

Leçon
2

FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN



INSTALLATION DES HABILITÉS

Activité **1** Définition et notation

A l'aide de la touche ln de ta calculatrice scientifique complète le tableau ci-dessous

x	-5	-4	-1	0	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,5	2,7	3
Arrondi d'ordre 2 de $\ln x$	×	×	×	×	-1,61	-1,2	-0,92	-0,69	-0,51	-0,36	-0,22	-0,1	0	0,4	0,99	1,1

A partir du tableau, on conjecture que l'ensemble définition de la fonction ln est $]0 ; +\infty [$.

Exercices de fixation

1-1

L'arrondi d'ordre 1 de $\ln(6)$ est 1,8. L'arrondi d'ordre 1 de $\ln(0,95)$ est -0,1. L'arrondi d'ordre 1 de $\ln(\frac{5}{6})$ est -0,2. L'arrondi d'ordre 1 de $\ln(\frac{7}{8})$ est -0,1

L'arrondi d'ordre 1 de $\ln(\frac{9}{11})$ est -0,2. L'arrondi d'ordre 1 de $\ln(\sqrt{2})$ est 0,3

L'arrondi d'ordre 1 de $\ln(\frac{\sqrt{5}}{5})$ est -0,8. L'arrondi d'ordre 1 de $\ln(\frac{15}{9})$ est 0,5.

L'arrondi d'ordre 1 de $\ln(\sqrt{3} - 1)$ est -0,3

1-2

a) $\ln(\frac{11}{2}) > 0$; b) $\ln(\frac{17}{52}) < 0$; c) $\ln(123) > 0$; d) $\ln(\frac{1}{2})^2 < 0$

Activité 2 Propriétés algébriques

1)

a	b	$\ln(ab)$	$\ln a + \ln b$	$\ln\left(\frac{a}{b}\right)$	$\ln a - \ln b$
3	2	1,79	1,79	0,40	0,40
4,8	5	3,18	3,18	-0,4	-0,4
7	6	3,74	3,74	0,15	0,15
11	0,6	1,89	1,89	2,91	2,91
8	12	4,56	4,56	-0,40	-0,40

2. D'après le tableau on peut conjecturer que : pour a et b strictement positifs on a :

a) $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, b) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$, c) $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$, d) $\ln(a^3) = 3\ln(a)$ et e) $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

Exercices de fixation

2-1

1 → C ; 2 → B ; 3 → C ; 4 → B

2-2

- ✓ $\ln 2 + \ln 3 = \ln(2 \times 3) = \ln 6$
- ✓ $\ln 10 - \ln 5 = \ln\left(\frac{10}{5}\right) = \ln 2$
- ✓ $3\ln 2 = \ln(2)^3 = \ln 8$
- ✓ $2\ln 3 + \ln 5 = \ln(3)^2 + \ln 5 = \ln(9 \times 5) = \ln 45$
- ✓ $2\ln 5 - \ln 3 = \ln(5)^2 - \ln 3 = \ln\left(\frac{25}{3}\right)$

Activité 3 Limites de référence

1.

x	10^{-14}	10^{-12}	10^{-8}	10^{-6}
$\ln x$	-32,4	-27,63	-18,42	-13,81
$\frac{\ln x}{x}$	$-3,224 \times 10^{15}$	$-2,76 \times 10^{13}$	$-1,84 \times 10^7$	$-1,381 \times 10^7$

x	10^5	10^7	10^{10}	10^{11}	10^{15}
$\ln x$	11,51	16,2	23,03	25,33	34,54
$\frac{\ln x}{x}$	$1,151 \times 10^{-4}$	$1,612 \times 10^{-6}$	$2,303 \times 10^{-9}$	$2,533 \times 10^{-10}$	$3,454 \times 10^{-14}$

2. On peut conjecturer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

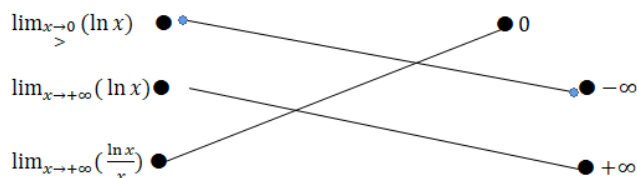
3. On peut conjecturer que : $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$

La droite d'équation $x=0$ est une asymptote verticale à (C).

4. On peut conjecturer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Exercices de fixation

3-1



3-2

1 → C ; 2 → B ; 3 → A ; 4 → D

Activité 4 Dérivée et signe de la fonction logarithme népérien

1. a) L'ensemble de définition de la fonction \ln est $]0 ; +\infty[$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = +\infty$

2.a) La fonction \ln est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$

b)

x	0	$+\infty$
ln'		+
Ln		$+\infty$

-∞ ↗

c) $\ln(1)=0$ d'où pour tout x élément de $]0 ; 1 [$, $\ln(x) < 0$ et pour tout x élément de $]1 ; +\infty[$, $\ln(x) > 0$

Exercices de fixation

4-1 : a) FAUX ; b) VRAI ; c) FAUX ; d) FAUX

4.2 : 1.C ; 2.D

Activité 5 Courbe représentative de la fonction logarithme népérien

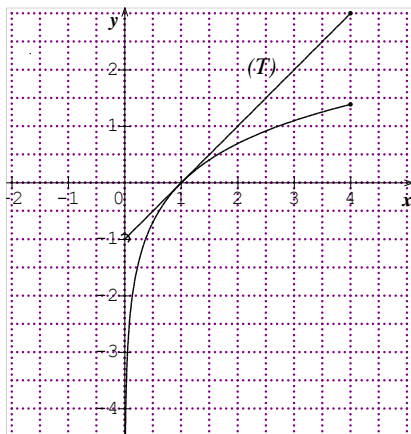
1.

x	0,1	0,5	1	2	2,7	3	4	5	10
lnx	-2,3	-0,69	0	0,69	0,99	1,10	1,39	1,6	2,3

2. Equation de la tangente (T) au point d'abscisse 1

(T) : $y = x - 1$

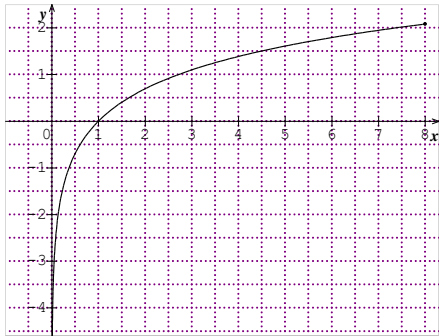
3.



Exercices de fixation

5.1 La courbe 4

5.2



Activité 6

Équations et inéquations faisant intervenir la fonction logarithme népérien

6.1. Équations faisant intervenir la fonction logarithme népérien

1. les valeurs de $\ln(x+2)$ existent pour $x+2 > 0$ or pour tout nombre réel x de $]-\frac{1}{2}; +\infty[$, $x+2 > 0$ d'où les valeurs de $\ln(x+2)$ existent pour $x \in]-\frac{1}{2}; +\infty[$.

Les valeurs de $\ln(2x-1)$ existent pour $2x-1 > 0$ or pour tout nombre réel x de $]\frac{1}{2}; +\infty[$, $2x-1 > 0$ d'où les valeurs de $\ln(2x-1)$ existent pour $x \in]\frac{1}{2}; +\infty[$.

2. Résolvons l'équation (E) : $x+2=2x-1$

$$x + 2 = 2x - 1 \Leftrightarrow x = 3 \text{ d'où : } S_{\text{IR}} = \{3\}$$

3. Soit a la solution de l'équation (E) donc $a=3$

a) Comme $a=3$ alors $a \in]\frac{1}{2}; +\infty[$.

b) $\ln(3+2) = \ln 5$ et $\ln(2 \times 3 - 1) = \ln 5$ d'où : $\ln(a+2) = \ln(2a-1)$

4. Soit V l'ensemble de validité.

On déduit de ce qui précède que : $V =]\frac{1}{2}; +\infty[$ et une solution de (E) est 3.

Exercices de fixation

6.1.1

Soit V l'ensemble de validité

a) $x \in V \Leftrightarrow (x+1 > 0 \text{ et } 2x-5 > 0)$

$$(x+1 > 0 \text{ et } 2x-5 > 0) \Leftrightarrow (x > -1 \text{ et } x > \frac{5}{2}) \text{ d'où :}$$

$$V =]\frac{5}{2}; +\infty[$$

$$\ln(x+1) = \ln(2x-5) \Leftrightarrow (x \in V \text{ et } x+1 = 2x-5)$$

$$x+1 = 2x-5 \Leftrightarrow x = 6, \text{ or } 6 \in]\frac{5}{2}; +\infty[\text{ d'où : } S_{\text{IR}} = \{6\}$$

b) $x \in V \Leftrightarrow (3x-2 > 0 \text{ et } -2x+9 > 0)$

$$(3x-2 > 0 \text{ et } -2x+9 > 0) \Leftrightarrow (x > \frac{2}{3} \text{ et } x < \frac{9}{2}) \text{ d'où :}$$

$$V =]\frac{2}{3}; \frac{9}{2}[$$

$$\ln(3x-2) = \ln(-2x+9) \Leftrightarrow (x \in V \text{ et } 3x-2 = -2x+9)$$

$$3x-2 = -2x+9 \Leftrightarrow x = \frac{11}{5} \text{ or } \frac{11}{5} \in V \text{ d'où : } S_{\text{IR}} = \{\frac{11}{5}\}$$

6.1.2

a) $\ln 3x = \ln 27$

L'ensemble de validité est : $V =]0; +\infty[$

$$\ln 3x = \ln 27 \Leftrightarrow x \in V \text{ et } 3x = 27$$

$$3x = 27 \Leftrightarrow x = 9 \text{ or } 9 \in V \text{ d'où : } S_{\text{IR}} = \{9\}$$

b) $\ln 2x = 1$

L'ensemble de validité est : $V =]0; +\infty[$

$$\ln 2x = 1 \Leftrightarrow \ln 2x = \ln e$$

$$\Leftrightarrow x \in V \text{ et } 2x = e$$

$$2x = e \Leftrightarrow x = \frac{e}{2} \text{ or } \frac{e}{2} \in V \text{ d'où : } S_{\text{IR}} = \{\frac{e}{2}\}$$

c) $\ln(4x+5) = 0$

L'ensemble de validité est : $V =]-\frac{5}{4}; +\infty[$

$$\ln(4x+5) = 0 \Leftrightarrow \ln(4x+5) = \ln 1$$

$$\Leftrightarrow x \in V \text{ et } 4x+5 = 1$$

$$4x+5 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \text{ or } -1 \in V \text{ d'où : } S_{\text{IR}} = \{-1\}$$

d) $\ln(3x-2) = \ln(x-3)$. Soit V l'ensemble de validité

$x \in V \Leftrightarrow (3x-2 > 0 \text{ et } x-3 > 0)$. On trouve $V =]3; +\infty[$

	$\ln(3x - 2) = \ln(x - 3) \Leftrightarrow (x \in V \text{ et } 3x - 2 = x - 3).$ $3x - 2 = x - 3 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ or } -\frac{1}{2} \notin]3; +\infty[\text{ d'où : } S = \emptyset.$
--	---

6.2. Inéquations faisant intervenir la fonction logarithme népérien

1. les fonctions $x \mapsto \ln(x+4)$ et $x \mapsto \ln(2x-3)$ sont définies sur $]\frac{3}{2}; +\infty[$ (voir 6.1 pour méthodologie).

