Leçon 5

Fonctions exponentielles et puissances

Situation d'Apprentissage

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Faire deux lectures de la situation d'apprentissage par deux apprenants.
Faire recenser et expliquer les données pertinentes.

Question/Consignes pour dérouler la situation	Réponse attendue
Qui l'étudiant stagiaire reçoit-il et que fait-il ?	Il reçoit un élève malade et lui donne des médicaments
Que fait l'étudiant stagiaire en de prescrire si possible d'autres médicaments plus tard ?	Pour prescrire si possible d'autres médicaments plus tard, le stagiaire désire visualiser la masse M en fonction du temps *t* et il sollicite le professeur de SVT.
Que fait le professeur de SVT ?	Il associe la classe au projet.
Qu'est-ce que les élèves décident de faire ?	Les élèves décident de faire des recherches sur les fonctions comportant la fonction exponentielle népérienne.

Cette leçon se déroulera selon le plan suivant.

1. Fonction exponentielle népérienne
2. Équations et inéquations
3. Dérivées et primitives
4. Fonctions exponentielles de base *a*
5. Étude d'une fonction faisant intervenir la fonction exponentielle népérienne

Installation des habiletés

Activité 1 Fonction exponentielle népérienne

1.1. Définition

Activité

1) La fonction ln est continue et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$

Et, $\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

D'où, fonction ln admet une bijection réciproque de ℝ vers]0 ; +∞[

On la note exp.

2) * ln(1) = 0 ⇒exp(0) = 1

Et, $e^0 = 1$

D'où, $\exp(0) = e^0$

* ln(e) = 1 ⇒exp(1) = e

Et, $e^1 = e$

D'où, $\exp(1) = e^1$

3) * Pour tout nombrerationnel r, $\ln(\exp(r)) = r$ et $\ln(e^r) = r\ln(e) = r$

$\exp(r) > 0$ et $e^r > 0$ d'où $\ln(\exp(r)) = \ln(e^r)$

Donc : $\exp(r) = e^r$

Exercices de fixation

1-1-1

$\ln(e^7) = 7$; $\ln(e^{-\sqrt{2}}) = -\sqrt{2}$; $\ln\left(\frac{1}{e^3}\right) = -lne^3 = -3$

$e^{ln4} = 4$; $e^{5ln2} = e^{ln2^5} = 2^5$; $e^{-ln8} = e^{\ln(\frac{1}{8})} = \frac{1}{8}$

1-1-2

$\ln(e^5) + \ln(e^9) - \ln\left(\frac{1}{e}\right) = 5 + 9 - \frac{1}{e}$

b) $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$

D'où : $\lim_{x \to -\infty} (e^x + x) = -\infty$

1-1-3

a) $e^x = 2 \Leftrightarrow x = ln2$

b) $e^{3x} = 7 \Leftrightarrow x = \frac{ln7}{3}$

c) $e^{x^2-6} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 6 = 0,\ x = \sqrt{6}$ ou $x = -\sqrt{6}$

S = $\{-\sqrt{6};\ \sqrt{6}\}$

1.2. Propriétés algébriques

Activité

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$

D'où, pour tous réels a et b, $\ln(e^{a+b}) = a + b$.

b) Pour tout réels de]0 ; +∞[, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$

D'où, pour tous réels a et b,

$e^a > 0$ et $e^b > 0$

$\ln(e^a \times e^b) = \ln(e^a) + \ln(e^b)$

$= a + b$

c) Pour tous réels a et b,

$\ln(e^{a+b}) = \ln(e^a \times e^b)$

$e^{a+b} = e^a \times e^b$.

2.

a) $\ln(e^{-a}) = -a$; $\ln\left(\frac{1}{e^a}\right) = -\ln(e^a) = -a$

$\ln(e^{-a}) = \ln\left(\frac{1}{e^a}\right)$ donc $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$

b) $\ln(e^{a-b}) = a - b$; $\ln\left(\frac{e^a}{e^b}\right) = \ln(e^a) - \ln(e^b) = a - b$

$\ln(e^{a-b}) = \ln\left(\frac{e^a}{e^b}\right)$ donc $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

c) $\ln(e^{ra}) = ra$; $\ln((e^a)^r) = r\ln(e^a) = ra$

$\ln(e^{ra}) = \ln((e^a)^r)$ donc $e^{ra} = (e^a)^r$

Exercices de fixation

1-2-1

Ecris les nombres A, B, C et D sous la forme e^a ($a \in \mathbb{R}$).

a) $A = e^2 \times e^3 = e^5$; b) $B = e \times e^{-5} = e^{-4}$; c) $C = \frac{e^6}{e^4} = e^{6-4} = e^2$;

d) $D = (e^3)^2 = e^6$.

1-2-2

$e^{-7} \times \frac{1}{e^{-5}} \times e = e^{-7} \times e^5 \times e = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$\frac{(e^{-3})^4}{e^4 \times e^{-8}} = \frac{e^{-12}}{e^{-4}} = e^{-8}$

$e^3(e^{-3} - e^2) + e^2(e^3 + e) - 1 = 1 - e^6 + e^6 + e^3 - 1 = e^3$

1-2-3

$(e^x)^3 \times e^{-2x} = e^{3x-2x} = e^x$

$e^{3x+2} \times e^{-4x+6} = e^{(3x+2)+(-4x+6)} = e^{-x+8}$

$\frac{e^{3x-1}}{e^{2-x}} = e^{4x-3}$

$\frac{e^{x-7}}{e^{2x}} \times \frac{e^{3x+5}}{e^{-x+1}} = e^{-x-7} \times e^{4x+4} = e^{3x-3}$

1-2-4

$1 - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x(1+e^{-x})} = \frac{e^x}{1+e^x}$

1.3. Fonction dérivée de la fonction exp

Activité

a) La fonction ln est une bijection de $]0 ; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

Et, la fonction ln est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $(\ln)'(x) \neq 0$

D'où, exp est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$f(x) = \ln(\exp(x)) = x$

$f'(x) = \frac{(\exp)'(x)}{e^x}$ et $f'(x) = 1$

$\frac{(\exp)'(x)}{e^x} = 1$

$(\exp)'(x) = e^x$

2. a) La fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$.

b) la fonction exp étant croissante on a le résultat demandé.

$\forall\, a \in \mathbb{R}$, $\forall\, b \in \mathbb{R}$, $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ et $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$.

Exercices de fixation

1-3-1

a) Df = $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^x - 2$

b) Df = $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^x + xe^x$

c) Df = $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 6x - 4e^x$

1-3-2

a) Df = $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 3x^2e^x + (x^3 - 1)e^x$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = (x^3 + 3x^2 - 1)e^x$

b) Df = $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^x(e^x - e) + e^x(e^x + 3)$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^x(2e^x - e + 3)$

c) Df = $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{-e^x}{(5+e^x)^2}$

d) $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{3e^x(e^x+2) - e^x(3e^x+8)}{(e^x+2)^2}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{3e^{2x} + 6e^x - 3e^{2x} - 8e^x}{(e^x+2)^2}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{-2e^x}{(e^x+2)^2}$

1.4. Limites de référence

1) $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

$\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

2) a) $X = e^x$, $x \longrightarrow +\infty$ et $X \longrightarrow +\infty$

$\frac{e^x}{x} = \frac{X}{\ln X}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{X\to+\infty} \frac{X}{\ln X} = +\infty$

b) b) En posant $t = -x$, déduis de 2. a) $\lim_{x\to-\infty} xe^x$.

$t = -x$

$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{t\to+\infty} -te^{-t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{-t}{e^t} = 0$ car $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Exercices de fixation

1-4-1

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ (1 - 3x)e^x = e^x - 3xe^x$

$$\begin{cases} \lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x\to-\infty} -3xe^x = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} (1 - 3xe^x) = 0$$

b) $\lim_{x\to+\infty} (1 - 3x)e^x$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (1-3x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} (1-3x)e^x = -\infty$$

c) $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $e^x - 2x + 3 = x(\frac{e^x}{x} - 2 + \frac{3}{x})$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{e^x}{x} - 2 + \frac{3}{x}) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} (e^x - 2x + 3) = +\infty$$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^x - 2x + 3)$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (-2x+3) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} (e^x - 2x + 3) = +\infty$$

e) $\forall x \in]1\,;+\infty[$, $\frac{e^x}{x-1} = \frac{e^x}{x} \times \frac{x}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x-1} = +\infty$

$\frac{e^x}{x-1} = e^x \times \frac{1}{x-1}$

f) $$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x-1} = 0$$

1-4-2

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x(3-4e^{-x})}{e^x(1-2e^{-x})} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3-4e^{-x}}{1-2e^{-x}} = 3$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (3e^x - 4) = -4$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^x - 2) = -2$

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3e^x-4}{e^x-2} = 2$

1-4-3

a) $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{2x}-1}{2x} = \lim\limits_{t\to0} \frac{e^t-1}{t} = 1$, $|t = 2x$: quand $x\to 0$, $t\to 0$

b) $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{\sin x}-1}{\sin x} = \lim\limits_{u\to0} \frac{e^u-1}{u} = 1$, $|u = \sin x$: quand $x\to 0$, $u\to 0$

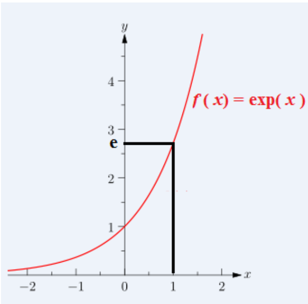
1.5 Représentation graphique

Activité

1.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Signe de exp'(x)	+
Variations de exp(x)	↗

2.



Exercice de fixation

Figue C_3

Activité 2 Équations - Inéquations

1.

a) $e^x = 3 \Leftrightarrow x = ln3$

b) $e^x = -6$, impossible , S = ∅

c) $e^{4x} = 8 \Leftrightarrow x = \frac{3ln2}{4}$

d) $e^{2-x} = e^x \Leftrightarrow x = 1$

g) $e^{10-x} = e \Leftrightarrow x = 9$

2. a) $e^x > e^{-4} \Leftrightarrow x = -4$

b) $e^{-2x} \leq 13 \Leftrightarrow x \geq -\frac{ln13}{2}$

c) $e^{7x-2} \geq e^{9x-11}$

$7x - 2 \geq 9x - 11$

$2x \leq 9$

$x \leq \frac{9}{2}$

3.

a) On pose : X = e^x , $X^2 = (e^x)^2 = e^{2x}$

l'équation $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} - 5e^x - 14 = 0$ devient $X^2 - 5X - 14 = 0$

b) $X^2 - 5X - 14 = 0$

$\Delta = 81$

$x = \frac{5-9}{2} = -2$; $x = \frac{5+9}{2} = 7$

S = $\{7 ; -2\}$

c) X= $e^x = -2$ impossible

X= $e^x = 7$, $x = ln7$

S = $\{ln7\}$

d)

d) On pose : X = e^x , $X^2 = (e^x)^2 = e^{2x}$

L'inéquation $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} - 5e^x - 14 \leq 0$ devient $X^2 - 5X - 14 \leq 0$

Soit $(X+2)(X-7) \leq 0$. Ou encore $(e^x+2)(e^x-7) \leq 0$

$e^x + 2 > 0$ l'inéquation est équivalente à : $e^x - 7 \leq 0$

$e^x \leq 7$

$x \leq ln7$

S = $]-\infty\,;ln7]$.

Exercices de fixation

2-1

1. $e^{3x-2} = e^4$

$3x - 2 = 4$

$x = 2$

4. $e^x + 7 = 0$

impossible

2. $e^{x^2} = 1$

$x^2 = 0$

$x = 0$

5. $e^{-3x+5} = 2$

$-3x + 5 = ln2$

$-3x = 5 - ln2$

$x = \frac{-5 + ln2}{3}$

3. $e^{-x} = 0$

Impossible

6. $(e^{x-1} - 2)(e^{3-x} - e) = 0$

$e^{x-1} - 2 = 0$ ou $e^{3-x} - e = 0$

$e^{x-1} = 2$ ou $e^{3-x} = e$

$x = 1 + ln2$ ou $x = 2$

S = $\{1+ln2\,;2\}$

2-2

1. $e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$

$X = e^x$ On a : $X^2 - 5X + 4 = 0$

$\Delta = 9$

$X = 1$ ou $X = 4$ donc $x = 0$ ou $x = 2ln2$

S = $\{0\,;2ln2\}$

2. $2e^{2x} - e^x - 3 = 0$

$X = e^x$ On a : $2X^2 - X - 3 = 0$

$\Delta = 25$

$X = -1$ ou $X = \frac{3}{2}$ donc $X = -1$ impossible et pour $X = \frac{3}{2}$, $x = ln\frac{3}{2}$

S = $\{ln\frac{3}{2}\}$

2-3

1. $e^{\frac{x}{2}} < e$

$\frac{x}{2} < 1$

4. $e^{3-x} \geq e^{-3x}$

$3 - x \geq -3x$

$x < 2$

S =] - ∞ ; 2[

2. $e^{-x+7} > e^{x}$

$-x + 7 > x$

$x < \frac{7}{2}$

S =] - ∞ ; $\frac{7}{2}$[

3. $e^{x^2} < (e^{x})^3$

$e^{x^2} < e^{3x}$

$x^2 < 3x$

$x(x-3) < 0$

S =]0 ; 3[

$x \geq \frac{3}{2}$

S = [$\frac{3}{2}$; +∞[

5. $e^{-x^2+1} \leq 1$

$-x^2 + 1 \leq 0$

$(x-1)(x+1) \geq 0$

S =] - ∞ ; -1] ∪ [1 ; +∞[

6. $e^{x+3} + 5 < 0$ impossible S = ∅

2-4

1. $e^{2x} - 3e^{x} + 2 \leq 0$

$X = e^{x}$ On a : $X^2 - 3X + 2 \leq 0$

Δ = 1 , $X = 1$ ou $X = 2$

$(X-1)(X-2) \leq 0$

$X \in [1; 2]$

$e^{x} \in [1; 2]$

$x \in [0 ; ln2]$

S = $[0 ; ln2]$

2. $e^{2x} + e^{x} - 6 > 0$

$X = e^{x}$ On a : $X^2 + X - 6 > 0$

Δ = 25 , $X = -2$ ou $X = 3$

$(X+2)(X-3) > 0$

$X + 2 > 0$; l'inéquation devient $X - 3 > 0$

$e^{x} - 3 > 0$

$e^{x} > 3$

$x > ln3$

S =] $ln3$; +∞[

Activité 3 **Dérivées et primitives**

3.1 Dérivée de e^{u}

Activité

1) La fonction numérique u est dérivable sur K.

Et, la fonction exp est dérivable sur ℝ.

D'où, la fonction f est dérivable sur K comme composée de deux fonctions dérivables u et exp.

2) Pour tout x élément de ℝ,

f(x) = exp(u(x))

f '(x) = u'(x)(exp)'(u(x))

f '(x) = u'(x)$e^{u(x)}$

Exercices de fixation

3-1-1

1. $f(x) = e^{2x+1}$, K = ℝ

   $f'(x) = 2e^{2x+1}$
2. $f(x) = e^{1-x^2}$, K = ℝ

   $f'(x) = -2xe^{1-x^2}$
3. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$, K = $]0;\ +\infty[$

   $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$
4. $f(x) = 3e^{-x} + e^{5x-2}$, K = ℝ

3-1-2

1. $f(x) = e^{\frac{x+3}{x^2+1}}$, K = ℝ

$f'(x) = \frac{x^2+1-2x(x+3)}{(x^2+1)^2}e^{\frac{x+3}{x^2+1}}$

$f'(x) = \frac{-x^2-6x+1}{(x^2+1)^2}e^{\frac{x+3}{x^2+1}}$

2. $f(x) = e^{\frac{x}{x^2-1}}$, K = $\mathbb{R} - \{0; 1\}$

$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}e^{\frac{x}{x^2-1}}$

3. $f(x) = (4x^3 - 5)e^{-2x}$, K = ℝ

$f(x) = 12x^2e^{-2x} - 2(4x^3 - 5)e^{-2x}$, K = ℝ

$f(x) = (-8x^3 + 12x^2 + 10)e^{-2x}$, K = ℝ

4. $f(x) = \frac{2e^x+3}{e^x-1}$, K = ℝ

$f(x) = \frac{2e^x(e^x-1)-e^x(2e^x+3)}{(e^x-1)^2}$, K = ℝ

$f(x) = \frac{2e^{2x}-2e^x-3e^{2x}-3e^x}{(e^x-1)^2}$, K = ℝ

$f(x) = \frac{-e^{2x}-5e^x}{(e^x-1)^2}$, K = ℝ

3.3 Primitives de u'e^u

1) Soit K un intervalle de ℝ, u une fonction numérique dérivable sur K et f.

On a : : f(x) = u'(x)$e^{u(x)}$ et φ(x) = $e^{u(x)}$.

b) ∀x∈K, F(x) = $e^{u(x)}$ + c (c ∈ℝ)

Exercices de fixation

3-2-1

a) $F(x) = e^{\frac{1}{x}}$ K =]-∞ ; 0[	b) $F(x) = \frac{-1}{3} e^{1-3x}$, K = ℝ
c) $F(x) = 7e^{x-5}$, K = ℝ	d) $F(x) = \frac{1}{2} e^{1-x^2}$ et K = ℝ
e) $F(x) = \frac{3}{2} e^{2x^3+1}$	

3-2-2

a) $F(x) = \frac{1}{2} e^{4x} + \frac{1}{2} e^{x^2}$

b) $F(x) = \frac{3}{-0{,}2} e^{-0{,}2x} + x^2$

c) $F(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}$

d) $F(x) = 8e^{5+cosx}$

Activité 4 Fonctions exponentielles de base *a*

4.1 Notion de fonction exponentielle de base a (a∈ℝ+*\{1})

Activité

5% = 0,05

a) $C_1 = C_0 + (0{,}05)C_0$.

$= (1 + 0{,}05)C_0$

$= (1{,}05)C_0$

b) ∀n∈ ℕ, $C_{n+1} = (1{,}05)C_n$

D'où, la suite (C_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme C_0 tels que : q = 1,05 et C_0 = 1 (1 milliard)

c) ∀n∈ ℕ, $C_n = (1{,}05)^n C_0$

∀x∈[0 ; +∞[, $C(x) = (1{,}05)^x$.

