



Mon cahier
d'habiletés

Livre du Professeur

Maths

2^{de}
C

CORRIGÉS DES EXERCICES

- Fixations
- Renforcements / Approfondissements
- Situations Complexes
- Devoirs de niveaux





Mon cahier
d'habiletés

Livre du Professeur

Maths

2^{de}
C

CORRIGÉS DES EXERCICES

- Fixations
- Renforcements / Approfondissements
- Situations Complexes
- Devoirs de niveaux

JD Éditions
21 B.P. 3636 Abidjan 21
Côte d'Ivoire

SOMMAIRE

	Pages
Leçon 1 : Vecteurs et points du plan	5
Leçon 2 : Ensemble des nombres réels	19
Leçon 3 : Utilisation des symétries et translations	29
Leçon 4 : Généralités sur les fonctions	40
Leçon 5 : Droites et plans de l'espace	46
Leçon 6 : Fonctions polynômes et fonctions rationnelles	56
Leçon 7 : Angles inscrits	63
Leçon 8 : Angles orientés et trigonométrie	68
Leçon 9 : Statistique	74
Leçon 10 : Produit scalaire	80
Leçon 11 : Équations et inéquations dans \mathbb{R}	90
Leçon 12 : Homothéties	101
Leçon 13 : Étude de fonctions de référence	108
Leçon 14 : Rotations	119
Leçon 15 : Inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$	126
Devoir de niveau 1	132
Devoir de niveau 2	134
Devoir de niveau 3	135

*Ce document pourrait contenir des erreurs au fautes de frappes.
Prière les signaler à l'adresse : kyoussouphou@gmail.com*

I. VECTEURS1. Propriété fondamentaleExercices de fixation

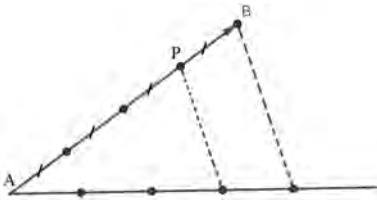
Exercice 1

Construis le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.



Exercice 2

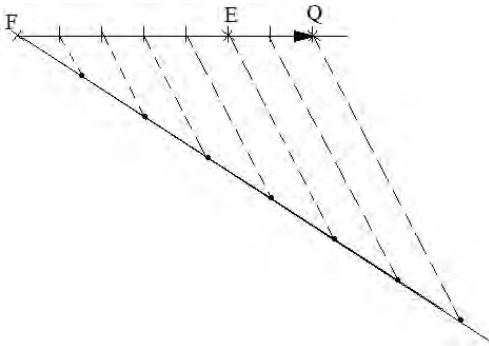
Construis le point P tel que : $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.



Exercice 3

Construis le point Q tel que : $\overrightarrow{FQ} = -\frac{7}{5}\overrightarrow{EF}$.

$$\overrightarrow{FQ} = -\frac{7}{5}\overrightarrow{EF} \Leftrightarrow \overrightarrow{FQ} = \frac{7}{5}\overrightarrow{FE}$$

2. Caractérisation d'un parallélogrammeExercices de fixation

Exercice 4

Complète les pointillés ci-dessous.

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{DO}$$

Exercice 5

Mets une croix dans la case qui convient.

N°	Affirmations	Vrai	Faux
1.	$\vec{MA} = \vec{TH}$		X
2.	$[MT]$ et $[AH]$ ont le même milieu.	X	
3.	$\vec{MT} = 2\vec{IM}$		X

3. Norme de vecteur

Exercices de fixation

Exercice 6

Dans chacun des cas ci-dessous, calcule $\|\vec{AB}\|$.

a. $\|\vec{AB}\| = \sqrt{(-8-1)^2 + (3-2)^2}$
 $\|\vec{AB}\| = \sqrt{82}$.

b. $\|\vec{AB}\| = \sqrt{(-1,5-3,5)^2 + (-1+1,4)^2}$
 $\|\vec{AB}\| = \sqrt{25,16}$.

c. $\|\vec{AB}\| = \sqrt{(-\sqrt{2}-\sqrt{2})^2 + (1-1-\sqrt{3})^2}$
 $\|\vec{AB}\| = \sqrt{11}$.

4. Somme de deux vecteurs

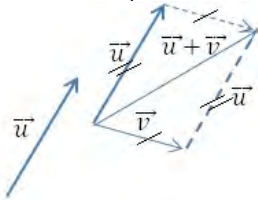
Propriété :

- Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} : $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

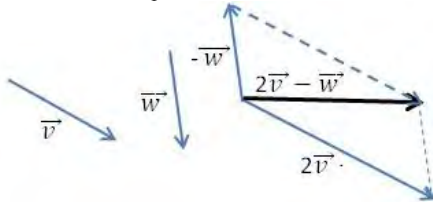
Exercice de fixation

Exercice 7

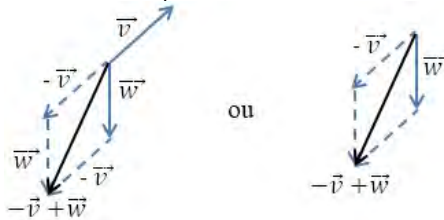
1. Construis un représentant du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.



2. Construis un représentant du vecteur $2\vec{v} - \vec{w}$.



3. Construis un représentant du vecteur $-\vec{v} + \vec{w}$.



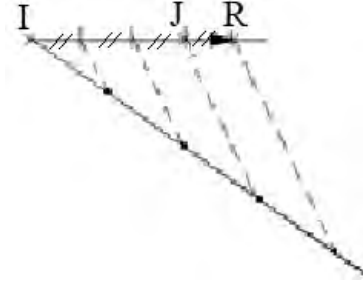
Exercice 8

I et J sont deux points du plan. Construis le point R tel que $\overrightarrow{IR} - 4\overrightarrow{JR} = \vec{0}$.

$$\overrightarrow{IR} - 4\overrightarrow{JR} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JR} - 4\overrightarrow{JR} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{JR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IJ}.$$



Exercice 9

ABC est un triangle.

1. $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

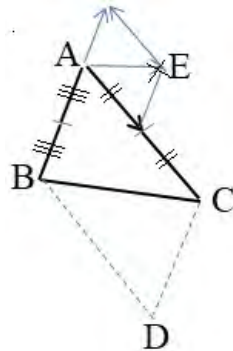
$$\overrightarrow{DA} - (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}.$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

2. $2\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EC}$

$$2\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{EA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

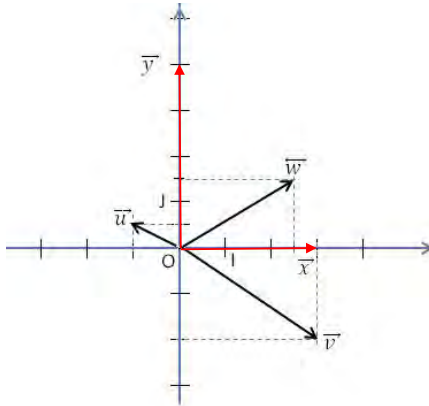


Exercice 10

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm

Construis un représentant de chacun des vecteurs ci-dessous

$$\vec{u} = -\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} \quad ; \quad \vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} \quad ; \quad \vec{w} = 2,5\vec{i} + 1,5\vec{j} \quad ; \quad \vec{x} = 3\vec{i} \quad ; \quad \vec{y} = 4\vec{j}$$



5. Produit d'un vecteur par un nombre réel

Exercice de fixation

Exercice 11

Simplifie l'écriture de chacun des vecteurs ci-dessous, :

- 1. $\vec{a} = \vec{AB} + \vec{BC}$;
- 2. $\vec{b} = \vec{EA} - \vec{BC}$;
- 3. $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{EC} + \vec{DA}$;
- 4. $\vec{d} = \vec{EA} + \vec{BC}$;
- 5. $\vec{e} = \vec{DE} + 2\vec{AB}$;
- 6. $\vec{f} = \vec{ED} + \vec{BC} + \vec{DB}$.

- 1. $\vec{a} = \vec{AC}$;
- 2. $\vec{b} = \vec{DC}$;
- 3. $\vec{c} = \vec{EA}$;
- 4. $\vec{d} = 0$;
- 5. $\vec{e} = \vec{AC}$;
- 6. $\vec{f} = \vec{EC}$.

6 Combinaison linéaire

Exercices de fixation

Exercice 12

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires s'il existe une combinaison linéaire de ces vecteurs qui soit nulle sans que ses coefficients soient tous les deux nuls.

Exercice 13

$$\vec{AI} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}$$

7. Vecteurs directeurs d'une droite

Exercice de fixation

Exercice 14

Réponds par Vrai ou par Faux à chacune des affirmations suivantes :

N°	Affirmations	Réponses
1.	La norme d'un vecteur unitaire peut être -1.	Faux
2.	Soit \vec{u} un vecteur directeur d'une droite (D). Pour deux points distincts A et B de (D), \vec{u} et \overline{AB} ne sont pas colinéaires.	Faux
3.	Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, il y a exactement deux vecteurs unitaires qui sont \overline{OI} et \overline{OJ} .	Faux
4.	\vec{u} n'est pas un vecteur directeur d'une droite (D) si pour deux points distincts A et B de (D), on a : $\vec{u} = 2\overline{AB}$.	Faux

8. Parallélisme et alignement

Exercice de fixation

Exercice 15

On a : $\overline{EJ} + \overline{PG} = \vec{0}$ d'où $\overline{EP} + \overline{PJ} + \overline{PE} + \overline{EG} = \vec{0}$

$$\overline{PJ} + \overline{EG} = \vec{0};$$

$$\overline{JP} = \overline{EG}.$$

Par conséquent, la droite (JP) et (EG) sont parallèles

Exercice 16

On a : $6\overline{JK} = BC - 2\overline{BA}$ et $2\overline{KL} = 3\overline{BC} - 2\overline{BA}$

On déduit que : $6\overline{JK} = 2\overline{KL}$;

$$\overline{JK} = \frac{1}{3}\overline{KL}.$$

Par conséquent, les points L, J et K sont alignés.

Exercice 17

1. On a $\overline{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\overline{AC} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$. On déduit que $\overline{AC} = \frac{3}{2}\overline{AB}$. Par conséquent, les points A, B et C sont alignés.

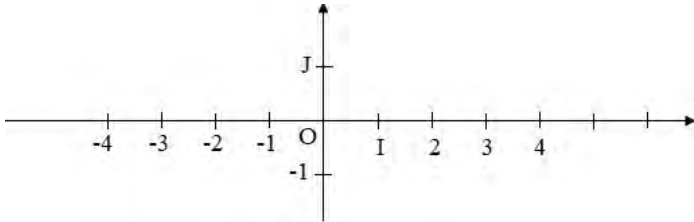
2. On a : $\overline{EF} \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \end{pmatrix}$ et $\overline{EG} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Il n'existe aucun réel k non nul tel que $\overline{EF} = k\overline{EG}$.

Par conséquent, les points E, F et G ne sont alignés.

Exercice 18

On a : $\overline{AB} \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overline{OC} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Il n'existe aucun réel k non nul tel que $\overline{AB} = k\overline{OC}$. Par conséquent, les droites (AB) et (OC) ne sont pas parallèles.

1.



9 Caractérisation vectorielle du centre de gravité d'un triangle.

Exercice de fixation

Exercice 19

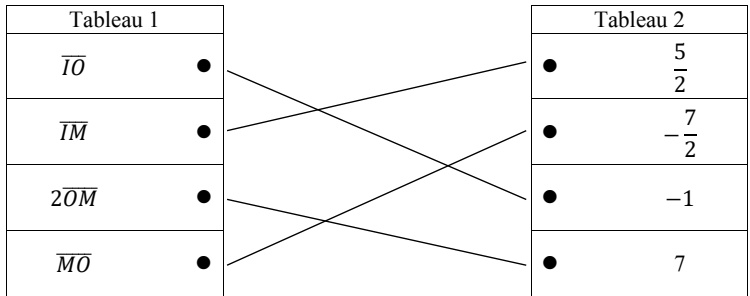
Numéros	Affirmations	Vrai	Faux
1.	$\vec{IE} + \vec{IH} + \vec{FI} = \vec{0}$		X
2.	$\vec{EI} + \vec{HI} + \vec{FI} = \vec{0}$	X	
3.	$\vec{IE} = \vec{HI} + \vec{FI}$	X	

II) MESURES ALGEBRIQUES

Exercice de fixation

Exercice 20

Tableau



Exercice 21

1. $\vec{AB} = 1$; $\vec{AE} = 13$; $\vec{CD} = -2$; $\vec{FG} = -6$; $\vec{DF} = 11$
 2. $\vec{AD} + \vec{DG} = 8 + 7 = 11$; $\vec{BF} - \vec{FG} = 16 - (-6) = 22$
 $\vec{AC} + \vec{DE} = 8 + 7 = 15$; $3\vec{DC} - \frac{5}{2}\vec{FE} = 3 \times 2 - \frac{5}{2} \times (-4) = 16$
 $\vec{AC} \times \vec{CD} = 8 \times (-2) = -16$;
 $\frac{\vec{GC}}{\vec{GB}} = \frac{-3}{-10} = \frac{3}{10}$.

III) BASE ET REPERES

Exercice 22

1. $\vec{u} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$; $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$; $\vec{w} = -3\vec{i} - 4\vec{j}$.
 2. $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{w} \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Exercice 23

1. $\vec{AB}(7; -2)$; $\vec{AC}(6; 5)$; $\vec{CB}(1; -7)$
 2. $2\vec{AB} - \vec{AC}(2 \times 7 - 6; 2 \times (-2) - 5)$

$$2\overline{AB} - \overline{AC}(8; -9)$$

$$\begin{aligned} & -0,8\overline{BA} - 2,4\overline{BC} \begin{pmatrix} -0,8 \times (-7) - 2,4 \times (-1) \\ -0,8 \times 2 - 2,4 \times 7 \end{pmatrix} \\ & -0,8\overline{BA} - 2,4\overline{BC} \begin{pmatrix} 8 \\ -18,4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Base orthogonale et base orthonormée

Exercices de fixation

Exercice 24

On entoure c

Exercice 25

N°	Affirmations	Réponses
1.	Le déterminant de deux vecteurs colinéaires est nul.	Vrai
2.	Le déterminant de deux vecteurs formant une base du plan vectoriel n'est pas égal à 0.	Vrai
3.	Lorsque le déterminant de deux vecteurs est négatif alors ces vecteurs sont opposés.	Faux
4.	Le déterminant de deux vecteurs égaux est toujours strictement positif.	Faux

Exercice 26

Le plan vectoriel V est rapporté à une base orthonormée $(\vec{i}; \vec{j})$

a. \vec{u} et \vec{v} colinéaires, alors $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & k \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 0$ équivaut à $k = -5$.

b. \vec{u} et \vec{v} colinéaires, alors $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ k & -2 \end{vmatrix} = 0$ équivaut à $k = \frac{1}{2}$,
 $k = -\frac{1}{2}$ ou $k = \frac{1}{2}$

c. \vec{u} et \vec{v} colinéaires, alors $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 8 & 2k \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ équivaut à $k = -\frac{4}{3}$.

d. \vec{u} et \vec{v} colinéaires, alors $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ k & -k^2 \end{vmatrix} = 0$ équivaut à
 $k(k - 3) = 0$, $k = 0$ ou $k = 3$.

Exercice 27

a) Soit $M(x, y) \in (AB)$. Les vecteurs \overline{AM} et \overline{AB} sont colinéaires tels que

$$\overline{AM} \begin{pmatrix} x + \frac{2}{3}; y - 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overline{AB} \begin{pmatrix} \frac{22}{15}; \frac{-3}{4} \end{pmatrix}.$$

On a : $\det(\overline{AM}, \overline{AB}) = 0$ équivaut à : $\frac{-3}{4}x - \frac{22}{15}y + \frac{29}{30} = 0$.

Par conséquent, une équation de (AB) est : $-\frac{22}{15}y - \frac{3}{4}x + \frac{29}{30} = 0$.

b) Soit $M(x, y) \in (AB)$. Les vecteurs \overline{AM} et \overline{AB} sont colinéaires tels que

$$\overline{AM}(x - 1; y + \sqrt{2}) \text{ et } \overline{AB}(\sqrt{2} - 1; 0)$$

On a : $\det(\overline{AM}, \overline{AB}) = 0 \Leftrightarrow y = -\sqrt{2}$.

Par conséquent, une équation de (AB) est : $y = \sqrt{2}$.

Exercice 28

a) Soit (D) la droite passant par A et $M(x, y) \in (D)$. Les vecteurs \overline{AM} et \vec{u} sont colinéaires. On a : $\overline{AM}(x; y - 3)$ et $\vec{u}(2; 3)$.

$$\text{Dét}(\overline{AM}, \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2(y - 3) = 0.$$

Une équation de (D) est : (D) : $-2y + 3x + 6 = 0$.

b) Soit (D') la droite passant par A et $M(x, y) \in (D')$. Les vecteurs \overrightarrow{AM} et \vec{u} sont colinéaires tels que :

$$\overrightarrow{AM}(x - 1; y - \sqrt{3}) \text{ et } \vec{u}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; -1\right).$$

$$\text{Dé}(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ y - \sqrt{3} & -1 \end{vmatrix} = 0 \dots -\frac{\sqrt{3}}{3}y - x + 2 = 0.$$

Une équation de (D') est : $(D') : -\frac{\sqrt{3}}{3}y - x + 2 = 0.$

Repères du plan

Exercices de fixation

Exercice 29

Réponds par Vrai ou par Faux

Affirmations	Réponses
Deux vecteurs non nuls et colinéaires forment une base du plan vectoriel \mathcal{V} .	Faux
Trois points alignés forment un repère du plan.	Faux

Exercice 30

a) On a : $\vec{u}(2; -3)$ et $\vec{v}(1; 1)$

$$\text{dét}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \text{ et } 5 \neq 0,$$

Donc (\vec{u}, \vec{v}) est une base du plan vectoriel \mathcal{V} .

b) On a : $\vec{v}(1; 1)$ et $\vec{w}(-0,6; -1,6)$

$$\text{dét}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & -0,6 \\ 1 & -1,6 \end{vmatrix} = 2,2 \text{ et } 2,2 \neq 0,$$

Donc (\vec{v}, \vec{w}) est une base du plan vectoriel \mathcal{V} .

c) On a : $\vec{u}(2 \pm 3)$ et $\vec{v} + \vec{w} = 0,4\vec{i} - 0,6\vec{j}$ avec $(\vec{v} + \vec{w}) \begin{pmatrix} 0,4 \\ -0,6 \end{pmatrix}$

$$\text{dét}(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & 0,4 \\ -3 & -0,6 \end{vmatrix} = 0.$$

Donc $(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w})$ n'est pas une base du plan vectoriel \mathcal{V} .

Calculs dans un repère :

Exercices de fixation

Exercice 31

K est le milieu de [AB] alors, $K\left(\frac{-4+3}{2}; \frac{-1-3}{2}\right)$

$$K\left(-\frac{1}{2}; -2\right)$$

Exercice 32

G est le centre de gravité de ABC, alors $G\left(\frac{-4+3+2}{3}; \frac{-1-3+4}{3}\right)$

$$G\left(\frac{1}{3}; 0\right).$$

EXERCICES DE RENFORCEMENT / APPROFONDISSEMENT

Exercice 1

A. On a : $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ}$, or $\overrightarrow{PA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$.

Donc $\overrightarrow{PQ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ car $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$.

B. a) On a : $\overrightarrow{CR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$; $-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{PQ}$

d'où $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PQ}$ car $\overrightarrow{PQ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$; donc $\overrightarrow{PR} = 2\overrightarrow{PQ}$.

b) D'après 2a) \overrightarrow{PR} et \overrightarrow{PQ} sont deux vecteurs colinéaires qui ont un point commun P. Donc, P, Q et R sont alignés.

Exercice 2

a) Soit (D') telle que $(D) \parallel (D')$. (D) et (D') ont le même coefficient directeur. On a :

$(D) : y = -\frac{7}{4}x + \frac{7}{10}$.

Ainsi $(D') : y = -\frac{7}{4}x + 6$. Comme $A \in (D')$, d'où $b = \frac{8}{5} + \frac{7}{4} \times \frac{4}{3} = 3$.

Par conséquent, $(D') : y = -\frac{7}{4}x + 3$ ou une équation cartésienne de (D') est : $7x + 4y - 12 = 0$.

b) En utilisant la même méthode, on trouve $(D') : \sqrt{3}x - y - 6 - 1,4\sqrt{3} = 0$.

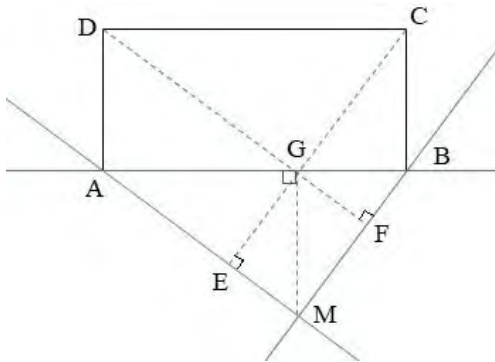
Exercice 3

1. Voir figure.

2. $t_{\overrightarrow{AD}}((AM)) = (DG)$; $t_{\overrightarrow{AD}}((BM)) = (CG)$ et $t_{\overrightarrow{AD}}((CM)) = (MG)$.

3. Le point M est le point de concours des hauteurs (AM) , (BM) et (GM) . Or $t_{\overrightarrow{AD}}(M) = G$. Donc G est le point de concours des droites, (DG) , (CG) et (MG) .

Or C, G et E sont alignés, de même que les points D, G et F. Donc les droites (CE) , (DF) et (GM) sont concourantes.



Exercice 4

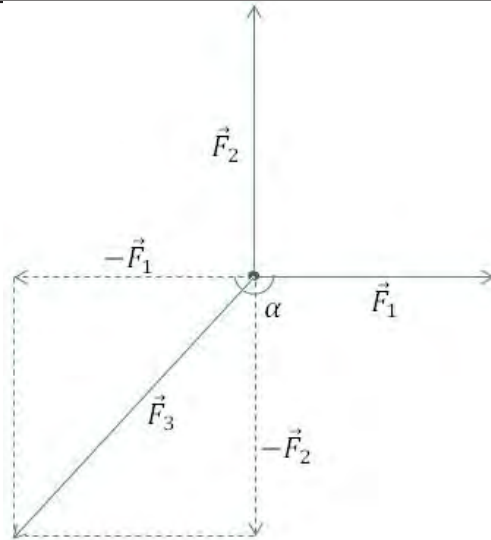
1. On a : $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$, d'où $\vec{F}_3 = -\vec{F}_1 - \vec{F}_2$ or $\vec{F}_1 \perp \vec{F}_2$.

Donc $\|\vec{F}_3\| = \sqrt{\|\vec{F}_1\|^2 + \|\vec{F}_2\|^2}$

$\|\vec{F}_3\| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100}$ d'où $F_3 = 10 \text{ N}$.

2. On a : $\cos \vartheta = \frac{F_1}{F_3} = \frac{6}{10} = 0,6$ d'où $\vartheta = 53,13^\circ$.

Par conséquent, $\alpha = 180^\circ - \vartheta$; $\alpha = 126,87^\circ$.



Exercice 5

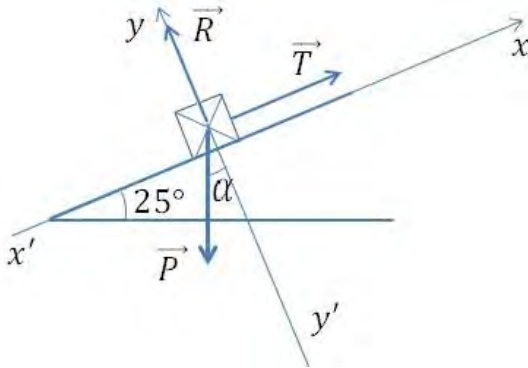
1. Voir figure.

2. À l'équilibre : $\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = \vec{0}$.

Par conséquent, sur l'axe (yy') , on a : $-P \cos \alpha + 0 + R = 0$

$$R = P \cos \alpha$$

$$R = 3,6 \cos 25^\circ = 3,26 \text{ N.}$$



Exercice 6

1) a) On a : $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{MI} + \vec{IA} + \vec{MI} + \vec{IB}$
 $= 2\vec{MI} + \underbrace{\vec{IA} + \vec{IB}}_{\vec{0}}$ or I est le milieu de [AB].

Donc $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$.

b) On a de même : $\vec{MC} + \vec{AD} = \vec{MJ} + \vec{JC} + \vec{MJ} + \vec{JD} = 2\vec{MJ} + \underbrace{\vec{JC} + \vec{JD}}_{\vec{0}} = 2\vec{MJ}$

2) $\vec{KA} + \vec{KB} + \vec{KC} + \vec{KD} = \vec{0}$ donne : $2\vec{KI} + 2\vec{KJ} = \vec{0}$, d'où K est le milieu de [IJ].

3) $\vec{KA} + \vec{KB} + \vec{KC} + \vec{KD} = \vec{0}$ donne $4\vec{KG} + \underbrace{\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD}}_{\vec{0}} = \vec{0}$,

$4\vec{KG} = \vec{DG}$. Il en résulte que les points D, K et G sont alignés.

Exercice 7

On a : $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$.

$$\|\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$$

$$\|\overrightarrow{3MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\| = \|\overrightarrow{AB}\| \text{ or } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

D'où $\|\overrightarrow{3MG}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$, soit $3MG = AB$; donc $MG = \frac{1}{3} AB$.

L'ensemble cherché est le cercle de centre G et de rayon $r = \frac{1}{3} AB$.

Exercice 8

On a : $\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{NA} + 4\overrightarrow{NC} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$;

d'où $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{NA} + 4(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{NC}) = \vec{0}$; $\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IM} + 4(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JD} + \overrightarrow{NJ} + \overrightarrow{JC}) = \vec{0}$.

Or $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} = \vec{0}$.

Par suite : $\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{NI} + 4(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{NJ}) = \vec{0}$.

$\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KI} + \overrightarrow{NK} + \overrightarrow{KI} + 4(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KJ} + \overrightarrow{NK} + \overrightarrow{KJ}) = \vec{0}$ (*).

Comme $\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{NK} = \vec{0}$, donc on aura (*) : $2\overrightarrow{KI} + 4 \times 2\overrightarrow{KJ} = \vec{0}$;

d'où $\overrightarrow{KI} = -4\overrightarrow{KJ}$. Par conséquent, les points I, J et K sont alignés

Exercice 9

Le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}; \vec{j})$.

1) Si $A \in (D)$, alors $AH = 0$.

2) a) On a : $2(1) - 2 - 1 = -1 \neq 0$; donc A n'appartient pas à (D) .

b) Soit (D') : $y = ax + b$ cette droite. $(D) \perp (D')$ or $-2a = -1$;

d'où : $a = \frac{1}{2}$. (D') : $y = \frac{1}{2}x + b$, or $A \in (D')$, d'où $b = -2 - \frac{1}{2}(1)$.

Donc (D') , : $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$. $b = -\frac{5}{2}$.

c) $\{H\} = (D) \cap (D')$. $\frac{1}{2}x - \frac{5}{2} = -2x + 1$ d'où $x_H = \frac{7}{5}$ et $y_H = -\frac{9}{5}$. $H(\frac{7}{5}; -\frac{9}{5})$.

d) $d(A; (D)) = AH = \sqrt{(\frac{7}{5} - 1)^2 + (-\frac{9}{5} + 2)^2} = \sqrt{\frac{5}{25}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Exercice 10

Soit un triangle quelconque ABC.

1. (voir figure ci-dessous)

2) a) $A(0; 0)$; $B(1; 0)$ et $C(0; 1)$.

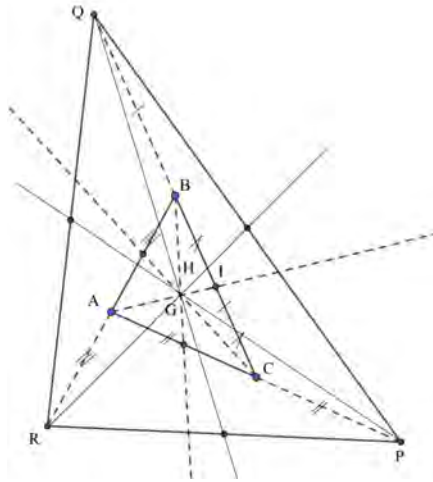
b) $I(\frac{1+0}{2}; \frac{1+0}{2})$ d'où $I(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$; $G(\frac{0+1+0}{3}; \frac{0+0+1}{3})$; d'où $G(\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$.

c) $\overrightarrow{AR} = -\overrightarrow{AC}$ donc $R(0; -1)$; $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB}$ donc $P(2; 0)$; $\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{BC}$ donc $Q(-1; 2)$.

3) H est le centre de gravité² de RPQ, alors $H(\frac{0H-1}{3}; \frac{-1+0+2}{3})$,

d'où $H(\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ or $G(\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$.

Donc $H = G$. (H et G sont confondus).



Exercice 11

A

1. $\vec{OC} + \vec{OB} = \vec{OA}' + \vec{A'C} + \vec{OA}' + \vec{A'B} = 2\vec{OA}'$ car $\vec{A'C} + \vec{A'B} = \vec{0}$;
2. On a : $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ or $\vec{OC} + \vec{OB} = 2\vec{OA}'$; d'où $\vec{OA} + \vec{AH} = \vec{OA} + 2\vec{OA}'$. Donc $\vec{AH} = 2\vec{OA}'$.
3. $\vec{AH} = 2\vec{OA}'$ d'où $(AH) // (OA')$. Le point O est l'intersection des médiatrices de ABC. D'où $(OA') \perp (BC)$.
 $(AH) // (OA')$ et $(OA') \perp (BC)$. Donc $(AH) \perp (BC)$.
4. On a : $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$; d'où $\vec{OB} + \vec{BH} = \vec{OB}' + \vec{B'A} + \vec{OB} + \vec{OB}' + \vec{B'C}$.
 $\vec{BH} = 2\vec{OB}' + \vec{B'A} + \vec{B'C}$.

D'où $\vec{BH} = 2\vec{OB}'$. Donc $(BH) // (OB')$ (1) De plus, (OB') est la médiatrice du triangle ABC issue de B ; donc $(OB') \perp (AC)$.

On conclut que $(BH) \perp (AC)$.

5. Centre de gravité du triangle ABC

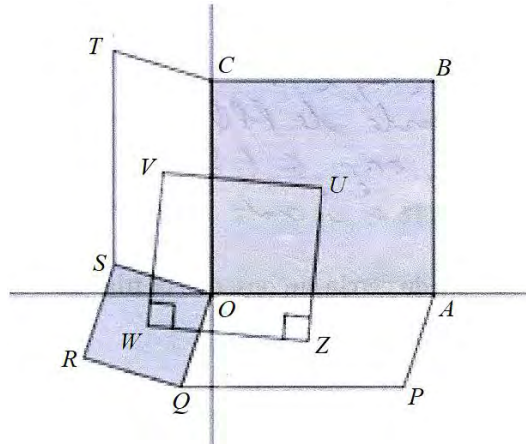
B

La perpendiculaire à (BC) passant par A est la hauteur du triangle ABC issue de A. Ainsi H est l'intersection des hauteurs du triangle ABC. Par conséquent, H est l'orthocentre du triangle ABC.

1. $\vec{GA} = -2\vec{GA}' \Leftrightarrow \vec{GO} + \vec{OA} = -2\vec{GO} - 2\vec{OA}' \Leftrightarrow 3\vec{OG} = \vec{OA} + 2\vec{OA}'$.
2. On a : $3\vec{OG} = \vec{OA} + 2\vec{OA}'$, or $2\vec{OA}' = \vec{AH}$, par suite, $3\vec{OG} = \vec{OA} + \vec{AH} = \vec{OH}$.
3. Les vecteurs \vec{OG} et \vec{OH} sont colinéaires. Donc si le triangle ABC n'est pas équilatéral, les points O, G et H sont alignés.
4. Lorsque ABC est équilatéral, H = G ; ainsi $3\vec{OG} = \vec{OH} \Leftrightarrow 3\vec{OG} = \vec{OG}$
 D'où $G = O$.
 Par conséquent, O = G = H.

Exercice 12

On se donne les points A(4 ; 0), B(4 ; 4), C(0 ; 4), P(3 ; -2), Q(-1 ; -2), S(-2 ; 1), T(-2 ; 5).
 U, V, W et Z sont les centres des parallélogrammes OABC, OCTS, OSRQ, OQPA.



Démontrez que le quadrilatère VUZW est un carré.

- V milieu de [SC] et [OT] donc $V\left(\frac{-2+0}{2}; \frac{1+4}{2}\right)$; $V\left(-1; \frac{5}{2}\right)$.
U milieu de [OB] et [AC] donc $U\left(\frac{0+4}{2}; \frac{0+4}{2}\right)$; $U(2; 2)$.
W milieu de [OR] et [SQ] donc $W\left(\frac{-2-1}{2}; \frac{1-2}{2}\right)$; $W\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.
Z milieu de [OP] et [AQ] donc $Z\left(\frac{0+3}{2}; \frac{0-2}{2}\right)$; $Z\left(\frac{3}{2}; -1\right)$.
- On a : $VU = \sqrt{(2+1)^2 + \left(2-\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{37}}{2}$.
De même, on trouve : $VW = WZ = UZ = \frac{\sqrt{37}}{2}$.
- VUZW est un quadrilatère tel que $UV = VW = WZ = UZ$.
Donc VUZW est un carré.

