

COLLECTION PYRAMIDE



Guide du Professeur

Mon livre de MATHÉMATIQUES

1^{re}
C

Tome 2

CORRIGÉS DES EXERCICES



JD Editions
L'Édition autrement

- Découverte des habiletés
- Des questions d'évaluation
- Mes séances d'exercices

COLLECTION PYRAMIDE



Guide du Professeur

Mon livre de Mathématiques

1^{re}
C

Tome 2

CORRIGÉS DES EXERCICES

- Découverte des habiletés
- Des questions d'évaluation
- Mes séances d'exercices

JD Éditions
21 B.P. 3636 Abidjan 21
Côte d'Ivoire

SOMMAIRE

	Pages
Leçon 1 : Équations et inéquations du second degré dans \mathbb{R}	5
Leçon 2 : Barycentre	24
Leçon 3 : Angles orientés et trigonométrie	46
Leçon 4 : Composées de transformations du plan	98
Leçon 5 : Orthogonalité dans l'espace	125
Leçon 6 : Systèmes d'équations linéaires dans \mathbb{R}^2 et dans \mathbb{R}^3	132
Leçon 7 : Géométrie analytique du plan	147
Leçon 8 : Vecteurs de l'espace	162

*Ce document pourrait contenir des erreurs au fautes de frappes.
Prière les signaler à l'adresse : kyoussouphou@gmail.com*

I - SITUATION D'APPRENTISSAGE

En vue de faire plaisir à leur petit frère Honoré à l'occasion de son anniversaire, Juliette et Simon décident de peindre les murs de sa chambre. S'ils travaillaient ensemble, ils mettraient 36 min pour finir le travail. En travaillant seul, Simon aurait besoin d'une demi-heure de plus que Juliette pour accomplir cette même tâche.

Simon voudrait connaître le temps qu'il lui faudrait pour repeindre le mur en travaillant seul. Pour cela, il sollicite ses camarades de classe pour l'aider en se référant aux équations et inéquations dans \mathbb{R} .

Constituants de la situation	Exemples de questions possibles	Réponses possibles des élèves
Contexte	Où et quand se déroule la scène ?	l'occasion de son anniversaire de leur petit frère Honoré
Circonstances	Quel est le problème auquel Juliette et Simon sont confrontés ?	Juliette et Simon décident de peindre les murs de sa chambre. S'ils travaillaient ensemble, ils mettraient 36 min pour finir le travail. En travaillant seul, Simon aurait besoin d'une demi-heure de plus que Juliette pour accomplir cette même tâche. Simon voudrait connaître le temps qu'il lui faudrait pour repeindre le mur en travaillant seul
Tâche	Qu'est-ce que ses camarades de classe se proposent de faire ?	Pour cela, il sollicite ses camarades de classe pour l'aider en se référant aux équations et inéquations dans \mathbb{R}

II- DECOUVERTE DES HABILETES

Activité 1 :

- L'objectif de cette activité est d'introduire le discriminant d'un polynôme du second degré.
- Réponses aux questions de l'activité.

$$a) p(x) = (x-2)^2 - 25 ; \quad b) p(x) = (x-7)^2 + 4 ; \quad c) p(x) = -9(x+1)^2 - \frac{16}{9} ; \quad d) p(x) = 4(x-\frac{3}{2})^2$$

$$2- p(x) = ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] \quad \text{or} \quad x^2 + \frac{b}{a}x = (x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2$$

$$= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} \right]$$

$$= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

Exercice de fixation

1.

a) Vrai ; b) Faux ; c) Faux ; d) Vrai.

Activité 2

- L'objectif de cette activité est de déterminer les zéros d'un polynôme du second degré et de résoudre une équation du second degré ;
- Réponses aux questions de l'activité.

1- $P_1(x)$: $\Delta = 100$ $P_2(x)$: $\Delta = -36$ $P_3(x)$: $\Delta = 0$ $P_4(x)$: $\Delta = -12$

$P_5(x)$: $\Delta = 0$ $P_6(x)$: $\Delta = 144$.

2- $P_1(x) = -2x^2 - 6x + 8$; $P_1(x) = -2 \left[\left(x + \frac{3}{2} \right)^2 - \left(\frac{5}{2} \right)^2 \right]$ identité remarquable

$P_1(x) = -2(x-1)(x+4)$

$P_2(x) = 9x^2 - 18x + 10 = 9 \left[\left(x - 1 \right)^2 + \frac{36}{324} \right]$ (n' est pas factorisable)

$P_3(x) = -3x^2 - 12x - 12 = -3(x+2)^2$; $P_4(x) = -[(x+2)^2 + 3]$ (n'est pas factorisable)

$P_5(x) = 6(x-5)^2$; $P_6(x) = (x-3)(x+9)$

3- a)

Polynômes	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$	$p_4(x)$	$p_5(x)$	$p_6(x)$
Signes de Δ	+	-	0	-	0	+
Forme factorisée (si possible)	$-2(x-1)(x+4)$	non factorisable	$-3(x+2)^2$	Non factorisable	$6(x-5)^2$	$(x-3)(x+9)$

b) On conjecture que : si $\Delta < 0$ P n'est pas factorisable ; si $\Delta > 0$ P est factorisable et si $\Delta = 0$ P est factorisable

4- a) $P(x)$ est factorisable au cas où $\Delta > 0$ et au cas où $\Delta = 0$

b) au cas où $\Delta > 0$ $P(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \right] = a \left(x + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a} \right)$

5. a) $p_1(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -4$; $p_2(x) = 0$, $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$ $p_3(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$;
 $p_4(x) = 0$, $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$; $p_5(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$; $p_6(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -9$

b) Si où $\Delta > 0$, $x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Si $\Delta = 0$, $x = \frac{-b}{2a}$

Si $\Delta < 0$, $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

Exercice de fixation

2.

1. On a : $\Delta = 17^2 - 4 \times 5 \times 6 = 169 = 13^2$

Donc : $x_1 = \frac{17-13}{2 \times 5} = \frac{2}{5}$ et $x_2 = \frac{17+13}{2 \times 5} = 3$

2. D'où : pour tout nombre réel x , $P(x) = 5 \left(x - \frac{2}{5}\right) (x - 3)$

3. a) On a : $P(x) = a(x + 5)(x - 3)$ et $P(-1) = 64$

Par calcul, on a : $a = -4$. Donc : pour tout nombre réel x , $P(x) = -4(x + 5)(x - 3)$.

b) On a : $P(x) = a \left(x - \frac{2}{3}\right)^2$ et $P(0) = 1$.

Par calcul, on a : $a = \frac{9}{4}$. Donc : pour tout nombre réel x , $P(x) = \frac{9}{4} \left(x - \frac{2}{3}\right)^2$.

3.

1.

a) On a : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times (-1) \times 5 > 0$, il y a deux solutions distinctes

b) On a : $\Delta = (2)^2 - 4 \times (-8) \times \left(-\frac{1}{4}\right) < 0$, pas de zéro

c) $(-4\sqrt{3})^2 - 4 \times 2 \times 6 = 0$, un zéro double.

2. la solution est : $-\frac{q}{2p}$; b) les solutions sont : $\frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2p}$ et $\frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2p}$.

3.

a) Les solutions sont : $-\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$; b) La solution est $\frac{1}{9}$; c) Aucune solution

Activité 3

- L'objectif de cette activité est de déterminer le signe d'un polynôme du second degré ;
- Réponses aux questions de l'activité.

1)

Courbe	1	2	3	4	5	6
Signe de a	+	-	+	-	+	-
Signe de Δ	+	+	0	0	-	-

2) Si $\Delta > 0$ le polynôme a le signe de a à l'extérieur des racines et le signe contraire de a à l'intérieur des racines.

Si $\Delta = 0$ le polynôme a le signe de a sauf en x_0 où il s'annule.

Si $\Delta < 0$ le polynôme a le signe de a

Exercice de fixation

4.

1. Faux ; 2. Faux ; 3. Faux ; 4. Vrai.

Activité 4

- L'objectif de cette activité est la résolution d'une inéquation du second degré dans \mathbb{R} ;
- Réponses aux questions de l'activité.

1.

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

2.

$\forall x \in]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[, P(x) \leq 0$

Exercice de fixation

5.

a) $S_{\mathbb{R}} =]-\infty; -3] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$; b) $S_{\mathbb{R}} =]-3; 1[$; c) $S_{\mathbb{R}} = \left] -\infty; -\frac{3}{4} \right] \cup [1; +\infty[$

Activité 5

- L'objectif de cette activité est connaître l'expression de la somme et celle du produit de zéros éventuels d'une équation du second degré ;
- Réponses aux questions de l'activité

1. : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

2. $x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$ b) $x_1 \times x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b-\sqrt{\Delta})(-b+\sqrt{\Delta})}{4a^2}$
 $= \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2}$
 $= \frac{c}{a}$

Exercice de fixation

6.

1- a) $x_1 + x_2 = -\frac{\pi}{m}$ et $x_1 x_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{m}$; b) $x_1 + x_2 = -\frac{\cos \theta}{\sqrt{2}}$ et $x_1 x_2 = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

2- a) $x^2 + 3x - 3 = 0$; b) $x^2 - (\sqrt{3} - 2\sqrt{2})x - 2\sqrt{6} = 0$

3. a) $S = \frac{4}{5}$ et $P = \frac{-3}{5}$; b) $S = 2$ et $P = \frac{-1}{3}$

Activité 6

- L'objectif de cette activité est la détermination de deux nombres connaissant leur somme et leur produit ;
- Réponses aux questions de l'activité.

1- $x + y = S$ et $x \cdot y = P$ on a $y = S - x$ et $x(S - x) = P$ on développe et on a $X^2 - SX + P = 0$

(On pourra écrire $x = S - y$ et avoir la même équation) donc x et y sont solutions de l'équation du second degré: $X^2 - SX + P = 0$.

2- Le discriminant de cette équation est $S^2 - 4P$. Donc lorsque ces deux nombres existent, on a : $S^2 - 4P \geq 0$

Exercice de fixation

7.

En désignant par L et l la longueur et la largeur, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} L + l = 13 \\ Ll = 80 \end{cases}$$

Ces deux dimensions sont solutions de l'équation : $x^2 - 13x + 40 = 0$

On résout cette équation et on trouve comme solutions 8 et 5.

Conclusion : ce terrain a pour longueur 8 m et pour largeur 5 m.

8.

Ces deux nombres s'ils existent sont solutions de l'équation : $x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{8} = 0$

Ainsi ces nombres sont $\frac{3}{4}$ et $-\frac{1}{2}$

DES QUESTIONS D'ÉVALUATION

Question 1 Comment résoudre une équation irrationnelle du type $\sqrt{P(x)} = Q(x)$?

Exercice non corrigé

Résolution de l'équation (E).

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ x^2 + 1 = (2x - 1)^2 \end{cases}; \quad (E) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 3x^2 - 4x = 0 \end{cases}$$

On résout et on obtient comme $\frac{4}{3}$

Conclusion : la solution de l'équation est $\frac{4}{3}$.

Question 2 Comment résoudre l'inéquation irrationnelle du type $\sqrt{P(x)} \leq Q(x)$?

Exercice non corrigé

Résolution de l'inéquation (I).

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2 \geq 0 \\ 3 - x \geq 0 \\ 4(2x + 2) \leq (3 - x)^2 \end{cases}; \quad (I) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 14x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

On résout et on obtient comme ensemble de solutions l'intervalle $[-1; -7 + 4\sqrt{3}]$

Conclusion : l'inéquation (I) a pour ensemble de solutions : $[-1; -7 + 4\sqrt{3}]$

Question3 : Comment résoudre une équation du type $ax^4 + bx^2 + c = 0$?

Exercice non corrigé

Résolution de l'équation (E).

Posons : $X = x^2$

$$(E) \Leftrightarrow 4X^2 - 20X + 25 = 0; \quad (E) \Leftrightarrow (2X - 5)^2 = 0$$

$$(E) \Leftrightarrow (2x^2 - 5)^2 = 0; \quad (E) \Leftrightarrow 2x^2 - 5 = 0$$

Conclusion : $S = \left\{ -\frac{\sqrt{10}}{2}; \frac{\sqrt{10}}{2} \right\}$

Question 4 : Comment déterminer deux nombres connaissant leur somme et leur produit ?

Exercice non corrigé

a) $S^2 - 4P = \frac{81}{400}$, $S^2 - 4P > 0$ donc on résout l'équation : $x^2 + \frac{1}{20}x - \frac{1}{20} = 0$

les deux nombres sont $\frac{1}{5}$ et $-\frac{1}{4}$

b) $S^2 - 4P = -12$, $S^2 - 4P < 0$ donc ces deux nombres n'existent pas.

MES SEANCES D'EXERCICES

Exercices de fixation

Exercice 1

1- c; 2- b

Exercice 2

1-V; 2-V; 3-F; 4-F

Exercice 3

1- F; 2-F; 3-V

Exercice 4

1 - a ; 2 - a ; 3 - b.

Exercice 5

1 - a ; 2 - a et c

Exercice 6

1 - V ; 2 - F ; 3 - V

Exercice 7

a) $S = -2$ et $P = -\frac{1}{3}$ b) $S = \sqrt{2} - \sqrt{3}$ et $P = -\sqrt{6}$; c) $S = \frac{-a}{a^2+1}$ et $P = \frac{-1}{a^2+1}$

Exercice 8

1 - c ; 2 - d

Exercice 9

$\Delta < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f(x)$	Signe de a	

$\Delta = 0$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
Signe de $f(x)$	signe de a	o	Signe de a

$\Delta > 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
Signe de $f(x)$	signe de a	o	signe de -a	o	Signe de a

Exercice 10

Courbe 1 : $a < 0$; $\Delta < 0$ le tableau de signe est

x	$-\infty$	$+\infty$
P(x)	-	

Courbe 2 : $a > 0$; $\Delta > 0$ le tableau de signe est

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
P(x)	+	0	-	0	+

Courbe 3 : $a > 0$; $\Delta = 0$ le tableau de signe est

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$P(x)$	$+$	0	$+$

Exercice 11

1) $f(x) = a(x-u)(x-v)$; 2) $f(x) = a(x-r)^2$

Exercice 12

1) $f(x) = 3(x+6)(x-2)$; 2) $f(x) = -2(x+7)^2$; 3) $f(x) = 5\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{8}{7}\right)$

Exercice 13

$f(x) = (3x+5)(x-1)$; $g(x) = (0,01x + 0,85)(x-5)$; $h(x) = (-2x + 2\sqrt{3})(x + \sqrt{3})$
 $k(x)$ n'est pas factorisable.

Exercice 14

$f(x) = \frac{1}{3}(x+3)(x-6)$; $g(x) = \frac{1}{3}(x-1+\sqrt{7})(x-1-\sqrt{7})$

$h(x) = -2\left(x - \frac{\sqrt{2} + \sqrt{10}}{4}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2} - \sqrt{10}}{4}\right)$; $k(x) = \frac{4}{9}\left(x - \frac{9}{4}\right)^2$

Exercice 15

Le tableau de signe de $f_1(x)$ est

x	$-\infty$	$-0,5$	4	$+\infty$	
$f_1(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Ainsi le signe de $f_1(x)$ est $\forall x \in]-\infty; -0,5[\cup]4; +\infty[, f_1(x) > 0$

$$\forall x \in]-0,5; 4[, f_1(x) < 0$$

$$\forall x \in \{-0,5; 4\} , f_1(x) = 0$$

De même $\forall x \in \mathbb{R}, f_2(x) > 0$;

$$\forall x \in]-\infty; -\frac{5}{2}[\cup]1; +\infty[, f_3(x) < 0$$

$$\forall x \in]-\frac{5}{2}; 1[, f_3(x) > 0$$

$$\forall x \in \left\{-\frac{5}{2}; 1\right\} , f_3(x) = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_4(x) < 0$$

$$\forall x \in]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[, f_5(x) < 0 \text{ et } f_5(1) = 0$$

Exercice 16

- 1) $\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) > 0$; 2) $\forall x \in [-1; 1], f_2(x) > 0$; 3) $\forall x \in \left[-\frac{3}{10}; \frac{3}{10}\right], f_3(x) < 0$
4) $\forall x \in [2; 5], f_4(x) > 0$; 5) $\forall x \in [0; +\infty[, f_5(x) < 0$
6) $\forall x \in [0; 1[, f_6(x) < 0$ et $\forall x \in]1; 3[, f_6(x) > 0$ et $f_6(1) = 0$

Exercice 17

- 1) $x_1 = -\frac{1}{3}$ et $x_1 + x_2 = \frac{1}{6}$ donc $x_2 = \frac{1}{2}$
2) $x_1 = -\sqrt{3}$ et $x_1 \cdot x_2 = -\sqrt{6}$ donc $x_2 = \sqrt{2}$
3) $x_1 = a$ et $x_1 \cdot x_2 = -2a^2$ donc $x_2 = -2a$

Exercice 18

a) $S^2 - 4P = 16$ donc $(u; v)$ est solution de l'équation $X^2 - 2X - 3 = 0$ ainsi $(u; v) = (-1; 3)$ ou $(u; v) = (3; -1)$

b) $S^2 - 4P = -23$ donc le système n'a pas de solution.

c)
$$\begin{cases} u - v = 6 \\ uv = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + (-v) = 6 \\ u \cdot (-v) = -16 \end{cases} \text{ ainsi } u = 8 \text{ et } v = 2$$

Exercice 19

$L = \text{longueur et } l = \text{largeur on a : } \begin{cases} 2(L + l) = 60 \\ L \cdot l = 221 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L + l = 30 \\ L \cdot l = 221 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L = 17 \\ l = 13 \end{cases}$

Exercice 20

a) l'équation $x^2 + x - 132 = 0$ a pour solution $S_{\mathbb{R}} = \{11; 12\}$

b) $x^2 + x\sqrt{3} + 4 = 0$, $\Delta = -13$ donc il n'y a pas de solution

c) $x^2\sqrt{2} - 3x + \sqrt{2} = 0$, $\Delta = 1$ donc $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right\}$;

d) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 1 = 0$, $\Delta = \frac{1}{4}$ donc $S_{\mathbb{R}} = \{-2; -1\}$;

e) $35x^2 - 26x - 48 = 0$, $\Delta = 7396$ donc $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{6}{7}; \frac{8}{5}\right\}$.

Exercice 21

a) $x + 2x^2 + 1 = 0$, $\Delta = -7$ pas de solution ; b) $x^2 - x = 1$, $\Delta = 5$ donc $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

c) $x(8-x) + 1 = 0$, $\Delta = 68$ donc $S_{\mathbb{R}} = \{4 - \sqrt{17}; 4 + \sqrt{17}\}$.

Exercice 22

- a) $x^2 - 2x - 24 > 0$ $\Delta = 100$; $x_1 = -4$; $x_2 = 6$ $S_{\mathbb{R}} =]-\infty; -4[\cup]6; +\infty[$;
b) $x^2 - 3x - 1 \leq 0$ $S_{\mathbb{R}} = \left[\frac{3-\sqrt{13}}{2}; \frac{3+\sqrt{13}}{2} \right]$; c) $S_{\mathbb{R}} =]-\infty; 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}[\cup]2 + \frac{2\sqrt{3}}{2}; +\infty[$;
d) $5x^2 + 1 < 3x$; $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$
e) $-x^2 \geq x + 1$ $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$
f) $x^2\sqrt{7} + 6x - \sqrt{7} \geq 0$. $S_{\mathbb{R}} =]-\infty; \frac{-6-2\sqrt{2}}{2\sqrt{7}}] \cup \left[\frac{-6+2\sqrt{2}}{2\sqrt{7}}; +\infty[$

Exercice 23

Résolvons l'inéquation $x \geq x^2$. ce qui équivaut à $x(x-1) \leq 0$ et la solution est $[0; 1]$

Exercice 24

- 1- a) (C_f) a deux points d'intersection avec l'axe des abscisses, qui sont les points d'abscisses -1 et $\frac{1}{2}$, donc : $S_{\mathbb{R}} = \{-1; \frac{1}{2}\}$.
b) (C_g) a deux points d'intersection avec l'axe des abscisses, qui sont le point O et le point d'abscisse 1, donc : $S_{\mathbb{R}} = \{0; 1\}$
a) (C_h) ne coupe pas l'axe des abscisses, donc : $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$.
2-a) (C_f) est situé au-dessous de l'axe des abscisses sur $]1; \frac{1}{2}[$, donc $S_{\mathbb{R}} =]1; \frac{1}{2}[$,
b) (C_g) est situé au-dessus de l'axe des abscisses sur $]0; 1[$, donc $S_{\mathbb{R}} =]0; 1[$.
c) (C_h) est au-dessus de (C_g) sur $[2; +\infty[$, d'où : $S_{\mathbb{R}} = [2; +\infty[$.

Exercice 25

$$a) \sqrt{x+1} = x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \text{ (I}_1\text{)} \\ x+2 \geq 0 \text{ (I}_2\text{)} \\ x+1 = (x+2)^2 \text{ (E)} \end{cases} \quad I_2 \text{ et } I_2 \Leftrightarrow x \in [-1; +\infty]$$

(E) n'a pas de solution donc $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

$$b) \sqrt{x+1} = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \text{ (I}_1\text{)} \\ \frac{1}{2}x \geq 0 \text{ (I}_2\text{)} \\ x+1 = (\frac{1}{2}x)^2 \text{ (E)} \end{cases} \quad ; I_2 \text{ et } I_2 \Leftrightarrow x \in [0; +\infty]$$

appelons E_v l'intervalle $[0; +\infty[$. les solutions de (E) sont $2 + 2\sqrt{2} \in E_v$ et $2 - 2\sqrt{2}$ qui n'appartient pas à E_v donc $S_{\mathbb{R}} = \{2 + 2\sqrt{2}\}$;

$$c) \sqrt{x^2+9} = 1-x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+9 \geq 0 \text{ (I}_1\text{)} \\ 1-x \geq 0 \text{ (I}_2\text{)} \\ x^2+9 = (1-x)^2 \text{ (E)} \end{cases} \quad ; I_2 \text{ et } I_2 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 1]; \text{ (E) a pour}$$

solution $-4 \in E_v$ donc $S_{\mathbb{R}} = \{-4\}$;

$$d) \sqrt{x^2-2x-3} = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-3 \geq 0 \text{ (I}_1\text{)} \\ x+1 \geq 0 \text{ (I}_2\text{)} \\ x^2-2x-3 = (x+1)^2 \text{ (E)} \end{cases} \quad I_2 \text{ et } I_2 \Leftrightarrow x \in \{-1\} \cup [3; +\infty[$$

(E) a pour solution $-1 \in E_V$ donc $S_{\mathbb{R}} = \{-1\}$

e) $\sqrt{x^2 - 2x} = 3 + x$ de même $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{9}{8}\right\}$

Exercice 26

a) $\sqrt{x^2 - 2x} \leq 3 + x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \ (I_1) \\ 3 + x \geq 0 \ (I_2) \\ x^2 - 2x \leq (3 + x)^2 \ (I_3) \end{cases} \quad I_2 \text{ et } I_3 \Leftrightarrow x \in [-3, 0] \cup$

$[2; +\infty[; \quad I_3 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{9}{8}; +\infty\right[\quad \text{ainsi } S_{\mathbb{R}} = \left[-\frac{9}{8}; 0\right] \cup [2; +\infty[; \quad ;$

b) $\sqrt{-x^2 + 3x + 4} \leq \frac{1}{2}x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 3x + 4 \geq 0 \ (I_1) \\ \frac{1}{2}x + 2 \geq 0 \ (I_2) \\ -x^2 + 3x + 4 \leq \left(\frac{1}{2}x + 2\right)^2 \ (I_3) \end{cases} \quad I_2 \text{ et } I_3 \Leftrightarrow$

$x \in [-1, 4]; \quad I_3 \Leftrightarrow x \in [-\infty; 0] \cup \left[\frac{4}{5}; +\infty\right[\quad \text{ainsi } S_{\mathbb{R}} = [-1; 0] \cup \left[\frac{4}{5}; 4\right]; \quad ;$

c) $\sqrt{5x + 6} \leq x + 2$; on obtient $S_{\mathbb{R}} = [-1; 2]$

d) $\sqrt{9 - x} \leq x - 3$ on obtient $S_{\mathbb{R}} = [3; 9]$.

Exercice 27

a) $4x^4 - 9x^2 + 2 = 0$; on pose $X = x^2$ et on a $X^2 - 9X + 2 = 0$ on résoud et on a $X = 2$ ou $X = \frac{1}{4}$ et donc $x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\frac{1}{2}$ ou $x = \frac{1}{2}$ $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\sqrt{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \sqrt{2}\right\}$

b) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ $S_{\mathbb{R}} = \{-1; 1\}$;

c) $x^2 + \sqrt{3} + \frac{6}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^4 + \sqrt{3}x^2 + 6 = 0$; on pose $X = x^2$ et on a $X^2 + \sqrt{3}X + 6 = 0$

cette équation n'a pas de solution donc $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

d) $\frac{1}{5}x + 2\sqrt{x} - 5 = 0$ on pose $X = \sqrt{x}$ et on a $\frac{1}{5}X^2 + 2X - 5 = 0$ on obtient $S_{\mathbb{R}} = \{(5\sqrt{2} - 5)^2\}$

Exercices de renforcement / Approfondissement

Exercice 28

1) $3x^2 - 5x - 12 = 14x + 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 19x - 14 = 0$ cette équation a pour solution $-\frac{2}{3}$; 7

2) En remplaçant ces valeurs dans l'équation de la droite on obtient les coordonnées des points d'intersection comme suit $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{34}{3}\right)$ et $(7; 36)$

Exercice 29

1- $12x - 3 > 25x^2 - 8x - 142 \Leftrightarrow 25x^2 - 20x - 139 < 0$ inéquation qui a pour solution $]-1,99; 2,79[$

2-Sur l'intervalle $]-\infty; -1,99[\cup]2,79; +\infty[$ la courbe est au dessus de la droite et sur l'intervalle $]-1,99; 2,79[$ la courbe est au dessous de la droite . La courbe et la droite se coupent aux points d'abscisses $x_1 = -1,99$ et $x_2 = 2,79$

Exercice 30

1) $a < 0$ et $f(0) = c = -10$

2) Le sommet est atteint en $x = -\frac{b}{2a} = -3$ d'où $b = 6a$ et $\Delta = 36a^2 + 40a$; la forme canonique est $f(x) = a \left[(x+3)^2 - \frac{9a+10}{a} \right]$

3) $f(x) = ax^2 + 6ax - 10$

4) $f(-3) = -5 \Leftrightarrow a = -\frac{5}{3}$; $b = 6a = -10$

Exercice 31

a) $\begin{cases} \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{5}{2} \\ uv = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{u+v}{uv} = \frac{5}{2} \\ uv = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u+v = -\frac{5}{3} \\ uv = -\frac{2}{3} \end{cases}$

la résolution de ce système donne pour solution $u = -\frac{1}{3}$ et $v = 2$ ou $u = 2$ et $v = -\frac{1}{3}$

b) $\begin{cases} \frac{1}{u} - \frac{1}{v} = -\frac{26}{5} \\ uv = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{v-u}{uv} = -\frac{26}{5} \\ uv = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u-v = -\frac{26}{5} \\ uv = -1 \end{cases}$
En posant $v' = -v$ le système devient $\begin{cases} u+v' = -\frac{26}{5} \\ uv' = 1 \end{cases}$

La résolution de ce système donne $u = -5$ et $v = \frac{1}{5}$ ou $u = -\frac{1}{5}$ et $v = 5$

c) $\begin{cases} u^2 + v^2 = 25 \\ uv = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 25 \\ u^2 v^2 = 144 \end{cases}$

En posant $u' = u^2$ et $v' = v^2$ le système devient $\begin{cases} u' + v' = 25 \\ u'v' = 144 \end{cases} \Rightarrow \Delta = 25^2 - 4 \times 144 = 49$ donc $u' = 9$ et $v' = 16$ ou $u' = 16$ et $v' = 9$

puisque $u' = u^2$ et $v' = v^2$ on a $u = 4$ et $v = 3$ ou $u = -4$ et $v = -3$ ou $u = 3$ et $v = 4$ ou $u = -3$ et $v = -4$.

Donc $S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(4;3), (-4;-3), (3;4), (-3;-4)\}$

d) $\begin{cases} u^3 + v^3 = 19 \\ uv = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = 19 \\ u^3 v^3 = -6^3 \end{cases}$

En posant $u' = u^3$ et $v' = v^3$ le système devient : $\begin{cases} u' + v' = 19 \\ u'v' = -6^3 \end{cases}$ donc $\Delta = 19^2 - 4 \times (-6^3) = 35^2$

On a donc $u' = -8$ et $v' = 27$ ou $u' = 27$ et $v' = -8$ d'où puisque $u' = u^3$ et $v' = v^3$ on a : $u = -2$ et $v = 3$ ou $u = 3$ et $v = -2$ donc $S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(-2;3), (3;-2)\}$

Exercice 32

$$(3-x)(x^2 - 5x + 6) > 0$$

$$(3-x)(x^2 - 5x + 6) = (3-x)(x-2)(x-3) = -(x-3)^2(x-2)$$

Or quelque soit le réel x , $(x-3)^2 > 0$ donc le signe du polynôme dépend de $2-x$

Ainsi $\forall x \in]-\infty; 2[$, $2-x > 0$ donc $S_{\mathbb{R}} =]-\infty; 2[$.

a) $(2x^2 - 7x)(-x^2 - 1) \geq 0$.

Or pour tout nombre réel x , $(x^2 + 1) > 0$ donc le signe de $(2x^2 - 7x)(-x^2 - 1)$ est celui de $(7x - 2x^2)$. Or $7x - 2x^2 = x(7 - 2x)$

Donc pour tout réel $x \in]-\infty ; 0] \cup [3,5 ; +\infty[$, $x(7 - 2x) \leq 0$;

pour tout réel $x \in [0 ; 3,5]$, $x(7 - 2x) \geq 0$

on en déduit que $S_{\mathbb{R}} = [0 ; 3,5]$

c) $(4 - x^2)(3x^2 + 8x - 3) < 0$.

Posons $P(x) = 3x^2 + 8x - 3$. $\Delta = 8^2 - 4 \times 3 \times (-3) = 100$ donc $P(x) = (x + 3)(3x - 1)$

x	$-\infty$	-3	-2	$\frac{1}{3}$	2	$+\infty$
$4 - x^2$	-	-	+	+	-	
$3x^2 + 8x - 3$	+	-	-	+	+	
$(4 - x^2)(3x^2 + 8x - 3)$	-	+	-	+	-	

On déduit de ce tableau que $S_{\mathbb{R}} =]-\infty ; -3[\cup]-2 ; \frac{1}{3}[\cup]2 ; +\infty[$

Exercice 33

$2x^4 - 7x^2 + 6 \leq 0$

Posons $X = x^2$ l'inéquation devient $2X^2 - 7X + 6 \leq 0$. $\Delta = 7^2 - 4 \times 2 \times 6 = 49 - 48 = 1$

On obtient donc $2X^2 - 7X + 6 = (2X - 3)(X - 2)$ puisque $X = x^2$ alors on a :

$2X^2 - 7X + 6 = (\sqrt{2}x - \sqrt{3})(\sqrt{2}x + \sqrt{3})(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	$-\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$2x^2 - 3$	+	-	-	+	+	
$x^2 - 2$	+	+	-	-	+	
$(2x^2 - 3)(x^2 - 2)$	+	-	+	-	+	

D'après le tableau ci-dessus on a : $S_{\mathbb{R}} =]-\infty ; -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}] \cup [-\sqrt{2} ; \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}] \cup \sqrt{2} ; +\infty[$

b) $-x^4 - x^2 + 12 > 0$

Posons $X = x^2$ donc $-X^2 - X + 12 = -(X + 4)(X - 3) = -(x^2 + 4)(x^2 - 3)$

D'où $-x^4 - x^2 + 12 = (x^2 + 4)(3 - x^2)$ on en déduit que $S_{\mathbb{R}} =]-\sqrt{3} ; \sqrt{3}[$.

c) $2x^2 - 7x^4 < 0$.

$2x^2 - 7x^4 = x^2(2 - 7x^2)$ donc $S_{\mathbb{R}} =]-\infty ; -\sqrt{\frac{2}{7}}] \cup]\sqrt{\frac{2}{7}} ; +\infty[$

Exercice 34

1- Déterminons les réels a , b et c tel que $P(x) = (x^2 - 1)(ax^2 + bx + c)$.

$P(x) = (x^2 - 1)(-3x^2 - 1)$ donc $a = -3$, $b = 0$, $c = -1$.

NB : On pourra utiliser la méthode des coefficients indéterminés ou faire une division euclidienne.

2- Les zéros de P

$P(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$ donc $x = 1$ ou $x = -1$. Ainsi les zéros de P sont -1 et 1.

Exercice 35

a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 3x^2 + 2x - 8 \geq 0\}$

$$3x^2 + 2x - 8 = (3x - 4)(x + 2) \text{ donc } D_f =]-\infty; -2] \cup \left[\frac{4}{3}; +\infty[$$

b) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2(x-1)^2 + x}}$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / 2(x-1)^2 + x > 0\} \text{ or } 2(x-1)^2 + x = 2x^2 - 3x + 2$$

$$\text{Or } \Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 2 = -7 \text{ donc pour tout nombre réel } x, 2x^2 - 3x + 2 > 0.$$

$$Dg = \mathbb{R}.$$

c) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{2(x-1)^2 - x}}$

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} / 2(x-1)^2 - x > 0\} \text{ or } 2(x-1)^2 - x = 2x^2 - 5x + 2$$

$$\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times 2 = 25 - 16 = 9$$

$$x_1 = \frac{5+3}{4} = 2 \text{ et } x_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}. \text{ Donc } D_h =]-\infty; \frac{1}{2}[\cup]2; +\infty[$$

Exercice 36

Je détermine le réel m pour que (C_f) et (D) :

1- aient exactement un point d'intersection

Il s'agit ici de résoudre l'équation $x^2 + x + 1 = 3x + m \Rightarrow x^2 - 2x + 1 - m = 0$

$\Delta = 4 - 4(1 - m) = 4m$. (C_f) et (D) ont exactement un point d'intersection si $\Delta = 0$ c'est-à-dire $m = 0$.

On a ainsi $x_0 = -1$ et $y_0 = -3$. Le point d'intersection de (C_f) et (D) est le point $\Omega(-1; -3)$

2- aient exactement deux points d'intersection

(C_f) et (D) ont exactement deux points d'intersection si $\Delta > 0$, c'est-à-dire $m > 0$. Dans ces

conditions on a : $x_1 = \frac{2 - \sqrt{4m}}{2} = 1 - \sqrt{m}$ ou $x_2 = 1 + \sqrt{m}$ avec $m > 0$.

Ainsi pour $x = 1 - \sqrt{m}$ on a $y = 3 - 3\sqrt{m} + m$ et pour $x = 1 + \sqrt{m}$ on a
 $y = 3 + 3\sqrt{m} + m$

Donc $(C_f) \cap (D) = \{A(1 - \sqrt{m}; 3 - 3\sqrt{m} + m), B(1 + \sqrt{m}; 3 + 3\sqrt{m} + m)\}$ avec $m > 0$.

3- n'aient aucun point d'intersection.

S'il n'y a aucun point d'intersection alors $\Delta < 0$, c'est-à-dire $m < 0$

Exercice 37

1- Factorisation de $x^4 - 6x^2 + 9$.

$$x^4 - 6x^2 + 9 = (x^2 - 3)^2$$

2- Je détermine l'ensemble I_1 .

$$x^2 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -\sqrt{3}] \cup \sqrt{3}; +\infty[\text{ donc } I_1 =]-\infty; -\sqrt{3}] \cup \sqrt{3}; +\infty[$$

Je détermine l'ensemble I_2

$$x^2 - 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}] \text{ donc } I_2 = [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$$

3- Expression simplifiée de f

- Sur I_1

$$f(x) = \sqrt{x^4 - 6x^2 + 9} = \sqrt{(x^2 - 3)^2} = x^2 - 3 \text{ pour } x \in I_1$$

- Sur I_2

$$f(x) = \sqrt{x^4 - 6x^2 + 9} = \sqrt{(x^2 - 3)^2} = 3 - x^2 \text{ pour } x \in I_2$$

Exercice 38

1- Ensemble de validité de (E).

$$E_v = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

2- Calcul de X^2

$$X^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2x \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$$

3- On sait que $X = x + \frac{1}{x}$ et que $X^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$. Or $x^2 + x - 4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$ donc

on déduit que $x^2 + x - 4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = X^2 - 2 + X - 4 = X^2 + X - 6$ d'où :

$$x^2 + x - 4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow X^2 + X - 6 = 0 \text{ avec } X = x + \frac{1}{x}$$

4- Résolution de l'équation $X^2 + X - 6 = 0$

$X^2 + X - 6 = (X - 2)(X + 3)$ donc les solutions de l'équation $X^2 + X - 6 = 0$ sont 2 et -3.

Solutions de l'équation (E).

$$X = 2 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \text{ donc } x = 1$$

$$X = -3 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = -3 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Donc } S_{\mathbb{R}} = \left\{1; \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right\}$$

Exercice 39

1- Pour $x^2 + x + 1 = 0$ on a : $\Delta = 1 - 4 = -3$ donc $\Delta < 0$ ainsi $D_f = \mathbb{R}$.

2- Nombre de points d'intersection de (C) et la droite d'équation $y = 1$.

Il suffit pour cela de résoudre l'équation $\frac{1 - 2x^2}{x^2 + x + 1} = 1 \Leftrightarrow 1 - 2x^2 = x^2 + x + 1$

$$3x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(3x + 1) = 0$$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -\frac{1}{3}$ donc (C) et la droite d'équation $y = 1$ ont deux points

d'intersection d'abscisses respectives 0 et $-\frac{1}{3}$.

3- Je démontre que le numérateur est majoré par 1 sur \mathbb{R} .

On sait que pour tout réel x , $-2x^2 \leq 0$ donc $1 - 2x^2 \leq 1$. On dit que $1 - 2x^2$ est majoré par 1

On sait que $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ donc

$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ d'où $x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4}$ donc le dénominateur est minoré par $\frac{3}{4}$.

4- Majoration de f sur \mathbb{R} .

On sait que pour tout réel x , $1 - 2x^2 \leq 1$ (1) et $x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4}$ donc $\frac{1 - 2x^2}{x^2 + x + 1} \leq \frac{4}{3}$ (2)

Des relations (1) et (2) on déduit que $\frac{1 - 2x^2}{x^2 + x + 1} \leq \frac{4}{3} \Rightarrow f(x) \leq \frac{4}{3}$ donc f est majoré par $\frac{4}{3}$ sur \mathbb{R} .

Exercice 40

- 1- N étant le symétrique de M par rapport à A, alors on a : $x_N = 2x_A - x_M$ et $y_N = 2y_A - y_M$.
Si $x_M = 13$ alors $x_N = -3$ or $-3 \notin \text{Dg}$ donc N n'est pas un point de (C) si $x_M = 13$.
- 2- Je démontre que dans le cas où N appartient à la courbe (C) les abscisses de M et N vérifient l'équation $x^2 - 10x - 37 = 0$.

Soit x l'abscisse du point M. Alors M étant un point de (C), on a : $y_M = \frac{1}{x+3} + 4$

N étant le symétrique de M par rapport à A on a : $x_N = 2x_A - x$ et $y_N = 2y_A - y_M$
Sachant que N est un point de la courbe (C) on a :

$y_N = \frac{1}{x_N+3} + 4$ or $x_N = 2 \times x_A - x = 2 \times 5 - x$ donc $x_N = 10 - x$ et on en déduit que

$y_N = \frac{1}{13-x} + 4$. De la relation $y_N = 2y_A - y_M$ on déduit que

$\frac{1}{13-x} + 4 = 2 \times 8 - \left(\frac{1}{x+3} + 4\right) \Leftrightarrow \frac{1}{13-x} = 8 - \frac{1}{x+3}$ de cette égalité on obtient

l'équation suivante $x^2 - 10x - 37 = 0$.

- 1- Je résous cette équation et j'en déduis les coordonnées de M et N.

Soit à résoudre l'équation $x^2 - 10x - 37 = 0$.

$$\Delta = 10^2 - 4 \times (-37) = 248$$

$$x_1 = \frac{10 - 2\sqrt{62}}{2} = 5 - \sqrt{62} \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{10 + 2\sqrt{62}}{2} = 5 + \sqrt{62}$$

Pour $x_M = 5 - \sqrt{62}$ on a $y_M = \frac{1}{8 - \sqrt{62}} + 4$ et

$$x_N = 2x_A - x_M = 10 - (5 - \sqrt{62}) = 5 + \sqrt{62} \text{ et } y_N = 2y_A - y_M = 16 - \left(\frac{1}{8 - \sqrt{62}} + 4 \right) = 12 - \frac{1}{8 - \sqrt{62}}$$

Pour $x_M = 5 + \sqrt{62}$ on a $y_M = \frac{1}{8 + \sqrt{62}} + 4$ et

$$x_N = 2x_A - x_M = 10 - (5 + \sqrt{62}) = 5 - \sqrt{62} \text{ et } y_N = 2y_A - y_M = 16 - \left(\frac{1}{8 + \sqrt{62}} + 4 \right) = 12 - \frac{1}{8 + \sqrt{62}}$$

SITUATIONS COMPLEXES

Exercice 41

L'aire A de la rizière est : $A = x^2 + (50 - x)(30 - x)$ donc $A = 2x^2 - 80x + 1500$. A est une fonction polynôme du second degré avec $a = 2 > 0$. La fonction A possède un minimum

$$\text{atteint en } x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-80}{4} = 20$$

Donc l'aire minimale de la rizière est $A(20) = 2(20)^2 - 80 \times 20 + 1500 = 700$

D'où l'aire minimale de la rizière est 700 m^2 .

Exercice 42

soit A l'aire de la nouveau terrain et x la longueur diminuée

on a :

$$A = (40 - x)(25 - x)$$

$$A = 672,75 \Leftrightarrow (40 - x)(25 - x) = 672,75 \Leftrightarrow x^2 - 65x + 327,25 = 0$$

On obtient $x = \frac{119}{2} = 59,5$ ou $x = \frac{11}{2} = 5,5$

$$\text{or } x < 40 \text{ donc } x = \frac{11}{2}$$

ainsi la longueur du nouveau terrain est $34,5 \text{ m}$ et la largeur est $19,5 \text{ m}$

Exercice 43

Soit q le taux d'intérêt

le capital de départ est $500\,000$

le 10 octobre 2020, il reçoit $500\,000 + 500\,000 \times \frac{q}{100}$ soit $500\,000 \times \left(1 + \frac{q}{100}\right)$

le 10 octobre 2021, il reçoit $500\,000 \times \left(1 + \frac{q}{100}\right) + 500\,000 \times \left(1 + \frac{q}{100}\right) \times \frac{q}{100}$

soit $500\,000 \times \left(1 + \frac{q}{100}\right)^2$ or la somme reçue le 10 octobre 2021 est $561\,800$

on a donc

$$500\,000 \times \left(1 + \frac{q}{100}\right)^2 = 561\,800$$

$$\left(1 + \frac{q}{100}\right)^2 = 1,1236$$

$$1 + \frac{q}{100} = 1,06$$

$$q = 6$$

ainsi le taux d'intérêt chaque année est 6% .

Situation d'apprentissage

Constituants de la situation	Exemples de questions possibles	Réponses possibles des élèves
Contexte	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Où se déroule la scène ? ✓ De quoi s'agit-il ? 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Dans une localité ✓ délimiter « les eaux territoriales » de trois propriétaires.
Circonstances	Pour quelles raisons le propriétaire P ₁ sollicite son fils ?	« leurs eaux territoriales » soient proportionnelles aux aires des parcelles adjacentes, avoir une équité dans le partage.
Tâche	Que doit faire l'élève pour répondre à la sollicitation ?	déterminer la position de la bouée dans le lac

ACTIVITES DE DECOUVERTE

Activité 1

1-a) $m_A GA = m_B GB$ de plus $GA + GB = AB$ donc $m_A GA = m_B (AB - GA)$

$$(m_A + m_B)GA = m_B \times AB \text{ d'où } GA = \frac{m_B}{m_A + m_B} \times AB$$

a) On obtient de même $GB = \frac{m_A}{m_A + m_B} \times AB$

2-a)

m_A	m_B	GA	GB	\overrightarrow{GA}	\overrightarrow{GB}	$m_A \overrightarrow{GA} + m_B \overrightarrow{GB}$
10	10	0.5	0.5	$-0.5\vec{i}$	$0,5\vec{i}$	$\vec{0}$
5	10	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}\vec{i}$	$\frac{1}{3}\vec{i}$	$\vec{0}$
15	5	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}\vec{i}$	$-\frac{3}{4}\vec{i}$	$\vec{0}$
10	30	0.75	0,25	$0,75\vec{i}$	$-0,25\vec{i}$	$\vec{0}$

b)

On constate que lorsque l'équilibre est réalisé au point G, on a : $m_A \overrightarrow{GA} + m_B \overrightarrow{GB} = \vec{0}$

Exercice de fixation 1

- 1) Vrai ; 2) Faux ; 3) Faux ; 4) Vrai ; 5) Vrai.

Exercice de fixation 2

1. $G = \text{bar}\{(A, 2); (B, 6)\}$; 2. $G = \text{bar}\{(A, -2); (B, 1)\}$; 3. $G = \text{bar}\{(A, -8); (B, 7)\}$

Exercice de fixation 3

1. $2 - 5 = -3$ et $-3 \neq 0$ donc le barycentre existe.
2. $-\frac{3}{4} + \frac{4}{3} = \frac{7}{12}$ et $\frac{7}{12} \neq 0$ donc le barycentre existe.
3. $-\frac{\sqrt{2}}{4} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{4} - 1 = 0$ donc le barycentre n'existe pas.
4. $m - \frac{1}{2}$; donc si $m \neq \frac{1}{2}$ le barycentre existe et si $m = \frac{1}{2}$ le barycentre n'existe pas.
5. $-2m - \frac{m}{2} = -\frac{5m}{2}$ donc si $m \neq 0$ le barycentre existe et si $m = 0$ le barycentre n'existe pas.
6. $m^2 - 4m + 1 = (m - \sqrt{3} - 2)(m + \sqrt{3} - 2)$ donc si $m \neq \sqrt{3} + 2$ et $m \neq -\sqrt{3} + 2$ le barycentre existe et si $m = \sqrt{3} + 2$ et $m = -\sqrt{3} + 2$ le barycentre n'existe pas.

Activité 2

1. a) $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = \alpha \overrightarrow{MG} + \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{MG} + \beta \overrightarrow{GB} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{MG} + \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{MG}$
b) $G = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ donc $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ d'où $(\alpha + \beta) \overrightarrow{GA} = -\beta \overrightarrow{AB}$
par suite $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB}$
de même $\overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \overrightarrow{BA}$
c) $G = \text{mil}[AB]$ donc $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$
 $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{MG}$
2. $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = \beta \overrightarrow{AB}$

Exercice de fixation 4

1. $2\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} = (2 + 5)\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GB} = 7\overrightarrow{MG}$ où $G = \text{bar}\{(A, 2); (B, 5)\}$
2. $-2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$
3. $\frac{2}{3}\overrightarrow{MA} + \frac{4}{3}\overrightarrow{MB} = (\frac{2}{3} + \frac{4}{3})\overrightarrow{MG} + \frac{2}{3}\overrightarrow{GA} + \frac{4}{3}\overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{MG}$ où $G = \text{bar}\{(A, \frac{2}{3}); (B, \frac{4}{3})\}$
4. $\sqrt{2}\overrightarrow{MA} - \sqrt{2}\overrightarrow{MB} = \sqrt{2}\overrightarrow{MA} - \sqrt{2}\overrightarrow{MA} - \sqrt{2}\overrightarrow{AB} = -\sqrt{2}\overrightarrow{AB}$

Exercice de fixation 5

- a) $\overrightarrow{AG} = \frac{-2}{1-2} \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{1-2} \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB}$
b) $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{3+5} \overrightarrow{AB} = \frac{5}{8} \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BG} = \frac{3}{3+5} \overrightarrow{BA} = -\frac{3}{8} \overrightarrow{AB}$

c) $\sqrt{4} - 2 = 0$ donc pas de barycentre

d) $\overrightarrow{AG} = \frac{-3}{-3} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$ donc $G = B$ et $\overrightarrow{BG} = \frac{0}{0-3} \overrightarrow{BA} = 0 \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ donc $G = B$

Activité 3

1. $G = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ donc $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \overrightarrow{AB}$ d'où G appartient à la droite (AB)

2.a) M appartient à la droite (AB) donc les vecteurs \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{AB} sont colinéaires d'où il existe un nombre réel k tel que : $\overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AB}$.

b) $\overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (k-1)\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

or $k-1-k = -1$ et $-1 \neq 0$ donc $M = \text{bar}\{(A, k-1); (B, -k)\}$

Exercice de fixation 6

On a : $1 - m + m = 1$, et $1 \neq 0$ donc le point G existe pour tout nombre réel m et $\overrightarrow{AG} = m\overrightarrow{AB}$.

Or le point G appartient à la droite (AB) , s'il existe un nombre réel k tel que

Ici $k = m$, donc le point G appartient à la droite (AB) quand m décrit \mathbb{R} .

Activité 4

a) G le barycentre de (A, α) et (B, β) signifie que

$\alpha \overrightarrow{AG} + \beta \overrightarrow{BG} = \vec{0} \Rightarrow k(\alpha \overrightarrow{AG} + \beta \overrightarrow{BG}) = k \times \vec{0}$ donc $k \times \alpha \overrightarrow{AG} + k \times \beta \overrightarrow{BG} = \vec{0}$ on en déduit que G est le barycentre de $(A, k \times \alpha)$ et $(B, k \times \beta)$.

b) Le barycentre des points pondérés ne change pas si on multiplie les coefficients par un même nombre réel non nul.

c) Soit G le barycentre de (A, k) et (B, k) avec k un réel non nul. $\frac{1}{k}$ est un réel non nul et d'après

l'homogénéité du barycentre, G est aussi barycentre de $\left(A, \frac{1}{k} \times k\right)$ et $\left(B, \frac{1}{k} \times k\right)$ c'est-à-dire G

est barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 1)$.

Exercice de fixation 7

a) Faux ; b) Vrai ; c) Faux ; d) Vrai.