Exercices de fixation

4-1-1

a) $3^{0{,}2} = e^{0{,}2\ln 3}$; b) $7{,}77^{-\sqrt{2}} = e^{-\sqrt{2}\ln 7{,}77}$; c) $2022^{-\frac{3}{4}} = e^{-\frac{3}{4}\ln 2022}$

4-1-2

a) $e^{\pi\ln 2} = \pi^2$; b) $e^{0{,}98\ln\left(\frac{7}{3}\right)} = \left(\frac{7}{3}\right)^{0{,}98}$; c) $e^{\frac{2}{5}\ln(0{,}1)} = (0{,}1)^{\frac{2}{5}}$

4.2 Propriétés algébriques de la fonction exponentielle de base a (a∈ℝ+*\{1})

Activité

1) ∀x∈ ℝ et ∀y∈ ℝ, on a : $a^{x+y} = e^{(x+y)\ln a} = e^{x\ln a}e^{y\ln a} = a^x a^y$.

2) ∀x∈ ℝ ;

$a^x a^{-x} = a^{x-x} = a^0 = 1$

$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

<u>Méthode 2</u>

$$a^{-x} = e^{-x\ln a} = \frac{1}{e^{x\ln a}} = \frac{1}{a^x}$$

3) $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}$;

$$a^{x-y} = a^x\, a^{-y} = a^x \frac{1}{a^y} = \frac{a^x}{a^y}.$$

Méthode 2

$$a^{x-y} = e^{(x-y)\ln a} = e^{x\ln a}\, e^{-y\ln a} = \frac{e^{x\ln a}}{e^{y\ln a}} = \frac{a^x}{a^y}.$$

4) $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}$,

$$(a^x)^y = (e^{x\ln a})^y = e^{xy\ln a} = a^{xy}.$$

Méthode 2

$$(a^x)^y = e^{y\ln(a^x)} = e^{xy\ln a} = a^{xy}.$$

5) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $a^x b^x = e^{x\ln a} e^{x\ln b} = e^{x(\ln a+\ln b)} = e^{x\ln(ab)} = (ab)^x$.

6) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $\frac{a^x}{b^x} = \frac{e^{x\ln a}}{e^{x\ln b}} = e^{x\ln a}\, e^{-x\ln b} = e^{x(\ln a-\ln b)} = e^{x\ln(\frac{a}{b})} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$.

Exercices de fixation

4-2-1

$512^5 \times 2^3 = 2^{48}$	$\frac{2^\pi}{2^3} = 2^{\pi-3}$	$\frac{1}{2^{-e}} = 2^e$
$(4^5)^3 = 2^{30}$	$64^3 \times 8^3 = 2^{27}$	$\frac{8^4}{4^5} = 2^2$

4-2-2

a) Vrai ; b) Vrai c) Vrai (Il suffit d'appliquer les propriétés)

4.3 Limites de référence

$a > 1 \Rightarrow \ln a > 0$

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $a^x = e^{x\ln a}$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln a = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$$

b) $$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x\ln a = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$$

Exercices de fixation

4-3-1

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}$; $0{,}999^x = 0$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 0{,}01^x = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\pi}{3}\right)^x = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{7})^x = 0$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\left(\frac{1}{7}\right)^x + \left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{3}{7}\right)^x - 7\right) = +\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\left(\frac{1}{7}\right)^x + \left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{3}{7}\right)^x - 7\right) = -7$

4-3-2

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} 5^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(\frac{2}{5}\right)^x - 1\right] = -1$, D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} (2^x - 5^x) = -\infty$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $7^x - 5^x = 5^x\left[\left(\frac{7}{5}\right)^x - 1\right]$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 5^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(\frac{7}{5}\right)^x - 1\right] = +\infty$

D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} (7^x - 5^x) = +\infty$

4.4. Étude et représentation graphique

1) $f(x) = a^x = e^{xlna}$

$f'(x) = lnae^{xlna}$

$f'(x) = lnaa^x$

2) $f'(x) = lnaa^x$. $a^x > 0$, donc le signe de f' dépend de celui lna

Si $a > 1$, $lna > 0$ donc $f' > 0$ sur $\mathbb{R}$. La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$

Tableau de variation

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3)

$f'(x) = lnaa^x$. $a^x > 0$, donc le signe de f' dépend de celui lna

Si $0 < a < 1$, $lna < 0$ donc $f' < 0$ sur $\mathbb{R}$. La fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$

Tableau de variation

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

Exercices de fixation

4-4-1

a) $f(x) = \left(\frac{7}{9}\right)^x$

$0 < \frac{7}{9} < 1$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

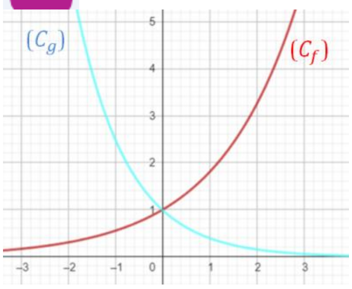
b) $f(x) = (1{,}25)^x$

$1{,}25 > 1$ 1 donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

c) $f(x) = \left(\frac{2}{e}\right)^x$

$0 < \frac{2}{e} < 1$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

4-4-2



Activité 5 Étude d'une fonction faisant intervenir la fonction exponentielle népérienne

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + xe^{-x}$

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2.a) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = x - 1 + e^{-x} - xe^{-x}$

$(x-1)(1-e^{-x}) = x - xe^{-x} - 1 + e^{-x}$

Donc $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = (x-1)(1-e^{-x})$

b)

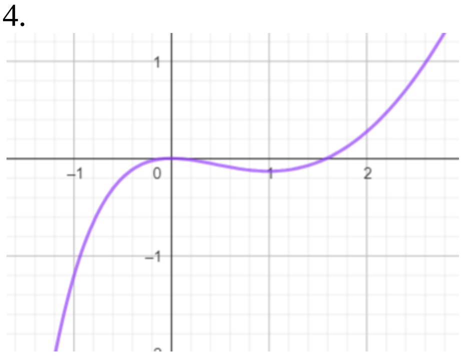
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2} + e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

3) f est continue et strictement croissante sur $]1\ ;+\infty[$ et $f(]1\ ;\ +\infty[\,) =]-\frac{1}{2} + e^{-1}\ ;\ +\infty[$

$0 \in\ ]-\frac{1}{2} + e^{-1}\ ;\ +\infty[$ donc l'équation $f(x) = 0$, admet une solution unique.

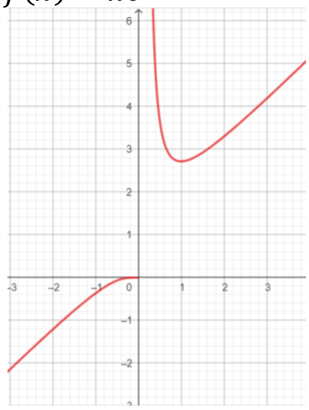
$f(1{,}59)f(1{,}6) < 0$ donc $1{,}59 < \alpha < 1{,}6$

4.



Exercice de fixation

$f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$



Activité 6 Fonctions puissances

6.1 Notion de fonction puissance

Activité

a) $3^{\pi} = e^{\pi \ln 3}$.

b) Pour tout x élément de]0 ; +∞[;

$$x^{\pi} = e^{\pi \ln x}.$$

Exercice de fixation

a) $f(x) = x^{\frac{\sqrt{2}}{2}},\ x \in]0;\ +\infty[$

b) $f(x) = x^{-\frac{\pi}{3}},\ x \in]0;\ +\infty[$

c) $f(x) = x^{0,01},\ x \in]0;\ +\infty[$

d) $f(x) = x^{-\frac{e}{7}},\ x \in]0;\ +\infty[$

6.2. Étude et représentation graphique

Df=]0 ; +∞[

a) * $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $f(x) = e^{\alpha \ln x}$

$\lim\limits_{x \to 0} \alpha \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

D'où, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

f n'est pas définie en zéro et admet une limite finie en zéro.

D'où, on peut prolonger f par continuité en zéro.

* $g(0) = 0$ et $g(x) = x^{\alpha}$ si $x > 0$

b) $\forall x \in]0 ; +\infty[$;

$$f'(x) = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x} = \frac{\alpha}{e^{\ln x}} e^{\alpha \ln x} = \alpha e^{\alpha \ln x - \ln x} = \alpha e^{(\alpha - 1)\ln x}$$

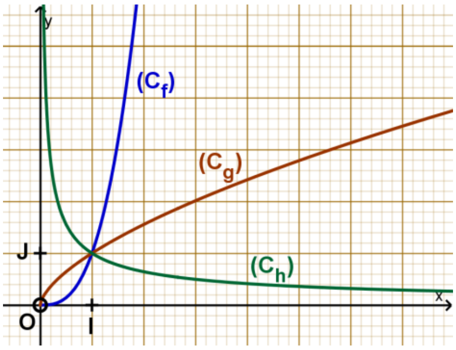
$$f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Exercices de fixation

6-2-1

a) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sqrt{3}} = 0$; $\lim\limits_{x\to 0} x^{-\frac{\pi}{2}}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{e} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 0$.

6-2-2



6.3. Croissance comparée

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{n^n}\left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n$

$= \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{n^n}\left(\frac{e^X}{X}\right)^n$ $\quad$ | $X = \frac{x}{n}$: quand $x \to +\infty$, $X \to +\infty$

$= +\infty$ $\quad$ | $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$

b) Posons $X = -x$

Quand $x \to -\infty$, $X \to +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = \lim\limits_{X\to+\infty} (-1)^n X^n e^{-X}$

$= \lim\limits_{X\to+\infty} (-1)^n \frac{X^n}{e^X}$

$= 0$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{n} \times \frac{n \ln x}{x^n}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{n} \times \frac{(\ln x)^n}{x^n}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{n} \times \left(\frac{\ln x}{x}\right)^n$

$= 0$ $\quad$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

d) Posons $X = \frac{1}{x}$

Quand $x \to 0$ et $x > 0$, $X \to +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} x^n \ln x = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{X^n} \ln\left(\frac{1}{X}\right)$

$= \lim\limits_{X \to +\infty} -\frac{\ln X}{X^n}$

$= 0$

Exercices de fondation

6-3-1

a) F ; b) V ; c) V ; d) V

6-3-2

Ecrire $x^5 e^{5x+3}$ et non $x^5 e^{5+3}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^5 e^{5x+3} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{2x}} = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} x^{\sqrt{2}} \ln x = 0$

6.4. Fonction u^α ($\alpha \in \mathbb{R}^*$)

1. a) g est dérivable comme composée de deux fonctions dérivables

b) $g(x) = (u(x))^\alpha = e^{\alpha \ln(u(x))}$

$g'(x) = \frac{\alpha u'(x)}{u(x)}(u(x))^\alpha$

$g'(x) = \alpha u'(x)(u(x))^{\alpha-1}$

2. $F(x) = \frac{u(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

$g'(x) = u'(x)(u(x))^\alpha$

Exercices de fixation

6-4-1

a) $f(x) = ln5(-2x)(1-x^2)^{ln5}$

b) $f(x) = (\ln(x-2))^{\frac{\pi}{2}-1}$ et non $f(x) = \ln(x-2)^{\frac{\pi}{2}-1}$

$f'^{(x)} = (\frac{\pi}{2}) \times \frac{1}{x-2} (\ln(x-2))^{\frac{\pi}{2}-1}$

c) $f'(x) = \sqrt{2}(2e^{2x} - 3e^x)(e^{2x} - 3e^x)^{\sqrt{2}-1}$

6-4-2

1. $f'(x) = \pi(2x+2)(x^2+2x)^{\pi-1}$
2. $f'(x) = \frac{3e}{x^2}(1-\frac{1}{x})^{3e-1}$

Exercices de renforcement

1

1. Df = $\mathbb{R}$

* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. [Limite de la somme]

* Pour tout x élément de]0 ; $+\infty$[, $f(x) = x^2(\frac{e^x}{x^2} - 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. [Limite du produit]

2. Df = $\mathbb{R}$

* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. [Limite du produit]

* Pour tout x élément de]0 ; +∞[, $f(x) = \frac{e^x}{x^2} \times \frac{x^2}{x^2+1}$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. [Limite du produit]

3. Df = ℝ

* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{u\to0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$ | $u = e^{-2x}$ Quand $x \to +\infty$, $u \to 0$

* Pour tout x de ℝ, $f(x) = \frac{\ln(e^{-2x}+1)}{e^{-2x}+1} \times \frac{e^{-2x}+1}{e^{-2x}}$.

$\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(e^{-2x}+1)}{e^{-2x}+1} = \lim_{u\to+\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$ | $u = e^{-2x}+1$ Quand $x \to -\infty$, $u \to +\infty$

Et, $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-2x}+1}{e^{-2x}} = \lim_{u\to+\infty} \frac{u+1}{u} = 1$ | $u = e^{-2x}$ Quand $x\to -\infty$, $u\to +\infty$

D'où, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

4. Df = ℝ

* Pour tout x deℝ, $f(x) = \frac{x^2}{e^x} + \frac{x}{e^x} \times \frac{1}{e^x}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$.

D'où, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

* Pour tout x de]-∞ ; 0[, $f(x) = xe^{-2x}(xe^x + 1)$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

5. Sur ℝ, $e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \ln2$

Df = ℝ\{ln2}

* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{u\to+\infty} \frac{u-6}{u-2} = 1$ | $u = e^x$ Quand $x \to +\infty$, $u \to$

<u>2^ème méthode</u> (***Fonctions composées***)

$$\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x-6}{x-2} = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

* $$\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\to\ln2} (e^x-6) = -4 \\ \lim_{\substack{x\to\ln2 \\ >}} \frac{1}{e^x-2} = +\infty \end{array}\right. \Rightarrow \lim_{\substack{x\to\ln2 \\ >}} f(x) = -\infty.$$

* $$\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\to\ln2} (e^x-6) = -4 \\ \lim_{\substack{x\to\ln2 \\ <}} \frac{1}{e^x-2} = -\infty \end{array}\right. \Rightarrow \lim_{\substack{x\to\ln2 \\ <}} f(x) = +\infty.$$

* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{u\to0} \frac{u-6}{u-2} = \frac{0-6}{0-2} = 3$ | $u = e^x$ Quand $x \to -\infty$, $u \to 0$

<u>2^ème méthode</u> (***Fonctions composées***)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-6}{x-2} = 3 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$$

6. $e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2$

Sur $\mathbb{R}\backslash\{\ln 2\}$, $\dfrac{e^x+2}{e^x-2}$ a le même signe que $e^x - 2$ $[e^x+2 > 0]$

$e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \ln 2.$

Df= $]\ln 2 ; +\infty[$

$$* \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+2}{e^x-1} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1} \ln x = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$$* \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to\ln 2 \\ >}} \dfrac{e^x+2}{e^x-2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$$

7. Df = $\mathbb{R}$

$$* \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} (3x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \ln(e^{2x}+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

* Pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f(x) = 3x - \ln(e^{2x}(1 + e^{-2x}))$

$= 3x - \ln(e^{2x}) - \ln(1 + e^{-2x})$

$= 3x - 2x - \ln(1 + e^{-2x})$

$= x - \ln(1 + e^{-2x})$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+e^{-2x}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

8. Df = $\mathbb{R}\backslash\{1\}$

* Pour tout *x* de $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, $f(x) = (x-1)\,e^{-\frac{1}{x-1}} - (x-1) + 1$

$= (x-1)(e^{-\frac{1}{x-1}} - 1) + 1$

$= -\dfrac{e^{-\frac{1}{x-1}}-1}{-\frac{1}{x-1}} + 1$

$$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-\frac{1}{x-1}}-1}{-\frac{1}{x-1}} = \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{e^u-1}{u} = 1$$

$u = -\dfrac{1}{x-1}$
Quand $x \to +\infty$, $u \to 0$

D'où, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1 + 1 = 0.$

$$* \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-\frac{1}{x-1}}-1}{-\frac{1}{x-1}} = \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{e^u-1}{u} = 1$$

$u = -\dfrac{1}{x-1}$
Quand $x \to -\infty$, $u \to 0$

D'où, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1 + 1 = 0.$

* $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ >}} e^{-\frac{1}{x-1}} = 0$, $\lim\limits_{x\to 1} (x-1) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1} (x) = 1$

D'où : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = 1$.

* Pour tout $x$de]-∞ 1[, $f(x) = -\dfrac{e^{-\frac{1}{x-1}}}{-\frac{1}{x-1}} - x$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{e^{-\frac{1}{x-1}}}{-\frac{1}{x-1}} = \lim\limits_{u \to +\infty} \dfrac{e^u}{u} = +\infty$

$u = -\dfrac{1}{x-1}$
Quand $x \xrightarrow[<]{} 1$, $u \to +\infty$.

Et, $\lim\limits_{x \to 1} (-x) = -1$

D'où : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = +\infty$.

9. Df =]0 ; +∞[

* Pour tout x de]0 ; +∞[, $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} \ln x$.

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x}{e^x - 1}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty.$

* Pour tout x de]0 ; +∞[, $f(x) = \dfrac{x^2\left(\frac{\ln x}{x}\right)}{e^x(1 - e^{-x})} = \dfrac{x^2}{e^x} \times \dfrac{1}{1 - e^{-x}} \times \dfrac{\ln x}{x}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1 - e^{-x}} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \times 1 \times 0 = 0$.