Exercice 13

ATTENTION « ici il fallait prendre $AB = 4$ cm et dans la question 1, considérer $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

1. Immédiat

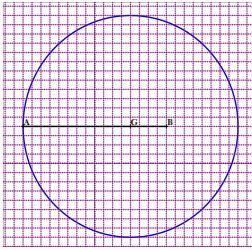
2.

- a) Dans l'écriture $\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\|$, on remplace M par A, on trouve $3AB$. Or $3AB = 12$ d'où le résultat.
- b) La relation $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ est équivalente à $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$. En tenant compte de cette dernière relation, $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 4\overrightarrow{MG}$.

En tenant compte de cette dernière réduction, on trouve : $\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = 12 \Leftrightarrow GM = 3$.

L'ensemble (C) est le cercle de centre G et de rayon 3.

2. Voir figure ci-dessous



SITUATIONS COMPLEXES

Exercice 14

$$\overrightarrow{T_2T_4} = -2\overrightarrow{OI} - 4\overrightarrow{OJ} \text{ d'où } \overrightarrow{T_2T_4} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{T_2T_9} = -4\overrightarrow{OI} - 8\overrightarrow{OJ} \text{ d'où } \overrightarrow{T_2T_9} \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\det(\overrightarrow{T_2T_4}; \overrightarrow{T_2T_9}) = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} = 16 - 16 = 0.$$

Puisque $\det(\overrightarrow{T_2T_4}; \overrightarrow{T_2T_9}) = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{T_2T_4}$ et $\overrightarrow{T_2T_9}$ sont colinéaires.

Donc les points T_2 , T_4 et T_9 sont alignés. D'où la première affirmation est vraie.

$$\overrightarrow{T_3T_7} = 4\overrightarrow{OI} + 8\overrightarrow{OJ} \text{ d'où } \overrightarrow{T_3T_7} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\det(\overrightarrow{T_2T_4}; \overrightarrow{T_3T_7}) = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} = -16 + 16 = 0.$$

c) $\det(\overrightarrow{T_2T_4}; \overrightarrow{T_3T_7}) = 0$ d'où les vecteurs $\overrightarrow{T_2T_4}$ et $\overrightarrow{T_3T_7}$ sont colinéaires.

Donc les droites (T_2T_4) et (T_3T_7) sont parallèles. D'où la deuxième affirmation est vraie.

Exercice 15

Considérons le repère (A, B, H). Dans ce repère, $C(2,0), I(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et $J(1, \frac{1}{3})$ et $\overrightarrow{IC} = 3\overrightarrow{IJ}$. D'où le résultat.

Exercice 16

Notons β l'angle formé par $\overrightarrow{F_1}$ et $-\overrightarrow{F_3}$, et α l'angle cherché.

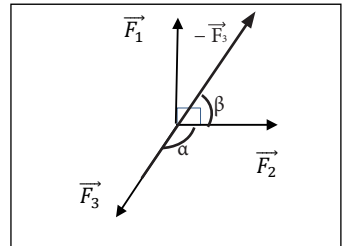
En appliquant la propriété de Pythagore, on a :

$$\|\overrightarrow{F_3}\|^2 = \|\overrightarrow{F_1}\|^2 + \|\overrightarrow{F_2}\|^2 = 16 + 48 = 64 \text{ soit } \|\overrightarrow{F_3}\| = 8$$

$$\cos \beta = \frac{\|\overrightarrow{F_1}\|}{\|\overrightarrow{F_3}\|} = \frac{4\sqrt{3}}{8} \text{ donc } \beta = 30^\circ$$

Par suite $\alpha = 150^\circ$ car α et β sont supplémentaires

On a $8 > 7$ et $140^\circ < 150^\circ < 160^\circ$ donc l'expérience est réussie.



1. MAJORANT – MINORANT D'UN ENSEMBLE

Exercices de fixation

Exercice 1

- a) Un nombre réel m est un minorant de E , signifie que m est inférieur ou égal à tous les éléments de E .
- b) Un nombre réel M est un majorant de E signifie que M est supérieur ou égal à tous les éléments de E .

Exercice 2

Un minorant de F est :	0	$\ominus 2$	$\frac{23}{9}$	$\ominus 10$
Un majorant de F est	$\ominus 15$	$\sqrt{7}$	$\frac{23}{9}$	$\ominus 20$
Un minorant de G est :	$\ominus 1$	8	1,8	$\ominus 0$
Un majorant de G est :	1	7	$\ominus 8$	$\ominus 10$

Exercice 3

- a) $M = 4$; $m = -\pi$
- b) $M = 2$; $m = \frac{1}{7}$
- c) $M = 4$; $m = -4$
- d) M n'existe pas et $m = -1$.
- e) M n'existe pas et m n'existe pas.
 E n'a pas de majorant ni de minorant.

II) MAXIMUM, MINIMUM D'UN ENSEMBLEExercices de fixation

Exercice 4

- a) Un nombre réel m est le minimum de E signifie que m appartient à E et m est inférieur ou égal à tous les éléments de E .
- b) Un nombre réel M est le maximum de E signifie que M appartient à E et M est supérieur ou égal à tous les éléments de E .

Exercice 5

Un minorant de F est :	0	$\ominus 2$	$\frac{23}{9}$	-10
Un majorant de F est	$\ominus 15$	$\sqrt{7}$	$\frac{23}{9}$	20
Un minorant de G est :	$\ominus 1$	8	1,8	0
Un majorant de G est :	1	7	$\ominus 8$	10

Exercice 6

- a) $M = \pi$; m n'existe pas.
- b) $M = 1$; $m = \frac{1}{6}$
- c) $M = 3$; $m = -3$
- d) E n'a pas de maximum ; 0 est le minimum de E
- e) D n'a pas de maximum, ni de minimum.

Exercice 7

- a) $0 \in E$ et $\forall x \in E, x \geq 0$; $m = 0$ si minimum, $M = 1,5$; $1,5 \in E$ et $\forall x \in E, 1,5 > x$;
- b) $m = -3$; $-3 \notin E$, et $+2,9 > 2\sqrt{2}$, donc M et m ne sont ni maximum, ni minimum de E .
- c) $m = 5 \notin E, M = -\pi \in E$; et $\forall x \in E, x \leq -5$, m n'est pas le minimum de E, M est le maximum de E .

III) VALEUR ABSOLU D'UN NOMBRE RÉEL

Exercices de fixation

Exercice 8

Pour chaque affirmation du tableau, quatre réponses sont proposées dont une seule est exacte. Entoure la case correspondante à la réponse exacte.

	Affirmations	a	b	c
1.	$ 7 $ est égal à :	48	-7	7
2.	$ -30 $ est égal à :	0	30	3
3.	$ 3 - \pi $ est égal à :	$3 + \pi$	$\pi - 3$	$3 - \pi$
4.	Si $x < 0$, alors $ x $ est égal à :	$-x$	x	0
5.	Pour tout nombre réel x , $ -x $ est égal à :	$ x $	$-x$	x
6.	Si $x < 10$, alors $ x - 10 $ est égal à :	$x - 10$	$10 - x$	$ x - 10$
7.	$x > 0$, alors $ x $ est égal à :	$-\pi$	x	0

Exercice 9

- a) $|\pi - 3| = \pi - 3$; b) $|4 - 3\sqrt{2}| = 3\sqrt{2} - 4$.

Exercice 10

- a) $4|0,9 - 1,5| - 2,5 = 4(1,5 - 0,9) - 2,4 = 0$.
- b) $4|0,2 - 1| - 2|3 - 2,5| = 4(1 - 0,2) - 2(3 - 2,5) = 3,2 - 1 = 2,2$.

IV) PROPRIETES DE LA VALEUR ABSOLUE

Exercice de fixation

Exercice 11

	Affirmations	Réponses
1.	$ x = 2 \Leftrightarrow x = 2$	F
2.	$ xy = x y$	F
3.	$ y^2 = y^2$	V
4.	Si $x \neq 0$, $\left \frac{-2}{x}\right = \frac{2}{x}$	F
5.	Si $y \neq 0$, $\left \frac{x}{y}\right = \frac{ x }{ y }$	V
6.	$ x + y = x + y $	F
7.	$ x \leq 3 \Leftrightarrow x \in [-3; 3]$	V

V) DISTANCE DE DEUX NOMBRES RÉELS

Exercices de fixation

Exercice 12

La distance de a et de b est :

$$a - b \square \quad b - a \square \quad |b - a| \square \quad |a| - |b| \square$$

Exercice 13

x	y	Distance de x et y
9	12	3
-5	-7	2
-16	23	39
14	-11	25

Exercice 14

$$AB = |5 - (-7)| = 12 \quad ; \quad DB = |-4 - (-7)| = 3$$

$$BC = \left| \frac{2}{3} - (-7) \right| = \frac{2}{3} + 7 = \frac{23}{3} \quad ; \quad DM = |x - (-4)| = |x + 4|.$$

VI) RÉSOLUTION ALGÈBRE D'UNE ÉQUATION DU TYPE

$$|x - a| = r \quad (r \geq 0)$$

Exercices de fixation

Exercice 15

Affirmations	Réponses
$ x - 1 = 3$ est équivalent à $x = 1 + 3$ ou $x = -1 + 3$	F
$ x - 2 = 1$ est équivalent à $x = 2 + 1$ ou $x = 2 - 1$	V
$ x + 1 = 0$ est équivalent à $x = -1$ ou $x = 1$	F

Exercice 16

$$(E_1) : |x - 3| = 5 \Leftrightarrow x = 3 + 5 \text{ ou } x = 3 - 5 \Leftrightarrow x = 8 \text{ ou } x = -2. S_{\mathbb{R}} = \{-2; 8\}.$$

$$(E_2) : |x + 2| = 1 \Leftrightarrow |x - (-2)| = 1 \Leftrightarrow x = -3 \text{ ou } x = -1. S_{\mathbb{R}} = \{-3; -1\}.$$

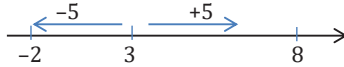
$$(E_3) : |x + 3| = 0 \Leftrightarrow x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3. S_{\mathbb{R}} = \{-3\}.$$

VII) RÉSOLUTION GRAPHIQUE D'UNE ÉQUATION DU TYPE

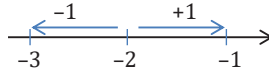
$$|x - a| = r \quad (r > 0)$$

Exercice de fixation

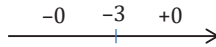
Exercice 17



$(E_1) : S_{\mathbb{R}} = \{-2; 8\}$



$(E_2) : S_{\mathbb{R}} = \{-3; -1\}$



$(E_3) : S_{\mathbb{R}} = \{-3\}$

VIII) RÉSOLUTION ALGÈBRE D'UNE INÉQUATION DU TYPE

$|x - a| < r (r > 0)$

Exercice de fixation

Exercice 18

$(I_1) : |x - 3| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x - 3 \leq 5 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 8, S_{\mathbb{R}} = [-2; 8]$

$(I_2) : |x + 2| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x + 2 \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq -1, S_{\mathbb{R}} = [-3; -1]$

$(I_3) : |x + 3| < 2 \Leftrightarrow -3 < x + 3 < 2 \Leftrightarrow -2 - 3 < x < 2 - 3$
 $\Leftrightarrow -5 < x < -1, S_{\mathbb{R}} =]-5; -1[.$

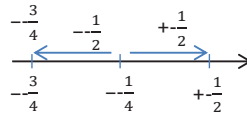
IX) RÉSOLUTION GRAPHIQUE D'UNE INÉQUATION DU TYPE

$|x - b| \leq r (r > 0)$

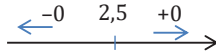
Exercice de fixation

Exercice 19

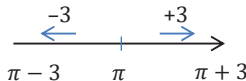
$(E_1) : \left|x + \frac{1}{4}\right| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|x - \left(-\frac{1}{4}\right)\right| \leq \frac{1}{2}$



$S_{\mathbb{R}} = \left[-\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right]$



$(E_2) : S_{\mathbb{R}} = \{2,5\}$



$(E_3) : S_{\mathbb{R}} = [\pi - 3; \pi + 3]$

X) COMPARAISON DE NOMBRES REELS

Exercices de fixation

Exercice 20

1) Compare dans chaque cas les nombres suivants :

$$\text{a) } \sqrt{2} - 1 \text{ et } \frac{1}{(\sqrt{2}+1)}; \quad \text{b) } \frac{3}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} \text{ et } \frac{3}{\sqrt{6}-2}; \quad \text{c) } \frac{(n+2)}{(n+3)} \text{ et } \frac{(n+3)}{(n+4)}, n \in \mathcal{N}.$$

$$\text{a) } \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{(\sqrt{2}+1)};$$

$$\text{b) } (\sqrt{7} - \sqrt{3})^2 = 10 - 2\sqrt{21} \text{ et } (\sqrt{6} - 2)^2 = 10 - 4\sqrt{6} \text{ on a : } 2\sqrt{21} < 4\sqrt{6} \\ -4\sqrt{6} < -2\sqrt{21} \text{ on a : } 10 - 4\sqrt{6} < 10 - 2\sqrt{21}; \text{ on a } \sqrt{6} - 2 < \sqrt{7} - \sqrt{3}, \\ \text{donc } \frac{3}{\sqrt{6}-2} > \frac{3}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}.$$

Exercice 21

$$\text{a) } \sqrt{5} - \sqrt{2} = 7 - 2\sqrt{10}; \quad (2 - \sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3}.$$

$$\text{Or } -4\sqrt{3} < -2\sqrt{10}.$$

$$\text{On a : } 7 - 4\sqrt{3} < 7 - 2\sqrt{10};$$

$$\text{Donc } 2 - \sqrt{3} < \sqrt{5} - \sqrt{2}.$$

$$\text{b) } (\sqrt{13} + \sqrt{8})^2 = 21 + 2\sqrt{104} \text{ et } (\sqrt{14} + \sqrt{7})^2 = 21 + 2\sqrt{98}.$$

$$\text{Or } 2\sqrt{98} < 2\sqrt{104}. \text{ On a : } 21 + 2\sqrt{98} < 21 + 2\sqrt{104}$$

$$21 + 2\sqrt{98} < 21 + 2\sqrt{104}, \text{ donc } \sqrt{14} + \sqrt{7} < \sqrt{13} + \sqrt{8}.$$

Exercice 22

$$\text{a) } \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = |2 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2 \text{ car } 2 - \sqrt{5} < 0.$$

$$\text{b) } \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = |\sqrt{3} - 1| = \sqrt{3} - 1 \text{ car } \sqrt{3} - 1 > 0;$$

$$\text{c) } \sqrt{5 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} = |2 + \sqrt{3}| = 2 + \sqrt{3} \text{ car } \sqrt{2} + \sqrt{3} > 0.$$

Exercice 23

$$\text{a) Étudions le signe de } (2\sqrt{11} + 5) - 11.$$

$$2\sqrt{11} + 5 - 11 = 2\sqrt{11} - 6. \text{ Or } (2\sqrt{11})^2 > 6^2.$$

$$\text{On a : } 2\sqrt{11} - 6 > 0, \text{ on en déduit que } (2\sqrt{11} + 5) - 11 > 0;$$

$$\text{Donc } 2\sqrt{11} + 5 > 11.$$

$$\text{b) } 6 - 3\sqrt{22} - (-8) = 14 - 3\sqrt{22}.$$

$$\text{Or } 14^2 = 196 \text{ et } (3\sqrt{22})^2 = 198.$$

$$14 < 3\sqrt{22} \Leftrightarrow 14 - 3\sqrt{22} < 0$$

$$\text{On a : } (6 - 3\sqrt{22}) - (-8) < 0;$$

$$\text{Donc } 6 - 3\sqrt{22} < -8.$$

XI ARRondi ET APPROXIMATION DÉCIMALE

Exercices de fixation

Exercice 24

1. L'approximation décimale par défaut de π à l'origine 5 est 3,14159.

L'approximation décimale par excès de π à l'ordre 5 est 3,1416.

2. L'arrondi d'ordre 4 de π est 3,1416

L'arrondi d'ordre 5 de π est 3,14159.

Exercice 25

- 3,142 est une valeur approfondie de $\frac{22}{7}$ par défaut et 3,143 est une valeur approchée par excès de $\frac{22}{7}$
- Justifions que $\left| \frac{22}{7} - 3,1425 \right| \leq 5 \times 10^{-4}$.
 En effet : $\left| \frac{22}{7} - 3,1425 \right| = |3,57 \times 10^{-4}|$. Or $3,57 \times 10^{-4} \leq 5 \times 10^{-4}$.
 Donc $\left| \frac{22}{7} - 3,1425 \right| \leq 5 \times 10^{-4}$ donne 3,1425 si une valeur approchée de $\frac{22}{7}$ à 5×10^{-4} près.
- $\left| \frac{22}{7} - 3,143 \right| = \left| -\frac{1}{7000} \right| = \left| \frac{1}{7} \times 10^{-4} \right|$.

XII RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE

Exercices de fixation

Exercice 26

Supposons que $\sqrt{2} - 1$ est un nombre rationnel. On peut trouver deux entiers p et q, $q \neq 0$ tel que $\sqrt{2} - 1 = \frac{p}{q}$ soit irréductible.
 On a : $\sqrt{2} - 1 = \frac{p}{q} \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{q} + 1 = \frac{p+q}{q}$.
 $\sqrt{2}$ est irrationnel, ce qui est impossible donc $\sqrt{2} - 1$ est irrationnel.

Exercice 27

Supposons que 3 est le maximum de A, ce qui signifie que $3 \in A$.
 $3 \in A$ signifie qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $3 = 3 - \frac{1}{n}$.
 On a alors $-\frac{1}{n} = 0$. Ce qui est impossible car n n'existe pas.
 Donc 3 n'est pas le minimum de A.

EXERCICES DE RENFORCEMENT / APPROFONDISSEMENT

Exercice 1

Affirmations	Réponses
Le maximum de E, s'il existe, est un majorant de E.	V
Tout minorant de E, s'il existe, est le minimum de E.	F
Si M est un majorant de E, alors M appartient à E.	F
Le minimum de E est le plus grand des minorants de E.	V
E peut admettre plusieurs maximums.	F

Exercice 2

- $-1 \in [-1; 3[$ et $\forall x \in [-1; 3[$, $-1 \leq x$, donc -1 est le minimum de $[-1; 3[$.
- Supposons 3 est le maximum de $[-1; 3[$.
 On a : $\forall x \in [-1; 3[$, $x \leq 3$, mais $3 \notin [-1; 3[$,
 Donc 3 n'est pas le maximum de $[-1; 3[$.

Exercice 3

On donne $a = 0,00012$; $b = 0,005$; $c = 0,006$; $d = 0,003$; $e = 0,000001$ et
 $R = \frac{a^2 \times b^2 \times d^2}{e^4 \times e^3}$.

Écris R sous la forme de $p \cdot 10^n$ où $p \in \mathcal{M}$ et $n \in \mathcal{N}$.

$$R = \frac{(12 \times 5 \times 3)^2 \times (10^{-10})^2}{6^2 \times 10^{-12} \times 10^{-18}} = \frac{1}{4} \times 10^{12} = 0,25 \times 10^{12}$$

$$= 25 \times 10^{-2} \times 10^{12} = 25 \times 10^{10}.$$

Exercice 4

On considère les nombres réels I et J tels que :

- $I = |1 - \sqrt{3}| - |5 - \sqrt{12}| - 3|\sqrt{27} - 4\sqrt{3}|.$
- $J = 3 \times \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} - \sqrt{(2\sqrt{3} - 3)^2}.$

Justifie que : $I = -6$ et $J = \sqrt{3}$.

$$I = \sqrt{3} - 1 - (5 - 2\sqrt{3}) - 3(3\sqrt{3} - 4\sqrt{3}).$$

$$= \sqrt{3} - 1 - 5 + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 6 = -6.$$

$$J = 3\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} - \sqrt{(2\sqrt{3} - 3)^2} = 3|1 - \sqrt{3}| - |2\sqrt{3} - 3|$$

$$= 3(\sqrt{3} - 1) - (2\sqrt{3} - 3) = 3\sqrt{3} - 3 - 2\sqrt{3} + 3 = \sqrt{3}.$$

Exercice 5

$$E = \frac{6+\pi}{3+\pi} \times \frac{3 \times \pi}{6+\pi} = 1.$$

$$F = \frac{1}{8} - \frac{5}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{7}{2} \times \frac{1}{r} = \frac{1}{8} - \frac{10}{24} + \frac{7}{24} = \frac{1}{8} - \frac{3}{24} = \frac{3}{24} - \frac{3}{24} = 0.$$

$$G = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n(n+1)} = \frac{n+1+n-1}{n(n+1)} = \frac{2n}{n(n+1)} = \frac{2}{n+1}.$$

Exercice 6

$$A = \frac{3(\sqrt{3}-2)}{3-4} = 6 - 3\sqrt{3}.$$

$$B = \frac{(2\sqrt{3}+3)(\sqrt{3}+1)}{2} = \frac{9+5\sqrt{3}}{2}.$$

$$C = \frac{10+2\sqrt{6}}{5\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}+6\sqrt{2}}{15}.$$

Exercice 7

$$-3^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \sqrt{5^2 - 4^2} = -3^2 + \frac{2^2}{3^2} \times 3 = -3^2 + \frac{2^2}{3} = -3^2 + \frac{4}{3} = -\frac{23}{3}.$$

$$\frac{3\sqrt{5}+\sqrt{20}}{\sqrt{45}\left(2-\frac{5}{6}\right)} = \frac{3\sqrt{5}+2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}\left(\frac{7}{6}\right)} = \frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{5} \times \frac{7}{6}} = \frac{5}{3} \times \frac{6}{7} = \frac{10}{7}.$$

Exercice 8

Détermine les nombres a , b , et c sachant que :

$$\frac{3}{a} - \frac{1+\frac{1}{a}}{1-\frac{1}{3}} = 0; \quad b = \sqrt{(\sqrt{2}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}; \quad c = 14a - 12b.$$

$$\frac{3}{a} = \frac{7}{6} \times \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{a} = \frac{7}{4}$$

$$a = \frac{12}{7}$$

$$b = |\sqrt{2} - 2| + |\sqrt{2} - 1|$$

$$= 2 - \sqrt{2} + \sqrt{2} - 1$$

$$b = 1$$

$$c = 14a - 12b$$

$$= 14 \times \frac{12}{7} - 12 \times 1$$

$$= 2 \times 12 - 12$$

$$c = 12$$

Exercice 9

$$\frac{a - \frac{a-b}{1+ab}}{1 + \frac{a(a-b)}{1+ab}} = \frac{a+a^1b-a+b}{1+ab+a^2-ab} = \frac{a^2b+b}{1+a^2} = \frac{b(a^2+1)}{1+a^2}$$

$$a^2 + 1 \neq 0 \text{ donc } \frac{a - \frac{a-b}{1+ab}}{1 + \frac{a(a-b)}{1+ab}} = b$$

Exercice 10

1. $\forall x \in \mathbb{R}, (a - b)^2 \geq 0$. On a : $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$.

Ainsi $a^2 + b^2 \geq 2ab$ donc $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.

2. $3b(2a - b) - (a + b)^2 = 6ab - 3b^2 - a^2 - b^2 - 2ab$

$$= -a^2 - 4b^2 + 4ab$$

$$= -(a^2 - 4ab + 4b^2)$$

$$= -(a - 2b)^2 \leq 0$$

$3b(2a - b) - (a + b)^2 \leq 0$, donc $3b(2a - b) \leq (a + b)^2$.

Exercice 11

g, h et m sont tous positifs.

$$g^2 - h^2 = xy - \frac{4x^2y^2}{(x+y)^2} = \frac{(x-y)^2}{(x+y)^2}(xy) > 0$$

On en définit que $g > h$;

De même $m^2 - g^2 = \frac{(x+y)^2}{4} - 4xy = \frac{(x-y)^2}{4} > 0$; on a $m > g$.

On a $m > g > h$, donc $h < g < m$.

Exercice 12

1. $|3x - 6| = |3(x - 2)| = 3|x - 2|$.

2. Résolution dans \mathbb{R} l'équation : $|3x - 6| = 2$.

$$|3x - 6| = 2 \Leftrightarrow 3|x - 2| \Leftrightarrow |x - 2| = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 + \frac{2}{3} \text{ ou } x = 2 - \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{7}{3} \text{ ou } x = \frac{4}{3} \quad S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{7}{3}; \frac{4}{3} \right\}$$

Exercice 13

$(E_1) : |-x + 3| = 4 \Leftrightarrow |-(x - 3)| = 4 \Leftrightarrow |x - 3| = 4$

$x = 3 + 4$ ou $x = 3 - 4$; on a : $x = 7$ ou $x = -1$.

$S_{\mathbb{R}} = \{-1; 7\}$.

$(E_2) : |-3x + 2| = 3 \Leftrightarrow \left| -3 \left(x - \frac{2}{3} \right) \right| = 3 \Leftrightarrow \left| x - \frac{2}{3} \right| = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3} - 1$ ou $x = \frac{2}{3} + 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$ ou $x = \frac{5}{3}$.

$S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{1}{3}; \frac{5}{3} \right\}$.

Exercice 14

$(I_1) : |2x + 3| \leq 3 \Leftrightarrow \left| 2 \left(x + \frac{3}{2} \right) \right| \leq 3 \Leftrightarrow \left| x + \frac{3}{2} \right| \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left| x - \left(-\frac{3}{2} \right) \right| \leq \frac{3}{2}$ $S_{\mathbb{R}} = \{-3; 0\}$.

$(I_2) : |-3x - 7| \leq -1$; impossible. $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$.

$(I_3) : |-2x + 8| < 4 \Leftrightarrow |-2(x + 4)| < 4 \Leftrightarrow |x - (-4)| \leq 2$. $S_{\mathbb{R}} = \{-6; -2\}$.

Exercice 15

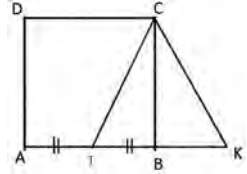
Démontre que, pour tout nombre a , : $|3a - 5| \leq |2a + 1| + |a - 6|$.

$$|3a - 5| = |2a + a - 6 + 1| = |2a + 1 + a - 6|$$

$$|2a + 1 + a - 6| \leq |2a + 1| + |a - 6|.$$

Exercice 16

ABCD est un carré de côté 1. I est le milieu du segment $[AB]$. K est le point de la demi-droite $[AB]$ tel que : $IK = IC$ (voir figure ci-contre.



- 1.
2. On pose : $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1. $AK = AI + IK$. Or $JK = IC$
Calculons IC : $IC^2 = IB^2 + BC^2 \Leftrightarrow IC^2 = \frac{5}{4}$. On a : $IC = \frac{\sqrt{5}}{2}$;
Donc $AK = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow AK = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
2. a) $\varphi^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\varphi + 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$; donc $\varphi^2 = \varphi + 1$.
b) En divisant l'égalité $\varphi^2 = \varphi + 1$ par φ on a : $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$.
c) L'arrondi d'ordre 3 de φ est 1,678 ;

SITUATIONS COMPLEXES

Exercice 17

L'aire de l'espace circulaire est :

$$\mathcal{A} = 40^2\pi = 1600\pi.$$

L'aire de cercles intérieurs :

- petit cercle : $\mathcal{A}_p = \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4}\pi$;
- l'aire du grand cercle intérieur est : $\mathcal{A}_G = \left(\frac{5x}{2}\right)^2 = \frac{25x^2}{4}\pi$.

$$\text{L'aire intérieure totale est : } \mathcal{A}_p + \mathcal{A}_G = \frac{26}{4}x^2\pi.$$

1. L'aire de la partie à gazonner est : $\mathcal{A} = 1600\pi - \frac{25x^2}{4}\pi$.
2. Déterminons les valeurs pour lesquelles le souhait du proviseur est respecté.

$$\text{On a : } 2900 \leq 1600\pi - \frac{25x^2}{4}\pi \leq 3000.$$

$$\text{On a : } \frac{4(1600\pi - 3000)}{26\pi} \leq x^2 \leq \frac{4(1600\pi - 2900)}{26\pi}, \text{ en prenant } \pi = 3,14.$$

$$\text{On a : } 977,74 \leq x^2 \leq 1026,05.$$

$$\text{On a : } 31,26 \leq x \leq 32,03.$$

$$\text{Enfin : } 31 \leq x \leq 32.$$

x sera compris entre 31 m et 32 m.

Exercice 18

On a : pour le feronnier

$$|L - 2| \leq 0,1 \Leftrightarrow 1,9 \leq L \leq 2,1$$

$$|l - 1,5| \leq 0,15 \Leftrightarrow 1,4 \leq l \leq 1,6$$

$$\text{Et } |h - 0,75| \leq 0,01 \Leftrightarrow 0,74 \leq h \leq 0,85$$

De plus $v_C = L \times l \times h$ d'où

$$1,9 \times 1,4 \times 0,74 \leq v_F \leq 2,1 \times 1,6 \times 0,76$$

$$1,9684 \leq v_F \leq 2,5536$$

Pour la classe on a :

$$|v_C - 2,25| \leq 0,45 \Leftrightarrow 1,8 \leq v_C \leq 2,7$$

Comme $1,8 \leq 1,9684$ et $2,5536 \leq 2,7$

Donc : $1,8 \leq v_F \leq 2,7$.

Par suite $|v_F - 2,25| \leq 0,45$.

Enfin les dimensions données par le feronnier sont conformes à l'exigence de la classe

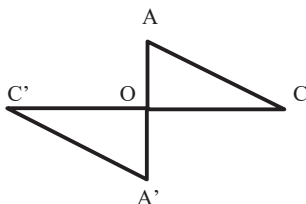
Résumés de cours – Exercices de fixation

b. DEFINITIONS

1. Symétrie centrale

Exercice de fixation

Exercice 1



2. Symétrie orthogonale

Exercice de fixation

Exercice 2

- (IP) est la médiatrice de $[QR]$ car $PQ = PR$ et $IQ = IR$.
Comme $(IP) = (\Delta)$ alors (Δ) est la médiatrice de $[QR]$.
 $R = S_{(\Delta)}(Q)$.
- $S_{(\Delta)}(IP) = (IP)$ car $(IP) = (\Delta)$.

4. Translation

Exercice de fixation

Exercice 3

N°	Affirmation	Vrai	Faux
1	$t_{\overline{AM}}(T) = H$	X	
2	$A = t_{\overline{MH}}(T)$		X
3	$A = t_{\overline{OH}}(O)$		X
4	$t_{\overline{OT}}(M) = O$	X	
5	$t_{\overline{AA}}(M) = M$	X	
6	Aucun point du plan n'est invariant par $t_{\overline{OO}}$		X

c. PROPRIÉTÉS

Propriété 3

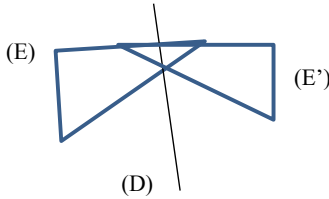
Exercice de fixation

Exercice 4

(S_O) ↙

(DA)	(GB)
(BE)	(BE)
(FD)	(FD)
(GA)	(DB)

Exercice 5



Exercice 6

1b ; 2b ; 3a.

III UTILISATION DES SYMÉTRIES ET TRANSLATIONS

1. Pour démontrer

Exercice de fixation

Exercice 7

(L) est la droite parallèle à (AB) passant par C. Or C est le symétrique de B par rapport à O.

Donc (L) est l'image de (AB) par la symétrie de centre O.

Exercice 8

1. Dans le triangle ABC, I est milieu de [BC] et J est milieu de [AB].

Donc (IJ) // (AC) d'après la propriété de la droite des milieux. H étant le projeté orthogonal de B sur (AC), (BH) ⊥ (AC). Donc (IJ) ⊥ (BH). (1)

Dans le triangle CBH, I est milieu de [BC] et [IJ] // (CH) donc (IJ) passe par le milieu de (BH). (2).

De (1) et (2), (IJ) est la médiatrice de [BH].

2.

$(S_{(IJ)})$ ↙

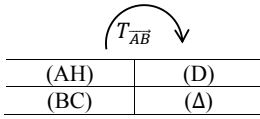
(IB)	(HI)
(BJ)	(HJ)

Or (IB) ⊥ (BJ) donc (HI) ⊥ (HJ).

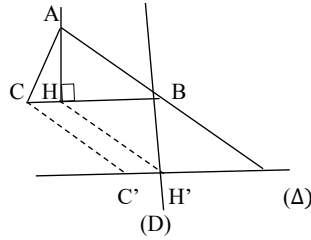
Exercice de fixation

Exercice 9

1)



Or $(AH) \perp (BC)$ donc $(D) \perp (\Delta)$.



