2024

Corrigé du manuel de Tle D

Le livre du professeur

Vallesse Edition

01/01/2024

Leçon 1

Limites et continuité d'une fonction

Situation d'Apprentissage

Faire deux lectures de la situation d'apprentissage par deux apprenants.
Recenser et expliquer les données pertinentes.
Poser les questions suivantes :

Question/Consignes pour dérouler la situation	Réponse attendue
A quelle occasion les élèves découvrent la courbe	A l'occasion d'une visite dans une entreprise
Que remarque les élèves selon le textes	La courbe est différente de celles qu'ils ont l'habitude de voir. (La partie en rouge est séparée de la partie en noir.)
Que font alors les élèves	. Ils sollicitent le professeur de mathématique pour comprendre le tracé de la courbe.
On pourrait ajouter à l'énoncé des tâches : Les élèves décident d'étudier la notion de continuité Qu'est ce que les élèves décident de faire	Les élèves décident d'étudier la notion de continuité

La notion de continuité est liée à la notion de limite que vous avez étudiée l'année dernière. C'est pourquoi cette leçon se déroulera selon le plan suivant.

1) Calcul des limites à partir des limites de référence
2) Limite d'une composé de deux fonctions
3) Techniques de calcul de limite
4) Prolongement par continuité
5) Interprétation graphique de limites
6) Continuité d'une fonction sur un intervalle
7) Fonction continue et strictement monotone sur un intervalle
8) Techniques d'encadrement des zéros d'une fonction
9) Puissance d'exposants rationnels

Installation des habiletés

Activité 1 **Calcul de limites à partir des limites de références**

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3}{x} = 0$.

2. a) Modifier le tableau de cette question comme suit.

x	9	100	10000	10^{20}	10^{30}	10^{40}	10^{50}
$\sqrt{x}$	3	10	100	10^{10}	10^{15}	10^{20}	10^{25}

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

3. Pour les questions a) et b) calculer la limite à gauche.

a) $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\<}} \frac{1}{x+2} = -\infty$

b) $\frac{2x-5}{x+2} = (2x-5)\left(\frac{1}{x+2}\right)$. $\lim\limits_{x\to-2} 2x-5 = -9$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\<}} \frac{1}{x+2} = -\infty$.

On en déduit que : $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\<}} \frac{2x-5}{x+2} = +\infty$.

4. a) Pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = \cos x$. Donc $f'(0) = \cos 0 = 1$.

b) $f'(0) = \lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x - \sin 0}{x-0} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

5. a) Pour tout $x \in \mathbb{R}, g'(x) = -\sin x$. Donc $g'(0) = -\sin 0 = 0$.

b) $g'(0) = \lim\limits_{x\to0} \frac{\cos x - \cos 0}{x-0} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$.

6. $\frac{\cos x - 1}{\sin x} = \frac{\cos x - 1}{x} \times \frac{x}{\sin x}$.

$\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to0} \frac{x}{\sin x} = 1$ et comme $\lim\limits_{x\to0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$, on en déduit que : $\lim\limits_{x\to0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = 0$.

Exercices de fixation

Exercice 1

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.

Exercice 2

prendre : d) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} \frac{-2}{x-1} = +\infty$

a)Vrai ; b) Faux ; c) Faux d) Vrai

Exercice 2

Rectifier l'énoncé comme suit.

Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\<}} \frac{2x-5}{x-2}$; b) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\>}} \frac{2x-5}{x-2}$; c) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} \frac{1}{x^2-3x+2} - \frac{1}{x-1}$

a) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\<}} \frac{2x-5}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to2\\<}} (2x-5)\left(\frac{1}{x-2}\right) = (-1) \times (-\infty) = +\infty$.

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ >}} \frac{2x-5}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ >}} (2x-5)\left(\frac{1}{x-2}\right) = (-1) \times (+\infty) = -\infty$.

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ <}} \frac{1}{x^2-3x+2} - \frac{1}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ <}} \left(\frac{1}{x-1}\right)\left(\frac{1}{x-2} - 1\right) = (-\infty) \times (-2) = +\infty.$

Activité 2 **Limite d'une composée de deux fonctions**

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} v(x) = -\infty$

2. a) $f(x) = -8x^3 + 12x^2 - 6x + 1$

   b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

3. a) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = v \circ u(x)$

   b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} v(x)$

Exercices de fixation

Exercice 1

1. a) 2. b) 3. c)

Exercice 2

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2+1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{2x^2+1}{x}} = +\infty.$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 1.$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} \times \frac{5x}{x}.$

   On a : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{5x}{x} = 5$; $\lim\limits_{x\to 0} 5x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1.$

   On en déduit que : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} = 5.$

Exercice 3

1. a) 2. c) 3. b)

Exercice 4

1. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2 - 2x + 5) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

   b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 5} = +\infty$

2. a) $\lim\limits_{x\to 0} (5x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

   b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1$

3. a) $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ <}} \frac{1}{x-2} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^7 = -\infty$

   b) $\lim\limits_{x\to 2} (\frac{1}{x-2})^7 = -\infty$

Activité 3 Techniques de calcul de limites

3.1 Utilisation d'une expression conjuguée

1. a) Pour tout x élément de]0 ; +∞[,

$$\sqrt{x^2+3}-x=\frac{(\sqrt{x^2+3}-x)(\sqrt{x^2+3}+x)}{\sqrt{x^2+3}+x}=\frac{x^2+3-x^2}{\sqrt{x^2+3}+x}=\frac{3}{\sqrt{x^2+3}+x}.$$

b) Calcule : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3}+x=+\infty$

c) Déduis-en $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3}-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{x^2+3}+x}=0$

2. a) Pour tout x élément de]-∞ ; 0[,

$$\sqrt{x^2+2x+3}+x=\frac{(\sqrt{x^2+2x+3}+x)(\sqrt{x^2+2x+3}-x)}{\sqrt{x^2+2x+3}-x}=$$

$$\frac{x^2+2x+3-x^2}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}=\frac{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}=\frac{-2-\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}.$$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1=2$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x+3}+x=\frac{-2-\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}=\frac{-2}{2}=-1.$

Exercices de fixation

Exercice 1

a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\sqrt{x+11}-3}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2}\frac{(\sqrt{x+11}-3)(\sqrt{x+11}+3)}{(x+2)(\sqrt{x+11}+3)}=\lim\limits_{x\to-2}\frac{1}{\sqrt{x+11}+3}=\frac{1}{6}$

Exercice 2

$\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1+cosx}{sinx}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{(1+cosx)(1-cosx)}{(sinx)(1-cosx)}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{1-cosx}=0$

Exercice 3

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}+x=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=0$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x}+x+1=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x}+x+1)(\sqrt{x^2+2x}-x-1)}{\sqrt{x^2+2x}-x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2+2x}-x-1}=0$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}+x)(\sqrt{x^2+x}-x)}{x(\sqrt{x^2+x}-x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x}-x}=0$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+3}+x=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x+3}+x)(\sqrt{x^2+x+3}-x)}{\sqrt{x^2+x+3}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1-\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}=-\frac{1}{2}.$

Exercice 4

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x}-x+1=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-x+1)(\sqrt{x^2+2x}+x-1)}{\sqrt{x^2+2x}+x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1-\frac{1}{x}}=2$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}-x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{x(\sqrt{x^2+x}+x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x}+x}=0$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+3}+x=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x+3}+x)(\sqrt{x^2+x+3}-x)}{\sqrt{x^2+x+3}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{1+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}=-\frac{1}{2}$

3.2 Utilisation d'un nombre dérivé

On considère la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x+2}$

1) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

2) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$.

$\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=f'(2)=\frac{1}{4}$ et $\lim\limits_{x\to7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}=f'(7)=\frac{1}{6}$.

Exercices de fixation

Exercice 1

Calcule les limites suivantes :

Posons : $f(x)=\sqrt{x+3}$; $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+3}}$. On a : $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=f'(1)=\frac{1}{4}$

Posons : $f(x)=\sqrt{2x+1}$; $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$. On a : $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}=f'(4)=\frac{1}{3}$

Exercice 2

a) Posons : $f(x)=\sqrt{x+1}$; $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$. On a : $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=f'(0)=\frac{1}{2}$

b) Posons : $f(x)=\sin x$; $f'(x)=\cos x$. On a : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{x-\frac{\pi}{2}}=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

c) Posons : $f(x)=\tan x$; $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$. On a : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$

d) $\frac{2\cos x-\sqrt{3}}{6x-\pi}=\frac{2}{6}\times\frac{\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}}{x-\frac{\pi}{6}}$.

Posons : $f(x)=\cos x$; $f'(x)=-\sin x$. On a : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}}{x-\frac{\pi}{6}}=f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$

Donc $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos x-\sqrt{3}}{6x-\pi}=\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{6}$.

3.3 Utilisation des propriétés de comparaison

Prendre : $h(x)=x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

1.a) $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin x \leq 1$, on a : $2x - 1 \leq f(x) \leq 2x + 1$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 2x - 1$.
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x - 1 = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. a) $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos x \leq 1$, On a : $3x - 2 \leq g(x) \leq 3x + 2$
Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \leq 3x + 2$.
b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 3x + 2 = -\infty$. Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$.

3. a) $\forall x \in \mathbb{R}^*, -1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, -x^2 \leq h(x) \leq x^2$.
b) $\lim\limits_{x \to 0}(-x^2) = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$. Donc $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0$

Exercices de fixation

Exercice 1

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$. On en déduit que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 0$

Exercice 2

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4}{x} = 0$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$
1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{x} = 0$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - \frac{2}{3} = 0$.
On en déduis que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{2}{3}$.

Exercice 3

- Pour $x > 0, -1 \leq \cos x \leq 1$. Donc pour $x > 0$, $0 \leq \frac{1+\cos x}{\sqrt{x}} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$.

  $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, on en déduit que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1+\cos x}{\sqrt{x}} = 0$.

- Pour $x < 0, -1 \leq \sin x \leq 1$. Donc pour $x < 0$, $\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x \sin x}{x^2+1} \leq \frac{-x}{x^2+1}$.

  $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-x}{x^2+1} = 0$, on en déduit que : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x \sin x}{x^2+1} = 0$.

Activité 4 — Prolongement par continuité

1. L'ensemble de définition de f est : $\mathbb{R} / \{3\}$.
2. L'énoncé correct est : Calcule puis compare $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x)$

2. $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} x - 2 = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} x^2 - 8 = 1$.
Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x)$.

3.

4. f n'est pas continue en 3 car f est pas définie en 3.

5. $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x) = 1$, donc $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 1$

On a : $\lim\limits_{x \to 3} g(x) = \lim\limits_{x \to 3} f(x) = 1 = g(3)$. g est continue en 3.

Exercices de fixation

Exercice 1

Pour tout $x \in]-1;1[\cup]1;+\infty[$, $f(x) = \frac{-1}{x+1}$. On a : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{-1}{x+1} = -\frac{1}{2}$.

On peut prolonger f par continuité en 1.

La fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = f(x) \; si \; x \in]-1;1[\cup]1;+\infty[\\ g(1) = -\frac{1}{2}. \end{cases}$ est le prolongement par continuité de f en 1.

Exercice 2

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} / \{3\}$.

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} x + 4 = 7$. On peut donc prolonger f par continuité en 3.

La fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = x + 4 \; si \; x \neq 3 \\ g(3) = 7. \end{cases}$ est le prolongement par continuité de f en 3.

Exercice 3

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $0 \leq \left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq 1$. On en déduit que : $|f(x)| \leq |\sin x|$

2. $\lim\limits_{x \to 0} |\sin x| = 0$. On a : $\lim\limits_{x \to 0} |f(x)| = 0$. On conclut que : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

f n'est pas définie en 0 et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ donc f est prolongeable par continuité en 0.

Activité 5 **Interprétation graphique de limites**

1. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $a(x) = \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x + 4 + \frac{3}{x} = +\infty$

c) La droite (OJ)

2. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $a(x) = \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$

c) La droite (OI)

Exercices de fixation

Exercice 1

1. vrai 2. faux 3. faux 4. Faux

Exercice 2

1. Lorsqu'on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, on dit que la courbe (C_f) admet en $-\infty$ une **branche parabolique** de direction (OI)

2. Lorsqu'on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, on dit que la courbe (C_f) admet en $+\infty$ une **branche parabolique** de direction (OJ)

Exercice 3

1. a) faux b) vrai c) faux

2. a) vrai b) faux

Activité 6 **Continuité d'une fonction sur un intervalle**

6.1. Opérations sur les fonctions continues

1. a) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) + g(x)\right) = f(x_0) + g(x_0)$ $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \times g(x)\right) = f(x_0) \times g(x_0)$

b) justifie que $f + g$ et fg sont continues en x_0.

2. a) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$

b) Justifie que $\frac{f}{g}$ est continue en x_0.

Exercices de fixation

Exercice 1

1. vrai 2. faux 3. vrai 4. Vrai

Exercice 2

1. vrai 2. faux 3. Faux 4. Faux

Exercice 3

Soient f et g deux fonctions **continues** sur un intervalle I. Si g ne **s'annule pas** sur I alors $\frac{f}{g}$ est **continue** sur I.

Les fonctions $\boldsymbol{f+g}$ et $\boldsymbol{fg}$ sont **continues** sur I.

6.2. Composée de deux fonctions continues sur un intervalle

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, $\lim_{x \to f(x_0)} g(x) = g(f(x_0))$ et $\lim_{x \to x_0} g \circ f(x) = g(f(x_0))$
2. Justifie que $g \circ f$ est continue en x_0

Exercices de fixation

Exercice 1

1. vrai 2. faux 3. faux

Exercice 2

Si f est une fonction **continue** sur un intervalle K telle que $\boldsymbol{f(K)} \subset$ **K'** et g est une fonction **continue** sur K' alors $\boldsymbol{g \circ f}$ est **continue** sur **K.**

6.3. Image d'un intervalle par une fonction continue

1. $f([-6;4]) = [-1;35]$, $f([-6;4[) = [-1;35]$, $f(]-6;4[) = [-1;35[$,
$f([-6;0]) = [-1;35]$, $f([0;4]) = [-1;15]$ et $f(]-6;4]) = [-1;35[$.
2. $f([0;4]) = [-1;15]$, $f(]-6;0[) =]-1;35[$, $f([-6;0]) = [-1;35]$
3. a) $f([-6;4]) \subset [-1;35]$
   b) Soit $y \in [-1;35]$.

$f(x) = y \Longrightarrow x^2 = y + 1$

$\Longrightarrow x = -\sqrt{y+1}$ ou $x = \sqrt{y+1}$

$x \in [-6;4]$. Donc y admet un antécédent x par f dans $[-6;4]$.

   c) $f([-6;4]) = [-1;35]$.

Exercices de fixation

Exercice 1

1. faux 2. vrai 3. vrai 4. faux

Exercice 2

$f([-1;3]) = [-3;5]$

$f(]1;5[) =]1;9[$

Exercice 3

1. c 2. c 3. a 4. C

6.4. Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

L'image par f de $[a,b]$ est $[1{,}3;6]$.

L'image par f de $[a,b]$ est $[0{,}9;8]$.

Exercice 1

K	$f(K)$	
	f est strictement croissante sur K	f est strictement décroissante sur K
$[a,b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$

$]a,b[$	$\left]\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} f(x), \lim\limits_{\substack{x\to b\\ <}} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{\substack{x\to b\\ <}} f(x), \lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} f(x)\right[$
$[a,b[$	$\left[f(a), \lim\limits_{\substack{x\to b\\ <}} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{\substack{x\to b\\ <}} f(x), f(a)\right]$
$]a,b]$	$\left]\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} f(x), f(b)\right]$	$\left[f(b), \lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} f(x)\right[$

Exercice 2
1. faux 2. vrai 3. vrai 4. faux

Exercice 3
1. vrai 2. faux 3. faux 4. vrai

6.5. Théorème des valeurs intermédiaires

1. y_0 est un nombre compris entre $f(a)$ et $f(b)$, donc $y_0 \in K'$.
2. y_0 a au moins un antécédent compris entre a et b par f car $y_0 \in K'$.

Exercice 1
Soit f une fonction continue sur un intervalle K, a et b deux éléments de K.
Tout nombre réel y compris entre $\boldsymbol{f(a)}$ et $\boldsymbol{f(b)}$ admet **au moins** un antécédent par f compris entre $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$.

Exercice 2
Soit f une fonction continue sur un intervalle K, a et b deux éléments de K.
1. faux 2. vrai 3. Faux

Activité 7 Fonctions continues et strictement monotones sur un intervalle

7.1. Bijection

1) (C_f) est la représentation graphique d’une fonction f continue et strictement croissante sur un intervalle K dans un repère orthonormé.
Soit $y \in f(K)$

a) y a un antécédent par f

b) Chaque élément de $f(K)$ admet un unique antécédent dans K. D’où f réalise une bijection de K sur $f(K)$.

c) Construction de la représentation graphique de la bijection réciproque f^{-1}.

d) f^{-1} continue sur $f(K)$?

e) f^{-1} est croissante sur $f(K)$.

f) Comme $y \in f(K)$, l’équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans K.

2) (C_f) est la représentation graphique d’une fonction f continue et strictement décroissante sur un intervalle K dans un repère orthonormé.
Soit $y \in f(K)$

a) y a un antécédent par f

b) Chaque élément de $f(K)$ admet un unique antécédent dans K. D'où f réalise une bijection de K sur $f(K)$.

c) Construction de la représentation graphique de la bijection réciproque f^{-1}.

d) f^{-1} continue sur $f(K)$?

e) f^{-1} est décroissante sur $f(K)$.

f) Comme $y \in f(K)$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans K.

Exercices de fixation

Exercice 1

Soit f est une fonction **continue** et **strictement** monotone sur un intervalle K alors f réalise une **bijection** de $\boldsymbol{K}$ sur $\boldsymbol{f(K)}$.
la bijection réciproque f^{-1} est **continue** et **strictement** monotone sur K et a le même **sens de variation** que f.

Exercice 2

Soit f est une fonction **continue** et **strictement** monotone sur un intervalle K alors pour tout réel $m \in f(K)$, l'équation $f(x) = m$ admet une **unique** solution dans K.

Exercice 3

1. faux 2. Vrai 3. Faux

7.2. Solution de l'équation $f(x) = 0$.

1. Soit f une fonction continue et strictement croissante sur l'intervalle $[a, b](a < b)$.

a) $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$.

b) f une fonction continue et strictement croissante sur l'intervalle $[a, b]$. Comme $f(a) \times f(b) < 0$ alors $0 \in f([a, b])$. Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]a, b[$.

2) Soit f une fonction continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[a, b](a < b)$.

a) $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$.

b) f une fonction continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[a, b]$. Comme $f(a) \times f(b) < 0$ alors $0 \in f([a, b])$. Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]a, b[$.

Exercices de fixation

Exercice 1

Soit f est une fonction **continue** et **strictement** monotone sur un intervalle $[a, b]$.
Si $\boldsymbol{f(a)} \times \boldsymbol{f(b)} < 0$ alors l'équation $\boldsymbol{f(x) = 0}$ admet une **unique** solution dans $]a, b[$.

Exercice 2

1. faux 2. Vrai 3. faux 4. vrai

Exercice 3

1. faux 2. Vrai 3. Vrai

Activité 8 Techniques d'encadrement des zéros d'une fonction

8.1. Méthode de balayage

1. a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $[1{,}4; 1{,}5]$.
Or $f(1{,}4) \times f(1{,}5) < 0$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]1{,}4; 1{,}5[$.
b) L'amplitude de l'intervalle $]1{,}4; 1{,}5[$ est 0,1.
2. a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $[1{,}41; 1{,}42]$.
Or $f(1{,}41) \times f(1{,}42) < 0$, donc $\alpha \in]1{,}41; 1{,}42[$.
b) L'amplitude de l'intervalle $]1{,}41; 1{,}42[$ est 0,01.
3) Tableau de signe de la fonction f sur $[1{,}41; 1{,}42]$

x	1,410	1,411	1,412	1,413	1,414	1,415	1,416	1,417	1,418	1,419	1,420
Signe de $f(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $[1{,}414; 1{,}415]$.
Or $f(1{,}414) \times f(1{,}415) < 0$, donc $\alpha \in]1{,}414; 1{,}415[$.
b) L'amplitude de l'intervalle $]1{,}414; 1{,}415[$ est 0,001.

Exercices de fixation

Exercice 1

1. Pour tout $x \in [-4; 4]$, $f(x) = x^3 - 6x + 1$. $f(x) = 3(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$
f est continue et strictement décroissante sur $[0; 1]$.
$f(0) = 1$ et $(1) = -4$. On a : $f(0) \times f(1) < 0$. Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[0; 1]$.

2. Tableau de signe

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
Signe de $f(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

$f(0{,}1) \times f(0{,}2) < 0$. Donc $\alpha \in]0{,}1; 0{,}2[$

Exercice 2

1. Pour tout $x \in [-4; 4]$, $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$. $f(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 1)$
f est continue et strictement croissante sur $[-2; -1]$.
$f(-2) = -1$ et $(-1) = 2$. On a : $f(-2) \times f(-1) < 0$. Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[-2; -1]$.

2. Tableau de signe

x	-2	$-1{,}9$	$-1{,}8$	$-1{,}7$	$-1{,}6$	$-1{,}5$	$-1{,}4$	$-1{,}3$	$-1{,}2$	$-1{,}1$	-1
Signe de $f(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

$f(-1{,}9) \times f(-1{,}8) < 0$. Donc $\alpha \in]-1{,}9; -1{,}8[$.

8.2. Méthode de dichotomie

Soit f une fonction continue et strictement croissante sur $[1; 2]$.
1. a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $[1; 1,5]$.
Or $f(1) \times f(1,5) < 0$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]1; 1,5[$.
   b) L'amplitude de l'intervalle $]1; 1,5[$ est 0,5 et 0,5>0,1.
2. a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $[1,25; 1,5]$.
Or $f(1,25) \times f(1,5) < 0$, donc $\alpha \in\ ]1,25; 1,5[$.
   b) L'amplitude de l'intervalle $]1,25; 1,5[$ est 0,25 et 0,25>0,1.
3. a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $[1,375; 1,5]$.
Or $f(1,375) \times f(1,5) < 0$, donc $\alpha \in\ ]1,375; 1,5[$.
   b) L'amplitude de l'intervalle $]1,375; 1,5[$ est 0,125 et 0,125>0,1.
4. a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $[1,375; 1,4375]$.
Or $f(1,375) \times f(1,4375) < 0$, donc $\alpha \in\ ]1,375; 1,4375[$.
   b) L'amplitude de l'intervalle $]1,375; 1,4375[$ est 0,0625 et 0,0625<0,1.

<u>Exercice 1</u>

1. Pour tout $x \in [-4; 4]$, $f(x) = x^3 - 6x + 1$. $f(x) = 3(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$
f est continue et strictement décroissante sur $[0; 1]$.
$f(0) = 1$ et $(1) = -4$. On a : $f(0) \times f(1) < 0$. Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[0; 1]$.
2.
- $f\left(\frac{0+1}{2}\right) = f(0,5) = -1,875$. Donc $0 < \alpha < 0,5$
- $f\left(\frac{0+0,5}{2}\right) = f(0,25) \approx -0,484$. Donc $0 < \alpha < 0,25$
- $f\left(\frac{0+0,25}{2}\right) = f(0,125) \approx -0,498$. Donc $0 < \alpha < 0,125$
- $f\left(\frac{0+0,125}{2}\right) = f(0,0625) \approx 0,625$. Donc $0,0625 < \alpha < 0,125$

<u>Exercice 2</u>

1. Pour tout $x \in [-4; 4]$, $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$. $f(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 1)$
f est continue et strictement croissante sur $[-2; -1]$.
$f(-2) = -1$ et $(-1) = 2$. On a : $f(-2) \times f(-1) < 0$. Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[-2; -1]$.
2.
- $f\left(\frac{-2-1}{2}\right) = f(-1,5) = 1,375$. Donc $-2 < \alpha < -1,5$.
- $f\left(\frac{-2-1,5}{2}\right) = f(-1,75) \approx 0,453$. Donc $-2 < \alpha < -1,75$.
- $f\left(\frac{-2-1,75}{2}\right) = f(-1,875) \approx -0,201$. Donc $-1,875 < \alpha < -1,75$.

Activité 9 **Puissances d'exposants rationnels**

9.1. Fonction racine n$^{\text{ième}}$

φ_n est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$. Donc φ_n est une bijection de $[0,+\infty[$ sur $\varphi_n([0,+\infty[) = [0,+\infty[$.

Exercices de fixation

Exercice 1

1. La bijection réciproque de la fonction φ_3 est la fonction $\varphi_{\frac{1}{3}}$ définie sur $[0,+\infty[$ par :

$\varphi_{\frac{1}{3}}(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$.

2. La bijection réciproque de la fonction φ_5 est la fonction $\varphi_{\frac{1}{5}}$ définie sur $[0,+\infty[$ par :

$\varphi_{\frac{1}{5}}(x) = \sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}}$.

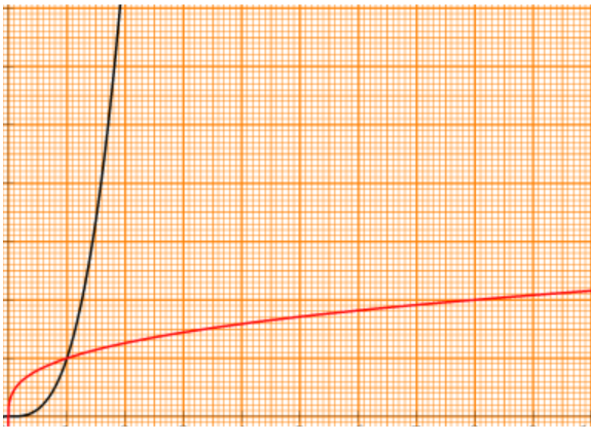
Exercice 2

$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2^{\frac{3}{3}} = 2$.

$\sqrt[4]{81} = \sqrt[3]{3^4} = 3^{\frac{4}{4}} = 3$.

$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{3}} = \frac{2}{3}$.

Exercice 3



9.2. Puissances d'exposant rationnel

Soient f et g deux fonctions définies sur $]0;+\infty[$ respectivement par $f(x) = \sqrt[q]{x}$ et $g(x) = x^p$, où p est un entier relatif et q un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1) Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f \circ g(x) = \sqrt[q]{x^p}$; $g \circ f(x) = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p$.

2) Posons $y = (x^p)^{\frac{1}{q}}$ et $z = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$

a) $y^q = x^p$ et $z^q = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{qp} = \left[\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^q\right]^p = x^p$.

b) $z^q = \left[\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^q\right]^p = x^p$

3) a) $y^q = z^q \;\; y = z$.

b) Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f \circ g(x) = g \circ f(x)$ car $y = z$.

Exercices de fixation

Exercice 1

1. vrai 2. Vrai 3. Faux 4. faux

Exercice 2

.

1. c ; 2. b ; 3. c

Exercices de renforcement

1 On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x-1}{x+2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x}{x} = 4$ et $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x} = 2$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{4x-1}{x+2}} = 2$.

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ <}} \frac{x-3}{x-5} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ <}} \left(\frac{x-3}{x-5}\right)^3 = +\infty$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} cosx = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) = 1$.

2

- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x-2}{x+1} = -\frac{1}{2}$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - 2\sqrt{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{x+1}{x}} - 2\right)$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x+1}{x}} = 1$. D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x+1}{x}} - 2 = -1$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{x+1}{x}} - 2\right) = -\infty$.

Par conséquent $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - 2\sqrt{x} = -\infty$.

3

- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{3x-2}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1^2-\left(\sqrt{3x-2}\right)^2}{(x-1)(1+\sqrt{3x-2})}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{1-(3x-2)}{(x-1)(1+\sqrt{3x-2})}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{3-3x}{(x-1)(1+\sqrt{3x-2})}$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{3x-2}}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{-3}{1+\sqrt{3x-2}} = -\frac{3}{2}.$$

Donc $\lim_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{3x-2}}{x-1} = -\frac{3}{2}$.

- $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x-1} - \sqrt{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x-1})^2 - (\sqrt{x})^2}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}} = 0$ car $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x-1} + \sqrt{x} = +\infty$.

Donc $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x-1} - \sqrt{x} = 0$.

- $\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty$ car $\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \sqrt{x-1} = 0$ et $\forall\, x \geq 1;\ \sqrt{x-1} \geq 0$.

4

- Posons : $f(x) = x^{20}$; on a: f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = 20x^{19}$.

$\forall\, x \neq 1,\ \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{x^{20}-1}{x-1}$.

Donc : $\lim_{x \to 1} \frac{x^{20}-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$. Or $f'(1) = 20$.

D'où $\lim_{x \to 1} \frac{x^{20}-1}{x-1} = 20$.

- Posons : $g(x) = \sqrt{3x-2}$;
  on a : g est dérivable sur $\left]\frac{2}{3}; +\infty\right[$ et $\forall\, x \in \left]\frac{2}{3}; +\infty\right[$, $g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}$.

$\forall\, x \neq 2,\ \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2}$.

Donc : $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = g'(2)$. Or $g'(2) = \frac{3}{4}$.

D'où : $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{3x}-2}{x-2} = \frac{3}{4}$.

5

Pour la question 4, Prendre les propositions suivantes : a) 0 ; b) -2020 ; c) 2020

1) a
2) c
3) c
4) b

6

1. Pour tout $x > 0,\ x-1 \leq x + \sin x \leq x+1$.
Donc $\lim_{x \to +\infty} x + \sin x = +\infty$ car $\lim_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty$.
2. Pour tout $x > 0,\ -\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x\cos x}{x^2+1} \leq \frac{x}{x^2+1}$. Or $\lim_{x \to +\infty} -\frac{x}{x^2+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$.
Donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{x\cos x}{x^2+1} = 0$

7

a) Pour tout $x > 0$, $\frac{x+2}{2} \leq \frac{x+2}{2-\cos x} \leq x+2$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+2}{2} = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+2}{2-\cos x} = +\infty$.

b) Pour tout $x > 0$, $x - \sqrt{x^2+x-1} = \frac{-1+\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}}$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \sqrt{x^2+x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1+\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{2}$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+1}} = 0$

8

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{1-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}$.

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{x^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{1}{x} \times \frac{x-1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}} = +\infty \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\infty$.

9

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\pi \tan x}{3x} = \frac{\pi}{3}$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \cos x = \frac{1}{2}$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\frac{\pi \tan x}{3x}\right) = \frac{1}{2}$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\pi x^2-4x+3}{4x^2+7} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\pi x^2}{4x^2} = \frac{\pi}{4}$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq \frac{2x^2}{1-\cos x} \leq x^2$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x^2}{1-\cos x} = 0$.

On en déduit que : $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\frac{2x^2}{1-\cos x}} = 0$.

10

f n'est pas définie en 0, donc f n'est pas continue en 0.

Ou bien reformuler l'exercice comme suit :

f définie sur $]-\infty; 4[$ par $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x}-2} \\ f(0) = -4 \end{cases}$.

Etudier la continuité de f en 0.

Solution

Pour $x \neq 0$, $f(x) = -\sqrt{4-x} - 2$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -4$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = -4$ donc, f est continue en 0.

11

Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $-x^2 \leq x^2 \sin\frac{1}{x} \leq x^2$. $\lim\limits_{x\to 0} -x^2 = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$. D'où $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$ donc, f est continue en 0.

12

$\frac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x} = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \times \frac{x}{\tan x}$. On a : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\tan x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{\cos x}} = 1$.

Donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = \frac{1}{2}$. f est continue en 0.

13

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x} \times \frac{5x}{2x} \times \frac{2x}{\sin 2x} = 1 \times \frac{5}{2} \times 1 = \frac{5}{2}$.

14

1-a) $\forall x \in \mathbb{R}\,;\ -1 \leq \sin x \leq 1$

$-2 \leq 2\sin x \leq 2$

$-2 \leq 3x^2 + 2\sin x \leq 3x^2 + 2$

$\forall x \in \mathbb{R}\,;\ 3x^2 - 2 \leq g(x) \leq 3x^2 + 2$

b) $\forall x \in \mathbb{R}\,;\ 3x^2 - 2 \leq g(x) \leq 3x^2 + 2$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 3x^2 - 2 = \lim\limits_{x \to -\infty} 3x^2 + 2 = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.

$\forall x \in \mathbb{R};\ 3x^2 - 2 \leq g(x) \leq 3x^2 + 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 3x^2 - 2 = \lim\limits_{x \to +\infty} 3x^2 + 2 = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

2-a) $\forall x > 0 \quad 3x^2 - 2 \leq g(x) \leq 3x^2 + 2$

$\forall x > 0 \quad \frac{3x^2-2}{x} \leq \frac{g(x)}{x} \leq \frac{3x^2+2}{x}$

-b) $\forall x > 0 \quad \frac{3x^2-2}{x} \leq \frac{g(x)}{x} \leq \frac{3x^2+2}{x}$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2-2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 3x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$ donc (c_g) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OJ).

15

Modifier l'énoncé comme suit :
L'affirmation (a) est-elle vraie ou fausse ? Justifie ta réponse.

(a) : Si pour tout nombre réel $x > 0, 0 \leq f(x) \leq \sqrt{x}$, alors $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

L'affirmation (a) est fausse car $x > 0$ donc $\frac{f(x)}{x}$ n'a pas de limite en $-\infty$.

16

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+x+2}+2} = \frac{3}{4}$ et $\frac{3}{4} \in \mathbb{R}$. f est prolongeable par continuité en 1.

Ce prolongement la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ si } x \neq 1 \\ g(1) = \frac{3}{4} \end{cases}$.

17

a) $f(x)$ existe pour $x \neq 0$. L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} - \{0\}$.

b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - \cos 0}{x - 0} = \cos' 0 = -\sin 0 = 0$.

Le prolongement par continuité de f en 0 est la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ si } x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$.

18

Corriger l'énoncé comme suit : $h(x) = -\frac{13}{8}$ si $x = -\frac{1}{2}$.

Si $x \neq \frac{1}{2}$ et $\neq -\frac{1}{2}$, alors $h(x) = \frac{x^2+3}{2x-1}$. On a : $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} h(x) = \lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{x^2+3}{2x-1} = -\frac{13}{8}$.

19

1. $|x+2| - |x-2| = 0 \Leftrightarrow x + 2 = x - 2$ ou $x + 2 = -x + 2$. On obtient : $x = 0$.

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} - \{0\}$.

2. Pour $x \neq 0$, $f(x) = \frac{4x(|x+2|+|x-2|)}{|x+2|^2-|x-2|^2} = \frac{4x(|x+2|+|x-2|)}{8x} = \frac{(|x+2|+|x-2|)}{2}$.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{(|x+2|+|x-2|)}{2} = 2$.

Le prolongement par continuité de f en 0 est la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ si } x \neq 0 \\ g(0) = 2 \end{cases}$.

20

1. $f([0;1]) = [-3;-1]$.

2. $f\left(\left[-\frac{1}{2};3\right]\right) = [-3;1]$.

21

$f(x) = 0$ n'a pas de solution dans $]-\infty; -2]$ et admet une solution unique dans $]-2; +\infty[$.

On déduit que : $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

22

1. Posons que : $f(5) = \alpha$. On a :$f(]-\infty; 5] = [-8, \alpha]$.

2. L'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique β dans $\mathbb{R}$.

23

- f est continue et strictement croissante sur $[0; 2]$.
  Donc $f([0; 2]) = [f(0); f(2)] = [2; 3]$.
- $f$est continue et strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$.
  Donc $f(]-\infty; 0]) = \left[f(0); \lim_{x \to -\infty} f(x)\right[= [2;\ +\infty[$.
- $f$est continue et strictement décroissante sur $]\ 2; +\infty[$.
  Donc $f(]\ 2; +\infty[) = \left]\lim_{x \to +\infty} f(x)\ ; f(2)\right[=]\ 1; 3[$.
- $]-\infty; 2[\ = \ ]-\infty; 0[\ \cup [0; 2[$. $f$est continue sur $]-\infty; 2[$.
  Donc $f(]\ 2; +\infty[) = f(]-\infty; 0[) \cup f([0; 2[) = \ ]2; +\infty[\ \cup [2; 3[\ = [2; +\infty[$.
- $]0; +\infty[\ = \ ]0; 2] \cup]2\ ; +\infty[$. $f$est continue sur $]0; +\infty[$.
  Donc $f(]\ 0; +\infty[) = f(]0; 2]) \cup f(]2\ ; +\infty[) = \ ]2; 3] \cup]1; 3] =]2; 3]$

24

1. $f$est continue et strictement croissante sur $[3;\ +\infty[$ tel que $f([3;\ +\infty[) = [1;\ +\infty[$.

Or $4 \in [1;\ +\infty[$, donc l'equation $f(x) = 4$ admet une unique solution dans $[3;\ +\infty[$.

2. a) f est continue et strictement croissante sur $]-\infty\ ; 1]$ tel que

$f(]-\infty\ ; 1]) =]-\infty\ ; 3]$. Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]-\infty\ ; 1]$.

b) 1 est le minimum de $f\ sur\ ]-\infty\ ; 1]$ donc $\forall x \in [1\ ;\ +\infty[\quad f(x) \geq 1 > 0$

D'où $\quad \forall x \in [1\ ;\ +\infty[\ \ f(x) > 0$.

3. f est continue et strictement décroissante sur $[1\ ; 3]$ tel que $f([1; 3]) = [1; 2]$.

Or 0 n' appartient pas à [1;2] donc l' équation $f(x) = 0$ n' admet aucune solution dans $[1; 3]$.

4. f est continue et strictement croissante sur $]-\infty;\ \alpha[$ tel que $f(]-\infty;\ \alpha[) =]-\infty;\ 0[$.

$\Rightarrow \forall x \in]-\infty;\ \alpha[\ ; f(x) \in]-\infty;\ 0[$

$\Rightarrow \forall x \in]-\infty;\ \alpha[\ ; f(x) < 0$

f est continue et strictement croissante sur $]\alpha\,;1[$ tel que $f(]\alpha\,;1[) =]0\,;2[$.

$\Rightarrow \forall x \in]\alpha\,;1[\ ; f(x) \in]0\,;2[$

$\Rightarrow \forall x \in]\alpha\,;1[\ ; f(x) > 0$

Or d'après 2. b) $\forall x \in [1\,;\ +\infty[\ \ f(x) > 0$ donc $\forall x \in]\alpha;\ +\infty[\ ; f(x) > 0$

Conclusion : $\forall x \in]-\infty;\ \alpha[, f(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha;\ +\infty[\ , f(x) > 0$.

25

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}\,; f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$

Calculons le discriminant de $3x^2 - 2x + 1$. $\Delta = -8$

$\Delta < 0$, Donc le signe de $3x^2 - 2x + 1$ est celui de 3.

D'où $\forall x \in \mathbb{R}\,; f'(x) > 0$. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ tel que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Or $0 \in \mathbb{R}$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

3. Déterminons un encadrement de α d'amplitude 1 par la méthode de balayage

x	-1	0
Signe de $f(x)$	$-$	$+$

Donc $-1 < \alpha < 0$

Déterminons un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}

x	-1	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0
Signe de $f(x)$	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+

Donc -0,9$< \alpha < -0,8$

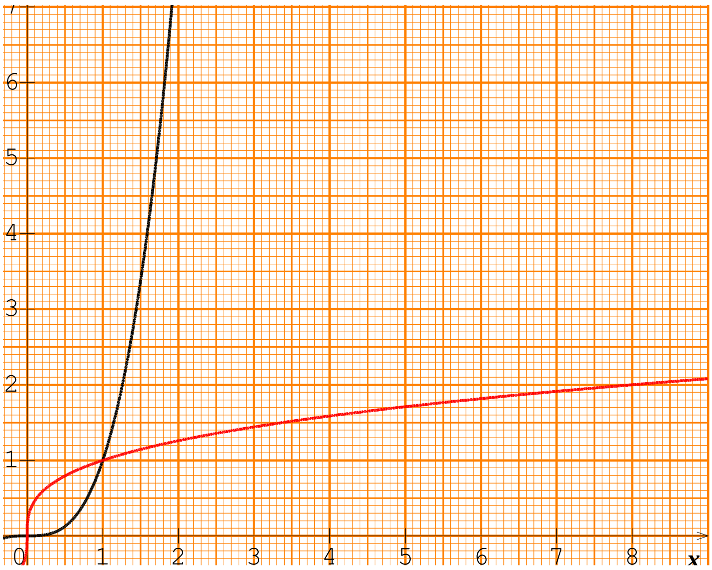
Déterminons un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}

x	-0,9	-0,89	-0,88	-0,87	-0,86	-0,85	-0,84	-0,83	-0,82	-0,81	-0,80
Signe de $f(x)$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+

Donc $-0{,}82 < \alpha < -0{,}81$.

26

La fonction $x \longmapsto \sqrt[3]{x}$ est la bijection réciproque de la fonction $\longmapsto x^3$. Donc les représentations graphiques des fonctions $x \longmapsto \sqrt[3]{x}$ et $x \longmapsto x^3$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ dans le repère orthonormé (O, I, J).



27

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^4 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^4 = +\infty$

2. $f'(x) = 4x(x-1)(2x-1)$

3. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$ ou $x = 1$.

Tableau de signe de $f'(x)$.

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

4. Tableau de variation

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗	$\frac{1}{8}$	↘	0	↗ $+\infty$

D'après le tableau de variation, l'équation $f(x) = 1$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.

28

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{2}$.

La droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - y = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{2} - \frac{1+\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$. La droite (D) : $y = -2x - \frac{1}{2}$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $-\infty$.

29

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
2. Pour tout nombre réel x, $f'(x) = \frac{3}{4}(x-2)(x-4)$.

f est strictement croissante sur $]-\infty; 2[$ et sur $]4; +\infty[$.
f est strictement décroissante sur $]2; 4[$.

<u>Tableau de variation</u>

x	$-\infty$	2		4	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	2	↘	1	↗ $+\infty$

3. $\forall\, x \in [2; +\infty[$, $f(x) \geq 1$; Donc $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans $[2; +\infty[$.
4. a) f est une bijection de $]-\infty; 2[$ sur $]-\infty; 2[$. $0 \in\,]-\infty; 2[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans$]-\infty; 2[$.

Finalement l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans$\mathbb{R}$.
 b) $f(1) = 1$ et $f(0) = -3$. Donc $0 < \alpha < 1$.

x	0,5	0,6	0,7	0,8
$f(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$

Donc $0{,}6 < \alpha < 0{,}7$.

30

1. L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}-\{1\}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=+\infty$

La droite d'équation $x=1$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f.

2. a) $-2x^2+3x=(x-1)(-2x+1)+1$ donc $f(x)=-2x+1+\frac{1}{x-1}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(-2x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(-2x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}=0.$

Donc la droite (D) d'équation $y=-2x+1$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $-\infty$ et en$+\infty$.

b) $f(x)-(-2x+1)=\frac{1}{x-1}$.

$\forall\, x\in\,]-\infty;1[,\, f(x)-(-2x+1)<0$ et $\forall\, x\in\,]1;+\infty[,\, f(x)-(-2x+1)>0$.

La courbe représentative de f est au dessous de (D) sur $]-\infty;1[$.

La courbe représentative de f est au dessus de (D) sur $]1;+\infty[$.

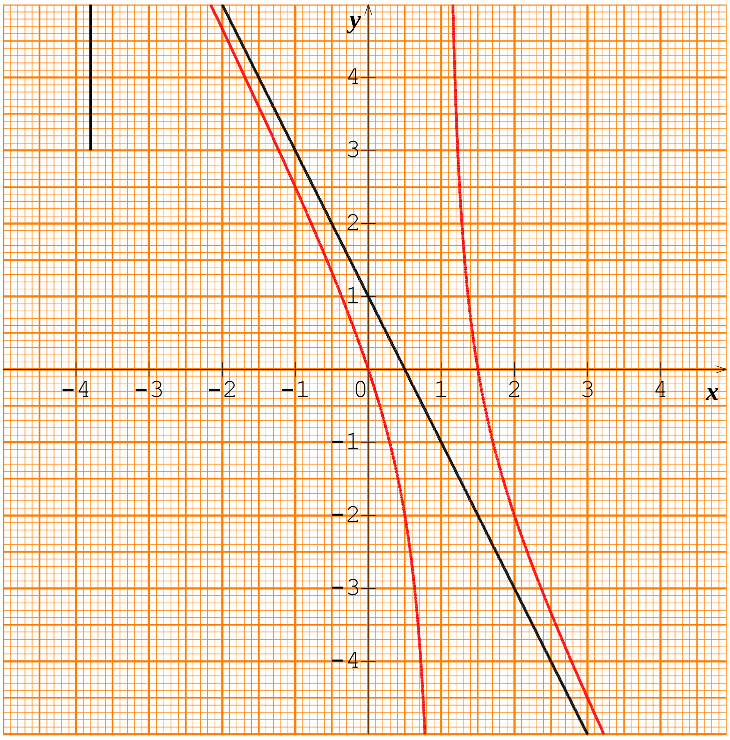
3. $\forall\, x\in\mathbb{R}-\{1\}, f'(x)=\left(-2x+1+\frac{1}{x-1}.\right)'=-2-\frac{1}{(x-1)^2}$.

$\forall\, x\in\mathbb{R}-\{1\}, f'(x)<0$. On déduit que f est strictement décroissante sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$.

Tableau de variation

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$		$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$

4. Représentation graphique



Exercices d'approfondissement

31

a) $\lim_{x \to 2} \sqrt[3]{x^3 + 24} = \sqrt[3]{32}$

b) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^5 + 2x^3 - x + 4} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^5} = +\infty$

c)

Posons : $f(x) = \sqrt[3]{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{3}}$, on a: $f'(x) = \frac{1}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}}$.

$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} = f'(0) = \frac{1}{3}$.

d)

Posons : $f(x) = \sqrt[3]{x} = (x)^{\frac{1}{3}}$, on a: $f'(x) = \frac{1}{3(x)^{\frac{2}{3}}}$.

$\lim_{x \to 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8} = f'(8) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\left(\sqrt[3]{8}\right)^2} = \frac{1}{12}$.

32 Voir activité 3.3

33

1. $f(x) = \frac{x^3-3x+3}{2x^3-3x^2+1}$.

En remarquant que 1 est un zéro de $2x^3 - 3x^2 + 1$, On a par division euclidienne :

$2x^3 - 3x^2 + 1 = (2x+1)(x-1)^2$. Donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\}$

2. $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (x^3 - 3x + 3) \times \frac{1}{(x-1)} = +\infty$.

3. $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$; on déduit que f n'est pas prolongeable par continuité en 1.

34

1. $f(x) = \frac{1}{x^2-4x+3} + \frac{x+a}{x-1} = \frac{1}{(x-3)(x-1)} + \frac{x+a}{x-1}$. On déduit que : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$.

2. a) pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$, $f(x) = \frac{x^2+(a-3)x-3a+1}{(x-3)(x-1)}$.

$x^2 + (a-3)x - 3a + 1$ est divisible par $x - 1$ si $1^2 + (a-3) \times 1 - 3a + 1 = 0$

On obtient : $a = -\frac{1}{2}$,

Pour $a = -\frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{1}{x^2-4x+3} + \frac{x-\frac{1}{2}}{x-1} = \frac{2x-5}{2x-6}$. $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{2x-5}{2x-6} = \frac{3}{4}$.

b) Pour $a = -\frac{1}{2}$, le prolongement par continuité de f est la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{2x-5}{2x-6} \text{ si } x \neq 1 \\ g(1) = \frac{3}{4} \end{cases}.$$

35

1. $\forall a > 0$, f_a est dérivable sur $[0, a]$ et $\forall x \in [0, a]$ $f'_a(x) = \left(\frac{a-x}{a(x+a)}\right)' = \frac{-a(x+a)-a(a-x)}{a^2(x+a)^2}$

$$= \frac{-2a^2}{a^2(x+a)^2}$$

$$\forall x \in [0, a] \quad f'_a(x) = -\frac{2}{(x+a)^2}$$

$\forall x \in [0, a]$ $f'_a(x) < 0$. Donc f_a est strictement décroissante sur $[0, a]$.

f_a est strictement décroissante sur $[0, a]$ tel que $f_a([0, a]) = [f_a(a);\ f_a(0)] = [0; \frac{1}{a}]$.

Donc f_a réalise une bijection de [0 ; a] sur $[0; \frac{1}{a}]$.

2. Tableau de variation de $f_a{}^{-1}$.

x	0		$\frac{1}{a}$
$f_a{}^{-1}$	a	$\searrow$	0

$f_a{}^{-1}$ et f_a ont le même sens de variation.

3. Remarquons que : $\forall a > 0 \quad f_{\frac{1}{a}}(x) = \frac{a-a^2x}{1+ax}$

Soit $y \in \left[0, \frac{1}{a}\right]$; $f_a(x) = y \Rightarrow \frac{a-x}{a(a+x)} = y \Rightarrow -x - axy = a^2y - a \Rightarrow x = \frac{a-a^2y}{1+ay}$

Donc $\qquad f_a{}^{-1} : \left[0, \frac{1}{a}\right] \to [0, a]$

$$x \mapsto \frac{a-a^2x}{1+ax} \quad \text{or} \quad f_{\frac{1}{a}}(x) = \frac{\frac{1}{a} - \left(\frac{1}{a}\right)^2 x}{1+\frac{1}{a}x} = \frac{a-a^2x}{1+ax}$$

$\forall x \in \left[0, \frac{1}{a}\right] \quad f_a{}^{-1}(x) = f_{\frac{1}{a}}(x)$. D'où $\quad f_a{}^{-1} = f_{\frac{1}{a}}$.

36

f la fonction définie sur [0,1] par : $f(x) = \frac{1-x}{1+2x}$.

a) pour tout $x \in [0,1]$, $f \circ f(x) = \frac{1-\frac{1-x}{1+2x}}{1+2\left(\frac{1-x}{1+2x}\right)} = \frac{\frac{3x}{1+2x}}{\frac{3}{1+2x}} = \frac{3x}{3} = x$.

b) pour tout $x \in [0,1]$, $f'(x) = -\frac{3}{(1+2x)^2}$.

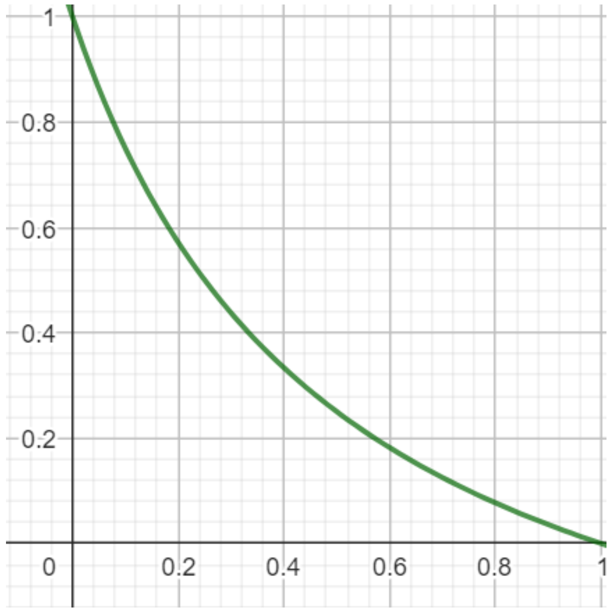
pour tout $x \in [0,1]$, $f'(x) < 0$. On en déduit que f est décroissante sur $[0,1]$.

c) f est continue et strictement croissante sur $[0,1]$. Donc f est une bijection de $[0,1]$ sur $f([0,1]) = [0,1]$.

Soit $y \in [0,1]$, $f(x) = y \Leftrightarrow x(-1-y) = y - 1$; donc $x = \frac{1-y}{1+2y}$.

On en déduit que : pour tout $x \in [0,1]$ $f^{-1}(x) = \frac{1-x}{1+2x} = f(x)$. Donc $f^{-1} = f$.

2. Représentation graphique de



37

1. $\forall x \in]0,+\infty[\;\; f'(x) = \frac{8x+1}{2\sqrt{4x^2+x}} + 2.$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

$\forall x \in]0,+\infty[\;\; 8x+1 > 0$ et $2\sqrt{4x^2+x} > 0$.

$\frac{8x+1}{2\sqrt{4x^2+x}} > 0$

$\frac{8x+1}{2\sqrt{4x^2+x}} + 2 > 0.$

$\forall x \in]0,+\infty[\quad f'(x) > 0.$ Donc f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

f est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ tel que $(]0,+\infty[) =]1,+\infty[$.

Par conséquent f réalise donc une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]1,+\infty[$.

D'où $J =]1,+\infty[$.

2. Comme f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Donc f^{-1} est strictement croissante sur $]1,+\infty[$.

3. Soit $y \in]1,+\infty[$.

$$\begin{aligned}
f(x) = y &\Rightarrow \sqrt{4x^2+x} + 2x + 1 = y \\
&\Rightarrow \sqrt{4x^2+x} = y - 2x - 1 \\
&\Rightarrow 4x^2 + x = y^2 + 4x + 1 - 4xy - 2y + 4x \\
&\Rightarrow y^2 - 4xy - 2y = -4x + x - 1 \\
&\Rightarrow y^2 - 2y + 1 = -3x + 4xy \\
&\Rightarrow (y-1)^2 = x(-3+4y)
\end{aligned}$$

$$f(x) = y \Rightarrow x = \frac{(y-1)^2}{-3+4y} .$$

Donc $f^{-1}(x) = \frac{(x-1)^2}{-3+4x}$.

4. a) Posons $g(x) = f(x) - (x+2) = \sqrt{4x^2+x} + x - 1$

$$g'(x) = f'(x) - 1 \Rightarrow g'(x) = \frac{8x+1}{2\sqrt{4x^2+x}} + 1$$

$\forall x \in]0;\ +\infty[\ \ g'(x) > 0$. Donc g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

g est continue et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{4}\ ; \frac{1}{2}\right]$.

$$g\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{4\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4} - 1 \approx -0{,}04$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{2} - 1 = \sqrt{\frac{3}{2}} - 1 \approx 0{,}72$$

Comme $g\left(\frac{1}{2}\right) \times g\left(\frac{1}{4}\right) < 0$, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α dans $\left]\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right[$.

Par conséquent l'équation $fx) = x + 2$ admet une unique solution α dans $\left]\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right[$.

b) Déterminons un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

x	0,25	0,3	0,4	0,5
Signe de $g(x)$	-	+	+	+

x	0,25	0,26	0,27	0,28	0,29	0,30
signe de $g(x)$	-	-	+	+	+	+

Donc $0{,}26 < \alpha < 0{,}27$.

D'où 0,26 est une valeur approchée de α par défaut à 10^{-2} près.

38

1. $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$

On a : $f(0) = -1 \Leftrightarrow c = -1$.

$f(1) = -2 \Leftrightarrow a + b + c = -2 \Leftrightarrow a + b = -1$.

$f(3) = 26 \Leftrightarrow 27a + 9b + c = 26 \Leftrightarrow 3a + b = 3$.

On obtient le système : $\begin{cases} a + b = -1 \\ 3a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}$

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1.$

2. $f\left(\left[-\frac{1}{2};3\right]\right) = [-2;26]$.

3. Pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2};1\right]$, $f(x) \leq -1$ donc $f(x) = 0$, n'a pas de solution dans $\left[-\frac{1}{2};1\right]$.

f est continue et strictement croissante sur $[1;3]$ et $f([1;3]) = [-2;26]$

Comme $0 \in [-2;26]$, donc $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[1;3]$.

Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\left[-\frac{1}{2};3\right]$.

$f(1{,}6) = -0{,}488$ et $f(1{,}7) = 0{,}156$. $f(1{,}6) \times f(1{,}7) < 0$ donc $1{,}6 < \alpha < 1{,}7$.

4. Pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2};\alpha\right]$, $f(x) \leq 0$ et Pour tout $x \in [\alpha;3]$, $f(x) \geq 0$.

39

1. On a : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{x}{1-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \sqrt{\frac{x}{1-x}} = +\infty$. D'où $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = +\infty$.

f est continue et strictement croissante sur $]0,1[$ tel que $f(]0,1[) =]0,+\infty[$.

Donc f réalise une bijection de $]0,1[$ sur $]0,+\infty[$. D'où $J =]0,+\infty[$.

2. Soit $y \in]0,+\infty[$. On a :

$$f(x) = y \Rightarrow \sqrt{\frac{x}{1-x}} = y \Rightarrow \frac{x}{1-x} = y^2 \Rightarrow x = (1-x)y^2 = y^2 - xy^2$$

$$\Rightarrow x(1+y^2) = y^2 \Rightarrow x = \frac{y^2}{1+y^2}.$$ Donc $\forall x \in]0,+\infty[, f^{-1}(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

40

1. $f(0) = 1 - a$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} 1 + \frac{a}{x-1} = 1 - a$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x^2 - \sqrt{x^2+1} = -1$.

f est continue en 0 si et seulement si $1 - a = -1$. On obtient $a = 2$.

Pour $x < 0$, $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

2. Courbe représentative de f.

3. Pour $x > 0, f(x) = x^2 - \sqrt{x^2+1}$.
f est continue et strictement croissante Sur $]1;2[$.
$f(1) = 1 - \sqrt{2} < 0$ et $f(2) = 4 - \sqrt{2} > 0$. Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]1;2[$. On a : $1 < \alpha < 2$.
Par la méthode de balayage, on a :

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
Signe de $f(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$

On conclut que : $1{,}2 < \alpha < 1{,}3$.

4. Pour $x \leq 0, f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Pour $x > 0, f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$.

L'ensemble solution de $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$ est : $\{-1;\ \alpha\}$.

5. Le signe de $f(x)$

Pour tout $x \in]-\infty;-1[\ \cup\ ]\alpha;+\infty[, f(x) > 0$

Pour tout $x \in]-1;\alpha], f(x) < 0$

Pour tout $x \in \{-1;\ \alpha\}, f(x) = 0$.

41

1. $\forall x \in]-1\,;1[\quad f'(x) = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

$\forall x \in]-1\,;1[\quad x^2 < 1$

$1 - x^2 > 0$ et $\sqrt{1-x^2} > 0$

$(1-x^2)\sqrt{1-x^2} > 0$

$\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} > 0$

$\forall x \in]-1\,;1[\quad f'(x) > 0$. Donc f est strictement croissante sur $]-1\,;1[$.

2\. a) $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$ avec $g(x) = f(x) - x$.

Démontrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $]-1\,;1[$.

g est dérivable sur $]-1\,;1[$ et

$$\forall x \in]-1\,;1[\ g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1-(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$g'(x) = \frac{1-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

Signe de $g'(x)$.

$\forall x \in]-1\,;1[\quad 0 \leq x^2 < 1$

$\forall x \in]-1\,;1[\,,\ 0 < 1 - x^2 \leq 1 \Rightarrow \forall x \in]-1\,;1[\quad (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \leq 1.$

$\forall x \in]-1\,;1[\quad ,\quad 1-(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \geq 0$

Or $\forall x \in]-1\,;1[\quad (1-x^2)\sqrt{1-x^2} > 0.$

Donc pour tous $x \in]-1\,;1[\setminus \{0\}$ $g'(x) > 0$ et $g'(0) = 0$.

D'où g est strictement croissante sur $]-1\,;1[$.

g est continue et strictement croissante sur $]-1\,;1[$ tel que $g(]-1\,;1[) = \mathbb{R}$ or $0 \in \mathbb{R}$, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]-1\,;1[$.

D'où l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $]-1\,;1[$.

b) Démontrons que : $\alpha > \frac{4}{5}$.

g est continue et strictement croissante sur $]\frac{4}{5};1[$ tel que $g(]\frac{4}{5};1[\,) =]-\frac{7}{15};+\infty[$ or $0 \in]-\frac{7}{15};+\infty[$, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $]\frac{4}{5};1[$.

Or $]\frac{4}{5};\ 1[.[\subset]-1;1[$ et α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$ dans $]-1;1[$, d'où $\alpha \in]\frac{4}{5};\ 1[$. Ainsi $\alpha > \frac{4}{5}$.

3. g est strictement croissante sur $]-1;1[$, et $\alpha \in]-1;1[$.

Soit $x \in]-1;1[$.

Si $x < \alpha$ alors $g(x) < g(\alpha)$

Si $x < \alpha$ alors $g(x) < 0$

Si $x > \alpha$ alors $g(x) > g(\alpha)$

Si $x > \alpha$ alors $g(x) > 0$

En conclusion :

$$\begin{cases} \forall x \in]-1;\alpha[\,, f(x) - x < 0 \\ \forall x \in]\alpha;1[\,,\ f(x) - x > 0 \end{cases}$$

4. f est continue et strictement croissante sur $]-1;1[$ tel que $(]-1;1[) = \mathbb{R}$.

Donc f réalise une bijection de $]-1;1[$ sur $\mathbb{R}$.

5. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{x+1}{\sqrt{1+(x+1)^2}}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculons $f \circ h(x)$.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\ \ f \circ h(x) = f[h(x)] = -1 + \frac{h(x)}{\sqrt{1-(h(x))^2}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}\ f \circ h(x) = f[h(x)] = -1 + \frac{\frac{x+1}{\sqrt{1+(x+1)^2}}}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{\sqrt{1+(x+1)^2}}\right)^2}}$$

$$= -1 + \frac{\frac{x+1}{\sqrt{1+(x+1)^2}}}{\sqrt{1-\frac{(x+1)^2}{1+(x+1)^2}}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}\ f \circ h(x) = -1 + \frac{\frac{x+1}{\sqrt{1+(x+1)^2}}}{\sqrt{\frac{1}{(x+1)^2+1}}} = -1 + \frac{\frac{x+1}{\sqrt{1+(x+1)^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+(x+1)^2}}}$$

$\forall x \in \mathbb{R}\ f \circ h(x) = -1 + x + 1$
$\forall x \in \mathbb{R}\ f \circ h(x) = x.$

Donc h est la bijection réciproque de f. D'où $f^{-1} = h$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}\ f^{-1}(x) = \frac{x+1}{\sqrt{1+(x+1)^2}}$

42

1) a) f est dérivable sur $[0; 30]$

$$\forall t \in [0;30], f'(t) = -3t^2 + 60t = -3t(t-20)$$

On a : $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0\ ou\ t = 20$

$$f'(t) > 0 \Leftrightarrow t \in]0;20[$$
$$f'(t) < 0 \Leftrightarrow t \in]20;30[$$

Donc f est strictement croissante sur $[0; 20]$ et strictement décroissante sur $[20; 30]$

Tableau de variation de f

t	0		20		30
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$	0	↗	4000	↘	0

b) Interprétation
le nombre de personnes malades augmente par jour jusqu'au 20ème jour. A partir du 20ème jour le nombre de personnes commence à décroitre de jour en jour.

2)a) f' est dérivable sur $[0; 30]$

$$\forall t \in [0;30], f''(t) = -6t + 60$$

b) $f''(t) = 0 \Leftrightarrow t = 10$

$$f''(t) < 0 \Leftrightarrow 10 < t < 30$$

$f''(t) > 0 \Leftrightarrow 0 < t < 10$ donc f' est strictement croissante sur $[0; 10]$ et strictement décroissante sur $[0; 30]$.

Tableau de variation de f'

t	0		10		30
$f''(t)$		+	0	-	
$f'(t)$	0	$\nearrow$	300	$\searrow$	-900

c) Interprétation

La vitesse de propagation de la maladie croit durant les dix premiers jours du mois.

A partir du $10^{ème}$ jour cette vitesse décroit.

d) Le plus grand nombre de malade a été atteint au jour 20, car la fonction f admet en 20 un maximum absolu.

Le nombre de malades a été de 4000 ce jour.

3)a- f'' s'annule en 10 en changeant de signe. Ce qui signifie que $(\mathcal{C})$ admet le point $A(10; f(10))$ comme point d'inflexion c'est-à-dire$A(10; 2000)$.

Au point d'abscisse 10, $(\mathcal{C})$ passe en dessous de sa tangente. Cela signifie concrètement qu'à partir du jour 10, le nombre de malade augmente certes, mais cette augmentation est moins rapide qu'avant le jour 10.

b)- Au $10^{èe}$ jour, la vitesse de propagation de la maladie est de 300 malades / jour.

43

$f(x) = \frac{x(x-3)^2}{(x-2)^2}$.

1. L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} - \{2\}$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{2\}$, $f'(x) = \frac{[x(x-3)^2]'(x-2)^2 - [(x-2)^2]'[x(x-3)^2]}{(x-2)^4} = \frac{(x-3)(x^2-3x+6)}{(x-2)^3}$.

3. Variations de f.

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+		$-$	0	+

Pour tout $x \in]-\infty; 2[\cup]3; +\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur$]-\infty; 2[$ et sur $]3; +\infty[$.

Pour tout $x \in]2; 3[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]2; 3[$.

4. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

$\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} \frac{x(x-3)^2}{(x-2)^2} = 2 \times +\infty = +\infty$.

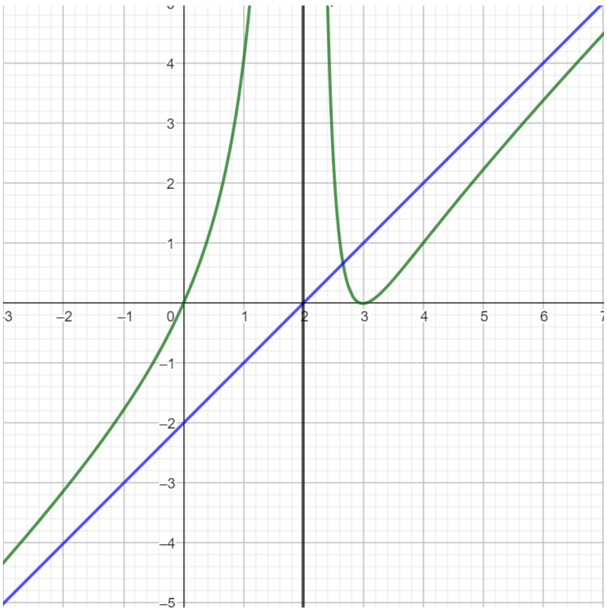
5. Tableau de variation

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$-$ 0 $+$	
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$+\infty \searrow 0$	$\nearrow +\infty$

6. $\lim_{x\to2} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à la représentation graphique de f.

$f(x) = x - 2 + \frac{-3x+8}{(x-2)^2}$. On a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x-2) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x+8}{(x-2)^2} = 0$ donc la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique à la représentation graphique de f en $+\infty$.

7. Représentation graphique de f.



44

Partie I

1. $V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$.

$\lim_{x\to-\infty} V(x) = \lim_{x\to-\infty} 4x^3 = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} V(x) = \lim_{x\to+\infty} 4x^3 = +\infty$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $V'(x) = 12x^2 - 96x + 144$.

$V'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 6$ ou $x = 2$.
Pour tout $x \in]-\infty; 2[\cup]6; +\infty[$, $V'(x) > 0$, donc V est croissante sur $]-\infty; 2[$ et sur $]6; +\infty[$.
Pour tout $x \in]2; 6[$, $V'(x) < 0$, donc V est décroissante sur $]2; 6[$.
Tableau de variation

x	$-\infty$		2		6		$+\infty$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$V(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	128	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Partie II

1. On sait que : $x \geq 0$ et $2x \leq 12$ donc $x \geq 0$ et $x \leq 6$ soit : $0 \leq x \leq 6$.
On en déduit que : $x \in [0; 6]$.
2. La base B du pavé droit est : $B = (12 - 2x)^2 = 144 - 48x + 4x^2$.
Donc le volume V du pavé est : $V = B \times h = B \times x = 144x - 48x^2 + 4x^3 = V(x)$.
Le volume du pavé est $V(x)$.
3. Sur $[0; 6]$ le tableau de variation est :

x	0		2		6
$V'(x)$		$+$	0	$-$	0
$V(x)$	0	$\nearrow$	128	$\searrow$	0

Le maximum de $V(x)$ sur $[0; 6]$ est 128 atteint pour $x = 2$.
Le volume maximal est atteint pour $x = 2$ et le volume correspondant est 128.

45

1. L'aire d'une page est xy. Or l'aire du rectangle du texte est : $(x - 4)(y - 3) = 300$.
On déduit : $y = \frac{300}{x-4} + 3$. L'aire d'une page est : $f(x) = x\left(\frac{300}{x-4} + 3\right) = \frac{300x}{x-4} + 3x = \frac{x(x+288)}{x-4}$.
2. On sait que : $x > 0$, donc $x(x + 288) > 0$. Or $xy > 0$. On en déduit que : $x - 4 > 0$.
Finalement $x \in]4; +\infty[$. L'ensemble de définition de f est $]4; +\infty[$.
3. $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} x\left(\frac{300}{x-4} + 3\right) = 4 \times (+\infty) = +\infty$. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$.
4. Pour tout $x \in]4; +\infty[$, $f(x) = 3x + 300 + \frac{1200}{x-4}$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (3x + 300) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1200}{x-4} = 0$. La droite d'équation $y = 3x + 300$ est asymptote oblique à la courbe de f.
5. Pour tout $x \in]4; +\infty[$, $f'(x) = \frac{3(x-24)(x+16)}{(x-4)^2}$. Pour tout $x \in]4; +\infty[$, $\frac{3(x+16)}{(x-4)^2} > 0$.
On en déduit que :

Pour tout $x \in]4;24[$, $f'(x) < 0$; donc f est strictement décroissante sur $]4;24[$.
Pour tout $x \in]24;+\infty[$, $f'(x) > 0$; donc f est strictement croissante sur $]24;+\infty[$.
6. Tableau de variation de f.

x	4		24		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+\infty$ ↘	432	↗ $+\infty$	

7. La consommation de papier est minimale pour $x = 24$ et $y = 18$

46

AH est la distance du phare à la côte.

a) $d_1 = \mathrm{AM} = \sqrt{AH^2 + HM^2} = \sqrt{x^2 + 81}$. $d_2 = MB = HB - HM = 15 - x$.
La distance parcourue est : $AM + MB = \sqrt{x^2 + 81} + 15 - x$.
La durée de parcours est : $f(x) = \frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2} = \frac{\sqrt{x^2+81}}{4} + \frac{15-x}{5}$.
b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{x}{4\sqrt{x^2+81}} - \frac{1}{5}$.
c) $f'(x) = \frac{x}{4\sqrt{x^2+81}} - \frac{1}{5} = \frac{5x-4\sqrt{x^2+81}}{20\sqrt{x^2+81}} = \frac{25x^2-16x^2-1296}{20\sqrt{x^2+81}(5x+4\sqrt{x^2+81})} = \frac{9(x-12)(x+12)}{20\sqrt{x^2+81}(5x+4\sqrt{x^2+81})}$.
d) Pour tout $x > 0$, $\frac{9(x+12)}{20\sqrt{x^2+81}(5x+4\sqrt{x^2+81})} > 0$. On en déduit que $f(x)$ et $x - 12$ ont le même signe.
Donc :
Pour tout $x \in [0;12[$, $f'(x) < 0$. f est strictement décroissante sur $[0;12[$
Pour tout $x \in]12;15]$, $f'(x) > 0$. f est strictement croissante sur $]12;15]$.
Tableau de variation

x	0		12		15
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{21}{4}$	↘	$\frac{87}{20}$	↗	$\frac{3\sqrt{34}}{4}$

Conclusion :
Pour que le temps de parcours soit minimal, le gardien du phare doit accoster à 3km de B puisque HM=12km.

47

CB=19−9=10 ; AB=8 ; AC=18 et BC=10.
1. $\tan \alpha = \tan(c - b)$.

On a : $\tan(c-b) = \frac{\sin(c-b)}{\cos(c-b)} = \frac{\sin c \cos b - \sin b \cos c}{\cos c \cos b + \sin c \sin b} = \frac{\cos c \cos b\left(\frac{\sin c}{\cos c} - \frac{\sin b}{\cos b}\right)}{\cos c \cos b\left(1+\frac{\sin c}{\cos c} \times \frac{\sin b}{\cos b}\right)} = \frac{\frac{\sin c}{\cos c} - \frac{\sin b}{\cos b}}{1+\frac{\sin c}{\cos c} \times \frac{\sin b}{\cos b}}$

Donc $\tan\alpha = \frac{\tan c - \tan b}{1+\tan c \times \tan b}$.

