |
| C | D |
| (AC) | (BD) |

Donc $r$(AC) = (BD).

3) $r$(AC) = (BD) et E ∈ (AC) donc E' ∈ (BD).
(OE) ⊥ (AC) donc (OE') ⊥ (BD) d'où E' = F.

4) d (O ; (AC)) = OE et d (O ; (BD)) = OF. Or
$r$(O) = O et $r$(E) = F, donc OE = OF.
Par conséquent, O appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{EIF}$.

5) • On a $r$(A) = B.
Soit α = $\left|\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)\right|$, alors α = mes $\widehat{AOB}$

• On a mes $\widehat{AIF}$ = mes$\widehat{CID}$, car C ∈ [AI] et D ∈ [IF].
Or $r$(AC) = (BD) et {I} = (AC) ∩ (BD), donc mes $\widehat{CID}$ = α.
Par conséquent mes $\widehat{AIF}$ = α.
Conclusion mes $\widehat{AIF}$ = mes $\widehat{AOB}$.

$$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right) = \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BD}}\right)$$
$$= \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AI};\overrightarrow{IF}}\right)$$

mes( $\widehat{AOB}$ )= $\pi$ − mes $\widehat{AIF}$.

mes( $\widehat{AOB}$ ) + mes $\widehat{AIF}$ = $\pi$.

Ils sont supplémentaires.

**35**

$\overset{r}{\curvearrowright}$

| | |
|---|---|
| A | B |
| B | C |
| C | A |
| (AB) | (BC) |
| (BC) | (CA) |
| P | P' |
| M | M' |
| N | N' |

Soit O, le centre du cercle circonscrit à ABC.
Soit $r = r_{\left(O,\frac{2\pi}{3}\right)}$.

P ∈ [AB] donc P' ∈ [BC].
AP = BP' donc P' = M.
M ∈ [BC] donc M' ∈ [AC].
BM = CM' donc M' = N.
N ∈ [AC], donc N' ∈ [BA].
CN = AN', donc N' = P.

$\overset{r}{\curvearrowright}$

| | |
|---|---|
| P | M |
| M | N |
| N | P |

On a donc :

PM = MN
MN = NP
Donc PM = MN = NP.
Le triangle MNP est équilatéral.

**36** Soit $r = r_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}$.

$\overset{r}{\curvearrowright}$

| | |
|---|---|
| A | A' |
| B | B' |
| C | C' |

Comme A, B et C sont alignés alors A', B' et C' sont aussi alignés.

**37** 1) $\widehat{AMC}$ et $\widehat{ABC}$ sont deux angles inscrits dans le cercle (C). Ils interceptent l'arc $\overset{\frown}{AC}$ donc mes $\widehat{AMC}$ = mes $\widehat{ABC}$. Comme le triangle ABC est équilatéral alors mes $\widehat{ABC}$ = 60°.
Le triangle MAI est isocèle en M car MI = MA. De plus mes $\widehat{AMC}$ = 60°, donc le triangle MAI est équilatéral.

2) $r = r_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}$.

$\overset{r}{\curvearrowright}$

| | |
|---|---|
| A | A |
| M | I |
| B | C |
| [MB] | [IC] |

Donc MB = IC.

3) MA + MB = MI + IC
car MA = MI et MB = IC.
Or I ∈ [MC] donc MA+MB = MC.

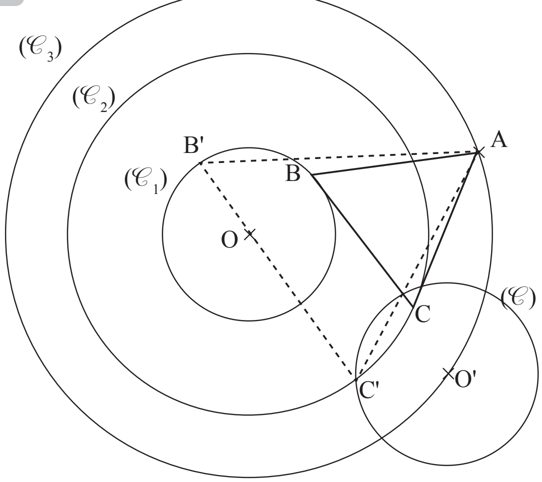
**38** Soit $r = r_{(O,\frac{\pi}{6})}$.

$r$

| | |
|---|---|
| O | O |
| A | B |
| C | D |

Donc AC = BD.

**39**




Choisir un point A arbitrairement sur ($\mathscr{C}_3$). Construire l'image ($\mathscr{C}$') de ($\mathscr{C}_1$) par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

($\mathscr{C}_1$) coupe ($\mathscr{C}_2$) en deux points C et C'.

Construire les points B et B' images respectives de C et C' par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

On obtient ainsi deux triangles équilatéraux ABC et AB'C'.