2. Pour trouver un ensemble de points

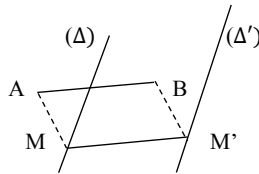
Exercice de fixation

Exercice 10

- H étant le symétrique de N par rapport à I, on a : $H = S_I(N)$.
 Comme N décrit l'arc \widehat{AB} alors H décrit l'image de \widehat{AB} par la symétrie centrale de centre I.
 L'image de \widehat{AB} par la symétrie centrale de centre J est \widehat{EF} . Donc H décrit \widehat{EF} .

Exercice 11

- Données fixes ;
- La droite (Δ) , les points A et B.
- Transformation qui, à M associe M' .
 $ABMM'$ étant un parallélogramme, $\overline{AB} = \overline{MM'}$. D'où $M' = t_{\overline{AB}}(M)$.
- Détermination de l'ensemble des points M' . Lorsque M décrit (Δ) , le point M' décrit l'image de (Δ) par $t_{\overline{AB}}$.
 L'image de (Δ) par $t_{\overline{AB}}$ est la parallèle à (Δ) passant par M décrit la droite (Δ') ,
 image de (Δ) par $t_{\overline{AB}}$.

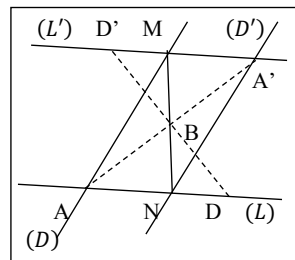


3. Pour construire une figure

Exercice de fixation

Exercice 12

- Programme de construction**
 - Construire le point A' image de A par S_B ;
 - Construire la droite (D') image de (D) par S_B ;
 - Marquer N, le point d'intersection de (D') et (L) ;
 - Construire la droite (L') image de (L) par S_B ;
 - Marque M, le point d'intersection de (D) et (L') .



Justification

Lorsque deux droites sont parallèles, toute sécante à l'une « est sécante à l'autre », donc (D) et (L') sont sécantes en M ; (L) et (D) sont sécantes en N. Donc les points M et N sont symétriques à B.

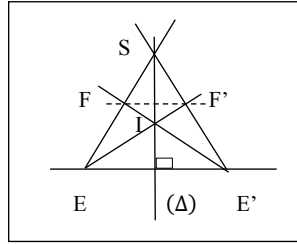
Exemple 3

Exercice de fixation

Exercice 13

a. Programme de construction :

- Tracer la droite (EF) ;
- Marquer S, point d'intersection de (EF) et (Δ) ;
- Tracer la droite (SE') ;
- Tracer la droite (E'F) ;
- Marquer I, point d'intersection de (E'F) et (Δ) ;
- Tracer la droite (EI) ;
- Marquer point d'intersection de (EI) et (SE').



Justification :

F étant le point d'intersection de (EF) et (E'F), son image F' est le point d'intersection de (SE') et (EI), images respectives de (EF) et (E'F).

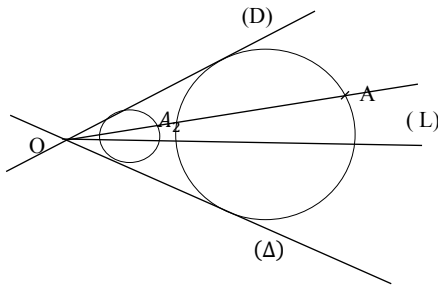
Exercice 14 *le renvoyé à la leçon sur les homothéties*

Programme de construction :

- Construis la bissectrice (L) de l'angle de sommet O déterminé par les droites (D) et (Δ) et contenant le point A.
- Choisis un point O_1 sur (L)
- Tracer le cercle (\mathcal{C}_1) de centre O_1 et tangent à (D) ;
- Trace la droite (OA). Cette droite coupe (\mathcal{C}_1) en deux points A_1 et A_2
- On considère l'homothétie h de centre O qui applique A_1 ou A_2 sur A
- $h(O_1) = O_2$ et soit (C) le cercle de centre O_2 passant par A
- $h((\mathcal{C}_1)) = (C)$

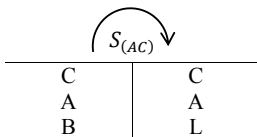
Justification :

(C) passe par A et est tangent à $h((D))$ et $h((\Delta))$ or $h((D)) = (D)$ et $h((\Delta)) = (\Delta)$



EXERCICES DE RENFORCEMENT / APPROFONDISSEMENT

Exercice 1

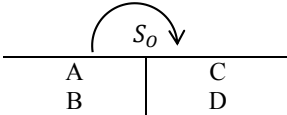


Comme BAC est un triangle isocèle en C, alors $CA = CB$. Donc CA (la symétrie orthogonale conserve les distances). Par conséquent, le triangle CAL est isocèle en C.

Exercice 2

1. Démontrons que K est l'image de H par S_O

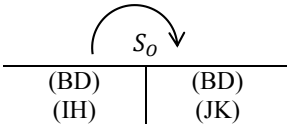
ABCD étant un parallélogramme de centre O, on a :



Or, I est le milieu de [AB], donc $S_O(I)$ est le milieu de [CD].

Comme le milieu de [CD] est J, alors $S_O(I) = J$. $S_O(IH)$ est la perpendiculaire à (BD) passant par J car $S_O(BD) = (BD)$ (BD passe par O) et $(IH) \perp (BD)$.

Comme (JK) est perpendiculaire à (BD) passant par J, alors $S_O(IH) = (JK)$.



Or H est le point d'intersection de (BD) et (IH) d'où $S_O(H)$ est le point d'intersection de (BD) et (JK).

Par conséquent, $S_O(H) = K$. On a ainsi démontré que K est l'image de H par S_O .

2. Déduisons-en que AHCK est un parallélogramme

$S_O(H) = K$ donc O est le milieu de [HK]. Les diagonales [AC] et [HK] du quadrilatère AHCK se coupent en leur milieu O. Donc le quadrilatère AHCK est un parallélogramme.

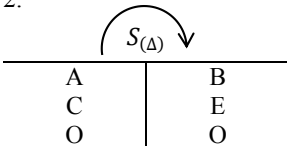
Exercice 3

1. Les triangles AOB et COE sont isocèles en O.

Désignons par (Δ_1) et (Δ_2) les médiatrices respectives des segments [AB] et [CE]. Donc $(\Delta_1) \perp (AB)$ et $(\Delta_2) \perp (CE)$.

Pour la suite, $(\Delta_1) \parallel (\Delta_2)$. Comme $O \in (\Delta_1)$ et $O \in (\Delta_2)$ alors $(\Delta_1) = (\Delta_2)$. On a ainsi démontré que les segments [AB] et [OE] ont la même médiatrice. (Δ) .

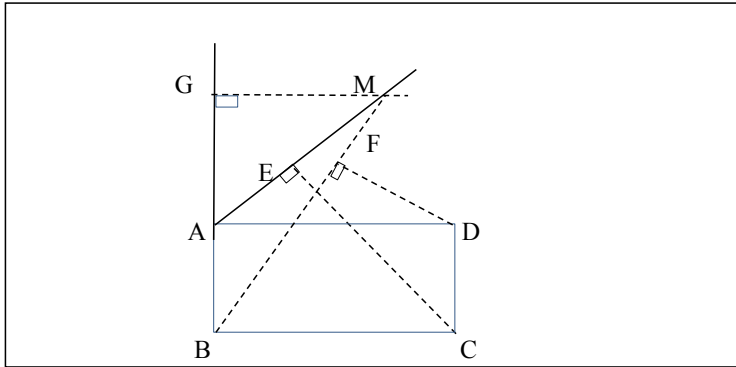
- 2.



Donc $mes\widehat{AOC} = mes\widehat{BOE}$.

Exercice 4

1.



2.

Considérons la translation t de vecteurs \overrightarrow{AD} . Posons K l'image de M par t . Alors $t(A) = D$, $t(B) = C$ et $t(M) = K$.

L'image de la hauteur du triangle ABM issue de B est la hauteur du triangle DCK issue de C.

De $t(M) = K$, on en déduit que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{MK}$ ou encore $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DK}$ donc (AM) et (DK) sont parallèles $(AM) \parallel (DK)$ et $(CE) \perp (AM)$ donc $(DK) \perp (CE)$. On en déduit que (CE) est la hauteur du triangle DKC issue de C. Ainsi, l'image de la hauteur du triangle ABM issue de B est la droite (CE).

De même, on démontre que (DF) et (MG) sont les images respectives des hauteurs du triangle ABM issues de A et de M.

3. Ces droites (CE), (DF) et (GM) sont les trois hauteurs du triangle DKC, donc elles sont concourantes.

Exercice 5

O et O' sont les centres respectifs de (C) et de (C')

Soit I le point d'intersection des droites (AB) et (OO'). Les deux cercles ont le même rayon, donc (OO') est la médiatrice de [AB].

Par conséquent, (OO') coupe [AB] en son milieu. Les deux cercles de même rayon sont sécantes en A et B ; donc (AB) est la médiatrice de [OO'].

De ce qui précède, on déduit que le quadrilatère OAO'B est un losange. B est l'image de A par la symétrie de centre I ; (C') est l'image de (C) par la symétrie de centre I. L'image de (AP) ou de (PQ) par la symétrie de centre I est la parallèle à (PQ) passant par B. L'image de (PQ) par la symétrie de centre I est (SR).

$P \in (C)$, donc $S_I(P) \in (C')$. Soit $S_I(P) = R$.

De même, on démontre que $S_I(Q) = S$; $S_I(P) = R$ et $S_I(Q) = S$ donc $PQ = SR$.

En conclusion : $(PQ) \parallel (SR)$ et $PQ = SR$.

Donc le quadrilatère PQRS est un parallélogramme.

Exercice 8

1. Programme de construction

- Construire (Δ') image de (Δ) par la translation $t_{\overline{AB}}$. (Δ') étant la parallèle à (Δ) passant par O' où $O' = t_{\overline{AB}}(O)$.
- Marquer le point M, intersection de (Δ') et (D) .
- Marquer le point N, antécédent de M par $t_{\overline{AB}}$ (N appartient à (Δ) car $(\Delta') = t_{\overline{AB}}(\Delta)$ et $M \in (\Delta')$).

2. Lieu géométrique des points M lorsque N décrit la droite (Δ)

ABMN étant un parallélogramme, $\overline{NM} = \overline{AB}$. D'où $M = t_{\overline{AB}}(N)$.

Par conséquent, le lieu géométrique des points M lorsque N décrit la droite (Δ) est l'image de (Δ) par la translation $t_{\overline{AB}}$.

Comme $t_{\overline{AB}}((\Delta)) = (\Delta')$ alors le lieu géométrique des points M lorsque N décrit la droite (Δ) est la droite (Δ') .

Exercice 9

Programme de construction

- Tracer (MP) ;
 - Marquer O, le point d'intersection de (MP) et (QN) ;
 - Marquer le point E, intersection de (D) et (PQ) ;
 - Tracer la droite (OE) ; cette droite coupe (MN) en F.
 - (PF) est la droite demandée.
- Le tableau de correspondance ci-dessous justifie ce programme de construction.

$\overbrace{S(O)} \curvearrowright$	
M	P
E	F
Q	N
(ME)	(PF)
(QP)	(NM)

Nous savons que : $\left\{ \begin{array}{l} (D) \perp (NQ) \\ \text{et} \\ (PF) \perp (NQ) \end{array} \right.$

D'où $(D) \parallel (PF)$ c'est-à-dire $(ME) \parallel (PF)$ (1)

Par ailleurs, MNPQ est un parallélogramme. D'où $(MN) \parallel (PQ)$.

Comme $F \in (MN)$ et $E \in (PQ)$ alors $(MN) = (MF)$ et $(PQ) = (PE)$.

Par la suite, $(MF) \parallel (PE)$. (2)

De (1) et (2), on déduit que MFPE est un parallélogramme. Ses diagonales $[MP]$ et $[EF]$ se coupent en leur milieu O.

D'où $F = S_O(E)$.

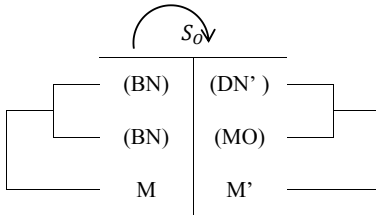
Exercice 10

Soit M' l'image de M par la symétrie de centre O.

Programme de construction de M'

- Tracer la droite (BM) ;
- Marquer le point N, intersection des droites (BM) et (DC) ;
- Tracer la droite (NO) ;
- Marquer le point N' , intersection de (NO) et (AB) ;
- Tracer la droite (MO) ;
- Marquer le point M' , intersection (MO) et (DN') .

Justification



Comme M est le point d'intersection de (BN) et (MO) alors $S_O(M)$ est le point d'intersection de (DN') et (MO) . Or $S_O(M) = M'$.
Donc M' est le point d'intersection de (DN') et (MO) .

Exercice 11

BAEF étant un parallélogramme, on a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$.

Soit t la translation de vecteur \overrightarrow{AB} .

Construire (Δ') l'image de (Δ) par cette translation.

(Δ') et (C) se coupent en deux points. On choisit l'un d'eux noté F.

Donc $E = t^{-1}(F)$

Programme de construction

- Tracer l'image (Δ') de (Δ) par la translation de vecteur \overrightarrow{AB} .
- Choisir l'un des points d'intersection (C) et (Δ') noté F.
- Construire l'image E de F par t^{-1} .

Exercice 12

ABTK est un parallélogramme. Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KT}$.

On considère t , la translation de vecteur \overrightarrow{AB} .

Soit (D') l'image de (D) par cette translation t . (D') coupe (C) en deux points. Soit l'un des points d'intersection de (D') et (C) .

K est l'image de T par la translation vecteur \overrightarrow{BA} .

Programme de construction

- Tracer l'image (D') de (D) par $t_{\overrightarrow{AB}}$.
- Choisir l'un des points d'intersection de (C) et (D') noté T.
- Construire l'image K de T par t^{-1} .

Exercice 13

- Construire A' l'image de A par $S_{(D)}$.

- Posons $\{M\} = (D) \cap (BA')$.

$$MA + MB = MA' + MB.$$

$$MA + MB = A'B \text{ car } M \in [A'B].$$

Pour tout point N appartenant à (D) et $N \neq M$, $A'NB$ est un triangle donc $A'N + NB > A'B$.

Soit $AN + NB > MA + MB$.

Exercice 14

Posons $M_1 = S_{(AC)}(M)$ et $M_2 = S_{(AB)}(M)$.

(AC) est la médiatrice de $[MM_1]$ et (AB) est la médiatrice de $[MM_2]$. Pour tout point P de (AB) , on a : $MP = PM_2$ et pour tout point Q de (AC) , on a : $MQ = QM_1$. Donc

$$MP + MQ + PQ = PM_2 + M_1Q + PQ = PM_2 + M_1P$$

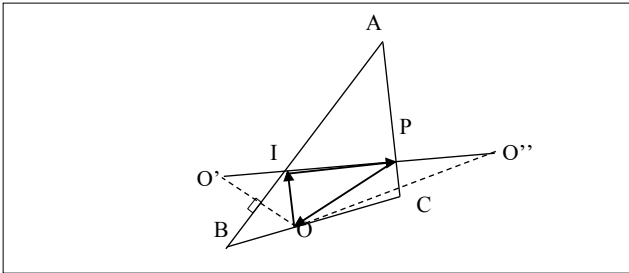
$$MP + MQ + PQ = M_1M_2.$$

$MP + MQ + PQ$ est minimal lorsque M_1, Q, P et M_2 sont alignés dans cet ordre. Il suffit pour cela de tracer la droite (M_1M_2) .

SITUATIONS COMPLEXES

Exercice 15

Construire le symétrique O' de O par rapport à (AB) (plus petite distance de O à (AB))
 Construire le symétrique O'' de O par rapport à (AC) (plus petite distance de O à (AC))
 $\{ I \} = (O'O'') \cap (AB)$ et $\{ P \} = (O'O'') \cap (AC)$
 car $O'I + IP + PO''$ est la plus petite distance



Exercice 16

1. Dans le triangle ABC .

I est milieu de $[BC]$ et J est milieu de $[AB]$.

Donc $(IJ) \parallel (AC)$ d'après la propriété de la droite des milieux.

Par ailleurs, H est le projeté orthogonal de B sur la droite (AC) ; $(BH) \perp (AC)$.

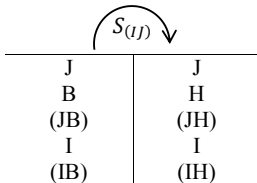
Comme $\begin{cases} (IJ) \parallel (AC) \\ et \\ (BH) \perp (AC) \end{cases}$, alors $(IJ) \perp (BH)$.

Dans le triangle ABH , la parallèle à (AH) menée par le milieu J de $[AB]$ passe par le milieu de $[BH]$. D'où (IJ) est perpendiculaire à (BH) et passe par le milieu de $[BH]$.

Par conséquent, (IJ) est la médiatrice du segment $[BH]$.

Donc l'image de B par $S_{(IJ)}$ est H .

2.



Or $(JB) = (AB)$ et $(IB) = (BC)$, d'où $S_{(IJ)}(AB) = (JH)$ et $S_{(IJ)}(BC) = (JH)$.

Comme $(AB) \perp (BC)$ alors $(JH) \perp (IH)$.

Par conséquent, le triangle JHI est rectangle en H .

L'affirmation de la collaboratrice de la directrice est donc vérifiée.

Résumés de cours – Exercices de fixation

1. NOTION DE FONCTION

Exercices de fixation

Exercice 1

A et B sont des ensembles non vides.

On appelle fonction de A vers B, toute correspondance qui à chaque élément de A, associe un ou zéro élément de B.

Exercice 2

L1 (V) ; L2 (F) ; L3 (F) ; L4 (V)

2. DIVERSES DÉTERMINATIONS D'UNE FONCTION

Exercices de fixation

Exercice 3

1. $h(4) = -5$

2. $f(2) = 5$

3. $g(-3) = 5$.

Exercice 4

Tableau 1 et tableau 2.

Exercice 5

Les courbes représentant les fonctions sont : (2), (5) et (6).

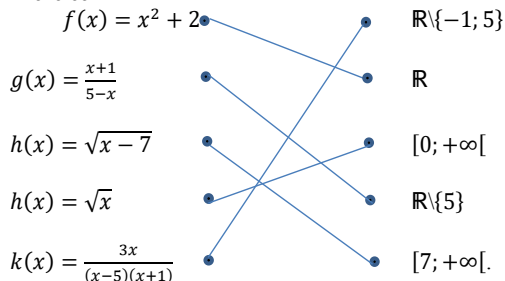
3. ENSEMBLE DE DÉFINITION

Exercices de fixation

Exercice 6

f ... une fonction... d'un ensemble A vers un ensemble B. On appelle ...ensemble de définition... de f , l'...ensemble... des éléments de A qui ont ...une image ... par f dans B.

Exercice 7



Exercice 8

$$D_f = [0; +\infty[; \quad D_g = \mathbb{R} ; \quad D_h = \mathbb{R} ; \quad D_k = \mathbb{R} ; \quad D_\ell = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{5}{2} \right\}.$$

Exercice 9

$x \in D_f \Leftrightarrow x + 3 \geq 0 \text{ et } x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq -3 \text{ et } x \leq 0$. On a : $D_f = [-3; 0]$
 $x \in D_g \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) \neq 0 \text{ et } x \geq 0 \Leftrightarrow x - 1 \text{ et } x \neq 2 \text{ et } x \geq 0$;
 $D_g = [0; 2[\cup]2; +\infty[$
 $x \in D_h \Leftrightarrow x^2 - 4 \neq 0 \text{ et } x + 30 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) \neq 0 \text{ et } x + 3 \geq 0$
 $\Leftrightarrow x \neq 2 \text{ et } x \neq -2 \text{ et } x \geq -3$
 $D_h = [-3; -2[\cup]-2; 2[\cup]2; +\infty[\text{ ou } D_h = [-3; +\infty[\setminus\{-2; 2\}$.

Exercice 10

Cette courbe est définie de $[-1; 4]$
 Donc $D_f = [-1; 4]$.

4. IMAGE ET ANTÉCÉDENT D'UN NOMBRE PAR UNE FONCTION .

Exercices de fixation

Exercice 11

- $D_g = \mathcal{R}$
- $g(-2) = 20$; $g(1) = -4$; $g(3) = 30$.
- Résolvons l'équation $g(x) = -6$.
 $g(x) = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 3x - 6 = -6 \Leftrightarrow 5x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(5x - 3) = 0$;
 $x = 0$ ou $x = \frac{3}{5}$.
 Les antécédents de -6 par g sont 0 et $\frac{3}{5}$.

Exercice 12

- $h(1) = -4$; $h(0) = -2$; $h(-3) = 16$.
- $h(-1) = 2$; $h(2) = -4$.
- Les antécédents de -2 sont
 $h(x) = -2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 2 = -2 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x - 3)$
 $\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 3$, les antécédents de -2 par h sont 0 et 3 .

Exercice 13

$f(0 = 2)$; $h(1) = \sqrt{3}$; $h\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 14

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$.
 Les antécédents de 0 par f sont -1 et 1 .
 $f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(x^2 - 1) = x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$.
 Les antécédents de $\frac{1}{2}$ par f sont -2 et 2 .
 Les antécédents éventuels de 1 .
 $h(x) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 = x^2 + 2$;
 $0x^2 = 3$, impossible.
 1 n'a pas d'antécédent par f .

Méthode

Exercice de fixation

Exercice 15

- L'image par g de 0 est 1 ; l'image par g de 3 est 4 ; l'image par g de 5 est -4 .
- Les antécédents par g de 1 sont : 0 et 4 ;
 Les antécédents par g de -4 sont : -1 et 5 ;
 L'antécédent par g de 5 est : 2 .

5. IMAGE DIRECTE, IMAGE RÉCIPROQUE D'UN INTERVALLE D'UNE PAR UNE FONCTION.

Exercice de fixation

Exercice 16

$f([0,1]) = [0,4]$; $f([4,5]) = [-2; 6]$; $f([-2; 2]) = [-3,4; 5,8]$.

Exercice 17

L'image réciproque de $[-3; 0]$ est : $[-2; -1,6]$.

L'image réciproque de $[0; 3]$ est : $[-1,6; 3,4]$.

L'image réciproque de $[2; 3]$ est : $[-1; 1,2]$.

6. VARIATIONS D'UNE FONCTION

1. Fonction croissante, fonction décroissante, fonction constante

2. Tableau de variation

Exercices de fixation

Exercice 18

Affirmations	Réponses
f est croissante sur $[-4; 2]$	F
f est croissante sur $[2; 5]$	V
f est décroissante sur $[-1; 2]$	V
f est croissante sur $[-4; 3]$	F

Exercice 19

Affirmations	Réponses
$f(-1) = 0$	Faux
$f(1) > f(2)$	Faux
$f(-3) > -1$	Vrai
$f(1) = -2$	Faux
$f(-5) < f(2)$	Vrai
$f(-4) > f(-2)$	Faux

Exercice 20

Pour (C_f)

f est croissante sur $[3; 4]$; décroissante sur $[-3; 0]$ et constante sur $[-4; -3]$ et sur $[0; 3]$.

Pour (C_g)

g est croissante sur $[-5; 0]$; décroissante sur $[0; 4]$

Exercice 21

x	-4,5	-2	-1	2	4,5
$f(x)$	3	-2	0	-3	3

7. MAXIMUM ET MINIMUM D'UNE FONCTION

Exercices de fixation

Exercice 22

1. b .
2. a .

Exercice 23

1. Le maximum de f sur $[-3; 0]$ est 2
2. Le minimum de f sur $[-7; -2]$ est -2
3. Le minimum de f sur $[-7; 7]$ est -3 .

Exercice 24

Pour $x \in [1; +\infty[$, $x = 1 \geq 0$ et on a : $\sqrt{x-1} \geq 0$; ainsi $\sqrt{x-1} + 2 \geq 2$.
 $\forall x \in [1; +\infty[$, $f(x) \geq 2$ de plus $f(1) = 2$ donc 2 est minimum de f .

Exercice 25

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ et $x^2 + 1 \geq 1$.

On a : $\frac{1}{x^2+1} \leq 1$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq 1$ de plus $f(0) = 1$ donc 1 est maximum de f sur \mathbb{R} .

Exercice 26

1. $\forall x \in [2; 5]$, on a : $2 \leq x \leq 5$ et comme f est croissante, $f(2) \leq f(x)$, donc $f(2)$ est le minimum de f sur $[2; 5]$.
2. De même, $f(2) \leq f(x) \leq f(5)$, $\forall x \in [2; 5]$, $f(x) \leq f(5)$, donc $f(5)$ est le maximum de f sur $[2; 5]$ car f est croissante.

Exercice 27

$\forall x \in (3; 7)$, on a $3 \leq x \leq 7$. On a : $f(3) \geq f(x) \geq f(7)$ car f est décroissante.
 On a : $f(7) \leq f(x) \leq f(3)$. Le maximum de f sur $[3; 7]$ est $f(3)$.

8. FONCTIONS ÉGALES

Exercices de fixation

Exercice 28

$\forall x \in]-\infty, 3[$, $x - 3 < 0$, $|x - 3| = 3 - x$ et $f(x) = 3 - x$.

$\forall x \in [3; +\infty[$, $x - 3 \geq 0$, $|x - 3| = x - 3$ et $f(x) = x - 3$, donc pour $x \in [3; +\infty[$, $f(x) = g(x)$.

Exercice 29

$x \in D_g$, $\frac{1}{2}(x - 1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.

$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $g(x) = \frac{x(x-1)}{\frac{1}{2}(x-1)} = \frac{x}{\frac{1}{2}} = 2x$.

$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$, $g(x) = 2x$,
 donc $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$, $g(x) = f(x)$.

Exercice 30

1. $x \in D_f \Leftrightarrow x - 7 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 7$, $D_f = \mathbb{R} - \{7\}$.

2. $\forall x \in \mathbb{R} - \{7\}$, $f(x) = \frac{(x-7)(x+7)}{x-7} = x + 7$, donc le plus grand ensemble sur lequel f et g coïncident est $\mathbb{R} - \{7\}$.

Exercice 31

$D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}$.
 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2-4}{|x|+2} = \frac{|x|^2-4}{|x|+2}$ car $|x|^2 = x^2$.
 On a : $f(x) = \frac{(|x|-2)(|x|+2)}{|x|+2}$ et on a : $f(x) = |x| - 2$, donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)$.

Exercice 32

1. $f(x) = |x(x+1)|$
 $\forall x \in]-\infty; -1] \cup [0; +\infty[, f(x) = x(x+1) = x^2 + x$.
 $\forall x \in]-1; 0[, f(x) = -x(x+1)$.
 $f(x) = |x^2| + x$.
 $\forall x \in [0; +\infty[, g(x) = x^2 + x$, donc $\forall x \in [0; +\infty[, f(x) = g(x)$.
2. $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}, \forall x \in D_f, f(x) \neq g(x)$, donc f et g ne sont pas égales.

EXERCICES DE RENFORCEMENT / APPROFONDISSEMENT

Exercice 1

1. $D_f = [-5; 4]$
2. f est décroissante sur $[-5; -2]$ et sur $[\frac{1}{2}; 4]$.
3. Le minimum de f est 0 sur $[-5; 4]$.
4. Le maximum de f est 3 sur $[-5; 4]$.
5. $f(-5) > f(-4)$; $f(-2) < f(-1)$; $f(2) > f(4)$.

Exercice 2

1. $(x+3)^2 - 4 = x^2 + 4x + 9 - 4 = x^2 + 4x + 5 = f(x)$.
2. Les antécédents de 0 sont : $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 4$
 $\Leftrightarrow x+3 = 2$ ou $x+3 = -2$. On a : $x = -1$ et $x = -5$.
 Les antécédents de 0 par f sont -1 et -5.
 Pour $(x+3)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 - 4 \geq -4$ et $f(-3) = -4$ donc -4 est minimum de f sur \mathbb{R}

Exercice 3

1. a) Les antécédents de 0 sont 0 et 1.
 Les antécédents de 2 sont -1 et 2.
 b) L'image par f de -1 est 2 ; $f(0) = 0$; $f(3) = 6$.
 c) L'image directe de $[-1; 0]$ est $[0; 2]$ par f .
 d) L'image réciproque par f de $[2; 6]$ est $[-2; -1] \cup [2; 3]$.
2. Les solutions graphiques de $f(x) = g(x)$ est 0 et 2.

Exercice 4

1. Pour $x \in \mathbb{R}, -(x - \frac{1}{2})^2 \leq 0$.
 On a : $-(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$, donc $f(x) \leq \frac{1}{4}$.
2. $\frac{1}{4}$ est le maximum de f sur \mathbb{R} , ce maximum est atteint par $x = \frac{1}{2}$.

Exercice 5

1. Le maximum de f sur $]-\infty; 1]$ est 1.
2. Le minimum de f sur $]0; +\infty[$ est -3.

Exercice 6

1. On sait que $2(x + h) = 40$; on a : $h = 20 - x$.

2. Calculons l'aire de ce rectangle.

$$\mathcal{A} = x(20 - x) = -x^2 + 20x$$

$$= -[x^2 - 20x] = -[(x - 10)^2 - 10] ;$$

$$\text{Donc } \mathcal{A} = -(x - 10)^2 + 10.$$

3. On sait que : $\forall x \in [0; +\infty[$, $-(x - 10)^2 \leq 0$

$$\forall x \in [0; +\infty[$$
, $\mathcal{A}(x) \leq 100.$

Cette aire est maximum pour $x = 10$.

SITUATIONS COMPLEXES

Exercice 7

$$A = xy \text{ et } P = 2(x + y) \text{ avec } x > 0 ; y > 0$$

On a : $xy = 400$ donc $y = \frac{400}{x}$ par suite $P = 2\left(x + \frac{400}{x}\right)$ ainsi le périmètre est une fonction de variable x

on a : $P = 2\left(\frac{x^2 + 400}{x}\right)$. Posons $f(x) = 2\left(\frac{x^2 + 400}{x}\right)$. En remarquant que $400 = 20^2$, on a :

$$f(x) = \frac{2[(x-20)^2 + 40x]}{x} \text{ soit, } f(x) = 2\frac{(x-20)^2}{x} + 80 \text{ donc : } f(x) - 80 = 2\frac{(x-20)^2}{x}. \forall x \in]0 ; \infty[$$
, $\frac{(x-20)^2}{x} \geq 0.$

Donc, $f(x) - 80 \geq 0$ soit $f(x) \geq 80$. Or $80 = f(20)$. Donc, $\forall x \in]0 ; \infty[$, $f(x) \geq f(20)$. 80 est donc le minimum de la fonction f sur $]0 ; \infty[$, et ce minimum est atteint en 20.

Je conseillerai à M Kouadio, le choix d'un terrain rectangulaire de 20 m sur 20 m soit un terrain carré de 20 m de côté afin de minimiser le périmètre de son terrain

Exercice 8

D'après le document 2

Soit T' le temps total du voyage $T' = T + 1$ avec

$$T = \frac{D}{v} = \frac{14000}{4000} = 3,5 \text{ d'où } T' = 3,5 + 1 = 4,5$$

L'heure du départ est 1h du matin, donc il arrivera à destination à 5 h 30.

A l'arrivée l'intervalle de temps est donc : $[4 ; 7]$

D'après le document 1

Dans cet intervalle $[4; 7]$ la température prévisionnelle est située entre 15° et 18° .

Papa ne doit pas reporter son voyage car à son arrivée la température sera au-dessus de 15° .

Résumés de cours – Exercices de fixation

1. DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

Exercices de fixation

Exercice 1

Affirmations	Réponse
Par un point, il passe une droite et une seule.	F
Par trois points, il passe une droite et une seule.	F
Par deux points, il passe une droite et une seule.	V
Trois points alignés déterminent un seul plan	F

Exercice 2

$I \in (AB)$; $B \notin (CDI)$; $(CI) \subset (ABC)$; $D \notin (BI)$; $(AB) \subset (CBA)$; $B \in (AI)$;
 $B \in (ADI)$; $(DI) \not\subset (BCI)$.

2. POSITIONS RELATIVES DANS L'ESPACE

Exercices de fixation

Exercice 3

1) $1 \rightarrow a$; $2 \rightarrow b$; $3 \rightarrow a$; $4 \rightarrow c$.

2) $1 \rightarrow a$; $2 \rightarrow c$; $3 \rightarrow c$; $4 \rightarrow b$.

Exercice 4

1. $I \in (AB)$ donc $I \in (AJB)$; $I \in (CID)$; $J \in (AJB)$; $J \in (DC)$ donc $J \in (CID)$.
 2. $I \in (CID)$ et $I \in (AJB)$; $J \in (CID)$ et $J \in (AJB)$ donc l'intersection de (AJB) et (CID) est la droite (IJ) .

Exercice 5

1) a ; 2) c ; 3) c ; 4) c

Exercice 6

$A \in (ABB')$ et $A \in (AB'C)$.

$C' \in (AB'C)$ mais $C' \notin (ABB')$ alors (ABB') et $(AB'C)$ ne sont pas confondus et ils ont un point, donc (ABB') et $(AB'C)$ sont sécants.