2. $\tan c = \frac{AC}{CT} = \frac{18}{x}$; $\tan b = \frac{BC}{CT} = \frac{10}{x}$

On a : $\tan\alpha = \frac{\tan c - \tan b}{1+\tan c \times \tan b} = \frac{\frac{18}{x} - \frac{10}{x}}{1+\frac{18}{x} \times \frac{10}{x}} = \frac{8x}{x^2+180}$.

3. $f(x) = \frac{8x}{x^2+180}$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$.

Pour tout $x > 0, f'(x) = \frac{1440-8x^2}{(x^2+180)^2} = \frac{8(6\sqrt{5}-x)(6\sqrt{5}+x)}{(x^2+180)^2}$.

Pour tout $x > 0, \frac{8(6\sqrt{5}+x)}{(x^2+180)^2} > 0$. Donc $f'(x)$ et $(6\sqrt{5}-x)$ ont le même signe.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 6\sqrt{5}$.

Pour tout $x \in]0; 6\sqrt{5}[, f'(x) > 0$. f est strictement croissante sur $]0; 6\sqrt{5}[$.

Pour tout $x \in]6\sqrt{5}; +\infty[, f'(x) < 0$. f est strictement décroissante sur $]6\sqrt{5}; +\infty[$.

Tableau de variation

x	0		$6\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$0 \nearrow$	$\frac{2\sqrt{5}}{15}$	$\searrow 0$	

4. L'angle de tir est le plus grand pour $x = 6\sqrt{5}$ Soit $x \approx 13{,}4$m.

48

Partie A

1. a) $g(x) = 18\sqrt{x} - 6x + 15$

$\forall x \in]0, +\infty[, g'(x) = \left(18\sqrt{x} - 6x + 15\right)'$

$= \frac{18}{2\sqrt{x}} - 6$

$= \frac{2(9-6\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

$\forall x \in]0, +\infty[,\ g'(x) = \frac{(9-6\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$.

Le signe de $g'(x)$ est celui de $9 - 6\sqrt{x}$ car $\forall\, x \in]0, +\infty[\,,\ \sqrt{x} > 0$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 9 - 6\sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow x < \frac{9}{4}$

Donc $\forall x \in \left]0, \frac{9}{4}\right[$, $g'(x) > 0$

$\forall x \in \left]\frac{9}{4}, +\infty\right[$, $g'(x) < 0$

On a : $g(0) = 15$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

Tableau de variation de g

x	0		$\frac{9}{4}$		$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	15	$\nearrow$	$\frac{57}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

$$g\left(\frac{9}{4}\right) = 18\sqrt{\frac{9}{4}} - 6 \times \frac{9}{4} + 15 = \frac{57}{2}$$

b) g est continue et strictement décroissante sur $\left]0, \frac{9}{4}\right[$ tel que $g\left(\left]0, \frac{9}{4}\right[\right) = \left]15, \frac{57}{2}\right]$ or $0 \notin \left]15, \frac{57}{2}\right]$, donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet aucune solution $\left]0, \frac{9}{4}\right[$.

g est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{9}{4}, +\infty\right[$ tel que

$g\left(\left[\frac{9}{4}, +\infty\right[\right) = \left]-\infty, \frac{57}{2}\right]$ or $0 \in \left]-\infty, \frac{57}{2}\right]$, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0, +\infty[$.

c) g est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{9}{4}, +\infty\right[$ en particulier sur $[13{,}5; 13{,}6]$.

on a :$g(13{,}5) = 18\sqrt{13{,}5} - 6 \times 13{,}5 + 15 \approx 0{,}1362$

$g(13{,}6) = 18\sqrt{13{,}6} - 6 \times 13{,}6 + 15 \approx -0{,}219$

Or $g(13{,}5) \times g(13; 6) < 0$, donc $\alpha \in]13{,}5; 13{,}6[$. D'où $13{,}5 < \alpha < 13{,}6$.

2. D'après le tableau de variation de g, 15 est minorant de g sur $\left]0, \frac{9}{4}\right]$.

$$\Rightarrow \forall x \in \left]0, \frac{9}{4}\right]; \quad g(x) \geq 15 > 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in \left]0, \frac{9}{4}\right]; \quad g(x) > 0$$

g est strictement décroissante sur $\left[\frac{9}{4}; +\infty\right[$ et $\alpha \in \left[\frac{9}{4}; +\infty\right[$

$$\forall x \in \left[\frac{9}{4};\alpha\right[\quad x < \alpha \Longrightarrow g(x) > g(\alpha)$$

$$\Longrightarrow g(x) > 0$$

$$\forall x \in \left[\frac{9}{4};\alpha\right[\quad g(x) > 0$$

$\forall x \in]\alpha,+\infty[\ ;\ x > \alpha \Rightarrow g(x) < g(\alpha)$

$\Rightarrow g(x) < 0$

$\forall x \in]\alpha,+\infty[\ \ g(x) < 0$

Conclusion

$\forall x \in]0;\ \alpha[\ \ g(x) > 0$

$\forall x \in]\alpha,+\infty[\ \ g(x) < 0$

Partie B

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 9x + (15-2x)\sqrt{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(9 + \frac{15}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}\right) = -\infty$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} 9 + \frac{15}{\sqrt{x}} = 9$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -2\sqrt{x} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(9 + \frac{15}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}\right) = -\infty$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(9 + \frac{15}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}\right) = -\infty$

On a: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$. Donc la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (OJ).

2. a) f est dérivable sur $]0,+\infty[$.

$$\forall x \in]0,+\infty[f'(x) = \left(9x + (15-2x)\sqrt{x}\right)' = 9 + (15-2x)'\sqrt{x} + \left(\sqrt{x}\right)'(15-2x)$$

$$= 9 - 2\sqrt{x} + \frac{15-2x}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{18\sqrt{x} - 4x - 2x + 15}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{18\sqrt{x} - 6x + 15}{2\sqrt{x}}$$

$\forall x \in]0,+\infty[\ \ f'(x) = \dfrac{g(x)}{2\sqrt{x}}$

b) <u>signe de la dérivée de f'</u>

x	0	α	$+\infty$
$2\sqrt{x}$	$+$		$+$
$g(x)$	$+$		$-$

$f'(x)$	$+$	$-$

$\forall x \in]0;\ \alpha[\ \ f'(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha, +\infty[\ \ f'(x) < 0.\ f(0) = 0$

<u>Tableau de variation de f</u>

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(x)$	$\searrow$	$-\infty$

3. f est continue et strictement décroissante sur $]\alpha, +\infty[$ tel que

$f(]\alpha, +\infty[) =]-\infty, f(\alpha)[$.

Donc f réalise une bijection de $]\alpha, +\infty[$ sur $]-\infty, f(\alpha)[$. D'où $J =]-\infty, f(\alpha)[$.

49

1. $x \in \mathbb{R},\ \ x^3 + x - 2 = 0$.
Posons $g(x) =\ x^3 + x - 2$. On a :$g'(x) = 3x^2 + 1$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}, g'(x) > 0$. g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$.
g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc g est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
Comme $0 \in \mathbb{R}$, $g(x) = 0$ admet une solution réelle unique α.
2. $f(x) = x - \frac{2}{x^2+1}$.

On a : $f(\alpha) = \alpha - \frac{2}{\alpha^2+1} = \frac{\alpha(\alpha^2+1)-2}{\alpha^2+1} = \frac{\alpha^3+\alpha-2}{\alpha^2+1} = 0$.
Donc : $f(\alpha) = 0$.

50

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = x^3 - 3x^2 - 5$

Dérivons la fonction f

$$f'(x) = (x^3 - 3x^2 - 5)'$$
$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = x(3x - 6)$

Etudions le signe de $f'(x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow\ x(3x - 6) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $3x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{6}{3} = 2$

Tableau de signe de $f'(x)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$3x-6$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\forall x \in]-\infty, 0[\,, f'(x) > 0$; $\forall x \in]0, 2[\,, f'(x) < 0$ et $\forall x \in]2, +\infty[\,, f'(x) > 0$

Tableau de variation de $\boldsymbol{f}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$; $f(0) = -5$; $f(2) = -9$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
			-5				$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				-9		

2. a) f est continue et strictement croissante sur] -∞ ; 0[tel que f(]-∞ ; 0[) =] -∞ ; -5[or $0 \notin$]-∞ ; -5[, donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution dans] -∞ ; 0[.

f est continue et strictement décroissante sur $]0, 2[$ tel que $f(]0, 2[) =]-9, -5[$ or $0 \notin]-9, -5[$, donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $]0, 2[$.

f est continue et strictement croissante sur $]2, +\infty[$ tel que $f(]2, +\infty[) =]-9, +\infty[$ or $0 \in]-9, +\infty[$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]2, +\infty[$.

D'où l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

b) f est continue et strictement croissante sur $[3; 4]$.

$f(3) = 3^3 - 3 \times 3^2 - 5 = -5$ et $f(4) = 4^3 - 3 \times 4^2 - 5 = 11$

$\Rightarrow f(3) \times f(4) < 0$ donc $3 < \alpha < 4$

Déterminons un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} près par la méthode de balayage

x	3	3.10	3.20	3.30	3.40	3.50	3.60	3.70	3.80
Signe de $f(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$

Donc $3.40 < \alpha < 3.5$

3- Justifions que : $\alpha^2 = \frac{5}{\alpha-3}$

α est solution de l'équation $f(x) = 0 \Longrightarrow f(\alpha) = 0$

Alors $\alpha^3 - 3\alpha^2 - 5 = 0 \Longrightarrow \alpha^2(\alpha - 3) - 5 = 0$

$\Longrightarrow \alpha^2(\alpha - 3) = 5$

Donc $\alpha^2 = \frac{5}{(\alpha-3)}$

51

Partie A

1. a) On a : $g(x) = x^3 + 3x + 8$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = (x^3 + 3x + 8)' = 3x^2 + 3$

Calculons le discriminant de $p(x) = 3x^2 + 3$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 0^2 - 4 \times 3 \times 3 = -36$

$\Delta < 0$ donc le signe de $p(x)$ est celui de 3. D'où $\forall x \in \mathbb{R},\ \ g'(x) > 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^3 + 3x + 8) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^3 + 3x + 8) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

Tableau de variation de g

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

b) g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ tel que $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, or $0 \in \mathbb{R}$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

c) g est continue et strictement croissante sur $[-2; -1]$. On a :

$$\begin{cases} g(-2) = (-2)^3 + (-2) \times 3 + 8 = -6 \\ g(-1) = (-1)^3 + (-1) \times 3 + 8 = 4 \end{cases} \Longrightarrow g(-2) \times g(-1) < 0$$

Donc $-2 < \alpha < -1$

2. Déterminons un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}

x	-1.9	-1.80	-1.70	-1.60	-1.50	-1.40	-1.30
Signe $g(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$

g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-\infty, \alpha[$ et $]\alpha, +\infty[$

$\forall x \in]-\infty, \alpha[,\ x < \alpha \Longrightarrow g(x) < g(\alpha)$ or $g(\alpha) = 0$

$$\Longrightarrow g(x) < 0$$

$\forall x \in]\alpha, +\infty[, x > \alpha \Longrightarrow g(x) > g(\alpha)$ or $g(\alpha) = 0$

$$\Longrightarrow g(x) > 0$$

En définitive $\begin{cases} \forall x \in]-\infty, \alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha, +\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$

Partie B

1. Calcul des limites

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-4}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-4}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2} = -\infty$$

2. a) Dérivons la fonction f

$$\forall x \in]0+\infty[, f'(x) = (\frac{x^3-4}{x^2+1})'$$

$$= \frac{(x^3-4)'(x^2+1)-(x^2+1)'(x^3-4)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{3x^2(x^2+1)-2x(x^3-4)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{3x^4+3x^2-2x^4+8x}{(x^2+1)}$$

$$= \frac{x^4+3x^2+8x}{(x^2+1)^2}$$

$\forall x \in]0+\infty[\ \ f'(x) = \frac{x(x^3+3x+8)}{(x^2+1)^2}$ or $g(x) = x^3+3x+8$

$$\forall x \in]0+\infty[, f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$$

b) $\forall x \in]0+\infty[\ , \frac{x}{(x^2+1)^2} > 0$ donc le signe $f'(x)$ est celui de $g(x)$

Par conséquent $\forall x \in]0+\infty[,\ f'(x) > 0.$

$f(0) - 4$

<u>Tableau de variation de f</u>

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$

$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	-4	$+\infty$

52

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{f(x)-1}{x-1}\right) = f'(0) - \frac{f(0)-1}{0-1} = -1$ car f est dérivable en 0.

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = g(0)$ donc g est continue en 0.

$$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right)$$

$= \frac{f(1)}{1} - f'(1)$ car f est dérivable en 1

$$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} g(x) = 1$$

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} g(x) = g(1)$ donc g est continue en 1.

2. a) g est continue sur $[0;1]$. On a : $g(0) \times g(1) < 0$ donc il existe au moins un nombre réel $\alpha \in [0;1]$ tel que $g(\alpha) = 0$ or $g(0) \neq 0$ et $g(1) \neq 0$ d'où $\alpha \in]0;1[$.

$(\alpha - 1)f(\alpha) - \alpha f(\alpha) + \alpha = 0 \Leftrightarrow -f(\alpha) + \alpha = 0 \Rightarrow f(\alpha) = \alpha$

53

Considérons la fonction g de $[a;b]$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = f(x) - x$.
Comme f est continue sur $[a;b]$ donc g est aussi continue sur $[a;b]$.
L'équation : $x \in [a;b], f(x) = x$ est équivalente à l'équation: $x \in [a;b], g(x) = 0$.
Par ailleurs :
$g(a) = f(a) - a > 0$ car $f(a) \in [a;b]$ donc $f(a) > a$.
De même :
$g(b) = f(b) - b < 0$ car $f(b) \in [a;b]$ donc $f(b) < b$.
On en déduit que : $g(a) \times g(b) < 0$.
g est continue sur $[a;b]$ et $g(a) \times g(b) < 0$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $x \in [a;b], g(x) = 0$ admet au moins une solution.
Donc il existe $x_0 \in [a;b]$ tel que $g(x_0) = 0$.

Conclusion : il existe $x_0 \in [a; b]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

54

1. a) Démontrons que $25 \leq r \leq 120$

Soient h_1 la hauteur de l'eau avant le plongeon de la boule dans le cylindre et h_2 la hauteur après le plongeon de la boule dans l'eau et D le diamètre de la boule.

Apres plongeon dans le cylindre la surface de l'eau est tangente à la boule alors $h_2 = D$

De plus, comme h_2 est la hauteur de l'eau après plongeon et h_1 celle avant plongeon

On a : $h_1 \leq h_2$.

$h_2 \geq h_1 \Leftrightarrow h_2 \geq 50$ avec $h_1 = 50$ mm

$\Leftrightarrow D \geq 50$ avec $h_2 = \mathrm{D}$

$\Leftrightarrow 2r \geq 50$

$h_2 \geq h_1 \Leftrightarrow r \geq 25$ 1

D'autre part, la boule étant contenue dans un cylindre de base un disque de rayon 120 mm soit 240 mm on a donc un diamètre de longueur inférieure ou égale à celle du diamètre du disque du cylindre. d'où $D \leq 240$.

$D \leq 240 \Leftrightarrow 2r \leq 240$

$D \leq 240 \Leftrightarrow r \leq 120$ 2

De 1 et 2 on en déduit que $25 \leq r \leq 120$.

b) Démontrons que r est solution de l'équation (E) : $x^3 - 21600x + 540000 = 0$

Avant le plongeon de la boule, le volume V_1 occupé par l'eau dans le cylindre est : $V_1 = Rh_1\pi$

Après le plongeon de la boule, le volume V_2 occupé par la boule dans le cylindre est :

$V_2 = \frac{4\pi r^3}{3}$

Après plongeon de la boule, le volume occupé par l'eau et la boule est : $V_3 = Rh_2\pi$

$V_3 = Rh_2\pi$ or $h_2 = D = 2r$

Donc : $V_3 = Rh_2\pi \Leftrightarrow V_3 = 120\, h_2\pi$ avec $R = 120$.

$\Leftrightarrow V_3 = 28800\, r\pi$

V_3 étant le volume occupé par la boule et par l'eau

On a $V_3 = V_1 + V_2 \Leftrightarrow 28800\, r\pi = 720000\pi + \frac{4\pi r^3}{3}$

$V_3 = V_1 + V_2 \Leftrightarrow r^3 - 21600r + 540000 = 0$

On obtient : $r^3 - 21600r + 540000 = 0$

D'où r est solution de l'équation (E).

2) a) Démontrons que l'équation (E) admet deux solution positives exactes α et β telles que $\alpha \in [25.5\,;26]$ et $\beta \in [125\,;135]$

Posons $f(x) = x^3 - 21600x + 540000$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 21600$

$$f'(x) = 3(x - 60\sqrt{2})(x + 60\sqrt{2})$$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		$-60\sqrt{2}$		$60\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-60\sqrt{2})$	$\searrow$	$f(60\sqrt{2})$	$\nearrow$	$+\infty$

Avec $f(-60\sqrt{2}) = 1{,}76.10^6$ et $f(60\sqrt{2}) = -6{,}82.10^5$

f est continue et strictement croissante sur$]-\infty\,;-60\sqrt{2}]$ telle que

$f(]-\infty\,;\ -60\sqrt{2}\,]) =]-\infty\,;\ f(-60\sqrt{2})]$

Comme $0 \in\ ]-\infty\,;\ f(-60\sqrt{2})]$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]-\infty\,;\ -60\sqrt{2}\,]$.

Or α *et* β sont positifs donc ils ne peuvent appartenir à $]-\infty\,;\ -60\sqrt{2}\,]$.

f est continue et strictement décroissante sur $[-60\sqrt{2}\,;\ 60\sqrt{2}\,]$ telle que

$f([-60\sqrt{2}\,;\ 60\sqrt{2}]) = [\,f(-60\sqrt{2})\,;\ f(60\sqrt{2})]$

comme $0 \in [\,f(-60\sqrt{2})\,;\ f(60\sqrt{2})]$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[-60\sqrt{2}\,;\ 60\sqrt{2}]$

f est continue et strictement croissante sur $[60\sqrt{2}\,;+\infty[$ telle que

$f([60\sqrt{2}\,;+\infty[) = [f(60\sqrt{2})\,;\ +\infty[$

Comme $0 \in [f(60\sqrt{2})\,;\ +\infty[$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution β dans $[60\sqrt{2}\,;+\infty[$

. On a : $\alpha \in [-60\sqrt{2}\,;\ 60\sqrt{2}]$

$f(25{,}5) = 5781$; $f(25{,}5) > 0$

$$f\,(25{,}5)\times\, f(26) <\ 0$$

$f(26)\ =\ -4024\quad ;\ \ f(26) <\ 0$

Or :[25,5 ; 26] ⊂ [- $60\sqrt{2}$; $60\sqrt{2}$], f est continue et strictement décroissante sur [25,5 ; 26] tel que $f(25{,}5)\times f(26)\ =\ 0$ donc 25,5 ≤α ≤ 26

.On a : $\beta\in[60\sqrt{2}\,;+\infty[$

$$\left.\begin{array}{l} f(135)\ =\ 84375\quad ;\ f\,(135)\ >\ 0 \\ \\ f(125)\ =\ -206875\ \ ;\ f(125) <\ 0 \end{array}\right\}\ f\,(125)\times f(135) <\ 0$$

Or 125 ∈ $[60\sqrt{2}\,;+\infty[$ et 135 ∈ $[60\sqrt{2}\,;+\infty[$

f est continue et strictement décroissante sur [125 ; 135] tel que $f(125)\times f(135) <\ 0$ Donc $125\leq\ \beta\leq 135$.

Par conséquent l'équation (E) admet deux solution positives exactes $\alpha\ et\ \beta$ telles que

$\alpha\ \in\ [25{,}5\,;26]$ et $\beta\ \in\ [125\,;135]$

b) Déterminons une valeur approchée de r à 0.1mm près.

L'équation $f(x)\ =0$ admet deux solutions positives exactes $\alpha\ et\ \beta$ telles que

$\alpha\ \in\ [25{,}5\,;26]$ et $\beta\ \in\ [125\,;135]$

Comme r est solution de l'équation f(x) = 0 et $25\ \leq\ r\ \leq\ 120$ alors $r\ =\alpha$.

Donc : $r\ \in\ [25{,}5\,;26]$

Déterminons un encadrement de r d'amplitude 0,1mm par la méthode de balayage.

x	25,5	25,6	25,7	25,8	25,9
Signe de $f(x)$	+	+	+	-	-

$f(25{,}7)\ \times\ f\,(25{,}8) <\ 0$ alors $25{,}7\ <\ r\ \ <\ 25{,}8$

Donc $r\ =\ 25{,}7$ par défaut et $r\ =\ 25{,}8$ par excès

Situations d' évaluation

55

1. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}\Rightarrow\frac{1}{q}=\frac{1}{f}-\frac{1}{p}\Rightarrow q=\frac{fp}{p-f}$

2. a) $\lim\limits_{\substack{p\to f\\ >}}\varphi(p)=\lim\limits_{\substack{p\to f\\ >}}\frac{fp}{p-f}=+\infty.$

$$\lim_{p\to+\infty} \varphi(p) = \lim_{p\to+\infty} \frac{fp}{p-f} = \lim_{p\to+\infty} \frac{fp}{p} = f$$

b) On a : $\lim_{\substack{p\to f \\ >}} \varphi(p) = +\infty$. Donc plus un objet est proche du foyer, plus son image se rejette à l'infini.

On a : $\lim_{p\to+\infty} \varphi(p) = f$ donc plus un objet est éloigné du foyer, plus son image se rapproche du foyer. D'où Yao a raison.

55

Leçon 2

Dérivabilité et études de fonctions

Situation d'Apprentissage

Faire deux lectures de la situation d'apprentissage par deux apprenants.
Recenser et expliquer les données pertinentes.
Poser les questions suivantes :

Question/Consignes pour dérouler la situation	Réponse attendue
Cite les personnages et le contexte de cette situation	Le professeur de Physique Chimie ; les élèves de terminale à un cours de cinématique
Qu'est ce que le professeur de physique affirme	Il affirme que la fonction n'est pas dérivable en 5 mais est dérivable à gauche et à droite de 5.
Qu'est ce que les élèves décident de faire	Ils décident de faire recours à leur professeur de mathématique pour étudier la notion de dérivabilité à gauche et dérivabilité à droite

Cette leçon se déroulera selon le plan suivant.

1) Dérivabilité à gauche ; dérivabilité à droite d'une fonction en un point
2) Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle
3) Dérivée d'une fonction composée
4) Dérivée d'une bijection réciproque en un point
5) Dérivées successives
6) Point d'inflexion
7) Inégalités des accroissements finis

Installation des habiletés

Activité 1 Dérivabilité à gauche, dérivabilité à droite d'une fonction en un point

Dans l'énoncé, remplacer « $f(x) = x^2 + x + 1$, si $x \in [1, +\infty[$ » par

« $(x) = 0{,}25x^2 + 2{,}75$, si $x \in [1, +\infty[$. »

1. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{(x^2+x+2)-(2+\sqrt{0})}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{x^2+x}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} (x+1) = 1$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{2+\sqrt{x}-2}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x} \neq \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x}$$

2. $\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{(2+\sqrt{x})-(0,25+2,75)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{(0,25x^2+2,75)-3}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{0,25x^2-0,25}{x-1}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{0,25(x^2-1)}{x-1}$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} 0,25(x+1) = 0,5$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

Exercices de fixation

1. 1

1. c) ; 2. a) ; 3. b)

1.2

1-F ;2-V ; 3-V ; 4.V ; 5-F ; 6-F

1.3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + x$ si $x < -1$ et $f(x) = x + \sqrt{x+2}$ si $x \geq -1$

1. Le nombre dérivé de f à gauche en -1 :

$$f_g'(-1) = \lim_{\substack{x\to -1\\ <}} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{\substack{x\to -1\\ <}} \frac{(x^2+x)-(-1+\sqrt{-1+2})}{x+1} = \lim_{\substack{x\to -1\\ <}} \frac{x^2+x}{x+1}$$

$$= \lim_{\substack{x\to -1\\ <}} x = 1$$

2. Le nombre dérivé de f à droite en -1 :

$$f_d'(-1) = \lim_{\substack{x\to -1\\ >}} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{\substack{x\to -1\\ >}} \frac{\left(x+\sqrt{x+2}\right)-0}{x+1} = \lim_{\substack{x\to -1\\ >}} \frac{x+\sqrt{x+2}}{x+1}$$

$$= \lim_{\substack{x\to -1\\ >}} \frac{1}{\sqrt{x+2}-x} = \frac{1}{2}$$

3. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la courbe représentative de f admet une demi-tangente de coefficient directeur 1 à gauche au point d'abscisse –1 et une demi-tangente de coefficient directeur $\frac{1}{2}$ à droite au point d'abscisse –1

Activité 2 Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle

2.1 Définition

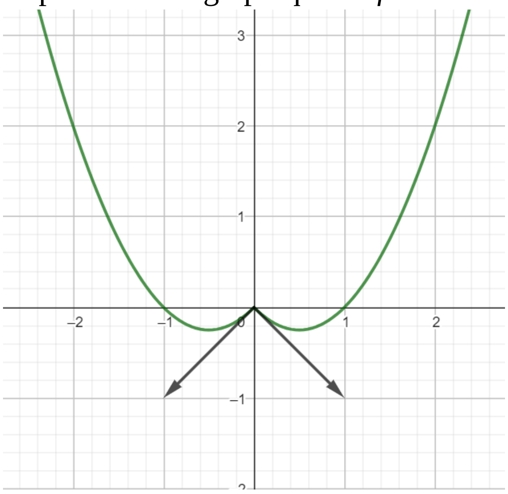
1. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^2-{x_0}^2}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} (x+x_0) = 2x_0$
Cette limite existe et est finie, donc *f* est dérivable en x_0
2. a)

Exercice de fixation

Une fonction *f* est dérivable sur un intervalle [*a* ; *b*] si *f* est **dérivable**sur]*a* , *b*[, dérivable à **gauche** en***b*** et **dérivable** droite en ***a***.

2.2 Fonction

1. $\forall x \in]-\infty; 0[, f(x) = x^2 + x$
$\forall x \in [0; +\infty[, f(x) = x^2 - x$
2. a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{x^2+x}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} (x+1) = 1.$
Cette limite existe et est finie, donc *f* est dérivable à gauche en 0
b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x^2-x}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (x-1) = -1.$
Cette limite existe et est finie, donc *f* est dérivable à droite en 0.
c) La fonction f n'est pas dérivable en 0 car le nombre dérivé de *f* à gauche en 0 est différent du nombre dérivé de *f* à droite en 0.
3. a) Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la courbe représentative de *f* admet une demi-tangente de coefficient directeur 1 à gauche au point d'abscisse 0 et une demi-tangente de coefficient directeur –1 à droite au point d'abscisse 0.
b) Représentation graphique de *f*.



Exercices de fixation

2.2.1

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{(x^2-2x-2)-(-3)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{x^2-2x+1}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{(x-1)^2}{x-1}$
$$= \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} x-1 = 0 = f'_g(1)$$
$$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{\frac{x-4}{x}+3}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{\frac{4x-4}{x}}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{4(x-1)}{x(x-1)} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{4}{x} = 4 = f'_d(1)$$
On a $f'_g(1) \neq f'_d(1)$, donc f n'est pas dérivable en 1
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la courbe représentative de f admet une demi-tangente horizontale à gauche au point d'abscisse 1 et une demi-tangente de coefficient directeur 4 à droite au point d'abscisse 1.

2.2.2

1. $\forall x \in]-\infty,-1[, f(x) = -x-1-\frac{1}{x}$
$$\forall x \in [-1;0[\cup]0,+\infty[, f(x) = x+1-\frac{1}{x}$$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} \frac{\left(-x-1-\frac{1}{x}\right)-(-1+1+1)}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} \frac{-x-2-\frac{1}{x}}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} \frac{-x^2-2x-1}{x(x+1)}$
$$= \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} \frac{-(x+1)^2}{x(x+1)} = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} \frac{-(x+1)}{x} = 0$$
$$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} \frac{\left(x+1-\frac{1}{x}\right)-1}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} \frac{x-\frac{1}{x}}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} \frac{x^2-1}{x(x+1)}$$
$$= \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} \frac{x-1}{x} = 2$$
$f'_g(-1) \neq f'_d(-1)$, donc f n'est pas dérivable en -1
3. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la courbe représentative de f admet une demi-tangente horizontale à gauche au point d'abscisse -1 et une demi-tangente de coefficient directeur 2 à droite au point d'abscisse -1.

Activité 3 **Dérivée d'une fonction composée**

Soit f et g deux fonctions telles f est définie sur un intervalle I , g est définie sur un intervalle contenant $f(I)$ et a un élément de I.

1. a)On a : $\lim\limits_{x\to a} \frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(a)}{f(x)-f(a)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)}$
Posons $h = f(x)-f(a)$
D'une part, si $x \to a$, alors $h \to 0$
D'autre part $f(x) = h + f(a)$
D'où $\lim\limits_{x\to a} \frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(a)}{f(x)-f(a)} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{g(f(a)+h)-g(f(a))}{h} = g'(f(a))$

b) On a $\lim\limits_{x\to a}\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\lim\limits_{x\to a}\frac{(gof)(x)-(gof)(a)}{f(x)-f(a)}$

$$\lim_{x\to a}\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(a)}{x-a}=f'(a)\times g'\big(f(a)\big)$$

D'où $g\circ f$ est dérivable en a et $(g\circ f)'(a)=f'(a)\times g'(f(a))$

2. Soit$x$ un élément quelconque de I. Alors f est dérivable en x et g est dérivable en $f(x)$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(g\circ f)(x+h)-(g\circ f)(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\times\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{f(x+h)-f(x)}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\times\lim_{h\to 0}\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{f(x+h)-f(x)}$$
$$=f'(x)\times\lim_{h\to 0}\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{f(x+h)-f(x)}$$

Posons $t=f(x+h)-f(x)$

D'une part, si $h\to 0$, alors $t\to 0$

D'autre part $f(x+h)=f(x)+t$

D'où $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{f(x+h)-f(x)}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{g(f(x)+t)-g(f(x))}{t}=g'\big(f(x)\big)$

Finalement, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(g\circ f)(x+h)-(g\circ f)(x)}{h}=f'x)\times g'\big(f(x)\big)$

On conclut que gof est dérivable sur I et $(gof)'=f'.(g'\circ f)$

Exercices de fixation

3.1

1.a ; 2.c

3.2

1.f ; 2.b ; 3.c ; 4.e ; 5.a ; 6.d

3.3

Dans le 4., remplacer $(fog)'(x)=\frac{3x^2(x^3-2)}{\sqrt{(x^3+2)^2+1}}$ par $(fog)'(x)=\frac{3x^2(x^3+2)}{\sqrt{(x^3+2)^2+1}}$

1.V ; 2.F ; 3.F ; 4.V

Activité 4 Dérivée d'une bijection réciproque en un point

Dans 2.d, aller remplacer « f^{-1} est – elle dérivable en 2 » par « f^{-1} est – elle dérivable en 2 ? Justifie la réponse. »

1. $f(-1) = 1$ et $f(0) = 2$. D'où $f^{-1}(1) = -1$ et $f^{-1}(2) = 0$.
2. a) f est une fonction polynôme, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier en -1 et en 0.

   b)En posant $u = f(x)$, on a $x = f^{-1}(u)$.

   Par suite $\frac{f^{-1}(u)-f^{-1}(1)}{u-1} = \frac{x-(-1)}{f(x)-f(-1)} = \frac{(x-(-1))\times\frac{1}{x-(-1)}}{(f(x)-f(-1))\times\frac{1}{x-(-1)}} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}}$

   D'où $\lim\limits_{u\to1} \frac{f^{-1}(u)-f^{-1}(1)}{u-1} = \lim\limits_{x\to-1} \frac{1}{\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}}$

   c) On a $\lim\limits_{u\to1} \frac{f^{-1}(u)-f^{-1}(1)}{u-1} = \lim\limits_{x\to-1} \frac{1}{\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}}$ et $\lim\limits_{x\to-1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = f'(-1)$ car f est dérivable en -1, donc f^{-1} est dérivable en 1 et $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(-1)}$

   d) $\lim\limits_{u\to2} \frac{f^{-1}(u)-f^{-1}(2)}{u-2} = \lim\limits_{x\to0} \frac{1}{\frac{f(x)-f(0)}{x-0}} = \frac{1}{f'(0)}$.

   f^{-1}est dérivable en 2 car $\lim\limits_{u\to2} \frac{f^{-1}(u)-f^{-1}(2)}{u-2} = \frac{1}{f'(0)}$ et $f'(0)$ existe.

Dans la synthèse, remplacer « $f^{-1}(b) = \frac{1}{f'(a)}$ » par « $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$ »

Exercices de fixation

4.1

1.F ; 2.F ; 3.V ; 4.V

4.2

1.a car $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)}$;

2.bcar $(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(1)}$;

3.c car $(f^{-1})'(-9) = \frac{1}{f'(-2)}$

Activité 5 Dérivées successives

On considère la fonction f dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = x^5 - 2x^3 + 5$.

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 5x^4 - 6x^2$.
2. f'est dérivable sur $\mathbb{R}$car f' est une fonction polynôme.
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = 20x^3 - 12x$.
3. $f^{(2)}$est dérivable sur $\mathbb{R}$car $f^{(2)}$ est une fonction polynôme.
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(3)}(x) = 60x^2$.
4. La dérivée 4e de f est la fonction notée $f^{(4)}$ et définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$,
   $$f^{(4)}(x) = 120x$$
5. $f^{(3)}, f^{(4)}$et$f^{(5)}$ se notent respectivement $\frac{d^3f}{dx^3}$, $\frac{d^4f}{dx^4}$ et $\frac{d^4f}{dx^4}$.

Exercices de fixation

5.1

1.d ; 2.b

5.2

Dans l'énoncé, remplacer $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ par $h : x \longmapsto \frac{1}{x}$ et le mettre en 2e position.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(3)}(x) = 0$ (car $f'(x) = 2x$ et $f'(x) = 2$)

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $h^{(3)}(x) = -\frac{6}{x^4}$ (car $h'(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $h''(x) = \frac{2}{x^3}$)

Activité 6 Point d'inflexion

Dans l'énoncé :

3. Remplacer « $\forall\ x \in [a, x_0]\ f''(x) \geq 0$ et $\forall\ x \in [x_0, b]\ f''(x) \leq 0$ » par «$\forall\ x \in [a, x_0]\ f''(x) \leq 0$ et $\forall\ x \in [x_0, b]\ f''(x) \geq 0$ »
   b) Remplacer « h' est croissante » par « h' est décroissante »
   et« $f'(x) - f'(x_0) \leq 0$ » par « $f'(x) - f'(x_0) \geq 0$ »
   c) Remplacer « h est décroissante » par « h est croissante »
   et « $h(x) \geq 0$ » par « $h(x) \leq 0$ »
   d) Remplacer « $h(x) \leq 0$ » par « $h(x) \geq 0$ »
   et « (C_f) est en-dessous de (T) » par « (C_f) est au-dessus de (T) »

1. (C_g) est en-dessous de (T) sur [-3 ; 1].
2. (C_f) est en-dessous de (T) sur $[a\ ;x_0]$ et au-dessus de (T) sur $[x_0\ ;b]$.
3. a) ▪ $h(x_0) = f(x_o) - f'(x_0)(x_0 - x_0) - f(x_0) = 0$
   ▪ $h'(x) = f'(x) - f'(x_0)$.
   b) ▪ $h''(x) = f''(x)$et $\forall x \in [a, x_0]$, $f''(x) \leq 0$, donc h' est décroissante sur $[a, x_0]$
   ▪ $\forall x \in [a, x_0]$, $h'(x) \geq h'(x_0)$, car h' est décroissante sur $[a, x_0]$
   $$f'(x) - f'(x_0) \geq f'(x_0) - f'(x_0)$$
   $$f'(x) - f'(x_0) \geq 0$$
   c) ▪$h'(x) = f'(x) - f'(x_0)$ et$\forall x \in [a, x_0]$, $f'(x) - f'(x_0) \geq 0$, donc h est croissante sur $[a, x_0]$
   ▪h est croissante sur $[a, x_0]$ et $h(x_0) = 0$, donc $\forall x \in [a, x_0]$, $h(x) \leq 0$.
   ▪$h(x) = f(x) - f'(x_o)(x - x_o) - f(x_o)$ et $\forall x \in [a, x_0]$, $h(x) \leq 0$, donc (C_f) est en-dessous de (T) sur $[a\ ;x_0]$
   d) ▪ $h''(x) = f''(x)$ et $\forall x \in [x_0, b]$, $f''(x) \geq 0$, donc h' est croissante sur $[x_0, b]$
   ▪ $\forall x \in [x_0, b]$, $h'(x_0) \leq h(x)$, car h' est croissante sur $[x_0, b]$
   $$f'(x_0) - f'(x_0) \leq f'(x) - f'(x_0)$$
   $$0 \leq f'(x) - f'(x_0)$$
   ▪ $h'(x) = f'(x) - f'(x_0)$ et$\forall x \in [x_0, b]$, $f'(x) - f'(x_0) \geq 0$, donc h est croissante sur $[x_0, b]$
   ▪ h est croissante sur $[x_0, b]$ et $h(x_0) = 0$, donc $\forall x \in [x_0, b]$, $h(x) \geq 0$.

▪ $h(x) = f(x) - f'(x_o)(x - x_o) - f(x_o)$ et $\forall x \in [x_0, b]$, $h(x) \geq 0$, donc (C_f) est au-dessus de (T) sur $[x_0, b]$

Exercices de fixation

6.1

Remplacer l'exercice par ce qui suit :

Relève les points d'inflexion parmi les points marqués dans chacune des figures suivantes

Figure 1

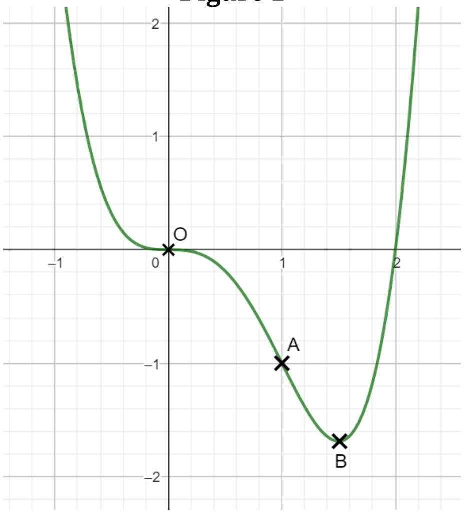
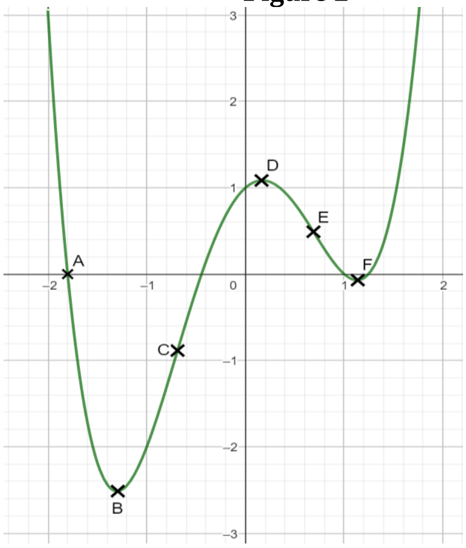


Figure 2



Corrigé

Figure 1 : les points O et A

Figure 2 : Les points C et E

6.2

1.F ; 2.V ; 3.F ; 4.V

6.3

1.b ; 2.a

Activité 7 Inégalités des accroissements finis

1. a) $g'(x) = f'(x) - m$
$\forall\, x \in\ [a\,, b], m \leq f'(x)$, soit $f'(x) - m \geq 0$. Donc $\forall\, x \in\ [a\,, b]$, $g'(x) \geq 0$

b) $\forall x \in [a, b]$, $g'(x) \geq 0$ donc g est croissante sur $[a, b]$

$$a \leq b \Longrightarrow g(a) \leq g(b)$$

$g(a) \leq g(b) \Longrightarrow f(a) - ma \leq f(b) - mb \Longrightarrow m(a-b) \leq f(b) - f(a)$.

2. a) $h'(x) = M - f'(x)$.
   $\forall x \in [a, b], f'(x) \leq \mathrm{M}$, soit $f'(x) - \mathrm{M} \leq 0$. Donc $\forall x \in [a, b]$, $h'(x) \leq 0$
   b) $\forall x \in [a, b]$, $h'(x) \leq 0$ donc h est décroissante sur $[a, b]$

$$a \leq b \Longrightarrow h(a) \geq h(b)$$

   $h(a) \geq h(b) \Longrightarrow \mathrm{M}a - f(a) \leq \mathrm{M}b - f(b) \Longrightarrow f(b) - f(a) \leq \mathrm{M}(b-a)$.
3. a) D'après les questions 1.b) et 2.b) on a : $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.
   $\forall x \in \mathrm{I}, |f'(x)| \leq \mathrm{M}$, donc $\forall x \in [a, b], |f'(x)| \leq \mathrm{M}$, soit $-\mathrm{M} \leq f'(x) \leq \mathrm{M}$
   b) D'après tout ce qui précède, $-\mathrm{M}(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq \mathrm{M}(b-a)$, d'où $|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$

Exercices de fixation

7-1

1. Soit f est une fonction dérivable sur un intervalle I, a *et* b deux éléments de I(a<b).S'il existe deux réels m *et* M tels que : $\forall x \in [a, b] m \leq f'(x) \leq M$, alors on a : $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$
2. Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et s'il existe un nombre M tels que$\forall x \in \mathrm{I}, [a, b], |f'(x)| \leq \mathrm{M}$alors pour tous réels *et* b *de* I , on a : $|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$.

7.2

a. V ; b. F ; c. F ; d. V

7.3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin x$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \cos x$
Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq 1$, pour nombres réels a *et* b, on a :
$|f(a) - f(b)| \leq 1 \times |a-b|$, soit $|\sin a - \sin b| \leq |a-b|$

Exercices de renforcement

1) On a $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{x^2-x-3-(-1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{x^2-x-2}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}}(x+1) = 3$

$\Rightarrow f$ est dérivable à droite en 2 et $f'_d(2) = 3$

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \frac{\frac{2x-3}{x-3}-(-1)}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \frac{3x-6}{(x-3)(x-2)} = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \frac{3}{(x-3)} = -3$

$\Rightarrow f$ est dérivable à gauche en 2 et $f'_g(2) = -3$

f est dérivable à gauche en 2, dérivable à droite en 2 et $f'_g(2) \neq f'_d(2)$ donc f n'est pas dérivable en 2.

$(\mathcal{C})$admet au point d'abscisse 2 une demi-tangente :

- à gauche d'équation : $y = f'_g(2)(x-2) + f(2)$

$$y = -3x + 5$$

- à droite d'équation : $y = f'_d(2)(x-2) + f(2)$

$$y = 3x - 7$$

2) On a : $f(x) = x^2 + 3x + 2$ si $x \in]-\infty; -2] \cup [-1; +\infty[$ et $f(x) = -x^2 - 3x - 2$si$x \in]-2; -1[$.

➢ Dérivabilité de f à gauche en -1.

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ <}} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{\substack{x\to -1\\ <}} \frac{-x^2-3x-2}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1} -(x+2) = -1$$

$\Rightarrow f$ est dérivable à gauche en -1 et $f'_g(-1) = -1$

➢ Dérivabilité de f à droite en -1

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ >}} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{\substack{x\to -1\\ >}} \frac{x^2+3x+2}{x+1} = \lim_{x\to -1}(x+2) = 1$$

$\Rightarrow f$ est dérivable à droite en -1 et $f'_d(-1) = 1$.

f est dérivable à gauche en -1, dérivable à droite en -1, mais $f'_g(-1) \neq f'_d(-1)$ donc f n'est pas dérivable en -1.

(Γ)admet au point d'abscisse -1 une demi-tangente :

- à gauche d'équation : $y = f'_g(-1)(x-(-1)) + f(-1)$

$$y = -(x+1)$$
$$y = -x - 1$$

- à droite d'équation : $y = f'_d(-1)(x-(-1)) + f(-1)$

$$y = x + 1$$

3) L'ensemble de définition de f est $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$,

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

or $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} (x+1).\frac{1}{x-1} = +\infty$

or $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty \Rightarrow f$ n'est pas dérivable en 1.

- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty \Rightarrow (\Gamma)$admet au point d'abscisse 1 une tangente verticale.

2

1) $g$est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = (x^3 - 3x^2 + x - 1)' = 3x^2 - 6x$

g'est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, g''(x) = 6x - 6$

2) On a $g''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$g''(x) > 0 \Rightarrow 6x - 6 > 0 \Rightarrow x > 1$

$g''(x) < 0 \Rightarrow 6x - 6 < 0 \Rightarrow x < 1.$

$g''(x)$s'annule en 1 en changeant de signe, donc $(\mathcal{C})$ admet le point $A(1;-2)$ comme point d'inflexion.

3

Démontrons que f est dérivable en -1.

On a : $\lim\limits_{x\to-1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim\limits_{x\to-1} \frac{(\frac{x-1}{x+2})^3+8}{x+1}$

$= \lim\limits_{x\to-1} \frac{3(x+1)(3x^2+12x+21)}{(x+2)^3\,(x+1)}$

$= \lim\limits_{x\to-1} \frac{9(x^2+4x+7)}{(x+2)^3}$

$=36$

On en déduis que$f$est dérivable en -1 et $f'(-1) = 36$.

4

1) $f$est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x \in \mathbb{R}\,, f'(x) = 5(x^2 - x + 1)'(x^2 - x + 1)^4 = 5(2x - 1)(x^2 - x + 1)^4$

2) $f$est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3(\cos 2x)'cos^2(2x)$

$= -3(2x)' \sin(2x)\, cos^2(2x).$

$= -6 \sin(2x)\, cos^2(2x).$

3) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{3}(x^2 + x + 1)'(x^2 + x + 1)^{\frac{1}{3}-1}$

$= \frac{1}{3}(2x + 1)(x^2 + x + 1)^{\frac{-2}{3}}$

$= \frac{2x+1}{3\sqrt[3]{x^2+x+1}}$

4) f est dérivable sur $]2; +\infty[$ et $\forall x \in]2; +\infty[$,

$$f'(x) = 4(\frac{2x-1}{x-2})'(\frac{2x-1}{x-2})^3$$

$= 4 \times \frac{-3}{(x-2)^2}\left(\frac{2x-1}{x-2}\right)^3$

$= \frac{-12(2x-1)^3}{(x-2)^5}$

5) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -\frac{1}{3}(x^2 + 3)'(x^2 + 3)^{-\frac{1}{3}-1}$$

$= -\frac{1}{3}(2x)(x^2 + 3)^{-\frac{4}{3}}$

$= \frac{-2x}{3\sqrt[3]{(x^2+3)^4}}$

$= \frac{-2x}{3(x^2+3)\sqrt[3]{x^2+3}}$

5

1) g est dérivable sur $]-1; +\infty[$ et $\forall x \in]-1; +\infty[$, $g'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

De plus $\forall x \in]-1; +\infty[$, $\frac{1}{(x+1)^2} > 0$, donc g est strictement croissante sur $]-1; +\infty[$.

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} (3x + 2) \times \frac{1}{x+1} = +\infty$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x}{x} = 3$, donc $g(]-1;\ +\infty[) =]-\infty; 3[$.

g est continue et strictement croissante sur $]-1; +\infty[$, or $g(]-1; +\infty[) =]-\infty; 3[$ donc g est une bijection de $]-1; +\infty[$ vers $]-\infty; 3[$.

2) On a : $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$

g est dérivable en $-\frac{2}{3}$ et $g'\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{(-\frac{2}{3}+1)^2} = 9 \neq 0$ donc g^{-1} est dérivable en 0 et

$(g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{9}$.

6

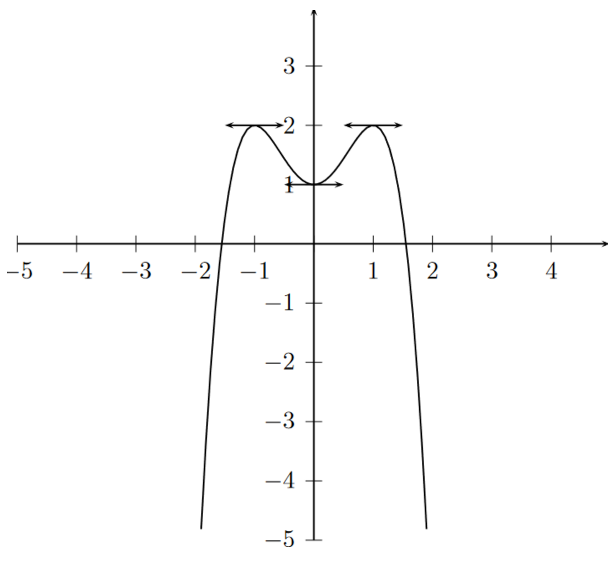
1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$. (On peut aussi dire que le domaine de définition est symétrique par rapport à 0)
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -(-x)^4 + 2(-x)^2 + 1 = -x^4 + 2x^2 + 1 = f(x)$, donc f est paire
2. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (-x^4) = -\infty$et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (-x^4) = -\infty$
3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = -4x^3 + 4x = 4x(1 - x^2)$.

x	0		1		$+\infty$
$4x$	0	$+$		$+$	
$1-x^2$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	

4.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

5. L''axe des ordonnées est un axe de symétrie de la courbe de f.



7

1) $f$est dérivable sur $]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et $\forall\, x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $f'(x) = 1 + \tan^2 x$.

Or $\forall\, x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $1 + tan^2 x > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

D'autre part $\lim_{\substack{x \to -\frac{\pi}{2} \\ >}} \tan x = -\infty$, $\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ <}} \tan x = +\infty$ donc $f\left(\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[\right) =]-\infty ; +\infty[= \mathbb{R}$.

$f$est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ et $f\left(\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}$, donc f est une bijection de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbb{R}$.

2) On a $(x) = \sqrt{3}$, $x \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$ or f est dérivable en $\frac{\pi}{3}$ et $f'(\frac{\pi}{3})= 1 + tan^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \neq 0$ donc f^{-1} est dérivable en $\sqrt{3}$ et $(f^{-1})'(\sqrt{3}) = \frac{1}{f'(\frac{\pi}{3})} = \frac{1}{4}$.

8

1. $f(x) = 5x^4 - 12x^3 - 3$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 20x^3 - 36x^2$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f''^{(x)} = 60x^2 - 72x$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(3)}(x) = 120x$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(4)}(x) = 120$

2. $f(x) = \cos(2x + 1)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -2\sin(2x + 1)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = -4\cos(2x + 1)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(3)}(x) = 8\sin(2x + 1)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(4)}(x) = 16\cos(2x + 1)$

3. $f(x) = \sin x$

$f'(x) = cosx, f^{(2)} = -sinx$, $f^{(2)} = -sinx$, $f^{(3)} = -cosx$, $f^{(4)} = sinx$

4. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$, $f^{(3)}(x) = \frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}$, $f^{(4)}(x) = -\frac{80}{81}x^{-\frac{11}{3}}$.

9

1) $f$est dérivable sur $]0;\frac{\pi}{2}]$ et $\forall x \in]0;\frac{\pi}{2}]$, $f'(x) = -\frac{\cos x}{sin^2 x}$. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \forall x \in]0;\frac{\pi}{2}[$. On a $-cosx < 0$ et donc $\forall x \in \left]0 ;\frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) < 0$, d'où f est strictement décroissante sur $]0;\frac{\pi}{2}]$.

2) a) f est continue et strictement décroissante sur $]0;\frac{\pi}{2}]$ donc f est une bijection de $]0;\frac{\pi}{2}]$ sur $f(]0;\frac{\pi}{2}])$.

$f(]0;\frac{\pi}{2}]) = [f\left(\frac{\pi}{2}\right); \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)[= [1;+\infty[$, par suite f est une bijection de $]0;\frac{\pi}{2}]$ sur $[1;+\infty[$.

b) $x \in]0;\frac{\pi}{2}]$, $f(x) = 1 \Leftrightarrow x \in]0;\frac{\pi}{2}],\frac{1}{sinx} = 1 \Leftrightarrow x \in]0;\frac{\pi}{2}],\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$, d'où $f^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$

$x \in]0;\frac{\pi}{2}]$, $f(x) = 2 \Leftrightarrow x \in]0;\frac{\pi}{2}]$, $sinx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in]0;\frac{\pi}{2}]$, $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$, d'où $f^{-1}(2) = \frac{\pi}{6}$

c) $f^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$ or f est dérivable en $\frac{\pi}{2}$, mais $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, donc f^{-1} n'est pas dérivable en 1.

$f^{-1}(2) = \frac{\pi}{6}$, f est dérivable en $\frac{\pi}{6}$ et

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-\cos\frac{\pi}{6}}{\sin^2\frac{\pi}{6}} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \times \frac{4}{1} = -2\sqrt{3} \neq 0$, donc f^{-1} est dérivable en 2 et $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{-1}{2\sqrt{3}}$.

10

1. a) Les fonctions $x \longmapsto 2x, x \longmapsto \sqrt{x^2+3}$ et $x \longmapsto -1$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2+3} \neq 0$, donc g dérivable sur $\mathbb{R}$.

   $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \frac{2\sqrt{x^2+3} - 2x \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}}{\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{x^2+3} - 2 \times \frac{x^2}{\sqrt{x^2+3}}}{x^2+3} = \frac{2(x^2+3-x^2)}{(3+x^2)\sqrt{3+x^2}} = \frac{6}{(3+x^2)\sqrt{3+x^2}}$.

   b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) > 0$, donc g est strictement croissantesur$\mathbb{R}$.

x	$-\infty + \infty$
$g'(x)$	+
$g(x)$	$\nearrow$

   c) ▪ $g(1) = \frac{2}{\sqrt{4}} - 1 = 1 - 1 = 0$.

   ▪ g est strictement croissantesur$\mathbb{R}$et g(1) = 0, donc $\forall x \in]-\infty, 1[$, $g(x) < 0$ et $\forall x \in]1, +\infty[$, $g(x) > 0$.

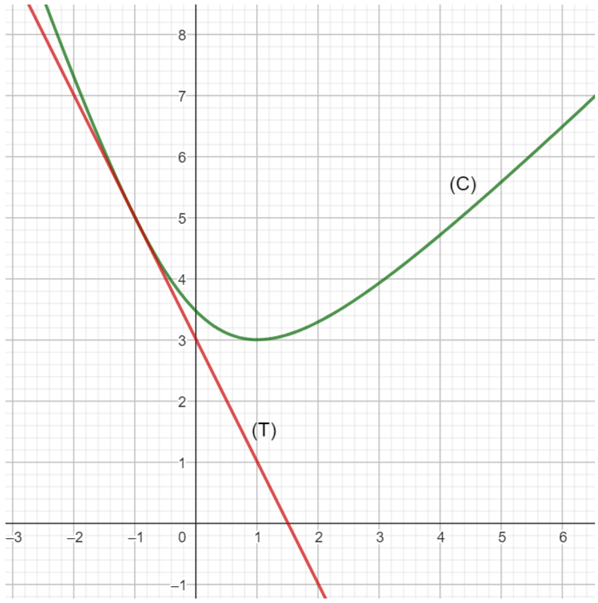
2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2\sqrt{3+x^2} - x$.
3. a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2 \times \frac{2x}{2\sqrt{3+x^2}} - 1 = \frac{2x}{\sqrt{3+x^2}} - 1 = g(x)$.

   D'où d'après la question précédente, $\forall x \in]-\infty, 1[$, $f'(x) < 0$ et $\forall x \in]1, +\infty[$, $f'(x) > 0$.

x	$-\infty 1 +\infty$
$f'(x)$	– 0 +
$f(x)$	$\searrow$ 3 $\nearrow$

   b) (T) : $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$, soit $y = -2(x+1) + 5$ou $y = -2x + 3$

   c) Courbe représentative (C) de la fonction f



11

Soit a un réel strictement positif. Considérons la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

$f$est dérivable sur $[a;a+1]$ et $\forall\ x\ \in [a;a+1]$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

On a $\quad a \leq x \leq a+1 \Rightarrow 2\sqrt{a} \leq 2\sqrt{x} \leq 2\sqrt{a+1}$,

$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{a+1}} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

Donc $\forall x \in [a;a+1]$, $\frac{1}{2\sqrt{a+1}} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}$ d'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\frac{1}{2\sqrt{a+1}}(a+1-a) \leq f(a+1) - f(a) \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}(a+1-a)$$

$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{a+1}} \leq \sqrt{a+1} - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}$ce qui achève la démonstration.

12

1) Montrons que $\forall x \geq 0, (1+x)^{\frac{1}{3}} \leq 1 + \frac{1}{3}x$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. La fonction $f: t \longmapsto t^{\frac{1}{3}}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et donc sur $[1;1+x]$.

$\forall\ t\ \in [1;1+x], f'(t) = \frac{1}{3}t^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}$. D'autre part $\forall\ t\ \in [1;1+x]$, on a :

$1 \leq \sqrt[3]{t^2} \leq \sqrt[3]{1+x} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \leq f'(t) \leq \frac{1}{3}$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}(1+x-1)\leq f(1+x)-f(1)\leq\frac{1}{3}(1+x-1)\Rightarrow f(1+x)-f(1)\leq\frac{1}{3}x$,

$\Rightarrow (1+x)^{\frac{1}{3}}-1\leq\frac{1}{3}x\Rightarrow\ (1+x)^{\frac{1}{3}}\ \leq 1+\frac{1}{3}x.$ Ce qui termine la preuve.

2) Démontrons que :$\forall x\in\mathbb{R}, |\sin x\,|\leq|x|$.

Considérons la fonction $f: t\longmapsto \sin t$ définie sur $\mathbb{R}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall\ t\in\mathbb{R}, f'(t)=\cos t$.

D'autre part $\forall x\in\mathbb{R}\,; -1\leq\cos t\ \leq 1\Rightarrow|\cos t\,|\leq 1$ c'est-à-dire

$\forall x\in\mathbb{R}, |f'(t)|\leq 1$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a

$$\forall x\in\mathbb{R}, |f(x)-f(0)|\leq 1.|x-0|$$

$$\text{Soit } |\sin x|\leq\ |x|, \forall x\in\mathbb{R}$$

1) Démontrons que $x\geq 0$, $\frac{x}{1+x}\leq\ln(1+x)\leq x$

Considérons la fonction $f: t\longmapsto\ln(t)$ définie sur $]0;+\infty[$.

Soit x un réel positif. $f$est dérivable sur $[1;1+x]$ et $\forall\ t\in[1;1+x]$, $f'(t)=\frac{1}{t}$.

D'autre part $t\in[1;1+x]\Rightarrow 1\leq t\leq 1+x$

$$\Rightarrow\frac{1}{1+x}\leq\frac{1}{t}\leq 1$$

$$\Rightarrow\frac{1}{1+x}\leq f'(t)\leq 1$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\frac{1}{1+x}(1+x-1)\leq f(1+x)-f(1)\leq 1(1+x-1)\Rightarrow\frac{x}{1+x}\ \leq\ln(1+x)\leq x.$$

Ce qui achève la démonstration.

13

1. Le triangle ABH est rectangle en H, donc son aire est $\frac{1}{2}\times \mathrm{HA}\times\mathrm{HB}$

 ▪ Dans le triangle ABC, rectangle en A, on a HA×BC = AB×AC, d'où HA×$\sqrt{x^2+1}$ = 1×x, soit $\mathrm{HA}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

 ▪ Dans le triangle BAH, rectangle en H, on a $\mathrm{HB}^2+\mathrm{HA}^2=\mathrm{AB}^2$, d'où $\mathrm{HB}^2=1-\frac{x^2}{x^2+1}=\frac{1}{x^2+1}$, soit $\mathrm{HB}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

 ▪ En définitive, l'aire du triangle ABH est : $\frac{1}{2}\times\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\times\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{2(x^2+1)}$

2. **Étude des variations de *f***

 On a :$f(x)=\frac{x}{2(x^2+1)}$

 f est définie sur $\mathbb{R}$

 f est une fonction rationnelle donc dérivable sur son ensemble de définition qui est $\mathbb{R}$

 $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1(x^2+1)-x(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{2(x^2+1)^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $4(x^2+1)^2 > 0$, donc f '(x) a le même signe que $1 - x^2$.
$\forall x \in]-1, 1[$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement décroissante sur $]-1, 1[$
$\forall x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, $f'(x) < 0$, donc f est strictement croissante sur $]-\infty, -1[$ est sur $]1, +\infty[$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘	

Déduction de la valeur de *x*
La fonction f atteint son maximum en 1 sur $]0, +\infty[$, donc l'aire du triangle ABH est maximale lorsque x est égal à 1.

14

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = |x+1| + \frac{1}{x-1}$.

1. La fonction $u: x \longmapsto |x+1|$ est continue sur $\mathbb{R}$en tant que composée des fonctions $x \longmapsto x+1$ et $x \longmapsto |x|$ qui sont continues sur $\mathbb{R}$
La fonction $u: x \longmapsto \frac{1}{x-1}$ est continue sur son ensemble de définition $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ entant que fonction rationnelle.
Par conséquent la fonction $f = u + v$ est continue en tout point de son ensemble de définition
2. Pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, $\zeta(h) = \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \frac{|h|+\frac{1}{h-2}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{h} = \frac{|h|+\frac{h}{2(h-2)}}{h} = \frac{|h|}{h} + \frac{1}{2(h-2)}$
Dérivabilité de f en -1
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \zeta(h) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \left(\frac{h}{h} + \frac{1}{2(h-2)}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \left(1 + \frac{1}{2(h-2)}\right) = \frac{3}{4} = f'_d(-1)$$
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \zeta(h) = \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \left(\frac{-h}{h} + \frac{1}{2(h-2)}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \left(-1 + \frac{1}{2(h-2)}\right) = -\frac{5}{4} = f'_g(-1)$$
$f'_d(-1) \neq f'_d(-1)$, donc f n'est pas dérivable en -1.
3. ▪ f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$
▪ $\forall x \in]-\infty\,;\,-1[$, $f(x) = -x - 1 + \frac{1}{x-1}$ et $f'(x) = -1 - \frac{1}{(x-1)^2}$
▪ $\forall x \in]-1\,;\,+\infty[\setminus \{1\}$, $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}$ et $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$
4. ▪ $\forall x \in]-\infty\,;\,-1[$, $f'(x) = -1 - \frac{1}{(x-1)^2}$
$\forall x \in]-\infty\,;\,1[$, $f'(x) < 0$
▪ $\forall x \in]-1\,;\,+\infty[\setminus \{1\}$, $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$
$\forall x \in]-1\,;\,+\infty[\setminus \{1\}$, $(x-1)^2 > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $x(x-2)$
$f'(2) = 0$, $\forall x \in]1\,;\,2[$, $f'(x) < 0$ et $\forall x \in]2; +\infty[$, $f'(x) > 0$

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

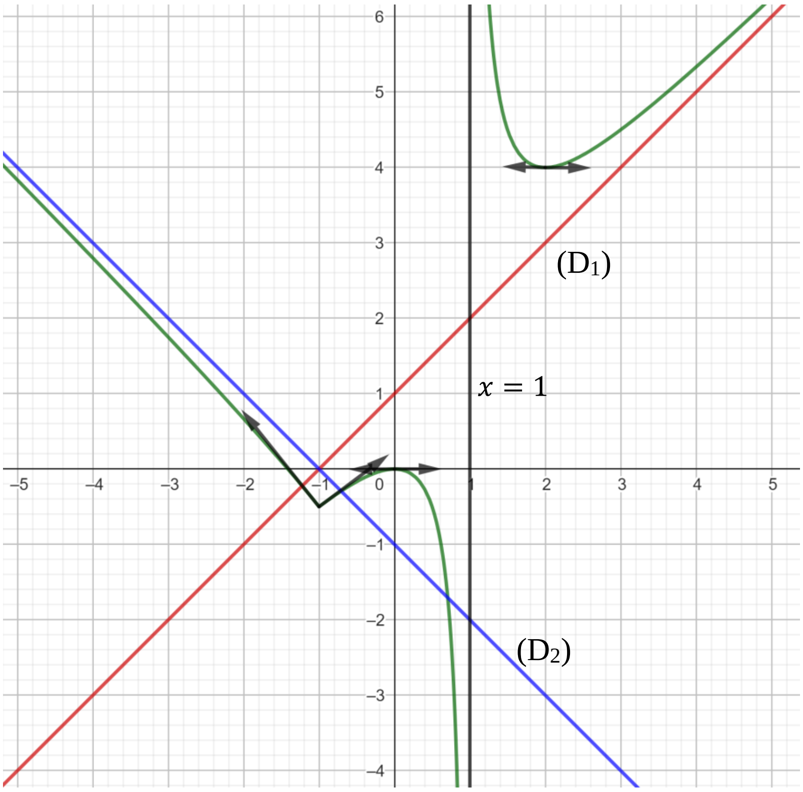
5. a) $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[x + 1 + \frac{1}{x-1} - (x+1)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1} = 0$, donc la droite

(D_1) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe (C_f) en $+\infty$.
$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - (-x - 1)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x - 1 + \frac{1}{x-1} - (-x - 1)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1} = 0$, donc la droite$(D_2)$ d'équation $y = -x - 1$ est asymptote à la courbe (C_f) en $-\infty$.

b) Demi-tangente à gauche (T) : $y = f'_g(-1)(x + 1) + f(-1) = \frac{3}{4}(x + 1) - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$

Demi-tangente à droite (T') : $y = f'_d(-1)(x + 1) + f(-1) = -\frac{5}{4}(x + 1) - \frac{1}{2} = -\frac{5}{4}x - \frac{7}{4}$

c)



15

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{2x^2-4x+2}{2x+3}$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$, $f(x) = x - \frac{7}{2} + \frac{\frac{25}{2}}{2x+3}$ (Utiliser la division euclidienne ou la méthode des coefficients indéterminés)

2. ▪ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x) - \left(x - \frac{7}{2}\right)\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{25}{2}}{2x+3} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - \left(x - \frac{7}{2}\right)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{25}{2}}{2x+3} = 0$, donc la droite (D) : $y = x - \frac{7}{2}$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$.

   ▪ $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{3}{2}\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-\frac{3}{2}\\ <}}(2x^2 - 4x + 2) \times \frac{1}{2x+3} = -\infty$ et
   $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{3}{2}\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-\frac{3}{2}\\ >}}(2x^2 - 4x + 2) \times \frac{1}{2x+3} = +\infty$, donc la droite (D) : $x = -\frac{3}{2}$ est asymptote verticale à (C)

3. On a $I\left(-\frac{3}{2}; -5\right)$.

Pour tout$x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ tel que $\left(2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) - x\right) \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$,

$$f(x) + f\left(2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) - x\right) = f(x) + f(-3 - x)$$

$$= x - \frac{7}{2} + \frac{\frac{25}{2}}{2x + 3} - 3 - x - \frac{7}{2} + \frac{\frac{25}{2}}{2(-3 - x) + 3}$$

$$= -3 - 7 + \frac{\frac{25}{2}}{2x + 3} + \frac{\frac{25}{2}}{-2x - 3} = -10 = 2 \times (-5)$$

Donc le point I est un centre de symétrie de (C).