10. Df = $\mathbb{R}\backslash\{0\}$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{5x}-1}{x} = 0$, car $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{5x} - 1) = -1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 5 \times \dfrac{e^{5x}-1}{5x} = 5$, car $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{5x}-1}{5x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{5x}-1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(5 \times \dfrac{e^{5x}}{5x} - \dfrac{1}{x}\right) = +\infty$, car

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{5x}}{5x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}}$;

11. Df = $\mathbb{R}\backslash\{0\}$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{e^x}{x} + \dfrac{2}{2xe^{2x}} - \dfrac{1}{x}\right) = -\infty$, car $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{x} = 0$,

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{2xe^{2x}} = -\infty$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1}{x}(e^x + e^{-2x} - 1) = -\infty$, car $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} (e^x + e^{-2x} - 1) = 1$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x}(e^x + e^{-2x} - 1) = +\infty$, car $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x} = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x} + \frac{2}{2xe^{2x}} - \frac{1}{x}\right) = +\infty$

12. Df = $\mathbb{R}\backslash\{1\}$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{(x-1)^5} \times e^x = 0$, car $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{(x-1)^5} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{1}{(x-1)^5} \times e^x = -\infty$, car $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{1}{(x-1)^5} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} e^x = e$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{1}{(x-1)^5} \times e^x = +\infty$, car $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{1}{(x-1)^5} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} e^x = e$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{x-1}}{(x-1)^5} \times e = +\infty$, car $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{x-1}}{(x-1)^5} = +\infty$

13. Df = $\mathbb{R}\backslash\{-2\,;\,2\}$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x+2}{x-2} \times e^{\frac{1}{x^2-4}} = 1$, car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x^2-4}} = 1$, et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x+2}{x-2} = 1$
- $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -2\\ <}} \frac{1}{(x-2)^2} \times \frac{e^{\frac{1}{x^2-4}}}{\frac{1}{x^2-4}} = +\infty$, car $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ <}} \frac{e^{\frac{1}{x^2-4}}}{\frac{1}{x^2-4}} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ <}} \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{4}$
- $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} \frac{x+2}{x-2} \times e^{\frac{1}{x^2-4}} = 0$, car $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} e^{\frac{1}{x^2-4}} = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} \frac{x+2}{x-2} = 0$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} (x+2)^2 \frac{1}{x^2-4} e^{\frac{1}{x^2-4}} = 0$, car $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \frac{1}{x^2-4} e^{\frac{1}{x^2-4}} = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} (x+2)^2 = 4$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{x+2}{x-2} \times e^{\frac{1}{x^2-4}} = +\infty$, car $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} e^{\frac{1}{x^2-4}} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{x+2}{x-2} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+2}{x-2} \times e^{\frac{1}{x^2-4}} = 1$, car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x^2-4}} = 1$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+2}{x-2} = 1$

14. Df = $\mathbb{R}\backslash\{0\,;\,\ln 2\}$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left|\frac{e^x-1}{e^x-2}\right| = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$, car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

- $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x-2}\right| = -\infty$, car $\lim_{x\to 0}\left|\frac{e^x-1}{e^x-2}\right| = 0$ et $\lim_{x\to 0}\ln x = -\infty$
- $\lim_{x\to \ln 2} f(x) = \lim_{x\to \ln 2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x-2}\right| = -\infty$, car $\lim_{x\to \ln 2}\left|\frac{e^x-1}{e^x-2}\right| = +\infty$ et $\lim_{x\to +\infty}\ln x = +\infty$
- $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\ln\left|\frac{1-e^{-x}}{1-2e^{-x}}\right| = 0$, car $\lim_{x\to +\infty}\left|\frac{1-e^{-x}}{1-2e^{-x}}\right| = 1$ et $\lim_{x\to 1}\ln x = 0$

15. Df = $\mathbb{R}\setminus\{\ln 2\}$

- $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}(e^x-2)\left|\frac{e^x-1}{e^x-2}\right| = -1$, car $\lim_{x\to -\infty}(e^x-2) = -2$ et $\lim_{x\to -\infty}\left|\frac{e^x-1}{e^x-2}\right| = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}(e^x-2)\left|\frac{1-e^{-x}}{1-2e^{-x}}\right| = 0$, car $\lim_{x\to +\infty}(e^x-2) = +\infty$et $\lim_{x\to +\infty}\left|\frac{1-e^{-x}}{1-2e^{-x}}\right| = 1$

2

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \ln(1+e^{3x}) - \ln(1+e^{-3x}) = \ln(e^{3x}) + \ln(e^{-3x}+1) - \ln(1+e^{-3x})$$
$$= \ln(e^{3x}) = 3x$$

3

$$\forall x\in\mathbb{R},\ 1-\frac{2e^x}{e^x+1} = \frac{e^x+1-2e^x}{e^x+1} = \frac{1-e^x}{e^x+1}$$

4

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} + \frac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1} = \frac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(1+e^{-2x})} + \frac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1} = \frac{-e^{-2x}+1}{e^{-2x}+1} + \frac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1} = 0$$

5

1. **Remplacer $e^6x + 2e3x - 3 = 0$ par $e^{6x} + 2e^{3x} - 3 = 0$**
   $e^{6x} + 2e^{3x} - 3 = 0 \Leftrightarrow (e^{3x})^2 + 2e^{3x} - 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0$, avec $t = e^{3x}$
   $t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1 ou t = -3$
   Par suite $e^{3x} = 1$ ou $e^{3x} = -3$ (impossible)
   $e^{3x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$. D'où S = {0}
2. $(x+4)(e^{2x}-1) = 0 \Leftrightarrow x = -4 ou e^{2x} = 1 \Leftrightarrow x = -4$ ou $x = 0$. D'où S = {-4 ; 0}

6

Remplacer $-4e^3x + 17e^2x + 16e^x - 5 = 0$ par $-4e^{3x} + 17e^{2x} + 16e^x - 5 = 0$

$-4e^{3x} + 17e^{2x} + 16e^x - 5 = 0 \Leftrightarrow -4t^3 + 17t^2 + 16t - 5 = 0$, avec $t = e^x$

$-4t^3 + 17t^2 + 16t - 5 = 0$a une solution évidente qui est – 1.

Par suite $-4t^3 + 17t^2 + 16t - 5 = (t+1)(-4t^2 + 21t - 5)$

Le discriminant de $-4t^2 + 21t - 5$ est 441 – 80 = 361 = 19^2. Ses zéros sont $\frac{1}{4}$ et 5

$-4t^3 + 17t^2 + 16t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = -1 ou t = \frac{1}{4}$ ou $t = 5$

Par suite$e^x = -1$ (impossible) ou $e^x = \frac{1}{4}$ ou $e^x = 5$, soit x = –ln4 ou x = ln5

S = {–ln4 ; ln5}

7

a) $\begin{cases} e^x + e^y = 5 \\ e^x - e^y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x + e^y = 5 \\ 2e^x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^y = 1 \\ e^x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \ln 4 \end{cases}$

S = {(ln4 ; 0)}

b) $\begin{cases} e^x + 2e^y = 3 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3e^x = 3 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = 1 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

S = {(0 ; 0)}

c) $\begin{cases} xy = -15 \\ e^x e^y = e^{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = -15 \\ e^{x+y} = e^{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = -15 \\ x + y = -2 \end{cases}$

$x$et$y$ sont solutions de l'équation $u^2 + 2u - 15 = 0$

Δ' = 16 ; $u = -5$ ou $u = 3$

S = {(–5 ; 3), (3 ; –5)}

8

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}\right) = +\infty$, car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{3} \times \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{3}$, car $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x-1)e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} (xe^x - e^x) = 0$, car $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x - x}{e^x - x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1 - \frac{x}{e^x}}{1 - \frac{x^2}{e^x}} = 1$, car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$

9

Supprimer e) car identique à c)

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{5x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2}{5} \times \frac{e^{2x} - 1}{2x} = \frac{2}{5}$, car $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = 1$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2} - e^{3x+4} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{3x+4}\left(e^{x^2-3x-4} - 1\right) = +\infty$, car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{3x+4} = +\infty$et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^{x^2-3x-4} - 1\right) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+1)e^{x+3} = \lim\limits_{x\to-\infty} (xe^x + e^x)e^3 = 0$, car $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)e^{x+3} = +\infty$, car $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x+3} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} - 3e^x - 2 = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}(1 - 3e^{-x} - 2e^{-2x}) = +\infty$,

car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (1 - 3e^{-x} - 2e^{-2x}) = 1$

f) $\lim_{x\to+\infty} x+2-e^{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x}\left(\frac{x}{e^{x}}+\frac{2}{e^{x}}-1\right) = -\infty$, car $\lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{x}}+\frac{2}{e^{x}}-1\right) = 0+0-1 = -1$$

10

1. $\lim_{x\to0}\frac{1-e^{5x}}{x} = \lim_{x\to0}(-5)\times\frac{e^{5x}-1}{5x} = -5$, car $\lim_{x\to0}\frac{e^{5x}-1}{5x} = 1$
2. $\lim_{x\to+\infty}(2x+3)e^{x} = +\infty$, car $\lim_{x\to+\infty}(2x+3) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$

11

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}}{x^{8}+x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}}{x^{8}\left(1+\frac{1}{x^{7}}+\frac{1}{x^{8}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} 3^{8}\times\frac{e^{3x}}{(3x)^{8}}\times\frac{1}{1+\frac{1}{x^{7}}+\frac{1}{x^{8}}} = +\infty$, car

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}}{(3x)^{8}} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x^{7}}+\frac{1}{x^{8}} = 1$

12

$\forall x\in\mathbb{R}$,

$(e^{2x}-e^{-x})(1+e^{-3x}) = (e^{3x}\times e^{-x}-e^{-x})(1+e^{-3x}) = (e^{3x}-1)(1+e^{-3x})e^{-x}$
$= e^{-3x}(e^{3x}-1)e^{3x}(1+e^{-3x})e^{-x} = (1-e^{-3x})(e^{3x}+1)e^{-x} =$

13

- $\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-2}{e^{x}+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{5-\frac{2}{x}}{\frac{e^{x}}{x}+\frac{1}{x}} = 0$
- $\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-2}{e^{x}+1} = -\infty$, car $\lim_{x\to-\infty}(5x-2) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}(e^{x}+1) = 1$
- $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^{6}}-1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(x^{5}\times\frac{e^{x^{6}}}{x^{6}}-\frac{1}{x}\right) = +\infty$, car $\lim_{x\to+\infty} x^{5} = +\infty$,

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^{6}}}{x^{6}} = +\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$$

14

Pour la question 3, c'est $f(x) = \frac{e^{x}-1}{2e^{x}+1}$ et non $f(x) = \frac{e^{x}-1}{2e^{x}=1}$

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$et pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$f'(x) = (2x-2)e^{x}+(x^{2}-2x)e^{x} = (x^{2}-2)e^{x}$$
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{*}$et pour tout $x\in\mathbb{R}^{*}$,
$$f'(x) = -\frac{1}{x^{2}}e^{x}+\frac{1}{x}e^{x} = \frac{x-1}{x^{2}}e^{x}$$
3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$et pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$f'(x) = \frac{e^{x}(2e^{x}+1)-(e^{x}-1)e^{x}}{(2e^{x}+1)^{2}} = \frac{(e^{x}+2)e^{x}}{(2e^{x}+1)^{2}}$$

15

D'après le tableau de variation, on a : $f(0) = -2$, $f(2) = -18e^{-2}$, $f'(0) = 0$ et $f'(2) = 0$.

Dérivée de f : $f'(x) = (-ax^3 + (3a-b)x^2 + (2b-c)x + c - d)e^{-x}$
- $f(0) = -2 \Leftrightarrow d = -2$
- $f'(0) = 0 \Leftrightarrow c - d = 0 \Leftrightarrow c = d = -2$
- $f'(2) = -18e^{-2} \Leftrightarrow (8a + 4b + 2c + d)e^{-2} = -18e^{-2} \Leftrightarrow 8a + 4b + 2c + d = -18$
  $\Leftrightarrow 2a + b = -3$
- $f'(2) = 0 \Leftrightarrow (-8a + 4(3a-b) + 2(2b-c) + c - d)e^{-2} = 0 \Leftrightarrow 4a - 2c = 0 \Leftrightarrow a = -1$
  Comme $2a + b = -3$, on a $b = -1$

<u>Conclusion</u> : $f(x) = (-x^3 - x^2 - 2x - 2)e^{-x}$

16

Mettre « , puis interprète graphiquement le résultat. » à la fin la question 1 et la supprimer dans la question 2.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(4e^{\frac{1}{2}x} - 2 \times \left(\frac{1}{2}x\right)e^{\frac{1}{2}x}\right) = 0$, car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{2}x} = 0$ et
   $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}x\right)e^{\frac{1}{2}x} = 0$
   Interprétation graphique : la droite d'équation y = 0 est asymptote horizontale à la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonale.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (4-x)e^{\frac{1}{2}x} = -\infty$, car $\lim\limits_{x\to+\infty} (4-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{2}x} = +\infty$

17

1. Pour tout réel $x < 0$, on a :
   $x < 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow e^{-x} > 1 \Leftrightarrow -e^{-x} < -1 \Leftrightarrow 1 - e^{-x} < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0$
2. Pour tout réel $x \geq 0$, on a :
   $x \geq 0 \Leftrightarrow -x \leq 0 \Leftrightarrow 0 < e^{-x} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -e^{-x} < 0 \Leftrightarrow 0 \leq 1 - e^{-x} < 1$
   $\Leftrightarrow 0 \leq f(x) < 1$

18

a) On a : $1 - e^x > 0 \Leftrightarrow 1 > e^x \Leftrightarrow 0 > x$
   D'où : $1 - e^x > 0 \Leftrightarrow x < 0$; $1 - e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $1 - e^x < 0 \Leftrightarrow x > 0$
b) On a : $e^{2x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{2x} > 1 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$
   D'où : $e^{2x} - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$; $e^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $e^{2x} - 1 < 0 \Leftrightarrow x > 0$
c) On a : $e^{2x} - e^{x+1} > 0 \Leftrightarrow e^{2x} > e^{x+1} \Leftrightarrow 2x > x + 1 \Leftrightarrow x > 1$
   D'où : $e^{2x} - e^{x+1} > 0 \Leftrightarrow x > 1$; $e^{2x} - e^{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 1$;
   $e^{2x} - e^{x+1} < 0 \Leftrightarrow x < 1$
d) On a : $e^{x^2} - e^{x+1} > 0 \Leftrightarrow e^{x^2} > e^{x+1} \Leftrightarrow x^2 > x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 > 0$
   D'où : $e^{x^2} - e^{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
   $$e^{x^2} - e^{x+1} < 0 \Leftrightarrow x \in \left]\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$$
   $$e^{x^2} - e^{x+1} > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$$
e) On a : $1 - \frac{1}{e^x} > 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-x} > 0 \Leftrightarrow 1 > e^{-x} \Leftrightarrow 0 > -x \Leftrightarrow x < 0$
   D'où : $1 - \frac{1}{e^x} > 0 \Leftrightarrow x < 0$; $1 - \frac{1}{e^x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $1 - \frac{1}{e^x} < 0 \Leftrightarrow x > 0$

19

1. On a : $9^x - 3^x - 2 = 0 \Leftrightarrow (3^2)^x - 3^x - 2 = 0 \Leftrightarrow 3^{2x} - 3^x - 2 = 0$
   $\Leftrightarrow u^2 - u - 2 = 0$, avec $u = 3^x$, $\Leftrightarrow u = -1$ ou $u = 2$

$u = -1 \Leftrightarrow 3^x = -1$, impossible car $3^x > 0$

$$u = 2 \Leftrightarrow 3^x = 2 \Leftrightarrow e^{x\ln 3} = 2 \Leftrightarrow x\ln 3 = \ln 2 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

$S = \left\{\frac{\ln 2}{\ln 3}\right\}$

2. On a : $3 \times 5^{2x} - 8 \times 5^x - 3 = 0 \Leftrightarrow 3 \times (5^x)^2 - 8 \times 5^x - 3 = 0$
$\Leftrightarrow 3t^2 - 8t - 3 = 0$, avec $t = 5^x$
$\Delta = 100$; $t_1 = -\frac{1}{3}$ et $t_1 = 3$
$t = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow 5^x = -\frac{1}{3}$, impossible car $5^x > 0$

$$t = 3 \Leftrightarrow 5^x = 3 \Leftrightarrow e^{x\ln 5} = 3 \Leftrightarrow x\ln 5 = \ln 3 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 3}{\ln 5}$$

$S = \left\{\frac{\ln 3}{\ln 5}\right\}$

20

a) $\left(\frac{4}{24}\right)^{x+1} = \left(\frac{125}{8}\right)^{-2x} \Leftrightarrow e^{(x+1)\ln\left(\frac{4}{24}\right)} = e^{-2x\ln\left(\frac{125}{8}\right)} \Leftrightarrow (x+1)\ln\left(\frac{4}{24}\right) = -2x\ln\left(\frac{125}{8}\right)$

$\Leftrightarrow (x+1)(-\ln 6) = -6x\ln\left(\frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow x\left(6\ln\left(\frac{5}{2}\right) - \ln 6\right) = \ln 6 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 6}{6\ln\left(\frac{5}{2}\right) - \ln 6}$

$S = \left\{\frac{\ln 6}{6\ln\left(\frac{5}{2}\right) - \ln 6}\right\}$

$4^{5x+3} = (256)^{2x-3} \Leftrightarrow e^{(5x+3)\ln(4)} = e^{(2x-3)\ln(256)}$

$$\Leftrightarrow (5x+3)\ln(4) = (2x-3)\ln(256)$$
$$\Leftrightarrow (5x+3)(2\ln 2) = (2x-3)(8\ln 2)$$
$$\Leftrightarrow 2(5x+3) = 8(2x-3)$$
$$\Leftrightarrow x = 5$$

$S = \{5\}$

21

On a : $f(x) = x3^{-x} = xe^{-x\ln 3}$

1. ▪ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x\ln 3} = -\infty$, car $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et
$\lim\limits_{x\to-\infty} -x\ln 3 = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x\ln 3} = -\infty$
▪ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{\ln 3}(-x\ln 3)e^{-x\ln 3} = 0$, car $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x\ln 3) = -\infty$ et
$\lim\limits_{t\to-\infty} te^t = 0$

2. ▪ $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{-x\ln 3} + x(-\ln 3)e^{-x\ln 3} = (1 - x\ln 3)e^{-x\ln 3}$
▪ $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x\ln 3} > 0$, donc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\ln 3}$; $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{\ln 3}$ et

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{\ln 3}$$

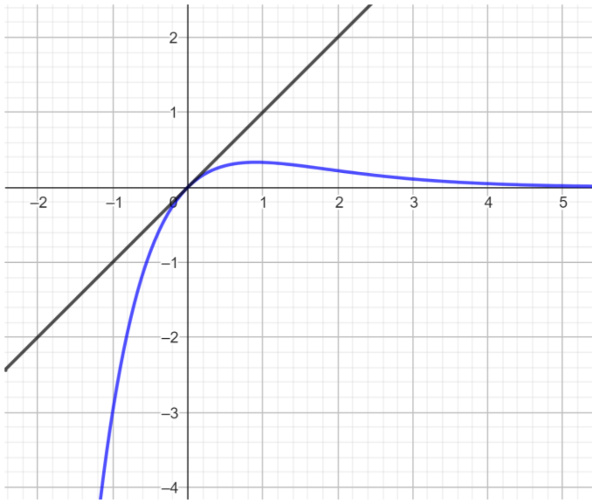
f est strictement croissante sur $\left]-\infty ; \frac{1}{\ln 3}\right[$ et strictement décroissante sur $\left]\frac{1}{\ln 3} ; +\infty\right[$

x	$-\infty$		$\frac{1}{\ln 3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{e^{-1}}{\ln 3}$	$\searrow$	0

3. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x\ln 3} = +\infty$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$,on conclut que la courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction (OJ) en $-\infty$.
b) (T) : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ soit $y = x$

4.



