COLLECTION PYRAMIDE

Guide du Professeur

Mon livre de MATHÉMATIQUES

T^{le} C

TOME 2

CORRIGÉS DES EXERCICES

- Découverte des habiletés
- Des questions d'évaluation
- Mes séances d'exercices

MATÉRIALISEZ VOS IDÉES
JD Editions
L'Edition autrement

COLLECTION PYRAMIDE

Guide du Professeur

Mon livre de Mathématiques

T^{le}_{C}

CORRIGÉS DES EXERCICES

- Découverte des habiletés
- Des questions d'évaluation
- Mes séances d'exercices

JD Éditions
21 B.P. 3636 Abidjan 21
Côte d'Ivoire

SOMMAIRE

Ce document pourrait contenir des erreurs au fautes de frappes.
Prière les signaler à l'adresse : kyoussouphou@gmail.com

1 BARYCENTRE ET LIGNES DE NIVEAUX

1 SITUATION D'APPRENTISSAGE

L'approche pédagogique et la didactique est celle de l'APC. Pour le déroulement de la situation, vous pouvez vous inspirer du tableau suivant.

Constituants de la situation	Exemples de questions possibles	Réponses possibles des élèves
Contexte	Où ou quand se déroule la scène ?	Lors d'une exposition vente
Circonstances	Dis ce que ne comprend pas Yapo	Les poudres sont en équilibres, malgré leur différence de masse
Tâche	Qu'a til décider de faire ?	Soumettre sa préoccupation à son professeur de mathématiques et à sa classe pour que ceux l'aide à comprendre ce phénomène d'équilibre

2 DÉCOUVERTE DES HABILETÉS

Activité 1 : Barycentre de n points pondérés

1. On a $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{A_1A_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_1} + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_1A_i}$
Ainsi, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \vec{0} \Leftrightarrow (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)\overrightarrow{A_1M} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_1A_i}$
2. Distinguons les deux cas suivants :
1^{er} cas : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$
On en déduit que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_1A_i} = \vec{0}$ et tous les points M de l'espace (ou du plan) vérifient cette égalité.
$2^{ème}$ cas : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$
Dans ce cas, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1M} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}\left(\sum_{i=2}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_1A_i}\right)$. On conclut que l'ensemble des points cherchés est le singleton $\{G\}$ tel que : $\overrightarrow{A_1G} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}\left(\sum_{i=2}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_1A_i}\right)$

Exercices de fixation

Exercice 1

1)Immédiat, vérifier ceux pour lesquels la somme des coefficients est non nulle
2) Exemple soit K le barycentre du système Q = {(A, 3) ; (B, -1) ; (C, -2) ; (D, 4) ; (E, -5)}

On a : $3\overrightarrow{KA} - \overrightarrow{KB} - 2\overrightarrow{KC} + 4\overrightarrow{KD} - 5\overrightarrow{KE} = 0$

Exercice 2
Soit S un ensemble de points pondérés tel que : S = {(A, a) ; (B, b) ; (C, c)}
1. par exemple : a = -1, b = 2 et c = -3
2. par exemple : a = 1, b = 2 et c = -3
.
Activité 2 : Propriété de l'homogénéité

Pour tout réel non nul α, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \delta\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \delta\alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$. Donc G est le barycentre des points pondérés $\left((A_i ; \delta\alpha_i)\right)_{1 \leq i \leq n}$.
Exercices de fixation

Exercice 3

1. E et L
2. On a $4-3-2+2+6=7$ donc le système $M = \left\{\left(A, \frac{4}{7}\right); \left(B, \frac{-3}{7}\right); \left(C, \frac{-2}{7}\right); \left(D, \frac{2}{7}\right); \left(E, \frac{6}{7}\right)\right\}$ a le même barycentre que le système E et la somme des pondérations vaut 1.

Activité 3 : Réduction de la somme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$

Soit M un point quelconque.

Supposons que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, on a :
$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_i}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)\overrightarrow{MG} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i}$ or $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = 0$ car G est le barycentre des points pondérés $\left((A_i ; \alpha_i)\right)_{1 \leq i \leq n}$. Donc $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)\overrightarrow{MG}$.

Supposons maintenant que : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$, on a :
$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{A_1A_i}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)\overrightarrow{MA_1} + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_1A_i}$ Or $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$ donc $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_1A_i}$ et ce vecteur est indépendant du point M.

Exercices de fixation

Exercice 5
1. V ; 2.F ; 3.V ; 4. F ; 5. F.

Exercice 6

- $5\overrightarrow{PQ} - 3\overrightarrow{PR}$
- $-7\overrightarrow{PQ} + 4\overrightarrow{PR}$
- $5\overrightarrow{MG}$

Activité 4 : coordonnées du barycentre

1. D'après la propriété de réduction de sommes vectorielles, pour tout point M, on a : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)\overrightarrow{MG}$.
2. Pour M=O, on obtient : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)\overrightarrow{OG}$, donc $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$.
3. On en déduit que : $x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$ et $y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$.
   On en déduit que : $x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$; $y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$ et $z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$

Exercices de fixation

Exercice 7

$G = bar\{(E,-2);(F,3);(K,1)\}$ avec $E(2;-1;5)$, $F(0;2;-4)$ *et* $K(3;6;1/2)$

Soit $G(x_G;y_G;z_G)$ on a : $x_G = \frac{-2\times 2+3\times 0+1\times 3}{-2+3+1} = \frac{-4+3}{2} = -\frac{1}{2}$

$y_G = \frac{-2\times(-1)+3\times 2+1\times 6}{-2+3+1} = \frac{2+6+6}{2} = \frac{14}{2} = 7$ et

$z_G = \frac{-2\times 5+3\times(-4)+1\times\frac{1}{2}}{-2+3+1} = \frac{-10-12+\frac{1}{2}}{2} = -\frac{43}{4}$ d'où $G\left(-\frac{1}{2};7;-\frac{43}{4}\right)$

Activité 5 : Propriété des barycentres partiels.

G_1 existe car $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, on sait que :

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$

A_1	A_2	…	A_P
α_1	α_2	…	α_P

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} + \sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} \alpha_i (\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1A_i}) + \sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

$\Leftrightarrow (\sum_{i=1}^{p} \alpha_i)\, \overrightarrow{GG_1} + \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{G_1A_i}}_{\vec{0}} + \sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

$\Leftrightarrow (\sum_{i=1}^{p} \alpha_i)\, \overrightarrow{GG_1} + \sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

D'où G est le barycentre des points $(G_1, \sum_{i=1}^{p} \alpha_i)$ et $(A_i; \alpha_i)_{p+1\le i\le n}$

Exercices de fixation

Exercice 8

1. Soit K le barycentre du système de points pondérés {(A, 1) : (B, 1)} et L celui du système de points pondéré {(C, 1) ; (D ; 1),} d'après la propriété des barycentres partiels, G est le barycentre du système de points pondérés { (K, 2) ; (L, 2) }.

G est donc le milieu du segment [KL] où K est le milieu de [AB] et L celui de [CD].

2. $G = bar\{(A,1);(B,1);(C,1);(D,1)\}$ et $A' = bar\{(B,1);(C,1);(D,1)\}$ donc
   $G = bar\{(A,1);(A',3)\}$ soit $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GA'} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{AA'} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AA'}$; les points A , G et A' sont alignés ainsi le point G appartient à la droite (AA')

Activité 6 : Ensemble des barycentres de points pondérés

1. Si M est un point de la droite (AB), alors il existe un nombre réel k tel que : $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.
$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{AM} - k\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow (k-1)\overrightarrow{AM} - k\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ or (k-1)-k $\neq 0$, donc M est le barycentre de (A ; k-1) et (B ;-k). Réciproquement, si M est barycentre des points (A ;a) et (B ;b), alors : $(a+b)\overrightarrow{AM} = b\overrightarrow{AB}$, soit $\overrightarrow{AM} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$. Par conséquent, M appartient à la droite (AB).

2. a) G barycentre de $(A;\alpha)$, $(B;\beta)$ et $(C;\gamma)$ entraine que : $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$. Donc G appartient au plan (ABC).

b) Soit M un point qui appartient au plan (ABC). M est de coordonnées (x, y) dans le plan (A, B, C) ; on a : $\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC} \iff (1-x-y)\overrightarrow{AM} + x\,\overrightarrow{BM} + y\,\overrightarrow{CM} = \vec{0}$. Ainsi M est le barycentre des points pondérés $(A, 1-x-y), (B, x)$ et (C, y) car $1-x-y+x+y \neq 0$.

3.L'ensemble des barycentres des points A, B et C est le plan (ABC).

Exercices de fixation

Exercice 9

, $\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow -3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$, donc

$M = bar\{(A,-3);(B,2)\}$

II. Lignes de niveau

Activité 7 : Lignes de niveau *k* (*k*∈ℝ) de l'application M $\longmapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, MA_i^2$ telle que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$

1. $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, soit G le barycentre de $(A_i;\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ et M un point. On a :
$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2 = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)MG^2 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i {GA_i}^2 + 2\overrightarrow{MG}\underbrace{(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i})}_{\vec{0}}$.

Ainsi, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2 = k \iff MG^2 = \frac{k - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i GA_i^2}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} = \rho$.

2. On en déduit que :
- Si $\rho < 0$, alors (E_k)= $\emptyset$.
- Si $\rho = 0$, alors (E_k) = $\{G\}$.
- Si $\rho > 0$, alors (E_k) est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{\rho}$ dans le plan (la sphère centre G et de rayon $\sqrt{\rho}$ dans l'espace.

Exercices de fixation
Exercice 10

$MB^2 + MC^2 - MA^2 = 0$ soit $G = bar\{(A,-1);(B,1);(C,1)\}$ donc $-\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$ et
$MG^2 + GB^2 + GC^2 - GA^2 = 0$

On a $AC + CB = AB$ et $AC = CB$ donc C est le milieu de [AB]

On obtient $\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{CA}$ *soit* $GB=1$; $\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{BA}$ *soit* $GC=2$ *et* $AG=3$

$MG^2+GB^2+GC^2-GA^2=0 \Leftrightarrow MG^2=9-1-4$

$\Leftrightarrow MG^2=4$ donc $M \in \mathbf{C}(G,2)$

$\Leftrightarrow MG=2$

Activité 8 : Lignes de niveau *k* (*k*∈ ℝ) de l'application M ↦ $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2$ telle que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$

1. On a $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i^2 + (\sum_{i=1}^{n})OM^2 - 2\overrightarrow{OM}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i})$.
Donc $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i^2 - 2\overrightarrow{OM}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i})$ car $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$.
Ainsi, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2 = k \Leftrightarrow \vec{u}.\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i^2 - k)$.

♦ Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors on a deux cas :
  - Pour $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i^2 \neq k$, (*Ek*)=∅.
  - Pour $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i^2 = k$, (*Ek*) est le plan ou l'espace.

♦ $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors

Considérons la droite (D) de repère $(O, \vec{u})$. Soit M_0 le point de la droite (D) tel que $\overrightarrow{OM_0} = \vec{u}$.
Fixons un point M et considérons son projeté orthogonal H sur la droite (D).
On a : $\overline{OM}.\vec{u} = \overline{OH} \times \overline{OM_0}$. On en déduit que $\overline{OH} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i^2 - k}{2 \times \overline{OM_0}}$ qui est une constante.
On conclut que (*Ek*) est le plan passant par H et orthogonal à la droite (D) dans l'espace ou (*Ek*) est la droite passant par H et perpendiculaire à la droite (D) dans le plan.

Exercices de fixation
Exercice 11

1. Soit un segment [AB] de milieu O tel que : AB = 6
Détermine l'ensemble des points M du plan tel que : $MA^2 - MB^2 = 48$

2. On considère un parallélogramme ABCD de centre O.
Détermine l'ensemble des points M du plan définis par : $MA^2 + MB^2 - MC^2 - MD^2 = 0$

1. Posons $f(M) = MA^2 - MB^2$

La somme des pondérations est nulle donc pour tout pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA}$ - $\overrightarrow{MB}$ est un vecteur constant.
Pour M = O, $\overrightarrow{MA}$ - $\overrightarrow{MB}$ = $\overrightarrow{BA}$ donc : $\sum_{i=1}^{2} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{BA}$ (ici A_1 = A, A_2 = B ; α_1 = 1 et α_2 = -1)

Par application de la formule $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i^2 - 2\overrightarrow{OM}.(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i})$, pour n= 2, on a :

$MA^2 - MB^2 = OA^2 - OB^2 - 2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{BA}$. Soit $MA^2 - MB^2 = -2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{BA}$. Car OA = OB
Remarque : si l'on ne veut pas appliquer la formule, on introduit le point O milieu du segment [AB]

pour obtenir la réduction de $MA^2 - MB^2$.

on a donc : $MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM})^2 - (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})^2$

En développant et en simplifiant, on a bien : $MA^2 - MB^2 = OA^2 - OB^2 - 2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{BA}$.
Soit $MA^2 - MB^2 = -2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{BA}$.

$MA^2 - MB^2 = 48 \Leftrightarrow -2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{BA} = 48$.

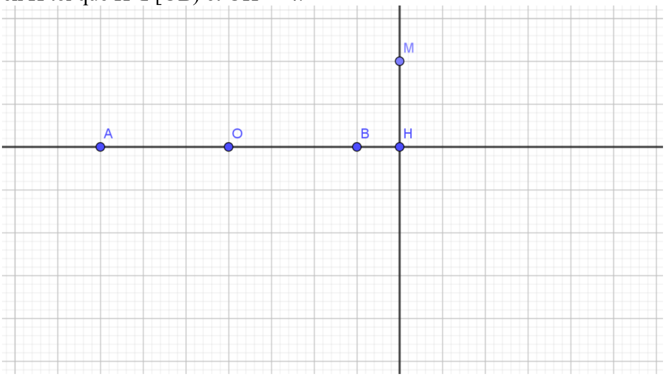
$\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{OA}$ donc $-2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{BA} = -4\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OA}$. Soit H le projeté orthogonal de M sur la droite (OA),

on a : $-4\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OA} = -4\,\overline{OH} \times \overline{OA}$.

$MA^2 - MB^2 = 48 \Leftrightarrow -4\,\overline{OH} \times \overline{OA}. = 48$. Soit $\overline{OH} \times \overline{OA} = -12$.

Donc H ∈ [OB) et OH = 4. L'ensemble cherché est la droite perpendiculaire en H à la droite (AB)

en H tel que H ∈ [OB) et OH = 4.



2 ABCD est un parallélogramme de centre O. Déterminons l'ensemble des points M tel que
$MA^2 + MB^2 - MC^2 - MD^2 = 0$

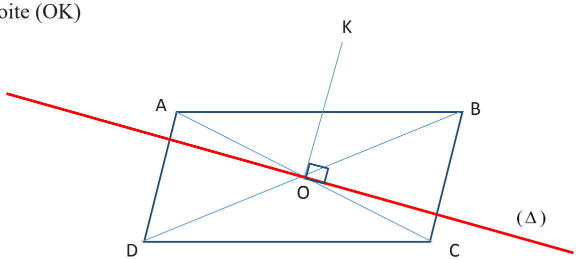
ABCD est un parallélogramme de centre O $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO} \quad et \quad \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$

$$\Leftrightarrow OA = CO \quad et \quad OB = DO$$

$$MA^2 + MB^2 - MC^2 - MD^2 = 0 \Leftrightarrow OA^2 + OB^2 - OC^2 - OD^2 - 2OM \bullet (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{OM} \bullet (2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = 0 \text{ Posons } \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

On obtient donc $\overrightarrow{OM}\bullet\overrightarrow{OK}=0$ ainsi le point M décrit la droite (Δ) passant par O et perpendiculaire à la droite (OK)



Activité 9 : Lignes de niveau k ($k\in\mathbb{R}$) de l'application M $\longmapsto \frac{MA}{MB}$

1. Si $k=1$, alors MA = MB. Par conséquent M décrit la médiatrice du segment [AB].
2. Si $k\neq 1$, alors $MA^2=k^2MB^2$. Donc $\left(\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA}-k\overrightarrow{MB}\right)=0$.

Soit $I=bar\,\{(A;1),(B;k)\}$ et $=bar\,\{(A;1),(B;-k)\}$, on obtient : $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ}=0$. Il vient que M décrit le cercle de diamètre [IJ] dans le plan ou la sphère de diamètre [IJ] dans l'espce.

Exercices de fixation

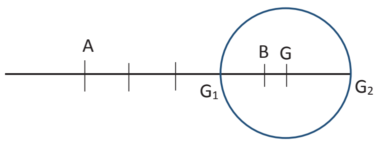
Exercice 12

$\frac{MA}{MB}=3\Leftrightarrow MA^2-9MB^2=0$

$[G_1G_2]$ soit $G_1=bar\{(A,1)\,;(B,3)\}$ *et* $G_2=bar\{(A,1)\,;(B,-3)\}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{G_1M}\bullet(-2\overrightarrow{G_2M})=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{G_1M}\bullet\overrightarrow{G_2M}=0$ donc M appartient au cercle de diamètre $[G_1G_2]$privé de B



Activité 10 : Lignes de niveau k ($k\in\mathbb{R}$) de l'application M $\longmapsto$ *Mes* $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}})$

1. $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)=0$ ou $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)=\pi\Leftrightarrow$ M ∈ [AB] ou M ∈ [AB) ou M ∈ [BA) ⇔ A, B et M sont alignés .
2.
   b) (C) passe par B, car OB = OA.

c) Si $M \in AB$, le théorème des angles inscrit permet d'écrire que $Mes\ (\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = \alpha$

Si $M \in \breve{AB}$, $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = \hat{\alpha} + \hat{\pi}$

d)

L'ensemble des points M du plan tels que $Mes\ (\widehat{\overrightarrow{MA};\ \overrightarrow{MB}}) = \alpha$ est l'un des deux arcs, privés des points A et B définis sur (C) par la corde [AB].

Cet arc peut être déterminé par le signe de α.

Soit A et B deux points distincts du plan et M un point du plan distinct de A et B.

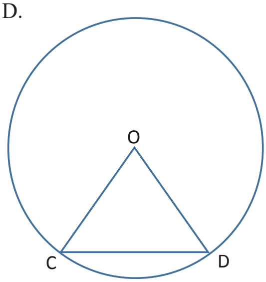
1. Justifie l'équivalence suivante :

A, B et M sont alignés ⇔ $Mes\ (\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = 0$ ou $Mes\ (\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = \pi$.

Exercices de fixation

Exercice 13

L'ensemble des points M tel que $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}}\right) = \frac{\pi}{6}$. On construit le triangle OCD isocèle en O tel que $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}}\right) = \frac{\pi}{3}$ et (C) le cercle de centre O passant par C et D. L'ensemble cherché est le grand arc $\breve{CD}$ privé des points C et D.



3

DES QUESTIONS D'ÉVALUATION

1. Comment utiliser le barycentre pour justifier un alignement de points

Exercice non corrigé

$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow I = bar\{(A,1);(B,2)\}$; de même $C = bar\{(D,1);(I,3)\}$ et $\mathrm{M} = bar\{(A,1);(D,1)\}$.

On a : $C = bar\{(D,1);(I,3)\} = bar\{(A,1);(D,1);(B,2)\}$ soit $C = bar\{(M,2);(B,2)\}$, d'où le résultat.

2. Comment utiliser le barycentre pour justifier que des droites sont concourantes

Exercice non corrigé

Justifions que les droites (AJ) , (BK) et (CI) sont concourantes

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow I = bar\{(A,2);(B,1)\}$; $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow J = bar\{(C,3);(B,1)\}$

$\overrightarrow{CK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow K = bar\{(C,3);(A,2)\}$. Soit $G = bar\{(A,2);(B,1);(C,3)\}$

On a $G = bar\{(J,4);(A,2)\} \Leftrightarrow G \in (AJ)$.

$G = bar\{(K,5);(B,1)\} \Leftrightarrow G \in (KB)$.

$G = bar\{(I,3);(C,3)\} \Leftrightarrow G \in (CI)$.

Ainsi, les droites (AJ) , (BK) et (CI) sont concourantes en G.

MES SÉANCES D'EXERCICES

Exercice 1

1. Immédiat (vérifie que la somme des pondérations est non nulle)
2. Immédiat

Exercice 2

1. Vérifie dans chaque cas que la somme des pondérations est nulle
2. Remplacer le point M par l'un des points A, B, C D ou E pour obtenir le vecteur qui ne dépend pas du point M.

Exercice 3

1. Il suffit que α soit un nombre réel différent de 1.
2. Idem pour la question 1

Exercice 4

1. S_1 et S_4
2. Il suffit de résoudre l'équation d'inconnue α, telle que : $12\alpha + 8\alpha + 9\alpha = 2$

On tire $\alpha = \dfrac{2}{29}$

Exercice 5

Choisir 3 nombres réels non nuls et multiplier.

Exercice 6

Immédiat

Exercice 7

Immédiat

Exercice 8 et exercice 9

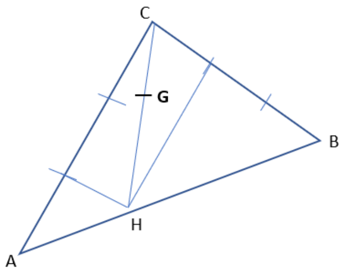
Utilise la formule relative aux coordonnées du barycentre dans un repère

Exercice 10

{(I, 2) ; (C ; 3)}

Construction immediate

Exercice 11



$H = bar\{(A,2);(B,1)\}$ *donc* $\overrightarrow{CH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$

$G = bar\{(H,3);(C,4)\}$ *donc* $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AH} + \frac{4}{7}\overrightarrow{AC}$

$H = bar\{(A,2);(B,1)\}$ *donc* $G = bar\{(A,2);(B,1);(C,4)\}$

Exercice 13

$MA^2 + MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$

En développant, on obtient :

$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + IA^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})$, $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 0$ et $IA^2 + IB^2 = \frac{AB^2}{2}$, d'où le résultat.

Exercice 14

1. G barycentre des points pondérés (A, 4) ; (B, -1) et (C, -1), donc

G barycentre des points pondérés (A, 4) ; (I, - 2) où I est le milieu de [BC], donc G est le point tel que $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{AI}$.

Soit (C) l'ensemble des points M du plan tels que :
$4MA^2 - MB^2 - MC^2 = -a^2$, on a donc : $-AB^2 - AC^2 = -BC^2 = -a^2$, donc A appartient à (C).

(C) est non vide et non réduit à un singleton, car (C) contient le point A distinct de G.
(C) est donc le cercle de centre G et de rayon GA

Exercice 15

$MB^2 + MC^2 - MA^2 = 0$ soit $G = bar\{(A,-1);(B,1);(C,1)\}$ donc $-\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$ et
$MG^2 + GB^2 + GC^2 - GA^2 = 0$.

On a $AC+CB=AB$ et $AC=CB$ donc C est le milieu de [AB]

On obtient $\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{CA}$ soit $GB=1$; $\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{BA}$ soit $GC=2$ et $AG=3$

$$MG^2+GB^2+GC^2-GA^2=0 \Leftrightarrow MG^2=9-1-4$$
$$\Leftrightarrow MG^2=4 \quad \text{donc } M \in \mathscr{C}(G,2)$$
$$\Leftrightarrow MG=2$$

Exercice 16 et 17 (faire les calculs en s'inspirant de l'exercice 11 du cours)

Exercice 18 (voir méthode exercice de fixation 12 du cours)

Exercice 19 (voir méthode de l'exercice de fixation 13 du cours)

On construira un triangle OAB isocèle en O tel que $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)=\frac{-\pi}{3}$

Exercices de renforcement/approfondissement

Exercice 20

1. B ; 2.A ; 3.C

Exercice 21

1. $\vec{u}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{CB}$

$\vec{v}=4\overrightarrow{MD}-2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{BD}$

2. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{MO}$ car $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

Exercice 22

a) $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}\right\|=AB$ soit $G_1=bar\{(A,1);(B,1);(D,-1)\}$ on obtient $MG_1=AB$ donc l'ensemble des points M est le cercle de centre G_1 et de rayon AB.

b) Même type de raisonnement pour les autres

Exercice 23

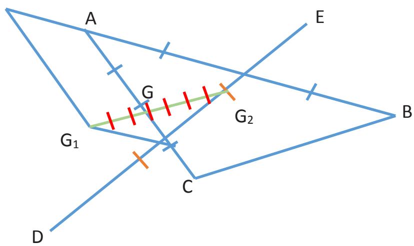
1. $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})=0$ Soit I le milieu de [AB] et J le milieu de [BC] . on obtient $2\overrightarrow{MI}.2\overrightarrow{MJ}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ}=0$ donc l'ensemble des points M est le cercle de diamètre [IJ]
2. $(\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC})=0$ soit $K=bar\{(A,1);(B,-2)\}$ et $P=bar\{(B,1);(C,2)\}$

On obtient $-\overrightarrow{MK}.(3\overrightarrow{MP})=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MK}.\overrightarrow{MP}=0$ donc l'ensemble des points M est le cercle de diamètre [KP]

Exercice 24

$G_1 = bar\{(A,2);(B,-1);(C,3)\}\, soit\ \overrightarrow{AG_1} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$; et G_2 le barycentre de (D,1) et (E, 2)

On a : $G = bar\{(G_1,4);(G_2,3)\}\, soit\ \overrightarrow{G_1G} = \frac{3}{7}\overrightarrow{G_1G_2}$

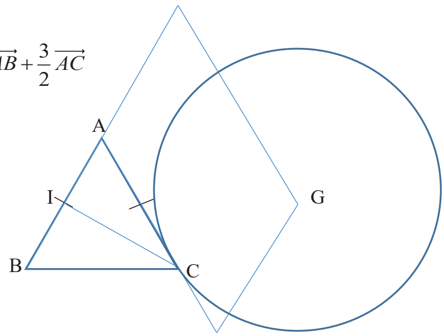


Exercice 25

$\left\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\right\|$ soit $G = bar\{(A,1);(B,-2);(C,3)\}$ et I le milieu de [AB].

On obtient $\Leftrightarrow MG = IC \Leftrightarrow MG = IC$ donc l'ensemble des points M est le cercle de centre G et de rayon IC.

$G = bar\{(A,1);(B,-2);(C,3)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$



Exercice 26

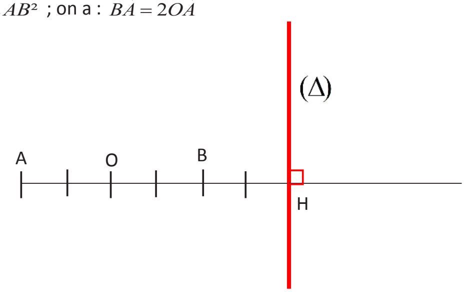
Soit O le milieu de [AB] et H le projeté orthogonal de M sur (OA)

$MA^2 - MB^2 = 2AB^2 \Leftrightarrow OA^2 - OB^2 - 2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{BA} = 2AB^2$; on a : $\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{OA}$

$\Leftrightarrow -4\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OA} = 2AB^2$

$\Leftrightarrow \overline{OH} \times \overline{OA} = -\frac{1}{2}AB^2$

Prenons AB = 4 , donc $\overline{OH} = 4\ et\ \overline{OA} = -2$



Exercice 27

L'ensemble des points M tel que : $Mes\left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MD}\right)=-\frac{\pi}{3}$ ou $Mes\left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MD}\right)=\frac{2\pi}{3}$.

On construit le triangle OCD isocèle en O tel que $Mes\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)=-\frac{2\pi}{3}$ et (C) le cercle de centre O passant par C et D. L'ensemble cherché est le grand arc $\overset{\frown}{CD}$ privé des points C et D. Il faut ensuite examiner le second cas. Au total, l'ensemble cherché est la réunion des deux arcs capables d'extrémités C et D.

Exercice 28

$$A=bar\{(E,1);(F,1)\}=bar\{(E,3);(F,3)\}$$

$$C=bar\{(F,3);(G,1)\}=bar\{(F,-3);(G,-1)\}$$

$$\begin{aligned}B=bar\{(E,3);(G,-1)\}&=bar\{(E,3);(F,3);(F,-3);(G,-1)\}\\&=bar\{(A,6);(C,-4)\}\\B&=bar\{(A,3);(C,-2)\}\end{aligned}$$

Exercice 29

1. ABC est équilatéral, I est le milieu de [BC] et soit E le milieu de [AB].
   H le projeté orthogonal de I sur (AB) donc H est le milieu de [EB], ainsi
   On a : $\overrightarrow{AH}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ d'où $H=bar\{(A,1);(B,3)\}$
2. I milieu de [BC] donc $I=bar\{(B,1);(C,1)\}=bar\{(B,2);(C,2)\}$

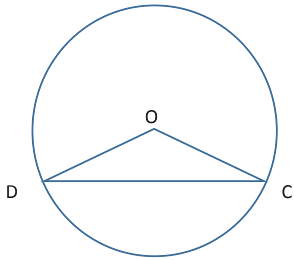
   K milieu de [IJ] donc $K=bar\{(I,1);(J,1)\}=bar\{(I,4);(J,4)\}$

D'où $K=bar\{(B,2);(C,2);(A,1);(B,3)\}=bar\{(A,1);(B,5);(C,2)\}$

Exercice 30

1. Soit $G(x_G\,;y_G)$ avec $x_G=\frac{2\times3+3(-1)}{2+3}=\frac{3}{5}$ *et* $y_G=\frac{2\times4+3\times2}{2+3}=\frac{14}{5}$ soit $G\left(\frac{3}{5};\frac{14}{5}\right)$
2. Soit $K=bar\{(A,4);(B,5)\}$ donc $K\left(\frac{7}{9};\frac{26}{9}\right)$

   $\left\|4\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}\right\|=45\Leftrightarrow 9MK=45\Leftrightarrow MK=5$ donc L'ensemble des points M est le cercle de centre K et de rayon 5 . $(C_1):\left(x-\frac{7}{9}\right)^2+\left(y-\frac{26}{9}\right)^2=25$



3. Soit $R = bar\{(A,3);(B,2)\}$ et $S = bar\{(A,7);(B,-2)\}$

donc $R\left(\frac{7}{5};\frac{16}{5}\right)$ et $S\left(\frac{23}{5};\frac{24}{5}\right)$ soit P le milieu de [RS], on a $P(3;4)$

$\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|7\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right\| \Leftrightarrow MR = MS$ donc M appartient à la médiatrice (Δ) du segment [RS].

Une équation de (Δ) : $M \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{RS} = 0$ avec $\overrightarrow{RS}\left(\frac{16}{5};\frac{8}{5}\right)$ et $\overrightarrow{MP}(3-x;4-y)$

$M \in (\Delta) \Leftrightarrow \frac{16}{5}(3-x)+\frac{8}{5}(4-y) = 0 \Leftrightarrow 2x+y-10=0$

$(C_2): 2x+y-10=0$

Exercice 31

$C = bar\{(A,1);(B,1);(G,-3)\}$ on a : $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}-3\overrightarrow{CG}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ donc

$G = bar\{(A,1);(B,1);(C,1)\}$, donc G est le centre de gravité du triangle ABC.

Exercice 32

1. $\frac{KD}{KI}=\frac{KR}{KJ}=\frac{DR}{IJ}=\frac{2}{3}$ et $\frac{AK}{KJ}=4$

2. On a : $\overrightarrow{KD} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{KI} \Leftrightarrow K = bar\{(D,3);\ (I,2)\} = bar\{(D,3);\ (B,1);(C,1)\}$

On a aussi : $\overrightarrow{AK} = 4\overrightarrow{KJ} \Leftrightarrow K = bar\{(A,1);\ (J,4)\} = bar\{(A,1);\ (D,2);(C,2)\}$

On sait que $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB} \Leftrightarrow D = bar\{(A,2);(B,-2);(C,2)\}$ d'où

$K = bar\{(A,2);\ (D,1);(C,2);(B,1);(B,-2);(C,1)\}$

$K = bar\{(A,2);(B,-1);(C,3);(D,1)\}$

Exercice 33

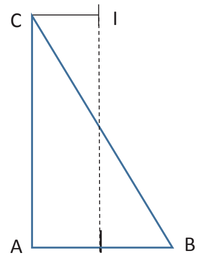
$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

1. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow I = bar\{(A,1);(B,-2);(C,-1)\}$
2. $MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = -3 \Leftrightarrow -2MI^2 + IA^2 - 2IB^2 - IC^2 = -3$

$$IA^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2 = \frac{17}{4} \ ; \ IB^2 = \frac{1}{4} \ ; \ IC^2 = \frac{17}{4}$$

$$MI^2 = \frac{3 + \frac{17}{4} - 2\times\frac{1}{4} - \frac{17}{4}}{2} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow MI = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

(S) est donc la sphère de centre I et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$



Exercice 34

$$L = bar\{(A,-1);(C,-3)\} \ ; \ I = bar\{(B,3);(C,3)\}$$

$$M = bar\{(A,-1);(B,3)\} = bar\{(A,-1);(C,-3);(B,3);(C,3)\}$$
$$= bar\{(L,-4);(I,6)\} = bar\{(L,-2);(I,3)\}$$

Donc les points M, L et I sont alignés

Exercice 35

1. $A' = bar\{(B,1);(C,1)\} = bar\left\{(B,\frac{1}{2});(C,\frac{1}{2})\right\}$

$$G = bar\{(A',1);(A,1)\} = bar\left\{(B,\frac{1}{2});(C,\frac{1}{2});(A,1)\right\} = bar\{(B,1);(C,1);(A,2)\}$$

2. on a : $AA' = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $GA = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $GB = \frac{\sqrt{7}}{4} = GC$

$$2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2 \Leftrightarrow 4MG^2 + 2GA^2 + GB^2 + GC^2 = 2 \Leftrightarrow MG^2 = \frac{1 - 2\times\frac{3}{16} - \frac{7}{16} - \frac{7}{16}}{4} = \frac{3}{16}$$

$MG = \frac{\sqrt{3}}{4}$ donc $M \in C\left(G;\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

Exercice 36

On a : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $I=bar\{(A,2);(B,1)\}$ et $\overrightarrow{BL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ donc $L=bar\{(B,1);(C,2)\}$

$\overrightarrow{AJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $J=bar\{(A,1);(B,2)\}$ et $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ donc $M=bar\{(A,1);(C,2)\}$

$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ donc $N=bar\{(A,2);(C,1)\}$ et $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ donc $K=bar\{(B,2);(C,1)\}$

Soit $G=bar\{(A,2);(B,2);(C,2)\}$ (G est le centre de gravité de du triangle ABC) on a donc

$G=bar\{(I,3);(L,3)\}$ donc $G\in(IL)$

$G=bar\{(J,3);(M,3)\}$ donc $G\in(JM)$

$G=bar\{(N,3);(K,3)\}$ donc $G\in(NK)$. il vient que les droites (IL) , (JM) et (NK) sont concourantes.

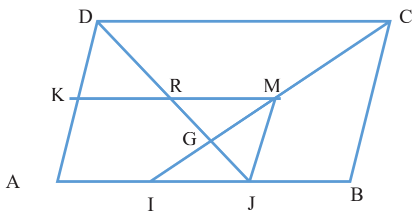
Exercice 37

Soit $(DJ)\cap(KM)=\{R\}$ et $JM=AK=KD$ *et* $(JM)//(KD)$ donc le quadrilatère KDMJ est un parallélogramme. Ainsi R est le milieu de [KM]

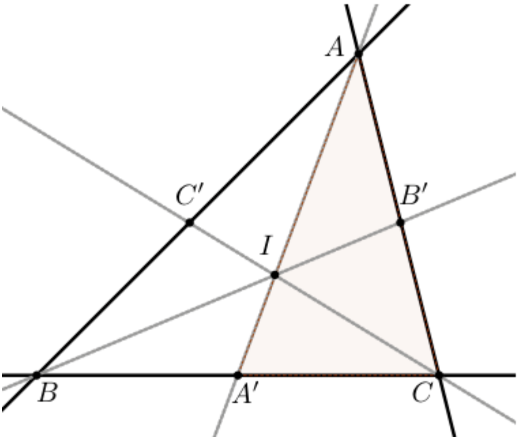
I est le milieu de [AJ] d'où (IR) // (JM) et comme (RM) // (IJ) , on a : IRMJ est un parallélogramme de centre G, ainsi G est le milieu de [IM]. On a donc les points I, G et M alignés (1)

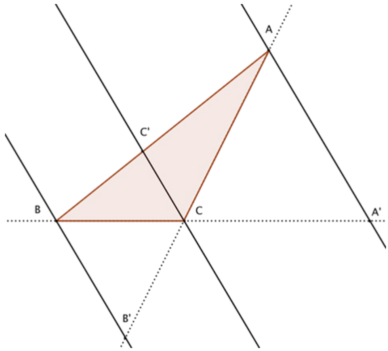
Dans le triangle IBC, J est le milieu de [IB] , $JM=\frac{1}{2}BC$ et (JM) // (BC) donc M est le milieu de [IC]. On a aussi I, M et C alignés (2)

Finalement d'après (1) et (2) : les points C , M , G et I sont alignés.



Exercice 38





1.

a) A’ est un point de la droite (CB), et α son abscisse dans la graduation de repère (C, B), α est non nul et différent de 1, car A’ est distinct de B et de C. On a donc $\overline{CA'} = \propto \overline{CB}$, en introduisant le point A’, on obtient : $\overline{CA'} = \propto \overline{CA'} + \propto \overline{A'B}$ soit $\propto \overline{A'B} + (1-\propto)\overline{A'C} = 0$

Les questions b) et c) se justifient de la même manière.

2.

a) $\propto \overline{A'B} + (1-\propto)\overline{A'C} = 0$ Indique que : $A' = bar\{(B,\propto);(C,(1-\propto)\}$

En multipliant chaque pondération par le même réel non nul $\beta(1-\gamma)$, on obtient le résultat demandé (homogénéité du barycentre).

Les questions b) et c) se justifient de la même manière. On a donc :

$A' = bar\{(B,\propto\beta(1-\delta));(C,(1-\propto)\beta(1-\delta)\}$;

$B' = bar\{(C,\beta(1-\propto)(1-\delta);(A,(1-\propto)(1-\beta)(1-\delta)\}$;

$C' = bar\{(A,\beta\propto\delta;(B,\propto\beta(1-\delta)\}$

3. $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1 \Leftrightarrow \dfrac{(\propto-1)}{\propto} \times \dfrac{(\beta-1)}{\beta} \times \dfrac{(\delta-1)}{\delta} = -1 \Leftrightarrow \quad \alpha\beta\delta = (1-\alpha)(1-\beta)(1-\delta)$

Si $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$, justifions les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes

On a $\alpha\beta\delta = (1-\alpha)(1-\beta)(1-\delta)$, donc étudier le système $\{A,(1-\propto)(1-\beta)(1-\delta);(B,\propto\beta(1-\delta));(C,(1-\propto)\beta(1-\delta)\}$, c'est étudier le système S tel que : $\{(A,\propto\beta\delta);(B,\propto\beta(1-\delta));(C,(1-\propto)\beta(1-\delta)\}$. Posons $k_1 = \alpha\beta\delta$,

$k_2 = \alpha\beta(1-\delta)$ et $k_3 = (1-\alpha)\beta(1-\delta)$.

Deux cas sont à envisager pour l'étude de ce système :

Cas 1 : $k_1 + k_2 + k_3 \neq 0$, S possède un barycentre G.

G barycentre du système $\{(A,k_1);(B;k_2);(C;k_3)\}$, or $A' = bar\{(B,k_2);(C,k_3\}$ donc G barycentre du système $\{(A,k_1);(A',k_2+k_3)\}$ ¨et donc G appartient à la droite (AA')

Un raisonnement analogue permet de justifier que G appartient à la droite (BB') et à la droite (CC'). Les droites (AA'), (BB') et (CC') sont donc concourantes.

Cas 2 : $k_1 + k_2 + k_3 = 0$

$A' = bar\{(B,k_2);(C,k_3\}$, donc $k_2\overrightarrow{A'B} + k_3\overrightarrow{A'C} = 0$, soit $\overrightarrow{AA'}$ colinéaire au vecteur non nul $\vec{u}_A$ tel que : $\vec{u}_A = k_2\overrightarrow{AB} + k_3\overrightarrow{AC}$

De même $B' = bar\{(A,k_1);(C,k_3)\}$ indique que $\overrightarrow{BB'}$ est colinéaire au vecteur non nul $\vec{u}_B$ tel que : $k_1\overrightarrow{BA} + k_3\overrightarrow{BC}$

$\vec{u}_A - \vec{u}_B = (k_1+k_2+k_3)\,\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, car $k_1+k_2+k_3 = 0$; donc les droites (BB') et (CC') sont parallèle.

On montre de même que les droites (CC') et (AA') sont parallèles d'où le résultat

Conclusion si $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$, alors les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles.

Étude de la réciproque

Supposons que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes soient concourantes ou parallèles.

Cas 1 : les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes

Soit G le point de concours des droites (AA') et (BB'), G est le barycentre du système de points pondérés $\{(C,\beta(1-\propto)(1-\delta);(A,(1-\propto)(1-\beta)(1-\delta);(B,\alpha\beta(1-\delta\}$, mais aussi du système de points pondéré $\{(C,\beta(1-\propto)(1-\delta);(A,\propto\beta\delta);(B,\alpha\beta(1-\delta\}$, il en résulte que

$\alpha\beta\delta = (1-\alpha)(1-\beta)(1-\delta)$ et donc que $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$

Cas 1 : les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles

Si le système $\{A,(1-\propto)(1-\beta)(1-\delta);(B,\propto\beta(1-\delta));(C,(1-\propto)\beta(1-\delta)\}$ admettait un barycentre, alors celui-ci appartiendrait à la fois aux droites (AA') et (BB'), or $(AA')\cap(BB')=\varnothing$, donc $(1-\propto)(1-\beta)(1-\delta)+\propto\beta(1-\delta)+(1-\propto)\beta(1-\delta)=0$, de même $\propto\beta\delta+\propto\beta(1-\delta)+(1-\propto)\beta(1-\delta)=0$, donc $\alpha\beta\delta=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\delta)$, soit

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\times\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\times\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=-1 .$$

De ces 2 cas, on conclue que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles,

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\times\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\times\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=-1$$

4. Reprendre le même type de raisonnement dans le cas où A' , B' et C' sont alignés.

Exercice 39

S'inspirer et appliquer des résultats précédents.

Exercice 40

1. Supposons d'abord que $\beta+\gamma=0$. Alors on sait que

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{AM} &= \alpha\overrightarrow{AA}+\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}\\ &= \beta\overrightarrow{CB}\end{aligned}$$

Les droites (AM) et (BC) sont donc parallèles. Réciproquement, si (AM) et (BC) sont parallèles, alors $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{BC}$. Mais on a aussi

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{AM} &= \alpha\overrightarrow{AA}+\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}\\ &= \beta\overrightarrow{CB}+(\gamma+\beta)\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Si $\beta+\gamma$ n'était pas nul, on trouverait que $\overrightarrow{AC}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BC}$, ce qui n'est pas le cas.

2. Supposons d'abord que ces conditions sont réalisées et notons M le barycentre de (A,α), (B,β) et (C,γ). Alors, par associativité du barycentre, M est aussi le barycentre de (A,α) et $(P,\beta+\gamma)$ et donc M est sur la droite (AP). Par symétrie du rôle joué par les sommets, M est aussi sur les droites (BQ) et (CR), et ces trois droites sont donc concourantes.

Réciproquement, supposons que les trois droites se coupent en M et définissons α,β et γ

Réciproquement, supposons que les trois droites se coupent en M et définissons α,β et γ
de sorte que M soit le barycentre de (A,α), (B,β) et (C,γ). M étant sur la droite (AP), il est distinct de B et C et de même il est distinct de A. D'après la question précédente, on en déduit que $\beta+\gamma\neq 0$. Notons P' le barycentre de (B,β) et de (C,γ). Alors, par associativité du barycentre, M est le barycentre de (A,α) et de $(P',\beta+\gamma)$. Ainsi, M est sur la droite (AP'). Mais M est aussi sur la droite (AP) et les points P et P' sont tous deux sur la droite (BC). Ainsi, $P=P'$. On prouve exactement de la même façon les deux autres points.

3. On écrit que

$$\text{aire}(MCA) = \text{aire}(PAC) - \text{aire}(PMC).$$

Or,

$$\text{aire}(PAC) = \frac{1}{2} \times H \times PC$$

d'où le résultat.
Puisque M est un point intérieur du triangle, P est sur le segment $[BC]$. On a de plus que

$$BP = \frac{\text{aire}(MAB)}{\text{aire}(MAB) + \text{aire}(MCA)} BC.$$

On en déduit la propriété demandée sur P, puis, en utilisant la question précédente, sur M.
4. Si M est le centre de gravité du triangle, alors M est le barycentre de $(A,1)$, $(B,1)$ et $(C,1)$. En comparant avec la question précédente, on voit que

$$\text{aire}(MAB) = \text{aire}(MBC) = \text{aire}(MCA).$$

Le centre de gravité du triangle est donc l'unique point intérieur au triangle pour lequel cette propriété est vérifiée.
5. Rappelons que le centre du cercle inscrit, point de concours des bissectrices intérieures, est à égale distance des côtés du triangle. Ainsi, si on note d cette distance, on a

$$\text{aire}(MAB) = d \times AB = dc$$

$$\text{aire}(MBC) = da$$

$$\text{aire}(MCA) = db.$$

En combinant ceci aux résultats précédents, on obtient le résultat demandé.

Exercice 41 (SITUATION COMPLEXE)

On a : $3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow 18\overrightarrow{GA} + 12\overrightarrow{GB} = \vec{0}$
Pour 18kg de boule rouge il faut 12kg de boule verte.
Le montant équivalent est
$12 \times 2500F = 30.000F$.
Le père disposant d'un montant de 27.000F qui est moins de 30.000F, ne peut donc pas acheter la boule verte.

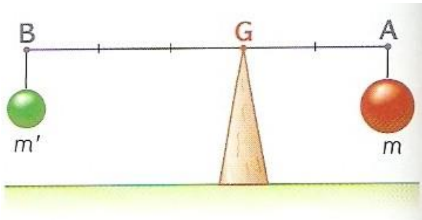


Figure 1

2 DIVISIBILITÉ DANS $\mathbb{Z}$

1 SITUATION D'APPRENTISSAGE

L'approche pédagogique et la didactique est celle de l'APC. Pour le déroulement de la situation, vous pouvez vous inspirer du tableau suivant.

Constituants de la situation	**Exemples de questions possibles**	**Réponses possibles des élèves**
Contexte	Où ou quand se déroule la scène ?	Au lycée 1 du chef-lieu de la direction régionale de l'éducation nationale lors du concours entre lycée.
Circonstances	Indique pour quelles raisons les élèves de ton lycée ont-ils échoué à ce concours ?	Les candidats ont concours ont eu des difficultés lors de l'épreuve à dégager des résultats généraux issus de leurs recherches
Tâche	Qu'est ce que les élèves ont-ils décidé de faire une fois retournés au lycée ?	Retournés au lycée, ils sollicitent leur professeur de mathématiques qui les invite à suivre le cours sur la divisibilité dans $\mathbb{Z}$.

2 DÉCOUVERTE DES HABILETÉS

I. L'ensemble $\mathbb{N}$

1. Introduction et propriétés générales

Activité 1

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls. Nous avons vu au premier cycle que sont définies sur $\mathbb{N}$ une addition et une multiplication vérifiant :

Pour tous entiers naturels a, b et c :

N°	Addition dans $\mathbb{N}$ (A)	Multiplication dans $\mathbb{N}$ (B)
1	$a + b \in \mathbb{N}$	$a \times b \in \mathbb{N}$
2	$a + 0 = 0 + a = a$	$a \times 1 = 1 \times a = a$
3	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
4	$a + b = b + a$	$a \times b = b \times a$
5	$a + b = a + c \Leftrightarrow b = c$	$ab = ac \Leftrightarrow b = c, (a \neq 0)$
6	$a + b = 0 \Longrightarrow a = b = 0$	$a \times b = 1 \Longrightarrow a = b = 1$
7	$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$	

Dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, on définit la relation $\leq$ comme suit : pour tous entiers naturels a et b, $a \leq b$ s'il existe un entier naturel c tel que $a + c = b$.

Démontre que pour tous entiers naturels a, b et c, on a :

1) $a \leq a$ (Réflexivité)
2) si $a \leq b$ et $b \leq a$, alors $a = b$ (Antisymétrie)
3) si $a \leq b$ et $b \leq c$, alors $a \leq c$ (Transitivité)

Objectif de l'activité 1 : Rappeler les propriétés connues de $\mathbb{N}$ et introduire la relation d'ordre $\leq$. La définition de $\leq$ est utilisée pour établir les trois points en s'appuyant sur les rappels du tableau.

1) $c = 0$ pour établir $a \leq a$.
2) Utiliser A1, A5 et A6.
3) Utiliser A1 comme suit :
   $a \leq b$, il existe d entier naturel tel que $b = a + d$;
   $b \leq c$, il existe e entier naturel tel que $c = b + e$;

De A3, on déduit que : $c = a + (d + e)$. De A1, on a : $d + e \in \mathbb{N}$. Par suite : $a \leq c$.

Exercices de fixation

Exercice

Il faut appliquer le point 2 (l'antisymétrie de $\leq$)

Activité 2

Objectif de l'activité 2 : Etablir la comptabilité de la relation d'ordre avec l'addition et la multiplication dans $\mathbb{N}$.
Ici encore, on utilise le tableau de l'activité 1.

1) Il faut utiliser A3, A4, A5.
2) a) $\Longrightarrow$
   $a \leq b$, il existe d entier naturel tel que $b = a + d$; d'où : $cb = c(a + d)$ (B5). On déduit que : $cb = ca + cd$. D'après B1, cd est un entier. Par suite $ca \leq cb$. En utilisant B4, on a : $ac \leq bc$.
   $\Longleftarrow$
   Supposons que $b \leq a$ et $b \neq a$ (par l'absurde). On en déduit que $bc \leq ca$ et $b \neq a$. Ce qui contredit l'hypothèse.

Exercices de fixation
Soit a, b, c et d des entiers naturels. Démontre que si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$.
Solution
$a \leq b$, d'où : $a + c \leq b + c$ d'après la proposition précédente ;
$c \leq d$, d'où : $b + c \leq b + d$ d'après la proposition précédente.
D'après la transitivité de la relation $\leq$, on déduit que $a + c \leq b + d$.

Activité 3
Objectif : Etablir que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément

1) Seule la partie A est vide.
2) Toutes les parties non vides de $\mathbb{N}$ de l'activité possèdent un plus petit élément.
3) Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possèdent un plus petit élément.

Ce résultat est admis.

Exercice de fixation

Il suffit de démontrer que cet ensemble n'est pas vide. Il contient 6.

Activité 4

Objectif : Démontrer que pour tout entier naturel n, l'intervalle] $n\,; n+1$[ne contient aucun entier naturel

Ici les intervalles sont des intervalles de $\mathbb{N}$.

L'intervalle] $a\,;\ b$[de $\mathbb{N}$ est défini comme suit (a et b sont dans $\mathbb{N}$ et $a < b$) :

$]\,a\,; b[\ = \{n \in \mathbb{N}\,|a < n < b\}$.

1) Supposons que l'intervalle] 0 ;1[contienne un entier naturel α. Dans ce cas, il possède un plus petit élément. Car toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

On a : $0 < \alpha < 1$. D'où : $0 < \alpha^2 < \alpha < 1$. On en déduit que $0 < \alpha^2 < 1$. Or α étant un entier naturel, α^2 l'est aussi. α^2 appartient à l'intervalle] 0 ;1[. Ce qui contredit le fait que α est le plus petit élément de l'intervalle] 0 ;1[. Par suite l'intervalle] 0 ;1[ne contient aucun entier naturel.

2) Supposons que l'intervalle] $n\,;\ n+1$[contienne un entier naturel β. D'où : $0 < \beta - n < 1$. Or,

$\beta - n$ appartient à $\mathbb{N}$, car $n < \beta$, et appartient évidemment à l'intervalle] 0 ;1[. D'après ce qui précède,] 0 ;1[ne contient aucun élément. Par suite l'intervalle] $n\,;\ n+1$[ne contient aucun entier naturel.

3) L'intervalle] $n\,;\ n+1$[vide, si n est inférieur à x alors x est au moins égal à $n+1$. La réciproque est évidente.

Exercice de fixation

Il suffit de poser $m = n - 1$.

Activité 5

Objectif : Etablir que toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

1) Supposons que A soit majorée par a. On en déduit que B est une partie non vide de$\mathbb{N}$ car il contient a. B admet donc un plus élément b. Par suite b est un majorant de A puisque B est constitué de tous les majorants de A.

2) Supposons b n'appartient pas à A. On en déduit que quel que soit x appartenant à A, $x < b$. Donc : $x \leq b - 1$. Par suite $b - 1$ est un majorant de A et appartient à B. Ce qui contredit la définition de b.

3) Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

Exercices de fixation

Il suffit de démontrer que cet ensemble n'est pas vide et est majoré. Il contient 0, donc il n'est pas vide. Justifie qu'il est majoré par 16 puis conclus.

2. **Démonstration par récurrence**

Activité 6 : Principe de récurrence

Objectif : Etablir le principe de récurrence qui va servir de fondement à la démonstration par récurrence.

1) Soit m un élément de $\mathbb{N}^*$. $m-1$ appartenant à $\mathbb{N}$ est l'unique antécédant de m par s.
2) a) Y est alors une partie non vide de $\mathbb{N}$. Il a un plus petit élément p.
   b) p est non nul sinon il appartiendrait à la fois à Y et à X d'après (i). Or X et Y ont une intersection vide, donc p n'est pas nul.
   c) L'antécédant de p par s est $p-1$ qui ne peut appartenir à Y car p est le plus petit élément de Y. Par suite $p-1$ appartient à X.
   d) $p-1$ appartenant à X, il découle que p appartenant à X d'après (ii). Absurde car p appartient à Y. Par suite Y est vide et donc X est égal à $\mathbb{N}$.

Exercices de fixation

Exercice

Faux car la démonstration a utilisé (i).

Activité 7 : **Démonstration par récurrence**

Objectif : Etablir la démonstration par récurrence

1) On applique le principe de récurrence avec X = A.
2) On applique 1) avec $\mathrm{P}(n-n_0) = \mathrm{Q}(n)$.

Commentaire

L'implication « $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)$, $(\mathrm{P}(n) \Rightarrow \mathrm{P}(n+1))$ est vraie » est à comprendre au sens de la logique mathématique. Car on peut avoir $(\mathrm{P}(n) \Rightarrow \mathrm{P}(n+1))$ vraie pour des valeurs de n pour lesquelles $\mathrm{P}(n)$ est faux. Autrement dit une propriété peut être héréditaire à partir d'un certain rang sans être jamais vraie. D'où la nécessité de vérifier l'initialisation pour une valeur de n qui n'est pas toujours donnée dans l'énoncé. Quand n_0 n'est pas donné dans l'énoncé, c'est l'établissement de l'hérédité qui permet de le déterminer.

Rappelons que l'implication $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$ est vraie sauf dans le seul cas où P est vraie et Q est fausse. Si P est vraie et Q est vraie, alors cette implication est vraie. Mais ce n'est pas la seule possibilité conformément à ce qui est dit plus haut. On sait que si P est fausse, cette implication est toujours vraie.

Pour établir $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)$, $(\mathrm{P}(n) \Rightarrow \mathrm{P}(n+1)$ vraie, on va établir précisément :

$(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)$, $\mathrm{P}(n)$ vraie $\Rightarrow \mathrm{P}(n+1)$ vraie. Ce qui suppose que l'entier n_0 est bien choisi et qu'on a vérifié $\mathrm{P}(n_0)$ est vraie. Il faut s'assurer que $\mathrm{P}(n)$ n'est faux pour aucune valeur de n. En général, on procède à des essais sur des valeurs de n.

Exercices de fixation

Exercice 1

1) P(0) est vraie.
2) Pour tout entier naturel n, P(n) est vraie.

Exercice 2

Solution

Initialisation

$1^2 = \frac{1\times(1+1)\times(2\times1+1)}{6}$. Par suite P(1) est vraie.

Hérédité

Démontrons que pour tout entier naturel n non nul, P(n) vraie $\Longrightarrow$ P$(n+1)$ vraie.

On a : $1^2 + 2^2 + \cdots + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$. Car P$(n)$ est vraie. Par suite :

$1^2 + 2^2 + \cdots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$. On en déduit que P$(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Pour tout entier naturel n non nul, $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Division euclidienne dans ℕ

Activité 8

Objectif : Etablir la division euclidienne dans ℕ.

1) Il suffit de prendre $n = a + 1$.
2) a) A est une partie non vide de ℕ d'après ce qui précède. Il possède donc un plus petit élément q'.
   b) q' est non nul sinon on aurait $a < 0$. Ce qui contredit le fait que a est un entier naturel.

3)a) q' étant un élément de A vérifie $q'b > a$. Comme q' est le plus élément de A, $q' - 1$ ne l'est pas. Il vérifie $(q'-1)b \leq a$. Par suite : $qb \leq a < b(q+1)$.

b) En utilisant 3)a) on a le résultat.

c) En utilisant 3)b) on a le résultat.

L'unicité du couple (q, r) est établie par le fait que :

- q est unique car dépendant de p qui est unique ;
- r est unique car dépendant de a et b qui sont donnés et de q qui est unique.

Vous pouvez faire une démonstration générale pour l'unicité (pas nécessaire ici).

D'où le résultat.

Exercices de fixation

Exercice 1

1) $q = 8$; 2) $q = 0$; 3) $q = 4$.

Il faut utiliser : $q = \mathrm{E}(\frac{a}{b})$.

Exercice 2

Solution

1) Non car le reste est plus grand que le diviseur.
2) Oui.
3) Oui
4) Oui
5) Non car le reste est plus grand que le diviseur.

Exercice 3

Solution

Utiliser $q = \mathrm{E}(\frac{a}{b})$ et $r = a - bq$.

1) $(q; r) = (6; 46)$; 2) $(q; r) = (14; 0)$; 3) $(q; r) = (0 ; 8)$.

4. Numération

Activité 9

Objectif : Etablir le principe de numération

1) a) b) et c) sont évidents.
2) (a_0) est cette suite avec $a_0 = x$.
3) a) Cela se justifie par la division euclidienne de x par b.
   b) q_1 est non nul car $x \geq b$.
   c) (a_0, a_1) est cette suite avec $a_0 = r_0$, $a_1 = q_1$.

4) a) et b) comme au 3) a) et b)

c) (a_0, a_1, a_2) est cette suite avec $a_0 = r_0$ et $a_1 = r_1$ et $a_2 = q_2$.

5) a) Si $q_k < b$, alors le quotient de cette division euclidienne q_{k+1} est nul.

b) si $q_k \geq b$, alors le quotient de la division euclidienne de x par b n'est pas nul. b étant supérieur ou égal à 2, on a : $0 < q_{k+1} < q_k$.

6)a) Q$\cap$ $\mathbb{N}^*$ contient q_1 d'après 3)b). C'est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$. Il admet un plus petit élément p.

b) p étant un élément de (Q), il existe un entier naturel m non nul tel que $p = q_m$.

c) D'après 5)b) la suite (q) est strictement décroissante. Comme q_m est le plus petit terme de cette suite, alors q_{m+1} est nul.

7) a) Faisons un raisonnement par récurrence sur l'intervalle $[1\ ;m]$.

La propriété est vraie pour $m = 1$. En effet, $x = bq_1 + r_0$ et $0 \leq r_0 < b$, d'après 3)a) et q_1 est non nul d'après 3)b).

Supposons-la vraie pour un entier k appartenant à $[1, m-1]$. On a donc :

$x = b^k q_k + b^{k-1} r_{k-1} + \cdots + r_0$. Or : $q_k = bq_{k+1} + r_k$, donc :

$x = b^{k+1} q_{k+1} + b^k r_k + \cdots + r_0$.

D'où : $x = b^m q_m + b^{m-1} r_{m-1} + \cdots + r_0$.

Posons $n = m$ et considérons la suite finie $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ telle que : $a_0 = r_0$; $a_1 = r_1$; $a_{n-1} = r_{m-1}$; $a_n = q_m$.

Autre méthode

(1) : $x = bq_1 + r_0$; (2) : $q_1 = bq_2 + r_1$; (3) : $q_2 = bq_3 + r_2$; … ; $(m-1)$: $q_{m-2} = bq_{m-1} + r_{m-2}$; (m): $q_{m-1} = bq_m + r_{m-1}$.

On multiplie chaque membre de : (2) par b ; (3) par b^2 ; $(m-1)$ par b^{m-2} ; (m) par b^{m-1} . En les ajoutant membre à membre et en simplifiant, on obtient le résultat.

b) L'unicité est assurée par l'unicité des quotients et des restes dans la division euclidienne.

Exercices de fixation

Exercice 1

Réponse

1) Vrai ; 2) Faux ; 3) Vrai ; 4) Vrai.

Exercice 2

Il s'agit de l'exercice 9 de la page 55 de mon **Cahier d'habiletés Tle C.**

Exercice 3

Il s'agit de l'exercice 10 de la page 55 de mon **Cahier d'habiletés Tle C.**

II. L'ensemble $\mathbb{Z}$

1. Introduction et propriétés générales

Activité 10

Objectif : Etablir les propriétés de la relation $\leq$ (relation d'ordre et compatibilité)

1)

- $a \leq a$ (évident car $a - a = 0$ et $0 \in \mathbb{N}$)
- $b - a \in \mathbb{N}$ et $a - b \in \mathbb{N}$; on a : $(b - a) + (a - b) = 0$. D'après A6 : $a - b = 0$. D'où : $a = b$.
- $b - a \in \mathbb{N}$; $c - b \in \mathbb{N}$. Or : $c - a = (c - b) + (b - a)$ (A justifier). Daprès A1 : $c - a \in \mathbb{N}$. D'où : $a \leq c$.

2)

- Evident
- $bc - ac = (b - a)c$; $b - a \in \mathbb{N}$ et $c \in \mathbb{N}$, d'où : $bc - ac \in \mathbb{N}$. On en déduit que $ac \leq bc$. Pour la réciproque, il faut raisonner par l'absurde.
- Raisonnement analogue.

Exercices de fixation

Exercice

Solution

1) Dans le dernier point de la proposition 2), il faut prendre $c = -1$.
2) Dans le deuxième point de la proposition 2), il faut prendre $c = 2$.
3) $qb - pa = (qb - pb) + (pb - pa)$; d'où : $qb - pa = (q - p)b + p(b - a)$. Chacun des termes de la dernière somme étant positif, on a : $pa \leq qb$.
   Autre méthode

$a \leq b$ et $p \geq 0$, d'où : $pa \leq pb$; $p \leq q$ et $b \geq 0$, d'où : $pb \leq qb$. On en déduit que : $pa \leq qb$.

2. **Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$**

Activité 11

Objectif : Etendre la division euclidienne dans $\mathbb{N}$ à $\mathbb{Z}$.

1) $91 = 22 \times 4 + 3$; d'où : $-91 = 22 \times (-4) - 3$; par suite : $-91 = 22 \times (-4) - 22 - 3 + 22$. On obtient : $-91 = 22 \times (-5) + 19$. On a donc : $(q, r) = (-5; 19)$.
2) $|a|$ est un entier naturel et $|b|$ est un entier naturel non nul. Il existe donc un couple unique (q', r') d'entiers relatifs tels que : $|a| = |b|q' + r'$ et $0 \leq r' < |b|$.
3) a) Si a et b sont des entiers naturels ($b \neq 0$), alors : $q = q'$ et $r = r'$.
4) b) Si a est négatif ou nul et b et négatif, alors : $-a = -bq' + r'$ et $0 \leq r' < -b$.
   Par suite : $a = b \times q' - r'$ et $b < -r' \leq 0$. D'où : $a = b \times q' - r'$ et $0 < -b - r' \leq -b$.
   - Si $r' = 0$, alors : $a = b \times q'$ et $q = q'$ et $r = 0$.
   - $r' \neq 0$, $a = b \times (q' + 1) + (-b - r')$ et $0 < -b - r' < -b$. On a donc : $q = q' + 1$ et $r = -b - r'$.

   c) Si a est positif ou nul et négatif, alors : $a = -bq' + r'$ et $0 \leq r' < -b$. Par suite :

   $a = b \times (-q') + r'$ et $0 \leq r' < -b$. D'où : $q = -q'$ et $r = r'$.

   d) *Existence*
   Si a est négatif ou nul et b et positif, alors : $-a = bq' + r'$ et $0 \leq r' < b$.

Par suite : $a = b \times (-q') - r'$ et $-b < -r' \leq 0$. D'où : $a = b \times (-q' - 1) + (b - r')$ et $0 < b - r' \leq b$.

- Si $r' = 0$, alors : $a = b \times (-q')$ et $q = -q'$ et $r = 0$.
- $r' \neq 0$, $a = b \times (-q' - 1) + (b - r')$ et $0 < b - r' < -b$. On a donc : $q = -q' - 1$ et $r = b - r'$.

On vient d'établir l'existence d'un couple (q, r) d'entiers relatifs tels que : $a = bq + r$ et $0 \leq r < |b|$.

Unicité

L'entier relatif q car dépendant de q' qui est unique d'une part. D'autre part r est unique car dépendant que de b qui est une donnée et de r'.

4) Demandez aux élèves de formuler la conclusion suivante :

Soit a un entier relatif et b un entier relatif non nul. Il existe un couple unique $(q\ ;\ r)$ d'entiers relatifs tels que :

$$a = bq + r \ et\ 0 \leq r < |b|.$$

Exercices de fixation

Exercice 1

1) Vrai ; 2) Vrai ; 3) Vrai ; 4) Faux.

Exercice 2

Solution

1) $(q; r)$ = (8 ; 12) ; 2) $(q; r)$ = (−8 ; 12) ; 3) $(q; r)$ = (−9 ; 13) ; 4) $(q; r)$ = (9 ; 13).

3. Diviseurs d'un entier relatif

Activité 12

Objectif : définir la notion de diviseur d'un entier relatif

Il s'agit de trouver pour les b pour lesquels l'égalité $a = kb$ est vraie la valeur de k. L'élève s'apercevra que lorsque $a = 0$, l'égalité $a = kb$ est toujours vraie. L'enseignant devra lui-même le vocabulaire de diviseur.

On dit que b divise a ou que b est un diviseur de a ou que a est divisible par b, s'il existe un entier relatif k tel que : $a = kb$.

Exercices de fixation

Exercice 1

Réponse

1) Vrai ; 2) Vrai ; 3) Faux.

Exercice 2

1) $24 = 4 \times 6$; 2) Ce sont : $-6;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 6.$ 3) Ce sont : $-11; -1; 1; 11.$

Activité 13

Objectif : Donner une propriété des diviseurs d'un entier relatif

1) b divisant a, il existe un entier relatif k tel que : $a = kb$. L'entier k est non nul car a est non nul. Par suite $|k|$ est un entier naturel supérieur ou égal à 1. On en déduit que : $|b| \leq |a|$.
2) Il y a un nombre fini d'entiers relatifs dont la valeur absolue est inférieure ou égale à $|a|$. Ce sont les entiers compris (au sens large) entre $-|a|$ et $|a|$. (Ils sont au nombre de $2|a| + 1$).

Exercices de fixation

Exercice

$a|b$, d'où : $|a| \leq |b|$. De même : $b|a$, par suite : $|b| \leq |a|$. On en déduit que : $|a| = |b|$. D'où le résultat.

Activité 14

Objectif : Fournir des propriétés complémentaires pratiques de la divisibilité

a divisant b et c, il existe des entiers relatifs k et k' tels que : $b = ka$ et $c = k'a$. On en déduit que :

$pb + qc = (pk + qk')a$. D'où le résultat.

Exercice de fixation

Exercice

Si d est un diviseur commun à $3n + 5$ et $2n + 3$, alors d divise $2(3n + 5) - 3(2n + 3)$. Par suite d divise 1. D'où le résultat.

Remarque

L'astuce dans ces cas est de choisir des entiers relatifs p et q de telle sorte que $p(3n + 5) + q(2n + 3)$ soit indépendant de n.

1. **Congruence modulo n**

Activité 15

Objectif : Introduire la notion de congruence

Après l'activité, c'est l'enseignant qui donne la définition de la congruence modulo n et précise la notation.

Exercices de fixation

Exercice

Solution

1. $2-(-1)=3$ et $3=1\times 3$, d'où : 2 est congru à -1 modulo 3.
2. $14-32=-18$ et $-18=-3\times 6$, d'où : 14 est congru à 32 modulo 6.

Exercice 2

a congru à 0 modulo n si et seulement si il existe un entier relatif k tel que $a=kn$.

D'où le résultat.

Activité 16

Objectif : démontrer que la relation « …est congru… » est une relation d'équivalence

Soit n est un entier naturel non nul et a, b et c des entiers relatifs. Démontre que :

1) et 2) sont évidents.

3) $a \equiv b\ [n]$ et $b \equiv c[n]$, il existe deux entiers k et k' tels que : $a-b=kn$ et $b-c=k'n$.

Or : $a-c=(a-b)+(b-c)$, donc : $a-c=(k+k')n$. D'où le résultat.

Exercice de fixation

Exercice 1

Réponse

1) Vrai ; 2) Vrai ; 3) Faux.

Exercice 2.

$c \equiv b\ [n]$, d'où : $b \equiv c\ [n]$. Par suite :

$a \equiv b\ [n]$ et $b \equiv c\ [n]$, alors $a \equiv c\ [n]$

Activité 17

Objectif : Caractériser la congruence à l'aide du reste dans la division euclidienne

On écrit : $a=nq+r$ et $a'=nq'+r'$. Par suite : $a \equiv r[n]$ et $a' \equiv r'[n]$.

Sens direct

$a' \equiv a[n]$ et $a \equiv r[n]$, donc $a' \equiv r[n]$;puis : $r \equiv a'[n]$ et $a' \equiv r'[n]$, donc : $r \equiv r'[n]$.

Réciproque

$a \equiv r[n]$ et $r \equiv r'[n]$, donc : $a \equiv r'[n]$; puis $a \equiv r'[n]$ et $r' \equiv a'[n]$, donc : $a' \equiv a[n]$.

Exercice de fixation

Exercice

Solution

Par contraposition.

Activité 18 : Congruence et opérations dans $\mathbb{Z}$

Objectif : Etudier la compatibilité de la congruence avec l'addition et la multiplication dans $\mathbb{Z}$

1) $a \equiv a'$ $[n]$ et $b \equiv b'$ $[n]$, on déduit qu'il existe k et k' entiers relatifs tels que : $a = a' + kn$ et $b = b' + k'n$. D'où : $a + b = a' + b' + (k + k')n$. Par suite : $a + b \equiv a' + b'$ $[n]$.
2) $a \equiv a'$ $[n]$ et $b \equiv b'$ $[n]$, il existe k et k' entiers relatifs tels que : $a = a' + kn$ et $b = b' + k'n$. D'où : $ab = a'b' + (a'k' + b'k + kk'n)n$. Par suite : $a \times b \equiv a' \times b'$ $[n]$.
3) Faites un raisonnement par récurrence sur k en utilisant 2).

Exercices de fixation

Exercice

Solution

1. $a \equiv 4[5]$ et $b \equiv 3[5]$, d'où : $a + b \equiv 7$ [5]. Or : $7 \equiv 2$ [5], donc : $a + b \equiv 2$ [5].
2. $a \equiv b$ $[n]$ et $-1 \equiv -1$ [3], par suite : $(-1) \times a \equiv (-1) \times b$ $[n]$. D'où le résultat.
3. $a \equiv 5$ [9] et $b \equiv 7$ [9], d'où : $ab \equiv 5 \times 7$ [9]. Or : $35 \equiv 8[9]$, donc : $ab \equiv 8$ [9].
4. $a \equiv 3$ [12], d'où : $a^3 \equiv 3^3$ [12]. Or : $27 \equiv 3$ [12], donc : $a^3 \equiv 3$ [12].

5.Critères de divisibilité

Activité 19

Objectif : Utiliser la congruence pour justifier les critères de divisibilité.

1) a) $10 \equiv 0[2]$, d'où pour tout entier naturel k non nul, $10^k \equiv 0$ [2]. Par suite : $x \equiv a_0$ [2].
   b) x est divisible par 2 si et seulement si a_0 est congru à 0 modulo 2. C'est-à-dire si et seulement si a_0 est de la forme $2k, k = 0, 1, 2, 3, 4$. Autrement dit 2 si et seulement si x se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8.

2) a) Evident

b) $10 \equiv 1$ [3], d'où pour tout entier naturel k, $10^k \equiv 1[3]$. Par suite : $x \equiv a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ [3].

Par suite x est divisible par 3 si seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

3) Démarche analogue au 2).

4) a) Evident.

b) $10 \equiv -1$ [11], d'où pour tout entier naturel k, $10^k \equiv (-1)^k[11]$.

Par suite x est divisible par 11 si et seulement si $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n$ est divisible par 11.

5)a) $10 \equiv 0$ [5], d'où pour tout entier naturel k non nul, $10^k \equiv 0[5]$. Par suite : $x \equiv a_0$ [5].

Par suite x est divisible par 5 si et seulement si a_0 est congru à 0 modulo 5. C'est-à-dire si et seulement si x se termine par 0 ou par 5.

b) Même démarche que précédemment.

x est divisible par 10 si et seulement si a_0 est congru à 0 modulo 10. C'est-à-dire si et seulement si x se termine par 0.

1) a) $10^2 \equiv 0\ [25]$, d'où que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, $10^k = 10^2 \times 10^{k-2}$. Par suite : $10^k \equiv 0\ [25]$.

b) On a : $x \equiv a_0 + a_1 10\ [25]$. On a : $a_0 + a_1 10 = \overline{a_1 a_0}^{10}$. D'où : $x \equiv \overline{a_1 a_0}^{10}\ [25]$.

L'entier naturel x est donc divisible par 25 si et seulement si $\overline{a_1 a_0}^{10} \equiv 0\ [25]$. C'est-à-dire si et seulement s'il existe un entier naturel k tel que $\overline{a_1 a_0}^{10} = 25k$. Il n'y a que deux chiffres a_0 et a_1. Par suite $k = 0, 1, 2, 3$. On en déduit que x est divisible par 25 si et seulement si il est terminé par 00, 25, 50 ou 75.

2) Même démarche que 6).

Après l'exécution de chaque consigne, faites énoncer le critère de divisibilité par les élèves.

Exercices de fixation

Exercice1

Réponse

1) Vrai ; 2) Faux ; 3) Faux ; 4) Vrai ; 5) Vrai

Exercice 2

Réponse

1) Vrai ; 2) Faux ; 3) Vrai ; 4) Vrai ; 5) Vrai.

III. Nombres premiers

1. Définition et propriétés

Activité 20

Objectif : Définir les nombres premiers dans ℕ

1) Laissez traiter la consigne
2) La caractérisation est : ces diviseurs sont 1 et le nombre lui-même
   A la fin de la deuxième consigne, l'enseignant dit : « Ces nombres qui ont exactement deux diviseurs positifs sont dits premiers.» Il peut demander aux élèves d'énoncer la définition d'un nombre premier.

On dit qu'un nombre entier naturel est premier s'il admet exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.

Exercices de fixation

Réponse

1) Vrai ; 2) Faux ; 3) Faux.

Activité 21

Objectif : Il s'agit de prouver que tout entier naturel plus grand que 1 admet au moins un diviseur premier.

1) Prendre n.
2) a) A contient n, donc n'est pas vide.
   b) A est une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc possède un plus petit élément d.
   c) Supposons que d ne soit pas premier. Dans ce cas d admet un diviseur d' qui vérifie : $1 < d' < d$. Ce qui contredit le choix de d. Par suite d est premier.
3) Fais énoncer la propriété par les élèves.

Exercices de fixation

Réponse

Consultez la liste des nombres premiers.

Activité 22

On se propose de déterminer l'ensemble des nombres premiers.

1) a) Aucun des nombres p_i ne peut diviser N car N n'est pas factorisable.
   b) Si N n'était pas premier, le plus petit diviseur de N serait premier. Or aucun des nombres premiers ne divise N d'après ce qui précède. Par suite N est premier.

2) L'hypothèse qu'il y a un nombre fini de nombres premiers est absurde. Elle est à rejeter.

Il existe une infinité de nombres premiers.

Exercice de fixation

Exercice

1) Vrai ; 2) Faux ; 3) Faux.

Activité 23

Objectif : Fournir des critères de primalité

1) On a déjà établi que si n est un entier naturel plus grand que 1, alors le plus petit diviseur de n plus grand que 1 est premier. Par suite d est premier.
2) a) d étant un diviseur de n, il existe un entier naturel k vérifiant : $n = dk$. L'entier d étant le plus petit des diviseurs de n,(est un diviseur de n) on a : $d \leq k$.
   b) $d \leq k$, d'où : $d^2 \leq dk$. Par suite : $d^2 \leq n$.

   c) Si n est un entier naturel plus grand que 1 non premier, alors il admet au moins un diviseur premier d vérifiant : $1 < d^2 \leq n$.

3) a) C'est la contraposée de 2)c).

b) Laissez les élèves formuler le critère : « Si un nombre entier naturel n n'admet aucun diviseur premier d vérifiant $1 < d \leq \sqrt{n}$, alors n est premier. »

4) a) Supposons que $p^2 > n$.
On a : $pq < pq + r < p^2$. D'où : $pq < p^2$. Par suite : $q < p$.
Réciproquement supposons que $q < p$.
On a : $q + 1 \leq p$, d'où : $pq + p < p^2$. Or : $pq + r < pq + p$, donc : $p^2 > n$.
b) Si dans les divisions successives sans reste nul de n par les nombres premiers p, on arrive à un quotient q inférieur à p alors n est premier.
c) Si r est nul, alors $n = pq$ et n n'est pas premier.
Si dans les divisions successives de n par les nombres premiers p, on arrive à un premier reste nul alors n n'est pas premier.

Exercices de fixation

1. Démontre que le nombre entier naturel 163 est premier.
2. Détermine si les entiers naturels suivants sont premiers :
   a) 491 ; b) 1789 ; c) 2021 ; d) 2419 ; e) 911.

Solution

1) On a : $\sqrt{163} \approx 12{,}76$. Les nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{163}$ sont : 2, 3, 5, 7, 11.

163 n'est pas divisible par 2 car son chiffre des unités 3 n'est pas pair ;

163 n'est pas divisible par 3 car la somme de ses chiffres qui est 10 n'est pas divisible par 3 ;

163 n'est pas divisible par 5 car son chiffre des unités n'est ni 0 ni 5;

163 n'est pas divisible par 7 car le reste de la division euclidienne de 163 par 7 est 2, qui n'est 0 : $163 = 7 \times 23 + 2 \; et \; 0 < 2 < 7$;

163 n'est pas divisible par 11 car : $3 - 6 + 1 = -2$, et -2 n'est pas divisible par 11.

Le nombre 163 n'étant divisible par aucun des nombres premiers inférieurs à $\sqrt{163}$ est premier.

2. (Vous devez apporter les justifications nécessaires)

a) 491 est premier ;

b) 1789 est premier ;

c) 2021 n'est pas premier ;

d) 2419 n'est pas premier ;

e) 911 est premier.

2. Décomposition en produit de facteurs premiers

Activité 24

Objectif : Démontrer le théorème de décomposition en produit de facteurs premiers.

1) $1350 = 2 \times 3^3 \times 5^2$.
2) a) A est non vide car 1 appartient à A. A est fini car l'ensemble des diviseurs d'un entier non nul est fini. A est donc majoré. Par suite admet un plus grand élément.
   b) $p_1^{\alpha_1}$ divisant n, il existe un entier naturel n_1 tel que : $n = p_1^{\alpha_1} n_1$. L'entier n_1 n'est pas nul car n n'est pas nul.
3) Dans ce cas $n = p_1^{\alpha_1}$.
4) a) $p_2^{\alpha_2}$ divisant n_1, il existe un entier naturel n_2 tel que : $n_1 = p_2^{\alpha_2} n_2$. L'entier n_2 n'est pas nul car n_1 ne l'est pas. On en déduit que : $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} n_2$.
   b) De la relation : $n_1 = p_1^{\alpha_1} n_2$, il résulte que n_2 divise n_1. On a également : $n = (p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2 - 1} n_2) p_2$, car α_2 est supérieur ou égal à 1. Par suite p_2 divise n.
   c) n_1 étant un diviseur de n et n_2 un diviseur de n_1, on a : $n \geq n_1 \geq n_2 \geq 1$.
   De la relation $n = p_1^{\alpha_1} n_1$, on en déduit que $n > n_1$, car p_1 étant premier est supérieur strictement à 1, $p_1^{\alpha_1}$ est strictement supérieur à 1 ($\alpha_1 \neq 0$). De la même manière, on justifie que : $n_1 > n_2$.
   D'après 3)b), p_2 divise n, d'où p_2 est supérieur où égal p_1 car p_1 est le plus petit diviseur de n d'après 1)a). Si p_2 était égal à p_1, on aurait : $n = p_1^{\alpha_1 + \alpha_2} n_2$, d'après 3)a). Dans ce cas, $p_1^{\alpha_1 + \alpha_2}$ divise n. α_2 étant non nul, cela contredirait le choix de α_1 d'après 1)a). On en déduit que :
   $p_2 > p_1$..
5) a) (n_i) étant une suite étant strictement décroissante d'entiers naturels, il existe un entier naturel k non nul tel que : $n_{k-1} > 1$ et $n_k = 1$.
   b) On a $n = p_1^{\alpha_1} n_1$ (1) ; $n_1 = p_2^{\alpha_2} n_2$ (2) ; … ; $n_{k-1} = p_k^{\alpha_k} n_k$ (k).
   En faisant membre à membre le produit de ces k égalités et en simplifiant, on obtient : $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$. (Aucun n_i n'est nul).

Demandez aux élèves de formuler la conclusion de cette activité.

Exercices de fixation

Exercice

Solution

a) $120 = 2^3 \times 3 \times 5$; b) $6615 = 3^3 \times 5 \times 7^2$; c) $104 = 2^3 \times 13$.

3 DES QUESTIONS D'ÉVALUATION

1. Comment faire une démonstration par récurrence ?

Exercice non corrigé

1) **Démontre par récurrence que pour tout entier naturel, $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.**

Solution

Posons : $A_n = 3^{2n} - 2^n$.

$A_0 = 0$, la propriété est donc vraie pour $n = 0$.

Pour établir l'hérédité, il faut démontrer que :

$$\begin{aligned} A_{n+1} - A_n &= 3^{2n+2} - 2^{n+1} - 3^{2n} + 2^n \\ &= 3^{2n}(3^2 - 1) - 2^n(2 - 1) \\ &= 7 \times 3^{2n} + A_n \end{aligned}$$

D'où : $A_{n+1} = 7 \times 3^{2n} + 2A_n$.