4. ▪Étude des variations de f

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$, on a $f'(x) = \frac{(4x-4)(2x+3)-2(2x^2-4x+2)}{(2x+3)^2} = \frac{4x^2+12x-16}{(2x+3)^2} = \frac{4(x-1)(x+4)}{(2x+3)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1oux = -4$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-4; -\frac{3}{2}\right[\cup \left]-\frac{3}{2}; 1\right[etf'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -4[\cup]1; +\infty[$

D'où f est strictement décroissante sur$\left]-4; -\frac{3}{2}\right[$ et sur$\left]-\frac{3}{2}; 1\right[$

f est strictement croissante sur$]-\infty; -4[$ et sur$]1; +\infty[$

x	$-\infty$		-4		$-\frac{3}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-10	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0	↗	$+\infty$

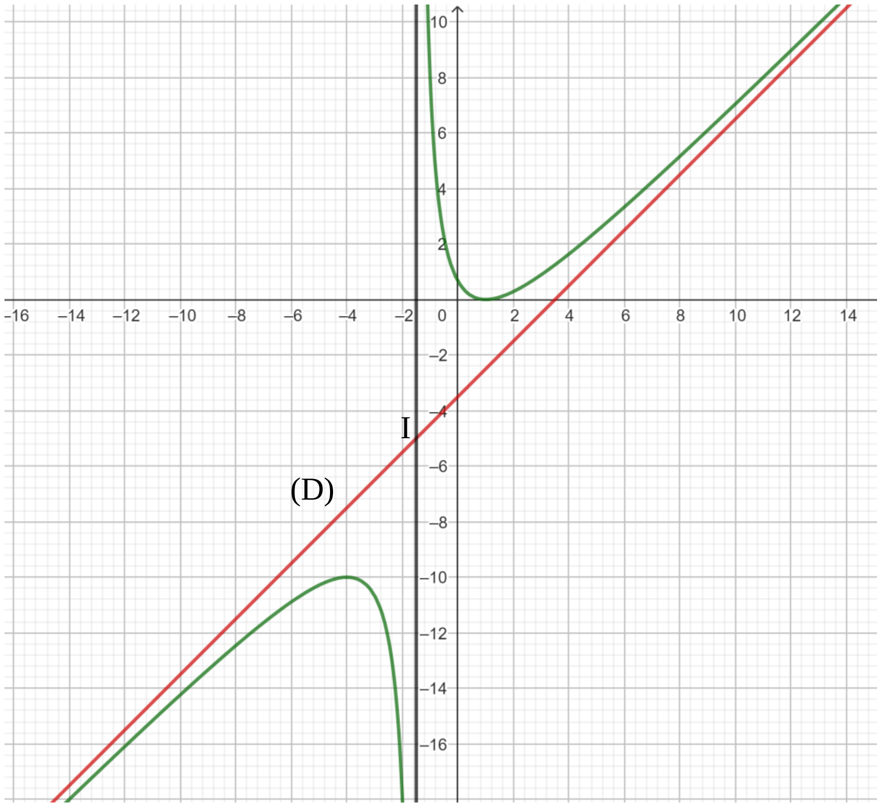
▪ Position de (C) par rapport à (D)

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$, $f(x) - \left(x - \frac{7}{2}\right) = \frac{\frac{25}{2}}{2x+3}$

$f(x) - \left(x - \frac{7}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[etf(x) - \left(x - \frac{7}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{3}{2}; +\infty\right[$

Donc (C) est au-dessous de (D) sur $\left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[$ et (C) est au-dessus de (D) sur $\left]-\frac{3}{2}; +\infty\right[$

▪ Courbe représentative



5. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$, on a $f(x) = m \Leftrightarrow \frac{2x^2-4x+2}{2x+3} = m \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 2mx + 3m$
$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2(m+2)x - 3m + 2 = 0$$
Les solutions de l'équation (E) : $2x^2 - 2(m+2)x - 3m + 2 = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de (C) et de la droite d'équation $y = m$.
Si $m = -10$ ou $m = 0$, alors (C) et de la droite d'équation $y = m$ se coupent en un seul point.
D'où (E) admet une solution uniquepour $m = -10$ ou pour $m = 0$.
Si $m \in]-10; 0[$, alors (C) et de la droite d'équation $y = m$ ne se coupent pas.
D'où (E) n'admet pas de solution pour tout $m \in]-10; 0[$.
Si $m \in]-\infty; -10[\cup]0; +\infty[$, alors (C) et de la droite d'équation $y = m$ se coupent en deux points. D'où (E) admet deux solutions distinctes pour tout $m \in]-\infty; -10[\cup]0; +\infty[$.
6. **Supprimer cette question**

Exercicesd'approfondissement

16

Soit *f* la fonction numérique de la variable réelle *x* définie par : $f(x) = \sqrt{(x-2)^2 - 1}$

1. a) $\forall x \in \mathbb{R}, x \in D_f \Leftrightarrow (x-2)^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2-1)(x-2+1) \geq 0$
$$\Leftrightarrow (x-3)(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$$
Donc $D_f =]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{(x-2)^2 - 1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{(x-2)^2 - 1} = +\infty$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{\sqrt{(x-2)^2-1}-0}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{\sqrt{(x-3)(x-1)}}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{x-3}{\sqrt{(x-3)(x-1)}} = -\infty$

f n'est pas dérivable à gauche en 1 et (C) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 1

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ >}} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{\substack{x\to 3\\ >}} \frac{\sqrt{(x-2)^2-1}-0}{x-3} = \lim_{\substack{x\to 3\\ >}} \frac{\sqrt{(x-3)(x-1)}}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 3\\ >}} \frac{x-1}{\sqrt{(x-3)(x-1)}}$$
$$= +\infty$$

f n'est pas dérivable à gauche en 3 et (C) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 3

2. a) $\forall x \in]-\infty;1[\cup]3;+\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{2\times(x-2)}{2\sqrt{(x-2)^2-1}} = \frac{x-2}{\sqrt{(x-2)^2-1}}$

   b) $\forall x \in]-\infty;1[$, on a : $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty;1[$
   $\forall x \in]3;+\infty[$, on a : $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]3;+\infty[$

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$				$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	0		0	$\nearrow +\infty$

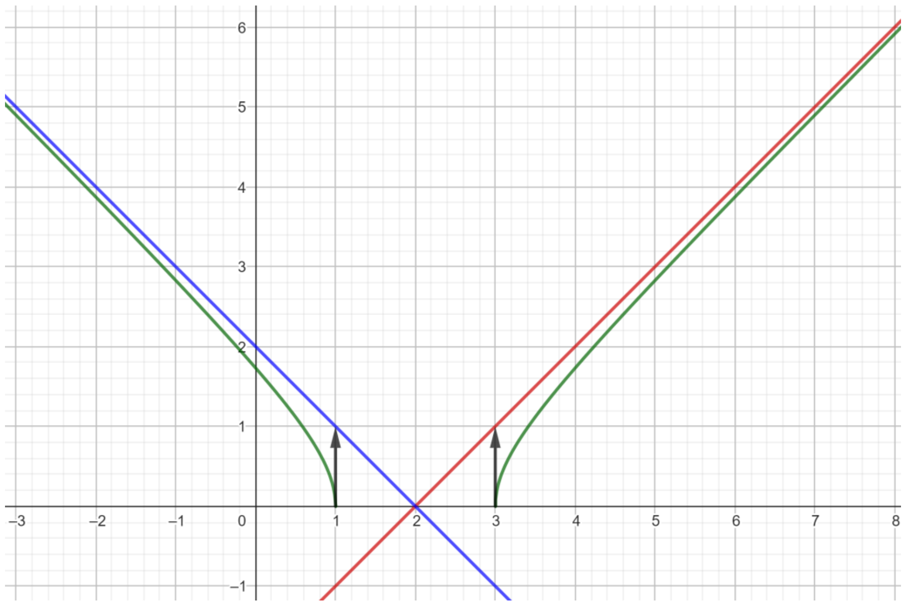
3. $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x-2)) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x-2)^2-1}-(x-2)\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{(x-2)^2-1}+x-2} = 0$

   Donc la droite (Δ_1) d'équation $y = x-2$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

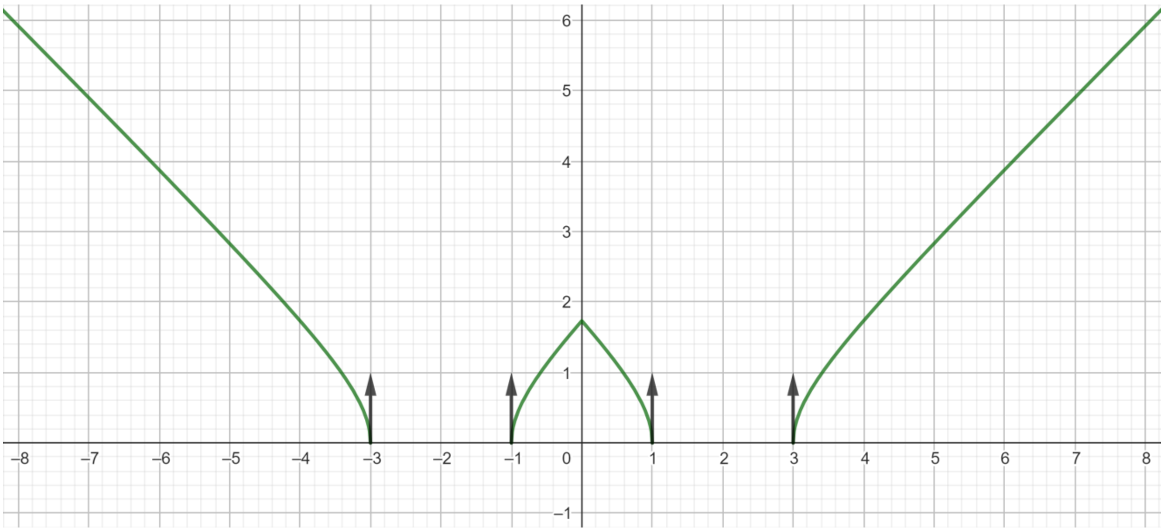
$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(-x+2)) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{(-x+2)^2-1}-(-x+2)\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{(-x+2)^2-1}-x+2} = 0$$

   Donc la droite (Δ_2) d'équation $y = -x+2$ est asymptote à (C) en $-\infty$.

4.



5. $g(x) = \sqrt{x^2-4|x|+3}$
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \in J \Leftrightarrow x^2-4|x|+3 \geq 0 \Leftrightarrow (|x|-1)(|x|-3) \geq 0 \Leftrightarrow |x| \in]-\infty;1] \cup [3;+\infty[$
   $\Leftrightarrow |x| \leq 1$ ou $|x| \geq 3 \Leftrightarrow x \in [-1;1]$ ou $x \in]-\infty;-3] \cup [3;+\infty[$
   J = $]-\infty;-3] \cup [-1;1] \cup [3;+\infty[$
6. $\forall x \in$ J, on a $-x \in$ J et $g(-x) = \sqrt{(-x)^2-4|-x|+3} = \sqrt{x^2-4|x|+3} = g(x)$
7. D'où g est une fonction paire.
8. On a $g(x) = f(x)$, donc la courbe de gest obtenue de la façon suivante :
   - on garde la partie de (C), notée (Γ), correspondant aux valeurs positives de x ;
   - on trace de plus l'image de (Γ) par la symétrie orthogonale d'axe (OJ).



17

1) Justifions que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

$x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{et} x - |x-2| \neq 0$

$$x - |x-2| = 0 \Leftrightarrow |x-2| = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (x-2)^2 - 4x + 4 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 4x + 4 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Donc $x - |x-2| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ d'où $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

2) On a $|x-2| = x - 2$ si $x \geq 2$ et $|x-2| = -x + 2$ si $x < 2$

D'où $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3}{2x-2} \; si \; x \in]-\infty; 2[- \{1\} \\ \frac{x^2+3}{2} \; si \; x \in [2; +\infty[\end{cases}$

3) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{x^2+3}{2(x-1)} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} (\frac{x^2+3}{2}) \times \frac{1}{x-1} = -\infty$

Car $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+3}{2} = 2 \; et \; \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{1}{x-1} = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{x^2+3}{2} \times \frac{1}{x-1} = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+3}{2} = 2 \; et \; \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{1}{x-1} = +\infty$.

<u>Interprétation graphique</u>

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$ (ou $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$) donc la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à (Γ).

4a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2+3}{2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+3}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$$

<u>Interprétation graphique</u>

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ donc (Γ) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (OJ).

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+3}{2(x-1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2} = -\infty$

- Démontrons que la droite (Δ) d'équation $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ est asymptote oblique à (Γ) en $-\infty$.

On a $\lim_{x\to-\infty} f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+3}{2(x-1)} - \frac{1}{2}(x+1)$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+3-(x^2-1)}{2(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{2(x-1)}$$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{2x}$

$$= 0$$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) - (\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}) = 0$d'où le résultat.

5- Dérivabilité de f en 2.

On a $\lim_{\substack{x\to2\\<}} \frac{f(x)-f(2)}{x-x} = \lim_{\substack{x\to2\\<}} \frac{\frac{x^2-3}{2(x-1)} - \frac{7}{2}}{x-2}$

$$= \lim_{\substack{x\to2\\<}} \frac{x^2+3-7(x-1)}{2(x-1)(x-2)}$$

$$= \lim_{\substack{x\to2\\<}} \frac{x^2-7x+10}{2(x-1)(x-2)}$$

$= \lim_{\substack{x\to2\\<}} \frac{x-5}{2(x-1)} = -\frac{3}{2}$

Donc f est dérivable à gauche en 2 et $f_g{}'(2) = -\frac{3}{2}$

On a $\lim_{\substack{x\to2\\>}} \frac{f(x)-f(2)}{(x-2)} = \lim_{\substack{x\to2\\>}} \frac{\frac{x^2+3}{2} - \frac{7}{2}}{x-2} = \lim_{\substack{x\to2\\>}} \frac{x^2-4}{2(x-2)} = \lim_{\substack{x\to2\\>}} \frac{x+2}{2} = 2$. Donc $f$est dérivableà droite en 2 et $f_d'(2) = 2$. Mais comme $f_g'(2) \neq f_d'(2)$, donc f n'est pas dérivable en 2.

(Γ)admet au point d'abscisse 2 :

-Une demi-tangente (T_g) à gauche d'équation :

$$y = f_g'(2)(x-2) + f(2)$$

$y = -\frac{3}{2}(x-2) + \frac{7}{2}$Soit $y = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{2}$.

-Une demi-tangente (T_d) à droite d'équation :

$$y = f_d'(2)(x-2) + f(2)$$

$y = 2(x-2) + \frac{7}{2}$soit$y = 2x - \frac{1}{2}$

6- a) f est dérivable sur $]-\infty;2[-\{1\}$ et $\forall x \in]-\infty;2[-\{1\}$, $f'(x)=\frac{1}{2}(\frac{x^2+3}{x-1})'$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}\times\frac{2x(x-1)-(x^2+3)}{(x-1)^2} \ =\frac{1}{2}\times\frac{2x^2-2x-3}{(x-1)^2}$

$$f'(x)=\frac{(x-3)(x+1)}{2(x-1)^2}$$

On a $(x-3)(x+1)\geq 0, \forall x \in]-\infty;-1]\cup[3;+\infty[$ et $(x-3)(x+1)<0$, $\forall x \in]-1;3[$ or $2(x-1)^2>0 \ \ \forall x \in]-\infty;2[-\{1\}$ d'où :

$f'(x)>0, \forall x \in]-\infty;-1[$ et $f'(x)<0, \forall x \in]-1;1[\cup]1;2[$, $f'(1)=0$

De plus f est dérivable sur $[2;+\infty[$ et $\forall x\geq 2, f'(x)=\left(\frac{x^2+3}{2}\right)'=x$

et $f'(x)>0$, $\forall x \in [2;+\infty[$ D'où f est strictement croissante sur $]-\infty;-1[$ et sur $[2;+\infty[$, f est strictement décroissante sur $]-1;1[$ et sur $]1;2[$.

Tableau de variation

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	||	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$ $-\infty$	||	$+\infty$ $\searrow$	$\frac{7}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

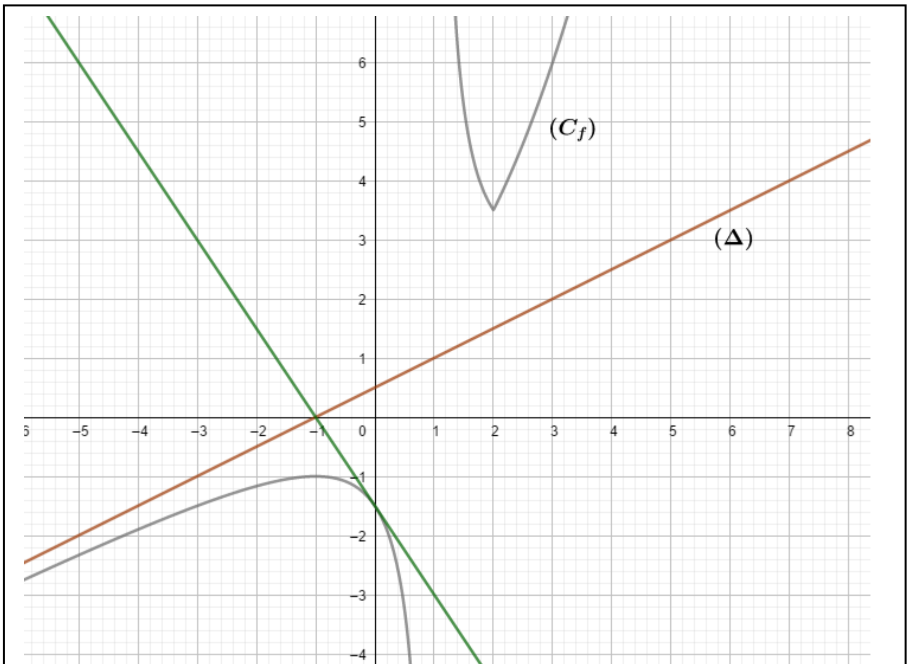
$$f(-1)=\frac{(-1)^2+3}{2(-1)-2}=\frac{4}{-4}=-1.$$

b) Tangente (T) à (Γ) au point d'abscisse.

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$, or $f(0)=\frac{-3}{2}$ et $f'(0)=\frac{(0-3)(0+1)}{2(0-1)^2}=\frac{-3}{2}$ d'où une équation de (T) est $y=-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$.

7)- Tracé de $(\Gamma),(\Delta),(T),(T_d),(T_g)$ voir graphique.

(Δ): $x=1$; (T): $y=-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$; (T_g) : $y= -\frac{3}{2}x+\frac{13}{2}$;(T_d): $y=2x-\frac{1}{2}$.



18

1)

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2+ax+b}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^2+ax+b}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$

Interprétation graphique :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3 \Longrightarrow$ la droite d'équation $y = 3$ est une asymptote horizontale à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

2)-La droite (T) d'équation $y = 4x + 3$ est une tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0 signifie que $f'(0) = 4$ et $f(0) = 3$.

$f$est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{(6x+a)(x^2+1) - 2x(3x^2+ax+b)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{6x^3 + 6x + ax^2 + a - 6x^3 - 2ax^2 - 2bx}{(x^2+1)^2}$$

$= \frac{-ax^2+(6-2b)x+a}{(x^2+1)^2}$et $f'(0) = a$ donc $a = 4$.

D'autre part $(0) = \frac{3\times 0^2 + a\times 0 + b}{0^2+1} = b$, donc $b = 3$.

En conclusion $a = 4$ et $b = 3$.

B-1 On a $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{3x^2+4x+3}{x^2+1}$. En effectuant la division euclidienne de $3x^2 + 4x + 3$ par $x^2 + 1$,

on obtient :

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 + 4x + 3 & x^2 + 1 \\ \cline{2-2} \underline{-3x^2 - 0x - 3} & 3 \\ 4x & \end{array}$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 3 + \frac{4x}{x^2+1}$

2) $f$est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = \frac{4x^2+4-8x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$, soit $f'(x) = \frac{4(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$.

3) $\forall x \in \mathbb{R}$ $on\ a$ $(x^2+1)^2 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $(1-x)(1+x)$.

On a : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$,

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-1;1[$,

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

D'où f est strictement croissante sur $]-1;1[$,

$f$est strictement décroissante sur $]-\infty;-1]$ $et\ sur$ $[1;+\infty[$.

Tableau de variation

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	3

$f(-1) = 3 + \frac{4\times(-1)}{(-1)^2+1} = 3 - 2 = 1$; $f(1) = 3 + \frac{4}{1^2+1} = 5$

4) Démontrons que le point $A(0;3)$ est centre de symétrie de $(\mathcal{C})$.

On a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \Longrightarrow \forall h \in \mathbb{R}, 0 + h = h \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow 0 - h = -h \in \mathcal{D}_f$ (1)

Soit $h \in \mathbb{R}$, on a $f(h) + f(-h) = 3 + \frac{4h}{h^2+1} + 3 - \frac{4h}{(-h)^2+1} = 6$

$$\Longrightarrow f(h) + f(-h) = 2 \times 3 \qquad (2)$$

De (1) et (2), on déduit que le point $A(0;3)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C})$.

5) a) h est continue et strictement décroissante sur $[1;+\infty[$ telle que $h([1;+\infty[) =$ $f([1;+\infty[) =]3;5]$ donc h est une bijection de $[1;+\infty[$ sur $]3;5]$.

b) **Tableau de variation de h^{-1}**

Le tableau de variation de h^{-1} se déduit de celui de h .

x	3		5
$(h^{-1})'(x)$		-	
$h^{-1}(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1

6- a) $x \in [1;+\infty[, f(x) = 4 \Leftrightarrow x \geq 1, \frac{3x^2+4x+3}{x^2+1} = 4$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 4x + 3 = 4x^2 + 4\ et\ x \geq 1$$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0\ et\ x \geq 1$.

$\Delta' = 4 - 1 = 3 > 0$donc$x_1 = 2 - \sqrt{3}\ et\ x_2 = 2 + \sqrt{3}$.

$x_1 < 1\ et x_2 \geq 1$d'où$S_{[1;+\infty[} = \{2 + \sqrt{3}\}$.

b) On a $h^{-1}(4) = 2+\sqrt{3}$.

$h$est dérivable sur $[1;+\infty[$ et h' ne s'annule qu'en 1 sur $[1;+\infty[$, donc h est dérivable en $2+\sqrt{3}$et$h'(2+\sqrt{3}) \neq 0$, d'où h^{-1}est dérivable en 4 et $(h^{-1})'(4) = \frac{1}{h'(2+\sqrt{3})}$ or

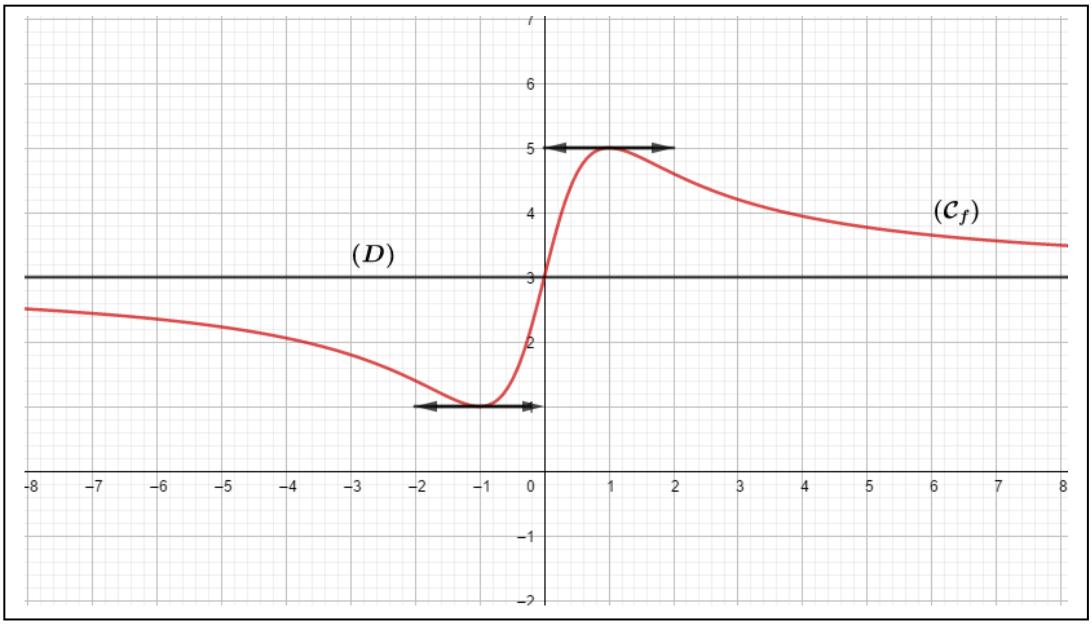
$h'(2+\sqrt{3}) = \frac{4(2+\sqrt{3}-1)(1+2+\sqrt{3})}{((2+\sqrt{3})^2+1)^2}$,

$= \frac{4(\sqrt{3}+1)(3+\sqrt{3})}{(6+4\sqrt{3})^2}$,

$= \frac{2}{3+2\sqrt{3}}$.

D'où $(h^{-1})'(4) = \frac{3+2\sqrt{3}}{2}$

1- Tracé de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.



19

1) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x+\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+1})$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-(4x^2+1)}{2(2x-\sqrt{4x^2+1})}$$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{2(2x-\sqrt{4x^2+1})} = 0$ car

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} -\sqrt{4x^2+1} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 2(2x-\sqrt{4x^2+1}) = -\infty$.

Interprétation graphique

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x+\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+1}) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+1}=+\infty$$

c) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-2x=\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{2x+\sqrt{4x^2+1}}{2}-2x)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}-2x}{2}$$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^2+1-4x^2}{2(\sqrt{4x^2+1}+2x)}$.

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2(\sqrt{4x^2+1}+2x}=0$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+1}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)=+\infty$ d'où $(\mathcal{C})$ admet la droite $(\mathcal{D})\colon y=2x$ comme asymptote oblique en $+\infty$.

2- a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=1+\frac{1}{2}\times\frac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}}=1+\frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}$.

$-\forall x\geq 0,\ 1+\frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}>0$ donc $\forall x\geq 0, f'(x)>0$.

$-\forall\ x<0, 1+\frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}=1-\sqrt{\frac{4x^2}{4x^2+1}}$. Or $\frac{4x^2}{4x^2+1}<1$ pour tout réel$x$et $1-\sqrt{\frac{4x^2}{4x^2+1}}>0$.

$\Longrightarrow\forall x<0, f'(x)>0$.

D'où $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)>0$ et par conséquent f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b) Tableau de variation de f

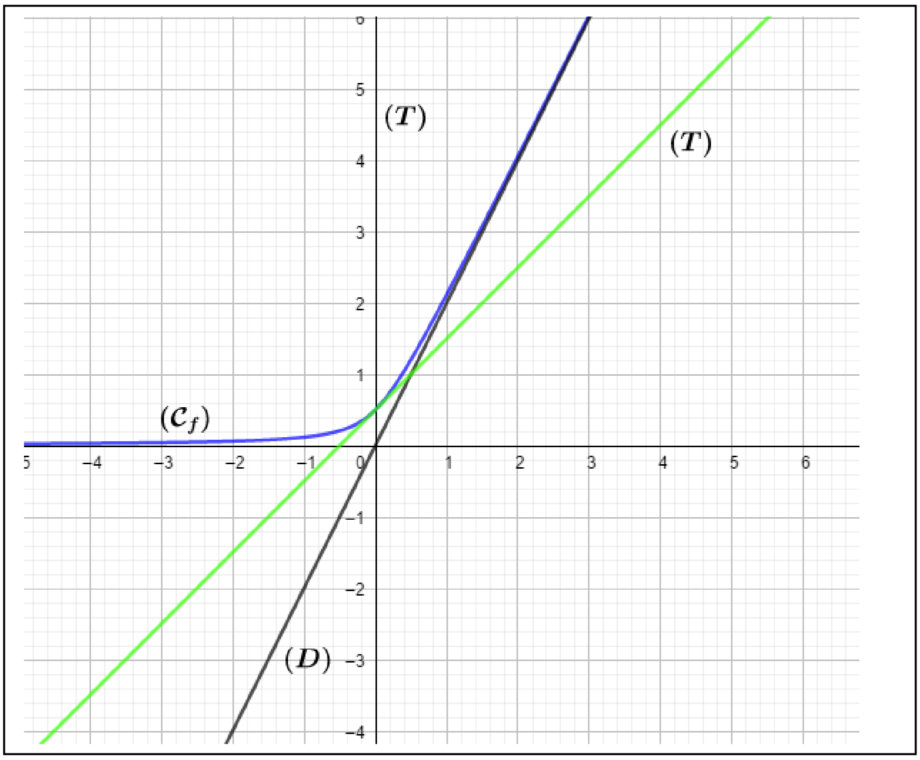
x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0\ \nearrow\ +\infty$

3. a) Equation de la tangente (T) au point d'abscisse 0.

$(T)\colon y=f'(0)(x-0)+f(0)orf'(0)=1+\frac{2\times 0}{\sqrt{4\times 0^2+1}}=1$ et

$f(0) = 0 + \frac{1}{2}\sqrt{4 \times 0^2 + 1} = \frac{1}{2}$donc$y = x + \frac{1}{2}$.

b) Tracé de $(T), (\mathcal{D})$, puis $(\mathcal{C})$.(T): $y = x + 1(\mathcal{D})$: $y = 2x$



B-1a) f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R})$ or $f(\mathbb{R}) =]0; +\infty[$d'après A-3-b), d'où f réalise une bijection $\mathbb{R}$ vers $J = \ 0; +\infty[$.

b) Tableau de variation de f^{-1}.

x	0	$+\infty$
$(f^{-1})'(x)$	$+$	
$f^{-1}(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

c) Tracé de $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ (voir graphique).

$(\mathcal{C}_{f^{-1}})$est le symétrique de $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite d'équation $y = x$.

2a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ donc f^{-1} est dérivable sur $]0;+\infty[$.

2b) On a $f(0) = 0 + \frac{1}{2}\sqrt{4 \times 0^2 + 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ donc $(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f'(0)}$.

Or $f'(0) = 1 + \frac{2\times 0}{\sqrt{4\times 0^2+1}} = 1$ d'où $(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

20

1.a) Montrons que f est continue en 0.

$\lim\limits_{x\to o} f(x) = \lim\limits_{x\to o} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \lim\limits_{x\to o} \frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)} = \lim\limits_{x\to o} \frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}$

$$= \lim_{x\to o} \frac{1}{\sqrt{1+x^2+1}} = 0$$

Or $(0) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to o} f(x) = f(0)$ d'où f est continue en 0.

b)Etudions la dérivabilité de f en 0.

On a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to o} \frac{\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to o} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} =$

$\lim\limits_{x\to o} \frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)} = \lim\limits_{x\to o} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{2}$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{2}$.

a) Etudions les variations de f.

f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R} - \{0\}$, on a :

$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{1}{x}\right)' = \frac{\frac{2x^2}{2\sqrt{1+x^2}} - \sqrt{1+x^2}}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-(1+x^2)}{x^2\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

Signe de $f'(x)$.

$\forall\, x \neq 0$, $\frac{1}{x^2} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Or $\forall\, x \in \mathbb{R}\{0\} \sqrt{1+x^2} > 1$ et $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} < 1$ puis $1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0$.

Donc $\forall\, x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f'(x) > 0$ et comme $f'(0) = \frac{1}{2}$ d'où $\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$.

Par conséquent f est strictement croissante sur $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

2) a- Montrons que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$.

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$.

On a $f(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) ; \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(-\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x}\right)$$

$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$car $\lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = -1$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0.$

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x}\right)$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$car $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$

On a : alors $f(\mathbb{R}) =]-1;1[$, d'où f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur$]-1;1[$.

b- f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur$]-1;1[$. De plus f est dérivable sur $\mathbb{R}$et

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \neq 0$d'après la question 1c) d'où f^{-1} est dérivable sur$]-1;1[$.

Calculons $(f^{-1})'(0)$.

f^{-1}est dérivable en 0 et $f(0) = 0$ donc $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$

21

Soit f la fonction définie sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ $par\ f(x) = \frac{1}{sinx}$.

1. $f$est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $\forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) = \frac{-\cos x}{(\sin x)^2}$

   $\forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x \geq 0$ et $\sin x > 0$, donc $f'(x) \leq 0$. Par conséquent, f est strictement décroissante sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$.

2. a) Comme$f$ est continue et strictement décroissante sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, f réalise une bijection de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur $f\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[f\left(\frac{\pi}{2}\right), \lim_{x\to0} f(x)\right[= [1,+\infty[$

   b) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, donc $f^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$

   $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$, donc $f^{-1}(2) = \frac{\pi}{6}$

   c) Supprimer « chacun des points 1 »

   $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, donc $f^{-1}(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$. Comme $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \neq 0$, f^{-1} est dérivable en$\sqrt{2}$ et

$$(f^{-1})'(\sqrt{2}) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(\sqrt{2})\right)} = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{-\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

   On a $f^{-1}(2) = \frac{\pi}{6}$ et $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \neq 0$,$f^{-1}$ est dérivable en 2et

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(2)\right)} = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{-2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{6}$$

22

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \times \frac{1}{\sin x} = +\infty$

car$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{\sin x} = +\infty$.

$$\lim_{\substack{x\to \pi\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to \pi\\ <}} \frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin x} = \lim_{\substack{x\to \pi\\ <}} \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \times \frac{1}{\sin x} = -\infty$$

car$\lim\limits_{\substack{x\to \pi\\ <}} \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to \pi\\ <}} \frac{1}{\sin x} = +\infty$.

2. a) f est dérivable sur $]0;\pi[$, $\forall x \in]0;\pi[$, $f'(x) = \left(\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin x}\right)'$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) sinx - cosx \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{sin^2x} = \frac{-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}-x\right)}{sin^2x} = \frac{-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{sin^2x}$$
$$= \frac{-1}{sin^2x}$$

b) $\forall x \in]0;\pi[$, on a $\frac{-1}{sin^2x} < 0$, donc $\forall x \in]0;\pi[$, on a $'(x) < 0$,

d'oùf est strictement décroissante sur$]0;\pi[$.

Tableau de variation de f.

x	0	π
$(f)'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3. a) Démontrons que (C) admet un point d'inflexion.

f'est dérivable sur $]0;\pi[$ et $\forall x \in]0;\pi[$, on a

$f''(x) = -\frac{1}{2}\frac{-(sin^2x)'}{(sin^2x)^2} = \frac{cosxsinx}{sin^4 x} = \frac{cosx}{sin^3 x}$.

$\forall x \in]0;\pi[$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in]0;\pi[, cosx = O \Leftrightarrow x = O \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$.

D'autre part $\forall x \in]0;\pi[, sin^3 x > 0$, $\forall x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\cos x > 0$ et $\forall x \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[\cos x < 0$

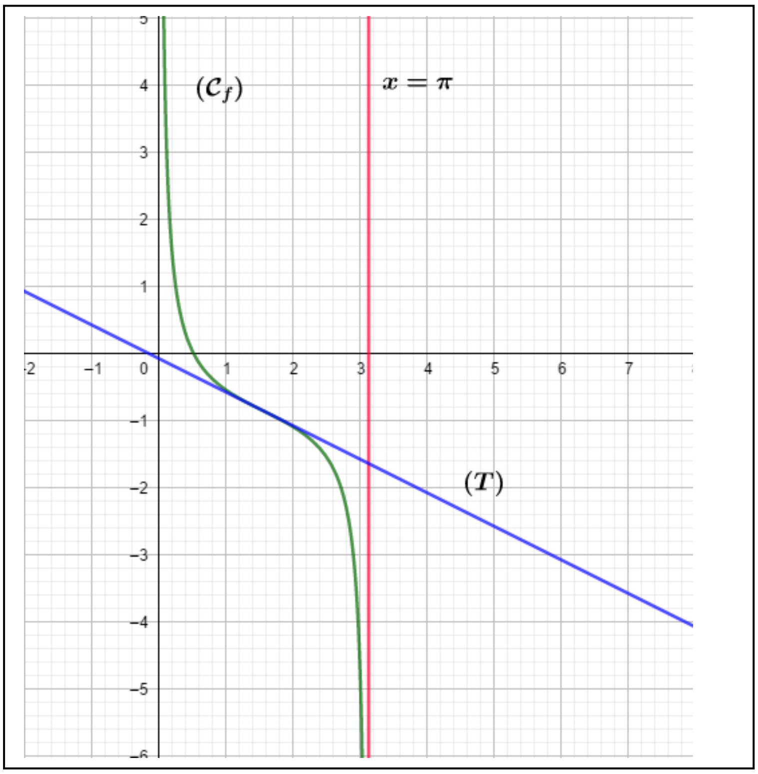
donc f'' s'annule en $\frac{\pi}{2}$ en changeant de signe. D'où (C) admet le point

$A(\frac{\pi}{2}; f\left(\frac{\pi}{2}\right))$comme point d'inflexion. On a$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$donc $A(\frac{\pi}{2};\frac{-\sqrt{3}}{2})$.

b) Equation de la tangente(T) au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.

On a $y = f'(\frac{\pi}{2})(x - \frac{\pi}{2}) + f(\frac{\pi}{2})$ or $f'(\frac{\pi}{2})= \frac{-1}{2sin^2\frac{\pi}{2}} = \frac{-1}{2}$ donc $y = \frac{-1}{2}x + \frac{\pi}{4} - \frac{-\sqrt{3}}{2}$.

d) Tracés des asymptotes à (C), la tangente (T) puis la courbe (C).



4) a) f est continue et strictement croissante sur $]0;\pi[$, donc f est une bijection de $]0;\pi[$ sur $f(]0;\pi[) = \left]\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) ; \lim\limits_{\substack{x\to \pi\\ <}} f(x)\right[= \mathbb{R}$.

b) Tracé de $(C_{f^{-1}})$.

$(C_{f^{-1}})$est le symétrique de (C) par rapport à la droite d'équation $y = x$.

4) On a $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$donc $f^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ car f est une bijection.

5) a) f est dérivable sur $]0;\pi[$ et $\forall x \in]0;\pi[$, $f'(x) \neq 0$, donc f est dérivable en $\frac{\pi}{2}$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$. Par conséquent f^{-1} est dérivable en $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ et on a :

$$(f^{-1})'(\frac{-\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{-1}{2}} = -2.$$

23

1) f est dérivable sur $[1;+\infty[\forall x \geq 1$

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 2x + 2)'}{2\sqrt{x^2 - 2x + 2}} = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x + 2}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$$

$\forall x \in [1;+\infty[\ , f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$\forall x > 1, x-1 > 0$ et $\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}} > 0$ donc $\forall x \in [1;+\infty[\ f'(x) > 0$.

D'où f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-2x+2} = +\infty$car :

$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} x^2-2x+2 \\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty \end{cases}$ et

Tableau de variation de f

x	1 $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	0 $\quad\quad$ $+$
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$

$$f(1) = \sqrt{1-2+2} = 1$$

2-a) Montrons que la droite $(\Delta): y = x - 1$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$

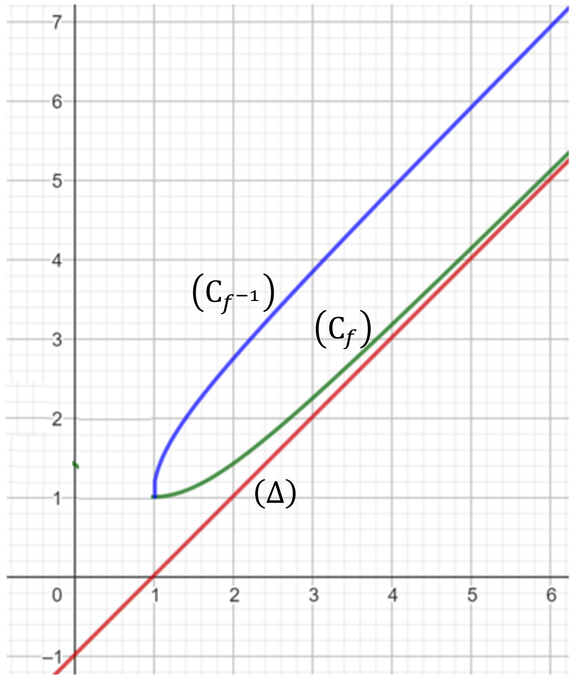
On a $\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x-1) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-2x+2} - (x-1)$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2-2x+2)-(x-1)^2}{\sqrt{x^2-2x+2}\ +x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}+x-1}$$

Or $= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-2x+2} = +\infty$ et $= \lim_{x\to+\infty} (x-1) = +\infty$

donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}+x-1} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) - (x-1) = 0$. D'où $(\mathcal{C}_f)$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$

2-b) Tracé de $(\mathcal{C}_f)$et de$(\Delta): y = x - 1$



3-a) f est continue et strictement croissante sur $[1;+\infty[$, donc f réalise une bijection

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+1=y^2$$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 = y^2 - 1 or y \geq 1$ donc $y^2-1\geq 0$

Et $(x-1)^2=y^2-1 \Leftrightarrow x-1=\sqrt{y^2-1}$ ou $x-1=-\sqrt{y^2-1}$

$$\Leftrightarrow x=1+\sqrt{y^2-1} \text{ ou } x=1-\sqrt{y^2-1}$$

Or $x\geq 1$ d'où $x=1+\sqrt{y^2-1}$.

On a $f^{-1}(y)=1+\sqrt{y^2-1}$ d'où $\forall x\in J$, $f^{-1}(x)=1+\sqrt{x^2-1}$

c) Tracé de $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ (voir graphique)

$(\mathcal{C}_{f^{-1}})=S_{(D)}(\mathcal{C}_f)$où$(D)$ est la droite d'équation $y=x$.

1) $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, $g(x)=f^{-1}\left(\frac{1}{\cos x}\right)=1+\sqrt{\left(\frac{1}{\cos x}\right)^2-1}=1+\sqrt{\frac{1-cos^2x}{cos^2 x}}=1+\sqrt{\frac{sin^2x}{cos^2x}}$

$$=1+\sqrt{\tan^2 x}$$

Or $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, $tg\, x\geq 0$ donc $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ $\sqrt{\tan^2 x}=\tan x$,

d'où $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, $g(x)=1+\tan x$

2) g est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, et $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, $g'(x)=1+\tan^2 x$

$\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, $1+\tan^2 x>0$ $\Rightarrow g$ est strictement croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

$$\Rightarrow g\left(\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\right)=\left[g(0);\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\tan x)\right[= [1;+\infty[$$

g est strictement croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ donc g est une bijection de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ sur $[1;+\infty[$

3) g est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ et $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, $g'(x)=1+\tan^2 x \neq 0$ donc g^{-1} est dérivable sur $[1;+\infty[$

- $\forall x\in[1;+\infty[$, $(g^{-1})'(x)=\frac{1}{g'\circ g^{-1}(x)}$on a $\forall x\geq 1, g'(x)=1+tg^2x$ donc

$$g' \circ g^{-1}(x) = 1 + tg^2\left(g^{-1}(x)\right) = \frac{1}{cos^2(g^{-1}(x))}$$

Or $\forall y \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, $g(y) = f^{-1}\left(\frac{1}{\cos y}\right) \Rightarrow f \circ g(y) = \frac{1}{\cos y} \Rightarrow \left(f \circ g(y)\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 y}$

Donc $\frac{1}{cos^2(g^{-1}(x))} = \left(f \circ g(g^{-1}(x))\right)^2 = (f(x))^2 = \left(\sqrt{x^2 - 2x + 2}\right)^2$

$= |x^2 - 2x + 2| = x^2 - 2x + 2$ car $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 2 > 0$

$(\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 = -4 < 0)$

On a alors $g' \circ g^{-1}(x) = \frac{1}{cos^2 x\,(g^{-1}(x))} = x^2 - 2x + 2$

D'où $\forall x \in [1; +\infty[\,, (g^{-1})'(x) = \frac{1}{x^2-2x+2}$

24

1. La production au bout de 4 heures de travail est $P(4)$, soit 2 440 boulons.
2. a) $R(h) = P'(h) = -45h^2 + 350h + 150$

   b) Le rythme de production au bout de 4 heures de travail est $R(4) = 830$

   c) **Remplacer R par P**

   $P'(h) = -45h^2 + 350h + 150 = 5(-9h^2 + 70h + 30)$

   Δ = 5 980 ; $h_1 = -0{,}4$ et $h_2 = 8{,}18$

   $\forall h \in [0\,;\ 8], P'(h) > 0$ donc P est strictement croissante sur $[0\,;\ 8]$.

   Interprétation :

   Le nombre de boumons produits augmente au cours des 8 premières heures

3. a) $R'(h) = -90h + 350$

   $R'(h) < 0 \Leftrightarrow x > \frac{35}{9}$ et $R'(h) > 0 \Leftrightarrow x < \frac{35}{9}$

   R est strictement croissante sur $\left[0\,; \frac{35}{9}\right[$ et strictement décroissante sur $\left]\frac{35}{9}; 8\right]$

   b) Le rythme de production est maximum pour $t = \frac{35}{9}$ h, soit au bout de 3 h 53 min.

4. a) La phase de rendements croissants $\left[0\,; \frac{35}{9}\right[$ et de phase de rendements décroissants est $\left]\frac{35}{9}; 8\right]$.

   b)

5. Pour ce faire, il faut résoudre l'équation : $P(h) = 3000$.

h	0	1	2	3	4	5
$P(h)$	150	350	880	1 620	2 240	3 250

On a 4 <*h*< 5

h	4	4,1	4,2	4,2	4,4	4,5	4,6	4,7
$P(h)$	2 240	2 253	2 606	2 688	2 770	2 852	2 933	3 013

On a 4,6 <*h*< 4,7

On a *h*(4,68)≈ 2 997et *h*(4,69) ≈ 3 005, donc 4,68 <*h*< 4,69.

Le nombre d'heures de travail nécessaires pour honorer la commande est environ 4,6 h, soit 4 h 36 min.

25

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x - 4$.
   a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$
   $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 1\}$, $g'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-1; 1[$, et
   $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$
   g est strictement décroissante sur $]-1; 1[$
   g est strictement croissante sur $]-\infty; -1[$ et sur $]1; +\infty[$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	$+\infty$

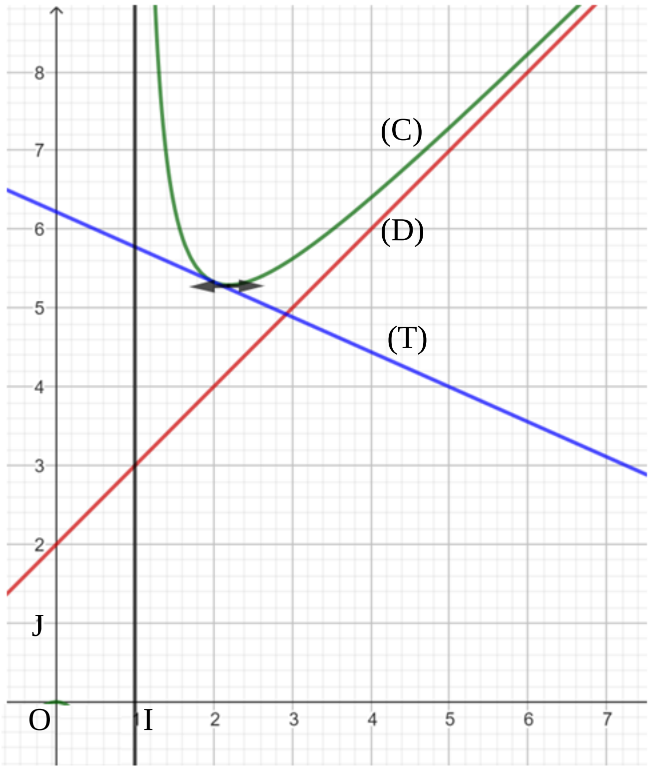
   b) $\forall x \in]-\infty; 1[$, $g(x) \leq -2$, donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $]-\infty; 1[$.
   g est continue et strictement croissante sur $]1; +\infty[$. De plus $g(]1; +\infty[) =]-6; +\infty[$ et $0 \in]-6; +\infty[$, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $]1; +\infty[$.
   En conclusion, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}$.

   c) $\forall x \in]-\infty; \alpha[$, $g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[$, $g(x) > 0$

2. a) $\forall x \in]1; +\infty[$, $f'(x) = \frac{(3x^2+4x)(x^2-1)-2x(x^3+2x^2)}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2-4x}{(x^2-1)^2} = \frac{x(x^3-3x-4)}{(x^2-1)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$
   $\forall x \in]1; +\infty[$, $x > 0$ et $(x^2-1)^2 > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.
   b) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} (x^3 + 2x^2) \times \frac{1}{x^2-1} = +\infty$, car $= \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} (x^3 + 2x^2) = 3$ et $= \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{1}{x^2-1} = +\infty$
   La droite d'équation $x = 1$ est asymptote (C)
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$
   c)

x	1		α		$+\infty$
$f'(x)$	▒	$-$	0	$+$	
$f(x)$	▒ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

   d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (x+2)) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3+2x^2}{x^2-1} - (x+2)\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+2}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote (C) en $+\infty$.
   Position relative de (D) et (C)
   $\forall x \in]1; +\infty[, f(x) - (x+2) = \frac{x+2}{x^2-1}$ et $\frac{x+2}{x^2-1} > 0$, donc (C) est au-dessus de (D) sur $]1; +\infty[$.
   e) Soit (T) cette tangente
   (T) : $y = f'(2)(x-2) + f(2) = \frac{-4}{9}(x-2) + \frac{16}{3}$, soit (T) : $y = \frac{-4}{9}x + \frac{56}{9}$
   f)



26

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$
   $D_f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$
2. a) $\forall x \in D_f,\ f(x) = \sqrt{x^2-1} - x = \frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}$
   b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0$, car $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1} + x = +\infty$
   Interprétation graphique : l'axe des abscisses (droite d'équation $y = 0$) est asymptote à (C_f) en $+\infty$.
3. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-1} - x\right) = +\infty$, car $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$
   b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) + 2x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-1} + x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x} = 0$
   D'où droite d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à (C_f) en $-\infty$.
4. a) $\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \frac{\sqrt{x^2-1}-x-1}{x+1} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1} + \frac{-(x+1)}{x+1} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{(x+1)^2}} - 1 = \sqrt{\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2}} - 1 = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 1$
   $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ <}} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ <}} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 1 = +\infty$, car $= \lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ <}} \frac{x-1}{x+1} = +\infty$
   La fonction f n'est pas dérivable en -1.
   b) $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{x^2-1}-x+1}{x-1} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} + \frac{-(x-1)}{x+1} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{(x-1)^2}} - 1 = \sqrt{\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}} - 1 = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1$
   $\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to1 \\ >}} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1 = +\infty$, car $= \lim\limits_{\substack{x\to1 \\ >}} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$
   La fonction f n'est pas dérivable en 1.

5. a) $\forall x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - 1 = \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}$

$f'(x)$a le même signe que $x - \sqrt{x^2-1}$

Si $x \in]-\infty,-1[$, alors$x < 0$ et alors$x - \sqrt{x^2-1} < 0$

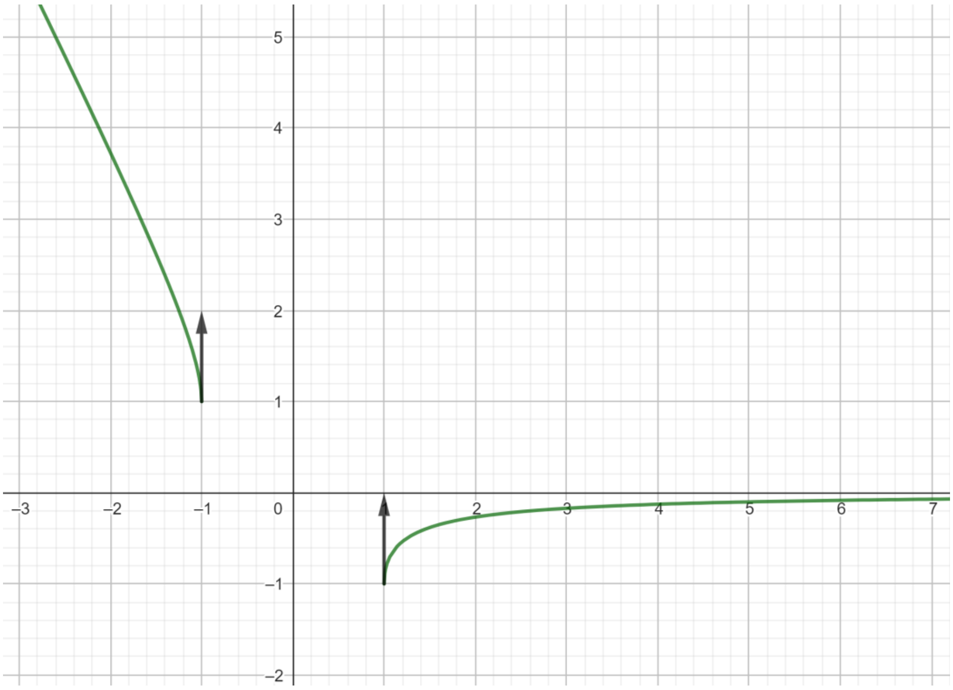
Si $x \in]1,+\infty[$, alors $x - \sqrt{x^2-1} > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow x^2 > x^2 - 1 \Leftrightarrow 0 > -1$, vraie. D'où $\forall x \in]1,+\infty[$, $x - \sqrt{x^2-1} > 0$

En définitive,f est strictement décroissante sur $]-\infty,-1[$ et strictement croissante sur $]1,+\infty[$.

b)

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$				$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	1		-1	$\nearrow 0$

6.



27

1. a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos x \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Longrightarrow x \leq f(x) \leq x + 1$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$,$x \leq f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq x + 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

2. Les abscisses des points d'intersection de (C) avec (D_1) vérifient l'équation $f(x) = x$

$f(x) = x \Leftrightarrow x + \cos^2 x = x \Leftrightarrow \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

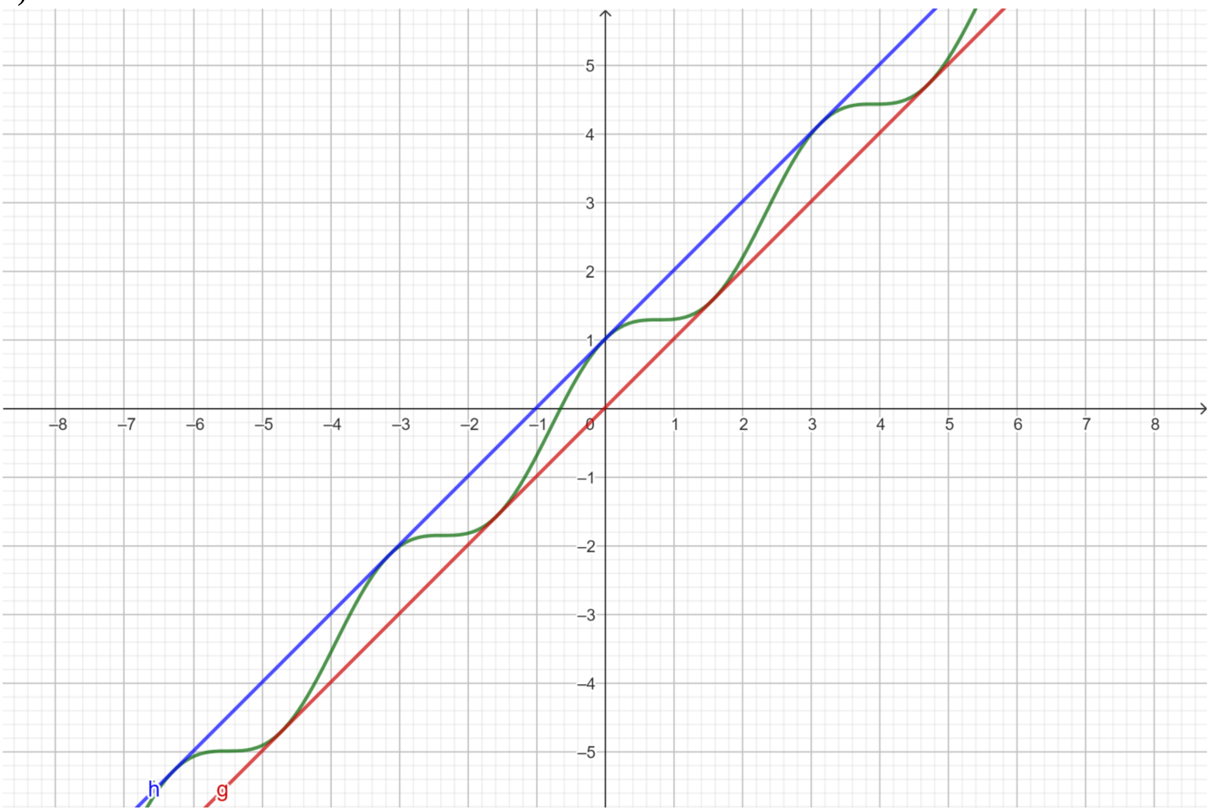
Les points d'intersection de (C) avec (D_1) sont les points de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

Les abscisses des points d'intersection de (C) avec (D_2) vérifient l'équation $f(x) = x + 1$

$f(x) = x + 1 \Leftrightarrow x + \cos^2 x = x + 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos x = 1 \text{ou} \cos x = -1$
$\Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
Les points d'intersection de (C) avec (D_2) sont les points de coordonnées $(k\pi; k\pi + 1),\ k \in \mathbb{Z}$

3. a) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 - 2\sin x\cos x = 1 - \sin 2x$
   b) $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin 2x \leq 1 \Longrightarrow -1 \leq -\sin 2x \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq 1 - \sin 2x \leq 2 \Longrightarrow f'(x) \geq 0$
   Donc f eststrictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   c) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
   $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
4. a)

   b)



5. a)$f(x) = x + cos^2 x$

$$f(x + \pi) = x + \pi + cos^2(x + \pi)$$

$cos(x + \pi) = -cosx$ donc $cos^2(x + \pi) = cos^2 x$

$$f(x + \pi) = x + \pi + cos^2(x + \pi) = x + \pi + cos^2 x$$
$$= \pi + (x + cos^2 x)$$
$$= \pi + f(x)$$

b) Par une translation de vecteur $\vec{u}\ (-\pi\,; \pi)$.

28

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{1 + x^2}$$

1. a) $\lim_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

b) $f(x) = \frac{x^3-2x^2}{1+x^2} = (x-2)\frac{x^2}{1+x^2}$

$$f(x) = (x-2)\frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}$$

$$f(x) = (x-2)(1-\frac{1}{1+x^2})$$

c) $\lim_{x\to-\infty} f(x) - (\mathrm{x}-2) = \lim_{x\to-\infty}(\mathrm{x}-2-\frac{\mathrm{x}-2}{1+\mathrm{x}^2} - (\mathrm{x}-2)) = \lim_{x\to-\infty}(-\frac{\mathrm{x}-2}{1+\mathrm{x}^2}) = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (\mathrm{x}-2) = \lim_{x\to+\infty}(\mathrm{x}-2-\frac{\mathrm{x}-2}{1+\mathrm{x}^2} - (\mathrm{x}-2)) = \lim_{x\to+\infty}(-\frac{\mathrm{x}-2}{1+\mathrm{x}^2}) = 0$

d) $f(x) - (x-2) = -\frac{\mathrm{x}-2}{1+\mathrm{x}^2}$ comme $(1+x^2)$ est positif, le signe de $f(x)-(x-2)$ est celui de $-(x-2)$

$f(x)-(x-2)>0$si$x \in]-\infty\,;2[$, La courbe est au dessus de l'asymptote.

$f(x)-(x-2)<0$si$x \in]2\,;+\infty[$, La courbe est au dessous de l'asymptote.

2. a) $f(x) = \mathrm{x}-2-\frac{\mathrm{x}-2}{1+\mathrm{x}^2}$ donc $f'(x) = 1-(\frac{\mathrm{x}-2}{1+\mathrm{x}^2})'$

$$f'(x) = 1-\frac{(1+x^2)-2x(x-2)}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = 1-\frac{-x^2+4x+1}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1+2x^2+x^4+x^2-4x-1}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2+x^4+x^2-4x}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x(x^3+3x-4)}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x(x^3-1+3x-3)}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x((x-1)(x^2+x+1)+3(x-1)}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x(x-1)(x^2+x+4)}{(1+x^2)^2}$$

b) f' est positive sur $]-\infty\,;0[\cup$ **] 1 ;** $+\infty[$

f'est négative sur]0 ; 1[

Tableau de variation

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	0	↘	$-\infty$ $-\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$

3. L'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution γ car f est continue et monotone (strictement croissante) sur]0 ; +∞[et 10 ∈f(]0 ; +∞[) ;f(]0 ; +∞[) =]0 ; +∞[. f réalise bien une bijection de]0 ; +∞[dans]0 ; +∞[.

$$12 < \gamma < 12{,}1$$

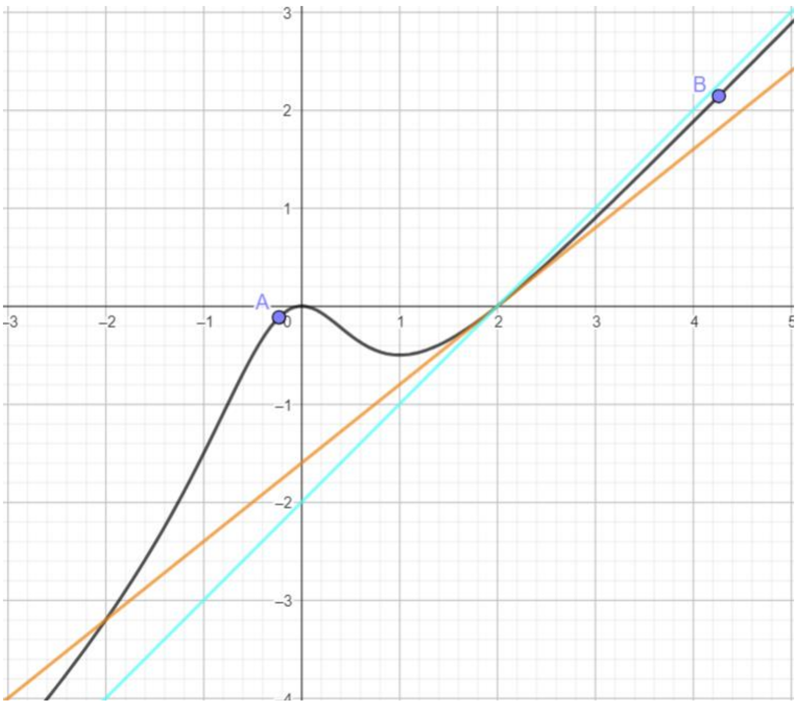
4. a) A($2-\sqrt{5}$; $-0{,}12$) et B($2+\sqrt{5}$; 2,12)

b) $f'(2) = \frac{2\times1\times10}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$; $f(2) = 0$

$$y = f'(2)(x-2)$$

$$y = \frac{4}{5}(x-2)$$

c)



d)

d(A ; Δ) = $\frac{|1(2-\sqrt{5})-1(-0{,}12)-2|}{\sqrt{2}}$ = 1,5 cm × U = 1,5 cm× 2 = 3 cm

1. $\forall x \in \mathbb{R},\, x \in D_f \Leftrightarrow 4x^2 + 1 \geq 0$. Or $\forall x \in \mathbb{R},\, 4x^2 + 1 > 0$, donc $D_f = \mathbb{R}$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \sqrt{4(-x)^2 + 1} - 2 = \sqrt{4x^2 + 1} - 2 = f(x)$, donc f est une fonction paire
4. $\forall x \in \mathbb{R},\, f'(x) = \frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}$
   $f'(x)$a le même signe que x, donc est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et strictement croissante sur $]0; +\infty[$
5.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

6. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (2x - 2)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\sqrt{4x^2 + 1} - 2 - (2x - 2)\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 1} - 2x\right)$
   $$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1} + 2x} = 0$$
   Donc la droite d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$
   b) Comme f est une fonction paire, la droite d'équation $y = -2x - 2$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$
7. (T) : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$; (T) : $y = -1$
8. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4x^2 + 1} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4x^2 + 1} = 2 \Leftrightarrow 4x^2 + 1 = 4 \Leftrightarrow 4x^2 = 3$
   $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{2}oux = \frac{\sqrt{3}}{2}$. D'où S = $\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

30

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$
   $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{2x^2-6}{x-2} = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{2x^2-6}{x-2} = +\infty$
2. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\},\, f'(x) = \frac{4x(x-2)-1(2x^2-6)}{(x-2)^2} = \frac{2x^2-8x+6}{(x-2)^2} = \frac{2(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$
   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; 3\}$; $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]1; 3[$; $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 1[\cup]3; +\infty[$
   f est strictement décroissante sur $]1; 3[$
   f est strictement croissante sur $]-\infty; 1[$ et sur $]3; +\infty[$
3.

x	$-\infty$		1		2		3		$-\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	12	$\nearrow$	$+\infty$

4. a)**C'est$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$ et non $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$**

On trouve $f(x) = 2x + 4 + \frac{2}{x-2}$ (méthode des coefficients indéterminés ou division euclidienne)

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - (2x+4)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x-2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - (2x+4)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x-2} = 0$, donc la droite d'équation $y = 2x + 4$ est asymptote oblique à (C) en -∞ et en +∞.

5. (T) : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$; soit (T) : $y = \frac{3}{2}x + 3$
6. Les abscisses des points d'intersection de (C) et de l'axe des abscisses sont solution de l'équation $f(x) = 0$
7. $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3}oux = \sqrt{3}$
8. Les points d'intersection de (C) et de l'axe des abscisses ont pour coordonnées $(0; -\sqrt{3})$ et $(0; \sqrt{3})$

31

1.

$$f(x) = sinx - x + \frac{x^3}{6}$$

$f'(x) = cosx - 1 + \frac{x^2}{2}$à Etudier sur $[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}]$

$$f''(x) = -sinx + x$$
$$f^{(3)}(x) = -cosx + 1$$

2. f^3> 0 ; f'' est croissante
$f''(0) = 0$; f''>0 si x >0 et $f'' < 0$ si $x < 0$
$f'(0) = 0$; $f' \geq 0$
Donc f est croissante

3. Pour tout x ≥0, $sinx - x + \frac{x^3}{6} \geq 0$ soit $sinx \geq x - \frac{x^3}{6}$
On sait que $f'' \geq 0$ si $x \geq 0$ donc $-sinx + x \geq 0$ soit $x \geq sinx$
Enfin Pour tout x ≥0, $x - \frac{x^3}{6} \leq sinx \leq x$
Pour tout x ≥0, $0 \leq sinx - x + \frac{x^3}{6} \leq \frac{x^3}{6}$
Pour tout x ≥0, $0 \leq f(x) \leq \frac{x^3}{6}$

4. En utilisant la parité on a :$x \leq sinx \leq x - \frac{x^3}{6}$

$$\frac{x^3}{6} \leq sinx - x + \frac{x^3}{6} \leq 0$$

En utilisant la parité on a : $\frac{x^3}{6} \leq f(x) \leq 0$

5. $g(x) = \frac{\sin x}{x}$

a) $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 = g(0)$, donc g est continue en 0

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^2}$, donc g est dérivable en 0

Pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x \Longrightarrow -\frac{x}{6} \leq \frac{\sin x - x}{x^2} \leq 0 \Longrightarrow$

Pour tout $x \leq 0$, $0 \leq \frac{\sin x - x}{x^2} \leq \frac{x}{6}$

Or $\lim\limits_{x \to 0} 0 = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{-x}{6} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0/$

On en déduit que g est dérivable en 0 et g'(0) = O

32

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+1} - x = +\infty$;

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0$$

2. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

   Si $x < 0$, alors $f'(x) < 0$

   Si $x > 0$, alors $x - \sqrt{x^2+1} > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow x^2 > x^2 + 1 \Leftrightarrow 0 > 1$ impossible

   Donc Si $x > 0$, alors $x - \sqrt{x^2+1} < 0$

   Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3.

$f'(x)$	$-\infty \quad +\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$ 0

4. $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (-2x)) = \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+1} + x = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} = 0$, donc la droite d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$.

5. (T) : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$; soit (T) : $y = -x + 1$

6. a) Soit h une telle fonction polynôme. On a : $h(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

   La tangente a la courbe représentative de h au point d'abscisse 0 a pour équation $y = h'(0)(x - 0) + h(0) = bx + c$. Comme cette tangente est (T), on a $b = -1$ et $c = 1$.

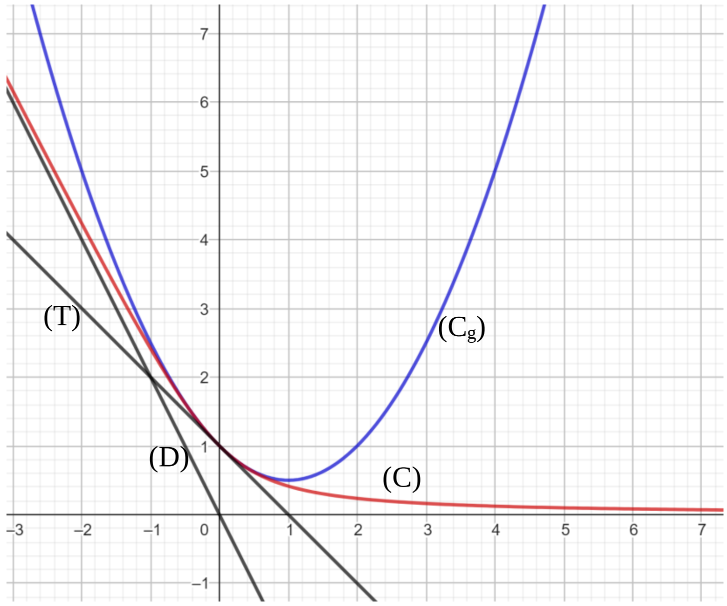
   Les fonctions cherchées sont les fonctions : $x \longmapsto ax^2 - x + 1$.

   b) **Dans l'énoncé de cette question, remplacer « qui » par « dont la courbe représentative »**

   Soit g cette fonction. On a g(2) = 1, donc $4a - 1 = 1$, soit $a = \frac{1}{2}$.

   Il existe une unique fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$ répondant à la question.

7.



33

1. $D_f = \mathbb{R}$
   $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = (-x)^2 - \cos(-x) = x^2 - \cos(x) = f(x)$, donc *f* est une fonction paire.
   Supprimer la question 2.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2x + \sin x$ et $f''(x) = 2 + \cos x$
3. $\forall x \in [0; \pi], f''(x) > 0$, donc *f* ' est strictement croissante sur $[0; \pi]$.
4. *f* '(0) = 0. Or *f* ' est strictement croissante sur $[0; \pi]$, donc pour tout $x \in [0; \pi]$, on a $f'(x) \geq 0$
5. $\forall x \in [0; \pi], f'(x) \geq 0$, donc *f* est strictement croissante sur $[0; \pi]$.
6. *f* est continue et strictement croissante sur $[0; \pi]$. De plus $f(0) = -1$ et $f(\pi) = \pi^2 + 1$; soit $f(0) \times f(\pi) < 0$. Donc l'équation $f(x) = 0$, càd l'équation (E), admet une solution unique α dans $[0; \pi]$.
7. Avec la méthode de dichotomie ou celle du balayage, on obtient 0,82 < α < 0,83.
8. $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) > 0$, donc *f* ' est strictement croissante sur ℝ.
   f '(0) = 0. Or *f* ' est strictement croissante sur ℝ, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) \geq 0$
   $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \geq 0$, donc *f* est strictement croissante sur ℝ. Par conséquent, l'équation (E) admet une solution unique α dans ℝ
   Comme la fonction *f* est paire et que $f(\propto) = 0$, on a $f(-\propto) = 0$.
   Les solutions de (E) sur ℝsont α et –α.

34

1. $D_f = \mathbb{R}^*$
   $\forall x \in \mathbb{R}^*, -x \in \mathbb{R}^*$ et $f(-x) = -x\sin\left(\frac{1}{-x}\right) = -x\left[-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right] = x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$, donc *f* est une fonction paire.

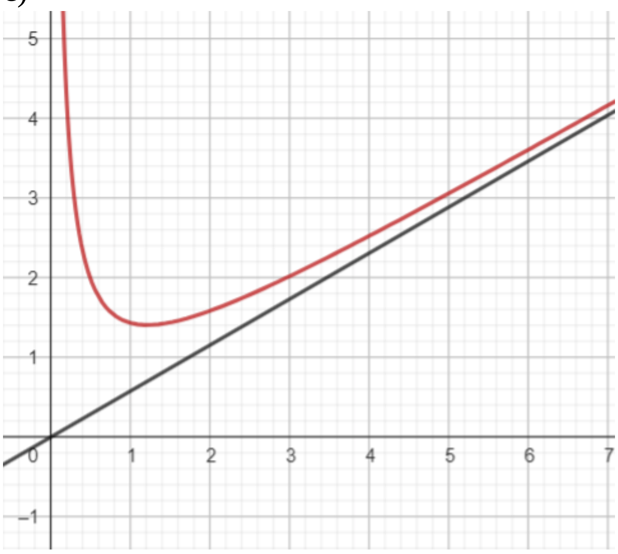
2. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$
   $\forall x \in \mathbb{R}^*, -1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \Rightarrow -x \leq x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$, si $x > 0$, et $x \leq x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq -x$, si $x < 0$.
   Or $\lim\limits_{x\to 0}(-x) = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$
4. Comme la fonction f est paire, on a : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$
5. La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$.

35

1. a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$, donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote horizontale à (C).
   $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$et $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(f(x) - \frac{x}{\sqrt{3}}\right) = 0$, donc la droite d'équation $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.
   b) $\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2x^2} = \frac{2x^2-3}{2\sqrt{3}x^2}$
   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$; $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]0; \frac{\sqrt{6}}{2}\right[$ et $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]\frac{\sqrt{6}}{2}; +\infty\right[$
   Par suite f est strictement décroissante sur $\left]0; \frac{\sqrt{6}}{2}\right[$ strictement croissante sur $\left]\frac{\sqrt{6}}{2}; +\infty\right[$

x	0		$\frac{\sqrt{6}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$+\infty \searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow +\infty$	

   c)



2. Si $m < \sqrt{2}$, alors (C) et (D) n'ont aucun point d'intersection
   Si $m = \sqrt{2}$, alors (C) et (D) ont un seul point d'intersection

Si $m > \sqrt{2}$, alors (C) et (D) ont deux points d'intersection

3. **Remplacer $m > 2$ par $m > \sqrt{2}$**

a) **Remplacer 3 par $\frac{3}{2}$** .

les abscisses de A et B sont solutions de l'équation $f(x) = m$

$f(x) = m \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2x} = m \Leftrightarrow 2x^2 + 3 = 2mx\sqrt{3} \Leftrightarrow x^2 - mx\sqrt{3} + \frac{3}{2} = 0$. Comme $x > \sqrt{2}$, cette dernière équation admet deux solutions distinctes dont la somme $m\sqrt{3}$ est et le produit est $\frac{3}{2}$. D'où le résultat.

b)**Remplacer $[2\,;\,+\infty[$ par $]\sqrt{2}\,;\,+\infty[$**

$\mathrm{I}\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$, soit $\mathrm{I}\left(\frac{m\sqrt{3}}{2}, \frac{2m}{2}\right)$ ou $\mathrm{I}\left(\frac{m\sqrt{3}}{2}, m\right)$

On a $x_{\mathrm{I}} = \frac{y_{\mathrm{I}}\sqrt{3}}{2}$ ou $y_{\mathrm{I}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}x_{\mathrm{I}}$ donc I décrit la droite d'équation $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x$, avec $x > \sqrt{2}$

36

1. $D_f = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \frac{-x}{\sqrt{(-x)^2+1}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = -f(x)$, donc f est une fonction impaire.

2. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$$

b) La droite d'équation $y = -1$ est asymptote horizontale à (C) en $-\infty$ et la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à (C) en $+\infty$

3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1\times\sqrt{x^2+1} - x\times\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4. $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2+1)\sqrt{x^2+1} > 0$, donc $f'(x) > 0$

$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow (x^2+1)^{\frac{3}{2}} \geq 1 \Rightarrow (x^2+1)\sqrt{x^2+1} \geq 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \leq 1 \Rightarrow f'(x) \leq 1$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}, 0 < f'(x) \leq 1$

5. $f'(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = 1 \Leftrightarrow 1 = (x^2+1)\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow 1 = (x^2+1)^3$

$\Leftrightarrow 1 = x^2 + 1 \Leftrightarrow 0 = x$, d'où (T) est la tangente à (C) au point d'abscisse 0.