Exercice 7

$A \in (ACB')$ et $A \in (AD'D)$ et $C \in (ACB')$ mais $C \notin (A'D'D)$ donc (ACB') et $(A'D'D)$ sont sécants.

Exercice 8

$I \in (AIJ)$, comme $I \in (BC)$, on a : $I \in (BCD)$.

De même, $K \in (AJ)$, on a : $K \in (AIJ)$; aussi $K \in (CD)$, $K \in (BCD)$.

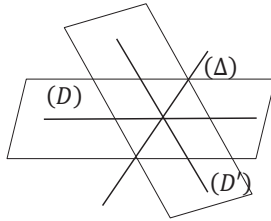
On sait que $A \in (AIJ)$ et $A \notin (BCD)$, donc (IK) est l'intersection des plans (AIJ) et (BCD) . Car (AIJ) et (BCD) sont sécants

Exercice 9

La droite (Δ) est la droite passant A et parallèle à (D)

Exercice 10

A est le point de concours des droites (D) , (D') et (Δ)



3. POSITION RELATIVE D'UNE DROITE ET D'UN PLAN DE L'ESPACE

Exercices de fixation

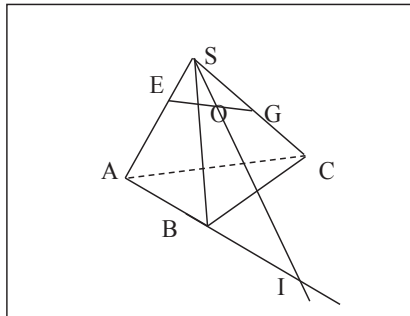
Exercice 11

$1 \rightarrow a ; 2 \rightarrow c ; 3 \rightarrow a.$

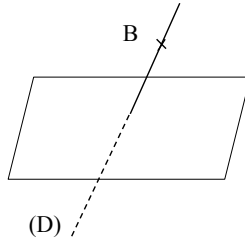
Exercice 12

1. $(SO) \subset (SAC)$ et (SAC) et (ABC) sont sécants en (AC) , on a donc : (SO) coupe (AC) ; donc (SO) est sécante à (ABC) .

2 $\{I\} = (SO) \cap (AC)$

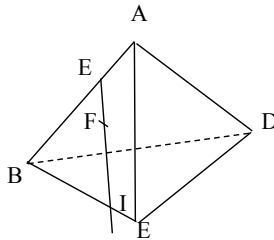


Exercice 13



Exercice 14

$(EF) \subset (ABC)$, (EF) est sécant à (BC) en I alors $(EF) \cap (BCD) = \{I\}$



Exercice 15

- a) $(IJ) // (HGF)$ car $(IJ) // (AC)$ et $(AC) // (EF)$ or $(EF) \subset (HGF)$.
- b) $(CD) \cap (HEA) = \{D\}$ car $D \in (HEA)$ et $C \notin (HEA)$.
- c) (HK) est sécante à (ABE) car $K \in (EA)$ et $H \notin (ABE)$.
- d) $I \in (HIJ)$ et $I \in (AB)$, donc (AB) et (HIJ) sont sécants.

4. POSITION RELATIVE DE DEUX DROITES DE L'ESPACE

5. DÉTERMINATION D'UN PLAN

Exercices de fixation

Exercice 16

Affirmations	Réponse
Lorsque deux droites de l'espace sont parallèles, toute droite sécante à l'une est sécante à l'autre.	Faux
Lorsque deux droites de l'espace n'ont aucun point commun, elles sont parallèles.	Faux
Si (D) est une droite contenue dans un plan (P) alors toute droite parallèle à (P) est parallèle à (D) .	Faux

Exercice 17

$$1 \rightarrow c ; \quad 2 \rightarrow a ; \quad 3 \rightarrow a.$$

Exercice 18

- Les droites (BG) et (FJ) sont sécantes.
- Les droites (IJ) et (EG) sont parallèles.
- Les droites (GF) et (AE) sont non coplanaires.

Exercice 19

- Les droites (FC) et (AF) sont sécantes car $F \in (FC)$ et $F \in (AF)$.
- Les droites (CI) et (AE) sont non coplanaires car $(CI) \subset (ABC)$; (AE) est sécante à (ABC) en A et $A \notin (CI)$
- Les droites (EB) et (HC) sont parallèles car EHCB est un parallélogramme

Exercice 20

A, C et F appartiennent au plan (ACF).
 $H \notin (ACF)$, donc A, C, F et H ne sont pas coplanaires.

Autre méthode :

Si (AC) et (FH) étaient coplanaires, (AC) et (FH) seraient soit parallèles, soit sécantes, or (AC) et (FH) ne sont ni sécantes ni parallèles, donc elles ne sont pas coplanaires.

Exercice 21

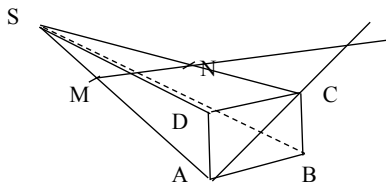
- $K \in (AB')$ et $J \notin (AB')$, donc (KJ) et (AB') sont sécants en K.
- Les droites (AB') et (BC') sont non coplanaires car (AB') et (BC') ne sont pas dans un même plan.

Exercice 22

	Affirmations	Réponses
1.	Par deux points, il passe un plan et un seul.	F
2.	Par trois points, il passe un plan et un seul.	F
3.	Une droite et un point n'appartenant pas à cette droite détermine un plan.	V
4.	Deux droites sécantes déterminent un plan.	V

Exercice 23

- $SM = \frac{1}{2}SA$ et $SN = \frac{3}{4}SC$, (MN) et (AC) ne sont pas parallèles ; donc elles sont sécantes.
-



6. PARALLELISME DANS L'ESPACE

Exercices de fixation

Exercice 24

Les faces opposées d'un cube sont parallèles. Les carrés ASCD et EFGH sont parallèles et les diagonales opposées sont aussi parallèles.
Donc $(AC) \parallel (EG)$.

Exercice 25

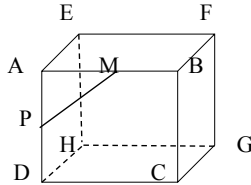
La droite $(IJ) \parallel (AC)$ or $(AC) \parallel (EG)$; donc $(IJ) \parallel (EG)$.

Exercice 26

$$1. (DA) \cap (FHM) = \{P\}$$

Le plan (FHM) est sécant au plan (ADB) suivant la parallèle à (FH) passant par M

Donc $(FH) \parallel (MP)$.



Exercice 27

(IL) est parallèle à (BD) car droite des milieux du triangle ABD.

De même, (IK) est parallèle à (BD) .

On a : $(IL) \parallel (BD)$ et $(IK) \parallel (BD)$ donc $(IL) \parallel (IK)$.

Exercice 28

Dans le triangle ABN, on a $(JF) \parallel (AB)$ et

$$\text{on a } \frac{NJ}{NA} = \frac{NF}{NB} = \frac{JF}{AB} = \frac{JF}{EF} = 2$$

donc $NJ = \frac{1}{2} NA$ et comme $J \in [NA]$ donc J est le milieu de $[NA]$

de même on montre que I est le milieu de $[AM]$ dans le triangle DAM

dans le triangle AMN, on a $(JF) \parallel (MN)$

Exercices de fixation

Exercice 29

La droite (DC) est parallèle à (AB) . Or (AB) est une droite de (ABF) ; donc (DC) est parallèle à (ABF) .

Exercice 30

(CC') est parallèle à la droite (BB') ; or (BB') est contenue dans le plan (ABB') ; donc (CC') est parallèle au plan (ABB') .

Exercice 31

$J' \in (A'B'C')$ et $I' \in (A'B'C')$. $J \in (DC)$; (JK) n'est pas parallèle à $(I'J')$.

(JK) est sécante à $(I'J')$; or, $(I'J') \subset (A'B'C')$, donc (IK) est sécante à $(A'B'C')$.

Exercice 32

$S \in (SAB)$ et $S \in (SCD)$ donc S appartient à la droite d'intersection $(AB) \subset (SAB)$ et $(CD) \subset (SCD)$ et $(AB) // (ABC)$ et $(CD) // (ABC)$, donc la droite d'intersection est parallèle à (AB) et (CD) . (Δ) est la droite passant par (S) et parallèle à (AB) et (CD) .

Exercice 33

I et J sont les milieux respectifs des côtés $[SA]$ et $[SC]$ du triangle SAC . On a (IJ) parallèle à (AC) et comme (AC) est une droite du plan (ABC) ; donc (IJ) est parallèle au plan (ABC) .

Exercice 34

1. D'après la propriété des milieux dans le triangle ABD , $(IK) // (AD)$. Or $(AD) \subset (ACD)$ donc (JK) est parallèle à (ACD) .
2. D'après la propriété des milieux dans le triangle ABC , $(IJ) // (AC)$. Or $(AC) \subset (AML)$ donc (IJ) est parallèle à (ALM) .

2. Plans parallèles

Exercices de fixation

Exercice 35

La droite (CD) est parallèle à (AB) , donc (CD) est parallèle à (ABB') .
De même, (DD') est parallèle à (AA') qui est contenue dans (ABB') . Or (CD) et (DD') sont sécantes, donc les plans (CDD') et (ABB') sont parallèles.

Exercice 36

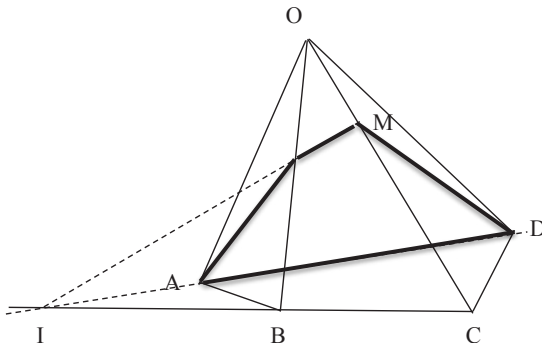
1. (IJ) est parallèle à (AD) qui est parallèle à (EH) aussi. (AB) est parallèle à (EF) .
Or (AB) et (IJ) sont sécantes donc sont contenues dans le plan (BJC) . Donc les plans (HEF) et (BJC) sont parallèles.
2. (AEH) est parallèle à (BCF) et (P) est parallèle à (BCF) , donc $(AEH) // (P)$.

Exercice 37

(IJ) est parallèle à (ABC) car milieux respectifs des côtés $[SA]$ et $[SC]$ du triangle SAC .
De même, (KJ) est parallèle à (ABC) .
Les droites (IJ) et (KJ) sont sécantes en J , donc le plan (IJK) est parallèle au plan (ABC) .

3. Section plane

Exercice 38



EXERCICES DE RENFORCEMENT / APPROFONDISSEMENT

Exercice 1

N°	Affirmations	Réponses
1.	Si deux droites n'ont aucun point commun, alors elles sont non coplanaires.	F
2.	Si une droite et un plan sont strictement parallèles, alors ils n'ont aucun point commun.	V
3.	Si une droite est parallèle à deux droites strictement parallèles d'un plan, alors elle est parallèle à ce plan.	V
4.	Si deux droites sont parallèles chacune à un même plan, alors elles sont sécantes.	F
5.	Si deux plans sont parallèles chacun à une même droite, alors ils sont parallèles entre eux.	V
6.	Si deux droites incluses dans deux plans distincts sont sécantes alors ces deux plans sont sécants.	V
7.	Si deux plans sont parallèles, alors toute droite de l'un est sécante à toute droite de l'autre.	F
8.	Si une droite est parallèle à deux plans sécants, alors elle est parallèle à leur intersection.	V
9.	Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont sécantes.	F

Exercice 2

1. $I \in (BC)$; $J \in (CD)$, donc l'intersection de (AIJ) et (BCD) est (IJ) .
2. $M \in (AI)$, $I \in (AI)$, $N \in (AJ)$ et $J \in (AJ)$ et (AI) et (AJ) sont sécantes, donc les points M , N , I et J sont coplanaires.
3. a) M , N , I , J appartiennent à un même plan, c'est la plan (AIJ) . Or (AIJ) est sécant à (BCD) , donc (MN) n'est pas parallèle à (BCD) .
 b) $P \in (IJ)$ car $(ADJ) \cap (BCD) = (IDJ)$.

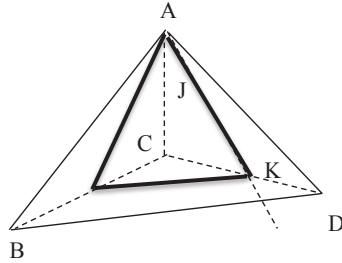
Exercice 3

1. M , C et B appartiennent à un même plan et D n'est pas sur ce plan ; alors M , C , B et D ne sont pas coplanaires. Donc (BC) et (DM) ne sont pas coplanaires.
2. construction.
3. a) $(\Delta) \parallel (BI)$; (BI) est sécante à (ACD) , donc (Δ) coupe (ACD) .
 b) Construction.

Exercice 4

1. construction
2. $(D) \in (ASD)$ et $(D) \in (BCD)$
 (AS) coupe (BC) en P . $P \in (BCD)$ et $P \in (ASD)$.
 $(ASD) \cap (BCD) = (PD)$.

Exercice 5



Exercice 6

1. $I \in (ABC)$, $I \in (DFI)$; $D \in (DFI)$, $D \in (ABC)$.
Donc l'intersection de (DFI) et (ABC) est (DI) .
2. a) $F \in (DFI)$ et $F \in (EFC)$. Or $(\Delta) = (DFI) \cap (EFG)$, donc $F \in (\Delta)$.
b) (ABC) et (EFG) sont parallèles.
3. Tracé.

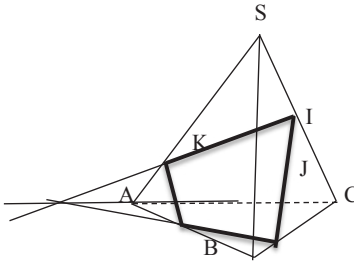
Exercice 7

- 1.a) Considérons le plan (COS) . Le point A appartient à ce plan, car A appartient à la droite (CO) . La droite (AS) est donc incluse dans le plan (COS) et donc le milieu I du segment $[AS]$ appartient au plan (COS) , d'où le résultat.
- b) Dans le plan (SOC) , les droites (SO) et (CI) sont coplanaires et non parallèles donc (CI) et (SO) sont sécantes.
2. a) $(CIJ) \cap (ABC) = (CD)$. (parallèle à (IJ) passant par C)
b) $(CIJ) \cap (SAD) = (ID)$
3. Tracé. (la section plane est $[DI] \cup [IJ] \cup [JC] \cup [CD]$)

Exercice 8

1. Faire une figure.
2. $(MN) \parallel (BC)$; or $(BC) \parallel (AD)$, donc $(MN) \parallel (AD)$.
3. a) $P \in (AH)$; or $(AM) \subset (SAB)$.. $P \in (DM)$ or $(DM) \subset (SDC)$, donc $P \in (SAB)$ et $P \in (SDC)$.
b) $(SAB) \cap (SDC) = (PI)$, car $P \in (SAB)$ et à (SDC) et $P \in (SAB)$ et à (SDC) .
c) La droite d'intersection est parallèle à (AB) et (DC) , donc (SP) est parallèle à (AB) .

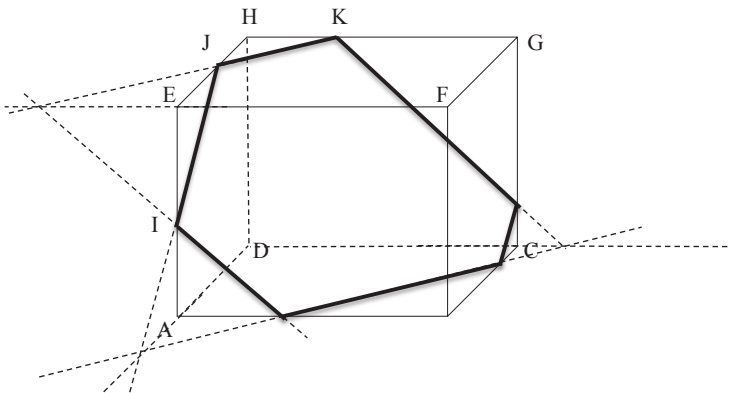
Exercice 9



Exercice 10

2. a) $M \in [BD]$, $N \in [DC]$, $M \in (MNP)$; $N \in (MNP)$; $(MNP) \cap (BCD) = (MN)$.
 b) $P \in (AC)$; $N \in [CD]$; $(MNP) \cap (ACD) = (NP)$.
3. a) Démonstration.
 b) $(MNP) \cap (ABC) = (RP)$
4. $M \in (ABD)$ et $M \in (MNP)$, $|S| = (NP) \cap (DA)$; $|S| = (ABD)$ et (MNP) ; $(MS) = (ABD) \cap (MNP)$.
5. La section plan est le polygone NMTD.

Exercice 11



SITUATIONS COMPLEXES**Exercice 12**

- $N \in (HG)$, donc $N \in (EFG)$, $(DM) \parallel (NF)$ et $(MF) \parallel (DN)$, $N \in (DFM)$.
 $D \in (DFM)$ et $D \in (ABC)$, $M \in (ABC)$ et $M \in (DFM)$, $(DFM) \cap (EFG) = (NF)$.
- (ABC) et (EFG) sont parallèles car ils sont les faces opposées d'un cube.
 La section est : $DMFN$.

Exercice 13

Les droites (IJ) et (AC) ne sont pas parallèles en $SI = \frac{3}{4}SC$ et $SJ = \frac{1}{2}BA$, donc (IJ) et (AC) sont sécantes en P .
 $P \in (SIJ)$ et $S \in (ABC)$, donc (SIJ) et (ABC) , ont un point en commun. De plus, $D \in (ABC)$ et $D \notin (SIJ)$ et (SIJ) et (ABC) ne sont pas confondus donc (SIJ) et (ABC) sont sécants.

1. POLYNÔMES

1. Définitions et propriétés

Exercices de fixation

Exercice 1

- a) 5
b) $a + \sqrt{2}$

Exercice 2

1. $f(x) + g(x) = 8x^2 + 18$ et $f(x) - g(x) = -24x$.
2. $A(x) = 7x^3 + 6x^2 - 5x - 8$; $B(x) = -2\sqrt{2}x^3 + 3\sqrt{2}x^2 + 2\sqrt{2}x$
 $C(x) = 2x^3 - 9x + 9$.
3. $Q(m) = -m^3 + 2m^2 - 7m - 10$; $R(n) = n^3 - 2n^2 + n$.

Exercice 3

1. $P(x) = x^2 + 2x - 3$, donc $P(x) = Q(x)$.
2. $B(x) = x^4 + x^3\sqrt{2} + x^2 - 2x^2 - x^3\sqrt{2} - x\sqrt{2} + x^2 + x\sqrt{2} + 1$
 $= x^4 + 1$.
Donc $A = B$.

Exercice 4

- a) $P(x) = 2x^2 + (6 - a)x - 3a$; $P = Q$ pour $a = 5$.
b) $P = Q$ si et seulement si $a = 1$, $b - 3 = -5$ et $2c - 1 = 7$;
si et seulement si $a = 1$, $b = -2$ et $c = 4$;
c) $P = Q$ si et seulement si $a + 3b = 7$ et $a - 3b = -5$;
 $a = 1$ et $b = 2$.
d) $P = Q$ si et seulement si $a + 3b = -b$ et $-2a = 2b + 1$
 $a = -\frac{2}{3}$ et $b = \frac{1}{6}$.

Exercice 5

$$(P + Q)(x) = 5x^3 + 9x^2 - 4x - 2.$$

$$(P - Q)(x) = -5x^3 - 5x^2 - 2x + 10$$

$$(PQ)(x) = 15x^5 - x^4 - 3x^3 + 19x^2 + 18x - 24$$

$$3Q(x) = 15x^3 + 21x^2 - 3x - 18$$

$$(7P - 2Q)(x) = -10x^3 - 19x + 40.$$

2. Egalités remarquables

Exercices de fixation

Exercice 6

Forme factorisée		Forme développée
$(x - y)^3$		$x^3 + y^3$
$(x + y)(x - y)$		$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
$(x + y)(x^2 - xy + y)$		$x^2 - 2xy + y^2$
$(x - y)^2$		$x^2 - y^2$

Exercice 7

$$f(x) = (x + 4)(2x - 6) ; \quad h(t) = (2t - 3)(-6t - 2) ; \quad k(z) = (5z - 1)(4z + 3).$$

Exercice 8

$$\begin{aligned}
 B(C) &= C^2(C^2 + 2C + 1) - 4(C^2 + 2C + 1) = (C - 2)(C + 2)(C + 1)^2 \\
 J(t) &= (3t - 2)(3t + 2) + (t + 3)(3t - 2)(4t + 5) \\
 L(x) &= (5x - 1) - x(5x - 1) - (5x - 1)(5x + 1) \\
 &= (5x - 1)(-6x).
 \end{aligned}$$

Exercice 9

$$\begin{aligned}
 S(x) &= (3x - 1)^2 - (x - 1)^2 = (4x - 2)(2x) \\
 T(y) &= (y - 3)(3y + 2) \\
 H(m) &= (m - 2)(7m + 5) \\
 P(n) &= (3n - 2)(-n).
 \end{aligned}$$

3. Zéro d'un polynôme
Exercices de fixation
Exercice 10

- $q(-1) = (1 - 1)(1 + 2) = 0 \times 3 = 0$ et
 $q(2) = (16 - 1)(4 - 4) = 16 \times 0 = 0$.
 Donc -1 et 2 sont des zéros de $q(x)$.
- $q(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)x(x - 2)$
 $= x(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x^2 + 1)$.
 Les zéros de $q(x)$ sont : 0 ; 1 ; -1 et 2 .

Exercice 11

- $h(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - 2 = 2 - 2 = 0$.
- $h(y) = (y - \sqrt{2})(y + \sqrt{2})$.
 Les zéros de $h(y)$ sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

Exercice 12

- $P(3) = 0 + 1 = +1$; $P(4) = 3 + 0 = 3$.
 $P(2) = -1 + 0 = -1$.
- $P\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 0$.
 A corriger dans l'énoncé : $\frac{5}{2}$ au lieu $\frac{7}{2}$

2. FACTORISATION PAR $x - a$, $a \in \mathbb{R}$
1. Théorème fondamental de la factorisation
Exercice de fixation
Exercice 13

- $P(1) = 2 + 1 - 7 + 4 = 0$.
 Donc il existe un polynôme Q tel que $P(x) = (x - 1)Q(x)$.
- $P(-2) = -32 + 32 = 0$.
 Donc il existe un polynôme Q tel que $P(x) = (x + \sqrt{2})Q(x)$.
- $P(\sqrt{3}) = 9 - 9 = 0$. Il existe un polynôme Q tel que $P(x) = (x - \sqrt{3})Q(x)$.

2. Méthode des coefficients indéterminés
Exercices de fixation
Exercice 14

On a : $(x - 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$.
 Par identification on a :
 $a = 1$; $b - a = -1$; $c - b = 2$ et $-c = -2$.
 Soit $a = 1$; $b = 0$ et $c = 2$. D'où $P(x) = (x - 1)(x^2 + 2)$.

Exercice 15

On a : $(x^2 - 1)(ax^2 + bx + c) = ax^4 + bx^3 + (c - a)x^2 - bx - c$.

Par identification, on a :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c - a = 1 \\ -c = -2 \end{cases} \text{ c'est-à-dire } a = 1; b = 0; c = 2.$$

$$x^4 + x^2 - 2 = (x^2 - 1)(x^2 + 2).$$

3. Méthode de la division euclidienne

Exercice de fixation

Exercice 16

a)

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 5x^2 + 3 & x + 3 \\ \underline{-(2x^3 + 6x^2)} & 2x^2 - x + 3 \\ -x^2 + 3 & \\ \underline{-(-x^2 - 3x)} & 3x + 3 \\ 3x + 3 & \\ \underline{-(3x + 9)} & -6 \\ -6 & \end{array}$$

$$2x^3 + 5x^2 + 3 = (x + 1)(2x^2 - x + 3) - 6$$

b)

$$\begin{array}{r|l} x^5 + 1 & x + 1 \\ \underline{-(x^5 + x^4)} & x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \\ -x^4 + 1 & \\ \underline{-(-x^4 - x^3)} & x^3 + 1 \\ x^3 + 1 & \\ \underline{-(x^3 + x^2)} & -x^2 + 1 \\ -x^2 + 1 & \\ \underline{-(-x^2 - x)} & x + 1 \\ x + 1 & \\ \underline{-(x + 1)} & 0 \end{array}$$

$$x^5 + 1 = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1).$$

c)

$$\begin{array}{r|l} x^4 - x^3 + x - 2 & x^2 - 2x + 4 \\ \underline{-(x^4 - 2x^3 + 4x^2)} & x^2 + x - 2 \\ x^3 - 4x^2 + x - 2 & \\ \underline{-(x^3 - 2x^2 + 4x)} & -2x^2 - 3x - 2 \\ -2x^2 - 3x - 2 & \\ \underline{-(-2x^2 + 4x - 8)} & x + 6 \\ x + 6 & \end{array}$$

$$x^4 - x^3 + x - 2 = (x^2 - 2x + 4)(x^2 + x - 2) + x + 6.$$

3. POLYNÔME DU SECOND DEGRÉ

1. Définition

Exercices de fixation

Exercice 17

- $P(x) = 2(x - 3)^2 + 6 = 2x^2 - 12x + 24.$
- $P(x) = -5(x + 1)^2 - 2 = -5x^2 - 10x - 7.$

Exercice 18

- $a = -2, b = 0, c = 5$
- $a = 4, b = -4, c = 1$
- $a = \frac{1}{3}, b = 2, c = -\frac{1}{3}$

2. Forme canonique d'un polynôme du second degré

Exercices de fixation

Exercice 19

- Les formes canoniques sont :

$$3 \left[(x - 1)^2 + \frac{4}{3} \right]; -[(x + 4)^2 - 1]; 6(x + 1)^2; -4 \left(x^2 - \frac{13}{4} \right)$$

Exercice 20

$$P(x) = x^2 - 6x + 12 = (x - 3)^2 - 9 + 12 = (x - 3)^2 + 3.$$

$$Q(x) = 3x^2 + x - 2 = 3 \left(x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \right) = 3 \left[\left(x + \frac{1}{6} \right)^2 - \frac{25}{36} \right].$$

$$R(x) = -9x^2 + 6x - 4 = -9 \left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{4}{9} \right) = -9 \left[\left(x - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{1}{9} \right].$$

$$S(x) = 2x^2 + 4x\sqrt{3} + 6 = 2(x^2 + 2x\sqrt{3} + 3) = 2(x + \sqrt{3})^2.$$

3. Factorisation d'un polynôme du second degré

Exercices de fixation

Exercice 21

$$P(x) = \left(x + \frac{5}{2} - \frac{9}{2} \right) \left(x + \frac{5}{2} + \frac{9}{2} \right) = (x - 2)(x + 7).$$

$Q(x)$ n'est pas factorisable.

$$R(x) = 2 \left(x - 1 - \frac{9}{2} \right) \left(x - 1 + \frac{9}{2} \right) = 2 \left(x - \frac{11}{2} \right) \left(x + \frac{7}{2} \right).$$

Exercice 22

$$f(x) = 18x^2 - 12x + 2 = 18 \left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} \right) = 18 \left(x - \frac{1}{3} \right)^2.$$

$$g(x) = -4x^2 + x + 1 = -4 \left(x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \right) = -4 \left[\left(x - \frac{1}{8} \right)^2 - \frac{17}{64} \right]$$

$$g(x) = -4 \left(x - \frac{1+\sqrt{17}}{8} \right) \left(x - \frac{1-\sqrt{17}}{8} \right).$$

$$h(x) = 2x^2 + 2x\sqrt{2} - 3 = 2 \left(x^2 + x\sqrt{2} - \frac{3}{2} \right) = 2 \left[\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - 2 \right];$$

$$h(x) = 2 \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(x + \frac{3\sqrt{2}}{2} \right).$$

4. Signe d'un polynôme du second degré

Exercices de fixation

Exercice 23

$$P(x) = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)(x + 1)$$

x	$-\infty$	-1	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
2	$+$		$+$	$+$
$x - \frac{5}{2}$	$-$		$-$	$+$
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$
$P(x)$	$+$	0	$-$	$+$

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left[-1; \frac{5}{2}\right]$$

$$P(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-1; \frac{5}{2}\right[$$

$$P(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty; -1\right[\cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right[.$$

$$Q(x) = -3(x - \sqrt{5})^2$$

$$-3 < 0 \text{ et } (x - \sqrt{5})^2 \geq 0$$

Donc :

$$1. Q(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{5}$$

$$2. Q(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{\sqrt{5}\}.$$

$$R(x) = 7\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]$$

$$7 > 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0.$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}, R(x) > 0.$$

Exercice 24

$$A(x) = -x^2 + 4x - 3 = -[(x - 2)^2 - 1]$$

$$= -(x - 3)(x - 1)$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
-1	$-$		$-$	$-$
$x - 3$	$-$		$-$	$+$
$x - 1$	$-$	0	$+$	$+$
$A(x)$	$-$	0	$+$	$-$

$$A(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty; 1\right[\cup \left]3; +\infty\right[$$

$$A(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; 3\}$$

$$A(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]1; 3\right[.$$

$$B(x) = -5x^2 + 5x - 2$$

$$= -5\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{20}\right]$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, -5 < 0 \text{ et}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{20} > 0.$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}, B(x) < 0.$$

$$C(x) = 25x^2 - 20x + 4$$

$$= 25\left(x - \frac{2}{5}\right)^2.$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{5}\right\}, C(x) > 0 \text{ et}$$

$$C\left(\frac{2}{5}\right) = 0.$$

4. FRACTIONS RATIONNELLES

Exercices de fixation

Exercice 25

$$1. \frac{2}{x^2-4} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$$

$$= \frac{(a+b)x + 2a - 2b}{x^2 - 4}.$$

Par identification $a + b = 0$ et $2a - 2b = 2$; d'où $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$.

$$2. \frac{5x-3}{x^2-9} = \frac{m}{x-3} + \frac{n}{x+3} = \frac{(m+n)x + 3m - 3n}{x^2 - 9}.$$

Par identification, $m + n = 5$ et $3m - 3n = -3$.

Soit $m = 2$ et $n = 3$.

Exercice 26

$$\frac{x^2+x-6}{x-1} = ax + b + \frac{c}{x-1}$$

$$= \frac{ax^2 + (b-a)x - b + c}{x-1}.$$

Par identification, $a = 1$; $b - a = 1$ et $-b + c = -6$.

D'où, $a = 1$; $b = 2$ et $c = -4$.

$$\frac{x^2+x-6}{x-1} = x + 2 - \frac{4}{x-1}.$$

EXERCICES DE RENFORCEMENT / APPROFONDISSEMENT

Exercice 1

	Fonction polynôme	Fraction rationnelle
$f(x) = x^3 - 7x^2 + 9$	X	
$g(x) = \frac{x^4 + 5x - 1}{x^3 + 2x^2}$		X
$h(x) = \frac{5x}{2 - \sqrt{3}}$	X	
$f(x) = -2x + 9 + \frac{10}{x^5 - x + 1}$		X
$J(x) = 25$	X	

Exercice 2

	Vrai	Faux
$x - 1$ est un facteur du polynôme $p(x)$ donc 1 est un zéro de $p(x)$.	X	
Dans tout polynôme, on peut mettre en facteur un polynôme du premier degré.		X
Le polynôme $1 - 2x - x^2$ est le carré de $1 - x$.		X
Le polynôme défini par $f(x) = a$, a étant un nombre réel, est de degré 1.		X

Exercice 3

$$\begin{aligned}
 f(x) + g(x) &= 0 \\
 (a+1)x^2 + (b+3)x + a + b + c &= 0 \\
 \begin{cases} a + 1 = 0 \\ b + 3 = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} & \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = -3 \\ c = 4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Exercice 4

- $(x^2 + 2)^2 - 4x^2 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = x^4 + 4$.
- $x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$.

Exercice 5

- $R(x)$ existe pour tout nombre réel x différent de $\frac{1}{2}$.
-

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 4x^2 + 7x - 7 \\
 -(4x^2 - 2x) \\
 \hline
 9x - 7 \\
 -(9x - 9/2) \\
 \hline
 -5/2
 \end{array} & \begin{array}{l}
 \frac{2x-1}{2x+9/2} \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array} \\
 \hline & \begin{array}{l}
 R(x) = x + \frac{9}{2} + \frac{0-\frac{5}{2}}{2x-1} \\
 R(x) - \left(2x + \frac{9}{2}\right) = -\frac{5}{2(2x-1)} \\
 a = 2; \quad b = \frac{9}{2} \quad \text{et} \quad c = -\frac{5}{2}
 \end{array}
 \end{array}$$

Exercice 6

- $f(-3) = -27 - 9 + 21 + 15 = -36 + 36 = 0$
 - $f(x) = (x+3)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (3a+b)x^2 + (3b+c)x + 3c$.
Par identification : $a = 1$; $3a + b = -1$; $3b + c = -7$ et $3c = 15$.
D'où : $a = 1$; $b = -4$ et $c = 5$.
 - $f(x) = (x+3)(x^2 - 4x + 5)$
 $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 - 4 + 5 = (x-2)^2 + 1$.