Ensuite il suffira d'utiliser ce résultat.

2) Comment utiliser la congruence pour déterminer les restes d'une division euclidienne ?

Exercice non corrigé

Détermine, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne 7^n par 10.

Solution

Si $n = 4k$, alors le reste est 1 ;

Si $n = 4k + 1$,alors le reste est 3 ;

Si $n = 4k + 2$, alors le reste est 9 ;

Si $n = 4k + 3$, alors le reste est 7.

4 MES SÉANCES D'EXERCICES

Exercices de fixation

Ensemble ℕ des entiers naturels

1. Solution

$a \leq b$, d'où : $ac \leq bc$; $c \leq d$, d'où : $bc \leq bd$. On en déduit que : $ac \leq bd$.

2. Solution

Démontrons que : $a + b - 1 \leq ab$.

$$\begin{aligned} a + b - 1 - ab &= (a-1) + b(1-a) \\ &= (a-1)(1-b) \end{aligned}$$

Comme a et b sont des entiers naturels non nuls, $a - 1$ est un entier naturel, et $1 - b$ est un entier relatif négatif ou nul. Par conséquent, $(a-1)(1-b)$ est un entier négatif ou nul. On en déduit que :

$a + b - 1 \leq ab$. Or par hypothèse, $ab < c$, donc : $a + b - 1 < c$. Par conséquent, d'après b) on a : $a + b \leq c$.

3. Solution

Soit P(n) la proposition : $S_n = \sum_{k=1}^{n} k \times k!$

1) On a : $1 \times 1! = 2! - 1$. Donc P(1) est vraie.

Démontrons que :

Pour tout entier naturel n non nul, $(P(n) \Longrightarrow P(n+1))$ vraie (Hérédité)

Pour tout entier naturel n non nul tel que P(n) est vraie, on a :

$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k \times k!$

$= S_n + (n+1) \times (n+1)!$

$= (n+1)! - 1 + (n+1) \times (n+1)!$, car $S_n = (n+1)! - 1$.

$= (n+2) \times (n+1)! - 1$.

$= (n+2)! - 1$.

L'hérédité est donc vérifiée.

On conclut que pour tout entier naturel n non nul, $\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$.

2) Pour tout entier relatif k non nul, on a : $k \times k! = (k+1-1) \times k!$. Ce qui donne : $k \times k! = (k+1)! - k!$. En ajoutant membre à membre les égalités pour $k = 1$ à $k = n$ ou en sommant sur k allant de 1 à n, on obtient le résultat demandé.

4. Solution

Soit P(n) : $\sum_{k=1}^{n} k \times (k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

On a $1 \times 2 = \frac{1 \times 2 \times 3}{3}$. Donc P(1) et vraie.

Pour tout entier naturel n non nul, (si P(n) alors P($n+1$)) vraie. (Hérédité)

Pour tout entier naturel n non nul tel que P(n) est vraie, on a :

$\sum_{k=1}^{n+1} k \times (k+1) = \sum_{k=1}^{n} k \times (k+1) + (n+1)(n+2)$.

D'où : $\sum_{k=1}^{n+1} k \times (k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2)$, car $\sum_{k=1}^{n} k \times (k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Par suite : $\sum_{k=1}^{n+1} k \times (k+1) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$.

La propriété est donc héréditaire.

On conclut que pour tout entier naturel n nul, $\sum_{k=1}^{n} k \times (k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

5. Solution

La partie entière de $\frac{129}{7}$ est 18. Par suite le quotient est 18. On a : $129 - 7 \times 18 = 3$. Le reste de cette division est 3.

6. Solution

La partie entière de $\frac{45}{80}$ est 0. Par suite le quotient est 0. On a : $45 - 80 \times 0 = 45$. Le reste de cette division est 45.

7. Solution

La partie entière de $\frac{59}{59}$ est 1. Par suite le quotient est 1. On a : $59 - 59 \times 1 = 0$. Le reste de cette division est 0.

8. Solution

a) $x = 4 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 3$
b) $x = 4 \times 5^3 + 2 \times 5^2 + 0 \times 5 + 3$
c) $x = 11 \times 12^4 + 10 \times 12^3 + 4 \times 12^2 + 8 \times 12 + 1$.

9. Solution

C'est le processus inverse des cas précédents.

a) $x = 5135$.
b) $x = 70$.
c) $x = 3059$.

10. Solution

Par les divisions successives, on obtient :

a) $x = \overline{1145}^{sept}$ ou $x = \overline{1145}^{7}$ ou simplement 1145 s'il n' y a pas de confusion.
b) $x = \overline{2240}^{5}$.
c) $x = \overline{40\text{BA}}^{12}$.

11. Solution

On peut transiter par la base 10.

a) $x = \overline{10210}^{3}$; b) $x = \overline{12332}^{4}$; c) $x = \overline{3\text{BAA}2}^{12}$

Ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs

12. Solution

Soit a un entier relatif positif. On a : $0 \leq a$. Il en résulte que $0 - a$ est un entier naturel.
Or : $0 - a = -a$ et $-a$ est l'opposé de a, donc $-a$ est un entier relatif positif.

13. Solution

On a :
$a \leq b$, d'où : $a + c \leq b + c$;
$c \leq d$, d'où : $b + c \leq b + d$.

14. Réponse

Le couple $(q; r)$ de quotient et reste est :

a) $(9\ ;\ 2)$.
b) $(-11{,}1)$.

c) $(-33{,}4)$.
d) $(-13{,}6)$.
e) $(-9{,}0)$.
f) $(-9{,}0)$.

15. Réponse
1 ; 2 ; -9 ; 18 ; 3.

16. Indication

Preuve par l'absurde.

17. Solution

Si d divise $5n + 2$ et $3n + 1$, alors d divise $3(5n + 2) - 5(3n + 1)$. Or,

$3(5n + 2) - 5(3n + 1) = 1$, donc d vaut 1.

18. Solution

On a : $a \equiv -6 \ [7]$. Or : $-6 \equiv 2 \ [8]$, donc : $a \equiv 2 \ [8]$. L'entier 2 vérifiant $0 \leq 2 < 8$, le reste de la division euclidienne de a par 8 est 2.

19. Evident

20. Solution

1) Faux. Car $2 \times 3 \equiv 0$ [6] mais $2 \not\equiv 0$ [6] et $3 \not\equiv 0$ [6].
2) Faux. $2 \times 6 \equiv 4$ [8] mais $6 \not\equiv 2$ [8].
3) Vrai. Car $2a \equiv 4$ [8] $\Longrightarrow \exists k,\ 2a = 4 + 8k$. Ce qui donne : $a = 2 + 4k$. D'où : $a \equiv 2$ [4].
4) Vrai. Car $4 - a \equiv 5$ [7] $\Longrightarrow a \equiv -1$ [7]. Or $6 \equiv -1$ [7], donc $a \equiv 6$ [7].

21. Solution

Le reste de la division euclidienne 5^{219} par 7 est 6.

22. Solution

$67 \equiv 1 \ [11] \Longrightarrow 67^{89} - 1 \equiv 0 \ [11]$.

23. Solution

Utilisez les critères.

24. Solution

$\sqrt{103} \approx 10{,}15$. Les nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{103}$ sont : 2, 3, 5, 7. L'entier 103, n'étant divisible par aucun d'eux, est premier.

25. Solution

Les nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{221}$ sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13. L'entier 221, étant divisible par 13, n'est pas premier.

26. Réponses

a) 2^6 ; b) $2^3 \times 3^2$; c) $2^4 \times 3^3 \times 11$.

Exercices de renforcement/Approfondissement

27. Solution

Soit l un entier naturel.

On a : $l + (l + 1) + \cdots + (l + 2p) = (2p + 1)(l + p)$. Car somme de $2p + 1$ termes d'une suite arithmétique de raison 1. D'où le résultat.

28. Solution

$a + b + c = (a + b) + c$. D'où : $a + b + c = 0 \Longrightarrow a + b = c = 0$. Par suite : $a = b = c = 0$.

La réciproque est évidente.

29. Solution

Faites un raisonnement par récurrence sur n.

30. Solution

Les diviseurs positifs de 25 sont : 1, 5, 25

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ et $x - y \leq x + y$. D'où : $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 25 \end{cases}$; $\begin{cases} x - y = 5 \\ x + y = 5 \end{cases}$

(13, 12) et (5, 0) sont les solutions.

31. Solution

Les diviseurs de 25 sont : $-25, -5, -1, 1, 5, 25$.

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. D'où : $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 25 \end{cases}$; $\begin{cases} x - y = 5 \\ x + y = 5 \end{cases}$; $\begin{cases} x - y = 25 \\ x + y = 1 \end{cases}$;

$\begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = -25 \end{cases}$; $\begin{cases} x - y = -5 \\ x + y = -5 \end{cases}$; $\begin{cases} x - y = -25 \\ x + y = -1 \end{cases}$

(13, 12), (5, 0), $(13, -12)$, $(-13, -12)$, $(-5, 0)$, $(-13, 12)$ sont les solutions.

32. Solution

1) $n^2 + 2n = n(n + 1) + n$. On a : $0 < n < n + 1$. Le reste est : n.
2) $7n + 15 = 2(3n + 2) + n + 11$.

Si $n \geq 5$, alors on a : $0 < n + 11 < 3n + 2$.

Si $0 < n \leq 4$, alors : $7n + 15 = 3(3n + 2) - 2n + 9$. On a : $0 < -2n + 9 < 3n + 2$.

Le reste est : $-2n + 9$.

33. Solution

1) $1000 \equiv 1\ [37] \Longrightarrow 10^{3n} \equiv 37\ [37]$.
2) $1002037 = 10^6 + 2 \times 10^3 + 37$, d'où : $1002037 \equiv 3\ [37]$.

34. Solution

Posons : $\mathrm{A}_n = 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$.

Soit P(n) la proposition : A_n est divisible par 17.

$\mathrm{A}_0 = 17$ et 17 est divisible par 17. P(0) est donc vraie (initialisation).

Démontrons que : Pour tout entier naturel n non nul, (si P(n) alors P($n+1$)) vraie. (Hérédité)

On a : $\mathrm{A}_{n+1} - \mathrm{A}_n = 7\mathrm{A}_n + 17 \times 5^{2n+1}$; d'où : $\mathrm{A}_{n+1} = 8\mathrm{A}_n + 17 \times 5^{2n+1}$.

Si A_n est divisible par 17, alors $8\mathrm{A}_n + 17 \times 5^{2n+1}$ est divisible par 17. L'hérédité est donc vérifiée.

Conclusion : Pour tout entier naturel n, $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17.

35. Solution

$3548 \equiv 8\ [10]$, car tout nombre est congru au chiffre des unités modulo 10. Par suite :

$3548^9 \equiv 8^9\ [10]$. Or : $8^9 \equiv 8\ [10]$, donc : $3548^9 \equiv 8\ [10]$.

De même : $2537^{31} \equiv 3\ [10]$. Par suite : $3548^9 \times 2537^{31} \equiv 8 \times 3[10]$. Finalement :

$3548^9 \times 2537^{31} \equiv 4[10]$. Le chiffre des unités de $3548^9 \times 2537^{31}$ est donc 4.

36. Solution

Soit b cette base de numération si, elle existe. Compte tenu du fait que ce nombre s'écrit 30407 dans la base b, si b existe doit être supérieur ou égale à 8 car le plus chiffre que figure dans ce nombre est 7.

On doit avoir : $3\, b^4 + 4b^2 + 7 = 12551$.

Une seule solution convient : c'est 8. La base cherchée est 8.

37. Solution

$1a8b2$ est divisible par 4 si et seulement si $10b + 2$ est divisible par 4.

$10b + 2$ est divisible par 4 si et seulement si $2b + 2$ est divisible par 4.

$2b + 2$ est divisible par 4 si seulement si $b + 1$ est divisible par 2, c'est-à-dire si et seulement si b est impair.

$1a8b2$ est divisible par 9 si et seulement si $a + b + 2$ est divisible par 9.

On obtient :

$b = 1$ et $a = 6$; $b = 3$ et $a = 4$; $b = 5$ et $a = 2$; $b = 7$ et $a = 0$ ou $a = 9$; $b = 9$ et $a = 7$.

38. Solution

Il faut d'abord déterminer cette base b ($b \geq 7$):

On a : $(3\,b + 6) + (4b + 5) = b^2 + 3$.

Cette base est 8.

Ensuite, faire le produit dans cette base. On peut transiter par la base 10 ou le faire directement.

On trouve : 36 × 45 = 2126

39. Solution

Soit b cette base, si elle existe. Dans ce cas, b doit être supérieure ou égal à 4.

On doit avoir :

$(b^2 + 2b + 2)(\,b^2 + 3) = \ b^4 + 3b^3 + b^2 + 2b + 1$. Après simplifications, on obtient :

$b^3 - 4b^2 - 4b - 5 = 0$ (*).

D'où : $b(b^2 - 4b - 4) = 5$. Par suite, b est un diviseur de 5.

5 étant un nombre premier, b vaut 1 ou 5. Or, b doit être supérieure ou égal à 4, donc le seul candidat qui reste est 5.

Question : 5 convient-il ? Je vous laisse le temps de vérifier que 5 est solution de (*).

La base cherchée est 5.

40. Solution

$x = \sum_{k=0}^{n} a_k\, b^k$

a_n étant non nul est supérieur ou égal à 1. On en déduit que : $x \geq b^n$.

Or pour tout k, $a_k \leq b - 1$, donc : $x \leq b^{n+1} - 1$. On en déduit que : $x < b^{n+1}$. D'où le résultat.

41. Solution

$39678472 \ = \ 3967 \times 10^4 + 8472$; $8752338 \ = \ 875 \times 10^4 + 2338$.

$39678472 \times 8752338 = 347 \times 10^{12} + 2793 \times 10^8 + 9826 \times 10^4 + 7536$

D'où : $39678472 \times 8752338 = 347\ 279\ 398\ 267\ 536$.

42. Solution

Soit $x = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$ un entier naturel écrit en base 10.

x est divisible par 4 si et seulement si $a_1 a_0$ est divisible par 4, c'est-à-dire si et seulement si $10a_1 + a_0$ est divisible par 4.

$10a_1 + a_0 = 2a_1 + a_0 + 4 \times (2a_1)$. D'où le résultat.

43. Solution

1) Il existe un entier relatif a tel que $n = a^2 + (a+1)^2$. Par suite : $n = 4a^2 + 4a + 1$. On en déduit que : $2n - 1 = (2a+1)^2$.
2) Remontez les calculs.

44. Solution

Soit n un nombre impair. Il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$. Or, $2k + 1 = (k+1)^2 - k^2$, donc n est différence de carrés de deux entiers consécutifs

45. Solution

Si d un diviseur positif $2n + 3$ et $3n + 2$, alors d divise $3(2n+3) - 2(3n+2)$. D'où d divise 5. D'où le résultat.

46. Solution

Pour tout entier relatif n, on a : $n \equiv 0, 1, 2, 3, 4$ modulo 5. D'où : $n \equiv 0, \pm 1, \pm 2$ modulo 5. Car $4 \equiv -1$ modulo 5 et $3 \equiv -2$ modulo 5. Par suite : $n^2 \equiv 0, 1, 4$ modulo 5. On en déduit que : $n^2 \equiv 0, 1, -1$ modulo 5. D'où le résultat.

47. Solution

Posons : $a = 999888777666555444333222111000$.

Utilisons la base 10^3 compte tenu du nombre de chiffre de a.

$a = 999 \times 10^{27} + 888 \times 10^{24} + 777 \times 10^{21} + 666 \times 10^{18} + 555 \times 10^{15} + 444 \times 10^{12} + 333 \times 10^9 + 222 \times 10^6 + 111 \times 10^3 + 000$.

On a : $10^0 \equiv 1\ [7]$; $10^1 \equiv 3\ [7]$; $10^2 .. \equiv 2\ [7]$; $10^3 \equiv 6\ [7]$; $10^4 \equiv 4\ [7]$; $10^5 \equiv 5\ [7]$; $10^6 \equiv 1\ [7]$. D'où: $10^{6k} \equiv 1\ [7]$; $10^{6k} \equiv 1\ [7]$; $10^{6k+1} \equiv 3\ [7]$; $10^{6k+2} \equiv 2\ [7]$; $10^{6k+3} \equiv -1\ [7]$; $10^{6k+4} \equiv 4\ [7]$; $10^{6k+5} \equiv 5\ [7]$.

D'où : $a \equiv 999 \times (-1) + 888 \times 1 + 777 \times (-1) + 666 \times 1 + 555 \times (-1) + 444 \times 1 + 333 \times (-1) + 222 \times 1 + 111 \times (-1)\ [7]$. On obtient : $a \equiv -555\ [7]$. Or, $5 \equiv -555\ [7]$, donc : $a \equiv 5\ [7]$.

Le reste de la division euclidienne de 999888777666555444333222111000 par 7 est 5.

48. Solution

Si $n \equiv 0\ [5]$, le reste est 1 ;

Si $n \equiv 1\ [5]$, le reste est 4;

Si $n \equiv 2\ [5]$, le reste est 5;

Si $n \equiv 3\ [5]$, le reste est 9 ;

Si $n \equiv 4\ [5]$, le reste est 3.

49. Solution

Si $n \equiv 0\ [4]$, le reste est 1 ;

Si $n \equiv 1$ [4], le reste est 3;

Si $n \equiv 2$ [4], le reste est 4;

Si $n \equiv 3$ [4], le reste est 2.

50. Solution

$5 \equiv -1\ [3] \Longrightarrow 5^n \equiv (-1)^n\ [3]$; d'où : $5^{2n} \equiv 1\ [3]$. Par suite : $5^{2n} + 5^n + 1 \equiv 2 + (-1)^n\ [3]$.

Si n est pair alors le reste est 3 ; si n est impair alors le reste est 1.

51. Solution

$3^3 \equiv 1\ [13]$, donc : $\forall k \in \mathbb{N}, 3^{3k} \equiv 1\ [13]$.

En posant : $n = 3k + r$, avec $r \in \{0;\ 1; 2\}$, on a : $3^{2n} + 3^n + 1 \equiv 3^{2r} + 3^r + 1\ \ [13]$.

Si r vaut 1 ou 2, c'est-à-dire si n n'est pas multiple de 3, alors $3^{2n} + 3^n + 1 \equiv 0\ \ [13]$;

Si n n'est pas multiple de 3, alors $3^{2n} + 3^n + 1 \equiv 3\ [13]$; le reste est donc 3.

52. Solution

1) $n + 1 = (n - 5) + 6;\ n + 1 \equiv 0\ [n - 5] \Leftrightarrow\ 6 \equiv 0\ [n - 5]$;
   $n + 1 \equiv 0\ [n - 5]\ \Leftrightarrow (n - 5)|6$. Les diviseurs positifs de 6 sont : $1, 2, 3, 6$. Par suite les valeurs de n sont : $6, 7, 8, 11$.
2) $n + 8 = (n - 2) + 10;\ \Leftrightarrow 10 \equiv 0\ [n - 2]$;
   $n + 8 \equiv 0\ [n - 2]\ \Leftrightarrow (n - 2)|10$. Les diviseurs positifs de 10 sont : $1, 2, 5, 10$. Par suite les valeurs de n sont : $3, 4,\ 7,\ 12$.
3) $3n + 27 = 3(n + 3) + 18$; $3n + 27 \equiv 0\ [n + 3] \Leftrightarrow (n + 3)|18$. Les diviseurs positifs de 18 sont : $1, 2, 3, 6,\ 9, 18$. Les valeurs de n cherchés sont : $-2, -1, 0, 3, 6, 15$.

53. Solution

1) $u_1 = 64, u_2 = 314, u_3 = 1514, u_4 = 7814$ et $u_5 = 3964$.
2) Je constate que les termes de rang pair se terminent par 14 et ceux de rang impair par 64.
3) a) Pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = u_n + 4(6u_n - 9)$. Par suite : $u_{n+2} \equiv u_n$ [4].
   b) Faites une démonstration par récurrence en utilisant 3)a).

4) a) Ne pas distinguer deux cas. Utilisez directement la définition de la suite (u_n).

   b) Faites une démonstration par récurrence.

   c) Utilisez 4)a) et 4)b).

5) Soit a_0 et a_1 respectivement le chiffre des unités et des dizaines de u_n. On a : $u_n \equiv \overline{a_1a_0}$ [100] (1). Par suite : $2u_n \equiv 2\overline{a_1a_0}$ [100]. D'après 4)c), on en déduit que : $2\overline{a_1a_0} \equiv 28$ [100]. Par suite, il existe un entier relatif s tel que : $2\overline{a_1a_0} = 28 + 100s$. D'où : $\overline{a_1a_0} = 14 + 50s$, avec $s = 0$ ou 1. On a : $\overline{a_1a_0} = 14$ ou $\overline{a_1a_0} = 64$. De la relation (1), on déduit que pour tout , $u_n \equiv \overline{a_1a_0}$ [4], car 4 divise 100. Or $14 \equiv 2$ [4] et $64 \equiv 0$ [4], donc d'après 3) b) les termes de rang pair de la suite (u_n) se terminent par 14 et ceux de rang impair par 64.

54. Solution

1) 2 et 5. Si par exemple 2 apparait dans la décomposition en produit de facteurs premiers du rep-unit N_k, alors N_k est divisible par 2. Dans ces conditions, N_k est terminé par 0, 2, 4, 6 ou 8. Ce qui est faux. Faites de même pour 5.
2) 3 apparait dans la décomposition en produit de facteurs premiers du rep-unit $N_k$si et seulement si N_k est divisible par 3. C'est-à-dire si et seulement si la somme des chiffres de N_k est divisible par 3. Or cette somme vaut k, donc si et seulement si k est divisible par 3.
3) a) $N_k = \sum_{i=1}^{k-1} 10^i$.
   b) $N_k = \frac{10^k-1}{9}$. D'où : $9N_k = 10^k - 1$.

4) a) $10^0 \equiv 1\ [7]$; $10^1 \equiv 3\ [7]$; $10^2 \equiv 2\ [7]$; $10^3 \equiv 6\ [7]$; $10^4 \equiv 4\ [7]$; $10^5 \equiv 5\ [7]$; $10^6 \equiv 1\ [7]$. Il en résulte que si n est divisible par 6, c'est-à-dire $n = 6p$, alors $10^{6p} \equiv 1\ [7]$.

Réciproquement supposons que $10^n \equiv 1\ [7]$. On fait la division euclidienne de n par 6.

$n = 6p + r$, avec $0 \leq r < 6$.

$10^{6p+r} \equiv 10^r\ [7]$. D'après ce qui précède, on a $r = 0$. Par suite n est divisible par 6.

b) $N_k \equiv 0\ [7] \Longrightarrow 9N_k \equiv 0\ [7] \Longrightarrow 10^k \equiv 1\ [7] \Longrightarrow k$ est divisible par 6 d'après a).

La réciproque est vraie, en utilisant le théorème de Gauss. On pourra la faire dans la deuxième leçon d'arithmétique.

55. Solution

1) (3, 5) ; (11, 13) ; (17, 19), (41, 43).
2) a) n étant premier est congru à 1 ou 2 modulo 3.

Si n est congru à 1 modulo 3 alors $n + 2$ est congru à 0 modulo 3, donc ne peut être premier. Par suite n est congru à 2 modulo 3.

b) Si $(n, n + 2)$ est un couple de nombres premiers jumeaux alors n est congru à 2 modulo 3 d'après ce qui précède. Par suite $n + 4$ est congru à 0 modulo 3. Il ne peut donc être premier.

c) $n^2 + 2n = n(n + 2)$. $n^2 + 2n$ est un produit de nombres premiers dont les diviseurs sont : 1, $n, n + 2$ et $n^2 + 2n$.

Réciproquement si $n^2 + 2n$ a exactement les quatre diviseurs cités alors n est premier. Car n est le plus petit des diviseurs cités qui est plus grand que 1. Supposons que $n + 2$ ne soit pas premier alors il admettrait un diviseur d vérifiant : $1< d < n + 2$. Dans ce cas d divise $n(n + 2)$. d vaudrait forcément n qui est le seul diviseur de $n^2 + 2n$ qui vérifie la double inégalité plus écrite haut. n divisant $n + 2$ et n divise $n + 2 - n$, donc divise 2. Etant premier, n vaut 2. Contraire à l'hypothèse $n > 3$. Par suite $n + 2$ est premier. D'où le résultat.

56. Solution

$\forall n \geq 4, n^2 + n - 6\ (n-2)(n+3)$. On a : $n - 2 > 1$ et $n + 3 > 1. n^2 + n - 6$ s'écrivant comme produit de deux entiers naturels plus grand que 1, ne peut être premier.

57. Solution

$n^4 + 64 = (n^2 + 8)^2 - 16n^2$.

$(n^2 + 8)^2 - 16n^2 = (n^2 - 4n + 8)(n^2 + 4n + 8)$. De plus, $n^2 - 4n + 8 = (n-2)^2 + 4$; d'où $n^2 - 4n + 8$ et $n^2 + 4n + 8$ sont supérieurs strictement à 1. Par suite $n^4 + 64$ pouvant s'écrire pour tout n comme produit de deux entiers naturels supérieurs à 1 n'est pas premier

58. Solution

1) Il suffit de trouver un nombre premier de la forme $4k + 3$ pour justifier que X est non vide. Pour $k = 0$, $k = 1$ ou $k = 2$, on obtient 3 ; 7 ; 11 qui sont tous premiers.
2) Soit deux éléments de la forme indiquée : appelons-les $4p + 3$ et $4q + 3$.

On a : $(4p + 3)(4q + 3) = 4(4pq + p + q) + 1$. En posant : $k = 4pq + p + q$, on a le résultat.

3) Le seul nombre entier naturel pair qui est premier est 2. Tous les autres nombres premiers sont forcément impairs. Ils sont donc de la forme $4k + 1$ ou $4k + 3$. L'entier a n'est pas pair. Supposons par l'absurde que a n'admet pas de diviseur premier de la forme $4k + 3$. Dans ces conditions, tous les diviseurs de a sont de la forme $4k + 1$. D'après la consigne 2) a s'écrit sous la forme $4h + 1$. Par suite, $a \equiv 1\ [4]$. Or $a = 4p_1 \times \cdots \times p_n - 1$, donc
$a \equiv -1\ [4]$. Mais 1 n'est pas congru à -1 modulo 4. D'où contradiction.

Par suite, a admet un diviseur premier de la forme $4k + 1$.

4) Raisonnons par l'absurde que X ne peut être fini. Supposons que X soit fini. Dans ce cas, il contient tous les nombres premiers de la forme $4k + 3$ comme indiqué au 3). D'après ce 3), a admet un diviseur premier p de la forme $= 4k + 3$. On en déduit que : $a \equiv 0\ [p]$. L'entier p étant de la forme $4k + 3$ est un élément de X. Il est par conséquent l'un des p_i. Par suite :
$a \equiv -1\ [p]$. Le nombre p étant premier est supérieur ou égal à 2, on ne peut donc pas avoir : $0 \equiv -1\ [p]$. D'où contradiction. Par suite X a une infinité d'éléments. Il existe donc une infinité de nombres premiers de la forme $4k + 3$.

NB. Il n'est pas dit que tous les nombres de la forme $4k + 3$ sont premiers. Par exemple $k = 3$ et

$k = 6$ où on trouve 15 et 27 qui ne sont pas premiers.

SITUATIONS COMPLEXES

59. La boite d'allumettes

Désignons par A et B deux joueurs quelconques. Si A joue le premier, pour que B perde, il faut qu'il prenne la dernière allumette qui reste dans la boite en fin de partie. Si A prend un certain nombre d'allumettes au départ en jouant le premier, B prend b allumettes à son tour.

Si $1 \leq b \leq 4$, alors $1 \leq 5 - b \leq 4$. A prend ensuite $5 - b$ allumettes après la prise des b allumettes par B. Après donc la première prise de A, si B prend des allumettes, A contrôle la situation de telle sorte à choisir pour que le total des allumettes prises par les deux soit 5. Pour que A gagne il faut que le nombre total d'allumettes après cette étape soit congru à 1 modulo 5. On répète le processus.

La stratégie efficace pour que Pierre gagne à coup sûr est la suivante :

Pierre joue le premier et prend 4 allumettes au départ. Le nombre total d'allumettes restant dans la boite est 36 qui est congru à 1 modulo 5. Quand Jean tire ses allumettes, Pierre prend ensuite un nombre tel que la somme avec ce que Jean vient de prendre soit 5. Ainsi de suite. Au bout d'un moment, il restera une allumette dans la boite après la prise de Pierre. Jean cette allumette prend et perd la partie.

60. **Le code bancaire**

1) La préoccupation de l'agent est de déterminer la Clé RIB.
2) Les parties du cours sollicitées sont :
    a. Numération décimale ;
    b. Division euclidienne ;
    c. Congruence.

3) Solution argumentée au problème de l'agent

Il s'agit d'écrire N dans sa décomposition en base 10. Mais comme il y a assez de chiffres, on va procéder à des regroupements en suivant la structure de numéro de compte. Mais ce regroupement bien que facilitant les calculs n'est pas nécessaire. On peut écrire :

N = 23104×10^{18}+ 15231×10^{14}+ 00006462113×10^{2}+R. Par suite, on a :

N = A× 10^{18} +B× 10^{13}+ C× 10^{2} + R

On va déterminer les restes de la division euclidiennes des nombres A, B, C par 97 puisqu'il faut que N soit divisible par 97.

23104 = 97×238 +18, d'où : A ≡ 18 [97]

15231 = 97× 157 + 2, d'où : B ≡ 2 [97]

64621113 = 97×66619 + 70, d'où : C ≡ 70 [97]

On justifie que : $10^{2} \equiv 3$ [97], $10^{12} \equiv 50$ [97] et $10^{18} \equiv 89$ [97]. Par suite :

N ≡ 1842 + R [97]. Comme 1842 ≡ 96 [97], on a : N ≡ 96 + R [97].

D'où : N ≡ 0 [97] ⟺ R ≡ 1 [97].

Par suite R contient deux chiffres : 0 et 1. En conclusion, on a : R = 01.

3 GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DE L'ESPACE

1 SITUATION D'APPRENTISSAGE

L'approche pédagogique et didactique est celle de l'APC
Pour l'exploitation de la situation, on pourrait s'inspirer du tableau ci-dessous :

Constituants de la situation	Exemple de questions possibles	Réponses possibles des élèves
Contexte	À quelle occasion se déroule la scène ?	A l'occasion d'un exercice de création d'écran.
Circonstances	Indique le problème que l'élève veut résoudre.	L'élève veut vérifier la conformité de son écran.
Tâches	Que décide faire l'élève et ses camarades ?	Déterminer l'intersection d'une droite et d'un et calculer la distance d'un point à un plan.

2 DÉCOUVERTE DES HABILETÉS

Activité 1 : vecteur normal à un plan de l'espace

Corrigé de l'activité 1

1. $\overrightarrow{FB}$; $\overrightarrow{FA}$; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{AO}$
2. $\overrightarrow{FB}$ et $\overrightarrow{FA}$.
3. $\overrightarrow{FH}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (AFB)
4. Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque de (P)
   $\overrightarrow{FH}$ est orthogonal à $\vec{u}$ donc $\overrightarrow{FH} \cdot \vec{u} = 0$ d'où $\lambda \overrightarrow{FH} \cdot \vec{u} = 0$ ainsi $\lambda \overrightarrow{FH}$ est orthogonal à tout vecteur
   de (P)

Corrigé Exercice de fixation 1

Soit (P) un plan de l'espace E, de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
On appelle vecteur **normal** à (P), tout vecteur non nul $\vec{n}$ **orthogonal** à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$

Activité 2 : Caractérisation d'un plan de l'espace par un point et un vecteur normal

Corrigé de l'activité 2

1. « Étant donné **un point A** de l'espace E et une **droite (D)**, il existe **un unique plan** passant par A et **orthogonal** à la droite (D) »

2.a) $\vec{n}$ est un vecteur directeur de (D) qui est orthogonal au plan (P) donc $\vec{n}$ est un vecteur normal à (P).

par suite $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur de (P)

b) Car $\vec{n}$ est un vecteur directeur de la droite (D) et la droite (D est orthogonal au plan (P).

c) Supposons que le point M ne se soit pas dans le plan (P).

Considérons alors le plan (Q) passant par le point M et contenant la droite (Δ)

On rappelle que A est un point de (Δ)

Or le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AM}$ et à $\vec{u}$, donc $\vec{n}$ est orthogonal au plan (Q). Or $\vec{n}$ est aussi orthogonal au plan (P), donc les plans (P) et (Q) serait deux plans parallèles et distincts (M appartient à l'un et n'appartient pas à l'autre). Ce qui contredit le fait que le point A appartient à ces deux plans. Donc M est bien un point du plan (P)

Corrigé Exercice de fixation 2

1. le plan passant par H et orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ est (ADH)
2. (ABC) est l'unique plan passant par A et orthogonal à $\overrightarrow{BF}$
   or M est un point du au plan (ABC) donc à $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont orthogonaux

Activité 3 : Equation cartésienne d'un plan

Corrigé de l'activité 3

1. a) $M(x, y, z)$ est un point du plan (P).
   les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}(x - x_0\,; y - y_0\,; z - z_0)$.

   b) $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)$
   $= ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0)$

   c) $M \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$
   $\Leftrightarrow ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0$
   $\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$ où $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$

   ainsi $M \in (P) \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$.
   donc une équation du plan (P) est donc $ax + by + cz + d = 0$

2. a, b et c ne sont pas tous nuls donc le point B$\left(0\,; \frac{-d}{b}\,; 0\right)$ appartenant au plan d'équation
   $ax + by + cz + d = 0$ car $a \times 0 + b \times \left(\frac{-d}{c}\right) + c \times 0 + d = 0$
   d'autre part les points A$\left(\frac{-d}{a}\,; 0\,; 0\right)$ et C$\left(0\,; 0; \frac{-d}{c}\right)$ appartenant au plan d'équation :
   $ax + by + cz + d = 0$
   On a : $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan d'équation :
   $ax + by + cz + d = 0$.
   de plus $\overrightarrow{BA} \cdot \vec{n} = 0$ et $\overrightarrow{BC} \cdot \vec{n} = 0$ donc le vecteur $\vec{n}(a, b, c)$ est un vecteur normal du plan d'équation : $ax + by + cz + d = 0$

Corrigé Exercice de fixation 3

1. Faux ; 2. Faux ; 3. Vrai

Corrigé Exercice de fixation 4

Une équation cartésienne du plan (P) est de la forme $x + 2y + 3z + d = 0$ où d est un nombre réel le point O appartient au plan (P) donc $0 + 2 \times 0 + 3 \times 0 + d = 0$ d'où $d = 0$

ainsi une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ est : $x + 2y + 3z = 0$

Activité 4 : Distance d'un point à un plan de l'espace

Corrigé de l'activité 4

1. a) $\vec{n}(a, b, c)$ est un vecteur normal au plan (P)

b) On a : $\overrightarrow{AH}$ est un vecteur normal au plan $(\mathcal{P})$ donc $\overrightarrow{AH}$ est colinéaire à $\vec{n}$

2.a) $\overrightarrow{AH}(x - x_0 \,; y - y_0 \,; z - z_0)$

b) On a : $|\overrightarrow{AH}.\vec{n}| = \|\overrightarrow{AH}\| \times \|\vec{n}\| = AH \times \|\vec{n}\|$ donc $|\overrightarrow{AH}.\vec{n}| = AH \times \|\vec{n}\|$

or $\overrightarrow{AH}.\vec{n} = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)$

$= ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0)$

$= -(ax_0 + by_0 + cz_0 + d)$ car $ax + by + cz = -d$

par suite $|\overrightarrow{AH}.\vec{n}| = |ax_0 + by_0 + cz_0 + d|$

d'autre part : $\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

donc : $|\overrightarrow{AH}.\vec{n}| = AH \times \|\vec{n}\|$ par suite $AH = \frac{|\overrightarrow{AH}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$

d'où $AH = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Corrigé Exercice de fixation 5

La distance du point A au plan (P) est : $\mathrm{d}(A; (P)) = \frac{|2\times3+1\times2+3\times1+5|}{\sqrt{2^2+(1)^2+3^2}} = \frac{16}{\sqrt{14}} = \frac{8\sqrt{14}}{7}$

Activité 5 : Représentation paramétrique d'une droite de l'espace

Corrigé de l'activité 5

1. On a : $\overrightarrow{AM}(x - x_0 \,; y - y_0 \,; z - z_0)$.

2. $M \in (D)$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un nombre réel λ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}$

3. $M \in (D)$ si et seulement s'il existe un nombre réel λ non nul tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}$

$$\overrightarrow{AM} = k\vec{u} \iff \begin{cases} x - x_0 = \lambda a \\ y - y_0 = \lambda b \\ z - z_0 = \lambda c \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$\iff \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Corrigé Exercice de fixation 6

La droite (D) passant par A$(1;\ \ 3; -2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-1; 2; 1)$

le système $\begin{cases} x = 1 - k \\ y = 3 + 2k \\ z = -2 + k \end{cases}$ $(k \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (D)

Corrigé Exercice de fixation 7

$\overrightarrow{AB}(-3; 1; 1)$ est un vecteur directeur de la droite (AB)

donc le système $\begin{cases} x = 1 - 3k \\ y = -1 + k \\ z = 2 + k \end{cases}$ $(k \in \mathbb{R})$ est une représentation de la droite (AB)

3 DES QUESTIONS D'ÉVALUATION

Question 1 : Comment étudier la position relative d'une droite et d'un plan ?

Corrigé de l'exercice non corrigé

Les plans (P) a pour vecteur normal $\vec{n}(3; -2; -1)$.

La droite (*D*) a pour repère$(B, \vec{u})$ avec $B(2; 5; 1)$ et $\vec{u}(-1; -1; 3)$

On a : $\vec{u}.\vec{n} = 2$ et $2 \neq 0$ donc la droite (*D*) et le plan (P) sont sécants.

Question 2 : Comment déterminer une équation cartésienne d'un plan passant par des points de coordonnées données connues ?

Corrigé de l'exercice non corrigé

On a : $\overrightarrow{AB}\,(-3 ; 1 ; -6)$ et $\overrightarrow{AC}\,(1 ; -3 ; -4)$ ne sont pas colinéaires car $\frac{-3}{6} \neq \frac{1}{-3}$

d'où $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs directeurs de (P) qui ne sont pas colinéaires.

Il s'agit de déterminons un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

soit $\vec{n}\ (a ; b ; c)$ un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ on a :

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a + b - 6c = 0 \\ a - 3b - 4c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{11}{4}\,c \\ b = -\frac{9}{4}c \end{cases}$$

pour $c = 4$ on a : $\vec{n}\ (11 ; 9 ; -4)$ est un vecteur normal à (P)

3. Une équation cartésienne du plan (P) est de la forme $11x + 9y - 4z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$

le point A appartient au plan (P) donc $11 \times 2 + 9\ \times 1 - 4 \times 3 + d = 0$ d'où $d = -19$

Par suite une équation cartésienne du plan (P) est $11x + 9y - 4z - 19 = 0$

Question 3 : Comment étudier la position relative de deux droites de l'espace ?

Corrigé de l'exercice non corrigé

$(D_3) : \begin{cases} x = -5 - 2t \\ y = 3 + 3t \\ z = 8 - 1{,}5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ À corriger dans l'énoncé

1. La droite (D_1) a pour repère$(A, \vec{u})$ avec $A(4; -1; 3)$ et $\vec{u}(1; 1; 5)$
   et la droite (D_2) a pour repère$(B, \vec{v})$ avec $B(2; 7; 2)$ et $\vec{v}(4; -6; 3)$

Les droites (D_1) et (D_2) ont pour vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}(1; 1; 5)$ et $\vec{v}(4; -6; 3)$
ces vecteurs sont non colinéaires, donc (D_1) et (D_2) sont sécantes ou non coplanaires
(D_1) et (D_2) ont un point en commun si et seulement s'il existe deux nombres réels t et λ tels que :

$$\begin{cases} 4 + \lambda = 2 + 4\mu \\ -1 + \lambda = 7 - 6\mu \\ 3 + 5\lambda = 2 - 3\mu \end{cases}$$

des deux premières équations, on obtient $\mu = 1$ et $\lambda = 2$. En remplaçant dans la troisième équation,
On obtient $13 \neq -1$ d'où ce système n'admet pas de solution
On ne déduit que les droites (D_1) et (D_2) sont non coplanaires.

2. la droite (D_2) a pour repère$(B, \vec{v})$ avec $B(2; 7; 2)$ et $\vec{v}(4; -6; 3)$
   la droite (D_3) a pour repère$(C, \vec{w})$ avec $C(-5; 3; 8)$ et $\vec{w}(-2; 3; -1{,}5)$

Les droites (D_2) et (D_3) ont pour vecteurs directeurs respectifs $\vec{v}(4; -6; 3)$ et $\vec{w}(-2; 3; -1{,}5)$
ces vecteurs sont colinéaires, donc (D_2) et (D_3) sont parallèles.
De plus le vecteur $\overrightarrow{BC}(-7; -4; 4)$ n'est pas colinéaire à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$ donc les droites (D_2) et (D_3) sont strictement parallèles.

Question 3 : Comment étudier la position relative de deux plans de l'espace ?

Corrigé de l'exercice non corrigé

Les plans (P) et (Q) ont pour vecteurs normaux respectifs $\vec{n}(3; 1; -4)$ et $\overrightarrow{n'}(1; -3; 0)$
ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires ; donc, les (P) et (Q) sont sécants.

4 MES SÉANCES D'EXERCICES

Exercices de fixation

Corrigé Exercice 1

1. $\overrightarrow{CG}$

Corrigé Exercice 2

1. (ADH)
2. (CDH)

Corrigé Exercice 3

1. Une équation cartésienne du plan (P) est de la forme $x + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$

Le point A appartient au plan (P) donc $2 + d = 0$ d'où $d = -2$
Par suite une équation cartésienne du plan (P) est : $x - 2 = 0$
2. Une équation cartésienne du plan (Q) est de la forme $x + 2y - 3z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$
le point A appartient au plan (Q) donc $2 + 2 \times 0 - 3 \times (-3) + d = 0$ d'où $d = -11$
Par suite une équation cartésienne du plan (P) est $x + 2y - 3z - 11 = 0$

Corrigé Exercice 4
1. $3x - 2y + z - 1 = 0$

Corrigé Exercice 5 Identique à exercice 4

Corrigé Exercice 6
La bonne réponse est $\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = -\lambda \\ z = 4 + 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ (à corriger dans l'énoncé)

Corrigé Exercice 7
Les droites (D) et (D') ont pour vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}(1;-1;4)$ et $\vec{v}(1;3;1)$
ces vecteurs sont non colinéaires, donc (D_1) et (D_2) sont sécantes ou non coplanaires
(D) et (D') ont un point en commun si et seulement s'il existe deux nombres réels t et λ tels que :
$$\begin{cases} -2 + \lambda = 3 + \mu \\ 2 - \lambda = -2 + 3\mu \\ 1 + 4\lambda = 1 + \mu \end{cases}$$
des deux premières équations, on obtient $\mu = \frac{-1}{4}$ et $\lambda = \frac{19}{4}$. En remplaçant dans la troisième équation,
On obtient $20 \neq \frac{3}{4}$ d'où ce système n'admet pas de solution
On ne déduit que les droites (D_1) et (D_2) sont non coplanaires.

Corrigé Exercice 8
1. On a : $\overrightarrow{AB}\,(1\,;-1\,;-1)$ et $\overrightarrow{AC}\,(1\,;-2\,;4)$ ne sont pas colinéaires car $\frac{1}{1} \neq \frac{-2}{-1}$
d'où A, B et C ne sont pas alignés.
2. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs directeurs de (P).
Il s'agit de déterminer un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
soit $\vec{n}\,(a\,;b\,;c)$ un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ on a :
$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b - c = 0 \\ a - 2b + 4c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6\,c \\ b = 5c \end{cases}$$
pour $c = 1$ on a : $\vec{n}\,(6\,;5\,;1)$ est un vecteur normal à (P)

Donc une équation cartésienne de la droite (D) est : $\begin{cases} x = -1 + 6t \\ y = 1 + 5t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Corrigé Exercice 9

1. Les plans (P) et (P') ont pour vecteurs normaux respectifs $\vec{n}(2;-1;5)$ et $\overrightarrow{n'}(-3;4;2)$
   ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires ; donc, les (P) et (P') sont sécants.
2. Leur droite d'intersection (D) a pour système d'équations :

$$\begin{cases} 2x - y + 5z + 7 = 0 \\ -3x + 4y + 2z - 1 = 0 \end{cases} \text{ on pose } z = t$$

on a donc $\begin{cases} 2x - y + 5z + 7 = 0 \\ -3x + 4y + 2z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{18}{5}t - \frac{27}{5} \\ y = \frac{11}{5}t - \frac{19}{5} \\ z = t \end{cases}$

par suite (D) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = \frac{18}{5}t - \frac{27}{5} \\ y = \frac{11}{5}t - \frac{19}{5} \\ z = t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

Corrigé Exercice 10

1. Les plans (P) et (P') ont pour vecteurs normaux respectifs $\vec{n}(2;-1;3)$ et $\overrightarrow{n'}(-4;2;-6)$
   ces deux vecteurs sont colinéaires car $\frac{-4}{2} = \frac{2}{-1} = \frac{-6}{3}$
   donc, les plans (P) et (P') sont parallèles.
2. On a :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z + 4 = 0 \\ -4x + 2y - 6z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 2y - 6z - 8 = 0 \\ -4x + 2y - 6z + 1 = 0 \end{cases}$$

le système n'admet aucune solution donc, les plans (P) et (P') sont strictement parallèles.

Corrigé Exercice 11

La distance du point E au plan (Q) est : $d\big(E;(Q)\big) = \frac{|\,3\times4-4\times2+0\times(-1)+6\,|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$

Corrigé Exercice 12

1. Les plans (P) et (P') ont pour vecteurs normaux respectifs $\vec{n}(1;1;-2)$ et $\overrightarrow{n'}(-2;-2;4)$
   ces deux vecteurs sont colinéaires car $\frac{-2}{1} = \frac{-2}{1} = \frac{-4}{2}$
   donc, les plans (P) et (P') sont parallèles.

De plus le système : $\begin{cases} x + y - 2z - 3 = 0 \\ -2x - 2y + 4z + 1 = 0 \end{cases}$

n'admet aucune solution donc, les plans (P) et (P') sont strictement parallèles.

2. $A(1;2;0)$ est un point de (P).
   La distance entre les plans (P) et (P') est la distance du point A au plan (P')
   La distance du point A au plan (P') est : $d\big(A;(P')\big) = \frac{|-2\times1-2\times2+4\times0+1\,|}{\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+4^2}} = \frac{5}{2\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{12}$

Corrigé Exercice 13

$\overrightarrow{AB}\,(-1\,;-4\,;-2)$ est un vecteur normal au plan donc une équation cartésienne de ce plan est

de la forme $-x-4y-2z+d=0$ avec $d \in \mathbb{R}$
le point C appartient à ce plan donc $-2-4\times(-4)-2\times(-5)+d=0$ d'où $d=-24$
Par suite une équation cartésienne du plan (P) est $-x-4y-2z-24=0$

Corrigé Exercice 14
2.

Corrigé Exercice 15
1. Vrai ; 2. Vrai 3. Faux

Corrigé Exercice 16
1. Une équation cartésienne du plan (P) est de la forme $x+d=0$ avec $d \in \mathbb{R}$
Le point O appartient au plan (P) donc $0+d=0$ d'où $d=0$
Par suite une équation cartésienne du plan (P) est : $x=0$
2. Une équation cartésienne du plan (Q) est de la forme $z+d=0$ avec $d \in \mathbb{R}$
Le point O appartient au plan (Q) donc $0+d=0$ d'où $d=0$
Par suite une équation cartésienne du plan (P) est : $z=0$
3. Le plan (R) de repère (O ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) est le plan passant par O et de vecteur normal $\vec{k}$
donc une équation cartésienne du plan (R) est de la forme $z+d=0$ avec $d \in \mathbb{R}$
le point O appartient au plan (R) donc $z+d=0$ d'où $d=0$
Par suite une équation cartésienne du plan (R) est $z=0$

Corrigé Exercice 17
1. On a : $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,(2\,;2\,;-2)$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\,(-3\,;3\,;0)$ ne sont pas colinéaires car $\frac{3}{2} \neq \frac{0}{-2}$
d'où A, B et C ne sont pas alignés par suite A, B et C déterminent un plan
2. Déterminons un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$
soit $\vec{n}\,(a\,;b\,;c)$ un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ on a :
$$\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+2b-2c=0 \\ -3a+3b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2}\,c \\ b=a \end{cases}$$
pour $c=2$ on a : $\vec{n}\,(1\,;1\,;2)$ est un vecteur normal à (P)
Une équation cartésienne du plan (P) est de la forme $x+y+2z+d=0$ avec $d \in \mathbb{R}$
le point A appartient au plan (P) donc $1\times0+1\times1+2\times1+d=0$ d'où $d=-3$
Par suite une équation cartésienne du plan (P) est : $x+y+2z-3=0$
3. Un vecteur normal au plan (P) est $\vec{n}'\,(-1\,;-1\,;-2)$.

Corrigé Exercice 18
1. On a : $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,(2\,;3\,;0)$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\,(2\,;0\,;-4)$ ne sont pas colinéaires car $\frac{2}{2} \neq \frac{0}{3}$
d'où A, B et C ne sont pas alignés par suite A, B et C déterminent un plan.
Déterminons un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$
soit $\vec{n}\,(a\,;b\,;c)$ un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ on a :
$$\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+3b=0 \\ 2a-4c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{-2}{3}\,a \\ a=2c \end{cases}$$

pour c $= 3$ on a : $\vec{n}\,(6\,;-4\,;3)$ est un vecteur normal à (ABC).
Une équation cartésienne du plan (ABC) est de la forme $6x-4y+3z+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$
le point A appartient au plan (ABC) donc $6\times(-2)-4\times 0+3\times 0+d=0$ d'où $d=12$
Par suite une équation cartésienne du plan (ABC) est : $6x-4y+3z+12=0$

2. Soit $\overrightarrow{n'}(a;b;c)$ un vecteur normal à (P) et $\vec{n}\,(6\,;-4\,;3)$ est un vecteur normal à (ABC).
Le plan (P) est orthogonal à (ABC) donc $\vec{n}\cdot\overrightarrow{n'}=0$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{n'}=0 \iff 6a-4b+3c=0$

On peut prendre $\overrightarrow{n'}$ (1 ; 6 ; 6). On a donc : $x+6y+6z+d=0$, comme ce plan passe par A, $d=2$
$x+6y+6z+2=0$ est une équation de ce plan.

Corrigé Exercice 19

1. ont pour vecteurs normaux respectifs $\vec{n}(1;0;-1)$ et $\overrightarrow{n'}(2;1;-3)$

La droite d'intersection (D) des plans (Q) et (Q') a pour système d'équations :
$\begin{cases} x-z-2=0 \\ 2x+y-3z+1=0 \end{cases}$ on pose $z=d$

on a donc $\begin{cases} x-z-2=0 \\ 2x+y-3z+1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=2+d \\ y=d-5 \\ z=d \end{cases}$

par suite (D) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=2+d \\ y=-5+d \\ z=d \end{cases}$ $(d\in\mathbb{R})$

un vecteur directeur de (D) est $\vec{u}(1;1;1)$ et (P) a pour vecteur normal $\vec{n}(1;-1;0)$
on a $\vec{u}\cdot\vec{n}=1-1=0$ donc (D) est parallèle à (P).

2. (D) est la droite de repère $(A;\vec{u})$ où $A(2;-5;0)$ et $\vec{u}(1;1;1)$
et (P) est un plan de vecteur normal $\vec{n}(1;-1;0)$
Le plan (π) contient la droite (D) et est orthogonal au plan (P).
Soit $\overrightarrow{n'}(a;b;c)$ un vecteur normal à (π) et $\vec{n}(1;-1;0)$ est un vecteur normal à (P)
donc $\overrightarrow{n'}\cdot\vec{n}=0$
De plus (D) est contenue dans (P) donc $\overrightarrow{n'}\cdot\vec{u}=0$

$\begin{cases} \overrightarrow{n'}\cdot\vec{n}=0 \\ \overrightarrow{n'}\cdot\vec{u}=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a-b=0 \\ a+b+c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=b \\ 2b=-c \end{cases}$

Pour c $=-2$ on a : $\overrightarrow{n'}\,(1\,;1\,;-2)$ est un vecteur normal à (π).
Une équation cartésienne de (π)est donc de la forme $x+y-2z+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$
le point A appartient au plan (π) donc $2-5+(-2)\times 0+d=0$ d'où $d=3$
Par suite une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x+y-2z+3=0$

Corrigé Exercice 20

1. Les plans (P) et (Q) ont pour vecteurs normaux respectifs $\vec{n}(1;1;1)$ et $\overrightarrow{n'}(a;1;1)$
Les plans (P) et (Q) sont sécants si et seulement si les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires.
C'est-à-dire $a\neq 1$ donc $a\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$

2. La droite d'intersection (D) des plans (P) et (Q) a pour système d'équations :

$\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+y+z+b=0 \end{cases}$ on pose $z=d$

on a donc $\begin{cases} x+y=-d \\ ax+y=-d-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{b}{1-a} \\ y=-\frac{b}{1-a}-d \\ z=d \end{cases}$

par suite (D) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=\frac{b}{1-a} \\ y=-\frac{b}{1-a}-d \\ z=d \end{cases}$ $(d \in \mathbb{R})$

Un vecteur directeur de (D) est $\vec{u}(0;-1;1)$ et un vecteur directeur de (D') est $\vec{u'}(0;b;1)$

(D) et (D') sont orthogonales si et seulement si donc $\vec{u}\cdot\vec{u'}=0$

$\vec{u}\cdot\vec{u'}=0 \Leftrightarrow -b+1=0 \Leftrightarrow b=1$

Par suite (D) et (D') sont orthogonales si et seulement si $b=1$ et $a \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$

Corrigé Exercice 21

1. a) On a : $\overrightarrow{AB}\,(2\,;0\,;4)$ et $\overrightarrow{AC}\,(0\,;-1\,;1)$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=2\times2-1\times0-1\times4=4-4=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times0-1\times(-1)-1\times1=1-1=0$

de plus les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

b) Une équation cartésienne du plan (ABC) est de la forme $2x-y-z+d=0$ avec $d \in \mathbb{R}$

le point A appartient au plan (ABC) donc $2\times(-1)-2-0+d=0$ d'où $d=4$

Par suite une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x-y-z+4=0$

2. a) (P_2) a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_2}\,(1\,;0;-2)$ donc une équation cartésienne du plan (P_2) est de la forme $x-2z+d=0$ avec $d \in \mathbb{R}$

le point O appartient au plan (P_2) donc $0+d=0$ d'où $d=0$

Par suite une équation cartésienne du plan (P_2) est : $x-2y=0$

b) Les plans (P_1) et (P_2) ont pour vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n_1}\,(3;1;-2)$ et $\overrightarrow{n_2}\,(1\,;0;-2)$

ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires car $\frac{1}{3}\neq\frac{0}{1}$

donc, les plans (P_1) et (P_2) sont sécants.

3. a) La droite d'intersection (D) des plans (P_1) et (P_2) a pour système d'équations :

$\begin{cases} 3x+y-2z+3=0 \\ x-2z=0 \end{cases}$ on pose $z=d$

$\begin{cases} 3x+y-2d+3=0 \\ x-2d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2d \\ y=-3-4d \\ z=d \end{cases}$

par suite (D) a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x=2d \\ y=-3-4d \\ z=d \end{cases}$ $(d \in \mathbb{R})$ (a corriger dans pyramide)

b) Remplaçons x, y et z dans l'équation cartésienne du plan (ABC).

$2\times2d-(-3-4d)-d+4=0$ soit $d=1$ ainsi (D) coupe le plan (ABC) en un point I.

Pour $d=1$ on a : $x=2$; $y=-7$ et $x=1$ ainsi le point I a pour coordonnées $(2\,;-7;1)$

Corrigé Exercice 22

1. Si A appartient à (D) alors le système $\begin{cases} 1 = 1 + 2\lambda \\ 0 = \ -3 + \lambda \\ 1 = -2 + 3\lambda \end{cases}$ aurai une solution

or le système $\begin{cases} 1 = 1 + 2\lambda \\ 0 = \ -3 + \lambda \\ 1 = -2 + 3\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 3 \\ \lambda = 1 \end{cases}$ n'a pas de solution

donc le point A n'appartient pas à (D) .

Une droite et un point n'appartenant pas à cette droite détermine un plan, donc le point A et la droite (D)

détermine un plan.

2. Pour $\lambda = 0$ on a : $x = 1$; $y = -3$ et $z = -2$; pour $\lambda = 1$ on a : $x = 3$; $y = -2$ et $z = 1$.

$B(1\,;-3;-2)$ et $C(3\,;-2;1)$ sont deux points de (D) de plus $A(1\,;0;1)$ n'appartient pas à (D) donc les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,(0\,;-3\,;-3)$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\,(2\,;-2\,;0)$ ne sont pas colinéaires.

Soit $\vec{n}(a;b;c)$ un vecteur normal à (P), on a :

$\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -3b - 3c = 0 \\ 2a - 2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -c \\ a = b \end{cases}$

pour $c = -1$ on a : $\vec{n}\,(1\,;1\,;1)$ est un vecteur normal à (P).

Corrigé Exercice 23

1. Les plans (P) et (Q) ont pour vecteurs normaux respectifs $\vec{n}(1;-2;1)$ et $\overrightarrow{n'}(2;-1;1)$

ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires car $\frac{1}{2} \neq \frac{-2}{-1}$; donc, les (P) et (Q) sont sécants.

2. Leur droite d'intersection (D) a pour système d'équations :

$\begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ 2x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$ on pose $z = t$

on a donc $\begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ 2x - y + z - 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 - \frac{1}{3}t \\ y = \frac{1}{3}t \\ z = t \end{cases}$

par suite (D) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 - \frac{1}{3}t \\ y = \frac{1}{3}t \\ z = t \end{cases}$ $(\,t \in \mathbb{R})$

Corrigé Exercice 24

1.

2. on a : $\frac{2x-1}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{3-4z}{4}$ en posant $z = t$

On obtient le système : $\begin{cases} x = \frac{13}{8} - \frac{3}{2}t \\ y = 2 - 4t \\ z = t \end{cases}$ $(\,t \in \mathbb{R})$, qui est une représentation paramétrique de la droite (D).

Corrigé Exercice 25

1.

On a : $\begin{cases} x = 3 + 2\lambda - 4\mu \\ y = 2 + \lambda - \mu \\ z = 5\lambda - 5\mu \end{cases}$ $(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$

Soit $\vec{u}(2; 1; 5)$; $\vec{v}(-4; -1; -5)$; $A(3; 2; 0)$ et $\overrightarrow{AM}(x - 3; y - 2; z)$

On a : $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, $(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc l'ensemble (P) des points M tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ est un plan.

2. Une équation de (P)

Éliminons λ et μ dans notre système

Soient a, b et c des nombres réels tels que : $ax + by + cz = 0$

$ax + by + cz = 0 \iff 3a + 2b + (2a + b + c)\lambda + (-4a - b - 5c)\,\mu = 0$

$\iff \begin{cases} 3a + 2b = 0 \\ 2a + b + c = 0 \\ -4a - b - 5c = 0 \end{cases}$

On obtient $a = -\frac{1}{3}$; $b = \frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{30}$

Donc une équation cartésienne de (P) est donc $-\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{30}z = 0$

Corrigé Exercice 26

1. (D) et (Δ) ont pour vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}(1; -2; 1)$ et $\vec{v}(-1; 2; 1)$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (D) et (Δ) sont sécantes ou non coplanaires

(D) et (Δ) ont un point en commun si et seulement si le système

(S) $\begin{cases} -2 + \lambda = -1 - \mu \\ 2 - 2\lambda = 2\mu \\ 4 + \lambda = 1 + \mu \end{cases}$ a une solution

or (S) admet un couple de solution $(-1; 2)$ par suite (D) et (Δ) sont sécantes en un point A.

2. Pour $k = -1$ on a : $x = -3$; $y = 4$ et $z = 3$ dont les coordonnées de leur point d'intersection A sont $(-3; 4\,; 3\,)$.

Soit $\vec{n}(a; b; c)$ un vecteur normal au plan (P) déterminé par les droites sécantes (D) et (Δ) on a :

$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a - 2b + c = 0 \\ -a + 2b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = \frac{1}{2}a \\ c = 0 \end{cases}$

pour $a = 2$ on a : $\vec{n}\,(2\,; 1\,; 0)$ est un vecteur normal à (P).

Une équation cartésienne de (P) est donc de la forme $2x + y + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$

le point A appartient au plan (P) donc $2 \times (-3) + 1 + d = 0$ d'où $d = 5$

Par suite une équation cartésienne du plan (P) est : $2x + y + 5 = 0$

Corrigé Exercice 27

1. (D) et (Δ) ont pour vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}(1;-1;3)$ et $\vec{v}(2;-1;1)$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (D) et (Δ) sont sécantes ou non coplanaires

(D) et (Δ) ont un point en commun si et seulement si le système

(S) $\begin{cases} 1+k=2t \\ -2-k=1-t \\ 2+3k=3+t \end{cases}$ a une solution

or (S) n'admet pas de solution par suite (D) et (Δ) sont non coplanaires.

2. Le point A appartient à (D) si le système $\begin{cases} 2=1+k \\ 1=-2-k \\ 4=2+3k \end{cases}$ a une solution

or on obtient $\begin{cases} k=1 \\ k=-2 \\ k=1 \end{cases}$ donc le point A n'appartient pas à (D)

3. $B(2;0;4)$ et $C(0;1;3)$ sont deux points de (Δ) de plus $A(2;1;4)$ n'appartient pas à (Δ) donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}(0;-1;0)$ et $\overrightarrow{AC}(-2;0;-1)$ ne sont pas colinéaires.

Soit $\vec{n}(a;b;c)$ un vecteur normal à (P), on a :

$\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -b=0 \\ -2a-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ c=-2a \end{cases}$

pour $a=-1$ on a : $\vec{n}(-1;0;2)$ est un vecteur normal à (P).

Une équation cartésienne de (P) est donc de la forme $-x+2z+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$

le point A appartient au plan (P) donc $-2+8+d=0$ d'où $d=-6$

Par suite une équation cartésienne du plan (P) est : $-x+2z-6=0$

Corrigé Exercice 28

1.a) On a : $\overrightarrow{AB}(-4;-4;4)$ et $\overrightarrow{AC}(-1;-4;-2)$ ne sont pas colinéaires car $\frac{-4}{-1}\neq\frac{-4}{-4}$

d'où A, B et C ne sont pas alignés par suite A, B et C déterminent un plan.

b) On a : $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=2\times(-4)-(-4)+4=-8+8=0$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times(-1)-(-4)-2=-4+4=0$

donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

2. Un vecteur normal à (P) est $\overrightarrow{n'}(1;1;-1)$

On a $\vec{n}\cdot\overrightarrow{n'}=2\times1-1\times1+1\times(-1)=2-2=0$ donc (P) et (ABC) sont perpendiculaires.

3.a) $x_G=\frac{1\times1-1\times(-3)+2\times0}{2}=\frac{4}{2}=2$; $y_G=\frac{1\times2-1\times(-2)+2\times(-2)}{2}=0$; $z_G=\frac{1\times(-1)-1\times(3)+2\times(-3)}{2}=\frac{-10}{2}=-5$

Ainsi $G(2;0;-5)$

b) $\overrightarrow{CG}(2;2;-2)$ est un vecteur directeur de (CG) et un vecteur normal à (P) est $\overrightarrow{n'}(1;1;-1)$

On a : $\overrightarrow{CG}=2\overrightarrow{n'}$ donc la droite (CG) est orthogonale à (P).

c) une représentation paramétrique de la droite (CG) est :

$\begin{cases} x=2t \\ y=-2+2t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=-3-2t \end{cases}$

En remplaçant $x; y$ et z dans l'équation cartésienne de (P) on obtient :

$x+y-z+2=0 \Leftrightarrow 2t-2+2t+3+2t+2=0 \Leftrightarrow 6t+3=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{2}$

Pour $t=-\frac{1}{2}$ on a : $x=-1$; $y=-3$ et $z=-2$

Par suite $H\,(-1\,;-3\,;-2)$

4.a) $\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=12 \Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MG}\|=12 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MG}\|=6 \Leftrightarrow MG=6$

(S) est donc la sphère de centre G et de rayon 6.

b) Une équation de (S) est : $(x-2)^2+y^2+(z+5)^2=6^2$

Une équation de (P) est : $x+y-z+2=0$

On a : : $x+y+2=z$

Donc $(x-2)^2+y^2+(x+y+7)^2=6^2$

Soit $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y+\frac{7}{2}\right)^2+2xy=10$

Ainsi l'intersection (C) du plan (P) et de la sphère (S) est une ellipse.

Situation complexe

Corrigé Exercice 29

Pour répondre à la préoccupation des habitants je vais utiliser la géométrie analytique de l'espace

Pour cela, je vais déterminer une équation cartésienne du plan (ABC)

une représentation paramétrique de la droite (EG)

Ensuite la distance de la droite au plan (ABC)

Enfin comparer cette distance à 2 mètres.

Soit $A\,(1\,;0\,;5)$; $B\,(0\,;2\,;6)$; $C\,(3\,;7\,;0)$; $E\,(-5\,;3\,;2)$ et $G\,(-3\,;4\,;-1)$

● On a : $\overrightarrow{AB}\,(-1\,;2\,;1)$ et $\overrightarrow{AC}\,(2\,;7\,;5)$ ne sont pas colinéaires car $\frac{2}{-1}\neq\frac{7}{2}$

d'où A, B et C ne sont pas alignés par suite A, B et C déterminent un plan.

Déterminons un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

soit $\vec{n}\,(a\,;b\,;c)$ un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ on a :

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-a+2b+c=0\\ 2a+7b-5c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=\frac{3}{11}c\\ a=\frac{17}{11}c\end{cases}$$

pour $c=11$ on a : $\vec{n}\,(17\,;3\,;11)$ est un vecteur normal à (ABC).

Une équation cartésienne du plan (ABC) est de la forme $17x+3y+11z+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$

le point A appartient au plan (ABC) donc $17\times(1)+3\times 0+11\times 1+d=0$ d'où $d=-28$

Par suite une équation cartésienne du plan (ABC) est : $17x+3y+11z-28=0$

● Un vecteur directeur de la droite (EG) est $\overrightarrow{EG}\,(2\,;1\,;-3)$ ainsi une représentation paramétrique de la droite (EG) est :

$$\begin{cases}x=-5+2t\\ y=3+t \quad (t\in\mathbb{R})\\ z=2-3t\end{cases}$$

● $\vec{n}\cdot\overrightarrow{EG}=2\times 17+3\times 1-3\times 11=4$ et $4\neq 0$ donc $\vec{n}$ et $\overrightarrow{EG}$ ne sont pas orthogonaux

D'où la droite (EG) est sécante au plan (ABC).

Par suite la distance de la droite (EG) au plan(ABC)

4 CONIQUES

1 SITUATION D'APPRENTISSAGE

- Après la lecture de la situation d'apprentissage (par un élève, par le professeur et une lecture silencieuse des élèves), l'enseignant va procéder à l'explication éventuelle des mots difficiles. Dans le cas de cette situation, le texte ne semble pas contenir de mots ou expressions difficiles pour un élève de Terminale C. Toutefois le professeur donnera la parole à ses élèves afin de s'assurer que tout le monde a compris le texte.
- Il pourra ensuite faire dégager les constituants de la situation à travers une ou des questions du type :

Constituants de la situation	**Exemples de questions possibles**	**Réponses possibles des élèves**
Contexte	Où et quand se déroule la scène et qui en sont les acteurs ?	La scène se déroule dans une centrale électrique. Il s'agit d'une sortie d'étude organisée par des élèves de TC. Ces élèves, à cette occasion, sur le processus de production de l'énergie électrique avec un guide, ingénieur des techniques de production de la centrale.
Circonstance	Indique la difficulté à laquelle les élèves sont confrontés.	Les élèves de Terminale C sont fascinés par les informations données par l'ingénieur et trouvent le processus de production complexe.
Tâche	Qu'est ce que les élèves de cette promotion de Terminale décident de faire ?	Les élèves de Terminale C, sous la tutelle de leur professeur, décident d'étudier les coniques.

Le professeur profitera donc de la tâche énoncée par ses élèves pour faire la synthèse de la situation et annoncera le plan de la leçon. Il devra dans la mesure du possible se référer à la situation durant tout le déroulement de la leçon.

2 DÉCOUVERTE DES HABILETÉS

Activité 1

- L'objectif de cette activité est de connaître la définition générale d'une conique.
- Réponses aux questions de l'activité.

Toutes ces courbes ont pour forme générale $Ax^2+ By^2+ 2Cx + 2Dy + E = 0$, où : $|A| + |B| \neq 0$.

N.B. Les élèves doivent identifier la forme générale commune à toutes ces courbes.

C'est l'enseignant qui donne aux élèves, après la forme générale, le nom de CONIQUES. L'enseignant peut dire un mot sur l'origine de ce nom à partir du commentaire de la leçon donnée à la première page de la leçon, comme section d'un cône avec un plan. L'enseignant annoncera que l'objet decette leçon est l'étude (algébrique) des coniques.

Exercices de fixation 1

(C_3), (C_4), (C_5) et (C_6).

Activité 2

- L'objectif de cette activité est l'équation réduite des coniques.
- Réponses aux questions de l'activité.

1. Supposons AB = 0

Dans ce cas, B= 0 et $A \neq 0$ ou A = 0 et $B \neq 0$. Car $|A| + |B| \neq 0$.

Supposons précisément B = 0 et $A \neq 0$. Le raisonnement est le même si A = 0 et $B \neq 0$

a) D = 0.

On a : P(X, Y) = $AX^2+ 2CX + E$; P est trinôme du second degré en X. Son discriminant réduit est

$C^2 - AE$.

Premier cas : $C^2 - AE > 0$

Le trinôme P(X, Y) a deux racines X_1 et X_2 et P(X, Y) =A$(X - X_1)(X - X_2)$ et (C) est la réunion des deux droites parallèles $X = X_1$ et $X = X_2$.

Deuxième cas : $C^2 - AE = 0$

Le trinôme P(X, Y) s'écrit A$(X + \frac{C}{A})^2$. La courbe (C) est la droite d'équation $X = -\frac{C}{A}$.

Troisième cas : $C^2 - AE < 0$

Dans ce cas, P(X, Y) ne s'annule pas. La courbe (C) est l'ensemble vide.

b) $D \neq 0$ et $A \neq 0$

B est égal à 0, car AB = 0. Il vient que : P(X, Y) = $AX^2+ 2CX + 2DY + E$. D'où :

P(X, Y) = A$(X^2 + \frac{2C}{A}$X)+$2DY + E$;

P(X, Y)= $A(X + \frac{C}{A})^2 - \frac{C^2}{A} + 2DY + E$; en utilisant la forme canonique.

P(X, Y)= $A(X + \frac{C}{A})^2 + 2D(Y + \frac{EA-C^2}{2AD})$.

En posant : $x = X + \frac{C}{A}$ et $y = Y + \frac{EA-C^2}{2AD}$, on a dans le repère (S ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$) une équation de (C) de la forme

$Ax^2 + 2Dy = 0$. En posant $a = -\frac{D}{A}$, on obtient : $x^2 - 2ay = 0$. Le nombre réel a est non nul car D est non nul.

2. Supposons AB$\neq 0$

a) En utilisant la forme canonique, on obtient : P(X, Y)= $A(X + \frac{C}{A})^2 - \frac{C^2}{A} + B(Y + \frac{D}{B})^2 - \frac{D^2}{B} + E$.

Ce qui donne : P(X, Y)= $A(X + \frac{C}{A})^2 + B(Y + \frac{D}{B})^2 + E - \frac{C^2}{A} - \frac{D^2}{B}$.

En posant : $x = X + \frac{C}{A}$ et $y = Y + \frac{D}{B}$, on a dans le repère (Ω ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$) une équation de (C) de la forme :

$Ax^2 + By^2 + k = 0$.

3. Supposons AB > 0

Ce cas prend en compte le cas précédent.

a) Si A, B et k sont tous trois strictement positifs ou tous trois strictement négatifs alors $Ax^2 + By^2 + k$ est différent de zéro. Dans ce cas, (C) est l'ensemble vide.
b) Si k est nul, A et B étant non nuls, $Ax^2 + By^2 = 0$ entraine $x = y = 0$. Dans ce cas (C) est égal à $\{ \Omega \}$.
c) Dans ce cas les nombres réels $\frac{k}{A}$ et $\frac{k}{B}$ sont strictement négatifs. En posant : $a^2 = -\frac{k}{A}$ et $b^2 = -\frac{k}{B}$, $Ax^2 + By^2 + k$ est équivalente à $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ dans le repère (Ω ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$).

4. Supposons AB< 0

a) Supposons A > 0 et B < 0. Le raisonnement est le même si A < 0 et B > 0.
On a :
$Ax^2 + By^2 = (\sqrt{A}\,x)^2 - (\sqrt{-B}\,y)^2 = (\sqrt{A}\,x - \sqrt{-B}\,y)(\sqrt{A}\,x + \sqrt{-B}\,y)$.
(C) est la réunion des droites d'équations $\sqrt{A}\,x - \sqrt{-B}\,y = 0$ et $\sqrt{A}\,x + \sqrt{-B}\,y = 0$.
b) Distinguons deux cas : Ak > 0 et Ak < 0.
Premier cas : Ak > 0
Dans ce cas $\frac{k}{A}$ est strictement positif et $\frac{k}{B}$ est strictement négatif. En posant : $a^2 = \frac{k}{A}$ et $b^2 = -\frac{k}{B}$, $Ax^2 + By^2 + k$ est équivalente à $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans le repère (Ω ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$).
Premier cas : A$k <$ 0
Dans ce cas $\frac{k}{A}$ est strictement négatif et $\frac{k}{B}$ est strictement positif. En posant : $a^2 = -\frac{k}{A}$ et $b^2 = \frac{k}{B}$, $Ax^2 + By^2 + k$ est équivalente à $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans le repère (Ω ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$).

Exercices de fixation 2

(C_2), (C_3) et (C_4).

Activité 3

- L'objectif de cette activité est l'étude des paraboles.
- Réponses aux questions de l'activité.

1.

Soit M$(x; y)$ un point du plan d'image M'$(x'; y')$ par $S_{(\Delta)}$. On a : $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$

Supposons que M appartienne à (P). On a : $x^2 = 2ay$; les coordonnées de son image M'de M par $S_{(\Delta)}$ vérifient $y'^2 = 2ax'$. Par suite le point M'appartient à (P'). D'où : $S_{(\Delta)}(P) \subset (P')$.

Réciproquement, soit M'de coordonnées $(x'; y')$ un point de (P'). On a : $y'^2 = 2ax'$. L'application $S_{(\Delta)}$ étant une bijection du plan sur lui-même, M'a un antécédent M de coordonnées $(x; y)$. On a : $x^2 = 2ay$. Par suite le point M appartient à (P). D'où : $(P') \subset S_{(\Delta)}(P)$. On en déduit que : $S_{(\Delta)}(P) = (P')$.

2.

a) Pour $a > 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Pour $a < 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{x}{a}$.

Pour $a > 0$, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$; $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Au point O, (P) admet une tangente horizontale.

f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ et f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$.

Pour $a < 0$, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0$; $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 0$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

f est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$ et f est strictement croissante sur $]-\infty ; 0]$.

$a > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗

$a < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	0	↘

c) Pour $a > 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

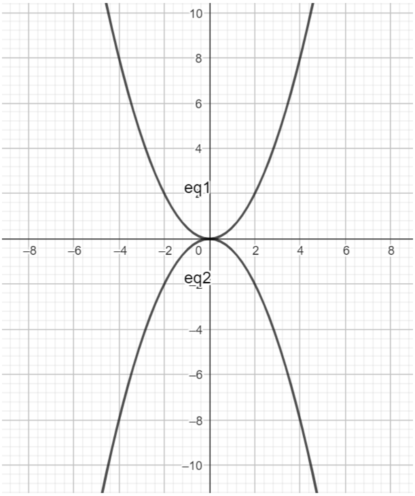
(P) admet en $-\infty$ et en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OJ).

Pour $a < 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

(P) admet en $-\infty$ et en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite de repère (O ; $\vec{\jmath}$).

3. a) Courbe (P)

Faites un tableau de valeurs



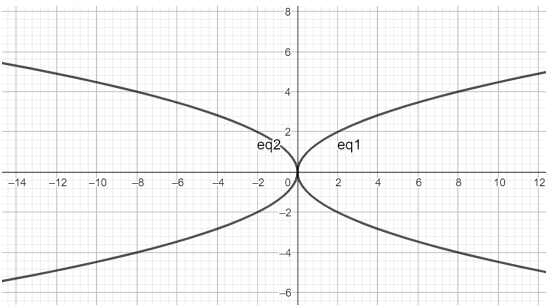
b) (P') est construite ici comme image de (P) par $S_{(\Delta)}$.

(P') admet au point O une tangente verticale comme symétrique de la tangente horizontale de (P) en O. Car la symétrie orthogonale conserve le contact.

(P') admet une branche parabolique de direction celle de la droite de repère (O ; $\vec{\imath}$), comme symétrique de la branche parabolique de (P) de direction celle la droite de repère (O ; $\vec{\jmath}$).

Courbe (P')

Faites un tableau de valeurs



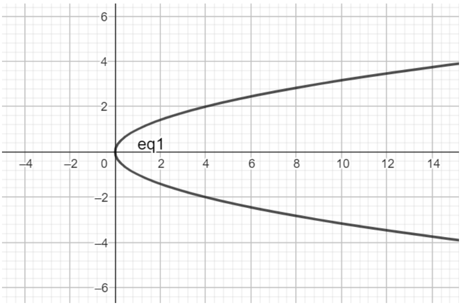
Exercices de fixation 3

1.

(P_2) et (P_4)

2. **Représentation graphique de (P)**

Faites un tableau de valeurs



Activité 4

- L'objectif de cette activité est de connaître les éléments caractéristiques d'une parabole.
- Réponses aux questions de l'activité.

1. a) a étant différent de 0, le nombre réel $\frac{a}{2}$ est différent de $-\frac{a}{2}$; par suite le point F n'appartient pas à (D).

   c) $\mathrm{H}(x; -\frac{a}{2})$.

   d) La question est : « Démontre que (P) est l'ensemble des points M du plan tels que : MF=MH. »

$\mathrm{MF}^2 = x^2 + (y - \frac{a}{2})^2$; $\mathrm{MF}^2 = x^2 + y^2 - ay + \frac{a^2}{4}$; $\mathrm{MH}^2 = (y + \frac{a}{2})^2$.

$\mathrm{M} \in (P) \Leftrightarrow x^2 = 2ay$;

$$\Leftrightarrow x^2 + \left(y^2 - ay + \frac{a^2}{4}\right) = 2ay + (y^2 - ay + \frac{a^2}{4}) ;$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \left(y^2 - ay + \frac{a^2}{4}\right) = y^2 + ay + \frac{a^2}{4}) ;$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \left(y^2 - ay + \frac{a^2}{4}\right) = (y + \frac{a}{2})^2 ;$$

$\Leftrightarrow$ MF=MH.

2. Soit M un point du plan de coordonnées $(x; y)$ d'image M'par $S_{(\Delta)}$, de coordonnées $(x'; y')$.

   On a : $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$

   a) Si F' appartenait à (D'), son antécédent F par $S_{(\Delta)}$ appartiendrait à (D). Ce qui contredit 1.a). Par suite F' n'appartient pas à (D').

b) F' étant l'image de F par $S_{(\Delta)}$, ses coordonnées sont $\left(\frac{a}{2};0\right)$. La droite (D') étant l'image de (D) par $S_{(\Delta)}$, son équation est $x=-\frac{a}{2}$.

c) $M' \in (P') \Leftrightarrow \exists$ M∈ (P), $M' = S_{(\Delta)}(M)$, car $S_{(\Delta)}(P) = (P')$ d'après activité3, 1. ;

$\Leftrightarrow \exists$ M, MF=MH et $M' = S_{(\Delta)}(M)$, d'après 1.c) ;

$\Leftrightarrow$ M'F' = M'H', car $S_{(\Delta)}$ conserve la distance.

Exercice de fixation 4

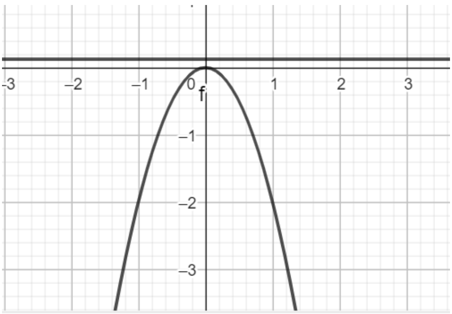
1.

a) (P) : $x^2 = 2 \times \left(-\frac{1}{4}y\right)$

$F\left(0;-\frac{1}{8}\right)$; (D) : $y=\frac{1}{8}$; $p=\frac{1}{4}$.

b) Faites un tableau de valeurs

Placez la tangente au sommet



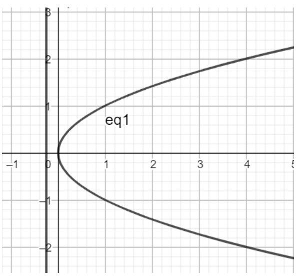
2.

a) (Q) : $y^2 = 2 \times \left(\frac{1}{2}x\right)$

$F\left(\frac{1}{4};0\right)$; (D) : $x=-\frac{1}{4}$; $p=\frac{1}{2}$.

b) Faites un tableau de valeurs

Placez la tangente au sommet



Activité 5

- L'objectif de cette activité est l'étude des ellipses.
- Réponses aux questions de l'activité.

1. Etude de la conique (E)

a) Soit S_O la symétrie centrale de centre O. A tout point M du plan de coordonnées $(x; y)$ d'image M'par S_O, de coordonnées $(x'; y')$.

On a : $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$

$$\mathrm{N}(X; Y) \in S_O(\mathrm{E}) \Leftrightarrow \exists\, \mathrm{M}(x, y) \in (\mathrm{E}),\ \mathrm{N} = S_O(\mathrm{M});$$
$$\Leftrightarrow \exists\, (x ; y), \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ et } \begin{cases} X = -x \\ Y = -y \end{cases};$$
$$\Leftrightarrow \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{N} \in (\mathrm{E}).$$

D'où : $S_O(\mathrm{E}) = (\mathrm{E})$.