Activité 5

$\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{AG} = \beta \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma} \overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma} \overrightarrow{AC}$

Exercice de fixation 8

1. Vrai ; 2. Vrai ; 3. Faux ; 4. Vrai

Exercice de fixation 9

1. B

2. C dans la colonne C remplacer $4 \overrightarrow{OM}$ par $4 \overrightarrow{MO}$

Activité 6

1. On a $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ donc

$$\begin{aligned}\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} &= \alpha \overrightarrow{MG} + \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{MG} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{MG} + \gamma \overrightarrow{GC} \\ &= (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MG} + \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} \\ &= (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MG}\end{aligned}$$

car $G = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ donc $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

2. On a : $\alpha + \beta + \gamma = 0$ donc

$$\begin{aligned}\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} &= \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{MA} + \gamma \overrightarrow{AC} \\ &= (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC} \\ &= \beta \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

3. On a : $\alpha = \beta = \gamma$ donc

$$\begin{aligned}\alpha \overrightarrow{MA} + \alpha \overrightarrow{MB} + \alpha \overrightarrow{MC} &= \alpha \overrightarrow{MG} + \alpha \overrightarrow{GA} + \alpha \overrightarrow{MG} + \alpha \overrightarrow{GB} + \alpha \overrightarrow{MG} + \alpha \overrightarrow{GC} \\ &= (\alpha + \alpha + \alpha) \overrightarrow{MG} + 3\alpha (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) \\ &= 3\alpha \overrightarrow{MG}\end{aligned}$$

Exercice de fixation 10

1. Vrai ; 2. Faux ; 3. Vrai ; 4. Faux

Activité 7

1. On a $\alpha + \beta \neq 0$ donc

$$\begin{aligned}a MA^2 + b MB^2 &= a (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + b (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 \\ &= (a + b) MG^2 + \overrightarrow{MG} \cdot (a \overrightarrow{GA} + b \overrightarrow{GB}) + a GA^2 + b GB^2 \\ &= (a + b) MG^2 + a GA^2 + b GB^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a MA^2 + b MB^2 = k &\Leftrightarrow (a + b) MG^2 + a GA^2 + b GB^2 = k \\ &\Leftrightarrow MG^2 = \frac{k - (a GA^2 + b GB^2)}{a + b} \text{ posons } \rho = \frac{k - (a GA^2 + b GB^2)}{a + b} \\ &\Leftrightarrow MG^2 = \rho\end{aligned}$$

2. $MG^2 = \rho$

Si $\rho < 0$, alors (E_k) est l'ensemble vide.

Si $\rho = 0$, alors (E_k) est le point.

Si $\rho > 0$, alors (E_k) est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{\rho}$.

Exercice de fixation 11

Soit $G = \text{bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$

$$MA^2 + 2 MB^2 = 4 \Leftrightarrow (1 + 2) MG^2 + GA^2 + 2 GB^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow MG^2 = \frac{4 - (GA^2 + 2 GB^2)}{3}$$

On a : $G = \text{bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$ donc $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BA}$ d'où

$$GA^2 = \frac{4}{9} AB^2 \text{ et } GB^2 = \frac{1}{9} AB^2$$

$$\text{ainsi } MG^2 = \frac{4 - \left(\frac{4}{9} AB^2 + \frac{2}{9} AB^2\right)}{3} = \frac{4 - \frac{2}{3} AB^2}{3} = \frac{4}{3} - \frac{2}{9} AB^2$$

Si $AB < \sqrt{6}$, alors (E) est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{\frac{4}{3} - \frac{2}{9} AB^2}$.

Si $AB = \sqrt{6}$, alors (E) est le point.

Si $AB > \sqrt{6}$, alors (E) est l'ensemble vide.

Activité 8

1. $\frac{MA}{MB} = 1 \Leftrightarrow MA = MB$

donc (E_1) est la médiatrice du segment $[AB]$

2. $\frac{MA}{MB} = k \Leftrightarrow MA^2 = k^2 MB^2$

$$\Leftrightarrow MA^2 - k^2 MB^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + k \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - k \overrightarrow{MB}) = 0$$

Soit $I = \text{bar}\{(A, 1); (B, k)\}$ et $J = \text{bar}\{(A, 1); (B, -k)\}$

$$\frac{MA}{MB} = k \Leftrightarrow (1 + k) (1 - k) \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$$

donc (E_k) est le cercle de diamètre $[IJ]$

Exercice de fixation 12

$$\frac{MA}{MB} = 3 \Leftrightarrow MA^2 = 9 MB^2$$

$$\Leftrightarrow MA^2 - 9 MB^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + 3 \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - 3 \overrightarrow{MB}) = 0$$

Soit $I = \text{bar}\{(A, 1); (B, 3)\}$ et $J = \text{bar}\{(A, 1); (B, -3)\}$

$$\frac{MA}{MB} = 3 \Leftrightarrow (1 + 3) (1 - 3) \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$$

donc (E) est le cercle de diamètre $[IJ]$

Activité 9

1.a) G le barycentre de (A, α) , (B, β) et (C, γ) signifie que

$$\alpha \overrightarrow{AG} + \beta \overrightarrow{BG} + \gamma \overrightarrow{CG} = \vec{0} \Rightarrow k(\alpha \overrightarrow{AG} + \beta \overrightarrow{BG} + \gamma \overrightarrow{CG}) = k \times \vec{0} \text{ donc}$$

$k \times \alpha \overrightarrow{AG} + k \times \beta \overrightarrow{BG} + k \times \gamma \overrightarrow{CG} = \vec{0}$ on en déduit que G est le barycentre de

$(A, k \times \alpha)$, $(B, k \times \beta)$ et $(C, k \times \gamma)$.

b) Le barycentre des points pondérés ne change pas si on multiplie les coefficients par un même nombre réel non nul.

2. Soit G le barycentre de (A, α) , (B, β) et (C, α) avec α un réel non nul. $\frac{1}{\alpha}$ est un réel non nul et d'après l'homogénéité du barycentre, G est aussi barycentre de $(A, \frac{1}{\alpha} \times \alpha)$; $(B, \frac{1}{\alpha} \times \alpha)$ et $(C, \frac{1}{\alpha} \times \alpha)$ c'est-à-dire G est barycentre de $(A, 1)$; $(B, 1)$ et $(C, 1)$.

Exercice de fixation 13

1. Vrai ; 2. Vrai ; 3. Faux ; 4. Vrai

Activité 10

Soit $G = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ donc $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

ou $H = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ donc $\alpha\overrightarrow{HA} + \beta\overrightarrow{HB} = \vec{0}$

$$\begin{aligned} \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0} &\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{GH} + \alpha\overrightarrow{HA} + \beta\overrightarrow{GH} + \beta\overrightarrow{HB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow (\alpha + \beta)\overrightarrow{GH} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0} \end{aligned}$$

Comme $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, donc $G = \text{bar}\{(H, \alpha + \beta); (C, \gamma)\}$

Exercice de fixation 14

Soit $G = \text{bar}\{(A, 5); (B, 3); (C, 2)\}$ donc $5\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

ou $K = \text{bar}\{(B, 3); (C, 2)\}$ donc $3\overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$

$$\begin{aligned} 5\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0} &\Leftrightarrow 5\overrightarrow{GA} + (2 + 3)\overrightarrow{GK} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow 5\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GK} = \vec{0} \end{aligned}$$

Comme $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, donc $G = \text{bar}\{(A, 5); (K, 5)\}$

G est donc le milieu de $[AK]$

Activité 11

1.

a) R est le barycentre de $(P, 5)$ et $(Q, -2)$ signifie que $5\overrightarrow{RP} - 2\overrightarrow{RQ} = \vec{0}$

b) Coordonnées de R .

$$5\overrightarrow{RP} - 2\overrightarrow{RQ} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OR} = \frac{5\overrightarrow{OP} - 2\overrightarrow{OQ}}{3}$$

$$\text{c) } \Rightarrow \begin{cases} x_R = \frac{5x_P - 2x_Q}{3} = -3 \\ y_R = \frac{5y_P - 2y_Q}{3} = \frac{25}{3} \end{cases}$$

2. a) Soit $G = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ donc $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$
 b) $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{GO} + \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{GO} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{GO} + \gamma\overrightarrow{OC} = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{GO} + \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{GO} = \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma}(\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC})$
 c) ainsi G a pour coordonnées $(\frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma}; \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}; \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma})$

Exercice de fixation 15

a) On a : $x_G = \frac{3x_A - x_B}{3-1} = \frac{1}{2}(-6 - 4) = -5$ et $y_G = \frac{3y_A - y_B}{3-1} = \frac{1}{2}(9 - 4) = \frac{5}{2}$

Donc : $G(-5; \frac{5}{2})$

On a : $x_D = \frac{-3x_A + 2x_B + 5x_C}{-3+2+5} = \frac{1}{4}(6 + 8 + 30) = 11$

$y_D = \frac{-3y_A + 2y_B + 5y_C}{-3+2+5} = \frac{1}{4}(9 + 8 + 5) = \frac{11}{2}$

Donc : $D(11; \frac{11}{2})$

DES QUESTIONS D'ÉVALUATION

Question 1 : Comment construire le barycentre G de deux points pondérés (A, α) , (B, β) (avec $\alpha + \beta \neq 0$) ?

Exercice non résolu

- On a : $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$. On utilise la propriété de Thalès dans le triangle pour placer le point H sur la droite (AB) .
- En appliquant l'homogénéité du barycentre, on a : $G = \text{bar}\{(A, 3); (B, -1)\}$

Donc, on a : $\overrightarrow{AG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. On place le point G sur la droite (AB) .

Question 2 : Comment construire le barycentre G de trois points pondérés (A, α) , (B, β) , (C, γ) (avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$) ?

Exercice non résolu

a) Soit $G_1 = \text{bar}\{(A, 1); (C, 1)\}$, donc, on a : $\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

D'où d'après l'associativité du barycentre, on a : $M = \text{bar}\{(B, 2), (G_1, 2)\}$.

Ainsi le point M est le milieu du segment $[BG_1]$. On réalise une figure pour placer le point M .

b) Soit $G_2 = \text{bar}\{(A, -1); (B, -1)\}$, donc, on a : $\overrightarrow{AG_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
 G_2 est le milieu du segment $[AB]$

D'où d'après l'associativité du barycentre, on a : $N = \text{bar}\{(C, 1), (G_2, 2)\}$.

$\overrightarrow{CN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG_2}$. On réalise une figure pour placer le point N.

Question 3 : Comment démontrer que trois points sont alignés ?

Exercice non résolu

On a : $I = \text{bar}\{(A, 1); (B, 1)\} = \text{bar}\{(A, \alpha + \beta); (A, \alpha + \beta)\}$

$I = \text{bar}\{(A, \alpha); (A, \beta); (B, \alpha); (B, \beta)\} = \text{bar}\{(G_1, \alpha + \beta); (G_2, \alpha + \beta)\}$

Donc le point I est isobarycentre des points G_1 et G_2 .

Conclusion : les points G_1 et G_2 sont symétriques par rapport au point I.

Question 4 : Comment démontrer que des droites sont concourantes ?

Exercice non résolu

1) On a :

- $I = \text{bar}\{(A, 1); (B, 1)\} = \text{bar}\{(A, 2); (B, 2)\}$
- $J = \text{bar}\{(A, 2); (C, 1)\}$
- $K = \text{bar}\{(B, 2); (C, 1)\}$

Posons : $G = \text{bar}\{(A, 2); (B, 2); (C, 1)\}$

En appliquant l'associativité du barycentre partiel, on a successivement :

- $G = \text{bar}\{(I, 4); (C, 1)\}$, donc : $G \in (CI)$
- $G = \text{bar}\{(B, 2); (J, 3)\}$, donc : $G \in (BJ)$
- $G = \text{bar}\{(A, 2); (K, 3)\}$, donc : $G \in (AK)$

Ainsi : $G \in (CI) \cap (BJ) \cap (AK)$.

Conclusion : les droites (CI) , (BJ) et (AK) sont concourantes.

Exercices de fixation

Exercice 1

1. $A = \text{bar}\{(G, 4); (B, -3)\}$
2. $A = \text{bar}\{(G, 1); (B, 1)\}$
3. $A = \text{bar}\{(G, 1); (B, 7)\}$

Exercice 2

1. $G = \text{bar}\{(A, -1); (B, 3)\}$
2. $G = \text{bar}\{(A, 5); (B, -2)\}$
3. $G = \text{bar}\{(A, \sqrt{2}); (B, \sqrt{2})\}$
4. $G = \text{bar}\{(A, \sqrt{2}); (B, -2\sqrt{2})\}$
5. $G = \text{bar}\{(A, -7); (B, 4)\}$
6. $G = \text{bar}\{(A, 1); (B, -1)\}$ pour l'énoncé écrire $\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \vec{0}$

Exercice 3

- 1) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{GB} \Rightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ donc $\alpha = 1$; $\beta = 1$.
- 2) $2\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA}$ donc $\alpha = 3$ et $\beta = -1$.
- 3) $2\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ donc $\alpha = 1$ et $\beta = 1$

Exercice 4

1- D'après la figure, $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

a) A est le barycentre de (B, α), (C, β)

$$\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \Rightarrow 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0} \text{ donc } \alpha = 3 \text{ et } \beta = -2$$

b) B est le barycentre de (A, α), (C, β)

$$3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC} = \vec{0} \text{ donc } \alpha = 1 \text{ et } \beta = 2$$

c) C est le barycentre de (A, α), (B, β)

$$3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Rightarrow 3\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Rightarrow -\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{CB} = \vec{0} \text{ donc } \alpha = -1 \text{ et } \beta = 3$$

2- $\overrightarrow{BA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \Rightarrow 3\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \vec{0}$

a) A est le barycentre de (B, α), (C, β)

$$3\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \vec{0} \Rightarrow 2\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AC} = \vec{0} \Rightarrow 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}, \text{ donc } \alpha = 2 \text{ et } \beta = -1$$

b) B est le barycentre de (A, α), (C, β)

$$3\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \vec{0} \text{ donc } \alpha = 3 \text{ et } \beta = -1$$

c) C est le barycentre de (A, α), (B, β)

$$3\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow 3\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB} = \vec{0} \text{ donc } \alpha = 3 \text{ et } \beta = -2$$

Exercice 5

Selon la figure on a : $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ donc $4\overrightarrow{AG} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

Donc $\alpha = 1$ et $\beta = 3$

Exercice 6

G est le barycentre des points pondérés (A, -3) et (B, -2) donc

$$-3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Rightarrow 5\overrightarrow{BG} - 3\overrightarrow{BA} = \vec{0} \text{ et par conséquent } \alpha = 5.$$

Exercice 7

$$3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = 0 \Rightarrow 5\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0} \text{ donc } \alpha = 5 \text{ et } \beta = -2$$

Exercice 8

1. $1 + 2 = 3$ et $3 \neq 0$ donc il existe un cas tels que : $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MG}$

2. $k = 3$

3. À REFORMULER

Exercice 9

$$1. \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

donc $M = \text{bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$

$$2. -2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow -2\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

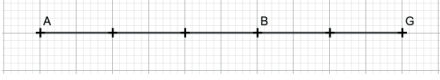
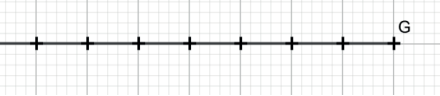

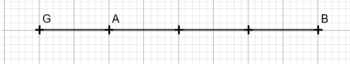
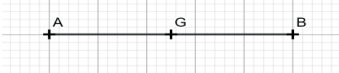
donc $M = \text{bar}\{(A, 3); (B, -1)\}$

$$3. \overrightarrow{MA} = 5\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

donc $M = \text{bar}\{(A, 6); (B, -5)\}$

Exercice 10

1. $G = \text{bar}\{(A, 2); (B, -5)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{5}{3} \overrightarrow{AB}$	
2. $G = \text{bar}\{(A, -9); (B, 16)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{16}{7} \overrightarrow{AB}$	
3. $G = \text{bar}\{(A, 1); (B, 3)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AB}$	
4. à reformuler	
5. $G = \text{bar}\{(A, -4); (B, 1)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$	
6. $G = \text{bar}\{(A, -5); (B, -5)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$	

Exercice 11

1- $3 + 2 = 5 \neq 0$ donc il existe un point G qui est barycentre des points (A,3) et (B,2).

2- G est barycentre des points (A ;3) et (B ;2) donc $3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{5} \overrightarrow{AB}$



Exercice 12

a) $-3 + 5 = 2 \neq 0$ donc il existe un et un seul point G tel que $-3\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ qui n'est autre que le barycentre de (A,-3) et (B,5).

b) $-3\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{2} \overrightarrow{AB}$



Exercice 13

- 1) Soit G le barycentre de (A,4) et (B,-1). Alors on a : $4\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{-1}{3}\overrightarrow{AB}$



- 2) Soit G le barycentre de (A,2) et (B,1), donc on a : $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$



- 3) Soit G le barycentre de (A,2) et (B,-2). Puisque $2 - 2 = 0$ alors le barycentre de (A,2) et (B,-2) n'existe pas.

- 4) Soit G le barycentre de $\left(A, \frac{1}{10}\right)$ et $\left(B, \frac{1}{5}\right)$, donc on a : $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$



Exercice 14

C est le barycentre des points (A,-2) et (B,4) donc $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$.

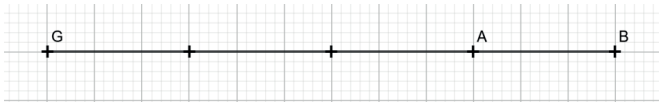
- a) G est le barycentre des points (A,-2) et (C,-5) donc $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{10}{7}\overrightarrow{AB}$

- b) G' est le barycentre des points (B, 4) et (C,-3) donc

$$\overrightarrow{BG'} = -3\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BG'} = -3\overrightarrow{AB} \quad (\text{car } \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB})$$

Exercice 15

1. $\overrightarrow{AG} = -3\overrightarrow{AB}$



2. $\overrightarrow{AG} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$



Exercice 16

M appartient à la droite (AB) donc les vecteurs \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{AB} sont colinéaires d'où il existe un nombre réel k tel que : $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.

- b) $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (k-1)\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

or $k-1-k = -1$ et $-1 \neq 0$ donc $M = \text{bar}\{(A, k-1); (B, -k)\}$

Exercice 17

1. Faux ; 2. Faux 3. Vrai

Exercice 18

On sait que $24 = 3 \times 8$ et $32 = 4 \times 8$ donc G est aussi barycentre de $(A, 24)$ et $(B, 32)$ d'où $G = G'$

Exercice 19

- a) Pour $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{GC}$ on a : $-2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ ainsi
 $G = \text{bar}\{(A, -2); (B, 1); (C, -1)\}$
- b) Pour $2\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ on a : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ ainsi $G = \text{bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, 3)\}$
- c) Pour $\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AC}$ on a : $-5\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ ainsi $G = \{(A, -5); (B, 3); (C, 1)\}$
- d) Pour $3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ on a : $\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + 4\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ ainsi $G = \text{bar}\{(A, 1); (B, -2); (C, 4)\}$

Exercice 20

1- Vrai ; 2 - Vrai ; 3 - Vrai ; 4 - Faux

Exercice 21

- 1- $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ donc $I = \text{bar}\{(B, 3); (C, 1)\}$
De plus G est milieu de $[AI]$ donc $G = \text{bar}\{(I, 1); (A, 1)\} = \text{bar}\{(I, 4); (A, 4)\}$
On en déduit que $G = \text{bar}\{(A, 4); (B, 3); (C, 1)\}$
- 2- $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$ donc $G = \text{bar}\{(A, 2); (I, 1)\}$
 C milieu de $[BI]$ donc $I = \text{bar}\{(C, 2); (B, -1)\}$ on en déduit que
 $G = \text{bar}\{(A, 2); (B, -1); (C, 2)\}$
- 3- $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ donc $J = \text{bar}\{(A, 1); (C, 2)\}$
 K milieu de $[AB]$ donc $K = \text{bar}\{(A, 1); (B, 1)\}$
 $G = \text{bar}\{(A, 2); (B, 1); (C, 2)\}$
- 4- $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ donc $J = \text{bar}\{(A, 2); (C, 1)\}$
 C milieu de $[IB]$ donc $I = \text{bar}\{(B, 1); (C, -2)\}$ donc $G = \text{bar}\{(A, 2); (B, 1); (C, -1)\}$

Exercice 22

- a) Soit (D) l'ensemble des points cherchés.
On a : $G = \text{bar}\{(A, 2); (B, 2); (C, -1)\}$, donc : $2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$
D'où : $2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = (2 + 2 - 1)\overrightarrow{MG} = 3\overrightarrow{MG}$

Ainsi le vecteur $2\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}$ est colinéaire à \vec{AB} s'il existe un nombre k tel que : $2\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC} = k\vec{AB}$, c'est-à-dire $3\vec{MG} = k\vec{AB}$.

Il résulte que (D) est la parallèle à la droite (AB) passant par le point G.

b) $K = \text{bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, 1)\}$, donc : $\vec{KA} + \vec{KB} + \vec{KC} = \vec{0}$

D'où : $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MK}$

$$\|2\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}\| = \|2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\| \Leftrightarrow \|3\vec{MG}\| = \|\vec{AB} + \vec{AC}\|$$

$$\Leftrightarrow 3MG = 2MI \text{ où } I = \text{mil}[BC]$$

$$3MG = 2MI \Leftrightarrow (3\vec{MG} + 2\vec{MI}) \cdot (3\vec{MG} - 2\vec{MI}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\vec{MG}_1 \cdot \vec{MG}_2 = 0 \text{ où } G_1 = \text{bar}\{(G, 3); (I, 2)\} \text{ et } G_2 = \text{bar}\{(G, 3); (I, -2)\}$$

Donc l'ensemble cherché est le cercle de diamètre $[G_1G_2]$.

c) Soit (H) l'ensemble des points cherchés.

$K = \text{bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, 1)\}$, donc : $\vec{KA} + \vec{KB} + \vec{KC} = \vec{0}$

D'où : $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MK}$

$$\|2\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}\| = \|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| \Leftrightarrow \|3\vec{MG}\| = \|3\vec{MK}\|$$

$$\Leftrightarrow MG = MK$$

(H) est donc la médiatrice du segment $[GK]$

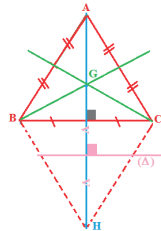
Exercice 23

a) G isobarycentre de A, B et C donc on a : $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$

b) H barycentre de (A,1), (B,-1), (C,-1) donc on a : $\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} = -\vec{MH}$

c) Si pour tout point M du plan $MG = MH$, donc (Δ) est la médiatrice du segment $[GH]$.

d) Représentation graphique de (Δ) .



Exercice 24

1. Vrai ; 2. Vrai ; 3. Vrai ; 4. Faux

Exercice 25

Soit $G = \text{bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$

$$MA^2 + 2 MB^2 = AB \Leftrightarrow (1 + 2) MG^2 + GA^2 + 2 GB^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow MG^2 = \frac{3 - (GA^2 + 2 GB^2)}{3}$$

On a : $G = \text{bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$ donc $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BA}$ d'où

$$GA^2 = \frac{4}{9} AB^2 = 4 \text{ et } GB^2 = \frac{1}{9} AB^2 = 1$$

$$\text{ainsi } MG^2 = \frac{3 - (4 + 2 \times 1)}{3} = \frac{-3}{3} = -1$$

(Γ) est donc l'ensemble vide.

Exercice 26

$$\frac{MA}{MB} = 4 \Leftrightarrow MA^2 = 16 MB^2$$

$$\Leftrightarrow MA^2 - 16 MB^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB}) = 0$$

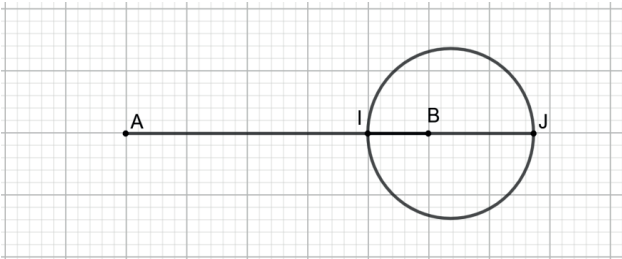
Soit $I = \text{bar}\{(A, 1); (B, 4)\}$ et $J = \text{bar}\{(A, 1); (B, -4)\}$

$$\frac{MA}{MB} = 4 \Leftrightarrow (1 + 4) (1 - 4) \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$$

donc (E) est le cercle de diamètre $[IJ]$

$I = \text{bar}\{(A, 1); (B, 4)\}$ donc $\overrightarrow{AI} = \frac{4}{5} \overrightarrow{AB}$ et $J = \text{bar}\{(A, 1); (B, -4)\}$ donc $\overrightarrow{AJ} = \frac{4}{3} \overrightarrow{AB}$



Exercices de renforcement/ approfondissement

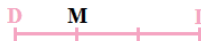
Exercice 27

1- Moyenne pondérée de Annah

$$M = \frac{2 \times 9 + 1 \times 15}{3} = 11, \text{ donc la moyenne pondérée de Annah est } 11/20$$

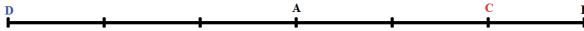
2- M étant la moyenne pondérée de Annah, alors on a : $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{DI}$ donc

3-



Exercice 28

1- Représentation graphique



2- Expression de \overrightarrow{CD} en fonction de \overrightarrow{AB}

$$\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} \text{ donc } \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} \text{ d'où}$$

$$\overrightarrow{CD} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{CD} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$$

3- Position du point M tel que : $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$

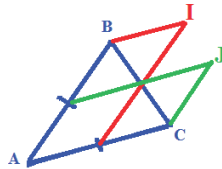
$$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} \text{ soit } G = \text{bar}\{(A,2), (B,1)\} \text{ alors on a :}$$

$$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}(2\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}), \text{ donc la position du point M est}$$

entièrement déterminée par cette relation vectorielle avec $G = \text{bar}\{(A,2), (B,1)\}$.

Exercice 29

1- Construction des points I et J



$$2- \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AI} - \frac{1}{2}\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$. On en déduit que $I = \{(A,1), (B,-2), (C,-1)\}$.

$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AJ} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AJ} - \frac{1}{2}\overrightarrow{JA} - \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{JC} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{JA} - \overrightarrow{JB} - 2\overrightarrow{JC} = \vec{0}$. On en déduit que $J = \{(A,1), (B,-1), (C,-2)\}$

Exercice 30

1- Je démontre que G est le milieu de $[G'A]$.

$G = \{(A,1), (B,1), (C,1)\} = \{(A,1), (I,2)\}$ car I est le milieu de $[BC]$.

Donc on a : $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GI} = \vec{0}$ or $2\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{GG'}$ $\Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GG'} = \vec{0}$ donc G est le milieu de $[G'A]$.

2- Je justifie que $\overrightarrow{G'G} = \overrightarrow{G'B} + \overrightarrow{G'C}$.

On sait que $G = \{(A,1),(B,1),(C,1)\}$ donc $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow 3\overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A} + \overrightarrow{G'B} + \overrightarrow{G'C} = \vec{0}$
 or G est le milieu de $[AG']$ donc $\overrightarrow{AG'} = 2\overrightarrow{GG'}$, d'où $\overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B} + \overrightarrow{G'C} = \vec{0}$ et on en déduit que $\overrightarrow{G'G} = \overrightarrow{G'B} + \overrightarrow{G'C}$.

3- J'exprime $\overrightarrow{G'A}$ en fonction de $\overrightarrow{G'B}$ et $\overrightarrow{G'C}$

On sait que G est le milieu de $[AG']$ donc $\overrightarrow{G'G} = \frac{1}{2}\overrightarrow{G'A}$ et on en déduit que

$\overrightarrow{G'A} = 2\overrightarrow{G'B} + 2\overrightarrow{G'C}$. On déduit de cette relation vectorielle que $\overrightarrow{G'A} - 2\overrightarrow{G'B} - 2\overrightarrow{G'C} = \vec{0}$ donc $G' = \text{bar}\{(A,1),(B,-2),(C,-2)\}$.

Exercice 31

1- Je justifie que I est le barycentre de $(A,-1)$, $(A',4)$.

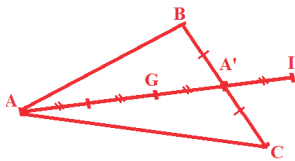
A' est le milieu de $[BC]$ donc $A' = \text{bar}\{(B,1); (C,1)\} = \text{bar}\{(B,2); (C,2)\}$

I est le barycentre de $(A,-1)$, $(B,2)$, $(C,2)$ donc par application de la propriété de l'associativité des barycentres on a : $I = \text{bar}\{(A,-1); (A',4)\}$.

2 - a) J'exprime $\overrightarrow{A'I}$ en fonction de $\overrightarrow{A'A}$

$I = \text{bar}\{(A,-1); (A',4)\}$ donc $-\overrightarrow{IA} + 4\overrightarrow{IA'} = \vec{0}$ de cette relation on déduit que $3\overrightarrow{IA'} - \overrightarrow{A'A} = \vec{0}$ d'où $\overrightarrow{A'A} = 3\overrightarrow{IA'}$

a) Construction de I



3- Je démontre que I est le symétrique du point G par rapport à A'

On sait que $G = \text{bar}\{(A,1);(B,1);(C,1)\} = \text{bar}\{(A,1);(A',2)\}$ donc

$$\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA'} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'A} + 2\overrightarrow{GA'} = \vec{0} \text{ or } \overrightarrow{A'A} = 3\overrightarrow{IA'}$$

$3\overrightarrow{GA'} + 3\overrightarrow{IA'} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{A'G} + \overrightarrow{A'I} = \vec{0}$ on déduit de cette relation vectorielle que A' est le milieu du segment $[GI]$ et par conséquent I est le symétrique de G par rapport à A' .

Exercice 32

1- Je détermine \overrightarrow{AG} en fonction de \overrightarrow{AB}

$$G = \text{bar}\{(A,2); (B,3)\}, \text{ donc } \overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$$



2-b) $G = \text{bar}\{(A,3); (B,1)\}$



Exercice 33

1. $2CA^2 + 3CB^2 = 2 \times 9 + 3 \times 9 = 45$ donc C appartient à (E) .

2. Soit $G = \text{bar}\{(A,2); (B,3)\}$

$$\begin{aligned} 2MA^2 + 3MB^2 = 45 &\Leftrightarrow (2+3)MG^2 + 2GA^2 + 3GB^2 = 44 \\ &\Leftrightarrow MG^2 = \frac{45 - (2GA^2 + 3GB^2)}{5} \end{aligned}$$

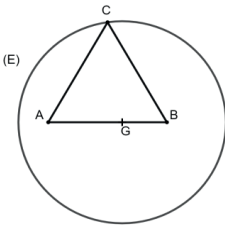
On a : $G = \text{bar}\{(A,2); (B,3)\}$ donc $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BA}$ d'où

$$GA^2 = \frac{9}{25}AB^2 = \frac{81}{25} \text{ et } GB^2 = \frac{4}{25}AB^2 = \frac{36}{25}$$

$$\text{ainsi } MG^2 = \frac{45 - (2 \times \frac{81}{25} + 3 \times \frac{36}{25})}{5} = \frac{175}{5} = \frac{175}{25}$$

(E) est donc le cercle de centre G et de rayon $\frac{3\sqrt{95}}{5}$

par suite (E) est le cercle de centre G et de rayon GC



Exercice 34

1. $MI = MJ$ donc (L) est la médiatrice du segment $[IJ]$

2. $MI = 3MJ \Leftrightarrow MI^2 = 3^2 MJ^2$

$$\Leftrightarrow MI^2 - 3^2 MJ^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + 3\overrightarrow{MJ}) \cdot (\overrightarrow{MI} - 3\overrightarrow{MJ}) = 0$$

Soit $G = \text{bar}\{(I,1); (J,3)\}$ et $K = \text{bar}\{(I,1); (J,-3)\}$

$$MI = 3MJ \Leftrightarrow -8\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MK} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MK} = 0$$

donc (E) est le cercle de diamètre $[GK]$

Exercice 35

1- Je détermine le réel α tel que C soit le barycentre des points pondérés (A, α) et (B,1).

$$\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} - 4\overrightarrow{AC} = \vec{0} \text{ donc } 3\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \vec{0} \text{ on en déduit que } C = \text{bar}\{(A,3);(B,1)\}$$

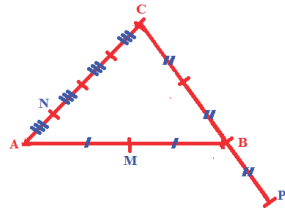
2- D'après la question 1) $C = \text{bar}\{(A,3);(B,1)\}$ donc en multipliant tous les coefficients

$$\frac{1}{3} \text{ on applique la propriété de l'homogénéité du barycentre et on a : } C = \text{bar}\left\{(A,1),\left(B,\frac{1}{3}\right)\right\}$$

Exercice 36

1- Figure .

- M isobarycentre de A et B donc $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$
- $N = \text{bar}\{(A,3);(C,1)\}$ donc $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$
- $P = \{(B,-3);(C,1)\}$ donc $\overrightarrow{BP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$



2- a) J'exprime C comme barycentre des points N et A

par hypothèse $N = \text{bar}\{(A,3);(C,1)\}$ donc on a : $3\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC} = \vec{0} \Rightarrow 3\overrightarrow{CA} - 4\overrightarrow{CN} = \vec{0}$ d'où $C = \{(A,3);(N,-4)\} = \{(A,-3);(N,4)\}$

b) Je justifie que P est le barycentre des points (B,-3), (N,4), (A,-3)

On sait que $P = \text{bar}\{(B,-3);(C,1)\}$ or $C = \text{bar}\{(A,-3);(N,4)\}$ donc

$$P = \text{bar}\{(B,-3);(A,-3);(N,4)\}.$$

3- Je justifie que P,M et N sont alignés

On sait que $P = \text{bar}\{(A,-3);(B,-3);(N,4)\}$ or $M = \text{bar}\{(A,1);(B,1)\} = \text{bar}\{(A,-3);(B,-3)\}$ donc

$$P = \text{bar}\{(M,-6);(N,4)\} \text{ et on en déduit que P, N et M sont alignés.}$$

Exercice 37

Soit G l'isobarycentre de A, B, C et D on a : $G = \text{bar}\{(A,1);(B,1);(C,1);(D,1)\}$

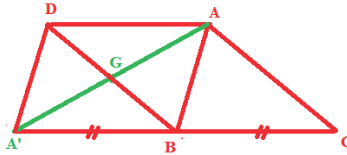
- $I = \text{bar}\{(A,1);(B,1)\}$ et $J = \text{bar}\{(C,1);(D,1)\}$ donc $G = \text{bar}\{(I,2);(J,2)\}$ et par conséquent $G \in (IJ)$
- De même $L = \text{bar}\{(B,1);(D,1)\}$ et $K = \text{bar}\{(A,1);(C,1)\}$ donc $G = \text{bar}\{(L,2);(K,2)\}$ et par conséquent $G \in (KL)$.
- $M = \text{bar}\{(A,1);(D,1)\}$ et $N = \text{bar}\{(B,1);(C,1)\}$ donc $G = \{(M,2);(N,2)\}$ et par conséquent $G \in (MN)$.
- $G_1 = \text{bar}\{(A,1);(B,1);(C,1)\}$ donc $G = \text{bar}\{(G_1,3);(D,1)\}$ donc $G \in (G_1D)$
- $G_2 = \text{bar}\{(B,1);(C,1);(D,1)\}$ donc $G = \text{bar}\{(G_2,3);(A,1)\}$ donc $G \in (G_2A)$

- $G_3 = \text{bar}\{(C,1);(D,1);(A,1)\}$ donc $G = \text{bar}\{(G_3,3);(B,1)\}$ donc $G \in (G_3B)$
- $G_4 = \text{bar}\{(A,1);(B,1);(D,1)\}$ donc $G = \text{bar}\{(G_4,3);(C,1)\}$ donc $G \in (G_4C)$

On déduit des résultats précédents que les droites (IJ), (KL), (MN), (G_1D) , (G_2A) , (G_3B) et (G_4C) sont concourantes au point G avec $G = \text{bar}\{(A,1);(B,1);(C,1);(D,1)\}$.

Exercice 38

1- Construction : voir figure



2- a) Je démontre que G est le milieu de $[A'A]$.

$G = \text{bar}\{(A,1);(B,2);(C,-1)\}$ et par hypothèse $A' = \text{bar}\{(B,2);(C,-1)\}$ donc par associativité du barycentre on a : $G = \text{bar}\{(A,1);(A',1)\}$ donc G est le milieu de $[AA']$.

b) Je justifie que B est le milieu de $[A'C]$

$A' = \text{bar}\{(B,2);(C,-1)\}$ donc $2\overrightarrow{A'B} - \overrightarrow{A'C} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$ donc B est le milieu de $[A'C]$

a) Je justifie que DABA' est un parallélogramme

Par hypothèse ACBD est un parallélogramme, donc

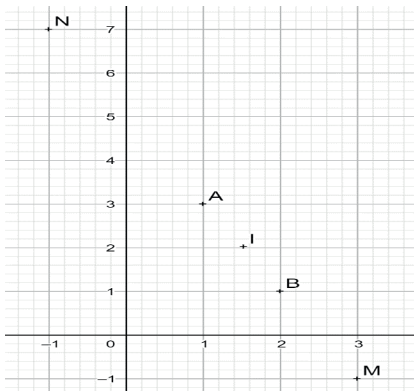
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$ et B est le milieu de $[A'C]$ donc $\overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{BC}$ ainsi on a $\overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$ et on en déduit que le quadrilatère DABA' est un parallélogramme.

b) Je justifie que G est le milieu de $[BD]$

On sait que le quadrilatère DABA' est un parallélogramme dont G est le centre puisqu'il est le milieu d'une des diagonales (diagonale (AA')). G est donc le milieu de $[BD]$, deuxième diagonale du parallélogramme DABA'.

Exercice 39

1-



2- Coordonnées du point M

$$M = \text{bar}\{(A,-2); (B,4)\} \text{ donc on a : } x_M = \frac{-2x_A + 4x_B}{-2+4} = \frac{-2 \times 1 + 4 \times 2}{2} = 3$$

$$y_M = \frac{-2y_A + 4y_B}{-2+4} = \frac{-2 \times 3 + 4 \times 1}{2} = -1$$

$$N = \text{bar}\{(A,3); (B,-2)\} \text{ donc on a : } x_N = \frac{3x_A - 2x_B}{3-2} = \frac{3 \times 1 - 2 \times 2}{1} = -1$$

$$y_N = \frac{3y_A - 2y_B}{3-2} = 3 \times 3 - 2 \times 1 = 7$$

3 - a) Coordonnées de I

$$I, \text{ milieu de } [AB] \text{ donc on a : } x_N = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} \text{ et } y_N = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3+1}{2} = 2.$$

b) Je détermine l'existence d'un réel k tel que

$$M = \text{bar}\{(A,-2); (B,4)\} \text{ donc } M \in (AB)$$

$$N = \text{bar}\{(A,3); (B,-2)\} \text{ donc } N \in (AB)$$

$$I = \text{bar}\{(A,1); (B,1)\} \text{ donc } I \in (AB)$$

Les trois points M , N et I appartiennent à une même droite (AB) , ils sont donc alignés, il existe par conséquent un réel k tel que $\overrightarrow{MI} = k\overrightarrow{MN}$.

b) Déterminons deux réels α et β tels que I soit barycentre de (M,α) , (N,β)

$$M = \text{bar}\{(A,-2); (B,4)\} \text{ donc } \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} \text{ on en déduit que } \overrightarrow{IM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$N = \text{bar}\{(A,3); (B,-2)\} \text{ donc } \overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{AB} \text{ on en déduit que } \overrightarrow{IN} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{IM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{IN} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} \Rightarrow 3\overrightarrow{IN} + 5\overrightarrow{IM} = \vec{0} \text{ donc } I = \text{bar}\{(M,5); (N,3)\}$$

Exercice 40

1- Je justifie que le point G est le barycentre de $(A; 4)$, $(B; -1)$, $(C; -1)$.

I est le milieu de $[BC]$ donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$ or G est diamétralement opposé à I donc

A est le milieu de $[GI]$ donc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{GA}$ on en déduit que

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{GA} \Rightarrow \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{AG} \Rightarrow 4\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\text{donc } G = \{(A,4); (B,-1); (C,-1)\}$$

2- Je trouve deux réels b et c tels que A est le barycentre de $(G; 2)$, $(B; b)$, $(C; c)$.

On sait que $G = \{(A,4); (B,-1); (C,-1)\}$ donc $4\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow 2\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$
donc $A = \text{bar}\{(G,2); (B,1); (C,1)\}$.

3- Je détermine l'ensemble des points M du plan tels que : $\|2\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 2\|\overrightarrow{BC}\|$

On sait que $A = \text{bar}\{(G,2) ; (B,1) ; (C,1)\}$ donc $2\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MA}$

$$\|2\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 2\|\overrightarrow{BC}\| \Leftrightarrow \|4\overrightarrow{MA}\| = 2\|\overrightarrow{BC}\| \Leftrightarrow MA = \frac{1}{2}BC$$

donc l'ensemble cherché est le cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{2}BC$.

Exercice 41

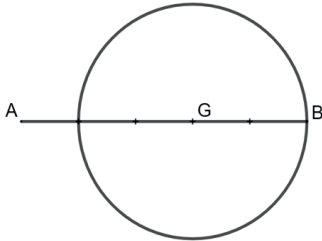
[Je réduis la somme $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$

$$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{MG} \text{ car } G = \text{bar}\{(A,2);(B,3)\}$$

1- Nature de (Γ)

$$\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = 10 \Leftrightarrow 5MG = 10 \Leftrightarrow MG = 2 \text{ donc } (C) \text{ est le cercle de centre } G \text{ et de } 2$$

2- Construction de (C)



Situations complexes

Exercice 42

Le problème consiste à calculer le barycentre de trois points pondérés.

Soit G le barycentre des points pondérés $(L,1)$, $(M,3)$ et $(F,2)$. G est donc la moyenne des notes obtenues par Mathieu. Selon Flavien, cette moyenne peut être représentée sur une droite et on

$$a : \overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OL} + 3\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{OF}}{6} = \frac{9\vec{i} + 3 \times 11\vec{i} + 2 \times 15\vec{i}}{6} = 12\vec{i} \text{ donc la moyenne de Mathieu est } 12.$$

Exercice 43

Soit $G = \text{bar}\{(A; 1), (B; 1), (C; 1), (D; 1)\}$

soit $I = \text{bar}\{(A; 1), (B; 1)\}$ et $J = \text{bar}\{(C; 1), (D; 1)\}$

alors $G = \text{bar}\{(I; 2), (J; 2)\}$

ainsi G est le milieu de $[IJ]$

SITUATION D'APPRENTISSAGE

- Après la lecture de la situation d'apprentissage (par un élève, par le professeur et une lecture silencieuse des élèves), l'enseignant pourra s'assurer que les élèves ont bien compris le texte. Le professeur donnera la parole à ses élèves afin de s'assurer de la compréhension du texte par tout le monde.
- Il pourra ensuite faire dégager les constituants de la situation à travers une ou des questions du type :

Constituants de la situation	Exemples des questions possibles	Réponses possibles des élèves
Contexte	Où et quand se déroule la situation ?	La situation se déroule dans un lycée au début d'une année
Circonstances	-Que fait le club mathématique en vue de sélectionner les meilleurs élèves des classes de première C ? -Que font les élèves après leur échec sur ces deux consignes	-Le club mathématique donne deux consignes -Ils sollicitent leurs professeurs de mathématiques
Tache	Que font les professeurs de mathématiques ?	Ils invitent les élèves à approfondir les notions d'angles orientés, les formules de trigonométrie, les équations et inéquations trigonométriques

Le professeur utilisera la tache énoncée par ses élèves pour faire la synthèse de la situation et présentera le plan de la leçon.

DÉCOUVERTE DES HABILITÉS

Activité 1

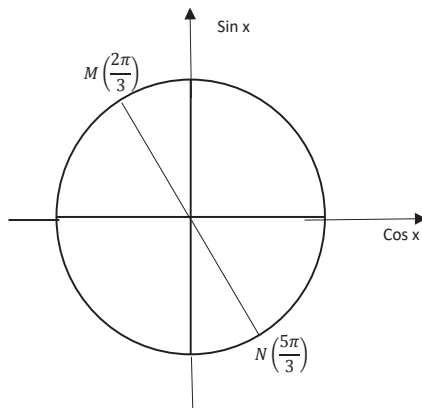
$$1- \text{Mes}(\widehat{OI;OB}) = \frac{\pi}{4} ; \text{Mes}(\widehat{OI;OJ}) = \frac{\pi}{2} ; \text{Mes}(\widehat{OI;OD}) = \pi ;$$

$$\text{Mes}(\widehat{OB;OF}) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Mes}(\widehat{OI;OF}) = -\frac{\pi}{4}$$

$$2- \text{On a : } \frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2} ; -\frac{\pi}{2} \text{ et } -\frac{\pi}{4}$$

3-4)

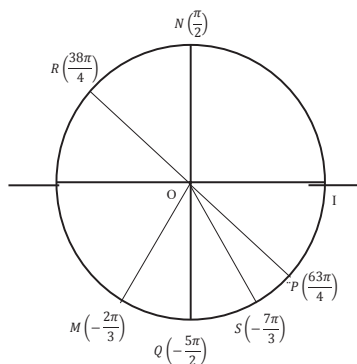


Exercice de fixation 1

$$\text{Mes}(\widehat{AD;AC}) = \frac{\pi}{4} ; \text{Mes}(\widehat{AB;AD}) = -\frac{\pi}{2} ; \text{Mes}(\widehat{BA;BE}) = \frac{7\pi}{12} ;$$

$$\text{Mes}(\widehat{CE;CB}) = \frac{\pi}{3}$$

Exercice de fixation 2



Activité 2

$$1- \text{Mes}(\widehat{OI;OK}) = 0 ; \text{Mes}(\widehat{OI;OD}) = \pi ; \text{Mes}(\widehat{OI;OJ}) = \frac{\pi}{2} ; \text{Mes}(\widehat{OI;OP}) = -\frac{\pi}{2}$$

2-

- L'angle orienté nul a pour mesure 0.
- L'angle orienté droit a pour mesure $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$.
- L'angle orienté plat a pour mesure π .

Exercice de fixation 3

L'angle orienté $(\overrightarrow{KL}; \overrightarrow{KP})$ est un angle orienté nul.

L'angle orienté $(\overrightarrow{LM}; \overrightarrow{LP})$ est un angle orienté droit.

L'angle orienté $(\overrightarrow{LP}; \overrightarrow{LK})$ est un angle orienté plat.

Activité 3

1-a) $\text{Mes}(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OB}) = -\text{Mes}(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OF})$

b) Les angles orientés $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OB})$ et $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OF})$ sont opposés

2- $\text{Mes}(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OC}) = \frac{3\pi}{4}$ et $\text{Mes}(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OB}) + \text{Mes}(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$

On a : $\text{Mes}(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OC}) = \text{Mes}(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OB}) + \text{Mes}(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC})$

3- $\text{Mes}(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OD}) - \text{Mes}(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

Exercice de fixation 4

1- $\text{Mes}(\overrightarrow{KS}; \overrightarrow{KD}) = \text{Mes}(\overrightarrow{KS}; \overrightarrow{KP}) + \text{Mes}(\overrightarrow{KP}; \overrightarrow{KD})$

$$\text{Mes}(\overrightarrow{KS}; \overrightarrow{KD}) = -\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = -\frac{3\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$$

2- L'angle orienté $(\overrightarrow{KS}; \overrightarrow{KD})$ est un angle droit donc les droites (KS) et (KD) sont perpendiculaires.

Exercice de fixation 5

Mes($\hat{\alpha}$)	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{11\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{8}$
Mes($\hat{\beta}$)	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{24}$
Mes($\hat{\alpha} + \hat{\beta}$)	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$
Mes($\hat{\alpha} - \hat{\beta}$)	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{12}$

Activité 4

$$(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AI}) + (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AI}) = (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AI}) + (\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) \text{ car } (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AI}) = (\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AB})$$

Exercice de fixation 6

1.d ; 2.a ; 3.c ; 4.b

Activité 5

1. Si $\hat{\alpha} = \hat{O}$, alors $2\hat{\alpha} = 2\hat{O} = \hat{O}$ et Si $\hat{\alpha} = \hat{\pi}$ alors $2\hat{\alpha} = 2\hat{\pi} = \hat{O}$.

Si $2\hat{\alpha} = \hat{O}$, alors $\hat{\alpha} + \hat{\alpha} = \hat{O}$, soit $\hat{\alpha} = -\hat{\alpha}$, d'où $\hat{\alpha} = \hat{\pi}$ ou $\hat{\alpha} = \hat{O}$.

ainsi $2\hat{\alpha} = \hat{O} \Leftrightarrow \hat{\alpha} = \hat{O}$ ou $\hat{\alpha} = \hat{\pi}$

2. Si $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$, alors $2\hat{\alpha} = 2\hat{\beta}$ et Si $\hat{\alpha} = \hat{\beta} + \hat{\pi}$, alors $2\hat{\alpha} = 2\hat{\beta} + 2\hat{\pi} = 2\hat{\beta}$, car $2\hat{\pi} = \hat{O}$.

Si $2\hat{\alpha} = 2\hat{\beta}$ alors $2(\hat{\alpha} - \hat{\beta}) = \hat{O}$, d'après la propriété 1, $\hat{\alpha} - \hat{\beta} = \hat{O}$ ou

$\hat{\alpha} - \hat{\beta} = \hat{\pi}$. D'où le résultat.

3. Si $\hat{\alpha} = \frac{\hat{\pi}}{2}$ alors $2\hat{\alpha} = 2 \cdot \frac{\hat{\pi}}{2} = \hat{\pi}$ d'où $2\hat{\alpha} = \hat{\pi}$ et Si $\hat{\alpha} = -\frac{\hat{\pi}}{2}$ alors $2\hat{\alpha} = -2 \cdot \frac{\hat{\pi}}{2} = -\hat{\pi} = \hat{\pi}$

$2\hat{\alpha} = \hat{\pi} \Leftrightarrow 2\hat{\alpha} = 2 \cdot \frac{\hat{\pi}}{2}$, d'après la propriété 2, $\hat{\alpha} = \frac{\hat{\pi}}{2}$ ou $\hat{\alpha} = \frac{\hat{\pi}}{2} + \hat{\pi} = -\frac{\hat{\pi}}{2}$, d'où le résultat.

Exercice de fixation 7

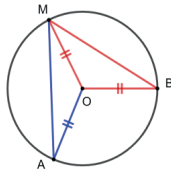
c)

Exercice de fixation 8

$$\begin{aligned} 2(\widehat{AB, -AC}) = \hat{O} &\Leftrightarrow (\widehat{AB, -AC}) = \hat{O} \text{ ou } (\widehat{AB, -AC}) = \hat{\pi} \\ &\Leftrightarrow (\widehat{AB, AC}) + \hat{\pi} = \hat{O} \text{ ou } (\widehat{AB, AC}) + \hat{\pi} = \hat{\pi} \\ &\Leftrightarrow (\widehat{AB, AC}) = \hat{\pi} \text{ ou } (\widehat{AB, AC}) = \hat{O} \end{aligned}$$

$(\widehat{AB, AC})$ est l'angle nul ou l'angle plat donc les points A, B et C sont alignés.

Activité 6



1. A, B et M appartiennent au cercle de centre O donc les triangles OAM et OBM sont isocèles en O .

$$\begin{aligned} (\widehat{OA; OB}) &= (\widehat{OA; OM}) + (\widehat{OM; OB}) \\ &= \pi - 2(\widehat{MO; MA}) + \pi - 2(\widehat{MB; MO}) \\ &= 2\pi - 2[(\widehat{MO; MA}) + (\widehat{MB; MO})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\pi - 2 \left[(\widehat{\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MO}}) + (\widehat{\overrightarrow{MO}; \overrightarrow{MA}}) \right] \\
 &= 2\pi - 2 (\widehat{\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MA}}) \\
 &= 2 (\widehat{\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}})
 \end{aligned}$$

$$\text{donc } (\widehat{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}}) = 2 (\widehat{\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}})$$

2.L'étude de la réciproque suggère la recherche d'une ligne de niveau (cette étude pourra se faire en classe de terminale)

Exercice de fixation 9

La figure b)

Activité 7

1.a) Les points A, B, C et D appartiennent au cercle de centre O .