**40** Soit $r = r_{(A,\frac{\pi}{2})}$. On a $r$(B) = C

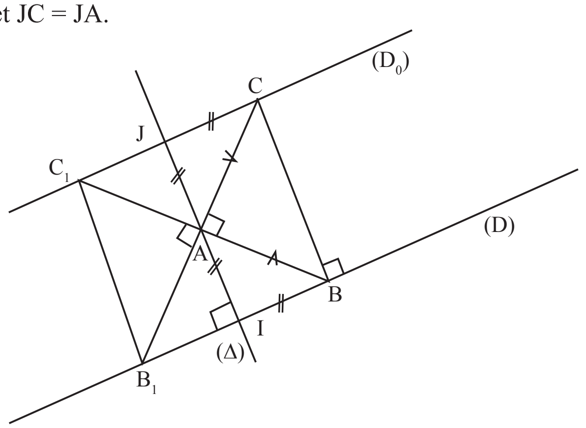
Soit (Δ) le perpendiculaire à (D) passant par A.

Soit {I} = (Δ) ∩ (D) et {J} = (Δ) ∩ ($D_0$).

On a $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Aussi (BC) ⊥ (D) et (Δ) ⊥ (D), d'où (BC)//(Δ).

Il suffit de prendre B sur D et C sur ($D_0$) tels que IB = IA et JC = JA.




**41** Soit P un point de [BC] et $r = r_{(P,\frac{\pi}{3})}$. On a :

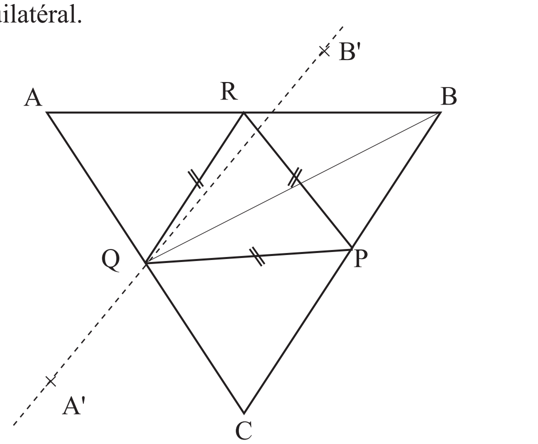
$r$

| | |
|---|---|
| P | P |
| A | A' |
| B | B' |

On note Q le point d'intersection de (A'B') et de [AC].

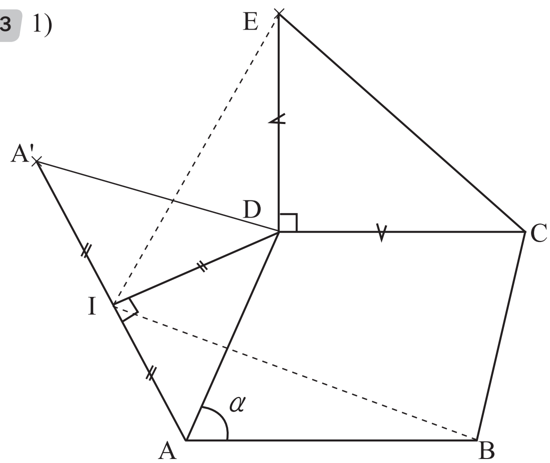
Soit r' la rotation de centre P et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

On a $r'$(P) = P, et $r'$(Q) = R. Ainsi, R ∈ [AB], PQ = PR et $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{PR};\overrightarrow{PQ}}\right) = \frac{\pi}{3}$. Donc le triangle PQR est équilatéral.




**42** ABC étant un triangle équilatéral de sens direct, on a : C = $r$(B) où $r = r_{(A,\frac{\pi}{3})}$. Lorsque B décrit ($\mathscr{C}$), le point C décrit l'image de ($\mathscr{C}$) par $r$, qui est le cercle de même rayon que ($\mathscr{C}$) et ayant pour centre l'image du centre de ($\mathscr{C}$) par $r$.

**43** 1)




2) a) IA = ID et $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{IA};\overrightarrow{ID}}\right) = \frac{\pi}{2}$. Donc $r$(A) = D

b) $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{DE};\overrightarrow{DA'}}\right) + \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{DA'};\overrightarrow{DI}}\right) + \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{DI};\overrightarrow{DA}}\right) + \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}}\right) + \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE}}\right) = 2\pi$ .

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{DE};\overrightarrow{DA'}}\right) + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \pi - \alpha + \frac{\pi}{2} = 2\pi$

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}}\right) = \alpha$ où $\alpha = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}})$.

Comme les rotations concernent les angles et que $Mes(\widehat{\overrightarrow{DE};\overrightarrow{DA'}}) = Mes(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}})$, alors R(B) appartient à (DE). Aussi AB = DC et DC = DE, donc AB = DE.

On conclut que $r$(B) = E.

3) a) $A' = S_I(A) \Rightarrow IA' = IA$. Or IA = ID ; donc IA' = ID.

• $A' = S_I(A) \Rightarrow Mes(\widehat{\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IA'}}) = \pi$.