On en déduit que O est centre de symétrie de (E).

b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = (\frac{b}{a})^2(a^2 - x^2)$;

$\Leftrightarrow y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ ou $y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

c) Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère (O ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$).
f est définie sur $[-a; a]$, continue sur $[-a; a]$ et dérivable sur $]-a; a[$. Pour tout nombre réel x de l'intervalle$]-a; a[$, on a : $f'(x) = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -a < x < 0$; $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < a$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

f est strictement décroissante sur $[0 ; a[$ et f est strictement croissante sur $]-a ; 0]$.

f étant continue à droite en $-a$ en non dérivable à droite en ce point, recherchons la possibilité d'une demi-tangente au point A' d'abscisse $-a$.

Pour tout x de $]-a ; 0]$, $\frac{f(x)-f(-a)}{x+a} = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$; d'où : $\lim\limits_{\substack{x \to -a \\ >}} \frac{f(x)-f(-a)}{x+a} = +\infty$. Par suite (C) admet au point A' d'abscisse $-a$ une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

De même, f étant continue à gauche en a en non dérivable à gauche en ce point, recherchons la possibilité d'une demi-tangente au point A d'abscisse a.

Pour tout x de $[0 ; a[$, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$; d'où : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$. Par suite (C) admet au point A d'abscisse a une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

Tableau de variation de f

x	$-a$		0		a
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	||
$f(x)$	0	$\nearrow$	b	$\searrow$	0

Soit (C') la courbe représentative de la fonction qui à tout x associe $-\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. La conique (E) est la réunion de (C) et (C').

Aux points A$(a; 0)$ et A'$(-a; 0)$, (E) admet des tangentes verticales ; aux points B$(0; b)$ et B'$(0; -b)$, (E) admet des tangentes horizontales.

d) et e) Construction de l'ellipse (E) d'équation réduite $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

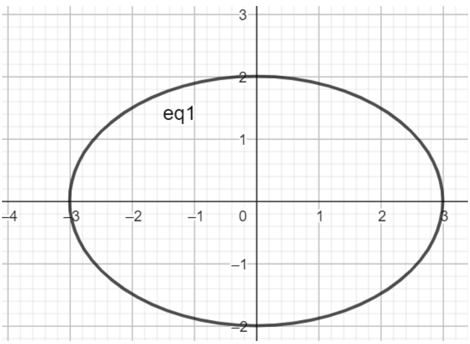
$a = 3, b = 2$

Sommets de (E) : A(3 ; 0), A'(-3 ; 0), B(0 ; 2), B'(0 ; -2).

Axes : petit-axe : [BB'] et grand - axe [AA']

Faites un tableau de valeurs

Placez les tangentes aux sommets



2. Etude de la conique (E')

a) Soit M$(x; y)$ un point du plan d'image N$(X; Y)$ par $S_{(\Delta)}$. On a : $\begin{cases} X = y \\ Y = x \end{cases}$

Supposons que M appartienne à (E'). On a : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (b > a > 0)$; les coordonnées de son image N par $S_{(\Delta)}$ vérifient $\frac{X^2}{b^2} + \frac{Y^2}{a^2} = 1$. Soit (E'') la conique d'équation réduite $\frac{X^2}{b^2} + \frac{Y^2}{a^2} = 1$. D'après ce qui précède, le point N appartient à (E''). D'où : $S_{(\Delta)}(\text{E}') \subset (\text{E}'')$.

L'application $S_{(\Delta)}$ étant une bijection du plan sur lui-même, N admet dans le plan un antécédent M de coordonnées $(x; y)$. De l'égalité $\frac{X^2}{b^2}+\frac{Y^2}{a^2}=1$ et de $\begin{cases} X = y \\ Y = x \end{cases}$, on déduit que $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, (b > a > 0)$. Par suite M appartient à (E'). D'où : $(E'') \subset S_{(\Delta)}(E')$. Par suite : . $S_{(\Delta)}(E') = (E'')$.

On en déduit que : $S_{(\Delta)}(E'') = (E')$. En posant : $a' = b$ et $b' = a$, on a bien : $a' > b'$. L'équation de (E'') est de la nature que (E).

b) Construction de (E')

L'équation de (E'') est : $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$.

Les points de (E'') situés sur l'axe des abscisses ont pour coordonnées $(b; 0)$ et $(-b; 0)$. Leurs images par $S_{(\Delta)}$ sont les points B(0 ; b) et B'(0 ;$-b$) de (H') situés sur l'axe des ordonnées.

Les points de (E'') situés sur l'axe des ordonnées ont pour coordonnées (0 ; a) et (0 ; $-a$). Leurs images par $S_{(\Delta)}$ sont les points A(a ; 0) et B'($-b$; 0) de (H') situés sur l'axe des abscisses.

(E') étant le symétrique de (E) par $S_{(\Delta)}$, on a les résultats suivants :

- Aux points A(a; 0) et A'($-a$; 0), (E) admet des tangentes verticales ;
- Aux points B(0; b) et B'(0; $-b$), (E) admet des tangentes horizontales.

Construction de l'ellipse (E') d'équation réduite $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

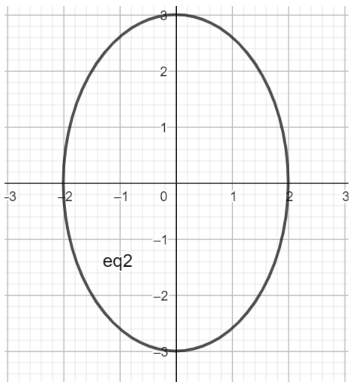
$a = 2, b = 3$

Sommets de (E) : A(2 ; 0), A'(-2 ; 0), B(0 ; 3), B'(0 ; -3).

Axes : petit-axe : [AA'] et grand - axe [BB'].

Faites un tableau de valeurs

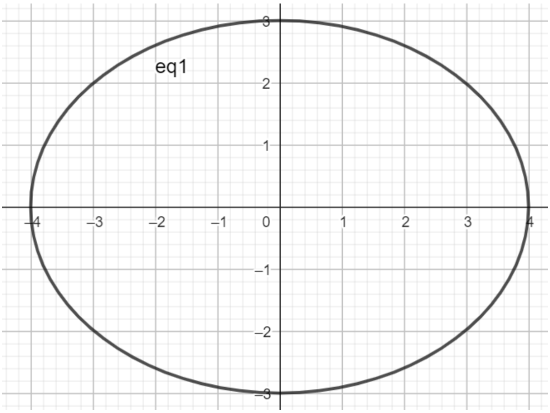
Placez les tangentes aux sommets



Exercices de fixation 5

Faites un tableau de valeurs

Placez les tangentes aux sommets



Activité 6

- L'objectif de cette activité est de connaître les éléments caractéristiques de l'ellipse
- Réponses aux questions de l'activité.

1.

a) Si F appartenait à (D), on aurait $c = \frac{a^2}{c}$, ce qui donne : $a = c$, et donc $b = 0$. Ce qui est impossible, car $b > 0$. Même raisonnement avec F'.

b) b est différent de zéro, d'où : $0 < c < a$. On en déduit que : $0 < e < 1$.

c) $\mathrm{H}(\frac{a^2}{c}\,; y)$.

d) $\mathrm{MF}^2 = (x-c)^2 + y^2$; $(\mathrm{d}(\mathrm{M}\,;\,(\mathrm{D})))^2 = \mathrm{MH}^2 = (\,x - \frac{a^2}{c})^2$.

Démontrons d'abord que $(\mathrm{E}) \cap (\mathrm{D}) = \emptyset$.

S'il existait un point $\mathrm{M}(x; y)$ appartenant à $(\mathrm{E}) \cap (\mathrm{D})$. On a : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et $x = \frac{a^2}{c}$. D'où : $\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{a^2}{c^2}$; par suite : $y^2 = \frac{b^2}{c^2}(c^2 - a^2)$. Le nombre réel positif c étant strictement inférieur à a, $\frac{b^2}{c^2}(c^2 - a^2)$ est négatif. y^2 serait alors strictement négatif, ce qui est impossible. On en déduit que $(\mathrm{E}) \cap (\mathrm{D}) = \emptyset$.

Soit M un point du plan n'appartenant à (D). (Ce qui justifie l'existence du rapport $\frac{\mathrm{MF}^2}{\mathrm{MH}^2}$).

$\frac{\mathrm{MF}^2}{\mathrm{MH}^2} = e^2 \Leftrightarrow (x-c)^2 + y^2 = e^2(\,x - \frac{a^2}{c})^2$;

$\Leftrightarrow x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = e^2(x^2 - 2\frac{a^2}{c}x + \frac{a^4}{c^2})$;

$\Leftrightarrow x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx + a^2$;

$\Leftrightarrow (1-\frac{c^2}{a^2})\,x^2+y^2=a^2-c^2$;

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$;

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

$\Leftrightarrow$ M$\in$ (E).

2. a) Voir 1.b)
   b) Posons : (E') = $S_{(\Delta)}(\text{E}'')$; $(\text{D}_1) = S_{(\Delta)}(\text{D})$ et $\text{F}_1 = S_{(\Delta)}(\text{F})$.
   D'après activité 5, 2.a), (E'') est une conique de la même nature que (E).
   (E'') est l'ellipse d'équation réduite $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$; la droite (D_1) a pour équation : $x=\frac{b^2}{C}$ et le point F_1 a pour coordonnées (c ; 0), avec $e=\frac{c}{b}$.

M$\in$ (E') $\Leftrightarrow \exists\, N \in (\text{E}''), S_{(\Delta)}(\text{N}) = \text{M}$;
$\Leftrightarrow \frac{NF_1}{d(N;(D_1))}=e$, d'après 1.d) ;
$\Leftrightarrow \frac{NF_1}{NH_1}=e$, où H_1 est le projeté orthogonal de N sur (D_1) ;
$\Leftrightarrow \frac{MF}{MH}=e$, où H est l'antécédent de H_1 par $S_{(\Delta)}$ et $S_{(\Delta)}$ conserve la distance ;
$\Leftrightarrow \frac{MF}{d(M;(D))}=e$, car H est le projeté orthogonal de H sur (D).

En effet, soit (δ_1) la perpendiculaire à (D_1) en H_1. L'image (δ) de (δ_1) par $S_{(\Delta)}$ est la perpendiculaire à (D), car $S_{(\Delta)}$ conserve l'orthogonalité. De plus, $S_{(\Delta)}$ étant injective, $\{S_{(\Delta)}(\text{H}_1)\}= S_{(\Delta)}(\delta_1) \cap S_{(\Delta)}(\text{D}_1)$; c'est-à-dire : $\{\text{H}\}= (\delta) \cap (\text{D})$.

Exercice de fixation 6

1.

$a=4, b=3$; on a : $a>b>0$.

a) $c=\sqrt{16-9}, c=\sqrt{7}\,, e=\frac{\sqrt{7}}{4}$;
b) $\text{F}(\sqrt{7};0)$ et $\text{F}'(-\sqrt{7};0)$
c) La directrice (D) associée à F a pour équation : $x=\frac{16}{\sqrt{7}}$ et celle associée à F' a pour équation : $x=-\frac{16}{\sqrt{7}}$.

2. L'ellipse (E) a pour équation $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$.

$a=3, b=4$; on a : $b>a>0$.

a) $c=\sqrt{16-9}, c=\sqrt{7}\,, e=\frac{\sqrt{7}}{4}$;
b) $\text{F}(0;\sqrt{7})$ et $\text{F}'(0;-\sqrt{7})$;
c) La directrice (D) associée à F a pour équation : $y=\frac{16}{\sqrt{7}}$ et celle associée à F' a pour équation : $y=-\frac{16}{\sqrt{7}}$.

Activité 7

- L'objectif de cette activité est l'étude des hyperboles
- Réponses aux questions de l'activité.

1. Etude de la conique (E)

a) Soit S_O la symétrie centrale de centre O. A tout point M du plan de coordonnées $(x; y)$ d'image M'par S_O, de coordonnées $(x'; y')$.

On a : $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$

N$(X; Y) \in S_O$(H) $\Leftrightarrow \exists$ M$(x, y) \in$ (H), N $= S_O$(M);

$\Leftrightarrow \exists\, (x\,; y), \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ et $\begin{cases} X = -x \\ Y = -y \end{cases}$;

$\Leftrightarrow \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$

$\Leftrightarrow$ N $\in$(H).

D'où : S_O(H) = (H).

L'origine O du repère est centre de symétrie de (H).

b) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = (\frac{b}{a})^2(x^2 - a^2)$;

$\Leftrightarrow y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ ou $y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$.

Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère (O ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$).

c) Etude des limites aux bornes de l'ensemble de définition de f

f est définie sur $]-\infty; -a] \cup [a;\ +\infty[$, continue sur les intervalles $]-\infty; -a]$ et $[a;\ +\infty[$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

d) f est dérivable sur les intervalles $]-\infty; -a\,[$ et $]\,a;\ +\infty[$. Sur chacun de ces intervalles où f est dérivable, on a : $f'(x) = \frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]\,a;\ +\infty\,[$; $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -a\,[$.

f est strictement décroissante sur $]-\infty; -a]$ et f est strictement croissante sur $[a;\ +\infty[$.

f étant continue à gauche en $-a$ en non dérivable à gauche en ce point, recherchons la possibilité d'une demi-tangente au point A' d'abscisse $-a$.

Pour tout x de $]-\infty; -a[$, $\frac{f(x)-f(-a)}{x+a} = -\frac{b}{a}\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$; d'où : $\lim\limits_{\substack{x \to -a \\ <}} \frac{f(x)-f(-a)}{x+a} = -\infty$. Par suite (C) admet au point A' d'abscisse $-a$ une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

De même, f étant continue à droite en a en non dérivable à droite en ce point, recherchons la possibilité d'une demi-tangente au point A d'abscisse a.

Pour tout x de $]a;\ +\infty[$, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$; d'où : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$. Par suite (C) admet au point A d'abscisse a une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

Tableau de variation de f

x	$-\infty$ $\qquad$ $-a$		a $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ 0		0 ↗ $+\infty$

d) Pour tout x appartenant à $]-\infty; -a[\cup]a;\ +\infty[$, on a : $f(x) - \frac{b}{a}x = -\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$. D'où :
$\lim\limits_{x \to -\infty}(f(x) - \frac{b}{a}x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty}(f(x) - \frac{b}{a}x) = 0$.

Pour tout x appartenant à $]-\infty; -a[\cup]a;\ +\infty[$, on a : $f(x) + \frac{b}{a}x = -\frac{ab}{-x+\sqrt{x^2-a^2}}$. D'où :
$\lim\limits_{x \to -\infty}(f(x) + \frac{b}{a}x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty}(f(x) + \frac{b}{a}x) = 0$.

Les droites d'équations $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$ sont asymptotes à (C).

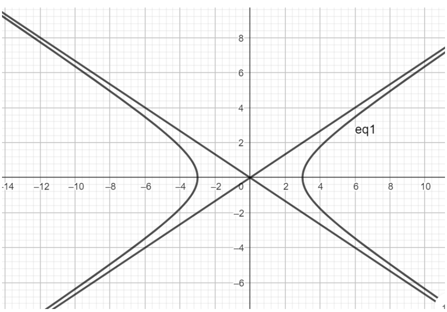
e) Courbe représentative (H)

Soit (C') la courbe représentative de la fonction qui à tout x associe $-\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. La conique (H) est la réunion de (C) et (C').

- Aux points A$(a; 0)$ et A'$(-a; 0)$, (H) admet des tangentes verticales ;
- Les asymptotes de (H) ont pour équations $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$.

Construction de (H) pour $a = 3; b = 2$.

- Sommets : A$(3; 0)$ et A'$(-3; 0)$, tangentes verticales aux points A et A'.
- Asymptotes : $y = \frac{2}{3}x$ et $y = -\frac{2}{3}x$.
  Faites un tableau de valeurs et placez les tangentes aux sommets.



3. Etude de la conique (H')

a) Soit M$(x;y)$ un point du plan d'image N$(X;Y)$ par $S_{(\Delta)}$. On a : $\begin{cases} X = y \\ Y = x \end{cases}$

Supposons que M appartienne à (H'). On a : $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; les coordonnées de son image N par $S_{(\Delta)}$ vérifient $\frac{X^2}{b^2}-\frac{Y^2}{a^2}=1$. Soit (H'') la conique d'équation réduite $\frac{X^2}{b^2}-\frac{Y^2}{a^2}=1$. D'après ce qui précède, le point N appartient à (H''). D'où : $S_{(\Delta)}(\mathrm{H}') \subset (\mathrm{H}'')$.

Réciproquement, soit N un point de (H'') de coordonnées $(X;Y)$. On a : $\frac{X^2}{b^2}-\frac{Y^2}{a^2}=1$. L'application $S_{(\Delta)}$ étant une bijection du plan sur lui-même, N admet dans le plan un antécédent M de coordonnées $(x;y)$. De l'égalité $\frac{X^2}{b^2}-\frac{Y^2}{a^2}=1$ et de $\begin{cases} X = y \\ Y = x \end{cases}$, on déduit que $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Par suite M appartient à (H'). D'où : $(\mathrm{H}'') \subset S_{(\Delta)}(\mathrm{H}')$. Par suite : $S_{(\Delta)}(\mathrm{H}') = (\mathrm{H}'')$.

On en déduit que : $S_{(\Delta)}(\mathrm{H}'') = (\mathrm{H}')$. En posant : $a' = b$ et $b' = a$, on a bien $\frac{X^2}{(a')^2}-\frac{Y^2}{(b')^2}=1$. La conique de (H'') est de la même nature que (H).

b) Construction de (H')

Déterminons des asymptotes de (H').

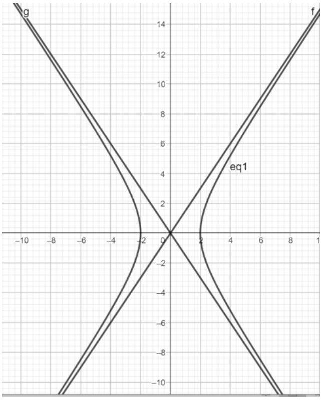
L'équation réduite de (H'') est : $\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$. (H'') étant de même nature que (H'), ses asymptotes ont pour équations : $y=\frac{a}{b}x$ et $y=-\frac{a}{b}x$. De l'égalité $S_{(\Delta)}(\mathrm{H}'') = (\mathrm{H}')$ les images par $S_{(\Delta)}$ des asymptotes de (H'') sont les asymptotes de (H'). Ces asymptotes images ont pour équation : $x=\frac{a}{b}y$ et $x=-\frac{a}{b}y$, ce qui donne : $y=\frac{b}{a}x$ et $y=-\frac{b}{a}x$.

Construction de (H')

- Aux points B$(0;b)$ et B'$(0\,;-b)$, (H') admet des tangentes horizontales, comme images des tangentes verticale de (H'') aux points de coordonnées respectives $(b\,;\,0)\ et\ (-b\,;\,0)$ par $S_{(\Delta)}$;
- Les asymptotes de (H') ont pour équations $y=\frac{b}{a}x$ et $y=-\frac{b}{a}x$.

Construction de (H') pour $a=2$ et $b=3$.

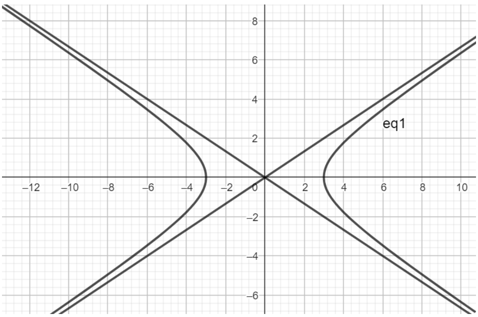
- Sommets : B$(0;3)$ et B'$(0;-3)$, tangentes horizontales aux points B et B'.
- Asymptotes : $y=\frac{3}{2}x$ et $y=-\frac{3}{2}x$.
  Faites un tableau de valeurs et placez les tangentes aux sommets.



Exercices de fixation 7

Construction de (H)

Faites un tableau de valeurs et placez les tangentes aux sommets.



Activité 8

- L'objectif de cette activité est de connaître les éléments caractéristiques de l'hyperbole
- Réponses aux questions de l'activité.

1.

a) Si F appartenait à (D), on aurait $c = \frac{a^2}{c}$, ce qui donne : $a = c$, et donc $b = 0$. Ce qui est impossible, car $b > 0$. Même raisonnement avec F'.

b) b est différent de zéro, d'où : $c > a$. On en déduit que : $e > 1$.

c) $\mathrm{H}(\frac{a^2}{c}\,; y)$.

d) $\mathrm{MF}^2 = (x - c)^2 + y^2$; $(\mathrm{d}(\mathrm{M}\,;\,(\mathrm{D}))^2 = \mathrm{MH}^2 = (\,x - \frac{a^2}{c})^2$.

Démontrons d'abord que $(\mathrm{H}) \cap (\mathrm{D}) = \emptyset$.

Supposons qu'il existe un point M($x; y$) appartenant à (H) ∩ (D). On a : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$=1 et $x = \frac{a^2}{c}$. D'où :

$y^2 = \frac{b^2}{c^2}(a^2 - c^2)$. Le nombre réel c étant strictement supérieur au nombre positif a, $\frac{b^2}{c^2}(a^2 - c^2)$ est négatif. y^2 devient alors strictement négatif, ce qui est impossible. On en déduit que (H) ∩ (D) $= \emptyset$.

Soit M un point du plan n'appartenant à (D). (Ce qui justifie l'existence du rapport $\frac{\mathrm{MF}^2}{\mathrm{MH}^2}$).

$\frac{\mathrm{MF}^2}{\mathrm{MH}^2} = e^2 \Leftrightarrow (x - c)^2 + y^2 = e^2(x - \frac{a^2}{c})^2$;

$\Leftrightarrow x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = e^2(x^2 - 2\frac{a^2}{c}x + \frac{a^4}{c^2})$;

$\Leftrightarrow x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx + a^2$;

$\Leftrightarrow -\frac{b^2}{a^2}x^2 + y^2 = -b^2$;

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;

$\Leftrightarrow$ M∈ (H).

2. Posons : (H') = $S_{(\Delta)}(\mathrm{H''})$; (D_1)= $S_{(\Delta)}$(D) et $\mathrm{F}_1 = S_{(\Delta)}$(F).
   D'après activité 7, 3.a), (H'') est une conique de la même nature que (H).
   (H'') est l'hyperbole d'équation réduite $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$; la droite ($\mathrm{D}_1$) a pour équation : $x = \frac{b^2}{c}$ et le point F_1 a pour coordonnées (c ; 0), avec $e = \frac{c}{b}$.

   M∈ (H') $\Leftrightarrow \exists\, N \in (\mathrm{H''}), S_{(\Delta)}(\mathrm{N}) = \mathrm{M}$;
   $\Leftrightarrow \frac{NF_1}{d(N;(D_1))} = e$, d'après 1.d) ;
   $\Leftrightarrow \frac{NF_1}{NH_1} = e$, où H_1 est le projeté orthogonal de N sur (D_1) ;
   $\Leftrightarrow \frac{MF}{MH} = e$, où H est l'antécédent de H_1 par $S_{(\Delta)}$ et $S_{(\Delta)}$ conserve la distance ;
   $\Leftrightarrow \frac{MF}{d(M;(D))} = e$, car H est le projeté orthogonal de H sur (D).

En effet, soit (δ_1) la perpendiculaire à (D_1) en H_1. L'image (δ) de (δ_1) par $S_{(\Delta)}$ est la perpendiculaire à (D), car $S_{(\Delta)}$ conserve l'orthogonalité. De plus, $S_{(\Delta)}$ étant injective, $\{S_{(\Delta)}(\mathrm{H}_1)\} = S_{(\Delta)}(\delta_1) \cap S_{(\Delta)}(\mathrm{D}_1)$: c'est-à-dire : {H}= (δ) ∩ (D).

Par suite l'hyperbole (H') est l'ensemble des points M du plan tels que : $\frac{MF}{d(M;(D))} = e$.

Exercices de fixation 8

1. a) $a = 4; b = 3$. D'où : $c = \sqrt{16 + 9} = 5$;
   F(5 ; 0) et F'(−5 ; 0) ;
a) (D): $x = \frac{16}{5}$ et (D'): $x = -\frac{16}{5}$;
b) La directrice associée au foyer F' et (D).
2. a) $a = 4; b = 3$. D'où : $c = \sqrt{16 + 9} = 5$;

b) $F(0\,;5)$ et $F'(\,0;-5)$;

c) $(D) : y = \frac{9}{5}$ et $(D') : y = -\frac{9}{5}$.

Errata

A la page 91, les graphiques ont été permutées ;

A la page 93, pour le deuxième graphique : Ellipse (E) dans le cas $b > a > 0$;

A la page 96, dans l'exemple, la directrice (D') a pour équation : $x = -\frac{4\sqrt{13}}{13}$;

A la page 97, dans l'exemple, la directrice (D') a pour équation : $y = -\frac{9\sqrt{13}}{13}$.

3 DES QUESTIONS D'ÉVALUATION

Corrigés de des exercices non corrigés

Exercice non corrigé 1

a) Soit (P) la conique d'équation $x^2 - 6x - 4y + 13 = 0$.

Déterminons l'équation réduite de (P).

$x^2 - 6x - 4y + 13 = (x-3)^2 - 4y + 4$;

$x^2 - 6x - 4. + 13 = (x-3)^2 - 4(y-1)$.

Soit S le point de coordonnées (3 ; 1).

En posant : $X = x - 3$ et $Y = y - 1$, l'équation réduite de (P) dans le repère $(S\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est : $X^2 - 4Y = 0$.

(P) est la parabole de sommet S, de demi-distance focale 2, de foyer F(0 ; 1) et de directrice (D) d'équation $Y = -1$.

Dans le repère $(O\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, en utilisant les relations : $X = x - 3$ et $Y = y - 1$, on a :

- Le couple de coordonnées de F est : (3 ; 2) ;
- La directrice (D) a pour équation : $y = 0$;
- L'axe focal de (P) est la droite d'équation $x = 3$.

b) Soit (H) la conique d'équation $-x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$.

L'équation de (H) peut se réécrire : $-\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$. (H) est une hyperbole donnée par son équation réduite de centre O. On a : $a = 1; b = 2$, d'où :

- $c = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$, l'excentricité $e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{5}}{2}$;
- les foyers F et F' ont pour coordonnées respectives $(0\,; \sqrt{5})$ et $(0\,; -\sqrt{5})$;

- les directrices (D) et (D') associées respectivement à F et F' ont pour équations respectives : $y = \frac{4}{\sqrt{5}}$ et $y = -\frac{4}{\sqrt{5}}$;
- les asymptotes ont équations : $y = 2x$ et $y = -2x$.

c) Soit (H) la conique d'équation $-2x^2 + 5y^2 - 10y + 15 = 0$.

Déterminons l'équation réduite de (H).

$-2x^2 + 5y^2 - 10y + 15 = -2x^2 + 5(y^2 - 2y) + 15$;

$-2x^2 + 5y^2 - 10y + 15 = -2x^2 + 5(y-1)^2 + 10$;

$-2x^2 + 5y^2 - 10y + 15 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{(\sqrt{5})^2} - \frac{(y-1)^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$.

Soit Ω le point de coordonnées (0 ; 1). En posant : X= x; Y = $y - 1$, dans le repère $(\Omega ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, l'équation réduite de (H) est : $\frac{X^2}{(\sqrt{5})^2} - \frac{Y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$.

(H) est l'hyperbole de centre Ω.

$a = \sqrt{5}; b = \sqrt{2}$.

Dans le repère $(\Omega ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$:

- La demi- distance focale : $c = \sqrt{7}$;
- L'excentricité : $e = \frac{c}{a}, e = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$;
- Les foyers F et F' ont pour coordonnées respectives $(\sqrt{7}; 0)$ et $(-\sqrt{7}; 0)$;
- Les directrices respectives associées aux foyers ont pour équations respectives : $X = \frac{5}{\sqrt{7}}$ et $X = -\frac{5}{\sqrt{7}}$;
- L'axe focal a pour équation : Y= 0;
- Les asymptotes de (H) ont équations : $Y = \sqrt{\frac{2}{5}}X$ et $Y = -\sqrt{\frac{2}{5}}X$.

Dans le repère $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, en utilisant : X= x; Y = $y - 1$, on a :

- Les foyers F et F' ont pour coordonnées respectives $(\sqrt{7}; 1)$ et $(-\sqrt{7}; 1)$;
- L'axe focal a pour équation : $y = 1$;
- Les directrices respectives associées aux foyers ont pour équations respectives : $x = \frac{5}{\sqrt{7}}$ et $x = -\frac{5}{\sqrt{7}}$;
- Les asymptotes de (H) ont équations : $y = \sqrt{\frac{2}{5}}x + 1$ et $Y = 1 - \sqrt{\frac{2}{5}}x$.

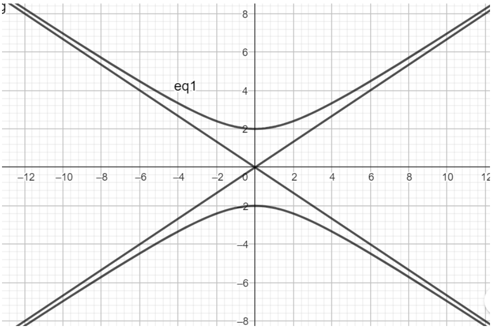
NB. L'excentricité et la demi- distance focale restent inchangées.

Exercice non corrigé 2

1) Représentation graphique de la conique (P) d'équation : $4x^2 - 9y^2 = -36$

(P) est l'hyperbole d'équation réduite : $-\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$.

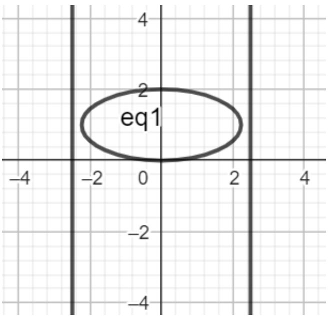
- Sommets : B(0 ; 4) et B'(0 ; -4)
- Foyers : F(0 ; $\sqrt{13}$) et F'(0; $-\sqrt{13}$)
- Directrices : (D) : $y=\frac{4}{\sqrt{13}}$ et (D') : $y=-\frac{4}{\sqrt{13}}$
- Asymptotes : (Δ) : $y=\frac{2}{3}x$ et (Δ) : $y=-\frac{2}{3}x$



2) Représentation graphique de la conique (P) d'équation : $x^2+5y^2-10y=0$

(Q) est l'ellipse d'équation réduite : $\frac{x^2}{(\sqrt{5})^2}+\frac{(y-1)^2}{1^2}=1$.

- Sommets : A($\sqrt{5}$; 0) ; A'($-\sqrt{5}$; 0), B(0 ; 2) et O
- Foyers : F(2 ; 1) et F'(-2; 1)
- Directrices : (D) : $x=\frac{5}{2}$ et (D') : $x=-\frac{5}{2}$



- **Exercices de fixation**

Exercice 1

Toutes, à l'exception de (C_1).

Exercice 2

Toutes, à l'exception de (E_1) et (E_2).

Exercice 3

1. $4x^2+y^2-12x+9=0$

$4x^2+y^2-12x+9=0 \Leftrightarrow 4(x-\frac{3}{2})^2+y^2=0$

$$\Leftrightarrow x=\frac{3}{2} \text{ et } y=0$$

(E_1) est : $\{\mathrm{A}(\frac{3}{2};0)\}$

2. $4x^2+y^2-4x+1=0$

$4x^2+y^2-4x+1=0 \Leftrightarrow 4(x-\frac{1}{2})^2+y^2=0$

(E_2) est : $\{\mathrm{B}(\frac{1}{2};0)\}$

3. $9x^2+y^2-6x+5=0$

$9x^2+y^2-6x+5=0 \Leftrightarrow 9(x-\frac{1}{3})^2+y^2+4=0$

(E_3) est l'ensemble vide.

4. $x^2+3y^2+4x-8=0$

$x^2+3y^2+4x-8=0 \Leftrightarrow (x+2)^2+3y^2-12=0$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)^2}{(2\sqrt{3})^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$$

Soit Ω le point de coordonnées $(-2;0)$. Dans le repère $(\Omega\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, l'équation réduite de

(E_4) est $\frac{X^2}{(2\sqrt{3})^2}+\frac{Y^2}{2^2}=1$, où : X= $x+2$ et Y= y.

Exercice 4

1) Equation réduite de (C_1)

$4x^2+y^2-8x-4y+7=0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{(\frac{1}{2})^2}+(y-2)^2=1$

Soit Ω le point de coordonnées $(1; 2)$. En posant : $X = x - 1; Y = y - 2,$ dans le repère $(\Omega ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, l'équation réduite de (C_1) est : $\frac{X^2}{(\frac{1}{2})^2} + Y^2 = 1,$

2) Equation réduite de (C_2)

$y^2 - 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow y^2 = 2(x - 2)$

Soit S le point de coordonnées $(2 ; 0)$. En posant : $X = x - 2; Y = y,$ dans le repère $(S ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, l'équation réduite de (C_2) est : $Y^2 = 2X$.

3) Equation réduite de (C_3)

$3x^2 - y^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3(x - 1)^2 - y^2 = 3$;

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 - \frac{y^2}{(\frac{1}{3})^2} = 1.$$

Soit Ω le point de coordonnées $(1; 0)$. En posant : $X = x - 1; Y = y,$ dans le repère $(\Omega ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, l'équation réduite de (C_3) est : $X^2 - \frac{Y^2}{(\frac{1}{3})^2} = 1$

4) Equation réduite de (C_4)

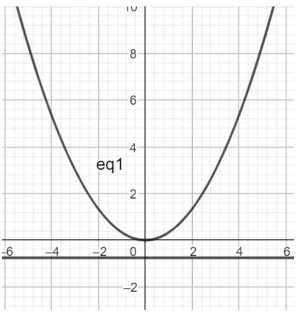
$2x^2 - y^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2(x - 1)^2 - y^2 = -1$;

$$\Leftrightarrow -\frac{(x-1)^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} + y^2 = 1.$$

Soit Ω le point de coordonnées $(1; 0)$. En posant : $X = x - 1; Y = y,$ dans le repère $(\Omega ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, l'équation réduite de (C_3) est : $-\frac{X^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} + Y^2 = 1.$

Exercice 5

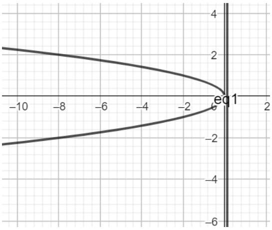
Faites un tableau de valeurs et placez la tangente au sommet.



2) (P') est la parabole d'équation réduite $y^2 = 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) x.$

(P') est de sommet O, de foyer $F(-\frac{1}{8};\ 0)$ et de directrice (D) d'équation $x = \frac{1}{8}$.

Faites un tableau de valeurs et placez la tangente au sommet.



Exercice 6

1) (P) est la parabole d'équation réduite $x^2 = 2 \times y$.

(P) est la parabole de foyer F(0; $\frac{1}{2}$), de directrice (D) d'équation $x = -\frac{1}{2}$ et de paramètre 1.

2) (Q) est la parabole d'équation réduite $y^2 = 2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) x$.

(Q) est la parabole de foyer F($-\frac{3}{4}$; 0), de directrice (D) d'équation $y = \frac{3}{4}$ et de paramètre $\frac{3}{2}$.

3) (R) est la parabole d'équation réduite $x^2 = 2 \times (-2)y$.

(R) est la parabole de foyer F(0; -1), de directrice (D) d'équation $x = 1$ et de paramètre 2.

Exercice 7

1) Représentation graphique de l'ellipse (E) d'équation réduite $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{49} = 1$

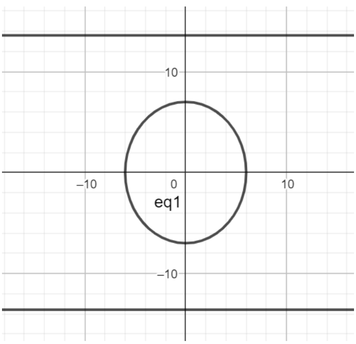
$a = 6, b = 7\ ;\ c = \sqrt{13}$

Sommets de (E) : A(6 ; 0), A'(-6 ; 0), B(0 ; 7), B'(0 ; -7)

Axes : grand-axe : [BB'] et petit-axe [AA']

Foyers : F(0 ; $\sqrt{13}$) et F'(0 ; $-\sqrt{13}$).

Directrices : (D) : $y = \frac{49}{\sqrt{13}}$ et (D') : $y = -\frac{49}{\sqrt{13}}$



2) Représentation graphique de l'ellipse (E') d'équation réduite $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

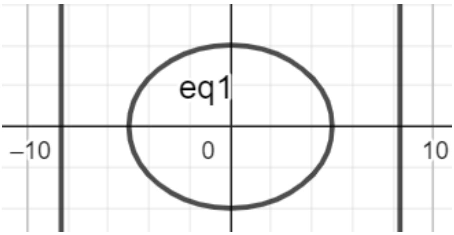
$a=5, b=4$, $c=3$.

Sommets de (E) : A(5 ; 0), A'(-5 ; 0), B(0 ; 4), B'(0 ; -4)

Axes : petit-axe : [BB'] et grand - axe [AA']

Foyers : F(3 ; 0) et F'($-3; 0$).

Directrices : (D) : $x=\frac{25}{3}$ et (D') : $x=-\frac{25}{3}$.



Exercice 9

1. Ellipse (E) d'équation réduite $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

a- $c=\sqrt{5}$;

b- $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$;

c- $F(0;\ \sqrt{5})$ et $F'(0;\ -\sqrt{5})$;

d- $(D)\colon y=\frac{9}{\sqrt{5}}$; $(D')\colon y=-\frac{9}{\sqrt{5}}$.

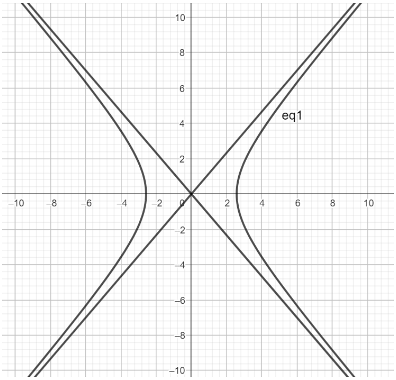
2. Ellipse (E') d'équation réduite $\frac{x^2}{25}+\frac{x^2}{16}=1$
   - a- $c=3$;
   - b- $e=\frac{3}{5}$;
   - c- $F(3;0)$ et $F'(-3;0)$;
   - d- $(D)\colon x=\frac{25}{3}$; $(D')\colon x=-\frac{25}{3}$.

La directrice associée au foyer F est (D), celle associée au foyer F' est (D').

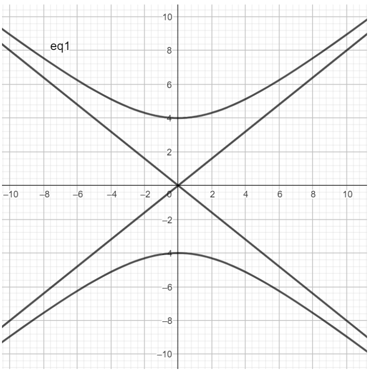
Exercice 10

1. Hyperbole (H) d'équation réduite $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{49}=1$

- Sommets : A(6 ; 0) et A'($-6; 0$) ;
- Asymptotes : $(\Delta)\colon\ y=\frac{7}{6}x$ et $(\Delta')\colon\ y=-\frac{7}{6}x$



2. Hyperbole (H’) d’équation réduite $-\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$
- Sommets : B(0 ; 4) et B’$(0; -4)$;
- Asymptotes : $(\Delta):\ y=\frac{4}{5}x$ et $(\Delta'):\ y=-\frac{4}{5}x$



Exercice 11

1. Hyperbole (H) d’équation réduite $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$

a- $c=2\sqrt{5}$;

b- $e=\frac{\sqrt{5}}{2}$;

c- $\mathrm{F}(2\sqrt{5};\ 0)$ et $\mathrm{F}'(-2\sqrt{5};\ 0)$;

d- (D): $x=\frac{8}{\sqrt{5}}$; (D’): $x=-\frac{8}{\sqrt{5}}$.

2. La directrice associée au foyer F est (D), celle associée au foyer F’ est (D’).

1. Hyperbole (H’) d’équation réduite $x^2-\frac{y^2}{4}=1$

   a- $c=\sqrt{5}$;

   b- $e=\sqrt{5}$;

   c- $\mathrm{F}(\sqrt{5}\,;0)$ et $\mathrm{F}'(-\sqrt{5}\,;0)$;

d- (D): $x = \frac{\sqrt{5}}{5}$; (D′): $x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

2. La directrice associée au foyer F est (D), celle associée au foyer F’ est (D’).

Exercice 12

1. Hyperbole (H’) d’équation réduite $\frac{x^{2}}{12} - \frac{y^2}{8} = -1$

a- $c = 2\sqrt{5}$;

b- $e = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$;

e- $\mathrm{F}(0\,;2\sqrt{5})$ et $\mathrm{F}'(0\,;-2\sqrt{5})$;

f- (D): $y = \sqrt{\frac{2}{5}}$; (D′): $y = -\sqrt{\frac{2}{5}}$.

2. La directrice associée au foyer F est (D), celle associée au foyer F’ est (D’).

Exercice 13

1. (C) est une ellipse
2. (C) est une hyperbole
3. (C) est une parabole

Exercice 14

a) (Γ) : $y^2 = 2 \times (8x)$; $a = 8$.

(Γ) est la parabole de centre O, d’axe focal la droite de repère $(O; \vec{\imath})$, de foyer F(4 ; 0).

b) (Γ) : $y^2 = 2 \times (-8x)$; $a = -8$.

(Γ) est la parabole de centre O, d’axe focal la droite de repère $(O; \vec{\imath})$, de foyer F(−4 ; 0).

Exercice 15

a) (Γ) : $x^2 = 2 \times (5y)$; $a = 5$.

(Γ) est la parabole de centre O, d’axe focal la droite de repère $(O; \vec{\jmath})$, de foyer $\mathrm{F}(0;\ \frac{5}{2})$.

b) (Γ) : $x^2 = 2 \times (-\frac{5}{2}\,y)$; $a = -\frac{5}{2}$.

(Γ) est la parabole de centre O, d’axe focal la droite de repère $(O; \vec{\jmath})$, de foyer $\mathrm{F}(0;\ -\frac{5}{4})$.

Exercice 16

a) (Γ) : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25}$; $a = 3; b = 5$. D’où : $c = 4$.

(Γ) est l’ellipse de centre O, d’axe focal la droite de repère $(O; \vec{\jmath})$, d’excentricité $\frac{4}{5}$, de foyers F(0; 4) et F’(0; −4) et de directrices associées respectives (D) et (D’) d’équation respectives $y = \frac{25}{4}$ et $y = -\frac{25}{4}$

b) (Γ) : $\frac{x^2}{4} + y^2$; $a = 2$; $b = 1$. D'où : $c = \sqrt{3}$.

(Γ) est l'ellipse de centre O, d'axe focal la droite de repère $(O;\vec{\imath})$, d'excentricité $\frac{\sqrt{3}}{2}$, de foyers F$(\sqrt{3};\ 0)$ et F'$(-\sqrt{3};\ 0)$ et de directrices associées respectives (D) et (D') d'équation respectives $x = \frac{4}{\sqrt{3}}$ et $x = -\frac{4}{\sqrt{3}}$.

Exercice 17

a) $-\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, on a : $a = 5$ et $b = 3$, donc : $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{34}$

Nature : (Γ) est hyperbole.

Axe focal : droite de repère $(O;\vec{\jmath})$

Centre : le point O

Excentricité : $e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{34}}{3}$

Foyers : F$(0;\sqrt{34})$ et F'$(0\,;-\sqrt{34})$.

Directrices : $(D) : y = \frac{9}{\sqrt{34}}$ et $(D') : x = -\frac{9}{\sqrt{34}}$.

Sommets : B$(0;3)$ et B$'(0\,;-3)$.

b) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$, on a : $a = 2$ et $b = 1$, donc : $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}$.

Nature : (Γ) est une hyperbole
Axe focal : la droite de repère $(O\,;\vec{\imath})$

Centre : le point O

Excentricité : $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Foyers : $F(\sqrt{5};0)$ et $F'(-\sqrt{5}\,;0)$

Directrices : $(D) : x = -\frac{4\sqrt{5}}{5}$et $(D') : x = -\frac{4\sqrt{5}}{5}$

Sommets : A$(2;0)$et A$'(-2;0)$.

Exercice 18

a) (Γ) : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9}$; $a = 5$; $b = 3$. D'où : $c = 4$.

(Γ) est l'ellipse de centre O, d'axe focal la droite de repère $(O;\vec{\imath})$, d'excentricité $\frac{4}{5}$, de foyers F$(4;\ 0)$ et F'$(-4\,;\ 0)$ et de directrices associées respectives (D) et (D') d'équation respectives $x = \frac{25}{4}$ et $x = -\frac{25}{4}$.

b) (Γ) : $\frac{x^2}{4} - y^2$; $a = 2$; $b = 1$. D'où : $c = \sqrt{5}$.

Nature : (Γ) est une hyperbole

Axe focal : la droite de repère $(O;\vec{\imath})$

Centre : le point O

Excentricité : $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Foyers : $F(\sqrt{5};0)$ et $F'(-\sqrt{5}\,;0)$

Directrices : $(D) : x = -\frac{4\sqrt{5}}{5}$et $(D') : x = -\frac{4\sqrt{5}}{5}$

Sommets : $\mathrm{A}(2;0)$ et $\mathrm{A}'(-2;0)$.

Exercice 19

On a : $y^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow y^2 = 2 \times (-2x)$
$(\mathcal{P})$ est la parabole de sommet 0, d'axe focal la droite de repère $(0;\vec{\imath})$, de foyer $\mathrm{F}(-1;0)$ et de directrice $(\mathcal{D})\colon x = 1$.

Exercice 20

(P) est la parabole d'équation réduite $x^2 = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right) y$.

(P) est de sommet O, d'axe focal la droite de repère $(0;\vec{\jmath})$, de foyer $\mathrm{F}(0;\ \frac{3}{4})$ et de directrice (D) d'équation $y = -\frac{3}{4}$.

Exercice 21

a) Conique (Γ) d'équation $y^2 + 16x - 4y = 12$

$y^2 + 16x - 4y = 0 \Leftrightarrow (y-2)^2 + 16x - 4 = 12$;

$y^2 + 16x - 4y = 0 \Leftrightarrow (y-2)^2 - 2 \times (-8)(x-1) = 0$.

(Γ) est la parabole de sommet $\mathrm{S}(1;2)$, d'axe focal la droite de repère $(\Omega;\ \vec{\imath})$ et de foyer $\mathrm{F}(-3\,;2)$.

b) Conique (Γ) d'équation $x^2 + 2x - 6y = 0$

$x^2 + 2x - 6y = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 - 1 - 6y = 0$;

$x^2 + 2x - 6y = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 - 2 \times 3(y + \frac{1}{6}) = 0$

(Γ) est la parabole de sommet $\mathrm{S}(-1;-\frac{1}{6})$, d'axe focal la droite de repère $(\mathrm{S};\ \vec{\jmath})$ et de foyer $\mathrm{F}(-1\,;\frac{4}{3})$.

Exercice 22

a) Conique (Γ) d'équation $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

$a = 4, b = 3, c = \sqrt{7}$;

(Γ) est l'ellipse de centre O, d'axe focal la droite de repère $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath})$ et de foyers $\mathrm{F}(\sqrt{7}\,;0)$ et $\mathrm{F}'\big(-\sqrt{7}\,;0\big)$.

b) Conique (Γ) d'équation $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$

$a=3, b=4, c=\sqrt{7}$;

(Γ) est l'ellipse de centre O, d'axe focal la droite de repère (O ; $\vec{j}$) et de foyers F(0 ; $\sqrt{7}$) et F'$(0\,;-\sqrt{7})$.

Exercice 23

a) Conique (Γ) d'équation $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

$a=4, b=3, c=5$;

(Γ) est l'hyperbole de centre O, d'axe focal la droite de repère (O ; $\vec{i}$) et de foyers F(5 ; 0) et F'$(-5\,;0)$.

b) Conique (Γ) d'équation $-\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

$a=4, b=3, c=5$;

(Γ) est l'hyperbole de centre O, d'axe focal la droite de repère (O ; $\vec{j}$) et de foyers F(0 ; 5) et F'$(0\,;-5)$.

Exercice 24

$a)$ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$
(Γ) est une ellipse de centre O.
$a=3$ et $b\ =\ 4$, comme $a<b$, l'axe focal est la droite de repère $(O;\vec{\jmath})$.
$c=\sqrt{b^2-a^2}=\ \sqrt{7}$, donc les foyers sont : $F(0;\sqrt{7})$et $F'(0;-\sqrt{7})$.
b) $-\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$
(Γ) est une hyperbole de centre $\Omega(1;-2)$, d'axe focal la droite de repère $(\Omega;\ \vec{\jmath})$.
$a=2$ et $b\ =\ 3$, donc $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{13}$.
Dans le repère $(\Omega;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on a : les foyers $F(0;\sqrt{13})$ et $F'(0;-\sqrt{13})$
Soit $M(X;Y)$ dans $(\Omega,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et $M(x;y)$ dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on a : $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{O\Omega}+\overrightarrow{\Omega M}$, alors $\begin{cases} x=1+X \\ y=-2+Y\end{cases}$
En remplaçant X par 0 et Y par $\sqrt{13}$, on obtient dans le repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, $F(1;-2+\sqrt{13})$.
En remplaçant X par 0 et Y par $-\sqrt{13}$, on obtient dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, $F'(1;-2-\sqrt{13})$.

Exercice 25

1) $2y^2+3x=0 \Leftrightarrow y^2=2\times(-\frac{3}{4})x$, avec $a=-\frac{3}{4}$

Le sommet de la parabole est O, l'axe focal est la droite de repère $(O;\vec{\imath})$ et le foyer est $F(-\frac{3}{8},0)$.

2) $x^2=2\times(-\frac{3}{2}y)$, avec $a=-\frac{3}{2}$

Le sommet de la parabole est O, l'axe focal est la droite de repère $(O;\vec{\jmath})$ et le foyer est $F(0;\ -\frac{3}{4})$.

Exercice 26

1) $y^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow y^2 = 2 \times (-2)x$, avec $a = -2$

Le sommet de la parabole est O, l'axe focal est la droite de repère $(O; \vec{\imath})$ et le foyer est F$(-1, 0)$.

2) $x^2 = 2 \times (\frac{5}{4}y)$, avec $a = \frac{5}{4}$

Le sommet de la parabole est O, l'axe focal est la droite de repère $(O; \vec{\jmath})$ et le foyer est F(0; $\frac{5}{8}$).

Exercice 27

1) $2y^2 + 7x = 0 \Leftrightarrow y^2 = 2 \times (-\frac{7}{2})x$, avec $a = -\frac{7}{2}$

Le sommet de la parabole est O, l'axe focal est la droite de repère $(O; \vec{\imath})$ et le foyer est F$(-\frac{7}{4}, 0)$.

2) $x^2 = 2 \times (\frac{3}{2}y)$, avec $a = \frac{3}{2}$

Le sommet de la parabole est O, l'axe focal est la droite de repère $(O; \vec{\jmath})$ et le foyer est F(0; $\frac{3}{4}$).

- **Exercices de renforcement /Approfondissement**

Les exercices d'approfondissement commencent ici.

Exercice 28

1. Conique (Γ) d'équation $9x^2 - 16y^2 + 18x - 32y - 151 = 0$

$9x^2 - 16y^2 + 18x - 32y - 151 = 0 \Leftrightarrow 9(x+1)^2 - 9 - 16(y+1)^2 + 16 - 151 = 0$;

$9x^2 - 16y^2 + 18x - 32y - 151 = 0 \Leftrightarrow 9(x+1)^2 - 16(y+1)^2 = 144$;

$9x^2 - 16y^2 + 18x - 32y - 151 = 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$.

2. Nature et éléments caractéristiques de (Γ)

Soit Ω le point de coordonnées $(-1; -1)$.

Dans le repère $(\Omega; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$:

En posant : $X = x + 1; Y = y + 1$, (Γ) est l'hyperbole d'équation réduite $\frac{X^2}{16} - \frac{Y^2}{9} = 1$ d'axe focal $(\Omega; \vec{\imath})$.

Sommets : A(4 ; 0) et A'(−4 ; 0) ;

Demi-distance focale : $c = \sqrt{9 + 16} = 5$;

Excentricité : $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$;

Foyers : F$(5; 0)$ et F'$(-5; 0)$;

Directrices associées : (D) : $X = \frac{16}{5}$; (D') : $Y = -\frac{16}{5}$;

Asymptotes : (Δ) : $Y = \frac{3}{4}X$; (Δ') : $Y = -\frac{3}{4}X$.

Dans le repère $(0; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$: avec $x = X - 1; y = Y - 1$

Sommets : A$(3 ; -1)$ et A'$(-5 ; -1)$;

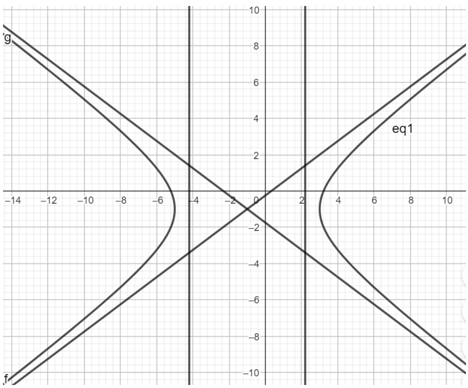
Demi-distance focale : $c = \sqrt{9 + 16} = 5$;

Excentricité : $e = \frac{5}{4}$;

Foyers : F$(4; -1)$ et F'$(-6; -1)$;

Directrices associées : (D) : $x = \frac{11}{5}$; (D') : $x = -\frac{21}{5}$;

Asymptotes : (Δ): $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$; (Δ'): $y = -\frac{3}{4}x - \frac{7}{4}$.



Exercice 29

Conique (Γ) d'équation $4x^2 + 2y^2 - 8x + 4y + 5 = 0$ (A rectifier dans le manuel)

1. $4x^2 + 2y^2 - 8x + 4y + 5 = 0 \Leftrightarrow 4(x-1)^2 - 4 + 2(y+1)^2 - 2 + 5 = 0$;
   $4x^2 + 2y^2 - 8x + 4y + 5 = 0 \Leftrightarrow 4(x-1)^2 + 2(y+1)^2 = 1$;

$4x^2 + 2y^2 - 8x + 4y + 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{(\frac{1}{2})^2} + \frac{(y+1)^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 1.$

Soit Ω le point de coordonnées $(1; -1)$.

Dans le repère $(\Omega; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$:

En posant : $X = x - 1 ; Y = y + 1$, (Γ) est l'ellipse d'équation réduite $\frac{X^2}{(\frac{1}{2})^2} + \frac{Y^2}{(\frac{1}{\sqrt{2})})^2} = 1$ d'axe focal

$(\Omega ; \vec{j})$.

2. Eléments caractéristiques de (Γ)
   a) Dans le repère $(\Omega ; \vec{i}, \vec{j})$:

Sommets : $A(\frac{1}{2} ; 0)$, $A'(-\frac{1}{2} ; 0)$, $B(0 ; \frac{1}{\sqrt{2}})$ et $B'(0 ; -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Demi-distance focale : $c = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$;

Excentricité : $e = \frac{c}{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

Foyers : $F(0 ; \frac{1}{2})$ et $F'(0 ; -\frac{1}{2})$;

Directrices associées : (D) : $Y = 1$; (D') : $Y = -1$;

   b) Dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ $x = X + 1 ; y = Y - 1$

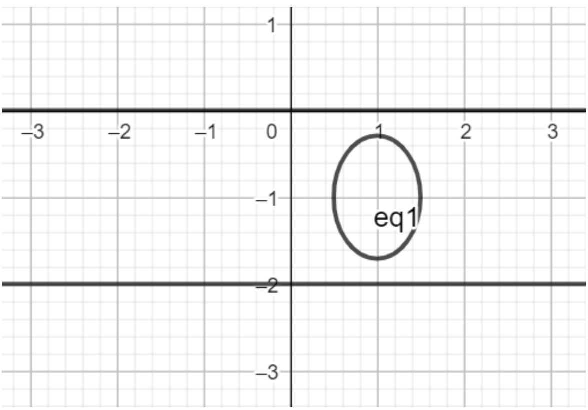
Sommets : $A(\frac{3}{2} ; -1)$, $A'(\frac{1}{2} ; -1)$, $B(1 ; \frac{1}{\sqrt{2}} - 1)$ et $B'(1 ; -\frac{1}{\sqrt{2}} - 1)$.

Demi-distance focale : $c = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$;

Excentricité : $e = \frac{c}{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

Foyers : $F(1 ; -\frac{1}{2})$ et $F'(1 ; -\frac{3}{2})$;

Directrices associées : (D) : $y = 0$; (D') : $y = -2$



Exercice 30

a) Conique (Γ) d'équation $25x^2 - 16y^2 - 250x - 64y + 161 = 0$

$25x^2 - 16y^2 - 250x - 64y + 161 = 0 \Leftrightarrow 25(x^2 - 10x) - 16(y^2 + 4y)+161= 0;$

$25x^2 - 16y^2 - 250x - 64y + 161 = 0 \Leftrightarrow 25(x-5)^2 - 16(y+2)^2 = 20^2$;

$25x^2 - 16y^2 - 250x - 64y + 161 = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-5)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{25} = 1.$

(Γ) est l'hyperbole de centre $\Omega(5; -2)$, d'axe focal la droite de repère $(\Omega; \vec{\imath})$ et d'équation réduite $\frac{X^2}{16} - \frac{Y^2}{25} = 1$, dans le repère $(\Omega; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, en posant : X= $x - 5$ et Y $= y + 2$.

Eléments caractéristiques de (Γ) *dans le repère* $(\Omega; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Sommets : A(4 ; 0) et A'(−4 ; 0) ;

Demi-distance focale : $c = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$;

Excentricité : $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{41}}{4}$;

Foyers : $F(\sqrt{41}; 0)$ et $F'(-\sqrt{41}; 0)$;

Directrices associées : (D) : $X = \frac{16}{\sqrt{41}}$; (D') : $X = -\frac{16}{\sqrt{41}}$;

Asymptotes : $(\Delta) : Y = \frac{5}{4}X$; $(\Delta') : Y = -\frac{5}{4}X$.

Eléments caractéristiques de (Γ) *dans le repère* $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, X+5 $= x$ et Y $-2 = y$.

Sommets : A(9 ; −2) et A'(1 ; −2) ;

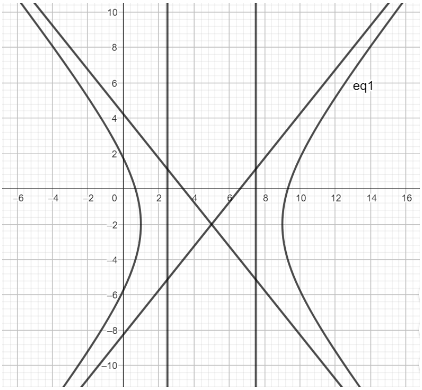
Demi-distance focale : $c = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$;

Excentricité : $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{41}}{4}$;

Foyers : $F(\sqrt{41}+5; -2)$ et $F'(5-\sqrt{41}; -2)$;

Directrices associées : (D) : $x = 5 + \frac{16}{\sqrt{41}}$; (D') : $x = 5 - \frac{16}{\sqrt{41}}$;

Asymptotes : $(\Delta) : y = \frac{5}{4}x - \frac{33}{4}$; $(\Delta') : : y = -\frac{5}{4}x + \frac{17}{4}$.



b) Conique (Γ) d'équation $4x^2 + y^2 + 8x + 4y - 8 = 0$

$4x^2 + y^2 + 8x + 4y - 8 = 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$

(Γ) est l'ellipse de centre $\Omega(-1;-2)$, d'axe focal la droite de repère $(\Omega;\ \vec{j})$ et d'équation réduite

$\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{16} = 1$, dans le repère $(\Omega; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$,

a) Eléments caractéristiques dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, en posant : $x = X - 1; y = Y - 2$

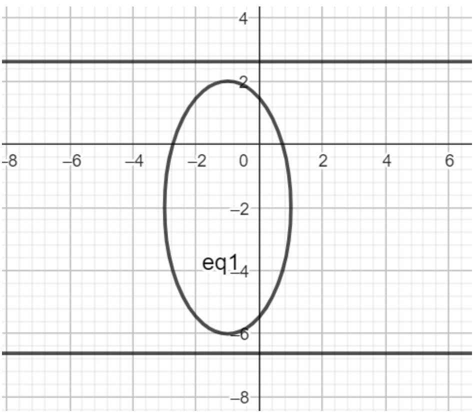
Sommets : A(1 ; −2), A'(−3 ; −2), B(−1; 2) et B'(−1; −6).

Demi-distance focale : $c = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$;

Excentricité : $e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

Foyers : $F(-1; 2\sqrt{3} - 2)$ et $F'(-1; -2\sqrt{3} - 2)$;

Directrices associées : (D) : $y = -2 + \frac{8}{\sqrt{3}}$; (D') : $y = -2 - \frac{8}{\sqrt{3}}$.



Exercice 31

1) $3x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow -\frac{(x+\frac{1}{3})^2}{\frac{2}{9}} + \frac{y^2}{\frac{2}{3}} = 1$

$(\mathcal{H})$ est l'hyperbole de centre $\Omega(-\frac{1}{3}; 0)$, d'axe focal la droite de repère $(\Omega; \vec{j})$

on a : $a^2 = \frac{2}{9}$ et $b^2 = \frac{2}{3}$, donc $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{8}{9}$

L'excentricité e $= \frac{c}{b} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

<u>Dans le repère $(\Omega; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$</u> :

Sommets : $B\left(0; \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$et $B'\left(0; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

Foyers : $F(0; \frac{2\sqrt{2}}{3})$ et $F'\left(0; -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

Directrices : $(D) : Y = \frac{\sqrt{2}}{2}$et $(D') : Y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Asymptotes : $(\Delta) : Y = \sqrt{3}X$et $(\Delta') : Y = -\sqrt{3}X$

<u>Dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$</u> :

Sommets situés : $B\left(-\frac{1}{3}; \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ et $B'\left(-\frac{1}{3}; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

Foyers : F$\left(-\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{8}}{3}\right)$ et F'$\left(-\frac{1}{3}; -\frac{\sqrt{8}}{3}\right)$

Directrices : $(D) : y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $(D') : y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Asymptotes : $(\Delta) : y = \sqrt{3}\left(x + \frac{1}{3}\right)$ et $(\Delta') : y = -\sqrt{3}\left(x + \frac{1}{3}\right)$

2) a) $A; M$ et M' sont alignés $\Leftrightarrow \frac{z^4-1}{z-1}$ est un nombre réel

$\Leftrightarrow 1 + z + z^2 + z^3$ est un nombre réel

b) L'ensemble des points M(z) du plan tels que $1 + z + z^2 + z^3$ est un nombre réel.

On pose : $z = x + iy$

On a: $1 + z + z^2 + z^3 = 1 + x + yi + (x + yi)^2 + (x + yi)^3$

$= (1 + x + x^2 - y + x^3 - 3xy^2) + y(3x^2 - y^2 + 2x + 1)i$

$1 + z + z^2 + z^3$ est un nombre réel $\Leftrightarrow y(3x^2 - y^2 + 2x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow y = 0$ ou $3x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0$

L'ensemble des points M(z) du plan tels que $1 + z + z^2 + z^3$ est un nombre réel est la réunion de la droite de repère $(O; \vec{\imath})$ et de l'hyperbole $(\mathcal{H})$.

Exercice 32

Le repère considéré est (O ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$)

1. e étant inférieur à 1, (C) est une ellipse. Son équation réduite est de la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

L'axe focal étant (Ox), a est supérieur à b et $e = \frac{c}{a}$; d'où : $c = 2$. Or, $c^2 = a^2 - b^2$, donc : $b^2 = 12$. Par suite l'équation réduite de (C) est : $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

2. e étant inférieur à 1, (C) est une ellipse. Son équation réduite est de la forme $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

L'axe focal étant (Oy), b est supérieur à a et $e=\frac{c}{b}$; d'où : $c=\frac{b}{2}$. Or, $c^2=b^2-a^2$, donc : $b^2=\frac{64}{3}$. Par suite l'équation réduite de (C) est : $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{\frac{64}{3}}=1$.

3. e étant supérieur à 1, (C) est une hyperbole. L'axe focal étant (Ox), l'équation réduite de (C) est de la forme $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. L'excentricité e vérifie $e=\frac{c}{a}$, d'où : $c=12$. Or, $c^2=a^2+b^2$, donc : $b^2=c^2-a^2=128$. Par suite l'équation réduite de (C) est : $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{128}=1$.

4. e étant supérieur à 1, (C) est une hyperbole. L'axe focal étant (Oy), l'équation réduite de (C) est de la forme $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. L'excentricité e vérifie $e=\frac{c}{b}$, d'où : $c=3b$. Or, $c^2=a^2+b^2$, donc : $b^2=2$. Par suite l'équation réduite de (C) est : $-\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{2}=1$.

Exercice 33

Le repère considéré est (O ; $\vec{\imath},\vec{\jmath}$)

a) (C) est une parabole car l'excentricité est 1. La directrice étant parallèle à l'axe des ordonnées, (C) a une équation de la forme $y^2=2ax,$ où a est un nombre réel non nul. Une équation de cette directrice est $x=-\frac{a}{2}$. Par suite : $a=-2$.

L'équation réduite de (C) est : $y^2=-4x$.

b) (C) est une ellipse car l'excentricité est inférieure à 1. Son équation réduite est de la forme $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. La directrice donnée étant parallèle à l'axe des abscisses, on a : $a>b$. L'excentricité e est égal à $\frac{1}{3}$; or, $e=\frac{c}{a}$, donc : $a=3c$. L'équation de cette directrice est dans ce cas : $x=\frac{a^2}{c}$. Par suite : $a^2=c$. On en déduit que $9c^2=c$. On a : $c=\frac{1}{9}$ et $a=\frac{1}{3}$. Or, $c^2=a^2-b^2$, donc : $b^2=a^2-c^2=\frac{8}{81}$. L'équation réduite de (C) est : $\frac{x^2}{\frac{1}{9}}+\frac{y^2}{\frac{8}{81}}=1$.

c) (C) est une hyperbole car l'excentricité est supérieure à 1. La directrice donnée étant parallèle à l'axe des ordonnées, l'équation réduite de (C) est de la forme $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

L'excentricité e est égale à 3 ; or, $e=\frac{c}{a}$, donc : $c=3a$.

La directrice étant parallèle à l'axe des ordonnées, son équation est $x=\frac{a^2}{c}$. Par suite $a^2=c$. On en déduit que $\frac{1}{9}c^2=c$. D'où : $c=9$ et $a=3$. Or, $c^2=a^2+b^2$, donc : $b^2=c^2-a^2=72$. L'équation réduite de (C) est : $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{72}=1$.

Exercice 34

Le repère considéré est (O ; $\vec{\imath},\vec{\jmath}$). **Il faut remplacer l'axe (ox) par la droite d'équation $y = -1$.**

1. (C) est une parabole car l'excentricité est 1. La directrice étant l'axe des abscisses, (C) a une équation de la forme $x^2 = 2ay$, où a est un nombre réel non nul. Une équation de cette directrice est $y = -\frac{a}{2}$. Par suite : $a = 2$. L'équation réduite de (C) est $x^2 = 4y$.
2. (C) est une ellipse car l'excentricité est inférieure à 1. Son équation réduite est de la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. La directrice donnée étant parallèle à l'axe des abscisses, on a : $b > a$. L'excentricité e est égal à $\frac{1}{\sqrt{2}}$; or, $e = \frac{c}{b}$, donc : $b = c\sqrt{2}$.

   L'équation de cette directrice est dans ce cas : $y = -\frac{b^2}{c}$. Par suite $b^2 = c$. On en déduit que $2c^2 = c$. On a : $c = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Or, $c^2 = b^2 - a^2$, donc : $a^2 = b^2 - c^2 = \frac{1}{4}$. L'équation réduite de (C) est : $\frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$.
3. (C) est une hyperbole car l'excentricité est supérieure à 1. La directrice donnée étant parallèle à l'axe des abscisses, l'équation réduite de (C) est de la forme $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

L'excentricité e est égal à $\sqrt{2}$; or, $e = \frac{c}{b}$, donc : $c = b\sqrt{2}$.

L'équation de cette directrice est dans ce cas : $y = -\frac{b^2}{c}$. Par suite $b^2 = c$. On en déduit que :

Par suite $c^2 = 2c$. D'où : $c = 2$ et $b = \sqrt{2}$. Or, $c^2 = a^2 + b^2$, donc : $a^2 = c^2 - b^2 = 2$. L'équation réduite de (C) est : $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$. C'est une hyperbole équilatère**.**

4. (C) est une hyperbole car l'excentricité est supérieure à 1. La directrice donnée étant parallèle à l'axe des abscisses, l'équation réduite de (C) est de la forme $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

L'excentricité e est égal à $\sqrt{3}$; or, $e = \frac{c}{b}$, donc : $c = b\sqrt{3}$.

L'équation de cette directrice est dans ce cas : $y = -\frac{b^2}{c}$. Par suite $b^2 = c$. On en déduit que :

Par suite $c^2 = 3c$. D'où : $c = 3$ et $b = \sqrt{3}$. Or, $c^2 = a^2 + b^2$, donc : $a^2 = c^2 - b^2 = 6$. L'équation réduite de (C) est : $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$.

Exercice 35

Conique (C_m) d'équation $mx^2 + (m+2)y^2 + 2mx - (4m+4)y - 2 = 0$

Posons : $P_m(x; y) = (m-1)x^2 + (m+1)y^2 + 2(m-1)x - (4m+4)y - 4m - 3$.

Premier cas : $m = 1$

$P_1(x; y) = 2y^2 - 8y - 7$;

$P_1(x; y)$ est un trinôme du second degré en y dont le discriminant est strictement positif. Il possède deux zéros y_1 et y_2 (Il faut les calculer).

$P_1(x;y) = 0 \Leftrightarrow y = y_1$ ou $y = y_2$

(C_1) est la réunion des deux droites d'équations $y = y_1$ et $y = y_2$.

Deuxième cas : $m = -1$

$P_{-1}(x;y) = -2x^2 - 4x + 1$;

$P_{-1}(x;y)$ est un trinôme du second degré en x dont le discriminant est strictement positif. Il possède deux zéros x_1 et x_2 (Il faut les calculer).

$P_{-1}(x;y) = 0 \Leftrightarrow x = x_1$ ou $x = x_2$

(C_{-1}) est la réunion des deux droites d'équations $x = x_1$ et $x = x_2$.

Troisième cas : $m \neq 1$ et $m \neq -1$

$P_m(x;y) = (m-1)(x+1)^2 + (m+1)(y-2)^2 - 9m - 6$

$P_m(x;y) = 0 \Leftrightarrow (m-1)(x+1)^2 + (m+1)(y-2)^2 = 9m + 6$

a) $m = -\frac{2}{3}$

$P_{\frac{2}{3}}(x;y) = 0 \Leftrightarrow (y-2)^2 - 5(x+1)^2 = 0$;

$P_{\frac{2}{3}}(x;y) = 0 \Leftrightarrow y - \sqrt{5}x - 2 - \sqrt{5} = 0$ ou $y + \sqrt{5}x - 2 + \sqrt{5} = 0$.

$(C_{\frac{2}{3}})$ est la réunion des deux droites d'équations $y - \sqrt{5}x - 2 - \sqrt{5} = 0$ et $y + \sqrt{5}x - 2 + \sqrt{5} = 0$.

b) $m \neq -\frac{2}{3}$

$P_m(x;y) = 0 \Leftrightarrow \frac{m-1}{9m+6}(x+1)^2 + \frac{m+1}{9m+6}(y-2)^2 = 1$

Après un tableau de signes, on a :

Si $m \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, alors (C_m) est une ellipse ;

Si $m \in]-1; -\frac{2}{3}[\cup]-\frac{2}{3}; 1[$, alors (C_m) est une hyperbole.

Exercice 36

Conique (C_m) d'équation $mx^2 + (m+2)y^2 + 2mx - (4m+4)y - 2 = 0$

Posons : $P_m(x;y) = mx^2 + (m+2)y^2 + 2mx - (4m+4)y - 2$.

Premier cas : $m = 0$

L'équation de (C_0) est : $y^2 - 2y - 1 = 0$

$y^2 - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow (y-1)^2 - 2 = 0$;

$y^2 - 2y - 1 \Leftrightarrow y = 1 + \sqrt{2}$ ou $y = 1 - \sqrt{2}$.

(C_0) est la réunion des deux droites d'équations $y = 1 + \sqrt{2}$ et $y = 1 - \sqrt{2}$.

Deuxième cas : $m = -2$

L'équation de (C_{-2}) est : $x^2 + 2x - 2y + 1 = 0$

$x^2 + 2x - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 - 2y = 0.$

L'équation de (C_{-2}) est une parabole.

Troisième cas : $m \neq 0$ et $m \neq -2$.

$$P_m(x;y) = m(x+1)^2 + (m+2)\left(y - \frac{2(m+1)}{m+2}\right)^2 - m - \frac{4(m+1)^2}{m+2} - 2;$$

$$P_m(x;y) = m(x+1)^2 + (m+2)\left(y - \frac{2(m+1)}{m+2}\right)^2 - \frac{5m^2+12m+8}{m+2};$$

$$P_m(x;y) = 0 \Leftrightarrow m(x+1)^2 + (m+2)\left(y - \frac{2(m+1)}{m+2}\right)^2 = \frac{5m^2+12m+8}{m+2}$$

Le discriminant réduit de $5m^2 + 12m + 8$ est -4. Ce qui veut dire que $5m^2 + 12m + 8$ est strictement positif pour tout nombre réel m.

$$P_m(x;y) = 0 \Leftrightarrow \frac{m(m+2)}{5m^2+12m+8}(x+1)^2 + \frac{(m+2)^2}{5m^2+12m+8}\left(y - \frac{2(m+1)}{m+2}\right)^2 = 1.$$

Après un tableau de signes, on a :

a) Si $m \in]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[$, alors (C_m) est une ellipse ;
b) Si $m \in]-2; 0[$, alors (C_m) est une hyperbole.

Exercice 37

Courbe (C) d'équation $x^2 + 6\sqrt{3}\,xy - 5y^2 - 24 = 0$

1. Soit M un point du plan. On note $(x;y)$ ses coordonnées dans le repère $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et (X ; Y) ses coordonnées dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. On a la relation : $x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = X\vec{u} + Y\vec{v}$. Ce qui donne :

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}X - \frac{1}{2}Y \\ y = \frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y \end{cases}$$

En reportant les valeurs de x et y dans l'équation, on obtient :

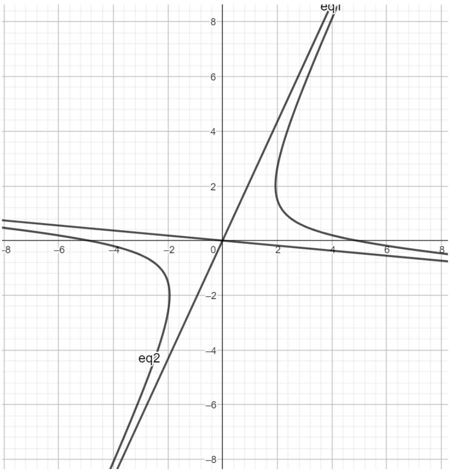
$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}X - \frac{1}{2}Y\right)^2 + 6\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}X - \frac{1}{2}Y\right)\left(\frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y\right) - 5\left(\frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y\right)^2 - 24 = 4X^2 - 8Y^2 - 24$$

$$4X^2 - 8Y^2 - 24 = 0 \Leftrightarrow \frac{X^2}{6} - \frac{Y^2}{3} = 1$$

L'équation réduite de (C) dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ est : $\frac{X^2}{6} - \frac{Y^2}{3} = 1$.

2. (C) est une hyperbole de centre O
3. Construction de (C)

Les asymptotes de (C) dans le repère (O ; $\vec{u}, \vec{v}$) ont pour équations Y= $\frac{\sqrt{2}}{2}$X et Y= $-\frac{\sqrt{2}}{2}$X.



Exercice 38

Courbe (C) d'équation $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8x + 8y = 0$

1. Soit M$(x; y)$ un point du plan, d'image M'$(x'; y')$ par s.

Par r, l'image de M donne M_1 de coordonnées $(x_1;\ y_1)$est telles que : $\begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases}$

Par h, l'image de M_1 de coordonnées $(x_1;\ y_1)$ donne M'telles que : $\begin{cases} x' = \sqrt{2}x_1 \\ y' = \sqrt{2}y_1 \end{cases}$

Par suite, l'image de M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ donne M' de coordonnées $(x'; y')$ telles que :
$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}$

On en déduit que : $\begin{cases} 2x = x' + y' \\ 2y = -x' + y' \end{cases}$

2. En reportant les valeurs précédentes dans l'équation de (C), on obtient $x'^2 + 4y'^2 - 8x' = 0$. On désigne par (C') la courbe d'équation $x'^2 + 4y'^2 - 8x' = 0$

Réciproquement N de (C') un point de coordonnées (X ; Y). La similitude étant une bijection du plan sur lui-même, soit M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ l'antécédent de N par s. On a : $\begin{cases} X = x - y \\ Y = x + y \end{cases}$

On peut donc écrire : $(x - y)^2 + 4(x + y)^2 - 8(x - y) = 0$, d'où : $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8x + 8y = 0$.

Par suite M appartient à (C). On conclut que : $s(\mathrm{C}) = (\mathrm{C}')$.

(C') est l'ellipse d'équation réduite : $\frac{(X-4)^2}{16}+\frac{1}{4}Y^2 = 1$, dans le repère $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

Le cours n'a pas établi que l'image par une similitude directe d'une conique est une conique de même excentricité. Ici l'excentricité e de (C') est $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (vérifiez le calcul)

Soit S la bijection réciproque de s. On a : S(C') = (C).

Soit G un foyer de (C') et (δ) la directrice associée, M un point du plan, et H son projeté orthogonal sur la droite (D), image de S par (δ).

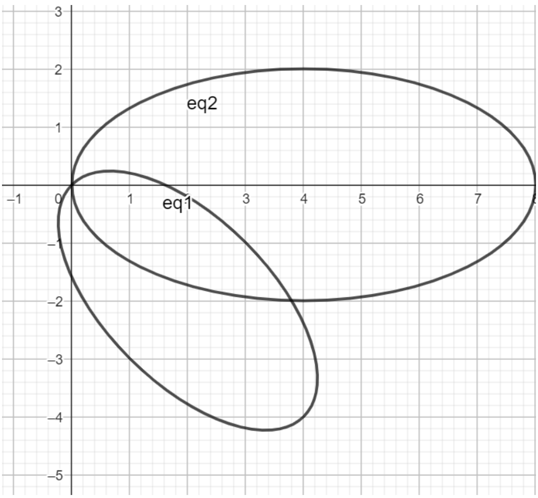
$M \in (C) \Leftrightarrow s(M) \in (C')$;

$\Leftrightarrow \frac{s(M)G}{s(M)K} = e$, où K est le projeté orthogonal de $s(M)$ sur (δ).

$\Leftrightarrow \frac{s(M)s(F)}{s(M)s(H)} = e$, où $s(F)$ =G et $s(H) = K$;

$\Leftrightarrow \frac{MF}{MH} = e$, par conservation du rapport de distance.

(C) est l'ellipse de foyer F et de directrice associée (D).



(C) est l'ellipse dont l'axe n'est pas parallèle à (Ox) et l'ellipse (C') qui n'est pas demandée a pour axe (Ox).

Pour la construction de (C), il faut utiliser la relation S(C') = (C) pour déterminer les sommets et le centre de (C) à partir des sommets et le centre de (C') et d'un tableau de valeurs à partir de l'équation $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8x + 8y = 0$.

On utilise $\begin{cases} X = x - y \\ Y = x + y \end{cases}$ qui équivaut $\begin{cases} x = \frac{1}{2}(X+Y) \\ y = \frac{1}{2}(Y-X) \end{cases}$

Dans le repère $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath})$:

Centre de (C’) : point de coordonnées (4 ; 0) ;

Centre de (C) : point de coordonnées (2 ; −2) ;

Sommets de (C’) : points de coordonnées A_1 (0 ; 0), A_1'(8 ; 0), B_1 (4 ; 2), B_1'(4 ; −2) ;

Sommets de (C) : points de coordonnées A (0 ; 0), A'(4 ; −4), B (3 ; −1), B_1'(1 ; −3).

Exercice 39

1. a) K($\frac{5}{2}$; $\frac{3}{2}$)

   b) (Γ) est l’ensemble des points M du plan tels que : $\frac{MF}{MH} = 2$, où H est le projeté orthogonal de M sur (D).

$MF^2 = (x-4)^2 + y^2$; $MH^2 = \frac{(x-y-1)^2}{2}$

$\frac{MF}{MH} = 2 \Leftrightarrow (x-4)^2 + y^2 = 2(x-y-1)^2$;

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4xy + 4x + 4y - 14 = 0$

2. Dans l’équation de (Γ) se trouve une forme rectangulaire (xy). Faisons le changement de repère par rotation des axes pour éliminer cette forme rectangulaire. (A donner aux élèves comme indication)

On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que : $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{\imath} + \vec{\jmath})$ et : $\vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{\imath} + \vec{\jmath})$.

Soit M un point du plan. On note $(x; y)$ ses coordonnées dans le repère (O ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$) et (X ; Y) ses coordonnées dans le repère (O ; $\vec{u}, \vec{v}$). On a la relation : $x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = X\vec{u} + Y\vec{v}$. Ce qui donne :

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) \end{cases}$$

En reportant les valeurs de x et y dans l’équation, on obtient : $-X^2 + 3Y^2 + 4\sqrt{2}\,X - 14 = 0$.

L’équation de (Γ) dans le repère (O ; $\vec{u}, \vec{v}$) est : $-X^2 + 3Y^2 + 4\sqrt{2}\,X - 14 = 0$.

Déterminons la forme réduite de (Γ).

$-X^2 + 3Y^2 + 4\sqrt{2}\,X - 14 = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{6}(X - 2\sqrt{2})^2 + \frac{1}{2}Y^2 = 1$

Posons : U = $X - 2\sqrt{2}$ et V=Y

Soit G le point de coordonnées $(2\sqrt{2}; 0)$. Dans le repère orthonormé (G ; $\vec{u}, \vec{v}$), l’équation réduite de (Γ) est : $-\frac{1}{6}U^2 + \frac{1}{2}V^2 = 1$

Eléments caractéristiques de (Γ) dans le repère orthonormé (G ; $\vec{u}, \vec{v}$), y compris ceux ce l’exercice ne demande pas.