$(\widehat{\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DB}})$ sont des angles inscrits qui interceptent l'arc \widehat{AB} et $(\widehat{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}})$

est un angle au centre qui intercepte l'arc \widehat{AB} donc $2(\widehat{\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}})$
 et $2(\widehat{\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}})$

b) $2(\widehat{\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}})$ et $2(\widehat{\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}})$ donc
 $2(\widehat{\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DB}})$

2.a) Les points A, B et C appartiennent au cercle de centre O' .

$(\widehat{\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}})$ est un angles inscrit qui interceptent l'arc \widehat{AB} et $(\widehat{\overrightarrow{O'A}; \overrightarrow{O'B}})$
 est un angle au centre qui intercepte l'arc \widehat{AB} donc $2(\widehat{\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}}) = (\widehat{\overrightarrow{O'A}; \overrightarrow{O'B}})$

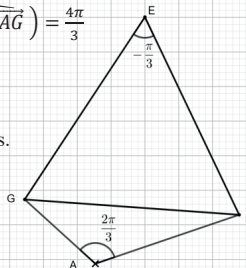
b) on a : $2(\widehat{\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DB}})$ or $2(\widehat{\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}}) = (\widehat{\overrightarrow{O'A}; \overrightarrow{O'B}})$, donc
 $2(\widehat{\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DB}}) = (\widehat{\overrightarrow{O'A}; \overrightarrow{O'B}})$

c) $2(\widehat{\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DB}}) = (\widehat{\overrightarrow{O'A}; \overrightarrow{O'B}})$ donc D appartient au cercle de centre O' passant par les points

A et B . Par suite les points A, B, C et D sont cocycliques.

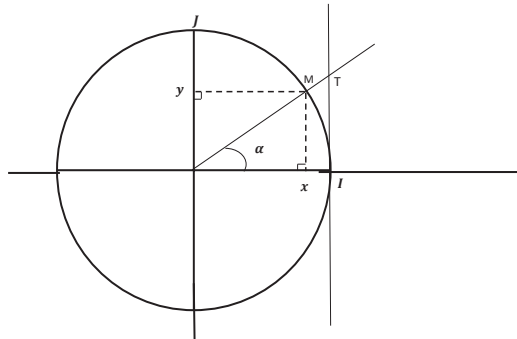
Exercice de fixation 10

On a : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{EF}; \overrightarrow{EG}}) = -\frac{\pi}{3}$ et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AF}; \overrightarrow{AG}}) = \frac{2\pi}{3}$
 donc $2 \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{EF}; \overrightarrow{EG}}) = -\frac{2\pi}{3}$ et $2 \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AF}; \overrightarrow{AG}}) = \frac{4\pi}{3}$
 or $\frac{4\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$ d'où $2 \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AF}; \overrightarrow{AG}}) = -\frac{2\pi}{3}$
 ainsi $2 \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{EF}; \overrightarrow{EG}}) = 2 \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AF}; \overrightarrow{AG}})$.
 par suite les points E, F, G et A sont cocycliques.



Activité 8

1-a)



- b) L'ordonnée de M correspond au sinus de α
 L'abscisse de M correspond au cosinus de α

2-a) construction de la tangente (D) à (C) en I.

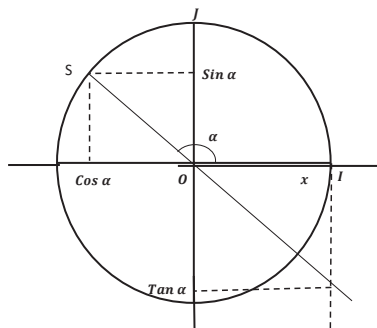
b) T existe si et seulement si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

c) L'abscisse de T est OI et l'ordonnée est TI

Exercice de fixation 11

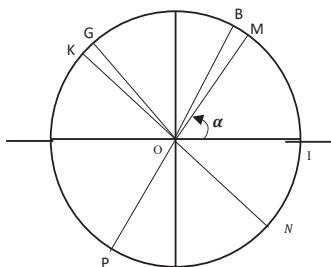
Mes($\hat{\alpha}$)	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$
Cos($\hat{\alpha}$)	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Sin($\hat{\alpha}$)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
Tan($\hat{\alpha}$)	$\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Exercice de fixation 12



Activité 9

- 1-a)
- 2-a)
- 3-a)
- 4-a)
- 5-a)



- | | | |
|---------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| 1-b) $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$ | 1-c) $\sin(\alpha) = -\sin(-\alpha)$ | 1-d) $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$ |
| 2-b) $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ | 2-c) $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ | 2-d) $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$ |
| 3-b) $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ | 3-c) $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ | 3-d) $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$ |
| 4-b) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$ | 4-c) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$ | 4-d) $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$ |
| 5-b) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ | 5-c) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$ | 5-d) $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$ |

Exercice de fixation 13

- 1-C 2-B 3-C 4-B 5-A 6-A 7-A 8-A 9-C 10-B 11-B
 12-A 13-A 14-C 15-A

Exercice de fixation 14

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} ; \quad \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2} ; \quad \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

$$\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} ; \quad \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} ;$$

$$\tan\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} ; \quad \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} ;$$

$$\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} ; \quad \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} ;$$

$$\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

Activité 10

$$1- \text{Mes}(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{ON}) = \text{Mes}(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM}) + \text{Mes}(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{ON})$$

$$\text{Mes}(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{ON}) = \text{Mes}(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{ON}) - \text{Mes}(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM})$$

$$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{ON}}) = \alpha - \beta$$

$$2- \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \|\overrightarrow{OM}\| \cdot \|\overrightarrow{ON}\| \cdot \cos(\widehat{\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{ON}})$$

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 1 \times 1 \times \cos(\alpha - \beta)$$

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \cos(\alpha - \beta)$$

$$3- a) \overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{ON} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$b) \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \cos \beta \cdot \cos \alpha + \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

$$4- \text{Comme } \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \cos(\alpha - \beta) \text{ et } \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \cos \beta \cdot \cos \alpha + \sin \beta \cdot \cos \alpha, \text{ on a :}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \beta \cdot \cos \alpha + \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

$$5- \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + c)$$

$$= \cos \alpha \cos(-c) + \sin \alpha \cdot \sin(-c)$$

$$\cos(\alpha + c) = \cos \alpha \cdot \cos c - \sin \alpha \cdot \sin c$$

$$6- a) \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right]$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right]$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$b) \sin(\alpha - c) = \sin \alpha \cos(-c) + \cos \alpha \sin(-c)$$

$$\sin(\alpha - c) = \sin \alpha \cos c - \cos \alpha \sin c$$

Exercice de fixation 15

Colonne A		Colonne B
$\cos(a - b) =$	•	$\cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\cos(a + b) =$	•	$\sin a \cos b - \sin b \cos a$
$\sin(a - b) =$	•	$\sin a \cos b + \sin b \cos a$
$\sin(a + b) =$	•	$\cos a \cos b + \sin a \sin b$

Exercice de fixation 16

$$\bullet \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\frac{\pi}{3} \times \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$\bullet \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sin\frac{\pi}{3} \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\begin{aligned} \bullet \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos\frac{\pi}{3} \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3} \sin\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\begin{aligned} \bullet \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sin\frac{\pi}{3} \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} \cos\frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

Activité 11

- $\alpha + \beta = 2\alpha$
- $\cos(2\alpha) = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
- $\sin(2\alpha) = \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha$

Exercice de fixation 17

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(2 \times \frac{5\pi}{12}\right) = \cos^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) - \sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(2 \times \frac{5\pi}{12}\right) = 2 \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2 \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

Activité 12

- $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos(2\alpha)$ et $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1$

$$\text{On a : } \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

$$\text{Donc : } \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = \cos 2\alpha$$

$$2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

- $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$
 $1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$

$$1 - 2\sin^2\alpha = \cos 2\alpha$$

$$2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

Exercice de fixation 18

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}; \quad \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

Activité 13

2.a) $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta$ et $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

b) on a : $\alpha = \frac{p+q}{2}$ et $\beta = \frac{p-q}{2}$

c) $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$

$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

3.a) $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$$

b) $\alpha = \frac{p+q}{2}$ et $\beta = \frac{p-q}{2}$

c) $\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

4.a) $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta + \sin \alpha \cos \beta$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \beta \cos \alpha$$

b) $\alpha = \frac{p+q}{2}$ et $\beta = \frac{p-q}{2}$

c) $\sin(p) - \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$

Exercice 19

a) $\cos(7x) + \cos(3x) = 2 \cos\left(\frac{7x+3x}{2}\right) \cos\left(\frac{7x-3x}{2}\right)$

$$\cos(7x) + \cos(3x) = 2 \cos(5x) \cos(2x)$$

b) $\cos(10x) - \cos(5x) = -2 \sin\left(\frac{10x+5x}{2}\right) \sin\left(\frac{10x-5x}{2}\right)$

$$\cos(10x) - \cos(5x) = -2 \sin\left(\frac{15x}{2}\right) \sin\left(\frac{5x}{2}\right)$$

c) $\sin(x) + \sin(13x) = 2 \sin\left(\frac{x+13x}{2}\right) \cos\left(\frac{x-13x}{2}\right)$

$$\sin(x) + \sin(13x) = 2 \sin(7x) \cos(6x)$$

d) $\sin(9x) - \sin(6x) = 2 \sin\left(\frac{9x-6x}{2}\right) \cos\left(\frac{9x+6x}{2}\right)$

$$\sin(9x) - \sin(6x) = 2 \sin\left(\frac{3x}{2}\right) \cos\left(\frac{15x}{2}\right)$$

Activité 14

1.a) $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$

b) $\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2}$

2.a) $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$

b) $\sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2}$

3.a) $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$

b) $\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)}{2}$

$$4.a) \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \beta \cos \alpha$$

$$b) \sin \beta \cos \alpha = \frac{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)}{2}$$

Exercice 20

$$a) \sin(x) \cos(3x) = \frac{\sin(x+3x) + \sin(x-3x)}{2}$$

$$\sin(x) \cos(3x) = \frac{\sin(4x) + \sin(-2x)}{2}$$

$$b) \sin(2x) \cos(5x) = \frac{\cos(2x-5x) \cos(2x+5x)}{2}$$

$$\sin(2x) \cos(5x) = \frac{\cos(-3) - \cos(7x)}{2} = \frac{\cos(3x) - \cos(7x)}{2}$$

$$c) \cos(7x) \cos(3x) = \frac{\cos(7x+3x) + \cos(7x-3x)}{2}$$

$$\cos(7x) \cos(3x) = \frac{\cos(10x) + \cos(4x)}{2}$$

Activité 15

Partie A

$$1) AC = \sqrt{a^2 + b^2}$$

2.a) on a :

$$\sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right) = \frac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right) = a \cos x + b \sin x$$

$$\text{D'où } A = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right)$$

$$b) a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} (\sin \alpha \cos x + \cos \alpha \sin x)$$

$$3) A = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \alpha)$$

Partie B

$$1) AC = \sqrt{a^2 + b^2}; \sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$2) A = a \cos x + b \sin x$$

$$A = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right) \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} (\sin \alpha \cos x + \cos \alpha \sin x)$$

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \alpha)$$

Exercice de fixation 21

Colonne A		Colonne B
$\sqrt{3} \cos x + \sin x$	•	$2\sqrt{3} \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right)$
$3 \cos x + \sqrt{3} \sin x$	•	$\cos \left(-\frac{\pi}{3} - x \right)$
$\cos x - \sqrt{3} \sin x$	•	$2 \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right)$
$\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$	•	$2 \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$

Activité 16

1) f est définie sur \mathbb{R}

2.a) $\forall x \in \mathbb{R}, x + 2\pi \in \mathbb{R}$

On a : $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ donc f est périodique de période 2π

b) $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$

$\cos(-x) = \cos x$ donc la fonction f est paire .

3.a) $\forall x \in [0; \pi], f'(x) = -\sin x$

$\forall x \in [0, \pi], f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $[0, \pi]$

b)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f'(x)$	-	○	-
$f(x)$	1	○	-1

4.a)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

b) construction : prendre la figure du récapitulatif (Activité 12)

Exercice de fixation 22

1-F, 2-F, 3-F, 4-V

Activité 17

1) f est définie sur \mathbb{R}

2.a) $\forall x \in \mathbb{R}, x + 2\pi \in \mathbb{R}$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ donc f est périodique de période 2π

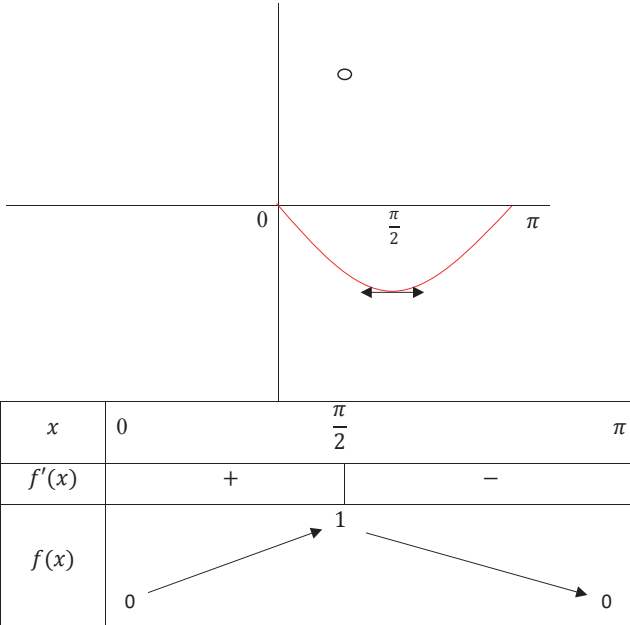
b) $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$ donc f est impaire.

3.a) $\forall x \in [0; \pi], f'(x) = \cos x$

$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, f'(x) > 0$ et $\forall x \in [\frac{\pi}{2}, \pi], f'(x) < 0$.

f est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et strictement décroissant sur $]\frac{\pi}{2}, \pi]$

b)



4.a)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

b) construction : prendre la figure du récapitulatif (activité 13)

Exercice de fixation 23

$\forall x \in [0; \pi], f'(x) = -\cos x$

$\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}[, f'(x) < 0$ et $\forall x \in]\frac{\pi}{2}; \pi], f'(x) > 0$

f est strictement décroissante sur $[0; \frac{\pi}{2}[$ et strictement croissante sur $] \frac{\pi}{2}; \pi]$.

Tableau de variation

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	-1	0

Activité 18

- 1) La fonction f est définie pour tout nombre réel $x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- 2.a) $\forall x \in \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et $\forall x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, on a $x + \pi \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et $x + \pi \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ de plus $\tan(x + \pi) = \tan x$ donc la fonction f est périodique de période π
- b) $\forall x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, on a $-x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et $-x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
- On a $\tan(-x) = -\tan x$ donc f est une fonction impaire.
- 3.a) $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}[$, $f'(x) = 1 + \tan^2 x$
- $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0; \frac{\pi}{2}[$
- b) tableau de variation

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0	$-\infty$

4.a)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

b) construction : prendre la figure du récapitulatif (activité 14)

Exercice de fixation 24

1-F, 2-F, 3-V, 4-F

Activité 19

- 1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc si $b > 1$ ou $b < -1$ l'équation $\cos x = b$ n'admet pas de solution
- 2) En utilisant le cercle trigonométrique, on constate que :
- $B = \cos \alpha$ et $b = \cos(-\alpha)$
- Étant donné que pour tout nombre réel x , $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$,
- On a : $\cos x = b \Leftrightarrow \cos x = \cos(\alpha + 2k\pi)$ ou $\cos x = \cos(-\alpha + 2k\pi)$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- $\cos x = b \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Exercice de fixation 25

(E1) : $\cos x = \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \in [-1; 1]$ donc l'équation admet les solutions $\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$S_R = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi; -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

(E2) : $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \in [-1; 1]$ donc l'équation admet les solutions $\cos x = \cos \frac{\pi}{6}$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$S_R = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi; -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

(E3) : $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \in [-1; 1]$ donc l'équation admet les solutions $\cos x = \cos \frac{\pi}{4}$

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$S_R = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

(E4) : $\cos x = \frac{4}{3}; \frac{4}{3} \notin [-1; 1]$ donc l'équation n'admet pas de solutions

$$S_R = \emptyset$$

Activité 20

1) $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin x \leq 1$ donc si $b > 1$ ou $b < -1$, l'équation $\sin x = b$ n'admet pas de solutions.

2) En utilisant le cercle trigonométrique, on constate que :

$$b = \sin \alpha \text{ et } b = \sin(\pi - \alpha)$$

Étant donné que pour tout nombre réel x , $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$,

On a : $\sin x = b \Leftrightarrow \sin x = \sin(\alpha + 2k\pi)$ ou $\sin x = \sin(\pi - \alpha + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$

Exercice de fixation 26

(E1) : $\sin x = \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \in [-1; 1]$ donc l'équation admet des solutions $\sin x = \sin \frac{\pi}{6}$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$S_R = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

(E2) : $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \in [-1; 1]$ donc l'équation admet de solutions $\sin x = \sin \frac{\pi}{3}$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$S_R = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

(E3) : $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \in [-1; 1]$ donc l'équation admet de solutions $\sin x = \sin \frac{\pi}{4}$
 $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 $S_R = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Activité 21

En utilisant le cercle trigonométrique, on constate que $c = \tan \alpha$

Étant donné que pour tout nombre réel x , $\tan(x + k\pi) = \tan x$, on a

$$\tan x = b \Leftrightarrow \tan x = \tan(\alpha + k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan x = b \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

- **Corrigés des exercices de fixation**

Exercice de fixation 27

(E1) : $\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{3}$

$$S_R = \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

(E2) : $\tan \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = 1 \Leftrightarrow \tan \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \tan \frac{\pi}{4}$

$$S_R = \left\{ \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Activité 22

1) $a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right)$

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \alpha \cos x + \sin \alpha \sin x) \text{ avec } \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \alpha)$$

2.a) $a \cos x + b \sin x + c = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \alpha) + c = 0$

$$\sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \alpha) = -c$$

$$a \cos x + b \sin x + c = 0 \Leftrightarrow \cos(x - \alpha) = \frac{-c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

b) pour que (E) ait au moins une solution il faudrait et il suffirait que $\frac{-c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \in [-1; 1]$

3) (E) $\Leftrightarrow \cos(x - \alpha) = \frac{-c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

- Il faut trouver le réel β tel que $\frac{-c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \beta$

- Ensuite résoudre l'équation $\cos(x - \alpha) = \cos \beta$

- On obtient donc $x = \beta + \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\beta + \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Exercice de fixation 28

$$(E1) : \sqrt{3} \cos x + \sin x = 1 \Leftrightarrow 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$S_R = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi ; -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$(E2) : 3 \cos x + \sqrt{3} \sin x = 3 \Leftrightarrow 2\sqrt{3} \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 3$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

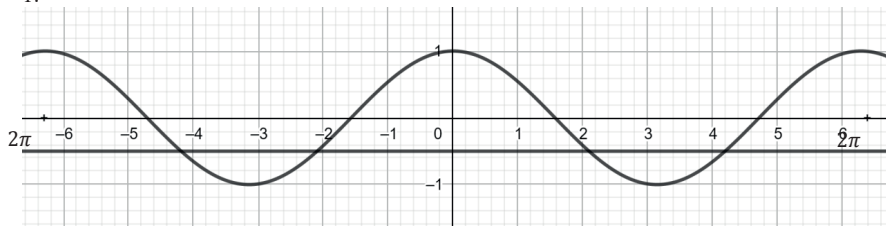
$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$S_R = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi ; 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

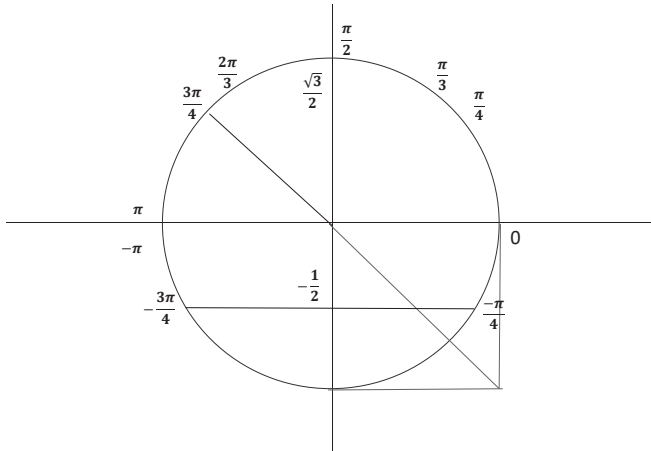
Activité 23

1.



2. a)

b)



$$c) (I_1) : S = \left[-\frac{5\pi}{6} ; -\frac{\pi}{6} \right]$$

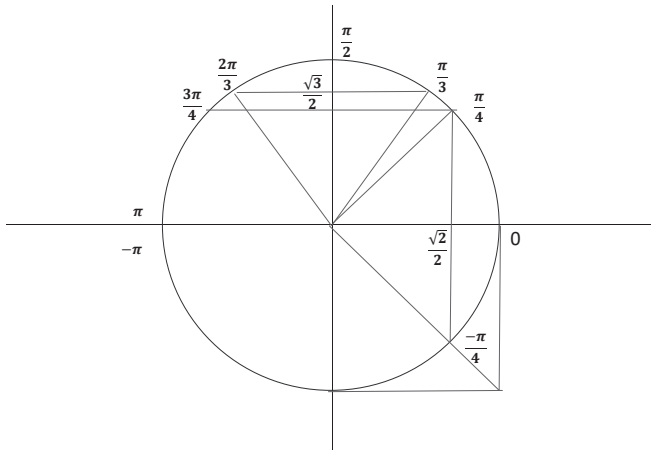
$$(I_2) : S = \left[\frac{7\pi}{6} ; \frac{11\pi}{6} \right]$$

$$(I_3) : S = \left[-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi ; -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \right], k \in \mathbb{Z}$$

$$3. b) S = \left\{ -\frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4} \right\}$$

$$e) S = \left] \frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{4} \right] \cup \left] -\frac{\pi}{2} ; -\frac{\pi}{4} \right]$$

Exercice 29



$$(I_1) : S = \left] -\pi ; \frac{\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{2\pi}{3} ; \pi \right]$$

$$(I_2) : S = \left] -\pi ; -\frac{\pi}{4} \right[\cup \left[\frac{\pi}{4} ; \pi \right]$$

$$(I_3) : S = \left] -\frac{\pi}{2} ; -\frac{\pi}{4} \right[\cup \left[\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{4} \right]$$

DES QUESTIONS D'ÉVALUATIONS

Question 1 : Comment déterminer la mesure principale d'un angle orienté à partir d'une de ses

mesures ?

Exercice non corrigé

$$\frac{75\pi}{4} - 18\pi = \frac{3\pi}{4}$$

la mesure principale de $\frac{75\pi}{4}$ est $\frac{3\pi}{4}$

Exercice non corrigé

$$-\frac{125\pi}{7} + 17\pi = \frac{-6\pi}{7}$$

la mesure principale de $-\frac{125\pi}{7}$ est $\frac{-6\pi}{7}$

Question 2 : Comment résoudre des équations du types $\cos x = a$ et $\sin x = a$, $a \in \mathbb{R}$?

Exercice non corrigé

$$(E_1) : \sin x = \frac{3}{2}$$

$\frac{3}{2} \notin [-1; 1]$ donc l'équation (E₁) n'admet pas des solutions

$$(E_2) : \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$-\frac{\sqrt{3}}{2} \in [-1; 1]$ donc l'équation (E₂) admet des solutions. De plus $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{équivaut à} \quad \cos x = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{équivaut à} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{d'où } S_R = \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Question 3 : Comment résoudre une équation de type $a \cos x + b \sin x = c$?

Exercice non corrigé

$$\text{On a } \sqrt{(\sqrt{2})^2} + (\sqrt{2})^2 = 2 \text{ donc } \sqrt{2} \cos x - \sqrt{2} \sin x = 2 \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right]$$

$$\text{On a } \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \text{ et } \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{Donc } \sqrt{2} \cos x - \sqrt{2} \sin x = 2 \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right]$$

$$\sqrt{2} \cos x - \sqrt{2} \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{D'où } \sqrt{2} \cos x - \sqrt{2} \sin x = 1 \text{ équivaut à } 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \text{ équivaut à } \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \text{ équivaut à } \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \text{ équivaut à } x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \text{ équivaut à } x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ainsi } S_R = \left\{ \frac{\pi}{12} + 2k\pi, -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Question 4 : Comment résoudre les équations du type $\tan x = b$?

Exercices non corrigé

$$\sqrt{3} \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \text{ équivaut à } \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sqrt{3} \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \text{ équivaut à } \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sqrt{3} \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \text{ équivaut à } x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{3} \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \text{ équivaut à } x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{3} \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \text{ équivaut à } x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$S_R = \left\{-\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

MES SÉANCES D'EXERCICES

EXERCICES DE FIXATION

Exercice 1

- $mes(\widehat{u}, \widehat{v}) = \frac{-\pi}{7}$
- $mes(\widehat{u}, -3\widehat{v}) = mes(\widehat{v}, \widehat{u}) = \frac{3\pi}{4}$
- $mes(\widehat{w}, \widehat{u}) = -\frac{\pi}{4}$
- $(\widehat{v}, \widehat{w}) = (\widehat{v}, \widehat{u}) + (\widehat{u}, \widehat{w})$, donc $mes(\widehat{v}, \widehat{w}) = \frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{4} = \frac{11\pi}{28}$
- $2mes(\widehat{u}, \widehat{v}) = \frac{-2\pi}{7}$

Exercice 2

Les mesures principales son : $\frac{3\pi}{5}$; $\frac{2\pi}{7}$; 0

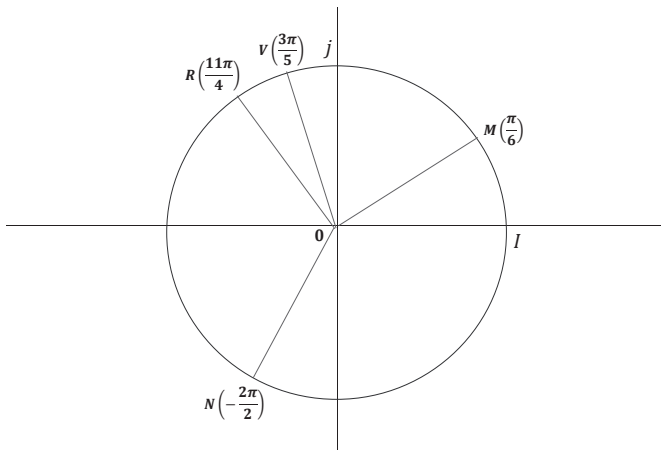
Exercice 3

1-F 2-F 3-V

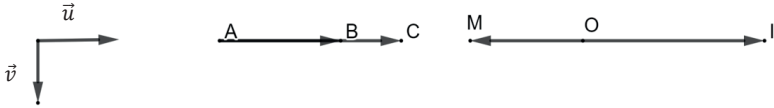
Exercice 4

Cinq autres mesures de l'angles $(\widehat{u}, \widehat{v})$ sont : $-\frac{7\pi}{6}$; $\frac{17\pi}{6}$; $-\frac{19}{6}$; $\frac{29\pi}{6}$ et $\frac{41\pi}{6}$

Exercice 5



Exercice 6



Exercice 7

Angle orienté		
Angle orienté nul	•	•
Angle orienté droit direct	•	•
Angle orienté droit indirect	•	•
Angle orienté plat direct	•	•
		Mesure principale
		$-\pi$
		$-\frac{\pi}{2}$
		$\frac{\pi}{2}$
		0
		π

Exercice 8

1-V 2-F 3-V 4-F

Exercice 9

Une mesure de $(\hat{\alpha})$	$-\frac{2\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{4}$	π
Une mesure de $(\hat{\beta})$	$-\pi$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$-\frac{5\pi}{6}$
Une mesure de $(\hat{\alpha} + \hat{\beta})$	$-\frac{5\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$
Une mesure de $(\hat{\alpha} - \hat{\beta})$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$

Exercice 10

Angles	Mesures d'angles			
$Mes(\hat{\alpha})$	0	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{\pi}{5}$
$mes(\hat{\beta})$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$
$Mes(\hat{\alpha} + \hat{\beta})$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{31\pi}{30}$
$Mes(\hat{\alpha} - \hat{\beta})$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{11\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{19\pi}{30}$
$Mes(-\hat{\alpha})$	0	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{5}$
$Mes(-\hat{\beta})$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{7\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{6}$

Exercise 11

$$* \text{mes}(\widehat{OA, OD}) = \text{mes}(\widehat{OA, OB}) + \text{mes}(\widehat{OB, OD})$$

$$\text{mes}(\widehat{OA, OD}) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

$$* \text{mes}(\widehat{OC, OD}) = \text{mes}(\widehat{OC, OB}) + \text{mes}(\widehat{OB, OD})$$

$$\text{mes}(\widehat{OC, OD}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

Exercise 12

1-B 2-C 3-A 4-C

Exercise 13

$\text{mes}(\widehat{u, v})$	0	$-\frac{2\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{8}$	$-\pi$
$2\text{mes}(\widehat{u, v})$	0	$-\frac{4\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{2}$	-2π
$\text{mes}(-3\widehat{u, v})$	π	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{11\pi}{8}$	0
$\text{mes}(\widehat{v, u})$	0	$\frac{2\pi}{5}$	$-\frac{3\pi}{8}$	π
$\text{mes}\left(-\frac{1}{2}\widehat{u, -\frac{1}{2}v}\right)$	0	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{8}$	$-\pi$

Exercise 14

$$\text{mes}(\widehat{AB, BC}) + \text{mes}(\widehat{BC, BA}) + \text{mes}(\widehat{CA, CB}) = \text{mes}(\widehat{AB, AC}) + \text{mes}(\widehat{BC, BA}) + \text{mes}(\widehat{AC, BC})$$

$$= \text{mes}(\widehat{AB, AC}) + \text{mes}(\widehat{AC, BC}) + \text{mes}(\widehat{BC, BA})$$

$$= \text{mes}(\widehat{AB, BC}) + \text{mes}(\widehat{BC, BA})$$

$$= \text{mes}(\widehat{AB, BA})$$

$$\text{mes}(\widehat{AB, BC}) + \text{mes}(\widehat{BC, BA}) + \text{mes}(\widehat{CA, CB}) = \pi$$

Exercise 15

1-F 2-V 3-F 4-F 5-V 6-F 7-F 8-V 9-V 10-F

Exercice 16

Angle de mesure α	0	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$-\frac{2\pi}{3}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	-1	$-\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1		0	$\sqrt{3}$

Exercice 17

1) On sait que $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ donc $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{24}{25}$$

$$\cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5} \quad \text{ou} \quad \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\text{Ainsi } \tan \alpha = \frac{\sqrt{6}}{12} \quad \text{ou} \quad \tan \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{12}$$

2) On sait que $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ donc $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{16}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{15}{16}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4} \quad \text{ou} \quad \sin \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{Ainsi } \tan \alpha = -\sqrt{15} \quad \text{ou} \quad \tan \alpha = \sqrt{15}$$

Exercice 18

a) $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$; b) $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$; c) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$

d) $\sin(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$; e) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$

Exercice 19

a) $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$; b) $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$

c) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha)$; d) $\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$; e) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$

Exercice 20

a) $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$; b) $\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$

c) $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$; d) $\tan(\pi + \alpha) = \tan(\alpha)$; e) $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{\tan(\alpha)}$

Exercice 21

$$A = 5 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos \alpha + 3 \cos(\pi + \alpha) + 3 \cos(\pi - \alpha)$$

$$A = 5 \cos \alpha + \cos \alpha - 3 \cos \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$A = 6 \cos \alpha - 6 \cos \alpha$$

$$A = 0$$

Exercice 22

$$B = \cos x - \sin\left(-x - \frac{3\pi}{2}\right) = \cos x - \sin\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x - \cos(-x) = 0$$

Exercice 23

1. V ; 2. V ; 3. F ; 4. F

Exercice 24

1) $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ et $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$

2) $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$
 $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\frac{\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{3}$
 $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}$
 $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$
 $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos\frac{\pi}{6} \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6} \cdot \sin\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Exercice 25

$$\begin{aligned}A &= \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \\ A &= \sin x \cdot \cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3} \cdot \cos x \\ A &= \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B &= \cos\left(x + \frac{5\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{7\pi}{2}\right) \\ B &= \cos x \cos\frac{5\pi}{6} - \sin x \sin\frac{5\pi}{6} + \cos x \cos\frac{7\pi}{2} - \sin x \sin\frac{7\pi}{2} \\ B &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x + \sin x \\ B &= \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x\end{aligned}$$

Ainsi $A = B$

Exercice 26

1. F ; 2. F ; 3. V ; 4. V ; 5. V

Exercice 27

1) On a : $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{3}{4}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{4}$$

$$\text{donc } \cos\alpha = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \cos\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$* \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}$$

$$\cos(2\alpha) = -\frac{1}{2}$$

$$* \sin(2\alpha) = 2 \sin\alpha \cos\alpha$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \sin(2\alpha) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\sin(2\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad \sin(2\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2) $\tan(2\alpha) = \frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)}$

$$\tan(2\alpha) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} \quad \text{ou} \quad \tan(2\alpha) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$\tan(2\alpha) = -\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad \tan(2\alpha) = \sqrt{3}$$

Exercice 28

1. $\cos 2\alpha = 2 \cos^2\alpha - 1 = 2 \times \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 - 1 = \frac{1}{9}$

On a $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \frac{1}{4}$ donc $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ ou $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha = 2 \times \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9} \quad \text{ou} \quad \sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha = -2 \times \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{2}{3} = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$$

2. $\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$

1) $\tan 2\alpha = \frac{\frac{4\sqrt{5}}{9}}{\frac{1}{9}} = 4\sqrt{5}$ ou $\tan 2\alpha = -\frac{\frac{4\sqrt{5}}{9}}{\frac{1}{9}} = -4\sqrt{5}$ On a : $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$$\sin^2\alpha = 1 - \frac{5}{9}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{4}{9}$$

$$* \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \frac{5}{9} - \frac{4}{9}$$

$$\cos(2\alpha) = \frac{1}{9}$$

$$* \sin(2\alpha) = 2 \cos\alpha \sin\alpha$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \times \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad \sin(2\alpha) = 2 \times \frac{\sqrt{5}}{3} \times \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$\sin(2\alpha) = \frac{4\sqrt{5}}{9} \quad \text{ou} \quad \sin(2\alpha) = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$$

$$2) \tan(2\alpha) = \frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)}$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{4\sqrt{5}}{\frac{9}{5}} \quad \text{ou} \quad \tan(2\alpha) = \frac{-\frac{4\sqrt{5}}{9}}{\frac{1}{9}}$$

$$\tan(2\alpha) = 4\sqrt{5} \quad \text{ou} \quad \tan(2\alpha) = -4\sqrt{5}$$

Exercice 29

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

Exercice 30

$$1. \cos^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1 + \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{2} = \frac{-\sqrt{3}+2}{4}$$

$$2. \cos^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{3}+2}{4} \quad \text{donc} \quad \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

Exercice 31

* on a $\sin(3x) = \sin(2x + x)$

$$= \sin(2x) \cos x + \sin x \cos(2x)$$

$$= 2 \sin x \cos^2 x + \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$= 2 \sin x (1 - \sin^2 x) + \sin x - 2 \sin^3 x$$

$$\sin(3x) = 3 \sin x + 4 \sin^3 x \quad \text{donc} \quad \sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin(3x)$$

* on a $\cos(3x) = \cos(2x + x)$

$$= \cos(2x) \cos x - \sin(2x) \sin x$$

$$= (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2 \sin^2 x \cos x$$

$$= (2\cos^2 x - 1) \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \cos x$$

$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2\cos^3 x$$

$$\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3 \cos x \quad \text{donc} \quad \cos^3 x = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos(3x)$$

Exercice 32

1-V 2-F 3-F 4-F

Exercice 33

$$A = \sin(2x) - \sin(5x)$$

$$A = 2 \sin\left(\frac{2x-5x}{2}\right) \cos\left(\frac{2x+5x}{2}\right)$$

$$A = 2 \sin\left(\frac{-3}{2}\right) \cos\left(\frac{7x}{2}\right)$$

$$A = -2 \sin\left(\frac{3}{2}\right) \cos\left(\frac{7x}{2}\right)$$

$$C = \sin(4x) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$C = 2 \sin\left(\frac{4x+\frac{\pi}{2}}{2}\right) \cos\left(\frac{4x-\frac{\pi}{2}}{2}\right)$$

$$C = 2 \sin\left(\frac{8x+\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{8x-\pi}{4}\right)$$

$$C = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$B = \cos x + \cos(3x)$$

$$B = 2 \cos\left(\frac{x+3x}{2}\right) \cos\left(\frac{x-3x}{2}\right)$$

$$B = 2 \cos(2x) \cos(-x)$$

$$B = 2 \cos(2x) \cos x$$

$$D = \cos(2x) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$D = -2 \cos\left(\frac{2x+\frac{\pi}{3}}{2}\right) \sin\left(\frac{2x-\frac{\pi}{3}}{2}\right)$$

$$D = -2 \cos\left(\frac{6x+\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{6x-\pi}{6}\right)$$

$$D = -2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Exercice 34

1-V 2-F 3-V

Exercice 35

$$A = \cos(2x) \cos(3x)$$

$$A = \frac{1}{2} [\cos(2x + 3x) + \cos(2x - 3x)]$$

$$A = \frac{1}{2} [\cos(5x) + \cos(-x)]$$

$$A = \frac{1}{2} [\cos(5x) + \cos x]$$

$$B = \sin x \cos(2x)$$

$$B = \frac{1}{2} [\sin(x + 2x) - \sin(x - 2x)]$$

$$B = \frac{1}{2} [\sin(3x) - \sin(-x)]$$

$$B = \frac{1}{2} [\sin(3x) + \sin(x)]$$

$$C = \sin(4x) \sin(5x)$$

$$C = \frac{1}{2} [\cos(4x - 5x) - \cos(4x + 5x)]$$

$$C = \frac{1}{2} [\cos(-x) - \cos(9x)]$$

$$C = \frac{1}{2} [\cos x - \cos(9x)]$$

Exercice 36

1) $D = \sqrt{2} \cos x + \sqrt{2} \sin x$

$$D = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right)$$

$$D = 2 \left(\cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$D = 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$$

2) $E = \sqrt{3} \cos x + 3 \sin x$

$$E = 2\sqrt{3} \left(\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \right)$$

$$E = 2\sqrt{3} \left(\sin \frac{\pi}{6} \cos x + \cos \frac{\pi}{6} \sin x \right)$$

$$E = 2\sqrt{3} \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$$

3) $F = -\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$

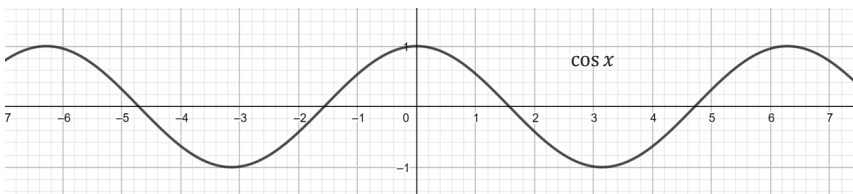
$$F = \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \cos x + \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) \sin x$$

$$F = \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right)$$

Exercice 37

1. Vrai 2. Vrai 3. Faux 4. Vrai

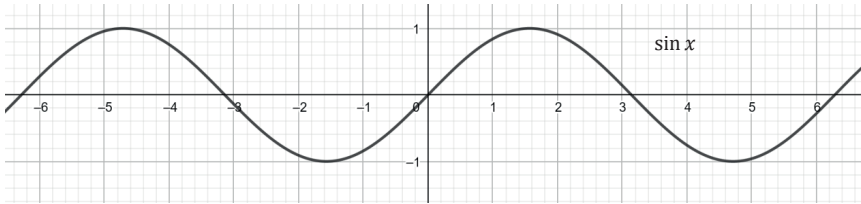
Exercice 38



Exercice 39

1. Vrai 2. Faux 3. Faux 4. Vrai

Exercice 40

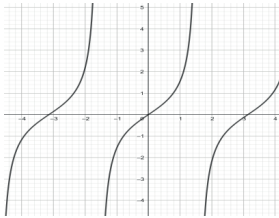


Exercice 41

1. Vrai ; 2. Vrai ; 3. Faux ; 4. Faux ; 5. Faux

Exercice 42

Reprendre la courbe page 11



Exercice 43

$$(E1) : \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$S_R = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi; x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$(E2) : \cos x = \cos \left(-\frac{3\pi}{4} \right) \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$S_R = \left\{ -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$(E3) : \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$S_R = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$(E4) : -\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$S_R = \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$(E5) : \cos x = -3; S_R = \emptyset \text{ car } -3 \text{ n'appartient pas à } [-1; 1]$$

Exercice 44

$$(E1) : S_R = \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$(E2) : S_R = \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi ; -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$(E3) : S_R = \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi ; -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$(E4) : S_R = \emptyset$$

Exercice 45

$$(E1) : \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$S_R = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi ; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$(E2) : \sin x = \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$S_R = \left\{ -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$(E3) : \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$S_R = \left\{ -\frac{\pi}{4} + 2k\pi ; \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$(E4) : \sin x = 6$$

$$S_R = \emptyset \text{ car } 6 \text{ n'appartient pas à } [-1; 1]$$

$$(E5) \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$S_R = \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi ; \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Exercice 46

$$(E1) : S_R = \emptyset$$

$$(E2) : S_R = \{2k\pi ; \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$(E3) : S_R = \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; \frac{3\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$(E4) : S_R = \left\{ -\frac{\pi}{4} + 2k\pi ; \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$(E5) : S_R = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi ; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Exercice 47

$$(E1) : \tan x = 0 \Leftrightarrow \tan x = \tan 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$S_R = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$(E2) : \tan x = -1 \Leftrightarrow \tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$$

$$S_R = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z\right\}$$

$$(E3) : \tan x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \tan x = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z$$

$$S_R = \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z\right\}$$

$$(E4) : \tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in Z$$

$$S_R = \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in Z\right\}$$

Exercice 48

$$(E1) : S_R = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z\right\}$$

$$(E2) : S_R = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z\right\}$$

$$(E3) : S_R = \left\{-\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z\right\}$$

$$(E4) : S_R = \{k\pi, k \in Z\}$$

Exercice 49

$$(E1) : \sqrt{3} \cos x + 3 \sin x = 0$$

$$2\sqrt{3} \left(\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x\right) = 0$$

$$\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos x + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin x = 0$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{2}$$

on a : $x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in Z$$

$$S_R = \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z\right\}$$

$$(E2) : 3 \cos x - \sqrt{3} \sin x = \sqrt{3}$$

$$2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x\right) = \sqrt{3}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \cos x + \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z$$

$$S_R = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z \right\}$$

$$(E3) : -\cos x + \sin x - \sqrt{2} = 0$$

$$-\cos x + \sin x = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) = \sqrt{2}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = 1$$

$$\cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) \cos x + \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right) \sin x = 1$$

$$\cos \left(x - \frac{3\pi}{4} \right) = \cos 0$$

$$x - \frac{3\pi}{4} = 0 + 2k\pi, k \in Z$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in Z$$

$$S_R = \left\{ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in Z \right\}$$

$$(E4) : -\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x + 1 = 1$$

$$-\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x = 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) = 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = 0$$

$$\cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos x + \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin x = 0$$

$$\cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{2}$$

$$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in Z$$

$$S_R = \left\{ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in Z \right\}$$

$$(E5) : \sqrt{3} \cos x - \sin x + \sqrt{3} = 0$$

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x = -\sqrt{3}$$

$$2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x \right) = -\sqrt{3}$$

$$\left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) \cos x + \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \sin x \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

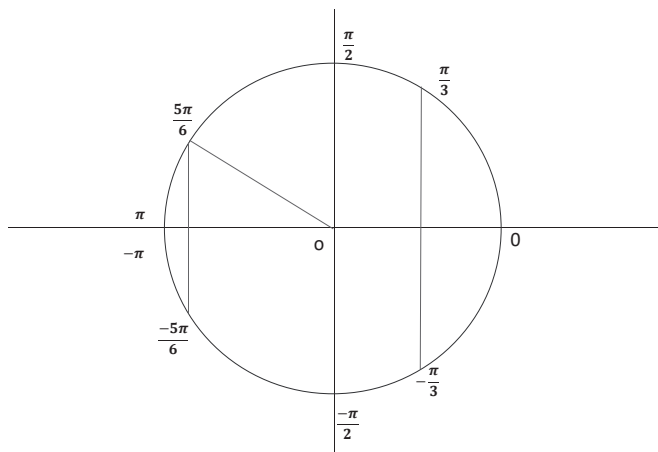
$$\cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = \cos \left(\frac{5\pi}{6} \right)$$

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in Z$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\pi + 2k\pi, k \in Z$$

$$S_R = \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, -\pi + 2k\pi, k \in Z \right\}$$

Exercise 50



$$(I_1): \cos x \leq 2$$

$$S_R = R$$

$$(I_2): \cos x \leq \frac{1}{2}$$

$$S_R = \left[-\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$$

$$(I_3): \cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_R = \left[-\pi + 2k\pi; -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$$

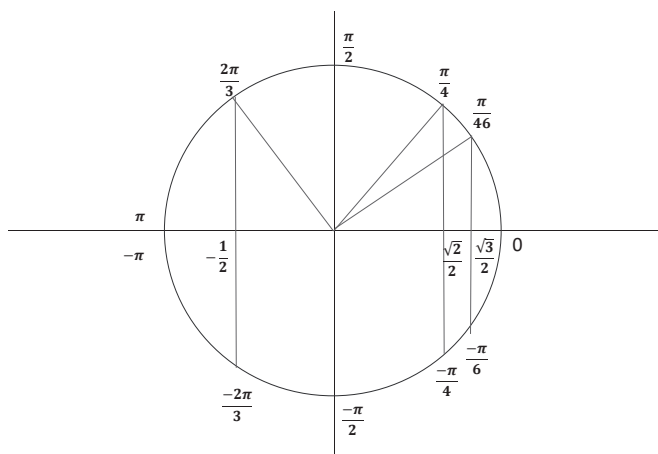
$$(I_4): \cos x \leq 0$$

$$S_R = \left[-\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$$

$$(I_5): \cos x \leq -1$$

$$S_R = \{-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$$

Exercise 51



$$(I_1) : \cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S_R = \left[-\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right] \cup \left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \pi + 2k\pi \right], k \in \mathbb{Z}$$

$$(I_2) : \cos x \geq -\frac{1}{2}$$

$$S_R = \left[-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right], k \in \mathbb{Z}$$

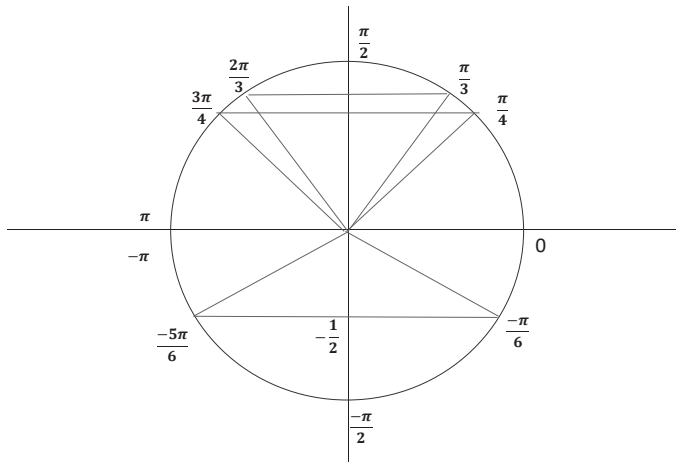
$$(I_3) : \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_R = \left[-\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \right] \cup \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \pi + 2k\pi \right], k \in \mathbb{Z}$$

$$(I_4) : \cos x > 1$$

$$S_R = \emptyset$$

Exercise 52



$$(I_1) : \sin x \leq -\frac{1}{2}$$

$$S_R = \left[-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \right], k \in \mathbb{Z}$$

$$(I_2) : \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S_R = \left[-\pi + 2k\pi; \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right] \cup \left[\frac{3\pi}{4} + 2k\pi; \pi + 2k\pi \right], k \in \mathbb{Z}$$

$$(I_3) : \sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_R = \left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right], k \in \mathbb{Z}$$

$$(I_4) : \sin x \leq 3$$

$$S_R = \mathbb{R}$$

$$(I_5) : \sin x \geq -\frac{3}{2}$$

$$S_R = R$$

Exercice 53

$$(I_1) : \sin x \leq -\frac{1}{2}$$

$$S_R = \left[-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \right], k \in Z$$

$$(I_2) : \sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S_R = \left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \right], k \in Z$$

$$(I_3) : \sin x > 2$$

$$S_R = \emptyset$$

$$(I_4) : \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_R = \left] -\pi + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi \left[U \left] \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \pi + 2k\pi \left[, k \in Z$$

Exercice 54

$$(I_1) : \tan x < \sqrt{3}$$

$$S_R = \left] -\pi + k\pi; -\frac{2\pi}{3} + k\pi \left[U \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{3} + k\pi \left[U \right] \frac{\pi}{2} + k\pi; \pi + 2k\pi \left[k \in Z$$

$$(I_2) : \tan x \leq 0$$

$$S_R = \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi; k\pi \left[U \right] \frac{\pi}{2} + k\pi; \pi + k\pi \left[, k \in Z$$

$$(I_3) : \tan x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

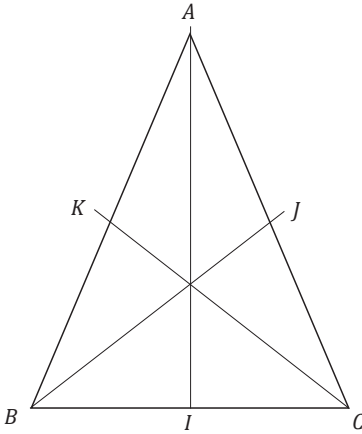
$$S_R = \left[-\frac{5\pi}{6} + k\pi; -\frac{\pi}{2} + k\pi \left[U \left[\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \left[, k \in Z$$

$$(I_4) : \tan x \geq -1$$

$$S_R = \left] -\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \left[U \right] \frac{3\pi}{4} + k\pi; \pi + k\pi \left[$$

EXERCICES DE RENFORCEMENT / APPROFONDISSEMENT

Exercice 55



$$\text{mes}(\widehat{AB, CA}) = -\frac{2\pi}{3}$$

$$\text{mes}(\widehat{AB, CO}) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{mes}(\widehat{AB, IJ}) = \pi$$

$$\text{mes}(\widehat{AI, IJ}) = \frac{5\pi}{6}$$

Exercice 56

- 1) $\text{mes}(\widehat{AB, AJ}) = \frac{\pi}{3}$, $\text{mes}(\widehat{AD, AJ}) = -\frac{\pi}{6}$
- 2) $\text{mes}(\widehat{JA, JD}) = -\frac{\pi}{3}$; $\text{mes}(\widehat{DA, DJ}) = \frac{\pi}{2}$; $\text{mes}(\widehat{DC, DJ}) = 0$
- 3) $\text{mes}(\widehat{CB, CK}) = \frac{\pi}{3}$; $\text{mes}(\widehat{CD, CK}) = \frac{2\pi}{3}$
- 4) $\text{mes}(\widehat{KC, KD}) = \frac{\pi}{9}$, $\text{mes}(\widehat{DC, DK}) = -\frac{\pi}{18}$
- 5) $\text{mes}(\widehat{BK, BJ}) = \frac{\pi}{2}$; $\text{mes}(\widehat{JB, JK}) = \frac{2\pi}{9}$; $\text{mes}(\widehat{CJ, JA}) = \frac{\pi}{3}$