22

À la fin de la question 1., remplacer « du résultat » par « de chaque résultat »

1. ▪ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{x-1}{x+2}} = e$, car $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x+2} = 1$
La droite d'équation $y = e$ est asymptote horizontale à (C) en $-\infty$.
▪ $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\<}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-2\\<}} e^{\frac{x-1}{x+2}} = +\infty$, car $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\<}} \frac{x-1}{x+2} = +\infty$
La droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à (C).
▪ $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\>}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-2\\>}} e^{\frac{x-1}{x+2}} = 0$, car $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\>}} \frac{x-1}{x+2} = -\infty$
La droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à (C).
▪ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{x-1}{x+2}} = e$, car $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x+2} = 1$
La droite d'équation $y = e$ est asymptote horizontale à (C) en $+\infty$.
2. ▪ $\forall x \in \mathbb{R} - \{-2\}$, $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} e^{\frac{x-1}{x+2}}$
▪ $\forall x \in \mathbb{R} - \{-2\}$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $]-\infty\,;\,-2[$ et sur $]-2\,;+\infty[$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$e \nearrow +\infty$	‖	$0 \nearrow e$

3. (T) : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ soit $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

23

1. On a $f(-x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{-(-x)}) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})$
Déduction : $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = f(x)$, donc f est une fonction paire
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) = -\infty$, car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

Comme f est une fonction paire, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x)) = -\frac{1}{2}(\mathbb{R} - e^{-x}) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^{x})$
$f'(x)) \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x} - e^{x} \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x} \geq e^{x} \Leftrightarrow -x \geq x \Leftrightarrow -2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$
D'où $f'(x)) = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $f'(x)) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ et $f'(x)) < 0 \Leftrightarrow x < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow -\infty$

4. La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$, donc f réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur $f([0;+\infty[) = \left]-\infty; \frac{5}{2}\right]$. Comme $0 \in \left]-\infty; \frac{5}{2}\right]$, l'équation$f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0;+\infty[$.
Comme f est une fonction paire, on a $f(-\alpha) = f(\alpha)$. D'où $f(-\alpha) = 0$, avec $-\alpha$ unique dans $]-\infty;0[$.
Conclusion : L'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$ et ces deux solutions sont opposés.

24

1. a) Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^{x} - x$
L'étude du sens de variation de f se résume dans le tableau suivant

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

D'après ce tableau, $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) > 0$, d'où $e^{x} - x > 0$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, e^{x} - x \neq 0$, donc l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

2. a) Si $x \neq 0$, alors $f(x) = \frac{x}{e^{x}-x} = \frac{x}{x\left(\frac{e^{x}}{x}-1\right)} = \frac{1}{\frac{e^{x}}{x}-1}$

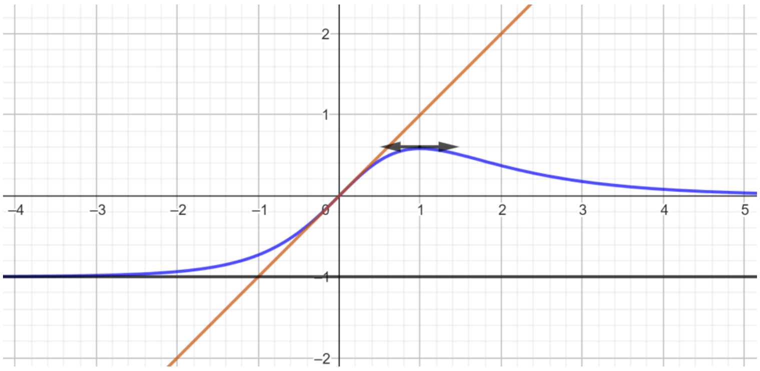
b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{\frac{e^{x}}{x}-1} = -1$, car $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{x}}{x} = 0$
La droite d'équation $y = -1$ est asymptote horizontale à (C) en $-\infty$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^{x}}{x}-1} = 0$, car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x} = +\infty$
La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à (C) en $+\infty$.

3. a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1(e^{x}-x)-x(e^{x}-1)}{(e^{x}-x)^2} = \frac{(1-x)e^{x}}{(e^{x}-x)^2}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{e^{x}}{(e^{x}-x)^2} > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $1 - x$
D'où $f'(x)) = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $f'(x)) > 0 \Leftrightarrow x < 1$ et $f'(x)) < 0 \Leftrightarrow x > 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-1 \nearrow$	$\frac{1}{e-1}$	$\searrow 0$

4. (T) : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ soit $y = x$
5.



25

Dans la question3., remplacer $\lim\limits_{x\to+\infty} 2te^{-t}$ par $\lim\limits_{t\to+\infty} 2te^{-t}$

1. $\forall t \in [0;+\infty[$, $f'(t) = 2(e^{-t} - te^{-t}) = 2(1-t)e^{-t}$
   $f'(t)) = 0 \Leftrightarrow t = 1$; $f'(t)) > 0 \Leftrightarrow t < 1$ et $f'(t)) < 0 \Leftrightarrow t > 1$
   f est strictement croissante sur $]0\,;\,1[$ et strictement décroissante sur $]1\,;+\infty[$
2. La concentration d'alcool dans le sang de Paul est maximale 1 h après.
   Sa valeur est $f(1) = 2e^{-1}$, soit environ 0,74 g.L^{-1}.
3. $\lim\limits_{t\to+\infty} 2te^{-t} = \lim\limits_{u\to-\infty} 2(-ue^{u}) = 0$, avec $u = -t$
   La concentration d'alcool dans le sang de Paul devient nulle au bout d'un temps assez long.
4. a) La fonction *f* est continue et strictement croissante sur $[0;1[$, donc *f* réalise une bijection de $[0;1[$ sur $f([0;1[) = [0;2e^{-1}[$. Comme $0{,}2 \in [0;2e^{-1}[$, l'équation $f(t) = 0$ admet une solution unique t_1 dans $[0;1[$.
   La fonction *f* est continue et strictement décroissante sur $]1\,;+\infty[$, donc *f* réalise une bijection de $]1\,;+\infty[$ sur $f(]1\,;+\infty[) =]0;2e^{-1}[$. Comme $0{,}2 \in]0;2e^{-1}[$, l'équation $f(t) = 0$ admet une solution unique t_2 dans $]1\,;+\infty[$
   Conclusion : il existe deux nombres réels t_1 et t_2 tels que $f(t_1) = f(t_2) = 0$.
   b) La durée minimale d'attente de Paul est t_2
   On trouve $t_2 \approx 3{,}575$, soit environ 3 h 35 min.

26

1. a) $\forall x \in [1\,;+\infty[$;
   g'(x) = e^x - 2x
   g''(x) = e^x - 2
   e^x - 2 > 0 $\Leftrightarrow x >$ ln2
   Or, 1 > ln2
   D'où, $\forall x \in [1\,;+\infty[$, g''($x$) > 0
   Donc, g' est strictement croissante
   b) * g'(1) = e - 2
   * g' est strictement croissante et g'(1) > 0
   D'où, $\forall$x$\in$[1 ; +∞[, g'(x) > 0.
2. * $\forall$x$\in$[1 ; +∞[, g'(x) > 0
   D'où, g est strictement croissante.
   * g(1) = e - 1
   * g est strictement croissante et g(1) > 0

D'où, $\forall x \in [1 ; +\infty[$, $g(x) > 0$.

* $\forall x \in [1 ; +\infty[$;

$g(x) > 0$

$e^x - x^2 > 0$

$e^x > x^2$

3. $\forall x \in [1 ; +\infty[$;

$e^x > x^2$

$\frac{e^x}{x} > x$

$Et, \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$D'où, \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$

4. Posons : $x = nt$

Quand : $x \to +\infty$, $t \to +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{t \to +\infty} \left(n^n \times \frac{e^{nt}}{(nt)^n}\right) = \lim_{t \to +\infty} n^n \times \left(\frac{e^t}{t}\right)^n$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

27

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$F'(x) = [a - 2(ax + b)]e^{1-2x} = (-2ax + a - 2b)e^{1-2x} = f(x)$

$(-2ax + a - 2b)e^{1-2x} = (2x + 1)e^{1-2x}$

$-2ax + a - 2b = 2x + 1$ | $e^{1-2x} \neq 0$, on simplifie par e^{1-2x}.

$-2a = 2$ et $a - 2b = 1$ |Egalité de deux fonctions polynômes

$a = -1$ et $b = -1$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = -(x + 1)e^{1-2x}$

28

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}$,

$\mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}$ est symétrique par rapport à ln2.

Et, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}$,

$\frac{1}{2}[f(2\ln 2 - x) + f(x)] = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2\ln 2 - x} - 4}{e^{2\ln 2 - x} - 2} + \frac{e^x - 4}{e^x - 2}\right]$ $\quad |e^{2\ln 2} = (e^{\ln 2})^2 = 2^2 = 4$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{4e^{-x} - 4}{4e^{-x} - 2} + \frac{e^x - 4}{e^x - 2}\right]$

| On multiplie le numérateur et le dénominateur de $\frac{4e^{-x} - 4}{4e^{-x} - 2}$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{4 - 4e^x}{4 - 2e^x} + \frac{e^x - 4}{e^x - 2}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{-4(e^x - 1)}{-2(e^x - 2)} + \frac{e^x - 4}{e^x - 2}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{2(e^x - 1)}{e^x - 2} + \frac{e^x - 4}{e^x - 2}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{3e^x - 6}{e^x - 2}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{3(e^x - 2)}{e^x - 2}\right]$

$= \frac{3}{2}$

D'où, le point A(ln2 ; $\frac{3}{2}$) est un centre de symétrie de (C).

2. * $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-4}{x-2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

* $\begin{cases} \lim\limits_{x\to \ln 2} (e^x - 4) = -2 \\ \lim\limits_{\substack{x\to \ln 2 \\ >}} \frac{1}{e^x-2} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to \ln 2 \\ >}} f(x) = -\infty$

* $\begin{cases} \lim\limits_{x\to \ln 2} (e^x - 4) = -2 \\ \lim\limits_{\substack{x\to \ln 2 \\ <}} \frac{1}{e^x-2} = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to \ln 2 \\ <}} f(x) = +\infty$

* $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{x-4}{x-2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$

3. Pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{\ln 2\}$, $f'(x) = \frac{e^x(e^x-2)-(e^x-4)e^x}{(e^x-2)^2} = \frac{2e^x}{(e^x-2)^2}$

$f'(x) > 0$

D'où, f est strictement croissante sur]-∞ ; ln2[et sur]ln2 ; +∞[.

x	-∞	ln2	+∞
f'(x)	+	||	+
f(x)	2 ↗ +∞	||	-∞ ↗ 1

4. a) * f(0) = 3 et f '(0) = 2

* y = 2(x - 0) + 3

y = 2x + 3 : équation de la droite (T).

D'où, droite (T) : y = 2x+3, est tangente à (C) au point d'abscisse 0.

b) * ∀ x ∈ $\mathbb{R}\setminus\{\ln 2\}$

$f''(x) = 2\frac{e^x(e^x-2)^2-2e^{2x}(e^x-2)}{(e^x-2)^4} = 2\frac{e^x(e^x-2)[e^x-2-2e^x]}{(e^x-2)^4}$

$f''(x) = 2\frac{e^x(e^x-2)(-e^x-2)}{(e^x-2)^4}$

$f''(x) = \frac{-2e^x(e^x-2)(e^x+2)}{(e^x-2)^4}$

* ∀x∈]-∞ ; ln2[;

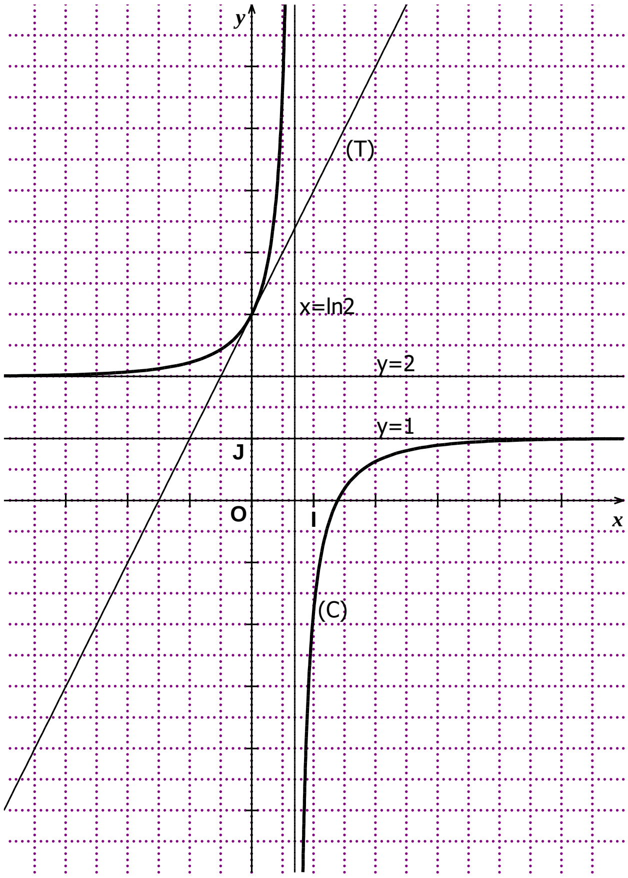
$-2e^x < 0$, $e^x - 2 < 0$, $e^x + 2 > 0$ et $(e^x - 2)^4 > 0$

f "(x) > 0

Et, 0∈]-∞ ; ln2[

D'où, (C) est au-dessus de (T) sur]-∞ ; ln2[.

5.



29

1. Df = ℝ\{2ln2}

   ℝ\{2ln2} est symétrique par rapport à 2ln2.

   Et, pour tout x élément de ℝ\{2ln2},

$$\frac{1}{2}[f(4\ln2-x) + f(x)] = \frac{1}{2}[-4\ln2+x + 1 + \frac{e^{4\ln2-x}-8}{e^{4\ln2-x}-4} - x + 1 + \frac{e^x-8}{e^x-4}]$$

$$= \frac{1}{2}[-4\ln2+2 + \frac{16e^{-x}-8}{16e^{-x}-4} + \frac{e^x-8}{e^x-4}] \quad |e^{4\ln2} = (e^{\ln2})^4 = 2^4 = 16$$

$$= \frac{1}{2}[-4\ln2+2 + \frac{16-8e^x}{16-4e^x} + \frac{e^x-8}{e^x-4}] \quad |\text{On multiplie par } e^x$$

$$= \frac{1}{2}[-4\ln2+2 + \frac{-8(e^x-2)}{-4(e^x-4)} + \frac{e^x-8}{e^x-4}]$$

$$= \frac{1}{2}[-4\ln2+2 + \frac{2(e^x-2)}{e^x-4} + \frac{e^x-8}{e^x-4}]$$

$$= \frac{1}{2}[-4\ln2+2 + \frac{3e^x-12}{e^x-4}]$$

$$= \frac{1}{2}[-4\ln2+2 + \frac{3(e^x-4)}{e^x-4}]$$

$$= \frac{1}{2}[-4\ln2+2 + 3]$$

$$= \frac{5}{2} -2\ln2$$

D'où, le point A(2ln2 ; $\frac{5}{2}$ -2ln2) est un centre de symétrie de (C).

2. * $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (-x+1) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x-8}{e^x-4} = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

   * $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} (-x+1) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x-8}{e^x-4} = 2 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

   * $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2\ln 2} (e^x-8) = -4 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 2\ln 2 \\ >}} \dfrac{1}{e^x-4} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 2\ln 2 \\ >}} \dfrac{e^x-8}{e^x-4} = -\infty$ [Limite d'un produit]

   $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2\ln 2} (-x+1) = -2\ln 2+1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 2\ln 2 \\ >}} \dfrac{e^x-8}{e^x-4} = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 2\ln 2 \\ >}} f(x) = -\infty$ [Limite d'une somme]

   * $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2\ln 2} (e^x-8) = -4 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 2\ln 2 \\ <}} \dfrac{1}{e^x-4} = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 2\ln 2 \\ <}} \dfrac{e^x-8}{e^x-4} = +\infty$ [Limite d'un produit]

   $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2\ln 2} (-x+1) = -2\ln 2+1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 2\ln 2 \\ <}} \dfrac{e^x-8}{e^x-4} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 2\ln 2 \\ <}} f(x) = +\infty$ [Limite d'une somme]

3. Pour tout x élément de □\{2ln2}, $f'(x) = -1 + \dfrac{e^x(e^x-4)-(e^x-8)e^x}{(e^x-4)^2}$

$$= -1 + \frac{4e^x}{(e^x-4)^2}$$
$$= \frac{-(e^{2x}-8e^x+16)+4e^x}{(e^x-4)^2}$$
$$= -\frac{(e^{2x}-8e^x+16)-4e^x}{(e^x-4)^2}$$
$$= -\frac{e^{2x}-12e^x+16}{(e^x-4)^2}$$

4. Pour tout *x* élément de ℝ\{2ln2},
   $(e^x-4)^2 > 0$
   f'(x) a le même signe que $-(e^{2x} - 12e^x + 16)$
   $-(e^{2x} - 12e^x + 16) = -[(e^x)^2 - 12e^x + 16)$
   $\Delta' = 36 - 16 = 20 = (2\sqrt{5})^2$
   $e^x = 6 - 2\sqrt{5}$ ou $e^x = 6 + 2\sqrt{5}$
   $x = \ln(6 - 2\sqrt{5})$ ou $x = \ln(6 + 2\sqrt{5})$

* $\forall x \in]-\infty ; \ln(6 - 2\sqrt{5})[\cup]\ln(6 + 2\sqrt{5}) ; +\infty[$, $f'(x) < 0$
  D'où, f est strictement décroissante sur $]-\infty ; \ln(6 - 2\sqrt{5})]$ et sur $[\ln(6 + 2\sqrt{5}) ; +\infty[$.
* $\forall x \in]\ln(6 - 2\sqrt{5}) ; 2\ln 2[\cup]2\ln 2 ; \ln(6 + 2\sqrt{5})[$, $f'(x) > 0$
  D'où, f est strictement croissante sur $[\ln(6 - 2\sqrt{5}) ; 2\ln 2[$ et sur $]2\ln 2 ; \ln(6 + 2\sqrt{5})]$.
*

x	$-\infty$		$\ln(6-2\sqrt{5})$		$2\ln 2$		$\ln(6+2\sqrt{5})$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$3{,}19$	$\nearrow$	$+\infty \;\|\; -\infty$	$\nearrow$	$-0{,}97$	$\searrow$	$-\infty$

5. a) Pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{2\ln 2\}$, $f(x) - (-x + 3) = -x + 1 + \dfrac{e^x-8}{e^x-4} + x - 3$

$$= \frac{e^x-8}{e^x-4} - 2$$

$$= \frac{e^x-8-2e^x+8}{e^x-4}$$

$$= -\frac{e^x}{e^x-4}$$

D'où, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{2\ln 2\}$, $f(x) = -x + 3 - \dfrac{e^x}{e^x-4}$.

b) Pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{2\ln 2\}$,

$$f(x) - (-x + 2) = -x + 1 + \frac{e^x-8}{e^x-4} + x - 2 = \frac{e^x-8}{e^x-4} - 1 = \frac{e^x-8-e^x+4}{e^x-4} = -\frac{4}{e^x-4}$$

D'où, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{2\ln 2\}$, $f(x) = -x + 2 - \dfrac{4}{e^x-4}$.