Centre : G de coordonnées (0 ; 0) dans le repère orthonormé (G ; $\vec{u}, \vec{v}$)

Sommets : B$(0; \sqrt{2})$ et B'$(0; -\sqrt{2})$;

Demi-distance focale : $c = \sqrt{6+2} = 2\sqrt{2}$;

Excentricité : $e = \frac{c}{b} = 2$;

Foyers : F$(0; 2\sqrt{2})$ et F'$(0; -2\sqrt{2})$;

Directrices : (D) : V$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et (D') : V$= \frac{\sqrt{2}}{2}$

Asymptotes : $(\Delta) : V = \frac{\sqrt{3}}{3}U$; $(\Delta') : V = -\frac{\sqrt{3}}{3}U$.

Eléments caractéristiques de (Γ) dans le repère orthonormé $(\boldsymbol{O} ; \vec{u}, \vec{v})$

En utilisant : X $= U + 2\sqrt{2}$ et Y=V, on a :

Centre : G de coordonnées $(2\sqrt{2}; 0)$ dans le repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$

Sommets : B$(2\sqrt{2}; \sqrt{2})$ et B'$(2\sqrt{2} ; -\sqrt{2})$;

Demi-distance focale : $c = \sqrt{6+2} = 2\sqrt{2}$;

Excentricité : $e = \frac{c}{b} = 2$;

Foyers : F$(2\sqrt{2} ; 2\sqrt{2})$ et F'$(2\sqrt{2} ; -2\sqrt{2})$;

Directrices : (D) : Y$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et (D') : Y$= \frac{\sqrt{2}}{2}$

Asymptotes : $(\Delta) : Y = \frac{\sqrt{3}}{3}(X - 2\sqrt{2})$; $(\Delta') : Y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(X - 2\sqrt{2})$.

Eléments caractéristiques de (Γ) dans le repère orthonormé $(\boldsymbol{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

En utilisant : $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) \end{cases}$ et $\begin{cases} X = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \\ Y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y) \end{cases}$

Centre : G de coordonnées (2 ; 2)

Sommets : B(1;3) et B'(3 ; 1) ;

Demi - distance focale : $c = \sqrt{6+2} = 2\sqrt{2}$;

Excentricité : $e = \frac{c}{b} = 2$;

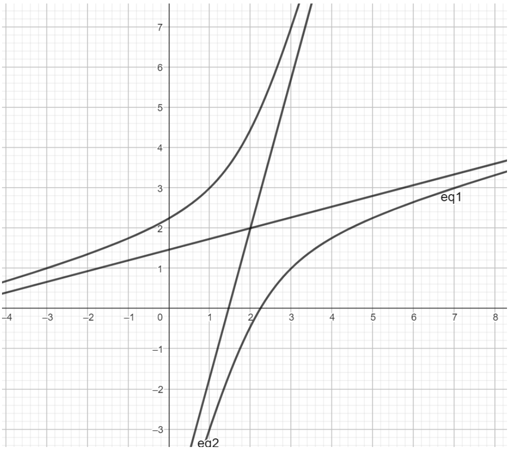
Foyers : F(0 ; 4) et F'(4 ; 0);

Directrices : (D) : $y = x - 1$ et (D') : $y = x + 1$

Asymptotes : $(\Delta) : \left(\frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)x + \left(\frac{\sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)y - \frac{2\sqrt{6}}{3} = 0$; $(\Delta') : \left(\frac{\sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)x + \left(\frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)y - \frac{2\sqrt{6}}{3} = 0$

NB. Pour les sommets, on a utilisé B et B'.

Remarques : une autre méthode est d'utiliser la rotation r qui applique les premiers axes sur les seconds.



Exercice 40

1. $d(M,(D)) = \frac{|x+2y-3|}{\sqrt{5}}$;

$d(M,(D)) = \frac{|2x+4y-6|}{2\sqrt{5}}$;

En utilisant : $z + \bar{z} = 2x$ et $z - \bar{z} = 2yi$, on a :

$d(M,(D)) = \frac{|z+\bar{z}-2i(z-\bar{z})-6|}{2\sqrt{5}}$;

$d(M,(D)) = \frac{|(1-2i)z+\bar{z}+(1+2i)\bar{z}-6|}{2\sqrt{5}}$

2. $MF = |z - 2 - 3i|$

M$\in$ (Γ) $\Leftrightarrow d(M,(D)) = MF$.

F n'appartient à (D), d'où (Γ) est la parabole de foyer F et de directrice (D) d'équation $x + 2y - 3 = 0$.

L'axe focal est la droite (Δ) passant par F et perpendiculaire à (D). La droite (Δ) a pour équation

[AF] est le sommet de la parabole (Γ). Le point S a pour coordonnées $(\frac{3}{2}; 2)$. Le paramètre de cette parabole est AF. Ce qui vaut $\sqrt{5}$.

3. Soit $z = x + iy$, où x et y sont des nombres réels.

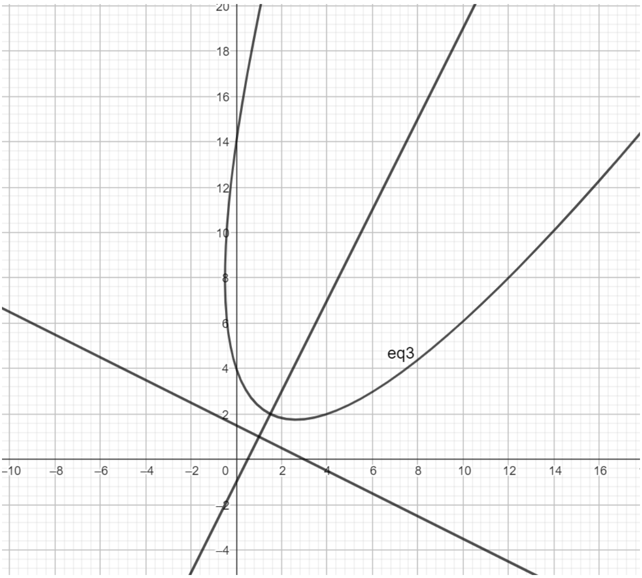
$MF^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2$; $d(M,(D))^2 = \frac{(x+2y-3)^2}{5}$

M$\in$ (Γ) $\Leftrightarrow (x + 2y - 3)^2 = 5(x-2)^2 + 5(y-3)^2$;

M$\in$ (Γ) $\Leftrightarrow x^2 + 4y^2 + 9 + 4xy - 6x - 12y = 5x^2 + 5y^2 - 20x - 30y + 65$;

M∈ (Γ) $\Leftrightarrow 4x^2 + y^2 - 4xy - 14x - 18y + 56 = 0.$

Avec un tableau de valeurs, on peut construire (Γ).



➢ **Situations complexes**

Exercice 41

- Nous allons utiliser les coniques pour déterminer les positions des deux piliers dans le repère $(O, \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ défini sur la figure puis comparer la distance qui les sépare.
- Nous allons déterminer les coordonnées des foyers F_1 et F_1' de la conique (E_1), d'équation : $400x^2 + 169y^2 + 1600x - 338y - 65831 = 0$ le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et de sommets A_1 ; A_1'; B_1 et B_1' .

- Nous allons déterminer une équation réduite de la conique E_2 et les coordonnées des foyers F_2 et F_2' de la conique (E_2) les dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

On a : $M(x; y) \in (E_1) \Leftrightarrow 400x^2 + 169y^2 + 1600x - 338y - 65831 = 0$

$$\Leftrightarrow 400(x+2)^2 + 169(y-1)^2 = 67600$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)^2}{169} + \frac{(y-1)^2}{400} = 1$$

Posons : $\Omega(-2; 1)$

Soit $\Omega(-2; 1)$ et (X;Y) les coordonnées de M dans le repère $(\Omega; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On a : $M \in (E_1) \Leftrightarrow \frac{X^2}{13^2} + \frac{Y^2}{20^2} = 1$

On a : $a = 13, b = 20$ alors $c = \sqrt{20^2 - 13^2} = \sqrt{231}$.

Le centre de l'ellipse (E_1) est le point Ω.

L'axe focal est la droite de repère $(\Omega\,;\vec{j}\,)$, car : $a < b$.

Grand axe : $[B_1B_1']$

Dans le repère $(\Omega,\vec{\imath};\vec{j}\,)$ on a : $F_1(0;\sqrt{231})$, $F_1'\ (0;-\sqrt{231})$.

Dans le repère $(O,\vec{\imath};\vec{j}\,)$, on a : $F_1(-2;1+\sqrt{231})$, $F_1'\ (-2;1-\sqrt{231})$.

<u>Déterminons une équation réduite de l'ellipse (E_2).</u>

Les ellipses (E_1) et (E_2) ont le même centre Ω.

On a : $2b'=B_2B_2'=B_1B_1' = 2b+4$, d'où : $b' = b+2 = 22$ et : $2a'=A_2A_2'=A_1A_1' = 2a+4$, et par suite $a' = a+2 = 15$.

On en déduit qu'une équation réduite de l'ellipse (E_2) dans le repère $(\Omega;\vec{\imath},\vec{j}\,)$ est : $\frac{X^2}{15^2}+\frac{Y^2}{22^2}=1$.

On a : $a' = 15, b' = 22$ alors $c = \sqrt{22^2-15^2} = \sqrt{259}$.

<u>Déterminons les coordonnées des foyers F_2 et F_2' de la conique (E_2) dans le repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{j}\,)$</u>

Dans le repère $(\Omega;\vec{\imath},\vec{j}\,)$ on a : $F_2(0;\sqrt{259})$, $F_2'\ (0;-\sqrt{259})$.

Dans le repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{j}\,)$, on a : $F_2(-2;1+\sqrt{259})$, $F_2'\ (-2;1-\sqrt{259})$.

$F_2F_2' - F_1F_1' = 2\sqrt{259} - 2\sqrt{231} = 1{,}78$ or $F_2F_2' - F_1F_1' \neq 4$

L'affirmation du maitre d'ouvrage n'est pas fondée.

Exercice 42

- Nous allons utiliser les coniques pour réaliser ce schéma.
- Nous allons déterminer une équation réduite de la conique (E) d'équation: $3x^2+4y^2+6x-9=0$, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath};\vec{j}\,)$. Unité graphique :$2cm$.

On a : $M(x;y)\in(E) \Leftrightarrow 3x^2+4y^2+6x-9=0$

$$\Leftrightarrow 3(x+1)^2+4y^2=12$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$$

Posons : $\Omega(-1;0)$

Soit $\Omega(-1;0)$ et (X;Y) les coordonnées de M dans le repère $(\Omega;\ \vec{\imath},\vec{j}\,)$.

On a : $M\in(E) \ \Leftrightarrow\ \frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{3}=1$

$\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{3}=1$ est l'équation réduite d'une ellipse.

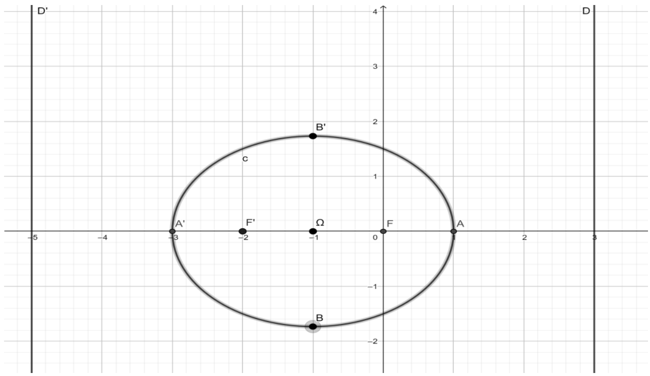
Donc (E) est une ellipse.

- Nous allons déterminer dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{j}\,)$ les coordonnées du centre Ω de l'ellipse, les foyers F et F', les sommets A *et* A'situés sur l'axe focal, B et B' les autres sommets, une équation des droites (D) et (D').

On a : $a=2, b=\sqrt{3}$, donc : $c=\sqrt{4-3}=1$.

L'axe focal est la droite de repère $(\Omega; \vec{\imath})$, car : $a > b$.
Dans le repère $(\Omega; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on a : $F(1;0)$, $F'(-1;0)$, $A(2;0)$, $A'(-2;0)$, $B(0;\sqrt{3})$ et $B'(0;-\sqrt{3})$.
Dans $(\Omega; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on a : $A(1;0)$; $A'(-3;0)$; $B(-1;\sqrt{3})$; $B'(-1;-\sqrt{3})$; $F(0;0)$ et $F'(-2;0)$
Dans le repère$(\Omega ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on : $(D): x = 4$ et $(D'): x = -4$;
Dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on : $(D): x = 3$ et $(D'): x = -5$.

- le schéma du bord de la piscine à l'échelle $\frac{1}{100}$ est réalisé par la construction de l'ellipse d'équation réduite : $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ dans un repère orthonormé$(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Unité graphique : $2cm$.



5 NOMBRES COMPLEXES

1 SITUATION D'APPRENTISSAGE

- Apres la lecture de la situation d'apprentissage (par le professeur, par un élève et une lecture silencieuse des élèves), l'enseignant pourra s'assurer que les élèves ont bien compris le texte.

- Il pourra ensuite faire dégager les constituants de la situation à travers une ou des questions du type :

Constituants de la situation	Exemples de questions possibles	Réponses possibles des élèves
Contexte	Quand se déroule la situation ?	Après avoir participé à un concours de Mathématiques
Circonstances	-Qu'est-ce que l'élève veut savoir? -Que pensent certains élèves ?	-il veut déterminer un nombre dont le carré est égal à -5. -Ils estiment qu'un tel nombre n'existe pas.
Tâches	-Que font les élèves ?	-Ils exposent cette préoccupation au professeur de mathématiques.

Le professeur utilisera la tâche énoncée par ses élèves pour faire la synthèse de la situation et présentera le plan de la leçon. Il devra dans la mesure du possible se référer à la situation durant tout le déroulement de la leçon.

2 DÉCOUVERTE DES HABILETÉS

<u>ACTIVITE 1 :</u> l'ensemble des nombres complexes, Forme algébrique d'un nombre complexe

- L'objectif de cette activité est de connaître l'ensemble des nombres complexes et de déterminer la forme algébrique d'un nombre complexe.
- Réponses aux questions de l'activité.

1- Je justifie que le problème peut se traduire par l'équation $x\times(10-x)=40$

Soit x et $y$deux nombres tels que leur somme soit égale à 10 et leur produit à 40, on a :
$x+y=10$ et $x\times y=40$ donc $y=10-x$d'où$x\times(10-x)=40$

2- **Je résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x\times(10-x)=40$.**

$x\times(10-x)=40 \Leftrightarrow -x^2-10x-40=0$, $\Delta=100-160=-60$ donc □<0 d'où $S_{\mathbb{R}}=\varnothing$.

3- Je montre que les quantités $5+\sqrt{-15}$ et $5-\sqrt{-15}$ de Cartan vérifient l'équation $x\times(10-x)=40$

Pour $x=5+\sqrt{-15}$ on a $\left(5+\sqrt{-15}\right)\left(10-\left(5+\sqrt{-15}\right)\right)=\left(5+\sqrt{-15}\right)\left(5-\sqrt{-15}\right)=25-(-15)=40$

Pour $x=5-\sqrt{-15}$ on a $\left(5-\sqrt{-15}\right)\left(10-\left(5-\sqrt{-15}\right)\right)=\left(5-\sqrt{-15}\right)\left(5+\sqrt{-15}\right)=25-(-15)=40$

Donc les quantités $5+\sqrt{-15}$ et $5-\sqrt{-15}$ de Cartan vérifient l'équation $x\times(10-x)=40$

4- **a) Je démontre que i est solution de l'équation : $x^2+1=0$.**

Pour $x = i$ on a $i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$ donc i est solution de l'équation$x^2 + 1 = 0$.

a) Je détermine la valeur de i^4.

$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$ car $i^2 = -1$. Donc $i^4 = 1$.

5- Je détermine un nombre qui:

a) Elevé au carré est égal à – 4 : ce nombre est 2i.

b) Elevé au carré est égal à – 2 : ce nombre est $i\sqrt{2}$.

c) Elevé au carré est égal à – 15 : ce nombre est $i\sqrt{15}$.

6- **Les solutions proposées par Cardan** :

$5+\sqrt{-15}=5+\sqrt{i^2 15}=5+i\sqrt{15}$ et $5-\sqrt{-15}=5-\sqrt{i^2 15}=5-i\sqrt{15}$.

<u>Exercice 1</u>

1-

Nombres	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
3	X	X	X	X	X	X
-4		X	X	X	X	X
2.25			X	X	X	X
-6,1258			X	X	X	X
$\frac{2}{3}$				X	X	X
-6,666…				X	X	X
3i						X
$\sqrt{3}$					X	X
$i\sqrt{3}$						X
1+3i						X
$\frac{2}{3}i$						X

<u>Exercice 2</u>

Pour z = 2i, Re(z) = 0 et Im(z) = 2.

Pour z = -10, Re(z) = -10 et Im(z) = 0.

Pour z = 1 + 3i, Re(z) = 1 et Im(z) = 3.

Pour z = 0 , Re(z) = 0 et Im(z) = 0.

Pour z = - 5i, Re(z) = 0 et Im(z) = - 5.

Activité 2 Egalité de deux nombres complexes

- L'objectif de cette activité est de connaître la propriété relative à l'égalité de deux nombres complexes.
- Réponses aux questions de l'activité.

Justifions que : $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

Si $a = a'$ et $b=b'$ alors $z = a + ib = a' + ib' = z'$.

Réciproquement, si z = z', alors $a + ib = a' + ib'$. Donc $a - a' = i(b - b')$.

Supposons par l'absurde que $b \neq b'$.

Alors on a : $\frac{a-a'}{b-b'} = i$

Or a, a', b, b' sont des réels, donc $\frac{a-a'}{b-b'} \in \mathbb{R}$. Donc $i\in\mathbb{R}$. cela est absurde. Donc $b = b'$.

Par conséquent $a - a' = 0$, soit $a = a'$.

- **Corrigé de l'exercice de fixation**

<u>Exercice</u> 3

Je détermine le nombre réel x tel que $1 + xi = 1 + 2i$

x étant un nombre réel alors on a :

$$1 + xi = 1 + 2i \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Activité 3 : Somme de deux nombres complexes, multiplication de deux nombres complexes.

- L'objectif de cette activité est de connaître les propriétés relatives à la somme, au produit de deux nombres complexes.
- Réponses aux questions de l'activité

1- Donnons $Re(z)$, $Im(z)$, $Re(z')$, $Im(z')$

$$Re(z) = a$$
$$Im(z) = b$$
$$Re(z') = a'$$
$$Im(z') = b'$$

2- **Calculons $z + z'$ et faisons une conjecture**

$z + z' = a + ib + a' + ib' = a + a' + i(b + b')$

3- Calculons $z \times z'$ et faisons une conjecture

$z \times z' = (a + ib)(a' + ib') = a \times a' + a \times ib' + ib \times a' + ib \times ib' = (aa' - b \times b') + i(a \times b' + b \times a')$

$z \times z' = \left(aa' - b \times b'\right) + i\left(a \times b' + b \times a'\right)$

- **Corrigé de l'exercice de fixation**

<u>Exercice</u> 4

a) $z_1 + z_2 = (3 - 2i) + (-4 + 5i) = -1 + 3i$
b) $z_1 \times z_2 = (3 - 2i)(-4 + 5i) = -2 + 23i$
c) $3z_1 = 9 - 3i$
d) $z_2^2 = (-4 + 5i)^2 = -9 - 40i$

Activité 4 : Opposé d'un nombre complexe

- L'objectif de cette activité est de connaître la propriété relative à l'opposé d'un nombre complexe.
- Réponses aux questions de l'activité

Soit a' et b' deux nombres réels tel que $z' = a' + ib'$

$z + z' = a + a' + i(b + b')$. Donc $z + z' = 0 \Leftrightarrow a + a' = 0$ et $b + b' = 0$ donc $a' = -a$ et $b' = -b$

Ainsi z' existe et $z' = -a - ib = -z$.

- **Corrigé de l'exercice de fixation**

<u>Exercice</u> 5

L'opposé de :

- $-3i$ est $3i$
- $2+5i$ est $-2 - 5i$
- 5 est -5

Activité 5 : Inverse d'un nombre complexe

- L'objectif de cette activité est de connaître la propriété relative à l'inverse d'un nombre complexe.
- Réponses aux questions de l'activité

1 – a) **Je détermine la forme algébrique de (3 + 2i)(3 – 2i)**

$(3 + 2i)(3 - 2i) = 3^2 - (2i)^2 = 9 - (-4) = 13$

Donc $(3 + 2i)(3 - 2i) = 13$

b) **Je détermine la forme algébrique de** $A=\dfrac{1}{3+2i}$

$A=\dfrac{1}{3+2i}=\dfrac{3-2i}{(3+2i)(3-2i)}=\dfrac{3-2i}{13}$ donc A= $\dfrac{3}{13}-\dfrac{2i}{13}$

2-a) Je détermine la forme algébrique de $(a+ib)(a-ib)$

$(a+ib)(a-ib)=a^2-(ib)^2=a^2+b^2$

b) Je détermine la forme algébrique de $A=\dfrac{1}{a+ib}$

$A=\dfrac{1}{a+ib}=\dfrac{(a-ib)}{(a+ib)(a-ib)}=\dfrac{a-ib}{a^2-(ib)^2}$

$A=\dfrac{a}{a^2+b^2}-\dfrac{b}{a^2+b^2}i$

- **Corrigé de l'exercice de fixation**

Exercice 6

a) **J'écris** $z_1=\dfrac{2}{3i}$ **sous la forme algébrique**.

$z_1=\dfrac{2}{3i}=\dfrac{2\times(-3i)}{(3i)\times(-3i)}=\dfrac{-6i}{9}\Rightarrow z_1=\dfrac{-2i}{3}$

b) $z^2=-3+4i$; $z^5=41-38i$; $\frac{1}{z^2}=\frac{-3}{25}-\frac{-4}{25}i$

Activité 6 : Puissance entière d'un nombre complexe

- L'objectif de cette activité est de connaître la propriété relative à la puissance entière d'un nombre complexe.
- Réponses aux questions de l'activité

$z^2=z\times z=(1+2i)(1+2i)=1-4+4i=-3+4i$

$z^5=z^4\times z=(z^2)^2\times z=(-3+4i)^2\times(1+2i)=41-38i$

$\dfrac{1}{z^2}=\dfrac{1}{-3+4i}=\dfrac{-3-4i}{9+16}=\dfrac{-3}{25}-\dfrac{4}{25}i$

- **Corrigé de l'exercice de fixation**

Exercice 7

$\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=-1$

$(1+i)^2=2i$ et $(1+i)^3=1+3i+3i^2+i^3=-2+2i$

Activité 7 : Conjugué d'un nombre complexe

- L'objectif de cette activité est de connaître la définition du conjugué et les propriétés relatives au conjugué d'un nombre complexe.
- Réponses aux questions de l'activité

1- Je détermine la forme algébrique de $z+\bar{z}$, $z-\bar{z}$ et $z\times\bar{z}$

$z+\bar{z}=(a+ib)+(a-ib)=2a$

$z-\bar{z}=(a+ib)-(a-ib)=2bi$

$z\times\bar{z}=(a+ib)\times(a-ib)=a^2+b^2$

2- a) Si $z=\overline{z}$, alors z est un nombre réel.

b) Si $z=-\overline{z}$, alors z est un imaginaire pure.

Corrigé de l'exercice de fixation

<u>Exercice</u> 8

$\overline{1-3i}=1+3i$; $\overline{6}=6$; $\overline{4i}=-4i$; $\overline{3+5i}=3-5i$

Activité 8 : Produit nul

- L'objectif de cette activité est de connaître la propriété relative au produit nul de deux nombres complexes.
- Réponses aux questions de l'activité

✓ Je suppose que $z'=0$ et je montre que $z\times 0=0$

$z\times z'=z\times(z'+0)$

$=z\times z'+z\times 0$ donc $z\times 0=0$

✓ Réciproquement je suppose que $z\times z'=0$

- Si $z=0$ alors nécessairement la propriété est vérifiée quelque soit la valeur de z'.
- Si $z\neq 0$ alors $\dfrac{1}{z}$ existe et on a $z'=\dfrac{1}{z}(z\times z')=\dfrac{1}{z}\times 0=0$ donc $z'=0$

Corrigé de l'exercice de fixation

<u>Exercice</u> 9

$(z+3-5i)(3z-5+i)=0 \Leftrightarrow z+3-5i=0$ ou $3z-5+i=0$

$\Leftrightarrow$ $z=-3+5i$ ou $z=\dfrac{5}{3}-\dfrac{1}{3}i$ donc $S_{\mathbb{C}}=\left\{\dfrac{5}{3}-\dfrac{1}{3}i\ ;\ -3+5i\right\}$

Activité 9 :Module d'un nombre complexe

- L'objectif de cette activité est de connaître la définition du module et les propriétés relatives au module d'un nombre complexe.
- Réponses aux questions de l'activité

a) Je calcule $z_1\times\overline{z_1}$ et $z_2\times\overline{z_2}$

$z_1\times\overline{z_1}=(2+5i)(2-5i)=4+25=29$

$z_2\times\overline{z_2}=(-1+2i)(-1-2i)=1+4=5$

b) J'en déduis la valeur de $\sqrt{z_1\times\overline{z_1}}$ et $\sqrt{z_2\times\overline{z_2}}$

$z_1\times\overline{z_1}=29\Rightarrow\sqrt{z_1\times\overline{z_1}}=\sqrt{29}$

$z_2\times\overline{z_2}=5\Rightarrow\sqrt{z_2\times\overline{z_2}}=\sqrt{5}$

c) $z\times\overline{z}=(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$

Corrigé de l'exercice de fixation

Exercice de fixation 10

$|-2+3i|=\sqrt{(-2)^2+(3)^2}=\sqrt{4+9}$ donc $|-2+3i|=\sqrt{13}$

$|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{1+1}$ donc $|1+i|=\sqrt{2}$

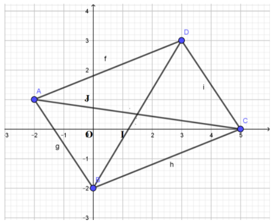
$\left|1-i\sqrt{3}\right|=\sqrt{(1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{1+3}$ donc $\left|1-i\sqrt{3}\right|=2$

$|-2,5|=2,5$; $|4,2015|=4,2015$; $|-2i|=2$; $|2024i|=2024$

Activité 10 :Affixe, Point – image, Vecteur-image

- L'objectif de cette activité est de connaître l'affixe, le point-image et le vecteur-image d'un nombre complexe.
- Réponses aux questions de l'activité

On obtient la figure ci-contre.



1- Soit H le milieu de [AC] et K le milieu de [BD].

A le point associé au nombre complexe z_1 = - 2 + i donc A(-2 ;1)

B le point associé au nombre complexe z_2 = -2i donc B(0 ;-2).

C le point associé au nombre complexe z_3 = 5 donc C(5 ;0).

D le point associé au nombre complexe z_4 = 3 + 3i donc D(3 ;3).

H est milieu de [AC] donc $x_H=\dfrac{x_A+x_C}{2}=\dfrac{3}{2}$ et $y_H=\dfrac{y_A+y_C}{2}=\dfrac{1}{2}$ d'où $H\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ on en déduit que le nombre complexe associé au point Hest $z_H=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i$.

K est milieu de [BD] donc $x_K=\dfrac{x_B+x_D}{2}=\dfrac{3}{2}$ et $y_K=\dfrac{y_B+y_D}{2}=\dfrac{1}{2}$ d'où $K\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ on en déduit que le nombre complexe associé au point K est $z_K=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i$

2- $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$

3- Nature du quadrilatère ABCD.
Les points H et K ont les mêmes coordonnées. Donc ABCD est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu donc ABCD est un parallélogramme.

- On peut aussi constater que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, donc ABCD est un parallélogramme.

Corrigé de l'exercice de fixation

Exercice 11

1- Le point - image de 2 – 3i est M_1(2 ;-3)
Le point - image de – 2i est M_2(0 ;-2)
Le point - image de 4 est M_2(4 ; 0)

2- L'affixe du point A(1 ;-4) est z_A = 1 – 4i
L'affixe du point B(-3 ; 2) est z_B = -3 + 2i
L'affixe du point C(0 ;-2) est z_C = – 2i
L'affixe du point D(-5 ; 0) est z_D = – 5

3- Le vecteur - image de 2 – 3i est $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

Le vecteur - image de -2i est $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$

Le vecteur - image de 4 est $\vec{w}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$

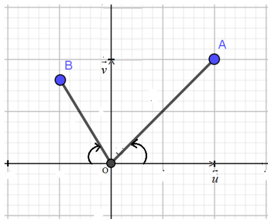
4- L'affixe du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ est z = -2 + i

L'affixe du vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$ est z = -3

L'affixe du vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$ est z = - 4i

Activité 11 : Argument d'un nombre complexe

- L'objectif de cette activité est de connaître la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul.
- Réponses aux questions de l'activité



Soit $\theta = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OA}\right)$. L'angle □ est déterminé par :

$$\begin{cases}\cos\theta = \dfrac{x_A}{OA} \\ \sin\theta = \dfrac{y_A}{OA}\end{cases} \quad OA = OA = \sqrt{2} \ \text{ et } x_A = 1 \ , y_A = 1$$

$$\text{Donc} \begin{cases}\cos\theta = \dfrac{x_A}{OA} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{y_A}{OA} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$mes\left(\vec{u}, \overrightarrow{OA}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Soit $\theta' = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OB}\right)$. L'angle θ' est déterminé par :

$$\begin{cases}\cos\theta' = \dfrac{x_B}{OB} \\ \sin\theta' = \dfrac{y_B}{OB}\end{cases} \quad OB = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \text{ et } x_B = -\frac{1}{2} \ , y_B = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Donc} \begin{cases}\cos\theta' = \dfrac{x_B}{OB} = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta' = \dfrac{y_B}{OB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ \ mes\left(\vec{u}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

Corrigé de l'exercice de fixation

Exercice 12

$z_1 = 2i$ donc $|z_1| = 2$ et $\text{Arg}(z_1) = \dfrac{\pi}{2}$.

$z_2 = -4$donc $|z_2| = 4$ et $\text{Arg}(z_2) = \pi$.

$z_3 = 2 - 2\sqrt{3}i$ donc $|z_3| = 4$et $\text{Arg}(z_3) = -\dfrac{\pi}{3}$.

Activité 12 : Forme trigonométrique d'un nombre complexe

- L'objectif de cette activité est d'identifier la forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul.
- Réponses aux questions de l'activité

- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Soit θ = Arg(z) on a : $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases} \Rightarrow \quad a = |z|\cos\theta \quad \text{et} \quad b = |z|\sin\theta$
- On en déduit que $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

Corrigé de l'exercice de fixation

Exercice 13

1- a) et b) Module, argument et forme trigonométrique des nombres complexes

Pour $z = \mathrm{i}$, $|z| = 1$ et $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2}$ donc $z = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

Pour $z = 1 + \mathrm{i}$, $|z| = \sqrt{2}$ et $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4}$ donc $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

Pour $z = \sqrt{3} + i$, $|z| = 2$ et $\arg(z) = \dfrac{\pi}{6}$ donc $z = 2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$.

2

a -k

b– j

Activité 13 :Arguments d'un produit et d'un quotient de nombres complexes

- L'objectif de cette activité est de connaître les propriétés des arguments de nombres complexes non nuls.
- Réponses aux questions de l'activité

Je démontre que $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi$

Soit z et z' deux nombres complexes de formes trigonométriques z = r(cos θ + isin θ) et z' = r'(cos θ' + isin θ').

$zz' = rr'\left(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + \mathrm{i}\left(\cos\theta\sin\theta' + \cos\theta'\sin\theta\right)\right)$

$= rr'\left(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')\right)$

Donc arg(zz') = arg(z) + arg(z') + $2k\theta$

- **Je démontre que** $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi$

$\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) \Rightarrow \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$ donc $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi$

- **Je démontre que** Pour $n \in \mathbb{N}$, $arg(z^n) = narg(z) + 2k\pi$
  - Pour n> 0, on applique le raisonnement par récurrence à la première propriété et on a : arg(z^n) = $n$arg(z) + $2k\theta$

- Pour $n< 0$, on a : $z^n = \frac{1}{z^{-n}} = \left(\frac{1}{z}\right)^{-n}$ donc $\arg\left(\frac{1}{z}\right)^{-n} = -n\arg\left(\frac{1}{z}\right) + 2k\pi = n\arg(z) + 2k\pi$

Ainsi pour tout entier relatif n, $\arg(z^n) = n\arg(z) + 2k\pi$.

- **Je démontre que** $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi$

$\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$ or $\arg\left(z \times \frac{1}{z'}\right) = \arg z + \arg\left(\frac{1}{z'}\right) = \arg z - \arg z'$ donc $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi$

Corrigé de l'exercice de fixation

Exercice 14

1. **<u>Déterminons un argument de chacun des nombres complexes :</u>**

$\arg\left(\frac{1}{1+i}\right) = -\arg(1+i) = -\frac{\pi}{4}$

$\arg\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right) = \arg\left(\sqrt{3}+i\right) - \arg(1-i) = \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\pi}{12}$

2- Déterminons un argument de z^2 et z^{-3}

$arg(z^2) = 2arg(z) = 2 \times \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$

$arg(z^{-3}) = -3arg(z) = -3 \times \frac{\pi}{8} = \frac{-3\pi}{8}$ ou

$arg(z^{-3}) = arg\left(\frac{1}{z^3}\right) = -arg(z^3) = -3arg(z) = -3 \times \frac{\pi}{8} = \frac{-3\pi}{8}$

Activité 14 : Forme exponentielle d'un nombre complexe

- L'objectif de cette activité est d'identifier la forme exponentielle d'un nombre complexe non nul.
- Réponses aux questions de l'activité
- $-3i = 3(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$; $\sqrt{3}+i = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$; $-5 = 5(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

Si on pose $e^{i□} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ alors on a; $-3i = 3\, e^{i□}$□□□□□□ $\sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$
□□□□□□□□□□□□□□□$e^{i□}$□□

Corrigé de l'exercice de fixation

Exercice 15

1- **a) Faux**

b) Vrai

2-

- $-7i = 7e^{i□}$;
- $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$
- $-4 - 4i = 4\sqrt{2}e^{-i\frac{3}{4}\pi}$

Activité 15 : Formule de Moivre

- L'objectif de cette activité est de connaître la formule de Moivre.
- Réponses aux questions de l'activité

1- **Je détermine le module et un argument du nombre complexe z.**

z = cos□ + isin□. Donc $|z| = 1$ et $\arg(z) = \alpha$

2- **Je détermine le module et un argument de z^n.**

On sait que $\left|z^n\right| = \left|z\right|^n$ or $|z| = 1$ donc $\left|z^n\right| = 1$

De même $\arg\left(z^n\right) = n\arg(z)$ donc $\arg\left(z^n\right) = n\alpha$

On a ainsi $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)$

D'une manière générale si z = r(cos□ + isin□) alors pour tout entier relatif *n*, on a :
z^n = r^n(cos(*n*□)+isin(*n*□))

Corrigé de l'exercice de fixation

Exercice 16

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right| = 1 \text{ et } \arg\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\pi}{4} \text{ donc } \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

Donc $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{2022} = \left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{2022} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

Activité 16 : Les formules d'Euler

- L'objectif de cette activité est de connaître les formules D'Euler.
- Réponses aux questions de l'activité

On sait que $e^{i\alpha} = cos\alpha + isin\alpha$ et $e^{-i\alpha} = cos\alpha - isin\alpha$ donc
$2cos\alpha = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} \Rightarrow cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$ et $2isin\alpha = e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} \Rightarrow sin\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$

Corrigé de l'exercice de fixation

Exercice 17

1- Vrai ; 2 – Faux ; 3 – Vrai ; 4 – Faux ; 5 – Vrai.

Activité 17 : Racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe.

- L'objectif de cette activité est de déterminer les racines carrées et les racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe
- Réponses aux questions de l'activité

1- Je résous l'équation $z^2 = 1 - i\sqrt{3}$

- **Utilisation de la forme trigonométrique**

$$1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

|z| = *r* et Arg(z) = □ on a z = *r*(cos(□) + *i*sin(□)) donc z^2 = r^2(cos(2□) + *i*sin(2□))

$$z^2 = 1 - i\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = 2 \\ 2\theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = -\frac{\pi}{6} + k\pi \text{ avec } k \in \{0;1\} \end{cases}$$

Donc les solutions de l'équation sont : $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$ et $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

2- Je détermine les nombres complexes *z* tel que $z^3 = 1$

Soit □ et *r* deux nombres réels tel que |*z*| = *r* (*r*> 0) et Arg(*z*) = □ +2*k*□.

$z^3 = 1 \Leftrightarrow r^3 e^{i3\theta} = 1$ donc $r^3 = 1$ et $3\theta = 2k\pi$ d'où

$$\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \dfrac{2k\pi}{3} \quad \text{avec } k \in \{0;1;2\} \end{cases}$$

Pour $k = 0$ on a □□□ 0 donc $z_0 = 1$

Pour $k = 1$ on a □□□ 1 donc $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = j$

Pour $k = 2$ on a □□□ 2 donc $z_2 = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = j^2$

Les racines cubiques de 1 (l'unité) sont : 1 ; $j = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

On vérifie que $1 + j + j^2 = 0$.

3- Je détermine les nombres complexes *z* tel que $z^4 = 2\sqrt{2}(1+i)$

a) Calcule le module et un argument de $2\sqrt{2}(1+i)$

$$\left|2\sqrt{2}(1+i)\right| = 4 \text{ et } Arg\left(2\sqrt{2}(1+i)\right) = \frac{\pi}{4}.$$

b) En posant z = *re*$^{i□}$ □calcule z^4

Soit □ et r deux nombres réels tel que $|z| = r$ ($r>0$) et Arg(z) = □ +2k□. Alors $z^4 = r^4e^{4i□}$

c) Résous l'équation $z^4 = 2\sqrt{2}(1+i)$

$$z^4 = 2\sqrt{2}(1+i) \Leftrightarrow \begin{cases} r^4 = 4 \\ 4\theta = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{avec k} \in \{0;1;2;3\} \end{cases}$$

Pour $k = 0$, on a : $z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{16}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{16}\right)\right)$

Pour $k = 1$, on a : $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{9\pi}{16}\right) + i\sin\left(\dfrac{9\pi}{16}\right)\right)$

Pour $k = 2$, on a : $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{15\pi}{16}\right) + i\sin\left(-\dfrac{15\pi}{16}\right)\right)$

Pour $k = 3$, on a : $z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{7\pi}{16}\right) + i\sin\left(-\dfrac{7\pi}{16}\right)\right)$

Ainsi les solutions de l'équation $z^4 = 2\sqrt{2}(1+i)$ sont

$\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{16}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{16}\right)\right)$; $\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{9\pi}{16}\right) + i\sin\left(\dfrac{9\pi}{16}\right)\right)$;

$\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{15\pi}{16}\right) + i\sin\left(-\dfrac{15\pi}{16}\right)\right)$ et $\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{7\pi}{16}\right) + i\sin\left(-\dfrac{7\pi}{16}\right)\right)$;

Corrigé de l'exercice de fixation

Exercice 18

a) Je détermine les racines 5$^{\text{ème}}$ de $16\sqrt{2}(1-i)$

Soit le nombre complexe $z = re^{i□}$, r et □ des nombres réels, $r > 0$.

$\left|16\sqrt{2}(1-i)\right| = 16\sqrt{2}\left(\sqrt{2}\right) = 32$ et $Arg\left(16\sqrt{2}(1-i)\right) = -\frac{\pi}{4}$

Déterminer **les racines 5ème de** $16\sqrt{2}(1-i)$ revient à résoudre l'équation $z^5 = 16\sqrt{2}(1-i)$.

Soit z =□□$e^{i□}$ où $|z|$ = □ et Arg(z) = □□□□□□□et□□□des nombres réels tel que□□□>□□)□

$$z^n = 16\sqrt{2}(1-i) \Leftrightarrow \begin{cases} 5\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \rho^5 = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = -\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5} \\ \rho = 2 \end{cases}$$

Pour $k = 0$ on a : $\theta = -\frac{\pi}{20}$ donc $z_0 = 2e^{-i\frac{\pi}{20}}$

Pour $k = 1$ on a : $\theta = \frac{7\pi}{20}$ donc $z_1 = 2e^{i\frac{7\pi}{20}}$

Pour $k = 2$ on a : $\theta = \frac{3\pi}{4}$ donc $z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Pour $k = 3$ on a : $\theta = -\frac{17\pi}{20}$ donc $z_3 = 2e^{-i\frac{17\pi}{20}}$

Pour $k = 4$ on a : $\theta = -\frac{9\pi}{20}$ donc $z_4 = 2e^{-i\frac{9\pi}{20}}$

Donc les racines 5ème de $16\sqrt{2}(1-i)$ sont $2e^{-i\frac{\pi}{20}}$; $2e^{i\frac{7\pi}{20}}$; $2e^{i\frac{3\pi}{4}}$; $2e^{-i\frac{17\pi}{20}}$; $2e^{-i\frac{9\pi}{20}}$.

b) Détermine les racines 3ème de $2i\sqrt{3} - 2$

On considère un nombre complexe tel que $z = re^{i□}$□avec r et □ des réels, $r > 0$.

$\left|2i\sqrt{3} - 2\right| = 2\left|i\sqrt{3} - 1\right| = 4$ **et** $Arg\left(2i\sqrt{3} - 2\right) = \frac{2\pi}{3}$

Donc $z^3 = 2i\sqrt{3} - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 4 \\ 3\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[3]{4} \\ \theta = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$

Pour $k = 0$ on a : $\theta = \frac{2\pi}{9}$ donc $z_0 = \sqrt[3]{4}e^{i\frac{2\pi}{9}}$

Pour $k = 1$ on a : $\theta = \frac{8\pi}{9}$ donc $z_1 = \sqrt[3]{4}e^{i\frac{8\pi}{9}}$

Pour $k = 2$ on a : $\theta = -\frac{4\pi}{9}$ donc $z_2 = \sqrt[3]{4}e^{-i\frac{4\pi}{9}}$

Donc les racines 3ème de $2i\sqrt{3} - 2$ sont $\sqrt[3]{4}e^{i\frac{2\pi}{9}}$; $\sqrt[3]{4}e^{i\frac{8\pi}{9}}$; $\sqrt[3]{4}e^{-i\frac{4\pi}{9}}$.

<u>Activité</u> 18 : Equation du second degré dans $\mathbb{C}$

- L'objectif de cette activité est de résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$
- Réponses aux questions de l'activité

Soit l'équation $az^2 + bz + c = 0$

On a $az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b - 4ac}{4a^2}\right]$

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si □ = 0, alors (E) a une solution double : $-\dfrac{b}{2a}$.
- Si □ ≠ 0, alors □ admet deux racines carrées □ et – □.

Donc $az^2 + bz + c = a\left[\left(z+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b-4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(z+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\delta^2}{4a^2}\right] = a\left[\left(z+\dfrac{b+\delta}{2a}\right)\left(z+\dfrac{b-\delta}{2a}\right)\right]$

Ainsi (E) a deux solutions $\dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $\dfrac{-b-\delta}{2a}$.

Corrigé de l'exercice de fixation

Exercice 19

a) (E_1) : $z^2 - 2z + 2 = 0$

□ = $(-2)^2 - 4\times2 = -4 = (2i)^2$

$z_1 = \dfrac{2+2i}{2} = 1+i$ et $z_2 = \dfrac{2-2i}{2} = 1-i$ donc $S_{\mathbb{C}} = \{1+i ; 1-i\}$

b) (E_2) : $z^2 - (3+5i)z - 4 + 7i = 0$

$\Delta = (3+5i)^2 - 4(-4+7i) = 2i$

Je détermine les racines carrées de $2i$.

Soit □ un nombre complexe tel que □^{2} = 2i

Posons □ = $x + iy$ avec x et y des nombres réels.

□ $^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$. Donc $\delta^2 = 2i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \\ 2xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$ $x = 1$ et $y = 1$ ou $x = -1$ et $y = -1$ Ainsi

On a □□□□□□□□i et □□□□□□□□□i et on vérifie que $(1+i)^2 = 2i$.

Les solutions de (E_2) sont donc $z_1 = \dfrac{3+5i+(1+i)}{2} = 2+3i$ et $z_2 = \dfrac{3+5i-(1+i)}{2} = 1+2i$

D'où $S_{\mathbb{C}} = \{2+3i ; 1+2i\}$

__Activité__ **19 : Vecteur du plan -distance -angle**

- L'objectif de cette activité est de calculer la distance AB, déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et connaître la mesure d'un angle orienté.
- Réponses aux questions de l'activité

1- a) **Je calcule $z_B - z_A$ et $|z_B - z_A|$**

$z_B - z_A = (2 - 3i) - (1 + 2i) = 1 - 5i$donc $|z_B - z_A| = \sqrt{1+5^2} = \sqrt{26}$

b)Je calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-1 \\ -3-2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ donc l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_{\overrightarrow{AB}} = 1-5i$

c)D'après les questions précédentes $z_B - z_A = 1 - 5i$ et $z_{\overrightarrow{AB}} = 1-5i$, donc $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

d) $AB = \sqrt{1+5^2} = \sqrt{26}$ et $|z_B - z_A| = \sqrt{26}$ on constate que $|z_B - z_A| = AB$.

2- Je justifie que $mes\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB}\right) = Arg\left(z_B - z_A\right) + 2k\pi$

On sait qu'il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. Donc $z_M = z_B - z_A$ car $z_O = 0$.

Ainsi $mes\left(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{AB}\right) = mes\left(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM}\right)$ or $mes\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right) = Arg\left(z_M\right) + 2k\pi$ **.**

Par ailleurs on sait que$z_M = z_B - z_A$ donc $mes\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}\right) = Arg\left(z_B - z_A\right) + 2k\pi$ d'où

$mes\left(\overrightarrow{OI}, AB\right) = Arg\left(z_B - z_A\right) + 2k\pi$

Je justifie que $mes\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) = Arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi\ ,\quad k \in \mathbb{Z}$

On sait que $mes\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) = mes\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{CD}\right) - mes\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{AB}\right)$

Or $mes\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{AB}\right) = Arg\left(z_B - z_A\right) + 2k\pi$ et $mes\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{CD}\right) = Arg\left(z_D - z_C\right) + 2k\pi$ **.**

Donc $mes\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) = Arg\left(z_D - z_C\right) - Arg\left(z_B - z_A\right) + 2k\pi \Rightarrow mes\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) = Arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi$

Corrigé de l'exercice de fixation

Exercice 20

a) Je calcule AB, AC et BC.

$z_B - z_A = 1 + i - 2 + i = -1 + 2i$ donc $AB = \left|z_B - z_A\right| = \sqrt{5}$

$z_C - z_A = 1 + 2\sqrt{3} + i\left(1 + \sqrt{3}\right) - 2 + i = -1 + 2\sqrt{3} + i\left(2 + \sqrt{3}\right)$ donc

$\left|z_C - z_A\right| = \left|-1 + 2\sqrt{3} + i\left(2 + \sqrt{3}\right)\right| = \sqrt{\left(-1 + 2\sqrt{3}\right)^2 + \left(2 + \sqrt{3}\right)^2} = 2\sqrt{5}$ d'où $AC = 2\sqrt{5}$

$z_C - z_B = 1 + 2\sqrt{3} + i\left(1 + \sqrt{3}\right) - 1 - i = 2\sqrt{3} + i\sqrt{3}$ donc $\left|z_C - z_B\right| = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{15}$

d'où BC = $\sqrt{15}$

b) Je determine $Arg\left(\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right)$

$\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \dfrac{2 - i - 1 - i}{1 + 2\sqrt{3} + i\left(1 + \sqrt{3}\right) - 1 - i} = \dfrac{1 - 2i}{2\sqrt{3} + i\sqrt{3}} = \dfrac{-i}{\sqrt{3}}$ donc $Arg\left(\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$

c) J'en-déduis la nature du triangle ABC.

$Arg\left(\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$, donc le triangle ABC est rectangle en B.

<u>Activité</u> : 20 Caractérisation complexe d'une droite, d'une demi-droite et d'un cercle

- L'objectif de cette activité est de déterminer la caractérisation complexe d'une droite, d'une demi-droite et d'un cercle.
- Réponses aux questions de l'activité

1- Justifions que M appartient à la droite $(AB) \Leftrightarrow Arg\left(\frac{z_M - z_A}{z_B - z_A}\right) = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$M \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow z_M - z_B = k(z_B - z_A) \Leftrightarrow k = \dfrac{z_M - z_B}{z_B - z_A}$

$\Leftrightarrow\ arg\left(\frac{z_M - z_A}{z_B - z_A}\right) = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

2- Justifions que M appartient à la demi-droite $[AB) \Leftrightarrow arg\left(\frac{z_M - z_A}{z_B - z_A}\right) = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$M \in [AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow z_M - z_B = k'(z_B - z_A) \Leftrightarrow k' = \dfrac{z_M - z_B}{z_B - z_A}$ où k' est nombre réel strictement positif

$Arg(\frac{z_M - z_B}{z_B - z_A}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad arg\left(\frac{Z_M - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Justifions que M appartient au cercle de centre A et de rayon $r \Leftrightarrow |Z_M - Z_A| = r (r \in \mathbb{R}_+^*)$

$M \in \mathcal{C}(A; r) \Leftrightarrow AM = r$

$\Leftrightarrow |Z_M - Z_A| = r \ (r \in \mathbb{R}_+^*)$

4- Justifions que Mappartient à la médiatrice du segment $[AB] \Leftrightarrow |Z_M - Z_A| = |Z_M - Z_B|$

Mappartient à la médiatrice du segment $[AB] \Leftrightarrow AM = AB$

$\Leftrightarrow |Z_M - Z_A| = |Z_M - Z_B|$

Corrigé des exercices de fixation

Exercice 21

1. F
2. V
3. V
4. F
5. V

Exercice 22

1. **Justifions que le point K appartient à la droite (AB)**

$K \in (AB) \Leftrightarrow arg\left(\frac{Z_K - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$Arg\left(\frac{-4+3i-2-i}{-1+2i-2-i}\right) = Arg\left(\frac{-6+2i}{-3+i}\right) = Arg(2) = 0 = 0 \times \pi$

2. **Déterminons l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie : $|z| = 3$**

$|z| = 3 \Leftrightarrow |Z_M - Z_O| = 3$

$\Leftrightarrow$ M appartient au cercle de centre O et de rayon 3

3. **Déterminons l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie** :

a) $|z - 2 - i| = 2$

$|z - 2 - i| = 2 \Leftrightarrow |z - (2 + i)| = 2 \Leftrightarrow |z_M - z_A| = 2$

$\Leftrightarrow$ M appartient au cercle de centre A et de rayon 2

b) $|z + 1 - 2i| = |2 + i - z|$

$|z + 1 - 2i| = |2 + i - z| \Leftrightarrow |z + 1 - 2i| = |-(z - 2 - i)| \Leftrightarrow |z + 1 - 2i| = |z - 2 - i|$

$\Leftrightarrow |z - (1 + 2i) = |z - (2 + i)| \Leftrightarrow |Z_M - Z_B| = |Z_M - Z_A|$

$\Leftrightarrow$ M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$

3 DES QUESTIONS D'ÉVALUATION

Question 1 : **Comment résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$**

Exercice non corrigé

(E) : $z^4 + z^3 + 5z^2 + 2z + 6 = 0$

a) Je justifie que $i\sqrt{2}$ est solution de (E).

, $\left(i\sqrt{2}\right)^4 + \left(i\sqrt{3}\right)^3 + 5\left(i\sqrt{3}\right)^2 + 2\left(i\sqrt{3}\right) + 6 = 0$, donc $i\sqrt{2}$ est solution de (E).

b) Détermine les réels a, b et c tels que : $z^4 + z^3 + 5z^2 + 2z + 6 = (z^2 + 2)(az^2 + bz + c)$

Lorsqu'on effectue la division euclidienne par $z^2 + 2$ on obtient :

$z^4 + z^3 + 5z^2 + 2z + 6 = (z^2 + 2)(z^2 + z + 3)$

c) Je résous l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

Je résous d'abord l'équation : $z^2 + z + 3 = 0$

$\Delta = 1 - 12 = -11 = \left(i\sqrt{11}\right)^2$ donc $z_1 = \dfrac{-1+i\sqrt{11}}{2}$, $z_2 = \dfrac{-1-i\sqrt{11}}{2}$

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est donc : $S_{\mathbb{C}} = \left\{-i\sqrt{2};i\sqrt{2};\dfrac{-1+i\sqrt{11}}{2};\dfrac{-1-i\sqrt{11}}{2}\right\}$

Question 2 : **Comment linéariser une expression trigonométrique ?**

Exercice non résolu

1- $\cos^3 x = \left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \dfrac{e^{i3x}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-i3x}}{2^3} = \dfrac{2\cos 3x + 6\cos x}{8}$

2- $\sin^2 x \cos^2 x = \left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2\left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 = \dfrac{1-\cos 4x}{8}$

3- $\cos^4 x = \left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 = \dfrac{e^{i4x}+e^{-i4x}+4\left(e^{i2x}+e^{-i2x}\right)+6}{16} = \dfrac{\cos 4x + 4\cos 2x + 3}{8}$

4- $\sin^5 x = \left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^5 = \dfrac{2i\sin 5x - 10i\sin 3x + 20i\sin x}{32i} = \dfrac{\sin 5x - 5\sin 3x + 20\sin x}{16}$

Question 3 : **Comment étudier une configuration géométrique avec des complexes**

Exercice non résolu

1- Je justifie que O, A et B sont alignés.

$mes\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right) = Arg\left(\dfrac{z_B}{z_A}\right) + 2k\pi$

$\dfrac{z_B}{z_A} = \dfrac{-1-2i}{3+6i} = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow Arg\left(\dfrac{z_B}{z_A}\right) = \pi$ donc les points O, A et B sont alignés.

2- Je démontre que les points A, B et C appartiennent à un même cercle de centre E(1 ;2)

$EA = |z_A - z_E| = |2+4i| = \sqrt{20}$

$EB = |z_B - z_E| = |-2-4i| = \sqrt{20}$

$EC = |z_C - z_E| = |-4+2i| = \sqrt{20}$

On a donc EA = EB = EC donc A, B et C appartiennent au cercle de centre E et de rayon $2\sqrt{5}$.

3- Je détermine l'affixe du point D tel que B soit le symétrique de D par rapport à A.

B est le symétrique de D par rapport à A donc A est le milieu du segment [BD]. Donc

$z_A = \dfrac{z_B + z_D}{2} \Rightarrow z_D = 2z_A - z_B \Rightarrow z_D = 2(3+6i) - (-1-2i) = 7 + 14i$

4- Détermine l'ensemble des points M tels que $Arg\left(\dfrac{z-1+2i}{z-2}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z})$**.**

$\dfrac{z-1+2i}{z-2} = \dfrac{1-2i-z}{2-z}$ soit H et G les points du plan d'affixes respectives 1- 2i et 2.

Alors on a ; $\dfrac{z-1+2i}{z-2}=\dfrac{1-2i-z}{2-z}=\dfrac{z_H-z}{z_G-z}=\dfrac{z_{\overrightarrow{MH}}}{z_{\overrightarrow{MG}}}$ d'où $Arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{MH}}}{z_{\overrightarrow{MG}}}\right)=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow mes\left(\overrightarrow{MG};\overrightarrow{MH}\right)=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ donc M appartient au cercle de diamètre [GH]. L'ensemble cherché est le cercle de diamètre [GH].

4 MES SÉANCES D'EXERCICES

Exercices de d'application

Ensemble des nombres complexes-Forme algébrique d'un nombre complexe

Exercice 1 (erratum)

2- c), prendre : c) $\dfrac{14}{25}-\dfrac{23}{25}i$

Exercice 2

c)

Exercice 3

Re(z$_1$) = 0 et Im(z$_1$) = 1 ; Re(z$_2$) = 7 et Re(z$_2$) = -9 ; $\mathrm{Re}(z_3)=\dfrac{-5}{3}$ et $\mathrm{Im}(z_3)=\dfrac{2}{3}$

Exercice 4

1- 2 + (3 – x)i est un réel si x = 3

2- (2x – 1) + 4i est imaginaire pure si 2x – 1 = 0 c'est-à-dire $x=\dfrac{1}{2}$

Exercice 5

1- B ; 2- A ; 3 – C ; 4 – C ; 5 – B ; 6 - A ; 7 – C .

Egalité de deux nombres complexes

Exercice 6

$$2+(x-1)i=2+i \Leftrightarrow x-1=1$$
$$\Leftrightarrow x=2$$

Pour $x=2$; on a $Z=2+(2-1)i=2+i$

Opposé d'un nombre complexe

Exercice 7

Les opposés des nombres

L'opposé de Z_1 est $-17+9i$

L'opposé de Z_2 est $\sqrt{2}i$

L'opposé de Z_1 est $5+6i$

Somme de deux nombres complexes

Exercice 8

1) $Z_1+Z_2=2+i+3+2i=5+3i$
2) $Z_1+Z_2=-4+3i+5-8i=1-5i$
3) $Z_1+Z_2=-1-i-7-17i=-8-18i$

Produit de deux nombres complexes

Exercice 9

1) $Z_1Z_2=(2+i)(3+2i)=6+4i+3i-2=4+7i$
2) $Z_1Z_2=(-4+3i)(5-8i)=-20+32i+15i+24=4+47i$
3) $Z_1Z_2=(-1-i)(-7-17i)=7+17i+7i-17=-10+24i$

Inverse d'un nombre complexe

Exercice 10

1) $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

2) $\frac{1}{-4+3i} = \frac{-4-3i}{(-4+3i)(-4-3i)} = \frac{-4}{25} - \frac{3}{25}i$

3) $\frac{1}{-8+8i} = \frac{-8-8i}{(1+i)(1-i)} = -\frac{1}{16} - \frac{1}{16}i$

Puissance d'un nombre complexe

Exercice 11

Ecrivons sous forme algébrique les nombres suivants

$$(2+3i)^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$$

$$(2+3i)^{-2} = \frac{1}{(2+3i)^2} = \frac{1}{-5+12i} = -\frac{5}{169} - \frac{12}{169}i$$

$$(1+i)^4 = ((1+i)^2)^2 = (2i)^2 = -4$$

$$(1+i)^{-4} = \frac{1}{(1+i)^4} = -\frac{1}{4}$$

Exercice 12

$$i^{403} = i^{4\times100+3} = -i$$

$$i^{2030} = i^{4\times507+2} = -1$$

$$i^{2022} = i^{4\times505+2} = -1$$

$$i^{2001} = i^{4\times500+1} = i$$

Produit nul

Exercice 13

1)$Z \times Z' \neq 0 \Leftrightarrow Z \neq 0$ et $Z' \neq 0$

2)$ZZ' = 0 \Leftrightarrow Z = 0$ ou $Z' = 0$

Or $Z' \neq 0$ donc $Z = 0$

Exercice 14

Résolvons dans $\mathbb{C}$

$(3z - 2 - i)(z + 2i) = 0 \Leftrightarrow 3z - 2 - i = 0$ ou $z + 2i = 0$

$\Leftrightarrow 3z = 2 + i$ ou $z = 2i$

$\Leftrightarrow z = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}i$ ou $z = 2i$

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}i\,;2i\right\}$$

Conjugué d'un nombre complexe

Exercice 15

On a :

- $\overline{0} = 0$
- $\overline{1+i} = 1 - i$
- $\overline{1+i} = 1 - i$
- $\overline{7} = 7$
- $\overline{-19} = -19$
- $\overline{3-4i} = 3 + 4i$
- $\overline{-38+6i} = -38 - 6i$

Exercice 16

$z \in \mathbb{C}$ donc $z = a + ib$ avec $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$

Comme $a^2 + b^2 > 0$ et $\mathrm{Im}(z\bar{z}) = 0$
Alors $z\bar{z} \in \mathbb{R}_+$

Exercice 17

Calculons dans chacun des cas

1) $z + \bar{z} = 2 \times 3 = 6$
$z - \bar{z} = 2i \times 2 = 4i$
$z\bar{z} = 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$
2) $z + \bar{z} = 2 \times 7 = 14$
$z - \bar{z} = 2i \times 1 = 2i$
$z\bar{z} = 7^2 + 1^2 = 49 + 1 = 50$

Exercice 18

$\overline{z + z'} = \overline{2 + 3i - 1 + 5i} = \overline{1 + 8i} = 1 - 8i$
$\overline{zz'} = \overline{(2 + 3i)(-1 + 5i)} = \overline{-2 + 10i - 3i - 15} = \overline{-17 + 7i} = -17 - 7i$
$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}} = \frac{2 - 3i}{-1 - 5i} = \frac{(2 - 3i)(-1 + 5i)}{26} = \frac{-2 + 10i + 3i + 15}{26} = \frac{13}{26} + \frac{13}{26}i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

Module d'un nombre complexe

Exercice 19

1- c) ; 2- b)

Exercice 20

Déterminons le module de chacun des nombre complexe

$$|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$
$$|6 - 8i| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

$|\sqrt{2} + \sqrt{7}i| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{7}\right)^2} = \sqrt{2 + 7} = \sqrt{9}$

Exercice 21

L'équivalence est incomplète car si $z' = \bar{z}$ alors $|z| = |z'|$ si $z' = -\bar{z}$ alors $|z| = |z'|$

Exercice 22

$$|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
$$|1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Donc $1 + i$ et $1 - i$ ont le même module

Exercice 23

Calculons

$$|\bar{z}| = |z| = 2$$
$$|-\bar{z}| = |\bar{z}| = |z| = 2$$
$$|zz'| = |z| \times |z'| = 2 \times 3 = 6$$
$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{2}$$
$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} = \frac{2}{3}$$

Affixe, point-image et vecteur image

Exercice 24

1) L'affixe du point A est $-7 + 5i$
2) L'affixe du point B est $3i$
3) L'affixe du vecteur $\vec{u}$ est $-3 + 9i$

Exercice 25

1)Le point image de $1+i$ a pour coordonnées $(1;1)$

2)Le point image de $-3i$ a pour coordonnées $(0;-3)$

3)Le vecteur image du nombre complexe 7 a pour coordonnées $(7;0)$

4)Le vecteur image du nombre complexe 1 + i a pour coordonnées (1 ;1)

Exercice 26

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $-2+3i-1-i$ soit $-3+2i$

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{BC}$ est $4+3i+2-3i$ soit 6

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AC}$ est $4+3i-1-i$ soit $3+2i$

Exercice 27

Soit $a+ib$ l'affixe de B

On a : $a+ib+4-3i=1+i$

Soit $a+4+i(b-3)=1+i$

D'où $a+4=1$ et $b-3=1$

$a=-3$ et $b=4$

Donc $B(-3;4)$

Exercice 28

1.VRAI

2.VRAI

3.FAUX

Exercice 29

1)L'affixe du point I, milieu de [PQ], est le nombre complexe $\frac{1-i+4+5i}{2}$ soit $\frac{5}{2}+2i$

2) $\vec{w}+\vec{y}$ a pour affixe $1-2i+3+4i$ soit $4-2i$

3)$PQ=|4+5i-1+i|=|3+6i|=\sqrt{3^2+6^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

Exercice 30

1. Le vecteur $3\vec{w}$ a pour affixe $3(2+3i)$ soit $6+9i$
2. Le vecteur $2\vec{w}-3\vec{y}$ a pour affixe $2(2+3i)-3(4-5i)$ soit $4+6i-12i+15i$
   soit $-8+21i$

Argument d'un nombre complexe

Exercice 31

$\mathrm{ARG}(1)=0$

$\mathrm{ARG}(i)=\frac{\pi}{2}$

$\mathrm{ARG}(-i)=-\frac{\pi}{2}$

$\mathrm{ARG}(-1)=\pi$

$\mathrm{ARG}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{\pi}{3}$

Exercice 32

a)VRAI

b)FAUX

Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Exercice 33

- $|1+i\sqrt{3}|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$

  On a $\cos\theta=\frac{1}{2}$ et $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta=\frac{\pi}{3}$
- $|\sqrt{3}-3i|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2}=\sqrt{3+9}=2\sqrt{3}$

On a $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta = -\frac{\pi}{3}$

- $|-\sqrt{2} - i\sqrt{6}| = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

  On a $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta = -\frac{2\pi}{3}$

Exercice 34

Déterminons la forme trigonométrique des nombres complexes

1.$|1 - i| = \sqrt{2}$; soit θ =ARG(Z)

$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\theta = -\frac{\pi}{4}$

donc $1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

2.$|\sqrt{3} - 3i| = 2\sqrt{3};$ soit $\theta =$ ARG(Z)

On a $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta = -\frac{\pi}{3}$

donc $\sqrt{3} - 3i = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

3. $|-\sqrt{2} + i\sqrt{6}| = 2\sqrt{2}$; soit $\theta =$ ARG(Z)

On a $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta = \frac{2\pi}{3}$

$$-\sqrt{2} + i\sqrt{6} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

Exercice 35

Déterminons un argument de chacun des nombres complexes suivants :

$\arg(zz') = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi\,; k \in \mathbb{Z}$

$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi\,; k \in \mathbb{Z}$

$\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z) + 2k\pi = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi\,; k \in \mathbb{Z}$

$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi\,; k \in \mathbb{Z}$

$\arg(z^2) = 2\arg(z) + 2k\pi = 2 \times \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\,; k \in \mathbb{Z}$

$\arg\left(\frac{z^2}{z'}\right) = 2 \times \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\,; k \in \mathbb{Z}$

Exercice 36

Ecrivons chacun des nombres sous forme trigonométrique

- $|(2+2i)(1-i)| = 4$ et $\arg((2+2i)(1-i)) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = 0 + 2k\pi$

  donc $(2+2i)(1-i) = 4(\cos 0 + i\sin 0)$

- $\left|\frac{\sqrt{3}+i}{2i}\right| = 1$

  $\mathrm{Arg}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2i}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} + 2k\pi = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

  donc $\frac{\sqrt{3}+i}{2i} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

- $\left|\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)}\right| = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1$

  $\arg\left(\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)}\right) = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$

  donc $\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

- $|(1-i)^4| = |1-i|^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4 = 4$

  $\arg((1-i)^4) = 4 \times \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi = \pi + 2k\pi$

donc $(1-i)^4 = 4(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$

Exercice 37

- $\sqrt{\mathbf{2}}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$
- $\mathbf{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{\mathbf{2}} + i\sqrt{\mathbf{2}}$
- $3\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

Forme exponentielle d'un nombre complexe

Exercice 38

Les nombres complexes écrits sous forme exponentielle

$1.2e^{i\theta}$

$3.7e^{-i\theta}$

Exercice 39

Ecrivons sous forme exponentielle

a) $2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

b) $|1+i| = \sqrt{2}$ et $\mathrm{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4}$

donc $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

c) $\left|3 + i\sqrt{3}\right| = 2\sqrt{3}$ et $\mathrm{Arg}\left(3 + i\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{6}$

donc $3 + i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$

Exercice 40

Ecrivons sous forme trigonométrique

1) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}} = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{12}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{12} - \frac{2\pi}{3}\right)} = e^{-i\frac{7\pi}{12}} = \cos\frac{7\pi}{12} - i\sin\frac{7\pi}{12}$

2) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \dfrac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

3) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{12} - i\cos\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{12} + i\cos\frac{\pi}{12}} = \dfrac{\cos\frac{5\pi}{12} - i\sin\frac{5\pi}{12}}{\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}} = e^{i\left(-\frac{5\pi}{12} - \frac{5\pi}{12}\right)} = e^{-i\frac{5\pi}{6}} = \cos\frac{5\pi}{6} - i\sin\frac{5\pi}{6}$

4) $-2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

Formule de Moivre

Exercice 41

Ecrivons sous forme trigonométrique

1) $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^2 = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} = 4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

2) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^3 = \left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}\right)^3 = \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}\right)^3 = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

3) $\left(\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{1-i}\right)^3 = \left(\frac{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}\right)^3 = \left(2e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^3 = 8e^{i\frac{\pi}{4}} = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

Exercice 42

a)$(\cos x + i\sin x)^2 = \cos 3x + i\sin 3x$

$$= \cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x - 3\cos x\sin^2 x - i\sin^3 x$$
$$= \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x + i(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x)$$

Par identification on a :

$\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x$

b) On a $\cos 2x = 1 - \sin^2 x$ donc

$$\cos 2x + \cos 3x = 1 - \sin^2 x + \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x = 1 + \cos^3 x - \sin^2 x\,(2 + 3\cos x)$$

Formules d'Euler

Exercice 43

Ecrivons sous forme algébrique

1) $\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

2)$\frac{e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2i} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

3)$e^{i\frac{3\pi}{4}} + e^{-i\frac{3\pi}{4}} = 2\cos\frac{3\pi}{4} = -2\times\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$

Exercice 44

Ecrivons sous forme trigonométrique

1) $e^{i\theta} + 1 = e^{i\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\times e^{-i\frac{\theta}{2}} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\times e^{i\frac{\theta}{2}}$

Comme $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$ alors

$$e^{i\theta} + 1 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

2) $e^{i\theta} - 1 = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = 2i\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\times e^{i\frac{\theta}{2}} = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}$

Or $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$ donc

$$e^{i\theta} - 1 = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

3)$e^{-i\theta} + 1 = e^{-i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\times e^{-i\frac{\theta}{2}} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(-\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)\right)$

Linéarisation

Exercice 45

Linéarisons

1) $\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{i3x} + 3e^{i2x}e^{-i} + 3e^{ix}e^{-i2x} + e^{-i3x}\right)$

$$= \frac{1}{8}\left[e^{i3x} + e^{-i3x} + 3\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\right] = \frac{1}{8}(2\cos 3x + 3\cos x)$$
$$= \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{8}\cos x$$

2) $\sin^2 x\cos^2 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{8}\left(e^{i2x} - e^{-i2x}\right)^2$

$$= -\frac{1}{8}(2\cos 4x - 2) = -\frac{1}{4}\cos 4x + \frac{1}{4}$$

3) $\cos^4 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\left[e^{i4x} + e^{-i4x} + 4\left(e^{i2x} + e^{-i2x}\right) + 6\right]$

$$= \frac{1}{16}(2\cos 4x + 8\cos 2x + 6)$$

4)$\sin^5 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^5 = \frac{1}{32i}\left[e^{i5x} - e^{-i5x} - 5\left(e^{i3x} + e^{-i3x}\right) + 10\left(e^{i2x} - e^{-i2x}\right)\right]$

$$= \frac{1}{32i}(2i\sin 5x - 10i\sin 3x + 20i\sin 2x)$$
$$= \frac{1}{16}\sin 5x - \frac{5}{16}\sin 3x + \frac{5}{8}\sin 2x$$

Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

Exercice 46

Déterminons les racines carrées de chacun des nombres suivants

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 1 \end{cases}$

$x^2 = \frac{1}{2}$ soit $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Si $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et si $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Les racines carrées de i sont $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{2} \\ x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 1 \end{cases}$

$x^2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ soit $x = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$ ou $x = -\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$

Si $x = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$; $y = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}}$ et si $x = -\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$; $y = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}}$

Les racines carrées de $1 + i$ sont $\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}}i$ et $-\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}}i$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 - y^2 = \sqrt{3} \\ 2xy = 1 \end{cases}$

$x^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$ Soit $x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$ ou $x = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$

Si $x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$; $y = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$ et si $x = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$; $y = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$

Les racines carrées de $\sqrt{3} + i$ sont $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}i$ et $-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}i$

Exercice 47

Déterminons les racines cubiques de chacun des nombres complexes suivants

$1 = e^{i0}$ donc $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}}$; $k \in (0; 1; 2)$

les racines cubiques de 1 sont : 1; $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ donc $z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)}$; $k \in (0; 1; 2)$

les racines cubiques de i sont : $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i; -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i; -i$

$1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc $z_k = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)}$; $k \in (0; 1; 2)$

les racines cubiques de $1 + i$ sont : $2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{\pi}{12}}; 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{3\pi}{4}}; 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{-7\pi}{12}}$

Exercice 48

Déterminons les racines cubiques de chacun des nombres complexes suivants

1) $1 = e^{i0}$ donc $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}}$; $k \in \{0; 1; 2\}$

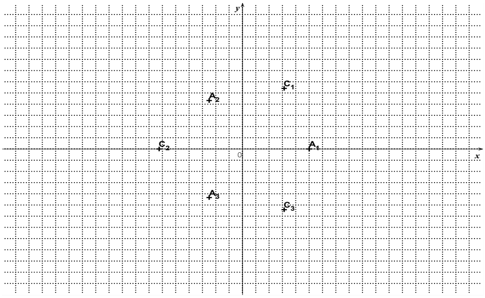
Les racines cubiques de 1 sont $1; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2)$1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ donc $z_k=2^{\frac{1}{6}}e^{i\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$; $k\in\{0;1;2\}$

Les racines cubiques de $1-i$ sont $2^{\frac{1}{6}}e^{-i\frac{\pi}{12}}$;$2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{7\pi}{12}}$;$2^{\frac{1}{6}}e^{-i\frac{9\pi}{12}}$

3)$-2=2e^{i\pi}$ donc $z_k=2^{\frac{1}{3}}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$; $k\in\{0;1;2\}$

Les racines carrées de -2 sont $2^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{\pi}{3}}$;$2^{\frac{1}{3}}e^{i\pi}$ et $2^{\frac{1}{3}}e^{-i\frac{\pi}{3}}$



Exercice 49

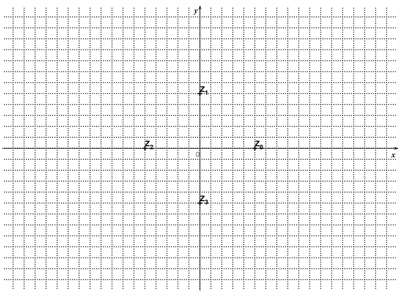
$1=e^{i0}$ donc les racines quatrième de 1 sont les nombres complexes de la forme

$z_k=e^{i\frac{2k\pi}{4}}$; $k\in\{0;1;2;3\}$

Soit $z_k=e^{i\left(\frac{k\pi}{2}\right)}$; $k\in\{0;1;2;3\}$

Les racines quatrièmes de 1 sont : $1; e^{i\frac{\pi}{2}}$;$e^{i\pi}$;$e^{-i\frac{\pi}{2}}$

C'est-à-dire $1; i; -1; -i$



Exercice 50

Les racines n-ième d'un nombre complexe non nul sont les nombres complexes

de la forme $Z_k=\sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$; $k\in\{0;1;2;\ ;\ldots\ldots;n-1\}$

On a $Z_0=\sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+2\times\frac{0\pi}{n}\right)}$; $Z_1=\sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)}$;…………… ;$Z_{n-1}=\sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)}$

$$Z_0+Z_1+\cdots+Z_{n-1}=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\alpha}{n}}\left(1+e^{i\frac{2\pi}{n}}+\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^2+\cdots+\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^{n-1}\right)$$

$$=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\alpha}{n}}\times\frac{1-\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}}=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\alpha}{n}}\times\frac{1-1}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}}=0$$

Exercice 51

Vérifions

1. a) on a : $1+j+\bar{j}=0$ donc $\bar{j}=-1-j$

   b) $j^2=\bar{j}$ donc $j^3=j\bar{j}$

   Or $j^3=1$ donc $j\bar{j}=1$

   c) $j^3=1$ donc $(j^3)^2=1^2$ d'où $j^6=1$

2)$j^{2021}=j^{3\times573+1}=j$ car $j^3=1$

Exercice 52

Résolvons dans $\mathbb{C}$

1) $\Delta=-3=\left(i\sqrt{3}\right)^2$ ainsi $Z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ ou $Z=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

$$S_{\mathbb{C}}=\left\{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2};\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$$

2)$\Delta=3+4i=(2+i)^2$ ainsi $Z=\frac{4-3i+2+i}{2}$ ou $Z=\frac{4-3i-2-i}{2}$

$Z=3-i$ ou $Z=1-2i$

$$S_{\mathbb{C}}=\{3-i;1-2i\}$$

3)$\Delta=3-4i=(2-i)^2$ ainsi $Z=\frac{i\sqrt{3}+2-i}{2i}$ ou $Z=\frac{i\sqrt{3}-2+i}{2i}$

$Z=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}-i$ ou $Z=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+i$

$$S_{\mathbb{C}}=\left\{\frac{-1+\sqrt{3}}{2}-i;\frac{1+\sqrt{3}}{2}+i\right\}$$

Nombre complexe et configuration du plan

Exercice 53

1)$|Z-i|=2 \Leftrightarrow |Z_M-Z_A|=2$ où $Z_A=i$

L'ensemble des points M est le cercle de centre A et de rayon 2

2)$|Z-1+2i|=|Z+2-i| \Leftrightarrow |Z-(1-2i)|=|Z-(-2+i)|$

$$\Leftrightarrow |Z_M-Z_B|=|Z_M-Z_C| \Leftrightarrow BM=CM$$

Où $Z_B=1-2i$ et $Z_C=-2+i$

L'ensemble des points M est la médiatrice du segment $[BC]$.

Exercice 54

On a :

$$\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}=\frac{\sqrt{3}+i}{2i}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

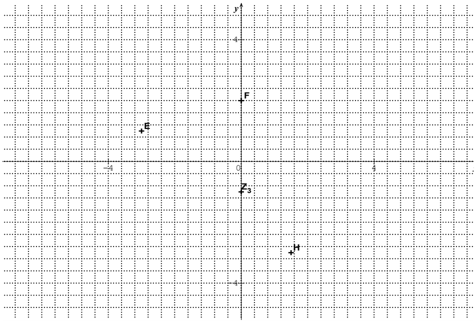
On a $\left|\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}\right|=\left|\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=1 \Leftrightarrow \frac{AC}{AB}=1 \Leftrightarrow AB=AC$ et $\mathrm{Arg}\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=-\frac{\pi}{3}$

Donc ABC est un triangle équilatéral de sens indirect.

Exercices de renforcement / approfondissement

Exercice 55

1)



2) $Z_{\overrightarrow{EF}} = 2i + 3 - i = 3 + i$

$$Z_{\overrightarrow{FH}} = \frac{3}{2} - 3i - 2i = \frac{3}{2} - 5i$$

$$Z_{\overrightarrow{HE}} = -3 + i - \frac{3}{2} + 3i = -\frac{9}{2} + 4i$$

$$Z_{2\overrightarrow{FE}} = 2(-3 + i - 2i) = -6 - 2i$$

3)I a pour affixe $\frac{-3+i+2i}{2}$ soit $\frac{-3+3i}{2}$

Exercice 56

Ecrivons sous forme trigonométrique

1) $ab = 6\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right)\right) = 6\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$$ab^2 = 18\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$a^2b = 12\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

$$\frac{b}{a^2} = \frac{3}{4}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

2)Déduisons -en la forme algébrique

$$ab = 6\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 3 + 3i\sqrt{3}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a^2b}{ab^2} = \frac{12}{18}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i$$

Exercice 57

1) $|U| = \sqrt{2}$ et $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$

$|V| = 2$ et $\arg(\sqrt{3} - i) = -\frac{\pi}{6}$

2.a) $U.V = (1+i)(\sqrt{3} - i) = \sqrt{3} - i + i\sqrt{3} + 1 = 1 + \sqrt{3} + i(-1 + \sqrt{3})$

D'autre part $UV = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

2.b) on a : $UV = UV$ donc $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

Exercice 58

a)$(\cos x + i\sin x)^4 = \cos 4x + i\, sin 4\, x$

$$= \cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x + i(4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^3 x)$$

Ainsi $\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x$

b)$\cos 5x + \cos 6x$

$$= \cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x - 5\cos x \sin^4 x + \cos^6 x - 15\cos^4 x \sin^2 x - 15\cos^2 x \sin^4 x - \sin^6 x$$

c)$\sin x - \sin 2x + \sin 3x - \sin 4x$

$$= \sin x - 2\sin x \cos x + 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x - 4\cos^3 x \sin x + 4\cos x \sin^3 x$$

Exercice 59

Linéarisons

1) $\cos^4 x = \frac{1}{16}(2\cos 4x + 8\cos 2x + 6)$

$$\cos^2 x \sin^3 x = -\frac{1}{32}(2\sin 5x - 2\sin 3x - 4\sin x)$$

$$\cos^5 x - \sin^4 x = \frac{1}{2^4}\cos 5x + \frac{5}{2^4}\cos 3x + \frac{5}{2^3}\cos x - \frac{1}{2^3}\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{2^3}$$

2)Déterminons les racines carrées de chacun des nombres complexes suivants

$Z = 2i$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 2 \end{cases}$$

$x^2 = 1$ d'où $x = 1$ ou $x = -1$

Si $x = 1$, $y = 1$; si $x = -1$, $y = -1$

Les racines carrées de $2i$ sont $1 + i$ et $-1 - i$

$$Z = 3 + 4i$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$x^2 = 4$. D'où $x = 2$ ou $x = -2$

Si $x = 2$, $y = 1$; si $x = -2$, $y = -1$

Les racines carrées de $3 + 4i$ sont $2 + i$ et $-2 - i$

$$Z = 8 + 6i$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - y^2 = 8 \\ xy = 3 \end{cases}$$

$x^2 = 9$ d'où $x = 3$ ou $x = -3$

Si $x = 3$, $y = 1$; si $x = -3$, $y = -1$

Les racines carrées de $8 + 6i$ sont $3 + i$ et $-3 - i$

$$Z = 5 - 12i$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^2 - y^2 = 5 \\ xy = -6 \end{cases}$$

$x^2 = 9$ d'où $x = 3$ ou $x = -3$

Si $x = 3$, $y = -2$; si $x = -3$, $y = 2$

Les racines carrées de $5-12i$ sont $3-2i$ et $-3+2i$

$$Z=-7+24i$$
$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x^2-y^2=-7 \\ xy=12 \end{cases}$$

$x^2=9$ d'où $x=3$ ou $x=-3$
Si $x=3$, $y=4$; si $x=-3$, $y=-4$
Les racines carrées de $-7+24i$ sont $3+4i$ et $-3-4i$

Exercice 60

1) Résolvons dans $\mathbb{C}$

$$\Delta=\left(2^{\theta+1}\cos\theta\right)^2-4\times 2^{2\theta}=\left(i2^{\theta+1}\sin\theta\right)^2$$

$Z=2^{\theta}(\cos\theta+i\sin\theta)$ ou $Z=2^{\theta}[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]$

$$S_{\mathbb{C}}=\left\{2^{\theta}(\cos\theta+i\sin\theta)\,;2^{\theta}[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]\right\}$$

2)OAB est équilatéral $\Leftrightarrow \frac{2^{\theta}e^{i\theta}}{2^{\theta}e^{-i\theta}}=e^{\pm i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow e^{i2\theta}=e^{\pm i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow 2\theta=\frac{\pi}{3}$ ou $2\theta=-\frac{\pi}{3}$
$\Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{6}$ ou $\theta=-\frac{\pi}{6}$

Exercice 61

1) Résolvons dans $\mathbb{C}$
Soit a cette solution réelle on a :

$$a^3-a^2-a-2+i(2-a)=0$$

$2-a=0$ et $a^3-a^2-a-2=0$ donc $a=2$

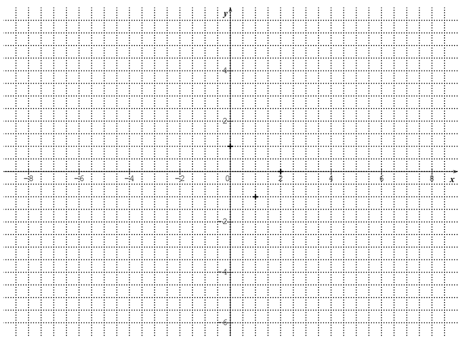
Ainsi $P(Z)=(Z-2)(Z^2+Z+(1-i))$

$$\Delta=-3+4i=(1+2i)^2$$

$Z=1+i$ ou $Z=-i$

$$S_{\mathbb{C}}=\{\,2\,;-1-i\,;\,i\,\}$$

2.a)



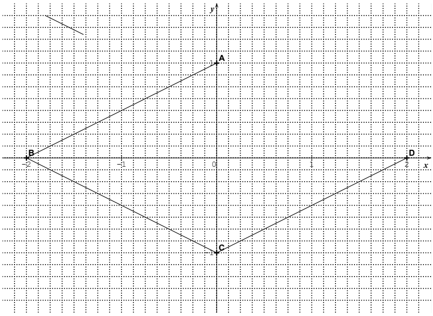
2.b)$\frac{Z_A-Z_C}{Z_B-Z_C}=\frac{2-i}{-1-2i}=\frac{-1+2i}{1+i}=$ i, d'où le résultat

Exercice 62

1) on a : $(Z^2+1)(Z^2-4)=Z^4-3Z^2-4$
2) Résolvons dans $\mathbb{C}$

$(E) \Leftrightarrow Z^2 + 1 = 0$ ou $Z^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow Z^2 = -1$ ou $Z^2 = 4$
$\Leftrightarrow Z = i$ ou $Z = -i$ ou $Z = 2$ ou $Z = -2$
$S_{\mathbb{C}} = \{i; -i; 2; -2\}$

3) figure



4)$Z_{\overrightarrow{BA}} = 2 + i$ et $Z_{\overrightarrow{CD}} = 2 + i$ donc $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$
D'où ABCD est un parallélogramme de plus $\frac{Z_A - Z_C}{Z_D - Z_B} = \frac{2i}{4} = \frac{1}{2}i$ et $\frac{1}{2}i \in i\mathbb{R}^*$
Donc $(AC) \perp (BD)$ par suite ABCD est un losange.