Exercice 57

- 1) $\text{mes}(\widehat{DG, DF}) = \frac{\pi}{6}$; $\text{mes}(\widehat{GF, GD}) = \frac{\pi}{6}$
- 2) $\text{mes}(\widehat{GE, GD}) = \text{mes}(\widehat{GE, GF}) + \text{mes}(\widehat{GF, GD}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$
 $\text{mes}(\widehat{GE, GD}) = \frac{\pi}{2}$

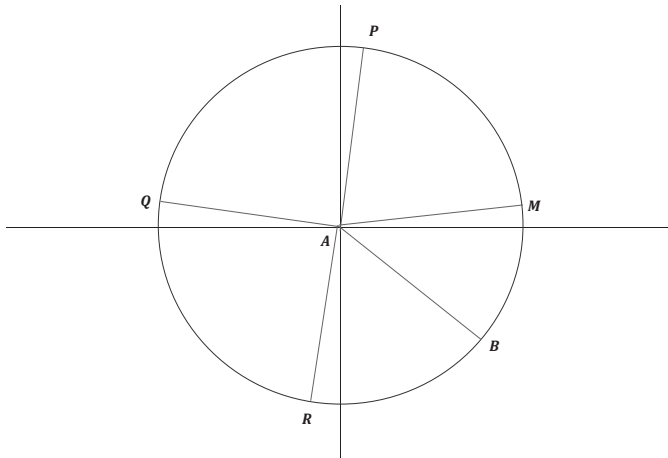
Donc le triangle EGD est rectangle en G

Exercice 58

- 1) $\text{mes}(\widehat{AB, AC}) = \frac{\alpha}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 $\text{mes}(\widehat{BA, BC}) = \alpha - \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 $\text{mes}(\widehat{BA, BD}) = \frac{\alpha - \pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- 2) $\text{mes}(\widehat{AB + AD; AB - AD}) = \text{mes}(\widehat{AC, DB}) = -\frac{\pi}{2}$

Exercise 59

1)



$$\begin{aligned} 2) \text{ A) } \text{mes}(\widehat{AM, AP}) &= \text{mes}(\widehat{AM, AB}) + \text{mes}(\widehat{AB, AP}) \\ &= -\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} \\ \text{mes}(\widehat{AM, AP}) &= \frac{5\pi}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{B) } \text{mes}(\widehat{AQ, AM}) &= \text{mes}(\widehat{AQ, AB}) + \text{mes}(\widehat{AB, AM}) \\ &= \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \\ \text{mes}(\widehat{AQ, AM}) &= \frac{13\pi}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{C) } \text{mes}(\widehat{AR, AP}) &= \text{mes}(\widehat{AR, AB}) + \text{mes}(\widehat{AB, AP}) \\ &= \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \\ \text{mes}(\widehat{AR, AP}) &= \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D) } \text{mes}(\widehat{AP, AQ}) &= \text{mes}(\widehat{AP, AB}) + \text{mes}(\widehat{AB, AQ}) \\ &= -\frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{6} \\ \text{mes}(\widehat{AP, AQ}) &= -\frac{9\pi}{6} \end{aligned}$$

Exercise 60

$$\begin{aligned} 1) \quad A &= \sin(x - \pi) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(x + \pi) - 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ A &= -\sin(\pi - x) + \cos x - \cos x - 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ A &= -\sin x - 2 \sin x \\ A &= -3 \sin x \end{aligned}$$

$$2) B = \sin x \sin 3x + \cos x \cos 3x$$

$$B = \cos x \cos 3x + \sin x \sin 3x$$

$$B = \cos(x - 3x)$$

$$B = \cos(-2x)$$

$$B = \cos(2x)$$

Exercice 61

$$* E = \cos(x + \pi) + \cos(x - 5\pi) + \sin(x - \pi) - \sin(x + 2\pi)$$

$$E = \cos(x + \pi) + \cos(x - \pi) + \sin(x - \pi) - \sin(x + 2\pi)$$

$$E = -\cos x + \cos(\pi - x) - \sin(\pi - x) - \sin(x + 2\pi)$$

$$E = -\cos x - \cos x - \sin x - \sin x$$

$$E = -2 \cos x - 2 \sin x$$

$$* F = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x + \frac{5\pi}{2}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x + \frac{7\pi}{2}\right)$$

$$F = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$F = \sin x - \sin x - \cos x + \cos x$$

$$F = 0$$

Exercice 62

$$* I = \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos x + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$$

$$I = \cos x \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sin x \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos x + \cos x \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - \sin x \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$I = -\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \cos x + \cos x \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) - \sin x \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$I = -\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \cos x - \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$$

$$I = -\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$$

$$I = 0$$

$$* J = \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) + \sin x$$

$$J = \sin x \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos x \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin x \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \cos x \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \sin x$$

$$J = -\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \sin x \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \cos x \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \sin x$$

$$J = -\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \sin x$$

$$J = -\frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \sin x + \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x$$

$$J = 0$$

Exercice 63

$$\forall x \in R, P = \cos^4 x - \sin^4 x$$

$$p = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$P = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$P = \cos(2x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, Q = \cos^4 x + \sin^4 x$$

$$Q = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2$$

$$Q = \frac{1+\cos^2 2x}{2}$$

$$Q = \frac{1+\frac{1+\cos 4x}{2}}{2}$$

$$Q = \frac{3+\cos 4x}{4}$$

$$Q = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$$

Exercise 64

$$1 \cos^3 x = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos x$$

$$2. \sin^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x$$

Exercise 65

$$1) \cos(3x) = \cos(2x + x)$$

$$\cos(3x) = \cos(2x)\cos x - \sin(2x)\sin x$$

$$\cos(3x) = (\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x - 2\sin x \cos x \cdot \sin x$$

$$\cos(3x) = \cos^3 x - \sin^2 x \cos x - 2\sin^2 x \cos x$$

$$\cos(3x) = \cos^3 x - (1 - \cos^2 x)\cos x - 2(1 - \cos^2 x)\cos x$$

$$\cos(3x) = \cos^3 x - \cos x + \cos^3 x - 2\cos x + 2\cos^3 x$$

$$\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$2) \text{ a) } B \text{ existe si et seulement si } \cos x \neq 0 \text{ et } \sin x \neq 0$$

$$B \text{ existe si et seulement si } x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ et } x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ et } x \neq 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{b) } B = \frac{\cos 3x}{\cos x} - \frac{\sin 3x}{\sin x}$$

$$B = \frac{4\cos^3 x - 3\cos x}{\cos x} - \frac{3\sin x - 4\sin^3 x}{\sin x}$$

$$B = \frac{\cos x(4\cos^2 x - 3)}{\cos x} - \frac{\sin x(3 - 4\sin^2 x)}{\sin x}$$

$$\text{Pour } x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ et } x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ et } x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ on a}$$

$$B = 4\cos^2 x - 3 - (3 - 4\sin^2 x)$$

$$B = 4\cos^2 x - 3 - 3 + 4\sin^2 x$$

$$B = 4(\cos^2 x + \sin^2 x) - 6$$

$$B = 4 - 6$$

$$B = -2$$

Exercise 66

$$1) \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, 1 + \tan^2 x = 1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2$$

$$1 + \tan^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \quad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

2) a) on a $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}$$

$$\cos^2 x = \frac{4}{5}$$

comme $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x > 0$ donc $\cos x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

on a : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ donc $\sin^2 x = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

comme $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x > 0$ donc $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}$

b) on a $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \frac{3}{4}}$$

$$\cos^2 x = \frac{4}{7}$$

comme $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, $\cos x > 0$ donc $\cos x = \frac{2\sqrt{7}}{7}$

on a : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ donc $\sin^2 x = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$

comme $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, $\sin x = \sqrt{\frac{3}{7}}$

Exercice 67

1-

$$A = \cos x - \sqrt{3} \sin x$$

$$A = 2 \left(\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \right)$$

$$A = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} \cos x - \sin \frac{\pi}{3} \sin x \right)$$

$$A = 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$B = -\sqrt{3} \cos x + \sin x$$

$$B = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \right)$$

$$B = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} \cos x + \sin \frac{5\pi}{6} \sin x \right)$$

$$B = 2 \cos \left(x - \frac{5\pi}{6} \right)$$

2- a) $A = -1 \Leftrightarrow 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = -1$

$$\Leftrightarrow \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right)$$

$$A = -1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$S_R = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi; -\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

b) $B = \sqrt{3} \Leftrightarrow 2 \cos \left(x - \frac{5\pi}{6} \right) = \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x - \frac{5\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$S_R = \left\{ \pi + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Exercice 68

1) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\cos^2 x = 1 - \left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{5}\right)^2$$

$$\cos^2 x = 1 - \frac{(2-2\sqrt{12}+6)}{16}$$

$$\cos^2 x = 1 - \frac{(8-4\sqrt{3})}{16}$$

$$\cos^2 x = \frac{16-8+4\sqrt{3}}{16}$$

$$\cos^2 x = \frac{8+4\sqrt{3}}{16} = \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2$$

$$\text{donc } \cos x = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \text{ ou } \cos x = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

2) On a $\sin x < 0$ donc $x \in]-\frac{\pi}{2}; 0[$

$$\text{d'où } x = -\frac{\pi}{12}$$

Exercice 69

1. $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \text{ donc } \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

2. On a $\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$ donc $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Exercice 70

$$(E_1) : S_R = \left\{ \frac{\pi}{24} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{7\pi}{48} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$(E_2) : S_R = \left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \{ k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$$

$$(E_3) : S_R = \left\{ \frac{11\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$(E_4) : S_R = \left\{ \frac{4\pi}{15} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{5\pi}{15} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Exercice 71

$$(E_1) : S_R = \left\{ -\frac{5\pi}{24} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{19\pi}{40} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$(E_2) : S_R = \left\{ \frac{23\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$(E_3) : S_R = \left\{ \frac{7\pi}{24} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{24} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$(E_4) : S_R = \left\{ \frac{5\pi}{24} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{3\pi}{56} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Exercice 72

$$(E_1) : S_R = \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$(E_2) : S_R = \left\{ \frac{-5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$(E_3) : S_R = \left\{ -\frac{6\pi}{35} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$(E_4) : S_R = \left\{ -\frac{23\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Exercice 73

$$(I) : S_R = \left] -\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}; \frac{-5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \right[\cup \left] \frac{11\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}; \frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \right[, k \in \mathbb{Z}$$

$$(J) : S_R = \left] -\frac{61\pi}{132} + k\pi; \frac{-\pi}{22} + k\pi \right[\cup \left] \frac{-\pi}{22} + k\pi; \frac{49\pi}{66} + k\pi \right[, k \in \mathbb{Z}$$

$$(K) : S_R = \left] \frac{\pi}{9} + 2k\pi; \frac{7\pi}{9} + 2k\pi \right[\cup \left] \frac{-11\pi}{9} + 2k\pi; \frac{-5\pi}{9} + 2k\pi \right[, k \in \mathbb{Z}$$

Exercice 74

$$(I_1) : S_R = \left[-2\pi + 2k\pi; \frac{-4\pi}{3} + 2k\pi \right]$$

$$(I_2) : S_R = \left[\frac{\pi}{12} + k\pi; \frac{2\pi}{3} + k\pi \right] \cup \left[\frac{-\pi}{3} + k\pi; -\pi + k\pi \right] , k \in \mathbb{Z}$$

$$(I_3) : S_R = \mathbb{R}$$

Exercice 75

$$(I_1) : S_R = \left] \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}; \frac{19\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{-\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}; \frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \right[, k \in \mathbb{Z}$$

$$(I_2) : \tan(3x - \pi) \leq -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$(I_2) \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + k\pi < 3x - \pi < \frac{5\pi}{6} + k\pi \text{ ou } \frac{\pi}{2} + k\pi < 3x - \pi < \frac{5\pi}{6} + k\pi$$

$$(I_2) : S_R = \left] \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}; \frac{5\pi}{18} + \frac{k\pi}{3} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{3}; \frac{11\pi}{18} + \frac{k\pi}{3} \right[, k \in \mathbb{Z}$$

$$(I_3) \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + k\pi < x - \frac{\pi}{9} < \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } -\frac{2\pi}{3} + k\pi < x - \frac{\pi}{9} < -\frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\text{donc } S_R = \left] \frac{4\pi}{9} + k\pi; \frac{11\pi}{18} + k\pi \right[\cup \left] \frac{-5\pi}{9} + k\pi; \frac{-7\pi}{18} + k\pi \right[, k \in \mathbb{Z}$$

Exercice 76

$$(I_1) \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$

$$\text{donc } S_R = \mathbb{R}$$

$$(I_2) \Leftrightarrow 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{donc } S_R = \left[-\frac{4\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right]$$

$$(I_3) \Leftrightarrow 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{donc } S_R = \left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \pi + 2k\pi \right]$$

Exercice 77

$$(E_1) \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)$$

$$\text{Donc } S_R = \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in Z \right\} \cup \{ \pi + 2k\pi, k \in Z \}$$

$$(E_2) \Leftrightarrow \sin\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{donc } S_R = \left\{ \frac{-\pi}{15} + k\pi, k \in Z \right\} \cup \left\{ \frac{23\pi}{80} + \frac{k\pi}{2}, k \in Z \right\}$$

Exercice 78

$$(I_1) \Leftrightarrow \cos\left(-3x + \frac{3\pi}{8}\right) \leq \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin\left(-x + \frac{\pi}{48}\right) \sin\left(-2x + \frac{17\pi}{48}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq -x + \frac{\pi}{48} \leq \pi \text{ et } 0 \leq -2x + \frac{17\pi}{48} \leq \pi \text{ ou } -\pi \leq -x + \frac{\pi}{48} \leq 0 \text{ et } -\pi \leq -2x + \frac{17\pi}{48} \leq 0$$

$$\frac{17\pi}{48} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{47\pi}{48} \leq x \leq \frac{\pi}{48} \text{ et } -\frac{31\pi}{96} \leq x \leq \frac{17\pi}{96} \text{ ou } \frac{\pi}{48} \leq x \leq \frac{49\pi}{48} \text{ et } \frac{17\pi}{96} \leq x \leq \frac{65\pi}{96}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{31\pi}{96} \leq x \leq \frac{\pi}{48} \text{ ou } \frac{17\pi}{96} \leq x \leq \frac{65\pi}{96}$$

$$\text{Donc } S_R = \left[-\frac{31\pi}{96}; \frac{\pi}{48} \right] \cup \left[\frac{17\pi}{96}; \frac{65\pi}{96} \right]$$

$$(I_2) \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right) - \sin\left(-x - \frac{\pi}{18}\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin\left(x - \frac{13\pi}{180}\right) \cos\left(-\frac{23\pi}{90}\right) \leq 0 \text{ or } \cos\left(-\frac{23\pi}{90}\right) > 0$$

$$\text{donc } -\pi \leq x - \frac{13\pi}{180} \leq 0 \text{ d'ou } -\frac{167\pi}{180} \leq x \leq \frac{13\pi}{180}$$

$$\text{donc } S_R = \left[-\frac{167\pi}{180}; \frac{13\pi}{180} \right]$$

Exercice 79 (énoncé à revoir)

Exercice 80

$$1) (E_1): 2 \cos^2 x - 3 \cos x - 2 = 0$$

$$\text{posons } X = \cos x$$

$$(E_1): 2X^2 - 3X - 2 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2)$$

$$\Delta = 25$$

$$X_1 = -\frac{1}{2} \text{ et } X_2 = 2$$

$$\text{on a: } \cos x = -\frac{1}{2} \text{ et } \cos x = 2$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \text{ car } \cos x \neq 2$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z$$

$$S_R = \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z \right\}$$

$$\cos^2 x - 2 \cos x + 1 = 0$$

$$(\cos x - 1)^2 = 0$$

$$(\cos x - 1) = 0$$

$$\cos x = 1$$

$$\cos x = \cos 0$$

$$x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$S_R = \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$2) \text{ (F}_1\text{): } \sin^2 x - \sin x - 6 = 0$$

$$\text{posons } X = \sin x$$

$$\text{(F}_1\text{): } X^2 - X - 6 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6)$$

$$\Delta = 25$$

$$X_1 = \frac{1-5}{2} \text{ et } X_2 = \frac{1+5}{2}$$

$$X_1 = -2 \text{ et } X_2 = 3$$

on a $\sin x = -2$ ou $\sin x = 3$ (impossible)

$$S_R = \emptyset$$

$$\text{(F}_2\text{): } \sin^2 x + 2 \sin x + 1 = 0$$

$$(\sin x + 1)^2 = 0$$

$$\sin x + 1 = 0$$

$$\sin x = -1$$

$$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$S_R = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$3) \text{ (T}_1\text{): } -\tan^2 x + 2 \tan x - 1 = 0$$

$$\tan^2 x - 2 \tan x + 1 = 0$$

$$(\tan x + 1)^2 = 0$$

$$\tan x + 1 = 0$$

$$\tan x = -1$$

$$\tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$S_R = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\text{(T}_3\text{): } 4 \tan^2 x + 3 \tan x + 10 = 0$$

$$\text{posons } X = \tan x$$

$$\text{(T}_3\text{): } 4X^2 + 3X + 10 = 0$$

$\Delta < 0$ donc l'équation n'admet pas de solution

$$S_R = \emptyset$$

Exercice 81

$$1) (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{6} + 2 = 5 + 2\sqrt{6}$$

$$2) \text{ (E): } -4x^2 + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})x + \sqrt{6} = 0$$

$$\Delta = 4(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 - 4 \times (-4) \times (\sqrt{6})$$

$$\Delta = 4(5 - 2\sqrt{6}) + 16\sqrt{6}$$

$$\Delta = 20 - 8\sqrt{6} + 16\sqrt{6}$$

$$\Delta = 20 + 8\sqrt{6}$$

$$\Delta = 4(5 + 2\sqrt{6})$$

$$\Delta = (2(\sqrt{3} + \sqrt{2}))^2$$

$$x_1 = \frac{-2(\sqrt{3}-\sqrt{2})-2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{-8} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2(\sqrt{3}-\sqrt{2})+2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{-8}$$

$$x_1 = \frac{-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{-8} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{-8}$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S_R = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

3) (E₁): $\forall x \in [0, 2\pi[, -4 \cos^2 x + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cos x + \sqrt{6} = 0$
 posons $X = \cos x$

$$(E_1): -4X^2 + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})X + \sqrt{6} = 0$$

on a donc : $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos x = \cos \frac{\pi}{6} \quad \text{ou} \quad \cos x = \cos \left(\frac{3\pi}{4} \right)$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

* cherchons les entiers relatifs k tels que $0 \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi < 2\pi$

on obtient $-\frac{1}{12} \leq k \leq \frac{11}{12}$ donc $k = 0$

D'où $x = \frac{\pi}{6}$

* cherchons les entiers relatifs k tels que $0 \leq -\frac{\pi}{6} + 2k\pi < 2\pi$

on obtient $k = 1$ donc $x = \frac{11\pi}{6}$

* cherchons les entiers relatifs k tels que $0 \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi < 2\pi$

on obtient $k = 0$ donc $x = \frac{3\pi}{4}$

* cherchons les entiers relatifs k tels que $0 \leq -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi < 2\pi$

on obtient $k = 1$ donc $x = \frac{5\pi}{4}$

$$\text{Ainsi } S_{[0, 2\pi[} = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\}$$

4) Procédé de la même manière avec les sinus

Exercice 82

Remarque : ces types d'exercices sont à la limite du programme officiel. On pourrait les proposer dans des activités de recherche en groupe.

$$(I_1): x \in [0, 2\pi[, 2 \cos^2 x + 7 \cos x - 5 < 0$$

posons $X = \cos x$, donc X est compris entre -1 et 1

On a : $2X^2 + 7X - 5 < 0$

$2X^2 + 7X - 5 = 0$ admet deux solutions $\frac{-7+\sqrt{89}}{4}$ ou $\frac{-7-\sqrt{89}}{4}$, X est compris entre -1 et 1 .

Donc, si $2X^2 + 7X - 5 < 0$, alors $X < \frac{-7+\sqrt{89}}{4}$, soit $\cos x < \frac{-7+\sqrt{89}}{4}$

Une valeur approchée de $\frac{-7+\sqrt{89}}{4}$ est $0,608$, donc il existe un unique réel α élément de $[0 ;$

$\pi]$, tel que $\cos \alpha = \frac{-7+\sqrt{89}}{4}$. En utilisant la touche \cos^{-1} de la calculatrice, une valeur approchée de α est $0,9166$. L'utilisation de la représentation graphique de la fonction \cos sur $[0 ; 2\pi]$ ou du cercle trigonométrique indique que : $S =]\alpha ; 2\pi - \alpha [$

(I₂): En posant $X = \cos x$, on vérifie que X est entre -2 et 4 , donc $S = \mathbb{R}$

(I₃): x est un nombre réel, $5\cos^2 x - 7\cos x - 6 \geq 0$

posons $X = \cos x$

(I₃): $5X^2 - 7X - 6 \geq 0$

La factorisation indique : $5(X+\frac{3}{5})(X-2) \geq 0$, soit $X < -\frac{3}{5}$ ou $\cos x < -0,6$

$-0,6$ est entre -1 et 1 , donc il existe un nombre réel unique β compris entre 0 et π tel que $\cos \beta = -0,6$

Une valeur approchée de β est $2,214$. Le cercle trigonométrique indique que les solutions dans \mathbb{R} sont les intervalles du type $[\beta + 2k\pi ; -\beta + 2(k+1)\pi]$ où k est un entier relatif quelconque.

Exercice 83

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos(10) \\ \cos(ab) = \cos(22) \end{cases}$$

$$a+b = 10 \text{ ou } a+b = -10$$

$$ab = 22 \text{ ou } ab = -22$$

a et b sont solutions de l'équation :

$$1) x^2 - 10x + 22 = 0$$

$$x = 5 + \sqrt{3} \text{ ou } x = 5 - \sqrt{3}$$

$$2) x^2 - 10x - 22 = 0$$

$$x = 5 + \sqrt{47} \text{ ou } x = 5 - \sqrt{47}$$

$$3) x^2 + 10x + 22 = 0$$

$$x = -5 + \sqrt{3} \text{ ou } x = -5 - \sqrt{3}$$

$$4) x^2 + 10x - 22 = 0$$

$$x = -5 + \sqrt{47} \text{ ou } x = -5 - \sqrt{47}$$

Exercice 84

Remarque : ces types d'exercices sont à la limite du programme officiel. On pourrait les proposer dans des activités de recherche en groupe.

$$(I_1) : x \in [0, \pi], 3 \sin^2 x - 4 \sin x - 4 \leq 0$$

$$\text{posons } X = \sin x$$

$$(I_1) : 3X^2 - 4X - 4 \leq 0$$

$$\Delta = 9, \text{ on a : } X_1 = -\frac{5}{2} \text{ et } X_2 = -1$$

$$(I_1) : 2 \left(\sin x + \frac{2}{3} \right) (\sin x - 2) \leq 0$$

$$\text{Pour } x \in [0, \pi], \sin x - 2 < 0 \text{ et } \sin x + \frac{2}{3} > 0, \text{ donc : } S_{[0, \pi]} = [0, \pi[$$

$$(I_2) : x \in [-\pi; \pi], 2 \sin^2 x - 6 \sin x + 1 \geq 0$$

$$\text{posons } X = \sin x$$

$$(I_2) : 2X^2 - 6X + 1 \geq 0$$

L'équation $2X^2 - 6X + 1 = 0$ possède deux solutions $\frac{3-\sqrt{7}}{2}$ et $\frac{3+\sqrt{7}}{2}$

$\frac{3+\sqrt{7}}{2}$ est plus grand que 1, donc $2X^2 - 6X + 1 \geq 0$ si $X < \frac{3-\sqrt{7}}{2}$, soit $\sin x < \frac{3-\sqrt{7}}{2}$.

$\frac{3-\sqrt{7}}{2}$ est entre 0 et 1, donc il est le sinus d'un nombre unique nombre réel α compris en 0 et $\frac{\pi}{2}$

On aussi $\sin(\pi - \alpha) = \frac{3-\sqrt{7}}{2}$. En utilisant la représentation graphique de la fonction sin sur $[-\pi; \pi]$

On le cercle trigonométrique, on a : $S = [-\pi; \alpha] \cup [\pi - \alpha; \pi]$ avec α qui vaut environ 0,178

$$(I_3) : x \in [-\pi; \pi], 4 \sin^2 x + 3 \sin x + 3 > 0$$

$$\text{posons } X = \sin x$$

$$(I_3) : 4X^2 + 3X + 3 > 0$$

Le discriminant de l'équation $4X^2 + 3X + 3 = 0$ est négatif donc $S = [-\pi; \pi]$,

Exercice 85

Remarque : ces types d'exercices sont à la limite du programme officiel. On pourrait les proposer dans des activités de recherche en groupe.

$$(I_1) : x \in [-\pi; \pi], -\tan^2 x + 4 \tan x - 5 > 0$$

$$\text{posons } X = \tan x$$

$$(I_1) : -X^2 + 4X - 5 > 0$$

$$S_R = \emptyset$$

$$(I_2) : x \in [0, 2\pi], \tan^2 x + \tan x - 6 \leq 0$$

$$\text{posons } X = \tan x$$

$$(I_2) : X^2 + X - 6 < 0$$

$$\Delta = 9, \text{ on a : } X_1 = 2 \text{ et } X_2 = -3$$

$$(I_1) : (\tan x - 2)(\tan x + 3) \leq 0, \text{ donc } -3 \leq \tan x \leq 2$$

On représente la courbe (C) de la fonction tan sur $[0; 2\pi]$ et les droites (D₁) et (D₂) d'équations respectives $y = -3$ et $y = 2$. On considère la partie de la courbe (C) contenue dans la bande déterminée par les droite (D₁) et (D₂)

On utilise la touche \tan^{-1} de la calculatrice pour se donner une valeur approchée du nombre réel

$\tan^{-1}(-3)$ et $\tan^{-1}(2)$. Notons a_1 le nombre réel $\tan^{-1}(-3)$ et b_1 le nombre réel $\tan^{-1}(2)$

a_1 vaut environ 1,1 et b_1 environ 1,89. En notant a_2 et b_2 les nombres réels respectifs $a_1 + \pi$ et $b_2 + \pi$

On a d'après la courbe (C) : $S_{[0; 2\pi[} = [0; a_1] \cup [b_1; a_2] \cup [b_2; 2\pi[$

Remarque : On aurait pu utiliser le cercle trigonométrique pour résoudre l'inéquation $-3 \leq \tan x \leq 2$

Exercice 86

1) $x \in Df \iff \sin(2x) \neq 0$

$$x \in Df \iff \sin(2x) \neq \sin 0$$

$$x \in Df \iff 2x \neq 0 + 2k\pi \text{ et } 2x \neq \pi + 2k\pi$$

$$x \in Df \iff x \neq k\pi \text{ et } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$Df = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k\pi \right\} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

2) $\forall x \in Df, f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{\sin(2x)}$

$$f(x) = \frac{1 - [\cos^2 x - \sin^2 x]}{2 \sin x \cos x}$$

$$f(x) = \frac{1 - \cos^2 x + \sin^2 x}{2 \sin x \cos x}$$

$$f(x) = \frac{\sin^2 x + \sin^2 x}{2 \sin x \cos x}$$

$$f(x) = \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin x \cos x}$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$f(x) = \tan x$$

3) $\forall x \in Df, -x \in Df \text{ et } f(-x) = \tan(-x)$

$$f(-x) = -\tan x$$

$$f(-x) = -f(x)$$

f est donc impaire

Exercice 87

1. $(I_1) : \frac{2 \cos(3x) + 1}{1 - \cos(3x)} \geq 0$

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right], 1 - \cos(3x) > 0$$

$$2 \cos(3x) + 1 \geq 0 \iff x \in \left[\frac{2\pi}{9}; \frac{4\pi}{9} \right]$$

$$S_{\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]} = \left[\frac{2\pi}{9}; \frac{4\pi}{9} \right]$$

2. $(I_2) : \sin(2x) \geq \sin x$

$$(I_2) \iff 2 \sin x \cos x - \sin x \geq 0 \iff 2 \sin x (2 \cos x - 1) \geq 0 \text{ . soit } A =$$

$$2 \sin x (2 \cos x - 1)$$

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$\sin x$	-	-	+	+	
$2 \cos x - 1$	-	+	+	-	
A	+	-	+	-	

$$\text{Donc } S_{|-\pi; \pi|} =]-\pi; -\frac{\pi}{3}] \cup [0; \frac{\pi}{3}]$$

Exercice 88

$$\begin{aligned} 1) \quad A &= \cos^2 x - \cos^4 x \\ A &= \cos^2 x (1 - \cos^2 x) \\ A &= \cos^2 x \cdot \sin^2 x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad A = 0 &\Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ ou } \sin x = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{2} \text{ ou } \sin x = \sin 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = 2k\pi \text{ ou } x = \pi + 2k\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad B \text{ existe si et seulement si } x &\neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ et } x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ et } x \neq 2k\pi \text{ et } x \neq \pi + 2k\pi \\ B &= \frac{\sin^2 x - \sin^4 x}{\cos^2 x - \cos^4 x} = \frac{\sin^2 x (1 - \sin^2 x)}{\cos^2 x (1 - \cos^2 x)} = \frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = 1 \end{aligned}$$

Exercice 89

$$\begin{aligned} 1) \quad &\text{Considérons le triangle } AMD \text{ rectangle en } M. \\ &\text{Les angles } \widehat{ADM} \text{ et } \widehat{AOM} \text{ sont des angles associés donc } \text{mes } \widehat{AMD} = \frac{1}{2} \text{ mes } \widehat{AOM} \\ &\text{On a : } \sin \widehat{AMD} = \frac{AM}{AD} \text{ donc } \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ &\text{Ainsi } AM = 2r \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{aligned}$$

$$2) \quad \text{mes}(\widehat{OM, OB}) = \frac{2\pi}{3} - \alpha \text{ et } \text{mes}(\widehat{OM, OC}) = -\frac{2\pi}{3} - \alpha$$

$$3) \quad MB = 2r \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}\right) \text{ et } MC = 2r \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} 4) \quad a) \quad S &= \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}\right) \\ S &= \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \left[\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^2 + \left[\sin^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^2 \\ S &= \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^2 + \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^2 \\ S &= \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{3}{4} \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{4} \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{3}{4} \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \\ &\quad \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{4} \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{aligned}$$

$$S = \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{3}{4}\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{3}{4}\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$S = \frac{3}{2}\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{3}{2}\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$S = \frac{3}{2}\left[\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

$$S = \frac{3}{2}$$

b) la relation $MA^2 + MB^2 + MC^2$ ne dépend pas du point M car :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{3}{2}$$

$$5) A_{MBC} = \frac{MB \times BC \times MC}{4r}$$

$$A_{MBC} = \frac{2r \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}\right) \times 2r \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}\right) \times BC}{4r}$$

$$= r \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot BC$$

$$A_{MBC} = r^2 \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) \sqrt{3}$$

$$6) A_{MBC} = r^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow r^2 \sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) = r^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4} \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{1}{4} \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 3 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow 3 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - (1 - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)) = 1$$

$$\Leftrightarrow 3 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1 + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow 4 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \text{ ou } \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } \frac{\alpha}{2} = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } \frac{\alpha}{2} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\alpha = \frac{3\pi}{2} + 4k\pi \text{ ou } \alpha = -\frac{3\pi}{2} + 4k\pi \text{ ou } \alpha = \frac{\pi}{2} + 4k\pi \text{ ou } \alpha = -\frac{\pi}{2} + 4k\pi$$

Exercice 90

1) En considérant les triangles $HB'C$ et $HA'C$, les angles en A' et en B' sont droits (définition d'une hauteur), il en résulte que les points H, B', C et A' sont cocycliques et par conséquent :

$$2(\widehat{HB', HA'}) = 2(\widehat{CB', CA'})$$

2) En considérant la symétrie orthogonale S d'axe (AB) , on a : $S(H) = A'$;

$$S(B) = B \text{ et } S(A) = A.$$

La symétrie orthogonale échange un angle en son opposé, donc $(\widehat{H'A', H'B'}) = -(\widehat{HA, HB})$,

soit

$(\widehat{H'A', H'B'}) = (\widehat{HB, HA})$. Les angles $(\widehat{HA, HB})$ et $(\widehat{HA', HB'})$ sont deux angles opposés par le sommet, donc $(\widehat{HA, HB}) = (\widehat{HA', HB'})$.

3) On a $(\widehat{H'A', H'B'}) = (\widehat{HB, HA})$, d'après la question 1, $2(\widehat{HB', HA'}) = 2(\widehat{CB', CA'})$,

donc $2(\widehat{HB, HA}) = 2(\widehat{CB', CA'})$, or les points A, C et B' sont alignés et les points B, C et A'

sont alignés, donc $2(\widehat{CB', CA'}) = 2(\widehat{CA, CB})$. On a donc, $2(\widehat{HB, HA}) = 2(\widehat{CA, CB})$, or

$(\widehat{H'A', H'B'}) = (\widehat{HB, HA})$, donc $2(\widehat{H'A', H'B'}) = 2(\widehat{CA, CB})$, donc les points A, B, C et H' sont cocycliques.

Exercice 91

On effectue un changement de variable en posant que $u = 3x$. L'inéquation est équivalente à :

$$u \in [-3\pi; 3\pi], \sin u < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

On représente graphiquement la fonction sinus dans l'intervalle $[-3\pi; 3\pi]$ et la droite d'équation

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Graphiquement, on obtient : } u \in \left[-3\pi, \frac{-5\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{-4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{8\pi}{3}, 3\pi\right]$$

En revenant à la variable x , on a $x = \frac{u}{3}$, soit $x \in \left[-\pi, \frac{-5\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{-4\pi}{9}, \frac{\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{8\pi}{9}, \pi\right]$

$$S = \left[-\pi, \frac{-5\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{-4\pi}{9}, \frac{\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{8\pi}{9}, \pi\right]$$

Exercice 92

1)

$\sin 5x = \sin(4x + x) = \sin x \cos 4x + \cos x \sin 4x$. exprimons $\cos 4x$ et $\sin 4x$ en fonction de $\sin x$

Or $\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x$ et $\sin^2 2x = 4 \sin^2 x \cos^2 x = 4 \sin^2 x (1 - \sin^2 x)$. On a donc :

$$\cos 4x = 8 \sin^4 x - 8 \sin^2 x + 1$$

De même $\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x$, soit $\sin 4x = 8 \sin x \cos x (1 - 2\sin^2 x)$, donc

$$\cos x \sin 4x = 8 \sin^5 x - 12 \sin^3 x + 4 \sin x, \text{ de même}$$

$$\sin x \cos 4x = \sin x (8 \sin^4 x - 8 \sin^2 x + 1) = \sin x - 8 \sin^3 x + 8 \sin^5 x$$

$$\text{donc, } \sin 5x = 16 \sin^5 x - 20 \sin^3 x + 5 \sin x.$$

2)

$$\sin\left(5 \times \frac{\pi}{5}\right) = \sin \pi = 0, \text{ or } \sin 5x = 16 \sin^5 x - 20 \sin^3 x + 5 \sin x,$$

$$\text{donc } 16 \left(\sin \frac{\pi}{5}\right)^5 - 20 \left(\sin \frac{\pi}{5}\right)^3 + 5 \sin \frac{\pi}{5} = 0$$

3)

Il suffit de résoudre l'équation $\sin 5x = 0$, l'ensemble S des solutions est tel que :

$$S = \left\{ \frac{k\pi}{5} / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

4)

$$16 X^5 - 20 X^3 + 5 X = 0, \text{ donc } X(16 X^4 - 20 X^2 + 5) = 0. \text{ On donc } X = 0 \text{ ou } 16 X^4 - 20 X^2 + 5 = 0$$

$$\text{En posant } U = X^2, \text{ l'équation } 16 U^2 - 20 U + 5 = 0 \text{ donne pour solution } U = \frac{5 - \sqrt{5}}{8} \text{ ou } U = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}$$

$$\text{Les solutions de l'équation } X(16 X^4 - 20 X^2 + 5) = 0 \text{ sont données par } X = 0, \text{ ou } X = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$$

$$\text{ou } X = \frac{-1}{2} \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}, \text{ ou } X = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} \text{ ou } X = \frac{-1}{2} \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}.$$

5)

$0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{4}$, donc $0 < \sin \frac{\pi}{5} < \sin \frac{\pi}{4}$, (la fonction sin est croissante dans l'intervalle considérée)

Soit $0 < \sin \frac{\pi}{5} < \frac{\sqrt{2}}{2}$, parmi les valeurs possibles de $\sin \frac{\pi}{5}$, seule $0 < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} < \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc

$$\sin \frac{\pi}{5} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$$

SITUATION COMPLEXE

Exercice 93

Déterminons la mesure de l'angle orienté $(\widehat{FD, FE})$

$$\text{mes}(\widehat{FD, FE}) = \text{mes}(\widehat{FD, FA}) + \text{mes}(\widehat{FA, FB}) + \text{mes}(\widehat{FB, FE})$$

On a AFD qui est un triangle isocèle en A , donc $\text{mes}(\widehat{FD, FA}) = \frac{5\pi}{12}$

AFB est un triangle équilatéral donc $\text{mes}(\widehat{FA, FB}) = \frac{\pi}{3}$

FBE est un triangle isocèle en B donc $\text{mes}(\widehat{FB, FE}) = \frac{\pi}{4}$

$$\text{mes}(\widehat{FD, FE}) = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{5\pi + 4\pi + 3\pi}{12}$$

$$\text{mes}(\widehat{FD, FE}) = \pi$$

Les vecteurs \overrightarrow{FD} et \overrightarrow{FE} sont colinéaires les points F, D et E sont alignés. La route sera donc construite.

Exercice 94

$$P = \frac{V_0 \sin 2\alpha}{g}$$

$$\sin(2\alpha) = \frac{p \cdot g}{V_0}$$

$$\sin(2\alpha) = \frac{OC \times g}{V_0}$$

$$\sin(2\alpha) = \frac{50 \times 10}{1000}$$

$$\sin(2\alpha) = \frac{1}{2} \text{ or } \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sin(2\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$2\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } 2\alpha = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } \alpha = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Les inclinaisons parfaites sont des angles de mesure principales $\frac{\pi}{12}$ et $\frac{5\pi}{12}$

Traitement de la situation d'apprentissage

- Après la lecture de la situation d'apprentissage (par un élève, par le professeur et une lecture silencieuse des élèves), l'enseignant va procéder à l'explication éventuelle des mots difficiles. Dans le cas de cette situation, le texte ne semble pas contenir de mots ou expressions difficiles pour un élève de Première C. Toutefois le professeur donnera la parole à ses élèves afin de s'assurer que tout le monde a compris le texte.
- Il pourra ensuite faire dégager les constituants de la situation à travers une ou des questions du type :

Constituants de la situation	Exemples de questions possibles	Réponses possibles des élèves
Contexte	Où et quand se déroule la scène et qui en sont les acteurs ?	La scène se déroule dans une salle de classe. Il s'agit d'un enseignant passionné de peinture en situation de classe. Il répartit ses élèves, à cette occasion, en groupes et leur présente une maquette.
Circonstance	Indique la difficulté à laquelle les élèves sont confrontés.	Les élèves sont confrontés à l'analyse d'objets géométriques pour identifier d'éventuelles relations entre eux.
Tâche	Qu'est ce que les élèves de cette classe décident de faire ?	Enthousiasmés par la découverte de l'un d'entre eux, ces élèves redoublent d'ardeur pour mettre en évidence les transformations qui permettent d'obtenir certains objets à partir d'autres.

Le professeur profitera donc de la tâche énoncée par ses élèves pour faire la synthèse de la situation et annoncera le plan de la leçon. Il devra dans la mesure du possible se référer à la situation durant tout le déroulement de la leçon.

Découverte des habiletés

Activité 1

- L'objectif de cette activité est de connaître la nature et éléments caractéristiques de la composée de deux translations
 - Réponses aux questions de l'activité.
1. Soit \vec{u} un vecteur. On appelle translation de vecteur \vec{u} , notée $t_{\vec{u}}$, l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.
 2. Soit M un point du plan, N son image par $t_{\vec{u}}$ et M' l'image de N par $t_{\vec{u}'}$.

On a, d'une part : $t_{\vec{u}'} \circ t_{\vec{u}}(M) = M'$; et d'autre part :

$\overrightarrow{MN} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{NM'} = \vec{u}'$. D'où : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM'} = \vec{u} + \vec{u}'$, c'est-à-dire : $t_{\vec{u} + \vec{u}'}(M) = M'$. On en déduit que : $t_{\vec{u}'} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u} + \vec{u}'}$.

Si $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{u}'}$ sont deux translations de vecteurs respectifs \vec{u} et \vec{u}' , alors $t_{\vec{u}'} \circ t_{\vec{u}} = \vec{u} + \vec{u}'$.

Exercices de fixation

Exercice 1

- a) $t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{BC}} = t_{\overrightarrow{AC}}$
- b) $t_{\overrightarrow{AC}} \circ t_{\overrightarrow{BA}} = t_{\overrightarrow{BC}}$
- c) $t_{\overrightarrow{DC}} \circ t_{\overrightarrow{DA}} = t_{\overrightarrow{DB}}$



Activité 2

- L'objectif de cette activité est de connaître l'expression analytique d'une translation
- Réponses aux questions de l'activité.

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow (x' - x)\vec{i} + (y' - y)\vec{j} = a\vec{i} + b\vec{j};$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases};$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

Exercice 2

- a) $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 2 \end{cases};$
- b) A'(-1; 5).

Activité 3

- L'objectif de cette activité est de connaître la nature de la composée de deux rotations de même centre
- Réponses aux questions de l'activité.

Démonstration

1) Définition d'une rotation

Soit O un point du plan, $\hat{\alpha}$ un angle orienté dont la mesure principale est α . On appelle rotation de centre O et d'angle orienté $\hat{\alpha}$ ou encore rotation de centre O d'angle α , l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M associe le point M' tel que :

- Si $M = O$, alors : $M' = M$.
 - Si $M \neq O$, alors : $OM' = OM$ et $(\widehat{OM}, \widehat{OM'}) = \hat{\alpha}$.
- 2) a) Soit M un point du plan et M' l'image de M par $r'Or$.

Si M est égal à O , alors $r'Or(O) = O$.

Supposons que M est distinct de O . Soit M_1 l'image de M par r . Le point M' est l'image de M_1 par r' .

On en déduit que : $(\widehat{OM}, \widehat{OM_1}) = \hat{\alpha}$ et $(\widehat{OM_1}, \widehat{OM'}) = \hat{\alpha}'$. En utilisant l'égalité de Chasles : $(\widehat{OM}, \widehat{OM_1}) + (\widehat{OM_1}, \widehat{OM'}) = (\widehat{OM}, \widehat{OM'})$. On obtient : $(\widehat{OM}, \widehat{OM'}) = \hat{\alpha} + \hat{\alpha}'$. Par ailleurs, on a :

$OM = OM_1$ et $OM_1 = OM'$. Par suite : $OM = OM'$. On conclut que $r'Or$ est la rotation de centre O et d'angle orienté $\hat{\alpha} + \hat{\alpha}'$.

Exercices de fixation

Exercice 3

- a) ror est la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
- b) ror' est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
- c) $r'or$ est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Activité 4

- L'objectif de cette activité est de connaître la nature de la composée de deux rotations de centres distincts
- Réponses aux questions de l'activité.

Démonstration

- 1) a) D'après la propriété fondamentale de la rotation, on a : $(\widehat{MN}, \widehat{M_1N_1}) = \hat{\alpha}$ et $(\widehat{M_1N_1}, \widehat{M'N'}) = \hat{\alpha}'$.

b) En utilisant l'égalité de Chasles, on a : $(\widehat{MN}, \widehat{M_1N_1}) + (\widehat{M_1N_1}, \widehat{M'N'}) = (\widehat{MN}, \widehat{M'N'})$.
On obtient l'égalité demandée.

c) On a : $MN = M_1N_1$, car r conserve la distance. De même, on a : $M_1N_1 = M'N'$, car r' conserve la distance.

2) a) Si $\hat{\alpha} + \hat{\alpha}' = \hat{0}$, alors en utilisant 1)b) on obtient que les vecteurs \overline{MN} et $\overline{M'N'}$ sont colinéaires (même direction) et de même sens. Puis en utilisant 1)c), on déduit que ces vecteurs sont égaux. Si une transformation du plan « transforme » un vecteur en un vecteur de même norme, alors elle est une translation. Par conséquent, $r'or$ est une translation. Pour obtenir le vecteur de translation, déterminons

l'image du point A par $r'or$. On a : $r'or(A) = r'(A)$, car A est le centre de r . Par suite $r'or(A) = A'$.
Le vecteur de la translation $r'or$ est donc $\overrightarrow{AA'}$.

b) Si $\hat{\alpha} + \widehat{\alpha'} \neq \hat{0}$, alors en utilisant 1)b) et 1)c), on obtient que $r'or$ est une rotation d'angle orienté $\hat{\alpha} + \widehat{\alpha'}$ et de centre Ω . Puisque $r'or(A) = A'$ et $r'or(\Omega) = \Omega$, d'où : $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}) = \hat{\alpha} + \widehat{\alpha'}$ et $\Omega A = \Omega A'$. Il résulte que le centre Ω est point d'intersection de la médiatrice de $[AA']$ et de l'arc capable d'extrémités A et A' et d'angle β radians, où β est la mesure principale de l'angle orienté $\hat{\alpha} + \widehat{\alpha'}$.

Exercices de fixation

Exercice 4

La somme des angles $\frac{\pi}{2} + (-\frac{\pi}{2})$ est égale à 0, qui est $2 \times 0 \times \pi$. Par suite, $r'or$ est une translation.

$r'or$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$, où O' est l'image de O par r' .

Exercice 5

- 1) Faites une figure
- 2) Soit O' l'image de O par r' .

$r'or$ est la rotation de centre J et d'angle $\frac{\pi}{4}$, où J est le point d'intersection des médiatrices des segments $[OO']$ et $[AI]$.

Activité 5

- L'objectif de cette activité est de connaître la nature de la composée de deux homothéties de même centre
- Réponses aux questions de l'activité.

Démonstration

1. a) Pour tout point M du plan, on désigne par M_1 l'image de point M par h et par M' celle de M_1 par h' . On a : $\overrightarrow{OM_1} = k\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'} = k'\overrightarrow{OM_1}$. On en déduit que : $\overrightarrow{OM'} = kk'\overrightarrow{OM}$.
- b) Comme au a).

3. Propriété

Si h et h' deux homothéties de centre O et de rapports respectifs k et k' , alors hoh' est l'homothétie de centre O et de rapport kk' . De plus, ces deux homothéties commutent.

Exercices de fixation

Exercice 6

- a) hoh' est l'homothétie de centre B et de rapport -6 .
- b) $h'oh = hoh'$.
- c) $h''oh$ est l'homothétie de centre B et rapport 1, c'est-à-dire l'application identique du plan.

Activité 6

- L'objectif de cette activité est de connaître la nature de la composée de deux homothéties de centres différents
- Réponses aux questions de l'activité.

Démonstration

- 1) a) résulte de la propriété fondamentale des homothéties.
b) Evident d'après a).

2) a) D'après 1)b), si kk' est égal 1, alors $h'oh$ est une translation. On a : $h'oh(A) = A'$, par suite $h'oh$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

b) $h'(A) = A'$, d'où : $\overrightarrow{BA'} = k'\overrightarrow{BA}$, par suite : $\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB} = -k'\overrightarrow{AB}$. On en déduit que :
 $\overrightarrow{AA'} = (1 - k')\overrightarrow{AB}$ ou encore $\overrightarrow{AA'} = (1 - \frac{1}{k'})\overrightarrow{AB}$.

c) D'après 1)b), si kk' est différent de 1, alors $h'oh$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport kk' . Soit C l'image de Ω par h .

$$h'oh(\Omega) = \Omega \Leftrightarrow h(\Omega) = C \text{ et } h'(C) = \Omega.$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{A\Omega} \text{ (1) et } \overrightarrow{B\Omega} = k'\overrightarrow{BC} \text{ (2).}$$

En utilisant l'égalité de Chasles avec (2), on a la relation vectorielle : $\overrightarrow{B\Omega} = k'(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$, puis en introduisant (1) dans l'égalité précédente, on a : $\overrightarrow{B\Omega} = k'(\overrightarrow{BA} + k\overrightarrow{A\Omega})$ (3). En utilisant dans (3) l'égalité de Chasles, on obtient : $\overrightarrow{B\Omega} = k'(\overrightarrow{B\Omega} + \overrightarrow{\Omega A} + k\overrightarrow{A\Omega})$. En effectuant les calculs et en regroupant, on obtient : $(1 - k')\overrightarrow{B\Omega} + k'(1 - k)\overrightarrow{A\Omega} = \vec{0}$.

On a : $(1 - k') + k'(1 - k) = 1 - kk'$. Ce qui différent de zéro, car kk' est différent de 1. On en déduit que le point Ω est le barycentre des points pondérés (A, $k'(1 - k)$) et (B, $1 - k'$).

3) On va distinguer deux cas

Premier cas : $kk' = 1$

Le vecteur de la translation $h'oh$ est $(1 - \frac{1}{k'})\overrightarrow{AB}$, d'après 2)b).

En permutant les rôles des points A et B et ceux des rapports k et k' , le vecteur de la translation hoh' est $(1 - \frac{1}{k'})\overrightarrow{BA}$; qui s'écrit : $(k - 1)\overrightarrow{AB}$.

Les homothéties h et h' commutent si et seulement si $1 - \frac{1}{k} = k - 1$. D'où : $k = k' = 1$.

On en déduit que h et h' ne commutent pas si et seulement si k est différent de 1.

Deuxième cas : $kk' \neq 1$.

Les homothéties hoh' et $h'oh$ ayant le même rapport, hoh' et $h'oh$ sont égaux que s'ils ont le même centre.

Le centre de l'homothétie $h'oh$ est le barycentre des points pondérés (A, $k'(1 - k)$) et (B, $1 - k'$).

Le centre de l'homothétie hoh' est le barycentre des points pondérés $(B, k(1-k'))$ et $(A, 1-k)$, en permutant les rôles de A et B et ceux des rapports k et k' .

Ces deux barycentres ne sont pas égaux si et seulement si les pondérations des points A et B ne sont proportionnelles, c'est-à-dire si et seulement si : $\frac{k'(1-k)}{1-k} \neq \frac{1-k'}{k(1-k')}$, c'est-à-dire si et seulement si $k \neq 1$; $k' \neq 1$ et $kk' \neq 1$. On en déduit que h et h' ne commutent pas si et seulement si $k \neq 1$ et $k' \neq 1$.