6. a) $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{2\ln 2\}$, $f(x) - (-x + 2) = -\dfrac{4}{e^x-4}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x-4) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (-x + 2)] = 0$

D'où, la droite (D) : $y = -x+2$, est une asymptote à (C) en $+\infty$.

b) Pour tout x de □$\setminus\{2\ln 2\}$, $f(x) - (-x + 2)$ a le même signe que : $-(e^x-4)$

* Pour tout x de $]2\ln 2 ; +\infty[$, $f(x) - (-x + 2) \leq 0$

D'où, (C) est en dessous de (D) sur $]2\ln 2 ; +\infty[$.

* Pour tout x de $]-\infty ; 2\ln 2[$, $f(x) - (-x + 2) \geq 0$

D'où, (C) est au-dessus de (D) sur $]-\infty ; 2\ln 2[$.

7. a) $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{2\ln 2\}$, $f(x) - (-x + 3) = -\dfrac{e^x}{e^x-4}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{e^x-4} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (-x + 3)] = 0$

D'où, la droite (D) : $y = -x+3$, est une asymptote à (C) en $-\infty$.

b) Pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{2\ln 2\}$, $e^x > 0$

$f(x) - (-x + 3)$ a le même signe que : $-(e^x-4)$

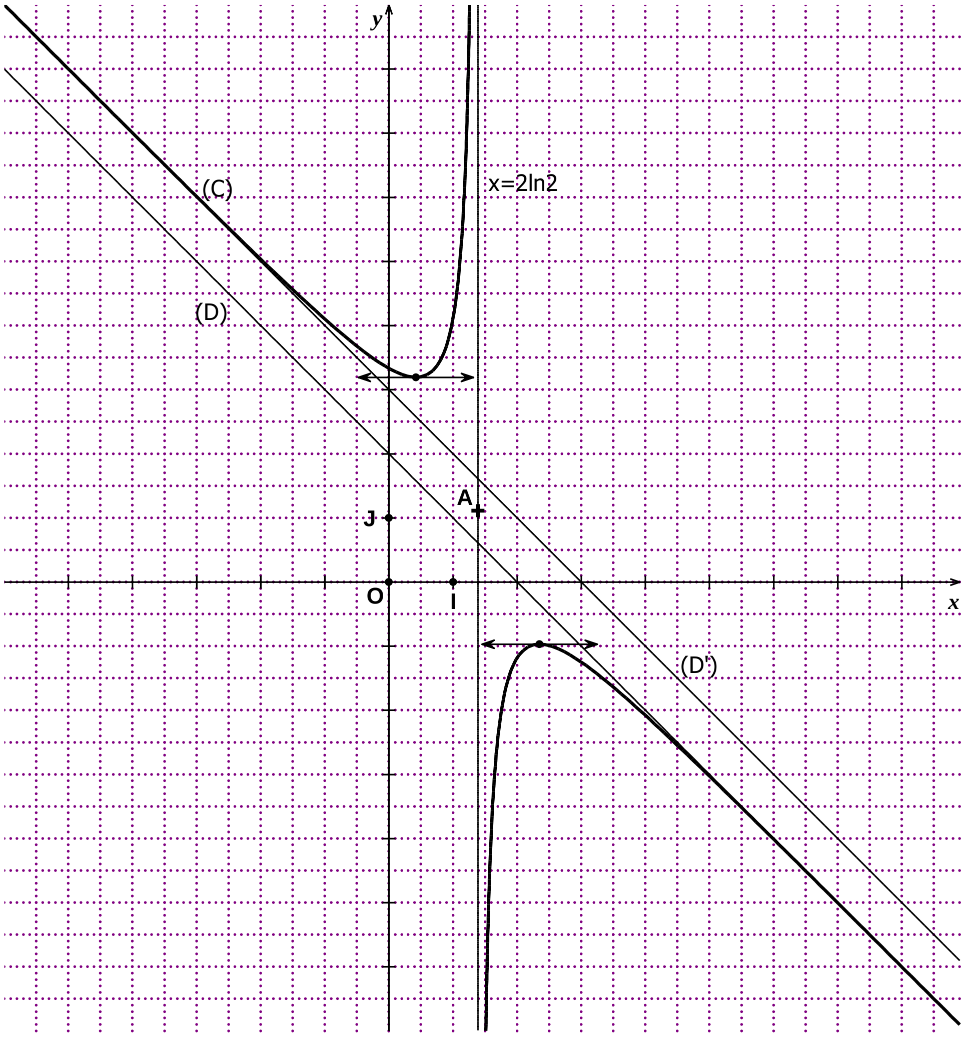
* Pour tout x de $]2\ln 2 ; +\infty[$, $f(x) - (-x + 3) \leq 0$

D'où, (C) est en dessous de (D') sur $]2\ln 2 ; +\infty[$.

* Pour tout x de $]-\infty ; 2\ln 2[$, $f(x) - (-x + 3) \geq 0$

D'où, (C) est au-dessus de (D') sur $]-\infty ; 2\ln 2[$.

8.



9. Pour tout x de]-∞ ; 2ln2[, $f(x) = -x + 3 - \frac{e^x}{e^x - 4}$

$f(x) = -x + 3 - \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = e^x\ 4$

$F(x) = -\frac{x^2}{2} + 3x - \ln|e^x - 4|$

$e^x - 4 < 0$

$|e^x - 4| = -(e^x-4) = 4 - e^x$

$F(x) = -\frac{x^2}{2} + 3x - \ln(4 - e^x)$

30

Df = [0 ; +∞[

* $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $f(x) = e^{3x\ln x}$

$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} 3x\ln x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} e^X = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = 1$

* $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = f(0)$. D'où, f est continue en zéro.

Pour tout x élément de]0 ; +∞[, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{e^{3x\ln x}-1}{x} = \frac{e^{3x\ln x}-1}{3x\ln x}3\ln x$

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} 3x\ln x = 0\\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1\end{array}\right. \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x\ln x}-1}{3x\ln x} = 1$$

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x\ln x}-1}{3x\ln x}=1\\ \lim\limits_{x\to 0} 3\ln x = -\infty\end{array}\right. \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$$

D'où, f n'est pas dérivable en zéro.

31

$\sqrt{2}-1>0$

D'où, Df = [0 ; +∞[

$\forall x\in]0\ ;+\infty[$;

$$f(x) = \frac{x^{\sqrt{2}-1}}{(x+2)^{\sqrt{2}-1}}$$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{x^{\sqrt{2}-2}}{(x+2)^{\sqrt{2}-1}} = \frac{1}{x^{2-\sqrt{2}}(x+2)^{\sqrt{2}-1}} \qquad |\ \sqrt{2}-2<0$$

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{1}{x^{2-\sqrt{2}}} = +\infty\\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{(x+2)^{\sqrt{2}-1}} = \dfrac{1}{2^{\sqrt{2}-1}}\end{array}\right. \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$$

D'où, f n'est pas dérivable en zéro.

32

$\sqrt{2}>0$

D'où, Df = [0 ; +∞[

$\forall x\in]0\ ;+\infty[$;

$$f(x) = \frac{x^{\sqrt{2}}}{(x+2)^{\sqrt{2}}}$$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{x^{\sqrt{2}-1}}{(x+2)^{\sqrt{2}}} \qquad |\ \sqrt{2}-1>0$$

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} x^{\sqrt{2}-1} = 0\\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{(x+2)^{\sqrt{2}}} = \dfrac{1}{2^{\sqrt{2}}}\end{array}\right. \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$$

D'où, f est dérivable en zéro et f '(0) = 0

Exercices d'approfondissement

33

34

Partie A

1. a) $D_h = \mathbb{R}$

 * $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^x = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

 * $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -5$

 b) Pour tout x élément de $\mathbb{R}$,

 $h'(x) = (x + 1)e^x$, $e^x > 0$

 $h'(x)$ a le même signe que $x+1$.

 * Pour tout x élément de $]-\infty ; -1[$, $h'(x) < 0$.
 D'où, la fonction h est strictement décroissante sur $]-\infty ; -1]$.

 * Pour tout x élément de $]-1 ; +\infty[$, $h'(x) > 0$.
 D'où, la fonction h est strictement décroissante sur $[-1 ; +\infty[$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
h'(x)		-	0	+	
h(x)	-5	↘	$-5-\frac{1}{e}$	↗	$+\infty$

 c) * $h(1,32) \approx -0,059$ et $h(1,33) \approx 0,029$ (arrondis d'ordre 3)

 * h est continue et strictement croissante sur $[-1 ; +\infty[$.
 Et, $h(1,32) \times h(1,33) < 0$.
 D'où, l'équation : $h(x) = 0$, a dans l'intervalle $[-1 ; +\infty[$ une unique solution γ comprise entre 1,32 et 1,33.

 d) * h est strictement décroissante sur $]-\infty ; -1]$.
 Et, $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -5$.
 D'où, pour tout x élément de $]-\infty ; -1]$, $h(x) < 0$.

 * h est strictement croissante sur $[-1 ; +\infty[$ et $h(\gamma) = 0$

 D'où, $\begin{cases} \forall x \in]-1 ; \gamma[, & h(x)<0 \\ \forall x \in]\gamma ; +\infty[, & h(x)>0 \end{cases}$.

 * En définitive : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty ; \gamma[, & h(x)<0 \\ \forall x \in]\gamma ; +\infty[, & h(x)>0 \end{cases}$.

2. a) $D_g =]0 ; +\infty[$.

* $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} (e^{x} - 5) = -4 \\ \lim\limits_{x\to 0} -5\ln x = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$

* Pour tout x élément de]0 ; +∞[, $f(x) = x(\frac{e^{x}}{x} - 5\frac{\ln x}{x} - \frac{5}{x})$.

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} (\frac{e^{x}}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{5}{x}) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

b) Pour tout x élément de]0 ; +∞[, $g'(x) = e^{x} - \frac{5}{x} = \frac{xe^{x} - 5}{x} = \frac{h(x)}{x}$.

$x > 0$

g'(x) a le même signe que h(x).

* Pour tout x élément de]-∞ ; γ[, g'(x) < 0.

D'où, g est strictement décroissante sur]-∞ ; γ].

* Pour tout x élément de]γ ; +∞[, g'(x) > 0.

D'où, g est strictement croissante sur [γ ; +∞[,.

x	0		γ		+∞
g'(x)		-	0	+	
g(x)	+∞	↘	g(γ)	↗	+∞

g(γ) < g(1)

g(γ) < e - 5

g(γ) < 3 - 5 car e-5 <3-5

g(γ) < -2

c) * g(0,51) ≈ 0,032 et g(0,52) ≈ -0,048 (arrondis d'ordre 3)

* g est continue et strictement décroissante sur]0 ; γ[.

Et, g(0,51) et g(0,52) sont de signes contraires.

D'où, l'équation : g(x) = 0, a dans l'intervalle]0 ; γ[une unique solution α telle que : $0,51 \leq \alpha \leq 0,52$.

d) * g(2,18) ≈ -0,050 et g(2,19) ≈ 0,016 (arrondis d'ordre 3)

* g est continue et strictement décroissante sur [2,18 ; 2,19].

Et, g(2,18) x (2,19) < 0.

D'où, l'équation : x∈[2,18 ; 2,19], g(x) = 0, admet une unique solution β.

e) g est continue et strictement décroissante sur]0 ; γ] et g(α) = 0.

Et, g est continue et strictement croissante sur [γ ; +∞[et g(β) = 0.

D'où, $\begin{cases} \forall x \in]0;\alpha[\cup]\beta;+\infty[, \quad g(x)>0 \\ \forall x \in]\alpha ; \beta[, \quad g(x)<0 \end{cases}$.

Partie B

f est la fonction de □ vers □ définie par : $\begin{cases} f(x) = e^{x} - 5x\ln(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$.

1. Df = [0 ; +∞[

* $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow e^{\alpha} - 5\ln\alpha - 5 = 0$

$\Leftrightarrow -5\ln\alpha = 5 - e^{\alpha}$

* $f(\alpha) = e^{\alpha} - 5\alpha\ln\alpha$

$= e^{\alpha} + (5 - e^{\alpha})\alpha$

2. a) Pour tout x élément de $]0 ; +\infty[$, $f(x) = x^2(\frac{e^x}{x^2} - \frac{\ln x}{x})$.

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{e^x}{x^2} - 5\frac{\ln x}{x}) = +\infty\end{array}\right. \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

b) * Pour tout x élément de $]0 ; +\infty[$, $\frac{f(x)}{x} = x(\frac{e^x}{x^2} - \frac{\ln x}{x})$.

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{e^x}{x^2} - 5\frac{\ln x}{x}) = +\infty\end{array}\right. \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

$$* \left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty\end{array}\right.$$

D'où, (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ).

3. a) $$* \left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0} -5x\ln x = 0\end{array}\right. \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} (e^x - 5x\ln x) = 1$$

$$\Rightarrow \lim\limits_{\underset{>}{x\to 0}} f(x) = 1$$

$$* \lim\limits_{\underset{>}{x\to 0}} f(x) = f(0)$$

D'où, f est continue en zéro.

b) * Pour tout x élément de $]0 ; +\infty[$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{e^x - 5x\ln x - 1}{x} = \frac{e^x - 1}{x} - 5\ln x$

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0} -5\ln x = +\infty\end{array}\right. \Rightarrow \lim\limits_{\underset{>}{x\to 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$$

D'où, f n'est pas dérivable en zéro.

$$* \lim\limits_{\underset{>}{x\to 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$$

D'où, (C) admet au point d'abscisse zéro, une demi-tangente verticale.

4. Pour tout x élément de $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = e^x - 5\ln x - 5$
$= g(x)$

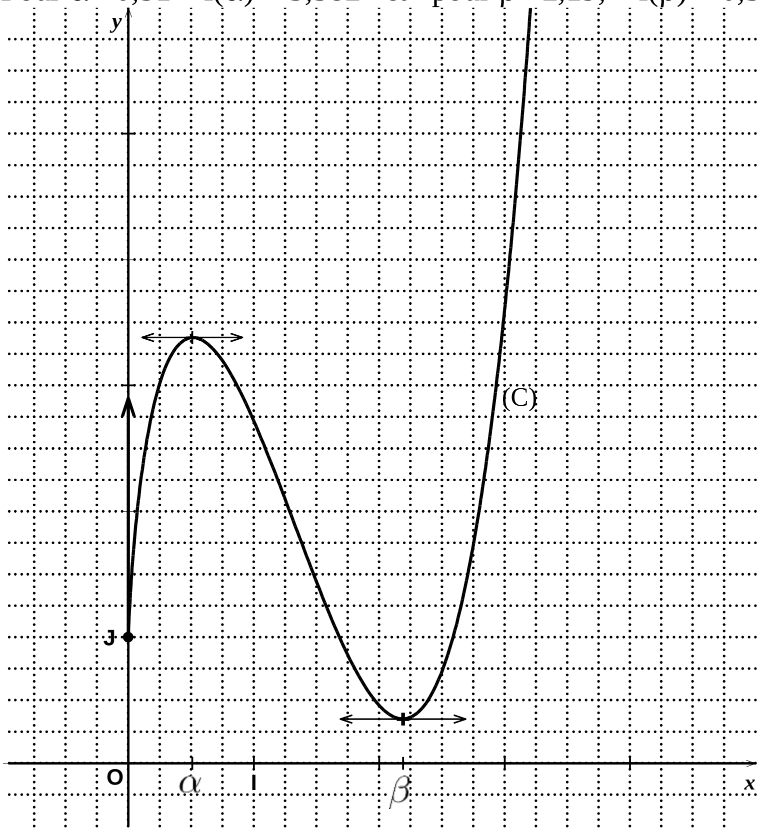
* Pour tout x élément de $]0 ; \alpha[\cup]\beta ; +\infty[$, $f'(x) > 0$.

D'où, f est strictement croissante sur $[0 ; \alpha]$ et sur $[\beta ; +\infty[$.

