Leçon 6

PRIMITIVES ET CALCUL INTÉGRAL

INSTALLATION DES HABILETÉS

Activité 1 Primitives d'une fonction

1.1. Définition d'une primitive

1. $F'(x)=2x-5$, $G'(x)=2x-5$ et $H'(x)=2x-5$

2. Pour tout nombre réel x , $F'(x)=f(x)$; $G'(x)=f(x)$ et $H'(x)=f(x)$

Exercices de fixation

1.1.1

b) $F'(x)=f(x)$

1.1.2

Pour tout nombre réel x , $F'(x)=f(x)$ d'où F est une primitive de f sur IR

1.1.3

Pour tout nombre x élément de $]0\,;+\infty\,[$, $G'(x)=f(x)$ d'où G est une primitive de f sur $]0\,;+\infty\,[$.

1.1.4

Les fonctions F et G sont des primitives de h.

1.2. Propriété

On suppose que f est définie sur I et que F est une primitive de f sur I, donc :

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in I.$$

1) Cas G(x) = F(x) + k (k ∈ ℝ)

On dérive G :

$$G'(x) = (F(x) + k)' = F'(x) + k' = F'(x) + 0 = f(x).$$

Donc G'(x) = f(x) sur I, ainsi G est une primitive de f sur I.

2) Cas de deux primitives H et K

Comme H et K sont deux primitives de f sur I, on a :

$$H'(x) = f(x) \text{ et } K'(x) = f(x) \text{ pour tout } x \in I.$$

On définit u(x) = H(x) − K(x).

a) Dérivée de u

$$u'(x) = (H(x) - K(x))' = H'(x) - K'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Donc, pour tout x ∈ I, u'(x) = 0.

b) Conclusion

Si une fonction dérivable sur un intervalle a une dérivée nulle sur cet intervalle, alors elle est constante sur cet intervalle.

Il existe donc une constante réelle c telle que, pour tout x ∈ I :

$$u(x) = c.$$

Or u(x) = H(x) − K(x), donc :

$$H(x) - K(x) = c \Leftrightarrow H(x) = K(x) + c.$$

Exercices de fixation

1.2.1

$$F_1(x) = \frac{1}{x} - x^2 + 2$$

$$F_2(x) = \frac{1}{x} - x^3 - 3$$

F_1 et F_2 sont deux autres primitives de f sur]0 ;5[

1.2.2

Les primitives de f sur IR sont les fonctions F_k définies par $f(x) = x^2 - 5x + k$, $k \in$IR

1.3. Primitives de fonctions de référence

1) Dérivées

Cas	Fonction F(x) (domaine)	Dérivée F'(x)
a)	F(x) = a·x (a constante réelle), sur ℝ	F'(x) = a
b)	F(x) = 1/2 · x², sur ℝ	F'(x) = x
c)	F(x) = 1/2 · a·x² + b·x, sur ℝ	F'(x) = a·x + b
d)	F(x) = 1/(n+1) · x^(n+1), n ∈ ℕ sur ℝ	F'(x) = x^n
e)	F(x) = 2√x, sur]0 ; +∞[	F'(x) = 1/√x
f)	F(x) = −1/x, sur]0 ; +∞[	F'(x) = 1/x²
g)	F(x) = ln(x), sur]0 ; +∞[	F'(x) = 1/x
h)	F(x) = e^x, sur ℝ	F'(x) = e^x

2) Une primitive de f

Cas	Fonction f(x) (domaine)	Une primitive F(x)
a)	f(x) = a (a constante réelle), sur ℝ	F(x) = a·x
b)	f(x) = x, sur ℝ	F(x) = 1/2 · x²
c)	f(x) = a·x + b, sur ℝ	F(x) = (a/2)·x² + b·x
d)	f(x) = x^n, n ∈ ℕ sur ℝ	F(x) = 1/(n+1) · x^(n+1)
e)	f(x) = 1/√x, sur]0 ; +∞[	F(x) = 2√x
f)	f(x) = 1/x², sur]0 ; +∞[	F(x) = −1/x
g)	f(x) = 1/x, sur ℝ*	F(x) = ln|x| (ou ln(x) si x > 0)

h)	f(x) = e^x, sur ℝ	F(x) = e^x

Exercices de fixation

1.3.1

Soit F une primitive de la fonction f dans chacun des cas.

a) $F(x)=2021x$
b) $F(x)=-7x$
c) $F(x)=\frac{3}{2}x^2-5x$
d) $F(x)=-\frac{1}{2}x^2+0{,}3x$

1.3.2

Soit F une primitive de la fonction f dans chacun des cas

a) $F(x)=\frac{1}{3}x^3$
b) $F(x)=\frac{1}{10}x^{10}$
c) $F(x)=\ln|x|$
d) $F(x)=e^x$

1.4. Primitives des fonctions de chacun des types : $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{a}{cx+d}$, $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ où $a \neq 0$ et $(c\,;d) \neq (0\,;0)$

1) Dérivées

1. d(x) = ln(x)
   d′(x) = **Error!** (domaine : x > 0)
2. f(x) = ln(2x + 1)
   f′(x) = **Error!**(domaine : 2x + 1 > 0 ⇔x > −1/2)
3. g(x) = ln(−4x + 5)
   g′(x) = **Error!** = **Error!** (domaine : −4x + 5 > 0 ⇔x < 5/4)
4. h(x) = ln(x² + 2x + 8)
   h′(x) = **Error!** (domaine : ℝcar (x + 1)² + 7 > 0)
5. l(x) = ln(−3x³ + 7)
   l′(x) = **Error!**= **Error!** (domaine : −3x³ + 7 > 0 ⇔x < ∛(7;3))

2) Primitives (conjecture)

A. Fonction du type **Error!**(avec a ≠ 0)
Si c ≠ 0 : ∫ **Error!**dx = (**Error!**) ln|cx + d| + C.
B. Fonction du type **Error!**
∫ **Error!**dx = ln|u(x)| + C.