2. Résolvons l'inéquation (I) : $2x-3 < x+4$.
 $2x-3 < x+4 \Leftrightarrow x < 7$ d'où : $S(I) =]-\infty; 7[$

3)a) Posons : $K =]\frac{3}{2}; +\infty[$; $K \cap S(I) =]\frac{3}{2}; 7[$

b) $a = 2$; $b = 4$; $c = 5$

$\ln(a+4) = \ln 6$ et $\ln(2a-3) = 0$ d'où : $\ln(2a-3) < \ln(a+4)$

$\ln(b+4) = \ln 8$ et $\ln(2 \times b - 3) = \ln 5$ d'où : $\ln(2b - 3) < \ln(b+4)$

$\ln(c+4) = \ln 9$ et $\ln(2 \times c - 3) = \ln 7$ d'où : $\ln(2c - 3) < \ln(c+4)$

4. On peut conjecturer que l'ensemble de validité est $]\frac{3}{2}; +\infty[$ et l'ensemble solution de l'inéquation est $]\frac{3}{2}; 7[$.

Exercices de fixation

6.2.1

a) Soit V l'ensemble de validité

$x \in V \Leftrightarrow x > 0$ d'où : $V =]0; +\infty[$

$\ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln 1$

$\Leftrightarrow x \in V \text{ et } x < 1$

$\Leftrightarrow x \in]0; +\infty[\cap]-\infty; 1[$ d'où : $S =]0; 1[$

b) Soit V l'ensemble de validité

$V =]0; +\infty[$

$\ln x \geq 1 \Leftrightarrow x \in V \text{ et } x \geq e$

$\Leftrightarrow x \in]0; +\infty[\cap [e; +\infty[$ d'où : $S = [e; +\infty[$

c) Soit V l'ensemble de validité

$V =]0; +\infty[$

$\ln 5x \leq \ln 35 \Leftrightarrow x \in V \text{ et } x \leq 7$

$\Leftrightarrow x \in]0; +\infty[\cap]-\infty; 7]$ d'où : $S =]0; 7]$

d) Soit V l'ensemble de validité

$x \in V \Leftrightarrow (2x > 0 \text{ et } x+5 > 0)$

$(2x > 0 \text{ et } x+5 > 0) \Leftrightarrow (x > 0 \text{ et } x > -5)$ d'où : $V =]0; +\infty[$

$+\infty[$

$\ln 2x > \ln(x+5) \Leftrightarrow (x \in V \text{ et } 2x > x+5)$

$\Leftrightarrow x > 5$ d'où : $S =]5; +\infty[$

6.2.2

a) Soit V l'ensemble de validité

$x \in V \Leftrightarrow (x+1 > 0 \text{ et } 4x+2 > 0)$ d'où : $V =]-\frac{1}{2}; +\infty[$

$\ln(x+1) < \ln(4x+2) \Leftrightarrow (x \in V \text{ et } x+1 < 4x+2)$

$\Leftrightarrow x \in]-\frac{1}{2}; +\infty[\cap]-\frac{1}{3}; +\infty[$ d'où : $S =]-\frac{1}{3}; +\infty[$

b) Soit V l'ensemble de validité

$x \in V \Leftrightarrow (x > 2 \text{ et } x > -\frac{9}{2})$ d'où : $V =]2; +\infty[$

$\ln(x-2) \geq \ln(2x+9) \Leftrightarrow (x \in V \text{ et } x-2 \geq 2x+9)$

$(x \in V \text{ et } x-2 \geq 2x+9) \Leftrightarrow x \in]2; +\infty[\cap]-\infty; -11]$ d'où : $S = \emptyset.$

Activité 7

Étude et représentation graphique de fonction faisant intervenir la fonction logarithme népérien

1. La fonction dérivée de la fonction logarithme népérien est la fonction qui pour tout nombre réel x de $]0; +\infty[$ associe $\frac{1}{x}$

2. a) $g'(x) = a + \frac{1}{x}$

b) $h'(x) = 3 + \frac{1}{x}$

3. a) $u'(x) = a - \frac{1}{x}$

b) $v'(x) = 5 - \frac{1}{x}$

4. a) $s'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

b) $t'(x) = \frac{2x-5}{x^2-5x+6}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0} v(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = -\infty$.

6. Tableau de variations de h

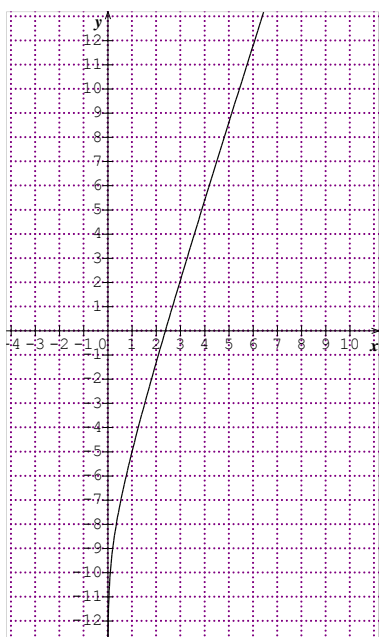
x	0	$+\infty$
h'		+
h	$-\infty$	$+\infty$

Tableau de variation de v

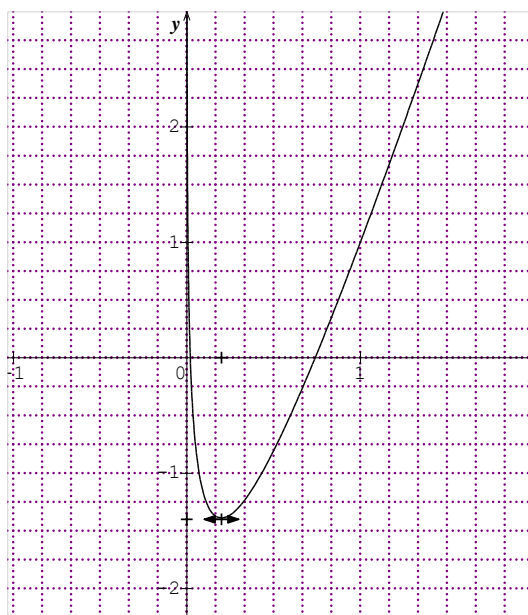
x	0	$\frac{1}{5}$	$+\infty$
v'		0	+
v	$+\infty$	$3 + \ln 5$	$+\infty$

7. Courbes de h et de v

Courbe de h



Courbe de v



Exercices de fixation

7.1

a) $f'(x) = \frac{1}{x}$; b) $g'(x) = -\frac{1}{x}$; c) $h'(x) = 1 + \frac{1}{x}$; d) $t'(x) = -1 - \frac{1}{x}$

7.2

a) $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$; b) $g'(x) = -\frac{2x}{1-x^2}$; c) $h'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-2}$

7.3

Etude de variations

$f(x) = 2x + \ln x$ d'où : $f'(x) = \frac{2x+1}{x}$

Pour tout x élément de $]0; +\infty[$, $f'(x) > 0$ d'où f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

Tableau de variations

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		$+\infty$
		$-\infty$

7.4

$$f(x) = 2x - \ln x \text{ d'où : } f'(x) = \frac{2x-1}{x}$$

Pour tout x élément de $]0; +\infty[$, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0; \frac{1}{2}[$ et $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]\frac{1}{2}; +\infty[$ d'où f est strictement décroissante sur $]0; \frac{1}{2}[$ et strictement croissante sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$

Tableau de variations de f

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	$1 + \ln 2$	$+\infty$

7.5

$$f(x) = \ln(x^2 - 4)$$

$$\text{Pour tout } x \text{ élément de }]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[, f'(x) = \frac{2x}{x^2-4}$$

D'où pour tout x élément de $]-\infty; -2[$, $f'(x) < 0$ et pour tout x élément de $]2; +\infty[$, $f'(x) > 0$. Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; -2[$ et strictement croissante sur $]2; +\infty[$

Exercices de renforcement

1

- $\ln 24 = \ln 3 + 3\ln 2$
- $\ln 144 = 2\ln 3 + 4\ln 2$
- $\ln\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 2$

2

- a) $\ln 20 = \ln 5 + 2\ln 2$
 b) $\ln 100 = \ln(5 \times 20) = 2\ln 5 + 2\ln 2$;
 c) $\ln(80) = \ln 5 + 4\ln 2$;
 d) $\ln \frac{5}{4} = \ln 5 - 2\ln 2$

3

- a) $\ln 50 - \ln 2 = \ln 25$;
 b) $3\ln 2 - \ln 8 + \ln 4 = \ln 4$;
 c) $\ln \frac{2}{3} + \ln \frac{3}{4} + \ln \frac{4}{5} = \ln \frac{2}{5}$;
 d) $\ln\left(\frac{e^3}{27}\right) + \ln 9 = \ln\left(\frac{e^3}{3}\right)$

4

$$A = \ln \frac{9}{5};$$

$$B = \ln \frac{5}{2};$$

$$C = \ln \frac{1}{4};$$

$$D = \ln \frac{125}{4}$$

5

1. $Df =]2; +\infty[$;
 $Dg =]-\infty; 0[$;
 $Dh =]-\infty; 5[$;
 $Dk =]0; +\infty[$;
 $Dm =]-\infty; 1[\cup]4; +\infty[$;
 $Dn = \mathbb{R}$

6

- a) $Df =]-\infty; 3[$;
 b) $Df =]-2; +\infty[$;
 c) $Df =]2; 5[$;
 d) $Df =]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[$;
 e) $Df =]-\frac{1}{2}; 1[$;
 f) $Df = \mathbb{R}$;
 g) $Df =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$;
 h) $Df =]0; +\infty[$

7

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \ln x) = +\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \ln x) = -\infty$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-x + 1 + \ln x) = -\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 1 + \ln x) = -\infty$$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (3x + 8 - \ln x) = +\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x + 8 - \ln x) = +\infty$$

d) Posons : $X = x^2 + 2x - 1$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 2x - 1)$

$$= +\infty$$
 d'où :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 + 2x - 1) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 + 2x - 1) = +\infty$.

e) $\lim_{x \rightarrow -5^-} (x^2 - 25) = 0$ d'où :

$$\lim_{x \rightarrow -5^-} \ln(x^2 - 25) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 25) = +\infty$$
 et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

d'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - 25) = +\infty$.