* Pour tout x élément de $]\alpha\ ;\ \beta[$, $f'(x) < 0$.
D'où, f est strictement décroissante sur $[\alpha\ ;\ \beta]$.

x	0		α		β		$+\infty$
f '(x)	$+\infty$	+	0	-	0	+	
f (x)	1	$\nearrow$	$e^{\alpha} + (5 - e^{\alpha})\alpha$	$\searrow$	$e^{\beta} + (5 - e^{\beta})\beta$	$\nearrow$	$+\infty$

5. Pour $\alpha \approx 0{,}51$ $f(\alpha) \approx 3{,}382$ et pour $\beta \approx 2{,}19$, $f(\beta) \approx 0{,}351$ (arrondis d'ordre 3)



35

<u>Partie A</u>

1. * $e^x - 4 = 0 \Leftrightarrow e^x = 4$
$\Leftrightarrow x = \ln(4)$
$\Leftrightarrow x = 2\ln 2$

$4e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{4}$
$\Leftrightarrow x = -\ln(4)$
$\Leftrightarrow x = -2\ln 2$

D'où : $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2\ln 2\ ;\ 2\ln 2\}$.

* Df est symétrique par rapport à 0.

Et, pour tout x de Df, $f(-x) = \ln\left|\frac{4e^{-x} - 1}{e^{-x} - 4}\right|$

$= \ln\left|\frac{4 - e^{x}}{1 - 4e^{x}}\right|$ On multiplie le numérateur et le dénominateur par e^x.

$= \ln\left|\dfrac{e^x - 4}{4e^x - 1}\right|$ | On multiplie le numérateur et le dénominateur par -1

$= \ln\left(\left|\dfrac{4e^x - 1}{e^x - 4}\right|^{-1}\right)$ | Sur ▪*, $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \left|\dfrac{b}{a}\right|^{-1}$

$= -\ln\left|\dfrac{4e^x - 1}{e^x - 4}\right|$

$= -f(x)$

Donc, f est impaire.

2. * $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{u\to 4} \ln u$ | $u = \left|\dfrac{4e^x - 1}{e^x - 4}\right|$; Quand $x \to +\infty$, $u \to 4$

$= 2\ln 2$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2\ln 2$ et f est impaire.

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2\ln 2$

* Pour tout x élément de $]-2\ln 2 ; 2\ln 2[$, $f(x) = \ln|4e^x - 1| - \ln|e^x - 4|$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2\ln 2} \ln|4e^x - 1| = \ln 15 \\ \lim\limits_{x\to 2\ln 2} (-\ln|e^x - 4|) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2\ln 2} f(x) = +\infty.$$

* $\lim\limits_{x\to 2\ln 2} f(x) = +\infty$ et f est impaire.

D'où : $\lim\limits_{x\to -2\ln 2} f(x) = -\infty$

3. $x\in\mathbb{R}$, $(4e^x - 1)(e^x - 4) < 0 \Leftrightarrow (4u - 1)(u - 4) < 0$ $(u = e^x)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4} < u < 4$

$\Leftrightarrow -\ln 4 < x < \ln 4$

$\Leftrightarrow x \in]-2\ln 2 ; 2\ln 2[$

4. (La fonction $x \mapsto \dfrac{4e^x - 1}{e^x - 4}$ est une fonction composée)

Pour tout x élément de $\mathbb{R}\backslash\{-2\ln 2 ; 2\ln 2\}$, $f'(x) = e^x \dfrac{-15}{(e^x - 4)^2} \dfrac{e^x - 4}{4e^x - 1}$

$= \dfrac{-15e^x}{(4e^x - 1)(e^x - 4)}$.

5. a) Pour tout x élément de $\mathbb{R}\backslash\{-2\ln 2 ; 2\ln 2\}$, $e^x > 0$

f '(x) a le même signe que $-(4e^x - 1)(e^x - 4)$

* Pour tout x élément de $]-2\ln 2 ; 2\ln 2[$, $(4e^x - 1)(e^x - 4) < 0$

f '(x) > 0

D'où, f est strictement croissante sur $]-2\ln 2 ; 2\ln 2[$.

* Pour tout x élément de $]-\infty ; -2\ln 2[\cup]2\ln 2 ; +\infty[$, $(4e^x - 1)(e^x - 4) > 0$

f '(x) < 0

D'où, f est strictement décroissante sur $]-\infty ; -2\ln 2[$ et sur $]2\ln 2 ; +\infty[$.

b)

x	$-\infty$		$-2\ln 2$		$2\ln 2$		$+\infty$
f '(x)			‖		‖		
f(x)	$-2\ln 2$		$-\infty$ ‖ $-\infty$		$+\infty$ ‖ $+\infty$		$2\ln 2$

	$-\infty$ $-\infty$

6. La fonction φ est définie sur]-2ln2 ; 2ln2[par : $\varphi(x) = f(x) - \frac{5}{3}x$.

   a) Pour tout x élément de]-2ln2 ; 2ln2[,

   $$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{5}{3} = \frac{-15e^{x}}{(4e^{x}-1)(e^{x}-4)} - \frac{5}{3} = = -5\left[\frac{3e^{x}}{4e^{2x}-17e^{x}+4} + \frac{1}{3}\right]$$

   $$\varphi'(x) = -5\frac{9e^{x}+4e^{2x}-17e^{x}+4}{3(4e^{2x}-17e^{x}+4)} = -5\frac{4e^{2x}-8e^{x}+4}{3(4e^{2x}-17e^{x}+4)} = -5\frac{4(e^{2x}-2e^{x}+1)}{3(4e^{2x}-17e^{x}+4)}$$

   $$\varphi'(x) = \frac{-20(e^{x}-1)^{2}}{3(4e^{x}-1)(e^{x}-4)}$$

c) Pour tout x élément de]-2ln2 ; 2ln2[\{0}, $(e^x - 4)^2 > 0$, $-20 < 0$ et $(4e^x - 1)(e^x - 4) < 0$;

$$\varphi'(x) > 0.$$

D'où, φ est strictement croissante sur]-2ln2 ; 2ln2[.

c) * $\varphi(0) = \ln(1) - 0 = 0$

* φ est strictement croissante sur]-2ln2 ; 2ln2[et $\varphi(0) = 0$.

D'où : $\begin{cases} \forall x \in]-2\ln 2 ; 0], & \varphi(x) \le 0 \\ \forall x \in [0 ; 2\ln 2[, & \varphi(x) \ge 0 \end{cases}$.

7. a) $f(0) = 0$ et $f'(0) = \frac{-15}{(3)(-3)} = \frac{5}{3}$.

   D'où : (T) : $y = \frac{5}{3}x$.

   b) Pour tout x élément de]-2ln2 ; 2ln2[, $f(x) - \frac{5}{3}x = \varphi(x)$

   * Pour tout x de]-2ln2 ; 0], $f(x) - \frac{5}{3}x \le 0$.

     D'où, (C) est en-dessous de (T) sur]-2ln2 ; 0].

   * Pour tout x de [0 ; 2ln2[, $f(x) - \frac{5}{3}x \ge 0$.

     D'où, (C) est en dessus de (T) sur [0 ; 2ln2[.

8. (Voir construction).

Partie B

1. $(C_0) : y = \ln\left|\frac{4e^{x}-1}{e^{x}-4}\right|$ et $-2\ln2 < x < 2\ln2$.

   Sur]-2ln2 ; 2ln2[, $\frac{4e^{x}-1}{e^{x}-4}$ a le même signe que $(4e^x - 1)(e^x - 4)$.

   $$\frac{4e^{x}-1}{e^{x}-4} < 0$$

   $$\left|\frac{4e^{x}-1}{e^{x}-4}\right| = -\frac{4e^{x}-1}{e^{x}-4}$$

   D'où, $(C_0) : y = \ln\left(-\frac{4e^{x}-1}{e^{x}-4}\right)$.

2. r : $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$

   a) $z' = x' + iy' = y - ix = -i(x + iy)$;

   r : $z' = -iz$.

   b) r est la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

3. a) $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x' \\ x = -y' \end{cases}$

(C_0) : $y = \ln\left(-\dfrac{4e^x - 1}{e^x - 4}\right)$

$x' = \ln\left(-\dfrac{4e^{-y'} - 1}{e^{-y'} - 4}\right)$

$e^{x'} = -\dfrac{4e^{-y'} - 1}{e^{-y'} - 4}$

$-e^{x'} = \dfrac{4e^{-y'} - 1}{e^{-y'} - 4}$

$e^{-y'}(-e^{x'} - 4) = -4e^{x'} - 1$

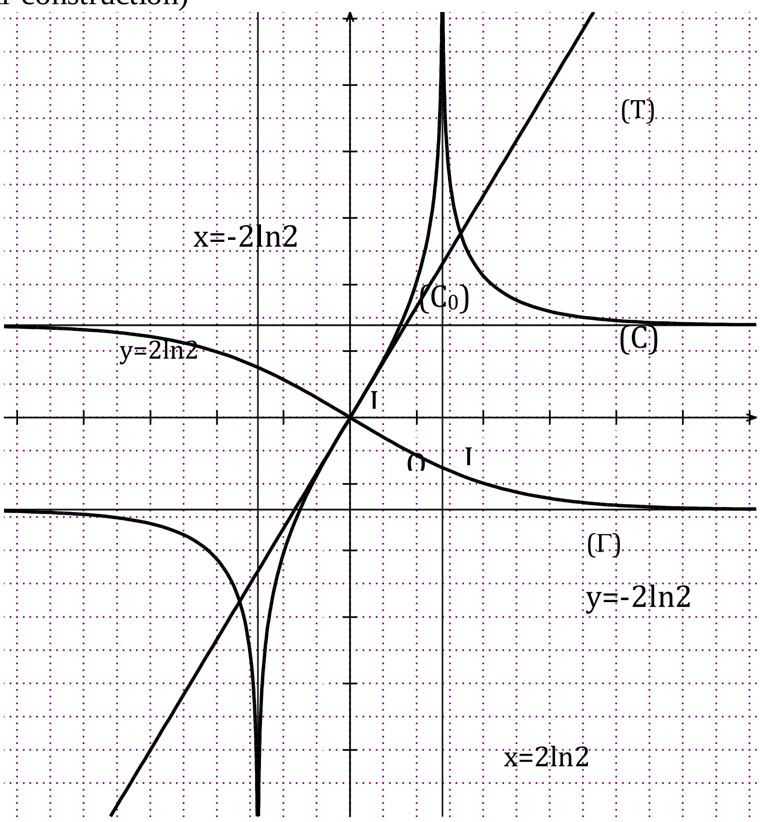
$e^{-y'} = \dfrac{4e^{x'} + 1}{e^{x'} + 4}$

$-y' = \ln\left(\dfrac{4e^{x'} + 1}{e^{x'} + 4}\right)$

$y' = \ln\left(\dfrac{e^{x'} + 4}{4e^{x'} + 1}\right)$

De plus,
$D_g = \mathbb{R}$.
$y = f(x)$ et $x' = y$.
D'après le tableau de variation de f, lorsque x décrit $]-2\ln2 ; 2\ln2[$, y décrit □.
D'où x' décrit □.
x' décrit Dg.
Donc, (Γ) et l'image de (C_0) par la rotation r.

b) (Γ) a pour asymptotes les droites d'équations respectives : $y = -2\ln2$ et $y = 2\ln2$.
(Voir construction)



36

1. * $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} (x+1) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{1-x} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} (x+1)e^{1-x} = -\infty$

   $\Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$

   * Pour tout x de $\mathbb{R}$, $g(x) = e(xe^{-x} + e^{-x}) + 1$.

   $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} (xe^{-x} + e^{-x}) = 0$

   $\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$

2. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $g'(x) = (1 - x - 1)e^{1-x} = -xe^{1-x}$

   $e^{1-x} > 0$

   $g'(x)$ a le même signe que $-x$

   * $\forall x \in]-\infty ; 0[$, $g'(x) > 0$.
   D'où, g est strictement croissante sur $]-\infty ; 0]$.
   * $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $g'(x) < 0$.
   D'où, g est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

   *

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'(x)		+	0	−	
g(x)	$-\infty$	↗	e+1	↘	1

3. * $g(-1,13) \approx -0,09$ et $g(-1,12) \approx 0,0002$
   * g est continue et strictement croissante sur $[-1,13 ; -1,12]$.
   Et, $g(-1,13)$ et $g(-1,12)$ sont de signes contraires.
   D'où, l'équation : $g(x) = 0$, admet une unique solution α telle que : $-1,13 \leq \alpha \leq -1,12$.

4. D'une part, g est strictement croissante sur $]-\infty ; 0]$ et $g(\alpha) = 0$.

   D'où, $\begin{cases} \forall x \in]-\infty ; \alpha[, & g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha ; 0], & g(x) > 0 \end{cases}$.

   D'autre part, g est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$.

   D'où, $\forall x \in [0 ; +\infty[$, $g(x) > 0$.

   Donc, $\begin{cases} \forall x \in]-\infty ; \alpha[, & g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha ; +\infty[, & g(x) > 0 \end{cases}$.

Partie B

1. $D_f = \mathbb{R}$.

   * $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (\alpha + 1)e^{1-\alpha} + 1 = 0$

   $\Leftrightarrow e^{1-\alpha} = -\frac{1}{\alpha+1}$

   * $f(\alpha) = (\alpha + 2)(1 - e^{1-\alpha}) = (\alpha + 2)(1 + \frac{1}{\alpha+1}) = (\alpha + 2)(\frac{\alpha+2}{\alpha+1})$

   $f(\alpha) = \frac{(\alpha+2)^2}{\alpha+1}$.

2. * $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (x+2) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (1-e^{1-x}) = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

   * $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} (x+2) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (1-e^{1-x}) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

3. a) Pour tout x de □, $f'(x) = 1 - e^{1-x} + (x+2)(e^{1-x}) = (x+2-1)e^{1-x} + 1 = (x+1)e^{1-x} + 1$

   $f'(x) = g(x)$

   b) Pour tout x de □, $f'(x) = g(x)$

   D'où, $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.

   * $\forall x \in]-\infty ; \alpha[$, $f'(x) < 0$

     D'où, f est strictement décroissante sur $]-\infty ; \alpha]$.

   * $\forall x \in]\alpha ; +\infty[$, $f'(x) > 0$

     D'où, f est strictement croissante sur $[\alpha ; +\infty[$.

   *

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f'(x)	–	0	+
f(x)	$+\infty$ ↘	$\frac{(\alpha+2)^2}{\alpha+1}$	↗ $+\infty$

4. $D_h = [0 ; +\infty[$ $h(x) = f(x) - 3x + 3$.

   a) Pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $h'(x) = f'(x) - 3$

   $= g(x) - 3$

   D'où, h' est g ont le même sens de variation sur $[0 ; +\infty[$.

   Donc, fonction dérivée h' de h est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

   b) $h'(1) = f'(1) - 3 = 3 - 3 = 0$

   c) h' est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$ et $h'(1) = 0$.

   D'où, : $\begin{cases} \forall x \in [0 ; 1[, & h'(x) > 0 \\ \forall x \in]1 ; +\infty[, & h'(x) < 0 \end{cases}$.

   Donc, la fonction h est strictement croissante sur $[0 ; 1]$ et strictement décroissante sur $[1 ; +\infty[$.

   d) * $h(1) = f(1) - 3 + 3 = f(1) = 3(0) = 0$.

   * h admet en 1 un maximum absolu de valeur zéro.

     D'où, $\forall x \in [0 ; +\infty[$, $h(x) \leq 0$.

5. a) * $f(1) = 0$ et $f'(1) = g(1) = 3$

   * $y = 3(x - 1) + 0$

     $y = 3x - 3$: équation de (T)

     D'où, la droite (T) : $y = 3x-3$, est tangente à (C) au point d'abscisse 1.

   b) Pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $f(x) - (3x-3) = g(x)$

   $g(x) \leq 0$

   $f(x) - (3x-3) \leq 0$

   D'où, la courbe (C) est en dessous de la droite (T) sur $[0 ; +\infty[$.

6. * Pour tout x de $]-\infty ; 0[$, $\frac{f(x)}{x} = (1 + \frac{1}{x})(1 - e^{1-x})$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} (1+\frac{2}{x}) = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (1-e^{1-x}) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

D'où, (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ).

7. a) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = x + 2 - (x + 2)e^{1-x}$.

$f(x) - (x + 2) = -(x + 2)e^{1-x} = - e(xe^{-x} + 2e^{-x})$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2e^{-x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} (xe^{-x} + 2e^{-x}) = 0$$

$$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (x + 2)] = 0$$

D'où, la droite (D) : $y = x+2$, est une asymptote à (C) en $+\infty$.