Exercice 63
Soit ib cette solution imaginaire pure
on a :$-b^2 + 2b + i(-b^3 + 5b^2 - 10b + 8) = 0$ d'où $b = 2$
Ainsi $P(Z) = (Z - 2i)(Z^2 + (1 - 3i)Z - 4)$
$\Delta = 8 - 6i = (-3 + i)^2$

$Z = \frac{-1+3i-3+i}{2}$ ou $Z = \frac{-1+3i+3-i}{2}$
$Z = -2 + 2i$ ou $Z = 1 + i$
$S_{\mathbb{C}} = \{2i; -2 + 2i; 1 + i\}$

Exercice 64
1) Déterminons les racines cubiques de 1
On a : $Z^3 = 1$

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{1; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

Les racines cubiques de 1 sont donc 1 ; $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
2)$(2 - 1)^3 = 8 - 12i - 6 + i = 2 - 11i$
3)Déduisons Les racines cubiques de $2 - 11i$
On a $Z^3 = 2 - 11i \Leftrightarrow Z^3 = (2 - 1)^3 \Leftrightarrow \left(\frac{Z}{2-i}\right)^3 = 1$ d'après 1)
$Z = (2 - i) \times 1$ ou $Z = (2 - i)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ou $Z = (2 - i)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{2 - i; \frac{-2 + \sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)i; \frac{-2 - \sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right)i\right\}$$

Les racines cubiques de $2-11i$ sont $2-i$; $\frac{-2+\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)i$ et $\frac{-2-\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{1}{2}-\sqrt{3}\right)i$

Exercice 65

1)$a=\frac{9}{2}\times 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=9\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

2.a)On a $a=9\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Les racines cinquièmes de a sont les nombres complexes de la forme

$Z_k=\sqrt[5]{9\sqrt{3}}e^{i\left(-\frac{\pi}{15}+\frac{2k\pi}{5}\right)}$; $k\in\{0;1;2;3;4\}$

b) représentation graphique des racines cinquièmes de a

Exercice 66

1)$Z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\arg(Z)=k\pi$; $k\in Z$

$\Leftrightarrow\arg\left(\frac{2(Z-2)}{Z-i}\right)=k\pi$ $\Leftrightarrow\arg\left(\frac{(Z-2)}{Z-i}\right)=k\pi$

$\Leftrightarrow\arg\left(\frac{Z-z_B}{Z-z_A}\right)=k\pi$ *ou* $Z_A=i$ et $Z_B=2$

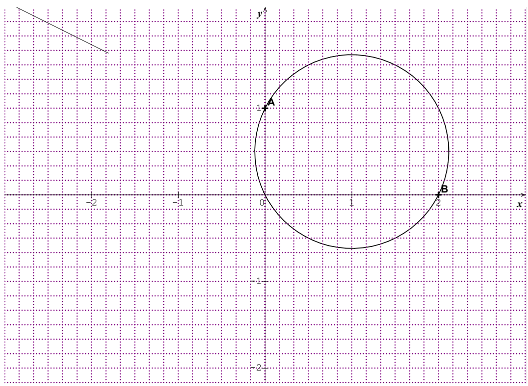
$\Leftrightarrow\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right)=k\pi$

Ainsi l'ensemble des points M est la droite (AB) privée des points A *et* B

2)$Z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow\arg(Z)=\frac{\pi}{2}+k\pi$

$\Leftrightarrow$ $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$; $k\in Z$

L'ensemble des points M est le cercle de diamètre AB privé des points A



Exercice 67

$$f(Z)=\frac{iZ}{Z+i}$$

1)$f(b)=1+2i\Leftrightarrow\frac{ib}{b+i}=1+2i\Leftrightarrow b(1+i)=2-i\Leftrightarrow b=\frac{2-i}{1+i}=\frac{1-3i}{2}$

2)$f(Z)-i=\frac{iZ}{Z+i}-i=\frac{1}{Z+i}$

Or $|f(Z)-i|=\frac{1}{|Z+i|}=\frac{1}{r}$ et $\arg(f(Z)-i)=\arg\left(\frac{1}{Z+i}\right)=-\arg(Z+i)=-a$

Ainsi $f(Z)-i=\frac{1}{r}(\cos(-a)+i\sin(-a))$

3.a)$Z_A=-i$

$$|f(Z)-i|=\sqrt{2}\Leftrightarrow|f(Z)-Z_A|=\sqrt{2}\Leftrightarrow\left|\frac{1}{Z+i}\right|=\sqrt{2}\Leftrightarrow|Z+i|=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow|Z-Z_A|=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

L'ensemble (C) des points M est le cercle de centre A et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\arg(f(Z)-i)=\frac{\pi}{4}+2k\pi \Leftrightarrow \arg\left(\frac{1}{Z+i}\right)=\frac{\pi}{4}+2k\pi \Leftrightarrow -\arg(Z+i)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$

$$\Leftrightarrow \arg(Z-Z_A)=-\frac{\pi}{4}+2k\pi \Leftrightarrow \text{Mes}(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{AM}})=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\ ;k\in\mathbb{Z}$$

L'ensemble (Γ) des points M est la demi-droite de repère $(A;\overrightarrow{e_1})$ privée de A

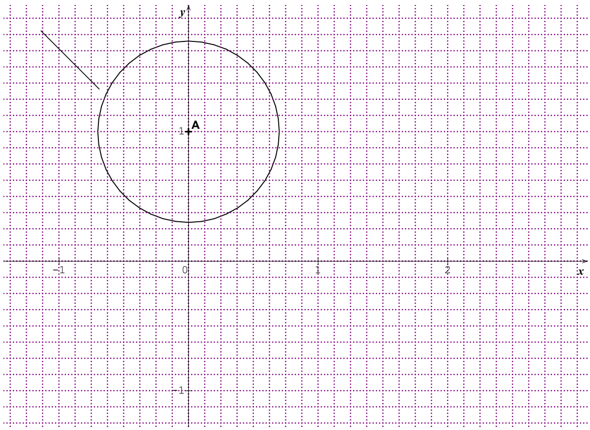
avec $\text{mes}(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{e_1}})=-\frac{\pi}{4}$

c) on a : $|f(b)-i|=|1+2i-i|=|1+i|=\sqrt{2}$ donc $B\ \in(C)$

d'autre part $\arg(f(b)-i)=\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$ donc $B\ \in(\Gamma)$

par suite B *appartient* à (C) et à (Γ)

Construction de (C) et à (Γ)



Exercice 68

Démontrons que Z est un réel

$$|1+iZ|=|1-iZ| \Leftrightarrow |1+iZ|^2=|1-iZ|^2 \Leftrightarrow (1-iZ)(1-i\bar{Z})=(1-iZ)(1+i\bar{Z})$$

$$\Leftrightarrow 1-i\bar{Z}+iZ+Z\bar{Z}=1+i\bar{Z}-iZ+Z\bar{Z} \Leftrightarrow 2i\bar{Z}-2iZ=0 \Leftrightarrow 2i(\bar{Z}-Z)=0$$

$$\Leftrightarrow \bar{Z}-Z=0 \Leftrightarrow \bar{Z}=Z$$

Donc $Z\in\mathbb{R}$

Exercice 69

Ecrivons sous forme algébrique

1) $2e^{\left(-i\frac{\pi}{4}\right)}\times e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}=2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)}=2e^{i\frac{\pi}{2}}=2i$

2) $\frac{2\,e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}}{e^{-i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}}=\frac{2}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}\right)}=\frac{2}{3}e^{i\pi}=-\frac{2}{3}$

3) $\frac{2\,e^{-i\frac{\pi}{3}}}{3\,e^{-i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}}=\frac{2}{3}e^{i\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)}=\frac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}i$

Exercice 70

Ecrivons sous forme trigonométrique chacun des nombres suivants

1) $\frac{\tan\theta-i}{\tan\theta+i}=\frac{\sin\theta-i\cos\theta}{\sin\theta-i\cos\theta}=\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{-\cos\theta+i\sin\theta}=\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos(\pi-\theta)+i\sin(\pi-\theta)}=\frac{e^{i\theta}}{e^{i(\pi-\theta)}}=e^{i(2\theta-\pi)}$

$$=\cos(2\theta-\pi)+i\sin(2\theta-\pi)$$

2)$\frac{1}{1+i\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\cos\theta+i\sin\theta} = \cos\theta\, e^{-i\theta} = \cos\theta\,(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$ car $\cos\theta > 0$

3)$e^{i\theta} + e^{2i\theta} = e^{i\theta}(1+e^{i\theta}) = e^{i\theta}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = e^{i\theta}\left[e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)\right]$

$= 2\cos\theta\, e^{i\frac{3\theta}{2}}$ comme $\cos\theta > 0$, alors

$$e^{i\theta} + e^{2i\theta} = 2\cos\theta\left(\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right)$$

4)$\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta} = \frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta-i\sin\theta} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{2i\theta} = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$

Exercice 71

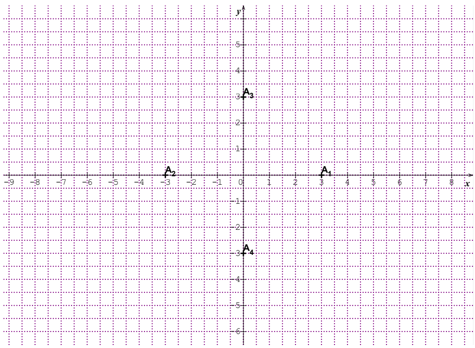
Déterminons les racines quatrième de 81

On a : $Z^4 = 81 \Leftrightarrow Z^4 = 3^4 \Leftrightarrow \left(\frac{Z}{3}\right)^4 = 1$ or les racines quatrième de 1 sont $1; -1; i$ et $-i$

Donc $Z = 3\times 1$ ou $Z = 3\times(-1)$ ou $Z = 3\times i$ ou $Z = 3\times(-i)$

Les racines quatrièmes de 81 sont $3; -3; 3i$ et $-3i$

Construction des points images



Exercice 72

1) Déterminons les racines n-ième de $-i$

On a $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ainsi $Z^n = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$$Z_k = e^{i\left(-\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}\right)};\ k \in \{0; 1; 2; \dots\dots; n-1\}$$

Déterminons les racines n-ième de $1+i$

On a : $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ainsi $Z^n = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$Z_k = 2^{\frac{1}{2n}}e^{i\left(\frac{\pi}{4n}+\frac{2k\pi}{n}\right)};\ k \in \{0; 1; 2; \dots\dots; n-1\}$$

2.a) calculons

$$(9+i)^2 = 81 - 1 + 18i = 80 + 18i$$

2.b) Résolvons dans $\mathbb{C}$

$(E) \Leftrightarrow Z^2 + (7-1)Z - 8 - 8i = 0$ avec $Z = z^3$

$$\Delta = (7-i)^2 + 4(8+8i) = 49 - 1 - 14i + 32 + 32i = 80 + 18i = (9+i)^2$$

Ainsi $Z = \frac{-7+i+9+i}{2} = 1 + i$ ou $Z = \frac{-7+i-9-i}{2} = -8$

De plus on a :

$(E_1) : z^3 = 1 + i$ et $(E_2) : z^3 = -8$

Résolvons (E_1)

$(E_1): z^3 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc $Z_k = 2^{\frac{1}{6}}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)}; k \in \{0;1;2\}$

D'où $Z = 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{\pi}{12}}$ ou $Z = 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ou $Z = 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{17\pi}{12}}$

Résolvons (E_2)

$(E_1): z^3 = 2^3 e^{i\pi}$ donc $Z_k = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)}; k \in \{0;1;2\}$

D'où $Z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $Z = 2e^{i\pi}$ ou $Z = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{\pi}{12}};\ 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{3\pi}{4}};2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{17\pi}{12}}; 2e^{i\frac{\pi}{3}}; 2e^{i\pi}; 2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right\}$$

Exercice 73

Déterminons les entiers naturels tels que $\left(1+i\sqrt{3}\right)^n$ soit un nombre réel positif.

On a $\left(1+i\sqrt{3}\right)^n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{3}}$

Donc $\left(1+i\sqrt{3}\right)^n \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow \frac{n\pi}{3} = 2k\pi \Leftrightarrow n = 6k\,; k \in \mathbb{Z}_+$

$$n = 6k\,; k \in \mathbb{Z}_+$$

Exercice 74

$$\frac{1+Z}{1-Z} = -\overline{\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)} \Leftrightarrow (1+Z)(1-\bar{Z}) = (1-Z)(-1-\bar{Z})$$

$$\Leftrightarrow 1-\bar{Z}+Z-Z\bar{Z} = -1+\bar{Z}+Z+Z\bar{Z} \Leftrightarrow 2Z\bar{Z} = 2$$

$$\Leftrightarrow Z\bar{Z} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{Z\bar{Z}} = 1$$

$$\Leftrightarrow |Z| = 1$$

Exercice 75

1.a) $Z = Re(Z) + i\,Im(Z)$

On a : $|\,Z\,| = \sqrt{\left(Re(Z)\right)^2 + \left(Im(Z)\right)^2}$ et $|\,Z\,| \geq 0$

Si $Re(Z) \leq 0$, alors $Re(Z) \leq |\,Z\,|$

Si $Re(Z) \geq 0$, alors on a

$$|\,Z\,|^2 - \left(Re(Z)\right)^2 = \left(Re(Z)\right)^2 + \left(Im(Z)\right)^2 - \left(Re(Z)\right)^2 = \left(Im(Z)\right)^2$$

Or $\left(Im(Z)\right)^2 \geq 0$ Donc $Re(Z) \leq |\,Z\,|$

Par suite pour tout nombre complexe Z on a : $Re(Z) \leq |\,Z\,|$

b) $Re(Z) = |\,Z\,|$ si $Re(Z) \geq 0$ et $\sqrt{\left(Re(Z)\right)^2 + \left(Im(Z)\right)^2} = Re(Z)$

d'où $Re(Z) \geq 0$ et $Im(Z) = 0$

2.a) on a :$|Z_1+Z_2|^2 = (Z_1+Z_2)(\overline{Z_1}+\overline{Z_2})$

$$= |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2\,Re(Z_1 \times \overline{Z_2})(1)$$

Or d'après 1.a) on a : $Re(Z_1 \times \overline{Z_2}) \leq |Z_1 \times \overline{Z_2}|(2)$

D'où $Re(Z_1 \times \overline{Z_2}) \leq |Z_1||\overline{Z_2}|$

De(1) et (2) on obtient : $|\,Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2Re(\,Z_1 \times \overline{Z_2}) \leq |\,Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2|\,Z_1||\overline{Z_2}|$

$$|\,Z_1+Z_2|^2 \leq |\,Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2|\,Z_1||\overline{Z_2}|$$

$$|\,Z_1+Z_2|^2 \leq |\,Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2|\,Z_1||\,Z_2|$$

$$|\,Z_1+Z_2|^2 \leq (|\,Z_1| + |Z_2|)^2$$

Par suite $|\,Z_1+Z_2| \leq |\,Z_1| + |Z_2|$

b) Si $Z_2 = \lambda\,Z_1$ avec $\lambda > 0$

on a d'une part

$$|\,Z_1+Z_2| = |Z_1+\lambda\,Z_1| = |1+\lambda\,||Z_1| = (1+\lambda\,)|Z_1|$$

et d'autre part

$$|Z_1| + |Z_2| = |Z_1| + |\lambda Z_1| = |Z_1| + |Z_1||\lambda| = |1+\lambda||Z_1| = (1+\lambda)|Z_1|$$

Donc Si $Z_2 = \lambda Z_1$ avec $\lambda > 0$ alors $|Z_1 + Z_2| = |Z_1| + |Z_2|$

3.a) Pour $n = 2$ on a $|Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$

Supposons qu'il existe un entier naturel $n \geq 2$ tels que

$|Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n| \leq |Z_1| + |Z_2| + \cdots + |Z_n|$

et montrons que

$|Z_1 + Z_2 + \dots + Z_{n+1}| \leq |Z_1| + |Z_2| + \cdots + |Z_{n+1}|$

on a : $|Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n| \leq |Z_1| + |Z_2| + \cdots + |Z_n|$

d'où $|Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n| + |Z_{n+1}| \leq |Z_1| + |Z_2| + \cdots + |Z_n| + |Z_{n+1}| (1)$

or $|Z_1 + Z_2 + \dots + Z_{n+1}| \leq |Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n| + |Z_{n+1}| (2)$

donc de (1) et (2) on déduis que

$|Z_1 + Z_2 + \dots + Z_{n+1}| \leq |Z_1| + |Z_2| + \cdots + |Z_{n+1}|$

En conclusion

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a

$|Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n| \leq |Z_1| + |Z_2| + \cdots + |Z_n|$

b) on suppose que $Z_1;\ Z_2;\ \dots\ et\ Z_n$ sont tous non nuls

S'il existe des réels $\lambda_1;\ \lambda_2;\ \lambda_3, \dots, \lambda_n$ tous strictement positifs tels que pour tout $k = 1, \dots, n$ on a $Z_k = \lambda_k Z_1$

d'une part $|Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n| = |\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_1 + \dots + \lambda_n Z_1|$

$$= |(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) Z_1|$$

$$= (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)|Z_1|$$

D'autre part $|Z_1| + |Z_2| + \cdots + |Z_n| = |\lambda_1 Z_1| + |\lambda_2 Z_1| + \cdots + |\lambda_n Z_1|$

$$= \lambda_1 |Z_1| + \lambda_2 |Z_1| + \cdots + \lambda_n |Z_1|$$

$$= (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)|Z_1|$$

Par suite $|Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n| = |Z_1| + |Z_2| + \cdots + |Z_n|$

EXERCICE 76

1) L'impédance complexe Z est égale à

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C = R + jLw + \frac{1}{jCw} = R + \left(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) Lw + \frac{-\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}}{Cw}$$

$$= R - \frac{Lw}{2} - \frac{1}{2Cw} + i\left(\frac{Lw\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2Cw}\right) = \frac{2CRw - LCw^2 - 1}{2Cw} + i\,\frac{LCw^2\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2Cw}$$

La partie réelle de l'impédance complexe Z est donc $R - \frac{Lw}{2} - \frac{1}{2Cw} = \frac{2CRw - LCw^2 - 1}{2Cw}$

2) la résistance X correspond à la partie imaginaire de Z

On a donc $X = \frac{Lw\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2Cw} = \frac{LCw^2\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2Cw}$

3) L'impédance de l'association correspondant au module de Z

On a $|Z| = \left|R - \frac{Lw}{2} - \frac{1}{2Cw} + i\left(\frac{Lw\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2Cw}\right)\right|$

$$= \sqrt{\left(R - \frac{Lw}{2} - \frac{1}{2Cw}\right)^2 + \left(\frac{Lw\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2Cw}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2CRw - LCw^2 - 1}{2Cw}\right)^2 + \left(\frac{LCw^2\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2Cw}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2Cw}\sqrt{(2CRw - LCw^2 - 1)^2 + \left(LCw^2\sqrt{3} - \sqrt{3}\right)^2}$$

4) Le déphase entre l'impédance et le courant est

$$\varphi = \arg(Z)$$

$$\varphi = \arg\left(\frac{2CRw - LCw^2 - 1}{2Cw} + i\,\frac{LCw^2\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2Cw}\right)$$

On a $\cos\varphi = \frac{2CRw - LCw^2 - 1}{\sqrt{(2CRw - LCw^2 - 1)^2 + \left(LCw^2\sqrt{3} - \sqrt{3}\right)^2}}$ et

$$\sin\varphi = \frac{LCw^2\sqrt{3} - \sqrt{3}}{\sqrt{(2CRw - LCw^2 - 1)^2 + \left(LCw^2\sqrt{3} - \sqrt{3}\right)^2}}$$

EXERCICE 77

1) Détermination de l'impédance complexe

$$Z = \frac{Z_R \times Z_L}{Z_R + Z_L}$$

$$Z = \frac{RjLw}{R + jLw} = \frac{\left(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) RLw}{R + \left(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) Lw} = \frac{\left(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) RLw}{\left(R - \frac{1}{2}Lw\right) + i\left(\frac{Lw\sqrt{3}}{2}\right)}$$

D'où l'impédance de l'association est

$$|Z| = \left|\frac{\left(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) RLw}{\left(R - \frac{1}{2}Lw\right) + i\left(\frac{Lw\sqrt{3}}{2}\right)}\right| = \frac{\left|\left(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) RLw\right|}{\left|\left(R - \frac{1}{2}Lw\right) + i\left(\frac{Lw\sqrt{3}}{2}\right)\right|} = \frac{\left|-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right| |RLw|}{\left|\left(R - \frac{1}{2}Lw\right) + i\left(\frac{Lw\sqrt{3}}{2}\right)\right|}$$

$$= \frac{RLw}{\sqrt{\left(R - \frac{1}{2}Lw\right)^2 + \left(\frac{Lw\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{RLw}{\sqrt{R^2 - RLw + (Lw)^2}}$$

2) Détermination de déphase φ

On a $\varphi = \arg(Z)$

et $Z = \frac{\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) RLw}{\left(R - \frac{1}{2}Lw\right) + i\left(\frac{Lw\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{-RLw + iLRw\sqrt{3}}{(2R - Lw) + iLw\sqrt{3}} = \frac{\left(-RLw + iLRw\sqrt{3}\right)\left((2R - Lw) - iLw\sqrt{3}\right)}{(2R - Lw)^2 + \left(Lw\sqrt{3}\right)^2}$

d'où $\varphi = \arg\left(\frac{\left(-RLw + iLRw\sqrt{3}\right)\left((2R - Lw) - iLw\sqrt{3}\right)}{(2R - Lw)^2 + \left(Lw\sqrt{3}\right)^2}\right)$

3 a) l'amplification d'un filtre est égale au module de la fonction de transfert

Or $T = \frac{1}{1 + jRCw}$ d'où $T = \frac{1}{1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)RCw} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}RCw\right) + i\left(\frac{RCw\sqrt{3}}{2}\right)}$

Donc $|T| = \frac{1}{\left|\left(1 - \frac{1}{2}RCw\right) + i\left(\frac{RCw\sqrt{3}}{2}\right)\right|} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}RCw\right)^2 + \left(\frac{RCw\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - RCw + (RCw)^2}}$

b) $\varphi = arg(T) = \arg\left(\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}RCw\right) + i\left(\frac{RCw\sqrt{3}}{2}\right)}\right) = -\arg\left(\left(1 - \frac{1}{2}RCw\right) + i\left(\frac{RCw\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

Exercice 78

1- **Le nombre complexe z étant solution de l'équation (E), je justifie que –z et $\bar{z}$ sont aussi solution de (E).**

(E) : $z^4 = -4$

Pour –z on a : $(-z)^4 = z^4 = -4$ donc $(-z)^4 = -4$, on en déduit que –z est solution de (E).

Pour $\bar{z}$ on a : $\left(\bar{z}\right)^4 = \overline{\left(z\right)^4} = \overline{-4} = -4$ donc $\left(\bar{z}\right)^4 = -4$, on en déduit que $\bar{z}$ est solution de (E).

2- **a) J'écris le nombre complexe z_0 sous forme exponentielle.**

$z_0 = 1 + i$, $|z_0| = \sqrt{2}$ et $\operatorname{Arg}(z_0) = \frac{\pi}{4}$ donc $z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

b) Je vérifie que z_0 est solution de (E).

$(z_0)^4 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4 = 4e^{i\pi} = -4 \Rightarrow (z_0)^4 = -4$ donc z_0 est solution de (E).

3- **Je déduis des deux questions précédentes trois autres solutions de l'équation (E).**

z_0 est solution de (E) donc $-z_0 = -1 - i$ et $\overline{z_0} = 1 - i$ sont aussi solutions de (E).

4- **Je justifie que $z_E = -1 + \sqrt{3}$.**

On sait que $z' - z_C = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z - z_C)$

$z_E - z_C = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_C) \Rightarrow z_E = z_C + e^{-i\frac{\pi}{3}}(-1 + i + 1 + i) = -1 - i + \sqrt{3} + i$ donc $z_E = -1 + \sqrt{3}$

5- **Je détermine l'affixe de F**

z_F est l'image du nombre complexe z_D. Donc $z_F - z_C = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_D - z_C) \Rightarrow z_F = z_C + e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_D - z_C)$

$z_F = -1 - i + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 - i + 1 + i) \Rightarrow z_F = -1 - i + 1 - i\sqrt{3} \Rightarrow z_F = -i\left(1 + \sqrt{3}\right)$ **1-**

6-Je démontre que $\frac{z_A - z_E}{z_A - z_F}$ est un nombre réel.

$\frac{z_A - z_E}{z_A - z_F} = \frac{1 + i - \left(-1 + \sqrt{3}\right)}{1 + i + i\left(1 + \sqrt{3}\right)} = \frac{2 - \sqrt{3} + i}{1 + i\left(2 + \sqrt{3}\right)} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$ donc $\frac{z_A - z_E}{z_A - z_F} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$ d'où $\frac{z_A - z_E}{z_A - z_F}$ est un réel.

7- **Justifie que les points A, E et F sont alignés.**

D'après la question précédente, $\frac{z_A - z_E}{z_A - z_F} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \in \mathbb{R}+$ donc $Arg\left(\frac{z_A - z_E}{z_A - z_F}\right) = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ on en déduit que les points A, E et F sont alignés.

Situations complexes

Exercice 79

$arg\left(\frac{z-2i}{z-1+i}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow arg\left(\frac{z-2i}{z-(1-i)}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow mes\left(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

où $z_A = 2i$ et $z_B = 1 - i$

$mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ donc $Mes\left(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{2}$ ou $Mes\left(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}\right) = -\frac{\pi}{2}$

Par suite, l'ensemble des points M est le cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B

Exercice 80

Les sommets d'un hexagone sont les points images des nombres complexes solution de L'équation (E) : $Z^6 = 1$

En effet $Z^6 = 1 \Leftrightarrow Z^6 = e^{i0}$

Les solutions sont les nombres complexes de la forme

$Z_k = e^{i\left(\frac{2k\pi}{6}\right)}$; $k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ soit $Z_k = e^{i\frac{k\pi}{3}}$; $k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

Donc $Z_0 = 1$; $Z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$; $Z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$; $Z_3 = e^{i\pi}$; $Z_4 = e^{-2i\frac{\pi}{3}}$ et $Z_5 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Si M_0 ; M_1 ; M_2 ; M_3 ; M_4 et M_5 sont les points images respectives des nombres complexes Z_0 ; Z_1 ; Z_2 ; Z_3 ; Z_4 et Z_5 , alors M_0 ; M_1 ; M_2 ; M_3 ; M_4 et M_5 appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1, donc $mes\left(\widehat{\overrightarrow{OM_k} ; \overrightarrow{OM_{k+1}}}\right) = \frac{\pi}{3}$ par suite OM_kM_{k+1} est un triangle équilatéral.

Connaissant A ici M_0, le triangle OM_kM_{k+1} étant équilatéral on utilise le rayon pour placer successivement sur le cercle à partir du point A les autres points M_1 ; M_2 ; M_3 ; M_4 et M_5

Ainsi nous avons construit l'hexagone $M_0 M_1M_2 M_3M_4M_5$..

6 PPCM ET PGCD DE DEUX ENTIERS RELATIFS

1 SITUATION D'APPRENTISSAGE

L'approche pédagogique et la didactique est celle de l'APC. Pour le déroulement de la situation, vous pouvez vous inspirer du tableau suivant.

Constituants de la situation	Exemples de questions possibles	Réponses possibles des élèves
Contexte	Où ou quand se déroule la scène ?	A la bibliothèque du lycée lors d'une séance de lecture
Circonstances	Quel est le problème posé par la revue et auquel se trouvent confronté les élèves ?	Déterminer la date exacte de la prochaine apparition simultanée des deux corps célestes
Tâche	Qu'est ce que les élèves ont-ils décidé de faire une fois retournés au lycée ?	Ils ont décidé de suivre le cours sur le PPCM et le PGCD pour résoudre le problème posé.

2 DÉCOUVERTE DES HABILETÉS

Découverte des habiletés

I. Multiple d'un entier relatif

Activité 1
Objectif de l'activité : Introduire la notion de multiple d'un entier relatif
L'activité débouche directement sur la définition suivante et la notation $n\mathbb{Z}$.
Exercice de fixation
Solution de l'exercice
1. $0 = 0 \times n$, pour tout entier relatif n.
2. $ab = a \times (b) = b \times (a)$.
3. $n = 1 \times n$; $n = (-1) \times (-n)$.

Activité 2
Objectif de l'activité : Etablir la relation entre multiple et diviseur
Démonstration
1) a est un multiple de si et seulement s'il existe un entier relatif b tel que : $a = kb$; c'est-à-dire si et seulement si b est un diviseur de a.
2) Immédiat.

Exercice de fixation
Solution de l'exercice

Si a est un multiple de b, alors il existe un entier relatif q tel que $a = bq$. Par suite le reste de la division euclidienne de a par b est nul. La réciproque est immédiate.

Activité 3

Objectif de l'activité : Une propriété des multiples

Démonstration

a et b étant multiples de n, il existe des entiers relatifs p et q tels que : $a = pn$ et $b = qn$. Il en résulte que : $au + bv = (pu + qv)n$. D'où le résultat.

Exercice de fixation

Solution de l'exercice

1) Appliquez la propriété avec $u = v = 1$.
2) Appliquez la propriété avec $u = -1;\ v = 0$.
3) Appliquez la propriété avec $u = -v = 1$

Activité 4

Objectif de l'activité : Une propriété des ensembles $n\mathbb{Z}$

Démonstration

1) Soit a un élément de $n\mathbb{Z}$. Il existe un entier relatif k tel que : $a = kn$. Par suite : $a = (-k)(-n)$. D'où a appartient à $(-n)\mathbb{Z}$.
   Soit a un élément de $(-n)\mathbb{Z}$. Il existe un entier relatif p tel que : $a = p(-n)$. Par suite : $a = (-p)(n)$. D'où a appartient à $n\mathbb{Z}$. D'où le résultat.

Faites remarquer aux élèves qu'on a procédé par double inclusion dans cette démonstration. C'est-à-dire pour démontrer que deux ensembles A et B sont égaux, on démontre que : A ⊆ B et B ⊆ A.

2) Il existe un entier relatif k tel que : $a = kn$. Par suite : $pa = (pk)n$. D'où le résultat.

Exercices de fixation

Solution de l'exercice de fixation

$8 \in p\mathbb{Z}$ et $24 = 8 \times 3$, d'où : $24 \in p\mathbb{Z}$.

II. PPCM et PGCD de deux nombres entiers relatifs non nuls

2.1 PPCM de deux entiers relatifs

Activité 5

Objectif de l'activité : Définir le PPCM de deux entiers relatifs

Démonstration

1) On a : $|a|\mathbb{Z} = a\mathbb{Z}$ et $|b|\mathbb{Z} = b\mathbb{Z}$, d'où le résultat.
2) A n'est pas vide car $|ab|$ appartient à A. A est donc une partie non vide de ℕ, par suite un plus petit élément m.

Exercice de fixation

Correction de l'exercice 1

1) PPCM(4 ; 6) = 12 ; 2) ; PPCM(-4 ; 6) = 12 ; 3) PPCM(4 ; -6) = 12 ; 4) PPCM(-4; -6) = 12.

Correction de l'exercice 2

Solution
Supposons que PPCM(a ; b) = a.
Dans ce cas a est un multiple de b. D'où : $a \in b\mathbb{Z}$.
Réciproquement, supposons que $a \in b\mathbb{Z}$.
a est un multiple de b. Puisque a est multiple de a, l'entier a est le plus petit multiple commun de a et b. Le PPCM de a et b est donc a.

Remarques

1. Soit a et b deux entiers relatifs non nuls. On a : PPCM(a ; b) = PPCM$(|a| ; |b|)$.
   Le calcul du PPCM de deux entiers relatifs non nuls se ramène à celui du PPCM de deux entiers naturels non nuls.
2. Pour tous entiers naturels non nuls a et b, on a : Max(a ; b) ≤ PPCM(a ; b) ≤ ab.
3. Pour tous entiers naturels a et b non nuls, on a : PPCM(a ; b)= $b \Leftrightarrow b \in a\mathbb{Z}$.

Justification des remarques

1. On a établi que l'ensemble $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}^*$ est égal $|a|\mathbb{Z} \cap |b|\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}^*$. D'où le résultat.
2. Tout multiple non nul d'un entier naturel est supérieur ou égal à cet entier naturel. Il en résulte que le PPCM(a ; b) est plus grand que Max(a ; b). Par ailleurs, ab étant un multiple commun, on en déduit que le Plus Petit Multiple Commun de a et b est inférieur ou égal à ab.
3. Evident

Activité 6
Objectif de l'activité : Caractériser l'ensemble des multiples communs de deux entiers :
$a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \text{PPCM}(a, b)\mathbb{Z}$.

Démonstration
Soit p un multiple commun de a et b. On note (q, r) le couple quotient et reste dans la division de p par m, soit : $p = qm + r$, avec $0 \leq r < m$. Il s'agit de démontrer que r est nul. On a : $r = p - qm$. Les entiers p et m étant multiples communs de a et b, il en résulte r est un multiple commun de a et b, donc un élément de $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$. Or m est le plus élément strictement positif de $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$, donc r est nul. Par suite p est un multiple de m.
Réciproquement, soit p un multiple de m. Comme m est un multiple de a et b, il existe des entiers relatifs k et k' tels que : $m = ka$ et $m = k'b$. L'entier relatif p étant un multiple de m, il existe un entier relatif s tel que : $p = sm$. Par suite : $p = (sk)a$ et $p = (sk')b$. D'où le résultat.

Exercice de fixation
Solution de l'exercice 1
$a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$.
Solution de l'exercice 2
PPCM(12 ; 15) $= 60$. D'où le résultat.

Activité7
Objectif de l'activité : Une propriété du PPCM

1) m étant multiple de a et b, il existe des nombres entiers naturels non nuls p et q tels que : $m = pa$ et $m = qb$. Par suite : $km = p(ka)$ et $km = q(kb)$. On déduit que km est un multiple commun de ka et kb et donc du PPCM de ka et kb, c'est-à-dire que km et un multiple de m'.
2) m' étant multiple de ka et kb, il existe des nombres entiers naturels non nuls p' et q' tels que : $m' = kp'a$ et $m' = kq'b$. Par suite $p'a = p'b$. On en déduit que $p'a$ est un multiple commun de a et b. D'où $p'a$ est un multiple de m. Il existe donc un entier naturel non nul s tel que : $p'a = sm$. Il suit que $m' = s(km)$. Finalement on obtient que m' est un multiple de km.
3) De 1) on déduit qu'il existe un entier naturel non nul α tel que $km = \alpha m'$. De 2) on déduit qu'il existe un entier naturel non nul β tel que $m' = \beta(km)$. Par suite $\alpha = \beta = 1$. D'où : $m' = km$.

Exercice de fixation
Solution de l'exercice de fixation
On a : PPCM(16 ; 24) = PPCM(8 × 2 ; 8 × 3). D'où : PPCM(16 ; 24) = 8 × 6. Par suite : PPCM(16 ; 24) = 48.

2.2 PGCD de deux entiers relatifs

Activité 8
Objectif de l'activité : Définir le PGCD
Démonstration
1) $\mathrm{D}_{|a|} = \mathrm{D}_a$ et $\mathrm{D}_{|b|} = \mathrm{D}_b$. D'où le résultat.
2) 1 appartient à A.
3) A est majoré par $\max(|a|, |b|)$, par suite A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$. L'ensemble A admet donc un plus grand élément δ.

Exercice de fixation
Solution de l'exercice 1
1) 1 divise a et -1. L'entier 1 étant le plus grand diviseur de -1, PGCD(a ;-1) = 1.
2) b divise a et b divise b. L'entier b étant le plus grand diviseur de b, PGCD(a ; b) = b.
3) a divise a^2 et a divise a. L'entier a étant le plus grand diviseur de a, PGCD(a ; a^2) = a.

Remarques
1. Soit a et b deux entiers relatifs non nuls. On a : PGCD(a ; b) = : PGCD($|a|$; $|b|$). Le calcul du PGCD de deux entiers relatifs non nuls se ramène au calcul du PGCD de deux entiers naturels non nuls.
2. Pour tous entiers naturels non nuls a et b, on a :1 ≤ PGCD(a ; b) ≤ Min(a ; b).
3. Pour tous entiers naturels non nuls a et b, on a : PGCD(a ; b) = b ⇔ $b|a$.
4. Pour tous entiers naturels non nuls , on a : PGCD(a ; 0) = a.

Justification des remarques
1. On a établi que $\mathrm{D}_a \cap \mathrm{D}_b \cap \mathbb{N}^* = \mathrm{D}_{|a|} \cap \mathrm{D}_{|b|} \cap \mathbb{N}^*$, d'où le résultat.

2. 1 divisant a et b, le plus grand diviseur commun de a et b est plus grand que 1. Comme tout diviseur de a (resp. b) est inférieur ou égal à a (resp. b), le plus grand diviseur commun de a et b est inférieur ou égal à Min(a ; b).
3. Evident.
4. Dans la définition du PGCD de deux entiers on a supposé que ces deux entiers sont non nuls. Sinon l'ensemble des diviseurs communs serait $\mathbb{N}^*$ et on n'aurait pas de plus grand élément, donc pas de PGCD. Car $\mathbb{N}^*$ est une partie non majorée de $\mathbb{N}$. Cependant si l'un seul des deux nombres entiers naturel est non nul, il est le plus diviseur commun de ces deux nombres.

Exercice 2
Solution de l'exercice 2
1) PGCD(6 ; 12) = 6 ; 2) PGCD(− 8 ; 34) = 2 ; 3) PGCD(−6 ; 12) = 6.
Activité 9
Objectif de l'activité : Caractériser l'ensemble des diviseurs communs de deux entiers
Démonstration

1) a) m est un entier naturel non nul multiple de δ. Par suite **$\boldsymbol{\delta}$ est un diviseur de $\boldsymbol{m}$**.
   a et b étant deux entiers naturels non nuls et δ leur PGCD, par suite a et b sont tous deux des multiples de δ. Par ailleurs d étant diviseur commun de a et b, on en déduit que a et b sont tous deux des multiples de d. Par suite de a et b sont des multiples de m. D'où m est un diviseur commun de de a et b, donc **$\boldsymbol{m}$ est un diviseur de $\boldsymbol{\delta}$.** On conclut que δ est égal à m.
   b) De ce qui précède, on déduit que δ est le PPCM de d et δ. Par suite d divise δ.
2) Supposons que d divise δ. Comme δ divise a et b, on déduit que d divise a et b.
3) L'ensemble des diviseurs communs de deux entiers naturels non nuls est égal à l'ensemble des diviseurs de leur PGCD.

Exercice de fixation
Exercice
Solution de l'exercice
PGCD(24 ; 30) = 6. On en déduit que tout diviseur commun à 24 et 30 est un diviseur de 6.

Activité 10
Objectif de l'activité : Une propriété du PGCD
Démonstration

1) δ étant le PGCD de a et b, il existe des entiers naturels p et q non nuls tels que $a = p\delta$ et $b = q\delta$. Par suite $ka = p(k\delta)$ et $kb = q(k\delta)$. On en déduit que $k\delta$ divise ka et kb.
   Par suite, il existe donc un entier naturel k' non nul tel que : $\delta' = kk'\delta$. L'entier δ' étant le PGCD de ka et kb, il existe des entiers naturels a' et b' tels que et $ka = a'\delta'$ et $kb = b'\delta'$. Par suite $a = a'(k'\delta)$ et $b = b'(k'\delta)$. On en déduit que $k'\delta$ et un diviseur commun de a et b. Il suit que $k'\delta$ est un diviseur de δ. D'où k' est égal à 1. On conclut que $\delta' = k\delta$.
2) Soit a, b et k trois entiers naturels non nuls. On a : PGCD(ka ; kb) $= k \times$ PGCD(a ; b).

Exercice de fixation
Solution de l'exercice
PGCD(56 ; 70) = 14× PGCD(4 ; 5) ; PGCD(56 ; 70) = 14.

Activité 11
Objectif de l'activité : Etablir que : PGCD$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\mathbb{Z} = \boldsymbol{a}\mathbb{Z} + \boldsymbol{b}\mathbb{Z}$.
Démonstration

1) a) On a : $a = a \times 1 + b \times 0$, et a entier naturel non nul. Par suite appartient à A et donc A n'est pas vide. A étant une partie non vide de ℕ possède un plus petit élément p.
   b) $a = pq + r$, avec $0 \leq r < p$. L'entier naturel p étant élément de A, il existe un couple (α, β) d'entiers relatifs tel que : $p = a\alpha + b\beta$. Par suite : $r = (1 - \alpha p)a + (-\beta q)$. D'où le résultat.
   c) r ne peut appartenir à A, sinon il serait non nul et contredirait le choix de p.
   d) De ce qui précède, on déduit que r est nul. Par suite : $a = pq$. L'entier p divise a puisque est non nul. De même pour b.
   e) p divise a et p divise b donc p divise δ. Pour suite il existe d tel que : $\delta = dp$. D'où :
   $\delta = a(d\alpha) + b(d\beta)$.
   f) m étant multiple de δ est de la forme $m = m'\delta$. En utilisant e) on a le résultat.
   2) δ divise a et δ divise b, d'où δ divise m.
   3) Voir propriété.

Exercice de fixation
Solution de l'exercice 1
1) PGCD(90 ; 28) = 2 ; -6 étant un multiple de 2, il existe deux entiers relatifs u et v tels que :
$-6 = 90u + 28v$
2) Par la division Euclidienne, on : $-6 = 90 \times (-1) + 28 \times 3$. Par suite : $u = -1; v = 3$.

Solution de l'exercice 2
δ divise $5(3n + 7) - 3(5n + 11)$, c'est-à-dire 2. D'où le résultat.

Activité 12
Objectif de l'activité : Etablir l'algorithme d'Euclide
Démonstration
$a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$.

1) Si $r = 0$, alors b divise a. Par suite : PGCD$(a\,;\,b) = b$.
2) Soit d un entier relatif non nul.
   a) Si d divise a et b alors d divise $a - bq$, donc r. D'où d divise b et r.
   b) Si d divise b et r alors d divise $bq + r$, donc a. D'où d divise a et b.

On vient d'établir que : $\mathrm{D}_a \cap \mathrm{D}_b = \mathrm{D}_b \cap \mathrm{D}_r$
Les deux ensembles $\mathrm{D}_a \cap \mathrm{D}_b$ et $\mathrm{D}_b \cap \mathrm{D}_r$ étant égaux ont le même plus grand élément. D'où le résultat.

Exercice de fixation
Exercice
Solution de l'exercice
PGCD(2375 ; 75) = PGCD(75 ; 50) ; PGCD(75 ; 50) = PGCD(50 ; 25) ; PGCD(50 ; 25) = 25. Par suite :
PGCD(2375 ; 75) = 25.

Activité13
Objectif de l'activité : Déterminer de PGCD à l'aide de l'algorithme d'Euclide
Démonstration

1) a) Le tableau rempli est :

Dividende	7875	426	207	12
Diviseur	426	207	12	3
Reste	207	12	3	0

b) PGCD(7875, 426) = PGCD(426, 207) ; PGC ;D(426, 207) = PGCD(207, 12) ; PGCD(207, 12) = PGCD(12, 3) ; PGCD(12, 3) = 3.

2) $a = bq_1 + r_1$ avec $0 \leq r_1 < b$.

a) Si r_1 est nul alors b divise a. D'où : PGCD$(a, b) = b$.

b) D'après la propriété précédente, on a : PGCD $(a, b) =$ PGCD(b, r_1).

3) $b = r_1 q_2 + r_2$ avec $0 \leq r_2 < r_1$.

a) Si r_2 est nul alors r_1 divise b. D'où : PGCD$(b, r_1) = r_1$.

b) Si r_2 n'est pas nul, d'après la propriété précédente : PGCD$(b, r_1) =$ PGCD(r_1, r_2).

4) $r_1 = r_2 q_3$. Puis comme au 3)a).

5) a) $r_1 = r_2 q_3 + r_3$ avec $0 < r_3 < r_2$ Puis comme au 3)b).

b) En récapitulant les inégalités vérifiées par les restes, on a : $0 < r_3 < r_2 < r_1 < b$.

6) a) R∩ $\mathbb{N}^*$ est ensemble non vide car il contient r_1. Etant une partie de $\mathbb{N}$, il possède un plus petit élément p.

b) p étant un élément de R, il existe un entier naturel n tel que $p = r_n$.

c) On a $r_{n-1} = r_n q_{n+1} + r_{n+1}$ avec $0 \leq r_{n+1} < r_n$. Si r_{n+1} était non nul, il contredirait le choix de r_n. Par suite r_{n+1} est nul.

d) $r_{n-1} = r_n q_{n+1}$, Par suite r_n divise r_{n-1} et r_n différent de zéro. D'où : PGCD($r_{n-1}, r_n) = r_n$.

On obtient enfin : PGCD $(a, b) =$ PGCD$(b, r_1) =$ PGCD$(r_1, r_2) = \cdots =$ PGCD$(r_{n-1}, r_n) = r_n$.

7) Le PGCD de deux entiers naturels non nul est le dernier reste non nul dans la méthode des divisions successives.

Remarque
Pour la recherche du PGCD à l'aide de l'algorithme d'Euclide, il faut utiliser le tableau

Dividende			…	
Diviseur			…	
Reste			…	

Exercice de fixation

Solution de l'exercice 1

Dividende	971	533	338	195	143	52	39
Diviseur	545	338	195	143	52	39	13
Reste	338	195	143	52	39	**13**	0

PGCD(971, 545) = 13.

Solution de l'exercice 2

Dividende	2023	53	9	8
Diviseur	53	9	8	1
Reste	9	8	1	**0**

PGCD(2023 ; 53) = 1

2.3 Nombres premiers entre eux.

Activité 14

Objectif de l'activité : Définir les nombres premiers entre eux

Exercice de fixation

Réponses à l'exercice 1

1. FAUX ; 2. FAUX ; 3. VRAI.

Solution de l'exercice 2

1. PGCD(25 ; 36) = 1, d'où 25 et 36 sont premiers entre eux.
2. PGCD(12 ; 18) = 6, d'où 12 et 18 ne sont pas premiers entre eux.

Activité 15

Objectif de l'activité : Caractériser le PGCD de deux entiers à l'aide des nombres premiers entre eux

Démonstration

Posons : $a = a'd$ et $b = b'd$. On a : PGCD$(a, b) = d\ \times$PGCD(a', b').

On en déduit que : PGCD de a et b si seulement si $\frac{a}{d}$ et $\frac{b}{d}$ sont premiers entre eux.

Exercice de fixation

Solution de l'exercice

Posons : $a = 3a'$ et $b = 3b'$ où a' et b' premiers entre eux.

De l'égalité $ab = 54$, on déduit que : $a'\,b' = 12$ où a' et b' premiers entre eux. Les diviseurs positifs de 12 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 12. Les couples $(a'\,;\ b')$ sont : (1 ; 12) ; (3 ; 4) ; (4 ; 3) ; (12 ; 1). Il suit que les couples $(a\,;\ b)$ cherchés sont : (3 ; 36) ; (9 ; 12) ; (12 ; 9) ; (36 ; 3).

Théorème de Bézout

Activité 16

Objectif de l'activité : Etablir le théorème de Bézout

Démonstration

On sait que si a et b sont deux entiers relatifs non nuls et δ leur PGCD, alors il existe des entiers relatifs u et v tels que : $\delta = au + bv$. En prenant δ égal à 1, on a le résultat.

Réciproquement supposons qu'il existe deux entiers relatifs u et v tels que : $au + bv = 1$. Soit d un diviseur positif de a et b. L'entier d divise $au + bv$, donc d divise 1. Par suite d est égal à 1. D'où le résultat.

Exercice de fixation
Solution de l'exercice
On a : $5(3n + 2) - 3(5n + 3) = 1$. Les entiers $3n + 2$ et $5n + 3$ sont donc premiers entre eux d'après le théorème de Bézout.

Activité 17
Objectif de l'activité : Caractériser les nombres premiers entre eux.

Démonstration
La suite d'implications $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$ démontre les équivalences entre les propositions

Par exemple : $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$, donne : $1 \Rightarrow 3$ et $3 \Rightarrow 1$, d'où $1 \Leftrightarrow 3$, etc.
$1 \Rightarrow 2$
Si les seuls diviseurs communs de a et b sont 1 et -1,alors le plus grand diviseur commun de a et b est 1.
$2 \Rightarrow 3$
Si PGCD$(a\,;\, b) = 1$, alors a et b sont premiers entre eux.
$3 \Rightarrow 4$
Si a et b sont premiers entre eux, alors d'après la propriété précédente, a et b vérifient l'égalité de Bézout.
$4 \Rightarrow 1$
Soit a et b deux nombres entiers relatifs vérifiant l'égalité de Bézout. Il existe deux nombres entiers relatifs u et v tels que : $au + bv = 1$. Soit d un diviseur de a et b. L'entier d divise $au + bv$, donc d divise 1. Par suite d est égal à 1 ou à -1.

Exercice de fixation
Réponses à l'exercice
1 et 3 sont équivalentes.

Remarque
Les points méthodes 1 et 2 pour la détermination des coefficients de Bézout sont à choisir en fonction des coefficients a et b.

Exercice de fixation
Solution de l'exercice

Dividende	91	48	43	5	3
Diviseur	48	43	5	3	2
Reste	43	5	3	2	**1**
Quotient	1	1	8	1	1

$1 = 3 - 1 \times 2$;
$1 = 3 - 1 \times (5 - 1 \times 3)$;
$1 = 2 \times 3 - 1 \times 5$;
$1 = 2 \times (43 - 5 \times 8) - 1 \times 5$;
$1 = 2 \times 43 - 17 \times 5$;
$1 = 2 \times 43 - 17 \times (48 - 1 \times 43)$:
$1 = 19 \times 43 - 17 \times 48$:
$1 = 19 \times (91 - 1 \times 48) - 17 \times 48$;
$1 = 19 \times 91 - 36 \times 48.$
D'où : $48 \times (-36) + 91 \times 19 = 1.$
Une solution particulière de l'équation (E) est : $(-36, 19)$.

Activité 18
Objectif de l'activité : Propriétés diverses sur les nombres premiers entre eux
Démonstration

1) a) Supposons que p et n sont premiers entre eux. Dans ce cas les seuls diviseurs communs de p et n sont -1 et 1. Comme p divise p et est différent de -1 et 1, il ne peut diviser n.
b) Supposons que p ne divise pas n. L'entier p étant premier, les diviseurs de p sont : -1, 1,$-p$ et p. Or p ne divisant pas n, l'entier $-p$ non plus ne peut diviser n. Par conséquent, les seuls diviseurs communs de p et n sont -1 et 1.

2) a étant premier avec b et c, il existe des entiers relatifs u, v, u', v' tels que : $au + bv = 1$ et $au' + cv' = 1$. D'où : $(au + bv)(au' + cv') = 1$. C'est-à-dire : $a(auu' + cuv' + bu'v) + bcvv' = 1$. On en déduit que a est premier avec bc d'après le théorème de Bézout.
3) Démontre par récurrence que si a est premier avec b, alors pour tout entier naturel p non nul a^p est premier avec b. Le reste s'en déduit.
Faire énoncer ces propriétés par les élèves à la fin de chaque consigne
Exercice de fixation
Solution de l'exercice

1) p et q étant deux nombres premiers distincts, p ne divise pas q. Il est donc premier avec q.
2) D'après 1) p est premier avec q et avec r. L'entier p est donc premier avec qr.

Activité 19
Objectif de l'activité : Etablir le théorème de Gauss
Démonstration
a étant premier avec b, il existe des entiers relatifs u et v tels que : $au + bv = 1$. En multipliant par c chaque membre de l'égalité précédente, on a : $acu + bcv = c$. Comme si a divise bc, il existe k tel que : $bc = ka$. Par suite : $a(cu + kv) = c$. On en déduit que a divise c.

Exercice de fixation
Solution de l'exercice
Les couples cherchés sont les couples de la forme $(5k, 9k)$ où k est un entier relatif quelconque.

Activité 20
Objectif de l'activité : Une conséquence du théorème de Gauss
Démonstration

1) a) Supposons que p divise ab. On a deux situations : p divise a ou p ne divise pas a. Si p divise a, alors le problème est résolu. Si p ne divise pas a, alors p étant premier, il est premier avec a. L'entier p divisant ab, et est premier avec a, divise nécessairement b d'après le théorème de Gauss.
b) La réciproque est évidente.
2) Faisons un raisonnement par récurrence sur k appartenant à l'intervalle $[2, n]$.

Soit P la propriété définie sur $[2, n]$ par : « Pour tout entier naturel k de $[2, n]$, si p divise un produit de k nombres premiers alors p est égal à l'un des facteurs ».

Si p divise p_1p_2, alors p divise p_1 ou p divise p_2. Les entiers naturels p, p_1 et p_2 étant premiers, p est égal à p_1 ou p est égal à p_2. Par suite P(2) est vraie. D'où l'initialisation.
Démontrons que : « Pour tout entier naturel ≥ 2 , $(\mathrm{P}(k) \Longrightarrow \mathrm{P}(k+1))$ » (Hérédité).
Soit k un entier naturel appartenant à $[2, n-1]$, tel que $\mathrm{P}(k)$ est vraie. Si p divise $(p_1 \times \ldots \times p_k) \times p_{k+1}$, entraine que p divise $p_1 \times \ldots \times p_k$ ou p divise p_{k+1}. Comme $\mathrm{P}(k)$ est vraie, il existe un entier i appartenant à $[1, k]$ tel que p est égal à p_i. D'où p est égal à p_i ou p est égal à p_{k+1}. Autrement dit il existe un entier i appartenant à $[1, k+1]$ $(k+1 \leq n)$ tel que p est égal à p_i. La propriété est donc héréditaire.
Par suite pour tout entier k de $[2, n]$, si p divise $p_1 \times \ldots \times p_k$ alors p est égal à l'un des facteurs.

Cette remarque, très utile dans la pratique, est une traduction de la propriété en termes de congruence.
Remarque
En termes de congruence, la conséquence précédente se traduit comme suit :
Soit p un nombre premier et a et b deux entiers relatifs.
$ab \equiv 0\ [p]$ si et seulement si $a \equiv 0\ [p]$ ou $b \equiv 0\ [p]$.

Exercice de fixation
Solution de l'exercice
1) $S = \{5k, k \in \mathbb{Z}\}$; 2) $S = \{11k-1, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{11k+2, k \in \mathbb{Z}\}$;
3) $3x \equiv 2\ [13] \Leftrightarrow 3x \equiv 15\ [13]$; $3x \equiv 15\ [13] \Leftrightarrow 3(x-5) \equiv 0\ [13]$; $3(x-5) \equiv 0\ [13] \Leftrightarrow (x-5) \equiv 0\ [13]$
$S = \{13k+5,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Activité 21 :
Objectif de l'activité : Une conséquence du théorème de Gauss
Démonstration

1) a divisant c, il existe un entier relatif a' tel que $c = aa'$. L'entier b divisant c, divise aa'. Comme b est premier avec a, d'après le théorème de Gauss,b divise a'. Il existe donc un entier relatif b' tel que $a' = bb'$. Par suite $c = abb'$. On en déduit que ab divise c.
2) Soit m le PPCM de a et b. Les entiers a et b divisent m. Comme a et b sont premiers entre eux, d'après 1), ab divise m. Or m divise ab. Car ab est un multiple commun de a et b donc multiple de $\mathrm{PPCM}(a, b)$. Par suite : $m = |ab|$.

Le point 1) de la conséquence peut être traduit en termes de congruence :
Remarque
Soit a, b deux entiers naturels non nuls et x un entier relatif quelconque.
Si $x \equiv 0\ [a]$ et si $x \equiv 0\ [b]$ et $\text{PGCD}(a, b) = 1$, alors $x \equiv 0\ [ab]$.

Exercices de fixation
Solution de l'exercice
n et $n + 1$ étant deux entiers naturels consécutifs sont premiers entre eux. Par suite :
$\text{PPCM}(n, n + 1) = n(n + 1)$.

Activité 22
Objectif de l'activité : Une conséquence du théorème de Gauss
Démonstration
Supposons que $ab \equiv ac\ [n]$. Dans ce cas n divise $a(b - c)$. Or n est premier avec a, d'après le théorème de Gauss, n divise $b - c$. La réciproque est évidente.

Exercice de fixation
Solution de l'exercice
1) $7x \equiv 14\ [9]$. Ce qui équivaut à $x \equiv 2\ [9]$. Car 7 et 9 sont premiers entre eux. Les solutions cherchées sont les entiers relatifs x de la forme $9k + 2$ où k est un entier relatif quelconque.
2) $5x \equiv -7\ [12] \Leftrightarrow 5x \equiv 5\ [12]$. Ce qui équivaut à $x \equiv 1\ [12]$. Car 5 et 12 sont premiers entre eux. Les solutions cherchées sont les entiers relatifs x de la forme $12k + 1$ où k est un entier relatif quelconque.

Activité 23
Objectif de l'activité : Etablir une relation entre PPCM et PGCD
Démonstration
Posons : $\delta = \text{PGCD}(a\,;\, b)$. Les entiers relatifs $\frac{a}{\delta}$ et $\frac{b}{\delta}$ sont premiers entre eux. On en déduit que $\text{PPCM}(\frac{a}{\delta}, \frac{b}{\delta}) = \frac{|ab|}{\delta^2}$. Par suite : $\delta^2 \times \text{PPCM}(\frac{a}{\delta}, \frac{b}{\delta}) = |ab|$. On en déduit que : $\delta \times \text{PPCM}(a, b) = |ab|$. D'où le résultat.

Cette remarque est très importante dans la recherche de deux entiers impliquant PPCM ou PGCD.
Remarque
Soit a et b deux entiers naturels non nuls.
Posons : $\delta = \text{PGCD}(a\,;\, b)$ et $m = \text{PPCM}(a, b)$.
On a : $a = a'\delta$, $b = b'\delta$, avec $\text{PGCD}(a', b') = 1$ et $m = a'b'\delta$.

Exercice de fixation
Réponse de l'exercice 30
PGCD(108 ; 150) = 45.
Solution de l'exercice 31
$\delta = \text{PGCD}(a, b)$ et $m = \text{PPCM}(a, b)$. Posons : $a = a'\delta$ et $b = b'\delta$, avec $\text{PGCD}(a'\,;\, b') = 1$ et $m = a'b'\delta$. La condition : $a \times b = 350$ donne $\delta^2 a'b' = 350$ (1). La condition $m = a'b'\delta$ donne $70 = a'b'\delta$ (2). De (1) et (2), on déduit que $\delta = 5$ et $a'b' = 14$.

Les couples $(a';\ b')$ sont : (1, 14) ; (2, 7) ; (7, 2) ; (14, 1). Les couples (a, b) solutions du système sont : (5, 70) ; (10, 35) ; (35, 10) ; (70, 5).

Activité 24
Objectif de l'activité : Rechercher le PPCM et le PGCD à partir de la décomposition en produit de facteurs premiers

Démonstration

1) De l'égalité : $A = DQ$, on déduit que dans les décompositions en produit de facteurs premiers de D et Q les exposants respectifs γ_i et μ_i de p_i vérifient :$\lambda_i = \gamma_i + \mu_i$. Il résulte que :
   $D = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\gamma_i}$ avec $0 \leq \gamma_i \leq \lambda_i$.
2) a) Chaque terme du développement s'obtient en choisissant un terme dans chaque parenthèse et en faisant le produit des termes choisis. Les exposants γ_i des termes choisis dans chaque parenthèse vérifient $0 \leq \gamma_i \leq \lambda_i$. Il s'ensuit que le produit des termes choisis est un diviseur de A.
   b) Dans la première parenthèse, il y a $1 + \lambda_1$ termes, dans la seconde il y a $1 + \lambda_2$ termes et dans la dernière, $1 + \lambda_n$ termes. Le nombre de diviseurs positifs de A est :
   $(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)\ldots(1 + \lambda_n)$.
3) a) d divisant a et b, d'après 1) d est de la forme $\prod_{i=1}^{n} p_i^{\lambda_i}$ avec, pour tout i, $0 \leq \gamma_i \leq \alpha_i$ et
   $0 \leq \gamma_i \leq \beta_i$. Par suite : $0 \leq \gamma_i \leq \min(\alpha_i,\ \beta_i)$.
   b) Evident.

4) a) D'après 3a) le plus grand diviseur commun de a et b est obtenu en prenant pour tout i,
$\gamma_i = \min(\alpha_i,\ \beta_i)$.
   b) On a :

$$\left(\prod_{i=1}^{n} p_i^{\min(\alpha_i,\beta_i)}\right)\times\left(\prod_{i=1}^{n} p_i^{\max(\alpha_i,\beta_i)}\right) = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\min(\alpha_i,\beta_i)+\max(\alpha_i,\beta_i)} = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i+\beta_i}$$

Par suite : $\left(\prod_{i=1}^{n} p_i^{\min(\alpha_i,\beta_i)}\right)\times\left(\prod_{i=1}^{n} p_i^{\max(\alpha_i,\beta_i)}\right) = \left(\prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}\right)\times\left(\prod_{i=1}^{n} p_i^{\beta_i}\right) = ab.$

On en déduit que : $\mathrm{PPCM}(a\,;\ b) = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\max(\alpha_i,\beta_i)}$.

Point méthode :
Dans la démonstration comme dans l'application, il faut prendre en compte tous les nombres premiers qui interviennent dans les deux décompositions. Ceux des nombres premiers qui n'interviennent pas dans l'une ou l'autre des décompositions sont pris en compte avec un exposant zéro.

Remarque
Le nombre de diviseurs positifs de $\prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}$ est $(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)\ldots(1 + \alpha_n)$.
Le nombre de diviseurs de $\prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}$ est $2(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)\ldots(1 + \alpha_n)$.

Exercice de fixation

Solution de l'exercice 32

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^0$

$21 = 3 \times 7 = 2^0 \times 3^1 \times 5^0 \times 7^1$

PPCM(360, 21) = $2^3 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1$

PGCD(360, 21)= $2^0 \times 3^1 \times 5^0 \times 7^0$

PPCM(360, 21) = 2520 ; PGCD(360, 21) = 3

Solution de l'exercice 33

$120 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$

Le nombre de diviseurs positifs de 120 est $(1+3) \times (1+1) \times (1+1)$, c'est-à-dire 16.

Solution de l'exercice 34

$120 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$

On a : $(1+2+2^2+2^3)(1+3)(1+5) = 1+2+3+4+5+6+8+10+12+15+20+24+30+40+60+120$.

Les diviseurs positifs de 120 sont : $1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120$.

III. Application à la résolution d'équations à inconnues entières.

3.1 Equation du type $ax + by = c$, où a et b sont deux entiers relatifs non nuls et c un nombre entier relatif.

Activité 25

Objectif de l'activité : Résoudre les équations du type $(x\,;y) \in \mathbb{Z}^2, ax + by = c$, où a et b sont deux entiers relatifs non nuls et c un nombre entier relatif.

La solution générale n'est pas à retenir par cœur mais à retrouver à chaque fois.

Exercice de fixation

Solution de l'exercice

a) Les solutions sont les couples $(7k\,;\,9k)$, où k est un entier relatif quelconque.

b) Pas de solution car le PGCD de 6 et 15 ne divise pas 17.

c) Les solutions sont les couples $(11k+2\,;\,29k+5)$, où k est un entier relatif quelconque.

3.2 Equation du type $ax \equiv b\ [n]$, n est un entier naturel non nul, a et b des nombres entiers relatifs non nuls.

a) Equation du type $ax \equiv 1\ [n]$, n est un entier naturel non nul.

Activité 26

Objectif de l'activité : Résoudre les équations du type $ax \equiv 1\ [n]$, n est un entier naturel non nul.

Démonstration

Pour tout entier relatif x,

$ax \equiv 1\ [n] \Leftrightarrow \exists\ k \in \mathbb{Z}, ax - kn = 1$

$\Leftrightarrow a$ et n sont premiers entre eux.

D'après le paragraphe précédent, il existe dans ce cas des entiers relatifs qui sont solutions de l'équation proposée.

Exercice de fixation

Solution de l'exercice

1) $3x \equiv 1\ [11] \Leftrightarrow 3x \equiv 12\ [11]$. Ce qui donne $x \equiv 4\ [11]$. Car 3 est premier avec 11

Les solutions cherchées sont les entiers relatifs x de la forme $11k + 4$ où k est un entier relatif quelconque.

2) Pas de solution. Car 15 et 9 ne sont pas premiers entre eux.

3) $2x \equiv 1\ [7] \Leftrightarrow 2x \equiv 8\ [7]$. Ce qui donne $x \equiv 4\ [7]$. Car 2 est premier avec 7.

Les solutions cherchées sont les entiers relatifs x de la forme $7k + 4$ où k est un entier relatif quelconque.

b) Equation du type $ax \equiv b\ [n]$, n est un entier naturel non nul, a et b des nombres entiers relatifs.

Activité 27

Objectif de l'activité : Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $ax \equiv b\ [n]$ où a et b sont deux entiers relatifs et n un entier naturel non nul donnés.

Démonstration

Soit x un entier relatif. x est solution de l'équation ci-dessus si et seulement si il existe un entier relatif k tel que : $ax - kn = b$. On a vu que x et n vérifient cette dernière équation si et seulement si b est multiple du PGCD de a et de n.

Remarque

Lorsque a et n sont premiers entre eux, cette équation admet une infinité de solutions.

Exercice de fixation

Solution de l'exercice

1) PGCD(15 ; 25) = 5. L'entier 10 étant un multiple de 5, (E) admet au moins une solution.

2) $15\ x \equiv 10\ [25] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ 15x = 25k + 10$

$15x = 25 + 10k \Leftrightarrow 3x = 5k + 2$

$3x = 5k + 2 \Leftrightarrow 3x \equiv 2\ [5]$

$3x \equiv 2\ [5] \Leftrightarrow 3x \equiv 12\ [5]$

$3x \equiv 12\ [5] \Leftrightarrow x \equiv 4\ [5]$. Car 3 est premier avec 5.

Les solutions cherchées sont les nombres entiers relatifs de la forme $5k + 4$ où k est un entier relatif quelconque.

3 DES QUESTIONS D'ÉVALUATION

Exercice non corrigé 1

Détermine tous les couples (a, b) d'entiers naturels non nuls tels que :

$$\begin{cases} a + b = 105 \\ m = 12d \end{cases}$$

m étant le PPCM et d le PGCD de a et b.

Réponse

Les couples (a, b) solutions sont : $(60, 45)$, $(45, 60)$.

Exercice non corrigé 2

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E) : $748x - 59y = 12$.

Une solution particulière de (E) est : $(18, 228)$.

Les solutions de l'équation (E) sont les couples d'entiers relatifs de la forme $(59k + 18, 748k + 228)$, k étant un entier relatif quelconque.

4 MES SÉANCES D'EXERCICES

Exercices de fixation

Multiple d'un entier relatif

.

1. **Solution**
   Soit x un élément de $a\mathbb{Z}$. Il existe donc un entier relatif k tel que $x = ak$. Puisque b divise a il existe un entier relatif p tel que $a = bp$. Par suite $x = b(pk)$. On conclut que x est un élément de $b\mathbb{Z}$.
   Réciproquement supposons que $a\mathbb{Z} \subseteq b\mathbb{Z}$. L'entier relatif a étant multiple de lui-même appartient à $a\mathbb{Z}$ et donc à $b\mathbb{Z}$. Par suite a est un multiple de b. L'entier relatif b étant non nul, il divise donc a.

2. Réponse

b)

3. Solution

1) $a = np$ et $b = nq$, d'où : $a + b = (p + q)n$ et $a - b = (p - q)n$
2) C'est une conséquence du point 1) avec $n = 2$.

PPCM et PGCD de deux entiers relatifs

4. Réponse

b) Seul 1200 est multiple commun de 240 et 300.

5. Réponse

c) Car, $\max(a, b) \leq m \leq ab$.

6. Réponse

a) $\text{PPCM}(16, 80) = 16$, car 16 divise 80.
b) $\text{PPCM}(25, 175) = 175$, car 25 divise 75.
c) $\text{PPCM}(1, 2023) = 2023$, car 1 divise 2023.

7. Réponse

c) Car Tout multiple commun de 4 et 5 est un multiple du PPCM de 4 et 5, et Car 20 est le PPCM de 4 et 5.

8. Réponse

a) Car $\text{PPCM}(10a, 10b) = 10 \times \text{PPCM}(a, b)$.

9. Réponse

b) Car $\text{PPCM}(5a, 5b) = 5 \times \text{PPCM}(a, b) = 6300$.

10. Solution

$\text{PPCM}(45, 65) = 585$.

11. Réponse

c)

12. Solution

Supposons que b divise a.

Soit x un élément de D_b. Il existe un entier relatif k tel que $b = kx$. L'entier b divisant a par hypothèse, il existe un entier relatif p tel que : $a = pb$. On déduit que : $a = (pk)x$. Par suite x est un élément de D_b. On conclut que $D_b \subseteq D_a$.
Réciproquement, supposons que $D_b \subseteq D_a$. b appartenant à D_b appartient à D_a. On conclut que b divise a.

13. Solution

$D_a \cap D_b = D_\delta$

14. Solution

$\text{PGCD}(600, 900) = 100 \times \text{PGCD}(6, 9)$.
D'où : $\text{PGCD}(600, 900) = 300$.

15. Solution

12 étant un multiple du PGCD de 6 et 15, il existe deux entiers relatifs p et q tels que : $12 = 6p + 15q$.

16. Solution

La division euclidienne de 15 par 5 donne : $15 = 6 \times 2 + 3$. Par suite : $3 = 15 - 6 \times 2$. D'où :
$3 \times 4 = 15 \times 4 - 6 \times 2 \times 4$. On obtient : $12 = 6 \times (-8) + 15 \times 4$. On en déduit que :
$p = -8$; $q = 4$.

17. Solution

Soit d un diviseur positif commun de $3n + 4$ et $2n + 2$.

d divise $2(3n + 4) - 3(2n + 2)$. D'où d divise 2. Les valeurs possibles du PGCD de $3n + 4$ et $2n + 2$ sont 1 et 2.

18. Réponse

PGCD(2096, 3182) = 2

19. Réponse

PGCD(14865, 7976) = 1.

20. Réponse

PGCD(756, 990) = 18.

21. Solution

Posons : $a = da'$ et $b = db'$, où $d = \text{PGCD}(a, b)$ et $\text{PGCD}(a', b') = 1$. On en déduit que :

$d = 2$ et $a'b' = 3$. On obtient : $a = 2; b = 6$.

22. Solution

$2(3n + 8) - 3 \quad (2n + 5) = 1$. Le résultat découle de cette égalité de Bézout.

24. Réponse

$(4, 5)$ est une solution particulière de cette égalité de Bézout.

25. Réponse

$(4, -5)$ est une solution particulière de cette égalité de Bézout.

25. Réponse

Une solution particulière de l'équation (E) est : $(-3, -8)$.

26. Solution

En utilisant l'algorithme d'Euclide, on peut d'abord trouver une solution particulière de l'équation (F) : $(x, y) \in \mathbb{Z}^2, 324x - 245y = 1$.

$(-31, -41)$ est une solution particulière de (F). On en déduit que $(-31 \times 7, -41 \times 7)$ est une solution particulière de (E). Une solution particulière de (E) est $(-217, -287)$.

27. Réponse

Une solution particulière de (E) est $(500, 965)$.

28. Réponse

Les solutions de (E) sont les couples d'entiers relatifs $(543k - 43, 1048k - 83)$, où k est un entier relatif quelconque.

29. Réponse

Les solutions de (E) sont les couples d'entiers relatifs $(-589k - 9,\ 323k + 5)$, où k est un entier relatif quelconque. Ces solutions peuvent être écrites sous la forme $(589k - 9,\ -323k + 5)$, où k est un entier relatif quelconque.

30. Solution

5 est un nombre premier qui ne divise pas 12. L'entier 5 est donc premier avec 12.

31. Solution

9 est premier avec 4 et avec 14. L'entier 9 est donc premier avec le produit 4×14.

32. Solution

Les couples solutions sont de la formes $(8k, 3k)$, où k est un entier relatif quelconque.

33. Solution

$(x - 1)(x + 3) \equiv 0\ [5] \Leftrightarrow x - 1 \equiv 0\ [5]$ ou $x + 3 \equiv 0\ [5]$. Car 5 est un nombre premier.

Les solutions sont les entiers relatifs de la forme $x = 5k + 1$ ou $x = 5k + 2$, où k est un entier relatif quelconque.

34. Solution

$x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$. D'où : $x^2 - x - 2 \equiv 0\ [7] \Leftrightarrow x + 1 \equiv 0\ [7]$ ou $x - 2 \equiv 0\ [7]$. Car 7 est un nombre premier.

Les solutions sont les entiers relatifs de la forme $x = 7k - 1$ ou $x = 7k + 2$, où k est un entier relatif quelconque.

35. Solution

$x^2 - x - 7 \equiv x^2 - x - 20\ [13]$; et $x^2 - x - 20 = (x+4)(x-5)$. D'où :

$x^2 - x - 7 \equiv 0\ [13] \Leftrightarrow x + 4 \equiv 0\ [13]$ ou $x - 5 \equiv 0\ [13]$. Car 13 est un nombre premier.

Les solutions sont les entiers relatifs de la forme $x = 13k - 4$ ou $x = 13k + 5$, où k est un entier relatif quelconque.

36. Solution

Les solutions sont les entiers relatifs de la forme $x = 45k$, où k est un entier relatif quelconque.

37. Solution

On a : $-1 \equiv 4\ [5]$. Par suite : $2x \equiv -1\ [5]$ est équivalent à : $2x \equiv 4\ [5]$. 2 étant premier avec 5, cela est encore équivalent à $x \equiv 2\ [5]$.

Les solutions cherchées sont les entiers relatifs de la forme $x = 5k + 2$, où k est un entier relatif quelconque.

38. Solution

PGCD(108, 150)= 45.

39. Solution

Posons **:** $a = da'$ et $b = db'$, où $d = \mathrm{PGCD}(a, b)$ et $\mathrm{PGCD}(a', b') = 1$.

On obtient : $d^2a'b' = 350$ et $da'b' = 70$. Par suite $d = 5$. On obtient :

$a'b' = 14$ et $\mathrm{PGCD}(a', b') = 1$.

Les couples (a, b) cherchés sont : (5,70), (10,35), (35,10), (70,5).

40. Solution

1) $\mathrm{PPCM}(a, b) = 2^2 \times 3^2 \times 5^3 \times 7$ et $\mathrm{PGCD}(a, b) = 5^2$; 2) $\mathrm{PPCM}(a, b) = 2^2 \times 3^2 \times 5^4 \times 11$ et $\mathrm{PGCD}(a, b) = 1$; 3) $\mathrm{PPCM}(a, b) = 2^2 \times 3^2$ et $\mathrm{PGCD}(a, b) = 3$.

Faites les calculs.

41. Solution

Le nombre de diviseurs positifs de $3^5 \times 7^3 \times 13$ est : $(1+5)(1+3)(1+1)$. Ce nombre est 48.

42. Solution

$(1 + 3 + 3^2)(1 + 13) = 1 + 13 + 3 + 3 \times 13 + 3^2 + 3^2 \times 13$.

Les diviseurs positifs de $3^2 \times 13$ sont : $1, 3, 9, 13, 39, 117$.

43. Solution

Les couples solutions sont de la formes $(22k + 3, 7k + 1)$, où k est un entier relatif quelconque.

44. Solution

Une solution particulière de (E) est : $(32, -8)$. La solution générale de (E) est constituée des couples $(32 - 23k, 6k - 8)$, où k est un entier relatif quelconque.

45. Solution

Cette équation admet au moins une solution car 4 est premier avec 9.

46. Solution

$1 \equiv -8\ [9]$. Par suite : $4x \equiv 1\ [9]$ est équivalent à $4x \equiv -8\ [9]$. Ce qui est encore équivalent à

$x \equiv -2\ [9]$. Car 4 est premier avec 9.

Les solutions cherchées sont les entiers relatifs de la forme $x = 9k - 2$, où k est un entier relatif quelconque.

47. Solution

PGCD(8, 10)= 2. L'entier 6 étant un multiple de 2, cette équation a au moins une solution.

48. Solution

$x \in \mathbb{Z},\ 8x \equiv 6\ [10] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, 8x = 6 + 10k$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, 4x = 3 + 5k$

(E) est équivalente à : $x \in \mathbb{Z},\ 4x \equiv 3\ [5]$. (1)

$4x \equiv 3\ [5] \Leftrightarrow 4 \times (4x) \equiv 4 \times 3\ [5]$. Car 4 et 5 sont premiers entre eux.

$4x \equiv 3\ [5] \Leftrightarrow x \equiv 2\ [5]$.

Les solutions cherchées sont les entiers relatifs de la forme $x = 5k + 2$, où k est un entier relatif quelconque.

Une autre méthode pour résoudre (1) :

$4x \equiv 3\ [5] \Leftrightarrow 4x \equiv 8\ [5]$. Car $8 \equiv 3\ [5]$.

$4x \equiv 3\ [5] \Leftrightarrow x \equiv 2\ [5]$. Car 4 et 5 sont premiers entre eux.

Les solutions cherchées sont les entiers relatifs de la forme $x = 5k + 2$, où k est un entier relatif quelconque.

Exercices de renforcement/approfondissement

49. Solution

1) $\text{PGCD}(n^2 + n,\ 2n + 1) = 1$. On pourra utiliser l'égalité $4(n^2 + n) = (2n + 1)^2 - 1$.
2) $5\,n^2 + 7n + 4 = (n + 1)(5n + 2) + 2$.

Si n est pair, le PGCD est 2 et si n est impair, le PGCD est 1.

50. Solution

Justifie que : $a = 3x - 5y$ et $b = -4x + 7y$. Le reste s'en déduit.

51. Solution

a) Soit $(x\ ;\ y)$ un couple d'entiers naturels de PGCD 18 et de somme 360.

Il existe un couple (x', y') d'entiers naturels tels que $x = 18x'$ et $y = 18y'$ avec $\text{PGCD}(x', y') = 1$.

On a donc : $\begin{cases} \text{PGCD}(x'; y') = 1 \\ x' + y' = 20 \end{cases}$

Les couples $(x\ ;\ y)$ cherchés sont : (18, 342) ; (342, 18) ; (54, 306) ; (306, 54) ; (126, 234) ; (234, 126) ; (162, 198) ; (198, 1162).

b) Soit $(x\ ;\ y)$ un couple d'entiers naturels non nuls de PGCD 18 et de produit 6480.

Il existe un couple (x' ; y') d'entiers naturels tels que $x = 18x'$ et $y = 18y'$ avec $\text{PGCD}(x', y') = 1$.

On a donc : $\begin{cases} PGCD(x'; y') = 1 \\ x'y' = 20 \end{cases}$

Les diviseurs positifs de 20 sont : 1, 2, 4, 5, 10, 20.

Les couples $(x\ ;\ y)$ cherchés sont : (18, 360) ; (18, 360) ; (72, 90) ; (90, 72).

52. Solution

Soit $(x\ ;\ y)$ un couple d'entiers naturels non nuls dont le PGCD est18 et le PPCM 540.

Il existe un couple (x', y') d'entiers naturels tels que $x = 18x'$ et $y = 18y'$ avec $\text{PGCD}(x', y') = 1$.

On a : $18 \times 540 = 182x'y'$. D'où : $x'y' = 30$. Par conséquent :

$\begin{cases} \text{PGCD}(x'; y') = 1 \\ x'y' = 30 \end{cases}$

Les diviseurs positifs de 30 sont : 1, 2, 3, 5, 6,10, 15, 30.