On a $Mes(\widehat{\overrightarrow{IA};\overrightarrow{ID}}) + Mes(\widehat{\overrightarrow{ID};\overrightarrow{IA'}}) = Mes(\widehat{\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IA'}})$

D'où $\frac{\pi}{2} + Mes(\widehat{\overrightarrow{ID};\overrightarrow{IA'}}) = \pi$

$Mes(\widehat{\overrightarrow{ID};\overrightarrow{IA'}}) = \frac{\pi}{2}$

***Conclusion***

IA'=ID et $Mes(\widehat{\overrightarrow{ID};\overrightarrow{IA'}}) = \frac{\pi}{2}$, donc $r$(D) = A'.

b) $r$

| | |
|---|---|
| I | I |
| A | D |
| D | A' |
| B | E |

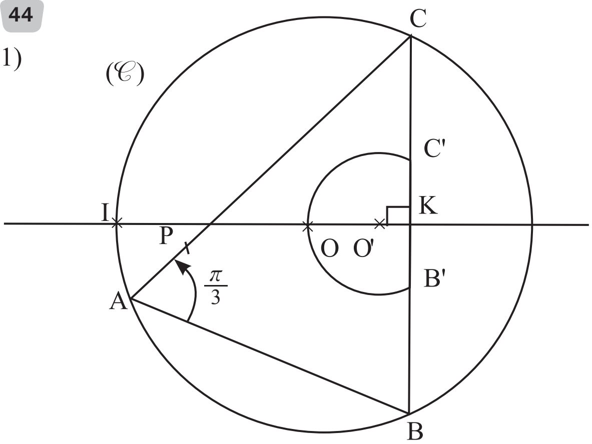
Donc A'E = DB et

$Mes(\widehat{\overrightarrow{BD};\overrightarrow{A'E}}) = \frac{\pi}{2}$.

Comme $Mes(\widehat{\overrightarrow{BD};\overrightarrow{A'E}}) = \frac{\pi}{2}$, on conclut que les droites (A'E) et (BD) sont perpendiculaires.

**44**

1)




2) a. On a $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{3}$. Donc A ∈ (E).

b. IB = IC $\Rightarrow$ I ∈ (Δ) où (Δ) est la médiatrice de [BC].

$Mes(\widehat{\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}}) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow I \in (E)$.

Donc I est le point de (𝒞) tel que $Mes(\widehat{\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}}) = \frac{\pi}{3}$.

3) a. D'une part CP = AB ; d'autre part $\overrightarrow{CD} \neq \overrightarrow{AB}$ car ABC est un triangle et P ∈ [BC]. Donc il existe une rotation $r$ telle que $r$(A) = P et $r$(B) = C.

b) L'angle de $r$ est $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{PC}}) = \frac{\pi}{3}$.

Le centre de r est I, car IB = IC et $Mes(\widehat{\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}}) = \frac{\pi}{3}$.

4) • Nature du triangle IAP

$r(A)=P \Rightarrow IA=IP$ et $Mes(\widehat{\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IP}}) = \frac{\pi}{3}$.

Donc IAP est un triangle équilatéral.

• Déduction

$P \in [AC] \Rightarrow AC = AP + PC$

Or AP = AI et PC = AB.

Donc AC = AI + AB.

5) Soit H le milieu [BC]. Pour tout point M de (E), le centre de gravité G du triangle MBC est tel que $\overrightarrow{HG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HM}$. Donc G = $h$(M) où $h = h_{(H, \frac{1}{3})}$.

Lorsque M décrit (E), G décrit l'image de (E) par $h$.

***Construction :***

L'ensemble décrit par G est un arc de cercle de centre O' = $h$(O) et de rayon O'B' où B' = $h$(B), privé de B' et C' = $h$ (C).

## Situation d'évaluation

**45** La roue de ce manège comporte 8 rayons ; donc l'angle formé par deux rayons consécutifs est $\theta = \frac{2\pi}{8}$.

Entre le rayon $OS_E$ et le rayon $OS_O$, il y a 5 subdivisions. L'angle de rotation du manège est donc $2\alpha = 5 \times \frac{2\pi}{8}$, on en déduit que $\alpha = \frac{5\pi}{8}$.

L'angle à introduire dans l'ordinateur est $\alpha = 112{,}5°$.

**46** Il s'agit de construire un triangle équilatéral inscrit dans un triangle rectangle.

***Programme***

• Choisir un point T sur [AH].

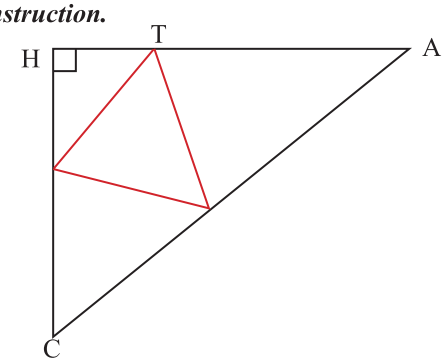
• Construire l'image (A'C') de (AC) par la rotation de centre T et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

• (A'C') coupe [HC] en S.

Construire l'image (H'C') de (HC) par la rotation de centre T est d'angle $-\frac{\pi}{3}$. (H'C') coupe [AC] en M.

MTS est équilatéral.

***Construction.***



Mise en page : Vallesse Éditions
Tel : 22410821/01916125
Maquette couverture : I Graph
Achevé d'imprimer en Côte d'Ivoire
1er trimestre 2020
Dépôt légal : N° 15406