8

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 3 + \ln x) = +\infty$;

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln 3 - \ln x) = -\infty$;

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 7 + \ln x) = +\infty$;

d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln 2 - 4 + \ln x) = -\infty$;

e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln 5 - 4 - \ln x) = +\infty$;

f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \ln x) = -\infty$

9

a) $f(x) = 2x + \ln x$

Df =]0 ; +∞[

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

b) $f(x) = -\ln x$

Df =]0 ; +∞[

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

c) $f(x) = x \ln x$

Df =]0 ; +∞[

e) $f(x) = x - 1 - \ln x$

Df =]0 ; +∞[

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$= x(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}) = +\infty$$

10

a) $f(x) = 22 + \ln x$ d'où : $f'(x) = \frac{1}{x}$

b) $f(x) = x - 2 - \ln x$ d'où : $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

c) $f(x) = -3x + 15 + \ln x$ d'où :

$$f'(x) = -3 + \frac{1}{x} = \frac{-3x+1}{x}$$

11

1. Pour tout x élément de]0 ; +∞[, $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$

2. Pour tout x élément de]0 ; +∞[, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$

3. Pour tout x élément de]2 ; +∞[, $f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+2}$

12

a) $f(x) = 2 - \ln(x)$. Pour tout x élément de]0 ; +∞[,

$$f'(x) = -\frac{1}{x}$$
 d'où f est strictement décroissante sur

]0 ; +∞[

b) $g(x) = x + 1 + \ln(x)$. Pour tout x élément de

]0 ; +∞[, $g'(x) = \frac{1+x}{x}$ d'où g est strictement

croissante sur]0 ; +∞[.

c) h et g ont la même fonction dérivée et les mêmes variations.

13

a) Pour tout x élément de]0 ; +∞[, $f'(x) = -\frac{1}{x}$

b) Pour tout x élément de]0 ; +∞[, $f'(x) = 3 + \frac{1}{x}$

14

a) Soit (E₁) l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $\ln(2x+4) = \ln 2$

L'équation (E₁) est définie si et seulement si $2x+4 > 0$ d'où l'ensemble de validité de (E₁) est :]-2 ; +∞[.

Pour $x \in]-2 ; +\infty[$, $\ln(2x+4) = \ln 2 \Leftrightarrow 2x+4 = 2$

$$2x+4 = 2 \Leftrightarrow x = -1 \text{ or } -1 \in]-2 ; +\infty[\text{ d'où}$$

$$: S_{\mathbb{R}}(E_1) = \{-1\}$$

b) Soit (E₂) l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $\ln(2x+3) = \ln(x+1)$

L'équation (E₂) est définie si et seulement si $2x+3 > 0$ et $x+1 > 0$ d'où l'ensemble de validité de

(E₂) est :]-1 ; +∞[.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$d) f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$Df =]0; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Pour $x \in]-1; +\infty[$,

$$\ln(2x+3) = \ln(x+1) \Leftrightarrow 2x+3 = x+1$$

$$2x+3 = x+1 \Leftrightarrow x = -2 \text{ or } -2 \notin]-1; +\infty[\text{ d'où :}$$

$$S_{IR}(E_2) = \emptyset.$$

c) Soit (E_3) l'équation : $x \in IR, \ln(3-x) = \ln x$

L'équation (E_3) est définie si et seulement si $3-x > 0$

et $x > 0$ d'où l'ensemble de validité de (E_3) est

$$:]0; 3[.$$

$$\text{Pour } x \in]0; 3[, \ln(3-x) = \ln x \Leftrightarrow 3-x = x$$

$$3-x = x \Leftrightarrow x = 1,5 \text{ or } 1,5 \in]0; 3[\text{ d'où : } S_{IR}(E_3) = \{1,5\}$$

$$d) \ln(x+1) = 0$$

Soit (E_4) l'équation : $x \in IR, \ln(x+1) = 0$

L'équation (E_4) est définie si et seulement si

$x+1 > 0$ d'où l'ensemble de validité de (E_3) est :

$$]-1; +\infty[.$$

$$\text{Pour } x \in]-1; +\infty[, \ln(x+1) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 1$$

$$x+1 = 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ or } 0 \in]-1; +\infty[\text{ d'où : } S_{IR}(E_4) = \{0\}$$

$$e) \ln(x-2) = 1$$

Soit (E_5) l'équation : $x \in IR, \ln(x-2) = 1$

L'équation (E_5) est définie si et seulement si $x-2 > 0$

d'où l'ensemble de validité de (E_5) est :

$$]2; +\infty[.$$

$$\text{Pour } x \in]2; +\infty[, \ln(x-2) = 1 \Leftrightarrow x-2 = e$$

$$x-2 = e \Leftrightarrow x = 2+e \text{ or } 2+e \in]2; +\infty[\text{ d'où :}$$

$$S_{IR}(E_5) = \{2+e\}$$

15

a) Soit (E_1) l'équation : $x \in IR, \ln x = 5$

L'ensemble de validité de (E_1) est : $]0; +\infty[$.

$$\text{Pour } x \in]0; +\infty[, \ln x = 5 \Leftrightarrow x = e^5 \text{ or } e^5 \in]0; +\infty[$$

$$\text{d'où : } S_{IR}(E_1) = \{e^5\}$$

b) Soit (E_2) l'équation : $x \in IR, \ln x = -3$

L'ensemble de validité de (E_2) est : $]0; +\infty[$.

$$\text{Pour } x \in]0; +\infty[, \ln x = -3 \Leftrightarrow x = e^{-3} \text{ or } e^{-3} \in]0; +\infty[$$

$$\text{d'où : } S_{IR}(E_2) = \{e^{-3}\}$$

c) Soit (E_3) l'équation : $x \in IR, \ln(2x-5) = 1$

L'équation (E_3) est définie si et seulement si $2x-5 > 0$

d'où l'ensemble de validité de (E_3) est :

$$] \frac{5}{2}; +\infty[.$$

$$\text{Pour } x \in] \frac{5}{2}; +\infty[, \ln(2x-5) = 1 \Leftrightarrow 2x-5 = e$$

$$2x-5 = e \Leftrightarrow x = \frac{e+5}{2} \text{ or } \frac{e+5}{2} \in] \frac{5}{2}; +\infty[\text{ d'où :}$$

$$S_{IR}(E_3) = \left\{ \frac{e+5}{2} \right\}$$

d) Soit (E_4) l'équation : $x \in IR, \ln(4x-7) = 0$

L'ensemble de validité de (E_4) est : $] \frac{7}{4}; +\infty[$.

$$\text{Pour } x \in] \frac{7}{4}; +\infty[, \ln(4x-7) = 0 \Leftrightarrow 4x-7 = 1$$

$$4x-7 = 1 \Leftrightarrow x = 2 \text{ or } 2 \in] \frac{7}{4}; +\infty[\text{ d'où :}$$

16

1. Soit (E_1) l'équation : $x \in IR, \ln(2+5x) = \ln(x+6)$

L'équation (E_1) est définie si et seulement si

$2+5x > 0$ et $x+6 > 0$ d'où l'ensemble de validité de

(E_1) est : $] -\frac{2}{5}; +\infty[$.

$$\text{Pour } x \in] -\frac{2}{5}; +\infty[, \ln(2+5x) = \ln(x+6) \Leftrightarrow$$

$$2+5x = x+6$$

$$2+5x = x+6 \Leftrightarrow x = 1 \text{ or } 1 \in] -\frac{2}{5}; +\infty[\text{ d'où :}$$

$$S_{IR}(E_1) = \{1\}$$

2. Soit (E_2) l'équation :

$$x \in IR, \ln(x-1) + \ln(x-3) = \ln 3$$

L'équation (E_2) est définie si et seulement si $x-1 > 0$

et $x-3 > 0$ d'où l'ensemble de validité de (E_2) est :

$$]3; +\infty[. \text{ Pour } x \in]3; +\infty[,$$

$$\ln(x-1) + \ln(x-3) = \ln 3 \Leftrightarrow \ln(x-1)(x-3) = \ln 3$$

$$\ln(x-1)(x-3) = \ln 3 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - x + 3 = 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 4$$

$$\text{or } 4 \in]3; +\infty[\text{ et } 0 \notin]3; +\infty[\text{ d'où : } S_{IR}(E_2) = \{4\}$$

17

a) Soit (I_1) l'inéquation : $x \in IR, \ln(x+1) \leq 0$

L'inéquation (I_1) est définie si et seulement si

$x+1 > 0$ d'où l'ensemble de validité de (I_1) est : $]-1; +\infty[$.