Applications (primitives des dérivées obtenues) :

- ∫ d′(x) dx = ∫ (**Error!**) dx = ln|x| + C (et comme x > 0 : ln(x) + C).
- ∫ f′(x) dx = ∫ **Error!**dx = ln|2x + 1| + C.
- ∫ g′(x) dx = ∫ **Error!** dx = ln|−4x + 5| + C.
- ∫ h′(x) dx = ∫ **Error!**dx = ln(x² + 2x + 8) + C.
- ∫ l′(x) dx = ∫ **Error!**dx = ln|−3x³ + 7| + C.

Exercices de fixation

141

Soit F une primitive de la fonction f sur I

a) $F(x)=\frac{4}{3}\ln(3x-8)$
b) $F(x)=-3\ln(x+2)$
c) $F(x)=\ln(x^2-5x+4)$

142

1. Soit F une primitive une primitive de f sur I . On a : F(x) =lnx
2. Soit G une primitive de la fonction g sur I. On a : G(x)=-ln(3-2x)
3. Soit H une primitive de la fonction h sur I . On a : $H(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 6x - 1)$

1.5. Primitive d'une fonction du type : $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$

1) Dérivées

a) Pour f(x) = e^x

On sait que la dérivée de e^x est e^x, donc :

f'(x) = e^x

b) Pour g(x) = $e^{3x - 1}$

Posons u(x) = 3x - 1, alors u'(x) = 3. Par la règle de dérivation de e^{u(x)} :

g'(x) = u'(x)·$e^{u(x)}$ = 3$e^{3x - 1}$

c) Pour h(x) = $e^{x\wedge 2 + 3x - 1}$

Posons v(x) = x^2 + 3x - 1, alors v'(x) = 2x + 3. Donc :

h'(x) = v'(x)·$e^{v(x)}$ = (2x + 3)$e^{x\wedge 2 + 3x - 1}$

2) Primitive du type u'(x)e^{u(x)}

On remarque que la dérivée de e^{u(x)} est u'(x)e^{u(x)}. Ainsi, une primitive de
x ⇒ u'(x)$e^{u(x)}$ est :

F(x) = $e^{u(x)}$ + C, où C est une constante réelle.

Exercices de fixation

151

Soit F une primitive de la fonction f sur IR dans chacun des cas .

a) F(x)=e^{2x+7}
b) F(x)= $e^{(x^2-x+3)}$

152

Soit F une primitive de la fonction f sur IR dans chacun des cas .

a) F(x)=$\frac{1}{3}e^{3x-1}$
b) F(x)=$\frac{1}{2}e^{(x^2-2x-1)}$

1.6. Primitive des fonctions de chacun des types : $x \mapsto au'(x) + bv'(x)$ et $x \mapsto u'(x) \times u^m(x)$

1

a) On sait que (**Error!**)' = – **Error!**. Donc **Error!**= –5(– **Error!**). Ainsi : f(x) = 3e^x – 5(– **Error!**).

b) On choisit u(x) = e^x, alors u'(x) = e^x ; et v(x) = **Error!**, alors v'(x) = – **Error!**.

Ainsi 3u'(x) – 5v'(x) = 3e^x – 5(–**Error!**) = 3e^x + **Error!**= f(x).

c) Une primitive de f sur]0 ; +∞[est : F(x) = 3u(x) – 5v(x) + C = 3e^x – **Error!**+ C (pour x > 0).

2. a) Posons u(x) = 3x² – 5x + 1. Alors u'(x) = 6x – 5 et f(x) = u'(x)$(u(x))^4$.

b) Pour g(x) = (**Error!**)$(u(x))^5$, on a : g'(x) = (**Error!**)·5$(u(x))^4$·u'(x) = u'(x)$(u(x))^4$ = f(x).

c) Les primitives de f sur ℝsont : F(x) = (**Error!**)$(3x^2 - 5x + 1)^5$ + C.

Exercices de fixation

161

Soit F une primitive de la fonction f dans chacun des cas.

a) F(x)=$\frac{3}{4}(x+1)^4 + 2x^2$
b) F(x)=$\frac{1}{2}e^{2x}$ +3ln|x|

162

Soit F une primitive de la fonction f dans chacun des cas.

a) F(x)=$\frac{1}{5}(x-3)^5$-$\frac{1}{x}$

b) $F(x) = \ln|-x^2 + x - 6| + \frac{1}{3}e^{x^3-1}$

163

Soit F une primitive de la fonction f sur IR dans chacun des cas.

a) $F(x)=\frac{1}{4}(x-1)^4$

b) $F(x)=\frac{1}{3}(3x+2)^3$

c) $F(x)=\frac{1}{6}(x^2+3x+1)^6$

164

Soit F une primitive de la fonction f sur IR dans chacun des cas.