- $\forall x \in \mathbb{R}, (x - 2)^2 + 1 > 0$, donc $f(x)$ a le même signe que $x + 3$.
 $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$; $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-3; +\infty[$ et
 $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 3[$.
2. a) $V = \mathbb{R} - \{2; -3\}$.
- b) $\forall x \in V, R(x) = \frac{(x+3)(x^2-4x+5)}{(x-2)(x+3)} = \frac{x^2-4x+5}{x-2} = \frac{x^2-4x+4+1}{x-2}$
 $= \frac{(x-2)^2+1}{x-2} = x - 2 + \frac{1}{x-2}$.
- c) $R(10) = 8 + \frac{1}{8} \approx 8,1$ et $R(102) = 100 + \frac{1}{100} = 100,001 \approx 100,0$.

Exercice 7

1. $h(x) - h(a) = x^3 + 4x^2 - 3x - 18 - (a^3 + 4a^2 - 3a - 18)$.
 Donc, $h(x) = h(a) + (x^3 - a^3) + 4(x^2 - a^2) - 3(x - a)$.
2. a) $p(a) = h(a) - h(a) = 0$.
 b) $p(x) = (x - a)Q(x)$ où $Q(x) = x^2 + (a + 4)x + a^2 + 4a - 3$.
3. a) $h(2) = 8 + 16 - 6 - 18 = 24 - 24 = 0$.
 b) $h(x) = (x - 2)(x + 3)^2$
 $h(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{2; -3\}$; $h(x) < 0 \Leftrightarrow x < 2$ et $h(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

Exercice 8

1. $g(x) = a(x - 1)^3 + b(x - 1)^2 + c(x - 1) + d$
 $= ax^3 + (b - 3a)x^2 + (3a - 2b + c)x - a + b - c + d$.
 Par identification : $a = 2$; $b - 3a = -3$; $3a - 2b + c = 5$ et $a + b - c + d = 1$
 $a = 2$; $b = 3$; $c = 5$ et $d = 5$.
 $g(x) = 2(x - 1)^3 + 3(x - 1)^2 + 5(x - 1) + 5$.
2. a) Cet ensemble est $\mathbb{R} - \{1\}$.
 b) $K(x) = mx + n + \frac{p}{x-1} + \frac{q}{(x-1)^2} = \frac{mx^3 + (n-2m)x^2 + (m-2n+p)x + n-p+q}{(x-1)^2}$
 $K(x) = 2x + 1 + \frac{5}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2}$.

SITUATIONS COMPLEXES

Exercice 9

l'aire de la partie hachurée est $3x + 3x - 9 = 6x - 9$
 $6x - 9 = 63$ donc $x = 12$
 L'aire cultivable est $(x - 3)^2 = (12 - 3)^2 = 81 \text{ m}^2$

Exercice 10

$C(x) = -0,02x^2 + 148x + 7762,5$
 $V(x) = 150x$ donc $B(x) = V(x) - C(x)$
 $B(x) = 0,02x^2 + 2x - 7762,5$
 $B(x) = 0,02[(x + 50)^2 - 39064]$
 $B(x) = 0,02(x + 675)(x - 575)$
 $B(x) \geq 0$ pour $x \geq 575$

Le nombre minimum de jouets à produire et vendre pour ne plus subir de perte est 575

1. ANGLE INSCRIT ET ANGLE AU CENTRE ASSOCIE

Exercice de fixation

Exercice 1

$$1 \rightarrow a ; \quad 2 \rightarrow a ; \quad 3 \rightarrow c.$$

Exercice 2

$$\text{mes}\widehat{BAD} = \frac{1}{2}\text{mes}\widehat{BOD}$$

$$\text{mes}\widehat{BAD} = \frac{1}{2} \times 130^\circ.$$

$$\text{Donc } \text{mes}\widehat{BAD} = 65^\circ.$$

Exercice de fixation

Exercice 3

N°	Affirmation	Vrai	Faux
1	$\text{mes}\widehat{EDF} = \frac{1}{2}\text{mes}\widehat{EOF}$		X
2	$\text{mes}\widehat{EDF}180^\circ - \frac{1}{2}\text{mes}\widehat{EOF}$	X	
3	$\text{mes}\widehat{EDF}180^\circ - \text{mes}\widehat{EOF}$		X

2. ANGLE INSCRIT DÉFINI PAR UNE CORDE ET UNE DEMI-TANGENTE

Exercices de fixation

Exercice 4

$$1 \rightarrow c ; \quad 2 \rightarrow a ; \quad 3 \rightarrow c.$$

Exercice 5

$$\text{mes}\widehat{CAB} = \frac{1}{2}\text{mes}\widehat{AOB} = 65^\circ$$

$$\text{mes}\widehat{CBA} = \frac{1}{2}\text{mes}\widehat{AOB} = 65^\circ$$

$$\text{mes}\widehat{ACB} = 180^\circ - (65^\circ + 65^\circ) = 50^\circ.$$

3. ANGLES INSCRITS INTERCEPTANT LE MÊME ARC

Exercice de fixation

Exercice 6

Les angles \widehat{APB} et \widehat{AQB} sont inscrit dans (C) et interceptent 2 arcs de même mesure donc $\text{mes}\widehat{APB} = \text{mes}\widehat{AQB}$.

Les angles \widehat{QAB} et \widehat{QPB} sont inscrit dans (C) et interceptent le même arc \widehat{QB} donc $\text{mes}\widehat{APB} = \text{mes}\widehat{QPB}$.

Les angles \widehat{APQ} et \widehat{ABQ} ont inscrit dans (C) et interceptent le même arc \widehat{AQ} donc $\text{mes}\widehat{APB} = \text{mes}\widehat{ABQ}$.

4. ANGLES INSCRITS INTERCEPTANT DES ARCS DE MÊME LONGUEUR

Exercice de fixation

Exercice 7

N°	Affirmations	Réponses
1.	Dans un cercle, deux angles inscrits qui interceptent deux arcs ont la même mesure.	Faux
2.	Dans un cercle, trois angles inscrits qui interceptent trois arcs de même longueur ont la même mesure.	Vrai
3.	Lorsque les cordes EF et GH d'un cercle n'ont pas la même longueur, les mesures des angles qui sous-tendent ces cordes peuvent être égales.	Faux

5. ANGLES INSCRITS INTERCEPTANT DEUX ARCS DE MÊMES EXTRÉMITÉS

Exercice de fixation

Exercice 8

1. Les angles inscrits \widehat{AMB} et \widehat{ANB} sont supplémentaires.

Donc $mes \widehat{ANB} = 180^\circ - 38^\circ$

$mes \widehat{ANB} = 142^\circ$.

6. BISSECTRICE D'UN ANGLE INSCRIT ET ARC DE CERCLE INTERCEPTÉ PAR CET ANGLE

Exercice de fixation

Exercice 9

2. a) (AH) est la bissectrice de l'angle \widehat{BAC} .
 b) I appartient à la bissectrice de l'angle inscrit \widehat{BAC} . Donc la droite (AI) partage l'arc intercepté BC deux arcs de même longueur. De plus $I \in BC$; donc les arcs BI et IC ont la même longueur.
 c) (D) est la bissectrice de l'angle \widehat{CBT} . En effet, l'angle \widehat{TBC} intercepte l'arc BC ; or la longueur de l'arc BI est égale à celle de l'arc CI . Donc la droite (BI) est la bissectrice de l'angle \widehat{TBC} .

7. ARC CAPABLE D'UN ANGLE DONNÉ

Exercices de fixation

Exercice 10

Construction.

Exercice 11

Construction.

Exercice 12

Construction.

8. AIRE D'UN TRIANGLE

Exercices de fixation

Exercice 13

N°	Affirmations	Réponses
1.	L'aire \mathcal{A} du triangle ABC est : $\mathcal{A} = \frac{1}{2} pr \sin \widehat{Q}$.	Vrai
2.	L'aire \mathcal{A} du triangle ABC est : $\mathcal{A} = \frac{1}{2} pr \sin \widehat{R}$.	Faux
3.	L'aire \mathcal{A} du triangle ABC est : $\mathcal{A} = \frac{1}{2} pq \sin \widehat{P}$.	Faux
4.	L'aire \mathcal{A} du triangle ABC est : $\mathcal{A} = \frac{1}{2} qr \sin \widehat{P}$.	Vrai

Exercice 14

Soit \mathcal{A} l'aire du triangle ABC.

On a : $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times AC \times AB \sin \hat{A}$.

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \sin 45^\circ \text{ cm}^2 = 3 \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ cm}^2.$$

$$\mathcal{A} = 3 \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ cm}^2.$$

9. THÉORÈME DES SINUS

Exercices de fixation

Exercice 15

$$\frac{\sin \dots 61^\circ \dots}{b} = \frac{\sin \dots 76^\circ \dots}{c} = \frac{\sin \dots 43^\circ \dots}{a}.$$

Exercice 16

On a : $\frac{EF}{\sin 30^\circ} = \frac{FG}{\sin 120^\circ} = 2\sqrt{3}$.

D'où $EF = 2\sqrt{2} \sin 30^\circ = \sqrt{3}$.

$FG = 2\sqrt{3} \sin 120^\circ = 3$.

Exercice 17

On a d'après le théorème des sinus :

$$\frac{AB}{\sin \widehat{BCA}} = 2R \text{ d'où } R = \frac{AB}{2 \sin \widehat{BCA}} = \frac{3}{2 \sin 30^\circ}$$

$R = 3$.

EXERCICES DE RENFORCEMENT / APPROFONDISSEMENT

Exercice 1

- 1- angles inscrits ; 2- mesure ; 3- supplémentaires ; 4- bissectrice ;
5- longueur ; 6- réunion ; 7- symétriques.

Exercice 2

1F ; 2a)V ; 2b) F ; 3V

Exercice 3

1. $mes \widehat{BEC} = 180^\circ - \frac{1}{2} mes \widehat{BOC}$
 $= 180^\circ - \frac{1}{2} \times 90^\circ = 180^\circ - 45^\circ.$

Donc $mes \widehat{BEC} = 135^\circ$.

2. L'angle inscrit \widehat{BAC} est supplémentaire à l'angle \widehat{BEC} .
 L'angle inscrit \widehat{BDC} est supplémentaire à l'angle \widehat{BEC} .

Exercice 4

On a : $\frac{BC}{\sin \hat{A}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} = \frac{AB}{\sin \hat{C}} = 2r$.

D'où $BC = 2r \sin \hat{A}$; $AC = 2r \sin \hat{B}$ et $AB = 2r \sin \hat{C}$.

$\mathcal{P} = AB + BC + AC$.

Donc $\mathcal{P} = 2r(\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C})$.

Exercice 5

- $mes \widehat{BMC} = mes \widehat{BAC} = 60^\circ$; $mes \widehat{BOC} = 2mes \widehat{BAC} = 120^\circ$
 $mes \widehat{BNC} = 180^\circ - mes \widehat{BAC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.
 $mes \widehat{CBE} = mes \widehat{BAC} = 60^\circ$
 $mes \widehat{CBF} = 180^\circ - mes \widehat{CBE} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.
- a) $\frac{AB}{\sin 60^\circ} = 2R$ d'où $AB = 2R \sin 60^\circ = 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.
 $AB = 2\sqrt{3}$ cm.
- $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times AB \times BC \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times (2\sqrt{3})^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ cm².
 $\mathcal{A} = 3\sqrt{3}$ cm².

Exercice 6

- On a : $OI = OJ = OB$ (rayon du cercle (\mathcal{C})). JOB est donc un triangle isocèle et $mes \widehat{OJB} = 60^\circ$. Donc JOB est équilatéral ; d'où $OJ = OB = JB$.
 On a aussi : $OJ = \frac{1}{2}IJ$, or $OJ = JB$ et $IJ = JK$; donc $JB = \frac{1}{2}JK$ et comme $B \in [JK]$, donc B est le milieu de $[JK]$.
- $S_J(O) = A$, d'où $OJ = JA$ et comme $OJ = JB$, donc $JO = JA = JB$.
 Donc le triangle BOA est inscrit dans le cercle de centre J et de diamètre $[OA]$.
 Donc le triangle BOA est rectangle en B , d'où $(BO) \perp (AB)$. On déduit que (AB) est la tangente à (\mathcal{C}) au point B .
- $mes \widehat{ABC} = mes \widehat{BTC} = \frac{1}{2} mes \widehat{BOC} = mes \widehat{BOJ} = 60^\circ$.
- \widehat{JOC} est l'angle au centre associé à \widehat{JBC} . Donc $mes \widehat{JBC} = \frac{1}{2} mes \widehat{JOC} = 30^\circ$.

Exercice 7

- On a : $\frac{OP}{\sin 60^\circ} = \frac{OQ}{\sin 60^\circ} = \frac{PQ}{\sin 60^\circ} = 2 \times 3$.
 Donc $OP = OQ = PQ = 6 \sin 60^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.
 Par suite, le périmètre de OPQ est $\mathcal{P} = OP + OQ + PQ$.
 D'où $\mathcal{P} = 9\sqrt{3}$ cm.
- Soit \mathcal{A} l'aire du triangle OPQ .
 $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot OP \times OQ \sin 60^\circ$
 $= \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times 3\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$.
 D'où $\mathcal{A} = \frac{27}{4}\sqrt{3}$ cm².

Exercice 8

On a : $mes \widehat{BAC} = \frac{1}{2} mes \widehat{BOC}$ et $mes \widehat{ADB} = \frac{1}{2} mes \widehat{AOB}$.
 $mes \widehat{BAC} + mes \widehat{ADB} = \frac{1}{2} (mes \widehat{AOB} + mes \widehat{BOC})$
 $= \frac{1}{2} mes \widehat{AOC} = \frac{1}{2} \times 180^\circ$.
 Donc : $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Exercice 9

Par la symétrie centrale de centre O , on a :

$S_O(E) = B$, $S_O(F) = C$; d'où $S_O(EF) = BC$.

Donc longueur de EF = longueur de BC .

L'angle inscrit \widehat{EDF} intercepte l'arc EF et l'angle inscrit \widehat{EDF} intercepte l'arc BC .

Les angles inscrits \widehat{EDF} et \widehat{CAB} interceptent deux arcs de même longueur, donc $\text{mes}\widehat{EDF} = \text{mes}\widehat{CAB}$.

D'où : $\alpha = \beta$.

SITUATIONS COMPLEXES

Exercice 10

On a : $\text{mes}\widehat{CAB} = 180^\circ - (40^\circ + 72^\circ) = 68^\circ$.

$$\frac{AB}{\sin 72^\circ} = \frac{AC}{\sin 40^\circ} = \frac{BC}{\sin 68^\circ}; \text{ d'où } AB = BC \times \frac{\sin 72^\circ}{\sin 68^\circ} \text{ et } AC = BC \times \frac{\sin 40^\circ}{\sin 68^\circ} \text{ avec } BC = 1250 \text{ m.}$$

Donc $AB = 1282,18 \text{ m}$ et $AC = 866,59 \text{ m}$.

Le père ne disposant pas d'assez de carburant, il va choisir la plus petite distance. Il va donc aller vers la pinasse C.

Exercice 11

On a : $\frac{BH}{\sin 77^\circ} = \frac{AH}{\sin 13^\circ}$ d'où $BH = AH \times \frac{\sin 77^\circ}{\sin 13^\circ}$ (triangle ABH).

$\frac{AC}{\sin 79^\circ} = \frac{AH}{\sin 13^\circ}$ d'où $CH = AH \times \frac{\sin 79^\circ}{\sin 13^\circ}$ (triangle AHC).

Or $BC = BH + HC$ d'où $BC = AH \left(\frac{\sin 79^\circ + \sin 77^\circ}{\sin 13^\circ} \right)$.

1. LE RADIAN

Exercices de fixation

Exercice 1

Mesure en degré	15°	20°	120°	72°	150°	270°	305°	300°
Mesure en radian	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{61\pi}{36}$	$\frac{5\pi}{3}$

Exercice 2

Mesure en radian	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	8π	$\frac{2\pi}{7}$
Mesure en degré	108°	135°	30°	75°	1440°	$\frac{260^\circ}{7}$

Exercice 3

Angle en degré	180°	72°	60°	120°	15°
Angle en radian (valeur exacte)	π	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{12}$

Exercice 4

1. La longueur de l'arc intercepté par l'angle $\frac{2\pi}{5}$ est :

$$\ell_1 = 5 \times \frac{2\pi}{5} = 2\pi \approx 6,28 \text{ cm.}$$

2. $\ell_2 = R \times \frac{3\pi}{4}$ car 135° est égal à $\frac{2\pi}{4}$ rad.

$$\ell_1 = 5 \times \frac{3\pi}{4} = \frac{15\pi}{4} \approx 11,77 \text{ cm.}$$

Exercice 5

$$\theta = 4 \text{ rad.}$$

2. ANGLES ORIENTÉS DE VECTEUR

1. Orientation du plan

Exercices de fixation

Exercice 6

Dans (C_1) : (A, B, C) et (E, F, G) sont de sens contraire.

Dans (C_2) : (A, B, C) et (E, F, G) sont de même sens.

Exercice 7

Le sens de parcours des triplets (O, P, L) et (L, O, K) sont de sens contraire.

Exercice 8

1. $Mes(\widehat{AB, AC})$ de signe positif, $Mes(\widehat{BA, BC})$ de signe négatif, $Mes(\widehat{CB, CA})$ est de signe négatif.

Exercice 9

$$\begin{aligned} \text{Mes}(\widehat{IJ, IK}) &= \frac{\pi}{3}; & \text{Mes}(\widehat{IO, IJ}) &= -\frac{\pi}{6}; & \text{Mes}(\widehat{OI, OJ}) &= \frac{\pi}{2}; \\ \text{Mes}(\widehat{KJ, KI}) &= -\frac{\pi}{3}; & \text{Mes}(\widehat{OJ, OK}) &= \pi; & \text{Mes}(\widehat{JO, JK}) &= 0. \end{aligned}$$

Exercice 10

$$\text{Mes}(\widehat{AC, AD}) = \frac{\pi}{4}; \quad \text{Mes}(\widehat{CD, CB}) = \frac{5\pi}{8}; \quad \text{Mes}(\widehat{BC, DA}) = \frac{7\pi}{8}.$$

Exercice 11

$$\begin{aligned} \text{Mes}(\widehat{AB, AC}) &= \frac{\pi}{4}; & \text{Mes}(\widehat{AO, OC}) &= 0; & \text{Mes}(\widehat{CD, CA}) &= \frac{\pi}{3}; \\ \text{Mes}(\widehat{BA, OD}) &= -\frac{\pi}{4}; & \text{Mes}(\widehat{AB, AD}) &= \frac{7\pi}{12}. \end{aligned}$$

Exercice 12

Colonne 1			Colonne 2	
L'angle orienté $(\overrightarrow{OD}; \overrightarrow{OB})$	•		•	0
L'angle orienté $(\overrightarrow{OD}; \overrightarrow{OA})$	•		•	π
L'angle orienté $(\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OA})$	•		•	$\frac{\pi}{2}$
L'angle orienté $(\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OB})$	•		•	$\frac{\pi}{4}$
L'angle orienté $(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AD})$	•		•	$-\pi$
L'angle orienté $(\overrightarrow{DO}; \overrightarrow{DC})$	•		•	$-\frac{\pi}{2}$

Exercice 13

Construction

Exercice 14

- a) Citons trois angles orientés égaux à $(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OA})$:
- $$(\overrightarrow{OH}; \overrightarrow{OG}); \quad (\overrightarrow{OD}; \overrightarrow{OC}); \quad (\overrightarrow{OF}; \overrightarrow{OE}).$$
- b) Citons trois angles orientés opposés à l'angle $(\overrightarrow{OD}; \overrightarrow{OF})$:
- $$(\overrightarrow{OH}; \overrightarrow{OF}); \quad (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OG}); \quad (\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OA}).$$

Exercice 15

- Citons un angle orienté opposé à $(\overrightarrow{CO}; \overrightarrow{CD})$:
- L'angle orienté $(\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{AD})$.
- Citons des angles orientés opposés à l'angle orienté $(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{DA})$:
- Ce sont : $(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}); \quad (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}); \quad (\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OD})$.

Exercice 16

$$(\overrightarrow{EF}; \overrightarrow{EG}); \quad (\overrightarrow{HE}; \overrightarrow{HI}); \quad (\overrightarrow{GI}; \overrightarrow{GF}).$$

Exercice 17

		Vrai ou Faux
1.	Les angles orientés $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$ et $(\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CB})$ sont opposés.	Faux
2.	Les angles orientés $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OD})$ et $(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC})$ sont opposés.	Vrai
3.	Les angles orientés $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OD})$ et $(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC})$ ont même mesure.	Faux
4.	Les angles orientés $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})$ et $(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DA})$ ont même mesure.	Vrai

Exercice 18

N°	Affirmations	Réponse
1.	Une symétrie centrale transforme un angle orienté en un angle orienté opposé.	F
2.	Les translations conservent les mesures et l'orientation des angles.	V
3.	Une symétrie orthogonale transforme un angle orienté en un angle orienté opposé.	V

Exercice 19

1. Soit S la symétrie de centre O.

$$\begin{array}{c|c}
 S_O & \\
 \hline
 C & A \\
 D & B \\
 O & O
 \end{array}
 \quad S_O(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DO}) = (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BO}) \text{ et comme la symétrie centrale conserve l'angle orienté, } Mes(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BO}) = Mes(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DO}) = \frac{\pi}{3}$$

2. De même : $S_O(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OD})$.

Donc, $Mes(\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OD}) = -\frac{3\pi}{7}$.

3. TRIGONOMÉTRIE

a) Cercle trigonométrique et point-image

Exercices de fixation

Exercice 20

Le cercle ...trigonométrique ... est le cercle de ...centre O ... et de ...rayon 1...

Exercice 21

		a	b	c	d
4	La mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OD})$ est :	α	$-\alpha$	$\pi + \alpha$	$\pi - \alpha$
5	La mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OD})$ est :	α	$-\alpha$	$\pi + \alpha$	$\pi - \alpha$
6	La mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OB})$ est :	α	$-\alpha$	$-\pi + \alpha$	$\pi - \alpha$
7	La mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OK})$ est :	α	$-\alpha$	$\pi + \alpha$	$\pi - \alpha$
8	La mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OC})$ est :	π	$-\alpha$	$\pi + \alpha$	$\pi - \alpha$

Exercice 22

À construire.

Exercice 23

À construire.

Exercice 24

À construire.

b) Cosinus et sinus d'un angle orienté

c) Tangente d'un angle orienté

Exercices de fixation

Exercice 25

$1 \rightarrow a$; $2 \rightarrow b$; $3 \rightarrow a$; $4 \rightarrow c$; $5 \rightarrow b$; $6 \rightarrow d$.

Exercice 26

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$$

Exercice 27

$$d) \sin x = \frac{CB}{AC}$$

$$e) \cos x = \frac{AB}{AC}$$

$$i) \tan x = \frac{BC}{AB}$$

Exercice 28

$$\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \sin \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos \frac{7\pi}{3} = \frac{1}{2}; \quad \sin \left(\frac{8\pi}{6}\right) = \sin \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(-\pi) = \cos(\pi) = -1.$$

Exercice 29

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x; \text{ on a } \sin^2 x = \frac{2}{3}$$

$$\sin x = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ ou } -\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ or } x \in]0; \frac{\pi}{2}[, \sin x > 0 \text{ donc } \sin x = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Exercice 30

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \text{ on a } \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 0,91.$$

$$\cos x = \sqrt{0,91} = \frac{\sqrt{91}}{10} \text{ ou } -\frac{\sqrt{91}}{10} \text{ or } x \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[, \cos x < 0, \text{ donc } \cos x = -\frac{\sqrt{91}}{10}.$$

$$\tan = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{0,3}{\frac{\sqrt{91}}{10}} = -\frac{\frac{3}{10}}{\frac{\sqrt{91}}{10}} = -\frac{3}{\sqrt{91}} = -\frac{3\sqrt{91}}{91}.$$

Exercice 31

1. Figure

2. La mesure principale de x est $\frac{2\pi}{3}$.

Exercice 32

$$\begin{aligned} \cos(5\pi + x) &= \cos(\pi + x) = -\cos x. \\ \sin(-12\pi - x) &= \sin(-x) = -\sin(x). \end{aligned}$$

Exercice 33

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) + \sin(3\pi + x) + \cos(5\pi + x) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= \\ = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(\pi + x) + \cos(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \\ = \cos x - \sin x - \cos x + \sin x &= \\ = 0. \end{aligned}$$

EXERCICES DE RENFORCEMENT / APPROFONDISSEMENT

Exercice 1

(Voir figure).

Exercice 2

1. Dans parallélogramme, les angles des sommets opposés ont la même mesure. Or

$(\widehat{AB}; \widehat{AD})$ et $(\widehat{CB}; \widehat{CD})$ sont deux angles opposés ;

$$\text{donc } \text{mes}(\widehat{AB}; \widehat{AD}) + \text{mes}(\widehat{CB}; \widehat{CD}) = 0.$$

2. $\text{Mes}(\widehat{CD}; \widehat{CB}) = \frac{\pi}{4}$; $\text{Mes}(\widehat{BA}; \widehat{DA}) = \frac{\pi}{4}$.

$$\text{Mes}(\widehat{DC}; \widehat{DA}) = -\frac{3\pi}{4}$$
 ; $(\widehat{BC}; \widehat{DA}) = \pi$.

Exercice 3

1. $\cos^2 \frac{2\pi}{12} = 1 - \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{8+4\sqrt{3}}{16}$

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}{4} \text{ or } (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 = 8 + 2\sqrt{12} = 8 + 4\sqrt{3}$$

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Exercice 4

1. $(\cos + \sin)^2 - (\cos x - \sin x)^2 =$

$$\begin{aligned} \cos^2 + \sin^2 x + 2\sin x \cos x - (\cos^2 x + \sin^2 x - 2\cos x \sin x) \\ = \cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x \cos x - \cos^2 x - \sin^2 x + 2\cos x \sin x = 4\sin x \cos x. \end{aligned}$$

2. $\cos^4 - \sin^4 x = (\cos^2 x)^2 - (\sin^2 x)^2 = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x)$
 $= \cos^2 x - \sin^2 x$ car $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Exercice 5

$$\begin{aligned} \cos x - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin x + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x - \cos x + \sin x - \sin x \\ &= 0. \end{aligned}$$

Exercice 6

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x, \text{ on a : } \cos^2 x = \frac{4}{9}$$

$$\cos x = \frac{2}{3} \text{ ou } \cos x = -\frac{2}{3}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} ; \text{ on a : } \tan x = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

SITUATIONS COMPLEXES

Exercice 7

1. AGH est un triangle équilatéral donc $Mes(\overrightarrow{AH}; \overrightarrow{AG}) = -\frac{\pi}{3}$

2. AGFB est un parallélogramme et $Mes(\overrightarrow{BF}; \overrightarrow{BA}) = \frac{5\pi}{6}$ donc

$$Mes(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AG}) = \frac{1}{2} \left(2\pi - \left(2 \times \frac{5\pi}{6} \right) \right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Or } Mes(\overrightarrow{FG}; \overrightarrow{FB}) = Mes(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AG}) = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Donc } Mes(\overrightarrow{FB}; \overrightarrow{FC}) = Mes(\overrightarrow{FG}; \overrightarrow{FC}) - Mes(\overrightarrow{FG}; \overrightarrow{FB}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

De plus $(AG) \parallel (BF)$ donc $(FC) \parallel (AH)$

Or $(ED) \parallel (FC)$ par suite $(AH) \parallel (ED)$

Les droites (AH) et (ED) sont donc parallèles

1. EFFECTIFS CUMULÉS, FRÉQUENCES CUMULÉES

Exercices de fixation

Exercice 1

Masse (en kg)	[45; 54[[54; 59[[59; 64[[64; 69[[69; 74[[74; 79[[79; 89[
Effectifs	5	14	33	47	26	13	2
Effectifs cumulés décroissants	140	135	121	88	41	15	2

Exercice 2

Masse (en kg)	[45; 54[[54; 59[[59; 64[[64; 69[[69; 74[[74; 79[[79; 89[
Fréquences	0,047	0,1	0,233	0,32	0,18	0,093	0,027
Fréquences cumulées décroissantes	1	0,953	0,853	0,62	0,3	0,12	0,027

Exercice 3

L'effectif cumulé croissant de la modalité 60 est	28	55	83	113
L'effectif cumulé décroissant de la modalité 60 est	136	105	77	83
L'effectif cumulé décroissant de la modalité 80 est	25	80	160	10
La fréquence cumulée croissante de la modalité 55 est	0,05	0,15	0,34	0,52
La fréquence cumulée croissante de la modalité 70 est	0,84	0,94	1	10
La fréquence cumulée décroissante de la modalité 45 est	0,05	1	0,95	0,58

2. POLYgone DES EFFECTIFS CUMULÉS, POLYgONES DES FRÉQUENCES CUMULÉES

Exercices de fixation

Exercice 4

1. Voir tableau

Groupe d'âge (en années)	Fréquences (en %)	Fréquence cumulée croissante	Fréquence cumulée décroissante
[0 ; 10[11,6	11,6	100
[10 ; 20[13,4	25	88,4
[20 ; 30[13,6	38,6	75
[30 ; 40[14,8	53,4	61,4

[40 ; 50[16,6	70	46,6
[50 ; 60[12,7	82,7	30
[60 ; 70[8	90,7	17,3
[70 ; 80[6	96,7	9,3
[80 ; 90[2,7	99,4	3,3
90 ans et plus	0,6	100	0,6

2. (Voir papier millimétré).

Exercice 5

1. Voir tableau

Classes	[20 ; 30[[30 ; 40[[40 ; 50[[50 ; 60[
Effectifs	17	29	32	12
ECD (*)	90	73	44	12

2. (Voir papier millimétré).

3. PARAMÈTRES DE POSITION ET PARAMÈTRES DE DISPERSION

1. Paramètres de position

a. Mode et classe modale

Exercices de fixation

Exercice 6

Le mode est 1, car il a le plus grand effectif.

Exercice 7

1. La classe modale est : [40 ; 50[.

2. La classe modale est : [40 ; 50[

b. Moyenne

Exercices de fixation

Exercice 8

1. Moyenne : $\frac{0 \times 5 + 1 \times 13 + 2 \times 7 + 3 \times 3 + 4 \times 1 + 5 \times 1}{30} = 1,5$

2. Chaque élève a la moyenne 1,5, soit 2 frères et sœurs.

Exercice 9

1. Moyenne : $\frac{25 \times 17 + 35 \times 29 + 45 \times 32 + 55 \times 12}{17 + 29 + 32 + 12} = \frac{3540}{90} = 39,33$.

2. Les professeurs de ce lycée ont en moyenne 40 ans.

c) Médiane

Exercices de fixation

Exercice 10

La médiane de la série S_1 est : 8.

La médiane de la série S_2 est : $\frac{8+10}{2} = 9$.

La médiane de la série S_3 est : 11.

La médiane de la série S_4 est : $\frac{6+8}{2} = 7$.

Exercice 11

La médiane de la série 1 est : 11,5.

La médiane de la série 2 est : 165,5.

Exercice 12

La médiane est 9.

Exercice 13

L'effectif total est 240 et $240 \div 2 = 120$.

La classe médiane est [100 ; 150[.

100	M_e	150	$\frac{M_e - 100}{120 - 102} = \frac{120 - 102}{162 - 102}$, donc $M_e = 145$.
102	120	162	

Interprétation :

Au cours de cette journée, 50 % des clients ont dépensé moins de 115 000 F et 50 % des clients ont dépensé plus de 115 000 F.

Exercice 14

0,21	0,5	0,53	$\frac{M_e - 0,85}{0,5 - 0,21} = \frac{1,05 - 0,85}{0,53 - 0,21}$; d'où $M_e = 1,03 \approx 1,03$.
0,85	M_e	1,05	

50 % de ces insectes ont une taille inférieure ou égale à 1,03 cm et 50 % d'entre eux ont une taille supérieure ou égale à 1,03 cm.

2. Paramètre de dispersion

a) Etendue

Exercice de fixation

Exercice 15

L'étendue de l'exercice 4 est 300-0, soit 300.