$$\text{Pour } x \in]-1; +\infty[, \ln(x+1) \leq 0 \Leftrightarrow x+1 \leq 1$$

$$x+1 \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 0], \text{ or }]-1; +\infty[\cap]-\infty; 0] =]-1; 0]$$

$$\text{d'où : } S_{IR}(I_1) =]-1; 0]$$

b) Soit (I_2) l'inéquation : $x \in IR, 2\ln(3-x) \geq 4$

L'ensemble de validité de (I_2) est : $]-\infty; 3[$.

$$\text{Pour } x \in]-\infty; 3[, 2\ln(3-x) \geq 4 \Leftrightarrow \ln(3-x) \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$3-x \geq e^2$$

$$3-x \geq e^2 \Leftrightarrow 3-e^2 \geq x$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; 3-e^2] \text{ or}$$

$$]-\infty; 3-e^2] \cap]-\infty; 3[=]-\infty; 3-e^2]$$

$$S_{IR}(I_2) =]-\infty; 3-e^2]$$

c) Soit (I_3) l'inéquation : $x \in IR, 3\ln(x) - 4 < \ln x$

L'ensemble de validité de (I_2) est : $]0; +\infty[$.

$$\text{Pour } x \in]0; +\infty[, 3\ln(x) - 4 < \ln x \Leftrightarrow 2\ln(x) < 4 \Leftrightarrow$$

$$x < e^2$$

$$x < e^2 \Leftrightarrow x \in]-\infty; e^2[, \text{ or }]0; +\infty[\cap]-\infty; e^2[=]0; e^2[$$

$$\text{d'où : } S_{IR}(I_3) =]0; e^2[$$

d) Soit (I_4) l'inéquation : $x \in IR, 4\ln(x) + 6 \geq 0$

L'ensemble de validité de (I_4) est : $]0; +\infty[$.

$$\text{Pour } x \in]0; +\infty[, 4\ln(x) + 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq$$

$$S_{IR}(E_4) = \{2\}$$

e) Soit (E₅) l'équation : $x \in IR, \ln(x-1) - \ln(2x) = 0$
 L'ensemble de validité de (E₅) est : $]1; +\infty[$.
 Pour $x \in]1; +\infty[$, $\ln(x-1) = \ln(2x) \Leftrightarrow x-1 = 2x$
 $x-1 = 2x \Leftrightarrow x = -1$ or $-1 \notin]1; +\infty[$ d'où : $S_{IR}(E_5) = \emptyset$.

$$e^{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x \in [e^{-\frac{3}{2}}; +\infty[\text{ or } [e^{-\frac{3}{2}}; +\infty[\cap]0; +\infty[=]0; e^{-\frac{3}{2}}] \text{ d'où : } S_{IR}(I_4) =]0; e^{-\frac{3}{2}}]$$

18

1. Soit (I₁) l'inéquation : $x \in IR, \ln(x+3) + \ln(x+5) \leq \ln 15$

L'inéquation (I₁) est définie si et seulement si $x+3 > 0$ et $x+5 > 0$ d'où l'ensemble de validité de (I₁) est : $] -3; +\infty[$.

$$\text{Pour } x \in] -3; +\infty[, \ln(x+3) + \ln(x+5) \leq \ln 15 \Leftrightarrow \ln(x+3)(x+5) \leq \ln 15$$

$$\ln(x+3)(x+5) \leq \ln 15 \Leftrightarrow (x+3)(x+5) \leq 15$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 8x \leq 0; \Leftrightarrow x \in] -\infty; -8[\cup]0; +\infty[$$

$$] -\infty; -8[\cup]0; +\infty[\cap] -3; +\infty[=]0; +\infty[\text{ d'où : } S_{IR}(I_2) =]0; +\infty[$$

2. Soit (I₂) l'inéquation : $x \in IR, \ln(x-1) + \ln(x-3) > \ln 3$

L'inéquation (I₂) est définie si et seulement si $x-1 > 0$ et $x-3 > 0$ d'où l'ensemble de validité de (I₂) est : $]3; +\infty[$.

$$\text{Pour } x \in]3; +\infty[, \ln(x-1) + \ln(x-3) > \ln 3 \Leftrightarrow \ln(x-1)(x-3) > \ln 3$$

$$\ln(x-1)(x-3) > \ln 3 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) > 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x > 0; \Leftrightarrow x \in] -\infty; 0[\cup]4; +\infty[$$

$$] -\infty; 0[\cup]4; +\infty[\cap]3; +\infty[=]4; +\infty[\text{ d'où : } S_{IR}(I_2) =]4; +\infty[$$

19

a) Soit (E₁) l'équation : $x \in IR, \ln(x-3) - \ln(2x+5) = 0$

l'équation (E₁) est définie si et seulement si $x-3 > 0$ et $2x+5 > 0$ d'où l'ensemble de validité de (E₁) est : $]3; +\infty[$.

$$\text{Pour } x \in]3; +\infty[, \ln(x-3) - \ln(2x+5) = 0 \Leftrightarrow \ln(x-3) = \ln(2x+5)$$

$$\Leftrightarrow x-3 = 2x+5; \Leftrightarrow x = -11$$

$$\text{or } -11 \notin]3; +\infty[\text{ d'où : } S_{IR}(E_2) = \emptyset$$

b) Soit (E₂) l'équation : $x \in IR, \ln(x+3) - \ln(2x-1) = 0$

l'équation (E₂) est définie si et seulement si $x+3 > 0$ et $2x-1 > 0$ d'où l'ensemble de validité de (E₂) est : $] \frac{1}{2}; +\infty[$.

$$\text{Pour } x \in] \frac{1}{2}; +\infty[, \ln(x+3) - \ln(2x-1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+3) = \ln(2x-1)$$

$$\Leftrightarrow x+3 = 2x-1$$

$$\Leftrightarrow x = 4; \text{ or } 4 \in] \frac{1}{2}; +\infty[\text{ d'où : } S_{IR}(E_2) = \{4\}$$

c) Soit (E₃) l'équation : $x \in IR, \ln(x+3) - \ln(5-x) = \ln 3 + \ln 5$

L'équation (E₃) est définie si et seulement si $x+3 > 0$ et $5-x > 0$ d'où l'ensemble de validité de (E₃) est : $] -3; 5[$.

$$\text{Pour } x \in] -3; 5[, \ln(x+3) - \ln(5-x) = \ln 3 + \ln 5 \Leftrightarrow \ln \frac{x+3}{5-x} = \ln 15; \Leftrightarrow \frac{x+3}{5-x} = 15$$

$$\text{Pour } x \in] -3; 5[, \frac{x+3}{5-x} = 15 \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}$$

$$\text{or } 4 \in] -3; 5[\text{ d'où : } S_{IR}(E_3) = \{ \frac{9}{2} \}$$

20

Soit (E) l'équation : $x \in IR, \ln(x+3) - \ln(13+x) + \ln(x+1) = 0$

L'équation (E) est définie si et seulement si $x+3 > 0$, $x+1 > 0$ et $13+x > 0$ d'où l'ensemble de validité de (E) est : $] -1; +\infty[$.

$$\text{Pour } x \in] -1; +\infty[, \ln(x+3) - \ln(13+x) + \ln(x+1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+3) + \ln(x+1) = \ln(13+x)$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x+1) = 13+x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -5 \text{ ou } x = 2$$

or $2 \in]-1; +\infty[$ mais $-5 \notin]-1; +\infty[$. d'où : $S_{IR}(E) = \{2\}$.

Exercices d'approfondissement

21

1) $f(x) = -3 \ln x$

Pour tout x élément de $]0; 1]$, $f(x) \geq 0$ et pour tout x élément de $]1; +\infty[$, $f(x) < 0$.

2) $g(x) = (x+1) \ln x$

Pour tout x élément de $]0; 1]$, $g(x) \leq 0$ et pour tout x élément de $]1; +\infty[$, $g(x) > 0$

3) $k(x) = (x-1) \ln x$

Pour tout x élément de $]0; +\infty[$, $k(x) \geq 0$

4) $h(x) = \frac{\ln x}{x}$

Pour tout x élément de $]0; 1]$, $h(x) \leq 0$ et pour tout x élément de $]1; +\infty[$, $h(x) > 0$

22

Soit la fonction f définie et dérivable sur $]\frac{3}{2}; +\infty[$ telle que $f(x) = \ln(2x-3)$

1. a) $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} (2x-3) = 0$ et pour $x > \frac{3}{2}$, $2x-3 > 0$ d'où : $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \ln x = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x-3)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-3) = +\infty$ d'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.

2.a) La dérivée de la fonction f sur $]\frac{3}{2}; +\infty[$

f est dérivable sur $]\frac{3}{2}; +\infty[$ et $\forall x \in]\frac{3}{2}; +\infty[$; $f'(x) = \frac{2}{2x-3}$

b) Sens de variation de la fonction f

$\forall x \in]\frac{3}{2}; +\infty[$, $2x-3 > 0$ d'où $\frac{2}{2x-3} > 0$ et par conséquent f est strictement croissante sur $]\frac{3}{2}; +\infty[$.