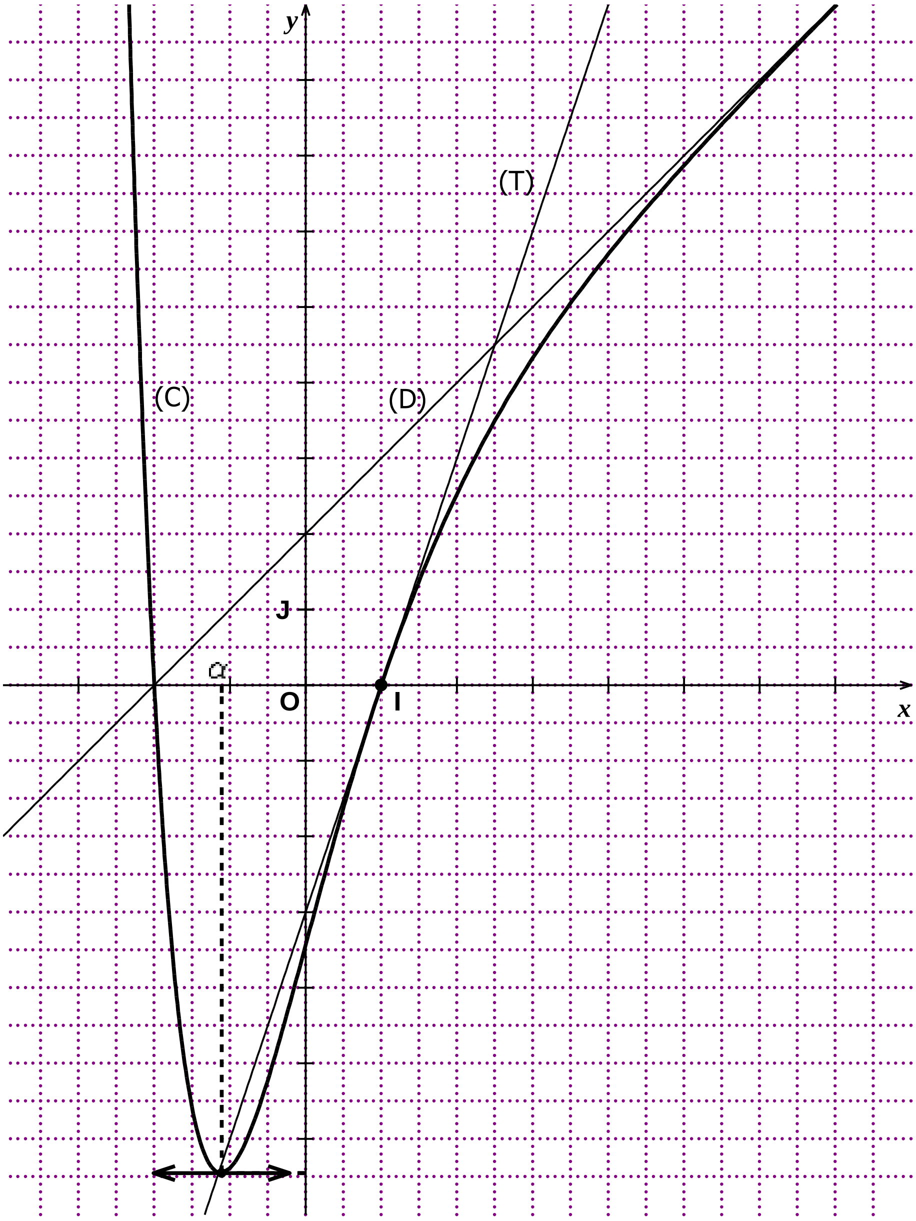
b) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) - (x + 2) = -(x + 2)e^{1-x}$

$e^{1-x} > 0$

$f(x) - (x + 2)$ a le même signe que $-(x + 2)$

* $\forall x\in]-\infty ; -2]$, $f(x) - (x + 2) \geq 0$
  D'où, (C) est au dessus de (D) sur $]-\infty ; -2]$.
* $\forall x\in[-2 ; +\infty[$, $f(x) - (x + 2) \leq 0$
  D'où, (C) est en dessous de (D) sur $[-2 ; +\infty[$.

8. Pour $\alpha = -1,12$ $f(\alpha) \approx -6,45$



37

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

1. $f(-x) = (-x)^2 - x - 2ln|e^{-x} - 1|$

$= (-x)^2 - x - 2ln|e^{-x}|\times\left|1 - \frac{1}{e^{-x}}\right|$

$= x^2 - x - 2ln|e^{-x}| - 2ln|1 - e^{x}|$

$= x^2 - x + 2x - 2ln|1 - e^{x}|$

$= x^2 + x - 2ln|e^{x} - 1|$

$f(-x) = f(x)$ et $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, donc f est paire.

$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ car $\lim_{x\to 0} |e^{x} - 1| = 0$ et $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$ ainsi $\lim_{x\to 0}$ $-2ln|e^{x} - 1| = +\infty$

3. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 + x - 2ln|e^{x}||1 - e^{x}|$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 + x - 2ln|e^{x}| - 2ln|1 - e^{-x}|$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - x - 2ln|1-e^{-x}| = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-x-2ln|1-e^{-x}|}{x} = +\infty$ (Corriger $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et non $\lim\limits_{x\to0} \frac{f(x)}{x}$)

Branche parabolique de direction (OJ).

4. $f'(x) = 2x + 1 - \frac{2e^x}{e^x-1}$

$f''(x) = 2 - \frac{2e^x(e^x-1)-e^x \times 2e^x}{(e^x-1)^2}$

$f''(x) = 2 - \frac{2e^{2x}-e^x-2e^{2x}}{e^x-1}$

$f''(x) = 2 + \frac{e^x}{e^x-1}$

$f'' > 0$, sur $]0\,;+\infty[$

f' est croissante sur $]0\,;+\infty[$

$f'(x) = 2x + 1 - \frac{2}{1-e^{-x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to0} f'(x) = -\infty$

L'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α. ($f'(]0\,;+\infty[) = \mathbb{R}$)

La courbe de f' coupe l'axe des abscisses en α.

$f'(1{,}04)f'(1{,}05) < 0$ donc $1{,}04 < \alpha < 1{,}05$

7. D'après ce qui précède

Pour tout x élément de $]0\,;\alpha[$, $f'(x) < 0$

Pour tout x élément de $]\alpha\,;+\infty[$, $f'(x) > 0$

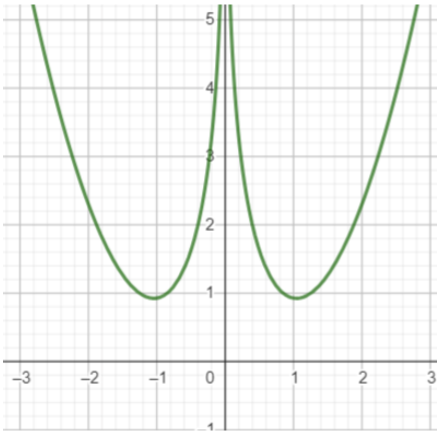
8.

Tableau de variation de f sur $]0\,;+\infty[$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

9. Laisser cette question qui engendre trop de calcul.

10. On construit f sur $]0\,;+\infty[$ puis on prend son symétrique par rapport à (OJ) car f est pair.



38

Partie A

Df =] - ∞ ; -1[∪]0 ; +∞[

$f(x) = xln(1+\frac{1}{x})$

1. $f'(x) = ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x \times \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}$

$f'(x) = ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2}{x^2(1+x)}$

$f'(x) = ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$

$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{(1+x)^2}$

$f''(x) = \frac{-1}{x(1+x)} + \frac{1}{(1+x)^2}$

$f''(x) = \frac{-(1+x)+x}{x(1+x)^2}$

$f''(x) = \frac{-1}{x(1+x)^2}$

2. On démontre facilement que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = +\infty$

f' est décroissante sur]0 ; +∞[et $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = +\infty$ donc f' est strictement positive sur]0 ; +∞[

$f'(x) = ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$

f' est croissante] - ∞ ; -1[et $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to -1} f'(x) = +\infty$ donc f' est strictement positive sur] - ∞ ; -1[

On en déduis que f' est positive sur] - ∞ ; -1[et sur]0 ; +∞[

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = 1$

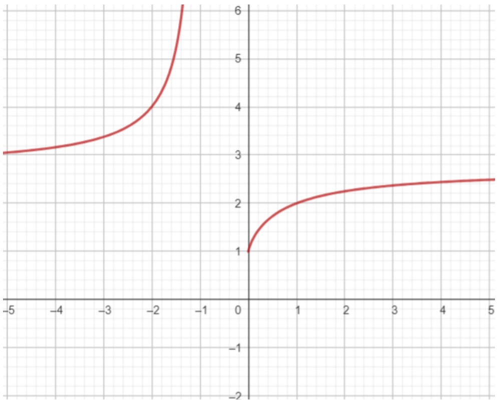
$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} xln(1+\frac{1}{x}) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to -1} ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} xln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} xln\left(\frac{1+x}{x}\right)$ où $x > 0$

lim; $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ =lim; $x\ln(1+x) - x\ln x$ où $x > 0$
x→0 x→0

Donc lim; $f(x) = 0$
x→0

Partie B



lim; ;
x→0 <

39

Partie A

1) Dg = ℝ

Pour tout x de ℝ, $g'(x) = 3x^2 - 2x + 1$

$\Delta = 4 - 12 = -8$ (discriminant)

Δ> d'où pour tout x de ℝ, g'(x) > 0

g est donc strictement croissante sur □.

2) * $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

* g est continue et strictement croissante sur □

de plus $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ sont de signes contraires

d'où l'équation : $x \in$ ℝ, g(x) = 0 admet une unique solution α dans □.

3) a) * g(-1) = -2 et g(0) = 1

* g(-1) ≤ g(α) ≤ g(0) et g est strictement croissante sur □

d'où -1 ≤ α ≤ 0

b) * g(-0,6) = -0,176 et g(-0,5) = 0,125

d'où -0,6 ≤ α ≤ -0,5

* g(-0,55) ≈ -0,018 et g(-0,54) ≈ 0,010

d'où -0,55 ≤ α ≤ -0,54

4) g est strictement croissante sur □ et g(α) = 0

d'où : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty\ ;\ \alpha[, & g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha\ ;\ +\infty[, & g(x) > 0 \\ g(\alpha) = 0 \end{cases}$

Partie B

1) D_f = ℝ

* $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - \frac{1}{x}) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

* $\lim\limits_{x \to -\infty} (x - \frac{1}{x}) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$

d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

2) a) * $\lim\limits_{x \to 0^{<}} \left(x - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0^{<}} \left(x e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}\right)$

$\lim\limits_{x \to 0} (x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^{<}} e^{\frac{1}{x}} = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to 0^{<}} x e^{\frac{1}{x}} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^{<}} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^{x} = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to 0^{<}} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} = 0$

Finalement $\lim\limits_{x \to 0^{<}} \left(x - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} = 0$ $\lim\limits_{x \to 0^{>}}$

* $\lim\limits_{x \to 0^{>}} \left(x - \frac{1}{x}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^{>}} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$

d'où $\lim\limits_{x \to 0^{>}} \left(x - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 0^{>}} \left(x - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 0^{<}}$

d'où f n'est pas continue en zéro.

3) a) $\lim\limits_{x \to 0^{<}} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^{<}} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0^{<}} \left(e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\right)$

$\lim\limits_{x \to 0^{<}} e^{\frac{1}{x}} = 0$

et $\lim\limits_{x \to 0^{<}} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0^{<}} \left(\frac{1}{x}\right)^2 e^{\frac{1}{x}}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} u^2 e^{u}$

$= 0$

Posons $u = \frac{1}{x}$

Quand $x \xrightarrow[<]{} 0$, $u \to -\infty$

d'où $\lim\limits_{x \to 0^{<}} \frac{f(x)}{x} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 0^{<}} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^{<}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$

La droite (OI) est la tangente de (C) à gauche de zéro.

4) Pour tout x de ℝ*, $f'(x) = (1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}(x - \frac{1}{x}))e^{\frac{1}{x}}$

$$= \left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)e^{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{x^3 - x^2 + x + 1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{g(x)}{x^3}e^{\frac{1}{x}}$$

5) a) Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $e^{\frac{1}{x}} > 0$ et x^3 a même signe que x
d'où pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $f'(x)$ a même signe que $xg(x)$.

* Pour tout $x$de $]-\infty ; \alpha[\cup]0 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$

f est donc strictement croissante sur $]-\infty ; \alpha]$ et sur $]0 ; +\infty[$.

* Pour tout x de $]\alpha ; 0[$, $f'(x) > 0$

f est donc strictement décroissante sur $[\alpha ; 0]$.

b)

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0 ‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0 ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

Pour $\alpha = -0{,}55$ $f(\alpha) \approx 0{,}21$

6) * $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (x+1)) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x(e^{\frac{1}{x}} - 1) - \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = 0 - 1 = -1$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^u - 1}{u}$ ($u = \frac{1}{x}$: quand $x \to +\infty$, $u \to 0$)

$= 1$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (x+1)) = -1 + 1 = 0$

La droite (D) : $y=x+1$ est donc une asymptote de (C) en $+\infty$.

* $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (x+1)) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x(e^{\frac{1}{x}} - 1) - \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = 0 - 1 = -1$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}$

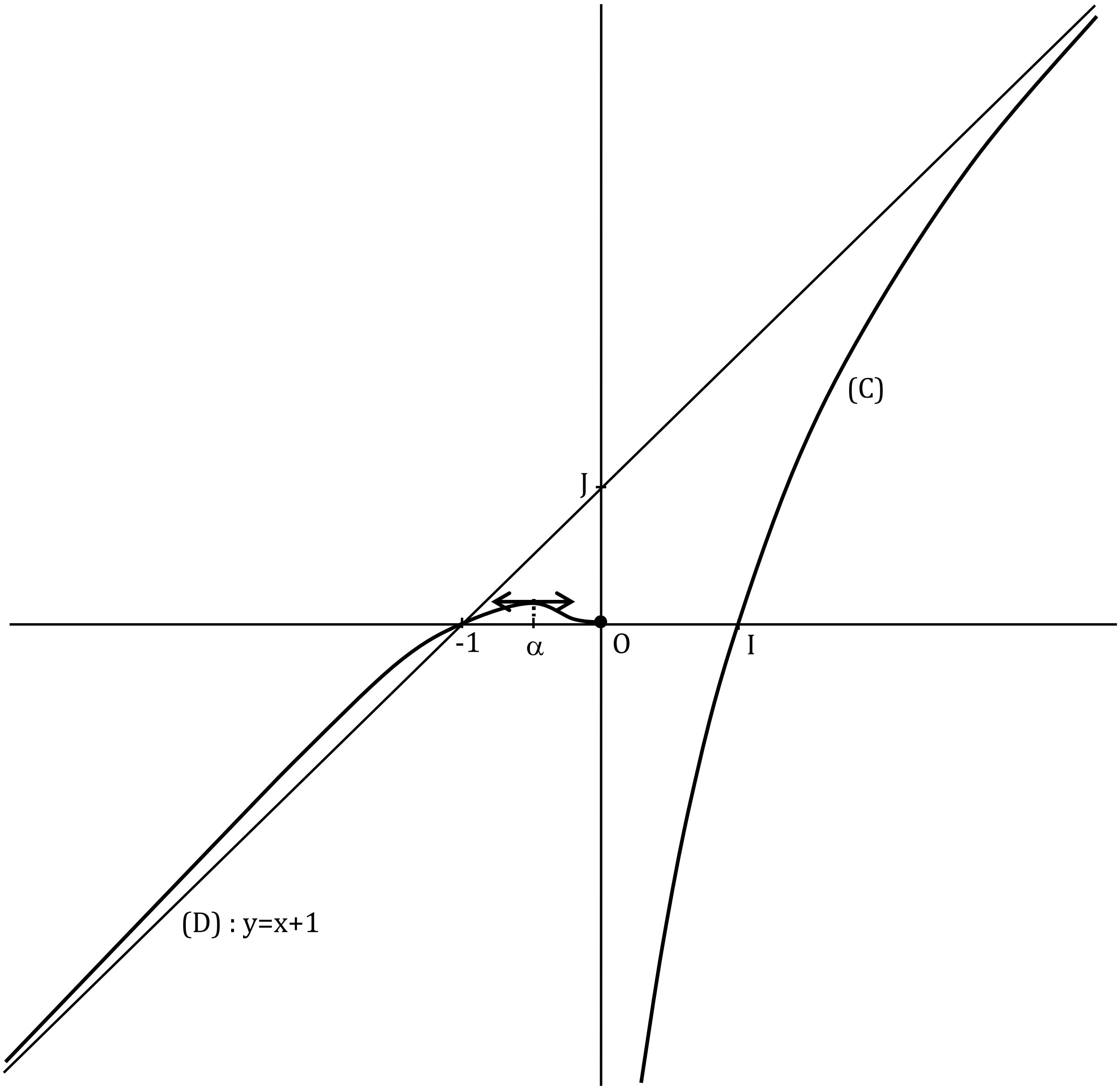
$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^u - 1}{u}$ (u = $\dfrac{1}{x}$: quand x → -∞, u → 0)

$= 1$

d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (x+1)) = -1 + 1 = 0$

La droite (D) : y=x+1 est donc une asymptote de (C) en -∞.

7) a) (Voir construction)
b) f(1) = f(-1) = 0



40

Partie A

1) Dg = ℝ

$g(1) = 0$

d'où pour tout x de $\mathbb{R}$, $2x^3 - x - 1 = (x-1)(2x^2 + bx + 1)$

Par identification des termes de degré 1, $-b + 1 = -1$

$b = 2$

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $2x^3 - x - 1 = (x-1)(2x^2 + 2x + 1)$

$\Delta' = 1 - 2 = -1$ (discriminant réduit)

$\Delta' < 0$

$2x^2 + 2x + 1 > 0$

En définitive, pour tout x de □, $g(x) = (x-1)(2x^2 + 2x + 1)$

2) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $2x^2 + 2x + 1 > 0$

$g(x)$ a même signe que $x - 1$.

* Pour tout $x$de $]-\infty ; 1[$, $g(x) < 0$
* Pour tout x de $]1 ; +\infty[$, $g(x) > 0$
* $g(1) = 0$

Partie B

$D_f = \mathbb{R}^*$

1) * $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + x + 1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

* $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + x + 1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$

d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

2) * $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 + x + 1) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} e^{\frac{1}{x}} = 0$

d'où $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = 0$

* $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 + x + 1) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$

d'où $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$

3) a) $h(x) = f(x)$ si $x \neq 0$) et $h(0) = 0$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{h(x)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left(x + 1 + \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left(xe^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\right)$$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} (x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} e^{\frac{1}{x}} = 0$ d'où $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} (x e^{\frac{1}{x}}) = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x} = 0$ d'où $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} = 0$

D'où $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{h(x)}{x} = 0 + 0 + 0 = 0$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{h(x)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{h(x) - h(0)}{x - 0} = 0$

(C)∪{O} admet au point O une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

4) Pour tout x de ℝ*, $f'(x) = (2x + 1 - 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})e^{\frac{1}{x}}$

$$= \frac{2x^3 - x - 1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{g(x)}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

5) Pour tout x de ℝ*, $e^{\frac{1}{x}} > 0$ et $x^2 > 0$

f'(x) a même signe que g(x).

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'(x)		$-$	0 ‖	$-$	0	$+$	
f(x)	$+\infty$	↘	0 ‖ $+\infty$	↘	3e	↗	$+\infty$

3e ≈ 8,18

6) a) * $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} (x + 1 + \frac{1}{x})\, e^{\frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x + 1 + \frac{1}{x}) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

* $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} (x + 1 + \frac{1}{x})\, e^{\frac{1}{x}}$

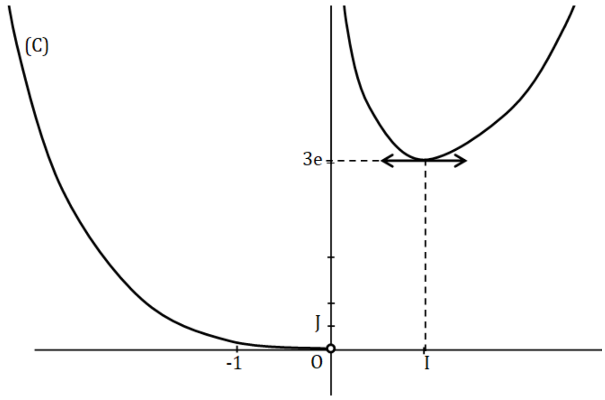
$\lim\limits_{x \to -\infty} (x + 1 + \frac{1}{x}) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$

d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$

b) * (C) admet en +∞ une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ).