L'étendue de l'exercice 5 est 1,45-0,45, soit 1.

b) Ecart moyen ou écart absolu moyen

Exercices de fixation

Exercice 16

$$e = \frac{4|6-10,5|+6|11-10,5|+5|12-10,5|+3|13-10,5|}{4+6+5+3} = \frac{36}{18} ; \text{ car } \bar{X} = 10,5$$

$$e = 2.$$

Exercice 17

$$m = \frac{62,5 \times 33 + 67,5 \times 36 + 72,5 \times 48 + 77,5 \times 37 + 82,5 \times 24}{33 + 36 + 48 + 37 + 24} = \frac{12820}{178} \approx 72$$

$$e = \frac{33|62,5-72|+36|67,5-72|+48|72,5-72|+37|77,5-72|+24|82,5-72|}{178}$$

$$e \approx 5,36.$$

c) Variance – Ecart type

Exercices de fixation

Exercice 18

$$V = \frac{5 \times 0^2 + 13 \times 1^2 + 7 \times 2^2 + 3 \times 3^2 + 1 \times 4^2 + 1 \times 5^2}{5 + 13 + 7 + 3 + 1 + 1} - 1,5^2 \approx 1,38.$$

$$\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{1,38} \approx 1,17.$$

Exercice 19

Score moyen : $\frac{298+407+336+425+512+321+543+396}{8} = 404,75.$

Écart type : $\sigma = \sqrt{V}$, avec $V = \frac{298^2+407^2+336^2+\dots+396^2}{8} - 404,75^2$
 $V = 6780,4375.$

Donc $\sigma = \sqrt{6780,4375} \approx 82,34.$

Exercice 20

1. $\bar{x} = \frac{358}{38} \approx 9,42.$

2. Variance : $V = \frac{3621}{38} - 9,42^2 \approx 16,31.$

Écart type : $\sigma = \sqrt{V} \approx 4,03.$

EXERCICES DE RENFORCEMENT / APPROFONDISSEMENT

Exercice 1

Expression	Formules
Écart moyen	$\frac{n_1(x_1-\bar{x})^2-n_2(x_2-\bar{x})^2+\dots+n_p(x_p-\bar{x})^2}{n_1+n_2+\dots+n_p}$
Écart type	$\sqrt{\frac{n_1x_1^2+n_2x_2^2+\dots+n_px_p^2}{n_1+n_2+\dots+n_p} - (\bar{x})^2}$
Variance	$\frac{n_1x_1^2+n_2x_2^2+\dots+n_px_p^2}{n_1+n_2+\dots+n_p} - (\bar{x})^2$
	$\frac{n_1 x_1-\bar{x} +n_2 x_2-\bar{x} +\dots+n_p x_p-\bar{x} }{n_1+n_2+\dots+n_p}$

Exercice 2

La moyenne d'une série est un paramètre de dispersion.	F
La moyenne d'une série est toujours l'une des données de la série.	F
La variance est toujours un nombre positif.	V
L'écart type peut être un nombre négatif.	F
Si toutes les données sont égales à la moyenne alors l'écart type est nul.	V

Exercice 3

- $m \approx 2,22$
- $e \approx 0,976$
- Variance : $V=1,71$
Écart type : $\sigma \approx 1,3.$
- Médiane : 2.

Interprétation : 50 % des logements du village ont un nombre de pièces inférieur ou égal à 2 et 50 % un nombre de pièces supérieur ou égal à 2.

Exercice 4

Classe	Fréquence	Centres des classes	FCC
$[-2,74 ; -1,78 [$	0,04	-2,26	0,04
$[-1,78 ; -0,82 [$	0,17	-1,3	0,21
$[-0,82 ; 0,13 [$	0,32	-0,345	0,53
$[0,13 ; 1,09 [$	0,33	0,61	0,86
$[1,09 ; 2,05 [$	0,14	1,57	1

- Moyenne : $-2,26 \times 0,04 - 1,3 \times 0,17 - 0,345 \times 0,32 + 0,61 \times 0,33 + 1,57 \times 0,14 = -0,0007$.
- $e = 0,002961$.
- Variance : $V = 0,99757051$.
Écart type : $\sigma = \sqrt{V} \approx 0,99$.
- | | | | |
|-------|-------|------|--|
| 0,21 | 0,5 | 0,53 | $\frac{M_e + 0,82}{0,5 - 0,21} = \frac{0,13 + 0,82}{0,53 - 0,22}$; $M_e \approx 0,04$. |
| -0,82 | M_e | 0,13 | |

Exercice 5

La classe dans laquelle les notes sont les plus régulières est la 2nde C₂ car son écart type est plus petit.

Exercice 6

- Le poids moyen est 98,35 g.
-

Poids	[80 ;85[[85 ;90[[90 ;95[[95 ;100[[100 ;105[[105 ;110[[110 ;115[
Fréquence	0,08	0,11	0,15	0,18	0,25	0,16	0,07
FCD	1	0,92	0,81	0,66	0,48	0,23	0,07

- (Voir papier millimétré).
Médiane : 99.

Exercice 7

Salaire	Effectif	Effectif cumulé croissant	Effectif cumulé décroissant	Centre
$]0 ; 500 [$	30	30	700	250
$[500 ; 750 [$	45	75	670	625
$[750 ; 1000 [$	110	185	625	875
$[1000 ; 1250 [$	250	435	515	1125
$[1250 ; 1500 [$	150	585	265	1375
$[1500 ; 1750 [$	60	645	115	1625
$[1750 ; 2000 [$	35	680	55	1875
$[2000 ; 2500 [$	20	700	20	2250

- $m = 1182,14$.
- Voir tableau.
- (Voir papier millimétré).
- La médiane est 1165.

Interprétation : 50 % des travailleurs de cette entreprise ont un salaire inférieur ou égal à 1 165 000 F et 50 % ont un salaire supérieur ou égal à 1 165 000 F.

Exercice 8

1. Moyenne : $m = 11,04$.

Variance : $V = 5,238$.

Écart type : $\sigma \approx 2,3$.

2. a)

Nombre de tubes	[8 ; 10 [[10 ; 12 [[12 ; 14 [[14 ; 16 [
Effectif	9	5	7	4

b) (Voir papier millimétré).

c) Classe modale : [8 ; 10 [
la médiane est 11,4.

d) Moyenne : 11,48.

Variance : $V \approx 4,889$.

Écart type . $\sigma = 2,21$.

Exercice 9

2^{nde} C₁ : Moyenne : $\frac{303}{25} = 12,12$.

Médiane : 12.

2^{nde} C₂ : Moyenne : $\frac{288}{25} = 11,52$.

Médiane : 11.

Conclusion : C'est la 2^{nde} C₁ qui sera récompensé car elle a la meilleure moyenne et la meilleure médiane.

SITUATIONS COMPLEXES

Exercice 10

Élevage A : $m_A = 1,7$.

Élevage B : $m_B = 1,7$.

	Écart moyen	Variance	Écart type
Élevage A	0,2168	0,09744	0,3
Élevage B	0,1528	0,05199	0,23

C'est l'élevage B qui sera choisi car son écart moyen et son écart type sont plus petits.

Exercice 11

- Moyenne :

$$m = \frac{41,5 \times 2 + 42,5 \times 10 + 43,5 \times 25 + 44,5 \times 40 + 45,5 \times 21 + 46,5 \times 2}{2 + 10 + 25 + 40 + 21 + 2} = 44,24$$

- Écart type : $\sigma \approx 1,02$.

2. $I = [m - 2 \times \sigma ; m + 2\sigma] = [43,22 ; 46,28]$

Il y a environ $\frac{10+25+40+21}{100}$ fromages dont les taux de matière grasse sont dans

l'intervalle I, et cela représente 96 % des fromages.

Conclusion : L'analyse des 100 fromages de cette laitière montre que les deux premiers critères sont respectés mais pas le dernier.

Donc l'institut va interdire la vente des fromages de cette laitière.

1. DÉFINITIONS ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

1. Définition et notation

Exercices de fixation**Exercice 1**

1-B ; 2-C ; 3-A ; 4-C

Exercice 2

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \times \sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -5$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 7 \times 4 \times 1 = 28$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8 \times 27 \times (-1) = -216$.

2. Carré scalaire

Exercice de fixation**Exercice 3**

- $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = 4^2 + 3^2 = 25$.
 $\vec{v}^2 = \|\vec{v}\|^2 = (-1)^2 + 2^2 = 5$.

3. Autre expression du produit scalaire

Exercices de fixation**Exercice 4**

- $$\vec{FE} \cdot \vec{FG} = 2 \times 4 = 8.$$
- $$\vec{FG} \cdot \vec{CD} = (-2) \times 4 = -8.$$
- $$\vec{CD} \cdot \vec{FE} = 2 \times (-2) + (-2) \times 2 = -8.$$

Exercice 5

- $$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = BH \times BC = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}.$$
- $$\vec{AB} \cdot \vec{AH} = AH \times AH = AH^2 = AB^2 - \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 = \frac{3}{4}.$$
- $$\vec{BC} \cdot \vec{CH} = -\vec{CB} \cdot \vec{CH} = -CB \times CH = -1 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Exercice 6

- $\vec{BC} \cdot \vec{BA} = BC \times BO = 4 \times 2 = 8$.
- $\vec{BC} \cdot \vec{JC} = \vec{CB} \cdot \vec{CJ} = CB \times CB = 16$.
- $\vec{BC} \cdot \vec{AJ} = -BC \times BO = -8$.
- $\vec{BO} \cdot \vec{BI} = -BO \times BK = -4$.
- $\vec{BC} \cdot \vec{CI}$
 $= -\vec{CB} \cdot \vec{CI}$
 $= -CB \times CK$
 $= -4 \times 6$
 $= -24$.

2. PROPRIÉTÉ DU PRODUIT SCALAIRE

1. Vecteurs orthogonaux

Exercices de fixation

Exercice 7

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BH} = 0$$

Exercice 8

[AC] et [BD] sont les diagonales du carré, comme dans un carré, les diagonales ont des supports perpendiculaires ; on a : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

2. Opérations sur les produits scalaire

Exercices de fixation

Exercice 9

$$1. (2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 2\vec{u}^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v}^2 = 8 - 1 - 9 = -2.$$

$$2. (\vec{u} + 2\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 4\vec{u} \cdot \vec{v} + 4\vec{v}^2 = 4 + 4 + 36 = 44.$$

$$3. (-3\vec{u} + \vec{v})^2 = 9\vec{u}^2 - 6\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = 36 - 6 + 9 = 39.$$

$$4. (\vec{u} - \vec{v})^2 - (\vec{u} + \vec{v})^2 = (-2\vec{v}) \cdot (2\vec{u}) = -4\vec{u} \cdot \vec{v} = -4.$$

Exercice 10

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 0, \text{ car } \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|.$$

Donc $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ sont orthogonaux.

Exercice 11

$$1. (3\vec{u} - \vec{v}) \cdot (-\vec{u} + 2\vec{v}) = -3\vec{u}^2 + 7\vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{v}^2 = -6 - 28 - 6 = -40.$$

$$2. (\vec{u} - 3\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 6\vec{u} \cdot \vec{v} + 9\vec{v}^2 = 2 + 24 + 81 = 107.$$

$$3. \|2\vec{u} + 3\vec{v}\|^2 = (2\vec{u} + 3\vec{v})^2 = 4\vec{u}^2 + 12\vec{u} \cdot \vec{v} + 9\vec{v}^2 = 8 - 48 + 81 = 41.$$

3. Produit scalaire et norme

Exercice de fixation

Exercice 12

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} &= \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2); \\ &= \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2); \\ &= \frac{1}{2} (AC^2 - AB^2 - AD^2) \\ &= \frac{1}{2} (64 - 49 - 9) \\ &= 3. \end{aligned}$$



3. RELATION MÉTRIQUE DANS UN TRIANGLE

1. Produit scalaire dans un triangle

Exercice de fixation

Exercice 13

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{1}{2} (49 + 16 - 25) = 20.$$

2. Relation métrique dans un triangle quelconque : le théorème d'Al Kashi

Exercices de fixation

Exercice 14

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} \\ &= 64 + 9 - 2 \times 8 \times 3 \times \cos \frac{\pi}{3} \\ &= 49. \end{aligned}$$

Donc $BC = 7$.

Exercice 15

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$$

$$127 = 49 + 169 - 182 \cos \widehat{BAC}$$

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{-91}{-182} = \frac{1}{2}. \text{ Donc } \text{mes } \widehat{BAC} = 60^\circ.$$

Exercice 16

$$1. BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$$

$$\text{Donc } BC = 7.$$

$$2. AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA \times CB \times \cos \widehat{ACB} \approx 1,0874.$$

$$\text{Donc } AB \approx 1,04.$$

$$3. AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA \times BC \times \cos \widehat{ABC}$$

$$\cos \widehat{ABC} = 0,5; \text{ donc } \text{mes } \widehat{ABC} = 60^\circ.$$

3. Théorème de la médiane

Exercice de fixation

Exercice 17

$$1. a) AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2.$$

$$64 + 81 = 2AI^2 + 50, \text{ donc } AI^2 = 47,5 \text{ et donc } AI \approx 6,9.$$

$$b) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AI^2 - \frac{1}{4}BC^2 = 22,5.$$

c) Soit J le milieu de [AC] et K celui de [AB].

$$1. BC^2 + BA^2 = 2BJ^2 + \frac{1}{2}AC^2, \text{ donc } BJ \approx 7,8.$$

$$2. CA^2 + CB^2 = 2CK^2 + \frac{1}{2}AB^2, \text{ donc } CK \approx 8,6.$$

4. Caractérisation d'un triangle rectangle

Exercice de fixation

Exercice 18

$$BA^2 = 36; \overline{BH} \times \overline{BC} = 9 \times 4. \text{ On a } BA^2 = \overline{BH} \times \overline{BC} \text{ donc ABC est un triangle en A.}$$

4. PRODUIT SCALAIRE ET COORDONNÉES

1. Expression du produit scalaire dans une base orthonormée

Exercices de fixation

Exercice 19

$$1. \vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times (-5) + (-3) \times 2 = -16.$$

$$2. \vec{u} \cdot \vec{v} = (1 - \sqrt{2})\sqrt{2} + (1 + \sqrt{2})(-\sqrt{2}) \\ = \sqrt{2} - 2 - \sqrt{2} - 2 \\ = -4.$$

Exercice 20

$$1. \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}. \text{ Donc } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times (-5) + 6 \times 4 = 19.$$

$$2. \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}; \frac{3}{2} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}; 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{3}{2} \times 1 = -\frac{3}{4} + \frac{3}{2} = \frac{3}{4}.$$

2. Équation cartésienne de cercle

Exercice de fixation

Exercice 21

1. Soit $M(x, y)$ un point du plan et (C) le cercle de diamètre [AB].

$$\begin{aligned}
 M \in (C) &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x+2)(x-2) + (y+3)(y-1) = 0. \\
 &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2y - 7 = 0.
 \end{aligned}$$

Une équation du cercle de diamètre [AB] est : $x^2 + y^2 + 2y - 7 = 0$.

EXERCICES DE RENFORCEMENT / APPROFONDISSEMENT

Exercice 1

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} &= AB \times AD \times \cos \frac{\pi}{3} = 4 \times 4 \times \frac{1}{2} = 8. \\
 \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} &= BA \times BC \times \cos \frac{2\pi}{3} = 4 \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -8. \\
 \overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{CD} &= -\overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{DC} = -DO \times DO = -2 \times 2 = -4. \\
 \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} &= -\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} \\
 &= -\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} \\
 &= -\overrightarrow{AD}^2 \\
 &= -16.
 \end{aligned}$$

Exercice 2

$$1 \rightarrow a; \quad 2 \rightarrow c; \quad 3 \rightarrow b.$$

Exercice 3

AFFIRMATIONS	RÉPONSES
A, B et C sont alignés si et seulement si : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC$	F
(AB) et (AC) sont deux droites perpendiculaires si et seulement si : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.	V
Si A est le milieu du segment [BC] alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB^2$	V

Exercice 4

$$\begin{aligned}
 1. \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= AB \times AB = 9. \\
 2. \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= -AB \times AC = -6. \\
 3. \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= AB \times AC \times \cos 60^\circ = \frac{2}{3}. \\
 4. \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= AB \times AC \times \cos(180^\circ - 2 \times 75^\circ) = \frac{9\sqrt{3}}{2}. \\
 5. \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= AB \times AB = 4. \\
 6. \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AC}\|^2) \\
 &= \frac{1}{2} (AD^2 - AB^2 - AC^2) \\
 &= \frac{11}{2}. \\
 7. \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= (-1-2)(3-2) + (0-2)(0-2) = 1.
 \end{aligned}$$

Exercice 5

$$1 \rightarrow a; \quad 2 \rightarrow c; \quad 3 \rightarrow b; \quad 4 \rightarrow a; \quad 5 \rightarrow c.$$

Exercice 6

$$1) a-V; b-F; c-V; \quad 2) -F; \quad 3) -F; \quad 4) -V$$

Exercice 7

$$\begin{aligned} \overline{CQ} \cdot \overline{PR} &= \overline{CQ} \cdot (\overline{AR} - \overline{AP}) \\ &= \overline{CQ} \cdot \overline{AR} - \overline{CQ} \cdot \overline{AP} \\ &= -\overline{AR} \cdot \overline{DR} - \overline{AP} \cdot \overline{BP} = 0 \end{aligned}$$

Comme $\overline{CQ} \cdot \overline{PR} = 0$ donc $(CQ) \perp (PR)$

Exercice 8

On a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$.

Donc $\cos(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{-1 \times 3 + \sqrt{3} \times 0}{\sqrt{1+3} \times \sqrt{9+0}} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$.

On en déduit $Mes(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}) = -\frac{2\pi}{3}$

Exercice 9

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$.

$\cos(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{1 \times (-3\sqrt{2}) + \sqrt{3} \times \sqrt{6}}{\sqrt{1+3} \times \sqrt{18+6}} = 0$

Donc $Mes(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 10

$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$, avec $\overline{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\overline{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{AB \times AC} = \frac{-11}{\sqrt{170}}$

$Mes(\widehat{BAC}) \approx 147,5^\circ$.

Exercice 11

On a : $\overline{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overline{CD} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 1 \times 4 + 2 \times (-2) = 0$.

Donc les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Exercice 12

- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$.
Donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$.
Donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$.
- Pour tous vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} , on a : $-1 \leq \cos(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}) \leq 1$.
 $-\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}) \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
 $-\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \leq \vec{u} \cdot \vec{v} \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

Exercice 13

- Pour tout point M du plan :
 $\overline{MA} \cdot \overline{BC} + \overline{MB} \cdot \overline{CA} + \overline{MC} \cdot \overline{AB}$
 $= \overline{MA} \cdot \overline{BC} + (\overline{MA} + \overline{AB}) \cdot \overline{CA} + (\overline{MA} + \overline{AC}) \cdot \overline{AB}$
 $= \overline{MA} \cdot (\overline{BC} + \overline{CA} + \overline{AB}) + \overline{AB} \cdot \overline{CA} + \overline{AC} \cdot \overline{AB}$
 $= \overline{MA} \cdot \vec{0} - \overline{AB} \cdot \overline{AC} + \overline{AC} \cdot \overline{AB}$
 $= 0$
 $= 0$

$$\overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{KB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

Or d'après 1), on a $\overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{KB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Donc $\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. Ceci prouve que K appartient à la hauteur issue de C.

Conclusion : les trois hauteurs sont concourantes en K.

3. Application :

Exercice 14

a) $m = -\frac{4}{5}$ b) $m = 0$ ou $m=1$ c) $m = 1$

Exercice 15

$$AI = AJ = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$IJ = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Dans le triangle AIJ, on a : $IJ^2 = AI^2 + AJ^2 - 2AI \times AJ \times \cos \widehat{IAJ}$.

$$\frac{2a^2}{4} = 2 \times \frac{5a^2}{4} - 2 \times \frac{5a^2}{4} \times \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = 0,8 \Rightarrow \theta \simeq 36,9^\circ.$$

Exercice 16

1. a) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'B}) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{A'B}$.

Or $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{A'B}$ car le triangle A'BA est rectangle en B.

Donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{A'B} = 0$ et donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'}$.

b) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA'})$
 $= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = MO^2 - r^2.$

c) D'après 1.b), $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MO^2 - r^2$. Or MO et r sont constantes, donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ est constant.

d) Si D est tangente en T à (C), alors A = B = T et alors $P_M = \overrightarrow{MT} \cdot \overrightarrow{MT} = MT^2$.

2. Si M est à l'extérieur de (C), alors $P_M > 0$.

Si M ∈ (C), alors $P_M = 0$.

Si M est à l'intérieur de (C), alors $P_M < 0$.

Exercice 17

1. a) $\cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 + BC^2}{2ABAC} = \frac{1}{2\sqrt{7}}$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = ABAC \cos \widehat{BAC} = 2\sqrt{7} \times \frac{1}{2\sqrt{7}} = 1$

2.a) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}^2$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

b) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

$$\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}) = 0 \quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \text{ donc } (AC) \perp (BM)$$

Exercice 18

On munit le plan de repère orthonormé direct (A, I, J).

Dans ce repère, on a : A(0; 0), B(3; 0), C(0; 3), I(1; 0), J(0; 1),

$$K\left(\frac{x_I+x_C}{2}; \frac{y_I+y_C}{2}\right) \text{ soit } K\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

$$\overline{AK} \cdot \overline{JB} = \left(\frac{1}{2} - 0\right) \times (3 - 0) + \left(\frac{3}{2} - 0\right) \times (0 - 1)$$

$$= \frac{3}{2} + \left(-\frac{3}{2}\right) = 0, \text{ donc } \overline{AK} \perp \overline{JB}.$$

Par conséquent, $\overline{AK} \perp \overline{JB}$.

Exercice 19

- $W_{\overline{R}_1} = \overline{R}_1 \cdot \overline{\ell} = 0J$ car $\overline{R}_1 \perp \overline{\ell}$.
- $W_{\overline{F}_{air}} = \overline{F} \cdot \overline{\ell} = F \times \ell \times \cos \pi = 0,5 \times 10 \times (-1) = -5J$.
- $W_{\overline{P}} = \overline{P} \cdot \overline{\ell} = 0J$, car $\overline{P} \perp \overline{\ell}$.
- $W_{\overline{R}_2} = \overline{R}_2 \cdot \overline{\ell} = R_2 \times \ell \times \cos 60^\circ = 25 \times 10 \times \frac{1}{2} = 125 J$.

Le travail de \overline{F}_{air} est résistant
 Le travail de \overline{R}_1 et \overline{P} sont nuls
 Le travail de \overline{R}_2 est moteur.

Exercice 20

- $(C) : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$
 $(C) : x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$
- $M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow \overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 1) + (y - 1)(y + 1) = 0$
 $(C) : x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$
- $(C) : (x - 0)^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = R^2$
 $B \in (C)$ donc $R = \sqrt{5}$.
 $(C) : (x - 0)^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = 5$
 $(C) : x^2 + y^2 + \frac{4}{3}y - \frac{41}{9} = 0$.

Exercice 21

- $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = (x - 2)^2 + (y + 1)^2 - 4 - 1 + 1$
 $= (x - 2)^2 + (y + 1)^2 - 4$.
- $x^2 + y^2 + x - y + 3 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$.
- $x^2 + y^2 - 3y - \frac{1}{3} = x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{31}{12}$.

Exercice 22

- $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$
 $(x - 2)^2 + (y + 3) = 9$. (C) est le cercle de centre $K\left(\frac{2}{3}\right)$ et de rayon $r = 3$
- $(-1 - 2)^2 + (-3 + 3)^2 = (-3)^2 + 0^2 = 9$.
 Donc $A \in (C)$.

Exercice 23

- $x^2 + y^2 + 3x + 6y = 0$
 $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y + 3) = \frac{45}{4}$ L'ensemble est $C\left(A, \frac{\sqrt{45}}{2}\right)$ où $A\left(-\frac{3}{2}; -3\right)$
- $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 = 0$
 $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 0$. (C) est le point $A\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$

- c) $x^2 + y^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{16} = 0$
 $(x + \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{7}{16}$
 $(C) = C(A(-\frac{1}{2}; 0); \frac{\sqrt{7}}{4})$.
- d) $x^2 + y^2 - 4y + 8 = 0$
 $x^2 + (y - 2)^2 = -4$
 $x^2 + (y - 2)^2 \geq 0$ et $-4 < 0$;
 Donc $(C) = \emptyset$.

Exercice 24

- a) $M(x; y) \in (\Gamma) \cap (D) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$.
 (Γ) et (D) ont pour intersection les points $A(1; 2)$ et $B(-2; -1)$.
- b) $M(x; y) \in (\Gamma) \cap (D) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y - 8 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 8 \\ y^2 - 6y + 9 = 0 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$
 (Γ) et (D) ont pour intersection les points $A(-2; 3)$.
- c)
 $M(x; y) \in (\Gamma) \cap (D) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 5 \\ 5x^2 - 14x + 12 = 0 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 5 \\ 5 \left[(x - \frac{7}{5})^2 + \frac{11}{25} \right] = 0 \end{cases}$
 La 2^{ème} équation n'a pas de solution, donc $(C) = \emptyset$.

Exercice 25

1. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$. On a : $\frac{7}{1} \neq \frac{2}{-4}$ donc les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires. Par conséquent, les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Soit I le milieu de [AB] et (Δ) sa médiatrice.
 Soit J le milieu de [BC] et (Δ') sa médiatrice.
 Le centre de ce cercle est le point d'intersection de (Δ) et (Δ') .
 On a : $I(\frac{3}{2}; 0)$ et $J(2; -2)$.
 Equation de (Δ)
 $M(x; y) \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$;
 $\Leftrightarrow 7(x - \frac{3}{2}) + 2y = 0$
 $\Leftrightarrow 7x + 2y - \frac{21}{2} = 0$.
- Equation de (Δ')
 $M(x; y) \in (\Delta') \Leftrightarrow \overrightarrow{JM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$;
 $\Leftrightarrow -(2x - 2) - 6(y + 2) = 0$
 $\Leftrightarrow x + y = 0$.
- Coordonnées du centre
 Les coordonnées du point Ω d'intersection de (Δ) et (Δ') sont solutions du système
 $\begin{cases} x + y = 0 \\ 7x + y = \frac{21}{2} \end{cases}$

Donc $\Omega \left(\frac{21}{10}; -\frac{21}{10} \right)$ ou $\Omega(2,1; -2,1)$.

Equation du cercle

Soit (\mathcal{C}) ce cercle.

$$M(x; y) \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow \Omega M = \Omega A$$

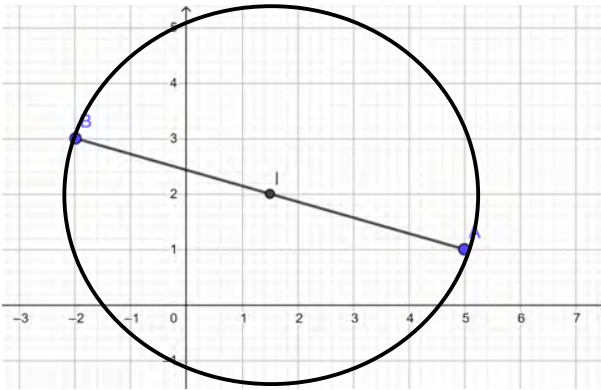
$$\Leftrightarrow \Omega M^2 = \Omega A^2 ;$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{21}{10} \right)^2 + \left(y + \frac{21}{10} \right)^2 = \left(\frac{41}{10} \right)^2 + \left(\frac{11}{10} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{21}{5}x + \frac{21}{5}y - \frac{41}{5} = 0.$$

Exercice 26

$M \in (C) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$. Donc (C) est le cercle de diamètre $[AB]$.



Exercice 27

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = AB^2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = AB^2$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = AB^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = AB^2.$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = AB^2 + IA^2 \Leftrightarrow IM^2 = AB^2 + \left(\frac{AB}{2} \right)^2 = \frac{5}{4} AB^2 = \frac{5}{4} \times 50.$$

$$\Leftrightarrow IM = \frac{5\sqrt{10}}{2}. \text{ Donc } (\Gamma) = c \left(I; \frac{5\sqrt{10}}{2} \right).$$

SITUATIONS COMPLEXES

Exercice 28

$$1. \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}.$$

$$2. \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = AI \times AJ \times \cos \theta.$$

$$3. \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = AI \times AJ \times \cos \theta = AI^2 \cos \theta.$$

$$\text{Or } AI^2 = AJ^2 = AB^2 + \left(\frac{AB}{2} \right)^2 = \frac{5}{4} AB^2 ;$$

$$\text{Donc } AI \times AJ = \frac{5}{4} AB^2 \cos \theta.$$

$$\begin{aligned} \text{D'autre part, } \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} &= \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} \right) \cdot \left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \right) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}^2 + \frac{1}{4} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= 0 + \frac{1}{2} AB^2 + \frac{1}{2} AD^2 + 0 \\ &= \frac{1}{2} AB^2 + \frac{1}{2} AB^2 = AB^2. \end{aligned}$$

$$\text{Par suite, } \frac{5}{4} AB^2 \cos \theta = AB^2.$$

$$\cos \theta = \frac{5}{4} = 0,8.$$

$$\text{Donc } \theta \approx 36,87^\circ.$$

Exercice 29

- Si I est le milieu de [AB], alors $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$
 $= 2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$
 $= 2\overrightarrow{MI}$, car $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$..
- Pour démontrer que (AH) \perp (EF), montrons que $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{EF}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$.

$$\text{D'après la question 1., on a : } \overrightarrow{AH} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{EF} &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EA} + \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}}_0 + \underbrace{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EA}}_0 + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AF} \right) \\ &= \frac{1}{2} (-\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AF}) \\ &= \frac{1}{2} (AC \times AF \times \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF}) - AB \times AE \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})) \\ &= \frac{1}{2} \left(AC \times AF \times \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - AF \times AC \times \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \right) \\ &= 0 \text{ (avec } \alpha = \text{mes } \widehat{BAC}). \end{aligned}$$

Conclusion : les droites (AH) et (EF) sont perpendiculaires.

1. ÉQUATION DANS \mathbb{R}

1. Définition

Exercice de fixation

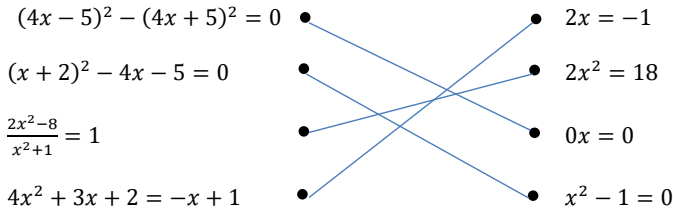
Exercice 1

Les bonnes réponses sont : L 1 ; L 4 ; L 6 ; L 7 ; L 8.

2. Solution d'une équation, ensemble de validité d'une équation, équations équivalentes

Exercice de fixation

Exercice 2



3. Résolutions pratiques d'équations

Exercices de fixation

Exercice 3

a) $-x + 1 = 5$	b) $x + 4 = -3x - 4$	c) $x^2 + 4x + 4 = x^2 - 4$
$x = -4$	$4x = -8$	$4x = -8$
$S_{\mathbb{R}} = \{-4\}$	$x = -2$	$x = -2$
	$S_{\mathbb{R}} = \{-2\}$	$S_{\mathbb{R}} = \{-2\}$

d) $3x^2 - x - 4 = 3x^2 + 4$	e) $(x - 2)^2 = (1 - x)(x - 2)$
$-x = 8$	$(x - 2)(x - 2 - 1 + x) = 0$
$x = -8$	$x = 2$ ou $x = \frac{3}{2}$
$S_{\mathbb{R}} = \{-8\}$	$S_{\mathbb{R}} = \left\{2; \frac{3}{2}\right\}$

f) $(x + 2)^2 = 2(x - 2)(x + 2)$
 $(x + 2)[x + 2 - 2(x - 2)] = 0$
 $(x + 2)(x + 2 - 2x + 4) = 0$
 $x = -2$ ou $x = 6$
 $S_{\mathbb{R}} = \{-2; 6\}$

g) $(x^3 + x + 4)^2 - (x^3 - 3x - 4)^2 = 0$
 $(x^3 + x + 4 - x^3 + 3x + 4)(x^3 + x + 4 + x^3 - 3x - 4) = 0$
 $(4x + 8)(2x^3 - 2x) = 0 \Leftrightarrow 4(x + 2) \cdot 2x(x^2 - 1) = 0$
 $\Leftrightarrow 8x(x + 2)(x - 1)(x + 1) = 0.$

Donc $S_{\mathbb{R}} = \{-1; -2; 0; 1\}$.