23

1. $Df = \{x \in IR, x^2 + 3x - 4 > 0\}$

$=]-\infty; -4[\cup]1; +\infty[$

2. $Df = \{x \in IR, -x^2 - 3x + 10 > 0\}$

$=]-5; 2[$

3. $Df = \{x \in IR, 1 - x > 0\}$

$=]-\infty; 1[$

24

1. $(x-2)(2x^2 + 5x - 3) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0$ ou $2x^2 + 5x - 3 = 0$

$2x^2 + 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ou $x = \frac{1}{2}$

$S = \left\{-3; \frac{1}{2}; 2\right\}$

2. $(x-2)(2x^2 + 5x - 3) = 2x^3 + 5x^2 - 3x - 4x^2 - 10x + 6$

$(x-2)(2x^2 + 5x - 3) = 2x^3 + x - 13x + 6$

3. Posons (E) : $2(\ln x)^3 + (\ln x)^2 - 13 \ln x + 6 = 0$

L'ensemble de validité est $]0; +\infty[$

Posons : $X = \ln x$ on a :

$2X^3 + X^2 - 13X + 6 = 0$ qui a pour solutions $-3, \frac{1}{2}$ et 2

On a alors :

$$\begin{aligned} \ln x &= -3 \Leftrightarrow x = e^{-3} \\ \ln x &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \\ \ln x &= 2 \Leftrightarrow x = e^2 \end{aligned}$$

Donc : $S(E) = \{e^{-3}; \sqrt{e}; e^2\}$

25

1. $P(x) = x(x^2 - 6x + 9)$

Donc : $P(x) = x(x - 3)^2$

2. $P(x) = 0 \Leftrightarrow x(x - 3)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } (x - 3)^2 = 0)$

$S_{IR} = \{0; 3\}$

3. Posons : $X = \ln x$ d'où : $(\ln x)^3 - 6(\ln x)^2 + 9\ln x = 0$ devient $X^3 - 6X^2 + 9X = 0$.

D'après la question 1, $X^3 - 6X^2 + 9X = X(X - 3)^2$. Par conséquent d'après la question 2 on a : $\ln x = 0$ ou $\ln x = 3$

$(\ln x = 0 \text{ ou } \ln x = 3) \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ou } x = e^3)$ d'où :

$S_{IR} = \{1; e^3\}$

26

1. Résolvons dans IR l'inéquation : $x^2 - 4 < 0$.

$x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) < 0$

$\Leftrightarrow x \in] -2; 2[$

D'où : $S_{IR} =] -2; 2[$

2. Résolvons dans IR, l'inéquation : $(\ln x)^2 - 4 < 0$.

$(\ln x)^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow (\ln x - 2)(\ln x + 2) < 0$

$\Leftrightarrow \ln x \in] -2; 2[$

$\Leftrightarrow x \in] e^{-2}; e^2 [$

D'où : $S_{IR} =] e^{-2}; e^2 [$.

27

a) Soit (E_1) l'équation : $x \in IR, (\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$

L'ensemble de validité de (E_1) est $]0; +\infty[$

Posons : $X = \ln x$.

$(\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$ devient $X^2 - X - 2 = 0$

$X^2 - X - 2 = 0 \Leftrightarrow X = -1$ ou $X = 2$

$X = -1$ ou $X = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$ ou $x = e^2$

$S_{IR}(E_1) = \{\frac{1}{e}; e^2\}$

a) Soit (E_2) l'équation : $x \in IR, 2(\ln x)^2 - 3\ln x - 5 = 0$

L'ensemble de validité de (E_1) est $]0; +\infty[$

Posons : $X = \ln x$.

(E_2) devient $2X^2 - 3X - 5 = 0$

$2X^2 - 3X - 5 = 0 \Leftrightarrow X = -1$ ou $X = \frac{5}{2}$

$X = -1$ ou $X = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$ ou $x = e^{\frac{5}{2}}$

$S_{IR}(E_2) = \{\frac{1}{e}; e^{\frac{5}{2}}\}$.

28

1. Soit (E) l'équation : $x \in IR, 2x^2 - 9x + 4 = 0$

Discriminant $\Delta = 49$ et $x_1 = \frac{9-7}{4}$ et $x_2 = \frac{9+7}{4}$

$S_{IR}(E) = \{\frac{1}{2}; 4\}$

2. $P(x) = 2x^3 - 7x^2 - 5x + 4$

a) $P(-1) = 0$

b) On vérifie que : $P(x) = (x+1)(2x^2 - 9x + 4)$

d'où : $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(2x^2 - 9x + 4) = 0$

L'équation $P(x) = 0$ a pour ensemble solution

$\{-1; \frac{1}{2}; 4\}$

3.a) Soit (E') l'équation : $x \in IR, 2(\ln x)^3 - 7(\ln x)^2 - 5\ln x + 4 = 0$

Posons : $X = \ln x$

L'équation (E') devient $2X^3 - 7X^2 - 5X + 4 = 0$

$2X^3 - 7X^2 - 5X + 4 = 0 \Leftrightarrow X = -1$ ou $X = \frac{1}{2}$ ou $X = 4$

L'équation (I) a donc pour solution $\{\frac{1}{e}; \sqrt{e}; e^4\}$

b) Soit (E'') l'inéquation : $x \in IR, 2(\ln x)^3 - 7(\ln x)^2 - 5\ln x + 4 \leq 0$

Posons : $X = \ln x$

L'équation (I) devient $2X^3 - 7X^2 - 5X + 4 \leq 0$

$2X^3 - 7X^2 - 5X + 4 \leq 0 \Leftrightarrow 2(X+1)(X-\frac{1}{2})(X-4) \leq 0$

$2(X+1)(X-\frac{1}{2})(X-4) \leq 0 \Leftrightarrow X \in]-\infty; -1] \cup [\frac{1}{2}; 4]$

D'où : $x \in]0; \frac{1}{e}] \cup [\sqrt{e}; e^4]$ et $S(I) =]0; \frac{1}{e}] \cup [\sqrt{e}; e^4]$

29

1. Soit $(E_1) : 2x^2 + x - 6 = 0$

Discriminant Δ est 49

$x_1 = \frac{-1-7}{4} = -2$ et $x_2 = \frac{-1+7}{4} = \frac{3}{2}$

$S(E_1) = \{-2; \frac{3}{2}\}$

2.a) Soit $(E_2) = 2\ln(x)^2 + -6 = 0$

Posons $X = \ln x$. On a : $2X^2 + X - 6 = 0$

d'où : $\ln x = -2$ ou $\ln x = \frac{3}{2} \ln x = -2$ ou $\ln x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$x = e^{-2}$ ou $x = e^{\frac{3}{2}}$

$S(E_2) = \{e^{-2}; e^{\frac{3}{2}}\}$

Soit $(E_3) : \ln x + \ln(x + 1) = \ln(x + 6) - \ln 2$

Soit V l'ensemble de validité

$V = \{x \in IR, x > 0, x + 1 > 0 \text{ et } x + 6 > 0\}$

$V =]0; +\infty[$

Pour $x \in V(E_3)$, $\ln x + \ln(x + 1) = \ln(x + 6) - \ln 2 \Leftrightarrow$

$\ln 2 \Leftrightarrow \ln x(x + 1) = \ln(\frac{x+6}{2})$

$\Leftrightarrow x(x + 1) = (\frac{x + 6}{2})$

$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 6 = 0$

$2x^2 + x - 6 = 0$ donne $x = -2$ ou $x = \frac{3}{2}$

$$\text{Or } -2 \notin]0; +\infty[\text{ d'où : } S(E_3) = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

30

$$1. 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = \frac{2}{4} + \frac{1}{2} - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$2(1)^2 - 1 - 1 = 2 - 2 = 0 \text{ d'où } -\frac{1}{2} \text{ et } 1 \text{ sont solutions de l'équation } 2x^2 - x - 1 = 0$$

2. Posons : $X = \ln x$

$$2(\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \text{ ou } \ln x = 1 \text{ c'est-à-dire } x = e^{-\frac{1}{2}} \text{ ou } x = e$$

$$S = \left\{ e^{-\frac{1}{2}}; e \right\}$$

3. Posons : $X = \ln x$

$$2(\ln x)^2 \leq \ln x + 1 \Leftrightarrow 2X^2 \leq X + 1 ; \Leftrightarrow 2X^2 - X - 1 \leq 0 ; \Leftrightarrow X \in]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]1; +\infty[; \Leftrightarrow x \in]0; e^{-\frac{1}{2}}[\cup]e; +\infty[$$

$$S(I) =]0; e^{-\frac{1}{2}}[\cup]e; +\infty[$$

31

1-a) $(-6)^2 + 2(-6) - 24 = 0$ et $(4)^2 + 2(4) - 24 = 0$ donc -6 et 4 sont les solutions de l'équation du second degré $x^2 + 2x - 24 = 0$.

b) On en déduit que l'inéquation $x^2 + 2x - 24 \leq 0$ a pour solution l'intervalle $[-6; 4]$.

2-a) Soit (E) l'équation : $x \in \mathbb{R}, \ln(x-3) + \ln(x+5) = 2\ln 3$

L'équation (E) a pour ensemble de validité $]3; +\infty[$

Pour tout x élément de $]3; +\infty[$, l'équation (E) est équivalente à l'équation $\ln(x-3)(x+5) = \ln 9$ qui est elle-même équivalente à l'équation $(x-3)(x+5) = 9$

$$(x-3)(x+5) = 9 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 24 = 0$$

L'équation $x^2 + 2x - 24 = 0$ a pour solution -6 et 4 or $-6 \notin]3; +\infty[$ d'où : $S(E) = \{4\}$

b) Soit (I) l'inéquation : $x \in \mathbb{R}, \ln(x-3)(x+5) \geq 2\ln 3$

L'inéquation (I) a pour ensemble de validité $]3; +\infty[$

Pour tout x élément de $]3; +\infty[$, l'inéquation (I) est équivalente à l'inéquation $(x-3)(x+5) \geq 9$ qui est elle-même équivalente à l'inéquation $x^2 + 2x - 24 \geq 0$

L'inéquation $x^2 + 2x - 24 \geq 0$ a pour solution $]3; +\infty[\cup]-\infty; -6]$ d'où l'inéquation (I) a pour solution $]3; +\infty[\cap]-\infty; -6] \cup]-\infty; -6] \cup]4; +\infty[=]-\infty; -6] \cup]4; +\infty[$ et donc :

$$S(I) =]-\infty; -6] \cup]4; +\infty[.$$

c) Soit (E') l'équation : $x \in \mathbb{R}, (\ln x)^2 + 2\ln(x) - 24 = 0$

Posons : $X = \ln x$. L'équation (E') devient $X^2 + 2X - 24 = 0$ qui a pour solutions $X = -6$ et $X = 4$

Pour avoir les solutions de (E') on résout les équations $\ln x = -6$ et $\ln x = 4$

$$\text{d'où : } S(E') = \{e^{-6}; e^4\}$$

3. Soit (I') l'inéquation : $x \in \mathbb{R}, (\ln x)^2 + 2\ln(x) - 24 \leq 0$

On déduit de ce qui précède que : $S(I) = [e^{-6}; e^4]$.