a) $F(x)=\frac{1}{4}(2-7x)^4$

b) $F(x)=\frac{1}{32}(8x+9)^4$

c) $F(x)=\frac{1}{4}(x^2-6x-10)^2$

Activité 2 Intégrale d'une fonction

2.1. Définition d'une intégrale

1. $F'(x)= f(x)$ et $G'(x) = f(x)$ d'où F et G sont des primitives de f
2. **a)** F(2)=5 ; G(2) =18 ; F(4)=23 ; G(4) =36

   b) F(4)-F(2) =G(4)-G(2)

Exercices de fixation

211

✓ $\int_2^3 (x-3)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - 3x\right]_2^3$

$\int_2^3 (x-3)dx = \frac{9}{2} - 9 - \frac{4}{2} + 6 = \frac{5}{2} - 3$

$$\int_2^3 (x-3)dx = -\frac{1}{2}$$

✓ $\int_1^4 \left(\frac{2}{2x-1}\right) dx = [ln|2x-1|]_1^4$

$$\int_1^4 \left(\frac{2}{2x-1}\right) dx = ln7$$

212

✓ $\int_0^2 (x^2+2x-1)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x\right]_0^2$

$$\int_0^2 (x^2+2x-1)dx = \frac{8}{3} + 4 - 2$$

$$\int_0^2 (x^2+2x-1)dx = \frac{14}{3}$$

✓ $\int_{-2}^1 2e^x dx = [2e^x]_{-2}^1 = 2e - 2e^{-2}$

$\int_{-2}^1 2e^x dx = 2(e - e^{-2})$

✓ $\int_1^e \frac{1}{x} dx = [ln|x|]_1^e$

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = 1$$

✓ $\int_0^2 (2x-3)(x^2-3x+1)^2 dx = \int_0^2 u'^{(x)} \times u_{(x)}^m dx$

avec $u(x) = x^2 - 3x + 1$ et $m = 2$

d'où $\int_0^2 (2x-3)(x^2-3x+1)^2dx = \left[\frac{1}{3}x^2 - 3x + 1\right]_0^2$

$\int_0^2 (2x-3)(x^2-3x+1)^2dx = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$

2.2. Aire d'une partie du plan délimitée par la représentation graphique d'une fonction positive et l'axe des abscisses

1) Aires

a) Aire du rectangle ABCD

AB = 3 − 1 = 2 et AD = 1 − 0 = 1, donc :

A(ABCD) = AB × AD = 2 × 1 = 2 (unités d'aire).

Aire du triangle DCE rectangle en C

DC = 3 − 1 = 2 et CE = 5 − 1 = 4, donc :

A(DCE) = 1/2 × DC × CE = 1/2 × 2 × 4 = 4 (unités d'aire).

b) Aire du quadrilatère ABED

Le quadrilatère ABED est la somme du rectangle ABCD et du triangle DCE :

A = A(ABCD) + A(DCE) = 2 + 4 = 6 (unités d'aire).

2) Calcul de l'intégrale

$\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 (2x - 1)\,dx = [x^2 - x]_1^3 = (9 - 3) - (1 - 1) = 6$.

3) Comparaison

On obtient $\int_1^3 f(x)\,dx = 6$ et A = 6, donc :

$\int_1^3 f(x)\,dx = A$.

Exercices de fixation

221

Soit A l'aire en unité d'aire de la partie hachurée

$A = \int_0^2 (4x - x^2)\,dx = \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^4 = \frac{32}{3}$

2.2.2

Soit B l'aire en unité d'aire de la partie grisée

$B = \int_1^4 \left(x + \frac{2}{x}\right)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 2ln|x|\right]_1^4$

$B = \frac{15}{2} + 2ln4 = \frac{15}{2} + ln16$

2.3. Aire d'une partie du plan délimitée par la représentation graphique d'une fonction et l'axe des abscisses

Corrigé

1) Signe de f(x)

On a f(x) = x − 3.

- Si x ≤ 3, alors x − 3 ≤ 0, donc f(x) ≤ 0 sur]−∞ ; 3].
- Si x > 3, alors x − 3 > 0, donc f(x) > 0 sur]3 ; +∞[.

2a) Aire A_1 du triangle ABC

D'après la figure : B(1 ; 0), C(3 ; 0) et A(1 ; −2).

BC = 3 − 1 = 2 et BA = 0 − (−2) = 2.

Donc $A_1 = (1/2) \times BC \times BA = (1/2) \times 2 \times 2 = 2$.

2b) Calcul de $\alpha = \int_1^3 f(x)\,dx$ et signe

$\alpha = \int_1^3 (x - 3)\,dx = [x^2/2 - 3x]_1^3$.

$\alpha = (9/2 - 9) - (1/2 - 3) = (-9/2) - (-5/2) = -2$.

Ainsi, $\alpha < 0$.

2c) Relation entre A_1 et α

Sur l'intervalle [1 ; 3], on a f(x) ≤ 0 : l'intégrale représente l'aire algébrique sous la courbe (négative).

Donc $\alpha = -A_1$. Ici : $A_1 = 2$ et $\alpha = -2$.