(T) : $y = x + b$ et (T) passe par le point O(0 ; 0), d'où $b = 0$.

En définitive, (T) : $y = x$.

6. On a : $g(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

g(0) = 0, d'où $c = 0$.

g'(0) = 1, d'où $b = 1$.

Par suite : $g(x) = ax^2 + x$, $a \neq 0$.

37

Partie A

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \in D_f \Leftrightarrow x^2+1 \geq 0$. Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+1>0$, donc $D_f = \mathbb{R}$
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \sqrt{(-x)^2+1}-1 = \sqrt{x^2+1}-1 = f(x)$, donc f est une fonction paire
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
4. a) $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-(x-1)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\sqrt{x^2+1}-1-(x-1)\right] =$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$$
Donc la droite d'équation $y = x-1$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$
b) Comme f est une fonction paire, la droite d'équation $y = -x-1$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$
5. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
$f'(x)$ a le même signe que x, donc f strictement croissante sur $[0;+\infty[$
6.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

7. (T) : $y = f'(1)(x-1)+f(1)$; (T) : $y = \frac{1}{2}x - \sqrt{2} - \frac{3}{2}$
8. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}-1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = 1 \Leftrightarrow x^2+1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
D'où S = {0}

Partie B

1. $\lim\limits_{x\to0} g(x) = \lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{x^2}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = \lim\limits_{x\to0} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1} = 0 = g(0)$, donc g est continue en 0.
2. $\lim\limits_{x\to0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to0} \frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = \lim\limits_{x\to0} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{1}{2}$
Cette limite existe et est finie, donc g est dérivable en 0.
3. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 0 est $\frac{1}{2}$

38

La droite (D) a pour équation $x = -1$, donc $d = 1$
La droite (D') a pour équation $y = x+2$, donc $a = 1$ et $b = 2$
On a $f(x) = x+2+\frac{c}{x+1}$, et $f(0) = 3$, donc $2+c = 3$, soit $c = 1$
En définitive : $f(x) = x+2+\frac{1}{x+1}$

39

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $-x \in \mathbb{R}$, et $f(-x) = \sqrt{4(-x)^2+3} = \sqrt{4x^2+3} = f(x)$
La fonction f est une fonction impaire, donc l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de la courbe représentative de f.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{4x^2+3} = +\infty$, car $\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^2+3 = +\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+3} = +\infty$, car $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^2+3 = +\infty$

c) La fonction $x \longmapsto 4x^2+3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme. De plus $\forall x \in \mathbb{R}$, $4x^2+3 > 0$, donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

d) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{8x}{2\sqrt{4x^2+3}} = \frac{4x}{\sqrt{4x^2+3}}$
$f'(x)$a le même signe que x
f est strictement décroissante sur]-∞ ; 0[et strictement croissante sur]0 ; +∞[

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-2x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{4x^2+3}-2x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x^2+3-4x^2}{\sqrt{4x^2+3}+2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{4x^2+3}+2x} = 0$
Donc la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe représentative de f en +∞.

40

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{6x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{6x}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{6}{x} = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{x} = 0$$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{6(x^2+1)-2x\times 6x}{(x^2+1)^2} = \frac{6(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 1\}$, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-1; 1[$, et
$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$
f est strictement croissante sur $]-1; 1[$
f est strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$ et sur $]1; +\infty[$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	0	↘	-3	↗	3	↘	0

c) (T) : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$, soit (T) : $y = 6x$

d) Cette position est donnée par le signe de $f(x) - 6x$
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - 6x = \frac{6x}{x^2+1} - 6x = \frac{6x(1-x^2-1)}{x^2+1} = \frac{-6x^3}{x^2+1}$
$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{6x^2}{x^2+1} \geq 0$, donc $f(x) - 6x$ a le signe contraire de x
Par suite, (C) est au-dessus de (T) sur $]-\infty; 0[$ et au-dessous de (T) sur $]0; +\infty[$

41

A. $\forall a \in [0\,;1]$, $0 \leq a \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq a^2 \leq a \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a} \Leftrightarrow 0 \leq a \leq \sqrt{a}$.
D'où $\forall a \in [0\,;1]$, $\sqrt{a} \geq a$.

B. a) ▪ g est continue sur $]-\infty\,;1]$ en tant que somme et composée de fonctions continues, donc g est continue sur $[0\,;1]$;

▪ $g(0) = 1 - \sqrt{1-0} = 1 - 1 = 0$ et $g(1) = 1 - \sqrt{1-1} = 1 - 0 = 1$;

▪g est dérivable sur $]-\infty\,;1[$ en tant que somme et composée de fonctions dérivables, donc g est dérivable sur $[0\,;1[$

Pour tout $x \in [0\,;1[$, $g'(x) = 0 - \frac{-1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$. Or $\frac{1}{\sqrt{1-x}} > 0$ sur $[0\,;1[$, donc g est strictement croissante sur $[0\,;1]$.

▪$\forall x \in [0\,;1]$, $0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq 1-x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{1-x} \leq 1 \Leftrightarrow$

Comme $0 \leq 1-x \leq 1$, on a $1-x \leq \sqrt{1-x}$, d'après A.

D'où $1-\sqrt{1-x} \leq x$, càd $g(x) \leq x$

▪ Conclusion : La fonction g satisfait aux 4 conditions

b)g est continue et strictement croissante sur $[0\,;1]$, donc g réalise une bijection de $[0\,;1]$ sur $g([0\,;1]) = [0\,;1]$. Par conséquent, pour tout $k \in [0\,;1]$, l'équation $g(x) = k$ admet une solution unique dans $[0\,;1]$.

c)$g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 1-\sqrt{1-x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 1-\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow x = 1-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

d)$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}\frac{1-\sqrt{1-x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{1-x}}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}\frac{-1}{\sqrt{1-x}} = -\infty$, donc g n'est pas dérivable en 1

e) Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$

$P(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$

$P(1) = 1 \Leftrightarrow a + b = 1 \Leftrightarrow b = 1 - a$, il suffit de donner une valeur à a comprise entre 0 et 1 puis trouver la valeur de b correspondante.

Pour $a = \frac{1}{3}$ on a $b = \frac{2}{3}$ et alors $P(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x$

Situation complexe

42

a) f est dérivable sur $[0; 30]$

$$\forall\, t \in [0;30]\,,\ f'(t) = -3t^2 + 60t = -3t(t-20)$$

On a : $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ ou } t = 20$

$$f'(t) > 0 \Leftrightarrow t \in\,]0;20[$$
$$f'(t) < 0 \Leftrightarrow t \in\,]20;30[$$

Donc f est strictement croissante sur $[0;20]$ et strictement décroissante sur $[20;30]$

Tableau de variation de f

t	0		20		30
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$	0	↗	4000	↘	0

b) Interprétation

le nombre de personnes malades augmente par jour jusqu'au 20ème jour. A partir du 20ème jour le nombre de personnes commence à décroitre de jour en jour.

2)a) f' est dérivable sur $[0; 30]$

$$\forall\, t \in [0; 30],\, f''(t) = -6t + 60$$

b) $f''(t) = 0 \Leftrightarrow t = 10$

$$f''(t) < 0 \Leftrightarrow 10 < t < 30$$

$f''(t) > 0 \Leftrightarrow 0 < t < 10$ donc f' est strictement croissante sur $[0; 10]$ et strictement décroissante sur $[0; 30]$.

Tableau de variation de f'

t	0		10		30
$f''(t)$		+	0	-	
$f'(t)$	0	↗	300	↘	-900

c) Interprétation

La vitesse de propagation de la maladie croit durant les dix premiers jours du mois.

A partir du 10ème jour cette vitesse décroit.

d) Le plus grand nombre de malade a été atteint au jour 20, car la fonction f admet en 20 un maximum absolu.

Le nombre de malades a été de 4000 ce jour.

3-a) f'' s'annule en 10 en changeant de signe. Ce qui signifie que $(\mathcal{C})$ admet le point $A(10; f(10))$ comme point d'inflexion c'est-à-dire$A(10; 2000)$.

Au point d'abscisse 10, $(\mathcal{C})$ passe en dessous de sa tangente. Cela signifie concrètement qu'à partir du jour 10, le nombre de malade augmente certes, mais cette augmentation est moins rapide qu'avant le jour 10.

b)- Au 10èe jour, la vitesse de propagation de la maladie est de 300 malades / jour.

Leçon 3

Primitives

Situation d'Apprentissage

Faire deux lectures de la situation d'apprentissage par deux apprenants.
Recenser et expliquer les données pertinentes.
Poser les questions suivantes :

Question/Consignes pour dérouler la situation	Réponse attendue
Cite les personnages et le contexte de cette situation	Le professeur de Physique Chimie ; les élèves de terminale à un cours de cinématique
Qu'est ce que le professeur de physique affirme	Il fait le lien entre une fonction et sa dérivé.
Quel problème est posé	Un élève ne comprend pas le lien
Qu'est ce que les élèves décident de faire	Ils décident de chercher les fonctions qui ont pour dérivé la fonction nulle et les fonctions qui ont pour dérivée une fonction constante

Cette leçon se déroulera selon le plan suivant.

1) Primitive d'une fonction
2) Primitive de fonction de référence
3) Primitive et opération sur les fonctions

Installation des habiletés

1 Primitive d'une fonction

1.1 : Primitive d'une fonction

Activité

1.1. Définition d'une primitive d'une fonction continue

Soit h la fonction définie sur IR par : $h(x) = x + 2$.

I. Réponds par vrai ou faux aux affirmations suivantes

a) h est la dérivée de la fonction $H : x \longmapsto \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{3}{x}$.**Faux**

b) h est la dérivée de la fonction $H : x \longmapsto \frac{x^2}{2} + 2x + 1$.**Vrai**

c) h est la dérivée de la fonction $H : x \longmapsto \frac{x^2}{2} + 2x^2$.**Faux**

II. Trouve deux autres fonctions ayant h pour dérivée

$\boldsymbol{H_1 : x \longmapsto \frac{x^2}{2} + 2x - 5}$ et $\boldsymbol{H_1 : x \longmapsto \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{1}{2}}$.

Exercices de fixation

1.1.1. Recopie le tableau suivant et réponds par vrai (V) ou faux (F).

AFFIRMATIONS	REPONSE
f et F sont deux fonctions définies sur un intervalle I. F est une primitive de f sur I si *f* est dérivable sur I et ∀*x* ∈ I , F′ (*x*) = *f*(*x*).	**F**
h et t sont deux fonctions définies sur un intervalle K et ∀*x* ∈ K h ′ (x) = t(x). h' est donc une primitive de t sur K	**F**
F est une primitive de *f* sur un intervalle I équivaut à F'(*x*)=*f*(*x*)	**V**

1.1.2. Recopie et complète le texte ci-dessous avec les mots ou groupe de mots qui conviennent : une primitive, la dérivée, dérivable

- $\forall x \in]0 ; +\infty[$, la dérivée. de la fonction $T: 2\sqrt{x} + 1$ est la fonction $T': x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ donc T est ...**une primitive** de la fonction T'sur $]0 ; +\infty[$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $t: x \to x$est ...**la dérivée...**de la fonction $h: x \mapsto \frac{x^2}{2} + \pi$ donc h est ...**une primitive** ....de la fonction t sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, La fonction $f: x \mapsto \frac{x^3}{3} + 4x + 1$est…**une primitive** de la fonction$g: x \mapsto x^2 + 4$ sur $\mathbb{R}$.

1.1.3.

- **1.C**
- **2.B**

1.2 Ensemble des primitives d'une fonction continue

Activité

On admet que toute fonction continue sur un intervalle I possède des primitives sur I. On donne *f* une fonction définie sur un intervalle K et F une primitive de *f* sur K.

I. 1) Démontrons que pour tout nombre réel c, la fonction $x \mapsto F(x) + c$ est une primitive de *f*.

$\boldsymbol{(F(x) + c)' = F'(x) = f(x)}$ **donc** $\boldsymbol{x \to F(x) + c}$ **est une primitive de** $\boldsymbol{f}$.

2) Réponds par vrai ou faux aux affirmations suivantes

- Toute fonction continue sur un intervalle K admet une unique primitive sur K. **Faux**
- Si et F une primitive de f sur K alors pour tout réel c, la fonction $F(x) + c$ est une primitive de *f*.**Faux**

- Si et F une primitive de f sur K alors pour tout réel c, la fonction $x \to F(x) + c$est une primitive de f.**Vrai**

II. Soit H une primitive de f.

1) Justifions que $(F - H)$' est la fonction nulle.

$$(F - H)'(x) = F'(x) - H'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

2) Déduis-en que pour $x \in K$, $H(x) = F(x) + c$, c une constante.

$$(F - H)'(x) = 0 \Leftrightarrow \textit{il existe c élément de } \mathbb{R} \textit{ tel que } (F - H)(x) = c$$

Ainsi $H(x) = F(x) + c$.

3) Sous quelle forme s'écrit une primitive de f si F est une primitive de f ?

Une primitive de f est sous la forme $x \to F(x) + c$.

Exercices de fixation

1.2.1. Recopie le tableau suivant et réponds par vrai (V) ou faux (F) aux affirmations suivantes.

AFFIRMATIONS	REPONSE
Les fonctions polynômes admettent toutes des primitives sur $\mathbb{R}$	**V**
Les fonctions rationnelles admettent des primitives sur $\mathbb{R}$	**F**
Deux primitives sur un intervalle K, d'une même fonction diffèrent d'une constante	**V**
Toutes les primitives de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur]0 ;+∞[sont de la forme $x \mapsto 2\sqrt{x} + k$ avec k un nombre réel	**V**

1.2.2. Parmi les fonctions ci-dessous, inscris les primitives correspondantes à chaque fonction dans la première ligne.

$x \mapsto \frac{4x^3}{3} + 4x + 1$; $x \mapsto \frac{4x^3}{3} + x - 4$; $x \mapsto \sqrt{x} + \sqrt{3}$; $x \mapsto \sqrt{x} + 3$

Fonction	$x \mapsto 4x^2 + 1$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$
primitives	$\boldsymbol{x \mapsto \frac{4x^3}{3} + x - 4}$	$\boldsymbol{x \mapsto \sqrt{x} + \sqrt{3}}$ **et** $\boldsymbol{x \mapsto \sqrt{x} + 3}$

1.2.3. Dans chacun des cas suivants, F et f sont des fonctions définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$
Justifie que F et une primitive de f sur l'intervalle I.

1) $F(x) = \frac{x^6}{3} - x^3 + 2x - 1$ $f(x) = 2x^5 - 3x^2 + 2$; I=$\mathbb{R}$	2) $F(x) = \cos(2x - 1) + \sin(\frac{3}{2}x)$ $f(x) = -2\sin(2x - 1) + \frac{3}{2}\cos(\frac{3}{2}x)$;I=$\mathbb{R}$
3) $F(x) = \frac{1}{x^3} + x\sqrt{x} + \sqrt{2}$ $f(x) = -\frac{3}{x^4} + \frac{3}{2}\sqrt{x}$; I=]0; +∞[	4) $F(x) = \sqrt{x+2} - (3x - 2)^2$ $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} - 18x + 12$; I=] − 2; +∞[

1) $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \frac{6x^5}{3} - 3x^2 + 2 = 2x^5 - 3x^2 + 2$ **, donc F est une primitive de f sur** $\mathbb{R}$
2) $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = -2\sin(2x-1) + \frac{3}{2}\cos\left(\frac{3}{2}x\right)$, **donc F est une primitive de f sur** $\mathbb{R}$
3) $\forall x \in]0;+\infty[, F'(x) = -\frac{3x^2}{x^6} + (x^{\frac{3}{2}})' = -\frac{3}{x^4} + \frac{3}{2}\sqrt{x}$ **, donc F est une primitive de f sur** $]0;+\infty[$
4) $\forall x \in]-2;+\infty[, F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} - 2 \times 3(3x-2) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} - 18x + 12$ **, donc F est une primitive de f sur** $]-2;+\infty[$

1.3 Unicité de la primitive d'une fonction qui prend une valeur donnée en un point donné.

Activité

f est une fonction continue sur un intervalle K, elle admet une primitive H sur K.

1) Déterminons une primitive F de f qui prend la valeur y_0 en x_0 sur K
   $\forall x \in K$ **, F** (x)**=H** (x)**+c où c est un nombre réel**
   $F(x_0) = H(x_0) + c = y_0$ **donc** $F(x) = H(x) + y_0 - H(x_0)$
2) On suppose que G est une primitive de f qui prend la valeur y_0 en x_0 sur K
   Comparons G et F.
   G (x)**=F** (x)**+k où k est un nombre réel,G** (x_0)**=F** (x_0)**+k=**y_0**+k=**y_0 **donc k est nul. G=F**
3) Existe-t-il une autre primitive de f qui prend la valeur y_0 en x_0 ?
   Non.

Exercices de fixation

1.3.1. Soit la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$.
Détermine la primitive F de f qui prend la valeur 3 en 1.

Réponds par vrai ou faux à chacune des propositions dans ce tableau.

PROPOSITIONS	REPONSE
$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = x^3 + x + c$, où c est une constante. $F(3) = 30 + c = 1$ donc , $F(x) = x^3 + x - 29$	**Faux**
$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = x^3 + x + c$, où c est une constante $F(1) = 2 + c = 3$ donc , $F(x) = x^3 + x + 5$	**Faux**
$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = x^3 + x + c$, où c est une constante $F(1) = 2 + c = 3$ donc , $F(x) = x^3 + x + 1$	**Vrai**

1.3.2. Soit la fonction $F(x) = \sqrt{x+1} - 2$ une primitive de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ sur $]-1;+\infty[$.
Détermine la valeur qui annule la primitive F de f sur $]-2;+\infty[1$.

Réponds par vrai ou faux à chacune des propositions dans ce tableau.

PROPOSITIONS	REPONSE
$\sqrt{x+1} - 2 = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 4$ $\sqrt{x+1} - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ $donc$ F s'annule en 3	**Vrai**
$\sqrt{0+1} - 2 = -1$ $donc$ F s'annule en -1	**Faux**

1.3.3. Dans chacun des cas suivants, f est une fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$
Détermine la primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$

1) $f(x) = -6x^5 + 2,$ $x_0 = 1$ et $y_0 = 0$	2) $f(x) = \cos x$ $x_0 = \pi$ et $y_0 = \frac{1}{2}$
3) $f(x) = -\frac{3}{x^4} + 1$ $x_0 = 1$ et $y_0 = -3$	4) $f(x) = x + 1$ $x_0 = -2$ et $y_0 = -3$

1) $\boldsymbol{F(x) = -x^6 + 2x}$
2) $\boldsymbol{F(x) = sinx + \frac{1}{2}}$
3) $\boldsymbol{F(x) = \frac{1}{x^3} + x - 5}$
4) $\boldsymbol{F(x) = \frac{x^2}{2} + x - 3}$

Activités 2 Primitive des fonctions de référence

2.1. Quelles sont les fonctions dont leurs dérivées sur un intervalle I sont inscrites dans la 2e ligne du tableau ?
Complète le tableau suivant.

Primitives Définie par	$\boldsymbol{F(x) = c}$ **Où c** $\in \mathbb{R}$	$\boldsymbol{F(x) = x + c}$	$\boldsymbol{f(x) = x^2 + c}$	$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + c}$	$\boldsymbol{f(x) = \frac{-1}{(r-1)x^{r-1}} + c}$
Fonction dérivée f définie par	$f(x) = 0$	$f(x) = 1$	$f(x) = 2x$	$f(x) = x^r, r \in \mathbb{Q}$	$f(x) = \frac{1}{x^r}, r \in \mathbb{Q}^*$

Exercices de fixation

2.1.1. Réponds par vrai ou faux à chacune des affirmations dans ce tableau.

PROPOSITIONS	REPONSE
$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$,la fonction définie par $f(x) = 5x^4$ est une primitive de la fonction définie par $f(x) = x^5$	**Faux**
$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f(x) = -\frac{1}{3x^3}$, est une primitive de $f(x) = \frac{1}{x^4}$,	**Vrai**
$\forall x \in]-\frac{\pi}{2} + k ; \frac{\pi}{2} + k[$,la fonction définie par $f(x) = tanx$ est une primitive de la fonction définie par $f(x) = 1 + tan^2x$	**Vrai**

2.1.2. F est une fonction continue et F est une primitive f sur l'intervalle I.
Recopie et associe chaque fonction f à sa primitive F.

$f;x \longmapsto \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$	•	•	$F;x \longmapsto 2x^{\frac{1}{2}}$
$f;x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	•	•	$F;x \longmapsto \frac{1}{4x^4}$
$f;x \longmapsto \frac{1}{x^2}$	•	•	$F;x \longmapsto x\sqrt{x}$
$f;x \longmapsto -\frac{1}{x^5}$	•	•	$F;x \longmapsto -\frac{1}{x}$

Activités 3 Primitive et opération sur les fonctions

Activité

Des corrections à faire au niveau de l'énoncé de l'activité.

Ajouter : Les fonctions u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I.

Primitive F définie par :	$F = u + v$	$F = \lambda u$	$F = uov$	$F = -cosu$
Fonction dérivé f définie par	$f = u' + v'$	$f = \lambda u'$	$f = v' \times u'ov$	$f = u'sinu$

NB : Il faut supprimer le x. l'écriture $f(x) = u' + v'$ n'est pas correcte.

Exercices de fixation

3.1.1.

1. **B**
2. **A**
3. **A**
4. **B**
5. **C**

3.1.2. Mets une croix dans la case qui correspond à une primitive sur $]-\infty; 0[$ de la fonction $f: x \longmapsto \frac{1-x^2}{x^2}$

$x \longmapsto \frac{-x^2 - x - 1}{x}$	X
$x \longmapsto \frac{1-2x}{x^4}$	
$x \longmapsto \frac{x^2 + x + 1}{x}$	

3.1.3. f est une fonction continue et F est une primitive f sur l'intervalle I.
Recopie et associe chaque fonction f à sa primitive F.

$f: x \longmapsto 2(2x+3)^3$	•
$f: x \longmapsto \dfrac{3}{2\sqrt{3x}}$	•
$f: x \longmapsto \dfrac{1}{(x+1)^2}$	•
$f: x \longmapsto 2x(x^2-2)^2 - \dfrac{4}{x^5}$	•

•	$F; x \longmapsto (3x)^{\frac{1}{2}}$
•	$F: x \longmapsto \dfrac{(x^2-2)^3}{3} - \dfrac{1}{x^4}$
•	$F; x \longmapsto \dfrac{(2x-3)^4}{4}$
•	$F; x \longmapsto \dfrac{x}{x+1}$

Exercices de renforcement

1 $x \longmapsto \frac{3x^2}{2} + 2x + c$; où c $\in \mathbb{R}$

2 $x \longmapsto \frac{3x^5}{5} + \frac{2x^4}{4} + c$; où c $\in \mathbb{R}$

3 $x \longmapsto \frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{1}{2}x\sqrt{x} + c$; où c $\in I$

4 $x \longmapsto x^2 - \frac{3}{x} + c$; où c $\in I$

5 $x \longmapsto \frac{x^2}{2} - 2cosx + c$; où c $\in \mathbb{R}$

6 $x \longmapsto sinx - 2cosx + c$; où c $\in \mathbb{R}$

7 $x \longmapsto -cosx - tanx + c$; où c $\in I$

8 $x \longmapsto -cosx - 2\sqrt{x} + c$; où c $\in I$

9 $x \longmapsto \frac{3x^5}{x} + 3x^3 - \frac{5}{x} + c$; où c $\in I$

10 $x \longmapsto 2x + 3x^3 + \frac{2}{x} + 8\sqrt{x} + c$; où c $\in I$

11 $x \longmapsto xsinx + c$; où c $\in \mathbb{R}$

12 $x \longmapsto xcosx + c$; où c $\in \mathbb{R}$

13 $x \longmapsto x^2 sinx + c$; où c $\in \mathbb{R}$

14 $x \longmapsto xtanx + c$; où c $\in I$

15 $x \longmapsto (2x+1)sinx + c$; où c $\in \mathbb{R}$

16 $x \longmapsto x\sqrt{x+1} + c$; où c $\in I$

17 $x \longmapsto \frac{1}{2}(3x+7)^6 + c$; où c $\in \mathbb{R}$

18 $x \longmapsto \frac{1}{12}(x^3+2)^4 + c$; où c $\in \mathbb{R}$

19 $x \longmapsto \frac{-1}{4(x^2+2x)^2} + c$; où c $\in I$

20 $x \longmapsto \sqrt{x^2-3} + c$; où c $\in I$

21 $x \longmapsto \frac{1}{-3}(\frac{x+1}{x})^3 + c$; où c $\in I$

22 $x \longmapsto \frac{1}{-3}(\frac{x+1}{x})^3 + c$; où c $\in I$

23 $x \longmapsto \frac{-1}{1+x^2} + c$; où c $\in I$

24 $x \longmapsto \sqrt{x^2-2x+3} + c$; où c $\in I$ est une primitive de $x \longmapsto \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$

25 $x \longmapsto \frac{1}{8}(3x^2-2x+3)^3 + c$; où c $\in I$

26 $x \longmapsto \frac{1}{x^2-x+1} + c$; où c $\in I$

27 $x \longmapsto \frac{1}{6(x^3-3x+1)^2} + c$; où c $\in I$

28 $x \longmapsto \sqrt{x^2-2x} + c$; où c $\in I$

29 $x \longmapsto sin\sqrt{x} + c$; où c $\in I$

30 $x \longmapsto -\cos(2x+\pi) + c$; où c $\in I$

31 $x \longmapsto \frac{1}{cosx} + c$; où c $\in I$

32
a) $F(x) = \frac{3x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + c$; où c $\in I$

b) $F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - x\sqrt{2} + c$; où c $\in I$

c) $F(x) = \frac{(2x^2+7)^3}{3} + c$; où c $\in I$

d) $F(x) = \frac{x^3}{3} - x + c$; où c $\in I$

e) $F(x) = \frac{(3x-2)^4}{12} + c$; où c $\in I$

33

a) $x \longmapsto = \frac{x^4}{2} - \frac{1}{x^2} - \frac{5}{1-x} + c$; avec c $\in \mathbb{R}$

b) $x \longmapsto = \frac{-5x^3}{3} - \frac{1}{x^4+x+1} - \frac{1}{x} + c$; avec c $\in \mathbb{R}$

c) $x \longmapsto = \frac{-1}{2\left(\frac{x^3}{3}+x^2-\sqrt{2}x\right)^2} + \text{c}$; avec c $\in \mathbb{R}$

d) $x \longmapsto = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{3(3x^2-2)^3} + \text{c}$; avec c $\in \mathbb{R}$

34

a) $x \longmapsto \frac{2(2x-3)\sqrt{2x-3}}{3}$

b) $x \longmapsto \frac{x^4}{4} + \frac{1}{2x^2} + 2\sqrt{1-3x}$

c) $x \longmapsto \frac{2\sqrt{x^2-x}^3}{3}$

d) $x \longmapsto 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x^3+x-1}$

35

a) $x \longmapsto sin3x - \cos(2x+1) + c$; avec c $\in \mathbb{R}$

b) $x \longmapsto -cos3xsin2x + c$; avec c $\in \mathbb{R}$

c) $x \longmapsto -\frac{1}{cosx} + tanx$+c;; avec c $\in \mathbb{R}$

d) $x \longmapsto \frac{cos5x}{sin3x} + c$; *avec c* $\in \mathbb{R}$

e) $x \longmapsto -\frac{cos2x}{sin2x} + c$; ; avec c $\in \mathbb{R}$

36

a) $F(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{2x^4}{4} - 2x^2 - 2x + \frac{36}{10}$
b) $F(x) = x - \frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$; F(1) = 1 à corriger dans l'énoncé.
c) $F(x) = \frac{x^3}{3} + 4\sqrt{x} - \frac{14}{3}$;
d) $F(x) = xcosx + 2\pi$

37

a) $F(x) = x + 2\sqrt{2-x} - 3$
b) $F(x) = x^2 - \frac{1}{x} + 2x - 2$
c) $F(x) = \frac{(x^3+5)^2}{2} + 4\sqrt{x} + 20$
d) $F(x) = xsin\frac{\pi}{2}x - 1$

38

$G(x) = 2x - \frac{1}{x+3}$
$G'(x) = 2 + \frac{1}{(x+3)^2}$
$G'(x) = \frac{2(x+3)^2+1}{(x+3)^2}$
$G'(x) = \frac{2x^2+12x+19}{(x+3)^2} = g(x)$
Donc G est une primitive de g sur I.

39

$f(x) = 3x^3 - 9x + 1$
$f'(x) = 9x^2 - 9$
Deux primitives de g sont f et $f + 1$.

40

$F(x) = \frac{5x^2-7x+9}{3x-1}$
$G(x) = \frac{5x^2-16x+12}{3x-1} = \frac{5x^2-7x-9x+9+3}{3x-1} = \frac{5x^2-7x+9}{3x-1} + \frac{-3(3x-1)}{3x-1} = F(x) - 3$
$G'(x) = F'(x)$.

41

1. $F(x) = x^3 + x^2 - x + C,\ C \in \mathbb{R}$
2. $F(x) = sinx + cosx + C, C \in \mathbb{R}$
3. $F(x) = \frac{x^4}{2} + x^2 + \frac{x^2}{8} - x + C, C \in \mathbb{R}$
4. $F(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{6} - 2x + C, C \in \mathbb{R}$

42

1. $F(x) = \sqrt{4x-1} + C,\ C \in \mathbb{R}$
2. $F(x) = \frac{-1}{1+2x^2}$
3. $F(x) = \frac{3}{4}(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3})^4 + C,\ C \in \mathbb{R}$
4. $F(t) = cos^4 t + \mathrm{C},\ \ C \in \mathbb{R}$

43

$f(t) = Cos(3t - \frac{\pi}{3})$ et $F(0) = 2$

$F(x) = \frac{1}{3}Sin(3t - \frac{\pi}{3}) + \mathrm{C}.$

$F(0) = \frac{1}{3}Sin(-\frac{\pi}{3}) + \mathrm{C} = \frac{-\sqrt{3}}{6} + \mathrm{C} = 2\ ;\ \ \mathrm{C} = 2 + \frac{\sqrt{3}}{6}$

$F(x) = \frac{1}{3}Sin(3t - \frac{\pi}{3}) + 2 + \frac{\sqrt{3}}{6}.$

44

$F(x) = 2x^2 - 7x + C,\ F(2) = 0 = 8 - 14 + C = C - 6\ ;\ \ \mathrm{C} = 6$

$F(x) = 2x^2 - 7x + 6$.

45

$3 - \frac{13}{(x+2)^2} = \frac{3(x+2)^2 - 13}{(x+2)^2}$

$= \frac{3x^2+12x+12-13}{(x+2)^2}$

$= \frac{3x^2+12x-1}{(x+2)^2}$

Donc $g(x) = 3 - \frac{13}{(x+2)^2}$

$F(x) = 3x + \frac{13}{x+2} + C,\ C \in \mathbb{R}$

$F(1) = 3 + \frac{13}{3} + C = 4$

$\mathrm{C} = 1 - \frac{13}{3} = -\frac{10}{3}$

$F(x) = 3x + \frac{13}{x+2} - \frac{10}{3}$

46

$F(x) = \frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + C$

$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(2 \times \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) + C$

$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + C$

$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} + C = 1$

$\mathrm{C} = \frac{3}{4}$

$F(x) = \frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{3}{4}$

47

$F(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2x^2+1} + C$
$F(2) = \frac{1}{2}\sqrt{8+1} + C$
$F(2) = \frac{3}{2} + C = 3$
$C = \frac{3}{2}$
$F(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2x^2+1} + \frac{3}{2}$

48

$F(x) = \sqrt{2x+1} + C$
$F(2) = \sqrt{0+1} + C$
$F(2) = 1 + C = 0$
$C = -1$
$F(x) = \sqrt{2x+1} - 1$

49

$F(x) = \frac{-1}{cosx} + C$
$F(x) = -1 + C = 1$
C = 2
$F(x) = \frac{-1}{cosx} + 2$

50

$F(x) = \frac{3}{10}(x^2+1)^5 + C,\ C \in \mathbb{R}$
$F(\sqrt{2}) = \frac{3}{10}(2+1)^5 + C,\ C \in \mathbb{R}$
$F(\sqrt{2}) = \frac{3}{10}(2+1)^5 + C,\ C \in \mathbb{R}$

51

$f(x) = cosxsin^2x - 3cosxsinx + 8cosx$
$F(x) = -\frac{1}{3}sin^3x + \frac{3}{2}sin^2x - 8sinx + C$
$F\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{3}sin^3(\frac{2\pi}{3}) + \frac{3}{2}sin^2(\frac{2\pi}{3}) - 8\sin(\frac{2\pi}{3}) + C$

$F\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2})^3 + \frac{3}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + C$
$F\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{9-33\sqrt{3}}{8} + C = 0$
C = $\frac{-9+33\sqrt{3}}{8}$

$F(x) = -\frac{1}{3}sin^3x + \frac{3}{2}sin^2x - 8sinx + \frac{-9+33\sqrt{3}}{8}$

Exercices d'approfondissement

52

$f(x)=\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{5}{(x-1)^3}$; $a=2$ et $b=5$

$F(x)=\frac{-2}{x-1}-\frac{5}{2(x-1)^2}+C$

$F(x)=\frac{-2}{-5}-\frac{5}{2(-5)^2}+C$

$F(x)=\frac{3}{10}+C$; $C=-\frac{3}{10}$

$F(x)=\frac{-2}{x-1}-\frac{5}{2(x-1)^2}-\frac{3}{10}$

53

a) $F(x)=\frac{2}{15}(3x+1)^2\sqrt{3x+1}+1; f(x)=(3x+1)\sqrt{3x+1}$

$$F(x)=\frac{2}{15}(3x+1)^{\frac{3}{2}}$$

$F'(x)=\frac{2}{15}\times\frac{5}{2}\times 3(3x+1)^{\frac{3}{2}}$ donc $F'(x)=f(x)$

b) $F(x)=\frac{(x+1)^2+2}{(x+1)^2}$; $f(x)=-\frac{4}{(x+1)^3}$

$F(x)=1+\frac{2}{(x+1)^2}$ donc $F'(x)=\frac{-2\times 2}{(x+1)^3}=f(x)$

c) $F(x)=\frac{tan^2x}{2}$; $f(x)=\frac{sinx}{cos^3x}$

$$F'(x)=\frac{\frac{2}{cos^2x}tanx}{2}=\frac{sinx}{cos^3x}$$

d) $F(x)=(\frac{1+cos2x}{2})^2$; $f(x)=-4sinxcos^3x$

$F(x)=(cos^2x)^2;F(x)=-4sinxcos^3x$

54

$f(x)=4x+\frac{2}{(x-1)^2}$

$F(x)=2x^2-\frac{2}{x-1}+C$

$F(0)=0+2+C=0$

$C=-2$

$F(x)=2x^2-\frac{2}{x-1}-2$

55

a) $D_f =]-\infty; \frac{1}{3}[$.

b) $F'(x) = \left(\frac{4}{5}x - \frac{1}{15}\right)\sqrt{1-2x} - \frac{\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{15}x - \frac{1}{15}}{\sqrt{1-2x}}$

$$F'(x) = \frac{\frac{4}{5}x - \frac{8}{5}x^2 - \frac{1}{15} + \frac{2}{15}x - \frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{15}x + \frac{1}{15}}{\sqrt{1-2x}}$$

$$F'(x) = \frac{-2x^2 + x}{\sqrt{1-2x}} = x\sqrt{1-2x}$$

c) $F(x) = \left(\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{15}x - \frac{1}{15}\right)\sqrt{1-2x} + \frac{16}{15}$

56

a) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$

b) $\forall x \epsilon D_f, f(x) = \frac{-1}{(x+2)^3} + \frac{6}{(x+2)^4}$

c) $F(x) = \frac{1}{2(x+2)^2} - \frac{2}{(x+2)^3} + \frac{3}{2}$

57

a) pout tout réel x, $cos^5x = cos^4xcosx$

$$= (1 - sin^2x)^2cosx$$

$$= (1 - 2sin^2x + sin^4x)cosx$$

$$= cosx - 2sin^2xcosx + sin^4xcosx$$

b) $x \longmapsto sinx - \frac{2sin^3x}{3} + \frac{sin^5x}{5} + c$; avec c $\in \mathbb{R}$

c) $x \longmapsto sinx - \frac{2sin^3x}{3} + \frac{sin^5x}{5} + \frac{1}{3}$

Situations d' évaluation

58

1) Dresse le tableau de signe de la fonction b.

x	0	15	
$b(x)$	+	0	-

2) $B(x) = -2x^2 + 60x$
Le bénéfice maximal est 450mille francs.

Leçon 4

Fonctions logarithmes

Situation d'Apprentissage

Faire deux lectures de la situation d'apprentissage par deux apprenants.
Recenser et expliquer les données pertinentes.
Poser les questions suivantes :

Question/Consignes pour dérouler la situation	Réponse attendue
Quelle est la consommation initiale intérieure	1 000 000
Quelle est la consommation destinée à l'exportation	250 000
Exprime en fonction du nombre n d'année la demande intérieure	$1\,000\,000(1{,}11)^n$
Exprime en fonction du nombre n d'année la demande destinée à l'exportation	$250\,000(1{,}4)^n$
Exprime à l'aide d'une inéquation, la phrase « au bout de combien d'années les exportations dépasseront la consommation intérieure.	$250\,000(1{,}4)^n \geq 1\,000\,000(1{,}11)^n$
Justifie que : $(\frac{140}{111})^n \geq 4$	$250\,000(1{,}4)^n \geq 1\,000\,000(1{,}11)^n$ $\frac{(1{,}4)^n}{(1{,}11)^n} \geq \frac{1\,000\,000}{250\,000}$ $(\frac{140}{111})^n \geq 4$
Qu'est ce que les élèves décident de faire	Les élèves décident de faire des recherches

On peut ajouter : *Les élèves font des recherches et parviennent à l'inéquation $(\frac{140}{111})^n \geq 4$ mais ne savent pas la résoudre. Leur professeur de mathématique dit qu'il faut connaitre les fonctions logarithmes. Les élèves décident d'étudier les fonctions logarithmes*.
Pour résoudre une telle inéquation il faut connaitre les fonctions logarithmes.
Nous allons étudier les fonctions logarithmes selon le plan suivant :

1) Fonction logarithme népérien
2) Equations et inéquations
3) Dérivées et primitives
4) Fonction logarithme de base a
5) Etude de fonction faisant intervenir la fonction logarithme népérien

Installation des habiletés

Activité 1 Fonction logarithme népérien

1.1 Définition

1. a) $V(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1}$

   b) Pour $n = 2$, $V(x) = -\frac{1}{x} + 1$ et pour $n = 3$, $V(x) = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2}$

2. a) La fonction $u: x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ donc elle admet des primitives sur $]0\,;+\infty[$

   b) Toutes les primitives de u sont sous la forme $f + C$ avec $C \in \mathbb{R}$

   Déterminons toutes les primitives de u qui s'annulent en 1.

On a :$(f + C)(1) = 0 \Leftrightarrow f(1) + C = 0 \Leftrightarrow 0 + C = 0 \Leftrightarrow C = 0$ donc f est l'unique primitive de u qui s'annule en 1.

Exercice de fixation

1-faux ; 2-faux ; 3-vrai ; 4-faux ; 5-vrai ; 6-faux

1.2 Conséquences de la définition de la fonction ln

1. L'ensemble de définition de la fonction ln est $]0;+\infty[$.
   $D_{\ln} =]\,0\,;+\infty[$
2. La dérivée de la fonction ln est la fonction : $x \longmapsto \frac{1}{x}$..
   $\forall x \in]0;+\infty[, \ln'(x) = \frac{1}{x}$.
3. $\ln(1) = 0$

Exercice de fixation

1. b ; 2.d ; 3.c

1.3 Propriétés algébriques

1. a) $\forall x \in]0;+\infty[, h'(x) = \ln'(ax) = a \times \frac{1}{ax} = \frac{1}{x} = \ln'(x)$

   b) $\forall x \in]0;+\infty[, h'(x) = \ln'(x)$ donc il existe un réel k tel que $h(x) = \ln x + k$

   c) $h(1) = \ln 1 + k = \ln a \Leftrightarrow 0 + k = \ln a$ donc $k = \ln a$ ainsi $\ln(ax) = \ln x + \ln a$

   d) En remplaçant x par b dans la relation $\ln(ax) = \ln x + \ln a$,

on obtient $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

2. a) $\ln(a) = \ln\left(b \times \frac{a}{b}\right) = \ln b + \ln\frac{a}{b} \Leftrightarrow \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

   b) $\ln\frac{1}{b} = \ln 1 - \ln b = 0 - \ln b = -\ln b$

3. a) on a : $\ln(a^2) = \ln(a \times a) = \ln a + \ln a = 2\ln a$

Supposons un entier naturel n tel que : $n \geq 2$ et $\ln(a^n) = n\ln a$.

Démontrons que : $\ln(a^{n+1}) = (n+1)\ln a$

On a :$\ln(a^{n+1}) = \ln(a^n \times a) = \ln(a^n) + \ln a = n\ln a + \ln a = (n+1)\ln a$.

Il vient que $\forall n \in \mathbb{R}^*$, $\ln(a^n) = n\ln a$

b) $\forall r \in \mathbb{Q}$, $\ln(a^r) = r\ln a$.

Exercices de fixation

Exercice 1

$\ln(4+\sqrt{15})+\ln(4-\sqrt{15})=\ln[(4+\sqrt{15})(4-\sqrt{15})]=\ln(16-15)=\ln 1=0$

Exercice 2

$A=\ln 6+\ln\frac{1}{3}=\ln 3+\ln 2-\ln 3=\ln 2$

$B=\ln(2x)+\ln 3-\ln 6=\ln 2+\ln x+\ln 3-\ln 2-\ln 3=\ln x$

$C=3\ln 2+\ln 5-2\ln 3-\ln 10=3\ln 2+\ln 5-\ln 9-\ln 5-\ln 2=\ln 4-\ln 9=\ln\frac{4}{9}$

$D=\ln(3-\sqrt{5})+\ln(3+\sqrt{5})=\ln[(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})]=\ln(9-5)=\ln 4$

Exercice 3

$A=\ln 27=3\ln 3$

$B=\ln\frac{1}{81}=-4\ln 3$

$C=\frac{1}{3}\ln 729=\frac{1}{3}\ln(3^6)=2\ln 3$

Exercice 4

$A=\ln 50=\ln 2+\ln 25=\ln 2+2\ln 5$

$B=\ln\frac{16}{25}=\ln 2^4-\ln 5^2=4\ln 2-2\ln 5$

$C=\ln 25+\ln 10=2\ln 5+\ln 2+\ln 5=3\ln 5+\ln 2$

1.4 Limites de références, variations et représentation graphique de ln

A. Limites de références

1. *Limite en* $+\infty$

a) Supposons que la fonction ln est majorée, il existe donc un nombre réel A tel que $\forall x\in]0;+\infty[, \ln x\leq A$. On obtient donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=L$ tel que : $l\leq A$.
Donc ln admet une limite finie en$+\infty$.

b) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(2x)=L\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\ln 2+\ln x=L\Leftrightarrow \ln 2+\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=L$
$\Leftrightarrow \ln 2+L=L\Leftrightarrow \ln 2=0$, ce qui est absurde donc la fonction ln n'est pas majorée.
On en déduit que la fonction ln n'est pas majorée. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

2. *Limite en* 0

a) Pour $x>0$ on a :$-\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-(-\ln x)=\ln x$. Posons $X=\frac{1}{x}$

Quand x tend vers 0, X tend vers $+\infty$. Ainsi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\ln x=\lim\limits_{X\to+\infty}(-\ln X)=-\infty$

b) Interprétation graphiquement de $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\ln x=-\infty$

La droite d'équation $x=0$ est une asymptote verticale à la courbe de ln.

c) Tableau de variation

De tout ce qui précède, on obtient le tableau de variation suivant :

x	0		1		e		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	‖	+	1	+	$\frac{1}{}$	+	
$\ln x$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$

d) Sur$]0;+\infty[$, la fonction ln est continue et strictement croissante donc elle réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$

3.a) On a : $0 < \ln\sqrt{x} < \sqrt{x}$ donc $0 < \frac{1}{2}\ln x < \sqrt{x}$.

Comme $\frac{1}{x} > 0$, on a : $0 < \frac{\ln x}{2x} < \frac{\sqrt{x}}{x}$; c'est-à-dire : $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$.

b) On sait que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Interprétation de : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

La courbe de la fonction ln admet une branche parabolique de direction celle de (OI)

c) Posons : $X = \frac{1}{x}$, quand x tend vers 0 , X tend vers $+\infty$ donc

$\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = \lim\limits_{X\to+\infty} -\frac{\ln X}{X} = 0.$

4.a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$

b) En posant $= x + 1$, on a : quand x tend vers 0, X tend vers 1. Ainsi on obtient :

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim\limits_{X\to 1} \frac{\ln X}{X-1} = 1.$

B. Variations et représentation graphique de ln

1. $\forall x \in]0;+\infty[, \ln'(x) = \frac{1}{x}$, donc $\ln'(x) > 0$ d'où la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

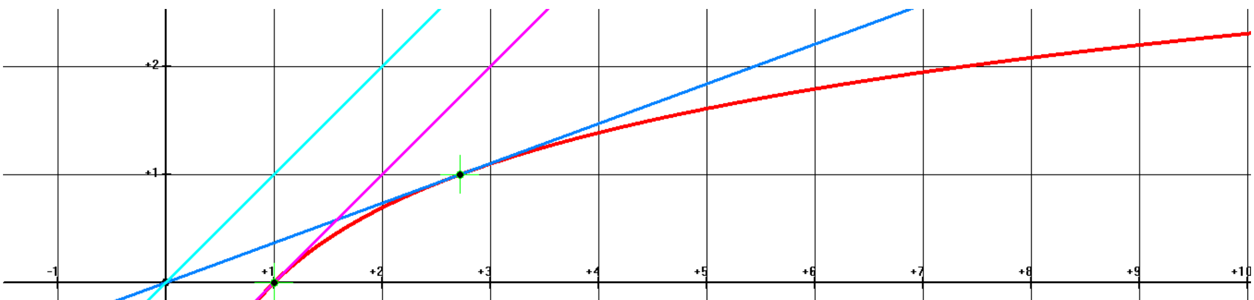
a) Tableau de variation

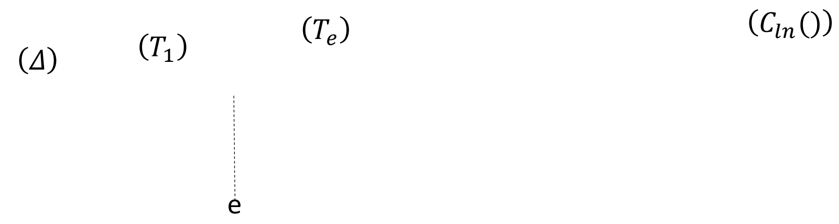
x	0		1		e		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	‖	+	1	+	$\frac{1}{}$	+	
$\ln x$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$

Pour $a > 0$ et $b > 0$, on a :

- $a = b \Leftrightarrow \ln a = \ln b$ la fonction ln est une bijection
- $a < b \Leftrightarrow \ln a < \ln b$ car la fonction ln est strictement croissante

2. Courbe représentative de la fonction ln (en rouge)





$(\Delta): y = x$, la première bissectrice

$(T_1): y = x - 1$, la tangente à la courbe de ln en I(1;0)

$(T_e): y = \frac{x}{e}$, la tangente à la courbe de ln au point de coordonnées (e ;1)

Exercice de fixation

La courbe représentative de la fonction ln est la figure 3

1.5 Ensemble de définition de la composée d'une fonction numérique et de la fonction ln

1. Pour $f(x) = \ln(x)$; $f(x)$ existe si et seulement si $x > 0$
2. Pour $g(x) = \ln(u(x))$, on a : $g = \ln \circ u$. Donc $x \in D_g \Leftrightarrow x \in D_u$ et $u(x) > 0$.
3. Pour $h(x) = \ln|u(x)|$, on a : $h = \ln \circ |u|$. Donc $x \in D_f \Leftrightarrow x \in D_u$ et $u(x) \neq 0$.

Exercices de fixation

Exercice 1

1. La bonne réponse est :$]-\infty; 1[$
2. La bonne réponse est :$]0; +\infty[\setminus \{1\}$
3. La bonne réponse est :$]1; +\infty[$.

Exercice 2

1. $x \in D_f \Leftrightarrow x > 0$;   donc $D_f =]0 ; +\infty[$
2. $x \in D_f \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0$;   donc $D_f =]-\infty; 0[$
3. $x \in D_f \Leftrightarrow x > 0$ et $-x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$ et $x < 1$; donc $D_f =]0; 1[$

Activité 2 Équations - Inéquations

Équations du type, (E) : $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$

a) (E) admet des solutions dans $\mathbb{R}$ à condition que : $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$.

b) $x \in V \Leftrightarrow u(x) > 0$ et $v(x) > 0$

c) $\forall\, x \in V, \ln(u(x)) = \ln(v(x)) \Leftrightarrow u(x) = v(x)$.

Inéquations du type, (I) : $\ln(u(x)) < \ln(v(x))$

a) (I) admet des solutions dans $\mathbb{R}$ à condition que : $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$.

b) $x \in V \Leftrightarrow u(x) > 0$ et $v(x) > 0$

c) $\forall\, x \in V, \ln(u(x)) < \ln(v(x)) \Leftrightarrow u(x) < v(x)$.

Organiser la synthèse du manuel comme suit :

Equations du type, (E) : $\ln\big(u(x)\big) = \ln(v(x))$

- On détermine l'ensemble de validité V de l'équation (E) : $x \in V \Leftrightarrow u(x) > 0$ et $v(x) > 0$.
- On utilise la propriété $a > 0, b > 0, \ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$ pour résoudre les équations.

Inéquations du type, (I) : $\ln\big(u(x)\big) < \ln(v(x))$

- On détermine l'ensemble de validité V de l'équation (I) : $x \in V \Leftrightarrow u(x) > 0$ et $v(x) > 0$.
- On utilise la propriété $a > 0, b > 0, \ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$ pour résoudre les inéquations.

Exercices de fixation

Exercice 1

1. La bonne réponse est : e
2. La bonne réponse est : 0
3. La bonne réponse est : -2

Exercice 2

1. Soit V l'ensemble de validité de l'équation

$x \in V \Leftrightarrow x + 1 > 0$ et $-x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -1$ et $x < 2$ donc $V =]-1; 2[$

$\ln(x+1) = \ln(-x+2) \Leftrightarrow x + 1 = -x + 2 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} \in V$ donc $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

2. Soit V l'ensemble de validité de l'équation

$x \in V \Leftrightarrow x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$ donc $V =]2; +\infty[$

$\ln(x-2) = 1 \Leftrightarrow \ln(x-2) = \ln e \Leftrightarrow x - 2 = e \Leftrightarrow x = 2 + e$ et $2 + e \in V$ donc $S_{\mathbb{R}} = \{2 + e\}$

Exercice 3

1. $]-\infty\,; -1\,[$; 2. $]0\,; 1\,[$; 3. $]2\,; +\infty\,[$

Exercice 4

1. Soit V l'ensemble de validité de l'équation

$x \in V \Leftrightarrow x > 0$ donc $V =]0; +\infty[$

$\ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow x < 1 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 1[$. On a : $V \cap]-\infty; 1[=]0; 1[$

Donc $S_{\mathbb{R}} =]0\,; 1\,[$.

2. Soit V l'ensemble de validité de l'équation

$x \in V \Leftrightarrow x > 0$ et $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$ et $x > -1$ donc $V =]0; +\infty[$.
$\ln x > \ln(x+1) \Leftrightarrow x > x + 1 \Leftrightarrow 0 > 1$. Ce qui est impossible.
Donc $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

3. Soit V l'ensemble de validité de l'équation
$x \in V \Leftrightarrow x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$ donc $V =]3; +\infty[$.
$\ln(x-1) < 1 \Leftrightarrow \ln(x-1) < \ln e \Leftrightarrow x - 1 < e \Leftrightarrow x < 1 + e \Leftrightarrow x \in]-\infty; e+3[$
On a : $V \cap]-\infty; e+3[=]3; e+3[$
Donc $S_{\mathbb{R}} =]3 ; e+3[$

Activité 3 Dérivées et primitives

1. $(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$
2. La dérivée de la fonction $\ln\circ\, u$ est telle que $(\ln\circ\, u)' = \frac{u'}{u}$.
3. $\ln\circ\, |u| = \ln\left(\sqrt{u^2}\right) = \frac{1}{2}\ln(u^2)$
4. La dérivée de la fonction est telle que :$(\ln\circ\, |u|)' = (\frac{1}{2}\ln(u^2))' = \frac{1}{2}(2u'u) \times \frac{1}{u^2} = \frac{u'}{u}$
5. Les primitives des fonctions de la forme $\frac{u'}{u}$ sont du type $\ln\circ\, |u| + C$, avec $C \in \mathbb{R}$

Exercices de fixation

Exercice 1

1. La bonne réponse est : $\frac{1}{x}$;
2. La bonne réponse est : $\frac{1}{x-1}$;
3. La bonne réponse est : $\frac{2}{2x+3}$.

Exercice 2

1. V ; 2.F ; 3.F

Exercice 3

1.V ; 2. F ; 3.F

Activité 4 Fonctions logarithmes de base a

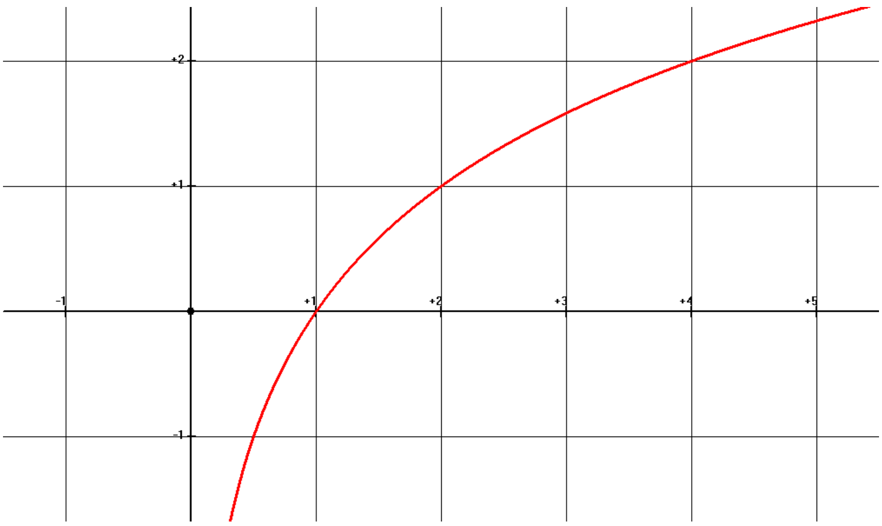
1. a) $f(x) = \frac{\ln x}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \times \ln x$. Or $\frac{1}{\ln 2} > 0$. On en déduit que :
$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$.et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
b) pour tout $x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{1}{x\ln 2}$ et $f'(x) > 0$.
Donc f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Tableau de variation

x	0		2		4		$+\infty$
$\frac{1}{x\ln 2}$		+		+		+	
$f'(x)$		$-\infty$	1		2		$+\infty$

c) $f(0{,}5) = -1$; $f(1) = 0$; $f(2) = 1$ et $f(4) = 2$

d) Courbe de f



2. a) $g(x) = \frac{\ln x}{\ln 10} = \frac{1}{\ln 10} \times \ln x$. Or $\frac{1}{\ln 10} > 0$. On en déduit que :

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$.et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

b) pour tout $x \in]0;+\infty[$, $g'(x) = \frac{1}{x\ln 10}$ et $g'(x) > 0$.

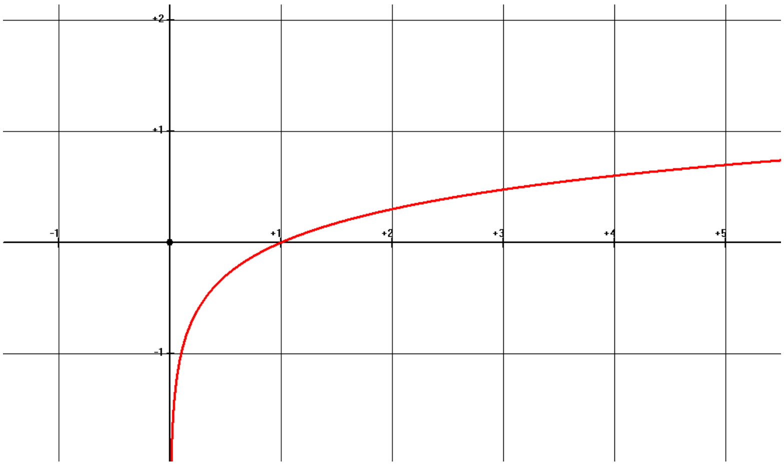
Donc g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Tableau de variation

x	0		10		20		$+\infty$
$\frac{1}{x\ln 10}$		+		+		+	
$g'(x)$		$-\infty$	1		2		$+\infty$

c) $g(0{,}1) = -1$; $g(1) = 0$; $g(10) = 1$ et $g(20) = 2$.

d) Courbe de g



Corriger la synthèse dans le manuel comme suit :

a est un nombre réel strictement positif différent de 1.

La fonction $\log_a$ définie sur $]0;+\infty[$ par $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$ est appelée fonction logarithme de base a.

Exercices de fixation

Exercice 1

1. Le logarithme en base 2 du nombre 8 est 3 : on peut écrire : $\frac{\ln 8}{\ln 2} = 3$ ou $\log_2 8 = 3$.
2. Le logarithme en base 7 du nombre 49 est 2 : on peut écrire : $\frac{\ln 49}{\ln 7} = 2$ ou $\log_7 49 = 2$.

Exercice 2

1. $\log_3(243) = 5$
2. $\log_8(512) = 3$
3. $\log_5(15625) = 6$.

Activité 5 **Étude de fonctions faisant intervenir la fonction logarithme**

1.a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}(1+\ln x) = -\infty.$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} = 0.$

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à (C)

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à (C) en $+\infty$

2.a) f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x \in]0;+\infty[$ on a : $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x-(1+\ln x)}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$

b) $\forall x \in]0;+\infty[\,, x^2 > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$. Ainsi

$\forall x \in]0;1[\,, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0;1[$

$\forall x \in]1;+\infty[\,, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$

Tableau de variation

x	$0 \quad 1 \quad +\infty$
$f'(x)$	$\quad + \quad 0 \quad -$
$f(x)$	$-\infty \nearrow 1 \searrow -\infty$

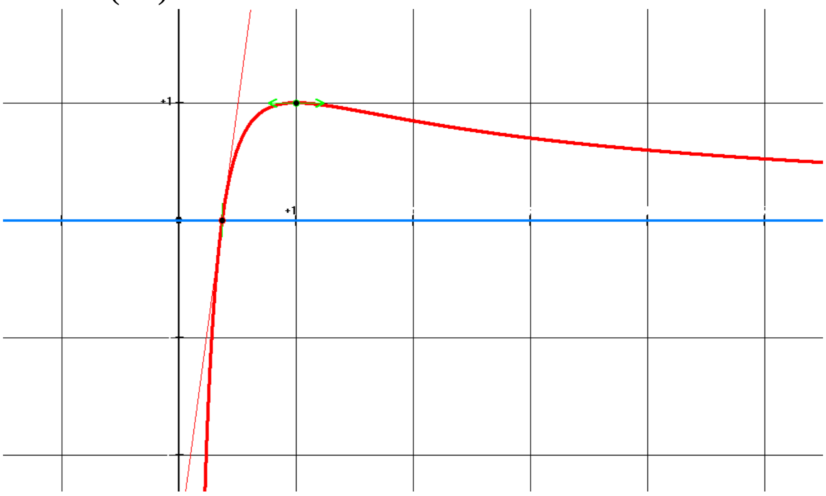
3. a) les coordonnées de A intersection de (C) et (OI)

$\begin{cases} y = \frac{1+\ln x}{x} \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \ln x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{e} \\ y = 0 \end{cases}$ On a donc $A(\frac{1}{e}\,; 0\,)$

b) Équation de la tangente (T)

$(T): y = f'\left(\frac{1}{e}\right)\left(x - \frac{1}{e}\right) + f\left(\frac{1}{e}\right) = e^2x - e.$

1. Courbe (C)



Exercice de fixation

1.a) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x[(\ln x)^2 - 3] = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x[(\ln x)^2 - 3] = -\infty$ doncla droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à (C)

2.a) g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x \in]0;+\infty[$ on a : $g'(x) = \frac{3(\ln x)^2}{x} - \frac{3}{x} = \frac{3(\ln x+1)(\ln x-1)}{x}$

b) $\forall x \in]0;+\infty[\,, \frac{3}{x} > 0$ donc $g'(x)$ a le même signe que $(\ln x + 1)(\ln x - 1)$.

Tableau de signe de la dérivée

x	0		$\frac{1}{e}$		e		$+\infty$
$\ln x - 1$	||	$-$		$-$	0	$+$	
$1 + \ln x$	||	$-$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	

$\forall x \in]0;\frac{1}{e}[\cup]e;+\infty[\,, g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $]0;\frac{1}{e}[$ et sur $]e;+\infty[$

$\forall x \in]\frac{1}{e};e[\,, g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $]\frac{1}{e};e[$

Tableau de variation

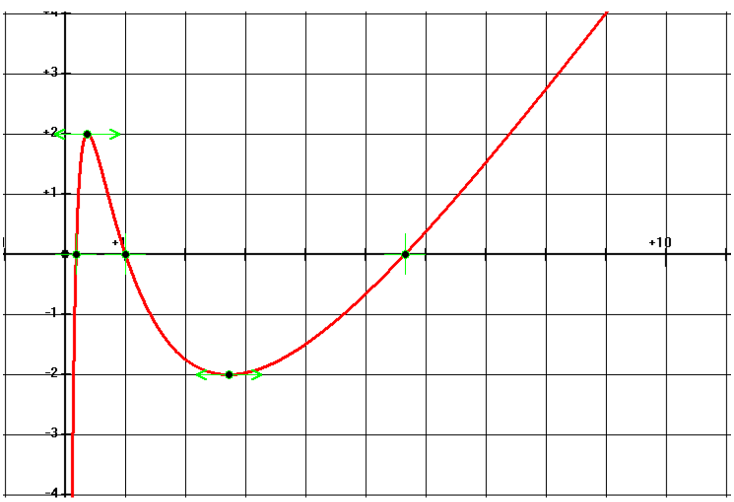
x	0		$\frac{1}{e}$		e		$+\infty$
$g'(x)$	||	+		-		+	
$g(x)$	||	$-\infty$ ↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

3. $g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x[(\ln x)^2 - 3] = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0$ ou $(\ln x)^2 - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \ln x = 0$ ou $\ln x = \sqrt{3}$ ou $\ln x = -\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = e^{\sqrt{3}}$ *ou* $e^{-\sqrt{3}}$.

1. Courbe (C)



Exercices de renforcement

1

$\ln6 = \ln3 + \ln2 = 0,693 + 1,093 = 1,786$
$\ln9 + \ln8 = \ln3^2 + \ln2^3 = 2\ln3 + 3\ln2 = 3 \times 0,693 + 2 \times 1,093 = 4,265$
$\ln9 \times \ln8 = 2\ln3 \times 3\ln2 = 3 \times 0,693 \times 2 \times 1,093 = 4,544$
$\ln72 = \ln(9 \times 8) = \ln9 + \ln8 = 4,265$
$\ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln2 - \ln3 = 0,693 - 1,093 = -0,405$
$\ln\left(\frac{9}{8}\right) = \ln9 - \ln8 = 2 \times 1,093 - 3 \times 0,693 = 0,117$
$\ln32 = 5\ln2 = 5 \times 0,693 = 3,465$

2

$A = \frac{1}{2}(2\ln e) = 1$; $B = \ln\left(\frac{1}{e^5}\right) = -\ln(e^5) = -5\ln e = -5$
$C = \frac{5}{4}\ln\left(\frac{e}{\sqrt[5]{e}}\right) = \frac{5}{4}\ln\left(e \times e^{-\frac{1}{5}}\right) = \frac{5}{4}\ln\left(e^{\frac{4}{5}}\right) = \frac{5}{4} \times \frac{4}{5}\ln e = 1$
$D = 2\ln[(e\sqrt{e})^3] = 2\ln\left(e^3 \times e^{\frac{3}{2}}\right) = 2\ln\left(e^{\frac{9}{2}}\right)) = 2 \times \frac{9}{2}\ln e = 9$.

3

$A = \ln(\sqrt{7} + 2) + \ln(\sqrt{7} - 2) = \ln[(\sqrt{7} + 2)(\sqrt{7} - 2)] = \ln(7 - 4) = \ln3$
$B = \ln(\sqrt{7} + 2) - \ln(\sqrt{7} - 2) = \ln\left[\frac{\sqrt{7}+2)}{\sqrt{7}-2)}\right] = \ln\left(\frac{7+4+4\sqrt{7}}{7-4}\right) = \ln\left(\frac{11+4\sqrt{7}}{3}\right)$
$C = \ln(\sqrt{\sqrt{7} + 2}) + \ln(\sqrt{\sqrt{7} - 2}) = \ln[\sqrt{(\sqrt{7} + 2)(\sqrt{7} - 2)}] = \ln(\sqrt{7 - 4}) = \frac{1}{2}\ln3$

4

$A = 5\ln4 - 3\ln8 + \ln2 = 10\ln2 - 9\ln2 + \ln2 = 2\ln2 = \ln4$
$B = \ln\sqrt{3} + \ln9 - \ln(3\sqrt{3}) = \frac{1}{2}\ln3 + 2\ln3 - \ln\left(3^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{5}{2}\ln3 - \frac{3}{2}\ln3 = \ln3$
$C = \ln(0,1) + \ln10 - \ln(0,001) = \ln10^{-1} + \ln10 - \ln(10^{-3})$
$\quad = -\ln10 + \ln10 - 3\ln10 = -3\ln10$
$D = \ln(1 + \sqrt{2}) + \ln(\sqrt{2} - 1) = \ln[(1 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)] = \ln(2 - 1) = \ln1 = 0.$

Modifier comme suit, l'énoncé dans le manuel : $E = \ln(\sqrt{3} - 1) - \ln\left(\frac{2e}{\sqrt{3}+1}\right)$.

$\mathrm{E} = \ln(\sqrt{3}-1) + \ln(\sqrt{3}+1) - \ln(2\mathrm{e}) = \ln(3-1) - \ln(2\mathrm{e})$
$= \ln 2 - \ln(2\mathrm{e}) = \ln\left(\frac{2}{2\mathrm{e}}\right) = \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = -1.$

5

1. $A = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right) \times \ldots \times \left(1+\frac{1}{n-1}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$
   $A = 2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \ldots \times \frac{n}{n-1} \times \frac{n+1}{n}$ et par simplifications successives, on obtient :
   $A = n+1$
2. $B = \ln(1+1) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{3}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$
   $= \ln\left[(1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right) \times \ldots \times \left(1+\frac{1}{n-1}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$

   $B = \ln(n+1).$

6

$S = \ln(a^n) + \ln(a^{n-1}) + \cdots + \ln(a^1) + \ln(a^0) + \ln(a^{-1}) + \ln(a^{-2}) + \cdots + \ln(a^{-n+1}) + \ln(a^{-n})$
$S = \ln(a^n \times a^{-n}) + \ln(a^{n-1} \times a^{-n+1}) + \cdots + \ln(a^1 \times a^{-1}) + \ln(a^0)$
$S = \ln 1 + \ln 1 + \cdots + \ln 1$
$S = 0$

7

1) $x \in D_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $-2x+3>0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $x < \frac{3}{2}$ donc $D_f =]-\infty; \frac{3}{2}[$
2) $x \in D_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $12x > 0$ et $4+x>0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $x>0$ et $x>-4$
   donc $D_f =]0; +\infty[$
3) $x \in D_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $2x^2-3x+1>0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $(x-1)(2x-1)>0$
   donc $D_f =]-\infty; \frac{1}{2}[\cup]1; +\infty[$.

8

3) $x \in D_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $-2x+3>0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $x < \frac{3}{2}$ donc $D_f =]-\infty; \frac{3}{2}[$
4) $x \in D_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $3x-5 \neq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $x \neq \frac{5}{3}$ donc $D_f = \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{5}{3}\right\}$
5) $x \in D_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $12x>0$ et $4+x>0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $x>0$ et $x>-4$
   donc $D_f =]0; +\infty[$.
4) $x \in D_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $2x^2-3x+1>0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $(x-1)(2x-1)>0$
   donc $D_f =]-\infty; \frac{1}{2}[\cup]1; +\infty[$.
5) $x \in D_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ *et* $\frac{2-x}{5x+1} > 0$ donc $D_f =]-\frac{1}{5}; 2[$.
6) $x \in D_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $7x+8 \neq 0$ et $2x-4 \neq 0$ donc $D_f = \mathbb{R} \backslash \left\{-\frac{8}{7}; 2\right\}$.