32

$$a) f(x) = -\frac{x}{2} + 1 + \ln x \text{ d'où : } D(f) =]0; +\infty[$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x}$$

$$b) f(x) = \ln(4-x) + \ln x$$

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}, 4-x > 0 \text{ et } x > 0\} \text{ d'où : } D(f) =]0; 4[$$

$$\forall x \in]0; 4[, f'(x) = -\frac{1}{4-x} + \frac{1}{x}$$

$$c) f(x) = \ln x(-3x + 1)$$

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}, -3x + 1 > 0\} \text{ d'où : } D(f) =]-\infty; \frac{1}{3}[$$

$$d) f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$$

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 > 0\}$$

Le discriminant de $x^2 + x + 1$ est Δ tel que $\Delta = -3 < 0$

$\Delta < 0$ d'où : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 > 0$ et donc : $D(f) = \mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

$$\forall x \in]-\infty; \frac{1}{3}[, f'(x) = \frac{-3}{-3x+1}$$

33

$$f(x) = -x + 3 + \ln x$$

1-a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

b) La droite d'équation $x=0$ est une asymptote à (C)

2-a) Pour tout nombre réel x de $]0; +\infty[$, $f(x) = x(\frac{3}{x} - 1 + \frac{\ln x}{x})$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\frac{3}{x} - 1 + \frac{\ln x}{x})$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{3}{x} - 1 + \frac{\ln x}{x}) = -1$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ d'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

3-a) Pour tout nombre réel x de $]0; +\infty[$, $f'(x) = -1 + \frac{1}{x} = \frac{1-x}{x}$

b) Pour tout nombre réel x de $]0; 1[$, $f'(x) > 0$;

Pour tout nombre réel x de $]1; +\infty[$, $f'(x) < 0$.

c) La fonction f est strictement croissante sur $]0; 1[$ et strictement décroissante sur $]1; +\infty[$

Tableau de variation de f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$			0		
$f(x)$	$-\infty$	+	(2)	-	$-\infty$

4. Equation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1

(T) : $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

(T) : $y = 2$

5- $f(4,5) = 0,004$; $f(4,6) = -0,73$; $f(]1; +\infty[) =]-\infty; 2[$.

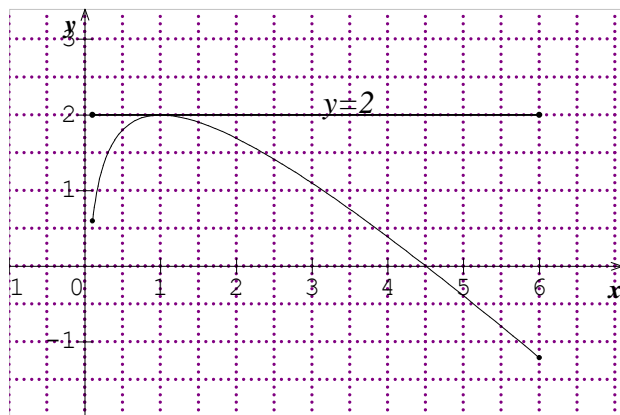
La fonction f est continue et strictement monotone sur $]1; +\infty[$ et $0 \in]-\infty; 2[$ d'où l'équation : $x \in]1; +\infty[$, $f(x) = 0$ admet une solution unique. Or $]4,5; 4,6[\subset]1; +\infty[$ et

$f(4,5) \times f(4,6) < 0$ d'où la solution unique α de l'équation : $x \in]1; +\infty[$, $f(x) = 0$ est telle que $4,5 < \alpha < 4,6$

6-a)

x	0,1	0,5	0,75	1	2	3	4	5	6
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$	0,6	1,8	1,9	2	1,7	1,1	0,4	-0,4	-1,2

b)



34

1) $f(x) = ax + b + \ln x$

$f'(x) = a + \frac{1}{x}$

$(f(1)=3 \text{ et } f'(2)=1,5)$ donne $a+b=3$ et $a+0,5=-1,5$; On en déduit que : $a= -2$ et $b= 5$

2) $f'(x) = -2 + \frac{1}{x} = \frac{1-2x}{x}$

f est strictement décroissante sur $]0,5; +\infty[$ et strictement croissante sur $] -\infty; 0,5[$.

35

$g(x) = x + 1 + \ln x$

1. $D(f) =]0; +\infty[$

$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$
 $f'(x) = \frac{1+x}{x}$

$\forall x \in]0; +\infty[, \frac{1+x}{x} > 0$ d'où f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

2. $g(0,2) = 1,2 + \ln(0,2)$

$g(0,2) = -0,4$

$g(0,3) = 1,3 + \ln(0,3) = 0,09$

g est dérivable et strictement monotone sur $]0; +\infty[$ en particulier sur $]0,2 ; 0,3[$,

$g(0,2) \times g(0,3) < 0$ d'où l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans $]0,2 ; 0,3[$.

3. On suppose qu'il y a une erreur :

Cas 1 : Il faut supprimer le « près » et retenir « Détermine un encadrement de α d'amplitude 0,2 »

$0,2 < \alpha < 0,4 ; 0,1 < \alpha < 0,3$ sont des encadrements de α d'amplitude 0,2

cas 2. Détermine un encadrement de α à 10^{-2} près

$g(0,27) = -0,039$ et $g(0,28) = 0,007$ d'où : $0,27 < \alpha < 0,28$

4. g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et $g(x) = 0$ avec $\alpha \in]0,3 ; 0,4[$ d'où

$\forall x \in]0; \alpha[, g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$

36

$g(x) = x - 4 - \ln x$

1.a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$

1.b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$ d'où la droite d'équation $x = 0$ (axe OJ) est une asymptote à (C)

2.a) Pour $x \in]0; +\infty[, x \left(1 - \frac{4}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) = x - 4 - \ln x$

D'où Pour $x \in]0; +\infty[, g(x) = x \left(1 - \frac{4}{x} - \frac{\ln x}{x} \right)$.

2.b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{4}{x} - \frac{\ln x}{x} \right)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

3. Pour $x \in]0; +\infty[, g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

Pour $x \in]0; 1[, g'(x) < 0$ et pour $x \in]1; +\infty[, g'(x) > 0$, $g(1)=0$ d'où g strictement croissante sur $]1; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0; 1[$

Tableau de variation

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	+
$g(x)$	$+\infty$	-3	$+\infty$

4. $g(5) = 1 - \ln 5 = -0,6$

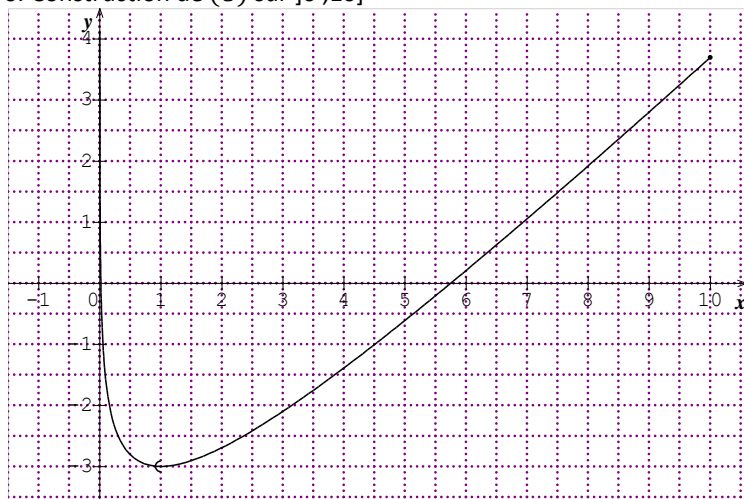
$g(6) = 2 - \ln 6 = 0,2$

g est dérivable et strictement croissante sur $]1; +\infty[$ en particulier sur $]5; 6[$ et

$g(5) \times g(6) < 0$ d'où g s'annule une seule fois sur $]5; 6[$

5. $\frac{5+6}{2} = 5,5$. Une valeur approchée de α à 0,1 près est 5,5 (En général tout nombre décimal d'ordre 1 de $]5; 6[$ est une valeur approchée de α à 0,1 près.

6. Construction de (C) sur $]0; 10]$



37

$f(x) = \frac{x-1}{2} - \ln x$

1.a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ d'où la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à (Cf) .

b) Pour $x \in]0; +\infty[$, $x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2x} - \frac{\ln x}{x} \right) = \frac{x-1}{2} - \ln x$ d'où :

pour $x \in]0; +\infty[$, $f(x) = x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2x} - \frac{\ln x}{x} \right)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2x} - \frac{\ln x}{x} \right)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

2.a) Pour $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} = \frac{x-2}{2x}$

2.b) Pour $x \in]0; 2[$, $f'(x) < 0$ et pour $x \in]2; +\infty[$, $f'(x) > 0$ et $f'(2) = 0$ d'où :
 f est strictement décroissante sur $]0; 2[$ et strictement croissante sur $]2; +\infty[$

2.c) Tableau de variation

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{1}{2} - \ln 2$	$+\infty$

3.a) $f(1) = \frac{1-1}{2} - \ln 1 = 0$

3.b) $f(3) = 1 - \ln 3 = -0,09$ et $f(4) = \frac{3}{2} - \ln 4 = 0,11$

f est dérivable et strictement croissante sur $]2; +\infty[$ en particulier sur $]3; 4[$ et $f(3) \times f(4) < 0$ d'où l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]3; 4[$.

3.c) $f(3,6) = 0,01$ et $f(3,5) = -0,0002$ d'où

$3,5 < \alpha < 3,6$ est un encadrement de α par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 1.