* (C) admet en –∞ une branche parabolique de direction (OJ).

7) f(-1) ≈ 0,37



41

Partie A (*Etude de la fonction f*)

1) $D_f = \mathbb{R}$

a) * $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\frac{1}{x-1}} = 1$.

D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

* $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-\frac{1}{x-1}} = 1$.

D'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

b) * $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} (x+1) = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} e^{-\frac{1}{x-1}} = 0$.

D'où : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = 0$.

* $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} (x+1) = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} e^{-\frac{1}{x-1}} = +\infty$.

D'où : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = +\infty$.

2) a) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = +\infty$.

D'où, f n'est pas continue en 1.

b) Pour tout x de]1 ; +∞[, $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{x+1}{x-1} e^{-\frac{1}{x-1}} = -(x+1)\left(\frac{-1}{x-1} e^{-\frac{1}{x-1}}\right)$

$\lim\limits_{x \to 1} [-(x+1)] = -2$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{-1}{x-1} e^{-\frac{1}{x-1}} = \lim\limits_{u \to -\infty} ue^{u} = 0$ [$u = \frac{-1}{x-1}$: quand $x \xrightarrow[>]{} 1$, $u \to -\infty$]

D'où : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 0$.

Donc, f est dérivable à droite en 1 et $f'_d(1) = 0$.

3) a) Pour tout x de □\{1}, $f'(x) = (1+\frac{x+1}{(x-1)^2})e^{-\frac{1}{x-1}} = \frac{x^2-x+2}{(x-1)^2}e^{-\frac{1}{x-1}} = \frac{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}}{(x+1)^2}$ $e^{-\frac{1}{x-1}}$

$f'(x) > 0$

Donc, f est strictement croissante sur]-∞ ; -1[et sur]-1 ; +∞[.

b)

x	-∞	1	+∞
f '(x)	+	‖ 0	+
f(x)	-∞ ↗ +∞	‖ 0	↗ +∞

<u>Partie B</u> (***Représentation graphique de la fonction f***)

1) f(-1) = 0 et $f'(-1) = (1+0)e^{-\frac{1}{-2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

Equation de la tangente au point d'abscisse -1 : $y = \sqrt{e}\,(x+1) + 0$

$y = \sqrt{e}\,x + \sqrt{e}$: équation de (T).

Donc, la droite (T) : $y = \sqrt{e}\,x + \sqrt{e}$ est tangente à (C) au point d'abscisse -1.

2) Pour tout x de ℝ\{1}, $f(x)-x = (x+1)\,e^{-\frac{1}{x-1}} - x$

$= x\,e^{-\frac{1}{x-1}} - x + e^{-\frac{1}{x-1}}$

$= x(e^{-\frac{1}{x-1}} - 1) + e^{-\frac{1}{x-1}}$

$= \frac{-x}{x-1}\left(\frac{e^{-\frac{1}{x-1}}-1}{-\frac{1}{x-1}} - 1\right) + e^{-\frac{1}{x-1}}$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x}{x-1} = -1$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x-1}}-1}{-\frac{1}{x-1}} = \lim\limits_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u} = 1$ [$u=\frac{-1}{x-1}$: quand $x\to+\infty$, $u\to 0$]

et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x-1}} = 1$.

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x) = -1(1) + 1 = 0$

Donc, la droite (D) : y=x, est une asymptote à (C) en +∞.

* $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x}{x-1} = -1$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x-1}}-1}{-\frac{1}{x-1}} = \lim\limits_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u} = 1$ [$u=\frac{-1}{x-1}$: quand $x\to-\infty$, $u\to 0$]

et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\frac{1}{x-1}} = 1$.

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x) = -1(1) + 1 = 0$

Donc, la droite (D) : y=x, est une asymptote à (C) en -∞.

3) a) Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, $g'(x) = f'(x) - \sqrt{e}$.

$g'(-1) = f'(-1) - \sqrt{e} = \sqrt{e} - \sqrt{e} = 0$

$g'(\frac{5}{3}) = -0{,}09$

b) Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, $g'(x) = (1+\frac{x+1}{(x-1)^2})e^{-\frac{1}{x-1}} - \sqrt{e}$

$$g''(x) = [\frac{(x-1)^2 - 2(x+1)(x-1)}{(x-1)^4} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{x+1}{(x-1)^4}]e^{-\frac{1}{x-1}}$$

$$= [\frac{x^2 - 2x + 1 - 2x^2 + 2 + x^2 - 2x + 1 + x + 1}{(x-1)^4}]e^{-\frac{1}{x-1}}$$

$$= \frac{-3x+5}{(x-1)^4}e^{-\frac{1}{x-1}}.$$

c) Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, $e^{-\frac{1}{x-1}} > 0$ et $(x-1)^4 > 0$.

g''(x) a le même signe que -3x+5.

* Pour tout x de $]-\infty ; 1[\cup]1 ; \frac{5}{3}[$, $g''(x) > 0$.

D'où, g' est strictement croissante sur $]-\infty ; 1[$ et sur $[1 ; \frac{5}{3}]$.

* Pour tout x de $]\frac{5}{3} ; +\infty[$, $g''(x) < 0$.

D'où, g' est strictement décroissante sur $[\frac{5}{3} ; +\infty[$.

d) * g' est strictement croissante sur $]-\infty ; 1[$ et $g'(-1) = 0$.

D'où : $\forall x\in]-\infty ; -1[$, $g'(x) < 0$ et $\forall x\in]-1 ; 1[$, $g'(x) > 0$.

* Sur $[1 ; +\infty[$, g' admet en $\frac{5}{3}$ un maximum absolu d'arrondi d'ordre 2 égal à -0,08.

D'où : $[1 ; +\infty[$, $g'(x) < 0$

* En définitive : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[, & g'(x) < 0 \\ \forall x \in]-1 ; 1[, & g'(x) > 0 \\ g'(-1) = 0 \end{cases}$.

e) * $g(-1) = f(-1) - (-\sqrt{e} + \sqrt{e}) = 0$

Sur $]-\infty ; 1[$, g admet en -1 un minimum absolu de valeur 0.

D'où : $\forall x\in]-\infty ; 1[$, $g(x) \geq 0$

* $g(1) = f(1) - (\sqrt{e} + \sqrt{e}) = -2\sqrt{e}$

g est strictement décroissante sur $[1 ; +\infty[$ et $g(1) < 0$.

D'où : $\forall x\in[1 ; +\infty[$, $g(x) < 0$

* Donc, $\begin{cases} \forall x \in]-\infty ; 1[, & g(x) \geq 0 \\ \forall x \in [1 ; +\infty[, & g(x) < 0 \end{cases}$.

f) Pour tout x de □, $f(x) - (\sqrt{e}\,x + \sqrt{e}) = g(x)$

$f(x) - (\sqrt{e}\,x + \sqrt{e})$ a le même signe que g(x).

* $\forall x\in]-\infty ; 1[$, $f(x) - (\sqrt{e}\,x + \sqrt{e}) \geq 0$.

D'où, (C) est au-dessus de (T) sur $]-\infty ; 1[$.

* $\forall x\in[1 ; +\infty[$, $f(x) - (\sqrt{e}\,x + \sqrt{e}) < 0$.

D'où, (C) est en dessous de (T) sur $[1 ; +\infty[$.

4) Soit h la fonction définie de $\mathbb{R}^*\backslash\{1\}$ dans $\mathbb{R}$par : $h(x) = \frac{x+1}{x} e^{-\frac{1}{x-1}} - 1$.

a) $h(\frac{1}{3}) \approx 16{,}93$

b) * $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x-1}} = 1$.

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$.

* $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\frac{1}{x-1}} = 1$.

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 0$.

c) Pour tout *x* de $\mathbb{R}^*\backslash\{1\}$, $h'(x) = (-\frac{1}{x^2} + \frac{x+1}{x(x-1)^2})e^{-\frac{1}{x-1}}$

$$= \frac{-x^2+2x-1+x^2+x}{x^2(x+1)^2} e^{-\frac{1}{x-1}}$$

$$= \frac{3x-1}{x^2(x+1)^2} e^{-\frac{1}{x-1}}$$

$e^{-\frac{1}{x-1}} > 0$, $x^2 > 0$ et $(x-1)^2 > 0$.

h'(x) a le même signe que 3x-1.

* $\forall x \in]-\infty\ ; 0[\cup]0\ ; \frac{1}{3}[$, $h'(x) < 0$.

D'où, h est strictement décroissante sur $]-\infty\ ; 0[$ et sur $]0\ ; \frac{1}{3}]$

* $\forall x \in h'(x) > 0$.

D'où, h est strictement croissante sur $[\frac{1}{3}\ ; 1[$ et sur $]1; +\infty[$,.

d) * h est strictement décroissante sur $]-\infty\ ; 0[$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 0$.

D'où : $\forall x \in]-\infty\ ; 0[$, $h(x) < 0$.

* sur $]0\ ; 1[$, h admet en $\frac{1}{3}$ un minimum absolue d'arrondi d'ordre 2 égale à 16,93.

D'où : $\forall x \in]0\ ; 1[$, $h(x) > 0$.

* h est strictement croissante sur $]1; +\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$.

D'où : $\forall x \in]1; +\infty[$, $h(x) < 0$.

e) Pour tout *x* de $\mathbb{R}^*\backslash\{1\}$, $f(x) - x = (x+1)e^{-\frac{1}{x-1}} - x = x(\frac{x+1}{x} e^{-\frac{1}{x-1}} - 1) = xh(x)$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		-		+	‖	+	
h(x)		-		+	‖	-	
f(x)-x		+	e	+	$+\infty$ ‖ -1	-	

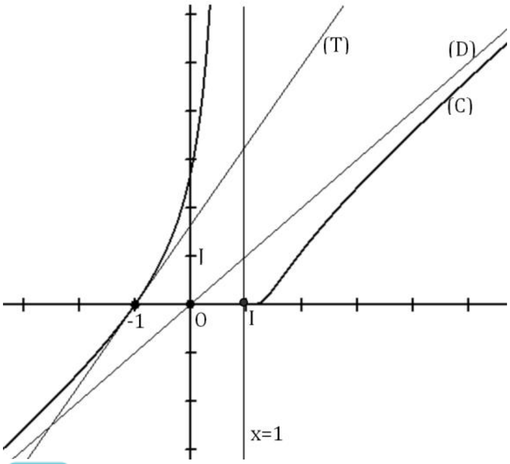
* Pour tout *x*de $]-\infty\ ; 1[$, $f(x) - x > 0$

(C) est au-dessus de la droite (D) sur $]-\infty\ ; 1[$,.

* Pour tout *x* de $[1\ ; +\infty[$, $f(x) - x < 0$

(C) est en dessous de la droite (D) sur $[1\ ; +\infty[$.

5)



42

1. Soit P le pourcentage d'atomes perdus.
   $N(30000) = N_0e^{-0,0001238\times30000}$.
   $P = \dfrac{N_0 - N_0e^{-0,0001238}}{N_0} = 1 - e^{-0,0001238\times30\,000}$.
   P = 0,9756 (par défaut à 10^{-4} près)
   P = 97,56 %
2. Soit T le temps cherché, en année.
   $N(T) = \dfrac{N_0}{2}$
   $N_0e^{-0,0001238T} = \dfrac{N_0}{2}$
   $e^{-0,0001238T} = \dfrac{1}{2}$
   $-0,0001238T = -\ln2$
   $T = \dfrac{-\ln 2}{-0,0001238}$
   T = 5598,9 (par défaut à 1 an près)
   T = 5 599
3. Soit t l'âge de cet os.
   $1 - e^{-0,0001238t} = 0,4$
   $e^{-0,0001238t} = 0,6$
   $-0,0001238t = \ln(0,6)$
   $t = \dfrac{-\ln(0,6)}{0,0001238}$
   t = 4126,21 (par défaut à 10^{-2} près)
   t = 4 127

43

$h(t) = \frac{a}{1+be^{-0,14t}}$

$0,1 = \frac{a}{1+b}$

$\lim_{t\to+\infty} \frac{a}{1+be^{-0,14t}} = 2$ or $\lim_{t\to+\infty} e^{-0,14t} = 0$ donc $a = 2$

$0,1 = \frac{2}{1+b}$; $0,1 + 0,1b = 2$

$b = \frac{2-0,1}{0,1} = 19$

$h(t) = \frac{2}{1+19e^{-0,14t}}$

2.

90 jours la hauteur est de 1,2 mètres

44

$T(t) = Ae^{-ct} + 20$

$T(0) = A + 20 = 37$

$A = 17$

$32 = 17e^{-ct} + 20$

$e^{-ct} = \frac{12}{17}$

$-ct = \ln(\frac{12}{17})$

$31 = 17e^{-c(t+0,5)} + 20$

$11 = 17e^{-c(t+0,5)}$

$-c(t+0,5) = \ln(\frac{11}{17})$

$-ct - 0,5c = \ln(\frac{11}{17})$

$\ln\left(\frac{12}{17}\right) - 0,5c = \ln(\frac{11}{17})$

$-0,5c = \ln\left(\frac{11}{17}\right) - \ln(\frac{12}{17})$

$-0,5c = \ln\left(\frac{11}{17} \times \frac{17}{12}\right)$

$0,5c = \ln\left(\frac{12}{11}\right)$

$c = 2\ln\left(\frac{12}{11}\right)$

$c = 0,174$

$T(t) = 17e^{-0,174t} + 20$

$T(t) = 17e^{-2\ln(\frac{12}{11})t} + 20$

$32 = 17e^{-2\ln(\frac{12}{11})t} + 20$

$\frac{12}{17} = e^{-2\ln(\frac{12}{11})t}$

$-2\ln\left(\frac{12}{11}\right)t = \ln\left(\frac{12}{17}\right)$

$t = 2$

La police est arrivée 2 heures après le crime.

45

$$v(t) = 9,81\frac{m}{k}(1 - e^{-\frac{m}{k}t})$$

1. $v'(t) = 9,81\frac{m}{k} \times \frac{m}{k}e^{-\frac{m}{k}t}$

$v'(t) = 9,81\frac{m^2}{k^2}e^{-\frac{m}{k}t}$

v est croissante

2. $v''(t) = -9,81\frac{m^3}{k^3}e^{-\frac{m}{k}t}$

v'' est négatif donc v' est décroissante donc la goute ralentit

3. $\lim_{t \to +\infty} v(t) = 9,81\frac{m}{k}$ car $\lim_{t \to +\infty}\left(1 - e^{-\frac{m}{k}t}\right) = 1$

Situations complexes

46*

Exercice 46

On a $h(x) = 79{,}041 + 6{,}39x - e^{3{,}261-0{,}993x}$, d'où $h'(x) = 6{,}39 + 0{,}9993e^{3{,}261-0{,}993x}$

▪ Taille et taux de croissance d'un enfant d'un an

- La taille d'un enfant d'un an est $h(1) = 79{,}041 + 6{,}39 \times 1 - e^{3{,}261-0{,}993\times1} = 75{,}8$
- La taille moyenne d'un enfant d'un an 75,8 cm
- Le taux de croissance d'un enfant d'un an est $h'(1) = 6{,}39 + 0{,}9993e^{3{,}261-0{,}993\times1}$

Le taux de croissance d'un enfant d'un an 46

▪ Taille et taux de croissance d'un enfant de 30 mois

Comme 30 = 12×2 + 6, on déduit que 30 mois, c'est 2,5 ans

- La taille d'un enfant de 30 mois est $h(2{,}5) = 79{,}041 + 6{,}39 \times 2{,}5 - e^{3{,}261-0{,}993\times2{,}5}$

La taille d'un enfant de 30 mois est 92,8

- Le taux de croissance d'un enfant de 30 mois est $h'(2{,}5) = 6{,}39 + 0{,}9993e^{3{,}261-0{,}993\times2{,}5}$

Le taux de croissance d'un enfant de 30 mois est 8,5

Constat : Lorsque l'enfant grandi le taux de croissance diminue

▪ Âge auquel le taux de croissance est le plus élevé ou le plus faible

Pour trouver cela, il faut étudier les variations de la fonction *h*.

Dans le coup de pouce « c'est le sens de variation de h' qu'il faut étudier »

On a : $h'(x) = 6{,}39 + 0{,}9993e^{3{,}261-0{,}993x}$

Pour tout réel *x*, on a $h'(x) > 0$

$h''(x) = -(0{,}993)^2e^{3{,}261-0{,}993x}$

h'' est négative donc h' est décroissante. Ainsi le taux de croissance est plus élevé à la naissance et diminue au fur et à mesure des années jusqu'à arrêt de la croissance.

Exercice 47

1) Déterminons l'année au cours de laquelle la population aura triplée.
   Il s'agit de déterminer *x* tel que *f*(*x*) = 3×5

   $f(x) = 3\times5 \Leftrightarrow 12e^{0{,}05x} = 15 \Leftrightarrow e^{0{,}05x} = \frac{15}{12} \Leftrightarrow 0{,}05x = \ln\left(\frac{15}{12}\right)$

   $$\Leftrightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{15}{12}\right)}{0{,}05} \approx 4{,}46$$

   La population aura triplée au cours de la 4e année

2) Déterminons l'année à partir de laquelle la nourriture sera insuffisante.
   Il s'agit de déterminer *x* tel que *f*(*x*) > 20

   $f(x) > 20 \Leftrightarrow 12e^{0{,}05x} > 20 \Leftrightarrow e^{0{,}05x} > \frac{20}{12} \Leftrightarrow 0{,}05x > \ln\left(\frac{20}{12}\right)$

   $$\Leftrightarrow x > \frac{\ln\left(\frac{20}{12}\right)}{0{,}05} \Leftrightarrow x > 10{,}21$$

   La nourriture sera insuffisante à partir de la 10e année