Exercices de fixation

2.3.1
Pour tout nombre x de [-1 ;4], $-e^x < 0$
Soit C l'aire en unité d'aire de la partie en question
C=$-\int_{-1}^{4}(-e^x)dx = \int_{1}^{4} e^x dx$ = $[e^x]_{-1}^{4}$
C=$e^4 - e^{-1}$

2.3.2
Soit D l'aire en unité d'aire de la partie en question
[-1 ;3] = [1 ;0]∪ [0 ;3]
Pour tout nombre x de [-1 ;0], $f(x) \leq 0$ et pour tout nombre x de [0 ;3], $f(x) \geq 0$
d'où : D = - $\int_{-1}^{0} f(x)dx$ + $\int_{0}^{3} f(x)dx$
D =-$[\ln(x^2+1)]_{-1}^{0}$+$[\ln(x^2+1)]_{0}^{3}$
D=$ln2 + ln10$ = ln20

2.4. Aire d'une partie du plan délimitée par deux représentations graphiques

On travaille sur l'intervalle [1 ; 3]. La droite (OI) est l'axe des abscisses (y = 0).

1.a) Aire limitée par (C_f), (OI), x = 1 et x = 3

$f(x) = -3x^2 + 12x - 8$.

Sur [1 ; 3], on a f(x) ≥ 0 (les zéros de f sont environ 0,845 et 3,155), donc l'aire est :

$$A_f = \int_1^3 (-3x^2 + 12x - 8)\, dx$$

Une primitive de f est : $F(x) = -x^3 + 6x^2 - 8x$.

Ainsi, $A_f = [-x^3 + 6x^2 - 8x]_1^3$

Calcul :

- F(3) = -27 + 54 - 24 = 3
- F(1) = -1 + 6 - 8 = -3
- A_f = F(3) - F(1) = 3 - (-3) = 6

Donc, A_f = 6 unités d'aire.

1.b) Aire limitée par (C_g), (OI), x = 1 et x = 3

$g(x) = 0,5x^2 - 2x + 2,5$.

Le discriminant de $x^2 - 4x + 5$ est Δ = 16 - 20 = -4 < 0, donc g(x) > 0 pour tout x. Ainsi l'aire est :

$$A_g = \int_1^3 (0,5x^2 - 2x + 2,5)\, dx$$

Une primitive de g est : G(x) = **Error!** - x^2 + (**Error!**)x.

Calcul :

- G(3) = **Error!**- 9 + **Error!** = 3
- G(1) = **Error!**- 1 + **Error!** = **Error!**
- A_g = G(3) - G(1) = 3 - **Error!**= **Error!**

Donc, Ag = 4/3 unités d'aire.

2) Aire comprise entre (C_f) et (C_g) entre x = 1 et x = 3

Sur [1 ; 3], f(x) est au-dessus de g(x) (on peut vérifier que f(x) - g(x) = -(**Error!**)(x-1)(x-3) > 0 pour 1 < x < 3).

Donc l'aire cherchée vaut : A = $\int_1^3$ (f(x) - g(x)) dx = A_f - A_g.

A = 6 - Error!= Error!unités d'aire.

Exercices de fixation

2.4.1
Soit E l'aire en unité d'aire de la partie en question Pour tout nombre x de [0 ;1], $g(x) \geq f(x)$ d'où :
E= $\int_{0}^{1}(g(x) - f(x)dx$
E= $\int_{0}^{1}(2 - x^2 - \frac{1}{x+1})dx$
E=$\left[2x - \frac{1}{3}x^3 - ln|x+1|\right]_0^1$

E= $\frac{5}{3} - ln2$

2.4.2Même méthodologie qu'au 2.4.1

F= $\int_1^3 (g(x) - f(x)dx$

F=$\int_1^3 (-\frac{1}{2}x^2 + 6x - \frac{9}{2})dx$

F=$\left[-\frac{1}{6}x^3 + 3x^2 - \frac{9}{2}x\right]_1^3$

F= $\frac{32}{3}$

Exercices de renforcement

1

u'(x)= $\frac{(x+2)-x}{(x+2)^2} = \frac{2}{(x+2)^2}$; v'(x) = $\frac{3(x+2)-(3x+4)}{(x+2)^2} = \frac{2}{(x+2)^2}$

Pour tout élément x de]-2 ;+∞[, u'(x) =v'(x) d'où u et v sont des primitives d'une même fonction.

2

$f(x)= x^2 + x - 10$ et g(x) =$(x$-1$)(x$+2$)$ = $x^2 + x - 2$

$f'(x)$= 2x+1 et $f(x)$ =g(x) −8 d'où f et g sont des primitives de h.

3

a) Pour tout élément $x$de I, F'(x) = x+5-$\frac{1}{x^2}$ = $f(x)$ d'où F est une primitive de $f$sur I

b) Pour tout élément $x$de I, F'(x) = $\frac{7(2x+3)-2(7x+1)}{(2x+3)^2}$ =$\frac{19}{(2x+3)^2}$ = $f(x)$ d'où F est une primitive de $f$sur I

c) Pour tout élément $x$de I, F'(x) = 3 - $\frac{2}{(x+1)^2}$ = $\frac{3x^2+6x+1}{(x+1)^2}$ = = f(x) d'où F est une primitive de $f$sur I

4

1.Pour tout nombre $x$de]0 ;+∞[, F'(x) =-5 +$\frac{1}{x}$ = $\frac{1-5x}{x}$ = $f(x)$ d'où F est une primitive de $f$sur]0 ;+∞[