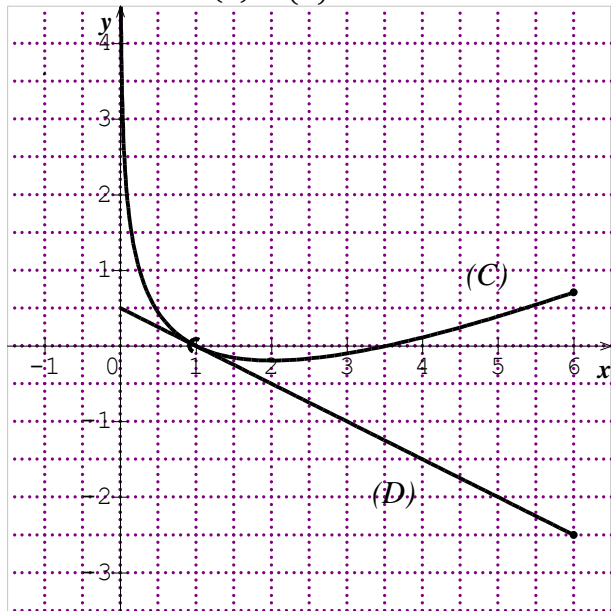
4.(D) : $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

$$f'(1) = -\frac{1}{2} \text{ et } f(1) = 0 \text{ d'où (D) : } y = -\frac{1}{2}(x - 1)$$

5. Tableau de valeurs

x	0,25	0,5	1,5	2	3	4	5	6
Arrondi d'ordre 1 de f(x)	1	0,4	-0,2	-0,2	-0,1	0,1	0,4	0,7

6. Construction de (C) et (D)



38

$$f(x) = 2x - 1 + \ln x$$

1-a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

b) La droite d'équation $x=0$ est une asymptote à (C)

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2-a) Pour tout nombre réel x élément de $]0; +\infty[$,

$$f'(x) = 2 + \frac{1}{x} = \frac{2x+1}{x}$$

b) Pour tout nombre réel x élément de $]0; +\infty[$, $f'(x) > 0$ d'où f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

c) Tableau de variation de f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		$-\infty \rightarrow +\infty$

d) Equation de la tangente (T)

$$(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1) = 3x - 2$$

3-a) L'équation $f(x) = 2x$ a pour solution e

b) Le point d'intersection de (C) et de la droite d'équation $y=2x$ a pour couple de coordonnées $(e; 2e)$

c) $f(x) - 2x = -1 + \ln x$

Pour tout nombre réel x élément de $]0; +\infty[$,

$$f(x) - 2x > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \text{ c-à-d } x \in]e; +\infty[$$

Pour tout nombre réel x élément de $]0; +\infty[$,

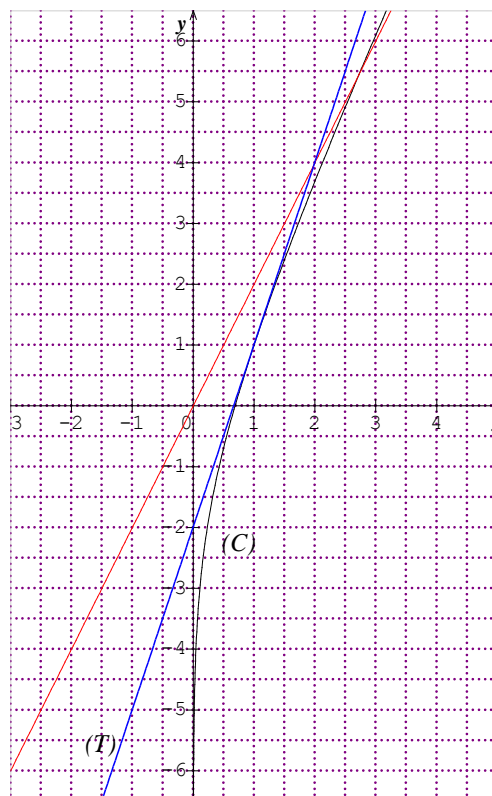
$$f(x) - 2x < 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \text{ c-à-d } x \in]0; e[$$

4-a)

x	0,5	1	1,5	2	2,5
f(x)	$-\ln 2$	1	$2 - \ln(1,5)$	$3 + \ln 2$	$4 + \ln(2,5)$

b)

d) On en déduit que (C) est au-dessus de (Δ) sur $]e; +\infty[$, (C) est au-dessous de (Δ) sur $]0; e[$ et (C) et (Δ) se coupent au point couple de coordonnées $(e; 2e)$.



39*

$$f(x) = -2x + 2 + \ln x$$

1-a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

La droite d'équation $x=0$ est une asymptote à (C)

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(-2 + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}) = -\infty$

40*

1.a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2 - x + \ln x)$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

b) Interprétation graphique du résultat
Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ alors la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à (C)

2. Calcul de la limite de f en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x + \ln x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{2}{x} - 1 + \frac{\ln x}{x} \right) \text{ d'où : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} - 1 + \frac{\ln x}{x} \right) = -1$

3.a) $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = (2 - x + \ln x)'$

$$f'(x) = -1 + \frac{1}{x} = \frac{-x+1}{x}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[$$
, $f'(x) = \frac{1-x}{x}$

b) Justifions le signe de $f'(x)$

Pour tout x élément de $]0; +\infty[$, le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $1-x$

d) Le tableau de variation

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
$f(x)$			(1)

4. Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]3,1; 3,2[$.

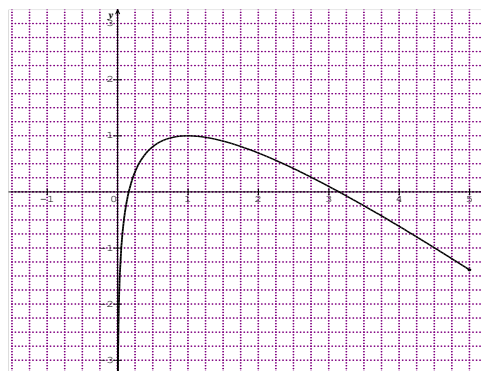
Sur $]1; +\infty[$, f est continue et strictement décroissante. $f(]1; +\infty[) =]-\infty; 1[$ et $0 \in]-\infty; 1[$ or $]3,1; 3,2[\subset]1; +\infty[$ par conséquent l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $]3,1; 3,2[$.

5. Recopions et complétons le tableau suivant :

x	0,1	0,2	0,5	1	2	3	4	5
$f(x)$	-	0,4	0,2	0,8	1	0,7	0,1	0,6

$1-x < 0 \Leftrightarrow x \in]1; +\infty[$ et $1-x > 0 \Leftrightarrow x \in]0; 1[$
 d'où :
 $\cdot \forall x \in]0; 1[, f'(x) > 0$
 $\cdot \forall x \in]1; +\infty[, f'(x) < 0$
 c) Les variations de f
 f est strictement croissante sur $]0; 1[$ et
 strictement décroissante sur $]1; +\infty[$

6. Traçons la courbe



41

On considère la fonction f définie sur $]-\infty; 3[$ par : $f(x) = \ln(3-x)$.

1. Calcul de la limite de f en $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(3-x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3-x) = +\infty \text{ d'où : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

2.a) Calcul de la limite de f en 3 par valeurs inférieures

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \ln(3-x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} (3-x) = 0 \text{ et pour } x < 3, 3-x > 0 \text{ d'où : } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty.$$

2.b) Interprétation graphique

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty \text{ alors la droite d'équation } x=3 \text{ est une asymptote à (C)}$$

3.a) $\forall x \in]-\infty; 3[, f'(x) = \frac{-1}{3-x}$

3.b) Sens de variation

* Signe de $f'(x)$

$\forall x \in]-\infty; 3[, 3-x > 0$ d'où : $\forall x \in]-\infty; 3[, f'(x) < 0$

* f est strictement décroissante sur $]-\infty; 3[$

3.c) Tableau de variation

x	$-\infty$	3
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

4. Equation de la tangente (T)

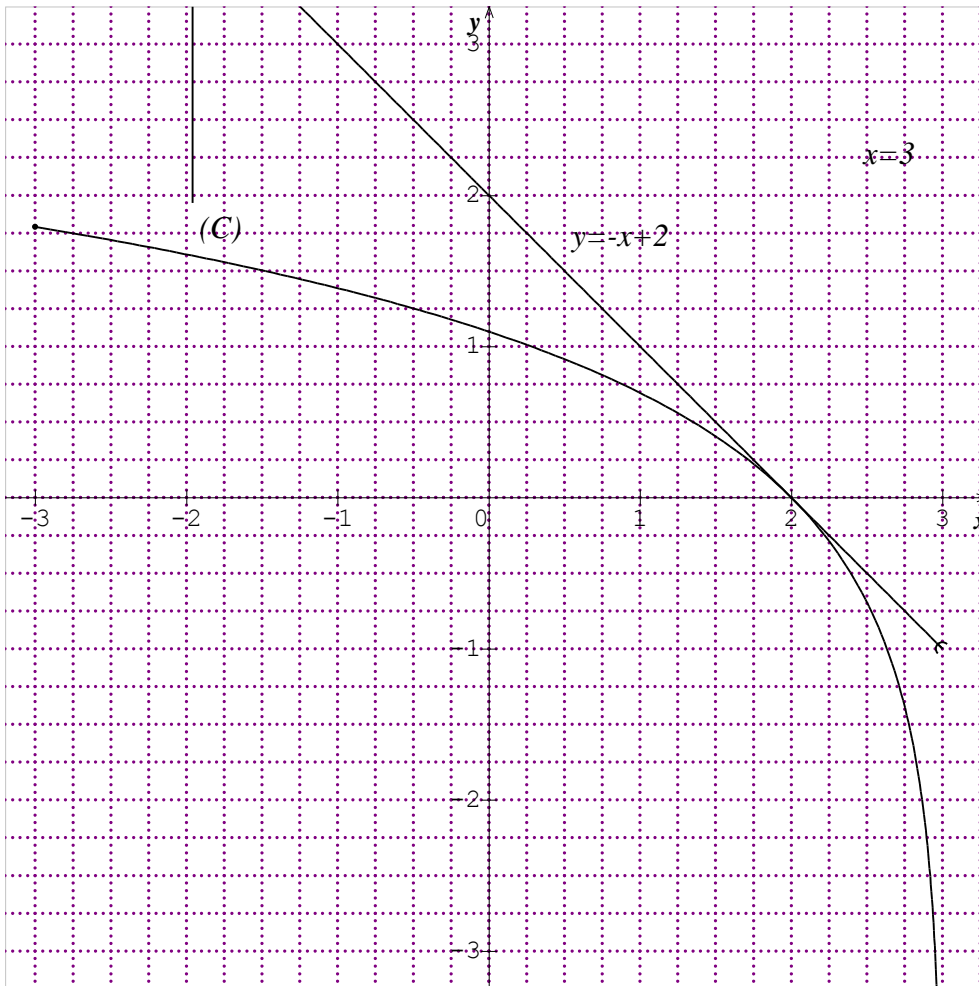
(T) : $y = f'(2)(x-2) + f(2)$

(T) : $y = -x+2$

5. a) Tableau de valeurs

x	-3	-2	-1	0	1	2	2,25	2,5	2,75
$f(x)$	1,7	1,6	1,3	1,1	0,6	0	-0,3	-0,7	-1,4

5.b) Tracé de (C), (T) et de l'asymptote



42

1. $(E_1) : x \in \mathbb{R}, 2x^2 - 7x + 6 = 0$
 $S_{IR}(E_1) = \{2; \frac{3}{2}\}$