Les couples $(x\ ;\ y)$ cherchés sont : (18, 540) ; (540, 18) ; (36, 270) ; (270, 36) ; (54, 180) ; (180, 540) ; (108, 90) ; (90, 108).

53. Solution

Soit $(x\ ;\ y)$ un couple d'entiers naturels non nuls. Soit d et m respectivement le PGCD et le PPCM de x et y. On a : $dm = xy$.

Il existe un couple (x', y') d'entiers naturels non nuls tels que $x = dx'$ et $y = dy'$, avec

PGCD$(x', y') = 1$. Par suite, on a :
$m = dx'y'$. Il suit que :
$d(1 + x'y') = 203$, avec

PGCD$(x', y') = 1$. Les diviseurs de 203 sont 1, 7, 29, 203. On a à résoudre :

$$\text{(a)} \begin{cases} d = 1 \\ \text{PGCD}(x'; y') = 1 \\ x'y' = 202 \end{cases} ; \quad \text{(b)} \begin{cases} d = 7 \\ \text{PGCD}(x'; y') = 1 \\ x'y' = 28 \end{cases} ; \quad \text{(c)} \begin{cases} d = 29 \\ \text{PGCD}(x'; y') = 1 \\ x'y' = 6 \end{cases}$$

Avec (a), les couples $(x\,;\,y)$ sont : (1, 202) ; (202, 1) ; (2, 101), (101, 2).

Avec (b), les couples (x ; y) sont : (7, 196) ; (196, 7) ; (28, 49) ; (49, 28).

Avec (c), les couples (x ; y) sont : (29, 174) ; (174, 29) ; (58, 87) ; (87, 58).

On a ainsi toutes les solutions.

54. Solution

Soit x et y des entiers naturels deux entiers naturels non nuls dont la somme est 1008 et dont le PGCD est 24.

Posons : $x = 24x'$ et $y = 24y'$. On a :
$$\begin{cases} x' + y' = 42 \\ \text{PGCD}(x', y') = 1 \\ x' \leq y' \end{cases}$$

Les résultats peuvent être présentés sous forme de couples (x, y) avec $x \leq y$.

Les nombres x et y cherchés sont : (24, 984) ; (120, 888) ; (264, 744) ; (312, 696) ; (408, 600) ;

(456, 552).

55. Solution

1) Méthode 1

Si d est un diviseur de a et b, alors d divise a et $a + b$. Il en résulte que si a et b sont premiers entre eux, il en est de même de a et de $a + b$. De même b et $a + b$ sont premiers entre eux. Il en résulte que $a + b$ est premier avec le produit ab.

Autre méthode

Soit d un diviseur commun positif de $a + b$ et ab. Il s'agit de démontrer que d est égal à 1.

$d|(a + b)$ et $d|ab$ donc $d|[a(a + b) - ab]$, c'est-à-dire $d|a^2$; de même $d|[b(a + b) - ab]$ et donc $d||b^2$. Les nombres a et b étant premiers entre eux, il en est de même de a^2 et b^2 . Par suite d est égal à 1. D'où le résultat.

1) Réciproque

Soit a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a + b$ et ab sont premiers entre eux. Si a et b n'étaient pas premiers entre eux, ils auraient un diviseur commun d plus grand que 1. d diviserait donc $a + b$ et ab. Ce qui n'est pas possible. Il en résulte que a et b sont premiers entre eux.

56. Solution

Soit N le nombre cherché. On peut déduire que N +1 est un multiple commun de 8, 15, 18 et 24. N ne sera le plus petit possible que si N +1 est le Plus Petit Commun Multiple de 8, 15, 18 et 24. Ce PPCM est 360. N est donc égal à 359.

57. Solution

Soit a et b deux entiers naturels non nuls et m le PPCM de a et b. Il s'agit de démontrer que :

PGCD (a, b) = PGCD $(a + b, m)$.

Soit d un diviseur commun de a et b. Posons : $a = a'\delta$ et $b = b'\delta$ où δ = PGCD (a, b). On a :

$m = a'b'\delta$, car : $m\,\delta = ab$.

Par suite, PGCD $(a + b, m)$ = δPGCD$(a' + b', a'b')$.

Les nombres a' et b' étant premiers entre eux, il en est de même de $a' + b'$ et de $a'b'$. On en déduit que : PGCD $(a + b, m) = \delta$.

58. Solution

On a :

$6355 \equiv 55\ [n]$ et $n > 55$; $1705 \equiv 25\ [n]$ et $n > 25$; $1271 \equiv 11\ [n]$ et $n > 11$.

D'où :

$6300 \equiv 0\ [n]$; $1680 \equiv 0\ [n]$; $1260 \equiv 0\ [n]$ et $n > 55$.

Les nombres n cherchés sont ceux qui sont les diviseurs communs à 6300 ; 1680 et 1260 qui sont supérieurs à 55.

Les diviseurs communs à 6300 ; 1680 et 1260 sont les diviseurs de leurs PGCD.

PGCD(6300, 1680, 1260) = 420.

Parmi les 24 diviseurs positifs de 420, seuls 7 sont supérieurs à 55. Ce sont : 60, 70, 84, 105, 140, 210, 420.

59. Solution

$\text{PGCD}(6n+4, 4n+2) = 2 \times \text{PGCD}(3n+2, 2n+1)$.
On a : $2(3n+2) - 3(2n+1) = 1$. D'après le théorème de Bézout, $3n+2$ et $2n+1$ sont premiers entre eux. Par suite $\text{PGCD}(6n+4, 4n+2) = 2$.

60. Solution

1) Soit d un diviseur positif commun de a et b. d divise $2a - 9b$. Or $2a - 9b = 17$, donc d divise 17.

2) Les diviseurs positifs de 17 étant 1 et 17, le PGCD de a et b est soit 1, soit 17.

Déterminons les valeurs de k pour lesquelles le PGCD de a et b vaut 17.

$\begin{cases} 9k+13 \equiv 0\ [17] \\ 2k+1 \equiv 0\ [17] \end{cases}$. Ce qui est équivalent à $\begin{cases} 9k \equiv 72\ [17] \\ 2k \equiv 16\ [17] \end{cases}$. Ce qui est encore équivalent à $\begin{cases} k \equiv 8\ [17] \\ k \equiv 8\ [17] \end{cases}$. Car d'une part 9 est premier avec 17 et d'autre part 2 est premier avec 17.
En résumé :
Si $k \equiv 8\ [17]$, le PGCD de a et b est 17.
Si $k \not\equiv 8\ [17]$, le PGCD de a et b est 1.

61. Solution
Soit d un diviseur positif commun de a et b. d divise $3a - 2b$. Or $3a - 2b = 5$, donc d divise 5.

Les diviseurs positifs de 5 étant 1 et 5, le PGCD de a et b est soit 1, soit 5.
En raisonnant comme dans la solution précédente, on a :
En résumé :
Si $k \equiv 1\ [5]$, le PGCD de a et b est 5.
Si $k \not\equiv 1\ [17]$, le PGCD de a et b est 1.

62. Solution
Soit d un diviseur commun de a et b. d divise $3a - 2b$. Or $3a - 2b = 4$, donc d divise 4.

Les diviseurs positifs de 4 étant 1, 2 et 4, le PGCD de a et b est soit 1, soit 2, soit 4.

Si $k = 4p + 1$, le PGCD de a et b est 4.
Si $k = 4p + 3$, le PGCD de a et b est 2.
Si $k = 4p$ ou $k = 4p + 2$, le PGCD de a et b est 1,
où p est un entier relatif quelconque.

63. **Solution**
$(x+1)(2x-1) \equiv 0\ [5] \Leftrightarrow x+1 \equiv 0\ [5]$ ou $2x-1 \equiv 0\ [5]$. Car 5 est premier.
$x+1 \equiv 0\ [5]$ ou $2x-1 \equiv 0\ [5] \Leftrightarrow x \equiv 4\ [5]$ ou $2x \equiv 6\ [5]$
$(x+1)(2x-1) \equiv 0\ [5] \Leftrightarrow x \equiv 4\ [5]$ ou $x \equiv 3\ [5]$. Car 2 est premier avec 6.
Les nombres entiers relatifs solutions sont de la forme $x = 5k + 4$ ou $x = 5k + 3$, k étant un entier relatif quelconque.

64. Solution

$\begin{cases} x \equiv 2\ [4] \\ x \equiv 7\ [9] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \equiv 0\ [4] \\ x + 2 \equiv 0\ [9] \end{cases}$

$\Leftrightarrow x + 2 \equiv\ 0\ \ [36]$. Car 4 et 9 sont premiers entre eux.

$\Leftrightarrow x \equiv 34\ [36]$

Les nombres entiers relatifs solutions du système sont de la forme $x = 36k + 34$, k étant un entier relatif quelconque.

65. Réponse

Les nombres entiers relatifs solutions du système sont de la forme $x = 28k + 3$, k étant un entier relatif quelconque.

66. Solution

$x \equiv 2\ [9] \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z}, x = 9p + 2$

$x \equiv 3\ [11] \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z}, x = 11q + 3$

$9p + 2 = 11q + 3 \Leftrightarrow 9p - 11q = 1$

On a : $p = 11k + 5$.

Les entiers relatifs solutions du système sont de la forme $x = 99k + 47$, k étant un entier relatif quelconque.

67. **Solution**

$\begin{cases} 2x \equiv 3\ [5] \\ 3x \equiv 2\ [8] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 4\ [5] \\ x \equiv 6\ [8] \end{cases}$

Les entiers relatifs solutions du système sont de la forme $x = 40k + 14$, k étant un entier relatif quelconque.

68. Solution

$10! = 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$.

Le nombre de diviseurs positifs de 10 ! est 270.

69. **Solution**

$b - a = n$ et $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(2n^2, n(2n + 1))$;

$\text{PGCD}(2n^2, n(2n + 1)) = n \times \text{PGCD}(2n, 2n + 1)$

$= n$. Car $2n$ et $2n + 1$, étant deux entiers consécutifs, sont premiers entre eux.

Par suite : $b - a = d$.

Le reste est un simple calcul.

70. Solution

1) Soit d_n un diviseur commun de de u_n et u_{n+1}. d_n divise $5u_n$ et u_{n+1} et par suite $(u_{n+1} - 5u_n)$. D'où d_n divise donc 6.
2) a) Raisonnons par récurrence sur n. $u_0 = 14$ et 14 est pair. Par suite u_0 est pair.
   Pour tout entier naturel k, démontrons que si u_k est pair alors u_{k+1} est pair. Si u_k est pair, alors: $5u_k$ est pair et puisque 6 est pair, on en déduit que u_{k+1} est pair.
   On conclut que pour tout entier naturel n, u_n est pair.
   b) Raisonnons par récurrence sur n. $u_0 = 14$ et 14 n'est pas multiple de 3. Par suite u_0 n'est pas multiple de 3.
   Pour tout entier naturel k, démontrons que si u_k n'est pas multiple de 3 alors u_{k+1} n'est pas multiple de 3.
   Si u_k n'est pas multiple de 3 et que u_{k+1} était multiple de 3, alors $u_{k+1} + 6$ serait un multiple de 3. Par suite 3 diviserait $5u_k$. Mais 3 est premier avec 5. D'après le théorème de Gauss, 3 diviserait u_k. D'où contradiction.
   On conclut que pour tout entier naturel n, u_n n'est pas multiple de 3.
3) D'après 1) les valeurs possibles du PGCD de de u_n et u_{n+1} sont : 1, 2, 3, 6.
   3 ne divisant pas u_n, le PGCD de u_n et u_{n+1} ne peut être 3.
   6 ne peut diviser u_n car 3 ne divise pas u_n.
   Tous les $u_n$étant pair, le PGCD de u_n est pair. On en déduit que le PGCD de u_n et u_{n+1} est 2.

71. La fête de promotion
Solution

Soit x le nombre garçons et y celui des filles de ce groupe. On a : $19x + 13y = 1000$. (1)

Une solution particulière de (1) est $(-2000, 3000)$. (Utilisez l'algorithme d'Euclide).

On obtient : $x = 13k - 2000$ et $y = 3000 - 19k$, où k est un entier relatif.

x et y étant des entiers naturels, k vérifie : $154 \leq k \leq 157$. L'entier k prend les valeurs suivantes : 154, 155, 156, 157. Les

couples (x, y) solutions sont :
$(2,74), (15,55), (28,36), (41,17)$.
Autre méthode
En utilisant l'équation (1), on a : $6x \equiv 12\,[13]$. Car $19 \equiv 6\,[13]$ et $1000 \equiv 12\,[13]$. D'où :
$x \equiv 2\,[13]$. Car 6 est premier avec 13. Par suite : $x = 13k + 2$ où k est un entier naturel.
On a : $19(13k + 2) + 13y = 1000$. On en déduit que : $y = 74 - 19k$. Pour que y soit entier, il faut que k prenne les valeurs $0, 1, 2, 3$. Les couples (x, y) solutions sont : $(2,74), (15,55), (28,36), (41, 17)$ (Vérifiez que d'abord que chaque couple (x, y) vérifie l'équation (1)).

72. Le banquet
Solution
Soit x le nombre d'hommes, y le nombre de femmes et z celui des enfants présents à ce banquet.
Les données du problème se traduisent, après simplifications, par :

$$\begin{cases} x + y + z = 41 \\ 12x + 9y + z = 120 \end{cases}$$

Ce dernier système, en soustrayant la première équation de la deuxième, est équivalent à :

$$\begin{cases} x + y + z = 41 \\ 11x + 8y = 79 \end{cases}$$

Avec la deuxième équation, on a : $3x \equiv 7\,[8]$. Ce qui donne : $x \equiv 5\,[8]$. D'où : $x = 8k + 5$. En remplaçant cette valeur dans cette deuxième équation, on a : $y = 3 - 11k$. Par suite $k = 0$. On obtient : $x = 5, y = 3, z = 33$. Il y a à ce banquet 5 hommes, 3 femmes et 33 enfants.
Deuxième méthode
En considérant l'équation $11x + 8y = 79$ dont une solution particulière est $(237, -316)$ et en utilisant le théorème de Gauss, on trouve : $x = 237 - 8k$ et $y = 11k - 316$. Mais x et y étant des entiers naturels, on obtient $k = 29$. D'où : $x = 5, y = 3, z = 33$.
Une autre méthode est la résolution de système linéaire avec z comme paramètre. On obtient les mêmes résultats.

73. La pile de livres
Solution
1) Lorsque je range les livres par 10, il m'en reste 3 se traduit par : $x = 10q + 3$, où q est un entier naturel.

Lorsque je range les livres par 17, il m'en reste 2 se traduit par : $x = 17p + 2$, où p est un entier naturel.
Il en résulte que : $17p - 10q = 1$. On trouve : $p = 10k + 3$ et $q = 17k + 5$. Par suite :
$x = 170k + 53$.
Tous les nombres possibles sont de la forme $170k + 53$, où k est un entier naturel.

2) Le nombre minimum de livres est 53.

74. Le théorème des restes chinois et le phare
Solution
Soit x le temps, en secondes, depuis minuit, où les deux signaux sont émis en même temps. Comme le temps écoulé est compté en secondes, x est un nombre entier naturel.
Le cas du signal jaune se traduit par : $x \equiv 2\,[15]$ et celui du signal rouge par : $x \equiv 8\,[28]$. Le problème posé se ramène au système suivant :

$$\begin{cases} x \equiv 2\,[15] \\ x \equiv 8\,[28] \end{cases}$$

De ce système, il résulte l'équation (E), $15u - 28v = 6$. En utilisant le théorème de Gauss après avoir déterminé une solution particulière de l'équation (E), les solutions du système de congruences sont les entiers naturels x tels que $x = 420k - 1168$. La plus petite valeur de k pour laquelle x est un entier naturel est 3. On obtient alors : $x = 92$. C'est 1min 32 s après minuit que les deux signaux émettront en même temps.

75. Le théorème des restes chinois et le cuisinier chinois
Solution
Soit x le nombre de pièces d'or.
Après le partage équitable du butin à chacun des 17 cuisiniers au départ, il reste

3 pièces d'or pour le cuisinier se traduit par : $x \equiv 3\,[17]$.

Mais les pirates se querellent, et six d'entre eux sont tués ; le cuisinier recevrait alors quatre pièces se traduit par : $x \equiv 4\,[11]$. Car il reste que 11 pirates après la mort de six d'entre eux.

Dans un naufrage ultérieur, seul le butin, six pirates et le cuisinier sont sauvés et le partage laisserait cinq pièces d'or à ce dernier se traduit par : $x \equiv 5\,[6]$.

Le problème posé se ramène au système suivant d'inconnue l'entier naturel x :

$$\begin{cases} x \equiv 3\,[17] \\ x \equiv 4\,[11] \\ x \equiv 5\,[6] \end{cases}$$

Les entiers naturels 17, 11 et 6 étant deux à deux premiers entre eux, on peut résoudre un système de deux équations avant de tenir compte de la troisième équation. On va commencer par résoudre le système : $\begin{cases} x \equiv 3\,[17] \\ x \equiv 4\,[11] \end{cases}$

Puisque 17 et 11 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers p et q tels que : (E_1), 17p + 11q = 1. (On peut aussi traduire les congruences précédentes et obtenir cette équation d'inconnues p et q).

Une solution particulière de (E_1) est $(2\,; -3)$. En utilisant le théorème de Gauss, la solution générale de (E_1) est $x = 187\,k + 37$.

Pour résoudre le système de départ des trois congruences, on a à résoudre le système suivant : $\begin{cases} x \equiv 37\,[187] \\ x \equiv 5\,[6] \end{cases}$

187 et 6 étant premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers u et v tels que :

(E_2), $187u + 6v = 1$. En utilisant l'algorithme d'Euclide, une solution particulière de (E_2) est

$(1\,; -31)$. En utilisant le théorème de Gauss, la solution générale de (E_2) est : $x = 1122\,k\ -5947$. La plus petite valeur de k pour laquelle x est un entier naturel correspond à la fortune minimale que peut espérer le cuisinier quand il décide d'empoisonner le reste des pirates. Il s'agit de 785 pièces d'or. Cela vaut le coup !

76. Le petit théorème de Fermat

Solution

1) On a : $p! = k!\,(p-k)!\,C_p^k$, par suite : p divise $k!\,(p-k)!\,C_p^k$.

L'entier p ne peut diviser $k!$ sinon il diviserait l'un de ses facteurs, ce qui est impossible car $k < p$. Pour ces mêmes raisons, p ne peut diviser $(p-k)!$. Par suite, p étant premier, ne divise pas le produit $k!\,(p-k)!$. L'entier p étant premier, comme il ne divise pas $k!\,(p-k)!$, il est premier avec lui. Par suite d'après le théorème de Gauss, p divise C_p^k.

2)a) On va d'abord faire la démonstration pour tout entier naturel a.

On a : $0^p \equiv 0 \pmod p$. La propriété est donc vraie pour $a = 0$.

Pour tout entier naturel a tel que $a^p \equiv a \pmod p$, on a :

$(a+1)^p = 1 + a^p + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k\, a^k$

D'après 1) pour tout entier naturel k appartenant à $\{1, \dots, p-1\}$, $C_p^k \equiv 0 \pmod p$. Par suite :

$(a+1)^p \equiv 1 + a^p \pmod p$.

$(a+1)^p \equiv 1 + a \pmod p$. Car $a^p \equiv a \pmod p$.

On en déduit que pour tout entier naturel a, $(a^p \equiv a \pmod p \Longrightarrow (a+1)^p \equiv a + 1\ (mod\ p))$

On conclut que la propriété est vraie pour tout entier naturel a.

Examinons le cas a entier relatif négatif.

D'après ce qui précède, $(-a)^p \equiv -a \pmod p$.

Si $p = 2$, on a : $(-a)^p = a^p$ et $a \equiv -a \pmod p$. Par suite : $a^p \equiv a \pmod p$.

Si $p > 2$, alors p est impair. Par suite : $(-a)^p = -a^p$. D'où : $-a^p \equiv -a \pmod p$. On en déduit que : $a^p \equiv a \pmod p$. Ce qui achève la preuve.

b) D'après a), on a : $a \times a^{p-1} \equiv a \times 1 \pmod p$. Si p ne divise pas a, p étant premier, est premier avec a. Par suite : $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

3) a) D'après 2)a), $a^{13} - a \equiv 0 \pmod{13}$. Or pour tout entier naturel n non nul, $a^n \equiv a \pmod 2$ (à établir en utilisant les congruences), donc $a^{13} - a \equiv 0 \pmod 2$. Les entiers 2 et 13 étant premiers entre eux, $a^{13} - a \equiv 0 \pmod{26}$. D'où le résultat.
b) 7 ne divise pas 3, d'où : $3^{7-1} \equiv 1 \pmod 7$, d'après 2)b). Par suite pour tout entier naturel n, $3^{6n} \equiv 1 \pmod 7$. D'où le résultat.
c) D'après 2)a), $n^5 - n \equiv 0 \pmod 5$. On a : $n^5 - n = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$. L'entier
$n(n-1)(n+1)$ étant le produit de trois entiers consécutifs est divisible par 6 (à établir). Par suite :
$n^5 - n \equiv 0 \pmod 6$. 5 et 6 étant premiers entre eux, $n^5 - n \equiv 0 \pmod{30}$. D'où le résultat.

77. Les nombres de Mersenne et les nombres brésiliens
1) a) Supposons que n ne soit pas premier. Il existerait des nombres entiers naturels p et q plus grands que 1 tels que : $n = pq$. On a : $2^{pq} - 1 = (2^p - 1)(2^{p(q-1)} + 2^{p(q-2)} + \cdots + 2^p + 1)$. Chacun des facteurs de ce produit étant supérieur à 2, $2^n - 1$ ne serait plus premier. D'où il y a contradiction. L'entier n est donc premier.
b) Evident.
c) 11 est premier et pourtant $2^{11} - 1$ n'est pas premier. La réciproque de a) est fausse.
2) Posons : $s = mq + r$, avec $0 \leq r < m$. On a : $2^s - 1 = (2^m)^q \times 2^r - 1$. De $2^s - 1 \equiv 0 \pmod p$, on déduit que $(2^m)^q \times 2^r - 1 \equiv 0 \pmod p$. Or $2^m - 1 \equiv 0 \pmod p$, donc
$2^r - 1 \equiv 0 \pmod p$. On en déduit que r est égal à 0, car m est le plus petit entier naturel tel que $2^m - 1 \equiv 0 \pmod p$. On conclut que m divise s.
3) a) Soit I l'ensemble des entiers naturels n supérieurs ou égaux à 2 tels que $2^n - 1 \equiv 0 \pmod p$. I n'est pas vide car $2^q - 1 \equiv 0 \pmod p$. I étant une partie non vide de $\mathbb{N}$ contient donc un plus petit élément q_0. En faisant la division euclidienne de q par q_0, on a : $q = lq_0 + r$, avec $0 \leq r < q_0$. En raisonnant comme au 2), on obtient $q = lq_0$. L'entier q étant premier, l vaut 1. Par ailleurs $2^1 - 1 \not\equiv 0 \pmod p$ du fait que $p > 2$. L'entier q est donc le plus petit entier naturel non nul tel que $2^q - 1 \equiv 0 \pmod p$.
b) L'entier p étant un nombre premier strictement supérieur à 2, ne divise pas 2. D'après le petit théorème de Fermat, $2^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. De plus q et $p-1$ sont supérieurs ou égaux à 2, d'après 2) q divise $p-1$,. Puisque p est un nombre premier supérieur strictement à 2, il est impair et par suite $p-1$ est un nombre pair non nul. Il existe donc un nombre entier naturel k non nul tel que : $p - 1 = 2kq$. D'où le résultat.
4) a) $171 = \overline{333}^7$; $26 = \overline{222}^3$.
b) D'après ce qui précède 171 et 26 sont des nombres brésiliens.
c) On a : $2^n - 1 = 1.2^0 + 1.2^1 + 1.2^2 + \cdots + 1.2^{n-1}$. On en déduit que :
$2^n - 1 = \overline{11\ldots1}^2$ (n chiffres 1)

78. Les nombres parfaits
1) Les diviseurs positifs de 6 sont : 1, 2, 3, 6 dont la somme est 12. $\sigma(6) = 12$, par suite 6 est un nombre parfait. Les diviseurs positifs de 28 sont : 1, 2, 4, 7, 14, 28 dont la somme est 56. $\sigma(28) = 56$, par suite 28 est un nombre parfait. Les diviseurs positifs de 32 sont : 1, 2, 4, 8, 16, 32 dont la somme est 63. $\sigma(32) = 63$, par suite 32 n'est pas un nombre parfait.
2) a) n étant supérieur ou égal à 2 a au moins deux diviseurs : 1 et n. Par suite : $\sigma(n) \geq n + 1$.
b) Supposons que n est premier. Les seuls diviseurs positifs sont 1 et n. On en déduit que :
$\sigma(n) = n + 1$. Réciproquement, supposons que $\sigma(n)$ soit égal à $n + 1$. Si n n'était premier, il aurait un nombre entier naturel m vérifiant $1 < m < n$ qui serait diviseur de n. Et dans ce cas $\sigma(n)$ serait supérieur ou égal à $n + 2$. Par suite n est premier.
3) a) Supposons qu'il existe deux indices i et j tels que p_i égal à q_j. Un tel p_i diviserait a et b et par suite leur PGCD. L'entier p_i étant supérieur ou égal ou égal à 2, le PGCD de a et b serait supérieur ou égal à 2. Ce qui

contredit le fait que a et b sont premiers entre eux. On en déduit que pour tous i et j, le nombre p_i est distinct de q_j.

b) Soit a' un diviseur de a. Un nombre premier qui intervient dans la décomposition en produit de facteurs premiers de a' divise a. Ce nombre premier est donc l'un des p_i. Soit a_i le plus grand exposant tel que $p_i^{a_i}$ divise a. On a : $0 \leq a_i \leq \alpha_i$. Le nombre a' s'écrit $p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}$. De même les diviseurs de b s'écrivent $q_1^{b_1} \dots q_s^{b_s}$ avec : $0 \leq b_j \leq \beta_j$. Les p_i étant différents de q_j, les diviseurs de ab s'écrivent $p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r} q_1^{b_1} \dots q_s^{b_s}$. Ceci est obtenu par unicité de la décomposition.

c) (m, n) est élément de $D_a \times D_b$ entraine que m divise a et n divise b et par suite mn divise ab. L'application φ est donc bien définie (pas à prouver).

Démontrons d'abord que φ est injective.

Soit (m, n) et (m', n') deux éléments de $D_a \times D_b$ tels que : $\varphi(m, n) = \varphi(m', n')$. Posons :

$m = p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}$; $m' = p_1^{a_1'} \dots p_r^{a_r'}$; $n = q_1^{b_1} \dots q_s^{b_s}$; $n' = q_1^{b_1'} \dots q_s^{b_s'}$. De l'égalité $\varphi(m, n) = \varphi(m', n')$, on obtient : $p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r} q_1^{b_1} \dots q_s^{b_s} = p_1^{a_1'} \dots p_r^{a_r'} q_1^{b_1'} \dots q_s^{b_s'}$. Du fait de l'unicité de la décomposition de ab, il résulte que pour tout i, $p_i^{a_i} = p_i^{a_i'}$ et pour tout j, $q_j^{b_j} = q_j^{b_j'}$. On en déduit que pour tout i, $a_i = a_i'$ et pour tout j, $b_j = b_j'$. On conclut que $m = m'$ et $n = n'$. D'où l'injectivité de φ.

Démontrons ensuite que φ est surjective.

Soit u un élément de D_{ab}. Cet élément u s'écrit $p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r} q_1^{b_1} \dots q_s^{b_s}$. En posant : $m = p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}$ et $n = q_1^{b_1} \dots q_s^{b_s}$, on obtient le résultat.

φ étant injective et surjective est bijective.

4) a) $\sigma(a) = \sum_{m|a} m$; $\sigma(b) = \sum_{n|a} n$ et $\sigma(a)\sigma(b) = (\sum_{m|a} m)(\sum_{n|a} n) = \sum_{m|a;n|b} mn$. Or : $\sum_{m|a;n|b} mn = \sum_{d|ab} d$, par bijectivité de φ, donc : $\sigma(a)\sigma(b) = \sigma(ab)$.

b) $2^p - 1$ étant un nombre premier qui ne divise pas 2^{p-1} est premier avec lui.

D'après ce qui précède, $\sigma(2^{p-1}(2^p - 1)) = \sigma(2^{p-1})\sigma(2^p - 1)$.

Or $\sigma(2^{p-1}) = 2^p - 1$ et $\sigma(2^p - 1) = 2^p$, d'après 2)b). On en déduit que $\sigma(\mathrm{E}_p) = 2\mathrm{E}_p$. Le nombre E_p est donc parfait.

79. Les nombres de Fermat

1) a) Si m n'est pas une puissance de 2, alors il admet un diviseur impair d supérieur ou égal à 3 tel que : $m = kd$, où k est un entier naturel. On a :

$a^m + 1 = (a^k)^d - (-1)^d$; par suite :

$a^m + 1 = (a^k + 1)((a^k)^{(d-1)} - (a^k)^{(d-2)} + \dots + 1)$. De plus, on a : $1 < a^k + 1 < a^m + 1$.

On en déduit que l'entier $a^m + 1$ admet un diviseur distinct de 1 et de lui-même. Il n'est donc pas premier, ce qui contraire à l'hypothèse. On conclut que m est une puissance de 2. Il existe donc un entier naturel n tel que : $m = 2^n$.

Il faut remarquer $a^m + 1 > 2$. Pour que $a^m + 1$ soit premier il faut qu'il soit impair, c'est-à-dire que a^m soit pair. Ce qui entraine que compte tenu de $m = 2^n$ (m pair), que a est pair. Il existe donc un entier naturel k tel que : $a = 2k$.

b) $a^m + 1 = k' 2^{2^n} + 1 + 1$, où $k' = k^{2^n}$.

2) a) Evident.

b) Appliquez les propriétés.

c) $\mathrm{F}_5 = 641 \times 6700417$.

3)a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{F}_{n+1} = (2^{2^n})^2 + 1$;

$\mathrm{F}_{n+1} = (\mathrm{F}_n - 1)^2 + 1$, car : $\mathrm{F}_n - 1 = 2^{2^n}$.

b) On va utiliser le fait que tout nombre est congru au chiffre de ses unités modulo 10.

La propriété est vraie pour $n = 2$, car : $\mathrm{F}_2 = 17$.

Supposons-la vraie à l'ordre n,($n \geq 2$) ; c'est-à-dire : $\mathrm{F}_n \equiv 7\ [10]$ et démontrons que :

$\mathrm{F}_{n+1} \equiv 7\ [10]$.

En utilisant le 3) a), on a : $(\mathrm{F}_n - 1)^2 + 1 \equiv 37\ [10]$. Or : $37 \equiv 7\ [10]$, donc : $\mathrm{F}_{n+1} \equiv 7\ [10]$.

On conclut que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, le chiffre des unités dans le système décimal de F_n est 7.

4) a) La propriété est vraie pour $n = 1$. Car : $F_1 - 2 = 3 = F_0$.

On suppose la propriété vraie à l'ordre n, $(n \geq 1)$ et démontrons qu'elle reste vraie à l'ordre $n + 1$.

On a : $F_{n+1} - 2 = (F_n - 1)^2 - 1$, d'après 3)a). D'où :

$$\begin{aligned}(F_n - 1)^2 - 1 &= F_n(F_n - 2)\\ &= F_n(F_0F_1 \dots F_{n-1}),\end{aligned}$$

d'après l'hypothèse de récurrence. D'où le résultat.

b) m et n étant distincts, on va supposer $n > m$.

D'après ce qui précède,

$F_n - 2 = F_0F_1 \dots F_{n-1}$. Par suite :

$F_0F_1 \dots F_{n-1} =$

$F_m(F_0F_1 \dots F_{m-1})(F_{m+1}F_{m+2} \dots F_{n-1})$. On déduit que : $F_n = hF_m + 2$, où :

$h = (F_0F_1 \dots F_{m-1})(F_{m+1}F_{m+2} \dots F_{n-1})$.

Si d est un diviseur positif de F_n et de F_m, alors d divise 2. Par suite d vaut 1, car tous les F_n sont impairs d'après 2)a). On en déduit que F_n et F_m sont premiers entre eux.

5) a) Soit I l'ensemble des entiers naturels k supérieurs ou égaux à 2 tels que : $2^k \equiv 1\ [p]$. I est une partie non vide de $\mathbb{N}$, car $2^{p-1} \equiv 1\ [p]$ d'après le petit théorème de Fermat. I admet donc un plus petit élément k_0.

b) Soit k est un entier naturel supérieur ou égal à 2 tel que $2^k \equiv 1\ [p]$. Faisons la division euclidienne de k par k_0. On a : $k = qk_0 + r$, avec $0 \leq r < k_0$. Par suite : $2^r \equiv 1\ [p]$. On en déduit que r est égal à zéro, par définition de k_0. On conclut que k_0 divise k.

c) L'entier p est un diviseur de F_n, on a : $2^{2^n} + 1 \equiv 0\ [p]$. Par suite : $2^{2^n} \equiv -1\ [p]$, ce entraine que : $(2^{2^n})^2 \equiv 1\ [p]$. On en déduit que : $2^{2^{n+1}} \equiv 1\ [p]$. D'après 5)a) et b), k_0 divise 2^{n+1}. Il existe donc un entier naturel q inférieur ou égal à $n + 1$ tel que $k_0 = 2^q$. Démontrons par l'absurde que q est égal à $n + 1$. Supposons que q inférieur strictement à $n + 1$. Ce qui équivaut à : $q \leq n$. Il existe donc un entier naturel s tel que : $n = q + s$. On a :

$2^{k_0} \equiv 1\ [p]$, implique que $2^{2^q} \equiv 1\ [p]$, ce qui entraine que $(2^{2^q})^{2^h} \equiv 1\ [p]$. Par suite : $2^{2^{q+h}} \equiv 1\ [p]$. D'où : $2^{2^n} \equiv 1\ [p]$. Comme $1 \not\equiv -1 [p]$ du fait que $p > 2$, il y a contradiction avec $2^{2^n} \equiv -1\ [p]$. On en déduit que k_0 est égal à 2^{n+1}.

Puisque p est plus grand que 2, il ne divise pas 2. D'après le petit théorème de Fermat, $2^{p-1} \equiv 1\ [p]$. D'après 5)a) et b) 2^{n+1} divise $p - 1$. Il existe un entier naturel q tel que : $p = 2^{n+1}q + 1$. Il reste à démontrer que q admet un diviseur impair supérieur ou égal à 3.

Raisonnons par l'absurde. Supposons que q est une puissance de 2. Dans ce cas, p peut se mettre sous la forme : $p = 2^m + 1$, où m est un entier naturel non nul. p étant premier, $2^m + 1$ l'est évidemment. Dans ce cas, d'après 1)a), m est une puissance de 2. On en déduit que p est un nombre de Fermat. Ce qui contraire à l'hypothèse que p est distinct des nombres de Fermat. On conclut que q admet un diviseur impair supérieur ou égal à 3. D'où le résultat.

80. Le codage
Solution

1) A qui a indice 0 est codé par H qui a pour indice 7$= \varphi(0)$, d'où : $a \times 0 + b \equiv 7\ [26]$.

E qui a indice 4 est codé par B qui a pour indice $1 = \varphi(0)$, d'où : $a \times 4 + b \equiv 1\ [26]$.

D'où le système : $\begin{cases} 4a + b \equiv 1\ [26] \\ \quad b \equiv 7\ [26] \end{cases}$

2) On a : $b = 26k + 7$ et $a = 13k' + 5$; d'où : $a = 5$ et $b = 7$ ou $a = 18$ et $b = 7$.

3) On a : $18n + 7 \equiv \varphi(n)\ [26]$ où $\varphi(n)$ est le reste de la division euclidienne de $18n + 7$ par 26. a) K est codé 10 et $18 \times 10 + 7 \equiv 5\ [26]$. $\varphi(10) = 5$, K est donc codé F. X est codé 23 et $18 \times 23 + 7 \equiv 5\ [26]$. X est encore codé F.

b) D'après la règle donnée deux lettres différentes ne peuvent être codées par la même lettre. Par suite les valeurs $a = 18$ et $b = 7$ ne conviennent pas un bon codage.
4) On a : $5n + 7 \equiv \varphi(n)$ [26] où $\varphi(n)$ est le reste de la division euclidienne de $5n + 7$ par 26.

a) K est codé F et X est codé S.

b) Le message GAUSS est codé LHDTT.

5) a) Si $\varphi(m) = \varphi(n)$, alors $5m + 7 \equiv 5n + 7\ [26]$. Ce qui donne : $5(m - n) \equiv 0\ [26]$.

De la relation $5(m - n) \equiv 0\ [26]$, on déduit que $m - n \equiv 0\ [26]$, car 5 étant premier et ne divisant pas 26 est premier lui (Théorème de Gauss). Par suite, il existe un entier k tel que : $m - n = 26k$. Ici la seule valeur qui convient est $k = 0$. On en déduit que $m = n$. L'application φ est donc injective.

b) De ce qui précède, on déduit que si m est différent de n, alors $\varphi(m)$ est différent de $\varphi(n)$. Par suite deux lettres différentes ne peuvent être codées par la même lettre.

6)a) On a : $5 \times (-5) + 1 \times 26 = 1$. D'après le théorème de Bézout, 5 et 26 sont premiers entre eux.

b) On a : $5 \times (-5) \equiv 1\ [26]$. Par suite une solution dans $\mathbb{Z}$ de l'équation $5n \equiv 1\ [26]$ est -5.

7) a) La relation $5n + 7 \equiv \varphi(n)\ [26]$ est équivalente à $-5 \times (5n + 7) \equiv -5\ \varphi(n)\ [26]$, car 5 et 26 sont premiers entre eux. De 6)b) on déduit que : $n \equiv 9 - 5\ \varphi(n)\ [26]$.

b) Il s'agit ici connaissant $\varphi(n)$ de trouver n.

Pour A, $\varphi(n) = 0$. D'où : $n \equiv 9\ [26]$. A est décodé J.

Pour W, $\varphi(n) = 22$. D'où : $n \equiv 3\ [26]$. W est décodé D.

Le message AWA est décodé JDJ.

81. Le réseau

Solution

A. Représentation graphique de quelques ensembles

1) $x \equiv 2\ [3]$ et $y \equiv 1\ [3] \Leftrightarrow \exists k, \exists k'/$ $x = 3k + 2$ et $y = 3k' + 1$

Il y a trois valeurs de x et trois valeurs y. Soit au total 9 points à placer dont les coordonnées sont :

$(2; 1)$, $(2; 4)$, $(2; 7)$, $(5; 1)$, $(5; 4)$, $(5; 7)$, $(8; 1)$, $(8; 4)$, $(8; 7)$.

2) $x + y \equiv 1[3] \Leftrightarrow \exists k / x + y = 3k + 1, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Il y a 27 points à placer dont les coordonnées sont : $(0; 1)$, $(1; 0)$, $(0; 4)$, $(1; 3)$, $(2; 2)$, $(3; 1)$, $(4; 0)$, $(0\ ;\ 7)$, $(1\ ;\ 6)$, $(2\ ;\ 5)$, $(3\ ;\ 4)$, $(4\ ;\ 3)$, $(5\ ;\ 2)$, $(6\ ;\ 1)$, $(7\ ;\ 0)$, $(2\ ;\ 8)$, $(3;\ 7)$, $(4\ ;\ 6)$, $(5;\ 5)$, $(6\ ;\ 4)$, $(7\ ;\ 3)$, $(8\ ;\ 2)$, $(5\ ;\ \ 8)$, $(6; 7)$, $(7\ ;\ 6)$, $(8; 5)$, $(8\ ;\ 8)$.

3) $x \equiv y\ [3] \Leftrightarrow \exists k, y = x + 3k$.
Pour x choisi entre 0 et 8, on fait varier k de sorte que y prenne des valeurs entre 0 et 8.

Il y a 27 points à placer dont les coordonnées sont : $(0; 0)$, $(0; 3)$, $(0; 6)$, $(1; 1)$, $(1; 4)$, $(1; 7)$, $(2; 2)$, $(2; 5)$, $(2; 8)$, $(3; 0)$, $(3; 3)$, $(3; 6)$, $(4; 1)$, $(4; 4)$, $(4; 7)$, $(5;\ 2)$, $(5\ ; 5)$, $(5; 8)$, $(6; 0)$, $(6; 3)$, $(6; 6)$, $(7; 1)$, $(7; 4)$, $(7; 7)$, $(8; 2)$, $(8; 5)$, $(8; 8)$.

B. Résolution d'une équation

1) $(3; 5)$ est une équation particulière de (E).
2) Les solutions de (E) sont les couples $(x; y)$ d'entiers relatifs tels que : $x = 4k + 3$
et $y = 7k + 5$, k étant un entier relatif quelconque.
3) Solution unique $(3; 5)$.

C. Une propriété des points situés sur la diagonale du réseau

1) $\mathrm{M}(x; y) \in [\mathrm{OA}] \Leftrightarrow \exists k \in [0; 1], \overrightarrow{\mathrm{OM}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$;

$\Leftrightarrow \exists k \in [0;1], \begin{cases} x = ka \\ y = kb \end{cases}$;

$\Leftrightarrow \exists k \in [0;1],\ \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = k$,
$0 \leq x \leq a$; $0 \leq y \leq b$;

$\Leftrightarrow ay = bx$; $0 \leq x \leq a$; $0 \leq y \leq b$.

2) $ay = bx$; a et b étant premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, b divise y et a divise x. Avec les conditions $0 \leq x \leq a$; $0 \leq y \leq b$, on déduit que $x = a$ ou $x = 0$, et $y = b$ ou $y = 0$. Parmi les points du réseau, les seuls qui sont situés sur la diagonale [OA] sont O et A.

3) Soit d de PGCD de a et b. Posons : $a = a'd$ et $b = b'd$, avec a' et b' premiers entre eux.
On a : $0 < a' < a$; $0 < b' < b$ et $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = d$, d'où : $ab' = ba'$. Par suite le point de coordonnées $(a'; b')$ est un point du réseau qui appartient à la diagonale [OA] qui est distinct de O et de A.

SITUATION COMPLEXE

82. Les corps célestes
Solution

1) Les préoccupations exprimées par l'astronome sont de trois ordres :
   a. Déterminer la date exacte de la prochaine apparition simultanée des deux corps célestes ;
   b. Déterminer le nombre de jours qui s'écouleront entre le 7 décembre 2019 et la date de la prochaine apparition simultanée des deux corps ;
   c. Déterminer au cas où il rate la première date, le nombre de jours minimum qu'il devra attendre jusqu'à la prochaine apparition simultanée des deux astres.

2) Les parties du d'arithmétique qui peuvent être utilisées pour résoudre les problèmes posés par l'astronome :
   a. Multiple ;
   b. Congruence ;
   c. Théorème de Bézout ;
   d. Théorème de Gauss ;

3) Résolution des préoccupations soulevées par l'astronome

Soit :

- u le nombre de périodes effectuées par le corps A entre le 7 décembre 2019 et le jour de la prochaine apparition simultanée des deux corps célestes ;
- v le nombre de périodes effectuées par le corps B entre le 7 décembre 2019 et le jour de la prochaine apparition simultanée des deux corps célestes ;

Le corps A aura effectué $105u$ jours entre ces deux dates et le corps B aura effectué $81v + 6$ jours, puisqu'il y a 6 jours de décalage (entre le 7 décembre et le 13 décembre de la même année).

A la prochaine apparition simultanée des deux corps, on aura : $105u = 81v + 6$. Ce qui donne :
(E), $35u - 27v = 2$.
Une solution particulière de (E) est (–20 ; –26). En utilisant le théorème de Gauss, la solution générale de l'équation (E) est constituée les couples (u, v) tels que : $u = 27k - 20$ et $v = 35k - 26$, où k est un entier relatif quelconque. Les deux corps auront fait chacun $105(27k - 20)$ jours, soit $2835k - 2100$ jours.

Pour k égal à 1, on a le nombre minimum de jours qui s'écouleront entre le 7 décembre et la date de la prochaine apparition simultanée des deux corps, soit 735 jours.

Le 7 décembre 2019 était un samedi. Jusqu'au 31 décembre 2019, il y a eu 24 jours. L'année 2020 est une année bissextile, donc compte 366 jours. Au 31 décembre 2020, il se sera écoulé un nombre de jours égal à $24 + 366 = 390$. C'est le 345ème jour de 2021 qui sera la date de cette apparition simultanée. Ce sera le 11 décembre 2021 que les corps célestes A et B apparaitront simultanément.

Si pour des contraintes de temps, l'astronome n'a pu observer le moment de l'apparition simultanée des deux astres, il le pourra (si Dieu lui donne la vie) à la valeur correspondante de k égal à 2, soit :
$2835\times2- 2100 = 3570$. Or, il s'est écoulé 735 jours depuis le 7 décembre 2019 jusqu'au 11 décembre 2021. Il restera 2835 jours. Dans le cas où l'astronome rate la date du 11 décembre 2021, il devra encore attendre 2835 jours pour voir l'apparition simultanée des deux corps A et B.

7 ISOMÉTRIES DU PLAN

1 SITUATION D'APPRENTISSAGE

L'approche pédagogique et la didactique est celle de l'APC. Pour le déroulement de la situation, vous pouvez vous inspirer du tableau suivant.

Constituants de la situation	Exemples de questions possibles	Réponses possibles des élèves
Contexte	Où ou quand se déroule la scène ?	Dans une menuiserie
Circonstances	Indique le problème à résoudre par le menuisier	Le menuisier est confronté à la recherche autour duquel la table peut pivoter
Tâche	Qu'est-ce que les élèves ont-ils décidé de faire une fois retournés au lycée ?	Retournés au lycée, les élèves ont décidé de faire des recherches pour résoudre le problème auquel se trouvent confrontés les élèves

Conseils généraux

Le cours débutera par un contrôle de prérequis sur les composées de deux symétries orthogonales d'axes sécants ou parallèles pour faciliter la décomposition d'une translation et d'une rotation en produit de symétries orthogonales.

Les différentes natures des composées peuvent être utilisées dans les exercices et les évaluations sans démonstration.

Dans les classes antérieures, les élèves ont été entrainés à utiliser les translations, les symétries orthogonales et les rotations pour résoudre des problèmes de géométrie. En terminale, on poursuivra cet entrainement en utilisant une isométrie ou la composée de deux isométries pour construire une figure géométrique, démontrer une propriété et rechercher un lieu géométrique.

Les composées d'isométries doivent être suggérées lors des contrôles continus sauf à l'occasion des séances de travaux dirigés où l'élève apprendra à trouver lui-même cette isométrie.

2 DÉCOUVERTE DES HABILETÉS

I. Définition d'une isométrie et propriétés

Activité 1 : définition d'une isométrie

Cette activité est introductive à la leçon sur les isométries. L'application f donnée est une homothétie de rapport k. L'activité prouve que cette homothétie est une isométrie si et seulement si $k = 1$ ou $k = -1$.

Démonstration

1) En faisant M=A, on a A'= B.
2) $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{A'N'} - \overrightarrow{A'M'}$
   $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.
3) f conserve la distance si et seulement si $k = 1$ ou $k = -1$.

Exercice de fixation

Exercice

Solution

1) Vrai ; 2) Faux ; 3) Faux

Activité 2 : Conservation du produit scalaire

La conservation du produit scalaire sera utilisée dans la démonstration du barycentre.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$ est un prérequis.

Démonstration

1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$
2) $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'} = \frac{1}{2}(A'B'^2 + A'C'^2 - B'C'^2)$
3) Egalité vraie par conservation de la distance.
4) $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{A'B'}.(\overrightarrow{A'D'} - \overrightarrow{A'C'})$
   $= \overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'D'} - \overrightarrow{\overrightarrow{A'B'}.A'C'}$
   $= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
   $= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$
5) Toute isométrie conserve le produit scalaire.

Exercice de fixation

Exercice

Réponse

1) Vrai ; 2) Vrai ; 3) Faux

Les propriétés de conservation débutent avec le barycentre et le produit scalaire.

Activité 3 : Conservation du barycentre

Compte tenu de la complexité de la démonstration, en classe, vous pouvez la faire dans le cas où $n = 2$ ou $n = 3$.

Démonstration

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{G'A_i'}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \overrightarrow{G'A_i'}^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} \overrightarrow{G'A_i'}.\overrightarrow{G'A_j'}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \overrightarrow{GA_i}^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} \overrightarrow{GA_i}.\overrightarrow{GA_j}\text{ , par conservation du produit scalaire.}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i}\right)^2$$

$$= \vec{0}.\text{ Car G est barycentre de }(\mathrm{A}_i, \alpha_i)_{1\leq i\leq n}.$$

D'où le résultat.

Exercice de fixation

Exercice 1

Solution

Le milieu I d'un segment [AB] est le barycentre de (A, 1) et (B, 1).

Exercice 2

Réponse

1) Faux ; 2) Vrai ; 3) Faux ; 4) Vrai

Activité 4 : Toute isométrie est une transformation du plan

L'objectif de cette activité est de démontrer que toute isométrie est une transformation du plan. C'est-à-dire une bijection du plan sur lui-même. De fait une isométrie(affine) est une application affine bijective (transformation affine) dont l'application linéaire associée est une isométrie vectorielle. Rappelons également une isométrie vectorielle est une application du plan vectoriel dans lui-même qui conserve le produit scalaire.

L'activité démontre également que la bijection réciproque d'une isométrie est une isométrie. Cette démonstration la définition d'une isométrie et celle de la composée d'une bijection et de sa réciproque.

Démonstration

1) Soit M et N deux points du plan tels que : f(M) = f(N).

D'où : $f(M)f(N) = 0$. L'isométrie f conservant la distance, on a : $f(M)f(N) =$ MN, Par suite : MN= 0. On en déduit que : M = N. L'application f est donc injective.

2) a) On a : O'I'= OI, O'J'= OJ car f conserve la distance. On a également : $\overrightarrow{O'I'}.\overrightarrow{O'J'} = \overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OJ}$ car f conserve le produit scalaire. On en déduit que (O', I', J') est un repère orthonormé du plan.

b) $\overrightarrow{O'M'} = x\overrightarrow{O'I'} + y\overrightarrow{O'J'}$

$= x(\overrightarrow{M'I'} - \overrightarrow{M'O'}) + y(\overrightarrow{M'J'} - \overrightarrow{M'O'})$.

D'où : $(1 - x - y)\overrightarrow{M'O'} + x\overrightarrow{M'I'} + y\overrightarrow{M'J'} = \vec{0}$. On a : $(1 - x - y) + x + y \neq 0$. On en déduit que M'est le barycentre des points pondérés (O', $1 - x - y$), (I', x) et (J', y).

c) M'est l'image de M par f car f étant une isométrie conserve le barycentre.

d) Tout point M'du plan ayant un antécédent par f, l'application f est surjective.

e) f étant injective et surjective est une bijection du plan sur lui-même, donc une transformation du plan.

3) Soit M et N deux points du plan. On a :

$f(f^{-1}(M))f(f^{-1}(N)) = f^{-1}(M)f^{-1}(N)$, car f conserve la distance.

$f(f^{-1}(M))f(f^{-1}(N)) = MN$, car $f0f^{-1}$ est l'identité du plan.

On en déduit que f^{-1} est une isométrie du plan.

4) Voir Récapitulons

Exercice de fixation

Exercice 5

Solution

1) La symétrie orthogonale étant une isométrie est bijective.
2) Toute homothétie de rapport différent de 1 et -1.

Activité 5 : Images de figures simples

La détermination des images de figures simples (droite, demi-droite, segment, cercle) permettra d'achever les propriétés de conservation.

Les prérequis sur la caractérisation de droite, demi-droite, segment à l'aide des barycentres est nécessaire.

a) La droite (AB) est l'ensemble des barycentres des points A et B ;
b) La demi-droite [AB) est l'ensemble des barycentres des points pondérés (A, $1-\lambda$) et (B, λ), où λ décrit $\mathbb{R}_+$;
c) Le segment [AB] est l'ensemble des barycentres des points pondérés (A, $1-\lambda$) et (B, λ), où λ décrit $[0;1]$.

Démonstration

1) a) (D) est la droite (AB). Un point M appartient à (D) si et seulement s'il existe un nombre réel λ tel que : $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$. Par suite : $\overrightarrow{AM} = \lambda(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA})$. On en déduit que : $(1-\lambda)\overrightarrow{MA} - \lambda\overrightarrow{MB} = \vec{0}$. Le point M est donc le barycentre des points pondérés (A, $1-\lambda$) et (B, λ).

b) L'image du point M par f est le point M'car f conserve le barycentre.

Les points A et B étant distincts, leurs images respectives par f sont également distinctes. M'étant le barycentre des points pondérés (A', $1-\lambda$) et (B', λ) appartient à la droite (A'B'). Par suite : f(D) ⊆ (A'B').

c) Raisonnez comme au a).

d) M'est l'image de M par f car f conserve le barycentre. Par suite : (A'B') ⊆f(D).

e) De b) et d), on conclut que l'image de la droite (AB) par f est la droite (A'B').

2) Un point M appartient à la demi-droite [AB) si et seulement s'il existe un nombre réel λ appartenant à $\mathbb{R}_+$ tel que : $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

Tout le reste suite la même démarche qu'au 1). On a abouti à : « L'image de la demi-droite [AB) par l'isométrie f est la demi-droite [A'B'), où A'$= f$(A) et B'$= f$(B).

3) Un point M appartient à la demi-droite [AB) si et seulement s'il existe un nombre réel λ appartenant à [0 ;1] tel que : $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

Tout le reste suite la même démarche qu'au 1). On a abouti à : « L'image du segment [AB] par l'isométrie f est le segment [A'B'], où A'$= f$(A) et B'$= f$(B).

4) Soit M un point de (C). On a : OM$= r$. Si M'l'image de M par f, alors on a : O'M'$= r$. Car f conserve la distance. Par suite M'appartient au cercle (C') de centre O' et de rayon r. On en déduit que : f(C)⊆ (C').

Réciproquement, soit M'un point de (C'). On a : O'M'$= r$. L'isométrie f étant une bijection du plan, il existe un unique point M du plan tel que : $f(\mathrm{M}) = \mathrm{M}'$. D'où : $\mathrm{OM} = \mathrm{O'M'}$. Car f conserve la distance. Puisque : O'M'$= r$, on en déduit que : $\mathrm{OM} = r$. Le point appartient donc au cercle (C). Par suite : $(C') \subseteq f(C)$. On conclut que l'image du cercle (C) par f est le cercle (C').

Exercice de fixation

Exercice 6

1) Soit (C) un cercle de centre O et de rayon R. Démontre toute rotation r de centre O transforme le cercle (C) en lui-même.
2) Soit (D) une droite et s la symétrie orthogonale d'axe (D). Démontre que tout M de (D) est sa propre image par s.
3) Soit A, B, C trois points d'une droite (D) et A', B', C' les images respectives des points A, B, C par une isométrie i.
   Démontre que les points A', B', C' sont alignés.

Solution

1) L'image (C) par r est le cercle de centre r(O) et de rayon r. Or r(O) est égal à O, donc l'image de (C) par r est (C).

On dit que toute rotation r de centre O laisse le cercle (C) globalement invariant.

2) Immédiat.
   Pour tout point M de (D), s(M)= M. On dit que M est invariant par s ou que s laisse M invariant. La droite (D) est dite invariante point par point s ou (D) est un ensemble de points invariants par s.
   On prouvera dans la classification des isométries à l'aide des points invariants que (D) est l'ensemble des points invariants par la symétrie orthogonale s.
3) Les points A, B, C appartiennent à la droite (D), il en résulte que leurs images par l'isométrie i appartiennent à l'image (D') de (D) par r. Les points A', B', C' sont donc alignés. On dit que l'isométrie conserve l'alignement.

Le vocabulaire suivant doit être introduit après la correction de l'exercice ci-dessus.

Vocabulaire

- Lorsqu'un point A a pour image par une transformation du plan f le point A, on dit que A est invariant par f ou que f laisse A invariant.
- Lorsqu'un ensemble (F) a pour image par une transformation du plan f le même ensemble (F), on dit que (F) est globalement invariant par f ou que f laisse (F) globalement invariant.
- Lorsque tout point d'un ensemble (F) est invariant par une transformation du plan f, On dit que (F) est invariant point par point par f ou que (F) est un ensemble de points invariants par f.

Activité 6 : Conservation de la mesure des angles, du parallélisme et de l'orthogonalité

La conservation de l'orthogonalité découle de la conservation des mesures des angles par une isométrie.

De cette même conservation des mesures des angles découle la conservation du parallélisme en prenant $\widehat{BAC}$ nul ou plat. Une démonstration déduite de la conservation de l'orthogonalité est proposée. Vous avez la possibilité de faire autrement.

En prérequis, on a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$, la conservation du produit scalaire et la définition d'une isométrie.

Démonstration

1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$; $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'} = A'B' \times A'C' \times \cos\widehat{B'A'C'}$. L'isométrie f conservant le produit scalaire et la distance, on a : $\cos\widehat{BAC} = \cos\widehat{B'A'C'}$. On en déduit que : $\text{mes}\widehat{BAC} = \text{mes}\widehat{B'A'C'}$.
2) Soit A le point d'intersection de (D) et (Δ), B un point de (D) et C un point de (Δ). L'angle $\widehat{BAC}$ est droit, par suite son image $\widehat{B'A'C'}$ est droit d'après 1). On en déduit que (D') et (Δ') sont orthogonales.
3) Soit (R) une perpendiculaire commune aux droites (D) et (Δ). La droite (R'), image de (R) par f, est une perpendiculaire aux droites (D') et (Δ') d'après 2). On en déduit que (D') et (Δ') sont parallèles.

Exercice de fixation

Exercice

Réponses

1) Vrai ; 2) Faux ; 3) Faux.

Activité 7 : Conservation du contact

Il s'agit de la conservation du contact par une isométrie. Globalement « deux courbes qui un seul point de contact ont pour images par une isométrie deux courbes qui ont un seul point de contact »

Démonstration

1) A appartenant à (D) et (Γ), son image A' par f appartient à (D') et (Γ'). Raisonnons par l'absurde que A' est le seul point d'intersection de (D') et (Γ'). Supposons qu'il existe un point M'distinct de A' appartenant à (D') et (Γ'). Il existerait un point P appartenant à (D) et un point Q appartenant à (Γ) tel que f(P)=M'et f(Q) =M'. Par suite P est égal à Q car f est une bijection. On en déduit que P appartient à (D) et (Γ). D'où P est égal à A. Par suite f(P)= f(A). Ce qui est impossible car M'est distinct de A'. On conclut que les courbes (D') et (Γ') sont tangents en A'.

2) (C_1) et (C_2) étant tangents en B, il existe une droite tangente commune (Δ) à (C_1) et (C_2) en B. D'après 1) l'image (Δ') de (Δ) par f est tangente commune à (C_1') et (C_2') en B'. D'où le résultat.

Exercice de fixation

Soit (C) et (Γ) deux courbes tangentes en un point A et f une isométrie du plan. Démontre que *f*(C) et *f*(Γ) sont deux courbes tangentes en *f*(A).

Solution

Les deux courbes (C) et (Γ) étant tangentes en un point A, il existe une droite (D) tangente en A aux courbes (C) et (Γ). L'isométrie conservant le contact, f(D) est tangente en f(A) aux courbes *f*(C) et *f*(Γ). D'où le résultat.

II. Composition d'isométries

Activité 8 : Composée de deux isométries

Soit f et g deux isométries du plan. Démontre que $g0f$ est une isométrie du plan.

Démonstration

Soit M et N deux points du plan. On a :

$g0f(\mathrm{M})g0f(\mathrm{N}) = g\big(f(\mathrm{M})\big)g(f(\mathrm{N}))$

$g\big(f(\mathrm{M})\big)g(f(\mathrm{N})) = f(\mathrm{M})f(\mathrm{N})$. Car g est une isométrie

$f(\mathrm{M})f(\mathrm{N}) = \mathrm{MN}$. Car f est une isométrie.

Par suite : $g0f(\mathrm{M})g0f(\mathrm{N}) = \mathrm{MN}$.

On conclut que $g0f$ est une isométrie.

Exercice de fixation

Exercice

Solution

1) 2) et 3) Ce sont des isométries comme composée d'isométries.

Les deux propriétés de décomposition en produit de symétries orthogonales d'une translation et d'une rotation situées dans cette partie serviront dans la composée des isométries. Le produit de deux symétries orthogonales n'est pas en général commutatif.

Activité 9 : Décomposition d'une translation

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$. Soit (D) une droite quelconque de direction orthogonale à $\vec{u}$.

Il faut faire remarquer aux élèves que dans la décomposition $t_{\vec{u}} = S_{(\Delta)} 0 S_{(D)}$, la première symétrie orthogonale est $S_{(D)}$. L'axe (Δ) de la seconde est définie par : $(\Delta) = t_{\frac{1}{2}\vec{u}}$(D).

Démonstration

1) a) Par définition de (Δ), cette droite est parallèle à (D). On sait que la composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles est une translation. (A rappeler en prérequis) dont le vecteur $\vec{v}$ est normal aux axes. Si A est un point de (D) et B le projeté orthogonal de A sur (Δ), alors : $\vec{v} = 2\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. Par suite $\vec{v} = \vec{u}$.

   b) Soit (D') une droite telle que : $S_{(\Delta)} 0 S_{(D)} = t_{\vec{u}} = S_{(D')} 0 S_{(D)}$. Par suite :

$S_{(\Delta)} 0 S_{(D)} 0 S_{(D)} = S_{(D')} 0 S_{(D)} 0 S_{(D)}$. En utilisant l'associativité de la composition des applications, et l'involution de la symétrie orthogonale, on a : $S_{(\Delta)} = S_{(D')}$. Il en résulte que : (Δ) = (D').

2) Même démarche que dans 1).
3) Voir propriété.

Exercice de fixation

Exercice

Solution

1) $t_{\overrightarrow{AB}} = S_{(IJ)} 0 S_{(AD)}$; $t_{\overrightarrow{AB}} = S_{(BC)} 0 S_{(IJ)}$.
2) $t_{\overrightarrow{AD}} = S_{(JL)} 0 S_{(AB)}$; $t_{\overrightarrow{AD}} = S_{(DC)} 0 S_{(JL)}$.

Activité 10 : Décomposition d'une rotation

Il faut faire remarquer aux élèves que dans la décomposition d'une rotation en produit de symétries orthogonales, les deux axes passent par le centre de la rotation.

Démonstration

1) a) Par définition de (Δ), cette droite est sécante à (D) en O. On sait que la composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants est rotation dont le centre est le point d'intersection des deux droites (A rappeler en prérequis) et dont l'angle orienté $\hat{\beta}$ tel que $2(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \hat{\beta}$. Par suite : $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$.
   b) Soit (Δ') une droite telle que : $S_{(\Delta)} 0 S_{(D)} = r = S_{(\Delta')} 0 S_{(D)}$. Par suite :

$S_{(\Delta)} 0 S_{(D)} 0 S_{(D)} = S_{(\Delta')} 0 S_{(D)} 0 S_{(D)}$. En utilisant l'associativité de la composition, et l'involution de la symétrie orthogonale, on a : $S_{(\Delta)} = S_{(\Delta')}$. D'où : $(\Delta) = (\Delta')$.

2) Même démarche que 1).
3) Voir propriété

Exercice de fixation

Exercice

Solution

1) $r(\text{O}, \frac{\pi}{2}) = S_{(JL)} 0 S_{(BD)} = S_{(IK)} 0 S_{(AC)}$.
2) $S_O = S_{(JL)} 0 S_{(IK)} = S_{(BD)} 0 S_{(AC)}$

Activité 11 : Composée d'une rotation et d'une translation

L'objectif est de déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la composée d'une rotation et d'une translation.

Le prérequis sur la décomposition d'une translation et d'une rotation en produit de symétries orthogonales est nécessaire.

Démonstration

1) Ecrivons les décompositions : $t_{\vec{u}} = S_{(D')} 0 S_{(D)}$ et $r = S_{(D)} 0 S_{(\Delta)}$ de telle sorte que :

$t_{\vec{u}} 0 r = S_{(D')} 0 (S_{(D)} \ 0 S_{(D)}) 0 S_{(\Delta)} = S_{(D')} 0 S_{(\Delta)}$. Car $S_{(D)} 0 S_{(D)}$ est l'application identique du plan.

Caractérisons ces différentes droites :

- La droite (D) doit être choisie de façon à tenir compte de la décomposition de $t_{\vec{u}}$ et de celle de r : (D) passe par O et est de direction orthogonale à celle de $\vec{u}$.
- La droite (D′) est définie par : (D′) = $t_{\frac{1}{2}\vec{u}}$(D).
- La droite (Δ) est telle que si $\vec{v}$ est un vecteur directeur de (Δ) et $\vec{w}$ un vecteur directeur de (D), on a : $2\left(\widehat{v, \vec{w}}\right) = \hat{\alpha}$.

(D) et (D′) étant parallèles, la droite (Δ), sécante à (D), est sécante à (D′) en un point Ω.

La droite (Δ) étant sécante à (D′) en Ω, $t_{\vec{u}} 0 r$ est une rotation de centre Ω. Quel est son angle ?

Les droites (D) et (D′) étant parallèles, $\vec{w}$ est aussi un vecteur directeur de (D′). Par suite l'angle orienté de $t_{\vec{u}} 0 r$ est $2\left(\widehat{v, \vec{w}}\right)$. D'où le résultat.

2) La démarche est analogue.
3) On obtient la rotation r.

Exercice de fixation

Exercice

Solution

Posons : $f = r\left(\text{C}, -\frac{\pi}{2}\right) 0 t_{\overrightarrow{AB}}$.

La composée de la rotation $r\left(\mathrm{C},-\frac{\pi}{2}\right)$ d'angle $-\frac{\pi}{2}$ non nul et de la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$ est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$, de centre Ω à déterminer.

Première méthode

Il suffit de déterminer les images de deux par f.

$f(\mathrm{A}) = \mathrm{D}$; $f(\mathrm{D}) = \mathrm{C}$. Par suite Ω est le point d'intersection des médiatrices de [AD] et [DC]. Ce qui donne (JL)∩ (IK) = {O}. Le centre de cette rotation est O.

Deuxième méthode

Ecrivons $r\left(\mathrm{C},-\frac{\pi}{2}\right)$ et $t_{\overrightarrow{AB}}$ comme composée de deux symétries orthogonales avec un axe en commun.

$r\left(\mathrm{C},-\frac{\pi}{2}\right) = S_{(AC)}0S_{(BC)}$; $t_{\overrightarrow{AB}} = S_{(BC)}0S_{(IK)}$. Par suite : $f = S_{(AC)}0S_{(IK)}$.

Les droites (IK) et (AC) étant sécantes en O, f est la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Activité 12 : Composée d'une translation et d'une symétrie orthogonale

Pour cette activité, le prérequis sur la décomposition d'une translation en produit de symétries orthogonales est nécessaire.

Démonstration

1) a) $\vec{u}$ étant un vecteur normal à (D), on a : $t_{\vec{u}} = S_{(D')}0S_{(D)}$, où : (D')= $t_{\frac{1}{2}\vec{u}}$(D). Par suite : $t_{\vec{u}}0S_{(D)} = S_{(D')}$.
b) $\vec{u}$ étant un vecteur normal à (D), on a : $t_{\vec{u}} = S_{(D)}0S_{(D'')}$, où : (D'')= $t_{-\frac{1}{2}\vec{u}}$(D). Par suite : $S_{(D)}0t_{\vec{u}} = S_{(D'')}$.

2) a) Soit (δ) la direction de (D) et (δ') la direction orthogonale à (δ). Soit $\vec{\imath}$ un vecteur unitaire de (δ) et $\vec{\jmath}$ un vecteur unitaire de (δ'). $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est une base orthonormée de l'ensemble des vecteurs du plan. Il existe un unique couple (x,y) de nombres réels tels que : $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$. En choisissant $\vec{v} = x\vec{\imath}$ et $\vec{w} = y\vec{\jmath}$, on a le résultat demandé.

b) $\vec{w}$ est un vecteur normal à (D). D'après 1)a), $t_{\vec{w}}0S_{(D)} = S_{(D')}$, où : (D')= $t_{\frac{1}{2}\vec{w}}$(D).

c) $\vec{w}$ est un vecteur normal à (D). D'après 1)b), $\left(S_{(D)}0t_{\vec{w}}\right) = S_{(D'')}$, où : (D'')= $t_{-\frac{1}{2}\vec{w}}$(D).

3) a) $t_{\vec{u}}0S_{(D)} = t_{\vec{v}}0\left(t_{\vec{w}}0S_{(D)}\right) = t_{\vec{v}}0S_{(D')}$.

b) $S_{(D)}0t_{\vec{u}} = \left(S_{(D)}0t_{\vec{w}}\right)0t_{\vec{v}} = S_{(D'')}0t_{\vec{v}}$.

4)a) Soit M un point du plan.

Si M appartient à (Δ), alors $t_{\vec{v}}0S_{(\Delta)}(\mathrm{M}) = t_{\vec{v}}(\mathrm{M})$ et $S_{(\Delta)}0t_{\vec{v}}(\mathrm{M}) = S_{(\Delta)}\big(t_{\vec{v}}(\mathrm{M})\big)$. Le point $t_{\vec{v}}(\mathrm{M})$ appartient à (Δ) car $\vec{v}$ est un vecteur directeur de (Δ). Par suite $S_{(\Delta)}\big(t_{\vec{v}}(\mathrm{M})\big) = t_{\vec{v}}(\mathrm{M})$. D'où : $t_{\vec{v}}0S_{(\Delta)}(\mathrm{M}) = S_{(\Delta)}0t_{\vec{v}}(\mathrm{M})$.

Si M n'appartient pas à (Δ), alors les points M, $t_{\vec{v}}(\mathrm{M})$, $S_{(\Delta)}\big(t_{\vec{v}}(\mathrm{M})\big)$ et $S_{(\Delta)}(\mathrm{M})$ sont les sommets d'un rectangle. On en déduit que $t_{\vec{v}}0S_{(\Delta)}(\mathrm{M}) = S_{(\Delta)}0t_{\vec{v}}(\mathrm{M})$.

b) Supposons que $t_{\vec{v}}0S_{(\Delta)}$ admette un point invariant A.

- A appartient à (Δ).

  $t_{\vec{v}}0S_{(\Delta)}(\mathrm{A}) = t_{\vec{v}}(\mathrm{A})$; $t_{\vec{v}}(\mathrm{A})$ ne peut être égal à A sinon $\vec{v}$ serait nul et $\vec{u}$ étant égal à $\vec{w}$ serait un vecteur normal à (D). Par suite A ne peut appartenir à (Δ).

- A n'appartient pas à (Δ).

$$t_{\vec{v}}0S_{(\Delta)}(\mathrm{A}) = \mathrm{A} \Leftrightarrow \begin{cases} S_{(\Delta)}(\mathrm{A}) = \mathrm{B} \\ t_{\vec{v}}(\mathrm{B}) = \mathrm{A} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\Delta) \text{ méd de } [\mathrm{AB}] \\ \overrightarrow{\mathrm{BA}} = \vec{v} \end{cases}$$

Ce système est impossible car $\vec{v}$ est un vecteur directeur de (Δ).

d) Si $t_{\vec{v}}0S_{(\Delta)}$ est une translation $t_{\vec{s}}$, alors $S_{(\Delta)}$ serait égal à $t_{\vec{v}-\vec{s}}$. Impossible. $t_{\vec{v}}0S_{(\Delta)}$ est une isométrie comme composée d'isométries.

Pour la symétrie glissée $t_{\vec{u}}0S_{(D)}$, on a : $t_{\vec{u}}0S_{(D)} = t_{\vec{v}}0S_{(\mathrm{D}')} = S_{(\mathrm{D}')}0t_{\vec{v}}$, où $\vec{v}$ est un vecteur directeur de (D'). Le vecteur $\vec{v}$ est unique, la droite (D') est unique comme image de (D) par la translation $t_{\frac{1}{2}\vec{w}}$. Cette écriture $t_{\vec{v}}0S_{(\mathrm{D}')}$ s'appelle la **décomposition canonique** de la symétrie glissée $t_{\vec{u}}0S_{(D)}$.

La droite (D') est l'axe et le vecteur $\vec{v}$ le vecteur de la symétrie glissée $t_{\vec{u}}0S_{(D)}$.

L'axe de la symétrie glissée $S_{(D)}0t_{\vec{u}}$ est (D'') et le vecteur de cette symétrie glissée est $\vec{v}$.

Exercice de fixation

Exercice1

Solution

Nature de $t_{\overrightarrow{AD}}0S_{(AB)}$

$t_{\overrightarrow{AD}}0S_{(AB)}$ étant la composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation dont le vecteur est normal à l'axe de la symétrie est une symétrie orthogonale dont l'axe est parallèle à (AB).

Axe de $t_{\overrightarrow{AD}}0S_{(AB)}$

Pour déterminer l'axe de $t_{\overrightarrow{AD}} 0 S_{(AB)}$, il suffit d'avoir l'image d'un point.

L'image par $t_{\overrightarrow{AD}} 0 S_{(AB)}$ de A est D. L'axe de cette symétrie orthogonale est donc la parallèle (Δ) à (AB) passant par O.

Autre méthode de détermination de l'axe de $t_{\overrightarrow{AD}} 0 S_{(AB)}$.

Décomposons $t_{\overrightarrow{AD}}$ en produit de symétries orthogonales.

$t_{\overrightarrow{AD}} = S_{(\Delta)} 0 S_{(AB)}$, où (Δ) est la parallèle à (AB) passant par O.

$t_{\overrightarrow{AD}} 0 S_{(AB)} = S_{(\Delta)} 0 (S_{(AB)} 0 S_{(AB)})$; d'où : $t_{\overrightarrow{AD}} 0 S_{(AB)} = S_{(\Delta)}$.

Exercice 2

Solution

Nature de $t_{\overrightarrow{AC}} 0 S_{(AB)}$

$t_{\overrightarrow{AC}} 0 S_{(AB)}$ étant la composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation dont le vecteur n'est pas normal à l'axe de la symétrie est une symétrie glissée.

Axe et vecteur de la symétrie glissée $t_{\overrightarrow{AC}} 0 S_{(AB)}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; d'où : $t_{\overrightarrow{AC}} 0 S_{(AB)} = t_{\overrightarrow{AB}} 0 (t_{\overrightarrow{BC}} 0 S_{(AB)})$

$t_{\overrightarrow{BC}} 0 S_{(AB)}$ est la composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation dont le vecteur est normal à l'axe de cette symétrie. Par suite $t_{\overrightarrow{BC}} 0 S_{(AB)}$ est une symétrie orthogonale d'axe parallèle à (AB). L'image de B par $t_{\overrightarrow{BC}} 0 S_{(AB)}$ étant C, $t_{\overrightarrow{BC}} 0 S_{(AB)}$ est la symétrie orthogonale d'axe la parallèle (Δ) à (AB) passant par O. Il suit que : $t_{\overrightarrow{AC}} 0 S_{(AB)} = t_{\overrightarrow{AB}} 0 S_{(\Delta)}$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ étant un vecteur directeur de (Δ), on en déduit que $t_{\overrightarrow{AB}} 0 S_{(\Delta)}$ est la décomposition canonique de la symétrie glissée $t_{\overrightarrow{AC}} 0 S_{(AB)}$. En conclusion : $t_{\overrightarrow{AC}} 0 S_{(AB)}$ est la symétrie glissée de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et d'axe (Δ).

Activité 13 : Composée d'une rotation et d'une symétrie orthogonale

Soit r une rotation de centre O et d'angle orienté $\hat{\alpha}$ non nul et $S_{(D)}$ une symétrie orthogonale d'axe (D). Il s'agit de démontrer que la composée de r et de $S_{(D)}$ est une symétrie orthogonale si O appartient à (D) et une symétrie glissée, sinon.

Le prérequis sur la décomposition d'une rotation en produit de symétries orthogonales est nécessaire.

Démonstration

1)a) En écrivant $r = S_{(D)} 0 S_{(\Delta)} = S_{(D')} 0 S_{(D)}$, on a : $r 0 S_{(D)} = S_{(D')}$ et $S_{(D)} 0 r = S_{(\Delta)}$.

b) Dans le cas où l'angle orienté $\hat{\alpha}$ est nul, $r 0 S_{(D)} = S_{(D)}$ et $S_{(D)} 0 r = S_{(D)}$.

2)a) $r = S_{(\Delta')} 0 S_{(\Delta)} = S_{(\Delta)} 0 S_{(\Delta'')}$.

b) $r 0 S_{(D)} = S_{(\Delta')} 0 t_{\vec{u}}$, où $\vec{u}$ est un vecteur normal à (D).

$S_{(D)} 0 r = t_{-\vec{u}} 0 S_{(\Delta'')}$.

Puisque l'angle orienté $\hat{\alpha}$ est non nul, le vecteur $\vec{u}$ n'est normal ni à (Δ') ni à (Δ''), il en découle que $r 0 S_{(D)}$ et $S_{(D)} 0 r$ sont des symétries glissées.

Exercice de fixation

Exercice

Solution

1) $r(\mathrm{A}, \frac{\pi}{2}) 0 S_{(AB)}$ étant la composée d'une symétrie orthogonale et d'une rotation dont le centre appartient à l'axe (AB) est une symétrie orthogonale dont l'axe (Δ) passe par A. L'image de B par $r(\mathrm{A}, \frac{\pi}{2}) 0 S_{(AB)}$ étant D, le milieu O de [BD] appartient à (Δ). On en déduit que (Δ) est la droite (AC).
   Autre méthode
   En écrivant $r\left(\mathrm{A}, \frac{\pi}{2}\right) = S_{(AC)} 0 S_{(AB)}$, on a le résultat demandé.
2) $r(\mathrm{C}, -\frac{\pi}{2}) 0 S_{(\mathrm{JL})}$, est la composée d'une symétrie orthogonale et d'une rotation dont le centre n'appartient pas à l'axe de cette symétrie. L'isométrie $r(\mathrm{C}, -\frac{\pi}{2}) 0 S_{(\mathrm{JL})}$ est une symétrie glissée.

Activité 14 : Propriété des symétries glissées

Cette activité donne des moyens de déterminer l'axe et le vecteur d'une symétrie glissée dont la décomposition canonique n'est pas donnée.

Démonstration

1) $f = t_{\vec{u}} 0 S_{(D)} = S_{(D)} 0 t_{\vec{u}}$. Par suite : $f 0 f = t_{\vec{u}} 0 (S_{(D)} 0 S_{(D)}) 0 t_{\vec{u}}$. D'où : $f 0 f = t_{2\vec{u}}$.
2) Soit M un point du plan.

- Supposons que M appartienne à (D).
  $f(\mathrm{M}) = t_{\vec{u}} 0 S_{(D)}(\mathrm{M})$
  $= t_{\vec{u}}(\mathrm{M})$, car M appartient à (D).
  Par suite $f(\mathrm{M})$ appartient à (D) car $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (D). On en déduit que le milieu du segment [M f(M)] appartient à (D).
- Supposons que M n'appartienne pas à (D).

Soit P, M', Q les images respectives de $t_{\vec{u}}(\mathrm{M})$, $f(\mathrm{M})$, $S_{(D)}(\mathrm{M})$. Le quadrilatère MPM'Q est un rectangle. D'après la droite des milieux, le milieu de [MM'] appartient à (D).

Réciproquement, Soit N un point de (D). Il s'agit de démontrer qu'il existe un point M du plan tel que N soit le milieu du segment [M f(M)].

En observant bien la figure dans le cas précédent où M appartient à (D), on peut construire le point M.

On pose : $\mathrm{M} = t_{-\frac{1}{2}\vec{u}}(\mathrm{N})$ et $\mathrm{M}'=t_{\vec{u}}(\mathrm{M})$.

Le point M appartient à (D) car N appartient à (D) et $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (D).

Puisque M appartient à (D) et $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (D), $t_{\vec{u}}(\mathrm{M})$ appartient à (D). Or $f(\mathrm{M}) = t_{\vec{u}} 0 S_{(D)}(\mathrm{M})$, donc $f(\mathrm{M}) = t_{\vec{u}}(\mathrm{M})$, car M appartient à (D). Par construction N est le milieu du segment [M f(M)].

Exercice de fixation

Exercice

Détermine les éléments caractéristiques de la symétrie glissée $r(\mathrm{C}, -\frac{\pi}{2}) 0 S_{(\mathrm{JL})}$.

Solution

Posons : $f = r(\mathrm{C}, -\frac{\pi}{2}) 0 S_{(\mathrm{JL})}$.

Pour déterminer l'axe de f, il suffit de déterminer les images de deux points distincts par cette symétrie glissée.

Déterminons les images de J et B par f.

f(J) = K ; f(B) =C.

Soit M le milieu de [JK]. L'axe de f est la droite (JM) qui est la droite (JK).

Le vecteur $\vec{u}$ de f est déterminé par : $t_{\vec{u}} = S_{(JK)} 0 f$.

Pour déterminer $\vec{u}$, il suffit de déterminer l'image d'un point par $S_{(IJ)} 0 f$.

L'image de J par $S_{(JK)} 0 f$ est K. Par suite : $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{JK}}$.

III. Classification des isométries

La classification des isométries se fera à l'aide de l'ensemble des points invariants et à l'aide des déplacements et antidéplacements.

3.1 Classification des isométries à l'aide de l'ensemble des points invariants

Activité 15 : Isométries laissant invariants trois points non alignés

L'objectif est de démontrer que seule l'application identique du plan laisse invariants trois points non alignés du plan.

Démonstration

Supposons que f ne soit pas l'identité du plan. Il existerait un point M du plan qui est distinct de son image M'par f.

Des égalités $\mathrm{AM} = \mathrm{AM'}$; $\mathrm{BM} = \mathrm{BM'}$ et $\mathrm{CM} = \mathrm{CM'}$ obtenues par conservation de la distance, il résulterait que les points A, B, et C appartiendraient à la médiatrice du segment $[\mathrm{MM'}]$. Ce qui est contraire au fait les points A, B, C ne sont pas alignés. L'hypothèse est absurde, d'où f est l'identité du plan.

Exercice de fixation

Exercice

Solution

Si f est une isométrie qui laisse invariants trois points non alignés du plan, alors f laisse invariant tout point du plan.

Activité 16 : Isométries laissant invariants deux points distincts

L'objectif de l'activité est de caractériser les symétries orthogonales : ce sont les seules isométries dont l'ensemble des points invariants est une droite.