Exercice 4

L'ensemble des solutions de l'équation $(2x + 1)(x - 3) = 0$ est	$S = \left\{-\frac{5}{3}; 3\right\}$	$S = \left\{-\frac{5}{3}; 3\right\}$	$S = \emptyset$	$S = \left\{\frac{1}{2}; -3\right\}$
L'équation $x^2 + 4 = 0$	n'admet aucune solution	admet une solution unique	admet deux solutions	a pour solution -2
L'équation $x^2 = 5$	n'admet aucune solution	admet une solution unique	admet deux solutions	a pour solution $2,5$
L'équation $(x^2 + 3)(x - 3) = 0$	n'admet aucune solution	admet une solution unique	admet deux solutions	admet trois solutions

b) Equations dont les membres sont des fractions rationnelles

Exercice de fixation

Exercice 5

- a) Les contraintes sur l'environnement sont : $x \in \mathbb{R}$
 $3x + 2 = 4x - 7$;
 $x = 9$, donc $S_{\mathbb{R}} = \{9\}$.
- b) Les contraintes sur l'environnement sont : $x \in \mathbb{R} - \{1\}$
 $(x - 1)(2x - 7 - 2 + x) = 0$
 $x = 1$ ou $x = 3$; donc $S_{\mathbb{R}} = \{3\}$.
- c) Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{5}\right\}$, on a :
 $\frac{x+1}{5x-1} = 1 \Leftrightarrow x + 1 = 5x - 1$
 $\Leftrightarrow 4x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$. Donc $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.
- d) Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$,
 $\frac{1}{x+1} = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow x = -x - 1$
 $\Leftrightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$. Donc $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$
- e) Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$,
 $\frac{x-1}{x+1} = \frac{x+2}{x-2} \Leftrightarrow (x - 1)(x - 2) - (x + 2)(x + 1) = 0$
 $x^2 - 3x + 2 - x^2 - 3x - 2 = 0$
 $-6x = 0 \Rightarrow x = 0$. Donc $S_{\mathbb{R}} = \{0\}$.

c) Equations dont les membres comportent des valeurs absolues

Exercice de fixation

Exercice 6

- a) $|x - 5| = -7$. Comme $-7 < 0$, donc $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$.
- b) $|x - 1| = 1 \Leftrightarrow x - 2 = -1$ ou $x - 2 = 1$
 $\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 3$
 $S_{\mathbb{R}} = \{1; 3\}$.
- c) $|x + 3| = 2 \Leftrightarrow x + 3 = 2$ ou $x + 3 = -2$
 $x = -1$ ou $x = -5$

- d) $S_{\mathbb{R}} = \{-1; -5\}$.
 $|2x - 3| = 5 \Leftrightarrow 2x - 3 = 5$ ou $2x - 3 = -5$
 $x = 4$ ou $x = -1$
 $S_{\mathbb{R}} = \{-1; 4\}$
- e) $|5x - 7| = |x - 7| \Leftrightarrow 5x - 7 = x - 7$ ou $5x - 7 = -x + 7$
 $4x = 0$ $6x = 14$
 $x = 0$ $x = +\frac{7}{3}$
 $S_{\mathbb{R}} = \left\{0; \frac{7}{3}\right\}$
- f) $|2x + 1| = |7 - 2x| \Leftrightarrow 2x + 1 = 7 - 2x$ ou $2x + 1 = -7 + 2x$
 $\Leftrightarrow 4x = 6$ ou $1 = -7$ impossible
 $\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$
 $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

2. INEQUATION DANS \mathbb{R}

1. Définition

Exercices de fixation

Exercice 7

1. L (3) ; L (4) ; L (5) .

Exercice 8

$-x - 3 < 2x$ est équivalente à $x > 1$	Faux
$\frac{x-1}{x} \leq 0$ est équivalente à $x \leq 1$	Faux
$2x^2 - 2x + 1 \leq 0$ est équivalente à $\frac{2x}{1+x^2} \geq 1$	Vrai
$(x+2)(x+5) > 0$ est équivalente à $x+2 > 0$ et $x+5 > 0$	Faux
$\frac{x-6}{x^2} > 0$ équivalente à $x > 6$	Vrai

2. Résolutions pratiques d'inéquations

a) **Inéquations liant deux polynômes**

Exercices de fixation

Exercice 9

- a) $2x^2 - x + 1 \leq 5 + 2x^2$
 $-x \leq 4 \Leftrightarrow x \geq -4$
 $S_{\mathbb{R}} = [-4; +\infty[$.
- b) $x^2 - 4x + 4 \geq (1-x)(x-2)$
 $(x-2)^2 - (x-2)(1-x) \geq 0$
 $(x-2)(2x-3) \geq 0$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
$x - 2$	-		0	+
$2x - 3$	-	0	+	+
$(x - 2)(2x - 3)$	+	0	-	0

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty; \frac{3}{2}] \cup [2; +\infty[$.

$$\begin{aligned} \text{c) } & (x^3 + x + 4)^2 > (x^3 - 3x - 4)^2 \\ & (x^3 + x + 4)^2 - (x^3 - 3x - 4)^2 > 0 \\ & (4x + 8)(2x^2 - 2x) > 0 \\ & 8x(x + 2)(x - 1)(x + 1) > 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	$+\infty$	
$8x$	-		-	0	+	+	
$x + 2$	-	0	+	+	+	+	
$x - 1$	-		-	-	0	+	
$x + 1$	-	-	0	+	+	+	
$P(x)$	+	0	-	0	-	0	+

$$S_{\mathbb{R}} =]-\infty; -2[\cup]-1; 0[\cup]1; +\infty[.$$

b) Inéquations liant deux fonctions rationnelles

Exercices de fixation

Exercice 10

a) Pour $x \in \mathbb{R}$, $\frac{2x+7}{3} \leq \frac{x-9}{4} \Leftrightarrow 4(2x + 7) \leq 3(x - 9)$
 $\Leftrightarrow 5x + 55 \leq 0 \Rightarrow x \leq -11$.
 $S_{\mathbb{R}} =]-\infty; -11]$.

b) Pour $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x^2-4}{x^2+1} \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 \leq 0$
 $(x - 2)(x + 2) \leq 0$.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$x - 2$	-		0	+	
$x + 2$	-	0	+	+	
$x^2 - 4$	+	0	-	0	+

$$S_{\mathbb{R}} = [-2; 2].$$

c) $\frac{3x}{2+x} \geq 0$; $x \neq -2$.

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
$3x$	-		-	0	+
$2 + x$	-	0	+	+	+
$\frac{3x}{2+x}$	+		-	0	+

$$S_{\mathbb{R}} =]-\infty; -2[\cup [0; +\infty[.$$

d) $-2 \leq \frac{x+3}{x-1} \Leftrightarrow \frac{3x+1}{x-1} \geq 0$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$	
$3x+1$	0		+	+	
$x - 1$	-		-	0	+
$\frac{3x+1}{x-1}$	+	0	-		+

$$S_{\mathbb{R}} =]-\infty; -\frac{1}{3}] \cup]1; +\infty[.$$

e) $\frac{2}{x-2} \geq \frac{x+1}{x-2} \Leftrightarrow \frac{1-x}{x-2} \geq 0$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$1-x$	$+$	0	$-$	$-$
$x-2$	$-$		0	$+$
$\frac{1-x}{x-2}$	$-$	0	$-$	$-$

$$S_{\mathbb{R}} = [1; 2[.$$

c) *Inéquations dont les membres comportent des valeurs absolues*

Exercices de fixation

Exercice 11

- a) $|x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$
 $S_{\mathbb{R}} = [-1; 1].$
- b) $|x-3| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x-3 \leq 2$
 $-2+3 \leq x \leq 2+3$
 $1 \leq x \leq 5$
 $S_{\mathbb{R}} = [1; 5].$
- c) $|x+3| < 9 \Leftrightarrow -9 < x+3 < 9$
 $-9-3 < x < -3+9$
 $-12 < x < 6$
 $S_{\mathbb{R}} =]-12; 6[.$
- d) $|2x| \leq -1$
 $-1 < 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}, |2x| \geq 0$
 Donc $S_{\mathbb{R}} = \emptyset.$

Exercice 12

- a) $|3x-5| < |x-7| \Leftrightarrow (3x-5)^2 < (x-7)^2$
 $\Leftrightarrow (3x-5)^2 - (x-7)^2 \leq 0$
 $(3x-5-x+7)(3x-5+x-7) \leq 0$
 $(2x+2)(4x-12) \leq 0$
 $8(x+1)(x-3) \leq 0$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$8(x+1)$	$-$	0	$+$	$+$
$x-3$	$-$		0	$+$
$8(x+1)(x-3)$	$+$	0	$-$	$+$

$$S_{\mathbb{R}} = [-1; 3].$$

- b) $|x^2-5x+13| > |6x-15| \Leftrightarrow (x^2-5x+13)^2 - (6x-15)^2 > 0$
 $\Leftrightarrow (x^2-11x+28)(x^2+x-2) > 0$
 $(x-7)(x-4)(x+2)(x-1) > 0$

Posons $H(x) = (x-7)(x-4)(x+2)(x-1).$

Après le tableau de signe de $H(x),$

On donne : $S_{\mathbb{R}} =]-\infty; -2[\cup]1; 4[\cup]7; +\infty[.$

EXERCICES DE RENFORCEMENT / APPROFONDISSEMENT

Exercice 1

- a) $9x^2 - 4 - (6x + 4)(x - 5) = 0$
 $(3x - 2)(3x + 2) - 2(3x + 2)(x - 5) = 0$
 $(3x + 2)(x + 8) = 0$
 $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{2}{3}; -8\right\}$
- b) $E_V = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}; 3\right\}$
 $\frac{6x^2+x+2}{2x+3} = \frac{3x^2-x-2}{x-3}$
 $(x-3)(6x^2+x+2) = (2x+3)(3x^2-x-2)$
 $6x^3+x^2+2x-18x^2-3x-6 = 6x^3-2x^2-4x+9x^2-3x-6$
 $-17x^2+2x=7x^2-4x$
 $-24x^2-6x=0$
 $-6x(4x+1)=0$
 $x=0$ ou $x=-\frac{1}{4}$. $S_{\mathbb{R}} = \left\{0; -\frac{1}{4}\right\}$.
- c) $E_V = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$
 $\left(\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+2}{x-2}\right) \left(\frac{x-1}{x+1} + \frac{x+2}{x-2}\right) = 0$
 $\left(\frac{x^2-3x+2-x^2-3x-2}{(x+1)(x-2)}\right) \left(\frac{2x^2+4}{(x+1)(x-2)}\right) = 0$
 $\left(\frac{-6x}{(x+1)(x-2)}\right) \left(\frac{2x^2+4}{(x+1)(x-2)}\right) = 0$
 $x=0$ ou $2x^2+4=0$ (*impossible*)
 $S_{\mathbb{R}} = \{0\}$.
- d) $E_V = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$
 $\frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 3 \Leftrightarrow \frac{x-1}{-1} = 3$
 $x-1 = -3; \quad x = -2 \quad S = \{-2\}$.

Exercice 2

- a) $E_V = \mathbb{R} \setminus \{-2; 0\}$
 $\frac{3}{x+2} - \frac{1}{3x} \leq 0$
 $\frac{9x-x-2}{3x(x+2)} \leq 0$
 $\frac{2(4x-1)}{3x(x+2)} \leq 0$.

x	$-\infty$	-2	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$2(4x-1)$	-	-	-	-	+
$3x$	-	-	0	+	+
$x+2$	-	0	+	+	+
$\frac{2(4x-1)}{3x(x+2)}$	-		+	-	+

- $S_{\mathbb{R}} =]-\infty; -2[\cup]0; \frac{1}{4}[$
- b) $E_V = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
 $\frac{2x-1}{2-x} - \frac{3}{4-2x} > 0$
 $\frac{(2x-1)(4-2x)-3(2-x)}{(2-x)(4-2x)} > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{4x-5}{4-2x} > 0.$$

x	$-\infty$	$\frac{5}{4}$	2	$+\infty$
$4x-5$	-	0	+	+
$4-2x$	-		-	0
$\frac{4x-5}{4-2x}$	+	0	-	+

$$S_{\mathbb{R}} =]-\infty; \frac{5}{4}[\cup]2; +\infty[.$$

c) $E_V = \mathbb{R}$

$$\frac{(x+1)^2}{2x^2+1} - \frac{1}{2} \leq 0$$

$$\frac{2(x^2+2x+1)-2x^2-1}{2(2x^2+1)} \leq 0$$

$$\frac{4x+1}{2(2x^2+1)} \leq 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}, 2(2x^2+1) > 0.$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
$4x+1$	-	0	+

$$S_{\mathbb{R}} =]-\infty; -\frac{1}{4}[.$$

Exercice 3

1. On a : $2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} - 3 = 2 \times \frac{27}{8} - \frac{9}{4} - \frac{9}{2}$
 $= \frac{27}{4} - \frac{9}{4} - \frac{18}{4} = 0$ donc $\frac{3}{2}$ est solution de (E).

2. $2x^3 - x^2 - x - 3 = \left(x - \frac{3}{2}\right)(2x^2 + 2x + 2)$
 $= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x^2 + x + 1).$

(E) $\Leftrightarrow x - \frac{3}{2} = 0$ ou $x^2 + x + 1 = 0$

$x = \frac{3}{2}$ $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{3}{2}\right\}$. impossible car $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ et $\frac{3}{4} > 0.$

Exercice 4

1. On a : $2(5)^2 - 9(5) - 5 = 50 - 45 - 5 = 0$; donc 5 est solution de l'équation
 $2x^2 - 9x - 5 = 0.$

2. (E) $\Leftrightarrow x(x-2)(2x^2 - 9x - 5) = 0$
 $\Leftrightarrow x(x-2)(x-5)(2x+1) = 0$

$S_{(E)} = \left\{-\frac{1}{2}; 0; 2; 5\right\}.$

3. $E_V = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$

(I) $\Leftrightarrow x \in E_V, \frac{x(x-2)(x-5)(2+1)}{(x-2)(x+2)} \leq 0 \Leftrightarrow x \in E_V, \frac{x(x-5)(2x+1)}{x+2} \leq 0.$

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	2	5	$+\infty$
x	-	-	-	0	+	+	+
$(x-5)$	-	-	-	0	-	-	0
$2x+1$	-	-	0	+	+	+	+
$x+2$	-	0	+	+	+	+	+
$H(x)$	+	-	0	+	0	-	-

$$\text{D'où } S =]-2; -\frac{1}{2}] \cup [0; 2[\cup]2; 5].$$

Exercice 5

Soit x le nombre d'années cherché. On a :

$$15 + x = 2(x + 5) \text{ d'où } 15 + x = 2x + 10. \text{ Donc } x = 5 \text{ ans.}$$

Exercice 6

$$1. \text{ On a : } 45000 \left(1 + \frac{t}{100}\right) \left(\frac{t+2}{100}\right) = 4860$$

$$(100 + t)(t + 2) = 1080$$

$$t^2 + 102t - 880 = 0$$

$$2. P(t) = t^2 + 102t - 880$$

$$= (t + 51)^2 - (51)^2 - 880$$

$$P(t) = (t + 51)^2 - 3481.$$

$$3. t^2 + 102t - 880 = 0$$

$$(t + 51)^2 - 3481$$

$$(t + 51)^2 - 59^2 = 0$$

$$(t - 8)(t + 110) = 0$$

$$t = 8 \text{ ou } t = -110.$$

Comme $t > 0$, alors $t = 8$.

Exercice 7

On a : Prix de revient = Frais de fabrication + frais de location

$$300x + 100000 < 750x$$

$$450x > 100000$$

$$x > 222,222.$$

Ainsi, le nombre minimum de manuels à imprimer pour que le prix de revient d'un manuel soit inférieur à 750 F est : 223.

SITUATIONS COMPLEXES

Exercice 8

$$1. \text{ On a : } \frac{15}{100} + \frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{3}{20} + \frac{2}{5} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3}{20} + \frac{8}{20} + \frac{5}{20}$$

$$= \frac{16}{20}$$

2. Soit x le nombre total de point du devoir.

Méthode 1 : $\frac{15}{100}x + \frac{2}{5}x + \frac{1}{4}x + 6 = x$

$$15x + 40x + 25x + 600 = 100x$$

$$20x = 600$$

$$x = 30.$$

Le devoir est noté sur 30.

Méthode 2 : $\frac{16}{20} + \frac{6}{x} = 1$ avec $x > 0$.

$$16x + 120 = 20x$$

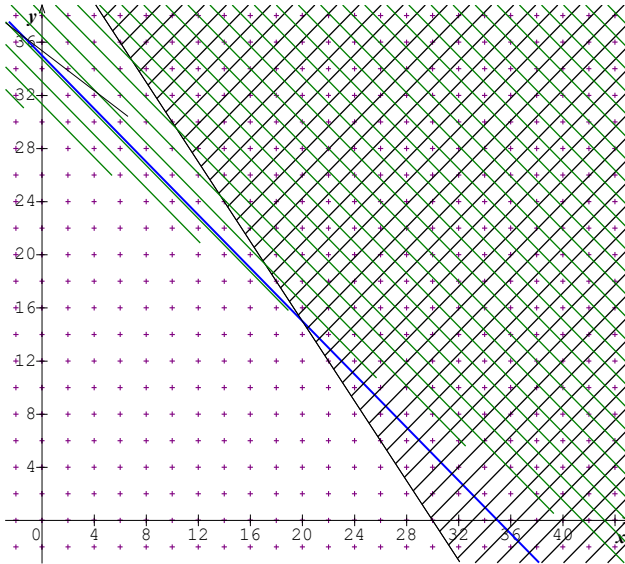
$$x = 30. \text{ Le devoir est noté sur 30.}$$

Remarque : les exercices 9, 10 et 11 peuvent être renvoyés dans la leçon 15 : Inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Exercice 9

$$1. \quad 1) \quad \begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ y \in \mathbb{N} \\ 12x + 8y \leq 360 \\ 1500x + 2000y \leq 60\,000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ y \in \mathbb{N} \\ 3x + 2y \leq 90 \\ 3x + 4y \leq 120 \end{cases}$$

2) Représentation des solutions de ce système :



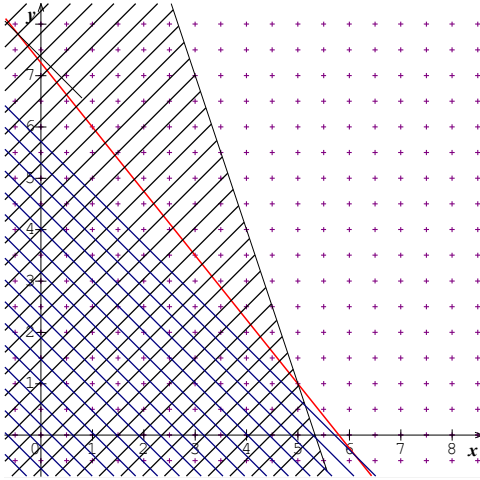
Pour réaliser le bénéfice maximum, l'équipe doit produire 20 fûts de peinture à eau et 15 fûts de peinture à huile par jour.

Exercice 10

Traduisons cette situation en un système d'inéquations :

$$\begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ y \in \mathbb{N} \\ 1,5x + 0,5y \geq 8 \\ x + y \geq 6 \end{cases}$$

Représentons les solutions du système :



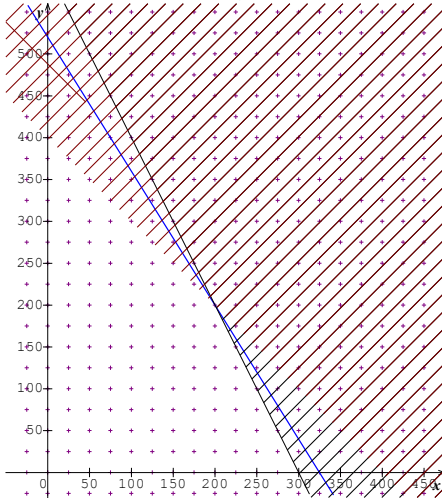
La présidente doit commander 5 sacs d'aliment du type A et 1 sac d'aliment du type B pour réaliser la dépense minimale qui sera alors de 5 800 F par semaine.

Exercice 11

1) Le système d'inéquations traduisant cette situation est :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 600 \\ x + y \leq 400 \end{cases}$$

La représentation des solutions de ce système est :



Le chiffre d'affaires maximal est atteint pour 200 grosses voitures et 200 petites voitures produites. Le chiffre d'affaires est alors de 5 200 000 euros.

2) Si le stock d'acier est de 700 unités, le chiffre d'affaires maximal est alors atteint pour 300 grosses voitures et 100 petites voitures produites. Ce chiffre d'affaires est de 5 800 000 euros.

Pour 100 unités d'acier supplémentaires, le chiffre d'affaires a une augmentation de 6 000 euros. Donc, en moyenne, l'augmentation d'une unité d'acier produit une augmentation de 60 euros sur le chiffre d'affaires.

RÉSUMÉ DE COURS – EXERCICES DE FIXATION

1. DÉFINITION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

1. Définition

Exercices de fixation

Exercice 1

On appelle homothétie de centre O et de rapport k , l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M du plan, associe le point M' du plan tel que : $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

Exercice 2

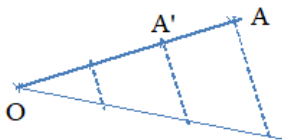
- U est l'image de T par l'homothétie de centre E et de rapport -2 .
- R est l'image de M par l'homothétie de centre P et de rapport $\frac{4}{3}$.
- B est l'image de A par l'homothétie de centre Ω et de rapport $\sqrt{5}$.

Exercice 3

Placer l'image.

Exercice 4

$$\overrightarrow{OA'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$$



2. Alignement de points et homothétie

Exercice de fixation

Exercice 5

1. B est l'image de A par une homothétie de centre C car A , B et C sont alignés.
- B n'est pas l'image de A par une homothétie de centre C car A , B et C ne sont pas alignés.
- B est l'image de A par une homothétie de centre C car A , B et C sont alignés.

3. Point invariant

Exercice de fixation

Exercice 6

- 1 \rightarrow Faux ; 2 \rightarrow Vrai ; 3 \rightarrow Vrai.

4. Propriété fondamentale

Exercices de fixation

Exercice 7

Si P et Q sont des points distincts d'images respectives R et S par une homothétie de rapport l , alors $\overrightarrow{RS} = l\overrightarrow{PQ}$.

Exercice 8

1 → Faux ; 2 → Faux ; 3 → Faux ; 4 → Vrai.

Exercice 9

$\overrightarrow{A'R} = k\overrightarrow{AB}$
 $R \in (OB)$ et $(A'R) \parallel (AB)$.

Exercice 10

$\overrightarrow{SM} = 2\overrightarrow{KN}$.

Exercice 11

$\overrightarrow{MK} = k\overrightarrow{AC} \Rightarrow (MK) \parallel (AC)$
 $\overrightarrow{NK} = k\overrightarrow{BC} \Rightarrow (NK) \parallel (BC)$.

2 IMAGES DE FIGURES SIMPLES

Exercices de fixation

Exercice 12

Construction.

Exercice 13

Construction

Exercice 14

Construction

Exercice 15

1. Le périmètre du quadrilatère orange est : $P' = 3P = 24 \text{ cm}$.
2. L'aire du rectangle orange est : $A' = 9A = 72 \text{ cm}^2$.

Exercice 16

1.	Le rayon de (C') est	$\frac{1}{2}$	F
		-1	F
		1	V
2.	(C) et (C') sont tangentes.		F
3.	Le centre de (C') est distinct de O		V
4.	(C) et (C') sont confondus.		V

Exercice 17

- a) C' est le cercle de centre O et de rayon $3r$.
- b) C' est le cercle de centre $h(O)$ et de rayon $\frac{1}{2}r$.

3. PROPRIETES DE CONSERVATION

Exercices de fixation

Exercice 18

1-V ; 2-F ; 3(F ; V ; F) ; 4-V ; 5-F ; 6(F ; F ; V)

Exercice 19

1.

Point	R	A	M	I	P
Image par h.	L	E	B	O	T

$$2. \text{mes}(\widehat{LE, LO}) = \text{mes}(\widehat{RA, RI}) = 83^\circ.$$

$$\text{mes}(\widehat{OB, OL}) = \text{mes}(\widehat{IM, IR}) = -52^\circ.$$

4. CARACTERISTIQUES D'UNE HOMOTHETIE

- 1) Homothétie caractérisée par son centre, un point et son image
- 2) Homothétie caractérisée par son rapport, un point et son image
- 3) Homothétie caractérisée par deux points distincts et leurs images

Exercice de fixation

Exercice 20

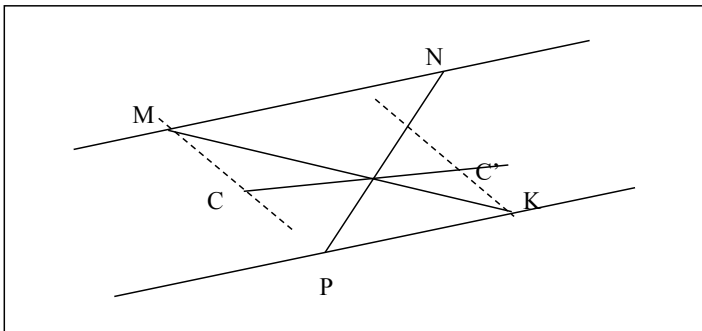
Les points A, C et A' sont alignés, donc il existe une homothétie h de centre C telle que $h(A) = A'$.

De même, $h(D) = D'$ et $h(B) = B'$.

Conclusion : Il existe une homothétie de centre C qui transforme le parallélogramme ABCD en le parallélogramme A'B'CD'.

Son rapport est : $k = \frac{CB'}{CB} = \frac{1}{3}$.

Exercice 21



EXERCICES DE RENFORCEMENT – APPROFONDISSEMENT

Exercice 1

1-F ; 2-V ; 3-F ; 4-V ; 5-V ; 6-F ; 7-F

Exercice 2

1-F ; 2-V ; 3-F ; 4-V

Exercice 3

Construction

Exercice 4

a) $\vec{AC} = 2\vec{AB}$.

Donc $k = 2$.

b) $4\vec{CA} + 3\vec{AB} = \vec{0}$

$\vec{AC} = \frac{3}{4}\vec{AB}$.

Donc : $k = \frac{3}{4}$.

Exercice 5

Soit h cette homothétie.

$h(F) = C$ et $h(B) = A$.

Exercice 6

Soit $h = h_{(A,2)}$

D'une part B, O et D sont alignés.

D'autre part, $h(B) = B'$, $h(O) = C$, et $h(D) = D'$.

Donc B', C et D' sont alignés.

Exercice 7

$\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ et $\vec{AN} = \frac{1}{3}\vec{AC}$

donc $h(B) = M$ et $h(C) = N$ où $h = h_{(A, \frac{1}{3})}$.

Comme I est le milieu de [BC] et J le milieu [MN], on a : $h(I) = J$.

Par conséquent A, I et J sont alignés.

Exercice 8

Soit $h = h_{(A, \frac{1}{2})}$. On a : $M' = h(M)$.

Lorsque M décrit (C), M' décrit $h((C))$ qui est le cercle de diamètre [AO].

Exercice 9

1. $h(A) = D$, $h(B) = C$, I milieu de [DC] et J = milieu [AB].

Donc $h(J) = I$ et donc O, I et J sont alignés.

2. $h'(C) = A$, $h'(D) = B$, I milieu de [DC] et J = milieu [AB].

Donc $h'(I) = J$ et donc $O' \in (IJ)$.

Or $O \in (IJ)$, donc $O' \in (OI)$.

Exercice 10

Soit k le rapport de h , on a : $k = \frac{O'A'}{r} = \frac{r'}{r}$.
 Si $r = 1,5$, alors $r' = 1,5 k$.

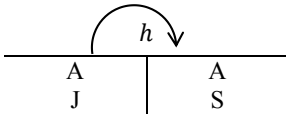
Exercice 11

Construction

(ou n° 8) suite)

Exercice 12

$h(I) = \mathbb{R}$



2.

$$\left. \begin{array}{l} * h(IJ) = (RS) \\ * O \in (IJ) \\ * N \in (RS) \\ * A, O, N \text{ alignés} \end{array} \right\} \Rightarrow h(O) = N$$

3. Soit k le rapport de h

$$k = \frac{AN}{AO} = 2 \text{ car } AINJ \text{ est un rectangle de centre } O.$$

$$4. h(I) = R \Rightarrow \overrightarrow{AR} = 2\overrightarrow{AI} \Rightarrow I = \text{mil}[RA]$$

$$h(J) = S \Rightarrow \overrightarrow{AS} = 2\overrightarrow{AJ} \Rightarrow J = \text{mil}[SA].$$

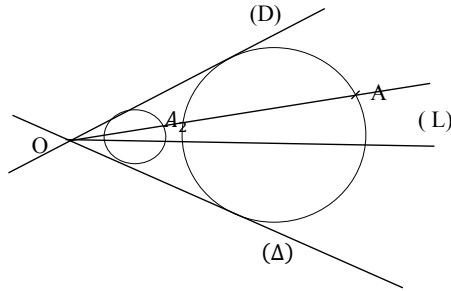
Exercice 13

Programme de construction :

- Construis la bissectrice (L) de l'angle de sommet O déterminé par les droites (D), (Δ) et contenant le point A.
- Choisis un point O_1 sur (L)
- Tracer le cercle (\mathcal{C}_1) de centre O_1 et tangent à (D) ;
- Trace la droite (OA). Cette droite coupe (\mathcal{C}_1) en deux points A_1 et A_2
- On considère l'homothétie h de centre O qui applique A_1 ou A_2 sur A
- $h(O_1) = O_2$ et soit (C) le cercle de centre O_2 passant par A
- $h(\mathcal{C}_1) = (C)$

Justification :

(C) passe par A et est tangent à $h((D))$ et $h((\Delta))$ or $h((D)) = (D)$ et $h((\Delta)) = (\Delta)$



Exercice 14

1. Pour $k = \frac{1}{2}$ on a

$$\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{2} \overrightarrow{MA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{MB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{MC} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \frac{3}{2} \overrightarrow{MG}$$

où le point G est tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

d'où $\overrightarrow{MM'} = \frac{3}{2} \overrightarrow{MG}$
 donc $\overrightarrow{GM'} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{GM}$

f est donc l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$

2. G est le centre de gravité du triangle ABC

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AA'} \quad \text{d'où} \quad \overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{GA} \quad \text{donc} \quad f(A) = A'$$

De même $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$

Par suite l'image du triangle ABC par homothétie f est le triangle $A'B'C'$.

3. Pour $k = -1$

$$\text{on a } \overrightarrow{MM'} = -\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{MB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{MC} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \overrightarrow{AA'}$$

$$\text{donc } \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$$

par suite f est une translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$

SITUATIONS COMPLEXES

Erratum : considérer $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{5} \overrightarrow{AC}$ au lieu de $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AC}$. Prendre pour échelle $\frac{1}{2000}$ au lieu de $\frac{1}{20}$

ABC est un triangle rectangle en A tel que : $AB = 80$ mètres et $AC = 250$ mètres.

$$\text{L'aire du triangle ABC est } A_{ABC} = \frac{80 \times 250}{2} = 10\,000 \text{ m}^2$$

$$\text{On a : } AE = \frac{1}{5} AC \quad \text{donc : } AE = \frac{250}{5} = 50$$

$$\text{D'où l'aire du carré AEFK est : } A_{AEFK} = 2\,500 \text{ m}^2$$

$$\text{On a : } \frac{2500}{10000} = 0,25$$

L'affirmation de Gbessa est par conséquent fausse.

1) Construction du carré AEFK

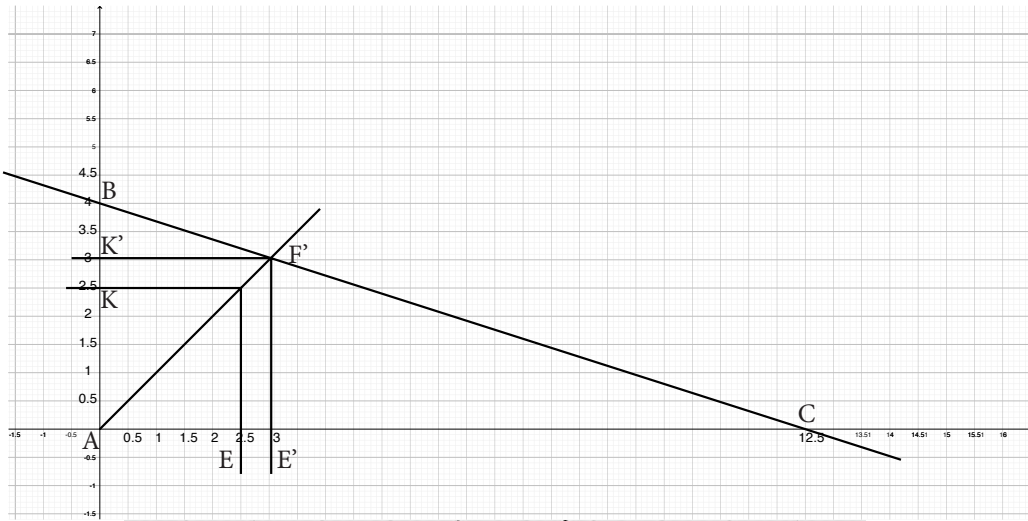
Construis le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{5} \overrightarrow{AC}$

Construis le point K tel que $AK = AE$ et $K \in [AB]$

Construis le point F point d'intersection des perpendiculaires respectives à (AC) et (AB) passant par E et K.

Construction du carré AE'F'K'

On obtient le carré AE'F'K' en utilisant l'homothétie de centre A qui applique F sur F'



3) Pour déterminer celui qui a le champ ayant la plus grande superficie, calculons le rapport k de l'homothétie h . On a : $k = \frac{AF'}{AF}$

En choisissant le cm comme unité, à l'échelle 1/2000, on a : $AC = 12,5$ et $AB = 4$.

On peut chercher analytiquement une solution au problème en munissant le plan d'un repère orthonormé (A, I, J) tel que : $AI = AJ = 1$. Dans ce repère On a : $B(0 ; 4)$ et $C(12,5 ; 0)$. $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{5} \overrightarrow{AC}$ donc $E(2,5 ; 0)$. Le point F est sur la première bissectrice donc $F(2,5 ; 2,5)$.