2. $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$
 a) $P(-1) = 2(-1)^3 - 5(-1)^2 - (-1) + 6 = 0$
 b) $P(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$
 on trouve $a=2, b=-7$ et $c=6$

3. $S_{IR}(E_2) = \{2; \frac{3}{2}; -1\}$
 4. $S_{IR}(E_3) = \{e^2; e^{\frac{3}{2}}; e^{-1}\}$

43

$f(x) = 3 - x + \ln x$

1.a) $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty$

1.b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ d'où la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à (C)

2. Pour $x \in]0; +\infty[$, $f(x) = x(\frac{3}{x} - 1 + \frac{\ln x}{x})$
 d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\frac{3}{x} - 1 + \frac{\ln x}{x})$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

3.a) Pour $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = -1 + \frac{1}{x} = \frac{1-x}{x}$

3.b) Pour $x \in]0; 1[$, $f'(x) > 0$ et Pour $x \in]1; +\infty[$, $f'(x) < 0$

6.a) Tableau de valeurs

x	0,1	0,5	0,75	1	2	3	4	5	6
f(x)	0,6	1,8	2	2	1,7	1,1	0,4	-	-
								0,4	1,2

6.b) Construction de (T) et (C)

$]1; +\infty[$, $f'(x) < 0$ et $f(1)=0$

3.c) f est strictement croissante sur $]0; 1[$ et strictement décroissante sur $]1; +\infty[$.

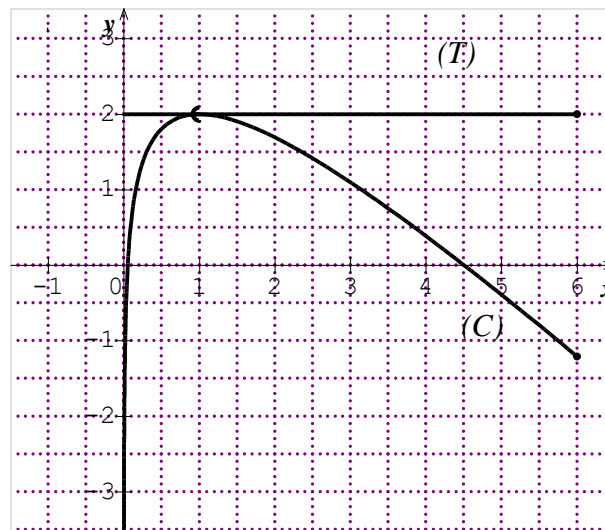
x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	2	$-\infty$

4) (T) : $y=f'(1)(x - 1) + f(1)$

$f'(1)=0$ d'où (T) : $y=2$

5) $f(4,5)=-1,5+\ln(4,5)=0,004$ et $f(4,6)=-1,6+\ln(4,6)=-0,07$

f est dérivable et strictement monotone sur $]1; +\infty[$ en particulier sur $]4,5 ; 4,6[$ et $f(4,5) \times f(4,6) < 0$ d'où l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α tel que $4,5 < \alpha < 4,6$



44

$C(x)=5\ln x+12$

$x = 11 - p$ avec p le prix d'un millier d'accessoires, x le nombre de millier d'accessoires

1.a)

$x = 11 - p \Rightarrow p = 11 - x$ d'où le chiffre d'affaires $R(x)$ est tel que : $R(x) = xp = 11x - x^2$

1.b)

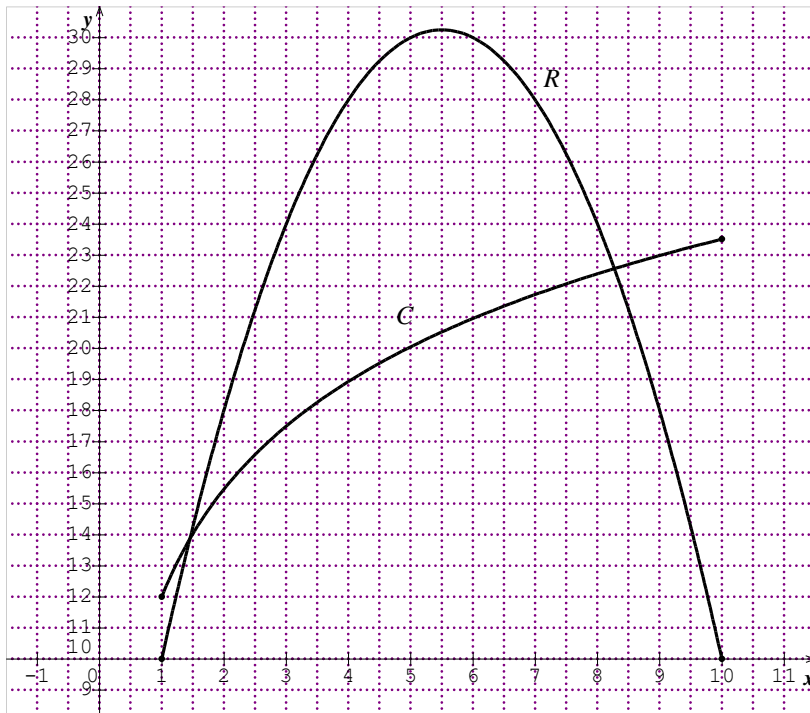
Pour $x \in]1 ; 10]$, $R(x) = 11x - x^2$ et $R'(x) = 11 - 2x$

Pour $x \in]1 ; \frac{11}{2}[$, $R'(x) > 0$ et pour $x \in]\frac{11}{2} ; 10]$, $R'(x) < 0$ d'où :

R est strictement croissante sur $]1 ; \frac{11}{2}[$ et strictement décroissante sur $]\frac{11}{2} ; 10]$

x	1	$\frac{11}{2}$	10
$R'(x)$		+	-
$R(x)$	12	$\frac{121}{4}$	10

1.c) Courbe de C et R



2.a)

$$B(x) = R(x) - C(x) = 11x - x^2 - 5\ln x - 12$$

$$= -x^2 + 11x - 12 - 5\ln x$$

2.b)

$$B'(x) = -2x + 11 - \frac{5}{x} = \frac{-2x^2 + 11x - 5}{x}$$

Discriminant de $-2x^2 + 11x - 5$

$$\Delta = 121 - 40 = 81 = 9^2$$

$$x_1 = \frac{-11 - 9}{-4} = 5$$

$$x_2 = \frac{-11 + 9}{-4} = \frac{1}{2}$$

B est strictement croissante sur $]1; 5[$ et strictement décroissante sur $]5; 10[$

Tableau de variations

x	1	5	10
$B'(x)$		○	
		+	-
$B(x)$	-2	9,95	-13,51

2.c) La fonction B est dérivable et monotone sur $]1; 5[$ et $B(1) \times B(5) < 0$ d'où il existe une seule valeur $x \in]1; 5[$ telle que $B(x) = 0$

La fonction B est aussi dérivable et monotone sur $]5; 10[$ et $B(5) \times B(10) < 0$ d'où il existe une seule valeur $x \in]5; 10[$ telle que $B(x) = 0$

En conclusion l'équation $B(x) = 0$ admet deux solutions.

$$B(1) = -2 \text{ et } B(2) = 2,53$$

On a $B(1) \times B(2) < 0$ d'où une valeur approchée à 10^{-1} près d'un des zéros est 1,5

$$B(8,3) = 0,43 \text{ et } B(8,2) = -0,17$$

On a $B(8,2) \times B(8,3) < 0$ d'où le deuxième zéro de B appartient à $]8,2; 8,3[$. Une valeur approchée à 10^{-1} est 8,2 (ou 8,3).

2.d) Le bénéfice est maximal pour 5.000 accessoires fabriqués et ce bénéfice maximal est :

$$B_{max} = (-5^2 + 55 - 12 - 5\ln 5) \times 10^3$$

$$B_{max} = 9.952,81 \text{ euros}$$

45

$$f(x) = -8310 \ln x$$

- 1) Pour $x=35\%$ on a : $f(0,35) = -8310 \ln(0,35) = 8724,02$. Arrondi à la centaine on a 8800ans. D'où l'âge d'un fossile qui contient 35% de carbone est 8800 ans
 2) $-8310 \ln x = 15000 \Leftrightarrow x = 0,16446$ c-à-d 16,45% d'où la fraction de carbone restant dans un fossile vieux de 15000ans est de 16,45%

46*

- 1.a) $f(1) \approx 0,5$, $f(2) = 0,3$
 1.b) $f'(x_0) = 0$ pour $x_0 = 2$
 1.c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
 1.d) f est strictement croissante sur $]2; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0; 2[$

2. $g(x) = \frac{x}{2} - \ln x$

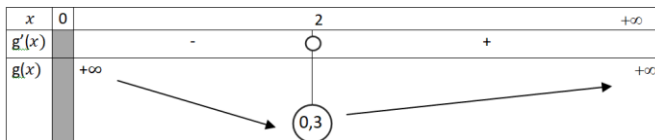
a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{1}{2} - \frac{\ln x}{x} \right)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

2.b) $g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} = \frac{x-2}{2x}$

- 2.c) g est strictement croissante sur $]2; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0; 2[$



Situation complexe

47*

$v_n = 60\,000\,000 \times 0,85^n$ le véhicule sera remplacé quand $v_n = 15\,000\,000$.

$60\,000\,000 \times 0,85^n = 15\,000\,000 \Leftrightarrow 0,85^n = 0,25$

$\Leftrightarrow \ln(0,85^n) = \ln(0,25)$

$\Leftrightarrow n = \frac{\ln(0,25)}{\ln(0,85)} \approx 8,53$

On prend $n=9$ et donc le véhicule doit être remplacé en $2021+9 = 2030$.