Démonstration

1) Dans ce cas f est l'application identique du plan.
2) a) Par conservation de la distance, on a : AC = AC' et BC= BC'. D'où le résultat.
   b) Trivial.
   c) $S_{(AB)}$ et f laissent invariants sur les trois points non alignés A, B, C. Par suite : $f = S_{(AB)}$.
3) Voir propriété.

Exercice de fixation

Exercice

Solution

Toute isométrie du plan qui laisse invariants deux points distincts et jamais trois points non alignés est une symétrie orthogonale.

Activité 17 : Isométrie laissant invariant un seul point

L'objectif de l'activité est de caractériser les rotations (d'angle non nul) : ce sont les seules isométries qui ne laissent qu'un seul point invariant.

Démonstration

1) a) f n'est manifestement pas l'identité du plan puisqu'elle ne laisse qu'un seul point invariant.
   b) Puisqu'il y a un seul point invariant par f, il existe un point B distinct de A qui n'est pas invariant par f. Il en découle que l'image B' de B par f est distinct B.

2) a) Le point A appartient à (D) car AB=AB'. On a : $S_{(D)}0f(\mathrm{A}) = S_{(D)}(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$;

$S_{(D)}0f(\mathrm{B}) = S_{(D)}(\mathrm{B}') = B$. Par suite A et B sont invariants par $S_{(D)}0f$.

b) Si $S_{(D)}0f$ était l'application identique, alors f serait la symétrie orthogonale d'axe (D). Ce qui est impossible puisque f n'admet qu'un seul point invariant alors que $S_{(D)}$ en admet toute la droite (D) comme ensemble de points invariants.

c) D'après la propriété précédente, $S_{(D)}0f$ est la symétrie orthogonale $S_{(AB)}$ d'axe (AB).

Par suite : $S_{(D)}0S_{(D)}0f = S_{(D)}0S_{(AB)}$. On en déduit que : $f = S_{(D)}0S_{(AB)}$.

d) La droite (AB) étant sécante à (D) en A, f est la rotation de centre A et d'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}})$.

Exercice de fixation

Exercice

Réponses

1) Faux ; 2) Vrai ; 3) Faux.

Activité 18 : Isométrie n'admettant aucun point invariant

On démontre ici que les translations de vecteurs non nuls et les symétries glissées sont les seules isométries planes qui n'admettent pas de point invariant.

Démonstration

1) a) $f(\mathrm{A})= \mathrm{A}'$ et $t_{\overrightarrow{AA'}}(A')$=A, d'où : $t_{\overrightarrow{A'A}}\ 0f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$.
   b) Posons : $g = t_{\overrightarrow{A'A}}\ 0f$. g est une isométrie comme composée de deux isométries.
   On a : $t_{\overrightarrow{AA'}}0g = t_{\overrightarrow{AA'}}0t_{\overrightarrow{A'A}}\ 0f$, par suite : $f = t_{\overrightarrow{AA'}}0g$.
2) Déterminons la nature de f à partir de la nature de g (ou de l'ensemble des points invariants par g).

a) g est l'identité du plan (g laisse invariants trois points non alignés).
Dans ce cas, f est la translation $t_{\overrightarrow{AA'}}$ de vecteur non nul.
b) g est une symétrie orthogonale d'axe (D).
Dans ce cas f, n'admettant pas de point invariant, est une symétrie glissée.
c) g est la rotation de centre A (g a un seul point invariant).

Ce cas est impossible, car f étant la composée d'une translation et d'une rotation **d'angle non nul** serait une rotation et admettrait donc un point invariant. Ce qui est contraire à l'hypothèse sur f.

Exercice de fixation

Exercice

Réponses

1) Vrai ; 2) Faux ; 3) Vrai.

Activité 19 : Ensemble des isométries du plan

Il s'agit ici de récapituler toute l'étude précédente.

Les isométries du plan sont :

- les translations ;
- les rotations ;
- les symétries orthogonales ;
- les symétries glissées

Remarque

L'identité du plan est à la fois une translation de vecteur nul et une rotation d'angle orienté nul et de centre quelconque.

Conséquence

Les translations et les rotations peuvent être décomposées en produit de deux symétries orthogonales.

Les symétries glissées, produit d'une translation et d'une symétrie orthogonale, peuvent être décomposées en produit de trois symétries orthogonales. Il en résulte :

Toute isométrie du plan est soit une symétrie orthogonale, soit la composée de deux symétries orthogonales, soit la composée de trois symétries orthogonales.

3.2 **Classification des isométries à l'aide des déplacements et des antidéplacements**

Activité 20. Définition d'un déplacement et d'un antidéplacement

Cette activité aborde la définition d'un déplacement et d'un antidéplacement et aborde également la classification des isométries en déplacements et antidéplacements.

Démonstration

1) Soit f une isométrie du plan.
   Si f est la composée de deux symétries orthogonales, f conservera les angles orientés.
   Si f est une symétrie orthogonale ou la composée de trois symétries orthogonales, f transformera tout angle orienté en son opposé.
   Aucune isométrie ne peut à la fois transformer tout angle orienté en son opposé et le conserver.
   Si I est l'ensemble des isométries, I^+ (resp. I^-) l'ensemble des isométries qui conservent les angles orientés (transforment les angles orientés en leurs opposés), alors on a : $I = I^+ \cup I^-$.
2) Les isométries qui conservent les angles orientés s'écrivant comme composée de deux symétries orthogonales sont les translations et les rotations.

Les isométries qui transforment les angles orientés en leurs opposés sont les symétries orthogonales et les composées de trois symétries orthogonales. Il s'agit des symétries orthogonales et des symétries glissées.

Exercice de fixation

Exercice

Solution

1) Les seuls déplacements du plan sont les **rotations** et les **translations**.
2) Une symétrie glissée est un **antidéplacement**.
3) Tout déplacement est une **isométrie.**
4) Toute isométrie est soit un **déplacement** soit un **antidéplacement.**
5) Les seuls antidéplacements du plan sont les **symétries orthogonales** et **les symétries glissées.**

Activité 21 : Composée de déplacements et antidéplacements

$(\mathrm{I}^+, 0)$, l'ensemble des déplacements muni de la composition des applications est un groupe non commutatif, sous-groupe de groupe (I, 0) des isométries du plan.

$(\mathrm{I}^-, 0)$, l'ensemble des antidéplacements muni de la composition des applications n'est pas un groupe. Car la loi 0 n'est pas interne dans I^-.

Démonstration

1) gof est une isométrie qui est la composée d'un nombre pair de symétries orthogonales, donc conserve l'orientation. Par suite gof est un déplacement.

2) gof est une isométrie qui est la composée d'un nombre pair de symétries orthogonales, donc conserve l'orientation. Par suite gof est un déplacement.
3) gof est une isométrie qui est la composée d'un nombre impair de symétries orthogonales, donc ne conserve pas l'orientation. Par suite gof est un antidéplacement. De même pour fog.

Exercice de fixation

Exercice

Solution

1) Une translation et une rotation étant des déplacements, leur composée est un déplacement. C'est donc une rotation ou une translation.
2) Une rotation étant un déplacement et une symétrie glissée, un antidéplacement, leur composée est un antidéplacement. C'est donc une symétrie orthogonale ou une symétrie glissée.
3) Même type de raisonnement.

Activité 22 : Réciproque d'un déplacement, d'un antidéplacement

1) Soit $S_{(D)}$, $S_{(\Delta)}$ et $S_{(D')}$ trois symétries orthogonales.

a) Démontre que $S_{(D)}$ est une bijection dont la bijection réciproque est $S_{(D)}$.
b) Démontre que $S_{(D)}0S_{(\Delta)}$ est une bijection dont la bijection réciproque est $S_{(\Delta)}0S_{(D)}$.
c) Démontre que $S_{(D')}0\ S_{(D)}0S_{(\Delta)}$ est une bijection dont la bijection réciproque est $S_{(\Delta)}0S_{(D)}0\ S_{(D')}$.

2) a) Démontre la bijection réciproque d'un déplacement est un déplacement.
b) Démontre la bijection réciproque d'un antidéplacement est un antidéplacement.

Démonstration

Prérequis :

Si f une bijection d'un ensemble E sur un ensemble F et g une application de F dans E telle que : $g0f = Id_E$, alors g est la bijection réciproque de f.

1) a) $S_{(D)}0S_{(D)}$ = Id, par suite $S_{(D)}$ est une bijection et sa bijection réciproque est $S_{(D)}$.
b) $(S_{(D)}0S_{(\Delta)})0(S_{(\Delta)}0S_{(D)}) = S_{(D)}0(S_{(\Delta)}0(S_{(\Delta)})0S_{(D)}) = S_{(D)}0Id0S_{(D)} = Id$
Par suite $(S_{(D)}0S_{(\Delta)}$ est une bijection et sa bijection réciproque est $(S_{(\Delta)}0S_{(D)}$.
c) Même démarche que b).

2) a) Un déplacement est la composée de deux symétries orthogonales, c'est donc une bijection comme composée de deux bijections. Sa bijection réciproque est la composée de deux symétries orthogonales, c'est donc un déplacement.

b) Un antidéplacement est soit une symétrie orthogonale, soit la composée de trois symétries orthogonales, c'est donc une bijection comme composée de bijections.

Sa bijection réciproque est soit une symétrie orthogonale, soit la composée de trois symétries orthogonales, c'est donc un antidéplacement.

Exercice de fixation

Exercice

1) Démontre que la réciproque d'une rotation est une rotation.
2) Démontre que la réciproque d'une symétrie glissée est une symétrie glissée.
3) Démontre que la réciproque d'une translation est une translation.

Solution

1) et 3) La réciproque d'un déplacement f étant un déplacement de la même nature que f, on a 1) et 3).
2) La réciproque d'un antidéplacement f étant un antidéplacement de la même nature que f, la réciproque d'une symétrie glissée est une symétrie glissée.

IV. Diverses déterminations d'une isométrie et résolution de problèmes

4.1 Diverses déterminations d'une isométrie

Activité 23 : Détermination d'une isométrie

Il s'agit de démontrer qu'une isométrie est parfaitement déterminée par la donnée de l'image d'un repère.

Démonstration

Existence

(A, B, C) est un repère du plan et $(\mathrm{A}', \mathrm{B}', \mathrm{C}')$ un autre repère du plan.

Soit l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M, barycentre de (A, α), (B, β) et (C, γ), associe le point M' barycentre de de (A', α), (B', β) et (C', γ), où α, β, γ sont des nombres réels dont la somme est non nulle. Sans perte de généralité, on va supposer que $\alpha + \beta + \gamma = 1$. De cette hypothèse, on déduit que : $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \beta\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{AC}}$. On a également : $\overrightarrow{\mathrm{A'M'}} = \beta\overrightarrow{\mathrm{A'B'}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}$.

Soit u, v, w, des nombres réels tels que $u + v + w = 1$ et N le barycentre de (A, u), (B, v) et (C, w). Au point N on associe le barycentre N' des points (A', u), (B', v) et (C', w). Il résulte que : $\overrightarrow{\mathrm{AN}} = v\overrightarrow{\mathrm{AB}} + w\overrightarrow{\mathrm{AC}}$. On a aussi : $\overrightarrow{\mathrm{A'N'}} = v\overrightarrow{\mathrm{A'B'}} + w\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}$. Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ est de la forme $x\overrightarrow{\mathrm{AB}} + y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{M'N'}}$ vaut alors $x\overrightarrow{\mathrm{A'B'}} + y\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}$.
D'où : $\overrightarrow{\mathrm{MN}}^2 = x^2\overrightarrow{\mathrm{AB}}^2 + y^2\overrightarrow{\mathrm{AC}}^2 + 2xy\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ (1) et

$\overrightarrow{\mathrm{M'N'}}^2 = x^2\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}^2+y^2\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}^2 + 2xy\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}.\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}$. (2). On a aussi : $\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{1}{2}(\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - \mathrm{BC}^2)$ (3) et $\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}.\overrightarrow{\mathrm{A'C'}} = \frac{1}{2}(\mathrm{A'B'}^2 + \mathrm{A'C'}^2 - \mathrm{B'C'}^2)$ (4)

Par hypothèse, on a : AB = A'B' ; AC = A'C' ; BC = B'C', par suite, en utilisant (1), (2), (3) et (4), on obtient : MN= $\mathrm{M'N'}$. On conclut que l'application f est une isométrie.

Unicité

Soit f et g deux isométries telles que : f(A)= $\mathrm{A'}$; f(B)= $\mathrm{B'}$; f(C)= $\mathrm{C'}$ et g(A)= $\mathrm{A'}$; g(B)= $\mathrm{B'}$; $g(\mathrm{C}) = \mathrm{C'}$.

$g^{-1}0f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$; $g^{-1}0f(\mathrm{B}) = \mathrm{B}$; $g^{-1}0f(\mathrm{C}) = \mathrm{C}$. Par suite $g^{-1}0f$ laisse invariants les trois points non alignés A, B et C. D'où : $g^{-1}0f = \mathrm{Id}$. On en déduit que $f = g$.

Exercice de fixation

Exercice

Solution

f admettant un point invariant, A, ne peut être ni une translation de vecteur non nul ni une symétrie glissée. Puisque les médiatrices de $[\mathrm{BB'}]$ et $[\mathrm{CC'}]$ sont sécantes, f ne peut être qu'une rotation dont le centre est A et dont l'angle orienté est $(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AB'}}})$.

Activité 24 : Détermination d'un déplacement

L'objectif de cette activité est de démontrer qu'un déplacement est parfaitement déterminé par la donnée de deux couples de points homologues.

Démonstration

1) a) Evident.

b) Dans ce cas l'angle orienté de la rotation est nul et donc r est l'identité du plan. On en déduit que f est la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AA'}}$.

c) Dans ce cas l'angle orienté de la rotation est non nul. On en déduit que f est une rotation d'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{A'B'}}})$.

Déterminons le centre Ω de f.

Si $\mathrm{A} = \mathrm{A'}$ ou $\mathrm{B} = \mathrm{B'}$, alors le centre Ω de la rotation est A ou B.

Supposons $\mathrm{A} \neq \mathrm{A'}$ et $\mathrm{B} \neq \mathrm{B'}$.

Soit (Δ) la médiatrice de $[\mathrm{AA'}]$ et (Δ') celle de $[\mathrm{BB'}]$. Le centre Ω appartient à (Δ) et (Δ'). Par suite (Δ) et (Δ') sont sécantes ou confondues.

Premier cas : (Δ) et (Δ') sont sécantes.

Dans ce cas Ω est le point d'intersection de (Δ) et (Δ').

Deuxième cas : (Δ) et (Δ') sont confondues

(Δ) étant médiatrice de $[AA']$ et de $[BB']$, les droites (AA') et (BB') sont parallèles. Puisque $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$, la droite (AB) est sécante à (Δ) en un point O. Le symétrique (orthogonal) de la droite (AB) par rapport à (Δ) est la droite $(A'B')$. Par suite O appartient à $(A'B')$. On en déduit que OA= $0A'$ et OB = $0B'$. Par suite Ω est égal à O.

Le centre Ω est le point de concours des droites (AB), $(A'B')$ et (Δ).

2) a) Evident.

b) g^{-1} est un déplacement comme transformation réciproque d'un déplacement. Par suite $g^{-1}0f$ est un déplacement comme composée de deux déplacements. Ce déplacement admet deux points distincts (A et B) invariants. Il ne peut être une translation de vecteur non nul, qui n'admet pas de point invariant. Il ne peut être une rotation d'angle orienté non nul, qui admet un seul point invariant. Par suite $g^{-1}0f$ est l'identité. On conclut que f est égal à g.

Exercice de fixation

Exercice

ABCD est un trapèze isocèle de bases [AB] et [DC] tel que DC= 2AB et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}) = \frac{\pi}{3}$, où O est le point d'intersection des droites (BC) et (AD). Détermine la nature et les éléments caractéristiques du déplacement f qui applique A sur C et D sur B.

Réponse

f est la rotation de centre le milieu I du segment [DC] et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

Activité 25 : Détermination d'un antidéplacement

L'objectif de cette activité est de démontrer qu'un antidéplacement est parfaitement déterminé par la donnée de deux couples de points homologues.

Démonstration

1) a) Evident.
   b) g^{-1} est un antidéplacement comme transformation réciproque d'un antidéplacement. Par suite $g^{-1}0f$ est un déplacement comme composée de deux antidéplacements. Ce déplacement admet deux points distincts (A et B) invariants. Il ne peut être une translation de vecteur non nul, qui n'admet pas de point invariant. Il ne peut être une rotation d'angle orienté non nul, qui admet un seul point invariant. Par suite $g^{-1}0f$ est l'identité. On conclut que f est égal à g.

2)a) D'après la propriété précédente, il existe un déplacement d qui applique A sur A′ et B sur B′. La transformation $d0S_{(\mathrm{AB})}$ est un antidéplacement comme composée d'un déplacement et d'un antidéplacement. Cet antidéplacement applique A sur A′ et B sur B′.

b) Posons : $f = d0S_{(\mathrm{AB})}$.

En utilisant les résultats de la propriété précédente, f est une symétrie orthogonale ou une symétrie glissée.

Il faudra en cours présenter quelques cas.

Exercice de fixation

Exercice

Solution

1) $f = t_{\overrightarrow{\mathrm{AA'}}}0S_{(\mathrm{AB})}$. Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AA'}}$ n'étant pas orthogonal à la droite (AB), f est une symétrie glissée. L'axe de f est la droite (IJ) où I est le milieu de [A A′] et J le milieu de [B B′]. Soit $\vec{u}$ le vecteur de la symétrie glissée et $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$.
$f = S_{(IJ)}0t_{\vec{u}}$ Par suite : $t_{\vec{u}} = S_{(IJ)}0f$. On a : $t_{\vec{u}}(\mathrm{A}) = S_{(IJ)}(\mathrm{A'})$. Soit A″ l'image de A′ par $S_{(IJ)}$. Le vecteur $\vec{u}$ est le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AA''}}$.
2) $f = r0S_{(\mathrm{AB})}$, où r est la rotation de centre Ω, point d'intersection de la médiatrice (Δ) du segment [A A′] et de la droite (AB). Le centre Ω appartient à la droite (AB), par suite f est une symétrie orthogonale. L'image de A étant A′, l'axe de f est la médiatrice de [A A′], c'est-à-dire (Δ).

4.2 Résolution de problèmes à l'aide d'isométries

a) Utiliser une isométrie pour construire une figure géométrique

Méthode

Pour résoudre un problème de construction géométrique à l'aide des transformations, on peut suivre les étapes suivantes :

Analyse

L'analyse consiste à supposer le problème résolu et à faire une esquisse de la solution à partir de laquelle on dégage les propriétés (mise en évidence de transformations du plan telles que les homothéties, les isométries, les similitudes, etc.) permettant la construction de la figure.

Synthèse

C'est la démarche inverse de l'analyse. Avec les éléments dégagés dans l'analyse (homothéties, isométries, similitudes, etc.), on réalise la construction en justifiant qu'elle répond bien aux données du problème. On discute enfin du nombre de solutions au problème posé.

Exercice

Soit (D_1) et (D_2) deux droites distinctes et A un point du plan.

Construis un triangle équilatéral ABC tel que : $\mathrm{B} \in (\mathrm{D}_1)$; $\mathrm{C} \in (\mathrm{D}_2)$.

Solution

Analyse

La rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ applique B sur C. Le point C appartient à (D_2) et à l'image (Δ_1) de (D_1) par r_1. Si (Δ_1) coupe (D_2), Le point C est déterminé de façon unique et B est l'antécédent de C par r. Le triangle ABC est alors équilatéral.

Synthèse

a) Construction
- Construire l'image (Δ_1) par la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$;
- Marquer le point d'intersection C de (Δ_1) et (D_2) ;
- Construire le point B, antécédent de C par r ;

b) Discussion

Des cas se sont présentés dans le programme de construction :

Le point A étant fixé dans le plan, il y a l'existence des points B et C résultant du choix de la rotation r.

Le choix de la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ conduit à un triangle ABC de sens indirect.

Le problème peut avoir alors deux solutions : un triangle $\mathrm{AB_1C_1}$ de sens direct et un triangle $\mathrm{AB_2C_2}$ de sens indirect. Il y a donc deux droites (Δ_1) et (Δ_2), images respectives de (D_1) par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

- Si (Δ_1) coupe (D_2) en C_1 et (Δ_2) coupe (D_2) en C_2. Le problème a exactement deux solutions. Il y a un seul triangle $\mathrm{AB_1C_1}$ et un seul triangle $\mathrm{AB_2C_2}$.
- Si (Δ_1) est parallèle à (D_2) ou si (Δ_2) est parallèle à (D_2) :
  - Si (Δ_1) est confondue à (D_2), on choisit un point quelconque C_1 sur (D_2) et on construit B_1. Dans ce cas, il y a une infinité de triangles $\mathrm{AB_1C_1}$. La droite (Δ_2) coupe (D_2) en C_2 ; on construit B_2. Il y a un seul triangle $\mathrm{AB_2C_2}$.
    On fait de même si (Δ_2) est confondue à (D_2).
  - Si (Δ_1) est disjointe de (D_2), il n'y a pas de point C_1, donc pas de triangle $\mathrm{AB_1C_1}$. Par contre (Δ_2) coupe (D_2) et il y a un seul triangle $\mathrm{AB_2C_2}$.
    On fait de même si (Δ_2) est disjointe de (D_2).

b) Utiliser une isométrie pour démontrer une propriété

Exercice

Soit A et B deux points distincts et fixés du plan. On désigne par M un point quelconque.

Soit r_1 la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et r_2 la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Les points N et P désignent les images respectives de M par r_1 et r_2.

1) Démontre que lorsque M varie, la médiatrice de [NP] passe par un point fixe K.
2) Construis K.

Solution

1) $r_1(\mathrm{M}) = \mathrm{N}$ et $r_2(\mathrm{M}) = \mathrm{P}$; d'où : $r_2 0 r_1^{-1}(\mathrm{N}) = \mathrm{P}$.
   $r_2 0 r_1^{-1}$ est la composée de deux rotations de centres différents. La somme $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$ des angles de r_2 et r_1^{-1} étant non nulle (modulo 2π) , $r_2 0 r_1^{-1}$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ et de centre fixe K. Par suite : KN = KP. On en déduit que la médiatrice de [NP] passe par un point fixe K.
2) Décomposons r_1 et r_2 en produits de symétries orthogonales.
   $r_1 = S_{(D_1)} 0 S_{(AB)}$ et $r_2 = S_{(D_2)} 0 S_{(AB)}$; d'où : $r_2 0 r_1^{-1} = S_{(D_2)} 0 \left(S_{(AB)} 0\, S_{(AB)}\right) 0 S_{(D_1)}$. Par suite : $r_2 0 r_1^{-1} = S_{(D_2)} 0 S_{(D_1)}$.

c) Utiliser une isométrie pour rechercher un lieu géométrique

Un lieu géométrique est un ensemble de points qui vérifient une propriété géométrique déterminé.

Le problème de recherche de lieu géométrique se pose pratiquement de la façon suivante : déterminer un ensemble décrit par un point P quand un point M décrit un ensemble connu (E) (droite, segment, demi-droite, cercle, ellipse, hyperbole, parabole, etc.).

Pour résoudre un problème de lieu géométrique à l'aide des transformations :

- On recherche une transformation f (homothétie, isométrie, similitude, etc.), qui applique M sur P ;
- On détermine l'image (F) de (E) par f ;
- P décrit (F) quand M décrit (E).

Exercice

Soit (C) un cercle de centre O et $\mathrm{O'}$ un point extérieur à (C). A chaque point M de (C), on associe le point $\mathrm{M'}$ du plan tel que $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{OM}}, \overrightarrow{\mathrm{O'M'}}}) = \frac{\pi}{3}$ et $\mathrm{OM} = \mathrm{O'M'}$.

Détermine le lieu des points $\mathrm{M'}$ quand M décrit (C).

Solution

On a : $OM = O'M'$ et $O \neq M$. Il en résulte qu'il existe un déplacement r qui applique O sur O' et M sur M'. L'angle $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}})$ de mesure principale $\frac{\pi}{3}$ étant non nul, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est différent du vecteur $\overrightarrow{O'M'}$. Par suite r est une rotation dont le centre I vérifie : $OI = O'I$ et $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IO'}}) = \frac{\pi}{3}$. Le point I se trouve à l'intersection de l'arc capable de mesure $\frac{\pi}{3}$ d'extrémités O et O' et de la médiatrice de $[O\,O']$. Le point M' est l'image de M par la rotation r de centre I et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Quand M décrit le cercle (C), le point M' décrit le cercle (C'), image de (C) par r.

3 DES QUESTIONS D'ÉVALUATION

1) Comment déterminer les éléments caractéristiques d'une symétrie glissée.

Exercice non corrigé

ABCD est un carré de sens direct et de centre O. Les points I, J, K, L sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].

Détermine la nature et les éléments caractéristiques de l'isométrie f définie par :

$f = S_{(IK)} 0\, r(\mathrm{A}, \frac{\pi}{2})$

Réponse

f est la symétrie glissée d'axe (IJ) et de vecteur $\overrightarrow{IJ}$.

2) Comment déterminer les éléments caractéristiques d'une rotation.

Exercice non corrigé

ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre de gravité O. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC] et [CA].

Détermine la nature et les éléments caractéristiques de l'isométrie f définie par :

$f = r(\mathrm{O}, \frac{2\pi}{3}) 0 t_{\overrightarrow{IK}}$.

Réponse

$f = r(\mathrm{I}, \frac{2\pi}{3})$.

3) Comment déterminer les isométries laissant globalement invariant un polygone régulier convexe de n côtés ?

Exercice non corrigé

Soit un hexagone régulier ABCDEF de sens direct et de centre O.

Détermine toutes les isométries laissant globalement invariant l'hexagone ABCDEF.

Réponse

Soit r la rotation de centre O et d'angle orienté $\frac{\pi}{3}$ et s la symétrie orthogonale d'axe (AD). Justifiez que : $\mathrm{D}_6 = \{\mathrm{Id}, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, s0r, s0r^2, s0r^3, s0r^4, s0r^5\}$. La table du groupe est facultative.

4 MES SÉANCES D'EXERCICES

Dans tous les exercices qui suivent, le plan est orienté.

Exercices de fixation

Définition d'une isométrie

1. **Solution**

La rotation de centre O et d'angle orienté $\hat{\alpha}$ où O est un point du plan est une isométrie du plan. L'homothétie de centre A et de rapport 2 où A est un point du plan n'est pas une isométrie.

2. **Solution**

L'homothétie de rapport -1 est une isométrie du plan.

Conservation du produit scalaire

3. **Solution**

f conservant le produit scalaire, on a : $\overrightarrow{f(A)f(B)}.\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$. Par suite :

$\| \overrightarrow{f(A)f(B)} \|^2 = \| \overrightarrow{AB} \|^2$, d'où *f* conserve la norme. On en déduit que f conserve la distance. D'où le résultat.

Remarque

Les isométries peuvent être définies comme des applications du plan dans lui-même qui conservent le produit scalaire.

Conservation du barycentre

4. **Solution**

O est isobarycentre des points A, B, C, D. *f* conservant le barycentre, *f*(O) est isobarycentre des points *f*(A), *f*(B), *f*(C), *f*(D). On a : $f(\{\mathrm{A, B, C, D}\}) = \{f(\mathrm{A}), f(\mathrm{B}), f(\mathrm{C}), f(\mathrm{D})\}$ et $\{f(\mathrm{A}), f(\mathrm{B}), f(\mathrm{C}), f(\mathrm{D})\} = \{\mathrm{A, B, C, D}\}$. D'où : *f*(O) = O.

Transformation du plan

5. Solution

Soit S une symétrie orthogonale, S0S= Id. D'où le résultat.

Images de figures simples

6. Solution

a) Soit S la symétrie orthogonale d'axe (BD). On a : S(B)=D et S(D)= B. D'où le résultat.
b) Soit r le quart de tour direct de centre O. On a : r(A) =B et r(D)=A. D'où le résultat.
c) Toute rotation de centre O laisse le cercle circonscrit au carré ABCD globalement invariant. D'où le résultat.

Conservation du parallélisme, de l'orthogonalité et du contact

7. Solution

$(A'B')$ et $(C'D')$ sont parallèles car images respectives des droites parallèles (AB) et (CD) par l'isométrie *f.*

8. Solution

$(A'B')$ et $(A'D')$ sont perpendiculaires comme images respectives des droites perpendiculaires (AB) et (AD) par l'isométrie *f.*

9. Solution

Les images de deux droites orthogonales par une isométrie sont deux droites orthogonales.

10. Solution

(D') est tangente à (C') en A' car l'isométrie conserve le contact.

Décomposition d'isométries

11. Solution

Deux décompositions possibles quand un axe de symétrie est fixé.

12. Solution

a) $(\Delta)=(AB)$.
b) $(\Delta)=(DC)$.
c) $(\Delta)=(AD)$.
d) $(\Delta)=(JL)$.

13. Solution

Une infinité de décompositions possibles.

14. Solution

Deux décompositions quand un axe est fixé.

15. Solution

a) (Δ)=(IK).
b) (Δ)=(JL).
c) $(\Delta) = (IJ)$.
d) $(\Delta) = (AD)$.

Composées d'isométries

16. Solution

La composée d'une rotation et d'une translation est une isométrie comme composée de deux isométries.

17. Solution

a) $r\left(0, -\frac{\pi}{2}\right) 0t_{\overrightarrow{AD}}$ est une rotation (d'angle $\frac{\pi}{2}$) comme composée d'une translation et d'une rotation d'angle non nul.
b) $r(A, \frac{3\pi}{2})0S_{(AC)}$ est une symétrie orthogonale comme composée d'une symétrie orthogonale et d'une rotation dont le centre, A, appartient à l'axe de la symétrie.

18. Solution

La composée d'une translation et d'une symétrie orthogonale est une isométrie comme composée de deux isométries.

19. Solution

a) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ étant un vecteur normal à la droite (IK), $t_{\overrightarrow{AB}}0S_{(IK)}$ est une symétrie orthogonale comme composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation dont le vecteur est normal à l'axe de la symétrie.
b) Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ n'étant pas un vecteur normal à la droite (AD), $t_{\overrightarrow{AC}}0S_{(AD)}$ est une symétrie glissée comme composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation dont le vecteur n'est pas normal à l'axe de la symétrie.
c) Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ étant un vecteur directeur de la droite (IJ), $t_{\overrightarrow{AC}}0S_{(IJ)}$ est une symétrie glissée comme composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation dont le vecteur est un vecteur directeur de l'axe de la symétrie.

20. La composée d'une rotation et d'une symétrie orthogonale est une isométrie comme composée d'isométrie.

21. $S_{(CD)}0r(B, \frac{3\pi}{2})$ est une symétrie glissée comme composée d'une symétrie orthogonale et d'une rotation dont le centre n'appartient pas à l'axe de la symétrie.

Propriétés des symétries glissées

22. Réponse

a) Faux ; b) Faux ; c) Vrai

23. Solution

Immédiat

24. Solution

f est la symétrie glissée d'axe (IJ) et de vecteur $\overrightarrow{IJ}$.

Classification des isométries à l'aide de l'ensemble des points invariants

25. Réponse

b) Symétrie glissée ; d) Translation de vecteur non nul.

26. Réponse

a) ; b)

27. Réponse

b) et d)

28. Réponse

a) Vrai ; b) Faux ; c) Faux

c) Faux. Car cette isométrie peut être l'identité du plan.

29. Réponse

c) Je ne sais pas.

30. Réponse

b) Une rotation de centre A

Classification des isométries à l'aide des déplacements et des antidéplacements

31. Réponse

a) Faux ; b) Faux ; c) Vrai.

32. Réponses

a) Vrai ; b) Faux ; c) Vrai

33. Non. C'est possible si AB= A'B'.

34. Oui.

35. C'est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

Exercices de renforcement/approfondissement

36. Solution

$g0f = Id$, d'où : $g^{-1}0(g0f) = g^{-1}0Id$. Or $g^{-1}0(g0f) = (g^{-1}0g)0f$. On en déduit que : $g^{-1} = f$.

37. Indication

Composez les deux membres avec h^{-1}.

38. Solution

1) On a : $(g0f)0(f^{-1}0g^{-1}) = g0(f0f^{-1})0g^{-1} = g0(Id)0g^{-1} = g0g^{-1}$ =Id. Par suite $f^{-1}0g^{-1}$ est la bijection réciproque de $g0f$.
2) D'après 1) $s_1^{-1}0s_2^{-1}$ est la bijection réciproque de s_20s_1. Or, $s_1^{-1} = s_1$ et $s_2^{-1} = s_2$, donc s_10s_2 est la bijection réciproque de s_20s_1.

39. Solution

1) Soit M un point appartenant à f(E). Il existe un point N élément de E tel que : M= f(N). Or E ⊆ F, donc N appartient à F tel que M= f(N). Par suite M appartient à f(F). D'où le résultat.

2) E ∩ F ⊆ E, d'où d'après 1) f(E ∩ F) ⊆ f(E). De même f(E ∩ F) ⊆ f(F). On obtient : f(E ∩ F) ⊆ f(E) ∩ f(F).

Réciproquement, soit M un élément de f(E) ∩ f(F). Il existe des points P et Q appartenant respectivement à E et F tels que : M= f(P) et M= f(Q). Par suite : f(P) = f(Q). Toute isométrie étant bijective, donc injective, on a : P = Q. On en déduit que P appartient à E ∩ F tel que M= f(P). Il résulte que M appartient à f(E ∩ F). CQFD.

40. Solution

Soit M un point invariant par f. L'isométrie conservant la distance, on a : MA=MA′. Le point A est distinct de A′ car A n'est pas invariant par *f*. On en déduit que le point M appartient à la médiatrice de [AA′].

41. Solution

Soit r le quart de tour direct de centre A. r applique B sur C et E sur F. Par suite : BE = CF et (BE)⊥ (CF).

42. **Solution**

1) *f* étant la composée d'un nombre pair de symétries orthogonales est un déplacement.
2) $f = (S_{(AD)}0S_{(DC)})0(S_{(CB)}0S_{(BA)})$; d'où : $f = S_D0S_B$, car : $S_D = S_{(AD)}0S_{(DC)}$ et $S_B = S_{(CB)}0S_{(BA)}$. S_B et S_D sont des rotations d'angle plat. La somme de leurs angles étant nulle, f est une translation. L'image de B par *f* étant le symétrique de B par rapport à D, *f* est la translation de vecteur $2\overrightarrow{BD}$.

43. Solution

a) $r\left(A,\frac{\pi}{3}\right)0r\left(B,\frac{\pi}{3}\right) = S_{(AO)}0S_{(AB)}0S_{(AB)}0S_{(BO)}$.
$r\left(A,\frac{\pi}{3}\right)0r\left(B,\frac{\pi}{3}\right) = r\left(O,\frac{2\pi}{3}\right)$.

b) $r\left(\mathrm{A},\frac{\pi}{3}\right)0r\left(\mathrm{B},-\frac{\pi}{3}\right)=S_{(AO)}0S_{(AB)}0S_{(AB)}0S_{(BE)}$, où E= $S_{(AB)}(\mathrm{O})$. Par suite : $S_{(AO)}0S_{(AB)}0S_{(AB)}0S_{(BE)}=S_{(AO)}0S_{(BE)}$. Les droites (AO) et (BE) sont parallèles. On obtient : $r\left(\mathrm{A},\frac{\pi}{3}\right)0r\left(\mathrm{B},-\frac{\pi}{3}\right)=t_{\overrightarrow{BC}}$.

c) $r\left(\mathrm{A},\frac{\pi}{3}\right)0r\left(\mathrm{B},\frac{\pi}{3}\right)0r\left(\mathrm{C},-\frac{\pi}{3}\right)=\ r\left(O,\frac{2\pi}{3}\right)0r\left(\mathrm{C},-\frac{\pi}{3}\right)$.

$r\left(O,\frac{2\pi}{3}\right)0r\left(\mathrm{C},-\frac{\pi}{3}\right)=S_{(CD)}0S_{(CO)}0S_{(CO)}0S_{(CB)}$, où D= $S_{(CB)}(\mathrm{O})$. Par suite :

$r\left(\mathrm{A},\frac{\pi}{3}\right)0r\left(\mathrm{B},\frac{\pi}{3}\right)0r\left(\mathrm{C},-\frac{\pi}{3}\right)=r\left(\mathrm{D},\frac{\pi}{3}\right)$.

44. Solution

1) $t_{\overrightarrow{AC}}0S_{(BC)}=t_{\overrightarrow{BC}}0\left(t_{\overrightarrow{AB}}0S_{(BC)}\right)$; $t_{\overrightarrow{BC}}0\left(t_{\overrightarrow{AB}}0S_{(BC)}\right)=t_{\overrightarrow{BC}}0S_{(IK)}0S_{(BC)}0S_{(BC)}$.
$t_{\overrightarrow{AC}}0S_{(BC)}=t_{\overrightarrow{BC}}0S_{(IK)}$. $t_{\overrightarrow{AC}}0S_{(BC)}$ est la symétrie glissée de vecteur $\overrightarrow{BC}$ et d'axe (IK).

2) $r\left(\mathrm{A},-\frac{\pi}{2}\right)0r\left(\mathrm{B},\frac{\pi}{2}\right)=S_{(AE)}0S_{(AB)}0S_{(AB)}0S_{(BD)}$, où E= $S_{(AB)}(\mathrm{O})$.
$r\left(\mathrm{A},-\frac{\pi}{2}\right)0r\left(\mathrm{B},\frac{\pi}{2}\right)=S_{(AE)}0S_{(BD)}$;
$r\left(\mathrm{A},-\frac{\pi}{2}\right)0r\left(\mathrm{B},\frac{\pi}{2}\right)=t_{\overrightarrow{CA}}$.

3) $r\left(\mathrm{B},-\frac{\pi}{2}\right)0t_{\overrightarrow{CB}}=S_{(BD)}0S_{(BA)}0S_{(AB)}0S_{(JL)}$;
$S_{(BD)}0r\left(\mathrm{B},-\frac{\pi}{2}\right)0t_{\overrightarrow{CB}}=S_{(JL)}$.

45. Solution

1) $r\left(\mathrm{O},\frac{\pi}{2}\right)0S_{(BC)}$ est la composée d'une symétrie orthogonale et d'une rotation dont le centre n'appartenant à l'axe (BC) de la symétrie. Il s'agit d'une symétrie glissée *f*. Pour déterminer le vecteur et l'axe de *f*, il faut déterminer les images de deux points par *f*. On a : f(B)= C et f(C)=D. L'axe de *f* est (JK) et le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{JK}}$.

2) $S_{(BD)}0r\left(\mathrm{B},-\frac{\pi}{2}\right)$ est la composée d'une symétrie orthogonale et d'une rotation dont le centre appartient à l'axe de la symétrie est une symétrie orthogonale s dont l'axe (Δ) passe par B. Il suffit de déterminer l'image d'un point par s pour connaitre (Δ). Le point A est invariant par s. On en déduit que $S_{(BD)}0r\left(\mathrm{B},-\frac{\pi}{2}\right)$ est la symétrie orthogonale d'axe (AB).
$S_{(BD)}0r\left(\mathrm{B},-\frac{\pi}{2}\right)0t_{\overrightarrow{CB}}$ est la composée de la symétrie orthogonale d'axe (AB) et de la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ normal à (AB). $S_{(BD)}0r\left(\mathrm{B},-\frac{\pi}{2}\right)0t_{\overrightarrow{CB}}$ est donc une symétrie orthogonale d'axe parallèle à (AB). L'image de C par $S_{(AB)}0t_{\overrightarrow{CB}}$ est B. Le milieu J de [BC] appartient à l'axe de cette symétrie. $S_{(BD)}0r\left(\mathrm{B},-\frac{\pi}{2}\right)0t_{\overrightarrow{CB}}$ est donc la symétrie orthogonale d'axe (JL).

3) $t_{\overrightarrow{AD}} 0 r\left(\mathrm{B}, \frac{\pi}{2}\right) 0 t_{\overrightarrow{CB}}$ est la composée de deux translations et d'une rotation dont l'angle, $\frac{\pi}{2}$, est non nul. $t_{\overrightarrow{AD}} 0 r\left(\mathrm{B}, \frac{\pi}{2}\right) 0 t_{\overrightarrow{CB}}$ est donc une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dont le centre est à déterminer. L'image de C par $t_{\overrightarrow{AD}} 0 r\left(\mathrm{B}, \frac{\pi}{2}\right) 0 t_{\overrightarrow{CB}}$ est C. Par suite $t_{\overrightarrow{AD}} 0 r\left(\mathrm{B}, \frac{\pi}{2}\right) 0 t_{\overrightarrow{CB}}$ est la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Remarque

Pour éviter la décomposition dans la détermination du centre, si on n'a pas trouvé ce point invariant C (accidentel), on peut utiliser la médiatrice du segment joignant le point D à son image B par $t_{\overrightarrow{AD}} 0 r\left(\mathrm{B}, \frac{\pi}{2}\right) 0 t_{\overrightarrow{CB}}$ et l'arc capable de mesure $\frac{\pi}{2}$ d'extrémités D et B ou les médiatrices des milieux de deux couples de points homologues.

46. Solution

1) Par Pythagore ou toute autre méthode, on obtient PQ$=$ QA$'$. Puisque PO$=$ OA$'$, la droite (OQ) est la médiatrice de [PA']. Il en résulte (OQ) est perpendiculaire à (PA'). Le triangle APA$'$ étant inscrit dans le cercle de diamètre [AA$'$] est rectangle en P. On en déduit que (AP) est perpendiculaire à (PA$'$). Les droites (AP) et (OQ) sont donc parallèles car perpendiculaires toutes les deux à (PA'). B étant l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$, il en résulte que les droites (AB) et (OQ) sont parallèles. Par suite (AB) et (AP) sont parallèles. On conclut que les points A, B et P sont alignés.
2) De la relation *t*=*f*o*S*, on déduit que : $f = t0S$. Les droites (AP) et (OQ) étant parallèles d'après 1), la droite (Δ) est orthogonale à (OQ) car orthogonale à (AP). f est une symétrie orthogonale, comme composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation de vecteur normal à l'axe de la symétrie. L'axe de *f* est parallèle à (Δ). L'image de O par *f* est Q. L'axe de *f* est la parallèle (Δ$'$) à (Δ) passant par le milieu de [OQ].
3) D'après ce qui précède, l'image de O par *f* est Q. Justifions que B est l'image de P par *f*. On a : *f*(P)= $t0S$(P). S(P) $=$ A, car (Δ) est la médiatrice de [AP] ; t(A) $=$ B. Par suite *f*(P)=B. *f* étant une symétrie orthogonale, transforme (Q, B) en (O, P). L'autre isométrie étant $f0S_{(\mathrm{BQ})}$. Il s'agit de la rotation de centre I qui applique B sur P.

47. Solution

Cet ensemble est : {Id, $r(0,\pi)$ }.

48. Solution

Cet ensemble est : {Id, $r(0,\pi), S_{(AC)}, S_{(BD)}$}.

49. Solution

Cet ensemble est : {Id, $r(0,\pi), S_{(\Delta)}, S_{(\Delta')}$} où (Δ) et (Δ$'$) sont les médiatrices respectives des segments [AB] et [AD].

50. Solution

1) Soit s_1, s_2, s_3 les symétries orthogonales respectives par rapport aux médiatrices [AB], [BC], [CA] et r_1, r_2, r_3 les rotations de centre O et d'angles respectifs 0, $\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{2\pi}{3}$ (r_1 =Id).

Justifiez que cet ensemble D_3 est : $\{r_1, r_2, r_3, s_1, s_2, s_3\}$. Si s est l'une quelconque des symétries s_1, s_2, s_3 et r l'une quelconque des rotations r_2, r_3, alors $\mathrm{D}_3 = \{\mathrm{Id}, r, r^2, s, s0r, s0r^2\}$. C'est encore $\mathrm{D}_3 = \{\mathrm{Id}, r, r^2, s, r0s, r^2 0s\}$.

2) Soit D'_3 l'ensemble des isométries transformant ABC en $\mathrm{A'B'C'}$.

Soit g une isométrie du plan. Il faut démontrer que g appartient à D'_3 si et seulement si il existe une isométrie i appartenant à D_3 tel que : $g = f0i$.

Démonstration

Soit i une isométrie appartenant à D_3. Justifions que l'isométrie g telle que $g = f0i$ transforme ABC en $\mathrm{A'B'C'}$. On a : $g(\mathrm{ABC}) = f0i(\mathrm{ABC})$; or $i(\mathrm{ABC}) = \mathrm{ABC}$ et $f(\mathrm{ABC}) = \mathrm{A'B'C'}$, donc $g(\mathrm{ABC}) = \mathrm{A'B'C'}$. D'où g transforme ABC en $\mathrm{A'B'C'}$.

Réciproquement, soit g une isométrie du plan qui transforme ABC en $\mathrm{A'B'C'}$. Posons :

$i = f^{-1}0g$. Justifions que i appartient à D_3. On a : $i(\mathrm{ABC})= f^{-1}0g(\mathrm{ABC})$, or

$g(\mathrm{ABC})= \mathrm{A'B'C'}$ et $f^{-1}(\mathrm{A'B'C'})$ =ABC, donc $i(\mathrm{ABC}) = \mathrm{ABC}$. Par suite, i appartenant à D_3.

L'ensemble des isométries qui transforment ABC en $\mathrm{A'B'C'}$ est : $\{ f0i, i \in \mathrm{D}_3\}$, c'est-à-dire :

$\{f, f0r, f0r^2, f0\,s, f0\,r0s, f0r^2 0s\}$.

51. Indication

Utilisez les quarts de tour direct et indirect de centre A. Il y a deux solutions.

Faites la synthèse et la construction

52. Solution

On choisit A_1 arbitrairement sur (D_1). Pour tout point A_2 de (D_2), le point A_3 tel que $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ soit un triangle équilatéral est l'image de A_2 par la rotation r de centre A_1 et d'angle $\frac{\pi}{3}$ ou $-\frac{\pi}{3}$. Le point A_3 appartient donc à (D_3) et à l'image de (D_2) par r. Ces droites (D_3) et $r(\mathrm{D}_2)$ sont sécantes car les droites (D_2) et (D_3) sont parallèles. Le point A_3 est déterminé. A_2 est l'antécédent de A_3 par r.

Faites la synthèse

53. **Solution**

Analyse

Le carré IJKL construit est de sens direct et de centre O. La symétrie centrale S_O de centre O transforme chaque sommet du carré IJKL sur son sommet opposé. Par conservation du barycentre, chaque côté du parallélogramme ABCD est transformé en son côté opposé. Par suite O est centre du parallélogramme ABCD.

I appartenant à [AB], le point J est l'image de I par la r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. J appartient donc à [BC]$\cap r$([AB]). Posons : $\mathrm{A}' = r(\mathrm{A})$; $\mathrm{B}' = r(\mathrm{B})$. Une fois J construit, les autres points s'en déduisent.

Synthèse

1) Donnez un programme de construction
2) Réalisez la construction
3) Discussion
   a) Si ABCD est un carré, alors (BC)= $(\mathrm{A}'\mathrm{B}')$. On choisit J est quelconque sur [BC] et on construit les autres points.
   b) Si ABCD est un rectangle non carré, alors [BC] et $[\mathrm{A}'\mathrm{B}']$ sont disjoints. J n'existe pas. Il n'y a donc pas de carré IJKL.
   c) Si ABCD est un parallélogramme qui n'est rectangle, alors [BC] rencontre $[\mathrm{A}'\mathrm{B}']$ en un seul point J. Il y a dans ce cas un seul carré IJ KL.

54. **Solution**

Pour M différent de A et du symétrique de A par rapport à O, les arcs $\widehat{\mathrm{AM}}$ et $\widehat{\mathrm{A}'\mathrm{M}'}$ ayant la même longueur, sont sous-tendus par des cordes de même longueur. Il en résulte que les triangles OAM et $\mathrm{O}'\mathrm{A}'\mathrm{M}'$ sont isométriques. Les arcs $\widehat{\mathrm{AM}}$ et $\widehat{\mathrm{A}'\mathrm{M}'}$ étant parcourus dans des sens contraires, cette isométrie est un antidéplacement f. L'isométrie f applique donc O sur O', A sur A' et M sur M'.

a) Si les médiatrices respectives des segments $[\mathrm{OO}']$ et $[\mathrm{AA}']$ sont sécantes en Ω, alors f est la symétrie glissée $S_{(O'A')} 0\, r(\Omega, \hat{\alpha})$, où $\hat{\alpha} = (\widehat{\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{O}'\mathrm{A}'}})$. Soit (D′) la parallèle à $(\mathrm{O}'\mathrm{A}')$ passant par Ω. On peut écrire : $r(\Omega, \hat{\alpha}) = S_{(\mathrm{D}')} 0 S_{(\Delta)}$. (Δ) est construite de la façon suivante :

- Construire le point A_1 de (C') tel que $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{O}'\mathrm{A}_1}$;
- Construire la bissectrice (δ) de l'angle de vecteur $(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{O}'\mathrm{A}_1}, \overrightarrow{\mathrm{O}'\mathrm{A}'}})$;
- (Δ) est la parallèle à (δ) passant par Ω.
  La symétrie glissée f est $S_{(O'A')} 0 S_{(\mathrm{D}')} 0 S_{(\Delta)}$ qui s'écrit : $f = t_{2\overrightarrow{\Omega B}} 0 S_{(\Delta)}$, où B est le projeté orthogonal de Ω sur $(\mathrm{O}'\mathrm{A}')$.
  $f(\mathrm{M}) = \mathrm{M}' \Leftrightarrow S_{(\Delta)}(\mathrm{M}) = \mathrm{M}_1$ et $t_{2\overrightarrow{\Omega B}}(\mathrm{M}_1) = \mathrm{M}'$.
  $f(\mathrm{M}) = \mathrm{M}' \Leftrightarrow$ I projeté orthogonal de M sur (Δ) , I milieu de $[\mathrm{MM}_1]$ et $\overrightarrow{\mathrm{IP}} = \overrightarrow{\Omega\mathrm{B}}$.
  Le cas où M est égal à A ou au symétrique de A par rapport à O vérifie ce qui précède.

Quand M décrit (C), I décrit le segment $[I_1I_2]$ qui est l'image de (C) par la projection orthogonale sur (Δ).

et quand I décrit $[I_1I_2]$, P décrit l'image de $[I_1I_2]$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{\Omega B}$ qui est un segment $[P_1P_2]$.

b) Si les segments $[OO']$ et $[AA']$ ont la même médiatrice (D), alors f est $S_{(D)}$.

Quand M décrit (C), P décrit le segment [JK] qui est l'image de (C) par la projection orthogonale sur (D).

55. Solution

1) Posons : $r = r_2 0 r_1$. L'isométrie r est une rotation d'angle π. On a : $r(\mathrm{B}) = \mathrm{D}$. Par suite r est la symétrie centrale de centre O.

On a : $(\widehat{\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MN}}) = (\widehat{\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MN}})$, car O est le milieu de $[MM']$.

$(\widehat{\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MN}}) = (\widehat{\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MA}}) + (\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MN}})$. $r_1(\mathrm{M}) = \mathrm{N}$, d'où le triangle MAN est équilatéral de sens indirect. Il en résulte que : $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MN}}) = -\frac{\pi}{3}$. On conclut que les points M, N et M′ sont alignés si et seulement si : $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MA}}) \equiv \frac{\pi}{3}\,[\pi]$.

2) Le lieu des points M lorsque les points M, N et M′ sont alignés est le cercle (C) passant par O et A dont la tangente (OT) en O vérifie $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OT}, \overrightarrow{OA}}) \equiv \frac{\pi}{3}\,[\pi]$, privé des points A et O.

56. Solution

1) N est le milieu de [AM]. Par suite l'homothétie h de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$ applique M sur N. Quand M décrit [BC], N décrit [IJ].
2) Considérez la symétrie S_N de centre N. Elle applique S sur J et T sur I.
3) a) L'homothétie de centre C qui applique A sur Q transforme le triangle équilatéral ABC en QMC. De même l'homothétie de centre J qui applique A sur Q transforme le triangle équilatéral AIJ en QTJ. ABC et IIJ étant de sens direct et l'homothétie conservant l'orientation, on a les résultats.

   a) Les images respectives de P, A, I par f sont Q, C, J.
4) $\frac{\pi}{3}+\pi$ est non congru à 0 modulo 2π ; f est donc une rotation comme composée de deux rotations dont la somme des angles est non nulle. L'angle orienté de cette rotation est donc : $\frac{\pi}{3}+\pi - 2\pi$, c'est à dire $-\frac{2\pi}{3}$.

57. Solution

1) b) $f(\mathrm{K}) = \mathrm{K}$; $g(\mathrm{J}) = \mathrm{J}$.
   c) f est le quart de tour direct de centre K et g est le quart de tour direct de centre J.

2) a) $g0f^{-1}$(A)= C.
b) $g0f^{-1}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
c) $g0f^{-1} = t_{\overrightarrow{AC}}$, d'où : $g = t_{\overrightarrow{AC}} 0 f$.

$g(\mathrm{M}) = t_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}} 0 f(\mathrm{M})$
$\quad = t_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}(\mathrm{M}_1)$
$t_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}(\mathrm{M}_1) = \mathrm{M}_2$, d'où : $\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$. Par suite ACM_2M_1 est un parallélogramme.

58. Solution
2)a) L'image de B par r est D. L'image de de la droite (BC) par r est la perpendiculaire à (BC) passant par D, car tout quart de tour transforme une droite en une droite qui lui est perpendiculaire. Cette image est donc la droite (CD).
b) r(A) = A, l'image de (AQ) par le quart de tour r est la perpendiculaire à (AQ) passant par A. D'où r(AQ) = (Δ). P étant le point d'intersection de (AQ) et (BC), l'image de P par r est le point d'intersection de (CD) et (Δ). Il résulte que r(P) = S. De la même manière l'image de R par r est Q.
c) Les triangles ARQ et APS sont rectangles et isocèles en A (à justifier).

59. Solution

2) a) L'angle orienté de rotation r est $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}})$ dont la mesure principale est $-\frac{\pi}{2}$. La rotation r est donc d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

b) r applique A sur B et C sur D. D'où : $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}}) = -\frac{\pi}{2}$ et $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{ID}}) = -\frac{\pi}{2}$.
Par suite le cercle de diamètre [AB] passe par I et le cercle de diamètre [CD] par I. Il en résulte que I appartient aux cercles (C_1) et (C_3).

3) a) L'angle orienté de la rotation r' est $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}})$. $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}}) = (\widehat{\overrightarrow{AC}, -\overrightarrow{BD}})$;
$(\widehat{\overrightarrow{AC}, -\overrightarrow{BD}}) = (\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}}) + \hat{\pi}$. La mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}})$ est $\frac{\pi}{2}$. La rotation r' est d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b) Comme au 2)b).

4) L'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{IS}, \overrightarrow{IN}})$ est de mesure principale $-\frac{\pi}{2}$ et IS =IN, par suite le triangle ISN est rectangle isocèle en I. De même, un raisonnement analogue aboutit à JSN est rectangle isocèle en J. on a de plus, IS=JS. On conclut que INJS est un carré.

60. Solution

Soit N un point de la droite (MB) sur la demi-droite issue de M ne contenant pas B tel que MN=MC. Par suite $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{MC}}, \overrightarrow{\mathrm{MB}}}) = \frac{\pi}{3}$. On en déduit que le triangle CMN est un triangle équilatéral. La rotation r de centre de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$ applique M sur N et A sur B. Il résulte que AM=BN. Par ailleurs, BN=BM +MN. On conclut que MB + MC = MA.

61. Le théorème de Napoléon

Solution

Soit r_1, r_2 et r_3 les rotations de centres respectifs A_1, B_1 et C_1 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Par suite l'isométrie $r_1 0\ r_2 0\ r_3$ est une translation, car $\frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}=2\pi$. Déterminons l'image d'un point par $r_1 0\ r_2 0\ r_3$. On a : $r_1 0\ r_2 0\ r_3(\mathrm{B}) = r_1 0\ r_2(\mathrm{A}) = r_1(\mathrm{C}) = \mathrm{B}$. Par suite $r_1 0\ r_2 0\ r_3 = \mathrm{Id}$. $r_1 0\ r_2 0\ r_3(\mathrm{C}_1) = r_1 0\ r_2(\mathrm{C}_1) = \mathrm{C}_1$. Posons : $r_2(\mathrm{C}_1) = \mathrm{D}$. On a : $r_1(\mathrm{D}) = \mathrm{C}_1$. D'où : $\mathrm{B_1C_1} = \mathrm{B_1D}$ et $\mathrm{A_1D} = \mathrm{A_1C_1}$. De plus : $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{B_1C_1}}, \overrightarrow{\mathrm{B_1D}}}) = \frac{2\pi}{3}$ et $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{A_1D}}, \overrightarrow{\mathrm{A_1C_1}}}) = \frac{2\pi}{3}$. On en déduit que les triangles $\mathrm{A_1B_1D}$ et $\mathrm{A_1C_1D}$ sont isométriques et isocèles respectivement en A_1 et B_1. Il en résulte que $\mathrm{A_1DB_1C_1}$ est un losange avec $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{C_1A_1}}, \overrightarrow{\mathrm{C_1B_1}}}) = \frac{\pi}{3}$. On en conclut que le triangle $\mathrm{A_1B_1C_1}$ est équilatéral.

62. Le point de Fermat

Solution

1) L'ensemble des points M du plan tels que $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{MB}}, \overrightarrow{\mathrm{MA}}}) = \frac{2\pi}{3}$ est l'arc capable d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et d'extrémités A et B. De même, l'ensemble des points M du plan tels que $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{MC}}, \overrightarrow{\mathrm{MB}}}) = \frac{2\pi}{3}$ est l'arc capable d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et d'extrémités B et C. Les deux arcs se coupent en un seul point F intérieur à ABC car tous les angles de ABC ont une mesure inférieure à $\frac{2\pi}{3}$. De plus, mes $\widehat{\mathrm{BFC}} = 2\pi -$ mes $\widehat{\mathrm{AFC}} - \mathrm{mes}\ \widehat{\mathrm{BFA}} = \frac{2\pi}{3}$. Avec l'orientation, on a : $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{FA}}, \overrightarrow{\mathrm{FC}}}) = \frac{2\pi}{3}$. Par suite le point F ainsi construit est unique. C'est le point de Fermat du triangle ABC.
2) Soit M un point intérieur au triangle ABC et r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On pose : N= $r(\mathrm{M})$; P= $r(\mathrm{C})$; $\mathrm{F}' = r(\mathrm{F})$, où F est le point de Fermat du triangle ABC. Par suite le triangle BMN est équilatéral et on a MN = MB. On a également NP =MC car r applique M sur N et C sur P et conserve la distance. Il résulte que $\mathrm{AM} + \mathrm{BM} + \mathrm{CM} = \mathrm{AM} + \mathrm{MN} + \mathrm{NP}$. On a évidemment $\mathrm{AM} + \mathrm{MN} + \mathrm{NP} \geq \mathrm{AP}$. En outre, on a $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{FB}}, \overrightarrow{\mathrm{FA}}}) = \frac{2\pi}{3}$. BFF' est un triangle équilatéral de sens direct car $\mathrm{F}' = r(\mathrm{F})$; par suite $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{FF}'}, \overrightarrow{\mathrm{FB}}}) = \frac{\pi}{3}$. Il en résulte que $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{FF}'}, \overrightarrow{\mathrm{FA}}}) = \pi$. D'où les points A, F et F'sont alignés (F appartient à [AF']). Par définition de F, $\mathrm{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{FC}}, \overrightarrow{\mathrm{FB}}}\right) = \frac{2\pi}{3}$, il résulte que $\mathrm{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{F'P}}, \overrightarrow{\mathrm{F'B}}}\right) = \frac{2\pi}{3}$ car r conserve les angles. $\mathrm{F}' = r(\mathrm{F})$, d'où le triangle FF'B est équilatéral de sens direct. Par suite, $\mathrm{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{F'B}}, \overrightarrow{\mathrm{F'F}}}\right) = \frac{\pi}{3}$. Il en résulte que $\mathrm{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{F'P}}, \overrightarrow{\mathrm{F'F}}}\right) = \pi$. Les points F, F' et P sont donc alignés. Il en résulte que $\mathrm{AP} = \mathrm{AF} + \mathrm{FF}' + \mathrm{F'P}$. On a $\mathrm{FF}' = \mathrm{FB}$, car BFF' est équilatéral et $\mathrm{F'P} = \mathrm{CF}$, car r conserve la distance. On conclut que : AM + BM +CM $\geq$ AF + BF + CF.

SITUATIONS COMPLEXES

63. **Le pont de l'amitié**

Solution

Analyse

Soit (D) la droite qui modélise la rive du côté du village A et (D′) celle qui modélise la rive du côté du village B. Soit $\vec{u}$ le vecteur normal à (D) de norme L et dont le sens est de la rive du côté de B vers A.

On désigne par B′ l'image de B par la translation de vecteur $\vec{u}$. Posons $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{QP}}$ où P est un point de (D) où commence le pont et Q celui de (D′) où s'achève le pont. Le trajet entre les deux villages vaut AP + PQ +QB. Il aussi égal à AP + PB′ + L. Il faut minimiser AP + PB′. Pour ce faire, il faut choisir P aligné avec A et B′. P doit être le point d'intersection de la droite (AB′) et de la droite (D).

64. **La table à manger**

Solution

Les deux rectangles ABCD et MNPQ sont isométriques. Puisqu'il n'y a pas de retournement du dessus de la table, l'isométrie qui transforme ABCD en MNPQ est un déplacement. Compte tenu du fait que la table pivote de sa position ABCD à la position MNPQ autour d'un point, ce déplacement est une rotation.

Le problème à résoudre ici la recherche de cette rotation et la détermination de ses éléments caractéristiques.

Soit O le centre du carré ABCD. Par le quart de tour indirect r de centre O, le rectangle ABCD a pour image le rectangle $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$ puis par la translation t vecteur $\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, le rectangle $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$ est transformé en le rectangle MNPQ.

L'isométrie qui transforme ABCD en MNPQ est donc $t0r$. L'isométrie $t0r$ est la composée d'une translation et d'une rotation d'angle non nul. Cette isométrie est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ dont le centre I est construit comme suit.

8 SIMILITUDES DIRECTES DU PLAN

1 SITUATION D'APPRENTISSAGE

L'approche pédagogique et la didactique

est celle de l'APC.

Pour l'exploitation de la situation,

vous pouvez vous inspirer du tableau suivant

Constituants de la situation	**Exemples de questions possibles**	**Réponses possibles des élèves**
Contexte	Où ou quand se déroule la scène ?	Dans un jardin formé par trois parties contigües
Circonstances	Indique le problème que Monsieur Konan veut résoudre	Dans le but d'arroser son jardin, Monsieur Konan veut installer un robinet qui soit situé à la fois sur trois chemins rectiligne
Tâche	Qu'est-ce que le professeur décide de faire avec ses élèves, pour donner suite à la préoccupation de Roger ?	Etudier les similitudes du plan pour vérifier si un tel emplacement est possible (droites concourantes)

2 DÉCOUVERTE DES HABILETÉS

Activité 1 : Définition d'une similitude du plan

O , A et B sont des points distincts du plan et f une application du plan (P) dans lui-même.

Déterminons dans chacun des cas ci-dessous, le nombre réel positif k tel que :

$\forall$ (M, N) $\in$ P× P, $f(M)f(N) = k$ MN

1) $k = 5$:
2) $k = 1$;
3) $k = 2$;
4) $k = 1$:
5) $k = \frac{1}{2}$
6) $k = 1$
7) $k = 1$

- **Exercice de fixation**

1

Pour chacune des affirmations suivantes, réponds par vrai si l'affirmation est vraie ou par faux si l'affirmation est fausse :

	Affirmations	Réponses
1	La symétrie centrale n'est pas une similitude.	F
2	Toute similitude du plan est une isométrie.	F
3	Toute isométrie du plan est une similitude du plan.	V
4	Une homothétie de rapport -1 est une similitude de rapport -1.	F
5	Une homothétie de rapport 4 est une similitude de rapport 4.	V
4	Aucune similitude du plan ne conserve la distance.	F
5	L'application identique est une similitude du plan.	V
6	Toute symétrie orthogonale est une similitude	V

Activité 2 : Décomposition d'une similitude du plan

Soit S une similitude de rapport k *(k est un nombre réel strictement positif)*, O un point quelconque du plan, et h l'homothétie de centre O et de rapport k.

Soit M et N des points quelconques du plan.

On pose h^{-1} (M) = M' ; h^{-1} (N) = N' et M'' = S(M') ; N'' = S (N')

1. Justifions que M''N'' = MN

On a : M''N'' = k M'N', or M'N'= $\frac{1}{k}$ MN, donc M''N'' = MN.

2.

M ≠ N et M''N'' = MN, donc il existe une isométrie i telle que :
i(M) = M'' et i(N) = N'', d'où So h^{-1} est une isometries i, soit S = ioh

3. On démontre de même que h^{-1}o S est une isométrie j, et donc S = hoj

- **Exercice de fixation**

2.

L'isométrie i est la symétrie centrale de centre O ou la rotation de centre O et d'angle orienté plat

Activité 3 : Etude de la réciproque

Réciproquement, considérons une homothétie h de rapport k (k est un nombre réel non nul), i une isométrie du plan et S l'application ponctuelle telle que : S = ioh. (ou S = h'o *j où h' est une homothétie et j une isométrie*)

1. S est une similitude de rapport $|k|$; en effet :

Considérons deux points distincts M et N, d'images respectives M'et N' par h.

On a : M'N' = $|k|$ MN. Soit M'' et N'', les images respectives des points M' et N' par l'isométrie i ; on a : M''N'' = M'N', soit M''N'' = $|k|$ MN. On conclut donc que l'application ponctuelle S est telle que pour tous points M et N d'images respectives M'' et N'' par S, on a : M''N'' = $|k|$ MN, donc S est une similitude de rapport $|k|$.

2.

k est un nombre réel strictement positif.

- L'activité 1 indique que toute similitude du plan peut s'écrire comme composée d'une homothétie de rapport k et d'une isométrie
- L'activité 2 indique que la composée d'une isométrie et d'une homothétie de rapport k est une similitude de rapport k

On conclut donc, que : une application S du plan dans le plan est une similitude de rapport k si et seulement s'il existe une homothétie h de rapport k et une isométrie i telles que :

S = i o h ou (S = h'o j où h' est une homothétie de rapport k et j une isométrie).

Exercice de fixation

3

Recopie et complète les énoncés suivants :

A est un point quelconque du plan

La composée de l'homothétie de centre A et de rapport -3 et d'une translation est une similitude de rapport 3.

Une similitude de rapport $\frac{3}{4}$ est la composée de l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{3}{4}$ et d'une rotation.

Activité 4 : Définition d'une similitude directe

Cas 1 ; Cas 3 ; Cas 4 .

- **Exercices de fixation**

4

1- F ; 2- V 3- F ; 4- F ; 5- V ; 6- F ; 7- V.

5

a) ; b) ; c ;

Parmi les applications ponctuelles ci-dessous, écris la lettre de celles qui sont des similitudes directes.

a) $t_{\vec{u}}$ o $h_{(A, -2)}$; a) $r_{(A, \frac{\pi}{2})}$ o $h_{(A, \frac{2}{7})}$; b) $r_{(A, \frac{-\pi}{4})}$ o $h_{(A, -\frac{1}{5})}$; c) $S_{(D)}$o $h_{(A, -2)}$;

d) $S_{(D)}$o$h_{(A,2)}$; e) $t_{\vec{u}}$o $S_{(D)}$; f) $S_{(D)}$o $S_{(D')}$; g) ($S_{(D)}$o $S_{(D')}$)o $h_{(A,2)}$.

6 a) $\frac{4}{7}$; b) $\frac{5}{7}$; lire c) 1

7

Faire placer deux points A et B et construire la figure.

Activité 5 : Décomposition d'une similitude directe

1. les déplacements du plan sont les translations et les rotations
2. Une similitude directe est donc, soit la composée d'une homothétie et d'une rotation, soit la composée d'une homothétie et d'une translation.

la composée d'une homothétie et d'une translation est soit une homothétie, soit une translation. Il s'en suit donc que toute similitude directe est soit une translation, soit la composée d'une homothétie et d'une rotation.

3. Une translation est une bijection du plan dans le plan, la composée de deux bijections étant une bijection (l'homothétie et la rotation), il vient, donc que toute similitude directe du plan est une bijection du plan dans lui-même.

- **Exercices de fixation**

8

Toute similitude directe du plan est soit une translation, soit la composée d'une homothétie et d'une rotation.

9

Recopie le numéro de chaque affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

1.V ; 2. F ; 3. F ; 4. F ; 5. F

Activité 6 : Propriétés caractéristique des similitudes directes

Soit S une similitude directe de rapport *k*, *k* est nombre réel strictement positif.

On suppose que S n'est pas une translation.

On considère deux points distincts du plan M et N d'images respectives M' et N' par S.

On se propose de démontrer que S est une similitude directe du plan si et seulement s'il existe un nombre réel β tel que :

$$\begin{cases} M'N' = k\,MN \\ (\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}}) = \hat{\beta} \end{cases}$$

1. On suppose que S est une similitude directe de rapport *k* qui n'est pas une translation.

a) S = *ioh*

b) M et N étant deux points distincts du plan d'images respectives M'et N'par S, on a par définition d'une similitude de rapport k : $M'N' = k\,MN$.

c) S = *ioh*

On considère deux points distincts du plan M et N d'images respectives M_1 et N_1 par h, on a d'après la propriété des homothéties, $\overrightarrow{M_1N_1} = k\overrightarrow{MN}$. Soit M' et N' les images respectives des points M_1 et N_1 par r, on a : $(\widehat{\overrightarrow{M1\,N1}, \overrightarrow{M'N'}}) = \hat{\beta}$. k, étant un réel strictement positif, les vecteurs $\overrightarrow{M_1N_1}$ et $\overrightarrow{MN}$ ont le même sens d'où : $(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}}) = \hat{\beta}$.

d) Si s est une translation, on a : $\begin{cases} M'N' = MN \\ (\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}}) = \hat{0} \end{cases}$.

2. Réciproquement, soit S une application ponctuelle telle que : pour deux points quelconques, M et N d'images respectives M' et N' par S, on a : $\begin{cases} M'N' = k\,MN \\ (\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}}) = \hat{\beta} \end{cases}$

Etudions l'application ponctuelle *hoS*.

Soit h une homothétie de rapport $\frac{1}{k}$, posons $S(M) = M'$; $S(N) = N'$. on a donc :

$M'N' = k\,MN$.

Posons également que $h(M') = M''$; $h(N') = N''$, donc, $\overrightarrow{M''N''} = \frac{1}{k}\overrightarrow{M'N'}$, soit

$M''N'' = \frac{1}{k} M'N'$. De l'égalité : $M'N' = k\,MN$, on déduit que : $M''N'' = MN$. On sait par hypothèse que $(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}}) = \hat{\beta}$, les vecteurs $\overrightarrow{M'N'}$ et $\overrightarrow{M''N''}$ sont de même sens ($\frac{1}{k} > 0$) ,

donc $(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M''N''}}) = \hat{\beta}$.

L'application ponctuelle *hoS*, est telle que pour tout point M et N d'images respectives M'' et N'' par *hoS*, on a : $M''N'' = MN$ et $(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M''N''}}) = \hat{\beta}$. Il s'agit bien d'une rotation r, d'angle $\hat{\beta}$. *hoS*. = r, donc, $S = h^{-1}o\ r$. S est bien une similitude directe de rapport k.

Exercice de fixation

10

Rapport : 5 et angle : $\frac{\pi}{4}$

Activité 7 : Décomposition canonique d'une similitude directe

S(Ω) = Ω (car ce point est invariant). En appliquant la propriété ci-dessous, en remplaçant N par Ω et M un point du plan distinct de Ω , on a bien M'= S(M) si et seulement si
$$\begin{cases} \Omega M' = k\,\Omega M \\ (\widehat{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}}) = \hat{\beta} \end{cases}$$

1. Soit h l'homothétie de centre **Ω** et de rapport k
   a) Justifions que : S = h o r où r est la rotation de centre **Ω** et d'angle orienté β

M un point du plan distinct de Ω

On sait que M'= S(M) si et seulement si $\begin{cases} \Omega M' = k\,\Omega M \\ (\widehat{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}}) = \hat{\beta} \end{cases}$

Posons : r(M) = N et h(N) = M'' soit : h o r *(M)* = M'' ;

r(M) = N, donc $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega N}}) = \hat{\beta}$ et $\Omega M = \Omega$ N. h(N) = M'', donc $\overrightarrow{\Omega M''} = k\overrightarrow{\Omega N}$.
$(\widehat{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega N}}) = \hat{\beta}$ et $\overrightarrow{\Omega M''} = k\overrightarrow{\Omega N}$, donc $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M''}}) = \hat{\beta}$, car k est une réel strictement positif.
$\overrightarrow{\Omega M''} = k\overrightarrow{\Omega N}$, indique que ΩM'' = kΩN, or $\Omega M = \Omega$ N, donc ΩM'' = kΩM. On a donc :
$\begin{cases} \Omega M'' = k\,\Omega M \\ (\widehat{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M''}}) = \hat{\beta} \end{cases}$, soit S(M) = M''. Or S(M) = M', donc M'= M''.
Ainsi, S (Ω) = (hor)(Ω) = Ω et pour tout point M distinct de Ω, S(M) = (hor)(M),
donc : S = h o r.

Justifions que pour tout point M du plan, (h o r) (M) = (r o h) (M).
Posons (h o r) (M) = M' et r o h) (M) = M'', puis montrons que M' = M''

(h o r) (M) = M', donc $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}}) = \hat{\beta}$ et $\Omega M' = k\,\Omega M$;

(ro h (M) = M'', donc $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M''}}) = \hat{\beta}$ et $\Omega M'' = k\,\Omega M$.

On donc : $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}}) = (\widehat{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M''}})$ et ΩM' = ΩM''. $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}}) = (\widehat{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M''}})$ sont deux angles orientés de même origine $\overrightarrow{\Omega M}$, donc il existe il existe un réel non nul k tel que :

$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M''}$; or ΩM' = ΩM'', donc k = 1. On a donc $\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\Omega M''}$ soit M'= M''.

On a bien : h o r = h *o* r.

Exercices de fixation

11

Ecris chacune des similitudes directes ci-dessous, sous sa forme canonique.

a) $h_{(A, \frac{2}{3})}$ o $h_{(A, -2)}$ = $h_{\left(A;-\frac{4}{3}\right)} = h_{\left(A;\frac{4}{3}\right)} \circ r_{(A;\pi)}$ = S (A ; $\frac{4}{3}$; π) .

b) $r_{(A, \frac{-\pi}{4})}$ o $h_{(A, -\frac{1}{5})}$ = $r_{(A, \frac{3\pi}{4})}$ o $h_{(A, \frac{1}{5})}$ = S (A ; $\frac{1}{5}$; $\frac{3\pi}{4}$) ;

c) $r_{(A, \frac{\pi}{2})}$ o $h_{(A, \frac{5}{7})}$ = S (A ; $\frac{5}{7}$; $\frac{\pi}{2}$)

12

Soit O un point du plan.

On considère la similitude directe S de centre O, de rapport 2 et d'angle orienté $\frac{-\pi}{4}$.

1. S = $r_{(O, \frac{-\pi}{4})}$ o $h_{(O,\ 2)}$
2. Faire les constructions

Activité 8 : Composée de similitudes directes

Soit S et S' deux similitudes directes de rapports respectifs k et k' et d'angles orientés respectifs $\hat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$. Etudions l'application S0S'

Soit M et N deux points quelconques du plan. Posons : S(M) = M' ; S(N) = N'; S'(M') = M'' et S'(N') = N''

On a **:** M'N' = kMN et M''N'' = k M'N', donc M'N'' = kk'MN. S0S' est donc une similitude de rapport kk'. En outre, $(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}}) = \hat{\alpha}$ et $(\widehat{\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M''N''}}) = \widehat{\beta}$, donc

$(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M''N''}}) = (\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}}) + (\widehat{\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M''N''}})$, soit : $(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M''N''}}) = \hat{\alpha} + \widehat{\beta}$.

S0S' est bien une similitude de rapport kk' et d'angle orienté $\hat{\alpha} + \widehat{\beta}$.

2- Si k' = 1, S' est soit une translation ou une rotation, donc S0S' est une similitude directe de rapport k, d'angle $\hat{\alpha} + \widehat{\beta}$ avec éventuellement $\widehat{\beta}$ nul, dans le cas où S' est une translation.

Exercice de fixation

13

gof est une similitude directe de rapport 3 et d'angle $\frac{\pi}{12}$

Activité 10 : Propriétés de conservation

Toutes ces propriétés se justifient à partir de la décomposition d'une similitude directe comme composée d'une homothétie et d'un déplacement. Appliquer ensuite les propriétés de conservation des homothéties et des déplacements du plan .

	Affirmations	Réponses
1	Toute similitude directe transforme un angle orienté en son opposé	F
2	La symétrie centrale de centre O est la similitude directe de centre O, de rapport 1 et d'angle orienté π.	V
3	Si C et D sont deux points d'images respectives A et B par une similitude directe de rapport *k*, alors CD = *k* AB	F
4	Les images de deux droites parallèles par une similitude directe sont deux droites orthogonales.	F
5	Les images de deux droites perpendiculaires par une similitude directe sont deux droites orthogonales.	V

Activité 11 : Images de figures simples par une similitude directe

Toutes ces propriétés se justifient à partir de la décomposition d'une similitude directe comme composée d'une homothétie et d'un déplacement. Appliquer ensuite les propriétés relatives aux images de figures simples par une homothéties et un déplacement du plan .

Exercices de fixation

16

	Affirmations	Réponses
1	Toute similitude directe transforme une droite en une demi-droite	F
2	Si C et D sont deux points distincts d'images respectives A et B par une similitude directe de rapport *k*, alors l'image de la droite (AB) par S est la droite (DC).	F
3	Si C et D sont deux points distincts d'images respectives A et B par une similitude directe de rapport *k*, alors l'image de la droite (CD) par S est la droite (AB).	V
4	Si A et B sont deux points d'images respectives E et F par une similitude directe de rapport *k*, alors l'image de la demi-droite [AB) par S est la demi-droite [FE).	F
5	Si A et B sont deux points d'images respectives E et F par une similitude directe de rapport *k*, alors l'image de la demi-droite [BA) par S est la demi-droite [FE).	V
6	Si C et D sont deux points distincts d'images respectives A et B par une similitude directe de rapport *k*, alors l'image de la droite (AB) par S est la droite (DC).	F
7	Si K et P sont deux points distincts d'images respectives A et B par une similitude directe de rapport *k*, alors l'image du segment [KP] est le segment [BA] et KP = k AB	F
8	Si C et D sont deux points d'images respectives A et B par une similitude directe de rapport *k*, alors AB = *k* CD	V

17

Construction immédiate

Activité 12 : Similitude déterminée par son centre, un point et son image

Ω, M et M' sont trois points distincts du plan.

Justifie l'existence d'une similitude de centre Ω qui applique M sur M'.

Si une telle similitude S existe, son centre est Ω, son rapport k est tel que : $k = \frac{\Omega M'}{\Omega M}$ et son angle orienté est donné par : $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}})$

Inversement la similitude directe de centre Ω, de rapport $\frac{\Omega M'}{\Omega M}$ et d'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}})$ applique M sur M'.

Exercices de fixation

18

Le rapport k de S est tel que : $k = \frac{GE}{GF} = \cos\frac{\pi}{4}$, donc $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

L'angle de S est donné par $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{GF}, \overrightarrow{GE}})$, soit $\frac{-\pi}{4}$.

19

$k = \frac{AB}{CB} = \cos\frac{\pi}{4}$, donc $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

La mesure principale de son angle orienté est : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$, soit $\frac{\pi}{4}$

20

Soit B'=mil$[AC]$; on a $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{BB'}{BC}$ d'où $BB' = \frac{\sqrt{3}}{2}BC$.

Or $BG = \frac{2}{3}\ BB'$ d'où $BG = \frac{\sqrt{3}}{3}BC$.

Comme $k = \frac{BG}{BC}$, donc $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\theta = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BG}}) = \frac{\pi}{6}$.

Activité 13 : Détermination d'une similitude par deux couples de points homologues

I. Existence de la similitude directe S

Soit A, B, A', B' quatre points du tels que : $A \neq B$ et $A' \neq B'$.

On se propose de justifier l'existence d'une similitude directe S et une seule telle que :

S(A) = A' et S(B) = B'

- Si AB = A'B'

Une similitude directe vérifiant S(A) = A' et S(B) = B' est soit une translation, soit une rotation (voir la leçon sur les isométries du plan)

- Si AB ≠ A'B'
  a) Soit B'' le point de de la demi-droite [A'B') tel que A'B'' = AB.
  Comme dans le cas précédent, il existe un seul déplacement i tel que : i(A) = A' et i(B) = B''
  b) Soit h l'unique homothétie de centre A' qui applique B'' su B', on a

  hoi(A) = h(A') = A' et hoi(B) = h(B'') = B'. En posant $S = hoi$, il existe donc une unique similitude S telle que : S(A) = A' et S(B) = B

  Caractérisation de la similitude *S*

1. **Cas où les droite (AB) et (A'B') sont parallèles**.

a) Si les droites (AA') et (BB)' sont parallèles, ABB'A' est un parallélogramme (éventuellement aplati) et donc $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$. S est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.
b) Si les droites (AA') et (BB)' ne sont pas parallèles, soit Ω le point d'intersection des droites (AA') et (BB)'. Considérons l'homothétie h de centre Ω qui applique A sur A', h applique B sur B' et répond à la question.
h est l'homothétie de centre Ω et de rapport k où et k le nombre réel : $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$.

2. **Cas où les droite (AB) et (A'B') ne sont pas parallèles**

a) S ne peut être ni une translation, ni une homothétie si non les droite (AB) et (A'B') seraient parallèles.
b) La similitude cherchée a pour rapport le nombre réel k tel que : $k = \frac{A'B'}{AB}$. Son angle est donné par : $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}\right)$. Notons $\hat{\alpha}$ l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}\right)$.

c) Détermination du point Ω.

Soit I le point d'intersection des droites (AB) et (A'B'), (C) le cercle passant par les points I, A et A' et (C') le cercle passant par les points I, B et B'.

En supposant qu'aucun des points A, B, A' et B' n'est confondu avec le point I

- Justifions que le point Ω appartient à la fois au cercle (C) et (C').