9

$D_f =]\frac{1}{2};+\infty[$; $D_g =]-\infty;-3[\cup]\frac{1}{2};+\infty[$; $D_h = IR\backslash\left\{\frac{1}{2}\ ;\ -3\right\}$

1- On a $f \neq g$; $f \neq h$ *et* $g \neq h$ car elles n'ont pas le même ensemble de définition

2- f et g coïncident sur l'intervalle $]\frac{1}{2};+\infty[$

3- f et h coïncident sur l'intervalle $]\frac{1}{2};+\infty[$

4- g et h coïncident sur l'intervalle $]-\infty;-3[\cup]\frac{1}{2};+\infty[$

10

1) $\ln(2x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 > 0 \\ 2x+1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow S_{\mathbb{R}} = \{0\}$

2) $\ln(e-3x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} e-3x > 0 \\ e-3x = e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{e} \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow S_{\mathbb{R}} = \{0\}$

3) $\ln(x-3) = \ln(2x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 > 0 \\ 2x+1 > 0 \\ x-3 = 2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]3;+\infty[\\ x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

4) $\ln(\sqrt{x-4}) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 > 0 \\ \sqrt{x-4} = e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]4;+\infty[\\ x-4 = e^2 \end{cases} \Leftrightarrow S_{\mathbb{R}} = \{e^2+4\}$

11

1) $\ln(-x^2+6x-5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+6x-5 > 0 \\ -x^2+6x-5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(-x+5) > 0 \\ x^2-6x+6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} x \in]1;5[\\ x = 3+\sqrt{3} \text{ ou } x = 3-\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow S_{\mathbb{R}} = \{3+\sqrt{3}\ ;3-\sqrt{3}\}$

2) $\ln(x^2-1) = \ln(2x) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1 > 0 \\ 2x > 0 \\ x^2-2x-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]1;+\infty[\\ x = 1+\sqrt{2} \text{ ou } x = 1-\sqrt{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow S_{\mathbb{R}} = \{1+\sqrt{2}\}$$

3) $\ln(5x+2) - \ln(x+2) = \ln(x-2) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+2 > 0 \\ x+2 > 0 \\ x-2 > 0 \\ 5x+2 = (x+2)(x-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]2;+\infty[\\ 5x+2 = x^2-4 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} x \in]2;+\infty[\\ x^2-5x-6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]2;+\infty[\\ x = -1 \text{ ou } x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow S_{\mathbb{R}} = \{6\}$

4) $\ln(\sqrt{2x-3}) = \ln(6-x) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3 > 0 \\ 6-x > 0 \\ \sqrt{x(2x-3)} = 6-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]\frac{3}{2};6[\\ 2x-3 = x^2-12x+36 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} x \in]\frac{3}{2};6[\\ x^2-14x+39 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]\frac{3}{2};6[\\ x = 7+\sqrt{10} \text{ ou } x = 7-\sqrt{10} \end{cases}.$

$$\Leftrightarrow S_{\mathbb{R}} = \{7-\sqrt{10}\}$$

12

1) $ln\left(\left|\frac{x-2}{3x-2}\right|\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \neq 0 \\ 3x-2 \neq 0 \\ \left|\frac{x-2}{3x-2}\right| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq \frac{2}{3} \\ \frac{x-2}{3x-2} = 1 \text{ ou } \frac{x-2}{3x-2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$

2) $\ln(|x-2|) = \ln(3x-2) \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \neq 0 \\ 3x-2 > 0 \\ |x-2| = 3x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x > \frac{2}{3} \\ x-2 = 3x-2 \; ou \; x-2 = -3x+2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$x = 0 \text{ ou } x = 1$

3) $\ln|x^2-2x| = \ln|x-1| \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x \neq 0 \\ x-1 \neq 0 \\ |x^2-2x| = |x-1| \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x \in \mathbb{R}\backslash\{0;1;2\} \\ x^2-2x = x-1 \text{ ou } x^2-2x = -x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R}\backslash\{0;1;2\} \\ x^2-x-1 = 0 \text{ ou } x^2-3x+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

13

1) $(2x-1)(1-\ln(2-x)) \geq 0$; $V =]-\infty; 2[$
On détermine le signe des deux facteurs puis on tire la conclusion en tenant compte de V
Posons $p(x) = (2x-1)(1-\ln(2-x))$

x	$-\infty$		$2-e$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$1-\ln(2-x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$p(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$S_{\mathbb{R}} = V \cap]-\infty; 2-e] \cup [\frac{1}{2}; +\infty[=]-\infty; 2-e] \cup [\frac{1}{2}; 2]$$

2) $\ln(x^2+2x+1) \geq 0$; $V = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$
$\ln(x^2+2x+1) \geq 0 \Leftrightarrow x^2+2x+1 \geq 1 \Leftrightarrow x(x+2) \geq 0$ donc $S_{\mathbb{R}} =]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[$

3) $(1-\ln x)(2+\ln x) \leq 0$; $V =]0; +\infty[$

x	$-\infty$		e^{-2}		e		$+\infty$
$1-\ln x$		$+$		$+$	0	$-$	
$2+\ln x$		$-$	0	$+$		$+$	
$p(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$S_{\mathbb{R}} =]0\,;e^{-2}[\cup]e;+\infty[$$

14

1) $\ln(2x+1)+\ln(x-3)<\ln x$
$x \in V \Leftrightarrow 2x+1>0 \; et \; x-3>0 \; et \; x>0 \Leftrightarrow \; V=]3;+\infty[$
$\ln(2x+1)+\ln(x-3)<\ln x \Leftrightarrow \ln(2x^2-5x-3)<\ln x \Leftrightarrow 2x^2-6x-3<0$
$\Leftrightarrow 2\left(x-\frac{3-\sqrt{15}}{2}\right)\left(x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)<0$ donc $S_{\mathbb{R}}=V\cap\left]\frac{3-\sqrt{15}}{2};\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right[=\left]3;\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right[$

2) $(\ln x)^3+(\ln x)^2-5\ln x+3>0\,;\; V=]0;+\infty[$
Posons $X=\ln x$, l'inéquation devient : $X^3+X^2-5X+3>0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+3)>0$
$\Leftrightarrow X \in]-3;+\infty[\Leftrightarrow x \in]e^{-3};+\infty[$ donc $S_{\mathbb{R}}=]e^{-3};+\infty[$

3) $(1-\ln x)(2+\ln x)\leq 0 \;;\; V=]0;+\infty[$

x	0		e^{-2}		e		$+\infty$
$1-\ln x$		$+$		$+$	0	$-$	
$2+\ln x$		$-$	0	$+$		$+$	
$p(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$S_{\mathbb{R}} =]0\,;e^{-2}[\cup]e;+\infty[$$

15

1) Signe de p définie par $p(x)=(\ln x)(\ln x-1)$

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln x$		$-$		$+$		$+$	
$\ln x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$p(x)$		$+$	0	$-$		$+$	

$\forall x \in]0\,;1[\cup]e;+\infty[\,, p(x)>0$
$\forall x \in]1;e[\,, p(x)<0$
$\forall x \in \{1\,;e\}\,, p(x)=0$

2) Signe de q définie par $q(x)=7x\ln(3-x)$

x	$-\infty$		0		2		3
x		-		$+$		$+$	
$\ln(3-x)$		$+$		$+$	0	-	
$q(x)$		-	0	$+$	0	-	

$\forall x \in]-\infty;0[\cup]2;+\infty[\,, q(x)<0$
$\forall x \in]0;2[\,, q(x)>0$
$\forall x \in \{0\,;2\}\,, q(x)=0$

3) Signe de r définie par $r(x) = -x^2\ln(x+1)$

x	-1	0	$+\infty$
$-\ln(x+1)$	+	-	
$r(x)$	+	$-$	0

$\forall x \in]0\,;+\infty[\,, r(x) < 0$

$\forall x \in]-1;0[\,, r(x) > 0$

$r(x) = 0$ pour $x = 0$

16

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^n < 10^{-4} \Leftrightarrow n\ln\left(\frac{1}{2}\right) < -4\ln 10 \Leftrightarrow n > \frac{-4\ln 10}{-\ln 2} \Leftrightarrow n > 13{,}28.$

Donc $n = 14$

2. $\frac{3}{2}\left(\sqrt{2}\right)^n > 10^5 \times \sqrt{3} \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^n > \frac{2\times 10^5 \times \sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{2\times 10^5\times\sqrt{3}}{3}\right)}{\ln(\sqrt{2})}$

$\Leftrightarrow n > 33{,}63.$ Donc $n = 34.$

3. $10^6(1{,}11)^n \leq 250000(1{,}4)^n \Leftrightarrow \left(\frac{1{,}11}{1{,}4}\right)^n \leq \frac{25}{100} \Leftrightarrow n\ln\left(\frac{1{,}11}{1{,}4}\right) \leq \ln\left(\frac{25}{100}\right)$

$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{25}{100}\right)}{\ln\left(\frac{1{,}11}{1{,}4}\right)} \Leftrightarrow n \geq 5{,}97.$

Donc $\mathrm{n} = 6.$

Ainsi au bout de 6 années, les exportations dépasseront la consommation intérieure.

17

a) $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)\ln(x-2) = \lim\limits_{X\to 0} X\ln X = 0$ en posant $X = x-2$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \ln\left(\frac{x-7}{x+1}\right) = 0$ car $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x-7}{x+1} = 1$ et $\ln 1 = 0$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x\ln x}{1-x} = \lim\limits_{x\to 1} -x\left(\frac{\ln x}{x-1}\right) = -1$ car $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1} -x = -1$

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \ln\left(\frac{x-1}{2-x}\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}}\frac{x-1}{2-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X+\infty}\ln X = +\infty$

e) $\lim\limits_{x\to 3}\ln\left(\frac{x-3}{x-4}\right) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x-4} = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0}\ln X = -\infty$

18

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}\times\sqrt{x} = 0$ car $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{x-1} = \lim\limits_{X\to 1}\frac{\ln X}{1-X} = -1$. En posant $X = 2-x$

c) $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e} = \lim\limits_{x\to e}\frac{f(x)-f(e)}{x-e} = f'(e) = \frac{1}{e}$. En posant $f(x)=\ln x$ on a $f'(x)=\frac{1}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to e}\frac{x\ln x-e}{x-e} = \lim\limits_{x\to e}\frac{f(x)-f(e)}{x-e} = f'(e) = 2$. En posant $f(x)=x\ln x$ on a :
$f'(x) = \ln x + 1.$

19

a) $\lim\limits_{x\to 0}x\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln X}{X} = 0$ En posant $X = \frac{1}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}x\ln\left(\frac{x-2}{x}\right) = \lim\limits_{X\to 1}\frac{2\ln X}{1-X} = -2$ En posant $X = \frac{x-2}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}x+\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{X\to 0}\frac{1}{X}+\ln X = \lim\limits_{X\to 0}\frac{1}{X}(1+X\ln X) = +\infty$ En posant $X = \frac{1}{x}$

20

1) $D_f =]-\infty;-2[\cup]0\,;\,+\infty[$

- $\lim\limits_{x\to +\infty}x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) = \lim\limits_{X\to 0}\frac{2\ln(X+1)}{X} = 2$ En posant $X=\frac{2}{x}$ et $\lim\limits_{X\to 0}\frac{\ln(X+1)}{X} = 1$
- $\lim\limits_{x\to -\infty}x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) = \lim\limits_{X\to 0}\frac{2\ln(X+1)}{X} = 2$ En posant $X=\frac{2}{x}$ et $\lim\limits_{X\to 0}\frac{\ln(X+1)}{X} = 1$
- $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ <}}x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) = \lim\limits_{X\to 0}\frac{2\ln X}{X-1} = +\infty$ En posant $X = 1+\frac{2}{x}$ et $\lim\limits_{X\to 0}\ln X = -\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) = \lim\limits_{X\to +\infty}\frac{2\ln X}{X-1} = \lim\limits_{X\to +\infty}\frac{2\ln X}{X}\times\frac{X}{X-1} = 0$ En posant $X = 1+\frac{2}{x}$

  et $\lim\limits_{X\to +\infty}\frac{\ln X}{X} = 0$ et $\lim\limits_{X\to +\infty}\frac{X}{X-1} = 1$

2) $D_f =]-\infty;0[\cup]0\,;\,\frac{1}{3}[$

- $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\ln(1-3x)}{x} = \lim\limits_{X\to +\infty}\frac{3\ln X}{1-X} = \lim\limits_{X\to +\infty}\frac{3\ln X}{X}\times\frac{X}{1-X} = 0$ En posant $X = 1-3x$ et

  $$\lim_{X\to +\infty}\frac{3\ln X}{X} = 0 \quad et \quad \lim_{X\to +\infty}\frac{X}{1-X} = -1$$

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-3x)}{x} = \lim\limits_{X\to 1}\frac{3\ln X}{1-X} = -3$ En posant $X = 1-3x$ et $\lim\limits_{X\to 1}\frac{\ln X}{1-X} = -1$
- $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{1}{3}\\ <}}\frac{\ln(1-3x)}{x} = \lim\limits_{X\to 0}\frac{3\ln X}{1-X} = -\infty$ En posant $X = 1-3x$ et $\lim\limits_{X\to 0}\ln X = -\infty$

3) $D_f = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2};\,-1\right\} =]-\infty;-1[\cup]-1;\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2};+\infty[$

- $\lim\limits_{x\to -\infty}\ln\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| = \lim\limits_{x\to +\infty}\ln\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| = \ln 2$
- $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\ln\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to -1}\ln\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| = +\infty$

21

Pour tout $x > 1, \ln(x-3) = \ln x + \ln\left(1-\frac{3}{x}\right)$. De même

Pour tout $x > 1, \ln(x+2) = \ln x + \ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$. On en déduit que : $\frac{\ln(x-3)}{\ln(x+2)} = \frac{\ln x+\ln\left(1-\frac{3}{x}\right)}{\ln x+\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}$

$\frac{\ln(x-3)}{\ln(x+2)} = \frac{1+\frac{1}{\ln x}\times\ln\left(1-\frac{3}{x}\right)}{1+\frac{1}{\ln x}\times\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}$. Or $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x} = 0$; $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1-\frac{3}{x}\right) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) = 0$.

Conclusion : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-3)}{\ln(x+2)} = 1$.

22

1) $\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{x} = \lim_{X\to0}\frac{\ln(1+X)}{\sqrt{X}} = \lim_{X\to0}\frac{\ln(1+X)}{X}\times\sqrt{x} = 0 = f(0)$ donc la fonction f est continue en 0

2) $\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\<}}\frac{\ln x}{1-x} = -1$ et $\lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\<}}\frac{1+\ln x}{x} = 1$

On a : $\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x) \neq \lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x)$ donc la fonction f n'est pas continue en 1.

23

1. $f'^{(x)} = \left(\frac{\ln(2x)}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x}\times x-\ln(2x)}{x^2} = \frac{1-\ln(2x)}{x^2}$
2. $f'^{(x)} = \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \ln(\sqrt{x})\right)' = \frac{-1}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{2x} = \frac{-2-\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}$
3. $f'^{(x)} = \left((1-x)\ln(1-x)+x\right)' = -\ln(1-x) + (1-x)\times\frac{-1}{1-x} + 1 = -\ln(1-x)$

24

1. $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$; 2. $f(x) = x^2 + \frac{2+\ln x}{x}$; 3. $f(x) = x^2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

1. $f'(x) = \left(\frac{(\ln x)^2}{x}\right)' = \frac{\frac{2\ln x}{x}-(\ln x)^2}{x^2} = \frac{2\ln x - x(\ln x)^2}{x^3}$

2. $f'(x) = \left(x^2+\frac{2+\ln x}{x}\right)' = 2x + \frac{\frac{1}{x}-2-\ln x}{x^2} = 2x + \frac{1-2x-x\ln x}{x^3} = \frac{2x^4+1-2x-x\ln x}{x^3}$

3. $f'(x) = \left(x^2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right)' = 2x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x^2\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right) = 2x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{x}{x+1}$

7. $f'(x) = \frac{\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)'}{\frac{2x-1}{x+1}} = \frac{3}{(x+1)^2}\times\frac{x+1}{2x-1} = \frac{3}{(x+1)(2x-1)}$.

25

1) $x \in D_h \Leftrightarrow x > 0$ et $2x - \sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow x \in]0;+\infty[$ et $x(4x-1) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]\frac{1}{4};+\infty\right[$

$D_h = \left]\frac{1}{4};+\infty\right[$

2) $h'(x) = \frac{x-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x-\sqrt{x}} = \frac{2x\sqrt{x}-1}{4x\sqrt{x}-2x}$

26

1) Pour tout $\in \left]\frac{3}{2};+\infty\right[$, $F(x) = -\frac{5}{2}\ln|3-2x| + C = -\frac{5}{2}\ln(2x-3) + C$.
$F(2) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{5}{2}\ln(2\times 2-3) + C = \frac{1}{2} \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$ donc $F(x) = -\frac{5}{2}\ln(2x-3) + \frac{1}{2}$

2) $F(x) = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$
$F(e) = 1 \Leftrightarrow \frac{(\ln e)^2}{2} + C = \frac{3}{2} \Leftrightarrow C + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow C = 1$ donc $F(x) = \frac{(\ln x)^2}{2} + 1$

3) Pour tout $\in]1;+\infty[$, $F(x) = \ln|\ln x| + C = \ln(\ln x) + C$
$F(e^2) = -1 \Leftrightarrow \ln 2 + C = 2\ln 2 \Leftrightarrow C = ln2$ donc $F(x) = \ln(\ln x) + \ln 2$

27

1- $f'(x) = \ln x + 1 \Leftrightarrow f'(x) - 1 = \ln x$
2- Une primitive de ln sur $]0;+\infty[$ est $f(x) - x = x\ln x - x$

28

1) $f(x) = \frac{a}{5x-2} + \frac{b}{(2x-1)^2} = \frac{4ax^2+(-4a+5b)x+a-2b}{(5x-2)(2x-1)^2}$ par identification on a $\begin{cases} 4a = 8 \\ -4a+5b = -13 \\ a-2b = 4 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$ donc $f(x) = \frac{2}{5x-2} - \frac{1}{(2x-1)^2}$

2) $F(x) = \frac{2}{5}\ln|5x-2| + \frac{1}{2(2x-1)} + C$ et sur $\left]-\infty;\frac{2}{5}\right[$, $F(x) = \frac{2}{5}\ln(2-5x) + \frac{1}{2(2x-1)} + C$
$F\left(\frac{1}{5}\right) = -\frac{7}{6} \Leftrightarrow 0 - \frac{5}{6} + C = -\frac{7}{6} \Leftrightarrow C = -\frac{1}{3}$ donc
$F(x) = \frac{2}{5}\ln(2-5x) + \frac{1}{2(2x-1)} - \frac{1}{3}$.

29

1) $\begin{cases} x-y = -2 \\ \ln x + \ln y = \ln 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \text{ et } y > 0 \\ x-y = -2 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \text{ et } y > 0 \\ X^2 + 2X - 2 = 0 \text{ où} \Leftrightarrow \\ y = x+2 \end{cases}$
$S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{(-1+\sqrt{3}\,;1+\sqrt{3})\}$

2) $\begin{cases} 2\ln x - \ln y = 1 \\ 5\ln x + 3\ln y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \text{ et } y > 0 \\ 2X - Y = 1 \\ 5X + 3Y = 4 \end{cases}$ en posant $X = \ln x$ *et* $Y = \ln y$ on a:
$X = \frac{7}{11}$ *et* $Y = \frac{25}{11}$ donc $x = e^{\frac{7}{11}}$ et $y = e^{\frac{25}{11}}$ d'où $S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \left\{\left(e^{\frac{7}{11}}; e^{\frac{25}{11}}\right)\right\}$

30

1) $\begin{cases}(\ln x)(\ln y) = -15 \\ \ln(xy) = -2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(\ln x)(\ln y) = -15 \\ \ln x + \ln y = -2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} XY = -15 \\ X + Y = -2\end{cases}$ X et Y sont solution de l'équation

$X^2 - 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow X = 5$ ou $X = -3$ d'où $x = e^5$ ou $x = e^{-3}$ Ainsi

$S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{(e^5, e^{-3});\ (e^{-3}, e^5)\}$

2) $\begin{cases}x^2 + y^2 = 29 \\ \ln x + \ln y = \ln 10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)^2 - 2xy = 29 \\ xy = 10 \\ x > 0 \text{ et } y > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)^2 - 20 = 29 \\ xy = 10\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}x + y = 7 \\ xy = 10\end{cases}$ ou $\begin{cases}x + y = -7 \\ xy = 10\end{cases} \Leftrightarrow x = 5$ ou $x = 2$ donc $S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{(5,2);\ (e^{-2}, e^{-5})\}$

3) $\begin{cases}\ln(x^2) + \ln(y^2) = 2\ln 6 \\ x + y = -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \\ (xy)^2 = 36 \\ x + y = -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \\ xy = 6 \\ x + y = -1\end{cases}$ ou $\Leftrightarrow$

$\begin{cases}x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \\ xy = -6 \\ x + y = -1\end{cases}$ on a $x = -2$ ou $x = 3$ d'où

$S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{(-2; 3);\ (3; -2)\}$

31

1) $x \in D_f \Leftrightarrow 1 - x \neq 0$ et $x > 0$; $D_f =]0;1[\cup]1;+\infty[$
2) $0 \notin D_f$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ donc l'on peut prolonger par continuité f à droite en 0

$1 \notin D_f$ et $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -1$donc l'on peut prolonger par continuité f en 1
3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln x}{x(1-x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{1-x} = -\infty$ donc g n'est pas dérivable en 0.

La courbe de g admet en 0 une tangente verticale.

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x\ln x + 1 - x}{(x-1)(1-x)} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{-\ln x}{2(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{x}}{2} = -\frac{1}{2}$ donc g est dérivable à droite en 0.

La courbe de g admet en 1 une tangente de coefficient directeur $-\frac{1}{2}$.

(Une équation de cette tangente est (T): $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$).

32

$\log_3 243 = 5$; $\log_{27} 9 = \frac{2}{3}$; $\log_5 \frac{1}{625} = -4$

Exercices d'approfondissement

33

$f(x) = \ln(ax + b)$.

- (C) passe par $A(2; 1) \Leftrightarrow \ln(2a + b) = 1 \Leftrightarrow 2a + b = e$
- -2est le coefficient directeur de la tangente à (C) en A signifie que $f'(2) = -2$

$f'(x) = -2 \Leftrightarrow \frac{a}{2a+b} = -2 \Leftrightarrow 5a + 2b = 0$

$\begin{cases} 2a + b = e \\ 5a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2e \\ b = 5e \end{cases}$ donc $f(x) = \ln(-2x+5) + 1$

34

1) $f(1+x) + f(1-x) = \frac{1+x+\ln|-x|}{-x} + \frac{1-x+\ln|x|}{x} = -\frac{1}{x} - 1 - \frac{\ln|x|}{x} + \frac{1}{x} - 1 + \frac{\ln|x|}{x} = -2$

2) $\frac{f(1+x)+f(1-x)}{2} = -1$ donc la courbe de f admet le point A(1 ;-1) comme centre de symétrie.

35

$f(2+x) = \ln|4 + 4x + x^2 - 8x - 4x + 3| = |x^2 - 1|$
$f(2-x) = \ln|4 - 4x + x^2 - 8 + 4x + 3| = |x^2 - 1|$, On a
$f(2+x) = f(2-x)$ donc la droite d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de la courbe de f

36

1) a) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

$f(-x) = \ln\left(-x + \sqrt{x^2+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) = -\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = -f(x)$ donc la fonction f est impaire.

b) $f(x) = \ln\left(\frac{a-x}{a+x}\right)$

$f(-x) = \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) = \ln\left(\frac{1}{\frac{a-x}{a+x}}\right) = -\ln\left(\frac{a-x}{a+x}\right) = -f(x)$ donc la fonction f est impaire.

2) $\frac{f\left(-\frac{1}{2}+x\right)+f\left(-\frac{1}{2}-x\right)}{2} = -2$ donc le point $\Omega(-\frac{1}{2}; -2)$ est le centre de symétrie de (Cg), la courbe de g

37

1-a) $p(3) = 0$ et $p(x) = (3-x)(x+1)^2$

b) (E) : $\ln(x^2) + \ln(-x+1) = \ln(-5x-3) \Leftrightarrow \ln(-x^3 + x^2) = \ln(-5x-3)$

$\Leftrightarrow -x^3 + x^2 + 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -1$ avec $V =]-\infty; -\frac{3}{5}[$ donc

$S_{\mathbb{R}} = \{-1\}$

$(I): -\ln^3(2-3x) + \ln^2(2-3x) + 5\ln(2-3x) + 3 \geq 0$;

$V =]-\infty; \frac{2}{3}[$ et Posons $X = \ln(2-3x)$

L'inéquation devient $-X^3 + X^2 + 5X + 3 \geq 0 \Leftrightarrow (3-X)(X+1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow X \in]-\infty; 3]$ soit $x \in]-\infty; e^3]$ ainsi $S_{\mathbb{R}} =]-\infty; \frac{2}{3}[\cap]-\infty; e^3] =]-\infty; \frac{2}{3}[$.

38

. 1. $a)$ $\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1} = \frac{(a+b+c)x^2+(-b+c)x-a}{x(x^2-1)}$ par identification on a :

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ -b+c=0 \\ -a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=\frac{1}{2} \\ c=\frac{1}{2} \end{cases} \text{ donc } g(x)=\frac{-1}{x}+\frac{\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}$$

a) Les primitives sur $]1;+\infty[$ de g sont : $G(x)=-\ln x+\frac{1}{2}\ln(x^2-1)+C$

2-a) $h'(x)=\left(-\frac{\ln x}{x^2-1}\right)'=\frac{-x^2+1+2x^2\ln x}{x(x^2-1)^2}=\frac{-1}{x(x^2-1)}+\frac{2x\ln x}{(x^2-1)^2}\Leftrightarrow f(x)=h'(x)+\frac{1}{x(x^2-1)}$

b) $F(x)=-\frac{\ln x}{x^2-1}-\ln x+\frac{1}{2}\ln(x^2-1)+C$

$F(2)=-\frac{4}{3}\ln 2+\frac{1}{2}\ln 3\Leftrightarrow -\frac{\ln 2}{3}-\ln 2+\frac{1}{2}\ln 3+C=-\frac{4}{3}\ln 2+\frac{1}{2}\ln 3\Leftrightarrow C=0$

Finalement $F(x)=-\frac{\ln x}{x^2-1}-\ln x+\frac{1}{2}\ln(x^2-1)$

39

1. $h'(x)=\left(\ln(x+\sqrt{x^2-1}\right)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ donc h est une primitive de la fonction $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
2. $G(x)=3\sqrt{x^2-1}+C$
3. $f(x)=\frac{5}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{4x}{\sqrt{x^2-1}}\Leftrightarrow F(x)=5\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-4\sqrt{x^2-1}+C$

$F(2)=0\Leftrightarrow 5\ln\left(2+\sqrt{3}\right)-4\sqrt{3}+C=0\Leftrightarrow C=4\sqrt{3}-5\ln(2+\sqrt{3})$ Ainsi

$F(x)=5\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-4\sqrt{x^2-1}+4\sqrt{3}-5\ln(2+\sqrt{3})$

40

1) $f'(x)$ et son signe.

f est dérivable sur $]-\frac{1}{2};+\infty[$ et $f'(x)=-2x+2-\frac{2}{2x+1}=-2\left(x-1+\frac{1}{2x+1}\right)$

et $f'(x)=\frac{-2x(2x-1)}{2x+1}$ ainsi :

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ ou $x=\frac{1}{2}$.

$\forall x\in]-\frac{1}{2};0[\cup]\frac{1}{2};+\infty[,\ f'(x)<0$

donc f est décroissante sur $]-\frac{1}{2};0[$ et sur $]\frac{1}{2};+\infty[$

$\forall x\in]0;\frac{1}{2}[,\ f'(x)>0$ donc f est croissante sur $]0;\frac{1}{2}[$

De plus $f(0)=0$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}+\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

2) a) Résolution de l'équation $f(x)=0$

Sur $]\frac{1}{2};+\infty[$, f est continue et strictement décroissante donc elle réalise une bijection de $]\frac{1}{2};+\infty[$ dans $]-\infty;\frac{3}{4}+\ln\left(\frac{1}{2}\right)[$, or $0\in]-\infty;\frac{3}{4}+\ln\left(\frac{1}{2}\right)[$ donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]\frac{1}{2};+\infty[$.

b) Encadrement de α d'amplitude 10^{-2} par balayage on a: $f(0{,}8) = 0{,}004$ et $f(0{,}9) = -0{,}03$ donc $0{,}8 < \alpha < 0{,}9$

x	0,8	0,81	0,82	0,83	0,84	0,85	0,86	0,87	0,88	0,89	0,9
$f(x)$	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-

donc $0{,}81 < \alpha < 0{,}82$.

3) Signe de $f(x)$

$\forall x \in]-\frac{1}{2}\,;0[\cup]0\,;\alpha[\;, f(x) > 0$ et $\forall x \in]-\infty\,;\alpha[\;, f(x) < 0$

$f(x) = 0$ pour $x = 0$ ou pour $x = \alpha$

41

1) Ensemble de définition de f

$x \in D_f \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{2(x-1)} > 0$ donc $D_f =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

2) Les limites de f

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{2x-2}\right) + x = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{2x-2} = \dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{X\to\frac{1}{2}} \ln X = -\ln 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{x+1}{2x-2}\right) + x = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+1}{2x-2} = \frac{1}{2} \\ \lim\limits_{X\to\frac{1}{2}} \ln X = -\ln 2 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to-1 \\ <}} f(x) = \lim_{x\to0} \ln\left(\frac{x+1}{2x-2}\right) + x = -\infty \;\; car \begin{cases} \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x+1}{2x-2} = 0 \\ \lim\limits_{X\to0} \ln X = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-1} x = -1 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to1 \\ >}} f(x) = \lim_{x\to0} \ln\left(\frac{x+1}{2x-2}\right) + x = +\infty \;\; car \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to1 \\ >}} \dfrac{x+1}{2x-2} = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty \\ \lim\limits_{x\to1} x = 1 \end{cases}$$

Interprétations :

$\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ <}} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à (Cf)

$\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ >}} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à (Cf)

3) a) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{2x-2}\right) + x = \ln\left(\frac{1}{2} \times \frac{x+1}{x-1}\right) + x = x - \ln 2 + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x+\ln 2)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=0$ car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}=1\\ \lim\limits_{x\to1}\ln x=0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x+\ln 2)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=0$ car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x-1}=1\\ \lim\limits_{x\to1}\ln x=0\end{cases}$ donc la droite (D) d'équation $y=x-\ln 2$ est une asymptote oblique à (Cf) en $-\infty$ et en $+\infty$

b) Position relative de (D) et (Cf)

Déterminons le signe de $f(x)-x+\ln 2$ c'est-à-dire le signe de $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)>0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1}-1>0 \Leftrightarrow \frac{2}{x-1}>0$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f(x)-x+2$	$-$	▒		$+$

$\forall x\in]-\infty;-1[\,, f(x)-x+\ln 2<0$ donc (Cf) est au $-$ dessous de (D)

$\forall x\in]\sqrt{e}\,;\,+\infty[\,, f(x)-x+\ln 2>0$ donc (Cf) est au $-$ dessus de (D)

(Cf) et (D) ne se coupent pas.

4) Calculons $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$

$\frac{f(x)+f(-x)}{2}=\frac{\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+x-\ln 2+\ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right)-x-\ln 2}{2}$

$=\frac{\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)-2\ln 2}{2}=\frac{-2\ln 2}{2}=-\ln 2$ donc le point $\Omega(0;-\ln 2)$ est le centre de symétrie de (Cf).

5) f est dérivable sur $]-\infty;-1[$ et sur $]1;+\infty[$ et $f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}+1=\frac{x^2-3}{x^2-1}$

$\forall x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\,, x^2-1>0$ donc $f'(x)$ a le même signe que x^2-3

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	▒	$-$	$+$	

$\forall x\in]-\infty;-\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3};+\infty[\;, f'(x)>0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty;-\sqrt{3}[$ et sur $]\sqrt{3};+\infty[$

$\forall x\in]-\sqrt{3};1\,[\cup]1\,;\,\sqrt{3}[\;, f'(x)<0$ donc f est strictement décroissante sur $]-\sqrt{3};1\,[$ et sur $]1\,;\,\sqrt{3}[$

Tableau de variation

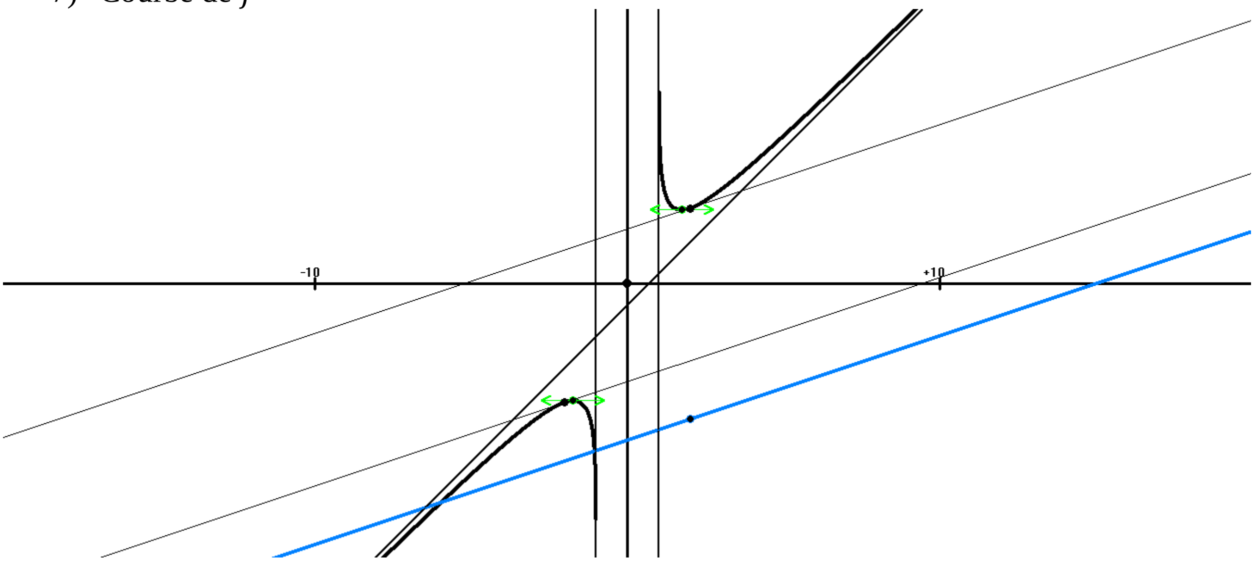
x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		-1	1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$	▒		$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(-\sqrt{3})$	↘ $-\infty$	▒	$+\infty$	↘	$f(\sqrt{3})$	↗	$+\infty$

6) soit $A(a, f(a))$, soit $(T): y = f'(a)(x-a) + f(a)$ et $(\Delta): \ y = \frac{1}{3}x - 5$

(T) parallèle à $(\Delta) \Leftrightarrow f'(a) = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{a^2-3}{a^2-1} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 3a^2 - 9 = a^2 - 1$

$\Leftrightarrow 2a^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow a = 2$ ou $a = -2$

7) Courbe de f



42

1) a- Une équation réduite de la droite (AB) est :$y = ax + b$

$A \in (AB) \Leftrightarrow a + b = -1$

$B \in (AB) \Leftrightarrow b = -3$ d'où $a = 2$ ainsi (AB): $y = 2x - 3$

b- $g(1) = -1$; $g(e) = 1 - \frac{1}{e}$ et $g'(1) = 2$

c- Tableau de variation de g.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$
$g(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

2) a- $g'(x) = \left(a\ln(x) + \frac{b}{x}\right)' = \frac{a}{x} - \frac{b}{x^2} = \frac{ax-b}{x^2}$

b- $\left.\begin{array}{r} g(1) = -1 \Leftrightarrow b = -1 \\ g'(1) = 2 \Leftrightarrow a - b = 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -1 \end{array}\right.$ d'où $g(x) = \ln x - \frac{1}{x}$

c-Sur $]0\,;\,+\infty[$, g est continue et strictement croissante donc elle réalise

une bijection de $]0\,;\,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, or $0 \in \mathbb{R}$. On en déduit qu'il existe un unique réel α dans

$]0\,;\,+\infty[$ tel que $\mathrm{g}(\alpha) = 0$ c'est – à – dire: $\ln\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$

On a : $\left.\begin{array}{r} g(1{,}7) = -0{,}05 \\ g(1{,}8) = 0{,}03 \end{array}\right\} g(1{,}7) \times g(1{,}8) < 0$ donc $1{,}7 < \alpha < 1{,}8$

d- Signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

$\forall x \in]0;\,\alpha[$, on a $g(x) \in]-\infty; 0[$ donc $g(x) < 0$

$\forall x \in]\alpha;\,+\infty[$, on a $g(x) \in]0\,;\,+\infty[$ donc $g(x) > 0$

43

1) Ensemble de définition de f

$x \in D_f \Leftrightarrow x - 1 \neq 0$ et $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow$

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\,;\,-1\} =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$

2) Les limites de f

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + x = +\infty \quad \text{car} \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1 \\ \displaystyle\lim_{X\to1} \ln X = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \end{array}\right.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + x = -\infty \quad \text{car} \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1 \\ \displaystyle\lim_{X\to1} \ln X = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} x = -\infty \end{array}\right.$$

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + x = +\infty \quad \text{car} \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to-1} \left|\frac{x-1}{x+1}\right| = +\infty \\ \displaystyle\lim_{X\to+\infty} \ln X = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to-1} x = -1 \end{array}\right.$$

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + x = -\infty \quad \text{car} \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to1} \left|\frac{x-1}{x+1}\right| = 0 \\ \displaystyle\lim_{X\to0} \ln X = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to1} x = 1 \end{array}\right.$$

1. Démontrons que f est impaire

$\forall x \in D_f$ on a $-x \in D_f$

et $f(-x) = -x + \ln\left|\frac{-x-1}{-x+1}\right| = -x + \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = -x - \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = -f(x)$ donc f est impaire.

Le point O est le centre de symétrie à la courbe de f.

4) a- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x) - x$

Donc la droite (D) : $y = x$ est une asymptote à (Cf) en $-\infty$ et en $+\infty$

b- Positions relatives de (Cf) et (D)

étudions le signe de $f(x) - x = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$

Résolvons l'inéquation $\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| < 0 \Leftrightarrow \left|\frac{x-1}{x+1}\right| < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{x-1}{x+1} < 1$

$\Leftrightarrow -1 < 1 - \frac{2}{x+1} < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{2}{x+1} < 2 \Leftrightarrow x+1 > 1 \Leftrightarrow x > 0$. En résumé

$\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[\,, f(x) - x < 0$ donc (Cf) est au dessous de (D)

$\forall x \in]-\infty;-1[\cup]-1;0[\,, f(x) - x > 0$ donc (Cf) est au dessus de (D)

(Cf) et (D) se coupent au point O(0,0).

1. f est dérivable sur $]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

$\forall x \in IR\backslash\{-1\,;1\}$ $x^2 + 1 > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $x^2 - 1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$-$	‖	$+$

$\forall x \in]-\infty;-1\,[\cup]1\,;+\infty[\,, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty;-1[$ et sur $]1\,;+\infty[$

$\forall x \in]-1;1\,[\,, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-1;1\,[$

Tableau de variation

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$-$	‖	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

2. Équation de la tangente (T)

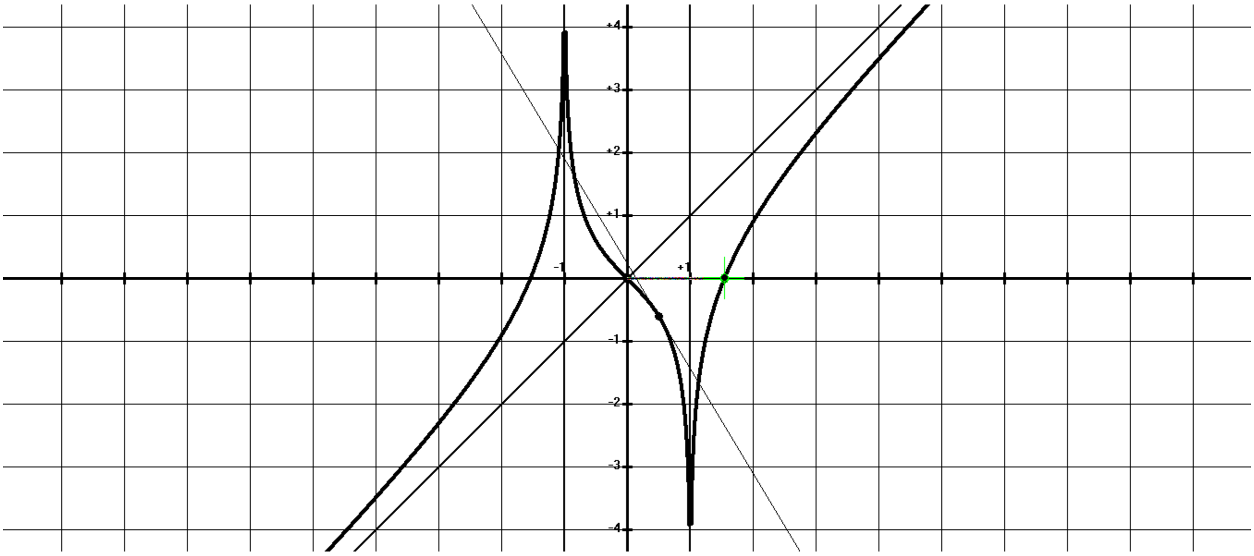
$(T): y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$ on a $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{3}$ *et* $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - ln3$ donc

$(T): y = -\frac{5}{3}x + \frac{4}{3} - \ln 3$

3. Sur $]1\,;+\infty[\,, f$ est continue et strictement croissante donc elle réalise une bijection de $]1\,;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$, or $0 \in \mathbb{R}$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$.

On a $\left.\begin{matrix} f(1{,}54) = -0{,}0083 \\ f(1{,}55) = 0{,}016 \end{matrix}\right\} f(1{,}54) \times f(1{,}55) < 0$ donc $1{,}54 < \alpha < 1.55$

4. Courbe de f



44

1. $e^x - x^n = 0 \Leftrightarrow e^x = x^n \Leftrightarrow x = n\ln x \Leftrightarrow \ln x - \frac{x}{n} = 0$
2. a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{n}\right) = -\infty$

   b) f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{n}$

   $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < n$

x	0		n	$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$

$\forall x \in]0;n[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0;n[$
$\forall x \in]n;+\infty[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]n;+\infty[$

3. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{x}{n}$

   L'intersection de la courbe de ln avec la droite d'équation $= \frac{x}{n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$
   Pour $n = 1$ ou 2 l'équation n'admet pas de solution
   Pour ≥ 3, l'équation deux solutions distinctes.

45

Corriger dans le manuel la définition de g comme suit :
On considère la fonction g définie sur $]-\infty\,;0[$ par : $g(x) = -1 - 2x\ln(-x)$.

Partie A

1) a- $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} -1 - 2x\ln(-x) = -1$ car $\lim\limits_{x\to 0}(-x)\ln(-x) = 0$

interprétation : $0 \notin]-\infty; 0[$ et $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -1$ donc on peut faire un prolongement par continuité de g en 0

b- Soit k ce prolongement, k est définie par : $\begin{cases} k(x) = -1 - 2x\ln(-x) \ \ si \ \ x < 0 \\ k(0) = -1 \end{cases}$

c- Dérivabilité de k en 0.

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} -2\ln(-x) = +\infty$ donc k n'est pas dérivable à gauche en 0 et la courbe de k admet une tangente verticale en 0

2) a) $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} -1 - 2x\ln(-x) = +\infty$

b) Variations et tableau de variation de g

g est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et $g'(x) = -2\ln(-x) - 2$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(-x) + 1 < 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{e}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{e}$		0
$g'(x)$		$-$		$+$	

$\forall x \in]-\infty; -\frac{1}{e}[$, $g'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; -\frac{1}{e}[$
$\forall x \in]-\frac{1}{e}; 0[$, $g'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\frac{1}{e}; 0[$
Tableau de variation

x	$-\infty$		$-\frac{1}{e}$		0
$g'(x)$		$-$		$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{-e-2}{e}$	$\nearrow$	-1

3) Sur $]-\infty; -\frac{1}{e}[$, g est continue et strictement décroissante donc elle réalise une bijection de $]-\infty; -\frac{1}{e}[$ sur $]\frac{-e-2}{e}; +\infty[$ or $0 \in]\frac{-e-2}{e}; +\infty[$

donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]\frac{-e-2}{e}; +\infty[$.

On a $\left.\begin{array}{r} f(-1{,}5) = 0{,}2163 \\ f(-1{,}4) = -0{,}05787 \end{array}\right\} g(-1{,}5) \times f(-1{,}4) < 0$ donc $-1{,}5 < \alpha < -1.4$

Encadrement par balayage de α à 10^{-2}

x	-1,5	-1,49	-1,48	-1,47	-1,46	-1,45	-1,44	-1,43	-1,42	-1,41	-1,44
$g(x)$	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-

Donc $-1{,}43 < \alpha < -1{,}42$

4) Signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

$\forall x \in]-\infty\,;\,\alpha[$ c'est-à-dire $x < \alpha$ et g est strictement décroissante

donc $g(x) > g(\alpha)$ or $g(\alpha) = 0$ donc $g(x) > 0$

$\forall x \in]\alpha\,;\,\frac{-1}{e}[$ c'est-à-dire $x > \alpha$ et g est strictement décroissante

donc $g(x) < g(\alpha)$ or $g(\alpha) = 0$ donc $g(x) < 0$

$\forall x \in]\frac{-1}{e}\,;0[$ c'est-à-dire $\frac{-1}{e} < x < 0$ et g est strictement croissante

donc $\frac{-e-2}{e} < g(x) < -1 < 0$ donc $g(x) < 0$

Partie B

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{1}{x} - \ln^2(-x) = -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} -\ln^2(-x) = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{1}{x} = -\infty \end{cases}$

2) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x} - \ln^2(-x) = -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -\infty} -\ln^2(-x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x^2} - \frac{\ln^2(-x)}{x} = 0$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\ln^2(-x)}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \end{cases}$

Interprétation : la courbe de f admet une branche parabolique de direction celle de (OI)

3) On sait que $g(\alpha) = 0$ donc $\ln(-\alpha) = -\frac{1}{2\alpha}$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - \left(-\frac{1}{2\alpha}\right)^2 = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{4\alpha^2} = \frac{4\alpha - 1}{4\alpha^2}$$

Encadrement de $f(\alpha)$: on a $-1{,}5 < \alpha < -1{,}4$ et $-0{,}8928 < f(\alpha) < -0{,}733$

4) f est dérivable sur $]-\infty\,;\,0[$ et $f'(x) = \frac{-1-2x\ln(-x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$

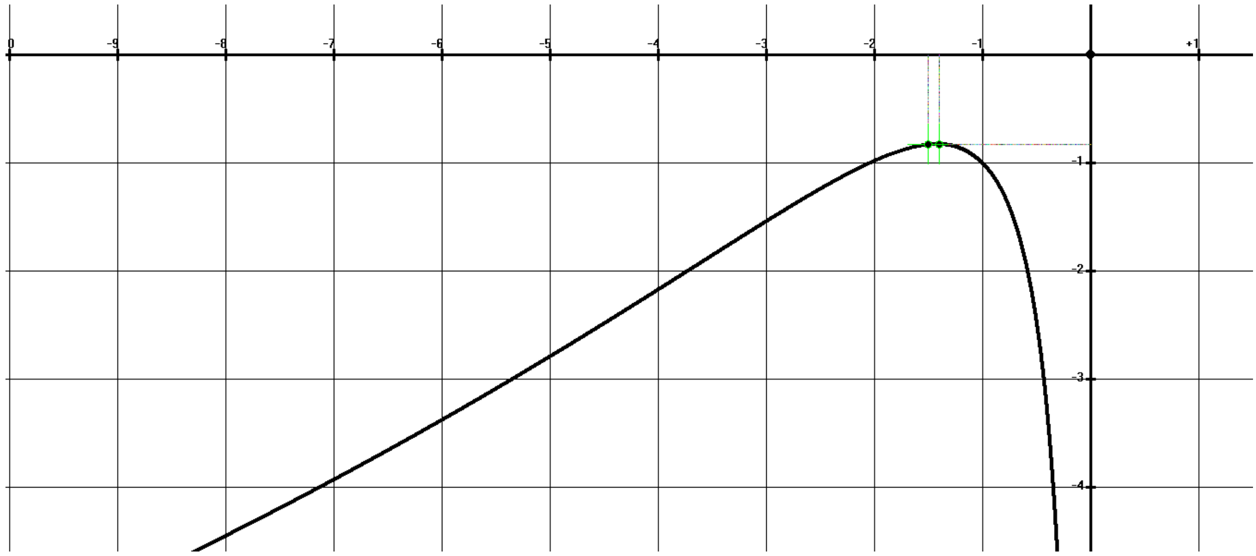
$\forall x \in]-\infty\,;\,0[\,, x^2 > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.

x	$-\infty$		α		0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖

5) $\forall x \in]-\infty\,;\alpha[\,, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty\,;\alpha[$
$\forall x \in]\alpha;\,0[\,, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]\alpha;\,0[$
Tableau de variation

x	$-\infty$		α		0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$ ‖

6) Courbe de f



Partie C

1) Sur $]\alpha; 0[$, f est continue et strictement décroissante donc elle réalise une bijection h de $]\alpha; 0[$ sur $]-\infty; f(\alpha)[$
2) a) $h(-1) = -1 \Leftrightarrow -1 = h^{-1}(-1)$

on a $h'(-1) = \frac{-1}{(-1)^2} = -1$ *et* $h'(-1) \neq 0$ donc h^{-1} est dérivable en -1

b) Tableau de variation de h^{-1}

x	$-\infty$		$f(\alpha)$
$(h^{-1})'(x)$		$-$	
$h^{-1}(x)$	0	$\searrow$	α

c) $(h^{-1})'(-1) = \frac{1}{h'(-1)} = \frac{1}{-1} = -1$

$(T): y = (h^{-1})'(-1)(x+1) + h^{-1}(-1)$, on a $(h^{-1})'(-1) = -1$ *et* $h^{-1}(-1) = -1$

donc $(T): y = -(x+1) - 1 = -x - 2$

Partie A : $u(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln|x|$

1) $3x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$. .

   On a : $u\left(-\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right) = 2\left(-\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^3 - 1 + \frac{2}{3}\ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3} - 1 - \frac{2}{3}\ln 3 = -\frac{1}{3}(5 + 2\ln 3)$.

2) Ensemble de définition de u

   $x \in D_u \Leftrightarrow x \neq 0$ donc $D_u = \mathbb{R}^*$

3) Limites de u en $-\infty$, 0 et en $+\infty$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <0}} u(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} u(x) = \lim\limits_{x \to 0} 2x^3 - 1 + 2\ln|x| = -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} 2x^3 - 1 = -1 \\ \lim\limits_{x \to 0} \ln|x| = -\infty \end{cases}$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x(2x^2 - 1 - 2\frac{\ln(-x)}{-x}) = -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\ln(-x)}{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} 2x^2 - 1 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty \end{cases}$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x(2x^2 - 1 + 2\frac{\ln x}{x}) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 2x^2 - 1 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \end{cases}$

4) Les variations de u sur $\mathbb{R}^*$ puis dresser son tableau de variation.

   u est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $u'(x) = \frac{2(3x^3+1)}{x}$

x	$-\infty$	$-\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$		0		$+\infty$
x	$-$		$-$	‖	$+$	
$3x^3 + 1$	$-$		$+$	‖	$+$	
$u'(x)$	$+$		$-$	‖	$+$	

$\forall x \in]-\infty; -\sqrt[3]{\frac{1}{3}}[\cup]0\,;+\infty[$, $u'(x) > 0$ donc u est strictement croissante sur

$]-\infty; -\sqrt[3]{\frac{1}{3}}[$ et sur $]0\,;+\infty[$

$\forall x \in]-\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\,;0[$, $u'(x) < 0$ donc u est strictement décroissante sur $]-\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\,;0[$

Tableau de variation

x	$-\infty$	$-\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$.		0		$+\infty$
$u'(x)$	$+$		$-$	‖	$+$	

$u(x)$	$-\infty$ ↗	$-\frac{1}{3}(5+2\ln 3)$	↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗ $+\infty$

5) a) Justifions que l'équation $u(x) = 0$admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$

Sur $]0;\ +\infty[$, u est continue et strictement croissante donc elle réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ or $0 \in \mathbb{R}$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0;+\infty[$.

b) On a: $\left.\begin{array}{r} u(0{,}8) = -0{,}42 \\ u(0{,}9) = 0{,}25 \end{array}\right\}$ $u(0{,}8) \times u(0{,}9) < 0$ donc $0{,}8 < \alpha < 0{,}9$

6) Signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x

$$\forall x \in]-\infty; -\sqrt[3]{\frac{1}{3}}[\text{ c'est-à-dire } x < -\sqrt[3]{\frac{1}{3}} \text{ et } u \text{ est strictement croissante}$$

donc $u(x) < u\left(-\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right) < 0$ donc $u(x) < 0$

$$\forall x \in]-\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\ ;\ 0[\text{ c'est-à-dire } x > -\sqrt[3]{\frac{1}{3}} \text{ et } u \text{ est strictement décroissante}$$

donc $g(x) < u\left(-\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right) < 0$ donc $u(x) < 0$

$$\forall x \in]0\,;\alpha[\text{ c'est-à-dire } x < \alpha \text{ et } u \text{ est strictement croissante}$$

donc $u(x) < 0$ or $u(\alpha) = 0$ donc $u(x) < 0$

$$\forall x \in]\alpha\,;+\infty[\text{ c'est-à-dire } x > \alpha \text{ et } u \text{ est strictement croissante}$$

donc $u(x) > g(\alpha)$ or $u(\alpha) = 0$ donc $u(x) > 0$

En conclusion :

$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]0;\ \alpha[$, $u(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha\,;+\infty[$, $u(x) > 0$

Partie B

$f(x) = 2x - \frac{\ln|x|}{x^2}$.

1) Limites de f en $-\infty, 0$ et en $+\infty$. Interpréter la limite en 0.

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 2x - \frac{1}{x^2}\ln|x|. = +\infty$ *car* $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} 2x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0} \ln|x| = -\infty \end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x - \frac{\ln|x|}{x^2}. = -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\ln|x|}{x^2} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x - \frac{\ln|x|}{x^2}. = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\ln|x|}{x^2} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty \end{cases}$

3) Justifions que : $f(\alpha) = 3\alpha - \frac{1}{2\alpha^2}$, et que $1{,}62 < f(\alpha) < 2{,}1$

3) a) Justifions que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est une asymptote oblique à (C).
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - 2x = \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{\ln|x|}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 2x = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{\ln|x|}{x^2}. = 0$ donc la droite (D) d'équation $y = 2x$ est une asymptote oblique à (C).

b) Étudier la position relative de (C) par rapport à (D).

étude du signe de $f(x) - 2x$ c'est-à-dire celui de $-\ln|x| = \ln\left|\frac{1}{x}\right|$
$f(x) - 2x > 0 \Leftrightarrow \ln\frac{1}{|x|} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{|x|} > 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$
$\forall x \in]-1\,;1[$, $f(x) - 2x > 0$ donc (C) est au-dessus de (D)
$\forall x \in]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[$, $f(x) - 2x < 0$ donc (C) est au-dessous de (D)
(C) et (D) se coupent aux points $A(-1\,;\,-2\,)$ et $B(1\,;2\,)$

4) a) Justifier que $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{u(x)}{x^3}$
f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = 2 - \frac{x - 2x\ln|x|}{x^4} = \frac{2x^3 - 1 + 2\ln|x|}{x^3} = \frac{u(x)}{x^3}$
a) En déduire le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]0;\,\alpha[$, $u(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha\,;+\infty[$, $u(x) > 0$

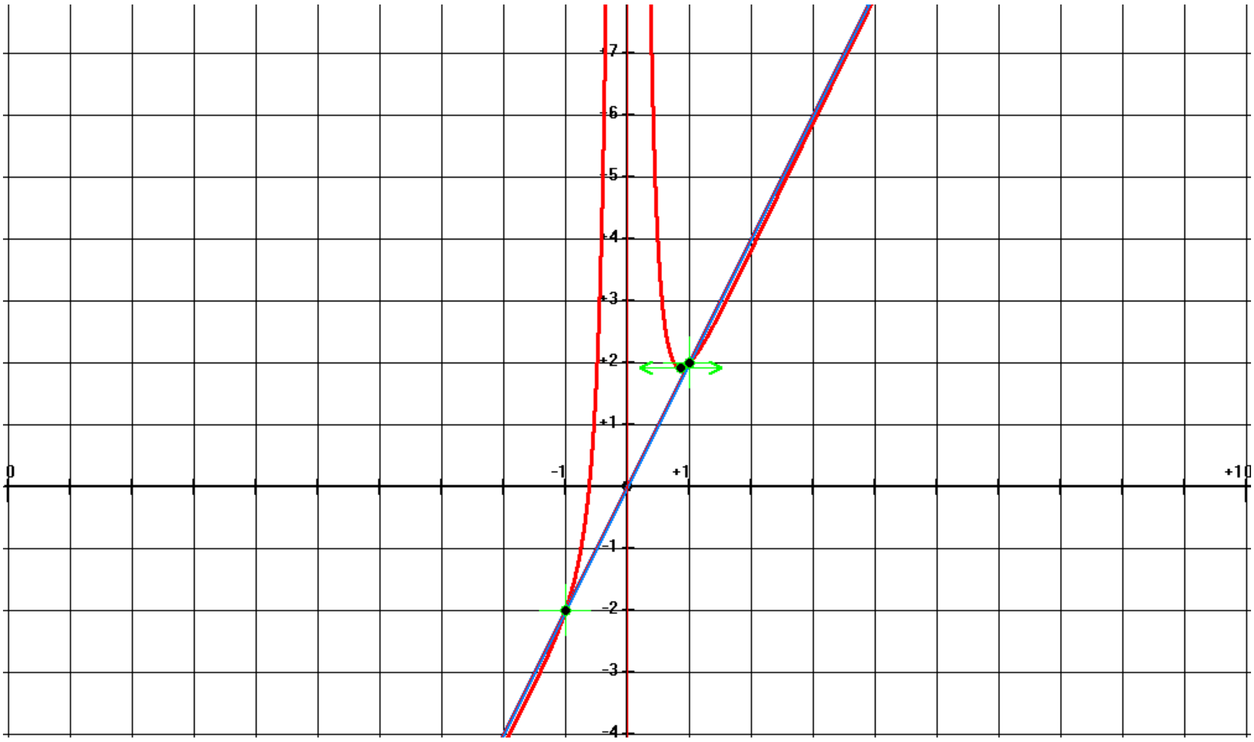
x	$-\infty$	$-\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$		0	α	$+\infty$
x^3	$-$	$-$		$+$	$+$	
$u(x)$	$-$	$-$		$-$	$+$	
$f'(x)$	$+$	$+$		$-$	$+$	

$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]\alpha\,;+\infty\,[$, $u'(x) > 0$ donc u est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]\alpha\,;+\infty[$
$\forall x \in]0\,;\alpha[$, $u'(x) < 0$ donc u est strictement décroissante sur $]0\,;\alpha[$

Tableau de variation

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
x^3		$-$	‖	$+$		$+$	
$u(x)$		$-$	‖	$-$		$+$	
$f'(x)$		$+$	‖	$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

5) Courbe (C) de f. Prendre $\alpha = 0{,}8$.



Partie C

Considérons la restriction h de f à $]-\infty;0[$.

1) Justifions que h est une bijection

Sur $]-\infty;0[$, h est continue et strictement croissante donc elle est une bijection de $]-\infty;0[$ dans $\mathbb{R}$

2) a) Calculons $h(-1)$ puis justifions que h^{-1} est dérivable en -2

3) on a : $h(-1) = -2$ et $\left(h^{-1}\right)'(-2) = \frac{1}{h'(-1)}$ or $h'(-1) = 3$ et $3 \neq 0$ donc h^{-1} est dérivable en -2

b) La valeur exacte de $\left(h^{-1}\right)'(-2) = \frac{1}{3}$.

3) Une équation de la tangente (T) à (ϕ) en -2 est :(T) : $y=\frac{1}{3}(x+2)-1=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

4) Dresser le tableau de variation de h^{-1}

x	$-\infty$	$+\infty$
$(h^{-1})'(x)$	+	
$h^{-1}(x)$	$-\infty$ ↗	0

5) Construire (ϕ) dans le même repère que (C)
Il faut construire le symétrique de (C) sur l'intervalle$]-\infty;0[$ par rapport à la première bissectrice d'équation $y=x$

6) Sur $]0;+\infty[$ on donne la fonction $g$définie par $g(x)=x^2+\frac{\ln x+1}{x}+C$ où $C\in\mathbb{R}$

a) Justifions que g est une primitive de$f$ sur $]0;+\infty[$

$g'(x)=2x+\frac{1-\ln x-1}{x^2}=2x-\frac{\ln x}{x^2}=f(x)$ sur$]0;+\infty[$ donc g est une primitive de$f$ sur $]0;+\infty[$

b) Déterminons la primitive Fde f qui prend la prend la valeur e^2 en e.

$F(e)=e^2\Leftrightarrow e^2+\frac{1+1}{e}+C=e^2\Leftrightarrow C=-\frac{2}{e}$. Ainsi la primitive F de f qui prend la prend la valeur e^2 en e est définie par : $F(x)=x^2+\frac{\ln x+1}{x}-\frac{2}{e}$.

47

Partie A

1. $f(t)=\frac{\ln t-2}{2t}=\frac{\ln t}{2t}-\frac{2}{2t}=\frac{1}{2}\frac{\ln t}{t}-\frac{1}{t}$

   $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\frac{\ln t}{t}-\frac{1}{t}=0$

2. $f'(t)=\frac{\frac{1}{t}\times 2t-2(\ln t-2)}{4t^2}=\frac{1-\ln t+2}{2t^2}=\frac{3-\ln t}{2t^2}$

3. $\forall x\in[10\,;+\infty\,[\,,2t^2>0$ donc $f'(t)$ a le même signe que : $3-\ln t$

t	10	e^3	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	$-$

$\forall x\in]10\,;e^3[\,,f'(t)>0$ donc f est strictement croissante sur $]10\,;e^3[$
$\forall x\in]e^3;+\infty[\,,f'(t)<0$ donc$f$ est strictement décroissante sur $]e^3;+\infty[$

Tableau de variation

t	10		e^3		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$\frac{\ln 10 - 2}{20}$	$\nearrow$	$\boxed{\frac{1}{2e^3}}$	$\searrow$	0

Partie B

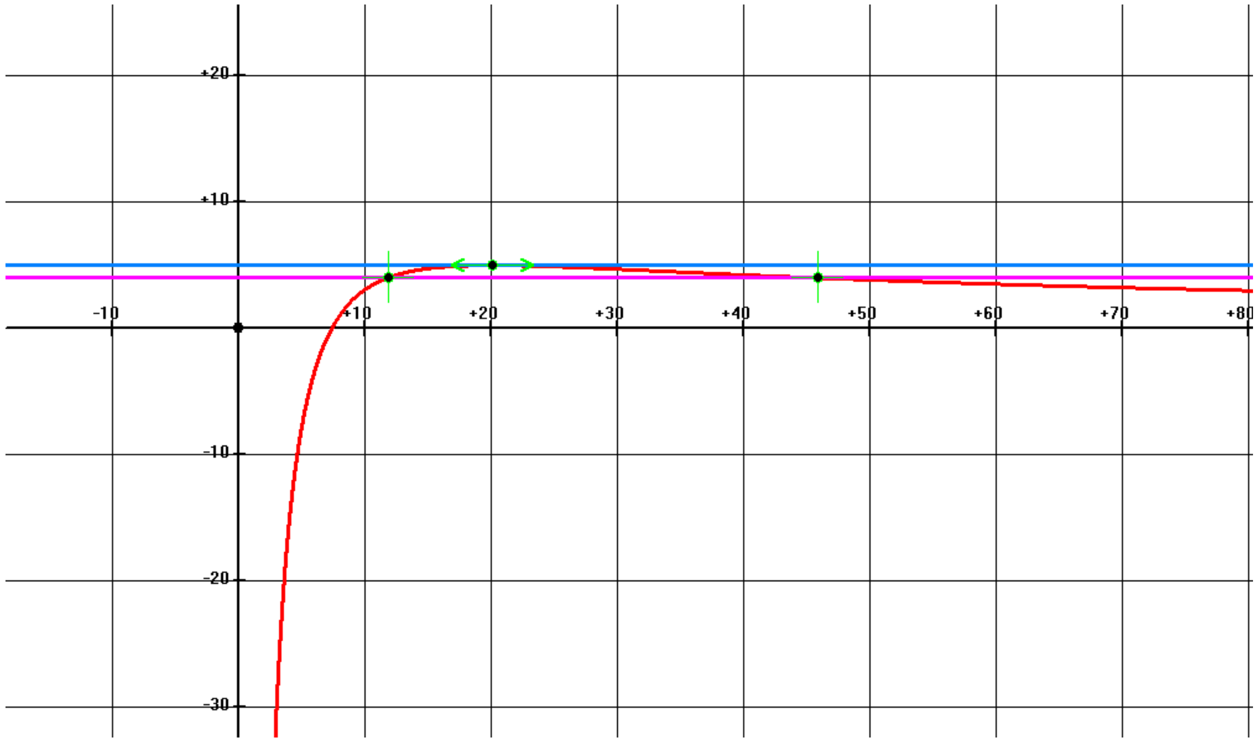
1. $g(t) = 200f(t) = \frac{100\ln t - 200}{t}$
2. La capacité pulmonaire maximale est $g(e^3) = \frac{200}{2e^3} = \frac{100}{e^3}$ et l'âge est e^3 années

   Les valeurs approchées : $\frac{100}{e^3} \approx 4{,}98$ et $e^3 \approx 20{,}085$

3.

t	10	15	20	25	30	40	50	60
$g(t)$	3	4,7	4,97	4,87	4,67	4,22	3,62	3,49

4. Courbe de g



5. L'inéquation $g(t) \geq 5$ n'admet pas de solution
6. Les 20% de diminution de la capacité maximale donne : $4{,}98 - \frac{20}{100} \times 4{,}98 = 3{,}98$

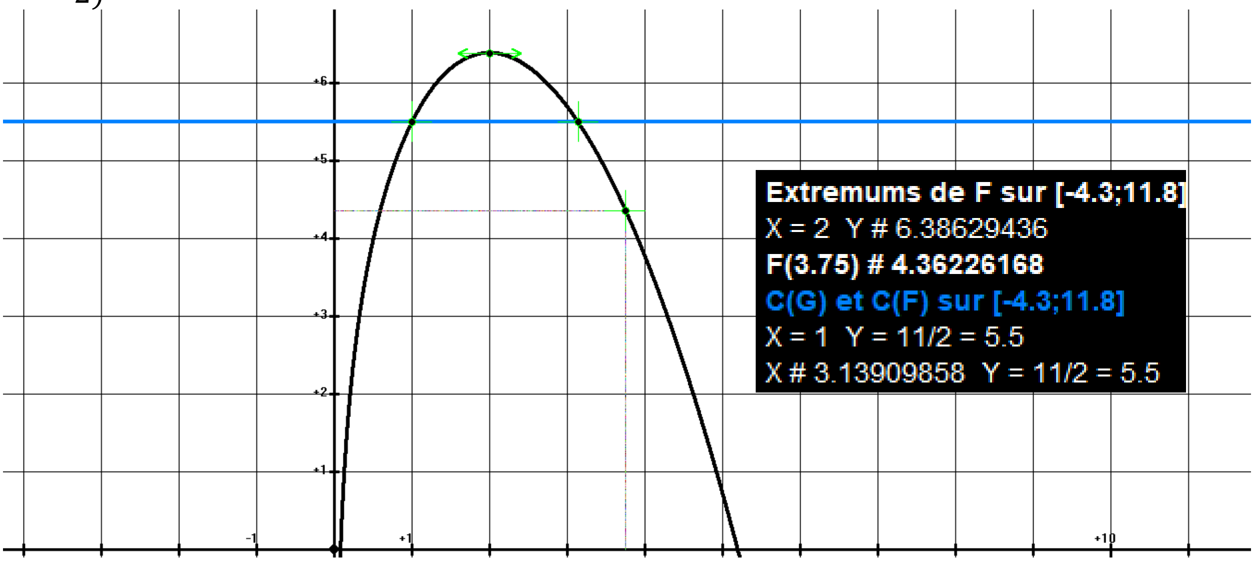
   Et la résolution graphique de l'équation $g(t) = 3{,}98$ nous donne $t = 11{,}83$ ou $t = 45{,}88$

48

1) f est définie sur [0,1 ; 4[. Déterminons les variations de f.
$f(0,1) = 0,49$ et $f(4) = 3,67$
$f'(x) = -x + 1 + \frac{2}{x} = \frac{-(x+1)(x-2)}{x}$
$\forall x \in]0,1 ; 2[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur]0,1 ; 2[
$\forall x \in]2; 4[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur]2; 4[
Tableau de variation

x	0,1	2	4
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	0,49 ↗	$5 + 2\ln 2$	↘ 3,67

le nombre de bactéries dans la culture est maximal pour $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 2$ et la température correspondante est $x = 2$ c'est-à-dire 20°C.
Ainsi à 20°C le nombre maximal de bactéries est $(5 + 2\ln 2) \times 1000.000 = 6.386.294$
2)



le nombre de bactéries dans la culture chauffée à 37,5°C est 4.362.262
3) le nombre de bactéries dans la culture est inférieur ou égal à 5 500 000 pour les températures appartenant aux intervalles] 0 ; 10[et] 31,4 ; 40[

49

1) f est définie sur [0 ; 30] . Déterminons les variations de f.
$f(0) = 60$ et $f(30) = 32ln31$

$$f'(x) = -2 + \frac{32}{x+1} = \frac{-2x+30}{x+1}$$

$\forall x \in]0\,;15[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0\,;15[$

$\forall x \in]15;\ 30[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]15;\ 30[$

Tableau de variation

x	0	15	30
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	60 ↗	$30 + 128\ln 2$	↘ $32\ln 31$

Le rythme cardiaque est maximal pour $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 15$
et le temps correspondant est $x = 15$ soit 15 mn.

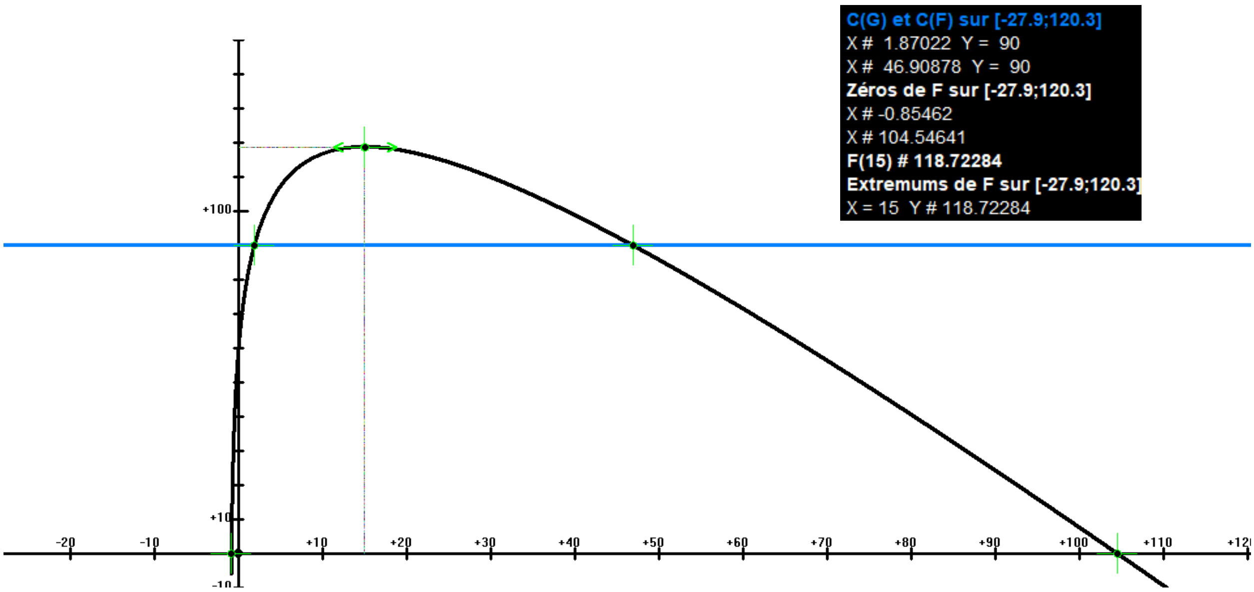
Ainsi au bout de 15 mn le rythme cardial maximal est de $30 + 128\ln 2 = 118{,}72$ pulsation par minute

2) le rythme cardiaque du sportif au repos est $f(0) = 60$ pulsations par minute

3) a) le rythme cardiaque est de 90 pulsations par minute pour $t = 1{,}87\ mn\ \ ou\ t = 46{,}81\ mn$

b) Pour un temps de 1,87 mn le rythme cardiaque est de $1{,}5 \times 60 = 90$ pulsations par minute et ce temps est inférieur à 20mn donc le sportif est en très bonne condition physique.

c. Le double du repos est $2 \times 60 = 120$ pulsations par minute donc le sportif n'est pas en mauvaise condition physique car il n'atteint jamais les 120 pulsations par minute (son maximum est 118,72 pulsations par minute)



50

1) Déterminons les variations de f. f est définie sur $[\,0\,;\,\frac{5}{2}]$

$f(0) = 1$ et $f\left(\frac{5}{2}\right) = \ln(11) - \frac{3}{2}$

$f'(x) = -1 + \frac{4}{4x+1} = \frac{-4x+3}{4x+1}$

$\forall x \in]0\,;\frac{3}{4}[\ ,f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0\,;\frac{3}{4}[$

$\forall x \in]\frac{3}{4};\ \frac{5}{2}[\ ,f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]\frac{3}{4};\ \frac{5}{2}[$

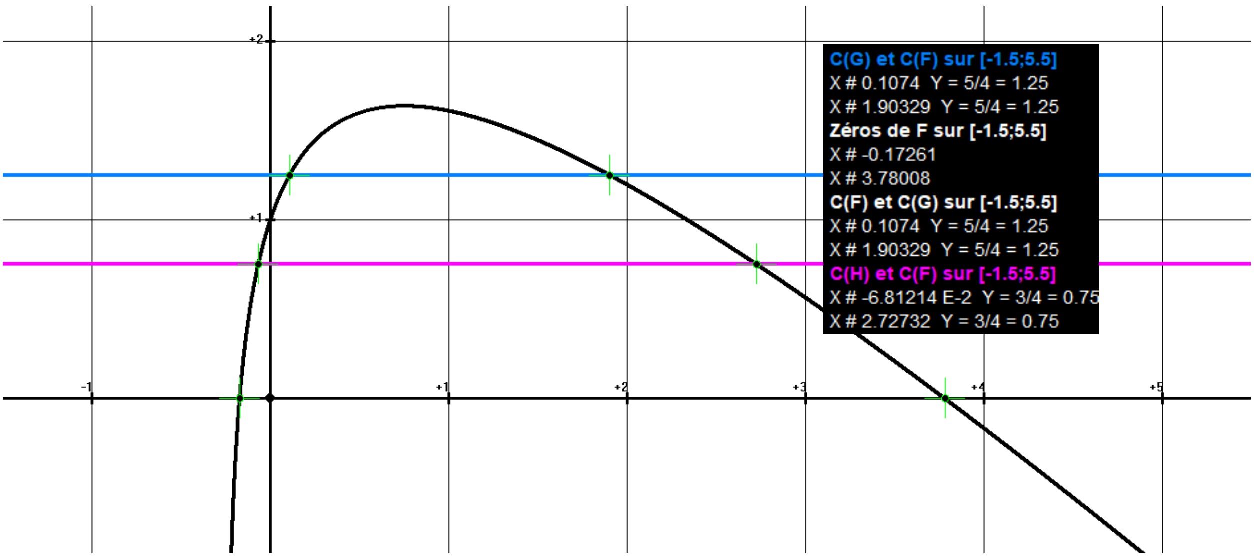
Tableau de variation

x	0		$3/4$		$5/2$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\boxed{\frac{1}{4} + 2\ln 2}$	$\searrow$	$\ln(11) - \frac{3}{2}$

L'instant auquel la glycémie de cette personne est maximale est telle que $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$ et le temps correspondant est $x = 0{,}75\ heures$ soit 45 mn.