2.Pour tout nombre $x$de]1 ;+∞[, G'(x) =$\frac{-5x+1}{-\frac{5}{2}x^2+x+1}$ = $\frac{-10x+2}{-5x^2+2x+2}$ = $\frac{10x-22}{-5x^2+2x+2}$= g$(x)$ d'où G est une primitive de g sur]1 ;+∞[

5

Soit F une primitive de la fonction f

a) F(x) = $\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 7x$
b) F(x)=2ln(x-2)
c) F(x)=$\frac{1}{2}$ln$(x^2 - 4x - 5)$
d) F(x)=$e^{(x^3-1)}$
e) F(x)=$(2x - 7)^8$

6

1. Les primitives sur]0 ;+∞[de la fonction définie par $f(x)=\frac{1}{x}$ sont les fonctions F_k définies par $F_k(x) =$ lnx +k, k∈ IR.
2. La primitive de f qui prend la valeur -2 en e est la fonction F_k telle que $F_k(e)$=-2.
$F_k(e)$=-2⟺lne +k = -2 ⟺k=-3.D'où la primitive de f qui prend la valeur -2 en e est la fonction : $x \longmapsto \ln x - 3$.

7

Pour tout nombre x de IR-{1} , F'(x) $=\frac{2(1-x)+(2x-3)}{(1-x)^2} = \frac{-1}{(1-x)^2} = f(x)$ d'où F est une primitive de f sur IR-{1}

8

1. Soit F une primitive de f sur IR ; F(x) $=\frac{1}{4}x^4$-x^2 $+ 3x$ d'où les primitives de f sur sont les fonctions F_k telles que : $F_k(x)=\frac{1}{4}x^4$-x^2 $+ 3x + k$, k un nombre réel.
2. $F_k(0)$= k=1 d'où H est telle que : H(x) $=\frac{1}{4}x^4$-x^2 $+ 3x$ +1

9

1.$\frac{x^3+1}{x^2} = \frac{x^3}{x^2} + \frac{1}{x^2} = x+\frac{1}{x}$d'où : a =1 et b =1
2.Soit F une primitive de f sur]0 ;+∞[. On a : F(x) $= \frac{1}{2}x^2$ +ln$x$

10

a) Soit F une primitive de f sur IR. On a : F(x)= $e^x + \frac{1}{2}x^2$
b) Soit G une primitive de g sur IR. On a : G(x) =-e^{-x}
c) Soit H une primitive de h sur IR. On a : H(x) $= \frac{1}{4}e^{4x}$
d) Soit I une primitive de i sur IR. On a : I(x) $=\frac{1}{2}e^{2x+1}$
e) Soit J une primitive de j sur IR. j(x)= u'$(x)e^{u(x)}$ avec u$(x) = x^2 - x$d'où : J(x)= $e^{(x^2-x)}$
f) Soit K une primitive de k sur IR. On a : K(x) $= e^{3x}$-2x

11

a) Soit F_k une primitive quelconque de f sur IR. On a : $F_k(x) = \frac{1}{2}x^2$+4x +k, k∈IR
$F_k(0)$= k =1 d'où la primitive de f qui prend la valeur 1 en 0 est la fonction F_1 telle que $F_1(x)$ $=\frac{1}{2}x^2$+4x +1
b) Soit G_k une primitive quelconque de g sur IR. On a : $G_k(x)$= x-$\frac{1}{3}x^3$ +k, k∈IR.
$G_k(0)$= k =1 d'où la primitive de g qui prend la valeur 1 en 0 est la fonction G_1 telle que $G_1(x) = x$-$\frac{1}{3}x^3$ +1
c) Soit H_k une primitive quelconque de h sur IR. On a : $H_k(x)$= e^x+k, k∈IR.
$H_k(0)$1+k=1 d'où k=0 et la primitive de h qui prend la valeur 1 en 0 est H_0 telle que $H_0(x) = e^x$
d) Soit K_k une primitive quelconque de k sur IR. On a : $K_k(x)$= e^x+2x+k, k∈IR.
$K_k(0)$=1+k =1d'où k=0 et la primitive de k qui prend la valeur 1 en 0 est K_0 telle que $K_0(x) = e^x$+2x

12

Soit F une primitive de f sur I.
a) F(x)=ln(x+3)
b) F(x)=ln(1-x^2)

c) $F(x)=\ln|x^2+x+2|$
d) $F(x)=2\ln(x^2-x)$

13

Soit F une primitive de f sur I.

a) $F(x)=\frac{1}{8}(5x+7)^8$
b) $F(x)=\frac{1}{15}(3x+1)^5$
c) $F(x)=\frac{1}{3}(2x^2+5x+7)^3$
d) $F(x)=-\frac{1}{4}(1+\frac{1}{x})^4$

14

Soit F une primitive de f sur I.

a) $f(x)=\frac{\ln x}{x}=\frac{1}{x}\times\ln x=u'(x)\times u(x)$ avec $u(x)=\ln x$ d'où : $F(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2$

b) $f(x)=\frac{1}{x\ln x}=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}=\frac{u'(x)}{u(x)}$avec $u(x)=\ln x$ d'où : $F(x)=\ln(\ln x)$

15

$f(x)=x\ln x$
1.$f'(x)=\ln x+1$
2.$f'(x)=\ln x+1\Longrightarrow f'(x)-1=\ln x$
$\Longrightarrow (f(x)-x)'=\ln x$
$\Longrightarrow (x\ln x-x)'=\ln x$ d'où une primitive de la fonction ln est la fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $F(x)=x\ln x-x$