Autre méthode

Soit G le barycentre des points pondérés $(A, k'(1-k))$ et $(B, 1-k')$ et H celui des points pondérés $(B, k(1-k'))$ et $(A, 1-k)$. On a : $\overrightarrow{AG} = \frac{1-k'}{1-kk'} \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH} = \frac{k(1-k')}{1-kk'} \overrightarrow{AB}$.

Par suite G n'est pas égal à H si et seulement si $k \neq 1$ et $k' \neq 1$. On en déduit que h ou h' ne commutent pas si et seulement si $k \neq 1$ et $k' \neq 1$.

Exercices de fixation

Exercice 7

h_2oh_1 est une translation car $k_1k_2 = 1$. Si cette translation admet un point invariant A, alors vecteur de translation est \overrightarrow{AA} , qui est le vecteur nul. Par suite h_2oh_1 est l'identité du plan.

Exercice 8

$h'oh$ est l'homothétie de centre A et de rapport kk' et hoh' est l'homothétie de centre B et de rapport kk' .

Activité 7

- L'objectif de cette activité est de connaître l'expression analytique d'une homothétie
- Réponses aux questions de l'activité

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow (x' - a)\vec{i} + (y' - b)\vec{j} = k(x - a)\vec{i} + k(y - b)\vec{j};$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' - a = k(x - a) \\ y' - b = k(y - b) \end{cases};$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx + (1 - k)a \\ y' = ky + (1 - k)b \end{cases}$$

Exercice de fixation

Exercice 9

1. $\begin{cases} x' = -3x + 4 \\ y' = -3y - 8 \end{cases}$
2. $A'(-5; 7)$

Activité 8

- L'objectif de cette activité est de connaître la nature de la composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles ;
- Réponses aux questions de l'activité

Démonstration

1) $S_{(D')}OS_{(D)}(M) = S_{(D')}(M_1)$, car $S_{(D)}(M) = M_1$; $S_{(D')}(M_1) = M'$. D'où : $S_{(D')}OS_{(D)}(M) = M'$.

2) a) $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'}$. Or : $\overrightarrow{MM_1} = 2\overrightarrow{HM_1}$ et $\overrightarrow{M_1M'} = 2\overrightarrow{M_1H'}$, donc : $\overrightarrow{MM'} = 2(\overrightarrow{HM_1} + \overrightarrow{M_1H'})$.

On obtient : $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{HH'}$.

b) Si $H = H'$, alors le vecteur nul est indépendant de M .

Si $H \neq H'$, alors $\overrightarrow{HH'}$ est la distance entre les droites parallèles (D) et (D') qui est indépendante de M , le sens de $\overrightarrow{HH'}$ est celui du couple (H, H') , et la direction de $\overrightarrow{HH'}$ est celle de tout vecteur normal à (D) . Par suite, le vecteur $\overrightarrow{HH'}$ est indépendant de M .

c) Soit A un point de (D) et A' son projeté orthogonal sur (D') . D'après ce qui précède, $\overrightarrow{HH'} = \overrightarrow{AA'}$.

Le vecteur \vec{u} de la translation est $2\overrightarrow{AA'}$. On en déduit que : $S_{(D')}OS_{(D)} = t_{2\overrightarrow{AA'}}$.

3) a) Les transformations $S_{(D')}OS_{(D)}$ et $S_{(D)}OS_{(D')}$ sont réciproques l'une de l'autre. Il suffit de vérifier que leur composée donne l'identité. On en déduit que $S_{(D)}OS_{(D')} = t_{-\vec{u}}$.

b) $S_{(D)}$ et $S_{(D')}$ commutent si et seulement si $t_{-\vec{u}} = t_{\vec{u}}$, c'est-à-dire $\vec{u} = \vec{0}$; autrement dit (D) est égale à (D') .

Exercices de fixation

Exercice 10

a) $t_{\overrightarrow{AD}} = S_{(JL)}OS_{(AB)}$.

b) $t_{\overrightarrow{AD}} = S_{(DC)}OS_{(JL)}$.

c) $t_{\overrightarrow{AB}} = S_{(IK)}OS_{(AD)}$.

d) $t_{\overrightarrow{CB}} = S_{(JL)}OS_{(CD)}$.

Activité 9

- L'objectif de cette activité est de connaître la nature de la composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants ;
- Réponses aux questions de l'activité

Démonstration

1) Evident

2) a) $OM = OM_1$ et $OM_1 = OM'$. D'où : $OM = OM'$.

$$(\widehat{OM, OM'}) = (\widehat{OM, OM_1}) + (\widehat{OM_1, OM'}) \text{ . Or : } (\widehat{OM, OM_1}) = 2(\widehat{u, \widehat{OM_1}}) \text{ et } (\widehat{OM_1, OM'}) = 2(\widehat{OM_1, u'}) \text{ .}$$

$$\text{donc : } (\widehat{OM, OM'}) = 2(\widehat{u, u'}) \text{ .}$$

b) L'angle orienté $(\widehat{u, u'})$ étant indépendant de M , les relations définies au a) prouvent que $S_{(D')}OS_{(D)}$ est la rotation de centre O et d'angle orienté $2(\widehat{u, u'})$.

3) a) $S_{(D)}OS_{(D')}$ est la transformation réciproque de $S_{(D')}OS_{(D)}$. Il en résulte que $S_{(D)}OS_{(D')}$ est la rotation de centre O et d'angle orienté $-\hat{\alpha}$.

b) $S_{(D)}$ et $S_{(D')}$ commutent si et seulement si $\hat{\alpha} = -\hat{\alpha}$.

$$\hat{\alpha} = -\hat{\alpha} \Leftrightarrow 2\hat{\alpha} = \hat{0}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\alpha} = \hat{0} \text{ ou } \hat{\alpha} = \hat{\pi}$$

$$\Leftrightarrow 2(\widehat{\vec{u}, \vec{u}'}) = \hat{0} \text{ ou } 2(\widehat{\vec{u}, \vec{u}'}) = \hat{\pi}$$

$$\Leftrightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{u}'}) = \hat{0} \text{ ou } (\widehat{\vec{u}, \vec{u}'}) = \hat{\pi} \text{ ou } (\widehat{\vec{u}, \vec{u}'}) = \delta \text{ ou } (\widehat{\vec{u}, \vec{u}'}) = -\delta.$$

Les droites (D) et (D') étant sécantes, $(\widehat{\vec{u}, \vec{u}'}) = \delta$ ou $(\widehat{\vec{u}, \vec{u}'}) = -\delta$. Il en résulte que (D) est orthogonale à (D').

Exercices de fixation

Exercice 11

a) $f = r\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$;

b) $g = r\left(O, -\frac{\pi}{2}\right)$;

c) $h = r\left(I, \frac{\pi}{2}\right)$;

d) $i = r\left(A, \frac{\pi}{2}\right)$.

Activité 10

- L'objectif de cette activité est de connaître les expressions analytiques des symétries orthogonales particulières
- Réponses aux questions de l'activité

Démonstration

1) Expression analytique de s_1

Soit M un point de coordonnées $(x ; y)$ et M' son image par s_1 dont les coordonnées $(x' ; y')$.

Le vecteur \vec{j} est un vecteur directeur de (D_1) .

$s_1(M) = M' \Leftrightarrow \overline{MM'}$ est orthogonal à \vec{j} et le milieu de $[MM']$ appartient à (D_1) ;

Le milieu de $[MM']$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}(x + x') ; \frac{1}{2}(y + y')\right)$.

Par suite :

$$s_1(M) = M' \Leftrightarrow \overline{MM'} \cdot \vec{j} = 0 \text{ et } \frac{1}{2}(x + x') = a;$$

$$\Leftrightarrow (x' - x) \times 0 + (y' - y) \times 1 = 0 \text{ et } x' = -x + 2a;$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x + 2a \\ y' = y \end{cases}$$

2) Expression analytique de s_2

Soit M un point de coordonnées $(x ; y)$ et M' son image par s_1 dont les coordonnées $(x' ; y')$.

Le vecteur \vec{i} est un vecteur directeur de (D_2) .

$s_1(M) = M' \Leftrightarrow \overline{MM'}$ est orthogonal à \vec{i} et le milieu de $[MM']$ appartient à (D_2) ;

Le milieu de $[MM']$ a pour coordonnées $(\frac{1}{2}(x+x'); \frac{1}{2}(y+y'))$. Par suite :

$$s_1(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} \cdot \vec{i} = 0 \text{ et } \frac{1}{2}(y+y') = b;$$

$$\Leftrightarrow (x' - x) \times 1 + (y' - y) \times 0 = 0 \text{ et } y' = -y + 2b;$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 2b \end{cases}$$

3) Expression analytique de s_3

Soit M un point de coordonnées $(x; y)$ et M' son image par s_3 dont les coordonnées $(x'; y')$.

Le vecteur $\vec{i} + \vec{j}$ est un vecteur directeur de (D_3) .

$$s_1(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} \text{ est orthogonal à } \vec{i} + \vec{j} \text{ et le milieu de } [MM'] \text{ appartient à } (D_3);$$

Le milieu de $[MM']$ a pour coordonnées $(\frac{1}{2}(x+x'); \frac{1}{2}(y+y'))$. Par suite :

$$s_1(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} \cdot (\vec{i} + \vec{j}) = 0 \text{ et } \frac{1}{2}(y+y') = \frac{1}{2}(x+x');$$

$$\Leftrightarrow (x' - x) \times 1 + (y' - y) \times 1 = 0 \text{ et } y + y' = x + x';$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' + y' = x + y \\ y + y' = x + x' \end{cases};$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

Exercices de fixation

Exercice 12

- $\begin{cases} x' = -x - 6 \\ y' = y \end{cases}$
- $A(-6; -1)$.

Des questions d'évaluation

Question 1 : Comment déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la composée de deux homothéties de centres distincts ?

Solution de l'exercice non corrigé

- a) Nature et éléments caractéristiques des transformations $h_3 \circ h_1$

Le produit des rapports $-2 \times (-\frac{1}{2})$ des homothéties h_1 et h_3 est égal à 1. Il en résulte que $h_3 \circ h_1$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$, où A' est l'image de A par h_3 . Le point A' est défini par : $\overrightarrow{AA'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

- b) Le produit des rapports -2×4 des homothéties h_1 et h_2 est égal à -8 . Ce nombre est différent de 1. Il en résulte que $h_1 \circ h_2$ est l'homothétie de rapport -9 et de centre Ω , barycentre des points pondérés (A, 1) et (B, 2). Le point Ω est défini par l'égalité vectorielle : $\overrightarrow{A\Omega} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Question 2 : Comment déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la composée de deux rotations de centres distincts ?

Exercice non corrigé 2 (A rectifier)

ABCD est un carré de sens direct. r_1 , r_2 et r_3 les rotations de centres respectifs A, O et B et d'angles respectifs $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{2}$.

Détermine la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :

- 1) $r_3 \circ r_1$;
- 2) $r_2 \circ r_1$.

Solution de l'exercice non corrigé

1. $r_3 \circ r_1$ étant la composée de deux rotations de centres distincts A et B, dont la somme des angles $\frac{\pi}{2} + (-\frac{\pi}{2})$ est nulle, est une translation. L'image de A par $r_3 \circ r_1$ est le point A' tel que $BA = BA'$ et $\text{Mes}(\widehat{BA, BA'}) = -\frac{\pi}{2}$. Le point A' est donc égal à C. On en déduit que $r_3 \circ r_1$ est la translation de vecteur \overrightarrow{AC} .
2. $r_2 \circ r_1$ étant la composée de deux rotations de centres distincts A et O, dont la somme des angles $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}$ est non nulle est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$. L'image de A par $r_2 \circ r_1$ est le point A', image de A par r_2 . Le centre Ω de cette rotation appartient à la médiatrice de $[AA']$ et à l'arc capable de $-\frac{\pi}{2}$ d'extrémités A et B.

Réalisez une figure

Question 3 : Comment déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la composée de deux symétries orthogonales d'axes distincts ?

Solution de l'exercice non corrigé 1

1. $S_{(AB)} \circ S_{(CD)} = t_{2\overline{CB}}$; car (AB) et (CD) sont parallèles
2. $S_{(IK)} \circ S_{(BC)} = t_{\overline{BA}}$; car (BC) et (IK) sont parallèles

Solution de l'exercice non corrigé 2

1. $S_{(AB)} \circ S_{(JK)} = r(P; \frac{\pi}{2})$, car (AB) et (JK) sont sécantes et $\text{Mes}(\widehat{JK, BA}) = \frac{\pi}{2}$, où P est le point d'intersection des droites (AB) et (JK). $S_{(AB)} \circ S_{(JK)}$ est donc le quart de tour direct dont le centre P est le symétrique de I par rapport à B.
2. $S_{(IK)} \circ S_{(JL)} = r(O; \pi)$, car (IK) et (JL) sont perpendiculaires en O. $S_{(IK)} \circ S_{(JL)}$ est donc la symétrie centrale de centre O.

Mes séances d'exercices

Exercices de fixation

Exercice 1

1. Faux. Cas où les vecteurs de translation sont opposés.
2. Vrai.
3. Vrai.

Exercice 2

$t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = Id \Leftrightarrow t_{-\vec{u}} \circ (t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}) = t_{-\vec{u}} \circ Id$, car $t_{-\vec{u}}$ est une bijection du plan ;

$$\Leftrightarrow (t_{-\vec{u}} \circ t_{\vec{u}}) \circ t_{\vec{v}} = t_{-\vec{u}} \circ Id, \text{ car la composition des applications est associative ;}$$

$$\Leftrightarrow Id \circ t_{\vec{v}} = t_{-\vec{u}} \circ Id; \text{ car } t_{-\vec{u}} \circ t_{\vec{u}} = Id;$$

$\Leftrightarrow t_{\vec{v}} = t_{-\vec{u}}$, car $Id \circ f = f = f \circ Id$, pour toute application du plan dans lui-même (élément neutre) ;

$$\Leftrightarrow \vec{v} = -\vec{u}.$$

Autre méthode (A préférer à l'autre)

$$t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = Id \Leftrightarrow t_{\vec{u}+\vec{v}} = t_{\vec{0}};$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} + \vec{v} = \vec{0};$$

$$\Leftrightarrow \vec{v} = -\vec{u}.$$

Ou encore :

$$t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = Id \Leftrightarrow t_{\vec{u}+\vec{v}}(M) = M, \text{ quelque soit le point M du plan ;}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{MM}, \text{ quelque soit le point M du plan ;}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} + \vec{v} = \vec{0};$$

$$\Leftrightarrow \vec{v} = -\vec{u}.$$

A vous de choisir !

Exercice 3

$$t_{\vec{BA}} \circ t_{\vec{AC}} = t_{\vec{BC}}, \text{ car } \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$$

$$t_{\vec{BA}} \circ t_{\vec{AC}} = t_{\vec{AD}}, \text{ car } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}.$$

Exercice 4

1. On construit :
 - l'image E de D par $t_{\vec{AC}}$;
 - l'image D' de E par $t_{\vec{BC}}$
2. Même démarche que précédemment.

Exercice 5

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 3 \end{cases}$$

Exercice 6

1. Faux. Cas où les deux angles sont opposés.
2. Vrai. Cette rotation est l'identité du plan.
3. Vrai.

Exercice 7

$$r(I; \frac{\pi}{2}) \circ r(I; -\frac{\pi}{4}) = r(I; \frac{\pi}{4})$$

Exercice 8

$$a) f = r(O; \frac{\pi}{2}) \circ r(O; -\frac{\pi}{4}) = r(O; \frac{\pi}{4})$$

Construisez l'image A' de A par la rotation f de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

$$b) g = r(A; \frac{\pi}{3}) \circ r(A; -\frac{2\pi}{3}) = r(A; -\frac{\pi}{3})$$

Construisez l'image B' de B par la rotation g de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

$$c) h = r(C; -\frac{\pi}{3}) \circ r(C; \frac{2\pi}{3}) = r(C; \frac{\pi}{3})$$

Construisez l'image D' de D par la rotation h de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

NB. L'élève peut construire ces images sans déterminer au préalable la nature de la composée.

Exercice 9

1. Faux. Cas de deux rotations de centres distincts et dont les angles sont opposés.
2. Faux. Cas de deux rotations dont les angles sont opposés.
3. Vrai.

Exercice 10

$r(I; \frac{\pi}{4}) \circ r(J; -\frac{\pi}{4})$ est une translation car $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0$ (à $2k\pi$ près). Soit K l'image de J par $r(I; \frac{\pi}{4})$.

$r(I; \frac{\pi}{4}) \circ r(J; -\frac{\pi}{4})$ est la translation de vecteur \overrightarrow{JK} .

Exercice 11

$r(I; \frac{\pi}{2}) \circ r(J; -\frac{\pi}{4})$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ car $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4} \neq 0$ (à $2k\pi$ près). Soit K l'image de J par $r(I; \frac{\pi}{2})$.

Le centre O de cette rotation est le point de la médiatrice [JK] qui vérifie $\text{Mes}(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OK}) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 12

Une des possibilités pour a), b) et c) est :

- Déterminer la nature de chacune des composées (Ici, ces composées sont toutes des rotations) ;
- Construire ensuite l'image du point donné par la transformation obtenue.

Exercice 13

La composée de deux homothéties de même centre est une homothétie.

Exercice 14

1. Vrai.
2. Vrai.
3. Faux.
4. Vrai.

Exercice 15

$$h(I; \frac{1}{2}) \circ h(I; -\frac{2}{3}) = h(I; -\frac{1}{3})$$

Exercice 16

- a) Construisez l'image A' de A par $h(O; \frac{1}{2})$
- b) Construisez l'image B' de B par $h(A; \frac{2}{3})$
- c) Construisez l'image D' de D par la symétrie centrale de centre C

Exercice 17

1. Faux. Cas où le produit des rapports est égal à 1.
2. Vrai.
3. Faux. La composée de deux homothéties est une homothétie ou une translation.

Exercice 18

La composée de deux homothéties de centres distincts et dont le produit égal à 1 est une translation.

Exercice 19

La composée de deux homothéties de centres distincts et dont le produit différent de 1 est une homothétie.

Exercice 20

$h_2 \circ h_1$ et $h_1 \circ h_2$ sont des translations de vecteurs non nuls, colinéaires au vecteur \overrightarrow{AB} , car le produit des rapports est égal à 1.

a) Vecteur de la translation $h_2 \circ h_1$ (au lieu de retenir des formules, on peut refaire des calculs)

Soit C l'image de A par $h_2 \circ h_1$. Le vecteur de translation de $h_2 \circ h_1$ est \overrightarrow{AC} .

$$h_2 \circ h_1(A) = C \Leftrightarrow h_2(A) = C, \text{ car } h_1(A) = A;$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA};$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \text{ (Chasles) ;}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}.$$

$h_2 \circ h_1$ est la translation de vecteur $\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

b) Vecteur de la translation $h_1 \circ h_2$

Soit D l'image de B par $h_1 \circ h_2$. Le vecteur de translation de $h_1 \circ h_2$ est \overrightarrow{BD} .

$$h_1 \circ h_2(B) = D \Leftrightarrow h_1(B) = D;$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AB};$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BA}, \text{ (Chasles) ;}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BA}.$$

$h_1 \circ h_2$ est la translation de vecteur $-3\overrightarrow{AB}$.

Exercice 21

1. Le produit des rapports est égal à 1. Donc $h(A, 2) \circ h\left(I, \frac{1}{2}\right)$ est une translation.

$h\left(I, \frac{1}{2}\right)$ transforme I en I et $h(A, 2)$ transforme I en B, car I est le milieu de $[AB]$; donc $h(A, 2) \circ h\left(I, \frac{1}{2}\right)$ transforme I en B. Il en résulte que le vecteur de $h(A, 2) \circ h\left(I, \frac{1}{2}\right)$ est \overrightarrow{IB} .

2. Le produit des rapports est égal à 1. Donc $h\left(A, \frac{1}{2}\right) \circ h(I, 2)$ est une translation.

$h(I, 2)$ transforme I en I et $h\left(A, \frac{1}{2}\right)$ transforme I en J, milieu de $[AI]$; donc $h\left(A, \frac{1}{2}\right) \circ h(I, 2)$ transforme I en J. Il en résulte que le vecteur de $h\left(A, \frac{1}{2}\right) \circ h(I, 2)$ est \overrightarrow{IJ} .

Exercice 22

Pour c) : Construis l'image D' de D par la composée $h(C, 3) \circ h\left(B, -\frac{1}{2}\right)$.

Dans cet exercice, il faut construire les images sans forcément déterminer la nature de la composée des deux homothéties. C'est l'objectif.

Il s'agit, comme des exercices précédents, d'exercer les élèves à des activités de construction.

Exercice 23

$$\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 3y \end{cases}$$

L'élève peut retrouver la formule, sans la retenir. C'est mieux ainsi.

Il peut vérifier ses calculs car le centre de l'homothétie est invariant.

Exercice 24

$$\begin{cases} x' = -2x + 3 \\ y' = -2y + 15 \end{cases}$$

L'élève peut retrouver la formule, sans la retenir.

Exercice 25

La composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles est une **translation**.

Exercice 26

La composée de deux **symétries orthogonales** d'axes parallèles est une **translation**.

Exercice 27

- La construction de C' est aisée car C appartient à (BC) ;
- La construction de D' est aisée car D appartient à (DC).

Exercice 28

La composée de deux symétries orthogonales d'axes **sécants** est une **rotation**.

Exercice 29 (répétition du 28, à sauter)

La composée de deux symétries orthogonales d'axes **sécants** est une **rotation**.

Exercice 30

- Détermine la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $S_{(IJ)} \circ S_{(DC)}$ (**A corriger**)
 $S_{(IJ)} \circ S_{(DC)} = r\left(N, \frac{\pi}{2}\right)$, où N est le symétrique de K par rapport à C.
- $S_{(AC)} \circ S_{(AB)} = r\left(A, \frac{\pi}{2}\right)$.
- $S_{(AC)} \circ S_{(IK)} = r\left(O, -\frac{\pi}{2}\right)$.

Exercice 31

- $S_{(IJ)} \circ S_{(DA)} = r\left(Q, \frac{\pi}{2}\right)$, où Q est le symétrique de L par rapport à A.
- $S_{(IK)} \circ S_{(AB)} = S_I$

Exercice 32

- Pour ce cas, remarquez que $S_{(AC)} \circ S_{(BD)} = S_O$.
- Pour ce cas, remarquez que $B \in (AB)$.

Exercice 33

Soit s la symétrie orthogonale d'axe (D) d'équation $y = -x$.

Soit M un point de coordonnées $(x ; y)$ et M' son image par s dont les coordonnées $(x' ; y')$.

$s(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à $\vec{i} - \vec{j}$ et le milieu de [MM'] appartient à (D) ;

Le milieu de $[MM']$ a pour coordonnées $(\frac{1}{2}(x + x'); \frac{1}{2}(y + y'))$. Par suite :

$$s_1(M) = M' \Leftrightarrow \overline{MM'} \cdot (\vec{i} - \vec{j}) = 0 \text{ et } \frac{1}{2}(y + y') = -\frac{1}{2}(x + x');$$

$$\Leftrightarrow (x' - x) \times 1 + (y' - y) \times (-1) = 0 \text{ et } y + y' = -x - x';$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' - y' = x - y \\ y + y' = -x - x' \end{cases};$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$$

Exercice 34

Analyse

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

r applique B sur D. Le point D appartient à (Δ) et à l'image (D') de (D) par r .

B est l'antécédent de D par r . On construit enfin le point C tel que le quadrilatère ABCD soit un carré.

Synthèse

- a) Programme de construction
 - Construire la droite (D') , image de (D) par r ;
 - Marquer le point d'intersection D de (Δ) et (D') ;
 - Construire l'antécédent de D par r .
- b) Discussion

La discussion va porter sur l'intersection de (Δ) et (D') et la transformation r qui a été utilisée.

1) Intersection de (Δ) et (D')

- Si $(\Delta) \cap (D')$ est vide, alors le point D n'existe pas et il n'y a pas de carré ABCD. C'est le cas lorsque (D) est perpendiculaire à (Δ) et le point A n'est sur aucune des bissectrices des angles de (Δ) et (D') (angle de droites $(\widehat{(D); (\Delta)})$) ;
- Si (Δ) et (D') sont confondues, alors le point D est quelconque sur (Δ) et il y a une infinité de solutions. C'est le cas lorsque (D) est perpendiculaire à (Δ) et le point A est sur l'une des bissectrices des angles de (Δ) et (D') (angle de droites $(\widehat{(D); (\Delta)})$) ;
- Si (Δ) et (D') sont sécantes, alors D est point d'intersection de (Δ) et (D') ; le point B est l'antécédent de D par r .

2) Dans le cas de la rotation r' de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, on a des résultats analogues.

Réalisez une figure correspondant à chaque cas.

Exercice 35

ABC étant un triangle de sens direct, les triangles équilatéraux AC'B, BA'C et CB'A extérieurement construits sont également de sens direct.

La rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ applique C' sur B et C sur B'. Par suite : $BB' = CC'$.

La rotation r' de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$ applique A sur C' et A' sur C. Par suite : AA' = CC'. D'où le résultat.

Exercice 36

Considérez l'homothétie h de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$. Ce lieu géométrique cherché est le cercle de centre O' et de rayon $\frac{r}{2}$, où O' est l'image de O par h et r le rayon de (C).

Exercices de renforcement/approfondissement

Exercice 37

La composée de deux homothéties dont le produit des rapports est égal à 1 est une homothétie si ces homothéties ont le même centre ou une translation si elles sont de centres différents.

Ces homothéties ne peuvent pas avoir le même centre qui est un point invariant de leur composée. Ces homothéties ont donc des centres différents. Leur composée est une translation de vecteur non nul sinon cette composée admettrait un point invariant.

Exercice 38

G est le barycentre des points pondérés (A, 1), (B, 1) et (C, 1). Par suite G est le barycentre de (A, 1) et (I, 2) et G est le barycentre de (B, 1) et (J, 2), d'après le théorème du barycentre partiel.

On en déduit que : $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BG}$. Il suit que : $h_1(I) = G$ et $h_2(G) = J$. De ce qui précède, on obtient : $h_2 \circ h_1(I) = J$.

Le produit des rapports des deux homothéties h_1 et h_2 étant égal à 1, $h_2 \circ h_1$ est la translation de vecteur \overrightarrow{IJ} .

Exercice 39

- 1) $t_{\overline{AB}} \circ t_{\overline{AD}} = t_{\overline{AC}}$
- 2) $S_{(AB)} \circ S_{(DC)} = t_{\overline{2DA}}$
- 3) $S_{(AB)} \circ S_{(AC)} = r\left(A, -\frac{\pi}{2}\right)$
- 4) $r\left(O, \frac{\pi}{2}\right) \circ r\left(A, -\frac{\pi}{2}\right) = t_{\overline{AB}}$

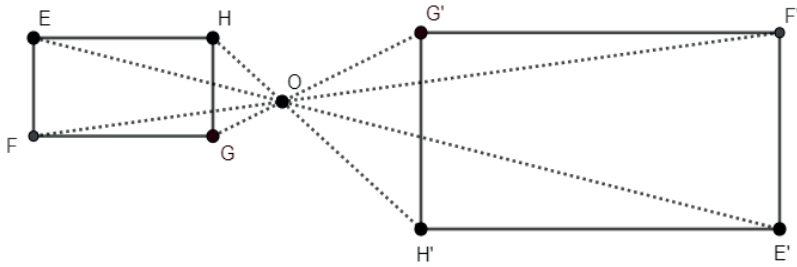
Pour 4) : $r\left(O, \frac{\pi}{2}\right) \circ r\left(A, -\frac{\pi}{2}\right)$ est une translation car la somme des angles des deux rotations est nulle. L'image par de cette composée est B. D'où le résultat.

Exercice 40

1. $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$; d'où C est l'image B par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{3}{4}$.
2. $\overline{AB} = \frac{1}{4}\overline{AC}$; d'où B est l'image C par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{4}$.
3. $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, d'où : $\overline{BC} - \overline{BA} = -\frac{3}{4}\overline{BA}$, c'est-à-dire : $\overline{BC} = \overline{BA} - \frac{3}{4}\overline{BA} = \frac{1}{4}\overline{BA}$.
4. $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, d'où : $\overline{CA} = \frac{3}{4}\overline{BA}$, ce qui donne : $\overline{CA} = \frac{3}{4}\overline{CA} - \frac{3}{4}\overline{CB}$. Par suite : $\overline{CA} = -3\overline{CB}$.

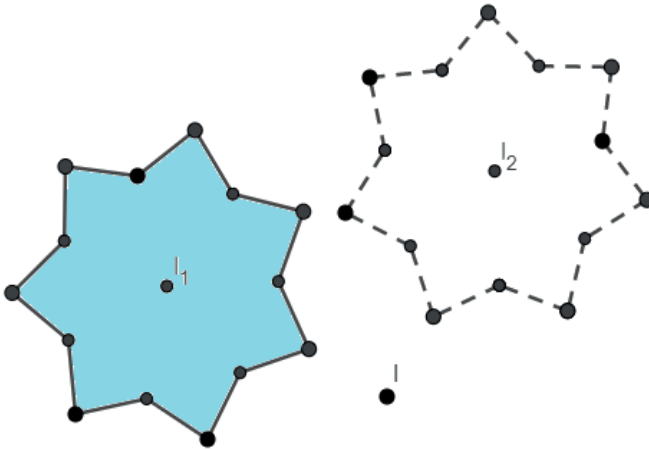
On en déduit que A est l'image B par l'homothétie de centre C et de rapport -3 .

Exercice 41



Exercice 42

On construit l'image de la figure la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.



Exercice 43

La rotation r_1 de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, applique le triplet (A, D, B) sur le triplet (A, B, C).

La rotation r_2 de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$, applique le triplet (A, B, C) sur le triplet (C, B, E).

On en déduit que $r_2 \circ r_1$ applique le triplet (A, D, B) sur le triplet (C, B, E). On conclut que $r_2 \circ r_1$ transforme le triangle ADB en le triangle CBE.

Exercice 44

Analyse

Considérez la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Le point C , image de B par r , appartient à l'image (D') de (D) par r et au cercle (C) . B est l'antécédent de C par r .

Synthèse

a) Programme de construction

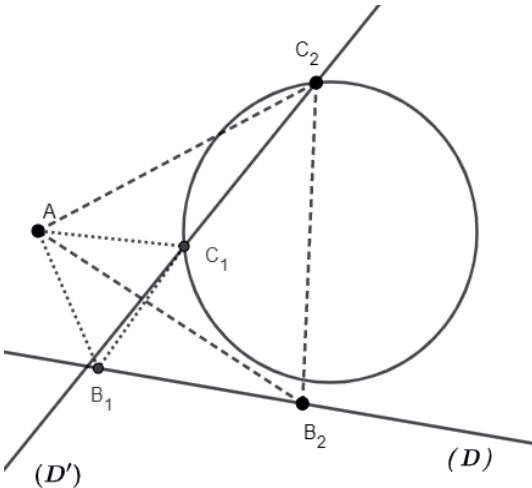
- Construire la droite (D') image de la droite (D) par la rotation r ;
- Marquer le ou les points d'intersection C est (D') et (C) . Il peut avoir deux choix possibles de C sur (C) ;
- Construire le point B antécédent du point C par r .

b) Discussion

La discussion va porter sur :

- le nombre de points d'intersection de (D') et (C) ;
- la rotation r et l'utilisation de la rotation r' de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ pour avoir des triangles équilatéraux ABC de sens indirect.

Une construction possible avec la rotation r



Exercice 45

Analyse

Soit h l'homothétie de centre P et de rapport -1 . Le point C , image de B par h , appartient à l'image (D'_1) de (D_1) par h et à la droite (D_2) . B est l'antécédent de C par h .

Synthèse

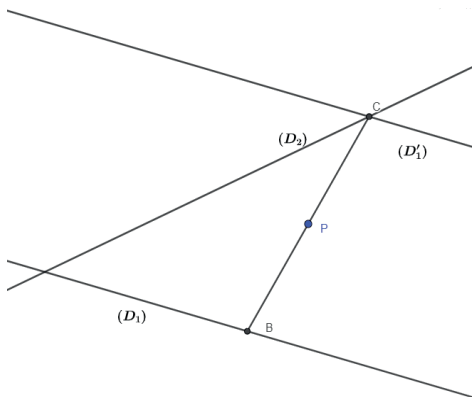
a) Programme de construction

- Construire la droite (D'_1) , image de (D_1) par h ;
- Marquer le point d'intersection C de (D'_1) et (D_2) ;
- Construire le point B , image du point C par l'homothétie de centre P et de rapport -1 ;

b) Discussion

La discussion porte sur le nombre de points d'intersection de (D'_1) et (D_2) .

Justifiez qu'il y a un seul point d'intersection de (D'_1) et (D_2) . Le problème a une seule solution.



Exercice 46

Analyse

Soit I le point d'intersection de (D_1) et (D_2) .

Le cercle à construire étant tangent à (D_1) et (D_2) a son centre équidistant de (D_1) et (D_2) . On peut construire un cercle (C_1) tangent à (D_1) et (D_2) de centre O_1 . Ce point O_1 appartient à la bissectrice de l'angle \widehat{AIB} . Le problème est qui passe pas forcément par A . Pour y arriver, traçons la droite (D) passant par A et I . Cette droite (D) coupe le cercle (C_1) en deux points J et K . Considérons l'homothétie h_1 de centre I qui applique J sur A , (une telle homothétie existe car les points I, J et A sont alignés). L'image du cercle (C_1) par h_1 est un cercle (C) passant par A . Les droites (D_1) et (D_2) passant par le centre I de l'homothétie sont globalement invariantes par celle-ci. L'homothétie conservant le contact, ces droites sont tangentes à (C) .

Synthèse

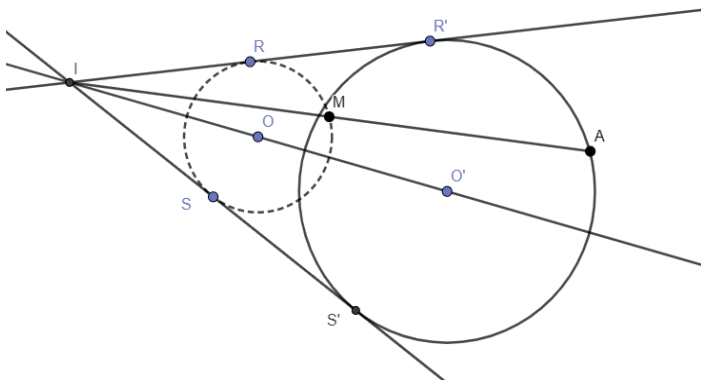
a) Programme de construction

- Construire la bissectrice de l'angle \widehat{AIB} ;
- Marquer un point O_1 sur cette bissectrice ;
- Construire un cercle (C_1) de centre O_1 tangent à (D_1) ;
- Tracer la droite (D) passant par I et A ;
- Marquer les points d'intersection J et K de (D) avec (C_1) ;
- Construire l'image (C) de (C_1) par l'homothétie de centre I qui applique J sur A .

b) Discussion

La discussion porte sur le nombre de points d'intersection de (D) avec (C₁). Le point A est déjà fixé.

Il y a deux solutions possibles en utilisant les points J et K.



Exercice 47

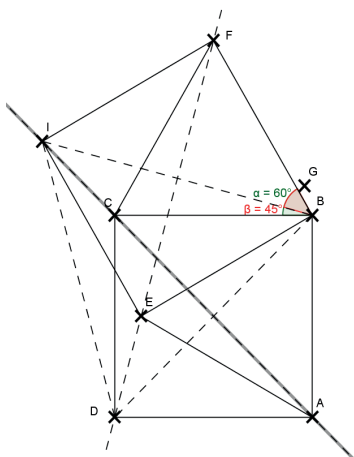
1. $BD = BI$ car diagonales respectives des carrés ABCD et BFIE qui ont même longueur de côté ($BE = BA$). On en déduit que le triangle BDI est isocèle en B.

De plus $mes(\widehat{BI, BD}) + mes(\widehat{BD, BA}) = mes(\widehat{BI, BA})$. Or $Mes(\widehat{BD, BA}) = \frac{\pi}{4}$ et

$$mes(\widehat{BI, BA}) = mes(\widehat{BI, BE}) + mes(\widehat{BE, BA}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$$

Donc $Mes(\widehat{BI, BD}) = \frac{\pi}{3}$. Donc le triangle BDI est équilatéral.

2. Considérons le segment $[BD]$. A appartient à la médiatrice du segment $[BD]$. I appartient à la médiatrice du segment $[BD]$. C appartient à la médiatrice du segment $[BD]$. Donc les points A, C et I alignés.



Exercice 48

Considérons les triangles NMT et $N'M'T$. Ces deux triangles sont semblables car leurs angles sont de mesures égales deux à deux. Donc, il existe un nombre réel non nul tel que

$\overrightarrow{M'T} = k\overrightarrow{MT}$ et $\overrightarrow{N'T} = k\overrightarrow{NT}$. On définit une homothétie de centre T et de rapport k telle que

$h(M) = M'$ et $h(N) = N'$. Donc $(M'N') \parallel (MN)$.

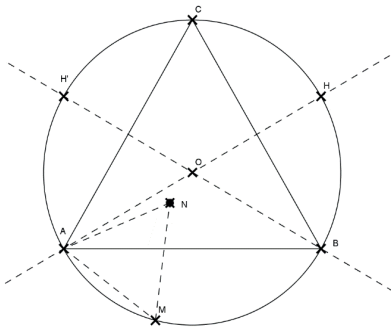
Exercice 49

- 1) a) $r(A) = B; r(B) = C$
- c) $r(OA) = (OB); r(C) = (C)$ (A justifier)
- 2) Démontrez que le triangle OHH' est isocèle en O

Evident

- 3) Soit r_1 la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ tel que $r_1(M) = N$.

Lorsque M décrit le cercle (C) privé de A , N va décrire le cercle (C') image de (C) par r_1 privé de A . (C') est le cercle de centre $H' = r_1(O)$ et de rayon AH' privé de A .



Exercice 50

Il faut ajouter extérieurement à (C) et (Δ) ne rencontre pas (C) .

Analyse

Faites cette analyse

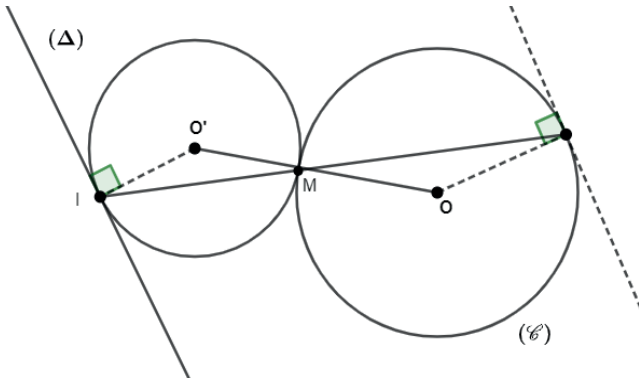
Synthèse

a) Programme de construction

- Construire une droite (Δ') parallèle à (Δ) et tangente au cercle (C) en un point M .
- On considère l'homothétie h de centre O qui transforme (Δ') en (Δ) . $h(M) = M'$. Le centre O' du cercle (Γ) est l'image du point O , centre du cercle (C) . (Γ) est tangent à (Δ) en M' et tangent à (C) en A .

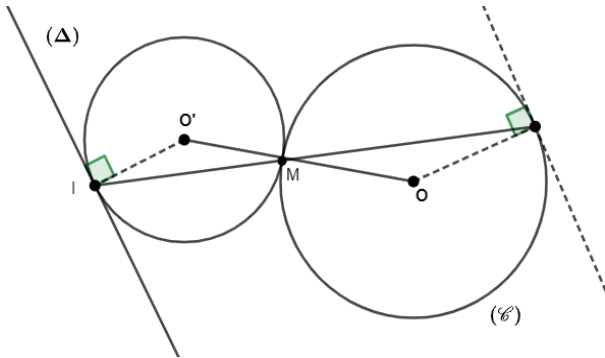
b) Discussion

Examinez le nombre de solutions



Exercice 51

Analogue au précédent



Exercice 52

- 1) G centre de gravité du triangle ABC. $\vec{GA} = -2\vec{GA}'$. On définit l'homothétie h de centre G qui transforme A' en A.
 Comme (AH) est parallèle à (OA') , alors $h((OA')) = (AH)$;
 de même $h((OB')) = (BH)$ et $h((OC')) = (CH)$.
- 2) $(OA') \cap (OB') \cap (OC') = \{O\}$; $(AH) \cap (BH) \cap (CH) = \{H\}$.
 Donc $h(O) = H$. Les O, G et H sont alignés.

Exercice 53

1. a) $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AM}$. Le point I est l'image de M par l'homothétie h de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.
- b) $\vec{BG} = \frac{2}{5}\vec{BI}$. Le point G est l'image de I par l'homothétie h' de centre B et de rapport $\frac{2}{5}$.

2. a) Lorsque M décrit [AB], I décrit l'image du cercle de diamètre [AB] par h , qui est le cercle de diamètre [AI].

b) Lorsque M décrit (AB), I décrit l'image de (AB) par h qui est la perpendiculaire à (AB) passant par I.

c) Détermine le lieu du point G lorsque M décrit la perpendiculaire à la droite (AB) en A. (Ajouter cette question)

Réponse

Lorsque M décrit la perpendiculaire à (AB) en A, le point G décrit la perpendiculaire à (AB) passant par C tel que $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BA}$.

Exercice 54

$\overrightarrow{BA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BB'}$, d'où : $\overrightarrow{BA} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AB})$; par suite : $\overrightarrow{AB'} = -2\overrightarrow{AB}$. De même : $\overrightarrow{AC'} = -2\overrightarrow{AC}$. On en déduit que l'homothétie de centre A et de rapport -2 applique B sur B' et C sur C'. Et par suite applique I sur J par conservation du milieu. On en déduit que les points A, I et J sont alignés.

Exercice 55 : Une erreur dans le texte : c'est $r'Or$

1. Faites la figure
2. La rotation r transforme B en A et la rotation r' transforme A en C et donc la composée $r'Or$ transforme B en C.
3. La composée $r'Or$ est la composée de deux rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$. Il s'agit donc d'une rotation d'angle π . C'est-à-dire il s'agit d'une symétrie centrale. Le centre est donc le milieu du segment [BC], c'est-à-dire le point K.
4.
 - a) Démontrons que K est le milieu de [IP]. On a $I = r(I)$ car I est le centre de r et on sait que $P = r'(I)$. Donc $r'Or$ transforme I en P. Il en résulte que K est le milieu de [IP].
 - b) La rotation r' d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre J transforme I en P. Il en résulte que le triangle JIP est isocèle rectangle en J ; de plus K est le milieu de [IP]. Donc le triangle IJK est isocèle rectangle en K.

Exercice 56

Enoncé

Soit D un point donné du plan. On construit un losange ABCD de sens direct tel que B soit équidistant de A et D. On considère une droite quelconque (L) passant par B.

Détermine le lieu géométrique du point C lorsque le point B décrit la droite (L).

Solution

De l'égalité $BA = BD$, il résulte que les triangles ABD et BCD sont équilatéraux de sens direct. La rotation r de centre D d'angle $\frac{\pi}{3}$ transforme B en C. Il en résulte que l'ensemble des points C est la droite (L'), image de la droite (L) par la rotation r .

Exercice 57

Solution

Soit h_1 l'homothétie de centre A et de rapport 3 et h_2 l'homothétie de centre B qui applique O sur D. Son rapport est 2.

$h_2 \circ h_1$ est l'homothétie de rapport 6, qui applique I sur D ; son centre est aligné avec I et D. Ce centre est aligné avec A et B qui sont les centres respectifs de h_1 et h_2 . Le centre de $h_2 \circ h_1$ est J. D'où le résultat.

Exercice 58

1. On a : $r_1 \circ r_2^{-1}(P) = N$; $r_1 \circ r_2^{-1}$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$. Cette rotation applique P sur N. Par suite la médiatrice de [NP] passe un point fixe, le centre K de cette rotation.
2. Pour la construction, il faut utiliser : $\text{Mes}(\widehat{KP}; \widehat{KN}) = \frac{\pi}{6}$ et K appartient à la médiatrice de [NP].

Faites la construction

Exercice 59

Soit r la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r' la rotation de centre E et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On a : $r(B) = A$ et $r'(A) = C$, d'où : $r' \circ r(B) = C$.

Or $r' \circ r$ est une rotation d'angle orienté plat, donc une symétrie centrale de centre le milieu I de [BC].

L'égalité $\overline{CF} = \overline{DB}$ entraîne que le quadrilatère DBFC est un parallélogramme de centre I. Par suite $r' \circ r(D) = F$. Or, $r' \circ r(D) = r'(D)$, donc $r'(D) = F$. On en déduit que le triangle DEF est rectangle et isocèle. Car r' est un quart de tour.

Exercice 60

- 1) Par définition $\overline{MM'} = \vec{u}$. Cette égalité est équivalente à $\begin{cases} x' - x = -2 \\ y' - y = 3 \end{cases}$; d'où le résultat.
- 2) Les coordonnées du point E' sont $(-7, 7)$.
- 3) Le système d'équations est équivalent à $\begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' - 3 \end{cases}$.

Donc les coordonnées de M' vérifient $2(x' + 2) - 3(y' - 3) + 1 = 0$, soit

$2x' - 3y' + 14 = 0$. L'image d'une droite par une translation étant une droite, la droite a pour équation $2x - 3y + 14 = 0$.

Exercice 61

- 1) Par définition, $\overline{AM'} = -\frac{1}{2}\overline{AM}$. Cette relation est équivalente à $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + 3 \\ y' = -\frac{1}{2}y - \frac{3}{2} \end{cases}$.
- 2) Le point F' a pour coordonnées $(1, \frac{3}{2})$.
- 3) Une équation de la droite (D') est $2x - 4y - 17 = 0$. Remarquons que ces deux droites sont parallèles.

Exercice 62

1. Le produit des rapports de h_1 et h_2 est $\frac{3}{2}$ qui est différent de 1. La transformation $h_2 \circ h_1$ est une homothétie de rapport $\frac{3}{2}$.
2. Le produit des rapports de h_1 et h_3 égal à 1, la transformation $h_3 \circ h_1$ est une translation.
3. a) Soit M un point du plan de coordonnées $(x; y)$; M_1 l'image de M par h_1 , de coordonnées $(x_1; y_1)$; M_2 l'image de M par h_2 , de coordonnées $(x_2; y_2)$; M_3 l'image de M par h_3 , de coordonnées $(x_3; y_3)$.

Déterminez d'abord l'expression analytique de chacune des homothéties.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ y_1 = \frac{1}{2}y + 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = 3x + 6 \\ y_2 = 3y - 10 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_3 = 2x - 2 \\ y_3 = 2y + 1 \end{cases}$$

Expression analytique de $h_2 \circ h_1$

Soit M' l'image de M par $h_2 \circ h_1$, de coordonnées $(x'; y')$. On a : $h_1(M) = M_1$ et $h_2(M_1) = M'$. D'où :

$$\begin{cases} x' = 3x_1 + 6 \\ y' = 3y_1 - 10 \end{cases}; \text{ c-à-d : } \begin{cases} x' = 3\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) + 6 \\ y' = 3\left(\frac{1}{2}y + 1\right) - 10 \end{cases}; \text{ par suite : } \begin{cases} x' = \frac{3}{2}x + \frac{15}{2} \\ y' = \frac{3}{2}y - 7 \end{cases}$$

$$\text{L'expression analytique de } h_2 \circ h_1 \text{ est : } \begin{cases} x' = \frac{3}{2}x + \frac{15}{2} \\ y' = \frac{3}{2}y - 7 \end{cases}$$

Expression analytique de $h_3 \circ h_1$

Soit M' l'image de M par $h_3 \circ h_1$, de coordonnées $(x'; y')$. On a : $h_1(M) = M_1$ et $h_3(M_1) = M'$.

$$\text{L'expression analytique de } h_3 \circ h_1 \text{ est : } \begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 3 \end{cases}$$

b) Le centre de $h_2 \circ h_1$ est l'unique point invariant par cette transformation. C'est le point I de coordonnées $(15; 14)$.

Le vecteur de translation de $h_3 \circ h_1$ est de composante $(-1; 3)$.

SITUATION COMPLEXE

Identification du problème

Le problème à résoudre est de rechercher les conditions à remplir par les rapports algébriques constants pour que le support du côté à déterminer soit parallèle au support de côté fixe ou passe par un même point du site à chaque essai et déterminer avec précision ce point.

Modélisation

La base de l'édifice est un quadrilatère ABCD tel le côté [AB] soit fixe. Soit O le point d'intersection des diagonales du quadrilatère ABCD.

Les rapports algébriques constants sont : $\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}}$ et $\frac{\overline{OB}}{\overline{OD}}$. On peut poser : $\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = k$ et $\frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} = k'$.

Il s'agit de déterminer les conditions sur k et k' pour que (CD) soit parallèle à (AB) ou passe par un point fixe à déterminer.

Outils mathématiques utilisés

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = k \text{ entraîne } \overline{OA} = k(\overline{OA} + \overline{AC}) ; \text{ d'où : } \frac{\overline{AC}}{\overline{AO}} = \frac{k-1}{k} ; (1)$$

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} = k' \text{ entraîne } \overline{OB} = k'(\overline{OB} + \overline{BD}) ; \text{ d'où : } \frac{\overline{BD}}{\overline{BO}} = \frac{k'-1}{k'} . (2)$$

$$\text{Posons : } k_1 = \frac{k-1}{k} \text{ et } k'_1 = \frac{k'-1}{k'} .$$

Des égalités (1) et (2), on obtient : $\overline{AC} = k_1 \overline{AO}$ et $\overline{BD} = k'_1 \overline{BO}$.

A est distinct de C, et B distinct de D, d'où k_1 et k'_1 sont non nuls. Par suite, l'homothétie h_1 de centre A et de rapport k_1 applique O sur C et l'homothétie h'_1 de centre B et de rapport k'_1 applique O sur D. (Ces homothéties sont bien définies car k et k' étant constants, k_1 et k'_1 le sont également ; de plus les points A et B sont connus)

L'application $h'_1 \circ h_1^{-1}$ envoie C sur D.

Posons : $h = h'_1 \circ h_1^{-1}$. Le produit des rapports de h'_1 et h_1^{-1} est $\frac{k'_1}{k_1}$.

- Si $\frac{k'_1}{k_1} = 1$, c'est à dire $k = k'$, alors h est la translation de vecteur $(1 - k'_1) \overline{AB}$. Par suite $\overline{CD} = (1 - k'_1) \overline{AB}$, et la droite (CD) est parallèle à la droite (AB).

- Si $\frac{k'_1}{k_1} \neq 1$, c'est à dire $k \neq k'$, alors h est une homothétie de rapport $\frac{k'_1}{k_1}$.

Le centre I de l'homothétie h est aligné avec les centres de h'_1 et h_1^{-1} , c'est-à-dire aligné avec A et B. Puisque $h(C) = D$, I est aligné avec C et D. Les droites (CD) passent par le point fixe I.