Ainsi au bout de 45 mn le taux de glycémie maximal est de $0{,}25 + 2ln2 = 1{,}64\ g.L^{-1}$

2) l'intervalle dans lequel doit rester la glycémie pour éviter toute perturbation est $[0{,}8979\ ;\ 1]$ soit $[0{,}9\ ;\ 1]$
3) a) Il y a hyperglycémie dans l'intervalle de temps en heures $[0{,}1;\ 1{,}9]$
   b) Il y a hypoglycémie dans l'intervalle $[2{,}72\ ;\ 3{,}78]$



51

Il faut résoudre l'inéquation : $2000(1 + 2\ln(0{,}04x)) \geq 6000$

$200(1 + 2\ln(0{,}04x)) \leq 600 \Leftrightarrow 1 + 2\ln(0{,}04x) \geq 3 \Leftrightarrow \ln(0{,}04x) \geq 1 \Leftrightarrow 0{,}04x \geq e$

soit $x \geq \frac{e}{0{,}04} \Leftrightarrow x \geq 67{,}96$. C'est donc à partir de 68 km que l'infirmière libérale dépensera au moins la somme de 6000 FCFA.

52

Partie A

1. $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x\left(x - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$
2. g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et g'$(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2-1}{x}$
   $\forall x \in];+\infty[\,, x > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $2x^2 - 1$

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$		$+$	

$\forall x \in]\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty[\,$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty[$

$\forall x \in]0;\frac{\sqrt{2}}{2}[\,, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]0;\frac{\sqrt{2}}{2}[$

Tableau de variation

x	0		α		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$		$-$		$+$		$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↘	$\frac{\ln 2 - 1}{2}$	↗	0	↗	$+\infty$

3. a) $g(1) = 0$

   b) Sur $\left]0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$, f est continue et strictement décroissante donc elle réalise une bijection de $\left]0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ sur $\left]\frac{\ln 2 - 1}{2};+\infty\right[$ or $0 \in \left]\frac{\ln 2 - 1}{2};+\infty\right[$

   donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \left]\frac{\ln 2 - 1}{2};+\infty\right[$.

   On a: $\left.\begin{array}{r} g(0{,}4) = 0{,}076 \\ g(0{,}5) = -0{,}057 \end{array}\right\} g(0{,}4) \times g(0{,}5) < 0$ donc $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$

7) Signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

$\forall x \in]0;\ \alpha[$ c'est – à – dire $x < \alpha$ et g est strictement décroissante

donc $g(x) > g(\alpha)$ or $g(\alpha) = 0$ donc $g(x) > 0$

$\forall x \in \left]\alpha\ ;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ c'est – à – dire $x > \alpha$ et g est strictement décroissante

donc $g(x) < g(\alpha)$ or $g(\alpha) = 0$ donc $g(x) < 0$

$\forall x \in \left]\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;1\right[$ c'est – à – dire $\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1$ et g est strictement croissante

donc $\frac{\ln 2 - 1}{2} < g(x) < 0$ donc $g(x) < 0$

$\forall x \in]1\ ;+\infty[$ c'est – à – dire $x > 1$ et g est strictement croissante

donc $g(x) > g(1)$ or $g(1) = 0$ donc $g(x) > 0$

En conclusion :

$\forall x \in]0;\ \alpha[\cup]1\ ;+\infty[$, $g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha\ ;1[$, $g(x) < 0$

Partie B

$f(x) = x + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}.$

1. a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x + \frac{1}{x}(2 + \ln x) = -\infty$
   Interprétation : La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à (C)
   b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x} = +\infty$
2. f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1-\ln x}{x^2} = \frac{x^2-1-\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$
3. a) on sait que $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha = \alpha^2 - 1$ donc

$$f(\alpha) = \alpha + \frac{2}{\alpha} + \frac{\ln\alpha}{\alpha} = \alpha + \frac{2}{\alpha} + \alpha - \frac{1}{\alpha} = 2\alpha + \frac{1}{\alpha}$$

b) f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $g'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

$\forall x \in]0;+\infty[, x^2 > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$

x	0		α		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$		$-$		$+$	

$\forall x \in]0;\alpha[\cup]1\ ;+\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0;\alpha[$ et sur $]1\ ;+\infty[$
$\forall x \in]\alpha\ ;1[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]\alpha\ ;1[$

Tableau de variation

x	0		α		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	‖	↗	$f(\alpha)$	↘	3	↗	$+\infty$

		$-\infty$		

4. a) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} + \frac{lnx}{x} = 0$ donc la droite (D) : $y = x$ est asymptote à (C) en $+\infty$

   b) Position de (C) rapport à (D) : signe de $f(x) - x$ c'est-à-dire le signe de $2 + lnx$ sur $]1\,;+\infty[$.

   $\forall x \in]0; e^{-2}[$, $f(x) - x < 0$ donc (C) est au-dessous de (D)

$\forall x \in]e^{-2}\,;+\infty[$, $f(x) - x > 0$ donc (C) est au-dessus de (D)

(C) et (D) se coupent au point $\Omega(e^{-2}\,;\ e^{-2})$

b) Courbe (C)

Situation d'évaluation

53

Déterminons les variations de f. f est définie sur [2 ; 200]

$f(2) = 15$ et $f(200) = 48\ln(20) - 160$

$$f'(x) = -\frac{4}{5} + \frac{24}{x} = \frac{-4x + 120}{5x}$$

$\forall x \in]2\,;30[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]2\,;30[$

$\forall x \in]30;\ 200[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]30;\ 200[$

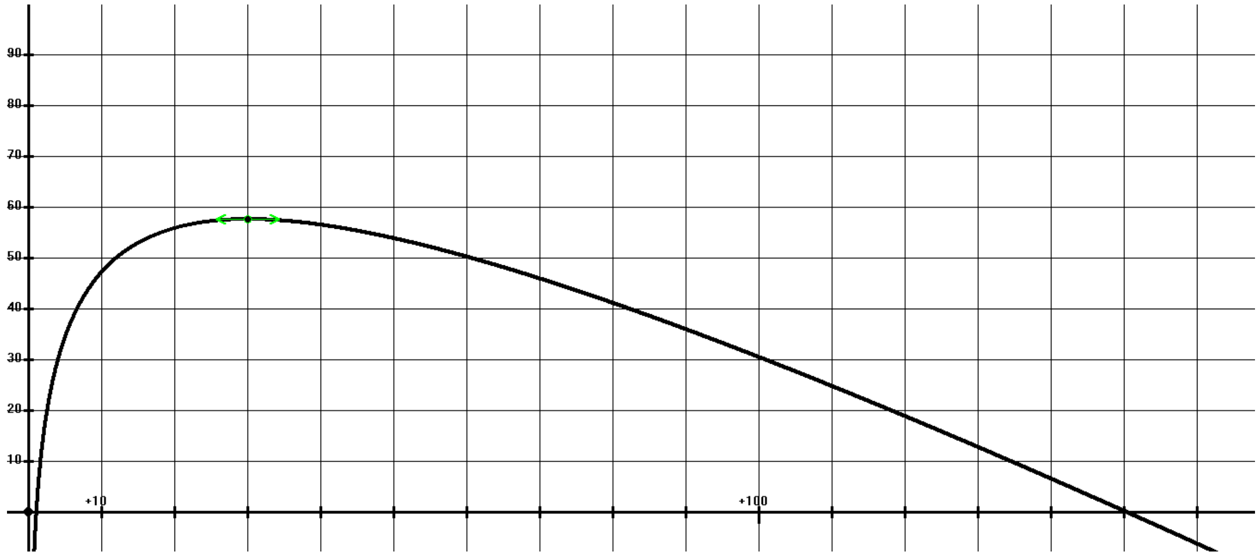
Tableau de variation

x	2	30	200
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	15 ↗	24ln30-24	↘

		$48\ln(20)-160$

le nombre de pièces par minute à produire pour avoir la rentabilité maximale. est telle que $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 30$ et le nombre de pièces correspondant est 30

Ainsi il faut produire 30 pièces au maximum pour ne pas perdre de l'argent et pour ne pas que les machines chauffent et s'usent plus rapidement



Leçon 8

Équations différentielles

Situation d'Apprentissage

Faire deux lectures de la situation d'apprentissage par deux apprenants.
Recenser et expliquer les données pertinentes.
Poser les questions suivantes :

Question/Consignes pour dérouler la situation	**Réponse attendue**
De quel évènement s'agit-il ?	Il s'agit d'un cours de physique chimie
Pendant ce cours, qu'est ce le professeur a affirmé ?	Le professeur a affirmé que l'élongation d'un ressort obéit à une loi.
Comment cette loi est structurée ?	Dans cette loi, la dérivée $x''(t)$ et $x(t)$ sont liée et sont fonction du temps t, de la constante de raideur et de la masse de l'objet en mouvement.
Donne le nom de cette loi	Cette loi est une équation différentielle
Donne la forme de cette équation	Cette équation est :$x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$
Qu'est-ce que les élèves ont décidé de faire après l'information du professeur de physique-chimie ?	Après cette information, les élèves ont décidé de s'adresser à leur professeur de mathématiques pour en savoir plus.

Dans cette leçon, nous allons apprendre à identifier les différents types d'équations différentielles, justifier qu'elle fonction est solution d'une équation différentielle, résoudre une équation différentielle du premier ordre et de déterminer les solutions des équations du second ordre.
Ce que nous allons apprendre va vous permettre de résoudre beaucoup de problèmes dans la vie. C'est pourquoi je vous demande de bien suivre.

Nous allons travailler ensemble selon le plan suivant :
1) Définition d'une équationdifférentielle
2) Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants
3) Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Activités 1 **Définition d'une équation différentielle**

1- Définition

Soit $f(x) = 3e^{2x}$

a) Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 6e^{2x}$

b) Calculons $f'(x) - 2f(x)$

$$f'(x) - 2f(x) = 0$$

c) Calculons $f''(x) - 4f(x)$

d) $f''^{(x)} - 4f(x) = 12e^{2x} - 12e^{2x} = 0$

Exercices de fixation

1. Les réponses correctes de haut en bas sont :

1-Vrai

2- Faux

3-Vrai

4- Faux

5-Vrai

6- Faux

2. Les réponses correctes sont :

a) 1

b) 3

c) 2

d) 2

3. La réponse correcte est :

c) car $(x+1)f'(x) - f(x) = (x+1)(-5x-8)' - (-5x-8)$

$$= (x+1)(-5) + (5x+8)$$

$$= -5x - 5 + 5x + 8$$

$$(x+1)f'(x) - f(x) = 3$$

Activités 2 **Équation différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants**

2.1 : Equation différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants

1-Justifions que la fonction $f_k(x) = ke^{ax}$ est solution de (A)

$f'_k(x) = ake^{ax}$ or $f_k(x) = ke^{ax}$, on a : $f'_k(x) = af(x)$ Donc $f_k(x) = ke^{ax}$ est solution de (A).

2. On considère $f_k(x) = ke^{ax}$,, solution de (A) et $h(x) = e^{-ax}f(x)$,

a) $h'(x) = -ae^{-ax}f(x) + e^{-ax}f'(x) = \left(-af(x) + f'(x)\right)e^{-ax} = \left(f'(x) - af(x)\right)e^{-ax}$

b) $h'(x) = 0$, car $f'(x) - af(x) = 0$ et comme $h'(x) = 0$, $h(x)$ est une constante donc $h(x) = k, k \in \mathbb{R}$.

c) On sait que $h(x) = e^{-ax}f(x)$ or $h(x) = k$ ainsi on a : $k = e^{-ax}f(x)$,

donc $f(x) = ke^{ax},, k \in \mathbb{R}$

d) Les solutions de (A) sont : $f(x) = ke^{ax},, k \in \mathbb{R}$.

Exercices de fixation

1.

Les solutions de l'équation différentielle (A) sont :

a) ; c) ; e).

2.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de chacune des équations différentielles ci-dessous sont les fonctions :

a) $x \longmapsto ke^{x}$

b) $x \longmapsto ke^{\sqrt{2}x}$

c) $x \longmapsto ke^{-\frac{1}{3}x}$ où $k \in \mathbb{R}$

d) $x \longmapsto ke^{\frac{3}{2}x}$

<u>3.</u>Les réponses sont :

$(A) \longrightarrow 2$

$(B) \longrightarrow 4$

$(C) \longrightarrow 1$

$(D) \longrightarrow 3$

2.2 :Equation différentielle du type $f' = af + b$ (a et b réels ; $a \neq 0$

On considère l'équation différentielle (E) : $f' = af + b$
(a et b nombres réel avec $a \neq 0$)

1. $g(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$, $g'(x) = kae^{ax}$, ainsi $g'^{(x)} - ag(x) = kae^{ax} - a\left(ke^{ax} - \frac{b}{a}\right) = b$
   Ainsi $g'(x) = ag(x) + b$

Donc $g(x)$ est solution de (E)

2. a) f est solution de (E) et g est solution de (E) on a : $f'(x) - g'(x) = a(f(x) - g(x)) + b - b \Leftrightarrow f'(x) - g'(x) = a(f(x) - g(x))$
   b) $f(x) - g(x)$ est solution de $f' = af$, donc $f(x) - g(x) = ke^{ax}$
   c) $f(x) - g(x) = ke^{ax} \Leftrightarrow f(x) = ke^{ax} + g(x) = ke^{ax} + ke^{ax} - \frac{b}{a}$

$$\Leftrightarrow f(x) = k'^{e^{ax}} - \frac{b}{a}$$

Donc $f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$

Exercices de fixation

1.

Les réponses correctes sont : b) et c) .

2

Les solutions sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles ci-dessous sont les fonctions (où $k \in \mathbb{R}$)

a) $x \longmapsto ke^{-2x} + 3$
b) $x \longmapsto ke^{3x} - 3$
c) $x \longmapsto ke^{-2x} + \frac{5}{2}$
d) $x \longmapsto ke^{-\frac{3}{2}x} + \frac{7}{3}$

3.

Les réponses correctes sont

$(A) \longrightarrow 3$

$(B) \longrightarrow 4$

$(C) \longrightarrow 1$

$(D) \longrightarrow 2$

2.3: Equation différentielle du type $f' = af + b$ (a et b réels) satisfaisant à une condition initiale donnée

a) Déterminons k pour que $f_k(x_0) = y_0 \Leftrightarrow ke^{x_0} = y_0$

$$\Leftrightarrow ke^{x_0} = y_0$$

$$\Leftrightarrow k = y_0 e^{-x_0}$$

b) Il y'a une seule solution vérifiant $f_k(x_0) = y_0$

Exercices de fixation

1.

La réponse correcte est $f(x) = -2e^{2x} + 2$.

2.

1) On a $y_k(x) = ke^{3x}$
Donc $y_k(ln2) = ke^{3ln2} = ke^{ln2^3} = ke^{ln8} = 8k$
D'où $y_k(lm2) = 1 \Leftrightarrow 8k = 1$
$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{8}$$
2) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{8}e^{3x}$.

3.

a) Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $f' = -3f$ sont les fonctions définies par $f_k(x) = ke^{-3x}$ où $k \in \mathbb{R}$.
On a $f(0) = 5$ donc $ke^{-3(0)} = 5$; $k = 5$
D'où la solution est la fonction : $x \longmapsto 5e^{-3x}$.

En procédant de cette manière, les réponses sont :

b) $x \longmapsto e^{2x+6}$.

c) $x \longmapsto 3e^{\frac{1}{2}x} - 2$.

d) $x \longmapsto \frac{1}{2}e^{1-4x} - \frac{1}{2}$.

Activités 3 **Équation différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants**

3.1. Définitions et propriétés

Soit (E) :$f" = mf$

1. Justifions que si m=0, alors les fonctions $f_{ab}(x) = ax + b$ sont solutions de l'équation différentielle $f" = 0$

Si $f" = 0$, les fonctions qui sont telles que :$\forall x \in \mathbb{R}, f"(x) = 0$, sont de la forme $f(x) = ax + b$, avec a et b des reels

De plus si $f(x) = ax + b, f"(x) = 0$, d'où le résultat.

2. Justifions que si $m = \omega^2$, $\omega \in \mathbb{R}$, alors $f_{ab}(x) = ae^{\omega x} + be^{-\omega x}$sont solutions de l'équation (E)

En effet $f'_{ab}(x) = (ae^{\omega x} + be^{-\omega x})' = a\omega e^{\omega x} - b\omega e^{-\omega x}$

$f^{"}_{ab}(x) = a\omega^2 e^{\omega x} + b\omega^2 e^{-\omega x}$=$\omega^2(ae^{\omega x} + be^{-\omega x}) = \omega^2 f(x)$

Donc $f_{ab}(x)$ est solution de $f" = \omega^2 f$

3.Justifions que si $m = -\omega^2$, $\omega \in \mathbb{R}$, alors $f_{ab}(x) = acos\omega x + bsin\omega x$sont solutions de l'équation (E)

Calculons les dérivées

- La première dérivée de $f_{ab}(x)$est
  $f'_{ab}(x) = -a\omega \sin(\omega) + a\omega\cos(\omega x)$
- La deuxième dérivée de $f_{ab}(x)$est :
  $$f"_{ab}(x) = -a\omega^2 \cos(\omega x) - b\omega^2 \sin(\omega x)$$
  $$= -\omega^2(acos\omega x) + bsin\omega x))$$

$$f"_{ab}(x) = -\omega^2 f_{ab}(x)$$

Ainsi, nous avons prouvé que $f_{ab}(x) = acos\omega x + bsin\omega x$

est bien une solution de l'équation différentielle (E) quand $m = -\omega^2$.

Exercices de fixation

1.

On note du haut vers le bas (A); (B); (C) les lignes de la colonne Equations et 1; 2; 3; 4 les lignes de la colonne Solutions. Les réponses correctes sont :

$(A) \longrightarrow 2$

$(B) \longrightarrow 4$

$(C) \longrightarrow 1$

2.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles ci-dessous sont les fonctions : (a et b sont des réels)

a) $x \longmapsto ae^{4x} + be^{-4x}$.
b) $x \longmapsto acos(3x) + bsin(3x)$
c) $x \longmapsto acos(2x) + bsin(2x)$
d) $x \longmapsto ae^{\frac{1}{3}x} + be^{-\frac{1}{3}x}$
e) $x \longmapsto a\cos\left(\frac{5}{2}x\right) + bsin\left(\frac{5}{2}x\right)$

3.

Les réponses correctes du haut vers le bas sont :

1. Vrai
2. Vrai
3. Faux
4. Vrai
5. Vrai

3.2-La solution d'une équation différentielle du type $f'' = mf$ avec condition initiale

On sait que les solutions générales de l'équations différentielle $y'' = 0$ sont de la forme : $f_{ab}(x) = ax + b$, où $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont des constantes réelles.

Nous devons déterminer la fonction f qui satisfait les conditions

1. $f(x_0) = y_0$
2. $f'(x_0) = z_0$

Étape 1 : Trouver $\boldsymbol{f'(x)}$.

$f'_{ab}(x) = a$

Étape 2 : Appliquer les conditions

1. La première condition $f(x_0) = y_0$ nous donne :$ax_0 + b = y_0$
2. La deuxième condition $f'(x_0) = z_0$ nous donne $a = z_0$

Étape 3 : Substituer $\boldsymbol{a}$ dans la première condition

Remplaçons $\boldsymbol{a}$ dans la première condition, on a :$z_0x_0 + b = y_0$ et $b = y_0 - z_0x_0$

Ainsi, la fonction $\boldsymbol{f}$ qui satisfait les deux conditions est :$f(x) = z_0x + (y_0 - z_0x_0)$

Exercices de fixation

1.

La réponse correcte est la fonction g.

2.

1) On a $f_{ab}\left(\frac{\pi}{9}\right) = 0 \Leftrightarrow acos\left(3 \times \frac{\pi}{9}\right) + bsin\left(3 \times \frac{\pi}{9}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow a + b\sqrt{3} = 0(1)$$

et $f'(x) = (acos(3x) + bsin(3x))'$

$$f'(x) = -3\,asin(3x) + 3bcos(3x)$$

donc $f'_{ab}\left(\frac{\pi}{9}\right) = 1 \Leftrightarrow -3asin\left(3 \times \frac{\pi}{9}\right) + 3bcos\left(3 \times \frac{\pi}{9}\right) = 1$

$$\Leftrightarrow -3a\sqrt{3} + 3b = 2(2)$$

(1) et (2) donne le système$\begin{cases} a + b\sqrt{3} = 0 \\ -3a\sqrt{3} + 3b = 2 \end{cases}$dont la solution

est $\begin{cases} a = -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ b = \frac{1}{6} \end{cases}$

2) En remplaçant a et b par leurs valeurs respectives dans l'expression de $f_{ab}(x)$ on obtient la fonction f définie par :

$$f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{6}\cos(3x) + \frac{1}{6}\sin(3x)$$

3.

En procédant comme dans l'exercice précédent, on a :

a) $x \longmapsto 0$

b) $x \longmapsto \frac{\sqrt{2}}{2}(cosx + sinx)$

c) $x \longmapsto -x + 3$

d) $x \longmapsto -\frac{1}{4}e^{2x} + 3e^{-2x}$

Exercices de renforcement

1

Erratum : corriger les erreurs de la colonne « Solutions »

Équation différentielle
$f' = af,\ a \in \mathbb{R}$
$f' = af + b,$ $a \in \mathbb{R}^*,\ b \in \mathbb{R}$
$f'' = 0$
$f'' = \omega^2 f, \omega \in \mathbb{R}^*$
$f' = -\omega^2 f, \omega \in \mathbb{R}^*$

Solutions
$x \longmapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$; $k \in \mathbb{R}$
$x \longmapsto A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$; $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.
$x \longmapsto Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$; $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$
$x \longmapsto Ax + B$; $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$
$x \longmapsto ke^{ax}$

2

1) Démontrons que la fonction $f(x) = 5e^x$ est solution de l'équation différentielle $y' - 2y = 0$

$$f'(x) = 10e^x$$

On a $y' - 2y = f'(x) - 2f(x) = 10e^x - 2 \times 5e^x = 0,$

Donc la fonction $f(x) = 5e^x$ est solution de l'équation différentielle $y' - 2y = 0$

2-Démontrons que la fonction $g(x) = f(x) - 3x - \frac{3}{2}$ est solution de l'équation différentielle

$$y' - 2y = 6x$$

$g'(x) = 10e^x - 3$ et on a : $g'(x) - 2g(x) = 10e^x - 3 + 10e^x - 6x - 3 = 6x.$

Donc la fonction $g(x) = f(x) - 3x - \frac{3}{2}$ est solution de l'équation différentielle

$$y' - 2y = 6x$$

3

La fonction $\mathrm{h}(x) = -2x^2 - x - 2$ est une solution de (E).

4

Erratum

1 : $f(x) = \cos(2x + 3)$; (E) :$y'' = -4y$

1.Calculons $f'(x)$et $f''(x)$

$f'(x) = -2sin(2x + 3)$ et $f''(x) = -4\cos(2x + 3)$

Vérifions l'équation différentielle $y'' = 4y$

$y'' + 4y = 0$; $y'' + 4y = -4cos(2x + 3) + 4cos(2x + 3) = 0$

2. Calculons $f'(x)$ et $f''(x$

$f'(x) = -2cos(2x)$ et $f"(x) = -4\sin(2x)$

Vérifions l'équation différentielle $y'' + 3y = -2sin(x)cos(x)$

$$y'' + 3y = -4\sin(2x) + 3sin2x = -\sin(2x) = -2sinxcosx$$

Donc $f(x) = sin(2x)$est une solution de l'équation différentielle $y'' + 3y = -2sin(x)cos(x)$

3. Calculons $f'(x)$

$f'(x) = (1 + x)e^x$

Calculons $y' - y = (1 + x)e^x - xe^x = e^x$

Nous avons vérifié que l'équation est satisfaite. Ainsi, $f(x) = xe^x$ est bien une solution de l'équation différentielle $y' - y = e^x$

4. Calculons $f'(x) = e^x(lnx + \frac{1}{x})$ et $f"(x) = e^x\,(lnx + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2})$

$y" - 2y' + y = -\dfrac{1}{x^2}e^x$

Donc la fonction $f(x) = e^x lnx$ est solution de l'équation :$y" - 2y' + y = \frac{-1}{x^2}e^x$

5

Pour déterminer une équation différentielle du type $y' - ay = 0$ dont la fonction $f(x) = 2e^{-2x+4}$est une solution, nous allons suivre les étapes suivantes :

Calculons la dérivée de $f'(x)$.

$f'(x) = -4e^{-2x+4}$

Ecrivons l'équation différentielle $y' - ay = 0$

$y' - ay = -4e^{-2x+4} - a(2e^{-2x+4}) = e^{-2x+4}(-4 - 2a))$

$$y' - ay = 0 \Leftrightarrow -4 - 2a = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -2$$

La fonction $f(x) = 2e^{-2x+4}$ est solution de l'équation $y' + 2y = 0$

6

b) $f(x) = ke^{7x}, k \in \mathbb{R}$ est la bonne réponse.

7

La bonne réponse est : b) $f(x) = k\,e^{-3x}$, où $k \in \mathbb{R}$

8

La solution de l'équation différentielle $y' = y$ telle que $f(1) = 2$: est

c) la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{x-1}$

9

La solution de l'équation différentielle $y' = 3y + 2$ est :

d) $f(x) = ke^{3x} - \frac{2}{3}$, $k \in \mathbb{R}$

10

La bonne réponse est c) $f(x) = a\cos(\sqrt{5}x) + b\sin(\sqrt{5}x)$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

11

La solution de l'équation différentielle $4y'' - 9y = 0$ est :

c)$f(x) = ae^{\frac{3x}{2}} + be^{-\frac{3x}{2}}$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

12

1. Pour la première fonction : $f(x) = 3e^{-3x}$.

Calculons la dérivée de f :

$f'(x) = -9e^{-3x}$

Écrivons une équation différentielle en reliant f et f'

$f'(x) + 3f(x) = 0$:

Donc, l'équation différentielle est :$y' + 3y = 0$

2. Détermine une équation différentielle pour laquelle : $f(x) = 3e^{-2x} - 4$. est solution.

- Calculons la dérivée de f

$$f'(x) = -6e^{-2x}$$

- Écrivons une équation différentielle en reliant f et f'

En effet : $f'(x) + 2f(x) = -8$

Donc, l'équation différentielle est: $y' + 2y = -8$

13

a) La solution de l'équation différentielle $\frac{\sqrt{2}}{2}f' - 2f + 1 = 0$ est : $f(x) = ke^{2\sqrt{2}x} + \frac{1}{2}$

b) La solution de l'équation différentielle $\frac{2}{3}f' - \frac{3}{4}f + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ est : $f(x) = ke^{\frac{9}{8}x} - \frac{4}{3}$

c) La solution de l'équation différentielle : $\pi f' + f - 3\pi = 2\pi$ est : $f(x) = ke^{-\frac{1}{\pi}x} + 5\pi$

d) l'équation différentielle $cos\alpha f' - sin\alpha f = 1$ est équivalente à l'équation :

$$f' - \frac{sin\alpha}{cos\alpha}f = \frac{1}{cos\alpha}$$

La solution générale de l'équation différentielle $cos\alpha f' - sin\alpha f = 1; avec\ \alpha \epsilon \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ est :

$$f(x) = Ce^{tan\alpha} - \frac{1}{sin\alpha}$$

14

a) La solution de l'équation différentielle : $y' + \sqrt{2}y = 0$; telle que $y(0) = 1$ est :
$f(x) = e^{-\sqrt{2}x}$

b) La solution de l'équation différentielle suivante : $f' - 2\pi f = \pi$ telle que :
$f\left(\frac{1}{2\pi}\right) = 0$ est : $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2\pi x}$

c) La solution générale de l'équation différentielle $3f' - 2f + 6 = 0$ est :

$$f(x) = 3 + Ce^{\frac{2}{3}x}$$

La solution de l'équation différentielle :$3f' - 2f + 6 = 0$ telle que la courbe de la fonction f coupe l'axe des abscisses en 1signifie que $f(1) = 0$est :

$f(x) = 3(1 - e^{-\frac{2}{3}(x-1)}$

15

a) La solution générale de l'équation différentielle $y' = 3y$ est : $f(x) = ke^{3x}$.
b) La solution générale de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ est : $f(x) = ke^{-2x}$.
c) La solution de l'équation différentielle$y = -5y'$, telle que y(−2)=1, est$f(x) = e^{-\frac{1}{5}(x+2)}$.
d) La solution générale de l'équation différentielle $2y' = y - 1$ est : $f(x) = ke^{\frac{1}{2}x} - 1$.

16

a) La solution de l'équation différentielle : $y = -5y'$, telle que y(−2)=1, est

$y = e^{-\frac{1}{5}(x+2)}$

b) La solution de l'équation différentielle : $y + 2y' = 0$, telle que ; $y(-2) = \frac{1}{2}$ est

$y = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(x+2)}$

c) La solution de l'équation différentielle : $y' = 2y + 1$, telle que ; $y(0) = 0$ est

$f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}$

d) La solution de l'équation différentielle $2y + 3y' - 1 = 0$ avec la condition initiale $y(0) = 1$ est

$f(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{2}{3}x} + \frac{1}{2}$.

17

a) La solution générale de l'équation différentielle $\boldsymbol{y'' - 2y} = 0$ est

$f(x) = ae^{\sqrt{2}x} + be^{-\sqrt{2}x}$

b) La solution générale de l'équation différentielle $2y'' - y = 0$

est $f(x) = ae^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} + be^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}$

c) La solution générale de l'équation différentielle $-9y'' + 4y = 0$

est $f(x) = ae^{\frac{2}{3}x} + be^{-\frac{2}{3}x}$

d) La solution générale de l'équation différentielle $\boldsymbol{-5y'' - 25y = 0}$ est

$f(x) = \mathrm{a}\cos(\sqrt{5}x) + bsin(\sqrt{5}x)$

18

a) La solution générale de l'équation différentielle $y = 25y''$ est

$f(x) = ae^{\frac{1}{5}x} + be^{-\frac{1}{5}x}$

b) La solution générale de l'équation différentielle $f = -9f''$ est

$f(x) = \mathrm{a}\cos\left(\frac{1}{3}x\right) + bsin(\frac{1}{3}x)$

c) La solution générale de l'équation différentielle $\frac{1}{9}f'' + \frac{1}{4}f = 0$

Est $f(x) = \mathrm{a}\cos\left(\frac{3}{2}x\right) + bsin(\frac{3}{2}x)$

d) La solution générale de l'équation différentielle : $\pi f'' + 2f = 0$

Est $f(x) = acos(\sqrt{\frac{2}{\pi}}x) + bsin(\sqrt{\frac{2}{\pi}}x)$

19

Résous l'équation différentielle suivante :$y'' + \frac{1}{9}y = 0$ *telle que* :$y(0) = \sqrt{3}$ *et* $y'(0) = \frac{1}{3}$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1, \qquad y'(\frac{\pi}{2}) = 1$$

a) la solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$f(x) = \text{a}\cos\left(\frac{3}{2}x\right) + b\sin\left(\frac{3}{2}x\right)$$

En utilisant les conditions initiales données, déterminons a et b:$f(\pi) = 1$, $f'(\pi) = 0$

On trouve: $a = 0$ *et* $b = -1$

Donc $f(x) = -\sin(\frac{3}{2}t)$

b) La solution générale de cette équation est de la forme :$f(x) = ae^{\frac{5}{4}x} + be^{-\frac{5}{4}x}$

En utilisant les conditions initiales y(0) = 0 et y'(0)=1. On a $a = -b$ et

Donc $f(x) = a\left(e^{\frac{5}{4}t} - e^{-\frac{5}{4}t}\right)$ = a $\sin(\frac{5}{4}t)$

$a.\frac{5}{4} = 1$, ainsi $a = \frac{4}{5}$, donc ; f(x)= $\frac{5}{4}$ $\sin(\frac{5}{4}t)$

c) la forme générale de la solution $f(x) = ax + b$.

En utilisant la condition initiale on : $a = -1$;$b = 1 + \pi$

$f(x) = -x + 1 + \pi$

d) La solution générale de cette équation est de la forme :$f(x) = \text{a}\cos(2x) + b\sin(2t)$

En utilisant les conditions initiales $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $f'(\frac{\pi}{2}) = 1$; on a :$a = 1$ et $b = -\frac{1}{2}$

La solution de l'équation différentielle est $f(x) = cos(2x) - \frac{1}{2}sin(2x)$

20

a) Résolution de l'équation $y' = -7y$

L'ensemble des solutions de l'équation $y' = -7y$ est :$f_k(x) = ke^{-7x}$

b) l'ensemble solution de l'équation $7y' + y = 0$ est :$f_k(x) = ke^{-\frac{1}{7}x}$

c) l'ensemble solution de l'équation$8y' - 5y + 2 = 0$est :$f_k(x) = ke^{\frac{5}{8}x} + \frac{2}{5}$

d) L'ensemble solution de l'équation $y'' = -\sqrt{5}y$

$$f(x) = Acos(\sqrt{5}x) + Bsin(\sqrt{5}x)$$

21

1) La solution générale de cette équation est :$f(x) = \text{a}.\cos\left(\frac{1}{3}x\right) + bsin(\frac{1}{3}x)$
2) Détermine la solution f de (E) vérifiant les conditions initiales $f(0) = \sqrt{3}\ et\ f'(0) = \frac{1}{3}$

Pour $f(0) = \sqrt{3}$ on a :$a = \sqrt{3}$ et pour $f'(0) = \frac{1}{3}$ on a :$b = 1$

$$f(x) = \sqrt{3}\cos\left(\frac{1}{3}x\right) + \sin(\frac{1}{3}x)$$

3) Verifionsque, pour tout nombre réel $t, f(t) = 2\sin(\frac{1}{3}\text{t}+\frac{\pi}{6})$

$f(x) = 2\sin(\frac{1}{3}\text{t}+\frac{\pi}{6})$=$2\left[\sin\left(\frac{1}{3}t\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{1}{3}t\right)\sin(\frac{\pi}{6})\right]$

$= 2\left[\sin\left(\frac{1}{3}t\right).\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\left(\frac{1}{3}t\right).\frac{1}{2}\right]$

$$f(x) = \sqrt{3}\sin\left(\frac{1}{3}t\right) + \cos(\frac{1}{3}t)$$

Exercices d'approfondissement

22

1) La solution générale de l'équation différentielle (E)est: $f(x) = ke^{-2x}$
2)Détermination de la solution avec une tangente en 0 est parallèle à la droite : :
$y = -4x + 1$
La dérivée en 0 de f' est -4, on a : $f'(0) = -4 \Leftrightarrow -2k = -4$

$$\Leftrightarrow k = 2$$

La solution de l'équation différentielle (E) dont la courbe représentative admet une tangente parallèle à la droite donnée au point d'abscisse 0 est:
$f(x) = 2e^{-2x}$

23

1) La solution générale de l'équation différentielle $y' = 3y$ est : $f(x) = ke^{3x}$

2) on sait que la courbe passe par le point (2 ;3), c'est-à-dire que $f(2) = 3$.

On trouve $k = \frac{3}{e^6}$

Donc la solution particulière de l'équation différentielle $y' = 3y$ qui passe par le point (2,3) est :

$f(x) = \dfrac{3}{e^6}e^{3x} = 3e^{3x-6}$.

24

1) (E): $4y'' + \pi^2 y = 0 \Leftrightarrow y'' = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 y$ donc les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :$x \longmapsto a\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + b\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ où a et b sont des nombres réels.

2) On a $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ entraine $a\frac{\sqrt{2}}{2} + b\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (1)

et $f'(x) = -a\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + b\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$ donc $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ entraine

$$-a\frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + b\frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 (2)$$

(1) et (2) entraine $a = b = \frac{\sqrt{6}}{4}$

Donc $f(x) = \frac{\sqrt{6}}{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)$

25

1) (E): $25y'' - 16y = 0 \Leftrightarrow y'' = \frac{16}{25}y$
3) Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions :$x \longmapsto ae^{\frac{4}{5}x} + be^{-\frac{4}{5}x}$ où a et b sont des nombres réels.
2) $f(0) = 1$ donne $a + b = 1(1)$et $f'(x) = \frac{4}{5}ae^{\frac{4}{5}x} - \frac{4}{5}be^{-\frac{4}{5}x}$ donc $f'(0) = 0$ donne $\frac{4}{5}a - \frac{4}{5}b = 0(2)$

(1) et (2) entraine $a = b = \frac{1}{2}$ donc $f(x) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{4}{5}x} + e^{-\frac{4}{5}x}\right)$

26

1) Calcul de $f'(x)$

$f'(x) = (6x + 19)e^{2x}$

On a $f'(x) - 2f(x) = 3e^{2x}$

Donc f est solution de l'equation differentielle $y' - 2y = 3e^{2x}$.

2) Déduisons le calcul de l'intégral $\int_0^{\ln 2} f(x)dx$
En utilisant le fait que $f'(x) - 2f(x) = 3e^{2x}$. En intégrant de 0 à ln2, nous avons :

$$\int_0^{\ln 2} f'(x)dx - 2\int_0^{\ln 2} f(x)dx = \int_0^{\ln 2} 3e^{2x}dx$$

On sait que $\int_0^{\ln 2} 3e^{2x}dx = \frac{9}{2}$ et $\int_0^{\ln 2} f'dx = f(ln2) - f(0)$

$$\int_0^{\ln 2} f'dx = f(ln2) - f(0) = 24 + 12ln2$$

$-2\int_0^{\ln 2} f(x)dx = \int_0^{\ln 2} 3e^{2x}dx - \int_0^{\ln 2} f'(x)dx = \frac{9}{2} - 24 - 12ln2 = \frac{-39-24ln2}{2}$

Donc $\int_0^{\ln 2} f(x)dx = \frac{39+24ln2}{4}$

27

1) $f(x) = (ax + b)e^x$ est solution de (E)
$\Leftrightarrow f'(x) - 2f(x) = (x+1)e^x$

$\Leftrightarrow [(ax+b)e^x] - 2(ax+b)e^x = (x+1)e^x$ pour tout nombre réel x.
$\Leftrightarrow (-ax+a-b)e^x = (x+1)e^x \Leftrightarrow -ax+a-b = x+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a = 1 \\ a-b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$$

Donc $f(x) = (-x-2)e^x$

2) g est solution de $(E) \Leftrightarrow g'(x) - 2g(x) = (x+1)e^x$

$$\Leftrightarrow g'(x) - 2g(x) = f'(x) - 2f(x)$$

$$\Leftrightarrow (g-f)'(x) - 2(g-f)(x) = 0$$

g est solution de (E) $\Leftrightarrow$ $g-f$ est solution de l'équation

$$(E'): y' - 2y = 0$$

3) . L'équation (E') a pour solutions les fonctions definies sur $\mathbb{R}$ par :$x \longmapsto ke^{2x}$oùk est un nombre réel.
g est solution de (E) équivaut à $g-f$ est solution de (E') équivaut à $(g-f)(x) = ke^{2x}$ équivaut à
$g(x) = ke^{2x} + f(x) = ke^{2x} - (-x-2)e^x$ où k est un nombre réel.

28

$(A): 2y' + 6y = x^2 + 2x - 1$

1) $P(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des nombres réels.
P est solution de (A) entraine que $2P'(x) + 6P(x) = x^2 + 2x - 1$

$$2(ax^2+bx+c)' + 6(ax^2+bx+c) = x^2+2x-1$$

$$6ax^2 + (6b+4a)x + 2b + 6c = x^2 + 2x - 1$$

$$\begin{cases} 6a = 1 \\ 6b + 4a = 2 \\ 2b + 6c = -1 \end{cases} \text{ donc} \begin{cases} a = \frac{1}{6} \\ b = \frac{2}{9} \\ c = \frac{5}{54} \end{cases} \text{ on obtient } P(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{9}x + \frac{5}{54}$$

2) On résous cette question comme la question 2) de l'exercice précédent.

3) . $(A'): 2y' + 6y = 0$ a pour solutions les fonctions $x \longmapsto ke^{-3x}$ où k est un nombre réel.
. Les solutions de (A) sont les fonctions : $x \longmapsto ke^{-3x} + P(x)$ donc
$x \longmapsto ke^{-3x} + \frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{9}x + \frac{5}{54}$ où k est un nombre réel.

4) $g(0) = 0$ donne $k = -\frac{5}{54}$ donc $g(x) = -\frac{5}{54}e^{-3x} + \frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{9}x + \frac{5}{54}$

29

$(E): y' - 3y = sinx$

1) L'équation $(E'): y' - 3y = 0$ a pour solutions les fonctions $x \longmapsto ke^{3x}$ où k est un nombre réel.
2) $g(x) = acosx + bsinx$ est solution de (E) si et seulement si $g'(x) - 3g(x) = sinx$, pour tout nombre réel x

$$\Leftrightarrow (acosx + bsinx)' - 3(acosx + bsinx) = sinx$$

$\Leftrightarrow (-a - 3b)sinx + (b - 3a)cosx = sinx,$ pour tout nombre réel x

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a - 3b = 1 \\ b - 3a = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{10} \\ b = -\frac{3}{10} \end{cases}$ donc $g(x) = -\frac{1}{10}cosx - \frac{3}{10}sinx$

3) C'est la même rédaction que la question 2) de l'exercice 1.
4) Les solutions de (E) sont les fonctions : $x \longmapsto ke^{3x} + g(x)$où k est un nombre réel, donc $x \longmapsto ke^{3x} + -\frac{1}{10}cosx - \frac{3}{10}sinx$ où $k$est un nombre réel.

30

$(E): y'' = ay' + b$

1) $z = y'$ donc $z' = y''$
D'où $(E): y'' = ay' + b \Leftrightarrow (E'): z' = az + b$
2) Les solutions de (E') sont les fonctions $t \longmapsto ke^{at} - \frac{b}{a}$où$k \in \mathbb{R}$
3) $z(t) = ke^{at} - \frac{b}{a} \Leftrightarrow y'(t) = ke^{at} - \frac{b}{a}$

$\Leftrightarrow \quad y(t) = \frac{k}{a}e^{at} - \frac{b}{a}t + c, \quad c \in \mathbb{R}$

4) $y(0) = 0 \Rightarrow \frac{k}{a} + c = 0$

$$\Rightarrow c = -\frac{k}{a}$$

$$y'(0) = 0 \Longrightarrow k - \frac{b}{a} = 0$$
$$\Longrightarrow k = \frac{b}{a}$$

Donc $c = -\frac{\frac{b}{a}}{a} = \frac{b}{a^2}$

D'où $y(t) = \frac{b}{a^2}e^{at} - \frac{b}{a}t - \frac{b}{a^2}$

31

1) On a $g(x) = \frac{1}{4}x\cos(2x) \Longrightarrow g'(x) = \frac{1}{4}\cos(2x) - \frac{1}{2}xsin(2x)$
$$\Longrightarrow g''(x) = -\frac{1}{2}\sin(2x) - \frac{1}{2}sim(2x) - xcos(2x)$$
$$\Longrightarrow g''(x) = -sim(2x) - xcos(2x)$$

Donc $g''(x) + 4g(x) = -\sin(2x) - xcos(2x) + xcos(2x)$
$$g''(x) + 4g(x) = -\sin(2x)$$
D'où g est solution de (E): $y'' + 4y = -\sin(2x)$

2) C'est la même rédaction que la question 2) de l'exercice 1.
3) . Les solutions de (E'): $y'' + 4y = 0$ sont les fonctions : $x \longmapsto$ $\mathrm{a}\cos(2x) + bsin(2x)$où$a, b \in \mathbb{R}$.
. les solutions de (E) sont les fonctions :$x \longmapsto \mathrm{a}\cos(2x) + bsin(2x) +$ $g(x)$ donc $x \longmapsto \mathrm{a}\cos(2x) + bsin(2x) + \frac{1}{4}xcos(2x)$où$a, b \in \mathbb{R}$.

32

1) (E'): $y'' - 4y = 0 \Leftrightarrow y'' = 4y$
Les solutions de (E') sont les fonctions $x \longmapsto ae^{2x} + be^{-2x}$où$a$ et b sont des réels.
2) $g(x) = \frac{4}{3}xe^{-2x} \Longrightarrow g'(x) = \left(-\frac{8}{3}x + \frac{4}{3}\right)e^{-2x}$
$$\Longrightarrow g''(x) = \left(\frac{16}{3}x - \frac{16}{3}\right)e^{-2x}$$

Donc $g''(x) - 4g(x) = -\frac{16}{3}e^{-2x} + \frac{16}{3}e^{-2x} - \frac{16}{3}e^{-2x}$

$g''(x) - 4g(x) = -\frac{16}{3}e^{-2x}$

D'où g est solution de l'équation (E): $y'' - 4y = -\frac{16}{3}e^{-2x}$

3) C'est la même rédaction que la question 2) de l'exercice 1.
4) Les solutions de (E) sont les fonctions : $x \longmapsto ae^{2x} + be^{-2x} + g(x)$

   où a et b sont des réels. C'est-à-dire $x \longmapsto ae^{2x} + be^{-2x} + \frac{4}{3}xe^{-2x}$.
5) On a : $h(0) = 0$ et $h'(0) = 0$

$$h(0) = 0 \iff a + b = 0(1)$$

$$h'(0) = 0 \iff 2a - 2b + \frac{4}{3} = 0(2)$$

   (1) et (2) entrainent $a = -\frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{3}$

   donc $h(x) = \frac{1}{3}(-e^{2x} + e^{-2x} + 4xe^{2x})$.

33

Pour modéliser la dissolution d'une substance dans l'eau, nous savons que la vitesse de dissolution est proportionnelle à la quantité non encore dissoute. Nous allons utiliser une équation différentielle pour décrire ce processus.

Etape 1: Établissons l'équation différentielle

Soit $f(t)$ la quantité de substance dissoute à l'instant t (en grammes). La quantité non encore dissoute à l'instant t est $20 - f(t)$. Selon l'énoncé, la vitesse de dissolution est proportionnelle à cette quantité non dissoute, ce qui nous donne l'équation :$\frac{df}{dt} = k(20 - f)$,où k est une constante de proportionnalité.

Étape 2: Résolution de l'équation différentielle

La solution générale de l'équation différentielle $y' = k(20 - y)$ est

$y' = k(20 - y) \iff y' = -ky + 20k$

$f(t) = 20 - Ce^{-kt}$

Étape 3:Condition initiale

À t=0, nous avons $f(0) = 0$ (aucune substance n'est dissoute).

En utilisant cette condition, on trouve C=20

Ainsi $f(t) = 20 - 20e^{-kt}$

Étape 4: Déterminons k

On sait que : $f(5) = 10 \Leftrightarrow 20 - 20e^{-5k} = 10$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{e^{-5k} = \frac{1}{2}}$$

$\Leftrightarrow k = -\frac{1}{5}ln(\frac{1}{2}) = \frac{ln2}{5}$

Étape 5: Expression finale de $f(t)$

$f(t) = 20 - 20e^{-\frac{ln2}{5}t}$

L'expression de la quantité dissoute $\boldsymbol{f(t)}$ en fonction du temps $\boldsymbol{t}$ est :

$f(t) = 20 - 20(\frac{1}{2})^{\frac{t}{5}}$

34

Pour résoudre ce problème, nous allons utiliser le modèle de croissance exponentielle. La relation qui décrit l'évolution d'une grandeur y qui croît à une vitesse proportionnelle à elle-même est donnée par l'équation différentielle :$y' = ky$ où k est une constante de proportionnalité

$\boldsymbol{k_0}$ est la valeur initiale de la grandeur à $t = 0$.

1) Résolution de l'équation différentielle

La solution générale de cette équation est : $f(x) = \boldsymbol{k_0}e^{kx}$

On sait que la grandeur double tous les dix ans. Cela signifie que : $f(10) = 2k_0$

: $f(10) = 2k_0 \Leftrightarrow k_0e^{10k} = 2k_0$, Puisque $k_0$est non nul, on a: $e^{10k} = 2$

$$\Leftrightarrow k = \frac{ln2}{10}$$

2) Relation de triplement

Cherchons le temps T nécessaire pour que y triple : on a : $f(T) = 3k_0$

$f(T) = 3k_0 \Leftrightarrow k_0e^{kT} = 3k_0$

$$\Leftrightarrow e^{kT} = \mathbf{3}$$

$$\Leftrightarrow kT = \ln(\mathbf{3})$$

En remplaçant k, on a : $\frac{ln2}{10}T = ln(3)$, donc : $T = \frac{10ln3}{ln2}$

$\boldsymbol{T \approx 15,84}$

Donc il faut environ 15,8 ans pour que la grandeur triple.

35

1) Résolution de l'équation différentielle (E), $\boldsymbol{y' + 1,38y = \ 27,6}$

L'équation différentielle donnée est : (E),$y' = -1{,}38y \ + \ 27{,}6$

La solution générale de l'équation différentielle :$f(x) = 20 + ke^{-1{,}38x}$

En utilisant la condition initiale $f(0) = 180$, on a $k = 160$

Donc la solution particulière de l'équation différentielle (E) vérifiant $f(0) = 180$ est :

$$f(x) = 20 + 160e^{-1{,}38x}$$

2) **Détermination de la température après 30 minutes**

Convertissons les 30 minutes en heures : $x = 30$ min

$x = 30 = 0{,}5\ h$

$f(0.5) = 20 + 160 \times e^{1,"8\times 0{,}5} = 20 + 160 \times 0.501 \approx 20 + 80.16 \approx 100.16$

L'arrondi au degré près, de la température de la tarte après 30 minutes est :

$f(0.5) \approx 100°C$

3) Déterminons le temps nécessaire pour atteindre une température inférieure à 25°C

$$f(x) < 25 \Leftrightarrow 20 + 160e^{-1{,}38x} < 24$$

$$\Leftrightarrow -1{,}38x < \ln(0{,}03125)$$

$$\Leftrightarrow x > 2{,}51$$

Ainsi l'arrondi, du temps nécessaire pour atteindre une température inférieure à 25°C **est** d'environ : 2,5heures

36

1) Écriture de l'équation sous la forme $y' = ay + b$

De l'équation E=R× C×$\frac{du}{dt}+u$on a : R× C×$\frac{du}{dt}=$ E$-u$

R× C×$\frac{du}{dt}=$ E$-u \Leftrightarrow \frac{du}{dt}=\frac{E}{R\times C}-\frac{1}{R\times C}u$

En posant $y=u$ on a l'équation différentielle suivante $y'=\frac{E}{R\times C}-\frac{1}{R\times C}y$

Et en posant $a=-\frac{1}{R\times C}$ et $b=\frac{1}{R\times C}$ on a l'équation différentielle suivante $y'=ay+b$

2) Résolution de cette équation

Pour $E=6V$, $R=88\,\Omega$ et $C=4\times10^{-4}F$; Ainsi $RC=88.4\times10^{-4}=0{,}0352$

On a :$a=-28{,}41$ et $b\approx 170{,}45$

Et l'equation differentielle est : $y'=-28{,}41y+170{,}45$

La solution general de cette equation diffentielle est : $y=-\frac{170}{28{,}41}+ke^{28{,}41t}$

Pour déterminer C, utilisons la condition initiale : à t=0 et y(0)=0

Donc $y(t)=-\frac{170}{28{,}41}+\frac{170}{28{,}41}e^{28{,}41t}$

3) Détermination de U_C au bout de 100 ms

$$t=100ms=0{,}1\ s$$

$$y(0{,}1)=-\frac{170}{28{,}41}+\frac{170}{28{,}41}e^{28{,}41\times0{,}1}$$

$$y(0{,}1)=-6{,}0+102{,}0=96{,}0\ V$$

Donc $U_C\approx 96{,}0\ V$

37

1) $(E)\colon v'(t)+140v(t)=10 \Leftrightarrow v'(t)=-140v(t)+10$
   Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par
   $t\longmapsto ke^{-140t}+\frac{1}{14}$ où k est un nombre réel.
2) On a $v(0)=0 \Longrightarrow k+\frac{1}{4}=0 \Longrightarrow k=-\frac{1}{4}$ donc $v(t)=-\frac{1}{14}e^{-140t}+\frac{1}{14}$.

3)
$$\lim_{t\longrightarrow+\infty} v(t) = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{14}e^{-140t}+\frac{1}{14}\right)=\frac{1}{14}$$

La vitesse $v(t)$ a une valeur limite $v_0 = \frac{1}{14}m/s$.

4) On a $v(t) = \frac{95}{100}v_0$

$$-\frac{1}{14}e^{-140t}+\frac{1}{14}=\frac{95}{100}\times\frac{1}{14}$$
$$t_1 \simeq 0{,}02\ s$$

38

1-a) $(E): y' + 0{,}062y = 0{,}038N_0e^{-0{,}038t}$

On a $y_1(t) = \frac{19}{12}N_0e^{-0{,}038t}$

donc $y'_1(t) + 0{,}062y_1(t) = \left(\frac{19}{12}N_0e^{-0{,}038t}\right)' + 0{,}062\times\frac{19}{12}N_0e^{-0{,}038t}$

$$= \frac{19}{12}N_0(-0{,}038)e^{-0{,}038t} + 0{,}062\times\frac{19}{12}N_0e^{-0{,}038t}$$
$$= \frac{19}{12}N_0e^{-0{,}038t}(-0{,}038+0{,}062)$$
$$= \frac{19}{12}N_0e^{-0{,}038t}(0{,}24)$$
$$= 0{,}038N_0e^{-0{,}038t}$$

Donc $y'_1(t) + 0{,}062y_1(t) = 0{,}038N_0e^{-0{,}038t}$

D'où $y_1(t)$ est solution de (E).

1-b) Résous cette équation comme la question 2) de l'exercice 1.

1-c) .$(E'): y' + 0{,}062y = 0 \Leftrightarrow y' = 0{,}062y$

Les solutions de (E') sont les fonctions définies sur$\mathbb{R}$ par $t \longmapsto ke^{-0{,}62t}$ où k est un nombre réel.

. Déterminons les solutions de (E)

Ce sont les fonctions : $t \longmapsto ke^{-0,62t} + \frac{19}{12}N_0e^{-0,038t}$ où k est un nombre réel.

1-d) $R(t) = ke^{-0,062t} + \frac{19}{12}N_0e^{-0,038t}$ où k est un nombre réel.

On a $R(0) = 0 \Leftrightarrow k + \frac{19}{12}N_0 = 0$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{19}{12}N_0$$

Donc $R(t) = \frac{19}{12}N_0(e^{-0,038t} - e^{-0,062t})$

39

1-a) (E_0): $y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -y$

Les solutions de (E_0) sont les fonctions : $t \longmapsto ke^{-t}$ où k est un nombre réel.

1-b) $g(t) = ke^{-0,25t}$ est une solution de l'équation (E): $y' + y = e^{-0,25t}$ équivaut à

$$(ke^{-0,25t})' + ke^{-0,25t} = e^{-0,25t}$$

$-0,25ke^{-0,25t} + ke^{-0,25t} = e^{-0,25t}$

$-0,25k + k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{4}{3}$ donc$g(t) = \frac{4}{3}e^{-0,25t}$

1-c) C'est la même rédaction que la question 2) de l'exercice 1.

1-d) Les solutions de (E) sont les fonctions : $t \longmapsto ke^{-t} + g(t)$ donc $t \longmapsto ke^{-t} + \frac{4}{3}e^{-0,25t}$

où k est un nombre réel.

1-e) Notons h cette solution.

$h(t) = ke^{-t} + \frac{4}{3}e^{-0,25t}$ et $h(0) = 20$ donc $k + \frac{4}{3} = 20 \Rightarrow k = \frac{56}{3}$

d'où $h(t) = \frac{56}{3}e^{-t} + \frac{4}{3}e^{-0,25t}$

2) $f(t) = \frac{1}{3}(56e^{-t} + 4e^{-0,25t}) = h(t)$

a) On a $$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{3}(56e^{-t} + 4e^{-0,25t}) = 0$$

b) $f'(t) = \left[\frac{1}{3}(56e^{-t} + 4e^{-0{,}25t})\right]'$, $t \in [0; +\infty[$

$$f'(t) = \frac{1}{3}(-56e^{-t} - e^{-0{,}25t})$$

c) Pour tout nombre réel t positif, on a $f'(t) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

d) Tableau de variation

t	0		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	20	$\searrow$	0

40

1) $g(t) = f(t)e^{t}$ donc $g'(t) = (f(t)e^{t})' = f'(t)e^{t} + f(t)e^{t} = (f'(t) + f(t))e^{t}$
$= ae^{-t} \times e^{t}$ car $f'(t) + f(t) = ae^{-t}$
$g'(t) = a$ où a est une constante réelle.
Donc $g(t) = at + b$ où $b \in \mathbb{R}$
On a $g(0) = 0$ donc $b = 0$
Donc $g(t) = at$

2) $g(t) = f(t)e^{t} \Rightarrow at = f(t)e^{t}$
$$\Rightarrow f(t) = ate^{-t}$$

3) a) $f(t) = 5te^{-t}$ donc $f'(t) = (-5t + 5)e^{-t}$
On a $f'(t) > 0$, pour tout t de $[0; 1[$
$f'(t) < 0$, pour tout t de $]1; +\infty[$
D'où f est strictement croissante sur $[0; 1]$ et f est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.

3) b) Le taux maximal est atteint à $t = 1\ heure$ et vaut $f(1) = 5e^{-1} = 1{,}84 g/l$

4) f est strictement decroissante sur $[1; +\infty[$

t	1	2	3	4
$f(t)$	1,84	1,35	0,74	0,36

Le taux d'alcoolémie est inferieur à $0{,}5g/l$ apres le taux maximal au bout de 4 heures.

41

1) Détermination des réels a et b

Cherchons des réels a et b tels que la fonction $u(x) = (ax + b)e^x$ soit solution de l'équation différentielle $y' - 2y = (x - 1)e^x$.

$u' - 2u = (-ax + (a - b))e^x$

On a le système suivant $\begin{cases} -a = 1 \\ a - b = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} -a = 1 \\ a - b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$, donc $u(x) = -xe^x$

2) Démontrons que v est solution de (E) si et seulement si u−v est solution de (E′)

Soit v une solution de (E). On sait que u est une solution particulière.

Si v est une solution de (E), alors : $v' - 2v = (x - 1)e^x$

On considère $w = u - v$

$w' - 2w = (u' - 2u) - (v' - 2v) = (x - 1)e^x - (x - 1)e^x = 0$

Donc Cela prouve que si v est solution de (E), alors u−v est solution de (E′).

Réciproquement, si $w = u - v$ est solution de (E′), alors :

$\mathrm{w}' - 2\mathrm{w} = 0 \Longrightarrow \mathrm{v}' - 2\mathrm{v} = (\mathrm{x} - 1)\mathrm{e}^{\mathrm{x}}$, donc v est solution de (E).

3) Déduction de toutes les solutions de (E)

Les solutions de (E) sont donc de la forme : $v(x) = -xe^x + Ce^{2x}$

où C est une constante et $-xe^x$est une solution particulière que nous avons trouvée.

4. Trouvons la solution f vérifiant $f(0) = 1$

Nous savons que :$f(x) = (-x)e^x + Ce^{2x}$, Pour $f(0) = 1 \Leftrightarrow C = 1$

$$f(x) = -xe^x + e^{2x}$$

5. Calcul de $\int_0^{ln3} f(x)dx$,

- $\int_0^{ln3} -xe^x dx$ en utilisant une intégration par parties on a :

$$\int_0^{ln3} -xe^x dx = -3ln3 + 2$$

- $\int_0^{ln3} e^{2x}dx$

$$\int_0^{ln3} e^{2x}dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{ln3} = 4$$

Donc $\int_0^{ln3} f(x)dx = -3ln3 + 6$

42

Erratum

Ecrire plutôt au Partie B -2.d)

Démontre que, pour tout x de [0 ; 1], $1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq 2$

PARTIE A

a) Résoudre l'équation différentielle (E_2) : y′−2y=0

La solution générale l'équation différentielle : y′−2y=0 est$y = Ce^{2x}$,où C est une constante réelle

b) Démontre que la fonction $u(x) = -3e^x + 2x$est solution de (E_1).

$u'(x) = -3e^x + 2$, on a :$\boldsymbol{u'(x) - 2u(x)} = 3e^x - 4x + 2$

Ainsi, $\boldsymbol{u(x)}$ est bien une solution de (E_1).

c) Démontre qu'une fonction v est solution de (E_2) si et seulement si $u + v$ est solution de (E_1).

Si v est une solution de (E_2), alors $v' - 2v = 0$

$(u+v)' - 2(u+v) = (u' - 2u) + (v' - 2v) = u' - 2u$ car $v' - 2v = 0$

Or :$u'(x) - 2u(x) = 3e^x - 4x + 2$

Ainsi $(u+v)'(x) - 2(u+v)(x) = 3e^x - 4x + 2$

Donc $u + v$ est solution de (E_1)

d) Déduis-en toutes les solutions de (E_1).

Les solutions de (E_1) peuvent être exprimées sous la forme :

$$y = u(x) + v(x) = = -3e^x + 2x + Ce^{2x}$$

e) Détermine la solution f de (E_1) telle que la courbe représentative de f admette une tangente horizontale au point d'abscisse 0.

Pour qu'il y ait une tangente horizontale à x=0, nous devons avoir $f'(0) = 0$.

$f'(x) = -3e^{x} + 2 + 2Ce^{2x}$

Pour $x = 0, f'(0) = -1 + 2C = 0$, $C = \frac{1}{2}$

$$f(x) = -3e^{x} + 2x + \frac{1}{2}e^{2x}$$

PARTIE B

1.a)Détermine les limites de $\boldsymbol{g}$ en $+\infty$ *et en* $-\infty$. Soit $g(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 3e^{x} + 2$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 2 \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

b) Montrons que la droite (D):$y = 2x$ est asymptote à la courbe (Cg).

$$\lim_{X\to+\infty} g(x) - 2x =$$

c) Étudions les variations de la fonction g

pour $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}) = e^{2x} - 3e^{x} = e^{x}(e^{x} - 3)$

x	$-\infty$	$\ln(3)$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	2 $\searrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

d) Calcule l'aire comprise entre (D), $(\boldsymbol{Cg})$ et les droites d'équation $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ et $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{ln}(\boldsymbol{2})$.

L'aire A est donnée par :

$$A = -\int_{0}^{\ln(2)} (g(x) - 2x)dx = -\int_{0}^{\ln(2)} g(x)dx + \int_{0}^{ln2} 2xdx$$

$$= -\left[\frac{1}{4}e^{2x} - 3e^{x} + 2x - x^{2}\right]_{0}^{ln2}$$

$$= \frac{9}{4} - 2ln2 + (ln2)^{2}$$

2.)

a) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^{2}}}$ et $u_{0} = \ln(2 + \sqrt{2})$

b)

$u_{1} = \int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{1+x^{2}}} dx$; en posant $x = \tan(t)$

$$u_{1} = \left[-\sqrt{1 + x^{2}}\right]_{0}^{1} = -\sqrt{2} + 1$$

c) Comparer x^{n} et x^{n+1}

Pour $x \in [0;1]$, $x^n \geq x^{n+1}$, donc u_n est décroissante

d) Montre que $1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq 2$

$x^2 \geq 0, \Leftrightarrow 1 \leq 1+x^2, \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{1+x^2}$

$x \in [0;1]$, $0 \leq x \leq 1, \Leftrightarrow \; 0 \leq x^2 \leq 1$

$$\Leftrightarrow \; 1 \leq 1+x^2 \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \; 1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$$

donc $1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$

e) Déduis-en que, pour tout entier n≥1,

$$1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}x^n \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2}}x^n dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx \leq \int_0^1 x^n dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{(n+1)} \leq \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{1}{n+1}$$

Donc $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{1}{n+1}$

La suite (u_n) est convergente car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

43

1.Déterminons une fonction polynôme $\boldsymbol{g}$ du second degré solution de (E)

On cherche une solution de la forme g(x)=ax2+bx+c $g(x) = ax^2 + bx + c$

. Pour cela, nous calculons sa dérivée :$g'(x) = 2ax + b$

En substituant $\boldsymbol{g}$ et $\boldsymbol{g'}$ dans l'équation différentielle $2y' + y = x^2 + 2x - 2$

on obtient :$ax^2 + (4a+b)x + (2b+c) = x^2 + 2x - 2$

$$ax^2 + (4a+b)x + (2b+c) = x^2 + 2x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 4a + b = 2 \\ 2b + c = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases}$$

Donc $g(x) = x^2 - 2x + 2$

2. Démontre que f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de (E′):

$\mathbf{2y' + y = 0}$

Soit f une solution de (E) signifie que :$2f' + f = x^2 + 2x - 2$

En posant $h(x) = f(x) - g(x)$, on obtient :$f(x) = h(x) + g(x)$

f est solution de (E) si et seulement si $2h'(x) + 2g'(x) + h(x) + g(x) = x^2 + 2x - 2$

Or $2g'(x) + g(x) = x^2 + 2x - 2$, on a :$2h'(x) + h(x) + x^2 + 2x - 2 = x^2 + 2x - 2$

Ainsi $2h'(x) + h(x) = 0$

Donc, h est solution de (E′).

3.Résous (E′): $2y' + y = 0$

Sa solution est de la forme : $h(x) = Ce^{-\frac{x}{2}}$,**où C est une constante.**

4.Déterminons les solutions dont la représentation graphique passe par l'origine

Pour que la solution passe par l'origine, on doit avoir $f(0) = 0$. On sait que :

$f(x) = h(x) + g(x)$=$Ce^{-\frac{x}{2}} + x^2 - 2x + 2$

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow C = -2$$

Donc $f(x) = -2e^{-\frac{x}{2}} + (x^2 - 2x + 2)$

44

1.a) Démonstration que $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ est solution de (E′)

Partons de l'équation différentielle (E):$xf'(x) - (2x + 1)f(x) = 8x^2$.

En divisant toute l'équation par x (pour $x > 0$), nous obtenons :

$$f'(x) - (2 + x1)f(x) = \frac{8x^2}{x} = 8x.$$

Posons $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Pour trouver $\boldsymbol{f(x)}$ en termes de $\boldsymbol{g(x)}$, on peut écrire :$f(x) = xg(x)$

Calculons $f'(x)$

$f'(x) = g(x) + xg'(x)$

Substituons $\boldsymbol{f(x)}$ et $f'(x)$ dans l'équation :

$$g(x) + xg'(x) = (2x + 1)g(x) = 8x$$

$xg'(x) = 2xg(x) + 8x$

Finalement, en divisant par x (pour $x > 0$, nous avons : $\boldsymbol{g'(x) = 2g(x) + 8}$.

Donc, $\boldsymbol{g'(x) = 2g(x) + 8}$ prouve que $\boldsymbol{g(x)}$est solution de (E').

b) Démontrons que si $\boldsymbol{h}$ est solution de (E'), alors $\boldsymbol{f(x) = xh(x)}$ est solution de (E).

Si h est solution de (E'), alors :$h' = 2h + 8$..

Calculons $\boldsymbol{f'(x)}$ **or** $\boldsymbol{f(x) = xh(x)}$.

$\boldsymbol{f'(x) = h(x) + xh'(x) = h(x) + 2xh(x) + 8x}$**, on a :**$\boldsymbol{f'(x) = (1 + 2x)h(x) + 8x}$.

Maintenant, substituons $\boldsymbol{f(x)}$ et $f'(x)$ dans (E)

$$\boldsymbol{xf'(x) - (2x+1)f(x) = x\big((1+2x)h(x) + 8x\big) - (2x+1)\big(xh(x)\big)}$$
$$= 8x^2.$$

Donc, $\boldsymbol{f(x)}$ est une solution de (E).

2) Résolution de (E') et solutions de (E).

L'équation différentielle (E') est :$\boldsymbol{y' = 2y + 8}$.

La solution générale de (E') est :$h(x) = -4 + Ce^{2x}$

En déduisant $\boldsymbol{f(x)}$:

$\boldsymbol{f(x) = xh(x) = x}(-4 + Ce^{2x}) = \boldsymbol{-4x} + Cxe^{2x}$.

3) Existe-t-il une fonction $\boldsymbol{f}$ solution de l'équation (E) dont la représentation graphique passe par le point $\boldsymbol{A(ln2, 0)}$?

Pour $f(ln2) = 0 \Leftrightarrow C = \frac{1}{ln2}$, donc en conclusion, oui, une telle fonction existe et elle est donnée par : $f(x) = -4x + \frac{x}{ln2}e^{2x}$.

45

Partie A

1. Démontrons l'équivalence suivantes.

On veut montrer que $f'(t) = \frac{1}{20}f(t)(3 - \ln(f(t)))$ est équivalent à

$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{ln}(f)$ vérifiant que $g'(t) = \frac{1}{20}g(t) - \frac{3}{20}$

Calculons $\boldsymbol{g'(t)}$

On sait que $\boldsymbol{g(x) = ln[f(x)]}$

$$\boldsymbol{g'(t) = \frac{f'(x)}{f(x)}}$$

$$g'(t) = \frac{1}{f(t)}\left[\frac{1}{20}f(t)(3 - \ln(f(t))\right] = \frac{1}{20}(3 - g(t))$$

Ainsi, on a : $g'(x) = \frac{1}{20}g(t) - \frac{3}{20}$

D'où les équivalences

2. Résolution de l'équation différentielle (H)

L''équation différentielle :$z' = \frac{1}{20}z - \frac{3}{20}$ est pour solution générale $z(t) = Ce^{\frac{1}{20}t} - 3$

3. Liens avec $\boldsymbol{f(t)}$

On sait que :$g(t) = ln(f(t))$, donc : $f(t) = e^{3+Ce^{\frac{1}{2à}t}}$

4. Condition initiale et expression de $\boldsymbol{f(t)}$

La condition initiale est $\boldsymbol{f(0) = 1}$ (1000 individus, exprimés en milliers) :

$$f(0) = e^{3+C} = 1 \Leftrightarrow C = -3$$

Donc : : $f(t) = e^{3-3e^{\frac{1}{2à}t}}$

a) Limite de $\boldsymbol{f}$ en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} 3 - 3e^{\frac{1}{2à}t} = -\infty$; donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^X = 0$

b) Sens de variation de f sur $[0; +\infty[$

$$f'(t) = f(t).(-\frac{3}{20}e^{\frac{1}{20}t})$$

Comme $\boldsymbol{f(t)} > 0e^{\frac{1}{20}t} > 0$, on a $f'(t) < 0$, pour tout $t > 0$, donc $f(t)$ est décroissante sur $[\mathbf{0}; +\infty[$.

c) Résolution de l'inéquation $\boldsymbol{f(t)} < 0.002$

$\boldsymbol{f(t)} < 0.002 \Leftrightarrow e^{3-3e^{\frac{1}{20}t}} < 0{,}002$

$\Leftrightarrow 3 - 3e^{\frac{1}{20}t} < \ln(0{,}002)$

$\Leftrightarrow e^{\frac{1}{20}t} > -\frac{\ln(0{,}002)-3}{3}$ on sait que $\ln(0{,}002) < 0$, on a : $-\frac{\ln(0{,}002)-3}{3} > 0$

, on a $\frac{1}{20}t > ln\left[-\frac{\ln(0{,}002)-3}{3}\right]$

$$t > 20ln\left[-\frac{\ln(0{,}002)-3}{3}\right]$$

$t > 20 \times 1{,}1239 \approx 22{,}478$

Donc, la taille de l'échantillon sera inférieure à 20 individus après environ **23 ans** (arrondi à l'année entière) à partir de 2000, donc en **2023**.