16

Soit F une primitive de f sur I.

a) $f(x)=xe^{x^2}=\frac{1}{2}u'(x)\,e^{u(x)}$ avec $u(x)=x^2$ d'où : $F(x)=\frac{1}{2}e^{x^2}$

b) $\boldsymbol{f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{u'(x)}{u(x)}}$avec $u(x)=e^x+1$d'où : $F(x)=\ln(e^x+1)$

17

$f(x)=(x+2)e^x$, $F(x)=(ax+b)e^x$
$F'(x)=ae^x+(ax+b)e^x=(ax+a+b)e^x$
$=f(x)\Leftrightarrow a=1$ et $a+b=2$ d'où : $a=1$ et $b=1$

18

1. $f(x)=\frac{2}{1+e^{-x}}=\frac{2}{1+\frac{1}{e^x}}=\frac{2e^x}{1+e^x}$
2. Soit F_k une primitive de quelconque de f sur IR

$F_k(x)=2\ln(1+e^x)+k$, $k\in$IR.
$F_k(0)=k+\ln 4=0$ d'où $k=-\ln 4$ d'où : $F(x)=2\ln(1+e^x)-\ln 4$

19

1. Soit F une primitive de f sur IR. On a : $F(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+x$

2.$\int_{-1}^{2}f(x)dx=F(2)-F(-1)=\frac{69}{4}$

20

1. $f(x) = \frac{4x}{(x^2-4)^2} = 4x(x^2-4)^{-2} = 2\times 2x(x^2-4)^{-2} = au'(x)u^m(x)$ avec $u(x)=x^2-4$, a=2 , $u'(x)u^m = 2$ et m=-2.
2. $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \left[\frac{a}{m+1}u^{m+1}\right]_{-1}^{1} = = \left[\frac{2}{-1}(x^2-4)^{-1}\right]_{-1}^{1} = \left[\frac{-2}{x^2-4}\right]_{-1}^{1} = 0$

21

1. $\int_{-2}^{3} 3tdt = \left[\frac{3}{2}t^2\right]_{-2}^{5} = \frac{63}{2}$
2. $\int_{4}^{5}(x^2-5x+1)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x\right]_{4}^{5} = -\frac{37}{6}$
3. $\int_{0,041}^{0,204} \frac{323}{x}dx = [323\ln x]_{0,041}^{0,204} = 323\ln(\frac{204}{41})$

22

a) $\int_{0}^{1}(x^2-x+1)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x\right]_{0}^{1} = \frac{5}{6}$

b) $\int_{1}^{4}(1-\frac{1}{x^2})dx = \left[x + \frac{1}{x}\right]_{1}^{4} = \frac{9}{4}$

c) $\int_{1}^{e}\frac{2}{x}dx = [2\ln x]_{1}^{e} = 2$

d) $\int_{4}^{7}\frac{2}{x-3}dx = [2\ln(x-3)]_{4}^{7} = 2\ln 4$

e) $\int_{-1}^{1}(e^x - e^{-x})dx = [e^x + e^{-x}]_{-1}^{1} = 0$

f) $\int_{0}^{ln2}(e^x + e^{-x})dx = [e^x - e^{-x}]_{0}^{ln2} = \frac{3}{2}$

23

$\int_{1}^{2}(x-\frac{1}{x})^2dx = \int_{1}^{2}(x^2-2+\frac{1}{x^2})dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x - \frac{1}{x}\right]_{1}^{2} = \frac{5}{6}$

24

1. $\int_{-1}^{1}(2x-5)^3dx = \left[\frac{1}{8}(2x-5)^4\right]_{-1}^{1} = 290$
2. $\int_{0}^{1}(x^2+x+1)(2x+1)dx = \left[\frac{1}{3}(x^2+x+1)^3\right]_{0}^{1} = \frac{26}{3}$

25

1. $\int_{1}^{2}(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2})dt = \left[lnt + \frac{1}{t}\right]_{1}^{2} = \ln 2 - \frac{1}{2}$
2. $\int_{0}^{1}(\frac{2x-1}{x^2-x+1})dx = [\ln(x^2-x+1)]_{0}^{1} = 0$
3. $\int_{1}^{2}(2x+1)(x^2+x+1)dx = \left[\frac{1}{3}(x^2+x+1)\right]_{1}^{2} = \frac{4}{3}$

26

1. $\int_{e}^{e^2}(\frac{(lnx)^2}{x}dx = \left[\frac{1}{3}(lnx)^3\right]_{e}^{e^2} = \frac{7}{3}$
2. $\int_{e}^{e^2}\frac{dx}{xlnx} = [\ln(lnx)]_{e}^{e^2} = \ln 2$
3. $\int_{0}^{e^{-1}}(\frac{\ln(x+1)}{x+1}dx = \left[\frac{1}{2}ln^2(x+1)\right]_{0}^{e^{-1}} = \frac{1}{2}ln^2(e^{-1}+1)$

27

1.$\int_{-5}^{4}dx = [x]_{-5}^{4} = 9$

2.$\int_e^{e^2} xe^{1-x^2}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{1-x^2}\right]_e^{e^2} = \frac{1}{2}(e^{1-e^2} - e^{1-e^4})$

28

1. $\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+1} = \frac{a(x^2+1)-x(bx+c)}{x(x^2+1)}$
   $= \frac{(a-b)x^2-cx+a}{x(x^2+1)}$