La situation d'apprentissage

- Après la lecture de la situation d'apprentissage (lecture silencieuse des élèves, lecture par un élève et par le professeur), l'enseignant pourra s'assurer que les élèves ont bien compris le texte. Toutefois le professeur donnera la parole à ses élèves afin de s'assurer que tout le monde a compris le texte en leur demandant par exemple d'en faire un résumé.
- Il pourra ensuite faire dégager les constituants de la situation à travers une ou des questions du type :

Constituants de la situation	Exemples de questions possibles	Réponses possibles des élèves
Contexte	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Où se déroule la scène ? ✓ De quoi s'agit-il ? 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Dans un village ✓ Construction des bureaux d'une coopérative.
Circonstances	Pour quelles raisons tu veux les aider ?	Les propriétaires se demandent comment faire pour s'assurer que le plan contenant la face A soit perpendiculaire au plan contenant la face D
Tâche	Que dois-tu faire pour les aider ?	Etudier avec les élèves de la classe, les notions relatives à l'orthogonalité dans l'espace.

Le professeur profitera donc de la tâche énoncée par ses élèves pour faire la synthèse de la situation, tout en faisant remarquer l'importance de la géométrie dans l'espace, en particulier l'orthogonalité dans l'espace pour traduire, traiter et trouver des solutions à des problèmes de vie courante (architecture, aménagement urbain,...) d'où son importance dans le programme scolaire. Il invitera les apprenants à être très attentifs car dans le programme scolaire la géométrie de l'espace est présente à tous les niveaux dans les séries scientifiques. Il annoncera par la suite le titre et le plan de la leçon

Il devra dans la mesure du possible se référer à la situation durant tout le déroulement de la leçon.

Découverte des habiletés

Activité 1 : Droites orthogonales

- 1) ABFE est un carré car côté d'un cube. Par suite (AE) et (BF) sont parallèles.
- 2) EFGH est un carré. Par suite (GH) et (FE) sont parallèles
- 3) ABFE est un carré. Par suite (FE) et (FB) sont perpendiculaires.

Exercice de fixation 1

$(AB) \parallel (EF)$ et $(DH) \parallel (AE)$ et $(AE) \perp (EF)$, donc $(AB) \perp (DH)$.

Activité 2 : Droites et plans orthogonaux

- 1) BCGF carré
- 2) I milieu de $[HF]$ et J milieu de $[DB]$
J appartient à la droite (AC) , $(IJ) \perp (AC)$,
 $(IJ) \parallel (FB)$ et $(IJ) \parallel (CG)$ Justifie que la droite est orthogonale aux droites (BF) et (CG) .
- 3) ABCD carré de diagonale $[AC]$ et de côté $[BC]$
- 4) (DC) et (BC) sont deux droites sécantes en C
- 5) $(AE) \parallel (CG)$ et (CG) orthogonale à (DC) et (BC)

Exercice de fixation 2

- 1) (BF) est orthogonale aux droites (EF) et (FG)
- 2) (DC) est orthogonale aux droites (CG) et (BC) , donc est orthogonale au plan (BCG) .

Activité 3

- 1) I appartient au plan (EFG)
- 2) J appartient à la droite (AC) contenue dans le plan (ABC)
- 3) (IJ) est orthogonale aux droites (DB) et (AC) deux droites sécantes du plan (ABC)

Exercice de fixation 3

1-faux ; 2-faux ; 3-vrai ; 4-faux ; 5-vrai

Activité 4 :

- 1)
 - a) La droite (EF) est orthogonale au plan (P) en G.
 - b) G.
- 2)
 - a) si M un point de la droite (AB) de projeté orthogonale M' sur (P) alors M' appartient à l'intersection du plan (P) et du plan (ABA') qui est $(A'B')$
 - b) soit H' un point de la droite $(A'B')$, il existe un et un seul point H de la droite (AB) tel que (HH') parallèle à (AA')
 - c) $(A'B')$

Exercice de fixation 4

1-A ; 2-A ; 3-C ; 4-C ; 5-B ; 6-B

Activité 5

- 1) $[HD] \perp (ABC)$ et $[FB] \perp (ABC)$
- 2) $(IJ) \perp (ABC)$
- 3) I est l'intersection des diagonales du carré EFGH
- 4) J est l'intersection des diagonales du carré ABCD

Exercice de fixation 5

[BE] est le projeté orthogonal de [AD] sur le plan (BCF) donc G milieu de [BE].

Activité 6 :

- 1) J milieu de [BD], (GK) est orthogonale à (HK) et (JK)
- 2) $GK < GF$; $GK < GH$; $GK < GB$; $GK < GD$

Exercice de fixation 6

1-faux ;2-faux ;3-vrai ;4-vrai ;5-vrai

Activité 7

- 1) La droite (AB) est l'intersection des plans (P_1) et (P_2)
- 2) (d_2) est orthogonale à toute droite de (P_1) donc à (d_1) , de plus (d_1) est orthogonale à (AB)

Exercice de fixation7

1- vrai ;2-faux ;3-vrai ;4-faux

QUESTION D'ÉVALUATION

Question 1 : Comment démontrer que deux droites sont orthogonales ?

Exercice non résolu

- $(AE) \subset (ABE)$
- $(AB) \subset (ABE)$ et $(EB) \subset (ABE)$, (AB) et (EB) sont sécantes
- $(AC) \perp (EB)$ et $(AC) \perp (AB)$
- donc $(AC) \perp (AEB)$ qui contient (AE) donc $(AC) \perp (AE)$

Question 2 : Comment démontrer que deux plans sont perpendiculaires ?

Exercice non résolu

$(DEF) // (ABC)$ et $(DEF) \perp (BEC)$ donc $(ABC) \perp (BEC)$

MES SEANCES D'EXERCICES

Exercices de fixation

Exercice 1

1 ; 3 ; 4

Exercice 2

1-A ; 2-A ; 3-C ; 4-A

Exercice 3

1-faux ; 2-faux ; 3-faux ; 4-vrai ; 5-faux

Exercice 4

$(AB) \perp (MB)$ pour tout point M du plan car $(D) \perp (P)$ donc ABM est rectangle en B

Exercice 5

- 1) $p(D) = D$, $p(C) = F$ et $p(B) = E$
- 2) $p([DC]) = [DF]$, $p([AD]) = \{D\}$ et $p([BF]) = [EF]$
- 3) $p(ABED) = [DE]$ et $p(BCFE) = [EF]$
- 4) $p(BCD) = EDF$, $p(DEF) = DEF$ et $p(ABC) = DEF$

Exercice 6

Soient I, J et K les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[CB]$, soient I', J', K' les projetés respectifs de I, J et K sur le plan (DEF) . I', J', K' sont les milieux respectifs des segments $[DE]$, $[DF]$ et $[EF]$ (milieu du projeté d'un segment), G intersection des médianes de ABC, donc l'image de G est l'intersection des médianes de DEF.

Exercice 7

D'après les propriétés d'une pyramide régulière à base carré, H l'intersection des diagonales du carré ABCD est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC) , donc la distance cherchée est SH, de plus le triangle AHS est rectangle en H.

- $AH = HB$ et $(AH) \perp (HB)$ donc
$$AH^2 = \frac{AB^2}{2}$$
- $SH^2 = AS^2 - \frac{AB^2}{2} = 100 - 8 = 92$ et donc $SH = \sqrt{92}$ cm

Exercice 8

(BC) est orthogonale au plan (ABE)

Exercice 9

Soit H le projeté orthogonal de B sur (ACF) , $[BH]$ est la hauteur du triangle ABC et BH est la distance cherchée : $BH = \frac{AB \times BC}{AC}$ or $AC = \sqrt{130}$ donc $BH = \frac{63 \times \sqrt{130}}{130}$

Exercice 10

$(SO) \perp (AC)$ et $(SO) \perp (BD)$, (AC) et (BD) deux droites sécantes de (ABC) donc (SO) est orthogonale à (ABC) , ainsi (DBS) contient une droite qui est orthogonale à (ABC) , donc les deux plans sont perpendiculaires.

Exercice 11

1-C ; 2-A ; 3-C ; 4-A

Exercice 12

1-Faux ; 2-vrai ; 3-vrai ; 4-Faux ; 5-vrai

Exercice de renforcement / approfondissement

Exercice 13

Soit (D') une droite passant par A et orthogonale à (D) , $(D) \perp (P)$ et $(D) \perp (D')$ donc

$(D') \parallel (P)$ or $A \in (P)$ et $A \in (D')$ donc $(D') \subset (P)$.

Exercice 14

- G est le projeté orthogonal de F sur (SDC) donc $(FG) \perp (CS)$
- H est le projeté orthogonal de F sur (SBC) donc $(FH) \perp (CS)$
- (FG) et (FH) sont sécantes donc (CS) est orthogonale au plan (FGH)

Exercice 15

- $(CB) \perp (P)$ donc $(CB) \perp (D)$
- $(CA) \perp (D)$
- Donc (D) est orthogonale à (CB) et (CA) deux droites sécantes de (ACB) d'où le résultat.

Exercice 16

- ABC est équilatéral donc $(BC) \perp (AG)$
- $(DG) \perp (ABC)$ donc $(BC) \perp (DG)$
- donc $(BC) \perp (ADG)$ qui contient (AD) ainsi $(BC) \perp (AD)$

Exercice 17

- 1) la distance de G au plan (CDE) est nulle
- 2) la distance de G au plan (BCD) est la hauteur du triangle ABC c'est-à-dire $2\sqrt{3}$

Exercice 18

- 1) IJKL est un losange d'après la propriété des droites des milieux
- 2) Soit O intersection des diagonales de IJKL, on a $(SO) \perp (IJ)$ et $(SO) \perp (IK)$ or $(SO) \subset (SBD)$ donc un des plans contient une droite orthogonale à l'autre d'où le résultat
- 3) $(SO) \perp (ABC)$ et $(SO) \perp (IJK)$

Exercice 19

Le projeté de H par p sur le plan (DEF) est l'orthocentre de DEF

Exercice 20

- 1) Montre que $(AH) \perp (BC)$
 - $(BC) \perp (EH)$ car H est l'orthocentre du triangle BCE
 - $(BC) \perp (AE)$ car la droite (AE) est orthogonale au plan (ABC)
 - donc $(BC) \perp (AEH)$ ainsi $(BC) \perp (AH)$
- 2) Montre que $(AH) \perp (BE)$
 - $(BE) \perp (CH)$
 - $(BE) \perp (AC)$
 - $(BE) \perp (ACH)$ ainsi $(AH) \perp (BE)$
- 3) On a (BE) et (BC) sécantes donc $(AH) \perp (BCE)$

Exercice 21

- 1) Montre que les plans (SIK) et (S JL) sont perpendiculaires
 - $(JI) \perp (SH)$ de plus les deux droites sont sécantes
 - $(IK) \perp (SH)$ et $(IK) \perp (JL)$
donc $(IK) \perp (S JL)$ ainsi (SIK) et (S JL) sont perpendiculaires
- 2) Montre que les plans (SAC) et (SBD) sont perpendiculaires.
 - (SH) et (DB) sont deux droites sécantes du plan (SBD) et (AH) est une droite du plan (SAC)
 - ABCD est un carré donc les diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires de plus (SH) et (AC) sont perpendiculaires. (BD) et (SH) sont sécantes en H
 - donc $(AC) \perp (SBD)$ d'où le résultat
- 3) (SIK) et (SAD) sont perpendiculaires
 - $(AD) \subset (SAD)$; $(IK) \subset (SIK)$ et $(SH) \subset (SIK)$
 - (IK) et (SH) sont sécantes
 - $(AD) \perp (IK)$ et $(AD) \perp (SH)$
 - donc $(SAD) \perp (SIK)$

Exercice 22

- Montrons que les droites (AC) et (AE) sont orthogonales
 - ✓ $(AE) \subset (ABE)$
 - ✓ $(AB) \subset (ABE)$ et $(EB) \subset (ABE)$, (AB) et (EB) sont sécantes
 - ✓ $(AC) \perp (EB)$ et $(AC) \perp (AB)$donc $(AC) \perp (ABE)$ qui contient (AE) donc $(AC) \perp (AE)$

- déduisons que les plans (ABE) et (ACE) sont perpendiculaires
 - ✓ on a $(AC) \perp (ABE)$
 - ✓ or $(AC) \subset (ACE)$ donc $(ACE) \perp (ABE)$

Exercice 23

- $\overline{HG} = \overline{DC} = \overline{AB}$ donc ABGH est un parallélogramme $(HG) \perp (ADH)$ donc $(HG) \perp (AH)$ d'où le résultat. de la même façon on montre que CDEF est un rectangle
- en considérant les rectangles ABGH et CDEF
- $(ED) \perp (AH)$ et $(ED) \perp (IJ)$
- $(ED) \subset (CDE)$ et $(ED) \perp (ABG)$
-

points	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
projetés	A	B	J	I	I	J	G	H	I	J

Exercice 24

- $(AH) \subset (AHE)$ et $G \in (AH)$ donc $G \in (AHE)$
 - $(BG) \perp (AH)$ et $(BG) \perp (HE)$ donc $(BG) \perp (AHE)$
- Ainsi G est le projeté orthogonal du point B sur le plan (AHE)

Situation complexe

Exercice 25

Désignons par ABCDEFGH le pavé droit du bâtiment A tel que (ABC) est la face 1-A et par IJKLMFOP l'autre pavé droit tel que (IJK) est la face 2-B, on a :

- $(AB) \parallel (EF)$ et $(EF) \perp (IJ)$ donc $(AB) \perp (IJ)$
 - $(BC) \parallel (JK)$ et $(JK) \perp (IJ)$ donc $(BC) \perp (IJ)$
 - donc $(ABC) \perp (IJK)$
- En conclusion : les faces 1-A et 2-B sont bien perpendiculaires

Exercice 26

En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle FBI rectangle en B on a :

$FJ^2 = FB^2 + BI^2$ donc $FJ^2 = \frac{13}{4}$. de même dans le triangle FEJ rectangle en E on a $FJ^2 = FE^2 + EJ^2$ on a : $FJ^2 = \frac{13}{4}$ d'où $FJ = FI$. Le triangle FIJ est donc isocèle en F

le triangle FIJ est isocèle en F et K est le milieu de $[IJ]$ donc la droite (FK) est la hauteur issue de point K. donc $(FK) \perp (IJ)$

$(FK) \perp (IJ)$ et $(GK) \perp (IJ)$ (par hypothèse) donc et $(IJ) \perp (GKF)$ et $(GK) \perp (IJ)$

Situation d'apprentissage

Après la lecture de la situation d'apprentissage (par un élève, par le professeur et une lecture silencieuse des élèves), l'enseignant pourra s'assurer que les élèves ont bien compris le texte. Dans le cas de cette situation, le texte ne semble pas contenir de mots ou expressions difficiles pour un élève de seconde. Toutefois le professeur donnera la parole à ses élèves afin de s'assurer que tout le monde a compris le texte.

Il pourra ensuite faire dégager les constituants de la situation à travers une ou des questions du type :

Constituants de la situation	Exemples de questions possibles	Réponses possibles des élèves
Contexte	Où et quand se déroule la scène ?	Dans une bijouterie dans le cadre de la confection d'un bijou pour un mariage.
Circonstances	Indique pour quelles raisons le bijoutier sollicite son fils. Quel est le problème auquel le bijoutier est confronté ?	Le bijoutier sollicite son fils pour l'initier au métier de la bijouterie et respecter scrupuleusement les consignes du client
Tâche	Qu'a décidé de faire le fils du bijoutier pour répondre à la préoccupation de son papa ?	De faire des recherches sur les équations dans \mathbb{R}^2 et dans \mathbb{R}^3 afin de mieux s'outiller pour répondre à la préoccupation de son père.

Activités de découvertes

Activités 1

On donne le système (2) :
$$\begin{cases} 2x + 6y - 7 = 0 \\ 3x + 5y + 8 = 0 \end{cases}$$

1. Le nombre réel équivalent issu du système (2) est $2x_5 - 3x_6 = -8$

2. La notation issue du système est :
$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

Exercice de fixation 1

Le déterminant du système :
$$\begin{cases} -2x + 3y + 1 = 0 \\ 4x + y - 2 = 0 \end{cases}$$
 est $-2x_1 - 4x_3 = -14$

Exercice de fixation 2

La notation issue du système $\begin{cases} -x + 2y + 3 = 0 \\ 3x - y + 7 = 0 \end{cases}$ est $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$

Activité 2

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} b' \\ -a' \end{pmatrix}$, deux vecteurs directeurs respectifs des droites (D_1) et (D_2) .

- 1) $\det(\vec{u}; \vec{v}) = -ba' + ab'$
- 2) \vec{u} et \vec{v} soient non colinéaires si et seulement si $-a'b + ab' \neq 0$ ou $ab' - a'b \neq 0$
- 3) Les droites (D_1) et (D_2) soient sécantes si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0$
- 4) Le système (Σ) admet une solution unique si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$.

Exercice de fixation 3

Le déterminant du système (1) est $3 \neq 0$; le système (1) admet une solution unique.

Le déterminant du système (2) est 0 ; le système (2) n'admet pas de solution unique.

Le déterminant du système (3) est 0 ; le système (3) n'admet pas de solution unique.

Activité 3

On considère le système d'équations suivant (Σ) :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 & (1) \\ 2x + y + 3z = 7 & (2) \\ x + 3y + 2z = 2 & (3) \end{cases}$$

1.

2.a)

b)

3.a)

b)

c)

4. Le triplet $(1; -1; 2)$ est l'unique solution de système (Σ) .

Exercice de fixation 4

Réolvons le système (Σ) par la méthode de substitution.

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = -1 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - y - z \\ 2(3 - y - z) - y + z = -1 \\ (3 - y - z) - y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - y - z \\ -3y - z = -7 \\ -2y + z = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - y - z \\ z = 7 - 3y \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ z = 1 \\ x = 0 \end{cases} \text{ Le triplet } (0; 2; 1) \text{ est la solution du système } (\Sigma)$$

Activité 4

On considère le système d'équations suivant

$$(\Sigma) \begin{cases} x + y + z = 2 & (E_1) \\ 2x + y + z = 7 & (E_2) \\ x + 4y + 3z = 3 & (E_3) \end{cases}$$

1.

2.

Le triplet $(5; 7; -10)$ est l'unique solution de système (Σ) .

Exercice de fixation 5

Résolvons le système (Σ) par la méthode de Gauss.

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 0 \\ 3x - 5y + 2z = 1 \\ 2x - 5y + 3z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y + 5z = 0 & E_1 \\ y - 11z = -2 & 3E_1 - 2E_2 \\ y + z = -1 & E_1 - E_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y + 5z = 0 \\ y - 11z = -2 \\ z = \frac{1}{12} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{12} \\ y = \frac{-13}{12} \\ x = \frac{-11}{6} \end{cases} \text{ Le triplet } \left(\frac{-11}{6}; \frac{-13}{12}; \frac{1}{12} \right) \text{ est la solution du système } (\Sigma)$$

QUESTIONS D'EVALUATION

Question 1 : Comment justifier qu'un système dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ admet une solution unique ?

Exercice non résolu

Soit le système (Σ_1) :
$$\begin{cases} -3x - 4 = -y \\ y = 2x + 7 \end{cases}$$

Justifions que le système admet une solution unique. $\det(\Sigma_1) = -1$. Le déterminant du système est différent de zéro. Donc, le système admet une solution unique.

Question 2 : Comment justifier qu'un système d'équation dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ n'admet pas de solution ou admet une infinité de solutions.

Exercice non résolu 1

Soit le système (Σ)
$$\begin{cases} -x + 4y = 3 & (E_1) \\ 3x - 12y = 2 & (E_2) \end{cases}$$

Justifions que (Σ) n'a pas de solution. $\det(\Sigma) = 0$. Donc le système n'admet pas de solution unique. Or $E_2 \Leftrightarrow -x + 4y = \frac{-2}{3}$. Les équations E_1 et E_2 du système (Σ) ne sont pas équivalentes. Donc le système (Σ) n'a pas de solution.

Exercice non résolu 2

Soit le système $(\Sigma) \begin{cases} 2x + 7y = -8 & E_1 \\ -6x - 21y = 24 & E_2 \end{cases}$

Justifions que le (Σ) admet une infinité de solutions. $\det(\Sigma) = 0$. Donc le système n'admet pas de solution unique. Or $E_2 \Leftrightarrow 2x + 7y = -8$. Donc les équations du système (Σ) sont équivalentes. Le système (Σ) admet une infinité de solution.

Question3 : Comment résoudre une situation de vie courante

Exercice non résolu

x désigne la quantité de jus d'orange et y la quantité de jus de pomme

On peut traduire la situation à l'aide du système linéaire dans \mathbb{R}^2 suivant :

$$(S) \begin{cases} x + y = 250 \\ \frac{52}{100}x + \frac{12}{100}y = 110 \end{cases} \quad S_{\mathbb{R}^2} = \{(200; 50)\}$$

Julien doit consommer 200 ml de jus d'orange et 50 ml de jus de pomme

MES SENCES D'EXERCICES

Exercices de fixation

Exercice 1

Affirmations	Réponses		
La notation du déterminant du système $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ ex + fy + g = 0 \end{cases}$ est		$\begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix}$	
La notation du déterminant du système $\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$ est			$\begin{vmatrix} a & b \\ d & c \end{vmatrix}$
La notation du déterminant du système $\begin{cases} 2x + by = 0 \\ cx - 3y = 0 \end{cases}$ est		$\begin{vmatrix} 2 & b \\ c & -3 \end{vmatrix}$	
La notation du déterminant du système $\begin{cases} 2x + 3y - 4 = 0 \\ 5x + 4y + 10 = 0 \end{cases}$ est			$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$

Exercice 2

Affirmations	Réponses		
$\begin{vmatrix} a & c \\ e & g \end{vmatrix}$ est égal à			$-ec + ag$
Le déterminant du système $\begin{cases} 2x + by + 7 = 0 \\ cx - 3y - 2 = 0 \end{cases}$ est		$-bc + 6$	
Le déterminant du système $\begin{cases} 2x + 3y - 4 = 0 \\ 5x - \frac{1}{2}y + 10 = 0 \end{cases}$ est	-16		

Exercice 3

Pour chaque affirmation dans le tableau ci-dessous, réponds par Vrai ou par Faux.

Affirmations	Réponse
Un système de deux équations à deux inconnues admet une solution unique si et seulement si son déterminant est supérieur à zéro.	faux
Un système de deux équations à deux inconnues admet une infinité de solution si son déterminant est égal à zéro.	Vrai
Si le déterminant d'un système de deux équations à deux inconnues est égal à zéro, alors ce système admet soit une infinité de solution ou n'admet pas de solution	Vrai

Exercice 4

1) Faux ; 2) Faux ; 3) Vrai ; 4) Faux

Exercice 5

Affirmations	Réponse
Le système $\begin{cases} 2x + 4y - 8 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$ admet une unique solution	Vrai
Le système $\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$ a pour solution unique le couple $(1; 2)$	Faux
Le système $\begin{cases} 2x + 4y - 6 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$ a pour solution unique le couple $(5; -1)$	Faux
Le système $\begin{cases} 2x + 4y - 8 = 0 \\ x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$ admet une infinité de solution	Vrai
Le système $\begin{cases} 4x + 8y - 1 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$ n'admet pas de solution	Vrai

Exercice 6

1) FAUX ; 2) FAUX ; 3) VRAI ; 4) FAUX

Exercice 7

ceux qui admettent une solution unique

$$(S_1) ; (S_2) ; (S_4)$$

Exercice 8

$$(S_1) \begin{cases} x + y = 100 \\ 6x + 4y = 450 \end{cases}$$

Exercice 9

$$(S_2) \begin{cases} x + y = 438 \\ 5x + 7y = 960 \end{cases}$$

Exercice 10

$$(S_3) \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 2650 \\ x + 5y + 2z = 1900 \\ 5x + y + 6z = 4550 \end{cases}$$

EXERCICES DE RENFORCEMENT / APPROFONDISSEMENT

Exercice 11

$\det(\Sigma_1) = 2$; $\det(\Sigma_2) = -19$; $\det(\Sigma_3) = 0$

Exercice 12

1) $\det(S) = -\frac{13}{18}$

2) On a : $\det(S) = -\frac{13}{18}$, comme $\det(S) \neq 0$ alors (S) admet une unique solution dans \mathbb{R}^2 .

Exercice 13

1) On a : $\det(S_1) = -1$, donc (S_1) admet une unique solution dans \mathbb{R}^2 .

2) On a : $\det(S_2) = 0$, donc (S_2) n' admet pas une unique solution dans \mathbb{R}^2 .

3) On a : $\det(S_3) = -4\sqrt{6}$, donc (S_3) admet une unique solution dans \mathbb{R}^2 .

4) On a : $\det(S_4) = 0$, donc (S_4) n'admet pas une solution unique dans \mathbb{R}^2 .

Exercice 14

1) Le système linéaire (S_1) admet une solution unique si $a \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{15}{2}\right\}$

2) Le système linéaire (S_2) admet une solution unique si $a \in \mathbb{R} - \left\{0; \frac{45}{7}\right\}$

3) Le système linéaire (S_1) admet une solution unique si $a \in \mathbb{R} - \{-6; 6\}$

Exercice 15

On donne le système linéaire dans \mathbb{R}^2 suivant : $(S) \begin{cases} 4x - 6y = 14 \\ -2x + 3y = -7 \end{cases}$

1) $\det(S) = 0$

2) On : $\det(S) = 0$, et en divisant chaque membre de (E_1) par -2 on obtient (E_2) . Comme les équations $(E_1): 4x - 6y = 14$ et $(E_2): -2x + 3y = -7$ sont équivalentes alors (S) admet une infinité de solutions dans \mathbb{R}^2 .

Exercice 16

On donne le système linéaire dans \mathbb{R}^2 suivant : $(S) \begin{cases} 18x - 3y = 27 \\ 6x - y = -9 \end{cases}$

1) $\det(S) = 0$

2) On : $\det(S) = 0$, et en divisant chaque membre de (E_1) par 3 on obtient $6x - y = 9$. Comme $(E_1): 6x - y = 9$ et $(E_2): 6x - y = -9$ sont équivalentes alors (S) n'admet pas de solutions dans \mathbb{R}^2

Exercice 17

$(\Sigma_1): S_{\mathbb{R}^2} = \{(1; -1)\}$; $(\Sigma_2): S_{\mathbb{R}^2} = \{(-1; 2)\}$; $(\Sigma_3): S_{\mathbb{R}^2} = \left\{\left(x; x - \frac{1}{4}\right) \mid x \in \mathbb{R}\right\}$

Exercice 18

$S_{\mathbb{R}^2} = \{(2; 3)\}$

$S_{\mathbb{R}^2} = \{(-2; 1)\}$

Exercice 19

$(\Sigma_1) : S_{\mathbb{R}^3} = \{(0; 2; 1)\}$

$(\Sigma_2) : S_{\mathbb{R}^3} = \{(-1; -2; 3)\}$

$(\Sigma_3) : S_{\mathbb{R}^3} = \left\{\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{2}; \frac{13}{2}\right)\right\}$

Exercice 20

$$(\Sigma_1) \quad ; \quad S_{\mathbb{R}^3} = \{(2; -1; -10)\}$$

$$(\Sigma_2) \quad ; \quad S_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \left(-\frac{4}{25}; -\frac{54}{25}; -\frac{103}{25} \right) \right\}$$

$$(\Sigma_3) \quad ; \quad S_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \left(-\frac{11}{10}; -\frac{9}{10}; -\frac{1}{10} \right) \right\}$$

Exercice 21

$$(\Sigma_1) \quad ; \quad S_{\mathbb{R}^3} = \{(-4; 16; -11)\}$$

$$(\Sigma_2) \quad ; \quad S_{\mathbb{R}^3} = \{(1; -1; 1)\}$$

$$(\Sigma_3) \quad ; \quad S_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \left(\frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{9}{20} \right) \right\}$$

Exercice 22

$$(S_1) \quad : \quad S_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \left(-\frac{3}{2}; \frac{9}{2} \right) \right\}$$

$$(S_2) \quad : \quad S_{\mathbb{R}^2} = \{(9; 7)\}$$

$$(S_3) \quad : \quad S_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \left(\frac{390}{41}; \frac{516}{41} \right) \right\}$$

$$(S_4) \quad : \quad S_{\mathbb{R}^2} = \{(1; -1)\}$$

Exercice 23

$$(\Sigma_1) \quad ; \quad S_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \left(\frac{4}{m+1}; \frac{3m+1}{m+1} \right) \right\} \quad \text{avec } m \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$(\Sigma_2) \quad ; \quad S_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \left(\frac{2m+2}{m^2+1}; \frac{2m-2}{m^2+1} \right) \right\} \quad \text{avec } m \in \mathbb{R}$$

$$(\Sigma_3) \quad ; \quad S_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \left(\frac{5m-14}{m(m-2)}; \frac{-4}{m-2} \right) \right\} \quad \text{avec } m \in \mathbb{R} - \{0; 2\}$$

$$(\Sigma_4) \quad ; \quad S_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \left(\frac{5m^2-7m-3}{(m-2)(m-3)}; \frac{-m^2+16m-27}{(m-2)(m-3)} \right) \right\} \quad \text{avec } m \in \mathbb{R}$$

$$(\Sigma_5) \quad ; \quad S_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \left(\frac{-2m^2-2m+4}{-m^2+m-2}; \frac{m^2-m-2}{-m^2+m-2} \right) \right\} \quad \text{avec } m \in \mathbb{R}$$

Exercice 24

$$(\Sigma_1) \quad : \quad S_{\mathbb{R}^2} = \{(-6; 5)\}$$

$$(\Sigma_2) \quad : \quad S_{\mathbb{R}^2} = \{(10; 1); (1; 10)\}$$

$$(\Sigma_3) \quad : \quad S_{\mathbb{R}^2} = \{(3; 2); (-3; 2)\}$$

Exercice 25

1) Soient x le nombre d'adultes et y le nombre d'enfants, on obtient le système linéaire dans \mathbb{R}^2 suivant

$$(S) \begin{cases} 10x + 7y = 460 \\ 2x + y = 80 \end{cases}$$

2) Il y a 25 adultes et 30 enfants qui participent au voyage.

Exercice 26

Soient x la quantité d'avoine et y la quantité de blé.

- Mise en équation

- Pour satisfaire à des besoins nutritionnels de 200 g de protéines, on obtient l'équation suivante :

$$(E_1): \frac{4}{30}x + \frac{3}{30}y = 200$$

$$(E_1): 4x + 3y = 6000$$

- Pour satisfaire à des besoins nutritionnels 1320 g d'hydrates, on obtient l'équation suivante :

$$(E_2): \frac{18}{30}x + \frac{24}{30}y = 1320$$

$$(E_2): 3x + 4y = 6600$$

- On obtient le système linéaire dans \mathbb{R}^2 suivant

$$(S) \begin{cases} 4x + 3y = 6000 \\ 3x + 4y = 6600 \end{cases} \quad S_{\mathbb{R}^2} = \{(600; 1200)\}$$

Pour satisfaire à des besoins nutritionnels de 200 g de protéines et 1320 g d'hydrates de carbone, il faut 600g d'avoine et 1200 g de blé.

Exercice 27

$$(S) \begin{cases} 300x + 250y = 320 \\ 150x + 400y = 215 \end{cases} \quad S_{\mathbb{R}^2} = \{(0,9; 0,2)\}$$

$$\text{donc } 80 \times 0,9 + 140 \times 0,2 = 100$$

par suite la valeur énergétique de 80 g de bananes et de 140 g de clémentines est 100 kcal

Exercice 28

La longueur du champ est de 187,5 mètres et 107,5 mètres de largeur

Exercice 29

1)

x désigne le nombre de bracelets du modèle M_1

y désigne le nombre de bracelets du modèle M_2

z désigne le nombre de bracelets du modèle M_3

- Un bijoutier fabrique pendant une heure 12 bracelets
On a : $(E_1): x + y + z = 12$
- Masse d'un bracelet en gramme
On a : $(E_2): 5x + 5y + 10z = 75$
- Le cout de production des bracelets en francs
On a : $(E_3): 7500x + 9000y + 15000z = 118500$

La situation peut se traduire à l'aide du système linéaire dans \mathbb{R}^3 suivant

$$(S) \begin{cases} 75x + 90y + 150z = 1185 \\ 5x + 5y + 10z = 75 \\ x + y + z = 12 \end{cases} \quad S_{\mathbb{R}^3} = \{(5; 4; 3)\}$$

2) Il y a 5 bracelets du modèle M_1 , 4 bracelets du modèle M_2 et 3 bracelets du modèle M_3

Exercice 30

Le prix du billet d'entrée pour un adulte est 2500 et celui d'un enfant est de 1500.

Exercice 31

Mise en équation

$$(S) \begin{cases} x + y = 8 \\ 3x + y = \frac{60}{\pi} \end{cases} \quad S_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \left(\frac{30-4\pi}{\pi}; \frac{6(2\pi-5)}{\pi} \right) \right\}$$

la longueur du cylindre est $\frac{30-4\pi}{\pi}$ et la hauteur cône est $\frac{6(2\pi-5)}{\pi}$

Exercice 32

On peut traduire la situation à l'aide du système linéaire dans \mathbb{R}^2 suivant :

$$(S) \begin{cases} x + y = 100 \\ \frac{35}{100}x + \frac{60}{100}y = \frac{50}{100} \times 100 \end{cases} \quad S_{\mathbb{R}^2} = \{(40; 60)\}$$

Il faudrait fondre 40g de l'alliage contenant 35 % d'argent et 60g de l'alliage contenant 60 % d'argent.

Exercice 33

Soient x le montant à investir sur le fond à 6% et y le montant à investir sur le fond à 8%

$$(S) \begin{cases} x + y = 15000 \\ 6x + 8y = 100000 \end{cases} \quad S_{\mathbb{R}^2} = \{(10000; 5000)\}$$

Pour qu'elle reçoive 1000 f à la fin de l'année, elle doit investir 10000 sur le fond à 6% et 5000 le fond à 8%.

Exercice 34

$$x=42; y=21; z=13; a=8; b=13; c=8; d=5; e=3; f=10 \text{ et } g=-2$$

Exercice 35

On a :

$$P(1) = 2 \Leftrightarrow a + b + c = 0$$

$$P(-1) = -1 \Leftrightarrow -a + b - c = -3$$

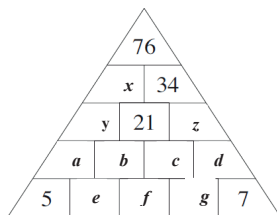
$$P(2) = 3 \Leftrightarrow 8a + 4b + 2c = 1$$

On obtient le système linéaire dans \mathbb{R}^3 suivant

$$(S) \begin{cases} a + b + c = 0 \\ -a + b - c = -3 \\ 8a + 4b + 2c = 1 \end{cases} \quad S_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \left(\frac{2}{3}; -\frac{3}{2}; \frac{5}{6} \right) \right\}$$

$$\text{D'où } a = \frac{2}{3}; b = -\frac{3}{2} \text{ et } c = \frac{5}{6}$$

$$\text{Donc } P(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{6}x + 2$$



Exercice 36

On a :

$$s(2) = 110 \Leftrightarrow 2a + 2v_0 + s_0 = 110$$

$$s(4) = 220 \Leftrightarrow 8a + 4v_0 + s_0 = 220$$

$$s(10) = 670 \Leftrightarrow 50a + 10v_0 + s_0 = 670$$

On obtient le système linéaire dans \mathbb{R}^3 suivant

$$\begin{cases} 2a + 2v_0 + s_0 = 110 \\ 8a + 4v_0 + s_0 = 220 \\ 50a + 10v_0 + s_0 = 670 \end{cases} \quad S_{\mathbb{R}^3} = \{(5; 40; 20)\}$$

$$\text{D'où : } a = 5; v_0 = 40 \text{ et } s_0 = 20$$

$$\text{Donc } s(t) = \frac{5}{2}t^2 + 40t + 20$$

Exercice 37

x désigne le montant du premier
 y désigne le montant du deuxième
 z désigne le montant du troisième

On obtient le système linéaire dans \mathbb{R}^3 suivant

$$\begin{cases} x + \frac{y}{2} = 3000000 \\ \frac{x}{3} + y = 3000000 \\ \frac{x}{4} + z = 3000000 \end{cases} \quad S_{\mathbb{R}^3} = \{(1800000; 2400000; 2550000)\}$$

le montant du premier est de 1.800.000 francs
le montant du deuxième est de 2.400.000 francs
le montant du troisième est de 2.550.000 francs

Exercice 38

Soit x F le prix d'un kilogramme de Robusta et y F le prix d'un Kilogramme d'Arabica.

- Le prix d'un paquet de café extra est défini par : $120x + 130y = 13,3$
- Le prix d'un paquet de café suprême est défini par : $50x + 200y = 15,75$

Réolvons le système $\begin{cases} 120x + 130y = 13,3 \\ 50x + 200y = 15,75 \end{cases}$ afin de déterminer le couple $(x; y)$

$$\text{On a } \begin{cases} 120x + 130y = 13,3 \\ 50x + 200y = 15,75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 600x + 650y = 66,5 \\ -600x - 2400y = -189 \end{cases} \Rightarrow -1750y = -122,5$$

$$\text{Alors } y = 0,07 \text{ et } x = \frac{15,75 - 200 \times 0,07}{50}.$$

$$\text{Donc } S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(0,035; 0,07)\}$$

Ainsi le prix d'un kilogramme de Robusta est 0,035F et le prix d'un kilogramme d'Arabica est 0,07F

Par Conséquent 250 kilogramme de Robusta couterait 8,75F et le prix de 250 kilogramme d'Arabica serait 17,5F

Exercice 39

Soit x F le prix d'entrée à tarif normal pour un adulte et y F le prix d'entrée à tarif normal pour un enfant.

- La recette du 19 décembre est défini par : $90x + 42y = 4290$

- La recette du 20 décembre est défini par : $140\left(1 - \frac{25}{100}\right)x + 54\left(1 - \frac{20}{100}\right)y = 4860$

Réolvons le système $\begin{cases} 90x + 42y = 4290 \\ 140\left(1 - \frac{1}{4}\right)x + 54\left(1 - \frac{1}{5}\right)y = 4860 \end{cases}$ afin de déterminer le couple $(x ; y)$

$$\text{On a } \begin{cases} 90x + 42y = 4290 \\ 140\left(1 - \frac{1}{4}\right)x + 54\left(1 - \frac{1}{5}\right)y = 4860 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x + 4,2y = 429 \\ 21x + 8,64y = 972 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 63x + 29,4y = 3003 \\ -63x + -25,92y = -2916 \end{cases}$$

$$D'ou \ 3,48y = 87 \Leftrightarrow y = 25$$

$$\text{Et } x = \frac{429 - 4,2 \times 25}{9} = 36$$

$$\text{Donc } S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(36; 25)\}$$

Ainsi, à tarif normal, le prix d'entrée pour un adulte est 36F et celui d'un enfant est 25F.

Exercice 40

Soit x , y et z les longueurs, en km, respectives des montées, des plats et des descentes pour le trajet de A vers B.

- La distance, en km, des ville A et B est définie par : $x + y + z = 23$
- Sur le parcourt de la ville A à la ville B on a :
 - Le temps de parcourt, en mn, en montée est $7,8x$
 - Le temps de parcourt, en mn, du terrain plat est $5y$
 - Le temps de parcourt, en mn, en descente est $4z$

D'où le temps de parcourt, en mn, de la ville A à la ville B est défini par $7,8x + 5y + 4z = 120$

- En effectuant le retour de la ville B à la ville A on a :
 - Le temps de parcourt, en mn, en montée est $7,8z$
 - Le temps de parcourt, en mn, du terrain plat est $5y$
 - Le temps de parcourt, en mn, en descente est $4x$

D'où le temps mis au retour, en mn, de la ville B à la ville A est défini par $4x + 5y + 7,8z = 134$

Réolvons le système $\begin{cases} x + y + z = 23 \\ 7,5x + 5y + 4z = 120 \\ 4x + 5y + 7,5z = 134 \end{cases}$ afin de déterminer le triplet $(x ; y ; z)$

$$\text{On a } \begin{cases} x+y+z=23 \\ 7,5x+5y+4z=120 \\ 4x+5y+7,5z=134 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=23 \\ 0-2,5y-3,5z=-52,5 \\ 0+y+3,5z=42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=23 \\ 0+0+5,25z=52,5 \\ 0+y+3,5z=52,5 \end{cases}$$

D'où $z=10$ $y=42-3,5 \times 10$ et $x=23-10-7$ et $S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(6; 7; 10)\}$

Exercice 41

Soit x le nombre de ration existant initialement par are, y le nombre de ration produite chaque jour par are et z le nombre de bœufs que pourra nourrir 96 ares en 18 jours.

- Le nombre de ration disponible par are en 12 jours est défini par $x + 12y$
- Le nombre de ration disponible par are en 15 jours est défini par $x + 15y$
- Le nombre de ration disponible par are en 18 jours est défini par $x + 18y$
- Le nombre de ration consommé par are en 12 jours est $\frac{75 \times 12}{60} = 15$
- Le nombre de ration consommé par are en 15 jours est $\frac{81 \times 15}{72} = 16,875$
- Le nombre de ration consommé par are en 18 jours est $\frac{18 \times z}{96} = \frac{3}{16}z$

Résolvons le système $\begin{cases} x+12y=15 \\ x+15y=16,875 \end{cases}$ afin de déterminer le couple $(x ; y)$

$$\text{On a } \begin{cases} x+12y=15 \\ x+15y=16,875 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+12y=15 \\ 0+3y=1,875 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7,5 \\ y=0,625 \end{cases}$$

$$\text{Donc } S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(7,5; 0,625)\}$$

$$\text{Ainsi } 7,5 + 18 \times 0,625 = \frac{3}{16}z \Leftrightarrow z = 100$$

Par conséquent, un pré de 96 ares pourra nourrir 100 bœufs en 18 jours.

SITUATION COMPLEXE

Exercice 42

$$(S) \begin{cases} 3x + y + 2z = 130 \\ 5x + y + 4z = 210 \\ 4x + y + 2z = 140 \end{cases} \quad S_{\mathbb{R}^3} = \{(10; 40; 30)\}$$

La production journalière du tapissier est de 10 canapés, 40 chaises et 30 fauteuils.

$$\text{On a : } 10 \times 15000 + 40 \times 2500 + 30 \times 7000 = 460000$$

Comme $480000 > 460000$ alors l'entreprise pourra acquérir ses meubles.

Exercice 43

La situation peut se traduire à l'aide du système linéaire dans \mathbb{R}^3 suivant

$$(S) \begin{cases} 50x + 70y + 90z = 2350 \\ 10x + 20y + 30z = 650 \\ 20x + 20y + 30z = 800 \end{cases} \quad S_{\mathbb{R}^3} = \{(15; 10; 10)\}$$

On a

L'unité A fabrique 15 produits, l'unité B fabrique 10 produits et l'unité C fabrique 10 produits par jour, le groupe 1 aura donc la récompense.

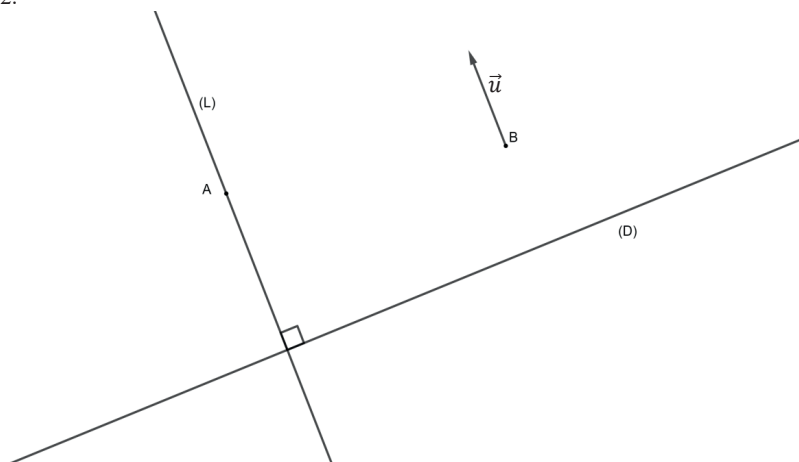
I-SITUATION D'APPRENTISSAGE

Constituants de la situation	Exemples de questions possibles	Réponses possibles des élèves
Contexte	Où et quand se déroule la scène ?	l'occasion de ses recherches pour son exposé sur « la géométrie de l'espace »
Circonstances	Quel est le problème auquel l'élève est confronté ?	Déterminer une équation de la droite passant par le point $B(-1; 2)$ et admettant le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ comme vecteur normal
Tâche	Qu'est-ce que ses camarades de classe se proposent de faire ?	Pour cela, ils s'organisent pour trouver une équation cartésienne de la droite.

II- DÉCOUVERTE DES HABILITÉS

Activité 1 :

1. et 2.



Exercice de fixation

1.

1. Faux ; 2. Faux ; 3. Vrai ; 4. Vrai. ; 5. Faux

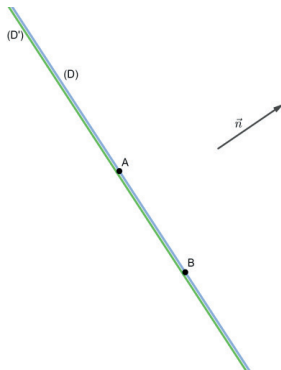
2.

N°	Droite	Vecteur directeur	Vecteur normal
1	(AB)	\overrightarrow{AB}	\overrightarrow{IO}
2	(AC)	\overrightarrow{AC}	\overrightarrow{OK}
3	(BC)	\overrightarrow{BC}	\overrightarrow{OJ}
4	(OK)	\overrightarrow{OK}	\overrightarrow{AC}

Activité 2

1.

2.a)



b) les droites (D) et (D') sont confondues.

Exercice de fixation

3.

1. Faux 2. Vrai 3. Vrai 4. Faux

Activité 3

1. a) $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

b) $\vec{u} \cdot \vec{n} = -b \times a + a \times b = -ab + ab = 0$ donc \vec{u} et \vec{n} sont orthogonaux
 \vec{u} est un vecteur directeur de (D) et \vec{n} est orthogonal à \vec{u} donc \vec{n} est un vecteur normal à (D) .

2. a) $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a(x - x_0) + b(y - y_0) = ax + by - (ax_0 + by_0)$

b) $M \in (D)$ si et seulement $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ d'où $ax + by - (ax_0 + by_0) = 0$
en posant $c = -(ax_0 + by_0)$ on obtient : $ax + by + c = 0$
une équation de la droite (D) est donc $ax + by + c = 0$

Exercice de fixation

4.

1. $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

2. Une équation cartésienne de (T) est de la forme $-x + 3y + c = 0$ où c est un nombre réel à déterminer.

$A \in (T)$ donc $-2 + 3 \times (-1) + c = 0$ d'où $c = 5$

ainsi une équation de la droite (T) est $-x + 3y + 5 = 0$

5.

a) $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$; b) $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; c) $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; d) $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; e) $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Activité 4

1. a) $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$; $\vec{n}' \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$; $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et $\vec{u}' \begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$

b) $dét(\vec{u}; \vec{u}') = \begin{vmatrix} -b & -b' \\ a & a' \end{vmatrix} = -ba' + ab' = ab' - a'b$

$dét(\vec{n}; \vec{n}') = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$

c) $dét(\vec{u}; \vec{u}') = dét(\vec{n}; \vec{n}')$ donc \vec{u} et \vec{u}' sont colinéaires si et seulement si \vec{n} et \vec{n}' sont colinéaires.

2. (D) et (D') sont parallèles si et seulement si \vec{u} et \vec{u}' sont colinéaires

or si \vec{u} et \vec{u}' sont colinéaires alors \vec{n} et \vec{n}' sont colinéaires.

donc (D) et (D') sont parallèles si et seulement si \vec{n} et \vec{n}' sont colinéaires.

Exercice de fixation

6.

1. Faux 2. Faux 3. Vrai 4. Vrai

7.

$\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (Δ) et $\vec{n}' \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (Δ') de plus

\vec{n}' et \vec{n} sont colinéaires ($\vec{n}' = 2\vec{n}$) donc les droites (Δ) et (Δ') sont colinéaires.

Activité 5

1. a) $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$; $\vec{n}' \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$; $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et $\vec{u}' \begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$

b) $\vec{u} \cdot \vec{u}' = b \times b' + a \times a' = bb' + aa'$ et $\vec{n} \cdot \vec{n}' = a \times a' + b \times b' = bb' + aa'$

c) $\vec{u} \cdot \vec{u}' = \vec{n} \cdot \vec{n}'$ donc \vec{u} et \vec{u}' sont orthogonaux si et seulement si \vec{n} et \vec{n}' sont orthogonaux.

2. $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$ si et seulement si $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$ donc (D) et (D') sont perpendiculaires si et seulement si \vec{n} et \vec{n}' sont perpendiculaires.

Exercice de fixation

8.

1. Vrai 2. Vrai 3. Faux 4. Vrai

9.

$\vec{n} \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (Δ) et $\vec{n}' \begin{pmatrix} -20 \\ -32 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (Δ')

$$\vec{n}' \cdot \vec{n} = -8 \times 20 + 5 \times 32 = -160 + 160 = 0$$

donc \vec{n} et \vec{n}' sont orthogonaux par suite les droites (Δ) et (Δ') sont perpendiculaires.

Activité 6

1. \overrightarrow{AH} est orthogonal à la droite (D) et \vec{n} est orthogonal à la droite (D') donc

\overrightarrow{AH} et \vec{n} sont colinéaires.

2.a) \overrightarrow{AH} et \vec{n} sont colinéaires donc $|\cos(\widehat{\overrightarrow{AH}; \vec{n}})| = 1$

$$\text{par suite } |\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}| = \|\overrightarrow{AH}\| \times \|\vec{n}\| \times |\cos(\widehat{\overrightarrow{AH}; \vec{n}})| = \|\overrightarrow{AH}\| \times \|\vec{n}\| = AH \times \|\vec{n}\|$$

b) on : $|\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}| = AH \times \|\vec{n}\|$ donc $AH = \frac{|\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$

3.a) $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} x_H - x_0 \\ y_H - y_0 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} x_H - x_0 \\ \frac{-ax_H - c}{b} - y_0 \end{pmatrix}$ car $H \in (D)$

$$\begin{aligned} \text{ainsi } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AH} &= a(x_H - x_0) + b \left(\frac{-ax_H - c}{b} - y_0 \right) = ax_H - ax_0 - ax_H - c - by_0 \\ &= -(ax_0 + by_0 + c) \end{aligned}$$

b) $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ donc $\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\text{ainsi } AH = \frac{|\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|-(ax_0 + by_0 + c)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Exercice de fixation

10.

1. Faux 2. Faux 3. Vrai 4. Faux

11.

N°	Équation d'une droite (D)	Point A associé		$d(A; (D))$
1	$2x + 3y - 1 = 0$	$A(0; 3)$		$\frac{16}{\sqrt{17}}$
2	$-3x - 2y + 4 = 0$	$A(-1; -1)$		$\frac{9}{\sqrt{17}}$
3	$-\frac{1}{2}x + 2y - 7 = 0$	$A(2; 0)$		$\frac{8}{\sqrt{17}}$
4	$5x - 2y + \frac{3}{4} = 0$	$A\left(0; \frac{3}{8}\right)$		$\frac{9}{\sqrt{17}}$
5	$2x + 3y - 1 = 0$	$A(1; 3)$		0

DES QUESTIONS D'ÉVALUATION

Question 1 Comment déterminer une équation cartésienne d'une droite (D) passant par un point $A(p; q)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$?