Situations d' évaluatiAinsi,

46

- Résolvons l'équation différentielle (E)
  1) $(E): y' + 0{,}05y = 0 \Leftrightarrow y' = -0{,}05y$
     Les solutions de (E) sont les fonctions : $t \longmapsto ke^{-0{,}05t}$ où$k \in \mathbb{R}$
- $f(0)$ est la concentration massique du chlore dans la piscine au moment où est déversé 1 kg(1 000 000 mg)dans la piscine.
  Donc $f(0) = \frac{1\,000\,000}{6\,000\,000} = 1{,}67mg/l$
  . $f(0) = 1{,}67 \Longrightarrow k = 1{,}67$
  Donc $f(t) = 1{,}67e^{-0{,}05t}$ avec $t \in [0; +\infty[$.

- La piscine pourra rouvrir lorsque la concentration massique du chlore $f(t)$ sera inferieure ou égale à $0{,}25 mg/l$.

  On a $f(t) \leq 0{,}25 \Leftrightarrow 1{,}67e^{-0{,}05t} \leq 0{,}25 \Leftrightarrow t \geq 37{,}98$.

  Donc la piscine pourra rouvrir au public 38 heures après le déversement accidentel de 1 kg de chlore.

47

Erratum :

Ajouter cette phrase avant la consigne :

On sait aussi qu'au bout de 15 semaines la plante mesure 0,19 m. Calcule (calcule l'on arrondira à 0,01 près)

- On a $z(t) = \frac{1}{f(t)} \Leftrightarrow f(t) = \frac{1}{z(t)}$

  f est solution de $(E) \Leftrightarrow f' = af(1-f)$; $f(0) = 0{,}1$

  $$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{z}\right)' = a\frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{z}\right) \quad ; \quad \frac{1}{z(0)} = 0{,}1$$

  $\Leftrightarrow -\frac{z\prime}{z^2} = \frac{a}{z}\left(\frac{z-1}{z}\right)$; $z(0) = 10$

  $$\Leftrightarrow -z' = a(z-1) \quad ; \quad z(0) = 10$$

  $\Leftrightarrow z' = -az + a$; $z(0) = 10$

$\Leftrightarrow z$ est solution de l'équation différentielle

$(A): y' = -ay + a$.

. Les solutions de (A) sont les fonctions : $t \longmapsto ke^{-at} + 1$ où $k \in \mathbb{R}$.

On a $z(0) = 10 \Longrightarrow k + 1 = 10 \Longrightarrow k = 9$

Donc $z(t) = 9e^{-at} + 1$

- $f(t) = \frac{1}{z(t)}$ donc $f(t) = \frac{1}{9e^{-at}+1}$.

- On a $f(15) = 0{,}19 \Longrightarrow \frac{1}{9e^{-a(15)}+1} = 0{,}19$

  $\Longrightarrow 9e^{-a(15)} + 1 = \frac{1}{0{,}19}$

$$\Longrightarrow 9e^{-a(15)} = \frac{1}{0{,}19} - 1$$

$$\Longrightarrow e^{-15a} + 1 = \frac{\frac{1}{0{,}19} - 1}{9}$$

$$\Longrightarrow a = 0{,}05$$

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{9e^{-0{,}05t} + 1} = 1$$

- $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1}{9e^{-0{,}05t}+1} = 1$

$. f'(t) = \left(\frac{1}{9e^{-0{,}05t}+1}\right)' = -\frac{(9e^{-0{,}05t}+1)'}{(9e^{-0{,}05t}+1)^2} = \frac{0{,}45e^{-0{,}05t}}{(9e^{-0{,}05t}+1)^2}$

On a $f'(t) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

- La plante rentre en production lorsque $f(t) \geq 0{,}9$.

On a $f(t) \geq 0{,}9 \Leftrightarrow \frac{1}{9e^{-0{,}05t}+1} \geq 0{,}9 \Leftrightarrow 9e^{-0{,}05t} + 1 \leq \frac{1}{0{,}9}$

$$\Leftrightarrow 9e^{-0{,}05t} \leq \frac{10}{9} - 1 \Leftrightarrow 9e^{-0{,}05t} \leq \frac{1}{9}$$

$\Leftrightarrow e^{-0{,}05t} \leq \frac{1}{81}$ $\quad \Leftrightarrow t \geq \frac{1}{0{,}05} ln81$

$$\Leftrightarrow t \geq 87{,}89$$

Donc la plante rentre en production dès la 88^e semaine soit 1 an 9 mois après le repiquage.

48

1) $(E): X'' + 100X = 0 \Leftrightarrow X'' = -100X$
   Les solutions de (E) sont les fonctions $X(t) = a\cos(10t) + bsin(10t)$ où a et b sont des réels.
2) $. X(0) = 0{,}1 \Longrightarrow a = 0{,}1$
   $. X'(t) = -10a\sin(10t) + 10bcos(10t)$ donc $X'(t) = 1 \Longrightarrow 10b = 1$
   $\Longrightarrow b = 0{,}1$

Donc $X(t) = 0{,}1(\cos(10t) + sin(10t))$

3) $X(t) = 0{,}1(\cos(10t) + sin(10t))$

$$X(t) = 0{,}1\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(10t) + \frac{\sqrt{2}}{2}sin(10t))$$

$$X(t) = 0{,}1\sqrt{2}sin\left(10t + \frac{\pi}{4}\right)$$

4) Vérification de la conservation de l'énergie mécanique
L'énergie mécanique W(t) est définie par :

$$\boldsymbol{W(t) = 0,1[X'(t)]^2 + 10[X(t)]^2}$$

Calculons X(t) et X′(t)

• $\boldsymbol{X(t) = 0,1}cos\boldsymbol{(10t) + 0,1}sin\boldsymbol{(10t)}$

•$X'(t) = -0{,}1 \times 10sin(10t) + 0{,}1 \times 10cos(10t) = 1cos(10t) - 1sin(10t)$

Calculons $[\boldsymbol{X'(t)}]^{\mathbf{2}}$

$[X'(t)]^{\mathbf{2}}$=$(cos(10t) - sin(10t))^{\mathbf{2}}$=$cos^2$(10t)−$2cos(10t)sin(10t)$+$sin^2$(10t)

=$1 - sin(20t)$

Calculons $[\boldsymbol{X(t)}]^{\mathbf{2}}$:

$[\boldsymbol{X(t)}]^{\mathbf{2}}$=$(0{,}1cos(10t) + 0{,}1sin(10t))^{\mathbf{2}}$

=$0{,}01(cos^2(10t) + 2cos(10t)sin(10t) + sin^2(10t))$

$= 0{,}01(1 + sin(20t))$

$\boldsymbol{W(t) = 0,1[X'(t)]^2 + 10[X(t)]^2} =$

=$0{,}1(1 - \sin(20t)) + 10 \times 0{,}01(1 + \sin(20t))$

$$= 0{,}1 - 0{,}1sin(20t) + 0{,}1 + 0{,}1sin(20t) = 0{,}2$$

Ainsi, W(t)=0,2 est constante pour tout t.

Leçon

10

Probabilités conditionnelles et variables aléatoires

Situation d'Apprentissage

Faire deux lectures de la situation d'apprentissage par deux apprenants.
Recenser et expliquer les données pertinentes.
Poser les questions ou consignes suivantes :

Question/Consignes pour dérouler la situation	**Réponse attendue**
De quel évènement s'agit-il ?	Il s'agit des festivités de fin d'année d'une école
Pendant ces festivités qu'a fait le sponsor ?	Sponsor de l'évènement, propose un jeu aux élèves. Le jeu est dénommé « Roue de la loterie ».
A quoi consiste ce jeu ?	La roue a plusieurs secteurs avec les probabilités suivantes : Rouge ; blanc et vert. « On fait tourner la roue devant un repère fixe ; chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant ce repère. Si le secteur repéré est rouge, le joueur gagne 1500F, s'il est blanc il perd 1000F, s'il est vert il lance une seconde fois la roue. Si le secteur repéré est rouge, le joueur gagne 800F, s'il est blanc il perd 250F et s'il est vert, le joueur ne gagne rien et ne perd rien.
Quelles sont les intentions des élèves ?	Les élèves d'une classe de Terminale veulent jouer au jeu.
Quelle a été la réaction d'un élève ?	Un élève dissuade les autres, estimant que le jeu n'est pas profitable.
Quelle décision collective ont-ils prise ensemble	Ils veulent déterminer le gain algébrique d'un joueur à l'issue d'une partie pour éviter les pertes
Quel est l'objectif de cette décision	Ils veulent évaluer les attentes de gains et de pertes du jeu

Dans cette leçon, nous allons apprendre à connaitre la définition d'une probabilité conditionnelle, d'une variable aléatoire, d'une épreuve et d'un schéma Bernoulli, de calculer la probabilité d'un évènement en utilisant la formule des probabilités totales, de calculer l'Esperancemathématique, la variance et l'écart type d'une variable aléatoire donnée, de calculer la probabilité d'obtenir k succès dans une suite de n épreuves de Bernoulli, de justifier que deux évènements dont indépendants, de déterminer la loi de probabilité.
Ce que nous allons apprendre va vous permettre de résoudre beaucoup de problèmes dans la vie. C'est pourquoi je vous demande de bien suivre.

Nous allons travailler ensemble selon le plan suivant :
1) Probabilités conditionnelles

2) Variable aléatoire
3) Loi Binomiale

Installation des habiletés

Activités 1 **Probabilités conditionnelles**

1.1 Définition d'une probabilité conditionnelle

Erratum 35 élèves sont des garçons et 07 garçons ont 17 ans.

	Garçons	Filles	Total
Avoir 17 ans	07	15	22
Ne pas avoir 17 ans	28	02	30
Total	35	17	52

Soit : A : « l'élève a 17 ans», B : « l'élève est un garçon» .

1) A partir du tableau, on déduit que $(A) = \frac{22}{52}$, $P(B) = \frac{35}{52}$.
2) L'évènement A ∩ B : « L'élève est un garçon et a 17 ans » et on a $P(A \cap B) = \frac{7}{52}$.
3) On sait que l'élève est un garçon, et la probabilité qu'il ait 17 ans est $P' = \frac{7}{35} = \frac{1}{5}$
4) On a : $\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{17/52}{35/52} = \frac{1}{5} = P'$.

Exercices de fixation

1) Faux ; 2) Vrai ; 3) Faux

1.1.2

Soient les évènements V : « avoir un véhicule au panneau stop » et H : « être un homme »

$$P_V(H) = \frac{P(H\cap V)}{P(V)} = \frac{1}{27} : \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

1.1.3

Soit E et F deux évènements d'un univers Ω de probabilités non nulles.

1) Calcule la probabilité conditionnelle $P_E(\overline{E})$de E sachant $\overline{E}$.

$$P_E(\overline{E}) = \frac{P(E\cap \overline{E})}{P(E)} = 0 \; car \; card(E\cap \overline{E}) = \emptyset$$

2) Supposons que $E \subset F$.

$$P_E(F) = \frac{P(E\cap F)}{P(E)} = \frac{\frac{card(E\cap F)}{card(\Omega)}}{P(E)} = \frac{\frac{card(E)}{card(\Omega)}}{P(E)} = \frac{P(E)}{P(E)} = 1$$

1.2 Evènements indépendants

On considère un jeu de 32 cartes. On tire au hasard une carte et on note la figure obtenue.

Soient les évènements : A : « la carte tirée est une Dame » et B : « la carte tirée est un cœur ».

Soit Ωl'univers associé à cette expérience aléatoire et P la probabilité sur Ω.

1) On a : $P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$, $P(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{32}$.
2) Calcule $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/32}{1/4} = \frac{1}{8}$ et $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/32}{1/8} = \frac{1}{4}$.
3) On a : $P(A) = P_B(A) = \frac{1}{8}$ et $P(B) = P_A(B) = \frac{1}{4}$.
4) On a : $P(A) \times P(B) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32} = P(A \cap B)$.
5) On a : $P(\overline{A}) = \frac{7}{8} = P_B(\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{7}{8}$ et $P(\overline{B}) = \frac{3}{4} = P_A(\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(A)}$.
6) On a : $P(\overline{A}) = P_{\overline{B}}(\overline{A})$.

Exercices de fixation

1.2.1

$\Omega = \{(F, F),(F, G),(G, F),(G, G)\}$ (équiprobabilité)

$A = \{(F, G),(G, F)\} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $B = \{(F, G),(G, F),(G, G)\} \Rightarrow P(B) = \frac{3}{4}$;

$A \cap B = A \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{2} \neq P(A)P(B) \Rightarrow$ A et B ne sont pas indépendants

1.2.2

On a alors $A \cap B$: « obtenir un valet de carreau ou une dame de carreau ou un roi de carreau ».

On a $(A \cap B) = \frac{3}{32}$.

De même $P(A) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$ et $(B) = \frac{1}{4}$.

On a $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$, les évènements sont donc indépendants.

1.2.3

On a : $P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{1}{3}$ *et* $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

On voit que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ donc les événements A et B sont indépendants.

1.2.4

$$P(A) = \frac{5}{36} \; ; \; P(B) = \frac{18}{36} \; et \; P(A \cap B) = \frac{2}{36}$$

$$P(A) \times P(B) = \frac{5}{36} \times \frac{18}{36} = \frac{5}{72}$$

Les événements A et B ne sont pas indépendants.

1.2.5

1) Les évènements R et I sont-ils indépendants?

On est dans une situation d'équiprobabilité

$$P(I) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \quad et \quad P_R(I) = \frac{2}{3}$$

$P(I) = P_R(I)$ donc I et R sont indépendants.

2) Les évènements B et I sont-ils indépendants?

$$P(I) = \frac{2}{3} \quad et \quad P_B(I) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$P(I) \neq P_B(I)$ donc I et B ne sont pas indépendants.

1.2.6

On a le tableau suivant :

	J	$\bar{J}$	Total
T	4	28	32
$\overline{T}$	8	56	64
Total	12	84	96

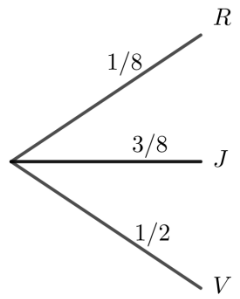
1) $P(J \cap T) = \frac{4}{96} = \frac{1}{24}$ et $P(J) \times P(T) = \frac{12}{96} \times \frac{32}{96} = \frac{1}{24}$ donc J et T sont des évènements indépendants.
2) $P(J \cap \overline{T}) = \frac{8}{96} = \frac{1}{12}$ et $P(J) \times P(\overline{T}) = \frac{12}{96} \times \frac{64}{96} = \frac{1}{12}$ donc J et $\overline{T}$ sont des évènements indépendants.

1.3 Arbre de probabilité ou pondéré

On considère une urne contenant 8 boules indiscernables au toucher : une rouge, trois jaunes et quatre vertes. On tire une boule au hasard. Considérons les évènements :

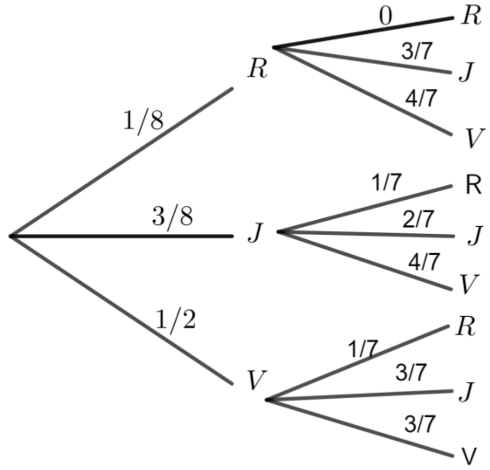
R : « obtenir une boule rouge » ; J : « obtenir une boule jaune » et V : « obtenir une boule verte ».

1) $P(R) = \frac{1}{8}$; $P(J) = \frac{3}{8}$ et $P(V) = \frac{1}{2}$.
2) Fais un arbre de choix et écris les probabilités obtenues



$$\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = 1$$

3) On tire encore une boule au hasard sans remise de la première boule tirée dans l'urne.
   a) $P_R(R) = 0$; $P_R(J) = \frac{3}{7}$ et $P_R(V) = \frac{4}{7}$.
   $P_J(R) = \frac{1}{7}$; $P_J(J) = \frac{2}{7}$ et $P_J(V) = \frac{4}{7}$ / $P_V(R) = \frac{1}{7}$; $P_V(J) = \frac{3}{7}$ et $P_V(V) = \frac{3}{7}$.
   b) Complète l'arbre de choix puis les probabilités obtenues à la question 3-a) sur les branches de l'arbre.



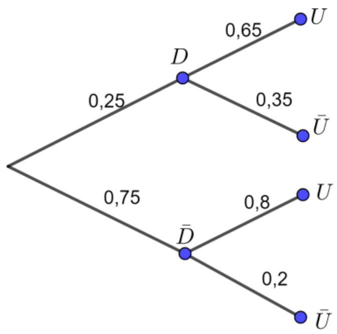
4) Fais la somme des probabilités des trois branches issues de R ; issue de J ; issue de V.

$$P_R = 0 + \frac{3}{7} + \frac{4}{7} = 1 \quad ; \quad P_J = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{4}{7} = 1 \quad ; \quad P_V = \frac{1}{7} + \frac{3}{7} + \frac{3}{7} = 1$$

Exercices de fixation

1.3.1

On a l'arbre suivant :



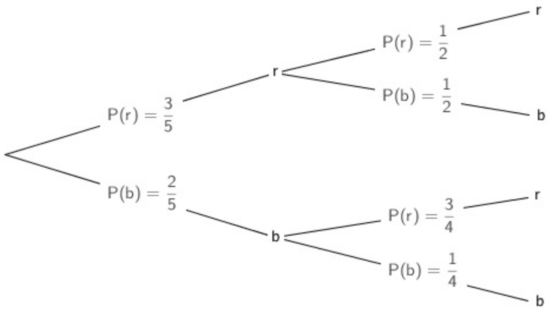
1.3.2

1) Donne : $P(R_1) = \frac{3}{5}$; $P(R_2/V_1) = \frac{3}{5}$;$P(R_2/R_1) = \frac{3}{5}$; $P(V_2/R_1) = \frac{2}{5}$

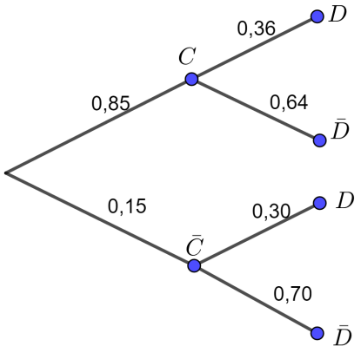
2) $P(R_1 \cap V_2) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$; $P(V_1 \cap V_2) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$

1.3.3

Représentons cette expérience dans un arbre pondéré.

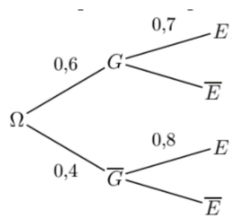


1.3.4



1.4 Formule des probabilités totale

L’arbre de probabilité ci-contre représente une situation de probabilité dans un univers Ω.



1) $P(G \cap E) = P_G(E) \times P(G) = 0{,}7 \times 0{,}6 = 0{,}42$;
   $P(\overline{G} \cap E) = P_{\overline{G}}(E) \times P(\overline{G}) = 0{,}8 \times 0{,}4 = 0{,}32.$
2) Puisque G et $\overline{G}$ forment une partition de Ω, alors $E = (G \cap E) \cup (\overline{G} \cap E)$,

$$P(E) = P(G \cap E) + P(\overline{G} \cap E) = 0{,}42 + 0{,}32 = 0{,}74$$

Exercices de fixation

1.4.1

1) B ; 2) C ; 3) A ; 4) B ; 5) A ; 6) C.

1.4.2

D’après la formule des probabilités totales,

$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$$
$$P(B) = 0{,}4 \times 0{,}3 + 0{,}6 \times 0{,}1 = 0{,}18$$

1.4.3

Soient les évènements A : « Avoir un accident » et J : « être un jeune conducteur ».
D’après la formule des probabilités totale,

$$P(A) = P(J) \times P_J(A) + P(\bar{J}) \times P_{\bar{J}}(A)$$
$$P(A) = 0{,}4 \times 0{,}3 + 0{,}2 \times 0{,}7 = 0{,}26$$

1.4.4

On dispose de 3 urnes U_1, U_2, U_3, chacune contient 10 boules; parmi elles, U_1 contient 1 blanche, U_2 contient 2 blanches, et U_3 contient 6 blanches. On tire au hasard une boule.
Quelle est la probabilité d'obtenir une blanche?
Soient les événements B : « on obtient une boule blanche » et U_i : « on tire la boule dans l'urne U_i ».
$\{U_1,U_2,U_3\}$ est un système complet d'événements, et :

$$P(B) = P(U_1) \times P_{U_1}(B) + P(U_2) \times P_{U_2}(B) + P(U_3) \times P_{U_3}(B)$$

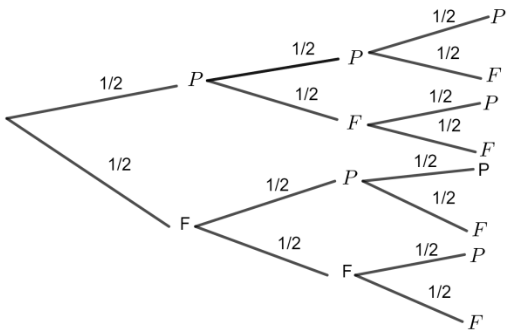
$$P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{6}{10} = \frac{3}{10}$$

Activités 2 Variable aléatoire

2.1 Variable aléatoireet loi de probabilité

Un joueur lance trois fois de suite une pièce de monnaie parfaitement équilibrée.
Pour chaque lancer, le joueur gagne 100 F s'il obtient « pile » et on perd 50 F s'il obtient « face ».
Alidou, après avoir pris connaissance des règles, joue à une partie de trois lancers.

1) Arbre de choix



$$\Omega = \{PPP; PPF; PFP; PFF; FPP; FPF; FFP\ ; FFF\}$$
$$card\ (\Omega) = 2^3 = 8$$

2) Les gains possibles d'Alidou.

ω	PPP	PPF	PFP	FPP	PFF	FPF	FFP	FFF
gains	300	150	150	150	0	0	0	-150

$$X(\Omega) = \{-150; 0; 150; 300\}$$

3) Pour chaque éventualité ω de Ω, on note $X(\omega)$le gain algébrique d'Alidou associé à ω.

a) Détermine les éventualité ω pour lesquelles, $X(\omega) = 150$.

L'ensemble de ces éventualités est noté : $(X = 150)$.

$$(X = 150) = \{PPF; PFP; FPP\}$$

b) Calcule $P(X = 150)$.

$$P(X = 150) = \frac{card(X = 150)}{Card(\Omega)} = \frac{3}{8}$$

c) Détermine pour chaque valeur k prise par X, la probabilité $P(X = k)$.

$$P(X = -150) = \frac{card(X = -150)}{Card(\Omega)} = \frac{1}{8}\ ;\ P(X = 0) = \frac{card(X = 0)}{Card(\Omega)} = \frac{3}{8};$$

$$P(X = 300) = \frac{card(X = 150)}{Card(\Omega)} = \frac{1}{8}$$

x_i	-150	0	150	300	$Total$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Exercices de fixation

2.1.1

Soit X une variable aléatoire sur un univers Ω.

1) Faux ; 2) Vrai ; 3) Faux ; 4) Vrai ; 5) Faux ;6) Faux

2.1.2

1) Donne l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X.

$$X(\Omega) = \{19; 23; 25; 28; 33\}$$

2) Etablis la loi de probabilité de X.

x_i	19	23	25	28	33
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{19}$	$\frac{8}{19}$	$\frac{2}{19}$	$\frac{5}{19}$	$\frac{1}{19}$

2.1.3

y_i	-100	0	100	200	300
$P(Y = y_i)$	0,30	0,15	0,25	0,20	0,10

2.2 Fonction de répartition

Soit X la variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x_i	-1	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,2	0,3	0,10	0,2	0,20

1) Ecris les évènements suivants comme la réunion de plusieurs évènements

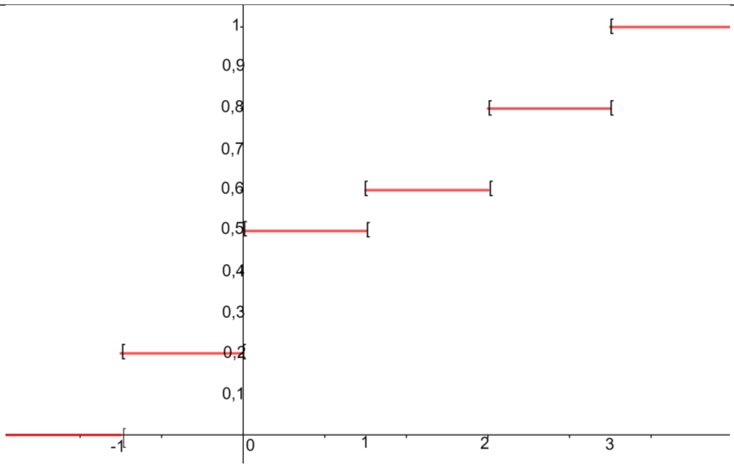
$$(X \leq 0) = (X = -1) \cup (X = 0); \quad (X \leq 1) = (X = -1) \cup (X = 0) \cup (X = 1);$$
$$(X \leq 2) = (X = -1) \cup (X = 0) \cup (X = 1) \cup (X = 2);$$
$$(X \leq 3) = (X = -1) \cup (X = 0) \cup (X = 1) \cup (X = 2) \cup (X = 3)$$

2) Calcule la probabilité des évènements ci-dessus.

$$P(X \leq 0) = P(X = -1) + P(X = 0) = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5;$$
$$P(X \leq 1) = P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}6$$
$$P(X \leq 2) = P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}8$$
$$P(X \leq 3) = P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$$

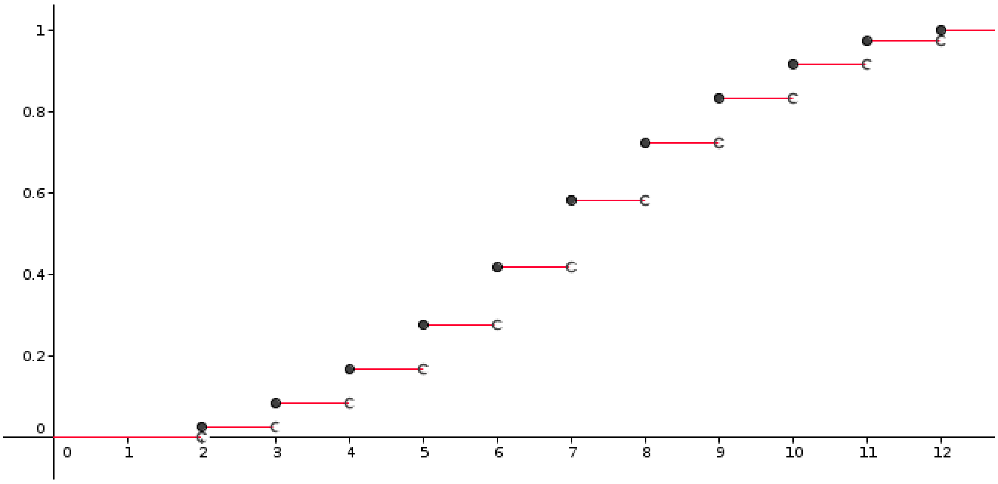
3) Représente dans un repère orthonormé (O ; I ; J) ; la courbe de la fonction de la fonction

$$F: x \mapsto P(X \leq x).$$



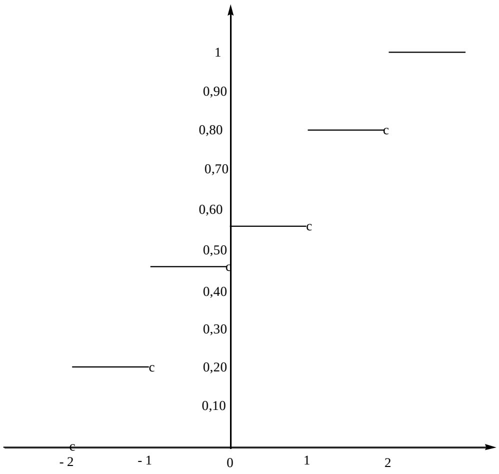
Exercices de fixation

Erratum : Pour l'exercice 2-2-2 prendre en compte le graphique ci-dessous

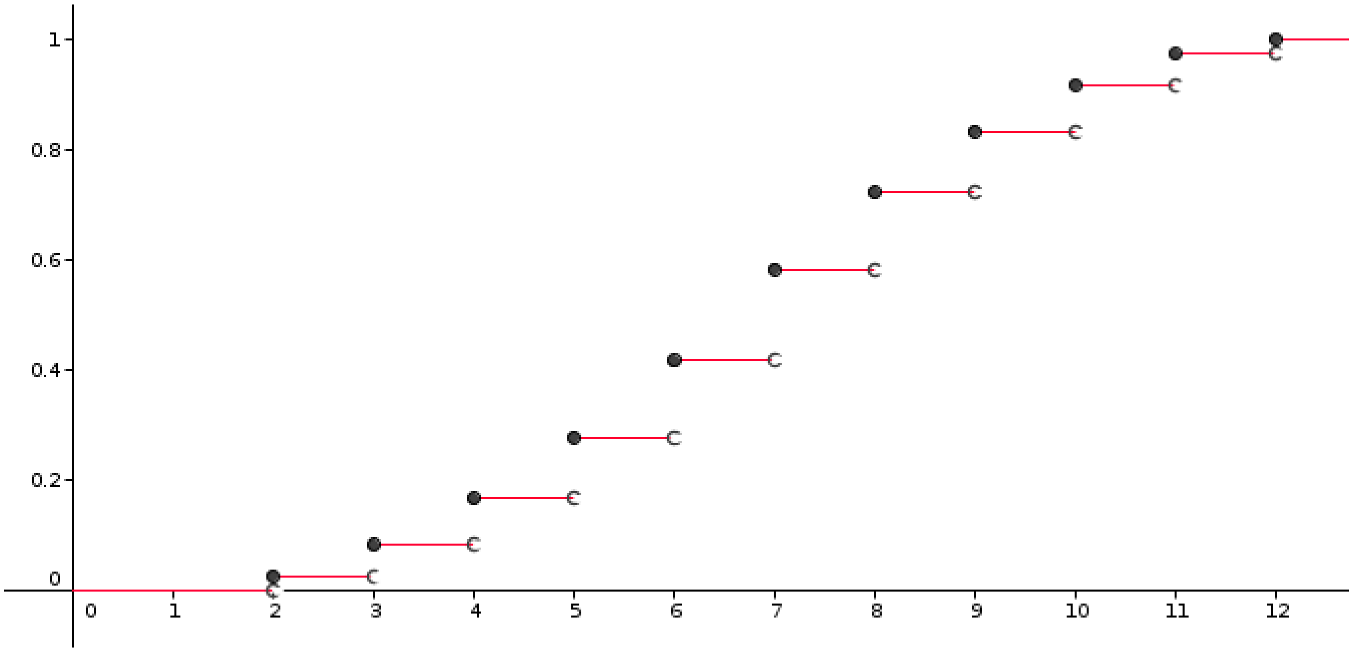


2.2.1

1) Définis la fonction de répartition F.
   - Pour $x < -2, F(x) = 0$;
   - Pour $-2 \leq x < -1, F(x) = 0{,}20$;
   - Pour $-1 \leq x < 0, F(x) = 0{,}20 + 0{,}25 = 0{,}45$;
   - Pour $0 \leq x < 1, F(x) = 0{,}45 + 0{,}10 = 0{,}55$;
   - Pour $1 \leq x < 2, F(x) = 0{,}55 + 0{,}25 = 0{,}80$;
   - Pour $2 \leq x, F(x) = 0{,}80 + 0{,}20 = 1$.
2) Représentation graphique



2.2.2



1) La fonction de répartition F de Z.

- Pour $x < 2, F(x) = 0$;
- Pour $2 \leq x < 3, F(x) = 0,02$;
- Pour $3 \leq x < 4, F(x) = 0,06$;
- Pour $4 \leq x < 5, F(x) = 0,16$;
- Pour $5 \leq x < 6, F(x) = 0,3$;
- Pour $6 \leq x < 7, F(x) = 0,4$.
- Pour $7 \leq x < 8, F(x) = 0{,}7$;
- Pour $8 \leq x < 9, F(x) = 0,9$;
- Pour $9 \leq x < 10, F(x) = 0,95$;
- Pour $10 \leq x < 11, F(x) = 0{,}98$;
- Pour $11 \leq x < 12, F(x) = 0{,}99$;
- Pour $12 \leq x, F(x) = 1$.

2) Détermine la loi de probabilité de Z.

2.3 -Espérance d'une variable aléatoire

Un casino propose le jeu suivant : le joueur mise 16 euros, lance un dé bien équilibré et la banque lui rembourse le carré du nombre obtenu. On veut savoir si ce jeu est-il avantageux pour le joueur.
Désignons par X le gain, en Francs, du joueur pour une partie.

1) On a : Ω={1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6} et $X(\Omega) = \{-15; -11; -7; 0; 9; 20\}$.
2) La loi de probabilité de X.

x_i	-15	-11	-7	0	9	20
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

3) Le gain moyen par partie du joueur est

$$\frac{-15-11-7+0+9+20}{6} = -0{,}66$$

Le joueur peut-il espérer perdre -0,66€ par partie.

4) On a :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = -15 \times \frac{1}{6} - 11 \times \frac{1}{6} - 7 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{1}{6} + 9 \times \frac{1}{6} + 20 \times \frac{1}{6} = -0{,}66;$$

On constate que le nombre $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ est le gain moyen par partie du joueur.

Exercices de fixation

2.3.1

1) Complétons le tableau.

x_i	-1	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,2	0,3	0,10	0,2	0,20
$x_i P(X = x_i)$	-0,2	0	0,10	0,4	0,6

2) Calculons l'espérance mathématique E(X).

$$E(X) = -0{,}2 + 0 + 0{,}10 + 0{,}4 + 0{,}6 = 0{,}9$$

2.3.2

Calculons l'espérance mathématique de X.

$$E(X) = -2 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{16} + 7 \times \frac{5}{16} = \frac{3}{8}$$

2.3.3

Calculons E(Y).

$$E(Y) = -500 \times 0{,}25 + (-300) \times 0{,}51 + 200 \times 0{,}1 + 800 \times 0{,}14 = -146$$

1. Interpréter ce résultat.

$E(Y) = -146 < 0$ donc le jeu est désavantageux pour le joueur.

2.4 Variance et écart-type d'une variable aléatoire

Erratum : **Dans la consigne 2.b) écrire plutôt** $V(X) = \left(p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + p_3x_3^2 + p_4x_4^2\right) - [E(X)]^2$ ***au lieu de*** $V(X) = \left(p_1x_1^2 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4\right) - [E(X)]^2$

Soit X la variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x_i	-2	0	2	4
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

1) Calcule l'espérance mathématique E(X).

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i = -2 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

2.a) Calculons le nombre :$V_1(X) = \left(-2 - \frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} + \left(0 - \frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{3}{8} + \left(2 - \frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{8} + \left(4 - \frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} = \frac{79}{16}$.

b) Calculons le nombre : $V_2(X) = \left(\frac{1}{4} \times (-2)^2 + \frac{3}{8} \times 0^2 + \frac{1}{8} \times 2^2 + \frac{1}{4} \times 4^2\right) - (\frac{3}{4})^2 = \frac{79}{16}$

c) On a : $V_1(X) = V_2(X)$

2) L'écart-type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{79}{16}} = \frac{\sqrt{79}}{4}$.

Exercices de fixation

2.4.1

Le tableau ci-dessous donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X associée à une expérience aléatoire.

x_i	-3	0	2	3	8
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$

Calculons d'abord E(X)

$$E(X) = -3 \times \frac{1}{5} + 0 \times \frac{1}{15} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{4}{15} + 8 \times \frac{2}{15} = \frac{29}{15}$$

Calcule la variance et l'écart-type de X.

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - E(X)\right)^2 p_i = \left(x_1 - E(X)\right)^2 p_1 + \left(x_2 - E(X)\right)^2 p_2 + \ldots + \left(x_n - E(X)\right)^2 p_n$$

Autrement $V(X) = (p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + \ldots + p_nx_1^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$.

Calculons $V(X) = (p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + \ldots + p_nx_1^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 =$

$$V(X) = \left(\frac{1}{5} \times (-3)^2 + \frac{1}{15} \times (0)^2 + \frac{1}{3} \times (2)^2 + \frac{3}{15} \times (3)^2 + \frac{2}{15} \times (8)^2\right) - \left(\frac{29}{15}\right)^2 = \frac{106}{15} - \left(\frac{29}{15}\right)^2 = \frac{749}{225}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{749}{225}} = \frac{\sqrt{749}}{15}$$

2.4.2

L'espérance d'une variable aléatoire Y est 24 et celle de Y^2 est 601.

La variance

$V(Y) = E(Y^2) - \left(E(Y)\right)^2 = 601 - 24^2$=25

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{25} = 5$

Activités 3

Loi binomiale

3.1 Epreuve et schéma de Bernoulli

1) On lance une fois une pièce de monnaie équilibrée. On a 2 résultats possibles : Pile (P) ou Face (F)

2) On lance 5 fois de suite cette même pièce de monnaie.

a) On a $2^5 = 32$ résultats possibles.

b) On peut dire qu'on 5 fois la première expérience, qui est aléatoire et indépendante pour obtenir cette expérience.

Exercices de fixation

3.1.1

Pour chacune des épreuves suivantes, indique s'il s'agit d'une épreuve de Bernoulli :

1. On tire une carte dans un jeu de 52 cartes.

- **On vérifie que la carte est un as** ; Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli de succès « La carte est un as. »
- **On vérifie que la carte est une figure (roi, dame ou valet)** ; Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli de succès « La carte est une figure. »
- **On regarde la couleur de la carte (pique, cœur, carreau ou trèfle)** ; Quatre issues sont possibles. Ce n'est pas une épreuve de Bernoulli.
- **On regarde si la carte n'est pas un pique** ; Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli de succès « La carte n'est pas un pique. »
- **On vérifie que la carte est un pique** ; Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli de succès « La carte est un pique. ».
- **On regarde la valeur de la carte (as, 2, 3, etc.) :** Treize issues sont possibles. Ce n'est pas une épreuve de Bernoulli.

2. Dans un parking, on regarde au hasard une des voitures stationnées :

- **On regarde si le véhicule est électrique ;**Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli de succès « La voiture est électrique. »

- **On regarde la couleur du véhicule ;** plusieurs issues sont possibles. Ce n'est pas une épreuve de Bernoulli.
  - **On vérifie si l'immatriculation se termine par un Z** ; Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli de succès « L'immatriculation se termine par un Z. »
  - **On regarde la longueur du véhicule en centimètre** : plusieurs issues sont possibles. Ce n'est pas une épreuve de Bernoulli.
  - **On regarde si la longueur du véhicule est inférieure ou égale à 450 centimètres** : Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli de succès « la longueur du véhicule est inférieure ou égale à 450 centimètres. »

3.1.2

Epreuves de Bernoulli : « obtenir 2 » ; « obtenir 4 » ;
Pas épreuves de Bernoulli : « obtenir un chiffre différent de 3 » ; « obtenir un chiffre plus petit que 5 »

3.1.3

Pour chacun des événements ci-dessous, préciser si un schéma de Bernoulli peut modéliser l'expérience. On effectue dix tirages avec remise d'une boule dans une urne contenant trois boules rouges, quatre boules noires et une boule verte, toutes indiscernables au toucher. On regarde la couleur des boules tirées.

- La première boule tirée est verte : schéma de Bernoulli
- On a obtenu exactement trois boules noires : schéma de Bernoulli
- La cinquième boule tirée est rouge : schéma de Bernoulli
- C'est au cinquième tirage qu'on a tiré une boule noire pour la première fois : pas schéma de Bernoulli
- On a obtenu au plus cinq boules rouges : pas schéma de Bernoulli.

3.1.4

Pour chaque cas ci-dessous, justifie que cette expérience aléatoire correspond bien à une épreuve de Bernoulli en précisant le succès et la probabilité de celui-ci.

Cas 1 : Au début d'un jeu de mémoire, seize cartes sont placées face cachée sur une table.
Jennifer retourne une carte qui montre un palmier. Elle sait qu'une autre carte (et seulement une) représente un palmier. Elle doit donc, au hasard, retourner une seconde carte pour espérer retrouver un palmier.

L'épreuve consistant à retourner une autre carte et regarder si l'évènement A : « la carte montre un palmier » est réalisé ou non comporte 2 issues : "A est réalisé" (Succès) avec une probabilité $P(A) = \frac{1}{15}$ et "A n'est pas réalisé" (Echec).

Cas 2 : Dans un jeu télévisé, un candidat doit piocher au hasard une boule dans une urne
contenant 20 boules indiscernables au toucher dont une seule est noire. Le candidat perd s'il pioche la boule noire.

L'épreuve consistant à piocher au hasard une boule dans l'urne et regarder si l'évènement A : « la boule est noire » est réalisé ou non comporte 2 issues : "A est réalisé" (Succès) avec une probabilité $P(A) = \frac{1}{20}$et "A n'est pas réalisé" (Echec).

Cas 3 : Gérard possède cinq cartes de fidélité de magasins différents dans sa poche. Ces cinq cartes ont toutes le même format et sont indiscernables au toucher.
Au moment du passage en caisse dans un de ces magasins, il choisit au hasard une carte de fidélité.

L'épreuve consistant à choisir au hasard une carte de fidélité de sa poche et regarder si l'évènement A : « la carte est gagnante» est réalisé ou non comporte 2 issues : "A est réalisé" (Succès) avec une probabilité $P(A) = \frac{1}{5}$et "A n'est pas réalisé" (Echec).

3.2 Loi binomiale

Soit une suite finie de n expériences aléatoires identiques 1,2,...,n, indépendantes deux à deux ayant chacune deux issues possibles : un évènement A se réalise (succès) ou ne se réalise pas (échec). Notons p la probabilité de l'évènement A.

1) Quelle est la probabilité de l'évènement $\overline{A}$.

$$P(\overline{A}) = 1 - p$$

2) A_k l'événement "A se réalise exactement k fois durant les n expériences".

a) Justifie qu'il y a C_n^k façons de placer les k évènements A parmi les n expériences aléatoires.

L'évènement A_k peut se réaliser de plusieurs manières chacune deux à deux incompatibles, par exemple A peut se réaliser durant les k premières expériences aléatoires et ne pas se réaliser durant les n - k dernières expériences aléatoires.
Il y a donc C_n^k façons de " placer " les k évènements A parmi les n expériences aléatoires.

b) Puisque les expériences sont indépendantes, quelle est la probabilité de l'une de ses façons ?

La probabilité de l'une de ses façons est : $P(A)^k P(\overline{A})^{n-k} = p^k(1-p)^n - k$

c) Justifie que la probabilité de A_k est $P(X = k) = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$.

Puisqu'il y a C_n^k façons de " placer " les k évènements A parmi les n expériences aléatoires, on a :

$$P(A_k) = P(X = k) = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

d) Sachant que $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, démontre que $E(X) = np$.

$$P(X = k) = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k} \quad ,k \in \{0; 1; 2; \dots ; n\}$$

On a :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \times P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} k \times C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k \times \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \times p^k \times (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \times \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \times p^k \times (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \times p^{k-1} \times (1-p)^{n-k}$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} \times p^{k-1} \times (1-p)^{n-k}$$

$$= np \sum_{i=0}^{n-1} C_i^{k-1} \times p^i \times (1-p)^{n-(i+1)} \; (on\ a\ posé\ i = n-1)$$

$$= np\sum_{i=0}^{n-1} C_i^{k-1} \times p^i \times (1-p)^{n-(i+1)} == np\sum_{i=0}^{n-1} C_i^{k-1} \times p^i \times (1-p)^{(n-1)-i}$$

$$E(X) = np$$

$$= np\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}p^i q^{(n-1)-i} = np \times 1 = np$$

L'espérance E(X) de X vaut : $E(X) = P(X=1)\times 1 + P(X=0)\times 0 = p\times 1 + (1-p)\times 0 = p.$

La variance V(X) de X vaut : $V(X) = P(X=1)\times\left(1-E(X)\right)^2 + P(X=0)\times\left(0-E(X)\right)^2$

$$= p\times(1-p)^2 + (1-p)\times(0-p)^2$$
$$= p(1-p)2 + p2(1-p)$$
$$= p(1-p)(1-p+p)$$
$$= p(1-p).$$

Exercices de fixation

3.2.1

- **Exp 1** : On jette un dé équilibré 10 fois de suites et on considère la variable aléatoire X qui compte le nombre de réalisations de l'évènement A : "Obtenir 5 ou 6".

L'épreuve consistant à tirer le dé et regarder si l'évènement A est réalisé ou non comporte 2 issues : "A est réalisé" (Succès) et "A n'est pas réalisé" (Echec).

- On répète cette épreuve à l'identique et de manière indépendante.
- X compte le nombre de succès, c'est à dire le nombre de réalisations de l'évènement A.

Par ailleurs,

- Comme le dé est équilibré, P(A)=1/6+1/6=1/3. On en déduit que p=1/3.
- On répète l'épreuve 10 fois donc n=10.

Par conséquent, X suit la loi binomiale de paramètres p=1/3 et n=10.

- **Exp 2** : Un QCM est composé de 5 questions et chacune d'elle comporte 3 réponses au choix A, B ou C dont une seule est correcte. Poka décide de répondre au hasard à toutes les questions.
  On considère la variable aléatoire X donnant le nombre de bonnes réponses de Poka.

L'épreuve consistant à répondre au hasard à toutes les questions si l'évènement A : « La réponse est exacte » est réalisé ou non comporte 2 issues : "A est réalisé" (Succès) et "A n'est pas réalisé" (Echec).

- On répète cette épreuve à l'identique et de manière indépendante.
- X compte le nombre de succès, c'est à dire le nombre de réalisations de l'évènement A.

Par ailleurs,

- Comme les réponses sont données au hasard, P(A)=1/3.
- On répète l'épreuve 5 fois donc n=5.

Par conséquent, X suit la loi binomiale de paramètres p=1/3 et n=5.

- **Exp 3** : Une entreprise fabrique en grande quantité des médailles circulaires en argent. Un contrôle de qualité consiste à vérifier que le diamètre et l'épaisseur sont conformes. On suppose que la probabilité pour qu'une pièce prélevée au hasard soit conforme est égale à 0,9. Soit X la variable aléatoire, qui à tout échantillon de 10 pièces associe le nombre de pièces conformes.

L'épreuve consistant à répondre au hasard à toutes les questions si l'évènement A : « La pièce est conforme » est réalisé ou non comporte 2 issues : "A est réalisé" (Succès) et "A n'est pas réalisé" (Echec).
- On répète cette épreuve à l'identique et de manière indépendante.
- X compte le nombre de succès, c'est à dire le nombre de réalisations de l'évènement A.

Par ailleurs,
- Comme les pièces sont prélevées au hasard, on a : P(A)=0,9.
- On répète l'épreuve 10 fois donc n=10.

Par conséquent, X suit la loi binomiale de paramètres p=0,9 et n=10.

3.2.2

La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n=4 et p=0,32.

1) Les valeurs prises par X sont 1 ;2 ; 3 et 4.
2) Calculons P(X=0) et P(X=2).

$$P(X = 0) = C_4^0 \times (0{,}32)^0 \times (0{,}68)^4 = 0{,}214$$
$$P(X = 2) = C_4^2 \times (0{,}32)^2 \times (0{,}68)^{4-2} = 0{,}284$$

3) Calculons l'espérance E(X), la variance V(X) et l'écart-type $\sigma(X)$ de la variable X.

Espérance $E(X) = 4 \times 0{,}32 = 1{,}28$

Variance $V(X) = 4 \times 0{,}32 \times 0{,}68 = 0{,}8704$

Ecart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0{,}8704} = 0{,}933$

3.2.3

« Lancer le dé » possède 2 issues : succès (obtenir le chiffre 1) et échec (ne pas obtenir le chiffre 1)

Soit à déterminer la probabilité du succès :

La probabilité p du succès est la probabilité d'obtenir le chiffre 1, donc $p = \frac{1}{6}$.

La probabilité q de l'échec est la probabilité de ne pas obtenir le chiffre 1, donc $q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

On répète 10 fois cette expérience, de manière indépendante.

X= nombre de fois on obtient le chiffre 1.

$$P(X = 4) = C_{10}^4 \times \left(\frac{1}{6}\right)^4 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{10-4} = 0{,}054$$

3.2.4

$P(X = 16) = C_{100}^{16} \times (0{,}15)^{16} \times (0{,}85)^{100-16} \approx 0{,}0004977$

Calcule de P(X≤16)

$$P(X \leq 16) = \sum_{k=0}^{16} P(X = k)$$

Calcule de P(X>16)

$$P(X > 16) = 1 - P(X \leq 16)$$

Exercices de renforcement

1

On choisit un élève au hasard et on note On note Ω l'univers des possibles, ensemble des 150 élèves. Ainsi *Card*(Ω)=32 .

Il y a équiprobabilité dans le choix des élèves. Ainsi pour tout événement A, $P(A) = \frac{Card\ A}{Card\Omega}$.

	Basket(B)	Foot(F)	Ten(T)	Total
Angl (A)	18	27	45	90
Allem (D)	9	18	33	60
Total	27	45	78	150

1) On a :

$$P(D \cap T) = P(T) \times P_T(D) = \frac{78}{150} \times \frac{33}{78} = \frac{11}{50}$$

$$P(T) \times P(D) = \frac{78}{150} \times \frac{60}{150} = \frac{26}{125}$$

On voit que $P(D \cap T) \neq P(T) \times P(D)$ et donc les événements « étudier l'allemand » et « pratiquer le tennis » ne sont pas indépendants

2) On a :

$$P(A \cap F) = P(F) \times P_F(A) = \frac{45}{150} \times \frac{27}{45} = \frac{9}{50}$$

$$P(A) \times P(F) = \frac{90}{150} \times \frac{45}{150} = \frac{9}{50}$$

On voit que $P(A \cap F) = P(A) \times P(F)$ donc les événements « étudier l'anglais » et « pratiquer la football » sont indépendants.

2

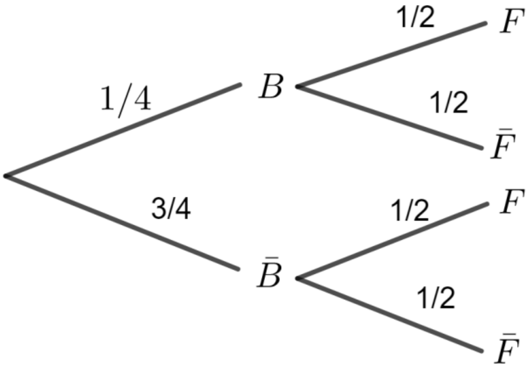
1) a/ $P(C) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$; $P(R) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ et $P(C \cap R) = \frac{1}{32}$.

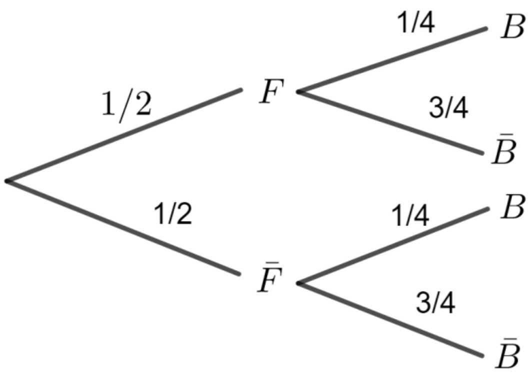
   b/ $P(C \cap R) = P(C) \times P(R) = \frac{1}{32}$ donc les évènements C et R sont indépendants.

2) a/ F est composé de 4 dames (cœur, carreau, pique, trefle) et des 7 autres cartes pique (sauf la dame) donc F a 11 éléments.

   b/ $P(F) \times P(C) = \frac{11}{32} \times \frac{1}{4} = \frac{11}{128}$ et $P(F \cap C) = \frac{1}{32}$ donc F et C ne sont pas indépendants.

3





4

L'arbre nous renseigne sur le fait que « 35 % des élèves du lycée sont en seconde, et parmi ces élèves de seconde, 80 % sont demi-pensionnaires, etc… ».

1) La somme des poids figurant sur les arêtes au départ de chaque « nœud » doit être égale à 1 (coefficients multiplicateurs traduisant des pourcentages).

2) a) Les élèves de seconde externe représentent une fraction de l'effectif total égale à $0{,}35 \times 0{,}2 = 0{,}07$ soit 7 %.

Les externes représentent donc une fraction égale à $0{,}35 \times 0{,}2 + 0{,}25 \times 0{,}4 + 0{,}3 \times 0{,}5 + 0{,}1 \times 0{,}3 = 0{,}35$, soit 35 %.

b) Sur 1000 élèves, 350 sont donc externes. Les élèves de terminale externes représentent $1000 \times 0{,}3 \times 0{,}5 = 150$élèves, soit une part égale à $\frac{150}{350} \times 100 = 43\%$

5

1) On a $P(chien) = 0{,}36$ donc $P\,(chien \cap chat) = P_{chien}(chat) \times P(chien\,) = 0{,}22 \times 0{,}36 = 0{,}079$.

2) On a : $P(chat) = 0{,}30, P_{chat}(chien) = \frac{P(chien \cap chat)}{P(chat)} = \frac{0{,}079}{0{,}30} = 0{,}2633$.

6

1) Le tableau des effectifs représentant la situation.

	Chêne	Pas chêne	Total
Effectifs	70	30	100

2) Les probabilités de M et de C.

$$P(M) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} \quad et\ P(C) = \frac{70}{100} = \frac{7}{10}$$

3) Un chêne est choisie et la probabilité qu'il ne soit pas malade est $P_C(\overline{M})$.

$$P_C\left(\overline{M}\right) = 1 - P_C(M) = 1 - \frac{P(C \cap M)}{P(C)}$$

$$P(\overline{C} \cap M) = P_{\overline{C}}(M) \times P(\overline{C}) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$$

$P(M) = P(C \cap M) + P(\overline{C} \cap M)$ donc $P(C \cap M) = \frac{1}{10}$

Par conséquent$P_C(\overline{M}) = 1 - \frac{\frac{1}{10}}{\frac{7}{10}} = \frac{6}{7}$

4) On choisit un arbre sain et la probabilité qu'il soit un chêne est $P_{\overline{M}}(C)$.

$$P_{\overline{M}}(C) = \frac{P(C \cap \overline{M})}{P(\overline{M})}$$

$P(C) = P(C \cap M) + P(C \cap \overline{M})$ donc $P(C \cap \overline{M}) = \frac{7}{10} - \frac{1}{10} = \frac{3}{5}$

Par conséquent

$$P_{\overline{M}}(C) = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4}$$

7

Le joueur commet une double faute s'il ne réussit pas sa première balle et sa deuxième balle de service ; la probabilité de commettre une double faute est : $0{,}25 \times 0{,}10 = 0{,}025$ soit dans 2,5% des service

8

Soit A : « On trouve une pièce d'argent » ; C_1 : « on a ouvert un tiroir du coffre C1 »

1) $P(A) = P_{C_1}(A) \times P(C_1) + P_{C_2}(A) \times P(C_2) + P_{C_3}(A) \times P(C_3) = 0 + 1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$.

$$P_A(C_2) = \frac{P(A \cap C_2)}{P(A)} = \frac{P_{C_2}(A) \times P(C_2)}{P(A)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$$

2) Puisqu'on a déjà pris une pièce d'argent, il faut retomber sur C2. Comme les deux expériences sont indépendantes, on a : $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

9

Soit les évènements A : « le photocopieur A fonctionne » et B : « le photocopieur B fonctionne »

On a : $P(\overline{A}) = 0{,}04$; $P(\overline{B}) = 0{,}08$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0{,}25$.

1) Déterminons la probabilité que A et B tombent en panne un jour donné c'est-à-dire $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P_{\overline{A}}(\overline{B}) \times P(\overline{A}) = 0{,}25 \times 0{,}04 = 0{,}01.$$

2) Déterminons la probabilité que A et B fonctionnent en même temps c'est-à-dire $P(A \cap B)$.

$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$donc $P(A \cap B) = P(B) - P(\overline{A} \cap B)$

On a : $P(\overline{A} \cap B) = P_{\overline{A}}(B) \times P(\overline{A}) = 0{,}75 \times 0{,}04 = 0{,}03$.

Ainsi $P(A \cap B) = 0{,}92 - 0{,}03 = 0{,}89$

10

1) Soit les évènements H : « la personne est un homme» et F : « la personne est occupée à fumer »

$P(F) = P(H \cap F) + P(\overline{H} \cap F) = P(H) \times P_H(F) + P(\overline{H}) \times P_{\overline{H}}(F) = \frac{12}{20} \times \frac{20}{100} + \frac{8}{12} \times \frac{40}{100} = 0{,}28.$

2) Calculons $P_F(\overline{H})$

$$P_F(\overline{H}) = \frac{0{,}6 \times 0{,}2}{0{,}6 \times 0{,}2 + 0{,}4 \times 0{,}4} = 0{,}43$$

11

Soit les évènements C : « le salarié est un cadre » ; E : « le salarié est un employé » et M : « le salarié est marié »

1) a/ La probabilité pour que ce salarié soit un cadre célibataire $P(C \cap \overline{M})$

$$P(C \cap \overline{M}) = P(C) \times P_C(\overline{M}) = 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}12.$$

La probabilité pour que ce salarié soit un employé célibataire $P(E \cap \overline{M})$

$$P(E \cap \overline{M}) = P(E) \times P_E(\overline{M}) = 0{,}7 \times 0{,}2 = 0{,}14.$$

b/ Déduisons la probabilité pour que ce salarié soit un célibataire.

$$P(\overline{M}) = P(C \cap \overline{M}) + P(E \cap \overline{M}) = 0{,}26$$

2) La probabilité pour qu'un célibataire soit un cadre :

$$P_{\overline{M}}(C) = \frac{P(C \cap \overline{M})}{P(\overline{M})} = \frac{6}{13}$$

La probabilité pour qu'un salarié marié soit un employé :

$$P_M(E) = \frac{P(E \cap M)}{P(M)} = \frac{28}{37}$$

12

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de réponses exactes.
Soit A l'évènement : « le candidat a répondu au hasard et est reçu ».

$$P(A) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) = C_{10}^{8}\left(\frac{1}{3}\right)^{8}\left(\frac{2}{3}\right)^{2} + C_{10}^{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{1} + C_{10}^{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\left(\frac{2}{3}\right)^{0}$$

$$P(A) = \frac{67}{19683}$$

13

1) Pour la 1ère question, il y a 2 choix. Pour la 2ème question, il y a 2 choix. Pour la 3ème question, il y a 2 choix et pour la 4ème question, il y a 2 choix. Ce qui fait un total de $2^4 = 16$ choix.

2) a/ Il n'y a qu'une seule possibilité pour avoir tout juste donc $P(A) = \frac{1}{16}$;

b/ Il n'y a aussi qu'une possibilité pour avoir tout faux donc $P(B) = \frac{1}{16}$;

c/ Il y a 4 possibilités d'avoir exactement une réponse juste : soit elle est pour la 1ère question, soit la 2ème, soit la 3ème et soit la 4ème… D'où $P(C) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$;

d/ Soit $\overline{D}$ l'événement : « ne pas avoir de réponses correctes », autrement dit d'où et donc

$$P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - P(B) = \frac{15}{16}$$

3) a/ Si 4 réponses sont justes, on a 20 points ;
Si 3 réponses sont justes et une fausse, on a 3 × 5 – 3=12 points ;
Si deux réponses sont justes et deux fausses, on a $2 \times 5 - 2 \times 3$=4 points ;
Si une réponse est juste et trois réponses fausses, on a $5 - 3 \times 3 = -4$ donc 0 points.
Si on a quatre réponses fausses, on a également 0.
Ainsi on a : $X \in \{0; 4; 12; 20\}$
b/ Loi de probabilité de X :

$$P(X = 20) = P(A) = \frac{1}{16} \quad ; \quad P(X = 12) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$P(X = 4) = \frac{C_4^2}{16} = \frac{3}{8}$ car les deux réponses justes sont choisies parmi les quatre possibles d'où C_4^2possibilités.
$P(X = 0) = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$car ce cas regroupe les deux événements B et C.
Ainsi, on a :

X	0	4	12	20
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

c/ Espérance de X

$$E(X) = 0 \times \frac{5}{16} + 4 \times \frac{3}{8} + 12 \times \frac{1}{4} + 20 \times \frac{1}{16} = 5{,}75$$

14

1) a) Dans cett situation d'équiprobabilité, on a : $P(B) = \frac{card(B)}{card\Omega} = \frac{2}{3}$
b) Si l'événement B est réalisé, c'est-à-dire si une pièce « normale » a été choisie, la probabilité d'obtenir « Pile » vaut $\frac{1}{2}$ et donc $P_B(P) = \frac{1}{2}$.
2) Calculons $P(P \cap B)$

$$P(P \cap B) = P(B) \times P_B(P) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

Calculons $P(P \cap \overline{B})$
On a $P(\overline{B}) = \frac{1}{3}$. Si une pièce « truquée » a été choisie, la probabilité d'obtenir « Pile » est nulle, puisque la pièce truquée possède «deux « faces ». Ainsi $P_{\overline{B}}(P) = 0$ et $P(P \cap \overline{B}) = 0$.
Déduisons P(P)
D'après la formule des probabilités totales, $P(P) = P(P \cap \overline{B}) + P(P \cap B) = \frac{1}{3}$.
3) Calculons $P(F_n \cap B)$.
Si une pièce « normale » a été choisie, la probabilité d'obtenir « Face » au cours des n premiers lancers suit une loi binomiale de paramètres n et ½ donc

$$P_B(F_n) = C_n^n \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Ainsi, on a : $P(F_n \cap B) = P(B) \times P_B(F_n) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
Calculons $P(F_n \cap \overline{B})$

Si une pièce « truquée » a été choisie, la probabilité d'obtenir « Face » vaut 1 à chaque lancer, donc la probabilité d'obtenir « Face » au cours des n premiers lancers vaut 1, c'est-à-dire $P_{\overline{B}}\,(F_n) = 1$ et ainsi $P\left(F_n \cap \overline{B}\right) = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$.

4) Déduis-en la probabilité de l'évènement F_n.

En utilisant la formule des probabilités totales, on a :

$$P(F_n) = P(F_n \cap B) + P\left(F_n \cap \overline{B}\right) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}$$

15

$Card(\Omega) = 6 \times 4 = 24$

1) Déterminons la loi de probabilité de X.

$$X(\Omega) = \{10; 15; 20; 25; 30; 35\}$$

$$P(X = 10) = \frac{C_2^1 \times C_3^1}{24} = \frac{1}{4} \;;\; P(X = 15) = \frac{C_2^1 \times 1}{24} = \frac{1}{12} \;;\; P(X = 20) = \frac{1 \times C_3^1}{24} = \frac{1}{8} \;;$$

$$P(X = 25) = \frac{1 \times 1}{24} = \frac{1}{24} \;;\; P(X = 30) = \frac{C_3^1 \times C_3^1}{24} = \frac{3}{8} \;;\; P(X = 35) = \frac{C_3^1 \times 1}{24} = \frac{1}{8} \;;$$

Ainsi, on a :

x_i	10	15	20	25	30	35
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

2) Représentons graphiquement la fonction de répartition F de X.

Si $x < 10$, alors $F(x) = 0$

Si $10 \leq x < 15$, alors $F(x) = \frac{1}{4}$

Si $15 \leq x < 20$, alors $F(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$

Si $20 \leq x < 25$, alors $F(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{11}{24}$

Si $25 \leq x < 30$, alors $F(x) = \frac{11}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{2}$

Si $30 \leq x < 35$, alors $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$

Si $35 \leq x$, alors $F(x) = 1$

3) Justifier que l'espérance mathématique E(X) de X est égale à $\frac{275}{12}$.

$$E(X) = 10 \times \frac{1}{4} + 15 \times \frac{1}{12} + 20 \times \frac{1}{8} + 25 \times \frac{1}{24} + 30 \times \frac{3}{8} + 35 \times \frac{1}{8} = \frac{275}{12}$$

$Card(\Omega) = 6 \times 4 = 24$

1) Déterminons la loi de probabilité de X.

$X(\Omega) = \{10; 15; 20; 25; 30; 35\}$

$$P(X = 10) = \frac{C_2^1 \times C_3^1}{24} = \frac{1}{4} \;;\; P(X = 15) = \frac{C_2^1 \times 1}{24} = \frac{1}{12} \;;\; P(X = 20) = \frac{1 \times C_3^1}{24} = \frac{1}{8} \;;$$

$$P(X=25)=\frac{1\times 1}{24}=\frac{1}{24}\quad ;\quad P(X=30)=\frac{C_3^1\times C_3^1}{24}=\frac{3}{8}\quad ;\quad P(X=35)=\frac{C_3^1\times 1}{24}=\frac{1}{8}\quad ;$$

Ainsi, on a :

x_i	10	15	20	25	30	35
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

2) Représentons graphiquement la fonction de répartition F de X.

Si $x<10$, alors $F(x)=0$

Si $10\leq x<15$, alors $F(x)=\frac{1}{4}$

Si $15\leq x<20$, alors $F(x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$

Si $20\leq x<25$, alors $F(x)=\frac{1}{3}+\frac{1}{8}=\frac{11}{24}$

Si $25\leq x<30$, alors $F(x)=\frac{11}{24}+\frac{1}{24}=\frac{1}{2}$

Si $30\leq x<35$, alors $F(x)=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}=\frac{7}{8}$

Si $35\leq x$, alors $F(x)=1$

3) Justifier que l'espérance mathématique E(X) de X est égale à $\frac{275}{12}$.

$$E(X)=10\times\frac{1}{4}+15\times\frac{1}{12}+20\times\frac{1}{8}+25\times\frac{1}{24}+30\times\frac{3}{8}+35\times\frac{1}{8}=\frac{275}{12}$$

16

La somme des probabilités est égale à 1 donc $0,25+0,3+0,15+a+b=1$.

Ainsi $a+b=0,3$.

L'espérance est nulle donc $-2\times 0,25-1\times 0,3+1\times 0,15+2a+3b=0$.

Ainsi $2a+3b=0,65$

On obtient donc le système : $\begin{cases} a+b=0,3 \\ 2a+3b=0,65 \end{cases}$.

Par conséquent $a=0,25$ et $b=0,05$.

17

1) $X(\Omega)=\{1;2;3\}$;

a) $P(X=1)=\frac{C_3^1\times C_2^2}{C_5^3}=0,3$; $P(X=2)=\frac{C_3^2\times C_2^1}{C_5^3}=0,6$; $P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_5^3}=0,1$.

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	0,3	0,6	0,1

b)

$E(X)=1,8$; $V(X)=\frac{9}{25}$; $\sigma(X)=\frac{3}{5}$.

2) On note B : « Tirer une boule blanche » ; U1 : « Choisir l'urne U1 ».

$P(U_1\cap B)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$ et $P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{6}=\frac{14}{30}$

$P_B(U_1) = \frac{P(U_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{9}{14}$

3) $P(3) = \frac{2}{6}$ et $P(2) = \frac{4}{6}$.

$$P(A) = P(3 \cap A) + P(2 \cap A) = \frac{2}{6} \times P(X = 1) + \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} \times 2 = \frac{41}{90}$$

$P(\overline{B}) = \frac{2}{6} \times P(X = 3) + \frac{4}{6} \times \frac{A_2^2}{A_6^2} = \frac{7}{90}$

$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = \frac{83}{90}$

18

1a) Fonction de répartition

Si $x < 0$, alors $F(x) = 0$

Si $0 \leq x < 1$, alors $F(x) = 0{,}25$

Si $1 \leq x < 2$, alors $F(x) = 0{,}25 + 0{,}37 = 0{,}62$

Si $2 \leq x < 3$, alors $F(x) = 0{,}62 + 0{,}22 = 0{,}84$

Si $3 \leq x < 4$, alors $F(x) = 0{,}84 + 0{,}10 = 0{,}94$

Si $4 \leq x$, alors $F(x) = 0{,}94 + 0{,}06 = 1$

b) Espérance du vendeur $E(X) = \frac{0\times25+1\times37+2\times22+3\times10+4\times6}{100} = 1{,}35$

Variance et écart type

$$V(X) = \quad et\ \sigma(X) = 1{,}13$$

2) La probabilité que X appartienne à l'intervalle $[E(X) - \sigma; E(X) + \sigma]$ est $P(0{,}22 \leq X \leq 2{,}48)$

$$P(0{,}22 \leq X \leq 2{,}48) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}59$$

19

Soit X la variable aléatoire associant, à chaque partie, le gain algébrique du joueur.

1) a) Détermine la loi de probabilité de X.

$$X(\Omega) = \{-1000; 500; 1000\}$$

$P(X = -1000) = \frac{2}{7} + \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{23}{49}$; $P(X = 1000) = \frac{2}{7} + \frac{3}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{20}{49}$; $P(X = 500) = \frac{3}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{49}$

x_i	-1000	500	1000
$P(X = x_i)$	$\frac{23}{49}$	$\frac{6}{49}$	$\frac{20}{49}$

b) Vérifie que la probabilité pour que le joueur soit perdant est égale à $\frac{23}{49}$.

Le joueur est perdant si son gain est algébrique est égal à -1000 or $P(X = -1000) = \frac{23}{49}$.

2) Soit Y la variable aléatoire donnant le nombre de parties gagnantes

Y suit une loi binomiale de paramètres 3 et $\frac{26}{49}$ (lorsque X=500 et X=1000).

$P(Y=2)=C_3^2\times\left(\frac{26}{49}\right)^2\times\frac{23}{49}=0{,}396$

20

1. Détermine la loi de probabilité de X.

Si la carte tirée est :

- un as, le joueur récupère sa mise est gagne 18€ donc $X=m+18$.
- un roi, le joueur gagne 2 fois sa mise (et perd sa mise) donc $X=2m$
- une dame, le joueur récupère sa mise donc $X=m-m=0$
- un valet, le joueur récupère sa mise donc $X=0$

Dans les autres cas, le joueur perd sa mise donc $X=-m$

Ainsi $X=\{m+18;2m;0;-m\}$

x_i	$m+18$	$2m$	0	m
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{9}{13}$

2. Calcule E(X) en fonction de m.

$$E(X)=\frac{1}{13}(m+18)+\frac{1}{13}(2m)+\frac{2}{13}(0)+\frac{9}{13}(-m)=\frac{18-6m}{13}$$

3. Existe-t-il des valeurs de m pour lesquelles le jeu est équitable ? Si oui, détermine les.

$E(X)=0\Leftrightarrow 18-6m=0\Leftrightarrow m=3$

Pour que le jeu soit équitable, le joueur doit miser 3€

21

1) a/ soit l'évènement A : « aucun client n'est intéressé » : $P(A)=\left(\frac{4}{5}\right)^3=0{,}512$.

b/ soit l'évènement B : « au moins un client est intéressé » :

On a $B=\overline{A}$ donc $P(B)=1-\left(\frac{4}{5}\right)^3=0{,}488$.

c/ Soit l'évènement C : « Au plus un client est intéressé ». C signifie que soit aucun client n'est intéressé soit exactement un client est intéressé.

$$P(C)=\left(\frac{4}{5}\right)^3+C_3^1\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^2=0{,}896$$

2) $P=C_3^2\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)=0{,}096$

22

1) Probabilité d'avoir exactement 3 places libres

Nous avons 10 places avec une probabilité d'occupation de 70 %, donc la probabilité qu'une place soit libre est de 30 % (0,3). Le nombre de places libres suit une loi binomiale B(n,p) où $n=10\ et\ p=0{,}3$.