$\frac{(a-b)x^2-cx+a}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x(x^2+1)} \Leftrightarrow a = 1, b = 1 \ et \ c = 0$

2. $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x(x^2+1)}dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1}(\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1})dx$
   $= \left[\ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$
   $= \frac{1}{2}\ln 2 - \ln(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}\ln(\frac{5}{4})$
   $= \frac{1}{2}\ln 2 + \ln(2) + \frac{1}{2}\ln(\frac{4}{5}) = \frac{5}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln(5)$

29

Soit A l'aire en unité d'aire de la partie en question

A= $\int_{-2}^{1}(-x+2)dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-2}^{1} = \frac{15}{2}$

30

Soit B l'aire en unité d'aire de la partie en question

B= $\int_{-2}^{2}\frac{3}{x+3}dx = [3\ln(x+3)]_{-2}^{2} = 3\ln 5$

31

- ✓ $\int_2^4 \frac{5}{3t-4}dt = \left[\frac{5}{3}\ln(3t-4)\right]_2^4 = \frac{5}{3}\ln 4$
- ✓ $\int_{-3}^{-1} xe^{(2x^2-1)}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}e^{(2x^2-1)}\right]_{-3}^{-1} = \frac{1}{4}(e - e^{17})$
- ✓ $\int_2^3 \frac{4t+6}{t^2+3t-4}dt = \int_2^3 \frac{2(2t+3)}{t^2+3t-4}dt = [2\ln(t^2+3t-4)]_2^3 = 2\ln(\frac{7}{3})$
- ✓ $\int_0^2(2x+1+e^x)\mathrm{d}x = [x^2+x+e^x]_0^2 = 5+e^2$.

32

Soit A l'aire en unité d'aire de la partie en question

A= $\int_0^2(4x-1+x^2)dx = \left[2x^2 - x + \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{26}{3}$

33

Soit B l'aire en unité d'aire de la partie en question

B= $\int_0^2(4-\frac{e^x}{5})dx = \left[4x - \frac{1}{5}e^x\right]_0^2 = 8 - \frac{e^2}{5}$

34

A=$\int_1^5(f(x)-g(x))dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-2}^{1} = \frac{15}{2}$

A= $\int_1^5(-0{,}5x^2+2{,}5x+1{,}5)dx=\left[\frac{0{,}5}{3}x^3+\frac{2{,}5}{2}x^2+1{,}5x\right]_1^5=\frac{46}{3}$

Exercices d'approfondissement

35*

Etudions le signe de x^2-2x-3

1.Soit Δ le discriminant de x^2-2x-3

Δ = 16 , $x_1=-1$ *et* $x_2=3$

Pour tout nombre réel x de]-∞ ;-1[∪]3 ;+∞[,$x^2-2x-3>0$ et pour tout nombre réel x de]-1 ;3[;$x^2-2x-3<0$ d'où :

Sur]-∞ ;-1[*et sur*]3 ;+∞[(C) est au-dessus de l'axe des abscisses,

Sur]-1 ;3[(C) est au-dessous de l'axe des abscisses et (C) et l'axe des abscisses se coupent aux points d'abscisses -1 et 3.

2.Soit B l'aire en cm² d'aire de la partie en question

B=$\left[\int_{-2}^{-1}f(x)dx-\int_{-1}^{3}f(x)dx\right]$ ×0,5cm²

$\int_{-2}^{-1}f(x)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2-3x\right]_{-2}^{-1}$

$\int_{-2}^{-1}f(x)dx=\frac{7}{3}$

$$\int_{-1}^{3}f(x)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2-3x\right]_{-1}^{3}$$

$$\int_{-1}^{3}f(x)dx=-\frac{32}{3}$$

B = $\left(\frac{7}{3}-\frac{32}{3}\right)$ ×0,5cm²=6,5cm²

36

1.$x-2+\frac{4}{x+2}=\frac{x^2-4+4}{x+2}=\frac{x^2}{x+2}$d'où pour tout x ∈IR\ {2}, f(x)= $x-2+\frac{4}{x+2}$

2. $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(x-2)\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x-2}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-2)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x-2}=0$

d'où la droite (D) :y=x-2 est asymptote à (C).

3.Soit A l'aire de la partie en question

A= $4cm^2\times\int_0^1\frac{4}{x+2}dx$=$16cm^2\times[\ln(x+2)]_0^1$= $16\ln(\frac{3}{2})\ cm^2$

37

1. $ax+b+\frac{c}{x-2}=\frac{(ax+b)(x-2)+c}{x-2}$

$=\frac{ax^2+(b-2a)x+c-2b}{x-2}$

$$=f(x)\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b-2a=-3\\ c-2b=-4\end{cases}$$

On a : a=2, b=5 et c=6

2. $\int_4^7 f(x)dx=\int_4^7(2x+5+\frac{6}{x-2})dx=[x^2+5x+6\ln(x-2)]_4^7$ =48+ln($\frac{5}{2}$)

38

1.Pour tout nombre réel $x$de]0 ;+∞[, f(x)-g(x)= $\frac{4}{x^2}$ >0 d'où (Cf) est au-dessus de (Cg) sur]0 ;+∞[.