Exercice non corrigé

Une équation cartésienne de la droite (D) passant par A et de vecteur normal \vec{u} est de la forme $\sqrt{5}x - \frac{5}{4}y + c = 0$ où c est un nombre réel à déterminer.

$$A \in (D) \text{ donc } \sqrt{5} \times \sqrt{5} - \frac{5}{4} \times \frac{4}{5} + c = 0 \text{ d'où } c = -4$$

ainsi une équation de la droite (D) est : $\sqrt{5}x - \frac{5}{4}y - 4 = 0$

Question 2 Comment justifier que deux droites données par leurs équations cartésiennes sont parallèles, perpendiculaires ou sécantes non perpendiculaires ?

Exercice non corrigé

$\vec{n} \begin{pmatrix} -5 \\ 15 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (D) et $\vec{n}' \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (D')
 $-5 \times 1 - 3 \times 15 = -50$ et $-50 \neq 0$ donc (D) et (D') ne sont pas parallèles.
 d'autre part $-5 \times 3 + 1 \times 15 = 0$ donc (D) et (D') sont perpendiculaires.

MES SÉANCES D'EXERCICES

Exercices de fixation

Exercice 1

N°	Vecteur directeur	Droite
1	\overrightarrow{AD}	(AB)
2	\overrightarrow{IK}	(AB)
3	\overrightarrow{IJ}	(AB)
4	\overrightarrow{CK}	(AB)

Exercice 2

N°	Droite	Vecteur normal
1	(AB)	\overrightarrow{AC}
2	(AC)	\overrightarrow{AB}
3	(BC)	\overrightarrow{AH}

Exercice 3

N°	Droite	Point	Vecteur normal
1	(AB)	A	\overrightarrow{AD}
2	(AE)	E	\overrightarrow{EB}
3	(BD)	B	\overrightarrow{EA}
4	(EF)	F	\overrightarrow{BC}

Exercice 4

1. Une équation cartésienne de la droite (D) passant par A et de vecteur normal \vec{u} est de la forme $x - 2y + c = 0$ où c est un nombre réel à déterminer.

$A \in (D)$ donc $-1 - 2 \times 1 + c = 0$ d'où $c = 3$

ainsi une équation cartésienne de la droite (D) est : $x - 2y + 3 = 0$

2. Une équation cartésienne de la droite (D) passant par A et de vecteur normal \vec{u} est de la forme $-2x - y + c = 0$ où c est un nombre réel à déterminer.

$A \in (D)$ donc $-2 \times 0 - 0 + c = 0$ d'où $c = 0$

ainsi une équation cartésienne de la droite (D) est : $-2x - y = 0$

Exercice 5 REVOIR L'ÉNONCÉ (données manquantes)

1. ; 2.

Exercice 6

$A(1; 2)$ et $B(-3; 1)$ donc $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Un vecteur normal à la droite passant par A et B est $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Exercice 7

La ligne 4

Exercice 8

$\vec{n} \begin{pmatrix} 5 \\ -14 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (D) et $\vec{n}' \begin{pmatrix} 11 \\ m \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (D')

(D) et (D') sont pas parallèles si et seulement si \vec{n} et \vec{n}' sont colinéaires.

$5 \times m + 14 \times 11 = 0$ d'où $m = \frac{154}{5}$

Exercice 9

La ligne 4

Exercice 10

1. Vrai 2. Faux 3. Faux 4. Vrai

Exercice 11

$\vec{n} \begin{pmatrix} 7 \\ -21 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (D) et $\vec{n}' \begin{pmatrix} m \\ 8 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (D')

(D) et (D') sont pas perpendiculaires si et seulement si \vec{n} et \vec{n}' sont orthogonaux.

$$7 \times m - 21 \times 8 = 0 \text{ d'où } m = 24$$

Exercice 12

$$d(A, (D)) = \frac{|6 \times (-1) - 5 \times 4 + 2|}{\sqrt{6^2 + 5^2}} = \frac{24\sqrt{61}}{61}$$

Exercice 13

$$d(\Omega, (D)) = \frac{|2 \times 1 - 3 \times 5 - 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{14\sqrt{13}}{13}$$

Exercice 14

1. $B(-4; -1)$ et $C(2; 0)$ donc $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (BC)

Une équation cartésienne de la droite (BC) est de la forme $x - 6y + c = 0$ où c est un nombre réel à déterminer.

$$C \in (BC) \text{ donc } -2 - 6 \times 0 + c = 0 \text{ d'où } c = 2$$

ainsi une équation cartésienne de la droite (BC) est : $x - 6y + 2 = 0$

$$\text{Donc } d(A, (BC)) = \frac{|4 - 6 \times (-2) + 2|}{\sqrt{1^2 + 6^2}} = \frac{18\sqrt{37}}{37}$$

$$2. A_{ABC} = \frac{1}{2} \times d(A, (BC)) \times BC = \frac{1}{2} \times \frac{18\sqrt{37}}{37} \times \sqrt{37} = 9$$

Exercices de renforcement / Approfondissement

Exercice 15

1. \overrightarrow{PS} est un vecteur normal à (AD) car la droite (PS) est perpendiculaire à (AD)

\overrightarrow{QR} est un vecteur normal à (AD) car la droite (QR) est perpendiculaire à (AD) .

2. (AB) et (DC) car la droite (PQ) est perpendiculaire aux droites (AB) et (DC)

Exercice 16

1. $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (D_1) .

$\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (D_2) .

$\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (D_3) .

$\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (D_4) .

2. On a : $2 \times 0 - 3 \times 3 = -9$ et $-9 \neq 0$ donc (D_1) et (D_2) ne sont pas parallèles.
d'autre part $2 \times 3 + 3 \times 0 = 6$ donc (D_1) et (D_2) ne sont pas perpendiculaires.
par suite (D_1) et (D_2) sont sécantes non perpendiculaires.

On a : $0 \times 1 + 3 \times 1 = 3$ et $3 \neq 0$ donc (D_3) et (D_4) ne sont pas parallèles.
 d'autre part $0 \times 1 - 3 \times 1 = -3$ donc (D_3) et (D_4) ne sont pas perpendiculaires.
 par suite (D_3) et (D_4) sont sécantes non perpendiculaires.

Exercice 17

- $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (D) ; $\vec{m} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (D) ;
 $\vec{p} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (D) .
- $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D) ; $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D) ;
 $\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D) .

Exercice 18

- $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$; $\vec{m} \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \end{pmatrix}$ et $\vec{p} \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \end{pmatrix}$ sont trois vecteurs normaux à (D) .
- $\vec{u} \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D) donc un vecteur normal à (Δ) .
 Une équation de (Δ) est de la forme $-9x + 2y + c = 0$ où c est un nombre réel à déterminer.
 $A \in (\Delta)$ donc $-9 \times 5 + 2 \times (-9) + c = 0$ d'où $c = 63$
 ainsi une équation cartésienne de la droite (Δ) est : $-9x + 2y + 63 = 0$

Exercice 19

- $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D) donc un vecteur normal à (D') .
 Une équation de (D') est de la forme $x + 2y + c = 0$ où c est un nombre réel à déterminer.
 $A \in (D')$ donc $1 \times 1 + 2 \times 6 + c = 0$ d'où $c = -13$
 ainsi une équation cartésienne de la droite (D') est : $x + 2y - 13 = 0$

Exercice 20

- $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ de plus
 On a : $4 \times (-1) + 0 \times 7 = -4$ et $-4 \neq 0$ donc \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires d'où
 les points A, B et C ne sont pas alignés.
- $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (Δ) la hauteur du triangle ABC passant par A .
 Une équation de (Δ) est de la forme $3x - y + c = 0$ où c est un nombre réel à déterminer.
 A appartient à cette hauteur donc $3 \times (-2) - 4 + c = 0$ d'où $c = 10$
 ainsi une équation cartésienne de (Δ) est : $3x - y + 10 = 0$
- $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (Δ') la hauteur du triangle ABC passant par C .
 Une équation de cette hauteur (Δ') est de la forme $4x + c = 0$ où c est un nombre réel à déterminer.
 C appartient à (Δ') donc $4 \times 5 + c = 0$ d'où $c = -20$
 ainsi une équation cartésienne de cette hauteur (Δ') est : $4x - 20 = 0$

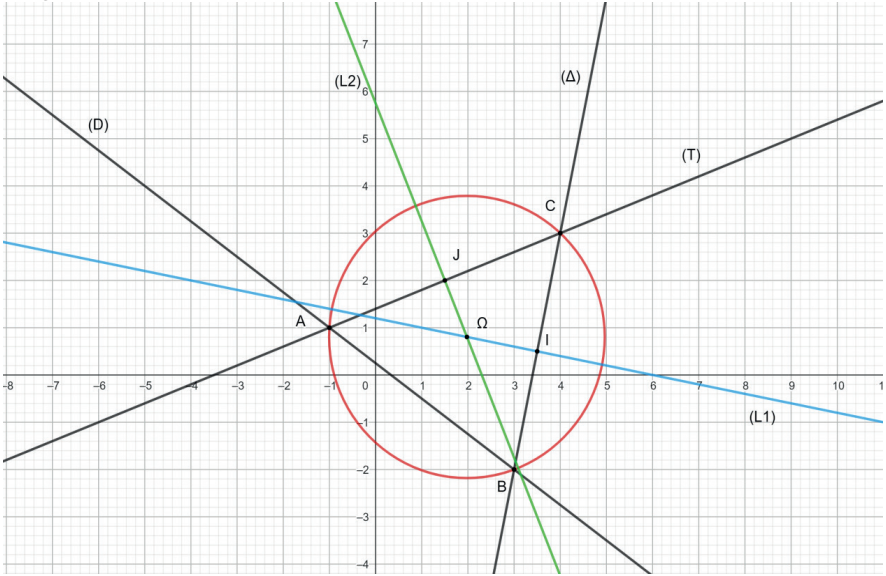
H est l'intersection de (Δ) et de (Δ') . Les coordonnées de H vérifient donc le système

$$\begin{cases} 3x - y + 10 = 0 \\ 4x - 20 = 0 \end{cases}$$

donc $H(5; 25)$

Exercice 21

1. figure



2. $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (D) ;

$\vec{m} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (T) ;

$\vec{p} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (Δ) .

- On a : $3 \times (-5) - 4 \times 2 = -23$ et $-23 \neq 0$ donc (D) et (T) ne sont pas parallèles.
D'autre part $2 \times 3 - 5 \times 4 = -14$ donc (D) et (T) ne sont pas perpendiculaires.
Par suite (D) et (T) sont sécantes non perpendiculaires.
- On a : $3 \times (-1) - 4 \times 5 = -23$ et $-23 \neq 0$ donc (D) et (Δ) ne sont pas parallèles.
D'autre part $3 \times 5 - 1 \times 4 = 11$ donc (D) et (Δ) ne sont pas perpendiculaires.
Par suite (D) et (Δ) sont sécantes non perpendiculaires.
- On a : $2 \times (-1) + 5 \times 5 = 23$ et $23 \neq 0$ donc (T) et (Δ) ne sont pas parallèles.
D'autre part $2 \times 5 + 1 \times 5 = 15$ donc (T) et (Δ) ne sont pas perpendiculaires.
Par suite (T) et (Δ) sont sécantes non perpendiculaires.

3.

A est l'intersection de (D) et (T) . Les coordonnées de A vérifient donc le système

$$\begin{cases} 3x + 4y - 1 = 0 \\ 2x - 5y + 7 = 0 \end{cases}$$

donc $A(-1; 1)$

B est l'intersection de (D) et (Δ) . Les coordonnées de B vérifient donc le système

$$\begin{cases} 3x + 4y - 1 = 0 \\ 5x - y - 17 = 0 \end{cases}$$

donc $B(3; -2)$

C est l'intersection de (T) et (Δ) . Les coordonnées de C vérifient donc le système

$$\begin{cases} 2x - 5y + 7 = 0 \\ 5x - y - 17 = 0 \end{cases}$$

donc $C(4; 3)$

Le centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC est le point d'intersection des médiatrices $(L1)$ de $[BC]$ et $(L2)$ de $[AC]$

- $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $(L1)$ donc une équation de $(L1)$ est de la forme :
 $x + 5y + c = 0$ où c est un nombre réel à déterminer.

$I \left(\frac{7}{2}; \frac{1}{2} \right)$ milieu de $[BC]$ appartient à $(L1)$ donc $1 \times \frac{7}{2} + 5 \times \frac{1}{2} + c = 0$ d'où $c = -6$
ainsi une équation cartésienne de $(L1)$ est : $x + 5y - 6 = 0$

- D'autre part

$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $(L2)$ donc une équation de $(L2)$ est de la forme :

$5x + 2y + c = 0$ où c est un nombre réel à déterminer.

$J \left(\frac{3}{2}; 2 \right)$ milieu de $[AC]$ appartient à $(L2)$ donc $5 \times \frac{3}{2} + 2 \times 2 + c = 0$ d'où $c = -\frac{23}{2}$
ainsi une équation cartésienne de $(L2)$ est : $5x + 2y - \frac{23}{2} = 0$

Ω est l'intersection de $(L1)$ et $(L2)$. Les coordonnées de Ω vérifient donc le système

$$\begin{cases} x + 5y - 6 = 0 \\ 5x + 2y - \frac{23}{2} = 0 \end{cases}$$

donc $\Omega \left(\frac{91}{46}; \frac{37}{46} \right)$

Exercice 22

$\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (D)

$\vec{n}' \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (D')

On a : $2 \times 2 - 4 \times 1 = 0$ donc les vecteurs \vec{n} et \vec{n}' sont colinéaires d'où les droites (D) et $(D)'$ sont parallèles.

Exercice 23

$\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (D)

$\vec{n}' \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (D')

On a : $2 \times 10 - 4 \times 5 = 0$ donc vecteurs \vec{n} et \vec{n}' sont orthogonaux d'où les droites (D) et $(D)'$ sont perpendiculaires.

Exercice 24

- (D) et $(D)'$ sont perpendiculaires
- (D) et $(D)'$ sont sécantes non perpendiculaires
- (D) et $(D)'$ sont parallèles
- (D) et $(D)'$ sont perpendiculaires
- (D) et $(D)'$ sont sécantes non perpendiculaires

Exercice 25

- $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D) donc un vecteur normal à (D_1) .
Une équation de (D_1) est de la forme $-x + 2y + c = 0$ où c est un nombre réel à déterminer.
 $A \in (D_1)$ donc $-1 \times 1 + 2 \times 2 + c = 0$ d'où $c = -3$
ainsi une équation cartésienne de la droite (D_1) est : $-x + 2y - 3 = 0$
- $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (D) donc un vecteur normal à (D_2) .
Une équation de (D_2) est de la forme $2x + y + c = 0$ où c est un nombre réel à déterminer.
 $A \in (D_2)$ donc $2 \times 1 + 1 \times 2 + c = 0$ d'où $c = -4$
ainsi une équation cartésienne de la droite (D_2) est : $2x + y - 4 = 0$

Exercice 26

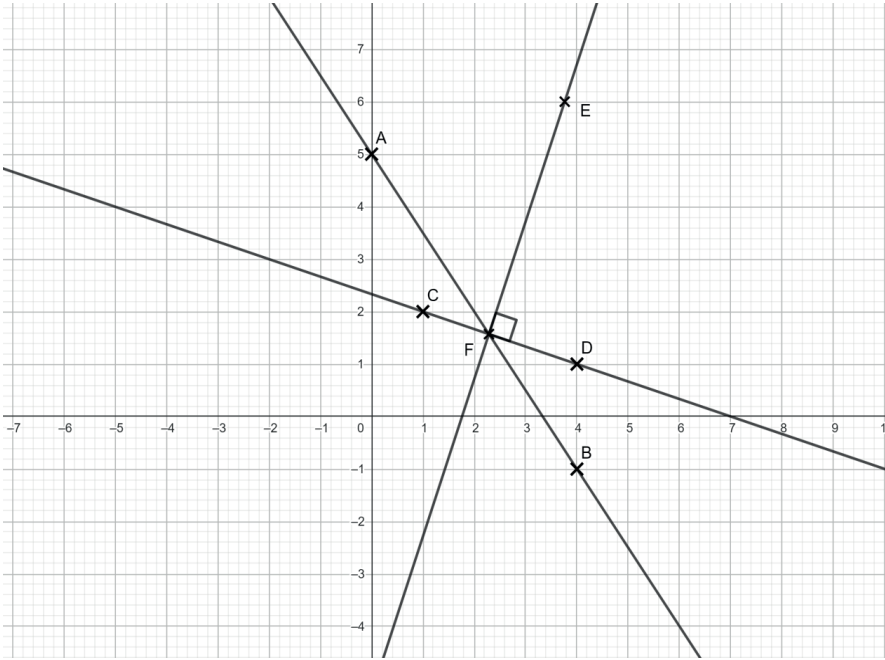
- $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (Δ) . Une équation de (Δ) est de la forme $3x - y + c = 0$ où c est un nombre réel à déterminer.
 $I \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2} \right)$ milieu de $[AB]$ appartient à (Δ) donc $3 \times \frac{3}{2} - \frac{3}{2} + c = 0$ d'où $c = -3$
ainsi une équation cartésienne de la droite (Δ) est : $3x - y - 3 = 0$
- $d(C, (\Delta)) = \frac{|3 \times 1 - 3 - 3|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$
- $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (Δ') . Une équation de (Δ') est de la forme $3x - y + c = 0$ où c est un nombre réel à déterminer.
 E appartient à (Δ') donc $3 \times 2 - 5 + c = 0$ d'où $c = -1$
ainsi une équation cartésienne de la droite (Δ') est : $3x - y - 1 = 0$

Exercice 27

- $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (Δ) . Une équation de (Δ) est de la forme $-x - 2y + c = 0$ où c est un nombre réel à déterminer.
 $A \in (\Delta)$ donc $-1 - 2 \times 2 + c = 0$ d'où $c = 5$
ainsi une équation cartésienne de la droite (Δ) est : $-x - 2y + 5 = 0$
- $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (Δ) donc un vecteur normal à (Δ') . Une équation de (Δ') est de la forme $2x - y + c = 0$ où c est un nombre réel à déterminer.
 $C \in (\Delta')$ donc $2 \times (-2) - 1 + c = 0$ d'où $c = 5$
ainsi une équation cartésienne de la droite (Δ') est : $2x - y + 5 = 0$.
- $d(A, (\Delta')) = \frac{|2 \times 1 - 2 + 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$

Exercice 28

1.



2. $(AB) \cap (CD) = \{F\}$

Déterminons les équations des droites (AB) et (CD) afin de déterminer les coordonnées de F

- $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB) , un vecteur normal à (AB) est donc $\vec{n} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

Une équation de (AB) est de la forme $6x + 4y + c = 0$ où c est un nombre réel à déterminer.

$A \in (AB)$ donc $6 \times 0 + 4 \times 5 + c = 0$ d'où $c = -20$

ainsi une équation cartésienne de la droite (AB) est : $6x + 4y - 20 = 0$

- De même

$\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (CD) , un vecteur normal à (CD) est donc $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Une équation de (CD) est de la forme $x + 3y + c = 0$ où c est un nombre réel à déterminer.

$C \in (CD)$ donc $1 \times 1 + 3 \times 2 + c = 0$ d'où $c = -7$

ainsi une équation cartésienne de la droite (CD) est : $x + 3y - 7 = 0$

Les coordonnées de F vérifient donc le système

$$\begin{cases} 6x + 4y - 20 = 0 \\ x + 3y - 7 = 0 \end{cases}$$

donc $F \left(\frac{16}{7}; \frac{11}{7} \right)$

Les droites (CD) et (EF) sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{EF} \left(\frac{16}{7} - m \right)$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

sont orthogonaux.

\overrightarrow{EF} et \overrightarrow{CD} sont orthogonaux si et seulement si $3 \left(\frac{16}{7} - m \right) + \frac{31}{7} = 0$

si et seulement si $m = \frac{79}{21}$

ainsi $E \left(\frac{79}{21}; 6 \right)$

Exercice 29

ΩA est la distance de A à (D)

$$d(A, (D)) = \frac{|3 \times (-2) - 4 \times 4 + 15|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{7}{5}$$

Exercice 30

1. $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (D) donc un vecteur normal à (Δ) .

Une équation de (Δ) est de la forme $2x - y + c = 0$ où c est un nombre réel à déterminer.

$\Omega \in (\Delta)$ donc $2 \times 2 - 1 \times (-1) + c = 0$ d'où $c = -5$

ainsi une équation cartésienne de la droite (Δ) est : $2x - y - 5 = 0$

2. $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D) donc un vecteur normal à (T) .

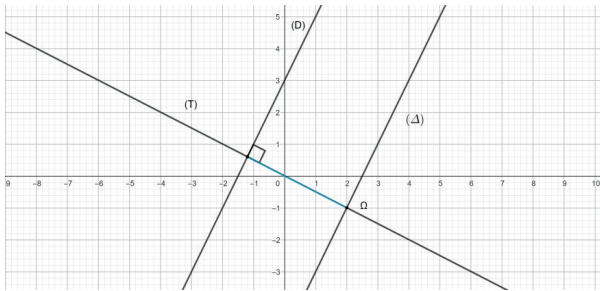
Une équation de (T) est de la forme $x + 2y + c = 0$ où c est un nombre réel à déterminer.

$\Omega \in (T)$ donc $1 \times 2 + 2 \times (-1) + c = 0$ d'où $c = 0$

ainsi une équation cartésienne de la droite (T) est : $x + 2y = 0$

3. La distance de (Δ) à la droite (D) est la distance de Ω à (D) .

$$d(\Omega, (D)) = \frac{|2 \times 2 - 1 \times (-1) + 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$



Exercice 31

1. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB) , un vecteur normal à (AB) est donc $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Une équation de (AB) est de la forme $x + y + c = 0$ où c est un nombre réel à déterminer.

$A \in (AB)$ donc $1 - 2 + c = 0$ d'où $c = 1$

ainsi une équation cartésienne de la droite (AB) est : $x + y + 1 = 0$

2. Soit (Δ) la médiatrice du segment $[AB]$

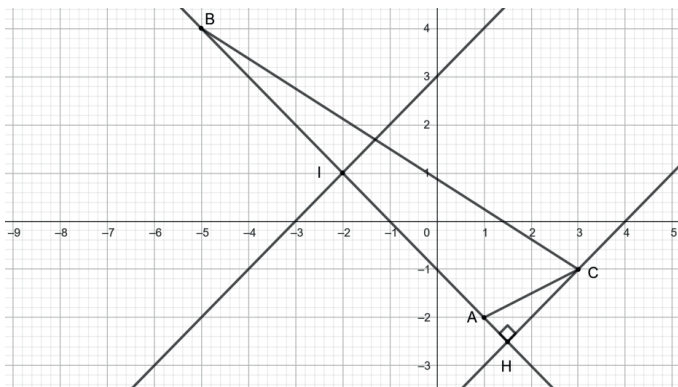
$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (Δ) .

Une équation de (Δ) est de la forme $-x + y + c = 0$ où c est un nombre réel à déterminer.

$I(-2; 1)$ milieu de $[AB]$ appartient à (Δ) donc $2 + 1 + c = 0$ d'où $c = -3$
 ainsi une équation cartésienne de la droite (Δ) est : $-x + y - 3 = 0$

3. CH est la distance de C à la droite (AB) .

$$d(C, (AB)) = \frac{|1 \times 3 + 1 \times (-1) + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$



Exercice 32 même exercice que le 22

$\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (D) et $\vec{n}' \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (D')

On a : $2 \times 2 - 4 \times 1 = 0$ donc les vecteurs \vec{n} et \vec{n}' sont colinéaires, d'où les droites (D) et (D') sont parallèles.

Exercice 33

1. $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D) , un vecteur normal à (D) est donc $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Une équation de (D) est de la forme $x + 2y + c = 0$ où c est un nombre réel à déterminer.

$A \in (D)$ donc $-3 + 2 \times 2 + c = 0$ d'où $c = -1$

ainsi une équation cartésienne de la droite (D) est : $x + 2y - 1 = 0$

• $\vec{CD} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (D') .

Une équation cartésienne de (D') est de la forme $3x + 6y + c = 0$ où c est un nombre réel à déterminer.

$K \left(-\frac{3}{2}; 1\right)$ milieu de $[CD]$ appartient à (D') donc $3 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + 6 \times 1 + c = 0$ d'où $c = -3$

ainsi une équation cartésienne de la droite (D') est : $3x + 6y - 3 = 0$ soit $x + 2y - 1 = 0$

2. $d(A, (D')) = \frac{|-3 + 2 \times 2 - 1|}{\sqrt{3^2 + 6^2}} = 0 \quad (A \in (D'))$

$$d(C, (D)) = \frac{|-3 + 2 \times (-2) - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

SITUATIONS COMPLEXES

Exercice 34

Remarque : on aurait pu donner les coordonnées des points E et B dans le repère suggéré sur la figure. A défaut, on peut en utilisant un compas vérifier que B (0 ; 3) et E (4,5 ; 0). On a donc : D (4,5 ; 3) et A (4,5 ; 1,5).

Posons C (x, y). C étant un point de la droite (BD), $y = 3$. Les vecteurs \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{OC} étant orthogonaux, on a : $x(x-4,5) + 0,5 \times 3 = 0$ soit $x^2 - 4,5x + 4,5 = 0$

Les racines de cette équation du second degré sont 1,5 et 3. Il existe donc deux positions possibles pour le point C déterminée par les couples de coordonnées ((3; 3) ou (1,5 ; 3).

Exercice 35

$\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (Δ).

Une équation cartésienne de (Δ) est de la forme $3x - 2y + c = 0$ où c est un nombre réel à déterminer.

$$B \in (\Delta) \text{ donc } 3 \times (-1) - 2 \times 2 + c = 0 \text{ d'où } c = 7$$

$$\text{ainsi une équation cartésienne de la droite } (\Delta) \text{ est : } 3x - 2y + 7 = 0$$

Exercice 36

$\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (D) et, $\vec{n}' \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (D').

$$\text{on a : } \frac{2}{3} \times 2 - \frac{5}{2} \times \frac{8}{15} = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = 0, \text{ donc les deux droites } (D) \text{ et } (D') \text{ sont perpendiculaires.}$$

C'est le membre de l'équipe qui a raison.

I - SITUATION D'APPRENTISSAGE

Constituants de la situation	Exemples de questions possibles	Réponses possibles des élèves
Contexte	Où et quand se déroule la scène ?	l'occasion de son anniversaire de leur petit frère Honoré
Circonstances	Quel est le problème auquel l'élève est confronté ?	L'élève veut savoir comment déterminer la position d'un sous-marin dans le fond marin. Son professeur affirme que les points, les forces, les vitesses vectorielles comportent souvent une troisième dimension.
Tâche	Qu'est-ce que les élèves de classe décident de faire ?	Pour cela, les élèves de classe décident d'étudier les vecteurs de l'espace

II- DÉCOUVERTE DES HABILITÉS

Activité 1

- Les caractéristiques du vecteur \overrightarrow{AG} sont :
 - la direction : la droite (AG)
 - le sens : du point A vers le point G
 - la norme : la distance AG
- \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{EF}
- \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AE}
- \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{EF} ont la même direction, le même sens et la même norme.

Exercice de fixation 1

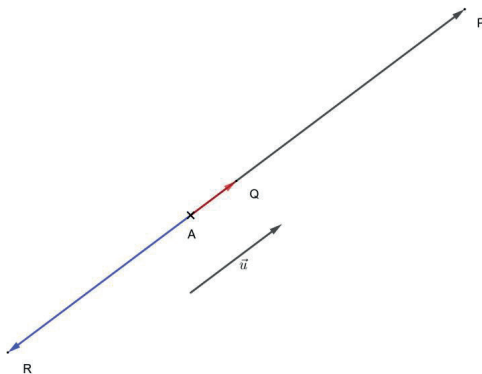
- VRAI
- FAUX
- VRAI
- VRAI
- VRAI
- FAUX

Exercice de fixation 2

- Le vecteur \overrightarrow{QS} est orthogonal au vecteur \overrightarrow{PT}
- \overrightarrow{KR} est colinéaire au vecteur \overrightarrow{SP}
- Le vecteur \overrightarrow{QP} est égal au vecteur \overrightarrow{RN}
- Le vecteur \overrightarrow{QL} est colinéaire au vecteur \overrightarrow{NP}
- Le vecteur \overrightarrow{TL} est égal au vecteur \overrightarrow{IM}
- Le vecteur \overrightarrow{KL} est orthogonal au vecteur \overrightarrow{RS}

Activité 2

a) Construction des points P, Q et R



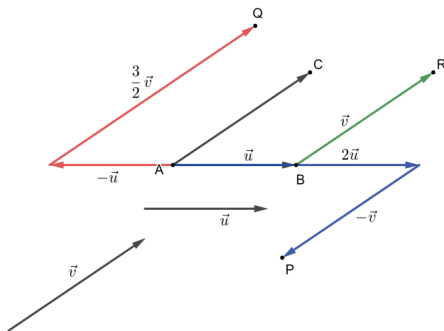
b) $\overrightarrow{AP} = 6 \overrightarrow{AQ} = -\frac{3}{2} \overrightarrow{AR}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}$ et \overrightarrow{AR} sont colinéaires d'où les points A, P, Q et R sont alignés. Ainsi les points P, Q et R appartiennent à la droite passant par A et de vecteur directeur \vec{u} .

Exercice de fixation 3

1. B
2. A
3. A
4. C

Activité 3

1. 2.



3. On a :

$$\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \quad ; \quad \overrightarrow{AQ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}$ et \overrightarrow{AR} sont des combinaisons linéaires des vecteurs non colinéaires \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} donc les points P, Q et R appartiennent au plan (P).

Exercice de fixation 4 :

Considère le tétraèdre ABCS au lieu de ABCD

1. FAUX
- 2.
3. FAUX
4. VRAI

Activité 4

1. $(A; \overline{AF}; \overline{AD})$
2. a) on a : $\overline{CD} + \overline{CG} = \overline{CD} + \overline{DH} = \overline{CH}$ or $\overline{CD} = \overline{BA}$ et $\overline{DH} = \overline{AE}$ donc $\overline{BA} + \overline{AE} = \overline{BE}$
d'où $\overline{BE} = \overline{CH}$
3. b) (C, D) ; (C, G) et (C, H)
c) Un plan qui contient les points C, D, G et H est $(C; \overline{CD}; \overline{CG})$
4. a) $ABCD$ est un carré donc $\overline{AD} = \overline{BC}$
 $ABFE$ est un carré donc $\overline{FE} = \overline{AB}$
b) (B, G) ; (B, C) et (B, A)
c) Il n'existe pas de plan qui contient les points B, G, C et A

Exercice de fixation 5

- Les vecteurs \overline{AB} , \overline{AD} et \overline{AE} sont coplanaires
- Les vecteurs \overline{AB} , \overline{AC} et \overline{CE} sont non-coplanaires

Exercice de fixation 6 (Voir cube de l'activité 4)

1. FAUX
2. FAUX
3. FAUX
4. FAUX

Activité 5 :

1. Considérons le plan (OAC), les vecteurs \vec{u} et \vec{w} sont respectivement représentés par les couples (O, A) et (O, C) contenus dans le plan (OAC)

Si les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires, alors les points O, A et B sont alignés et donc le couple (O, B) représentant le vecteur \vec{v} est aussi contenu dans le plan (OAC) d'où le résultat.

2. Soit (P) le plan passant par O et de vecteurs directeurs \vec{u} et \vec{v}
a) Si les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires, alors (O, C) représentant du vecteur \vec{w} est représenté dans le plan (P) et comme O appartient à (P), donc C appartient à (P)

Si C appartient à (P), et comme O appartient aussi à (P), alors (O, B) représentant du vecteur \vec{w} est dans (P) et donc les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires.

- b) $C \in (P)$ équivaut à \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} coplanaires. Or $C \in (P)$ équivaut à il existe deux nombres réels α et β tels que $\overline{OC} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$ soit $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$

Exercice d'application 7 :

1. b)
2. c)
3. a)

Activité 6 :

1. Supposons que \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} soient coplanaires, alors il existe $(\alpha; \beta; \gamma) \neq (0; 0; 0)$

$$\text{tel que } \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k} = \vec{0}$$

$$\text{d'où } \frac{1}{3}\alpha\vec{AB} + \frac{1}{3}\beta\vec{AD} + \frac{1}{3}\gamma\vec{AE} = \vec{0}$$

$$\text{donc } \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AD} + \gamma\vec{AE} = \vec{0}$$

$$\text{par suite } \alpha\vec{AB} = -\beta\vec{AD} - \gamma\vec{AE}$$

c'est à dire $B \in (A, D, E)$

ce qui est absurde donc en conclusion, \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} sont non-coplanaires.

2. a) Dans le cube, les côtés $[AB]$, $[AD]$ et $[AE]$ ont des supports deux à deux perpendiculaires, donc les vecteurs \vec{AB} , \vec{AD} et \vec{AE} sont deux à deux orthogonaux.

D'où les vecteurs \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} sont deux à deux orthogonaux.

$$\text{b) } \|\vec{i}\| = \left\| \frac{1}{3}\vec{AB} \right\| = \frac{1}{3} \|\vec{AB}\| = \frac{1}{3} \times AB = \frac{1}{3} \times 3 = 1.$$

$$\text{De même } \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$$

3. $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AB} + \vec{AD} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$
 $\vec{EC} = \vec{EA} + \vec{AD} + \vec{DC} = -\vec{AE} + \vec{AD} + \vec{AB} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$
 $\vec{DG} = \vec{DH} + \vec{HG} = \vec{AE} + \vec{AB} = 3\vec{i} + 3\vec{k}$
 $\vec{BH} = \vec{BA} + \vec{AE} + \vec{EH} = -\vec{AB} + \vec{AE} + \vec{AD} = -3\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$

Exercice de fixation 8

1. FAUX car $-\vec{CD} + \vec{0BF} + \vec{EH} = -\vec{FE} + \vec{EH} = \vec{EF} + \vec{EH} = \vec{EG}$ et $\vec{EG} \neq \vec{AF}$
2. FAUX car $\vec{AC} - \vec{AB} = \vec{BC}$ et $\vec{BC} \neq \vec{BD}$
3. VRAI car $-\vec{EB} + \vec{CD} - \vec{FH} = \vec{BE} + \vec{CD} - \vec{BD} = \vec{BE} + \vec{CB} = \vec{CE}$

Exercice de fixation 9

Réponse B)

Activité 7 :

1. $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{u}' = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ donc :
 $\vec{u} + \vec{u}' = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} + x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ et $\alpha\vec{u} = \alpha(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$
 $\vec{u} + \vec{u}' = (x + x')\vec{i} + (y + y')\vec{j} + (z + z')\vec{k}$ et $\alpha\vec{u} = (\alpha x)\vec{i} + (\alpha y)\vec{j} + (\alpha z)\vec{k}$
donc $(\vec{u} + \vec{u}') \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$ et $\alpha\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix}$

Exercice de fixation 10

$$-7\vec{v} \begin{pmatrix} -14 \\ 7 \end{pmatrix} ; (2\vec{u} - 3\vec{v} - \vec{w}) \begin{pmatrix} -11 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ et } (-4\vec{v} + 5\vec{w}) \begin{pmatrix} -13 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Activité 8

1. $(\vec{OI}; \vec{OJ}; \vec{OK})$ est une base de w donc les vecteurs \vec{OI} , \vec{OJ} et \vec{OK} ne sont pas coplanaires d'où les points O, I, J et K ne sont pas coplanaires.

$$2. \vec{OE} = \vec{OI} + \vec{IA} + \vec{AE} = \vec{OI} + \vec{OJ} + \frac{1}{2}\vec{OK} \text{ donc } \vec{OE} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice de fixation 11

1. FAUX
2. VRAI
3. FAUX
4. FAUX
5. VRAI
6. VRAI

Activité 9

Dans le plan (ABC), H est le projeté orthogonal de A sur la droite (AB), donc H est un point de la droite (AB) et appartient par conséquent appartient au plan (ABC).

On se ramène au plan (voir démonstration 2C)

Exercice de fixation 12

1. B
2. C
3. A
4. D

Activité 10

1. $\vec{IJ} = \vec{OJ} - \vec{OI}$ donc $IJ^2 = (\vec{OJ} - \vec{OI})^2$
d'où $IJ^2 = OJ^2 + OI^2 - 2\vec{OJ} \cdot \vec{OI}$
par suite $2\vec{OJ} \cdot \vec{OI} = OI^2 + OJ^2 - IJ^2$
enfin $\vec{OI} \cdot \vec{OJ} = \frac{1}{2}(OI^2 + OJ^2 - IJ^2)$
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(OI^2 + OJ^2 - IJ^2)$

En procédant de même, on démontre que : $\vec{OI} \cdot \vec{OK} = \frac{1}{2}(OI^2 + OK^2 - IK^2)$
 $\vec{u} \cdot \vec{w} = \frac{1}{2}(OI^2 + OK^2 - IK^2)$

2. OJK est un triangle et P est le milieu de $[JK]$ d'après le théorème de la médiane on a :
 $OJ^2 + OK^2 = 2OP^2 + \frac{1}{2}JK^2$

IJK est un triangle et P est le milieu de $[JK]$ d'après le théorème de la médiane on a :
 $IJ^2 + IK^2 = 2IP^2 + \frac{1}{2}JK^2$

- 3.a) $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = \frac{1}{2}(OI^2 + OJ^2 - IJ^2) + \frac{1}{2}(OI^2 + OK^2 - IK^2)$
 $= \frac{1}{2}(2OI^2 + OJ^2 + OK^2 - (IJ^2 + IK^2))$
 $= \frac{1}{2}(2OI^2 + 2OP^2 + \frac{1}{2}JK^2 - (2IP^2 + \frac{1}{2}JK^2))$
 $= \frac{1}{2}(2OI^2 + 2OP^2 - 2IP^2)$
 $= OI^2 + OP^2 - IP^2$

b) démonstration laissée au soins du lecteur

Exercice de fixation 13

1. FAUX ; 2. FAUX ; 3. VRAI ; 4. FAUX

Activité 11

- $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{u}' = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$
- $\vec{u} \cdot \vec{u}' = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})$
 $= (x\vec{i}) \cdot (x'\vec{i}) + (x\vec{i}) \cdot (y'\vec{j}) + (x\vec{i}) \cdot (z'\vec{k}) + (y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i}) + (y\vec{j}) \cdot (y'\vec{j}) + (y\vec{j}) \cdot (z'\vec{k}) + (z\vec{k}) \cdot (x'\vec{i}) + (z\vec{k}) \cdot (y'\vec{j}) + (z\vec{k}) \cdot (z'\vec{k})$
 $= (xx')(\vec{i} \cdot \vec{i}) + (xy')(\vec{i} \cdot \vec{j}) + (xz')(\vec{i} \cdot \vec{k}) + (yx')(\vec{j} \cdot \vec{i}) + (yy')(\vec{j} \cdot \vec{j}) + (yz')(\vec{j} \cdot \vec{k}) + (zx')(\vec{k} \cdot \vec{i}) + (zy')(\vec{k} \cdot \vec{j}) + (zz')(\vec{k} \cdot \vec{k})$

Les vecteurs \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} étant unitaires et deux à deux orthogonaux, alors :

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \|\vec{i}\|^2 = 1, \quad \vec{j} \cdot \vec{j} = \|\vec{j}\|^2 = 1, \quad \vec{k} \cdot \vec{k} = \|\vec{k}\|^2 = 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

Ainsi : $\vec{u} \cdot \vec{u}' = xx' + yy' + zz'$

- $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = xx + yy + zz = x^2 + y^2 + z^2$ donc $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Exercice de fixation 14 P187 :

- A
- C
- B
- B
- C

DES QUESTIONS D'ÉVALUATION

Question 1 Comment démontrer que trois vecteurs de l'espace sont coplanaires ?

Exercice non corrigé

Déterminons des nombres α et β tels que $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \vec{w}$

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 3\alpha - 2\beta = -9 \\ -4\alpha + \beta = 7 \\ \alpha + 2\beta = 5 \end{cases} \quad \text{on obtient } \alpha = 1 \text{ et } \beta = 3$$

donc les vecteurs \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires.

Question 2 Comment démontrer que trois vecteurs de l'espace sont non coplanaires ?

Exercice non corrigé

Soit $(\alpha, \beta \text{ et } \lambda)$ un triplet de nombres réels tel que : $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \lambda \vec{w} = \vec{0}$

on obtient :

$$\alpha(2\vec{i} - 3\vec{j}) + \beta(-\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}) + \lambda(-3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) = \vec{0}$$

$$\text{d'où } (2\alpha - \beta - 3\lambda)\vec{i} + (-3\alpha + \beta + 2\lambda)\vec{j} + (2\beta - \lambda)\vec{k} = \vec{0}$$

On sait que les vecteurs \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} sont non coplanaires.

$$\text{On a donc le système suivant : } \begin{cases} 2\alpha - \beta - 3\lambda = 0 \\ -3\alpha + \beta + 2\lambda = 0 \\ 2\beta - \lambda = 0 \end{cases} \text{ qui a pour solution } \{(0,0,0)\}$$

On en déduit que $\beta = \lambda = 0$, donc les vecteurs \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} sont non coplanaires.

Question 3 Comment démontrer que quatre points d'un repère de l'espace sont non coplanaires ?

Exercice non corrigé

$$\text{On a : } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Démontrons que les vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{AD} sont non coplanaires.

Soit trois réels α, β et λ tels que : $\alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC} + \lambda \overrightarrow{AD} = \vec{0}$

$$\text{on a : } \alpha(-\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}) + \beta(-2\vec{i} - 2\vec{k}) + \lambda(-6\vec{j} + 4\vec{k}) = \vec{0}$$

$$\text{d'où } (-\alpha - 2\beta)\vec{i} + (-3\alpha - 6\lambda)\vec{j} + (\alpha - 2\beta + 4\lambda)\vec{k} = \vec{0}$$

On sait que les vecteurs \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} sont non coplanaires.

$$\text{On a donc le système suivant : } \begin{cases} -\alpha - 2\beta = 0 \\ -3\alpha - 6\lambda = 0 \\ \alpha - 2\beta + 4\lambda = 0 \end{cases}$$

On en déduit que $\beta = \lambda = 0$, donc les vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{AD} sont non coplanaires.

d'où les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

Question 4 Comment démontrer dans une base orthonormée que deux vecteurs sont orthogonaux ?

Exercice non corrigé

Démontrons que les vecteurs \overrightarrow{NM} et \overrightarrow{NP} sont orthogonaux.

On a :

$$\overrightarrow{NM} \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ 1 + \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{NP} \begin{pmatrix} -1 - \sqrt{2} \\ -1 + \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Calculons $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NP}$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NP} &= (1 - \sqrt{2})(-1 - \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2})(-1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) \\ &= -(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2})(-1 + \sqrt{2}) - 2 \\ &= 1 + 1 - 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc, les vecteurs \overrightarrow{NM} et \overrightarrow{NP} sont orthogonaux. Par suite le triangle MNP est rectangle en N

MES SÉANCES D'EXERCICES

EXERCICE 1

1. I et L
2. A et J
3. L et I

EXERCICE 2

1. Un couple de vecteurs directeurs du plan (DJI) est : $(\vec{u} + \vec{v}; \vec{k} - \vec{u})$
2. Les plans (DJI) et (GIJ) désignent le même plan donc un couple de vecteurs directeurs du plan (GIJ) est aussi $(\vec{u} + \vec{v}; \vec{k} - \vec{u})$

EXERCICE 3

1. Soit a, b et c trois réels :

$$a(\vec{u} + \vec{v}) + b(\vec{u} + \vec{w}) + c(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{0} \Leftrightarrow (a+b)\vec{u} + (a+c)\vec{v} + (b+c)\vec{w} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 & (1) \\ a+c=0 & (2) \\ b+c=0 & (3) \end{cases} \text{ car } \vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont non-coplanaires}$$

(1) + (2) donne $2a + b + c = 0$ et comme $b + c = 0$ alors $2a = 0$

Il en résulte que : $a = 0$ et par suite $b = c = 0$

Donc les vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} + \vec{w}$ et $\vec{v} + \vec{w}$ sont non-coplanaires

2. Soit a, b et c trois réels :

$$a(\vec{u} - 2\vec{w}) + b(\vec{w} - 2\vec{v}) + c(\vec{v} - 2\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow (a-2c)\vec{u} + (c-2b)\vec{v} + (b-2a)\vec{w} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-2c=0 & (1) \\ c-2b=0 & (2) \\ b-2a=0 & (3) \end{cases} \text{ car } \vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont non-coplanaires}$$

(1) et (2) donnent $a = 2c$ et $c = 2b$ donc $a = 4b$

En remplaçant cette égalité dans (3), on obtient $-7b = 0$ et donc $b = 0$. Par suite $c = 0$ et $a = 0$

Les vecteurs $\vec{u} - 2\vec{w}$, $\vec{w} - 2\vec{v}$ et $\vec{v} - 2\vec{u}$ sont non-coplanaires.

3. Soit a, b et c trois réels :

$$a(\vec{u} - \vec{w}) + b(\vec{v} - \vec{u}) + c(\vec{w} - \vec{v}) = \vec{0} \Leftrightarrow (a-b)\vec{u} + (b-c)\vec{v} + (c-a)\vec{w} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ b-c=0 \\ c-a=0 \end{cases} \text{ car } \vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont non-coplanaires}$$

Donc $a = b = c$

Remarque : dans ce cas, les vecteurs sont coplanaires. (énoncé à reformuler)

EXERCICE 4

1. Vrai
2. Faux
3. Faux
4. Vrai

EXERCICE 5

1. Les vecteurs \vec{QN} , \vec{QO} et \vec{QR} sont coplanaires.
2. Les vecteurs \vec{PM} , \vec{PQ} et \vec{PR} sont non-coplanaires.

EXERCICE 6

Les points I et K étant les milieux respectifs de $[AB]$ et $[BF]$, alors d'après la droite des milieux appliquée au triangle ABF , on a : $(AF) \parallel (IK)$ et donc les vecteurs \vec{IK} et \vec{AF} sont colinéaires.

Comme $\vec{AF} = \vec{DG}$, finalement les vecteurs \vec{IK} et \vec{DG} sont colinéaires. Par conséquent, les vecteurs \vec{IK} , \vec{BG} et \vec{DG} sont coplanaires.

EXERCICE 7

$$\vec{AI} = \vec{DC} + \frac{1}{2}\vec{DH} \Leftrightarrow \vec{DH} = 2\vec{AI} - 2\vec{DC}$$

$$\vec{DF} = \vec{DC} + \vec{DH} + \vec{DA} \Leftrightarrow \vec{DF} = \vec{DC} + 2\vec{AI} - 2\vec{DC} + \vec{DA}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \overrightarrow{DF} &= -\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{AI} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{DF} &= -(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}) + 2\overrightarrow{AI} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{DF} &= -\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AI} \end{aligned}$$

donc les vecteurs \overrightarrow{DF} , \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{AI} sont coplanaires.

EXERCICE 8

Soit a, b et c trois réels tels que : $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$

$$\begin{aligned} a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} &\Leftrightarrow a(-2\vec{i} + \vec{j}) + b(2\vec{i} - \vec{k}) + c(\vec{j} - 2\vec{k}) = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow (-2a + 2b)\vec{i} + (a + c)\vec{j} + (-b - 2c)\vec{k} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2a + 2b = 0 \\ a + c = 0 \\ -b - 2c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -c \\ b = -2c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -c \\ a = -c \text{ donc } -c = -2c, \text{ ce qui implique que } c = 0 \text{ et par suite } a = b = 0 \\ a = -2c \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont non-coplanaires et par conséquent constituent une base de \mathcal{W} .

EXERCICE 9

1. a) $\overrightarrow{RS} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{ST} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{TR} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $(5\overrightarrow{RS} - 2\overrightarrow{ST}) \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $(\overrightarrow{TR} + 3\overrightarrow{SR}) \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}$

2. $x_I = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2}$; $y_I = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$; $z_I = \frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{2}$ donc $I \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$x_J = \frac{-1-1}{2} = -1$; $y_J = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$; $z_J = \frac{-3+0}{2} = -\frac{3}{2}$ donc $J \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

$x_K = \frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{2}$; $y_K = \frac{2+2}{2} = 2$; $z_K = \frac{-3-1}{2} = -2$ donc $K \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

EXERCICE 10

1. Les vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{AE} sont trois vecteurs non-coplanaires donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$ est une base de \mathcal{W} .

2. a) On a : $A(0; 0; 0)$; $B(1; 0; 0)$; $C(0; 1; 0)$; $E(0; 0; 1)$

$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$ donc $H(-1; 1; 1)$

I étant le milieu de $[EH]$ alors $x_I = \frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{2}$, $y_I = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$, $z_I = \frac{1+1}{2} = 1$ donc $I(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1)$

• $\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et par suite $J(0; 0; \frac{1}{3})$

• $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ donc $K(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}; 0)$

• $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$ donc $G(0; 1; 1)$

• $\overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GK} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\text{b) } \vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC} - \frac{2}{3}\vec{AE} \quad \text{et} \quad \frac{2}{3}\vec{GK} = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\vec{AB} - \frac{3}{4}\vec{AC} - \vec{AE}\right) = \frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC} - \frac{2}{3}\vec{AE}$$

$$\text{donc } \vec{IJ} = \frac{2}{3}\vec{GK}$$

c) Comme $\vec{IJ} = \frac{2}{3}\vec{GK}$ alors les vecteurs \vec{IJ} et \vec{GK} sont colinéaires donc coplanaires.
d'où que les points I, J, K et G sont coplanaires.

EXERCICE 11

1. Tout triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ constitué de vecteurs non-coplanaires est une **base** de \mathcal{W} .
2. Tout triplet de vecteurs deux à deux orthogonaux est appelée base **orthogonale**.
3. Toute base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthogonale telle que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ est dite **orthonormée**.
4. L'unique triplet $(a; b; c)$ de nombres réels tels que $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ est appelé triplet de **coordonnées** de \vec{u} dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

EXERCICE 12

1. Faux
2. Vrai
3. Faux
4. Vrai

EXERCICE 13

$$\vec{DF} = \vec{DC} + \vec{CB} + \vec{BF} = -\vec{FE} - \vec{BC} + \vec{DH} = -\vec{FE} + \vec{DH} - \vec{BC} \quad \text{donc } \vec{DF} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 14

$$\vec{a} = \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{5}\right)\vec{i} + \left(-\frac{2}{5} - \frac{3}{5}\right)\vec{j} + \left(2 - \frac{9}{5}\right)\vec{k}$$

$$= \frac{27}{20}\vec{i} - \vec{j} + \frac{1}{5}\vec{k}$$

Donc $\vec{a} \begin{pmatrix} \frac{27}{20} \\ -1 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

EXERCICE 15

$$(\vec{u} + \vec{v}) \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (\vec{u} - \vec{v}) \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad (2\vec{u} - 3\vec{v} - \vec{w}) \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad ; \quad -\frac{1}{5}\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

EXERCICE 16

$$x_I = \frac{1+3}{2} = 2 \quad ; \quad y_I = \frac{-2+0}{2} = -1 \quad ; \quad z_I = \frac{4+5}{2} = -\frac{9}{2} \quad \text{donc } I \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -\frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

$$x_J = \frac{3-1}{2} = 1 \quad ; \quad y_J = \frac{0+2}{2} = 1 \quad ; \quad z_J = \frac{5-3}{2} = 1 \quad \text{donc } J \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_K = \frac{1-1}{2} = 0 \quad ; \quad y_K = \frac{-2+2}{2} = 0 \quad ; \quad z_K = \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{donc } K \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

EXERCICE 17

$$\vec{EF} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{FG} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{GH} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Soit a, b et c trois réels tels que : $a\overrightarrow{EF} + b\overrightarrow{FG} + c\overrightarrow{GH} = \vec{0}$

$$\begin{aligned} a\overrightarrow{EF} + b\overrightarrow{FG} + c\overrightarrow{GH} = \vec{0} &\Leftrightarrow a(-\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}) + b(-4\vec{j} - 2\vec{k}) + c(\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}) = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow (-a + c)\vec{i} + (2a - 4b + c)\vec{j} + (4a - 2b - 4c)\vec{k} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -a + c = 0 \\ 2a - 4b + c = 0 \\ 4a - 2b - 4c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ 3a - 4b = 0 \\ -2b = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow a = b = c = 0 \end{aligned}$$

Les vecteurs \overrightarrow{EF} , \overrightarrow{FG} et \overrightarrow{GH} sont non-coplanaires donc les points E, F, G et H sont non-coplanaires.