Le point I est aligné avec les points A et B et avec les points A' et B', donc $\left(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IA'}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IB'}}\right) = \hat{\alpha}$. Or $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega B'}}\right) = \hat{\alpha}$. On a $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IA'}}\right)$, donc le point Ω appartient au cercle (C) circonscrit au triangle IAA'. De même, $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega B'}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IB'}}\right)$, donc le centre Ω appartient au cercle (C') circonscrit au triangle IBB'. Le point I appartient à ces deux cercles, donc si les cercles C) et (C') sont tangents, alors Ω = I et l'angle de la similitude est : $\left(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IA'}}\right)$. Son rapport est : $\frac{IA'}{IA}$.

- Justifions que si les cercles (C) et (C') sont sécants, alors Ω est le second point d'intersection des cercles (C) et (C') distinct du point I.

Supposons que I est le centre de la similitude S. Les points I, A et B sont alignés, donc il existe un nombre réel non nul μ tel que $\overrightarrow{IB} = \mu\overrightarrow{IA}$ et donc $\overrightarrow{IB'} = \mu\overrightarrow{IA'}$. Ainsi, l'homothétie de centre I et de rapport μ transforme le cercle C) en (C'), ce qui indiquerait que les centres des cercles C) et (C') seraient alignés avec le point I et donc les cercles C) et (C') tangents en I contrairement à l(hypothèse selon laquelle les cercles C) et (C') sont sécantes.

On retient donc que lorsque les cercles C) et (C') sont sécants, le centre de la similitude S est le second point d'intersection des cercles C) et (C') autre que le point I.

Exercice de fixation

21

- on construit le centre Ω par la méthode précédente ;
  (On pose S = hor où h est l'homothétie de centre Ω, de rapport $\frac{A'B'}{AB}$ et r la rotation de centre Ω et d'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}}\right)$).
- on construit l'image M_1 du point M par la rotation r ;
- on construit l'image A_1 du pont A (ou du point B) par la rotation r ;
- on construit l'image M' du point M_1 par l'homothétie de centre Ω qui applique A_1 sur A'.

Activité 14 : Similitude déterminée par son angle, son rapport, un point et son image.

Soit un k nombre réel strictement positif, $\widehat{\theta}$ un angle orienté et A et A' sont deux points distincts du plan

On peut ramener cette activité à la précédente en définissant un autre couple de points

(B, B') tel que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \widehat{\theta}$ et A'B' = k AB.

Si B est choisi et distinct de A, le point B' est parfaitement déterminé par les contraintes $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \widehat{\theta}$ et A'B' = k AB. On ramène le problème à l'existence d'une unique similitude directe déterminée par deux couples de points homologues.

Exercice de fixation

1. S(C) = E et s(A) = B, le rapport de S est 2, donc BE = 2AC.
2. S(C) = E et s(A) = B, l'angle de S est $\frac{-\pi}{3}$, donc Mes $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BE}}) = \frac{-\pi}{3}$.
3. BE = 2AC et Mes $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BE}}) = \frac{-\pi}{3}$, donc E appartient au cercle de centre B et de rayon 2AC tel que Mes $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BE}}) = \frac{-\pi}{3}$. Le point E est parfaitement déterminé comme point d'intersection d'un cercle et d'une demi-droite d'origine B.
4. Le point E se construis aisément.

5. Le centre de la similitude se construit comme précédemment c'est à dire connaissant deux couples de points homologues.

Activité 15 : Figures semblables

Construction immédiate

Exercice de fixation

23

Construction immédiate (on peut par exemple placer un point O et utiliser la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle droit direct).

Activité 16 : Utilisation des similitudes

1. Utiliser la composée d'une similitude pour démontrer une propriété

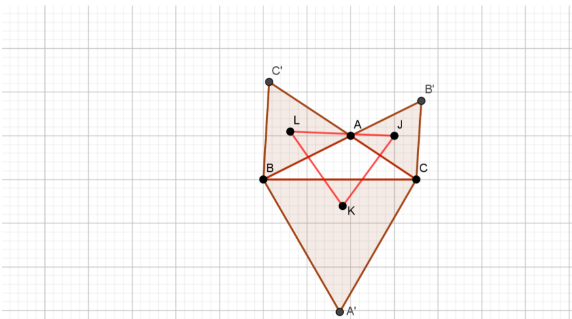
Soit S la similitude directe de centre A qui transforme J en C et S'la similitude directe de centre B qui transforme C en K.

S a pour rapport $\frac{AC}{AJ}$, soit $\sqrt{3}$; son angle est $\frac{-\pi}{6}$. De même, S'est la similitude directe de centre B, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{3}$ et d'angle $\frac{-\pi}{6}$.

S'o S est une similitude directe de rapport 1 et d'angle $\frac{-\pi}{3}$.. de plus, S o S'(L) = L, donc

S' o S est la rotation de centre L, d'angle $\frac{-\pi}{3}$..

On a aussi S' o S(J) = K, donc S'oS est la rotation de centre L, d'angle orienté $\frac{-\pi}{3}$.. qui applique J sur K. Le triangle IJK est donc équilatéral.



II. Utiliser une similitude pour chercher un lieu géométrique

Erratum : noter : triangle OMN au lieu de AMN ; le triangle OMN rectangle et isocèle en M au lieu de rectangle et isocèle en A.

Enlever la question 3

Pour tout point M de la droite (D), associons le point N du plan, image du point M par la similitude directe de centre O qui applique M sur N, l'angle de S est $\frac{\pi}{4}$. et son rapport est donné par $\frac{ON}{OM}$ soit $\sqrt{2}$.

1. Lorsque le point M décrit la droite (D), son image N par la similitude S décrit la droite (Δ), image de la droite (D) par S.
2. a) K est le projeté orthogonal de O sur la droite (D), et L le point tel que le triangle OKL soit rectangle, isocèle en K et de sens direct, donc le point L est l'image du point K par S. Il en résulte donc que la droite (Δ) est la droite (NL). Il suffit alors de justifier que $(\overrightarrow{LO},\overrightarrow{LN})$ est droit. $Mes(\overrightarrow{LO},\overrightarrow{LK}) = \frac{\pi}{4}$ (le triangle KOL est rectangle et isocèle en K) ; S(K) = L et S(M) = N, donc $Mes(\overrightarrow{KM},\overrightarrow{LN}) = \frac{\pi}{4}$, K appartient à la demi-droite [LM), donc $Mes(\overrightarrow{LK},\overrightarrow{LN}) = \frac{\pi}{4}$.

   $(\overrightarrow{LO},\overrightarrow{LN}) = (\overrightarrow{LO},\overrightarrow{LK}) + (\overrightarrow{LK},\overrightarrow{LN})$, donc

   Mes $(\overrightarrow{LO},\overrightarrow{LN}) = \frac{\pi}{2}$, donc les droites (LO) et (Δ) sont perpendiculaires.

c) Construction immédiate

3 DES QUESTIONS D'ÉVALUATION

Question 1

h(A, $\frac{2}{7}$) o h(A, -2) = h(A, $\frac{4}{7}$) o r(A, π), donc h(A, $\frac{2}{7}$) o h(A, -2) est la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{4}{7}$ et d'angle π.

Question 2

L'angle orienté de S est $\frac{3\pi}{4}$; le rapport de S est donné par $\frac{OC}{OI}$ soit $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercices de fixation

Exercice 1

1. V
2. F
3. V
4. F
5. V

Exercice 2

Ecris chacune des similitudes directes ci-dessous, sous sa forme canonique.

a) $h_{(A,\frac{2}{3})}$ o $h_{(A,-2)} = h_{(A,\frac{4}{3})}$ o $r_{(A,\pi)}$;

b) $r_{(A,\frac{-\pi}{4})}$ o $h_{(A,-\frac{1}{5})} = h_{(A,\frac{1}{5})}$ o $r_{(A,\frac{3\pi}{4})}$;

c) $r_{(A,\frac{\pi}{2})}$ o $h_{(A,\frac{5}{7})}$ (est déjà sous sa forme canonique).

Exercice 3

Il suffit de construire l'image du point A par la similitude directe de centre B, de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Exercice 4

$k = \frac{BG}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et et $\theta = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BG}}) = \frac{\pi}{6}$

Exercice 5

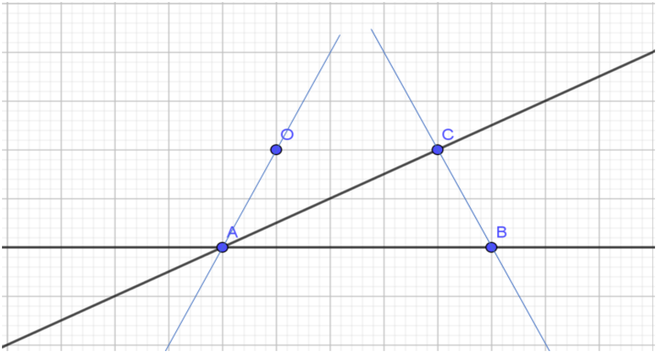
1. F
2. V
3. F
4. V

……………………..

Figure à compléter

1. $S_1((AC)) = (BC)$ car $S_1(A) = B$
2. $S_2((AC)) = (OA)$
3. $S_3([AC)) = [A'B')$

4. $S_4([AC]) = [A''C'']$



Exercice 6

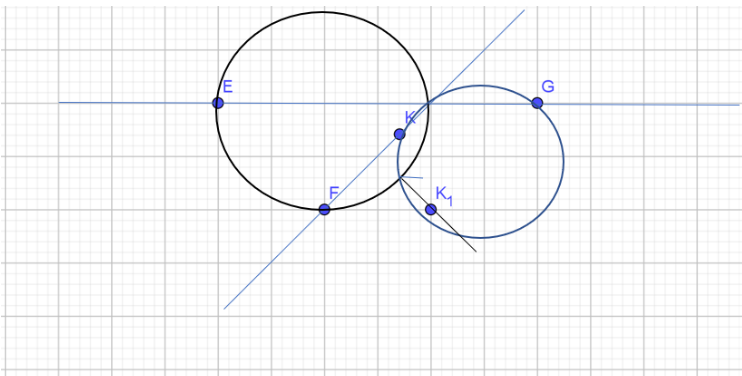
(EG) et (FK) ne sont pas parallèles, soit I le point d'intersection des droites (EG) et (FK)

On a : $\theta = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{EG};\overrightarrow{FK}}) = \frac{\pi}{4}$ et $k = \frac{FK}{EG} = \frac{1}{3}$

(EG) et (FK) ne sont pas parallèles ; $(EG) \cap (FK) = \{I\}$

$\mathcal{C}_{(IEF)} \cap \mathcal{C}_{(IKG)} = \{O\,;I\}$. Le second point d'intersection est O est le centre de la similitude S

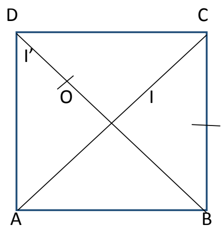
Compléter la figure ci-dessous ;



Exercice 7

1.B ; 2.B ; 3.C ; 4C ; 5.B

Exercice 8



a) $k = \frac{AO}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\theta = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AO}}) = \frac{\pi}{4}$

b)$S(C) = D$ car $\frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}}) = \frac{\pi}{4}$

c) $S(B) = O$ et $S(C) = D$

Donc $S((BC)) = (OD)$

d) $S(B) = O$; $S(C) = D$ et $S(I) = I'$

$\mathrm{I} = \text{mil}[BC]$, donc son image $\mathrm{I}' = \text{mil}[OD]$

L'image de I est I' le milieu de $[OD]$

Exercice 9

a)$k = \frac{BA}{BC} = 1$ et et $\theta = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) = \frac{\pi}{3}$

b)$k = \frac{BG}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et et $\theta = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BG}}) = \frac{\pi}{6}$

c)$k = \frac{GC}{GB} = 1$ et et $\theta = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{GB},\overrightarrow{GC}}) = 2\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = \frac{2\pi}{3}$

d)$k = \frac{GA}{GB} = 1$ et et $\theta = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{GB},\overrightarrow{GA}}) = -\frac{2\pi}{3}$

Exercice 10

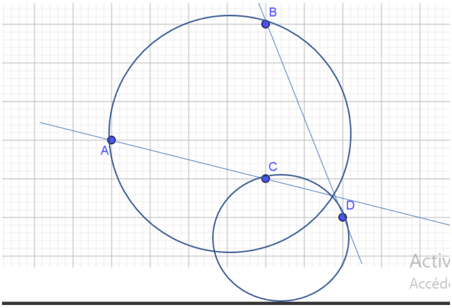
$$S(A) = B \text{ donc } \begin{cases} \frac{\Omega B}{\Omega A} = 2 \\ \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega B}}) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$\frac{\Omega B}{\Omega A} = 2$ Ainsi $\Omega \in \mathcal{C}([G_1G_2])$ où $G_1 = \text{bar}\{(A,2);(B,1)\}$ et $G_2 = \text{bar}\{(A,-2);(B,1)\}$

$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega B}}) = \frac{\pi}{4}$, donc Ω appartient à l'arc capable (Γ) de mesure $\frac{\pi}{4}$ d'extrémité A et B. Par suite $(\Gamma) \cap (\mathcal{C}) = \{\Omega\}$

Exercice 11

Prendre le second point d'intersection



Exercice 12

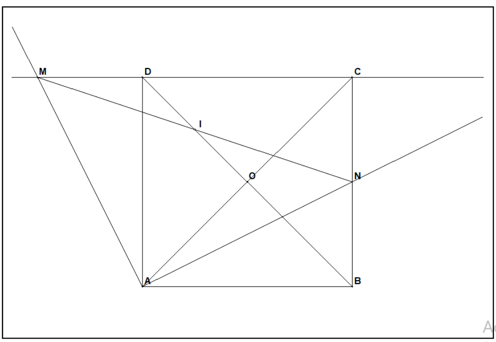
a)$k = \frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\theta = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}}) = \frac{\pi}{4}$

b)$k = \frac{AB}{AO} = \sqrt{2}$ et $\theta = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB}}) = -\frac{\pi}{4}$

c)$k = \frac{AC}{AO} = 2$ et $\theta = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AC}}) = 0$

d)$k = \frac{BO}{BA} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\theta = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BO}}) = -\frac{\pi}{4}$

Exercice 13



Soit $r = r_{\left(A\,;\,-\frac{\pi}{2}\right)}$

On a $r(D) = B$ car $AB = AD$ et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}}) = -\frac{\pi}{2}$ donc $r\big((DC)\big) = (BC)$ car $(BC) \perp (DC)$ ((BC) est la perpendiculaire à (DC) passant par B).

$(DC) \cap (AM) = \{M\}$ donc $r\big((DC)\big) \cap r\big((AM)\big) = \{r(M)\}$

Donc $(BC) \cap (AN) = \{r(M)\}$ or $(BC) \cap (AN) = \{N\}$

D'où $r(M) = N$ Ainsi AMN est un triangle rectangle isocèle en A.

2)les points A, M et I sont deux à deux distincts, donc il existe une similitude directe s de centre A qui transforme M en I.

3)AMN est un triangle rectangle isocèle en A et I est le milieu de $[MN]$ donc le triangle AMI est rectangle isocèle en I.

$k = \frac{AI}{AM} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AI}}) = -\frac{\pi}{4}$

$s = S_{\left(A;\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\pi}{4}\right)}$

4) On a $s(M) = I$ et $M \in (DC)$ donc

On a $s(D) = O$ où O est le milieu de $[BD]$

Car $\frac{AO}{AD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AO}}) = -\frac{\pi}{4}$

Et $s(C) = B$ car $\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}) = -\frac{\pi}{4}$

Ainsi $s\big((DC)\big) = (BD)$

Lorsque M décrit la droite (DC), son image décrit la droite (BD)

Le point I décrit donc la droite (BD)

Exercice 14

1)$h(A) = A'$ où $A' = S_A(B)$

$h(M) = C$ car $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BM}$

2)Posons $r = R_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)}$

On a : $r \circ h(A) = r(A') = B'$ et $r \circ h(M) = r(C) = C'$

3)$s = r \circ h$ est une similitude directe de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$

a)

A	M	B	(AM)
A'	C'	B'	$(B'C')$

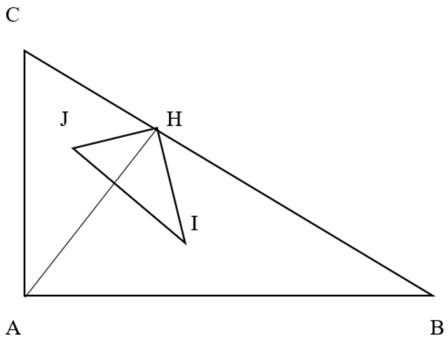
S

L'angle de s est $\frac{\pi}{2}$ alors les droites (AM) et $(B'C')$ sont perpendiculaires.

b) Le rapport de s est 2 alors $B'C' = 2AM$

Exercice 15

1)



2) a) On a mes$C\hat{A}H$ + mes$A\hat{C}H = 90$ et mes$A\hat{B}H$ + mes$A\hat{C}H = 90$ donc

mes$C\hat{A}H$ = mes$A\hat{B}H$

de plus $\tan A\hat{B}H = \frac{AH}{HB}$ et $\tan C\hat{A}H = \frac{CH}{AH}$ d'où $\frac{AH}{HB} = \frac{CH}{AH}$

ABH et AHC sont deux triangles tels que mes$C\widehat{H}A$ = mes$A\widehat{H}B$ et $\frac{AH}{HB} = \frac{CH}{AH}$

Donc les deux triangles sont donc semblables, il existe donc une similitude directe plane s qui transforme AHB en AHC.

2)b) On a $\frac{HB}{HA} = \frac{HA}{HC} = \frac{BA}{AC}$

Le centre de s est H

L'angle de s est $-\frac{\pi}{2}$

Le rapport de s est $\frac{AH}{HB}$

2) c) I est le point de concours des bissectrices du triangle AHB

Par conservation du contact le point de concours des bissectrices du triangle AHC ; J est l'image de I donc $s(I) = J$

d) s est la similitude directe de centre H, d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de rapport k où $k = \frac{AH}{HB}$

comme $s(I) = J$ alors le triangle HIJ est rectangle en H.

3) $s(B) = A$ et $s(I) = J$

Donc $(BI) \perp (AJ)$ Car l'angle de s est $-\frac{\pi}{2}$

4)$S'(HIJ) = AHB$

Le centre de S' est H et l'angle de s'est θ où

$\theta = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{HJ};\overrightarrow{HA}}) = \frac{1}{2}\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{HC};\overrightarrow{HA}}) = \frac{\pi}{4}$

[(HI)bissectrice]

5)

S

J	I
A	B

Donc $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{JI};\overrightarrow{AB}}) = \frac{\pi}{4}$

On a $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{IJ}\,;\overrightarrow{AB}}) = \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{JI}\,;\overrightarrow{AB}}) + \pi$

$= \frac{\pi}{4} + \pi$

$= \frac{5\pi}{4}$, donc $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{IJ}\,;\overrightarrow{AB}}) = -\frac{3\pi}{4}$

Exercice 16

Voir méthode de l'exercice 13

Exercice 17

1. A, E, C et G sont quatre points du plan tels que $A \neq E$ et $C \neq G$ il existe une similitude directe et une seule telle que $S(A) = C$ et $S(E) = G$
2. Soit θ l'angle de S on a :

$\theta = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AE}\,;\overrightarrow{CG}}) = -\frac{\pi}{2}$

2) Soit Ω le centre de S.

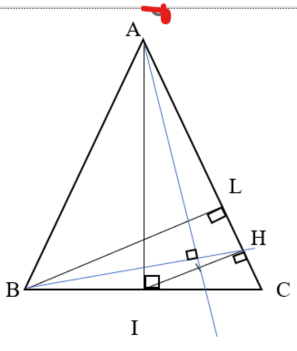
3. On a $(AE) \cap (CG) = \{B\}$

Ainsi Ω appartient au cercle circonscrit à ACB et au cercle circonscrit à EGB.

D'où Ω appartient aux cercles (Γ) et (Γ′)

4. $(\Gamma) \cap (\Gamma') = \{B; K\}$, donc $\Omega \neq B$.
5. Ω est l'autre point d'intersection autre que B donc $\Omega = K$

Exercice 18



Les triangles BCL et AHI respectivement rectangles en L et en H sont tels que :

mes $\widehat{LBC}$ = mes $\widehat{IAC}$. Ils sont donc semblables *(deux angles de même mesure dans deux triangles)*. Soit S la similitude transformant BLC en AHI

les égalités d'angle indiquent que S(B) = A ; S(L) = H et S(C) = I. l'angle de la similitude S est $\mathrm{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{BL}, \overrightarrow{AH}}\right)$ soit : $\frac{\pi}{2}$

S([LC]) = [HI]. Or H est le milieu du segment [LC] et J celui du segment [IH], donc S(H) = J (conservation du milieu)

S(B) = A et S(H) = J, d'où $\mathrm{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{AJ}}\right) = \frac{\pi}{2}$, donc les droites (BH) et (AJ) sont perpendiculaires.

Exercice 19

Considérons la similitude de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$

$s = S_{\left(A;\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right)}$

On a :

S

A	B	C	D
A	C	E	F

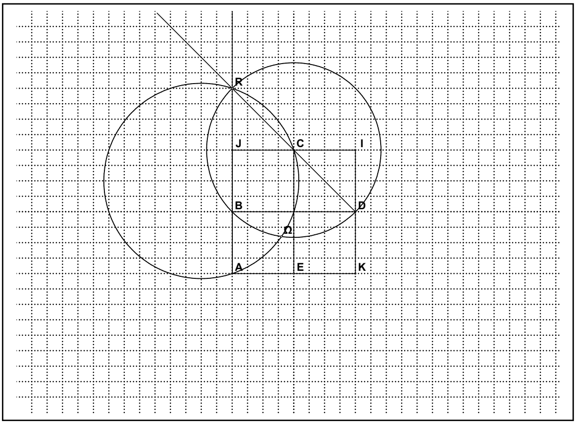
Donc $s(ABCD) = ACEF$

Toute similitude multiplie les aires par le carré du rapport donc

$\mathcal{A}_{ACEF} = \left(\sqrt{2}\right)^2 \mathcal{A}_{ABCD}$

Ainsi $\mathcal{A}_{ACEF} = 2\mathcal{A}_{ABCD}$

Exercice 20



On a

$(AB) \cap (CD) = \{R\}$

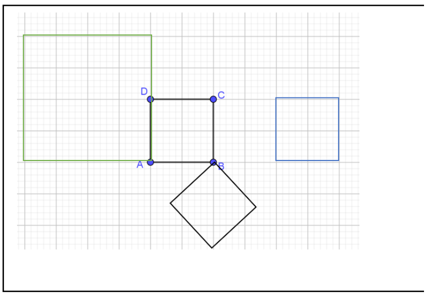
$(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit au triangle ACR

$(\mathcal{C}')$ le cercle circonscrit au triangle BDR

$(\mathcal{C}) \cap (\mathcal{C}') = \{R, \Omega\}$

Ω est le second point d'intersection de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$

Exercice 21



1. $S = S_{\left(A;2;\frac{\pi}{2}\right)}$
2. $S = S_{(CB)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(AD)}$

$= S_{(CB)} \circ S_{(AC)}$

$= t_{2\overrightarrow{AB}}$

3. $S = r_{\left(B\,;-\frac{\pi}{4}\right)} \circ r_{(B\,;\pi)}$

$= r_{\left(B;\frac{3\pi}{4}\right)}$

Exercice 22

1. Soit S_1 cette similitude directe.

a) $S_1(K) = K$ et $S_1(M) = M'$, l'angle de la similitude est droit, donc S(M) appartient à la droite perpendiculaire à la droite (KM) passant par K. notons-la (D)

De plus $S_1(P) = L$, donc $S_1(M)$ appartient aussi à la perpendiculaire à la droite (PM) passant par L c'est-à-dire à la droite (LP)

$S_1(M)$ est le point d'intersection des droites (LP) et de la droite (D) et donc $S_1(M) = M'$.

b) Soit S' la similitude directe de centre K qui applique L sur M'

L'angle de S' est $\left(\widehat{\overrightarrow{KL}, \overrightarrow{KM'}}\right)$ et son rapport est $\frac{KM'}{KL}$

On sait que S_1 (K) = K, S_1(P) = L et S_1 (M) = M' , donc $\left(\widehat{\overrightarrow{KP}, \overrightarrow{KM}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{KL}, \overrightarrow{KM'}}\right)$

(Conservation des mesures d'angle) et de plus, $\frac{KM'}{KM} = \frac{KL}{KP}$ soit $\frac{KM}{KP} = \frac{KM'}{KL}$

On a donc : $\left(\widehat{\overrightarrow{KP}, \overrightarrow{KM}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{KL}, \overrightarrow{KM'}}\right)$ et $\frac{KM}{KP} = \frac{KM'}{KL}$, donc S'(P) = M.

La similitude directe S' de centre K est telle que : S'(L) = M' et S'(P) = M, donc le triangle KMM' est l'image par S' du triangle fixe KLP lorsque M décrit la droite (Δ).

2 a)le point I, milieu de [MM'], la similitude a pour rapport $\frac{KI}{KM}$
si l'on désigne par J le milieu de [PL], on a S(J) = I, donc a l'égalité $\frac{KI}{KM} = \frac{KI}{KJ}$. Donc le rapport de la similitude S est $\frac{KI}{KJ}$ et son angle est : $\left(\widehat{\overrightarrow{KP}, \overrightarrow{KJ}}\right)$.
b)Dans ce cas, le quadrilatère KHPM' est un rectangle et donc S(H) = I, le milieu de [KP]

c) lorsque M décrit la droite (Δ), I décrit la médiatrice de [KP]

Exercice 23

1) Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) = \frac{\pi}{3}$ et $\frac{BC}{AC} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, donc S(A) = B
a)Il est immédiat que (CD) est la médiatrice de [AE], d'où CE = CA ; de plus
Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}}\right) = \frac{2\pi}{3}$, donc le triangle ACO est équilatéral.

b)ACE équilatéral, donc et O, milieu de [AC], donc OC = $\frac{1}{2}$CA = $\frac{1}{2}$ CE et $Mes(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CO}) = \frac{\pi}{3}$
d'où le résultat.

2) a) faire la figure

b) (OE) est la médiatrice de [AC] et J un point de cette médiatrice, donc JA = JC et donc C appartient au cercle de centre J passant par A.

3) a) Les angles $(\widehat{MP, MC})$ et $(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AC})$ interceptent le même arc $\widehat{PC}$, donc

$Mes(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MC}) = Mes(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{6}$

b) immédiat

4) Les points E, M et A sont alignés, donc leurs images par S, O, H et B sont alignés.

Or B est un point de la droite (OB), donc les points B, H et D sont alignés.

Exercice 24

1) L'angle de la similitude est $\frac{\pi}{4}$
   Le triangle est IAB est rectangle en A
   S est la similitude directe de centre I, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$

   2)a) l'angle de la similitude S1 est $Mes(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KB}) = \frac{-3\pi}{4}$
   b) immédiat
   c) $\overrightarrow{KH} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{KB}$

d) immédiat

e) S_1 est la similitude directe de centre K, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{-3\pi}{4}$

Exercice 25

1)

a) r', composée d'une rotation et d'une translation est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$
b) r'(A) = B et r'(B) = C, le centre de r' est le point O

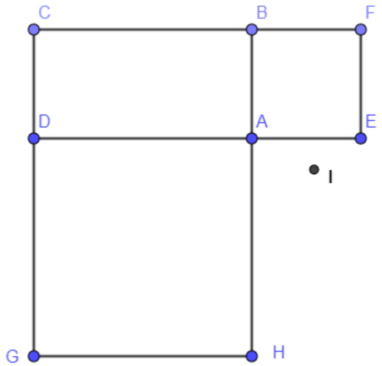
2)

a) f est la composée d'une homothétie et d'une rotation, f est bien une similitude directe.

b)L'angle de f est $\frac{\pi}{2}$ (celui de la rotation) et de rapport $\sqrt{3}$, I est le centre de f et f(C) = D , d'où ces résultats.

c) Cet ensemble est le demi-cercle de diamètre [CD], privé des points C et D.
d) $Mes(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CI}) = \frac{\pi}{3}$

Situation complexe



Pour répondre à la préoccupation de Monsieur Konan, Il suffit de justifier que les droites (AC), (GE) et (HF) sont oui ou non concourantes.

Notons I, le point d'intersection des droites (EG) et (FH), h_1 l'homothétie de centre I transformant G en E et h_2 l'homothétie de centre I transformant F en H

L'image de la droite (CG) par h_1 est la droite (EF), donc $(h_2 \circ h_1)$ (CG) = (AB).

De même, l'image de la droite (CF) par l'homothétie $h_1 \circ h_2$ est la droite (DA).

C est le point d'intersection des droites (CG) et (CF), il en résulte donc que l'image du point C par l'homothétie de centre I, $h_1 \circ h_2$ (remarquons que $h_2 \circ h_1 = h_1 \circ h_2$) est le point d'intersection des droites (AB) et (CA) c'est-à-dire le point A. $(h_1 \circ h_2)(C) = A$, on déduit que I appartient à (AC). Il est donc possible d'installer un robinet conforme à la volonté de monsieur Konan.

9 NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE DU PLAN

1 SITUATION D'APPRENTISSAGE

- Après la lecture de la situation d'apprentissage (par le professeur, par un élève et une lecture silencieuse des élèves), l'enseignant pourra s'assurer que les élèves ont bien compris le texte.
- Il pourra ensuite faire dégager les constituants de la situation à travers une ou des questions du type :

Constituants de la situation	Exemples de questions possibles	Réponses possibles des élèves
Contexte	Où et à quel moment se déroule la situation ?	Dans un lycée après observation d'une œuvre d'art réalisée par un ancien élève de terminale.
Circonstance	-Qu'affirme l'auteur de cette œuvre ?	Il affirme avoir utilisé une similitude directe pour construire le tableau.
Tâches	-Que décident de faire les élèves de terminale C de l'année en cours ?	-Ils décident d'étudier les similitudes directes et de construire des figures.

Le professeur utilisera la tâche énoncée par ses élèves pour faire la synthèse de la situation et présentera le plan de la leçon. Il devra dans la mesure du possible se référer à la situation durant tout le déroulement de la leçon.

2 DÉCOUVERTE DES HABILETÉS

<u>ACTIVITÉ 1 :</u> Nombres complexes, distances et angles

- L'objectif de cette activité est de savoir calculer des distances et des mesures d'angles orientés en utilisant les nombres complexes.
- Réponses aux questions de l'activité.

1) a) $z_{\overrightarrow{AB}} = 1+i$

   b) $AB = \sqrt{2}$

   c) $mes\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}}\right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad [k \in \mathbb{Z}]$

2) a) $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)=\left(\overrightarrow{AB};\vec{u}\right)+\left(\vec{u},\overrightarrow{CD}\right)=\left(\vec{u},\overrightarrow{CD}\right)-\left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right)$.

b)

$$mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}\right)=mes\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{CD}}\right)-mes\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AB}}\right)+2k\pi\ \ [k\in\mathbb{Z}]$$
$$=\arg(z_D-z_C)-\arg(z_B-z_A)+2k\pi\ \ [k\in\mathbb{Z}]$$
$$=\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)+2k\pi\ \ [k\in\mathbb{Z}]$$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 1

1) $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A=1+i$

2) $AB=|z_B-z_A|=\sqrt{2}$

3) $Mes\left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right)=\frac{\pi}{4}$.

Exercice 2

a)

$$mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}}\right)=\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)+2k\pi=\arg\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+2k\pi=\frac{\pi}{3}+2k\pi\qquad(k\in\mathbb{Z}).$$

b) $mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}\right)=\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)+2k\pi=\arg\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+2k\pi=\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $\quad(k\in\mathbb{Z})$.

Exercice 3

$$Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=-\frac{\pi}{2}$$

ACTIVITÉ 2 : Caractérisation complexe de points alignés.

- L'objectif de cette activité est de pouvoir justifier l'alignement de trois points en utilisant les nombres complexes.
- Réponses aux questions de l'activité.

1- A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=k\pi\ \ [k\in\mathbb{Z}]$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=k\pi\ \ [k\in\mathbb{Z}]$$

2- $A\neq C$, donc $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}^*$

- Corrigé des exercices de fixation

<u>Exercice 4</u>

1- $\dfrac{b-a}{c-a}=\dfrac{1}{2}$

2- $\dfrac{b-a}{c-a}\in\mathbb{R}^*$, donc les points A, B et C sont alignés.

<u>ACTIVITÉ 3:</u> Caractérisation complexe des triangles particuliers.

- L'objectif de cette activité est d'utiliser les nombres complexes pour caractériser des triangles particuliers.
- Réponses aux questions de l'activité.

1- ABC est un triangle isocèle en A et $mes\mathrm{A}=\alpha\ \ (\alpha\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z})$

a) ABC est un triangle isocèle en A alors AB = AC, ce qui donne $\left|\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=1$.

b) $mes\mathrm{A}=\alpha\ \ (0<\alpha<\pi)$, on a alors $\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\alpha+2k\pi$ ou $\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=-\alpha+2k\pi$

avec $[k\in\mathbb{Z}]$

c) La forme exponentielle de $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ est donc $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\alpha}$ ou $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{-i\alpha}$.

2- ABC est un triangle équilatéral.

a) $\left|\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=\dfrac{AC}{AB}=1$

b) $\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=mes\left(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}}\right)=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=mes\left(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}}\right)=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$

avec $[k\in\mathbb{Z}]$.

c) Les résultats précédents permettent d'avoir : $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$

3- ABC est un triangle rectangle en A

a) $(AB)\perp(AC)\Leftrightarrow mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ \ [k\in\mathbb{Z}]$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ \ [k\in\mathbb{Z}]$$

b) On en déduit que $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$.

4- ABC est un triangle rectangle et isocèle en A.

ABC est un triangle rectangle alors d'après la consigne 3, $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$ et donc $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = ib$ avec $b \in \mathbb{R}^*$.

Le triangle ABC est isocèle en A, donc d'après la consigne 1, $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$ et

$$\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1 \Leftrightarrow |ib| = 1 \Leftrightarrow |b| = 1 \Leftrightarrow b = 1 \ \ ou \ \ b = -1$$

Ainsi, ABC est un triangle rectangle et isocèle en A équivaut à $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$.

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 5

1) $mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi = \arg(-3i) + 2k\pi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ [k \in \mathbb{Z}]$

2) On en déduit que le triangle ABC est rectangle en A.

Exercice 6

1) $\frac{b-a}{c-a} = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

2) $\frac{b-a}{c-a} = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$, alors le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 7

1) $\frac{c-a}{b-a} = \frac{1}{3}i$

2) $\frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}^*$ alors $(AB) \perp (AC)$

ACTIVITE 4 : Caractérisation complexe de points cocycliques.

- L'objectif de cette activité est d'utiliser les nombres complexes pour justifier que quatre points sont cocycliques.
- Réponses aux questions de l'activité.

1) On justifie

$$mes\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)=mes\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DB}\right)+k\pi \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)=ar\,g\left(\frac{z_B-z_D}{z_A-z_D}\right)+k\pi \;\; [k\in\mathbb{Z}]$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)-\arg\left(\frac{z_B-z_D}{z_A-z_D}\right)=k\pi$$

2) $\arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)-\arg\left(\frac{z_B-z_D}{z_A-z_D}\right)=k\pi$ alors $\arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}:\frac{z_B-z_D}{z_A-z_D}\right)=k\pi \quad [k\in\mathbb{Z}]$.

3) Posons $r=\left|\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}:\frac{z_B-z_D}{z_A-z_D}\right|$, alors $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}:\frac{z_B-z_D}{z_A-z_D}=re^{ik\pi}=r\cos(k\pi)$. On en déduis que $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}:\frac{z_B-z_D}{z_A-z_D}\in\mathbb{R}^*$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 8

$\frac{c-a}{c-b}=i$ et $\frac{d-a}{d-b}=-i$

$\frac{c-a}{c-b}:\frac{d-a}{d-b}=-1\in\mathbb{R}^*$, donc les points A, B, C et D sont cocycliques.

Exercice 9

$\frac{c-a}{c-b}:\frac{d-a}{d-b}=6$, on a : $\frac{c-a}{c-b}:\frac{d-a}{d-b}\in\mathbb{R}^*$ ce qui donne ;

$\arg\left(\frac{c-a}{c-b}\right)-\arg\left(\frac{d-a}{d-b}\right)=k\pi \;\; [k\in\mathbb{Z}]$ c'est-à-dire $\arg\left(\frac{c-a}{c-b}\right)=\arg\left(\frac{d-a}{d-b}\right)+k\pi$ et

$$\arg\left(\frac{c-a}{c-b}\right)=\arg\left(\frac{d-a}{d-b}\right)+k\pi \Leftrightarrow mes\left(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AC}}\right)=mes\left(\widehat{\overrightarrow{BD};\overrightarrow{AD}}\right)+k\pi \;\; [k\in\mathbb{Z}]$$

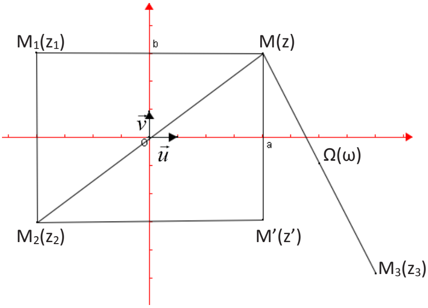
$$\Leftrightarrow mes\left(\widehat{\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}}\right)=mes\left(\widehat{\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DA}}\right)+k\pi \;\; [k\in\mathbb{Z}]$$

Donc les points A, B, C et D sont cocycliques.

<u>ACTIVITÉ 5 :</u> Ecriture complexe d'une transformation du plan

ACTIVITÉ 6 : **Écriture complexe des symétries.**

- L'objectif de cette activité est de caractériser les symétries à partir de leurs écritures complexes.
- Réponses aux questions de l'activité.



- **Symétries par rapport aux axes du repère**

1) a) Voir figure

b) Voir figure

c) $M' = S_{(O;\vec{u})}(M)$, on a : $M'(\mathrm{a};-b)$ et donc : $z' = \overline{z}$

2) a) Voir figure

b) $M_1 = S_{(O;\vec{v})}(M)$, on a : $M_1(-\mathrm{a};b)$ et donc : $z_1 = -\overline{z}$

- **Symétrie par rapport à un point**

1) a) Voir figure

b) $M_2 = S_O(M)$, on a : $M_2(-\mathrm{a};-b)$ et donc : $z_2 = -z$

2) a) Voir figure

b) Voir figure

c) $M_3 = S_\Omega(M)$, on a : $\overrightarrow{\Omega M_3} = -\overrightarrow{\Omega M}$ et donc : $z_3 = -z + 2\omega$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 10

a) V ; b)V ; c) F ; d) marque écrire z' = 2z-1 (V) ; e) V

Exercice 11

1.F ;_2.F ; 3. V ; 4.F ; 5.V

Exercice 12

La réponse est c)

Exercice 13

z' = -z + 2(1+i)

ACTIVITÉ 7: Ecriture complexe d'une translation.

- L'objectif de cette activité est de déterminer l'écriture complexe d'une translation.
- Réponses aux questions de l'activité.

1. $z_{\overrightarrow{MM'}} = z' - z$
2. $z' = z + b$
3. $z' = z + b \Rightarrow z' - z = b \Rightarrow z_{\overrightarrow{MM'}} = z_{\vec{u}} \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Rightarrow M' = t_{\vec{u}}(M)$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 15 $z' = z - 1 - 2i$

Exercice 16 g est la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $-\dfrac{1}{2} + i$.

ACTIVITE 8: Ecriture complexe d'une rotation.

- L'objectif de cette activité est de déterminer l'écriture complexe d'une rotation.
- Réponses aux questions de l'activité.

1. $\Omega M = |z - w|$ et $\Omega M' = |z' - w|$.
2. Soit r la rotation de centre Ω et d'angle θ. $M' = r(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ mes\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}}\right) = \theta + 2k\pi, \ [k \in \mathbb{Z}] \end{cases}$

$mes\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}}\right) = \theta + 2k\pi$ alors $\arg\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \theta + 2k\pi \ [k \in \mathbb{Z}]$.

3. $\left|\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = \dfrac{|z' - \omega|}{|z - \omega|} = \dfrac{\Omega M'}{\Omega M} = 1$ et $\arg\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \theta + 2k\pi \ [k \in \mathbb{Z}]$, donc $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta}$.
4. $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta} \Rightarrow z' = e^{i\theta}z + \left(1 - e^{i\theta}\right)\omega$.
5. L'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle θ est $z' = e^{i\theta}z$.

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 17 $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z = \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

Exercice 18 $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) z + 3i = e^{-i\frac{\pi}{3}} z + 3i$

f est la rotation de centre Ω d'affixe $3 + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3i}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{6}$.

ACTIVITÉ 9: Ecriture complexe d'une homothétie.

- L'objectif de cette activité est de déterminer l'écriture complexe d'une homothétie.
- Réponses aux questions de l'activité.

1. $z_{\overrightarrow{\Omega M'}} = z' - w$ et $z_{k\overrightarrow{\Omega M}} = k(z - \omega)$
2. h est l'homothétie de centre Ω et de rapport k.
   $M' = h(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow z' - \omega = k(z - \omega)$.
3. $z' = kz + (1-k)\omega$.

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 19 $z' = -\frac{2}{3} z$

Exercice 20 f est l'homothétie de centre Ω d'affixe $\frac{-3+i}{6}$ et de rapport k = 7.

ACTIVITÉ 10 : Ecriture complexe d'une similitude directe.

- L'objectif de cette activité est de déterminer l'écriture complexe d'une similitude directe.
- Réponses aux questions de l'activité.

1. a) $z' = e^{i\theta} z + (1 - e^{i\theta})\omega$

   b) $z' = kz + (1-k)\omega$

2. a) Soit les points $M(z)$, $M_1(z_1)$ et $M'(z')$ les points tels que $r(M) = M_1$ et $h(M_1) = M'$.

   $r(M) = M_1 \Leftrightarrow z_1 = e^{i\theta} z + (1 - e^{i\theta})\omega$

   $h(M_1) = M' \Leftrightarrow z' = kz_1 + (1-k)\omega$; ce qui donne :

   $$z' = k\left[e^{i\theta} z + (1 - e^{i\theta})\omega\right] + (1-k)\omega = ke^{i\theta}(z - \omega) + \omega$$
   $$= ke^{i\theta}(z - \omega) + \omega$$

   b) $z' = ke^{i\theta} z + (1 - ke^{i\theta})\omega$. Alors l'écriture complexe de $h \circ r$ est sous la forme $z' = az + b$ avec :

   $a = k e^{i\theta}$ et $b = (1 - ke^{i\theta})\omega$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 21 $z' = (1+i)z+1-i$

Exercice 22 $z' = (1+i\sqrt{3})z+\sqrt{3}(2-i)$ est l'écriture complexe de la similitude directe S de centre Ω d'affixe $1+2i$, de rapport $k=2$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$.

3 DES QUESTIONS D'ÉVALUATION

- **Question 1 : Comment déterminer la nature et les éléments caractéristiques d'une transformation du plan définie par son écriture complexe.**
  $\left(z' = az+b,\ a \in \mathbb{C}^*\ et\ b \in \mathbb{C}\right)$?

Solution de l'exercice non corrigé

1) La transformation du plan associée à cette écriture complexe est l'homothétie de rapport –3 et de centre le point Ω d'affixe $-\frac{1}{4}$
2) La transformation du plan associée à cette écriture complexe est la similitude directe de centre le point Ω d'affixe – 1, de rapport 2 et d'angle orienté $-\frac{\pi}{6}$.
3) La transformation du plan associée à cette écriture complexe est la symétrie centrale de centre le point Ω d'affixe $1-\frac{i}{2}$.
4) La transformation du plan associée à cette écriture complexe est la rotation de centre O et d'angle orienté $\frac{2\pi}{3}$.
5) La transformation du plan associée à cette écriture complexe est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $-3-2i$.
6) La transformation du plan associée à cette écriture complexe est la rotation de centre O et d'angle orienté $-\frac{\pi}{4}$.

- **Question 2 : Comment déterminer l'écriture complexe d'une similitude directe définie par son centre Ω(ω), son angle orienté θ et son rapport k ?**

Solution de l'exercice non corrigé

1) L'écriture complexe de S est : $z' = \left(\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$.
2) L'écriture complexe de S est : $z' = \frac{1}{2}$ iz+3+i.

- **<u>Question 3 :</u> Comment déterminer l'écriture complexe d'une similitude directe définie par son centre Ω, un point et son image ?**

<u>Solution de l'exercice non corrigé</u>

1) L'écriture complexe de T est : $z' = \frac{1}{2} i z + 3 + i$.
2) L'écriture complexe de T est : $z' = (1-i)z + 1 + 2i$.

- **<u>Question 4 : :</u> Comment déterminer l'écriture complexe d'une similitude directe définie par deux points et leurs images ?**

<u>Solution de l'exercice non corrigé</u>

L'écriture complexe de S est : $z' = -iz$.

- **<u>Question 5 :</u> Comment déterminer le rapport et l'angle orienté d'une similitude directe définie par son centre , un point et son image ?**

<u>Solution de l'exercice non corrigé</u>

S est la similitude directe de centre O, de rapport $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\theta = -\frac{5\pi}{12}$.

4 MES SÉANCES D'EXERCICES

➢ **Exercices de fixation**

- **Nombres complexes, distances et angles**

<u>Exercice 1</u>

a) $AB = 2$ et $mes\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}}\right) = -\frac{\pi}{3}$

b) $AB = 2\sqrt{2}$ et $mes\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}}\right) = -\frac{3\pi}{4}$

c) $AB = 2\sqrt{3}$ et $mes\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}}\right) = \frac{2\pi}{3}$

<u>Exercice 2</u>

$AB = \sqrt{10}$; $AC = \sqrt{10}$; $BC = 2\sqrt{2}$.

ABC est un triangle isocèle en A.

<u>Exercice 3</u>

1) $\frac{a-c}{b-c} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

2) $Mes\left(\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{6}$

Exercice 4

1) $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=\frac{\pi}{2}$

2) $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=-\frac{\pi}{2}$

- **Caractérisation complexe de points alignés**

Exercice 5

$$\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}\in\mathbb{R}^*$$

Exercice 6

$z_{\overrightarrow{AB}}=-4+4i$; $z_{\overrightarrow{AC}}=-5+5i$.

$\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{AC}}}=\frac{4}{5}\in\mathbb{R}^*$ alors les points A, B et C sont alignés.

Exercice 7

$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=-1\in\mathbb{R}^*$, alors les points A, B et C sont alignés.

- **Caractérisations complexes des triangles particuliers.**

Exercice 8 Réponse c

Exercice 9

- Le triangle ABC est rectangle et isocèle en A si et seulement si $\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=i$ ou $\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=-i$
- Le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}\in\left\{e^{i\frac{\pi}{3}};e^{-i\frac{\pi}{3}}\right\}$.

Exercice 10

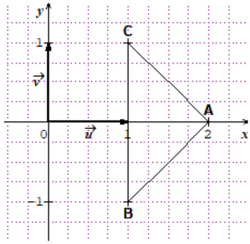
Le triangle ABC est rectangle en A.

Exercice 11

$$\frac{c-a}{b-a}=i$$

Exercice 12

1. Voir figure



$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$, alors le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.

- **Caractérisation complexe de l'angle droit.**

Exercice 13

$\dfrac{z_A - z_B}{z_D - z_C} \in i\mathbb{R}^*$

Exercice 14

1. $\dfrac{c-b}{a-b} = \dfrac{1}{2}i$
2. Les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires.

- **Caractérisation complexe des points cocycliques.**

Exercice 15

Les bonnes réponses sont : $\dfrac{z_A - z_B}{z_A - z_C} : \dfrac{z_D - z_B}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}^*$ et $\dfrac{z_A - z_B}{z_A - z_C} : \dfrac{z_B - z_D}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}^*$

Exercice 16

$OA = OB = OC = 2$ alors les points A, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.

Exercice 17

1. a) $\dfrac{b-a}{c-a} = -i$ et $\dfrac{b-d}{c-d} = i$

   b) $\left(\dfrac{b-a}{c-a}\right) : \left(\dfrac{b-d}{c-d}\right) = -1$

2. $\left(\dfrac{b-a}{c-a}\right) : \left(\dfrac{b-d}{c-d}\right) \in \mathbb{R}^*$ alors les points A, B, C et D sont cocycliques.

- **Ecriture complexe des symétries.**

Exercice 18

$z' - \omega = -(z - \omega)$

Exercice 19

a) $z' = -z + 2 + 2i$; b) $z' = -z$; c) $z' = -z + 2 + 6i$

Exercice 20

Prendre dans l'énoncé b) , $z' = e^{-i\pi}z - 2 + 6i$

a) Symétrie centrale de centre Ω d'affixe $\frac{1}{2} - i$

b) Symétrie centrale de centre Ω d'affixe $-1+3i$

c) Symétrie centrale de centre O.

Exercice 21.

1. S est la symétrie centrale de centre O.
2. L'affixe de l'image du point $\Omega(1-i)$ est le point $\Omega'(-1+i)$.

Exercice 22

1. S est la symétrie orthogonale d'axe $(O;\vec{u})$.
2. L'affixe de l'image du point $A(1+i)$ est le point A' d'affixe $1-i$.
3. L'affixe de l'antécédent du point $B(-2-i)$ est le point B_0 d'affixe $-2+i$.

- **Ecriture complexe d'une translation.**

Exercice 23

1. L'écriture complexe de T est $z' = z - 1 + 2i$.
2. Par T, l'image du point A est le point $A'(-4+3i)$ et l'image du point B est le point $B'(1-i)$

Exercice 24

L'écriture complexe de la translation T qui transforme A en B est $z' = z - 1 + 2i$.

Exercice 25

a) Translation de vecteur $\vec{u}(1-3i)$.

b) Translation de vecteur $\vec{u}(3+i)$.

c) Translation de vecteur $\vec{u}(i)$.

d) Translation de vecteur $\vec{u}(-1-2i)$.

Exercice 26

1) T est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $-3+2i$.
2) Si on désigne par (C) le cercle de centre O passant par le point $A(1+i)$, par O' et A' les images respectives des points O et A, on a $O'(-3+2i)$ et $A(-2+3i)$.

   Alors l'image de (C) par T est le cercle (C') de centre O' passant par le point A'.

Exercice 27

(D'): $2x - y + 2 = 0$

- **Ecriture complexe d'une rotation.**

Exercice 28

$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

Exercice 29

$z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

Exercice 30

1. $z' = -iz - 2 + 2i$
2. $z_C = 3 + 3i$

Exercice 31

$z' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z - 3 + 2i$

Exercice 32

1. f est la rotation de centre $\Omega(2)$ et d'angle orienté $-\frac{\pi}{6}$.
2. L'affixe de O' est $2 - \sqrt{3} + i$.

- **Ecriture complexe d'une homothétie.**

Exercice 33

1. Homothétie de centre O et de rapport 3.
2. Homothétie de centre $\Omega(4 - 2i)$ et de rapport $\frac{1}{2}$.
3. Homothétie de centre $\Omega(-4 + 3i)$ et de rapport 2.

Exercice 34

1. a) $\omega = -1 - i$

   b) $\frac{z' - \omega}{z - \omega} = 2$
2. H est l' homothétie de centre Ω d'affixe $\omega = 2$ et de rapport 2.

Exercice 35

$z' = -2z + 3 - 3i$

Exercice 36

1. $z' = \frac{1}{2}z + \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$
2. Ω a pour affixe $3 - 5i$

- **Similitude directe : définitions et propriétés.**

Exercice 37

1.F ; 2.V ; 3.V ; 4.V ; 5V

Exercice 38

1. Vraie car son écriture complexe est $z' = -z$
2. Vraie.
3. Vraie.

Exercice 39

Soit S une similitude directe d'écriture complexe $z' = az + b$ admettant deux points invariants A et B. $A = S(A) \Leftrightarrow z_A = az_A + b$; $B = S(B) \Leftrightarrow z_B = az_B + b$

La résolution du système $\begin{cases} az_A + b = z_A \\ az_B + b = z_B \end{cases}$ nous donne $a = 1$ et $b = 0$

Ce qui donne $z' = z$. Alors S est l'application identique.

Exercice 40

1.vrai ; 2.faux ; 3.vrai ; 4.vrai

- **Ecriture complexe d'une similitude directe.**

Exercice 41

$z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)$

Exercice 42

$\omega = 2$; $k = \sqrt{2}$; $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

Exercice 43

a) f est la similitude directe de centre $\Omega\left(\dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{5}i\right)$, de rapport $k = \sqrt{2}$ et d'angle $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$.

b) f est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $2 - i$.

c) f est la similitude directe de centre O, de rapport $k = 3$ et d'angle $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$.

d) f est la rotation de centre $\Omega\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)$ et d'angle $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

e) f est une similitude directe de centre $\Omega\left(\dfrac{-4}{5} + \dfrac{2}{5}i\right)$, de rapport $k = 2$ et d'angle $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 44

1) $z' = -iz - 1 - i$

2) $z' = -3iz - 2 - 2i$

3) $z' = \left(-\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)z - \sqrt{2} + \left(1 + \sqrt{2}\right)i$

- **Image de figures simples par une similitude directe.**

Exercice 45

1.faux ; 2.faux ; 3.vrai 4.vrai ; 5.vrai

Exercice 46

(D') : $\left(-1 + \sqrt{3}\right)x - \left(1 + \sqrt{3}\right)y + 1 + \sqrt{3} = 0$

Exercice 47

(C') est le cercle de centre O et de rayon 6. Donc : (C') :$x^2 + y^2 = 36$.

- **Déterminations d'une similitude directe.**

Exercice 48

Prendre comme énoncé :

Justifie qu'il existe une unique similitude directe S de centre A transformant B en C. Détermine l'écriture complexe de S.

Les points A, B et C étant distincts deux à deux, il existe une unique similitude directe S de centre A transformant B en C.

S a pour écriture complexe : $z' = iz + 2$

Exercice 49

$z_A = i$ et $z_B = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Les points A et B sont distincts alors il existe une similitude directe S de rapport 2 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ qui transforme A en B.

Exercice 50

1. $A \neq B$ et $C \neq D$ alors il existe une unique similitude directe S qui applique A sur D et B sur C.
2. Le rapport de S est $k = \frac{DC}{AB} = \sqrt{2}$ et l'angle de S est

$$\theta = mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{4}$$

3. a) L'écriture complexe de S est : $z' = (1+i)z + 1 + i$.

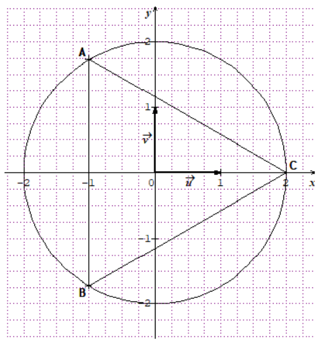
   b) Le centre de S est le point Ω d'affixe $-1+i$.

Exercice 51

- Le rapport de S est : $k = \frac{AC}{AB} = \frac{AB\sqrt{2}}{AB} = \sqrt{2}$
- L'angle de S est : $\theta = mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{4}$

➢ Exercices de renforcement/Approfondissement

Exercice 52



1. Voir figure
2. a) $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

   b) ABC est un triangle équilatéral.
3. a) Soit Ω le centre de (Γ).
   - Le triangle ABC étant équilatéral,

on a $\overrightarrow{\Omega A}+\overrightarrow{\Omega B}+\overrightarrow{\Omega C}=\vec{O}$ ce qui donne

$z_\Omega=\frac{1}{3}(z_A+z_B+z_C)=0$. Alors le centre de (Γ) est le point O.

- Le rayon de (Γ) est $r=OA=2$.

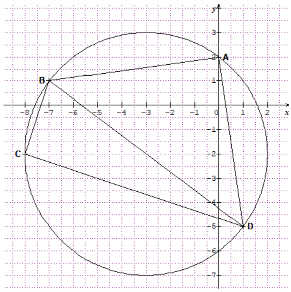
c) Voir figure

Exercice 53 Résoudre dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$

1. $S_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}}=\left\{\left(-\sqrt{3}+i;-1+i\sqrt{3}\right)\right\}$
2. $m=2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$ et $n=2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.
3. a) $\left|\frac{n}{m}\right|=1$ et $Arg\left(\frac{n}{m}\right)=-\frac{\pi}{6}$

   b) $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}\right)=-\frac{\pi}{6}$ et MON est un triangle isocèle en O.

Exercice 54 **PRENDRE 1 cm pour unité graphique**



1. Voir figure
2. a) $\frac{d-a}{b-a}=i$

   b) Le triangle ABD est rectangle isocèle en A.
3. $\frac{d-a}{b-a}:\frac{d-c}{b-c}=\frac{i}{-3i}==-\frac{1}{3}\in\mathbb{R}^*$, alors les points

   A, B, C et D sont alignés.
4. Désignons par (Γ) le cercle circonscrit aux triangles ABD et BDC.

   Le triangle ABD étant rectangle en A, le centre Ω de (Γ) est le milieu du segment [BD].

   $z_\Omega=\frac{z_B+z_D}{2}=-3-2i$. Le rayon du cercle (Γ) est $r=\Omega A=5$.

Exercice 55

1. $Mes\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=Arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)=Arg(2i)=\frac{\pi}{2}$.
2. $z_{A'}=z_A+1+i=3$; $z_{B'}=z_B+1+i=4+3i$; $z_{C'}=z_C+1+i=-3+2i$

3. $Mes\left(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C'}\right)=Arg\left(\dfrac{c'-a'}{b'-a'}\right)=Arg(2i)=\dfrac{\pi}{2}$

4. La translation f conserve les mesures des angles orientés.

Exercice 56

1. a) $OA=OB=2$ alors les points A et B sont sur un cercle de centre O et de rayon 2.
   b) Voir figure

2. r_1 est la rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ alors l'écriture complexe de r_1 est

   $z'=-iz+\left(1-i\sqrt{3}\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right)$.

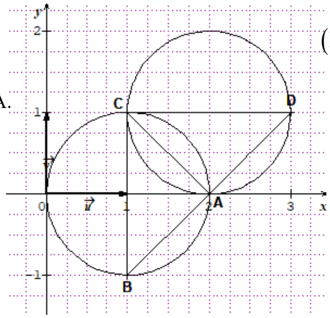
   r_2 est la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ alors l'écriture complexe de r_2 est

   $z'=iz+\left(1+\sqrt{3}\right)+i\left(-1+\sqrt{3}\right)$.

   Ainsi : $C=r_1(O)\Leftrightarrow z_C=-iz_O+\left(1-i\sqrt{3}\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right)=\left(1-i\sqrt{3}\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right)$

   $D=r_2(B)\Leftrightarrow z_D=iz_B+\left(1+\sqrt{3}\right)+i\left(-1+\sqrt{3}\right)=\left(1+2\sqrt{3}\right)+i\sqrt{3}$

Exercice 57



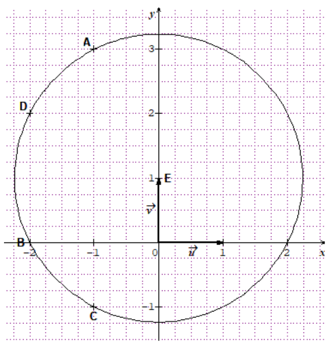
1. a) Voir figure
   b) $\dfrac{a-c}{a-b}=-i$ alors le triangle ABC est rectangle isocèle en A.
2. a) soit θ l'angle de r.
   Comme $C=r(B)$
   alors $\theta=mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=\arg(-i)+2k\pi=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$
   b) L'écriture complexe de r est $z'=-iz+2+2i$.
   c) $D=r(C)\Leftrightarrow z_D=-iz_C+2+2i=3+i$
3. (Π) est le cercle de diamètre [BC] alors
   $(\Pi')=r(\Pi)$ est le cercle de diamètre $\left[r(B)r(C)\right]=[CD]$.

Exercice 58

1. a) Voir figure

   b) L'écriture complexe de r est $z'=iz+1+i$.

   c) $B=r(A)\Leftrightarrow z_B=iz_A+1+i\Leftrightarrow z_A=-1+3i$



2. $\dfrac{c-b}{d-b}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$ et $\dfrac{c-a}{d-a}=2+2i$

   $\dfrac{c-b}{d-b}:\dfrac{c-a}{d-a}=-\dfrac{1}{4}\in\mathbb{R}^*$ alors les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle (C).

D'autre part, $B=r(A)$ alors $EA=EB$ et $EB=\sqrt{5}$.

On a aussi $i\,z_D+1+i=-1-i=z_C$ alors $C=r(D)$ et donc $EC=ED$ et $EC=\sqrt{5}$.

On a : $EA=EB=EC=ED=\sqrt{5}$ Donc (C) est le cercle de centre E et de rayon $\sqrt{5}$.

Exercice 59

1. a) $\dfrac{c-a}{b-a}=i$ alors le triangle ABC est rectangle isocèle en A.

   b) L'aire du triangle ABC est $\mathcal{A}_{ABC}=\dfrac{AB\times AC}{2}=\dfrac{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}{2}=5\ cm^2$.

2. a) A', B' et C' sont les images respectives des points A, B et C par l'homothétie h et $(AB)\perp(AC)$, alors $(A'B')\perp(A'C')$ car h conserve l'orthogonalité.

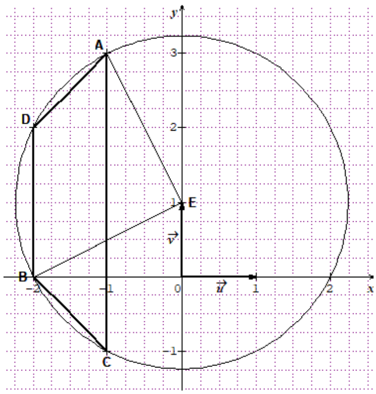
   b) $\mathcal{A}_{A'B'C'}=2^2\times\mathcal{A}_{ABC}=20\,cm^2$.

Exercice 60

1. f est la similitude directe de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et de centre Ω d'affixe 2.
2. $M(z)\in(\Gamma)\Leftrightarrow|(1+i)z-2i|=\sqrt{2}\Leftrightarrow|z-1-i|=\sqrt{2}\Leftrightarrow AM=\sqrt{2}$
   Alors (Γ) est le cercle de centre $A(1+i)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

3. (C) est le cercle de centre Ω et de rayon 1. Alors l'image (C') de (C) par f est le cercle de centre $f(\Omega)$ et de rayon $\sqrt{2}\times1=\sqrt{2}$. $f(\Omega)$ ayant pour affixe $-1+i$.

Exercice 61



1. a) l'écriture complexe de r est $z'=iz+1+i$.

   b) $B=r(A)\Leftrightarrow z_B=iz_A+1+i=-2$

   c) $C=r(D)\Leftrightarrow z_C=id+1+i\Leftrightarrow d=-2+2i$

2. a) Voir figure
   b) $B=r(A)$ alors $\Omega A=\Omega B$ et $\Omega B=\sqrt{5}$
   $C=r(D)$ alors $\Omega D=\Omega C$ et $\Omega C=\sqrt{5}$

On a : $\Omega A=\Omega B=\Omega D=\Omega C=\sqrt{5}$
alors les points A, B, C et D appartiennent à
un même cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{5}$.

3. a) $z_{\overrightarrow{AB}}=-4i$ et $z_{\overrightarrow{BD}}=2i$. On a : $\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{BD}$ donc les droites (AC) et (BD) sont parallèles.
   b) $AD=|z_D-z_A|=\sqrt{2}$ et $BC=|z_C-z_B|=\sqrt{2}$
   c) $(AC)//(BD)$ et $AD=BC$ alors le quadrilatère ADBC est un trapèze isocèle.

Exercice 62

1. $\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}i=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

   $\left|\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}i\right|=\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|\times\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\arg\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}i\right)=\arg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arg\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$

   Donc $\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}i=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$.

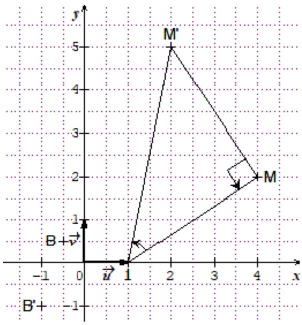
2. a) $r_{n+1}=|z_{n+1}|=\left|\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}i\right|\times|z_n|=\frac{\sqrt{3}}{2}r_n$ et $r_0=|z_0|=1$; alors (r_n) est une suite géométrique

   de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et de premier terme $r_0=1$.

   b) $r_n=r_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

   c) $OA_n=|z_n|=r_n=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}OA_n=0$.

Exercice 63



1. a) S est la similitude directe de rapport $\sqrt{2}$,
   d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de centre Ω d'affixe 1.

   b) Pour tout point $M\neq\Omega$, $z'=(1+i)z-i\Leftrightarrow\frac{z'-z}{z-1}=i$.

   $mes\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{MM'}}\right)=\arg\left(\frac{z'-z}{z-1}\right)=\arg(i)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

2. a) Voir figure

   b) L'image de la droite (D) d'équation $y=x$ par S est l'axe $(O;\vec{v})$.

3. a) Résolvons l'équation $z\times z'=1$

$z \times z' = 1 \Leftrightarrow z \times \left[(1+i)z - i\right] = 1 \Leftrightarrow (1+i)z^2 - iz - 1 = 0$ et la résolution de cette équation

donne les solutions : $z_1 = 1$ et $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

Ainsi en posant B le point d'affixe $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, on a $B \neq \Omega$ et $z_B \times z_{B'} = 1$.

b) $z_B \times z_{B'} = 1 \Leftrightarrow z_{B'} = \frac{1}{z_B} = -1 - i$. Voir figure.

4. $\frac{z_B - z_\Omega}{z_{B'} - z_\Omega} : \frac{z_B - z_{\Omega'}}{z_{B'} - z_{\Omega'}} = -1 \in \mathbb{R}^*$ alors les points Ω, Ω', B et B' sont cocycliques.

Exercice 64

1. $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \sqrt{2}\,\vec{u}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$; alors dans le repère orthonormé direct $\left(A;\vec{u},\vec{v}\right)$

$B\left(\sqrt{2};0\right)$, $D(0;1)$ et $C\left(\sqrt{2};1\right)$. Ce qui donne $z_B = \sqrt{2}$, $z_C = \sqrt{2} + i$ et $z_D = i$.

$S(D) = C \Leftrightarrow \sqrt{2} + i = ai + b$ et $S(C) = B \Leftrightarrow \sqrt{2} = a\left(\sqrt{2} + i\right) + b$

Et le système $\begin{cases} ai + b = \sqrt{2} + i \\ a\left(\sqrt{2} + i\right) + b = \sqrt{2} \end{cases}$ permet d'avoir $a = -i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $b = \frac{\sqrt{2}}{2} + i$.

On a donc : $z' = -i\frac{\sqrt{2}}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i$.

2. Le rapport de T est $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et l'angle de T est $-\frac{\pi}{2}$.

3. Le milieu I du segment [AB] a pour affixe $z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Soit B' l'image de B par T, on a : $z_{B'} = -i\frac{\sqrt{2}}{2}z_B + \frac{\sqrt{2}}{2} + i = \frac{\sqrt{2}}{2} = z_I$ alors $B' = \mathrm{I}$.

4. On constate que $S = T$.

T est une similitude directe d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

D'après la question 1) $T(D) = C$ et $T(B) = I$ donc „$mes\left(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{CI}\right) = -\frac{\pi}{2}$ donc

$(DB) \perp (CI)$.

Exercice 65

1. a) On a : $\left(1-i\sqrt{3}\right)z-\sqrt{3}-i=\left(1-i\sqrt{3}\right)\left[z-\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i\sqrt{3}}\right]=\left(1-i\sqrt{3}\right)(z-i)$. Alors

$$M\in(\Gamma)\Leftrightarrow\left|\left(1-i\sqrt{3}\right)z-\sqrt{3}-i\right|=6\Leftrightarrow\left|1-i\sqrt{3}\right||z-i|=6\Leftrightarrow 2|z-i|=6\Leftrightarrow|z-i|=3$$

b) (Γ) est donc le cercle de centre A et de rayon 3.

2. a) L'écriture complexe de la similitude directe S est de la forme $z'=az+b$

$$O=S(A)\Leftrightarrow z_O=az_A+b\Leftrightarrow 0=ai+b \quad \text{et} \quad C=S(B)\Leftrightarrow z_C=az_B+b\Leftrightarrow -4i=a\sqrt{3}+b.$$

Et la résolution du système $\begin{cases} ai+b=0 \\ a\sqrt{3}+b=-4i \end{cases}$ permet d'avoir $a=1-i\sqrt{3}$ et $b=-\sqrt{3}-i$.

On a donc : $z'=\left(1-i\sqrt{3}\right)z-\sqrt{3}-i$.

b) Le rapport de S est $\lambda=\left|1-i\sqrt{3}\right|=2$; l'angle de S est $\theta=\arg\left(1-i\sqrt{3}\right)=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$.

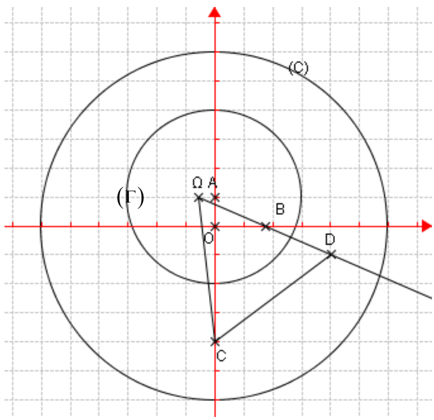
L'affixe du centre Ω est $z_\Omega=\dfrac{b}{1-a}\;\dfrac{-\sqrt{3}-i}{i\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}+i$.

3. a) (Γ) est le cercle de centre A et de rayon 3, alors $(C)=S(\Gamma)$ est le cercle de centre $S(A)=A'$ et de rayon $2\times3=6$. On a $z_{A'}=\left(1-i\sqrt{3}\right)\times i-\sqrt{3}-i=0$ alors A = O.

(C) est donc le cercle de centre O est de rayon 6.

b) Voir figure.

4. a) Voir figure



b) $S(B)=C$ alors $\begin{cases} \Omega C = 2\Omega B \\ mes\left(\overrightarrow{\Omega B};\overrightarrow{\Omega C}\right) = -\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$.

$\overrightarrow{\Omega D} = 2\overrightarrow{\Omega B}$ alors $\Omega D = 2\Omega B$ et les vecteurs $\overrightarrow{\Omega B}$ et $\overrightarrow{\Omega D}$ sont colinéaires de même sens, alors $\begin{cases} \Omega C = \Omega D \\ mes\left(\overrightarrow{\Omega D};\overrightarrow{\Omega C}\right) = -\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$. Ainsi, ΩCD est un triangle isocèle ayant un angle de 60°, alors le triangle ΩCD est équilatéral.

5. a) r est la rotation de centre Ω tel que $r(C)=D$, alors l'angle de r est $mes\left(\overrightarrow{\Omega C},\overrightarrow{\Omega D}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

   L'écriture complexe de r est donc $z' = \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z + b$ avec

   $b = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3} + i\right)\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3} + i$. Ce qui donne : $z' = \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \dfrac{\sqrt{3}}{3} + i$.

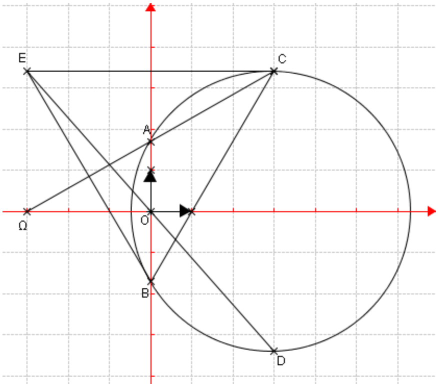
   b) $r(C)=D$ alors $z_D = \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(-4i) + \dfrac{\sqrt{3}}{3} + i = \dfrac{7\sqrt{3}}{3} - i$.

<u>Exercice 66</u>

1. $P\left(i\sqrt{3}\right)=0$ et $P\left(-i\sqrt{3}\right)=0$ alors il existe un polynôme du second degré $Q(z)$ tel que .
   $P(z) = \left(z - i\sqrt{3}\right)\left(z + i\sqrt{3}\right)Q(z) = \left(z^2+3\right)Q(z)$
   Et on obtient : $Q(z) = z^2 - 6z + 21$
2. $P(z)=0 \Leftrightarrow z = i\sqrt{3}$ ou $z = -i\sqrt{3}$ ou $z^2 - 6z + 21 = 0$.
   Et $z^2 - 6z + 21 = 0 \Leftrightarrow z = 3 - 2i\sqrt{3}$ ou $z = 3 + 2i\sqrt{3}$. Donc
   $S_{\mathbb{C}} = \left\{-i\sqrt{3}\ ;\ i\sqrt{3}\ ;\ 3-2i\sqrt{3}\ ;\ 3+2i\sqrt{3}\right\}$.
3. a) Voir figure
   b) $B = S_{(O;\vec{u})}(A)$ alors $z_B = -z_A = -i\sqrt{3}$
   $C = h_{(\Omega;2)}(A) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega C} = 2\overrightarrow{\Omega A}$ alors $z_C = 2(z_A - z_\Omega) + z_\Omega = 3 + 2i\sqrt{3}$
   $D = t_{2\overrightarrow{AB}}(C) \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$ alors $z_D = 2(z_B - z_A) + z_C = 3 - 2i\sqrt{3}$.
   c) $\dfrac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = -i\sqrt{3} \in i\mathbb{R}^*$ alors le triangle ACD est rectangle en A.
   d) On a $\dfrac{z_D - z_B}{z_C - z_B} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}i$, ce qui donne $\dfrac{z_D - z_A}{z_C - z_A} : \dfrac{z_D - z_B}{z_C - z_B} = 3 \in \mathbb{R}^*$ alors les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle.

4. a) $E = S_O(D)$ alors $z_E = -z_D = -3+2i$ et on a : $\dfrac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

b) $\dfrac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ alors le triangle BEC est équilatéral.



Exercice 67

1. a) T est une similitude directe alors son écriture complexe est sous la forme $z' = az + b$.

$T = S(A_{n-1}; r; \alpha)$ alors $a = re^{i\alpha} = u$ et $z_{n-1} = \dfrac{b}{1-u} \Rightarrow b = (1-u)z_{n-1}$.

$A_n = T(A_{n-2}) \Leftrightarrow z_n = az_{n-2} + b = u\,z_{n-2} + (1-u)z_{n-1}$. On donc : $z_n = u\,z_{n-2} + (1-u)z_{n-1}$.

b) Démonstration par récurrence

- Pour $n = 2$, on a : $z_2 = u\,z_0 + (1-u)z_1 = z_1 - uz_1$ ce qui donne $z_2 - z_1 = -u\,z_1 = -u\,i$

  Et $(-u)^1\, i = -u\,i$. On a bien : $z_2 - z_1 = (-u)^1\, i$

- Soit $k \geq 2$, supposons que $z_k - z_{k-1} = (-u)^{k-1}\, i$ et démontrons que $z_{k+1} - z_k = (-u)^k\, i$.

  $z_{k+1} - z_k = u\,z_{k-1} + (1-u)z_k - z_k = u\,z_{k-1} - u\,z_k = -u(z_k - z_{k-1})$, or $z_k - z_{k-1} = (-u)^{k-1}\, i$ alors

  $z_{k+1} - z_k = -u \times (-u)^{k-1}\, i = (-u)^k\, i$.

- Conclusion $\forall n \geq 2, \quad z_n - z_{n-1} = (-u)^{n-1}\, i$.

c) On sait que : $\forall n \geq 2, \quad z_n - z_{n-1} = (-u)^{n-1}\, i$. Ainsi :

$$\begin{array}{lll}
Pour & n=2 & z_2-z_1=(-u)^1 i \\
Pour & n=3 & z_3-z_2=(-u)^2 i \\
Pour & n=4 & z_4-z_3=(-u)^3 i \\
--- & --- & --- \\
--- & --- & --- \\
Pour & n-1 & z_{n-1}-z_{n-2}=(-u)^{n-2} i \\
Pour & n & z_n-z_{n-1}=(-u)^{n-1} i \\
--- & --- & ---
\end{array}$$

En additionnant membre à membre ces égalités, on obtient :

$$\begin{aligned}
z_n-z_1 &= (-u)^1 i+(-u)^2 i+(-u)^3 i+\ldots+(-u)^{n-1} i \\
&= i\left[(-u)^1+(-u)^2+(-u)^3+\ldots+(-u)^{n-1}\right] \\
&= i\left[(-u)\times\frac{1-(-u)^{n-1}}{1-(-u)}\right] \\
&= i\left[(-u)\times\frac{1-(-u)^{n-1}}{1+u}\right]
\end{aligned}$$

D'où $z_n=i-iu\dfrac{1-(-u)^{n-1}}{1+u}$.

2. a) On sait que $z_0=0$; $z_1=i$; $z_2-z_1=-u\,z_1=-u\,i$ alors $z_2=i(1-u)$.

$z_1\neq z_0$ et $z_2\neq z_1$ alors $A_1\neq A_0$ et $A_2\neq A_1$ dons il existe une unique similitude directe S telle que : $A_1=S(A_0)$ et $A_2=S(A_1)$.

b) Déterminons les éléments caractéristiques de S

Le rapport de S est : $\lambda=\dfrac{A_1A_2}{A_0A_1}=\dfrac{|z_2-z_1|}{|z_1-z_0|}=\dfrac{|-ui|}{|i|}=r$

L'angle de S est : $\theta=\arg\left(\dfrac{z_2-z_1}{z_1-z_0}\right)=\arg\left(\dfrac{-ui}{i}\right)=\arg(-u)=\alpha+\pi$

L'écriture complexe de S est donc de la forme $z'=re^{i(\alpha+\pi)}z+b=-re^{i\alpha}z+b=-uz+b$

$A_1=S(A_0)$ alors $z_1=-uz_0+b$, ce qui donne $b=i$. On a donc $z'=-uz+i$.

Soit Ω le centre de S, alors $z_\Omega=\dfrac{i}{1+u}$.

En résumé, S est la similitude directe de rapport r, d'angle $\alpha+\pi$ et de centre Ω d'affixe $\dfrac{i}{1+u}$.

c) Démontrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N},\quad A_{n+1}=S(A_n)$.

- On sait que $A_1 = S(A_0)$
- Soit $k \in \mathbb{Z}$, supposons que $A_{k+1} = S(A_k)$ et démontrons que $A_{k+2} = S(A_{k+1})$.

  On sait d'après la question 1.a) que $\forall n \geq 2, \quad z_n = u\,z_{n-2} + (1-u)z_{n-1}$,

  Alors

  $z_{k+2} = u\,z_k + (1-u)z_{k+1} = u\,z_k + z_{k+1} - uz_{k+1} = -uz_{k+1} + u\,z_k + z_{k+1}$.

  Or $A_{k+1} = S(A_k)$ alors $z_{k+1} = -u\,z_k + i$, ce qui donne $u\,z_k + z_{k+1} = i$.

  On a donc $z_{k+2} = -u\,z_{k+1} + i$. Ainsi $A_{k+2} = S(A_{k+1})$
- On conclut que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_{n+1} = S(A_n)$.

3. a) <u>Démontrons par récurrence que</u> $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_{n+p} = S_n(A_p)$.

- S_0 étant l'application identique on a : $A_p = S_0(A_p)$
- Soit $k \in \mathbb{Z}$, supposons que $A_{k+p} = S_k(A_p)$ et démontrons que $A_{k+1+p} = S_{k+1}(A_p)$.

  $A_{k+p} = S_k(A_p) \Rightarrow S(A_{k+p}) = S \circ S_k(A_p) = S_{k+1}(A_p)$, or d'après la question 2.c)

  $S(A_{k+p}) = A_{k+p+1} = A_{k+1+p}$; ce qui donne $A_{k+1+p} = S_{k+1}(A_p)$.
- On conclut que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_{n+p} = S_n(A_p)$.

b) <u>Démontrons que H est une homothétie</u>

Pour $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, $u = r\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

On a : $S_1 = S \circ S_0 = S \circ Id_P = S \quad ; \quad S_2 = S \circ S_1 = S \circ S$

Donc $S_4 = S \circ S_3 = S \circ (S \circ S_2) = (S \circ S) \circ S_2 = S \circ S \circ S \circ S$.

S_4 est la composée 4 fois de la similitude directe S de centre $\Omega\left(\dfrac{i}{1+u}\right)$ rapport r, d'angle

$\theta = \alpha + \pi = \dfrac{\pi}{4} + \pi = \dfrac{5\pi}{4} = \dfrac{-3\pi}{4} + 2k\pi$. Alors S_4 est la similitude directe de centre Ω, d'angle

$4\theta = -3\pi = \pi - 4\pi$ de rapport r^4. $S_4 = S(\Omega\,; r^4\,; \pi) = H(\Omega\,; -r^4)$

➢ Situations complexes

<u>Exercice 68</u>

Pour répondre à cette préoccupation, je vais utiliser les similitudes directes.

Je vais :

- Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe S qui permet de déterminer le deuxième carré image de premier carré.
- Déterminer l'écriture complexe de S.
- Utiliser la similitude directe S pour construire les autres carrés.

Notons OABC le premier carré. Selon le tableau présenté, le second carré sera OA'B'C' où les points A', B' et C' sont respectivement les images des points A, B et C par S. On a donc S(O) = O. O est donc le centre de S.

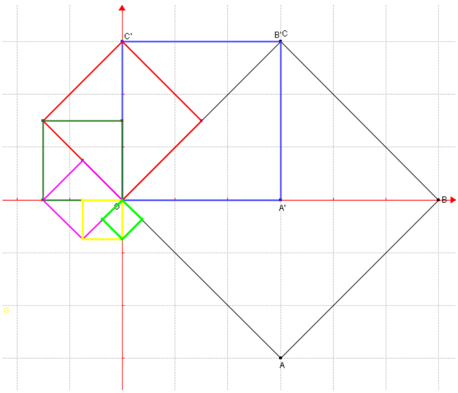
S(A) = A' et S(B) = B' alors le rapport de S est $k = \dfrac{OA'}{OB'}$ et son angle est $\theta = mes\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA'}\right)$.

Le triangle OAB est rectangle isocèle en A et A' est le milieu de [OB], alors $OA' = \dfrac{1}{2}OB$ et $OB = OA\sqrt{2}$,

ce qui donne $OA' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}OA$ et donc $k = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. D'autre part $\theta = mes\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA'}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

S est donc la similitude directe de centre O, de rapport $k = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

L'écriture complexe de S est donc $z' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)z$



Exercice 69

Préoccupations du père

- Le nouveau champ est triangulaire car il est le transformé de l'ancien champ par une similitude directe.
- L'aire du nouveau champ est égale à l'aire de l'ancien multiplié par le carré du rapport de la similitude directe soit : $2^2 \times 2,5 = 10\,ha$.
- Le plan du nouveau champ s'obtient grâce à la construction de l'image du triangle ABC par la similitude directe S.