La probabilité d'avoir exactement k succès (places libres) est donnée par la formule :

$p(X = k) = C_n^k \times p^k(1 - P)^{n-k}$
Pour $k = 3$, $p(X = 3) = C_{10}^3 \times (0{,}3)^3(0{,}7)^7$
$P(X = 3) = 120 \times 0{,}027 \times 0{,}08235 \approx 0{,}267$
Donc, la probabilité d'avoir exactement 3 places libres est d'environ **0,267**.

2) Probabilité que les places 3, 6 et 9 soient libres
Pour que les places 3, 6 et 9 soient libres, cela signifie que ces 3 places doivent être libres et les 7 autres peuvent être soit libres soit occupées.
La probabilité qu'une place soit libre est 0,3, donc :
P(places 3, 6, 9 libres)=$(0{,}3)^3$=0,027

Pour les 7 autres places, la probabilité qu'elles soient occupées est :
P(7 places occupées)=$(0{,}7)^7$≈0,0823543
Donc, la probabilité que les places 3, 6 et 9 soient libres est :
P(places 3, 6, 9 libres)=0,027×0,0823543≈0,00222
Ainsi, la probabilité que les places 3, 6 et 9 soient libres est d'environ **0,00222**.

3) Variable aléatoire X (nombre de places libres dont le numéro est multiple de 3.
Les places multiples de 3 sont : 3, 6 et 9. Il y a 3 places multiples de 3.
a) Loi de probabilité de X
X suit également une loi binomiale B(n=3,p=0,3) où n=3 et p=0,3.
La loi de probabilité de X est : $P(X = k) = C_3^K \times (0{,}3)^k(0{,}7)^{3-k}$
$pour\ k = 0{,}1{,}2{,}3$
Calculons chaque probabilité :

- Pour k=0 ;$p(X = 0) = C_3^0 \times (0{,}3)^0(0{,}7)^3 = 0{,}343$
- Pour k=1:$P(X = 1) = C_3^1 \times (0{,}3)^1(0{,}7)^2 = 0{,}441$
- Pour k=2 ; $P(X = 2) = C_3^2 \times (0{,}3)^2(0{,}7)^1 = 0{,}189$
- Pour k=3 ; $P(X = 3) = C_3^3 \times (0{,}3)^3(0{,}7)^0 = 0{,}027$

b) Espérance mathématique de X
L'espérance d'une loi binomiale est donnée par :
$E(X) = n \times p = 3 \times 0{,}3 = 0{,}9$
c) Fonction de répartition de X
La fonction de répartition $F_X(x) = P(X \leq x)$
• Pour $x < 0; F_X(x) = P(X < 0) = 0$
•Pour $0 \leq x < 1; F_X(x) = P(X = 0) = 0{,}343$
•Pour $1 \leq x < 2; F_X(x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}343 + 0{,}441 = 0{,}784$
•Pour $2 \leq x < 3; F_X(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}784 + 0{,}189 = 0{,}973$
Pour $3 \leq x; F_X(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0{,}973 + 0{,}027 = 1$

23

A chaque tir la probabilité pour qu'un tireur touche la cible est 0,7.

On est donc en présence d'un schéma de Bernoulli:
On appelle succès S " le tireur atteint la cible" avec la probabilité p=0,7.
On appelle échec E " le tireur rate la cible" avec la probabilité q=0,3.
On répète trois fois de suite cette expérience de façon indépendante et donc X suit la loi binomiale de paramètres 10 et 0,7.

1) La probabilité qu'il atteigne la cible exactement 6 fois est : $P(X=6)=C_{10}^{6}\times 0{,}7^{6}\times 0{,}3^{4}=0{,}2001$
2) La probabilité qu'il atteigne la cible au plus 3 fois est : $P(X\leq 3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=0{,}0106$
3) La probabilité qu'il atteigne la cible plus de 5 fois est : $P(X>5)=P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)=0{,}8973$

24

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique de Kpalou.
1.a) Détermine les valeurs prises par X ; puis la loi de probabilité de X.
$X(\Omega)=\{-200\,;\,-100\,;500\}$

$P(X=-200)=\frac{1}{2}$; $P(X=-100)=\frac{1}{3}$; $P(X=500)=\frac{1}{6}$

b) Le gain moyen de Kpalou est :

$E(X)=-200\times\frac{1}{2}+(-100)\times\frac{1}{3}+500\times\frac{1}{6}=-50$

Le jeu n'est pas équitable, il est désavantageux pour le joueur.

2) Kpalou gagne la partie avec la probabilité $P(X=500)=\frac{1}{6}$

3. a) les gains possibles de Kpalou.

	-200	-100	500
-200	-400	-300	300
-100	-300	-200	400
500	300	400	1000

Les gains possibles sont : -400 ;-300 ;-200 ;300 ;400 ;1000.

b) E : « Kpalou perd les deux parties » ;

$$P(E)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}=\frac{5}{6}$$

F : « Kpalou gagne au moins 300 F ».

$$P(F)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}=\frac{11}{36}$$

c) $P(X\geq 1)\geq 0{,}5\Rightarrow 1-P(X=0)\geq 0{,}5\Rightarrow C_n^0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^{n-0}\leq 0{,}5$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n\leq 0{,}5$$

$$n\ln\left(\frac{5}{6}\right)\leq -\ln 2$$

$$n\geq 3{,}80$$

Donc il faut 4 parties

25

Il y a C_8^3 =56 façons de tirer les 3 cubes.

1. a) Obtenir des cubes de couleur différente revient à obtenir exactement 1 rouge 1 vert et 1 jaune, c'est-à-dire obtenir un rouge parmi les 4, et 1 vert parmi les 3 et le jaune :

$$P(A) = \frac{C_4^1 \times C_3^1 \times 1}{C_8^3} = \frac{3}{14}$$

b) Obtenir au plus un petit cube c'est n'en obtenir aucun OU en obtenir un seul.

$$P(B) = \frac{C_3^3 + C_5^1 \times C_3^2}{C_8^3} = \frac{2}{7}$$

2. $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$
   a) Loi de probabilité de X

S'il n'y a aucun petit cube rouge, alors $P(X = 0) = \frac{C_3^0 \times C_5^3}{C_8^3} = \frac{5}{28}$;

S'il y a un seul petit cube rouge, alors $P(X = 1) = \frac{C_3^1 \times C_5^2}{C_8^3} = \frac{15}{28}$;

S'il y a deux petits cubes rouge, alors $P(X = 2) = \frac{C_3^2 \times C_5^1}{C_8^3} = \frac{15}{56}$;

S'il y a trois petits cubes rouges, alors $P(X = 3) = \frac{C_3^3 \times C_5^0}{C_8^3} = \frac{1}{56}$.

Ainsi on a :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$

   b) Calculons l'espérance mathématique de X.

$E(X) = \frac{9}{8}$

3. Les événements sont indépendants. Il s'agit d'un schéma de Bernoulli dont le Succès : "Obtenir au plus un petit cube" de probabilité p= $\frac{2}{7}$ (Voir question 1.)

Il y a 5 épreuves et on obtient k succès lors des n épreuves.

   a) On veut obtenir au moins un succès lors des 5 épreuves. Soit Y la variable aléatoire qui donne le nombre de succès lors des 5 épreuves. Il s'agit de calculer P(Y ≥ 1) ou encore 1 – P(Y = 0) :

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - C_5^0 \times \left(\frac{2}{7}\right)^0 \times \left(\frac{5}{7}\right)^5 = 0{,}814$$

   b) $P(Y = 3) = C_5^3 \times \left(\frac{2}{7}\right)^3 \times \left(\frac{5}{7}\right)^2 = 0{,}119$

Exercices d'approfondissement

26

1) Il y a 4 valeurs possibles pour 1 et autant pour 2, cela donne donc 16 équations possibles.
   Elles sont équiprobables car elles sont toutes différentes et les dés sont équilibrés.
2) Calculons le discriminant Δ

a/b	1	2	3	4
1	-3	0	5	12
2	-7	-4	1	8
3	-11	-8	-3	4
4	-15	-12	-7	0

Les valeurs possibles pour X sont 0; 1 et 2.
Lorsque Δ < 0, X=0
Lorsque Δ = 0, X=1
Lorsque Δ > 0, X=2 . On a donc

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{5}{16}$

27

$Card(\Omega) = 6 \times 6 = 36$

1) Détermine toutes les valeurs prises par X.

Si $\alpha = 0$ et $\beta = 0$ alors $\sin(\alpha+\beta) = 0$; Si $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{\pi}{6}$ alors $\sin(\alpha+\beta) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$;
Si $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{\pi}{2}$ alors $\sin(\alpha+\beta) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; Si $\alpha = \frac{\pi}{3}$ et $\beta = 0$ alors $\sin(\alpha+\beta) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
Si $\alpha = \frac{\pi}{3}$ et $\beta = \frac{\pi}{6}$ alors $\sin(\alpha+\beta) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; Si $\alpha = \frac{\pi}{3}$ et $\beta = \frac{\pi}{2}$ alors $\sin(\alpha+\beta) = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$;
Si $\alpha = \frac{4\pi}{3}$ et $\beta = 0$ alors $\sin(\alpha+\beta) = \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; Si $\alpha = \frac{4\pi}{3}$ et $\beta = \frac{\pi}{6}$ alors $\sin(\alpha+\beta) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$; Si $\alpha = \frac{4\pi}{3}$ et $\beta = \frac{\pi}{2}$ alors $\sin(\alpha+\beta) = \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

$$X(\Omega) = \left\{-1; -\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right\}$$

2) Etablis la loi de probabilité de X.

$P(X=-1) = \frac{2\times 2}{36} = \frac{4}{36}$; $P\left(X = -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\times 2}{36} = \frac{4}{36}$; $P\left(X = -\frac{1}{2}\right) = \frac{2\times 2}{36} = \frac{4}{36}$; $P(X=0) = \frac{4}{36}$;
$P\left(X = \frac{1}{2}\right) = \frac{2\times 2 + 2\times 2}{36} = \frac{8}{36}$; $P\left(X = \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\times 2}{36} = \frac{4}{36}$; $P(X=1) = \frac{2\times 2 + 2\times 2}{36} = \frac{8}{36}$

x_i	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{8}{36}$

28

1) On a $C = \overline{A \cup B}$. Comme A et B sont indépendants on a $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0{,}02 \times 0{,}1$.
Ainsi on a : $P(C) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 0{,}882$.

2) Il y a 0,02 − 0,002 = 0,018 chances de tomber sur une montre n'ayant que le défaut a ;
De même il y a 0,1 − 0,002 = 0,098 chances de tomber sur une montre n'ayant que le défaut b ; on a donc $P(D) = 0{,}018 + 0{,}098 = 0{,}116$

1) X suit une loi binomiale B(5 ; 0,882) ;
$P(E) = P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) = C_5^4(0{,}882)^4(0{,}118)^1 + C_5^5(0{,}882)^5(0{,}118)^0 \approx 0{,}891$

29

PARTIE A

$Card(\Omega) = C_{10}^2$.

1) X suit une loi binomiale de paramètres 10 et $p = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

a) Donnons la loi de probabilité de X.

$$X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$$

$$P(X = 0) = C_2^0\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \; ; \; P(X = 1) = C_2^1\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^1 = \frac{12}{25} \; ; \; P(X = 2) = C_2^2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^0 = \frac{4}{25}$$

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

b) Calculons l'Esperance mathématique de X.

$$E(X) = 0 \times \frac{9}{25} + 1 \times \frac{12}{25} + 2 \times \frac{4}{25} = \frac{4}{5}$$

2) La probabilité pour que les 2 boules tirées soit de même couleur est :

$$\frac{C_6^2 + C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{18}$$

PARTIE B Soit un entier n tel que $2 \leq n \leq 8$.

1) Démontrons que $P(n) = \frac{2n^2-20n+90}{90}$

$$P(n) = \frac{C_n^2 + C_{10-n}^2}{C_{10}^2} = \frac{\frac{n!}{2!(n-2)!} + \frac{(10-n)!}{2!(8-n)!}}{45} = \frac{\frac{n(n-1)}{2} + \frac{(10-n)(9-n)}{2}}{45} = \frac{2n^2 - 20n + 90}{90}$$

2) Déterminons le nombre n de boules blanches pour que P(n) soit minimum

$P(n) = \frac{2n^2-20n+90}{90}$ donc $P'(n) = \frac{1}{90}(4n - 20)$

$$P'(n) = 0 \Rightarrow n = 5$$

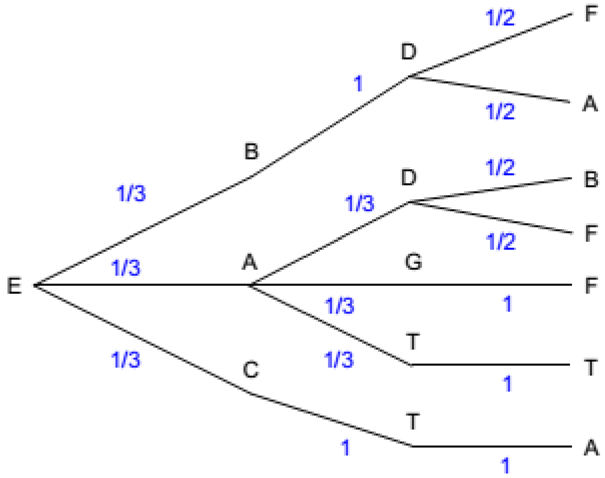
Il faut qu'il y ait 5 boules blanches pour que le minimum soit atteint

Ce minimum est : $P(5) = \frac{40}{90} = \frac{4}{9}$.

30

1) On considère un visiteur, pris au hasard, devant effectuer un trajet selon les hypothèses.

a) Construisons l'arbre pondéré des différents trajets possibles pour ce visiteur.



b) Montrons que la probabilité du parcours codé EBDF est $\frac{1}{6}$.

$$P(EBDF) = \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

c) Déterminons la probabilité P1 de l'évènement : « La quatrième salle du trajet est F ».

$$P_1 = P(EBDF) + P(EADF) + P(EAGF) = \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

d) Déterminons la probabilité P2 de l'évènement « Le trajet passe par la salle T ».

$$P_1 = P(ECTA) + P(EATC) = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

2) L'ensemble des valeurs prises par X est $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$

a) Calculons la probabilité de l'évènement (X = 1)

$$P(X = 1) = C_{10}^{1} \times \frac{4}{9} \times \left(\frac{5}{9}\right)^{9} \approx 0{,}022$$

b) Calculons la probabilité que deux visiteurs au moins passent par la salle T.

L'évènement $\overline{(X \geq 2)}$ est la réunion des évènements $(X = 0)$ et $(X = 1)$.

$$P(X = 0) = C_{10}^{0} \times \left(\frac{5}{9}\right)^{10} \approx 0{,}003$$

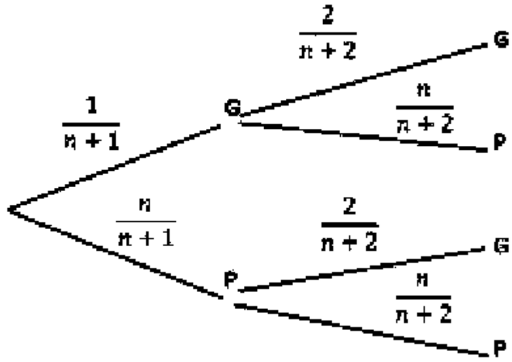
Ainsi, $P(X \geq 2) = 1 - P\overline{(X \geq 2)} = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 0{,}975$

c) La probabilité du succès, sous ces conditions est : $P_2 = \frac{1}{9} < \frac{4}{9}$ donc il a tort.

31

1) Construisons un arbre pondéré décrivant la situation.

Soient les évènements P : « Billet perdant » et G : « Billet gagnant ».



2) Déterminons n de façon que la probabilité pour un joueur de gagner les deux fois soit égale à ⅓.

Si le joueur les deux fois avec une probabilité de $\frac{1}{3}$, on a :

$$\frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n+2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow n^2 + 3n + 2 = 6$$
$$\Leftrightarrow n^2 + 3n - 4 = 0$$
$$\Delta = 25 = 5^2$$
$$n_1 = -4 \ \ et \ n_2 = 1$$

Il faut donc que n soit égal à 1. Ainsi, le billet de la première loterie a une chance sur deux d'être gagnant et celui de la seconde loterie a deux chances sur trois de l'être.

32

PARTIE A (Dans cette partie p=0,1)

1) Un avions à 2 moteurs s'écrase lorsque ses 2 moteurs sont en panne donc $p \times p = 0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}01$.
2) La probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait ses 4 moteurs en panne est donc $p \times p \times p \times p = 0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}0001$.
3) L'état de fonctionnement d'un moteur conduit à deux éventualités : soit il est en panne soit il ne l'est pas. Avoir un moteur en panne est donc une épreuve de Bernoulli. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de moteurs en panne pour un avions à 4 moteurs.
X suit donc une loi binomiale de paramètres n=4 et p=0,1.
$$P(X = 3) = C_4^3 \times 0{,}1^3 \times 0{,}9^1 = 0{,}0036$$
4) Un avion à 4 moteurs s'écrase s'il a 3 ou 4 moteurs en panne donc la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'écrase est $0{,}0001 + 0{,}0036 = 0{,}0037$.

PARTIE B (On revient au cas général)

1) Soit $f(p)$ la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase.
Un avions à 2 moteurs s'écrase lorsque ses 2 moteurs sont en panne donc $f(p) = p \times p = p^2$
2) Soit $g(p)$ la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'écrase.
Un avion à 4 moteurs s'écrase s'il a 3 ou 4 moteurs en panne.

La probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait ses 4 moteurs en panne est donc $p \times p \times p \times p = p^4$.

La probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait exactement 3 moteurs en panne est $P(X = 3) = C_4^3 \times p^3 \times (1-p)^1 = 4(p^3 - p^4)$

Ainsi, $g(p) = p^4 - 4(p^3 - p^4) = p^2(-3p^2 + 4p)$.

3) On pose $h(p) = f(p) - g(p)$.

a) Etude du signe de $h(p)$ en fonction de p.

$$h(p) = f(p) - g(p) = p^2 - p^2(-3p^2 + 4p) = p^2(3p^2 - 4p + 1)$$

$p^2 > 0$ donc le signe de $h(p)$ dépend de celui de $3p^2 - 4p + 1$.

$$3p^2 - 4p + 1 = 3(p-1)\left(p - \frac{1}{3}\right)$$

$$\forall p \in]0;\frac{1}{3}[, h(p) > 0 \ ;$$

$$\forall p \in]\frac{1}{3};1[, h(p) < 0 \ ;$$

$$\forall p \in \{0;\frac{1}{3}\}, h(p) = 0$$

b) D'après la question précédente,

Si $p \in]0;\frac{1}{3}[$, alors $h(p) > 0$et donc $f(p) > g(p)$ et par conséquent il vaut mieux monter dans un avions à 4 moteurs ;

Si $p \in]\frac{1}{3};1[$, alors $h(p) < 0$ et donc $f(p) < g(p)$ et par conséquent il vaut mieux monter dans un avions à 2 moteurs ;

Si $p \in \left\{0;\frac{1}{3}\right\}$,alors $h(p) = 0$ et donc $f(p) = g(p)$ et par conséquent le risque encouru est le même dans les deux avions

33

Soit Xla variable aléatoire qui associe le nombre de points à un lancer.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

On sait que la formule de l'aire d'un disque de rayon r : πr^2.

L'aire du disque jaune est π , car r=1.

L'aire du disque rouge est $\pi \times 2^2 = 4\pi$ donc, l'aire de la zone rouge est $4\pi - \pi = 3\pi$.

L'aire du disque bleu est $\pi \times 3^2 = 9\pi$ donc, l'aire de la zone bleue est $9\pi - 3\pi - \pi = 5\pi$.

L'aire du disque noir est $\pi \times 4^2 = 16\pi$ donc, l'aire de la zone bleue est $16\pi - 5\pi - 3\pi - \pi = 7\pi$.

Ainsi :

La zone jaune représente, en proportion du total de la cible,

$$\frac{\pi}{\pi + 3\pi + 5\pi + 7\pi} = \frac{1}{16}$$

La zone rouge représente, en proportion du total de la cible,

$$\frac{3\pi}{\pi + 3\pi + 5\pi + 7\pi} = \frac{3}{16}$$

La zone bleue représente, en proportion du total de la cible,

$$\frac{5\pi}{\pi + 3\pi + 5\pi + 7\pi} = \frac{5}{16}$$

La zone noire représente, en proportion du total de la cible,

$$\frac{7\pi}{\pi + 3\pi + 5\pi + 7\pi} = \frac{7}{16}$$

Mais ces proportions ne sont pas égales aux probabilités cherchées puisque la fléchette peut partir dans le décor une fois sur cinq. En d'autres termes, la probabilité de rater la cible est de 0,2 et celle de l'atteindre est donc de 0,8. Par conséquent, les proportions de chaque zone de la cible doivent être multipliées par 0,8.

Ainsi pour la Zone jaune : $\left(\frac{1}{16}\right) \times 0{,}8 = 0{,}05$; pour la Zone rouge : $\left(\frac{3}{16}\right) \times 0{,}8 = 0{,}15$; pour la Zone bleue : $\left(\frac{5}{16}\right) \times 0{,}8 = 0{,}25$ et pour la Zone noire : $\left(\frac{7}{16}\right) \times 0{,}8 = 0{,}35$. D'où la loi de probabilité suivante :

x_i	0	2	5	9	16
$P(X = x_i)$	0,20	0,05	0,15	0,25	0,35

2) Calculons son espérance et interprète le résultat.

L'espérance est : $E(X) = (0 \times 0{,}2) + (2 \times 0{,}05) + (5 \times 0{,}15) + (9 \times 0{,}25) + (16 \times 0{,}35) = 8{,}7$

On peut espérer obtenir 8,7 points en moyenne par lancer.

3) Calculons son écart-type.

$\sigma = 6{,}17$.

34

1) Calcul de p_1, p_2 et p_3.

Comme p1, p2 et p3 dans cet ordre, forment des termes d'une progression géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$, on a : $p_2 = q \times p_1$ et $p_3 = q \times p_2 = q^2 \times p_1$; c'est-à-dire $p_2 = \frac{1}{2}p_1$ et $p_3 = \frac{1}{4}p_1$.

On a alors $p_1 + p_2 + p_3 = p_1 + \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{4}p_1 = 1$ d'où $p_1 = \frac{4}{7}$. Ainsi $p_2 = \frac{2}{7}$ et $p_3 = \frac{1}{7}$.

2) a) Les gains possibles de Gnadré sont -500 ; 0 ; 500.

$$X(\Omega) = \{-500; 0; 500\}$$

b) Détermine en fonction de n, la loi de probabilité de X.

$$P(X = -500) = \frac{C_2^1 \times C_n^1}{C_{n+2}^2} + \frac{4}{7} \times \frac{C_2^2}{C_{n+2}^2} = \frac{28n + 8}{7(n+2)(n+1)}$$

$$P(X = 0) = \frac{C_n^2}{C_{n+2}^2} + \frac{2}{7} \times \frac{C_2^2}{C_{n+2}^2} = \frac{7n^2 - 7n + 4}{7(n+2)(n+1)}$$

$$P(X = 500) = \frac{1}{7} \times \frac{C_2^2}{C_{n+2}^2} = \frac{2}{7(n+2)(n+1)}$$

x_i	-500	0	500
$P(X = x_i)$	$\frac{28n + 8}{7(n+2)(n+1)}$	$\frac{7n^2 - 7n + 4}{7(n+2)(n+1)}$	$\frac{2}{7(n+2)(n+1)}$

3) n=5 ;

a) Calcul de E(X).

Pour n=5 :

x_i	-500	0	500
$P(X = x_i)$	$\frac{148}{294}$	$\frac{144}{294}$	$\frac{2}{294}$

$$E(X) = -500 \times \frac{198}{294} + 0 \times \frac{144}{294} + 500 \times \frac{2}{294} = -248{,}3$$

b) Détermine et construis la fonction de répartition F de X.

Si $x < -500$, alors $F(X) = 0$;

Si $-500 \leq x < 0$, alors $F(X) = \frac{148}{294}$;

Si $0 \leq x < 500$, alors $F(X) = \frac{148}{294} + \frac{144}{294} = \frac{292}{294}$;

Si $500 \leq x$, alors $F(X) = 1$;

35

Une maladie est apparue dans le cheptel bovin d'un pays. Elle touche 0,5 % de ce cheptel (ou 5 pour mille).

1. On choisit au hasard un animal dans le cheptel. La probabilité qu'il soit malade est égale à 0,005.

2. On sait que la probabilité qu'un animal ait un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est 0,8. Lorsqu'un animal n'est pas malade, la probabilité d'avoir un test négatif est 0,9. On note T l'évènement « avoir un test positif à cette maladie » et M l'évènement « être atteint de cette maladie ». a. L'arbre pondéré les données de l'énoncé :

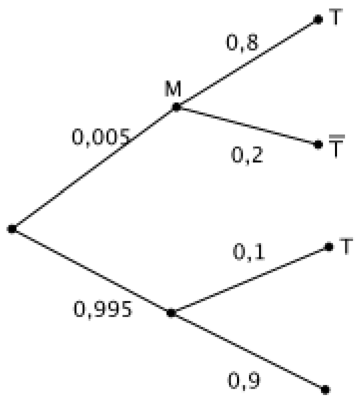
b. Pour calculer la probabilité de l'évènement T on utilise la formule des probabilités totales

p(T) = p(T ∩ M) + p(T∩ $\overline{M}$)) =$P_M(T) \times P(M) + P_{\overline{M}}(T) \times P(\overline{M})$

= 0,8×0,005 + 0,1×0,995 = 0,1035

c. La probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif est définie par

$$P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} = \frac{0{,}005 \times 0{,}8}{0{,}1035} \approx 0{,}0386$$



36

c

Un jeu consiste à miser un euro, puis à lancer deux fois un dé cubique équilibré. Si le joueur obtient un 6, il gagne 5 euros, et s'il obtient deux 6, il gagne 10 euros.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. Le joueur peut gagner 0, 5 ou 10 euros. Comme il mise 1 euro, les valeurs prises par X sont – 1, 4 et 9.

2. p(X = – 1) = p(obtenir 1, 2, 3, 4 ou 5 aux deux lancers) =$\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$.

$p(X = 4)$ = p(obtenir 1, 2, 3, 4 ou 5 à un lancer et 6 à l'autre) = $\frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{10}{36}$.

$p(X = 9)$ = p(obtenir 6 aux deux lancers) =$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

On vérifie que $p(X = -1) + p(X = 4) + p(X = 9) = 1.$

3. L'espérance mathématique de X est égale à E(X) = $-1\frac{25}{36} + 4.\frac{10}{36} + 9.\frac{1}{36} = \frac{25+49}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

37

1. Les valeurs prises par la variable aléatoire X sont 0, 1, 2, 3 ou 4. Comme les bactéries présentes dans le milieu de culture se comportent indépendamment les unes des autres, on obtient :

p(X = 0) = p(la bactérie b_1 meurt et la bactérie $b_2$meurt) = $(p_1)^2$;

p(X = 1) = p(la bactérie b_1 meurt et la bactérie b_2 vit, ou la bactérie b_2 meurt et la bactérie b_1 vit) = $2p_1p_2$;

p(X = 2) = p(les bactéries b_1 et b_2 vivent, ou l'une meurt et l'autre se divise) =
$(p_2)^2 + 2p_1p_3$;

p(X = 3) = p(l'une des bactéries vit et l'autre se divise) = $2p_2p_3$;

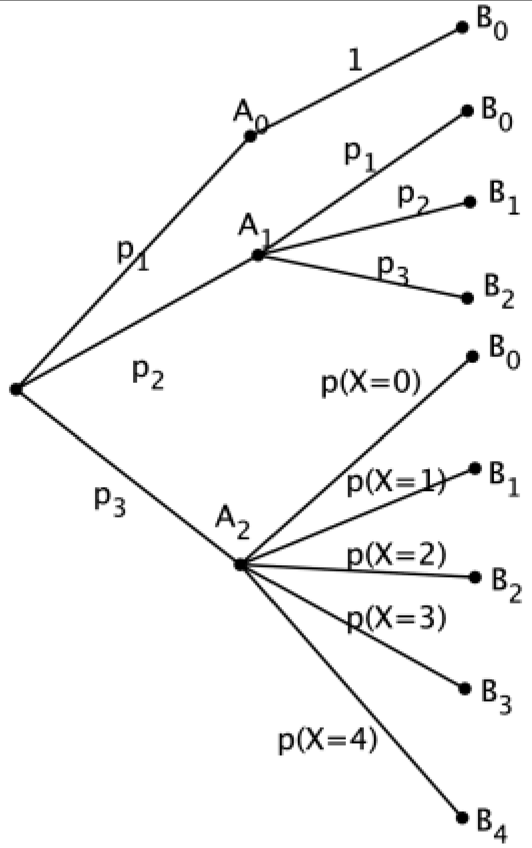
p(X = 4) = p(les bactéries b1 et b2 se divisent) = $(p_3)^2$.

On vérifie que :$\sum_{i=0}^{k=4} p(X = k) = 1$;

$\sum_{i=0}^{k=4} p(X = k) = (p_1)^2 + 2p_1p_2 + (p_2)^2 + 2p_1p_3 + 2p_2p_3 + (p_3)^2 =$
$(p_1 + p_2 + p_3)^2 = 1$

2. On suppose qu'à l'instant t = 0, une seule bactérie est présente dans le milieu de culture.

a) L'arbre de probabilité : A l'instant t = 1, il y a 0, 1 ou 2 bactéries; et à l'instant t = 2, il y a 0, 1, 2, 3 ou 4 bactéries.



b) On désigne par A_1 l'événement « à l'instant t = 1, il y a une bactérie »; B_2 l'événement « à l'instant t = 2, il y a deux bactéries »

La probabilité de $p(A_1 \cap B_2) = p_2p_3$; et p(B_2) = p($A_1 \cap B_2$) + p($A_1 \cap B_2$) =

$p_2p_3 + p_3(p_2)^2 + 2p_1p_3)$ = p3(p2)^2 + p2 p3 + 2p1(p3)^2 .

c) On appelle Y le nombre de bactéries à l'instant t = 2. La loi de probabilité de Y:

Les valeurs prises par la variable aléatoire Y sont 0, 1, 2, 3 ou 4.

$p(Y = 0) = p_1 + p_1 p_é + (p_1)^2 p_3$;

$p(Y = 1) = (p_2)^2 + 2p_1p_2p_3$;

$p(Y = 2) = p_3(p_2)^2 + p_2\, p3 + 2p1(p_3)^2$;

$p(Y = 3) = 2p_2(p_3)^3$;

$p(Y = 4) = (p_3)^3$.

On vérifie que :p_1, en utilisant l'arbre

$\sum_{i=0}^{k=4} p(Y = k) = p_1 + p_2(p_1 + p_2 + p_3) + p_3 \sum_{k=0}^{k=4} p(Y = k) = p_1 + p_2 + p_3 = 1$

38

La proportion d'huîtres de chaque catégorie est: pour les petites 13 % ; pour les moyennes 54 % ;pour les grandes 33 %

a) L'arbre des probabilités :

b) On utilise la formule des

Catégorie	P	M	G
Probabilité	0,035	0,06	0,045

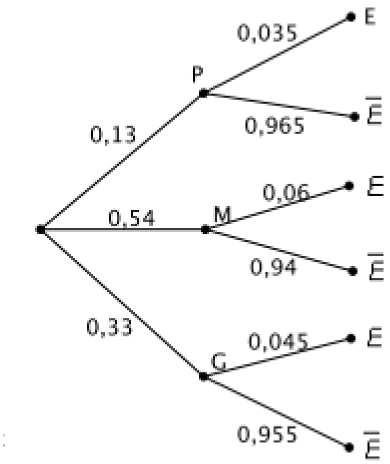
d'erreur			

Probabilités totales :

$$p(E) = p(E \cap P) + p(E \cap M) + p(E \cap G)$$

$= 0,13 \times 0,035 + 0,54 \times 0,06 + 0,33 \times 0,045 = 0,0518.$

c) La probabilité qu'une huître soit moyenne sachant qu'elle a été mal triée est : définie par :$P_E(M) = \frac{p(E\cap M)}{p(E)} = \frac{0,54\times 0,006}{0,0518} = 0,625$



39

1. On tire au hasard de l'urne un paquet de trois jetons.

a) L'ensemble des issues de cette expérience aléatoire est formé des triplets de trois lettres deux à deux distinctes choisies parmi les lettres A, B, C, D, E, F.

b) Card $\Omega = C_6^3 = 20$.

2. a) On dénombre les triangles rectangles : à partir de chaque sommet, exemple A, on forme deux triangles rectangles, comme ABD et AFD; il y a six sommets, donc 12 triangles rectangles. Ainsi $p(R) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

b) Il n'y a que deux triangles équilatéraux : ACE et BDF, donc p(L) $= \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.

A partir de chaque sommet, exemple A, on forme un triangle isocèle non équilatéral, ABF; il y a six sommets, donc 6 triangles isocèles. Ainsi $p(I) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

On s'aperçoit que les 20 triangles ont été dénombrés parmi les triangles rectangles, isocèles et équilatéraux, donc p(Q) = 0.

3. On réitère dix fois cette expérience de tirer trois jetons de l'urne, en remettant les jetons dans l'urne après chaque tirage. Soit X le nombre de triangles rectangles ; X suit une loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{3}{5}$, car l'épreuve de Bernoulli qui consiste à tirer trois jetons de l'urne se répète de manière identique et indépendante.

Donc pour tout entier k compris entre 0 et 10, $p(X = k) = C_{10}^k \times (\frac{3}{5})^k \times (\frac{2}{5})^{10-k}$.

Donc, la probabilité d'obtenir exactement trois triangles rectangles est égale à

$$p(X = 3) = C_{10}^3 \times (\frac{3}{5})^3 \times (\frac{2}{5})^7 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} \times \frac{3^3 \times 2^7}{5^{10}} = \frac{3^4 \times 2^{10}}{5^9} = \frac{81 \times 1024}{5^9} = 0,04246$$

40

1. Dans cette question, on suppose n = 6. Le nombre de boules est alors 10.
Les tirages sont équiprobables et simultanés, donc le nombre de tirages possibles est égal à

$$C_{10}^2 = 45.$$

La probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur est égale à la probabilité d'obtenir deux boules vertes + la probabilité d'obtenir deux boules blanches $=\frac{C_6^2+C_4^2}{45} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$;

La probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes est égale à la probabilité d'obtenir une boule verte et une boule blanche = $\frac{C_6^1 \times C_4^1}{45} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$

2. Dans cette question l'entier n est quelconque supérieur ou égal à 2, et on note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe le gain algébrique du joueur. Les valeurs prises par la variable aléatoire X sont – 1 et 4.

a) Le nombre de tirages possibles est égal à $C_{n+4}^2 = \frac{(n+4)(n+3)}{2}$

p(X = 4) = p(obtenir deux boules de la même couleur)

$$\frac{C_4^2 + C_n^2}{\frac{(n+4)(n+3)}{2}} = \frac{6 + \frac{n(n-1)}{2}}{\frac{(n+4)(n+3)}{2}} = \frac{12 + n(n-1)}{(n+4)(n+3)}$$

p(X = – 1) = p(obtenir deux boules de couleurs différentes) = $\frac{C_4^1 \times C_n^1}{\frac{(n+4)(n+3)}{2}} = \frac{8n}{(n+4)(n+3)}$

b) L'espérance mathématique de X est égale à $E(X) = 4 \times \frac{12+n(n-1)}{(n+4)'n+3)} - 1 \times \frac{8n}{(n+4)(n+3)} = \frac{4n^2-12n+48}{(n+4)(n+3)}$.

c) Pour avoir E(X) = 0, il faut que $4n^2 - 12n + 48 = 0$; or le discriminant est strictement négatif, donc il n'y a aucune valeur de n pour laquelle E(X) = 0

41

1. Le nombre de tirages possibles de deux boules de l'urne est égal à C_{10}^2 = 45.
$p(V) = \frac{C_4^2}{45} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$; p(J) = = $\frac{C_6^2}{45} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$, $p(R) = p(J) + p(V \cap$ U) ; l'évènement U « il tourne la roue et est remboursé de sa participation ») .
, $p(R) = \frac{1}{3} + \frac{2}{15} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{12}$

2. On appelle X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
a) Les valeurs prises par X sont $-m, 0, 20 - m, 100 - m$.
$p(X = -m) = p($« tirer deux boules de couleurs différentes ») = 1 – p(V) – p(J) $=\frac{8}{15}$;
p(X = 0) = p(R) $=\frac{5}{12}$; p(X = 20 – m) = p(V ∩« il tourne la roue et gagne 2000 F ») $=\frac{2}{15} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{30}$
p(X = 10 000 – m) = p(V ∩« il tourne la roue et gagne 10 000 F ») = $\frac{2}{15} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{60}$.

b) $E(X) = - m \times p(X = - m) + 0 \times p(X = 0) + (2000 - m) \times p(X = 2000 - m) + (10\,000 - m) \times p(X = 10\,000 - m) = \frac{-8m}{15} + \frac{2000-m}{30} + \frac{10000-m}{60} = \frac{-32m+4000-2m+10000-m}{60} = \frac{14\,000-35m}{60} = \frac{2800-7m}{12}$

3. La valeur minimale de m pour que l'organisateur puisse espérer ne pas perdre d'argent doit vérifier $E(X) \leq 0$, soit $\frac{2800-7m}{12} \leq 0$

$\frac{2800-7m}{12} \leq 0 \Leftrightarrow 2800 - 7m \leq 0$, Soit $m \geq 400$.

Donc la valeur minimale de m pour que l'organisateur puisse espérer ne pas perdre d'argent est égale à 400 F.

42

1. a. On a une loi binomiale de paramètres $p = \frac{1}{4}$ et n = 50

b. On a $E = np = 50 \times \frac{1}{4} = 12,5$. (tulipes jaunes)

c. On a : $P(X = n) = C_{50}^{n} \times (\frac{1}{4})^{n} \times (\frac{3}{4})^{50-n} = C_{50}^{n} \times \frac{3^{50-n}}{4^{50}}$;

d. $p(X = 15) = C_{50}^{15} \times \frac{3^{35}}{4^{50}} = 0{,}089$

2. a. Si le lot choisi est le 2, on a autant de chances d'avoir une tulipe jaune que le contraire. La loi binomiale a ici pour paramètres n = 50 et p = 1 2 . La probabilité d'obtenir n tulipes jaunes est donc :

$$p_n(J_n) = C_{50}^{n} \times (\frac{1}{2})^{n} \times (\frac{1}{2})^{50-n} = C_{50}^{n} \times \frac{1}{2^{50}} = C_{50}^{n} \times 2^{-50}$$

b. De la même façon que précédemment $p_A(J_n) = C_{50}^{n} \times \frac{3^{50-n}}{4^{50}}$. A et B forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales,

$$P(J_n) = P(A \cap J_n) + P(B \cap J_n) = P(A) \times p_A(J_n) + P(B) \times p_B(J_n)$$
$$= \frac{1}{2} \times C_{50}^{n} \times \frac{3^{50-n}}{4^{50}} + \frac{1}{2} \times C_{50}^{n} \times \frac{1}{2^{50}}$$
$$= \frac{1}{2} \times C_{50}^{n}(\frac{3^{50-n}}{4^{50}} + \frac{1}{2^{50}})$$
$$= \frac{1}{2} \times C_{50}^{n}(\frac{3^{50-n}+2^{50}}{4^{50}})$$

c. $p_n = p_{J_n}(A) = \frac{P(A\cap J_n)}{P(J_n)} = \frac{\frac{1}{2}\times C_{50}^{n}\times\frac{3^{50-n}}{4^{50}}}{\frac{1}{2}\times C_{50}^{n}(\frac{3^{50-n}+2^{50}}{4^{50}})} = \frac{3^{50-n}}{3^{50-n}+2^{50}}$

d. $p_n \geq 0{,}9 \Leftrightarrow 3^{50-n} \geq 0{,}9(3^{50-n} + 2^{50}) \Leftrightarrow 0{,}1 \times 3^{50-n} \geq 0{,}9 \times 2^{50} \Leftrightarrow 3^{50-n} \geq 9 \times 2^{50}$

$$(50 - nln3) \geq ln9 + 50ln2 \Leftrightarrow -nln3 \geq ln9 + 50ln2 - 50ln3 \Leftrightarrow n \leq \frac{ln9 + 50ln2 - 50ln3}{-ln3}$$
$$\Leftrightarrow n \leq 16{,}4$$

Conclusion : il faut que n < 17.

Interprétation : Si le nombre de tulipes jaunes est peu élevé (ici moins de 17) la probabilité d'avoir choisi le lot 1 est très grande ; si ce nombre de tulipes jaunes se rapproche de 25 sur 50, la probabilité est grande que le lot choisi soit le lot 2.

43

• A_0 : On n'a obtenu aucune boule noire.

- A_1 : On a obtenu une seule boule noire.
- A_2 : On a obtenu deux boules noires

Il y a un total de 10 boules (8 rouges et 2 noires). Le nombre total de façons de choisir 2 boules parmi 10 est : $P(A_0) = \frac{C_8^2}{45} = \frac{28}{45}$

Pour A_1 (une seule boule noire) : $P(A_1) = \frac{C_2^1 \times C_8^1}{45} = \frac{16}{45}$

Pour A_2 (deux boules noires) :$P(A_2) = \frac{C_2^2}{45} = \frac{1}{45}$

2. Probabilités conditionnelles pour B_0, B_1, B_2

Nous considérons les événements après le premier tirage.

a) Calcul des probabilités conditionnelles $P(B_0|A_0)$, $P(B_1|A_1)$, $P(B_2|A_2)$

• $P(B_0|A_0)$: après A_0, il reste 6 rouges et 2 noires.

$P(B_0|A^0) = \frac{P(B_0 \cap A_0)}{P(A_0)} = \frac{C_6^2}{C_8^2} = \frac{15}{28}$

• $P(B_1|A_1)$: après A_1, il reste 7 rouges et 1 noire.

$P(B_1|A_1) = \frac{P(B_1 \cap A_1)}{P(A_1)} = \frac{C_7^1 \times C_1^1}{C_8^2} = \frac{1}{4}$

• $P(B_2|A_2)$: après A_2, il reste 8 rouges.

$P(B_2|A_2)=0$

b) Calcul de $P(B_0)$

Utilisons la loi des totalités :

$P(B_0) = P(B^0|A^0) \times P(A_0) + P(B_0|A_1) \times P(A_1) + P(B_0|A_2) \times P(A_2)$

Avec $P(B_0|A_1) = 1 - P(B_1|A_1) - P(B_2|A_1) = 1 - \frac{1}{4} - 0 = \frac{3}{4}$

$P(B_0) = \frac{15}{28} \times \frac{28}{45} + \frac{3}{4} \times \frac{16}{45} + 0$

$P(B_0) = \frac{3}{5}$

c) Calcul de $P(B_1)$ et $P(B_2)$

$P(B_1) = P(B_1|A^0) \times P(A_0) + P(B_1|A_1) \times P(A_1) + P(B_1|A_2) \times P(A_2)$

Avec $P(B_1|A^0) = 0$; $P(B_1|A_2) = 0$

$P(B_1) = 0 + \frac{1}{4} \times \frac{16}{45} + 0 = \frac{4}{45}$

$P(B_2) = 0$

d) Probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire au premier tirage sachant qu'on a obtenu une seule boule noire au second tirage

Utilisons le théorème de Bayes :

$$P(A_1|B_1) = \frac{P(B_1 \cap A_1)}{P(B_1)} = \frac{P(B_1/A_1) \times P(A_1)}{P(B_1)}$$

$$P(A_1|B_1) = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{16}{45}}{\frac{4}{45}} = 1$$

3. Événement R : « il a fallu exactement les deux tirages pour que les deux boules noires soient extraites »
Cet événement se produit si le premier tirage est A_1 (une noire) et le second est B_2 (deux noires)
$\boldsymbol{P(R) = P(B_2/A_1) \times P(A_1) = P(A_1) \times 0 = 0}$

44

1. Les tirages de 4 boules étant simultanés, il n'y a ni ordre ni remise; il s'agit donc de de combinaisons.
$P(A) = \frac{C_7^3 \times C_3^1}{C_{10}^4} = \frac{1}{2}$ et $P(B) = \frac{C_7^2 \times C_3^2 + C_7^1 \times C_3^3}{C_{10}^4} = \frac{1}{3}$
2. a) X prend ses valeurs dans $\{1000;\ 0;\ -\ 500\}$;
de plus $p(X = 0) = p(A) = \frac{1}{2}$ et p(X = – 500) = p(B) = $\frac{1}{3}$; p(X = 1000) = p(obtenir 4 boules rouges) = $\frac{1}{6}$.

x	-500	0	1000
P(X=x)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

b) L'espérance mathématique de X est E(X) = – 500 × $\frac{1}{3}$ +1000× $\frac{1}{6}$=0. Donc le jeu est équitable.

45

1. a) $P_{R_n}(R_{n+1}) = \frac{1}{20}$ « probabilité que l'employé soit en retard le jour n+1, sachant qu'il était en retard la veille ».
$P_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) = \frac{1}{5}$ « probabilité que l'employé soit en retard le jour n+1, sachant qu'il n'était pas en retard la veille »
b) $P(R_n \cap R_{n+1}) = P_{R_n}(R_{n+1}) \times P(R_n) = \frac{1}{20} p_n$ et

$$P(\overline{R_n} \cap R_{n+1}) = P_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) \times P(\overline{R_n}) = \frac{1}{5} q_n$$

c) En utilisant la formule des probabilités totales,

$$P_{n+1} = P(R_{n+1}) = P(R_n \cap R_{n+1}) + P(\overline{R_n} \cap R_{n+1}) = \frac{1}{20} p_n + \frac{1}{5} q_n$$

d) Comme $q_n = 1 - p_n$, on a :$P_{n+1} = \frac{1}{20} p_n + \frac{1}{5}(1 - p_n) = \frac{1}{5} - \frac{3}{20} p_n$

2. a) $v_{n+1} =: P_{n+1} - \frac{3}{23} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20} p_n - \frac{3}{23} = \frac{3}{115} - \frac{3}{20} p_n = -\frac{3}{20}(p_n - \frac{4}{23}) = -\frac{3}{20} v_n$.
Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{3}{20}$ et son premier terme est :

$$v_1 = p_1 - \frac{4}{23} = \frac{-4}{23}$$

b) Donc $v_n = \frac{-4}{23} (\frac{-3}{20})^{n-1}$ et $p_n = v_n + \frac{4}{23} = \frac{4}{23}(1 - (\frac{-3}{20})^{n-1})$
c) La raison de la suite (v_n) : $0 < \left|-\frac{4}{23}\right| < 1$, donc la limite de (v_n) est 0; ainsi la suite (p_n) converge vers $\frac{4}{23}$.

46

1) Écrire les probabilités correspondantes aux données puis construire un arbre pondéré. $p(M) = 0{,}12$, $p(S) = 0{,}71$, $p(AT) = 1 - P(M) - P(S) = 1 - 0{,}12 - 0{,}71 - 0{,}17$

On utilise les évènements H pour les hommes et F pour les femmes : $P_M(H) = 0{,}67$; $P_S(F) = 0{,}92$

a) La personne interrogée soit une femme soignante

$P(S \cap F) = P_S(F) \times P(S) = 0{,}71 \times 0{,}92 = 0{,}6532$

b) la personne interrogée soit une femme médecin

$P_M(F) = 1 - P_M(H) = 1 - 0{,}67 = 0{,}33$

$P(M \cap F) = P_M(F) \times P(M) = 0{,}12 \times 0{,}33 = 0{,}0396$

2) On sait que 80% du personnel est féminin.

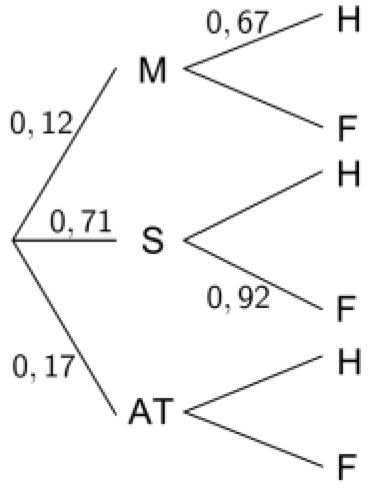
a) Calculons la probabilité que la personne interrogée soit une femme AT. 80% du personnel est féminin : p(F)= 0,8.

M, S et AT forment une partition de l'univers. D'après la loi des probabilités totales :

$P(T) = P(M \cap F) + P(S \cap F) + P(AT \cap F) \Leftrightarrow P(AT \cap F) = P(T) - P(M \cap F) - P(S \cap F)$

$P(AT \cap F) = 0{,}8 - 0{,}0392 - 0{,}6532 = 0{,}1072$

b)



c) Détermine la probabilité d'interroger une femme sachant qu'elle fait partie du personnel AT

En déduire la probabilité que la personne interrogée soit une femme sachant que cette personne interrogée est AT.

$$P_{AT}(F) = \frac{P(AT \cap F)}{P(AT)} = \frac{0{,}1072}{0{,}17} = 0{,}6306$$

47

1. a) On fait un tirage d'un jeton dansS1. L'ensemble deséventualités□₁ est l'ensemble des tiragespossibles d'un jeton parmi trois. On suppose que les éventualités sont équiprobables, et comme le sacS1contientunseuljetonblanc,laprobabilitéd'obtenirunjetonblancest :

$P(E_1) = \frac{Card\ E_1}{Card\ \Omega_1}$ donc $P(E_1) = \frac{1}{3}$

Enappelant□2l'ensembledestiragessuccessifsd'unjetondansS1puisd'unjetondansS2,onpeutdireque:

- SiE_1estréalisé,ledeuxièmesaccontient2jetonsblancset1jetonnoir,laprobabilitédetirerun jetonblancdeS2estalorségaleà**E r r o r** (ensupposantlestirageséquiprobables)

  Donc $P_{E_1}(E_2) = \frac{2}{3}$

- Si$\overline{E_1}$estréalisé,ledeuxièmesaccontient2jetonsnoirset1jetonblanc,laprobabilitédetirerun

jetonblancdeS2estalorségaleà$\frac{1}{3}$ (ensupposantlestirageséquiprobables).

Donc $P_{\overline{E_1}}(E_2) = \frac{1}{3}$

SachantqueE_2 estlaréuniondesdeuxévénementsincompatibles $(E_2 \cap E_1)$ et $(E_2 \cap \overline{E_1})$ On peut écrire,enutilisantlaformuledesprobabilitéstotales

P(E_2) = P$(E_2 \cap E_1)$ + P$(E_2 \cap \overline{E_1})$ = $P_{E_1}(E_2)$ ×P(E_1) + $P_{\overline{E_1}}(E_2)$×P$(\overline{E_1})$

Comme P$(\overline{E_1}) = 1 - P(E_1) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ On obtient **P(E_2)** $= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

P(E_2) $= \frac{4}{9}$

b) De la même façon que précédemment, pour tout entier k tel que$1 \leq k \leq n$, en se plaçant dansl'ensemble □k des éventualités de k tirages successifs d'un jeton dans S1, puis dans S2, ⋯, puis dansSk,onobtient:

- Si$E_k$estréalisé,le(k+1)èmesaccontient2jetonsblancset1jetonnoir.Laprobabilitédetirerun jeton blancdeS(k+1)estalorségaleà$\frac{2}{3}$ (ensupposantlestirageséquiprobables).

  Donc $P_{E_k}(E_{k+1}) = \frac{2}{3}$

  - Si$\overline{E_k}$estréalisé,ledeuxièmesaccontient2jetonsnoirset1jetonblanc,laprobabilitédetirerun jeton blancdeS(k+1)estalorségaleà$\frac{1}{3}$ (ensupposantlestirageséquiprobables)

  Donc $P_{\overline{E_k}}(E_{k+1}) = \frac{1}{3}$

SachantqueE_{k+1} estlaréuniondesdeuxévénementsincompatibles $(E_{k+1} \cap E_k)$ et $(E_{k+1} \cap \overline{E_k})$ On peut écrire,enutilisantlaformuledesprobabilitéstotales

P(E_{k+1}) = P$(E_{l+1} \cap E_k)$ + P$(E_{k+1} \cap \overline{E_k})$ = $P_{E_k}(E_{k+1})$ ×P(E_k) + $P_{\overline{E_k}}(E_{k+1})$×P$(\overline{E_k})$

P(E_{k+1}) = $\frac{2}{3}$P(E_k) + $\frac{1}{3}$×P$(\overline{E_k})$

Soit $p_{k+1} = \frac{2}{3}p_k + \frac{1}{3}(1 - p_k) = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}$

$$p_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}$$

2) a) **Erratum :** A corriger $v_k = u_k - \frac{1}{2}$ et non $v_{k+1} = u_k - \frac{1}{2}$

$v_{k+1} = u_{k+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}u_k + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}u_k - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}(u_k - \frac{1}{2}) = \frac{1}{3}v_k$

Pour tout entier naturel k, $v_{k+1} = \frac{1}{3}v_k$ c'est-à-dire (v_k) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

b) $u_k = v_k + \frac{1}{2}$

$\lim_{k\to+\infty} u_k = \lim_{k\to+\infty} (v_k + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ car $\lim_{k\to+\infty} v_k = 0$. Car la raison q de la suite (v_k) est telle que

$-1 < q < 1$

3.

(v_k) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$. Donc pour tout entier non nul, $v_k = v_1\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

$v_1 = u_1 - \frac{1}{2} = = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$

Pour tout entier naturel k non nul, $v_k = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ et $u_k = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} + \frac{1}{2}$

$0{,}499 \leq p_k \leq 0{,}5 \Leftrightarrow 0{,}499 \leq -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} + \frac{1}{2} \leq 0{,}5 \Leftrightarrow 0 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{k} \leq 0{,}0002$

$0 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{k} \leq 0{,}0002$, alors $ln\left(\frac{1}{3}\right)^{k} \leq 0{,}0002$ soit $-k\ ln3 \leq ln0{,}0002$ et $ln3 > 0$ soit $k \geq -\frac{\ln 0{,}0002}{ln3}$

$$-\frac{\ln 0{,}0002}{ln3} \approx 7{,}75$$

$0{,}499 \leq p_k \leq 0{,}5 \Leftrightarrow 8 \leq k \leq 10$

48

1. Lancer deux fois une pièce de monnaie

a) Quelle est la probabilité d'obtenir deux piles ?

La probabilité d'obtenir deux piles :

Soit K l'évènement « obtenir deux piles »est donc : $P(K) = \frac{1}{4}$

b) la probabilité d'obtenir un pile et un face sachant que le premier lancer a donné un pile

$P(PF \mid P) = \frac{1}{2}$

c) On considère les évènements : A : « on a obtenu un pile et un face » ; B : «on a obtenu un au plus un pile ».

$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{3}{4}$

Soit l'Évènement A∩B : "on a obtenu un pile et un face" (qui est aussi un casavec au plus un pile)

$P(A \cap B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$

$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ donc les évènements A et B ne sont pas indépendants.

2.a) Précise l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.

$X \in \{0; 1: 2; 3\}$

b) Détermine la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

X suit une loi binomiale de paramètre n=3 et $p = \frac{1}{2}$, car chaque lancer est indépendant

c) Détermine l'espérance mathématique de X.

$E(X) = n \cdot p = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

49

1. Notons A l'événement : « la graine est de type A », B l'événement : « la graine est de type B », C l'événement : « la graine est de type C », et G l'événement : « la graine germe correctement ».

a) La probabilité que ce soit une graine de type A est $p(A) = \frac{50}{50+90+60} = 0{,}25$

b) La probabilité que ce soit une graine de type A et que celle-ci germe correctement est : $p(A \cap G) = 0{,}25 \times 0{,}5 = 0{,}125$

c) La probabilité que la graine germe correctement est p(G), les événements A, B, C forment une partition de l'univers, donc en utilisant la formule des probabilités totales :

$p(G) = p(A \cap G) + p(B \cap G) + p(C \cap G) = 0{,}125 + 0{,}45 \times 0{,}8 + 0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}665$; d) la probabilité que la graine soit une graine de type C qui ne germe pas correctement est $p(C \cap G) = 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}12$

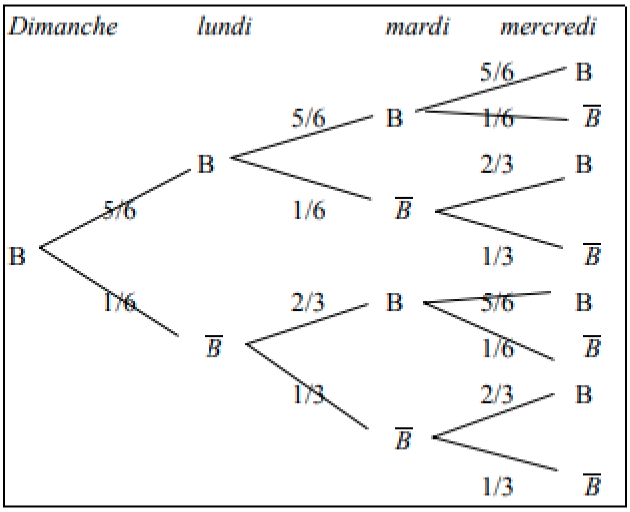
2. Cette probabilité est $P_G(A) = \frac{P(A \cap G)}{P(G)} = \frac{0{,}25 \times 0{,}5}{0{,}665} = \frac{25}{133}$

La probabilité qu'au moins une de ces graines germe correctement est

$p(U) = 1 - p(\overline{U}) = 1 - (1 - 0{,}665)^4 = 1 - 0{,}3354 \simeq 0{,}9874.$

50

1) Notons B l'événement : « il fait beau » ; 1. La probabilité qu'il fasse beau lundi est 5/6, la probabilité qu'il fasse beau mardi est $\frac{25}{36} + \frac{2}{18} = \frac{29}{36}$ et la probabilité qu'il fasse beau mercredi est $\frac{125}{216} + \frac{10}{108} + \frac{10}{108} + \frac{2}{54} = \frac{173}{216}$



2. On a : $p_n = \frac{5}{6}p_{n-1} + \frac{2}{3}q_{n-1}$ et $q_n = \frac{1}{6}p_{n-1} + \frac{1}{3}q_{n-1}$.

Ainsi $p_n = \frac{5}{6}p_{n-1} + \frac{2}{3}(1 - p_{n-1}) = p_n = \frac{1}{6}p_{n-1} + \frac{2}{3}$.

3. On a : $u_{n+1} = p_{n-1} - 0{,}8 = \frac{1}{6}p_n + \frac{2}{15} = \frac{1}{6}(p_n - 0{,}8) = \frac{1}{6}u_n$, donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$ et de premier terme $u_0 = p_0 - 0{,}8 = 0{,}2$

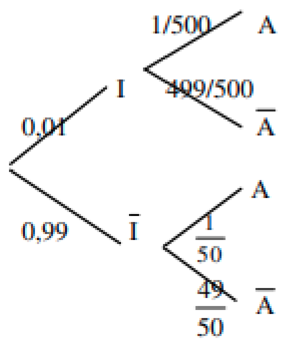
4. Donc

$u_n = 0{,}2(\frac{1}{6})^n$ et $p_n = u_n + 0{,}8 = 0{,}2(\frac{1}{6})^n + 0{,}8$. La raison de la suite (u_n) est strictement comprise entre 0 et 1 donc la suite (u_n) converge vers 0 ; donc la suite (p_n) converge vers 0,8. Sur le long terme, il fera beau avec une probabilité de 80%

51

PARTIE A :

1.a) Réalisation de l'arbre.



b) La probabilité que, dans une journée, un incident survienne et que l'alarme se déclenche est $P(A \cap I) = 0{,}01 \times \frac{1}{500} = \frac{1}{50000}$.

c) La probabilité que l'alarme se déclenche est $p(A) = p(A \cap I) + p(A \cap \overline{I}) = \frac{1}{50000} + 0{,}99 \times \frac{1}{50} = \frac{1489}{50\,000} = 0{,}02978$.

2. La probabilité que, sur une journée, le système d'alarme soit mis en défaut est :

$p(\overline{A} \cap I) + p(A \cap \overline{I}) = 0{,}99 \times \frac{49}{50} + 0{,}99 \times \frac{1}{50} = 0{,}01982$

3. La probabilité qu'il y ait réellement un incident sachant que l'alarme vient de se déclencher est $P_A(I) = \frac{P(A \cap I)}{P(A)} = \frac{499}{50000} \times \frac{50000}{1489} = \frac{499}{1489}$

PARTIE B :

a) La variable aléatoire X prend les valeurs 0, 10 000, 100 000, 150 000, avec les probabilités : $p(X = 0) = p(\overline{A} \cap \overline{I}) = \frac{99}{100} \times \frac{49}{50} = \frac{4861}{5000}$; $p(X = 10000) = p(A \cap \overline{I}) = \frac{99}{5000}$;
$p(X = 100000) = p(A \cap I) = \frac{499}{500} \times \frac{1}{100} = \frac{499}{5000}$ et $p(X = 150\,000) = p(\overline{A} \cap I) = \frac{1}{50000}$.

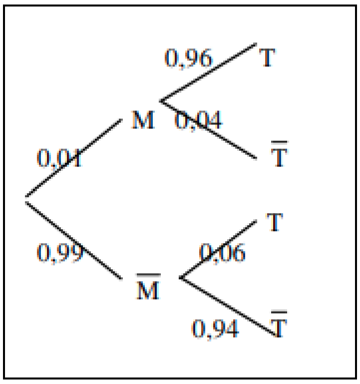
X	0	10 000	100 000	150 000
P(X=x_i)	$\frac{4861}{5000}$	$\frac{99}{5000}$	$\frac{499}{5000}$	$\frac{1}{5000}$

b) L'espérance mathématique de X est
$E(X) = 0 \times p(X = 0) + 10000 \times p(X = 100) + 100000 \times p(X = 10000) + 150000 \times p(X = 15000) = \frac{5104}{50} = 10208\,F$.

52

a)$P_M(T) = 0{,}96$ 0 , signifie que la probabilité qu'un individu malade obtienne un test positif est de 0,96. $P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0{,}94$ 0 94 , signifie que la probabilité qu'un individu en bonne santé obtienne un test négatif est de 0,94. P(M) = 0,01signifie que la probabilité qu'un individu de la population soit malade est de 0,01.

b) L'arbre ci-contre :



c) La probabilité pour qu'un individu dont le test est positif, soit atteint de la maladie est :$P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)}$

Calculons P(T) = P(T∩M) + P(T∩ $\overline{M}$) = 0,01x0,96 + 0,99x0,06 = 0,069 ;

d'où $P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} = \frac{P_M(T) \times P(M)}{P(T)} = \frac{0{,}96 \times 0{,}01}{0{,}069} = 0{,}13913$

d) Calculons la probabilité pour qu'un individu dont le test est positif, soit en bonne santé.

$P_{\overline{T}}(\overline{M}) = 1 - P_{\overline{T}}(M) = 0{,}86087$

53

Notons A l'événement : « Le boulon est fabriqué par la machine A », B l'événement : « Le boulon est fabriqué par la machine B », C l'événement : « Le boulon est fabriqué par la machine C », et D l'événement : « Le boulon est défectueux ». La probabilité que le boulon défectueux ait été fabriqué par la machine C est :$P_D(C) = \frac{P(D \cap C)}{P(D)}$

La probabilité que le boulon soit défectueux est : $P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C)$

$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C) = 0{,}60 \times 0{,}02 + 0{,}30 \times 0{,}03 + 0{,}10 \times 0{,}04 = 0{,}025$

Donc : $P_D(C) = \frac{P(D \cap C)}{P(D)} = \frac{0{,}1 \times 0{,}04}{0{,}025} = 0{,}16$

54

Exercice 54

Erratum b) pour $n \in \mathbb{N}^*$ au lieu pour $n \in \mathbb{N}$,

Il s'agit d'un schéma de Bernouilli avec 2n lancers et une probabilité de succès pour chaque lancer de $\frac{1}{2}$.

La probabilité d'obtenir 4 piles en lançant 8 fois la pièce est : $C_8^4 (\frac{1}{2})^4 (\frac{1}{2})^{8-4} = \frac{70}{2^8} = \frac{35}{128}$.

la probabilité d'obtenir 6 piles en lançant 12 fois la pièce est :

$C_{12}^6 (\frac{1}{2})^6 (\frac{1}{2})^{12-6} = \frac{924}{2^{12}} = \frac{231}{1024}$ on a $\frac{231}{1024} < \frac{35}{128}$, donc on a plus de chance d'obtenir 4 piles en lançant 8 fois la pièce que d'obtenir 6 piles en lançant 12 fois la pièce.

1. a) Exprimons P(n) en fonction de n.

$P(n) = C_{2n}^n (\frac{1}{2})^n (\frac{1}{2})^{2n-n} = C_{2n}^n (\frac{1}{2})^{2n} = C_{2n}^n \frac{1}{2^{2n}}$ de plus

b) $P(n+1) = C_{2(n+1)}^{n+1} (\frac{1}{2})^{n+1} (\frac{1}{2})^{2(n+1)-(n+1)} = C_{2(n+1)}^{n+1} \frac{1}{2^{2n+2}}$

pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\boldsymbol{P(n+1)}}{\boldsymbol{P(n)}} = \frac{C_{2(n+1)}^{n+1}\frac{1}{2^{2n+2}}}{C_{2n}^{n}\frac{1}{2^{2n}}} = \frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}}{\frac{(2n)!}{n!n!}} \times \frac{1}{4} = \frac{(2n+2)(2N=1)}{4(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2(n+1)}$

2.a)

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est une loi binomiale de paramètres 2n et $\frac{1}{2}$; d'où

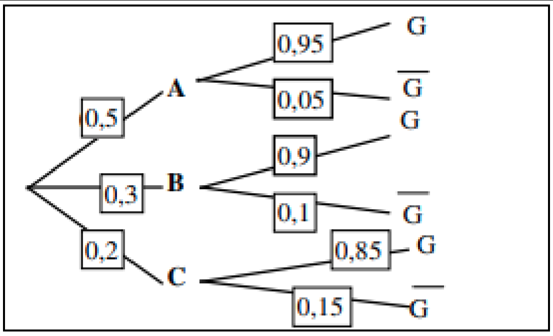
$P(X = k) = C_{2n}^{k}(\frac{1}{2})^k(\frac{1}{2})^{2n-k}$

b) L'espérance mathématique de X est égale au produit des paramètres egale à : n

55

a) L'arbre pondéré :

b) La probabilité de l'événement : « L'ampoule est bonne et fabriquée par A »
p(A∩G) = 0,5 x 0,95 = 0,475.



d) La probabilité de l'événement : « L'ampoule est bonne »
p(A∩G) + p(B∩G) + p(C∩G) = 0,475 + 0,3x0,9 + 0,2x0,85 = 0,91

e) On cherche la probabilité de A sachant G :

$$P_G(A) = \frac{P(A \cap G)}{P(G)} = \frac{0{,}475}{0{,}915} = 0{,}519$$

e) Les valeurs prises par X sont 0, 1, 2. La loi de probabilité de X est donnée par le tableau :

k	0	1	2
$P(X = k)$	0,007	0,155	0,837

L'espérance mathématique de X est E(X) = 1 x 0,155 + 2 x 0,837 = 1,829.

56

1) Détermination des probabilités P(A) et P(B)

Total des combinaisons possibles :

Il y a un total de 10 boules (7 rouges et 3 jaunes). On tire 2 boules, donc le nombre total de combinaisons possibles est donné par :

Card(Ω)=$C_{10}^2 = 45$

Événement A : « les deux boules sont de la même couleur »

Les deux boules peuvent être soit rouges, soit jaunes.

• Deux boules rouges :

le nombre de façons de tirer 2 boules rouges parmi 7 est :$C_7^2 = 21$

•Deux boules jaunes :

le nombre de façons de tirer 2 boules rouges parmi 3 est : $C_3^2 = 3$

$$P(A) = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$$

Evénement B : « les deux boules sont de couleurs différentes »

Le nombre de façons de tirer 1 boule rouge parmi 7 et 1 boule jaune parmi 3 est : $7 \times 3 = 21$

$$P(B) = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$$

2.a) Loi de probabilité de X et espérance mathématique

X est la somme des chiffres des deux boules tirées. Les boules rouges ont la valeur 1 et les boules jaunes ont la valeur 0.

Les cas possibles pour X :

• 2 boules rouges (X = 1 + 1 = 2)) ;

• Une boule rouge et une boule jaune (X = 1 + 0 = 1)

• Deux boules jaunes (X = 0 + 0 = 0)

X	0	1	2
P(X=x)	$\frac{3}{45} = \frac{1}{15}$	$\frac{21}{45} = \frac{7}{15}$	$\frac{21}{45} = \frac{7}{15}$

b) l'espérance mathématique E(X) :

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{15} + 1 \times \frac{7}{15} + 2 \times \frac{7}{15} = \frac{21}{15} = \frac{7}{5}$$

Situations d' évaluation

57

Pour résoudre ce problème, nous allons utiliser le théorème de Bayes pour déterminer la probabilité que Soukroumdé n'ait pas traité l'exercice sur la compétence A étant donné qu'il n'a pas suivi le cours de rattrapage.

Notations

- R : Événement « Soukroumdé a suivi le cours de rattrapage ».
- $\overline{R}$: Événement « Soukroumdé n'a pas suivi le cours de rattrapage ».
- T : Événement « Soukroumdé n'a pas traité la compétence A ».

Données

- $P(T/\overline{R}) = 0{,}30$ (30% des élèves qui n'ont pas suivi le cours ne traitent pas l'exercice).
- $P(T/R) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$ (1/6 des élèves ayant suivi le cours ne traitent pas l'exercice).
- $P(R) = 0{,}20$ (20% des élèves suivent le cours).
- $P(\overline{R}\,) = 1 - P(R) = 0{,}80$.

Calcul des probabilités

- **P(T) : Probabilité totale de ne pas traiter l'exercice** :

Utilisons la formule de la probabilité totale :

$$P(T) = P(T/R) \times P(R) + P(T/\overline{R}) \times \overline{R}$$

Calculons :

$$P(T) = \frac{1}{6} \times 0{,}20 + 0{,}30 \times 0{,}80 \times = \frac{1}{30} + \frac{24}{100} = \frac{41}{150}$$

- **Calcul de** $P(\overline{R} / T)$

$$P(\overline{R} / T) = \frac{P(T / \overline{R}) \times P(\overline{R})}{P(T)}$$

$$P(\overline{R} / T) = \frac{0{,}30 \times 0{,}80}{\frac{41}{150}} = \frac{36}{41}$$

Résultat final

La probabilité que Soukroumdé n'ait pas suivi le cours de rattrapage étant donné qu'il n'a pas traité la compétence A est :

$P(\overline{R} / T) \approx 0.878$ (arrondi à 0,001 près).

Ainsi, la probabilité pour éclairer la lanterne du Chef est d'environ