EXERCICE 18

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CG}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + 0 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2 = a^2$ ($\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CG}$)

Autre méthode :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DG} = DC \times DG \times \cos(\widehat{DC; DG})$$

Dans le triangle rectangle DCG , $DG^2 = DC^2 + CG^2 = 2a^2$ donc $DG = a\sqrt{2}$ et

$$\cos(\widehat{DC; DG}) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DG} = a \times a\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CG} = 0$ car les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{DG} sont orthogonaux

EXERCICE 19

a) $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = SA \times SB \times \cos(\widehat{SA; SB}) = 5 \times 5 \times \cos \frac{\pi}{3} = \frac{25}{2}$

b) $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = \frac{1}{2}(SA^2 + SC^2 - AC^2) = \frac{1}{2}(2SA^2 - 2AB^2) = 0$

c) $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AB} = -AS \times AB \times \cos(\widehat{AS; AB}) = -5 \times 5 \times \cos \frac{\pi}{3} = -\frac{25}{2}$

d) $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AD} = -AS \times AD \times \cos(\widehat{AS; AD}) = -5 \times 5 \times \cos \frac{\pi}{3} = -\frac{25}{2}$

e) $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{SA} \cdot (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = -\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{25}{2} - \frac{25}{2} = 0$

EXERCICE 20

1. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 3 + 3 \times 0 + 3 \times (-3) = 9 + 0 - 9 = 0$

2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ donc les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont orthogonaux d'où le triangle ABC est rectangle en A .

EXERCICE 21

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \times \left(-\frac{2}{5}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) \times 3 + 5 \times \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{4}{5} - \frac{3}{2} + 5\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{23}{10} + 5\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{23}{50}$$

EXERCICE 22

$$AB = \sqrt{(6-3)^2 + (1+2)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} = 3\sqrt{3}$$

$$AC = \sqrt{(6-3)^2 + (-2+2)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{3^2 + 0^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(6-6)^2 + (-2-1)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{0^2 + (-3)^2 + (-6)^2} = 3\sqrt{5}$$

EXERCICE 23

1. a) $\overline{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overline{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 2 \times 1 - 1 \times 1 + 1 \times (-1) = 2 - 1 - 1 = 0$

b) $AB = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$ et $AC = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$

2. $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0 \Leftrightarrow AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{6} \times \sqrt{3} \times \cos \widehat{BAC} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \widehat{BAC} = 0$$

donc $\text{Mes} \widehat{BAC} = 90^\circ$

EXERCICE 24

1. a) $\overline{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overline{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ donc $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = -2 \times (-1) + 1 \times (-1) + 0 \times 3 = 2 - 1 + 0 = 1$

b) $AB = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$ et $AC = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{11}$

2. $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 1 \Leftrightarrow AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} = 1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5} \times \sqrt{11} \times \cos \widehat{BAC} = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos \widehat{BAC} = \frac{1}{\sqrt{55}}$$

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{1}{\sqrt{55}} \text{ donc } \text{Mes} \widehat{BAC} \approx 82,25^\circ$$

EXERCICE 25

$\overline{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overline{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\frac{2}{-4} \neq \frac{4}{6}$ donc les vecteurs \overline{AB} et \overline{AC} ne sont pas colinéaires.

Par conséquent, les points A , B et C ne sont pas alignés.

EXERCICE 26

$\overline{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AC) et $\overline{BD} \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (BD) .

On a : $\frac{-2}{4} \neq \frac{-2}{7}$ donc les vecteurs \overline{AC} et \overline{BD} ne sont pas colinéaires, par conséquent les droites (AC) et (BD) ne sont pas parallèles.

EXERCICE 27

1. a) Faux

b) Vrai

c) Vrai

2. a) $\overline{AF} \cdot \overline{BG} = (\overline{AB} + \overline{BF}) \cdot (\overline{BF} + \overline{FG})$
 $= \overline{AB} \cdot \overline{BF} + \overline{AB} \cdot \overline{FG} + \overline{BF} \cdot \overline{BF} + \overline{BF} \cdot \overline{FG}$
 $= \overline{BF}^2 \quad (\text{car } \overline{AB} \perp \overline{BF}; \overline{AB} \perp \overline{FG}; \overline{BF} \perp \overline{FG})$

NE FAIT PAS PARTIR DES PROPOSITIONS

À corriger dans l'énoncé

EXERCICE 28

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times (-1) + 3 \times 1 - 2 \times 2 = -1 + 3 - 4 = -2$

2.
$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \left(\frac{3+3\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) - 2 \times 2 + \left(\frac{1-3\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{3}{4}(1^2 - \sqrt{3}^2) - 4 + \frac{-1-\sqrt{3}+3\sqrt{3}+9}{4} \\ &= -\frac{3}{2} - 4 + \frac{4+\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{-7+\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

EXERCICE 29

1. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\frac{-1}{3} \neq \frac{-2}{5}$ donc \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires et par conséquent les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}$

Déterminons deux nombres réels a et b tels que : $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 3b = -5 \\ -2a + 5b = -5 \\ -b = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -5 \\ a = -10 \end{cases} \text{ donc } \overrightarrow{AD} = -10\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AC}$$

\overrightarrow{AD} s'écrit comme combinaison linéaire de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} donc les vecteurs \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont coplanaires. Par suite les points A, B, C et D sont coplanaires.

EXERCICE 30

1. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\frac{-1}{3} \neq \frac{2}{5}$ donc \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires et par conséquent les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

Vérifions s'il existe deux nombres réels a et b tels que : $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 3b = 1 \\ 2a + 5b = 5 \\ -b = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -5 \\ a = -16 \text{ impossible} \\ a = 15 \end{cases}$$

Donc il n'existe pas de nombres réels a et b tels que : $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$

\overrightarrow{AD} ne pouvant pas s'écrire comme combinaison linéaire de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} alors les vecteurs \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont non-coplanaires. Il en résulte que les points A, B, C et D sont non-coplanaires.

EXERCICE 31

1. Vrai
2. Vrai
3. Faux
4. Vrai

EXERCICE 32

1. Vrai
2. Faux
3. Vrai
4. Faux

EXERCICE 33

$$1. \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 3 \times (-3) + 3 \times 6 + 3 \times (-3) = 0 \quad \text{donc } \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times (-3) + 0 \times 6 + (-3) \times (-3) = 0 \quad \text{donc } \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AC} \text{ donc } \overrightarrow{AD} \text{ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de } (ABC)$$

d'où \overrightarrow{AD} est orthogonal au plan (ABC) .

Il en résulte que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC) .

$$2. BD = \sqrt{(0-6)^2 + (4-1)^2 + (-1-5)^2} = 9;$$

$$BC = \sqrt{(6-6)^2 + (-2-1)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$CD = \sqrt{(0-6)^2 + (4+2)^2 + (-1+1)^2} = 6\sqrt{2}$$

$$D'après \text{ le théorème d'Al Kashi, } BC^2 = BD^2 + CD^2 - 2 \times BD \times CD \times \cos \widehat{BDC}$$

$$BC^2 = BD^2 + CD^2 - 2 \times BD \times CD \times \cos \widehat{BDC} \Leftrightarrow 45 = 72 + 81 - 2 \times 9 \times 6\sqrt{2} \times \cos \widehat{BDC}$$

$$\Leftrightarrow \cos \widehat{BDC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \text{Mes } \widehat{BDC} = \frac{\pi}{4}$$

EXERCICE 34

$$1. A(0;0;0); B(1;0;0); \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \text{ donc } D(-1;1;0) \text{ et } E(0;0;1)$$

$$2. C(0;1;0); \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} \text{ donc } F(1;0;1); \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} \text{ donc } G(0;1;1)$$

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GH} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} \text{ donc } H(-1;1;1)$$

$$3. HC = \sqrt{(0+1)^2 + (1-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2} \text{ et}$$

$$IR = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 1\right)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{\frac{11}{9}} = \frac{\sqrt{11}}{3}$$

$$4. \text{ Erreur (Prendre } R(0, \frac{2}{3}, 0)) \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AR} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ on a : } \overrightarrow{AR} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}, \text{ d'où le résultat}$$

EXERCICE 35

Erreur dans la désignation du repère. Considérer le repère (A, B, C,E) au lieu de (A,B,C,D)

$$1. \text{ Ce repère est : } (A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$$

$$A(0;0;0); B(1;0;0); C(0;1;0); E(0;0;1); \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}, \text{ donc } D(-1;1;0)$$

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}, \text{ donc } H(-1;1;1); \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}, \text{ donc } F(1;0;1);$$

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG}, \text{ soit } \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}, \text{ donc } G(0;1;1).$$

$$2. \overrightarrow{AC}(0;1;0); \overrightarrow{ED}(-1;1;-1); \overrightarrow{AG}(0;1;1); \overrightarrow{EG}(0;1;0); \overrightarrow{AE}(0;0;1)$$

EXERCICE 36

$$1. \overline{EM} = \frac{1}{3}\overline{EH} \Leftrightarrow \overline{EA} + \overline{AM} = \frac{1}{3}\overline{EH} \quad \text{et} \quad \overline{AN} = \frac{1}{3}\overline{AB} = \frac{1}{3}(\overline{AD} + \overline{DB}) = \frac{1}{3}\overline{AD} + \frac{1}{3}\overline{DB}$$
$$\Leftrightarrow \overline{AM} = \frac{1}{3}\overline{EH} - \overline{EA}$$

$$\text{Ainsi : } \overline{AN} - \overline{AM} = \frac{1}{3}\overline{AD} + \frac{1}{3}\overline{DB} - \left(\frac{1}{3}\overline{EH} - \overline{EA}\right)$$
$$\overline{MN} = \frac{1}{3}\overline{AD} - \frac{1}{3}\overline{EH} + \frac{1}{3}\overline{DB} + \overline{EA}$$
$$\overline{MN} = \overline{EA} + \frac{1}{3}\overline{DB} \quad \text{car } \overline{AD} = \overline{EH}$$

2. Les vecteurs \overline{EA} , \overline{MN} et \overline{DB} sont coplanaires car \overline{MN} s'écrit comme combinaison linéaire de \overline{EA} et \overline{DB} .

EXERCICE 37

$$\overline{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{AC} \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \overline{AD} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Déterminons deux réels a et b tels que : $\overline{AB} = a\overline{AC} + b\overline{AD}$

$$\overline{AB} = a\overline{AC} + b\overline{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = -6a - 8b \\ 1 = 2a + b \\ 0 = 4a + 4b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \quad \text{Ainsi : } \overline{AB} = \overline{AC} - \overline{AD}$$

Le vecteur \overline{AB} étant combinaison linéaire des vecteurs \overline{AC} et \overline{AD} alors les vecteurs \overline{AB} , \overline{AC} et \overline{AD} sont coplanaires et par conséquent, les points A, B, C et D sont coplanaires.

EXERCICE 38

$$1. \vec{u} = 3\vec{i} + 6\vec{j} ; \vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \text{ et } \vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

On a : $\vec{v} + 2\vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} + 2(\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) = 3\vec{i} + 6\vec{j} = \vec{u}$ donc les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires.

2. Soit a, b et c trois nombres réels tels que : $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 6b + 2c = 0 \\ -2a - b = 0 \\ 2b - c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b + c = 0 \\ b = -2a \\ c = 2b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b + c = 0 \\ b = -2a \\ c = -4a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -8a = 0 \\ b = -2a \\ c = -4a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \text{ donc les vecteurs } \vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont non-coplanaires}$$

EXERCICE 39

1. a) $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AE}$ donc $I(0; 0; \frac{1}{2})$
 $\vec{AJ} = \vec{AC} + \vec{CJ} = \vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{CH} = \vec{AC} + \frac{1}{2}(\vec{CD} + \vec{DH}) = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AE}$ donc $J(-\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2})$
- b) $\vec{AR} = \vec{AE} + \vec{ER} = \vec{AE} + \frac{1}{3}\vec{EH} = \vec{AE} + \frac{1}{3}\vec{AD} = \vec{AE} + \frac{1}{3}(\vec{AC} - \vec{AB}) = -\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} + \vec{AE}$
 donc $R(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 1)$
 $\vec{AS} = \frac{1}{3}\vec{AC}$ donc $S(0; \frac{1}{3}; 0)$ (rectifier)
2. a) $x_K = \frac{\frac{1}{3}+0}{2} = -\frac{1}{6}$; $y_K = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2}$; $z_K = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$ donc $K(-\frac{1}{6}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$
- b) $\vec{IK} \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{IJ} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, or $\vec{IJ} = 3\vec{IK}$ donc \vec{IK} et \vec{IJ} sont colinéaires et par conséquent les points I, J et K sont alignés.

EXERCICE 40

1. $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C(0; 1; 0)$ $E(0; 0; 1)$
 $\vec{AH} = \vec{AC} + \vec{CD} + \vec{DH} = -\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AE}$ donc $H(-1; 1; 1)$
 $\vec{AO} = \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AE}$ donc $O(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$
 $\vec{AG} = \vec{AC} + \vec{CG} = \vec{AC} + \vec{AE}$ donc $G(0; 1; 1)$
2. a) $\vec{AB} \cdot \vec{BG} = 0$ car $\vec{AB} \perp \vec{BG}$
- b) On a : $\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{AO} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ donc $\vec{AB} \cdot \vec{AO} = 1 \times 0 + 0 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{2} = 0$
- c) $\vec{HB} \cdot \vec{BA} = (\vec{HD} + \vec{DB}) \cdot \vec{BA}$
 $= \vec{HD} \cdot \vec{BA} + \vec{DB} \cdot \vec{BA}$
 $= 0 - \vec{BD} \cdot \vec{BA}$ car $\vec{HD} \perp \vec{BA}$
 $= -BD \times BA \times \cos(\angle ABD)$
 $= -\sqrt{2} \times 1 \times \cos(\frac{\pi}{4})$
 $= -\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $= -1$
3. On a : $\vec{OH} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{OG} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ donc $\vec{OH} \cdot \vec{OG} = -1 \times 0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (1)
 Or $\vec{OH} \cdot \vec{OG} = OH \times OG \times \cos(\widehat{HOG})$
 Dans le triangle HGF rectangle en G , $HF^2 = HG^2 + GF^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ donc $HF = \sqrt{2}$
 Dans le triangle HFB rectangle en F , $HB^2 = HF^2 + FB^2 = \sqrt{2}^2 + 1^2 = 3$ donc $HB = \sqrt{3}$
 Comme $OH = \frac{1}{2}HB$ alors $OH = \frac{\sqrt{3}}{2}$. De même , $OG = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Finalement, $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OG} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \cos(\widehat{HOG}) = \frac{3}{4} \cos(\widehat{HOG})$ (2)

Des égalités (1) et (2), on tire que : $\frac{3}{4} \cos(\widehat{HOG}) = \frac{1}{2}$ et donc $\cos(\widehat{HOG}) = \frac{2}{3}$.

Ainsi $Mes(\widehat{HOG}) = 48,18^\circ$

EXERCICE 41

1. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ On a : $\frac{3}{2} \neq \frac{0}{4} \neq \frac{-3}{-4}$ donc les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires et par conséquent, les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

On a : $AB = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2} = 6$, $AC = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$

et $BC = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 1^2} = 3\sqrt{2}$

D'où $AC^2 + BC^2 = (3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 = 36 = AB^2$

On a : $AC = BC$ et $AB^2 = AC^2 + BC^2$ donc le triangle ABC est rectangle isocèle en C .

EXERCICE 42

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ -5 \end{pmatrix}$. On a : $\frac{15}{3} = \frac{20}{4} = \frac{-5}{-1} = 5$ donc $\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AB}$ et ainsi les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires. En conclusion les points A, B et C sont alignés.

EXERCICE 43

$$AE = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{41}}{2} \quad ; \quad BE = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{41}}{2}$$

$$CE = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{41}}{2} \quad ; \quad DE = \sqrt{2^2 + 0^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{41}}{2}$$

On a : $AE = BE = CE = DE$ donc les points A, B, C et D sont équidistants du point E .

EXERCICE 44

$$1. \quad 2\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{MA} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AM}) = -\overrightarrow{AM} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$$

2. Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$, on a : $E(0; 0; 1)$ et $C(0; 1; 0)$

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} \quad \text{donc} \quad M\left(0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$$

$$\text{Ainsi : } \overrightarrow{EM} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{EC} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On a : $\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$ donc les vecteurs \overrightarrow{EM} et \overrightarrow{EC} sont colinéaires et par conséquent les points E, M et C sont alignés.

$$3. \quad \overrightarrow{DK} = 2\overrightarrow{DE} \quad \text{or} \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \quad \text{donc} \quad D(-1; 1; 0) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il en résulte que : $\overrightarrow{DK} \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -2 \end{smallmatrix} \right)$

On a : $D(-1; 1; 0)$ et $\overrightarrow{DK} \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -2 \end{smallmatrix} \right)$ donc $\begin{cases} x_K + 1 = 2 \\ y_K - 1 = -2 \\ z_K - 0 = 1 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} x_K = 1 \\ y_K = -1 \\ z_K = 1 \end{cases}$ ainsi $K(1; -1; 1)$

$F(1; 0; 1)$ et $K(1; 1; 1)$ donc $\overrightarrow{KF} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$ de plus $\overrightarrow{CE} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$ d'où $\overrightarrow{KF} = \overrightarrow{CE}$

Par suite les vecteurs \overrightarrow{KF} et \overrightarrow{CE} sont colinéaires donc les droites (KF) et (CE) sont parallèles.

EXERCICE 45

1. $\overrightarrow{AB} \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{smallmatrix} \right)$, $\overrightarrow{AC} \left(\begin{smallmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{smallmatrix} \right)$. On a : $\frac{2}{-4} \neq \frac{4}{6}$ donc les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires.
Donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. $\overrightarrow{BD} \left(\begin{smallmatrix} a-3 \\ b-3 \\ -3 \end{smallmatrix} \right)$

$(AC) // (BD) \Leftrightarrow$ Il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $\overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow \frac{a-3}{-4} = \frac{b-3}{6} = \frac{-3}{2} = k$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-3}{2}$$

donc $a = 9$ et $b = -6$

Pour $a = 9$ et $b = -6$, les droites (AC) et (BD) sont parallèles.

EXERCICE 46

On a : $\overrightarrow{AB} \left(\begin{smallmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{smallmatrix} \right)$; $\overrightarrow{AC} \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 15 \\ 3 \end{smallmatrix} \right)$ et $\overrightarrow{AD} \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -2 \\ -17 \end{smallmatrix} \right)$

Déterminons s'il existe deux nombres réels a et b tels que : $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a - b = 3 \\ -4a + 3b = -2 \\ -4a + 15b = -17 \end{cases}$$

on obtient $a = -\frac{7}{16}$ et $b = -\frac{5}{4}$

Ainsi les vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{AD} sont coplanaires donc les points A, B, C et D sont coplanaires.

EXERCICE 47

Considérons le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

1. On a : $A(0, 0, 0)$; $B(1, 0, 0)$; $D(0, 1, 0)$ et $E(0, 0, 1)$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \text{ donc } C(1, 1, 0)$$

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \text{ donc } G(1, 1, 1)$$

d'où $\overrightarrow{AC} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$; $\overrightarrow{DE} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$ et $\overrightarrow{DG} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$

Déterminons s'il existe deux nombres réels a et b tels que : $\overrightarrow{DG} = a\overrightarrow{AC} + b\overrightarrow{DE}$

$$\overrightarrow{DG} = a\overrightarrow{AC} + b\overrightarrow{DE} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a - b = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

on obtient $a = 1$ et $b = 1$

Ainsi les vecteurs \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{DE} et \overrightarrow{DG} sont coplanaires.

2. On a : $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$ donc $F(1, 0, 1)$.

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \text{ donc } H(0, 1, 1)$$

$$I = \text{mil} [BF] \text{ donc } I \left(1; 0; \frac{1}{2} \right)$$

$$\overrightarrow{AI} \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{array} \right); \overrightarrow{DF} \left(\begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ 1 \end{array} \right) \text{ et } \overrightarrow{HE} \left(\begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right)$$

Déterminons s'il existe deux nombres réels a et b tels que : $\overrightarrow{HE} = a \overrightarrow{AI} + b \overrightarrow{DF}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{HE} = a \overrightarrow{AI} + b \overrightarrow{DF} &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ -b = -1 \\ \frac{1}{2}a + b = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ b = 1 \\ \frac{1}{2}a + b = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ b = 1 \\ a = 0 \end{cases} \text{ ce qui est impossible} \end{aligned}$$

donc il n'existe pas de nombres réels a et b tels que $\overrightarrow{HE} = a \overrightarrow{AI} + b \overrightarrow{DF}$
Ainsi les vecteurs \overrightarrow{HE} , \overrightarrow{AI} et \overrightarrow{DF} ne sont pas coplanaires.

EXERCICE 48

1. $\overrightarrow{AB} \left(\begin{array}{c} -4 \\ 8 \\ -8 \end{array} \right)$, $\overrightarrow{AC} \left(\begin{array}{c} -2 \\ -2 \\ -4 \end{array} \right)$ et $\overrightarrow{BC} \left(\begin{array}{c} 2 \\ -10 \\ 4 \end{array} \right)$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -4 \times (-2) + 8 \times (-2) - 8 \times (-4) = 24$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -4 \times 2 + 8 \times (-10) - 8 \times 4 = -120$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = -2 \times 2 - 2 \times (-10) - 4 \times 4 = 0$$

2. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ donc $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC}$ et le triangle ABC est rectangle en C .

EXERCICE 49

1. a) $(\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}) \left(\begin{array}{c} -4 \\ 6 \\ 0 \end{array} \right)$

b) $(2\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}) \left(\begin{array}{c} -3 \\ 4 \\ 11 \end{array} \right)$

c) $(\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}) \left(\begin{array}{c} -3 \\ 6 \\ -1 \end{array} \right)$

2. Soit a, b et c trois nombres réels tels que : $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = 0$

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b = 0 \\ 3a - b + c = 0 \\ 4a + b - 2c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ a + c = 0 \\ 3a - c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ c = -a \\ 4a = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Donc les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont non-coplanaires.

EXERCICE 50

$$AB = \sqrt{(0-4)^2 + (7+1)^2 + (-4-4)^2} = 12$$

$$AC = \sqrt{(3-4)^2 + (1+1)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{41}$$

$$\text{et } BC = \sqrt{(3-0)^2 + (1-7)^2 + (-2+4)^2} = 7$$

D'après le théorème d'Al Kashi :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \times AC \times BC \times \cos \widehat{ACB} \Leftrightarrow \cos \widehat{ACB} = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \times AC \times BC} = \frac{41 + 49 - 144}{2 \times 7 \times \sqrt{41}} = -0,60$$

$$\cos \widehat{ACB} = -0,60 \text{ donc } \text{mes } \widehat{ACB} = 126^\circ$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos \widehat{ABC} \Leftrightarrow \cos \widehat{ABC} = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \times AB \times BC} = \frac{144 + 49 - 41}{2 \times 12 \times 7} = 0,90$$

$$\cos \widehat{ABC} = 0,90 \text{ donc } \text{mes } \widehat{ABC} = 25,7^\circ$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} \Leftrightarrow \cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \times AB \times AC} = \frac{144 + 41 - 49}{2 \times 12 \times \sqrt{41}} = 0,88$$

$$\cos \widehat{BAC} = 0,88 \text{ donc } \text{mes } \widehat{BAC} = 28,3^\circ$$

On a d'une part $\text{mes } \widehat{ABC} < 90$ et $\text{mes } \widehat{BAC} < 90$ donc les deux angles sont aigus.

et d'autre part $\text{mes } \widehat{ACB} = 126^\circ$ et $126 > 90$ donc l'angle \widehat{ACB} est obtus.

EXERCICE 51

1. On a :

$$\vec{u} \left(\begin{array}{c} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{array} \right); \vec{v} \left(\begin{array}{c} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{array} \right); \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \text{ et } \frac{-2}{-\frac{1}{3}} = 2 \text{ comme } \frac{3}{2} \neq 2 \text{ donc les vecteurs } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ne sont pas colinéaires.}$$

$$2. \text{ On a : } \|\vec{u}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = 1; \|\vec{v}\| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = 1$$

$$\text{et } \vec{u} \cdot \vec{v} = \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9} - \frac{4}{9} = 0$$

de plus,

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \text{ est une base orthonormée si et seulement si } \vec{u} \cdot \vec{w} = 0; \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \text{ et } \|\vec{w}\| = 1$$

$$\text{On obtient le système suivant : (S) } \begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = 0 \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 2z = 0 & (1) \\ 2x - y - 2z = 0 & (2) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

(1) et (2) donne $x = 2z$ et $y = 2z$

En remplaçant x et y dans (3) on obtient $z^2 = \frac{1}{9}$

$$z^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow z = \frac{1}{3} \text{ ou } z = -\frac{1}{3}$$

De plus $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée directe donc $z = \frac{1}{3}$

d'où $x = \frac{2}{3}$ et $y = \frac{2}{3}$

ainsi $\vec{w} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

EXERCICE 52

1. Soit a, b et c trois nombres réels tels que : $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = 0$

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b + c = 0 & (\times 2) \\ 3a + 2c = 0 \\ a + 3b - c = 0 & (\times 2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2c = -3a \\ -4a + 2b + 2c = 0 \\ 2a + 6b - 2c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2c = 3a \\ -7a + 2b = 0 & (\text{on a remplacé } 2c \text{ par } 3a \text{ dans les deux dernières égalités}) \\ 5a + 6b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2c = 3a \\ -21a + 6b = 0 \\ 5a + 6b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2c = 3a \\ -21a + 6b = 0 \\ -26a = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Donc les vecteurs \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} sont non-coplanaires.

$$2. \begin{cases} \vec{u} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} \\ \vec{v} = \vec{i} + 0\vec{j} + 3\vec{k} \\ \vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} \end{cases}$$

Exprimons \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} en fonction de \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} par la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{cases} \vec{u} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} \\ \vec{v} = \vec{i} + 0\vec{j} + 3\vec{k} \\ \vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} & (E_1) \\ \vec{v} = \vec{i} + 0\vec{j} + 3\vec{k} & (E_2) \\ \vec{u} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} & (E_3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} & (E_1) \\ \vec{v} - \vec{w} = -2\vec{j} + 4\vec{k} & (E'_2) = -(E_1) + (E_2) \\ \vec{u} + 2\vec{w} = 7\vec{j} - \vec{k} & (E'_3) = 2(E_1) + (E_3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} & (E_1) \\ \vec{v} - \vec{w} = -2\vec{j} + 4\vec{k} & (E'_2) = -(E_1) + (E_2) \\ 2\vec{u} + 7\vec{v} - 3\vec{w} = 26\vec{k} & (E''_3) = 7(E'_2) + 2(E'_3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{k} = \frac{1}{13}\vec{u} + \frac{7}{26}\vec{v} - \frac{3}{26}\vec{w} & (E'''_3) = \frac{1}{26}(E''_3) \\ \vec{j} = \frac{2}{13}\vec{u} + \frac{1}{26}\vec{v} + \frac{7}{26}\vec{w} & (E'_2) \\ \vec{i} = -\frac{3}{13}\vec{u} + \frac{5}{26}\vec{v} + \frac{9}{26}\vec{w} & (E_1) \end{cases}$$

Ainsi : $\vec{t} = -\vec{i} + 7\vec{j} + 2\vec{k} \Leftrightarrow \vec{t} = -\left(-\frac{3}{13}\vec{u} + \frac{5}{26}\vec{v} + \frac{9}{26}\vec{w}\right) + 7\left(\frac{2}{13}\vec{u} + \frac{1}{26}\vec{v} + \frac{7}{26}\vec{w}\right) + 2\left(\frac{1}{13}\vec{u} + \frac{7}{26}\vec{v} - \frac{3}{26}\vec{w}\right)$
 $\Leftrightarrow \vec{t} = \frac{19}{13}\vec{u} + \frac{8}{13}\vec{v} + \frac{17}{13}\vec{w}$

EXERCICE 53

- Soit a, b et c trois nombres réels tels que : $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -2b - c = 0 \\ -a - b - c = 0 \\ a + 3b - c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = -2b \\ -a - b = c \\ a + 3b = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{2}c \\ a = -2c \\ b = c \end{cases}$$

donc $a = b = c = 0$

d'où les vecteurs \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} ne sont pas coplanaires par suite $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de w .

- Soit a et b deux nombres réels tels que : $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{t}$

$$a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{t} \Leftrightarrow \begin{cases} -2b = -2 \\ -a - b = 1 \\ a + 3b = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -2 \\ a + 3b = 1 \end{cases}$$

Donc $a = -2$ et $b = 1$

d'où les vecteurs \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires par suite $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ n'est pas une base de w .

EXERCICE 54

1. $E(0; 0; 1)$

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} \quad \text{donc } G(0; 1; 1)$$

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DH} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} \quad \text{donc } H(-1; 1; 1)$$

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{DC} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \quad \text{donc } I\left(-\frac{1}{4}; 1; 0\right)$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \quad \text{donc } D(-1; 1; 0)$$

$$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \quad \text{donc } J\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}; 0\right)$$

2. On a : $\overrightarrow{HI} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EG} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EJ} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{HI} = x \overrightarrow{EG} + y \overrightarrow{EJ} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} = x \times 0 + y \times \frac{3}{4} \\ 0 = x \times 1 + y \times \frac{1}{4} \\ -1 = x \times 0 + y \times (-1) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} = \frac{3}{4}y \\ 0 = x + \frac{1}{4}y \\ -1 = -y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow y = 1 \text{ et } x = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Finalement $\overrightarrow{HI} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{EJ}$

EXERCICE 55

1. $E(0; 0; 1)$
 $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$ donc $G(0; 1; 1)$
 $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DH} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$ donc $H(-1; 1; 1)$
 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ donc $D(-1; 1; 0)$
 $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$ donc $F(1; 0; 1)$

$M = \text{mil}[EH]$ donc $M\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$

$N = \text{mil}[FC]$ donc $N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{HP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}$ or $\overrightarrow{HG} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{HP} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $x_P = \frac{1}{4} - 1$; $y_P = 0 + 1$ et $z_P = \frac{1}{4} + 0$

par suite $x_P = -\frac{3}{4}$; $y_P = 1$ et $z_P = \frac{1}{4}$

enfin $P\left(-\frac{3}{4}; 1; \frac{1}{4}\right)$

2. $T\left(1; 1; \frac{5}{8}\right)$; $N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ et $P\left(-\frac{3}{4}; 1; \frac{1}{4}\right)$ donc $\overrightarrow{TN} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{TP} \begin{pmatrix} -\frac{7}{4} \\ 0 \\ -\frac{3}{8} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{TN} \cdot \overrightarrow{TP} = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{7}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) \times 0 + \left(-\frac{1}{8}\right) \times \left(-\frac{3}{8}\right)$

$= \frac{7}{8} + \frac{3}{64}$

$= \frac{59}{64}$

$\frac{59}{64} \neq 0$ donc le triangle TNP n'est pas rectangle en T .

EXERCICE 56

$x_G = \frac{1-1+2}{3} = \frac{2}{3}$; $y_G = \frac{2+0+1}{3} = 1$ et $z_G = \frac{3-1-3}{3} = \frac{-1}{3}$ donc la réponse b) est la bonne réponse.

EXERCICE 57

1. a) $OA = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = 5$; $OB = \sqrt{0^2 + 5^2 + 0^2} = 5$ et $OC = \sqrt{0^2 + 0^2 + 5^2} = 5$

$$AC = \sqrt{(0-3)^2 + (0-4)^2 + (5-0)^2} = 5\sqrt{2} \quad ;$$

$$BC = \sqrt{(0-0)^2 + (0-5)^2 + (5-0)^2} = 5\sqrt{2}$$

Dans le triangle OAC , on a : $OA = OC$ et $OA^2 + OC^2 = AC^2$ donc le triangle OAC est rectangle isocèle en O .

Dans le triangle OBC , on a : $OB = OC$ et $OB^2 + OC^2 = AC^2$ donc le triangle OBC est rectangle isocèle en O .

b) $AC = BC$ donc le triangle ABC est isocèle en C .

2. $x_I = \frac{3+0}{2} = \frac{3}{2}$, $y_I = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2}$ et $z_I = \frac{0+0}{2}$ donc $I(\frac{3}{2}; \frac{9}{2}; 0)$

$$\overrightarrow{CH} \begin{pmatrix} 15 \\ 45 \\ 19 \\ -50 \\ 19 \end{pmatrix} , \quad \overrightarrow{CI} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{9}{2} \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{15}{\frac{3}{2}} = \frac{45}{\frac{9}{2}} = \frac{50}{-5}$$

donc \overrightarrow{CH} et \overrightarrow{CI} sont colinéaires et par conséquent les points C, H et I sont alignés.

EXERCICE 58

1. $\|\vec{u}\| = \sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (-\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 1$; $\|\vec{v}\| = \sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 1$ et $\|\vec{w}\| = \|\vec{k}\| = 1$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \times 0 = 0 \quad \text{donc } \vec{u} \perp \vec{v}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \times 0 + 0 \times 1 = 0 \quad \text{et} \quad \vec{v} \cdot \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \times 0 + 0 \times 1 = 0 \quad \text{donc } \vec{u} \perp \vec{w} \quad \text{et} \quad \vec{v} \perp \vec{w}$$

On a : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = 1$, $\vec{u} \perp \vec{v}$, $\vec{u} \perp \vec{w}$ et $\vec{v} \perp \vec{w}$ donc $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$ est une base orthonormée.

2. $\|\vec{u}\| = \sqrt{(\frac{1}{9})^2 + (\frac{8}{9})^2 + (-\frac{4}{9})^2} = 1$; $\|\vec{v}\| = \sqrt{(-\frac{4}{9})^2 + (\frac{4}{9})^2 + (\frac{7}{9})^2} = 1$;

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{(\frac{8}{9})^2 + (\frac{1}{9})^2 + (\frac{4}{9})^2} = 1$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{9} \times \frac{-4}{9} + \frac{8}{9} \times \frac{4}{9} - \frac{4}{9} \times \frac{7}{9} = \frac{-4+32-28}{81} = 0 \quad \text{donc } \vec{u} \perp \vec{v}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = \frac{1}{9} \times \frac{8}{9} + \frac{8}{9} \times \frac{1}{9} - \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{8+8-16}{81} = 0 \quad \text{donc } \vec{u} \perp \vec{w}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \frac{-4}{9} \times \frac{8}{9} + \frac{4}{9} \times \frac{1}{9} + \frac{7}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{-32+4+28}{81} = 0 \quad \text{donc } \vec{v} \perp \vec{w}$$

On a : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = 1$, $\vec{u} \perp \vec{v}$, $\vec{u} \perp \vec{w}$ et $\vec{v} \perp \vec{w}$ donc $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$ est une base orthonormée

EXERCICE 59

1. $\|\vec{u}\| = \sqrt{(\frac{2}{3})^2 + (-\frac{1}{3})^2 + (-\frac{2}{3})^2} = 1$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{(\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2} = 1$

$$\text{et } \vec{u} \cdot \vec{v} = (\frac{2}{3})^2 - \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = 0$$

donc \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs unitaires orthogonaux.

2. Soit $\vec{w} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base orthonormée de l'espace.

$$\text{On a : } \|\vec{w}\| = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b - \frac{2}{3}c = 0 \quad \text{et} \quad \vec{v} \cdot \vec{w} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}c = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a - b - 2c = 0 \quad \Leftrightarrow 2a + 2b + c = 0$$

Réolvons le système :

$$\begin{cases} 2a - b - 2c = 0 & (1) \\ 2a + 2b + c = 0 & (2) \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

(2) - (1) donne : $3b + 3c = 0$ et donc $b = -c$ et par suite $a = \frac{1}{2}c$

En remplaçant ces deux expressions dans (3), on obtient : $c = -\frac{2}{3}$ ou $c = \frac{2}{3}$

En choisissant $c = \frac{2}{3}$, on obtient $a = \frac{1}{3}$ et $b = -\frac{2}{3}$

Donc $\vec{w} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ de plus $\|\vec{w}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = 1$

EXERCICE 60

1. $M \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ colinéaire à \vec{u}
 \Leftrightarrow il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}$

et $M \in (\Delta') \Leftrightarrow \overrightarrow{DM}$ colinéaire à \vec{v}
 \Leftrightarrow il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{DM} = \mu \vec{v}$

2. a) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM}$ donc $\lambda \vec{u} = \mu \vec{v} + \overrightarrow{AD}$
 donc : $\mu \vec{v} = \lambda \vec{u} - \overrightarrow{AD}$

b) $(\mu - \lambda)\overrightarrow{AB} + (\mu - \lambda)\overrightarrow{AC} + (1 - 2\mu)\overrightarrow{AD} = (\mu - \lambda)(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + (1 - 2\mu)\overrightarrow{AD}$
 $= (\mu - \lambda)\vec{u} + (1 - 2\mu)\overrightarrow{AD}$
 $= \mu\vec{u} - \lambda\vec{u} + \overrightarrow{AD} - 2\mu\overrightarrow{AD}$
 $= \mu\vec{u} - (\lambda\vec{u} - \overrightarrow{AD}) - 2\mu\overrightarrow{AD}$
 $= \mu\vec{u} - \mu\vec{v} - 2\mu\overrightarrow{AD}$ car $\lambda\vec{u} - \overrightarrow{AD} = \mu\vec{v}$
 $= \mu(\vec{u} - \vec{v}) - 2\mu\overrightarrow{AD}$

Or $\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AD}$

donc : $(\mu - \lambda)\overrightarrow{AB} + (\mu - \lambda)\overrightarrow{AC} + (1 - 2\mu)\overrightarrow{AD} = \mu(2\overrightarrow{AD}) - 2\mu\overrightarrow{AD} = 2\mu\overrightarrow{AD} - 2\mu\overrightarrow{AD} = \vec{0}$

c) Les points A, B, C et D étant non-coplanaires, alors :

$$(\mu - \lambda)\overrightarrow{AB} + (\mu - \lambda)\overrightarrow{AC} + (1 - 2\mu)\overrightarrow{AD} = \vec{0} \Leftrightarrow \mu - \lambda = 1 - 2\mu = 0 \quad \text{d'où} \quad \mu = \lambda = \frac{1}{2}$$

3. $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ est l'unique couple $(\lambda; \mu)$ tel que M appartient à la fois à (Δ) à (Δ') donc (Δ) et (Δ') sont sécantes en un seul point I tel que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ car $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{u}$

EXERCICE 61

1. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{4} \neq \frac{-1}{1}$ donc \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires et par conséquent, les points A, B et C ne sont pas alignés.

$$\begin{aligned}
2. \text{ a)} \quad \begin{cases} \vec{n} \perp \overline{AB} \\ \vec{n} \perp \overline{AC} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \cdot \overline{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overline{AC} = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - \beta - \lambda = 0 \\ \alpha + 4\beta + \lambda = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - \beta = \lambda \\ \alpha + 4\beta = -\lambda \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -9\beta = 3\lambda \\ 9\alpha = 3\lambda \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\frac{1}{3}\lambda \\ \alpha = \frac{1}{3}\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Pour $\lambda = 3$, on a : $\alpha = 1$ et $\beta = -1$ donc $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est orthogonal à \overline{AB} et à \overline{AC}

b) Une équation du plan (ABC) est : $x - y + 3z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
A \in (ABC) &\Leftrightarrow 1 - 2 + 3 \times 4 + d = 0 \\
&\Leftrightarrow d = -11
\end{aligned}$$

Donc une équation du plan (ABC) est : $x - y + 3z - 11 = 0$

$$\begin{aligned}
D(a; b; c) \in (ABC) &\Leftrightarrow a - b + 3c - 11 = 0 \\
&\Leftrightarrow a - b + 3c = 11
\end{aligned}$$

EXERCICE 62

$$\begin{aligned}
1. \text{ a)} \quad \overline{PQ} &= \overline{PA} + \overline{AC} + \overline{CQ} \\
&= -\lambda \overline{AB} + \overline{AC} + \lambda \overline{CD} \\
&= -\lambda \overline{AC} - \lambda \overline{CB} + \overline{AC} + \lambda \overline{CD} \\
&= (1 - \lambda) \overline{AC} + \lambda (\overline{CD} - \overline{CB}) \\
&= (1 - \lambda) \overline{AC} + \lambda \overline{BD}
\end{aligned}$$

b) Dans le triangle ABC , $I = \text{mil}[AB]$ et $L = \text{mil}[BC]$ donc $\overline{AC} = 2 \overline{IL}$
 Dans le triangle ABD , $I = \text{mil}[AB]$ et $K = \text{mil}[AD]$ donc $\overline{BD} = 2 \overline{IK}$

$$\begin{aligned}
\overline{PQ} &= (1 - \lambda) \overline{AC} + \lambda \overline{BD} \\
&= (1 - \lambda) \times 2 \overline{IL} + \lambda \times 2 \overline{IK} \\
&= 2(1 - \lambda) \overline{IL} + 2\lambda \overline{IK}
\end{aligned}$$

On a : $\overline{PQ} = 2(1 - \lambda) \overline{IL} + 2\lambda \overline{IK}$ d'où le vecteur \overline{PQ} est une combinaison linéaire des vecteurs \overline{IL} et \overline{IK} , donc les vecteurs \overline{PQ} , \overline{IL} et \overline{IK} sont coplanaires.

$$\begin{aligned}
2. \text{ a)} \quad \text{Dans le triangle } ABC, \quad J &= \text{mil}[AC] \text{ et } L = \text{mil}[BC] \text{ donc } \overline{AB} = 2 \overline{JL} \\
\text{Dans le triangle } BCD, \quad O &= \text{mil}[BD] \text{ et } L = \text{mil}[BC] \text{ donc } \overline{CD} = 2 \overline{LO} \\
\text{Donc } \overline{AB} + \overline{CD} &= 2 \overline{JL} + 2 \overline{LO} \\
&= 2 (\overline{JL} + \overline{LO}) \\
&= 2 \overline{JO} \\
\text{Ainsi } \overline{AB} + \overline{CD} &= 2 \overline{JO}
\end{aligned}$$

$$b) \overline{AP} + \overline{CQ} = \lambda \overline{AB} + \lambda \overline{CD} = \lambda (\overline{AB} + \overline{CD}) = 2\lambda \overline{JO}$$

.....
.....

$$\text{donc } \overline{JM} = \lambda \overline{JO}$$

c) $\overline{JM} = \lambda \overline{JO}$, donc l'ensemble des points M est la droite (JO)

EXERCICE 63

1. a) $\overline{DA} = 3\vec{i}$ donc $A(3; 0; 0)$

$$\overline{DC} = 3\vec{j} \text{ donc } C(0; 3; 0)$$

$$\overline{DE} = \overline{DA} + \overline{DH} = 3\vec{i} + 3\vec{k} \text{ donc } E(3; 0; 3)$$

b) $x_L = \frac{2 \times 0 + 1 \times 3}{3} = 1$; $y_L = \frac{2 \times 3 + 1 \times 0}{3} = 2$; $z_L = \frac{2 \times 0 + 1 \times 3}{3} = 1$ donc $L \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$

c) $\overline{AE} = \overline{DH} = 3\vec{k}$ donc $\overline{AE} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{smallmatrix} \right)$ et $\overline{DL} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$

2. a) $\overline{AM} = a\overline{AE}$

$$\overline{DN} = b\overline{DL} \Leftrightarrow \overline{DA} + \overline{AN} = b\overline{DL}$$

Ainsi $\overline{DA} + \overline{AN} - \overline{AM} = b\overline{DL} - a\overline{AE}$ donc $\overline{MN} = b\overline{DL} - a\overline{AE} - \overline{DA}$ et par suite : $\overline{MN} \left(\begin{smallmatrix} b-3 \\ 2b \\ b-3a \end{smallmatrix} \right)$

$$\begin{cases} \overline{MN} \perp \overline{AE} \\ \overline{MN} \perp \overline{DL} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{MN} \cdot \overline{AE} = 0 \\ \overline{MN} \cdot \overline{DL} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \times (b-3) + 0 \times 2b + 3 \times (b-3a) = 0 \\ 1 \times (b-3) + 2 \times 2b + 1 \times (b-3a) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b-3a = 0 \\ 6b-3a = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a-b = 0 \\ -a+2b = 1 \end{cases}$$

b) Le déterminant du système est égal à : $3 \times 2 - (-1) \times (-1) = 5$ et $5 \neq 0$ donc le système admet un unique couple solution $(a_0; b_0)$ et par conséquent il existe un unique point M_0 de (AE) et un unique point N_0 de (DL) tels que la droite (M_0N_0) est orthogonale aux droites (AE) et (DL) .

c) La résolution dans \mathbb{R}^2 du système $\begin{cases} 3a-b = 0 \\ -a+2b = 1 \end{cases}$ donne $a = \frac{1}{5}$ et $b = \frac{3}{5}$

Si $M_0(x_0; y_0; z_0)$ et $N_0(x'_0; y'_0; z'_0)$

$$\overline{AM_0} = \frac{1}{5}\overline{AE} \text{ donne } \begin{cases} x_0 - 3 = \frac{1}{5} \times 0 \\ y_0 - 0 = \frac{1}{5} \times 0 \\ z_0 - 0 = \frac{1}{5} \times 3 \end{cases} \text{ et alors : } \begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = \frac{3}{5} \end{cases} \quad M_0\left(3; 0; \frac{3}{5}\right)$$

$$\overline{DN_0} = \frac{3}{5}\overline{DL} \text{ donne } \begin{cases} x'_0 = \frac{3}{5} \times 1 \\ y'_0 = \frac{3}{5} \times 2 \\ z'_0 = \frac{3}{5} \times 1 \end{cases} \text{ et alors : } \begin{cases} x'_0 = \frac{3}{5} \\ y'_0 = \frac{6}{5} \\ z'_0 = \frac{3}{5} \end{cases} \quad N_0\left(\frac{3}{5}; \frac{6}{5}; \frac{3}{5}\right)$$

$$M_0N_0 = \sqrt{\left(\frac{3}{5}-3\right)^2 + \left(\frac{6}{5}-0\right)^2 + \left(\frac{3}{5}-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

EXERCICE 64

1. a) Dans le repère $(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$

$$D(0; 0; 0) ; A(1; 0; 0) ; C(0; 1; 0) \text{ et } H(0; 0; 1)$$

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} \text{ donc } B(1; 1; 0)$$

$$\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH} \text{ donc } G(0; 1; 1)$$

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DH} \text{ donc } E(1; 0; 1)$$

$$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH} \text{ donc } F(1; 1; 1)$$

• On a : $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DB} = DE \times DB \times \cos(\widehat{EDB})$ et $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DB} = 1 \times 1 + 0 \times 1 + 1 \times 0 = 1$

$$\begin{aligned} \text{donc } \cos(\widehat{EDB}) &= \frac{\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DB}}{DE \times DB} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} \quad \text{car } DE = DB = \sqrt{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\cos(\widehat{EDB}) = \frac{1}{2} \text{ donc } \text{Mes}(\widehat{EDB}) = \frac{\pi}{3} \text{ d'où } \theta = \frac{\pi}{3}$$

b) On a : $\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{FB} = 0$ car $\overrightarrow{FE} \perp \overrightarrow{FB}$ donc $\text{Mes}(\widehat{EFB}) = \frac{\pi}{2}$ d'où $\theta = \frac{\pi}{2}$

2.a) On a $\overrightarrow{DM} \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DF} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{DM} = x \overrightarrow{DF} \Leftrightarrow x_M = x ; y_M = x \text{ et } z_M = x \text{ donc } M(x; x; x)$$

b) $\overrightarrow{ME} \begin{pmatrix} 1-x \\ -x \\ 1-x \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB} \begin{pmatrix} 1-x \\ 1-x \\ -x \end{pmatrix}$ donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MB} &= (1-x) \times (1-x) - x \times (1-x) - (1-x) \times x \\ &= (1-x)^2 - 2x(1-x) \\ &= 3x^2 - 4x + 1 \end{aligned}$$

D'autre part $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MB} = ME \times MB \times \cos(\widehat{EMB})$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{(1-x)^2 + (-x)^2 + (1-x)^2} \times \sqrt{(1-x)^2 + (1-x)^2 + (-x)^2} \times \cos(\widehat{EMB}) \\ &= ((1-x)^2 + (-x)^2 + (1-x)^2) \times \cos(\widehat{EMB}) \\ &= (3x^2 - 4x + 2) \times \cos(\widehat{EMB}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MB} = ME \times MB \times \cos(\widehat{EMB}) &\Leftrightarrow \cos(\widehat{EMB}) = \frac{\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MB}}{ME \times MB} \\ &\Leftrightarrow \cos(\widehat{EMB}) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{3x^2 - 4x + 2} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \cos \theta = \frac{3x^2 - 4x + 1}{3x^2 - 4x + 2}$$

3.

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$-\sin \theta$	0	-	0
$\cos \theta$	1	0	-1

4. le triangle EMB est rectangle en $M \Leftrightarrow \cos \theta = 0$
 $\Leftrightarrow \frac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2} = 0$
 $\Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0$
 $\Leftrightarrow (3x - 1)(x - 1) = 0$
 $\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = \frac{1}{3}$

Les deux positions de M sont donc $M_1(1; 1; 1)$ et $M_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$

SITUATION COMPLEXE

EXERCICE 65

Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$; $A(0; 0; 0)$; $B(1; 0; 0)$; $D(0; 1; 0)$ et $E(0; 0; 1)$

1. $\overrightarrow{AD}_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{1} \\ \frac{1}{1} \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD}_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{1} \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD}_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

\overrightarrow{AD}_1 , \overrightarrow{AD}_2 et \overrightarrow{AD}_3 sont coplanaires s'il existe des réels a et b tels que : $\overrightarrow{AD}_3 = a \overrightarrow{AD}_1 + b \overrightarrow{AD}_2$

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a + b = x \\ a + \frac{3}{2}b = y \\ a + b = z \end{cases}$$

Pour $a = 2$ et $b = 1$ on obtient $x = 2$; $y = \frac{7}{2}$ et $z = 3$

ainsi un choix pour les coordonnées de la décoration D_3 est $(2; \frac{7}{2}; 3)$

2. Faire une figure.

Manuel de base



COVID-19 / MESURES DE PREVENTIONS



Lavez-vous
les mains
fréquemment



Respectez la
distanciation
physique



Portez
un masque



Toussez ou
éternuez dans
votre coude



Ouvrez
les fenêtres



Faites-vous
vacciner