2. Soit A l'aire en unité d'aire de la partie en question

A= $\int_1^5(f(x)-g(x))dx$ = = $-4\left[\frac{1}{x}\right]_1^5=\frac{16}{5}$

3. a) $\int_1^t \frac{4}{x^2}dx = -4\left[\frac{1}{x}\right]_1^t$

A(t)= 4 -$\frac{4}{t}$

b) $\lim_{t\to+\infty} A(t) = 4$

39

1. Pour tout nombre réel x de IR\{1}, $2x + 1 + \frac{1}{x-1} = \frac{(x-1)(2x+1)+1}{x-1} = \frac{2x^2-x}{x-1}$ d'où pour tout nombre réel x de IR\{1},$f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x-1}$.
2. On en déduit qu'une primitive de la fonction f sur]1 ;+∞[est la fonction : $x \longmapsto x^2 + x\ln(x-1)$.

40*

F(x)= (2x-1)e^x

1. F'(x)= 2e^x+(2x-1)e^x=(2x+1)e^x
2. L'ensemble solution de l'inéquation 2x+1<0 est]-∞ ; -$\frac{1}{2}$[
3. Soit $\mathcal{A}$ l'aire en question

[-2 ;-1]⊂]-∞ ; -$\frac{1}{2}$[et pour tout nombre réel x de]-∞ ; -$\frac{1}{2}$[, 2x+1<0 d'où :

$\mathcal{A}=\int_{-2}^{-1} -(2x+1)e^x dx = [-F(x)]_{-2}^{-1} = \frac{3e-5}{e^2}$.

41

1. F(x)= -$\frac{4}{3}x^3+12x^2 - 32x$

   F'(x) =-41x^2 + 24x -32 = $f(x)$ d'où F est une primitive de f.
2. Soit A cette aire

A=$\int_2^3 f(x)dx$ = F(3)- F(2) = $\frac{8}{3}$

42*

1. ax+b + $\frac{c}{x-2} + \frac{d}{(x-2)^2} = \frac{(ax+b)(x-2)^2+c(x-2)+d}{(x-2)^2} = \frac{ax^3+(b-4a)x^2+(4a-4b+c)x+4b-2c+d}{(x-2)^2}$

g(x) = ax+b +$\frac{c}{x-2} + \frac{d}{(x-2)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - 4a = -2 \\ 4a - 4b + c = -2 \\ 4b - 2c + d = 1 \end{cases}$

On en déduit que a= 1,b= 2, c=2 et d=-3

2. g(x)$-f(x)$ =x+2+ $\frac{2}{x-2}$

Soit A l'aire en unité d'aire de la partie en question

A= $\int_3^4 (x + 2 + \frac{2}{x-2})dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2\ln(x-2)\right]_3^4 = \frac{11}{2}$ +2ln2

43

$f(x)$=$e^{2x} - 2x - 1$, g(x)=(x+1)$e^{2x} + x - 1$ et F(x)=$\frac{1}{2}e^{2x}(x - \frac{1}{2})$.

1. F'(x)=xe^{2x}
2. Soit $\mathcal{A}$ l'aire en question

g(x)$-f(x)$=xe^{2x}+3x

$\mathcal{A}=\left|\int_{-2}^{0}(g(x) - f(x))dx\right|$

$\int_{-2}^{0}(g(x) - f(x))dx=\int_{-2}^{0}(xe^{2x} + 3x)dx=\left[F(x) + \frac{3}{2}x^2\right]_{-2}^{0} = \frac{5e^{-4}-25}{4} < 0$ d'où : $\mathcal{A}= \frac{25-5e^{-4}}{4}$

44*

1. $\int_{-225}^{225} f(x)dx = \left[187x - 50(\frac{1}{0{,}005}e^{0{,}005x} - \frac{1}{0{,}005}e^{-0{,}005x})\right]_{-225}^{225}$
   $= [187x + 10^4(e^{-0{,}005x} - e^{0{,}005x})]_{-225}^{225}$
   $= 84150 + 2 \times 10^4(e^{-1{,}125} - e^{1{,}125}) \approx 29038{,}71$
2. Calculons l'aire X du rectangle ABCD
   X= AB× CB
   On a : $\overrightarrow{AB}\binom{450}{0}$ et $\overrightarrow{BC}\binom{0}{78{,}25}$ d'où : X= 450 ×78,25 =35212,5

Soit A l'aire en unité d'aire de la partie grisée.

A= X$-\int_{-225}^{225} f(x)dx \approx 6173{,}79$

45

1. Soit ε l'estimation en 2013

$\varepsilon = f(13)$=17280$e^{0{,}0024\times13}$=17827,6347

2. $f'(x) = 17280\times0{,}0024\times e^{0{,}0024x} > 0$ pour tout nombre réel x . d'où f est strictement croissante sur [11 ;+∞[.

3.a) Soit la fonction F telle que : $F(x) = \frac{17280}{0{,}0024}e^{0{,}0024x} = 72.10^5e^{0{,}0024x}$; F est une primitive de f.

b) I= $\int_{11}^{25} f(x)dx$ = F(25)- F(11)= $72.10^5(e^{0{,}06} - e^{0{,}0264})$

Une valeur arrondie à l'unité près est 252612

Situation complexe

46*

Soit $\mathcal{A}$ l'aire du terrain

$\mathcal{A} = \int_0^5 (\frac{x^2}{2} - 2x + 4)dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - x^2 + 4x\right]_0^5 = \frac{95}{6} \approx 15{,}83$

L'inquiétude de ces élèves n'est pas fondée parce que $\mathcal{A}$ >15m²