$AF^2 = AE^2 + EF^2$ donc $AF = 2,5\sqrt{2}$.

Déterminons les coordonnées du point F'. Le point F' est le point d'intersection de la droite (BC) et de la droite d'équation $y = x$. Une équation de la droite (BC) après calcul donne : $y = -0,32x + 4$.

Après calcul, on a : $F'(\frac{100}{33} ; \frac{100}{33})$; donc $AF' = \frac{100}{33}\sqrt{2}$. On a donc : $k = \frac{40}{33}$

D'où l'aire du carré AE'F'K' est : $(\frac{40}{33})^2 \times 2500$ soit environ 3673. Ainsi l'aire de la parcelle attribué à Kouamé est égal à environ : $10000 - 3673$ soit environ 6327. Kouamé a donc le terrain le plus grand

RÉSUMÉ DE COURS – EXERCICES DE FIXATION

1. FONCTION AFFINE PAR INTERVALLES

Définition

Exercices de fixation

Exercice 1

Affirmations	Vrai	Faux
La fonction f est une fonction affine par intervalles.	X	
La fonction g est une fonction affine par intervalles.		X
La fonction h est une fonction affine par intervalles.	X	
La fonction i est une fonction affine par intervalles.	X	
La fonction j est une fonction affine par intervalles.		X
La fonction k est une fonction affine par intervalles.		X
La fonction l est une fonction affine par intervalles.		X
La fonction m est une fonction affine par intervalles.	X	
La fonction n est une fonction affine par intervalles.	X	

Exercice 2

Signe de $3x - 4$.

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$3x - 4$	-	0	+

Pour $x \in]-\infty; \frac{4}{3}]$, $3x - 4 \leq 0$.Pour $x \in \frac{4}{3}; +\infty[$, $3x - 4 > 0$.

Donc
$$\begin{cases} g(x) = -3x + 4, & \text{pour } x \in]-\infty; \frac{4}{3}] \\ g(x) = 3x - 4, & \text{pour } x \in \frac{4}{3}; +\infty[\end{cases}$$

D'où g est une fonction affine par intervalles.

Exercice 3

$$f(x) = |-x + 5|$$

x	$-\infty$	5	$+\infty$
$-x + 5$	+	0	-
$ -x + 5 $	$-x + 5$		$x - 5$

Pour $x \in]-\infty; 5]$, $f(x) = -x + 5$;Pour $x \in]5; +\infty[$, $f(x) = x - 5$.Donc f est une fonction affine par intervalles.

2. FONCTION PARTIE ENTIÈRE

Définition

Exercice de fixation

Exercice 4

$20 \leq 20,19 < 21$, donc $E(20,19) = 20$.

$-4 \leq -3,6 < -3$, donc $E(-3,6) = -4$.

$-1 \leq -1 < 0$, donc $E(-1) = -1$.

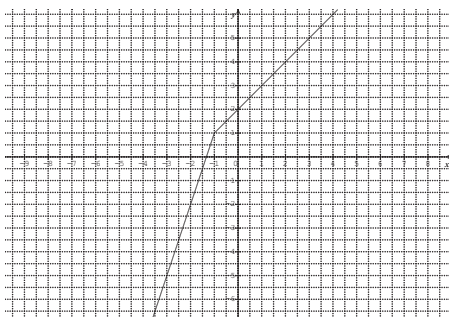
3. ÉTUDE DE QUELQUES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

Exercice de fixation

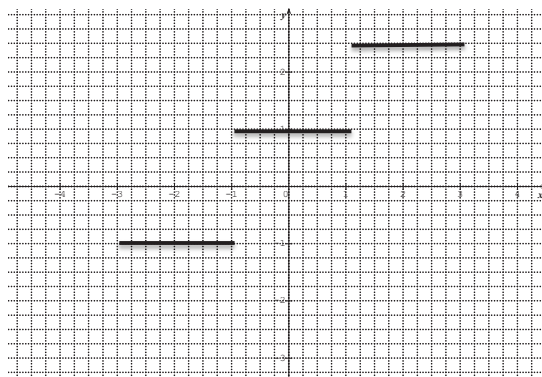
Exercice 5

- i. $1 \rightarrow d$; $2 \rightarrow c$; $3 \rightarrow e$; $4 \rightarrow b$; $5 \rightarrow a$.

Exercice 6



Exercice 7



Exercice 8

1. $D_g = \mathbb{R}$
2. g est croissante sur $]-\infty; -2]$ et sur $[3; +\infty[$
 g est décroissante sur $]-2; 1]$

g est constante sur $]1; 3[$

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
$g(x)$					

Courbe.

Exercice 9

f est croissante sur \mathbb{R} .

g est constante sur \mathbb{R} .

$$h(x) = \frac{4-5x}{3}$$

$$h(x) = \frac{4}{3} - \frac{5}{3}x$$

h est décroissante sur \mathbb{R} .

$$k(x) = \frac{x+1}{-2}$$

$$= -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

k est décroissante sur \mathbb{R} .

Exercice 10

1. Sens de variation de f .

Soient a et b deux réels tels que : $a < b$.

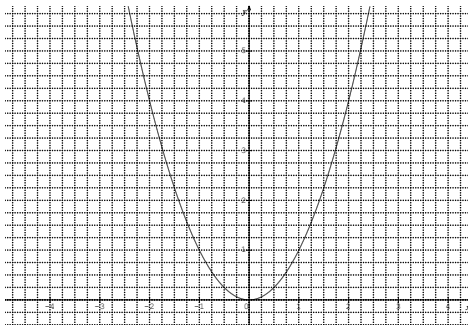
Si $a \in]-\infty; 0]$ et $b \in]-\infty; 0]$ alors $a < b \Rightarrow a^2 > b^2$;
 donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$.

Si $a \in [0; +\infty[$ et $b \in [0; +\infty[$ alors $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$;
 donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

2. Tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

3.



Exercice 11

1. a et b sont deux réels tels que $a < b$.

Comparons a^3 et b^3 .

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$


$$\begin{aligned} \text{Or } a^2 + ab + b^2 &= \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + b^2 \\ &= \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + b^2 \\ &= \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4b^2}{4}\right) \\ &= \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4}; \end{aligned}$$

Donc $a^2 + ab + b^2 > 0$ d'où le signe de $a^3 - b^3$ est celui de $a - b$.

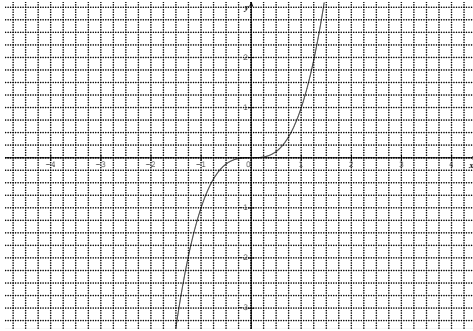
Par conséquent, $a < b \Rightarrow a^3 < b^3$.

Alors, f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

2. Tableau de variation.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		

- 3.



EXERCICES DE RENFORCEMENT – APPROFONDISSEMENT

Exercice 1

1. $E(-4, 1) = -5$ $E(\sqrt{2}) = 1$ $E\left(-\frac{1}{3}\right) = -1$

$E(0, 7) = 0$ $E(\pi) = 3$

2. Les antécédents de -6 sont les réels x tels que $x \in [-6; -5[$

Les antécédents de 0 sont les réels x tels que $x \in [0; 1[$

Les antécédents de 2 sont les réels x tels que $x \in [2; 3[$.

3. $x \in \mathbb{R}$, $E(x) = 3$

$x \in [3; 4[$.

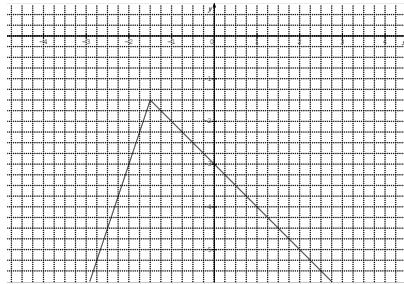
$S_{\mathbb{R}} = [3; 4[$.

Exercice 2

$$\begin{cases} f(x) = 3x + 3, & \text{Pour } x \in]-\infty; -\frac{3}{2}] \\ f(x) = -x - 3, & \text{Pour } x \in]-\frac{3}{2}; +\infty[\end{cases}$$

f est croissante sur $x \in]-\infty; -\frac{3}{2}]$
 f est décroissante sur $x \in]-\frac{3}{2}; +\infty[$.

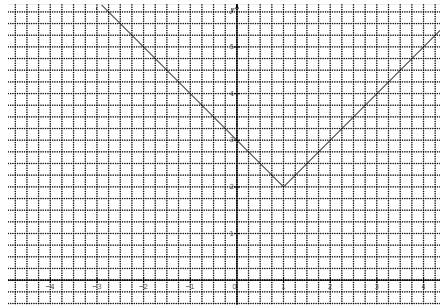
x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)$			



$$\begin{cases} g(x) = 3 - x, & \text{Pour } x \in]-\infty; 1] \\ g(x) = 1 + x, & \text{Pour } x \in]1; +\infty[\end{cases}$$

g est décroissante sur $x \in]-\infty; 1]$
 g est croissante sur $x \in]1; +\infty[$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$			



La fonction h est strictement croissante sur \mathbb{R} .

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, x \in [n; n + 1[, h(x) = x + n.$$

2. courbe

Exercice 3

1. a) $x + 2 < 2x + 3 \Leftrightarrow -1 < x$

b) $\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty; -1[, f(x) = 2x + 3 \\ \text{pour } x \in]-1; +\infty[, f(x) = x + 2 \end{cases}$

2. Courbe

Exercice 4

1. a) $x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x); S_{\mathbb{R}} = \{0\}.$

b) $x \in \mathbb{R}, f(x) < g(x); S_{\mathbb{R}} =]-\infty; 0[.$

2. a) Voir figure.

b) Sens de variation de h et tableau de variations.

Tableau de variation de h .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$			

h est croissante sur $]-\infty; 0]$

h est croissante sur $]0; +\infty[.$

Exercice 5

1. Tracé

2. $g(x) = ax + b$

$$g(-4) = 5 \Leftrightarrow -4a + b = 5$$

$$g(-2) = 1 \Leftrightarrow -2a + b = 1$$

$$\begin{cases} -4a + b = 5 \\ -2a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -2 \text{ et } b = -3$$

$$g(-2) = 1 \Leftrightarrow -2a + b = 1$$

$$g(1) = 3 \Leftrightarrow a + b = 3.$$

$$\begin{cases} -2a + b = 1 \\ a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{2}{3}; b = \frac{7}{3}$$

$$(1) = 3 \Leftrightarrow a + b = 3$$

$$g(5) = -2 \Leftrightarrow 5a + b = -2.$$

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ 5a + b = -2 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{5}{4}; b = \frac{17}{4}$$

$$\text{donc } \begin{cases} g(x) = -2x - 3, \text{ pour } x \in [-4; -2] \\ g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}, \text{ pour } x \in]-2; 1] \\ g(x) = -\frac{5}{4}x + \frac{17}{4}, \text{ pour } x \in]1; 5 \end{cases}$$

Exercice 6

1. $D_f = \mathbb{R}.$

2. Étude de variation

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Si $a \in]-\infty; 0[$ et $b \in]-\infty; 0[$, alors $a < b \Rightarrow \frac{1}{3}a < \frac{1}{3}b$ donc f est croissante sur $]-\infty; 0[$.

Si $a \in]0; +\infty[$ et $b \in]0; +\infty[$, alors $a < b \Rightarrow \frac{1}{3}a < \frac{1}{3}b$, donc f est croissante sur $]0; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

4. a)

x	-4	-2	-1	-0,5	-0,25	-0,25	0,5	1	2	4
$f(x)$	-1,3	-0,66	-0,33	-0,16	-0,08	0,08	0,16	0,33	0,66	1,3

b) courbe.

Exercice 7

1. Ensemble de définition :

$$D_f =]-\infty; 0] \cup]0; 2[\cup [2; +\infty[$$

$$D_f = \mathbb{R}.$$

2. $f(3) = 3 - 5$

$$f(3) = -2$$

$$f(-5) = -(-5) - 5$$

$$f(-5) = 0$$

$$f(0) = -0 - 5$$

$$f(0) = -5.$$

3. Résolvons dans \mathbb{R} , $f(x) = 0$

Pour $x \in]-\infty; 0]$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x - 5 = 0 \Rightarrow x = -5$.

Pour $x \in]0; 2[$, pas de solution.

Pour $x \in [2; +\infty[$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$.

4. Courbe.

Exercice 8

1. Image de chacun des nombres réels :

$$f(-5) = 3(-5) + 8$$

$$f(-5) = -7.$$

$$f(0) = -\frac{8}{7} \times 0 + \frac{10}{7}$$

$$f(0) = \frac{10}{7}.$$

$$f(3) = -1$$

$$f(7) = 2,5 \times 7 - 12.$$

$$f(7) = 5,5.$$

2. a) Sens de variation de f ;

Pour $x \in [-6; -4]$, f est croissante.

Pour $x \in]-4; 3]$, f est décroissante.

Pour $x \in [3; 4]$, 6 est constante.

Pour $x \in]4; 8[$, 6 est croissante.

x	-6	-4	3	4	8
$f(x)$	-10	-4	-1	-1	8

b) Voir papier millimétré (annexe 7).

3. $f(x) = -3 \Rightarrow S = \emptyset$.

$f(x) = -1 \Rightarrow S = [3; 4] \cup \{4, 4\}$.

$f(x) = 0 \Rightarrow S = \{1, 25; 4, 8\}$.

$f(x) = 6 \Rightarrow S = \{7, 2\}$.

$f(x) = 7 \Rightarrow S = \{7, 6\}$.

Exercice 9

1. $D_f = \mathbb{R}$; $D_g = [0; +\infty[$; $D_h = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$
 $D_k = \mathbb{R}$.

2. Étude de variations.

$f(x) = -2x^2 + 3$.

La fonction carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$:

- Si $a \in]-\infty; 0]$ et $b \in]-\infty; 0]$, alors $a < b \Rightarrow a^2 > b^2$;
 $\Rightarrow 2a^2 > 2b^2$
 $\Rightarrow -2a^2 < -2b^2$
 $\Rightarrow -2a^2 + 3 < -2b^2 + 3$.

$a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.

Donc f est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$.

- Si $a \in [0; +\infty[$ et $b \in [0; +\infty[$, alors $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$;
 $\Rightarrow 2a^2 < 2b^2$
 $\Rightarrow -2a^2 > -2b^2$
 $\Rightarrow -2a^2 + 3 > -2b^2 + 3$.

$a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$.

Donc f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		3	

$g(x) = -4\sqrt{x} - 2$


La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

a et b deux réels tels que $a < b$ et $a \geq 0$ et $b \geq 0$.

- $a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$
 $\Rightarrow -4\sqrt{a} > -4\sqrt{b}$
 $\Rightarrow -4\sqrt{a} - 2 > -4\sqrt{b} - 2$

$a < b \Rightarrow g(a) > g(b)$.

Donc g est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f(x)$	-2	

$$h(x) = \frac{2}{x} - 4$$

La fonction inverse est décroissante sur $] -\infty; 0[$ et sur $] -\infty; 0[$.

Soit $a \in] -\infty; 0[$ et $b \in] -\infty; 0[$ tel que $a < b$,

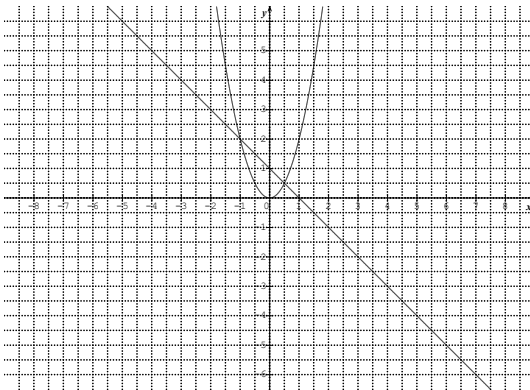
$$\begin{aligned} a < b &\Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \\ &\Rightarrow \frac{2}{a} > \frac{2}{b} \\ &\Rightarrow \frac{2}{a} - 4 > \frac{2}{b} - 4 \\ &\Rightarrow h(a) > h(b). \end{aligned}$$

Donc h est strictement décroissante sur $] -\infty; 0[$

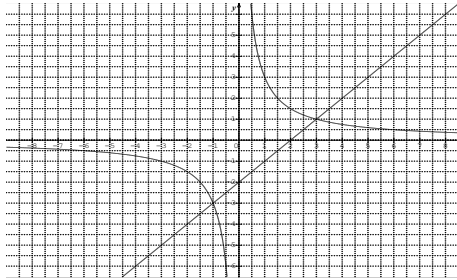
$a \in] -\infty; 0[$ et $b \in] -\infty; 0[$ tel que $a < b$

$$\begin{aligned} a < b &\Rightarrow \frac{2}{a} > \frac{2}{b} \\ &\Rightarrow \frac{2}{a} - 4 > \frac{2}{b} - 4 \\ &\Rightarrow h(a) > h(b), \text{ donc } h \text{ est strictement décroissante sur} \\ &]0; +\infty[. \end{aligned}$$

Exercice 10



$$S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \left\{ \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right); (-1; 2) \right\}$$

Exercice 11


$$S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(3; 1); (-1; -3)\}$$

SITUATIONS COMPLEXES
Exercice 12

a)

$$\begin{cases} f(x) = 0,95x & \text{Pour } x \in [5000; 10000[\\ f(x) = 0,9x & \text{Pour } x \in [10000; 20000[\\ f(x) = 0,9x & \text{Pour } x \in [20000; +\infty[\end{cases}$$

b) Représentation graphique (voir figure).

Exercice 13

 1. Formule 1 : $f(x) = 2000 + 150x$

 Formule 2 : $f(x) = 1000 + 200x$

 Formule 3 : $f(x) = 300x$.

Construction (voir figure).

 Pour $x < 10$ la formule 3 est la plus avantageuse

 Pour $x > 10$ la formule 2 est la plus avantageuse

Exercice 14

 1. $f(x) = 300 + 25x$
 $g(x) = 150 + 75x$

2. Voir figure.

3. 153 minutes correspondent à 2 h 33 min

Formule 1 : Pour 33 minutes de dépassement on a :

$$\begin{aligned} f(33) &= 300 + 25 \times 33 \\ &= 1125. \end{aligned}$$

Formule 2 : Pour 33 minutes de dépassement on a :

$$\begin{aligned} g(33) &= 150 + 75 \times 33 \\ &= 2625. \end{aligned}$$

Donc la formule la plus avantageuse et à choisir pour 153 minutes de corrections est la formule 1.

N.B. : La méthode graphique peut être envisagée.

Exercice 15

$$\begin{cases} f(x) = 110x + 15\,000 & \text{Pour } x \in [1; 50[\\ f(x) = 90x + 25\,000 & \text{Pour } x \in [50; 100[\\ f(x) = 70x + 40\,000 & \text{Pour } x \in [100; +\infty[\end{cases}$$

Pour 85 km, On est entre 50 km et 100 km

Il devrait payer $90 \times 85 + 25\,000$ soit 32650 F

Or il dispose de 30 000 F

La somme n'est donc pas suffisante pour la location d'un véhicule

RÉSUMÉ DE COURS – EXERCICES DE FIXATION

1. ROTATION

1. Définition

2. Cas particuliers

Exercice de fixation

Exercice 1

À cocher la 4^{ème} ligne

Exercice 2

1 - Vrai

2 - Vrai

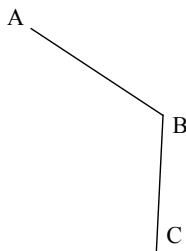
3 - Vrai

4 - Vrai

Exercice 3

1. $\frac{\pi}{3}$; 2. $-\frac{\pi}{3}$; 3. $-\frac{\pi}{3}$

Exercice 4



Exercice 5

$r(A) = B$; $r(B) = C$; $r(C) = D$; $r(D) = A$.

Exercice 6

$r_{(O; \frac{2\pi}{3})}(C) = \dots A \dots$

$r_{(O; -\frac{2\pi}{3})}(A) = \dots C \dots$

$r_{(A; \frac{\pi}{3})}(B) = \dots C \dots$

$r_{(A; \frac{\pi}{3})}(A) = \dots A \dots$

Exercice 7

Affirmations	a	b	c
$r_{(O;\pi)}(G)$ est égale à	A	H	E
$r_{(E;-\frac{\pi}{3})}(G)$ est égale à	G	B	P
$r_{(O;\frac{2\pi}{3})}(G)$ est égale à	E	P	C
$r_{(C;\frac{\pi}{3})}(C)$ est égale à	O	G	C

2. PROPRIÉTÉ D'UNE ROTATION

Exercice de fixation

Exercice 8

$$E'F' = EF = 5 \text{ et } Mes(\widehat{EF, E'F'}) = -\frac{\pi}{12}.$$

3. PROPRIÉTÉS DE CONSERVATION PAR UNE ROTATION

1. Conservation des mesures des angles orientés

Exercices de fixation

Exercice 9

$$Mes(\widehat{EF, GH}) \text{ est égale à : } -\frac{\pi}{5} \square; -\frac{\pi}{7} \square; \frac{\pi}{7} \square; \frac{\pi}{5} \square$$

Exercice 10

$$Mes(\widehat{AD, AE}) = \frac{\pi}{4} \text{ car } \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbb{R} & \\ \hline A & A \\ \hline B & D \\ \hline C & E \\ \hline \end{array} \text{ car } Mes(\widehat{AB, AC}) = Mes(\widehat{AD, AE})$$

2. Conservation du parallélisme et de l'orthogonalité

Exercices de fixation

Exercice 11

1. Construction
2. (D') et (L') sont parallèles car si deux droites sont parallèles, leurs images par une rotation sont aussi parallèles.

Exercice 12

(AB') et $(A'C)$ sont perpendiculaires car l'image par une rotation de deux droites perpendiculaires sont perpendiculaires.

3. Conservation du milieu d'un segment

Exercices de fixation

Exercice 13

L'image de K par r est	B	
	L	X
	K	
	C	

Exercice 14

Soit r la rotation du centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$

r		I est milieu de [BC] et J sur [DC], donc J est l'image de I par r .
B	C	
C	D	

4. Conservation de l'alignement de points.

Exercices de fixation

Exercice 15

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On a

r		E, H et B sont alignés donc leurs images par r sont aussi alignés donc D, J et G sont alignés.
E	G	
H	J	
B	D	

4. IMAGES DE FIGURES SIMPLES PAR UNE ROTATION

1. Image d'une droite

Exercices de fixation

Exercice 16

L'image d'une droite par une rotation est	un segment	
	une demi-droite	
	une droite	X

Exercice 17

Construction.

2. Image d'un segment

Exercices de fixation

Exercice 18

L'image d'un segment par une rotation est	un segment	
	une demi-droite	
	une droite	X

Exercice 19

Construction

3. Image d'une demi-droite

Exercice de fixation

Exercice 20

r	
B	C
A	B
C	D
D	A

L'image par r de $[BA]$ est $[CB]$.

L'image par r de $[CD]$ est $[DA]$.

4. Image d'un cercle

Exercices de fixation

Exercice 21

À cocher la ligne 3

Exercice 22

Construction.

5. CARACTERISATION D'UNE ROTATION

1. Rotation caractérisée par son centre, un point et son image

Exercice de fixation

Exercice 23

$$r(B) = D, \quad AB = AD \quad \text{et} \quad \text{Mes}(\widehat{AB, AD}) = \frac{2\pi}{3}.$$

L'angle de la rotation est $\frac{2\pi}{3}$.

2. Rotation caractérisée par deux points distincts et leurs images

Exercices de fixation

Exercice 24

$$\alpha = \text{Mes}(\widehat{AB, CD}) = \frac{47\pi}{180}.$$

Exercice 25

1. Construction
2. Placer les points
3. Ω est le centre du triangle.

$$\text{Mes}(\widehat{\Omega I, \Omega J}) = \text{Mes}(\widehat{\Omega B, \Omega A}) = \frac{2\pi}{3}.$$

Exercice 26

$AD = AB$ et $AC = AE$ et $\text{Mes}(\widehat{AD, AB}) = \text{Mes}(\widehat{AC, AE})$, donc il existe une rotation que applique D en B et C en E.

Le centre est Ω , intersection des médiatrices des segments $[OF]$ et $[AB]$.

$$\theta = \text{Mes}(\widehat{\Omega A, \Omega B}) = \text{Mes}(\widehat{\Omega O, \Omega F}).$$

3. Rotation déterminée par la donnée de l'angle, un point et son image

Exercices de fixation

Exercice 28

Construction.

Exercice 29

Construction.

EXERCICES DE RENFORCEMENT – APPROFONDISSEMENT

Exercice 1

$$\text{Mes}(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{BE}) = \frac{\pi}{3}$$

Soit la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On a : DC = BE. D'après la propriété de c

r	
C	E
D	B

Exercice 2

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

$r(AC) = (BD)$ et (AC) et (BD) sont perpendiculaires car l'angle de la rotation est $\frac{\pi}{2}$.

r	
A	B
C	D

Exercice 3

Construction.

Exercice 4

Soit K un point tel que AKC sont un triangle équilatéral direct.

K, B et D sont situés sur la médiatrice du segment [DC], donc K, B et D sont alignés. Soit r la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. Comme K, B et D sont alignés alors leurs images aussi sont alignées. Donc A, I et J sont alignés.

r	
C	C
K	A
B	I
D	J

Exercice 5

1. Construction.

2. AB = CD et $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BD}$. Donc il existe une rotation r telle que $r(A) = C$ et $r(B) = D$.

3. $\text{Mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \text{Mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = -\text{Mes}(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{3}$.

Exercice 6

Soit $r = r_{(A; -\frac{\pi}{2})}$. Par r on a :

O	B	A	[BA]
O	A	C	[BA]

$M \in [BA]$ et $N \in [AC]$ tel que $AM = CN$

Par conservation de la distance $r(M) = N$

$$r(M) = N \Leftrightarrow OM = ON \text{ et } \text{Mes}(\widehat{OM}; \widehat{ON}) = -\frac{\pi}{2}$$

Comme l'angle de r est $-\frac{\pi}{2}$ alors (OM) est perpendiculaire à (ON)

Exercice 7

Construction

Exercice 8

1. Détermination :

$$r = R\left(o; \frac{\pi}{2}\right)$$

A	D
B	A
C	B
D	C

2. L'image du segment $[AB]$ est $[DA]$.

B' = mil $[CB]$ donc $r(B') = A'$ car A' = mil $[DC]$

De même

Par suite $(A'C')$ est perpendiculaire à $(D'B')$ et $A'C' = D'B'$

Donc $A'B'C'D'$ est un carré

Exercice 9

L'image de ABI est IBB' . $B' = r(B)$

Exercice 10

- $R(A) = B$; $R(B) = C$; $R(C) = A$.
- I milieu de $[BC]$ et J milieu $[AC]$. Or $R([BC]) = [CD]$. D'après la propriété de conservation des milieux, J est l'image de I par R.

Exercice 11

- Construction.
- $R(B) = B'$ et $\text{Mes}(\widehat{BAB'}) = 80^\circ$ et ABB' est triangle isocèle ; donc $\text{Mes}(\widehat{ABB'}) = 50^\circ$. Or $\text{Mes}(\widehat{CBA}) = 40^\circ$.
On a : $\text{Mes}(\widehat{CBB'}) = 40 + 50 = 90^\circ$; donc (BB') et (BC) sont

perpendiculaires.

3. ACBB' est un quadrilatère dont deux côtés sont parallèles et ayant deux angles droits. Donc ACBB' est un trapèze rectangle.

SITUATIONS COMPLEXES

Exercice 12

Construction.

Exercice 13

Utiliser la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$

Construis (D_2') l'image de (D_2) par r

$$(D_2') \cap (D_1) = \{P_1\}$$

Construis P_2 tel que P_2 est l'image de P_1 par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

$P_2 \in (D_2)$ et le triangle AP_1P_2 est un triangle équilatéral

D'où le résultat.

Construction

RÉSUMÉ DE COURS – EXERCICES DE FIXATION

1. GÉNÉRALITÉS

1. Définition

Exercices de fixation

Exercice 1

1. a) $2x^2 + 5y + 7 \leq 0$; b) $x - y + 9 > 0$
 c) $-3x + y - 19 \geq 0$ d) $8x - 5y + 1 = 0$
 e) $-x + 4xy + 6 \leq 0$; f) $-7x - 8y - 9 < 0$

Exercice 2

Le couple $(-1; 2)$ est solution de l'inéquation : $3x + 2y + 5 \leq 0$	F
Le couple $(0; 0)$ est solution de l'inéquation : $2x - 3y + 12 > 0$	V
Le couple $(-3; 4)$ est solution de l'inéquation : $5x + 6y - 6 \geq 0$	V
Le couple $(1; 5)$ est solution de l'inéquation : $-4x + 3y - 10 < 0$	F
Le couple $(-2; -9)$ est solution de l'inéquation : $7x - y + 7 \geq 0$	V

2. Régionnement du plan par une droite

Exercices de fixation

Exercice 3

1-4 ; 2-4 ; 3-3

Exercice 4

Construction.

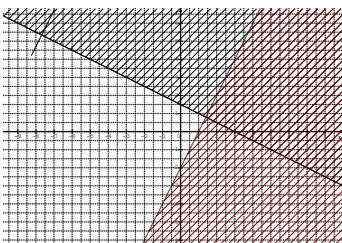
2. SYSTEME D'INEQUATION DU PREMIER DEGRE DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

1. Définition

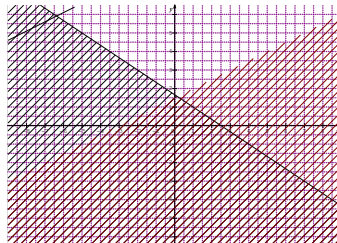
Exercices de fixation

Exercice 5

a)

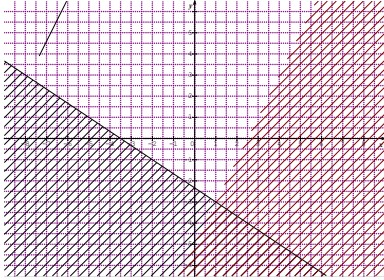


b)

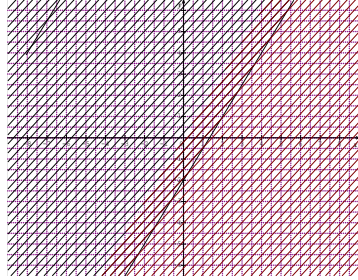


Exercice 6

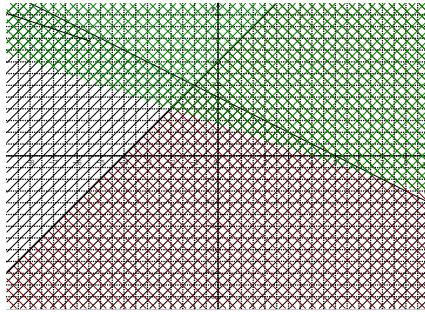
a)



b)



Exercice 7



Exercice 8

- Soit x le nombre de cacaoyers et y le nombre de caféiers.
On a : $0,7x + 0,5y \leq 11$.
- Soit x le nombre de jours où il fait la peinture et y le nombre de jours où il fait du carrelage.
On a : $17000x + 12000y > 65000$.

Exercice 9

- Soit x le nombre de sacs de 10 kg et y le nombre de sacs de 25 kg.

$$\text{On a : } \begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 5 \\ 10x + 25y \leq 300 \\ 6000x + 14000y \leq 150000 \end{cases}$$

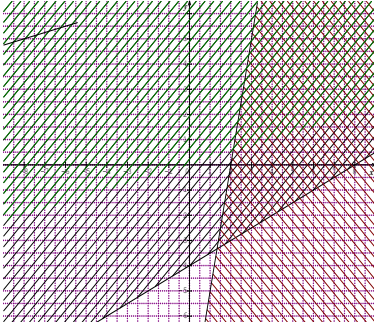
- Soit x le nombre de bateaux de type A et y le nombre de bateaux de type B. On a :

$$\begin{cases} x \leq 30 \\ y \leq 35 \\ 10x + 25y \leq 300 \\ 6000x + 14000y \leq 150000 \end{cases}$$

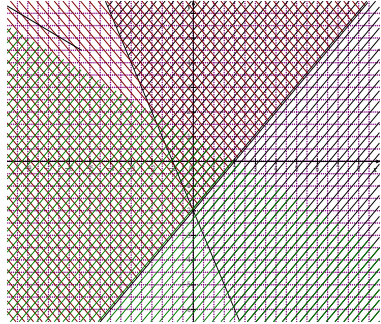
EXERCICES DE RENFORCEMENT – APPROFONDISSEMENT

Exercice 1

a)



b)



Exercice 2

Soit x le nombre de pots à la vanille et y le nombre de pots à la menthe.

$$\begin{cases} x + y = 45 \\ 200x + 250y = 9900. \end{cases}$$

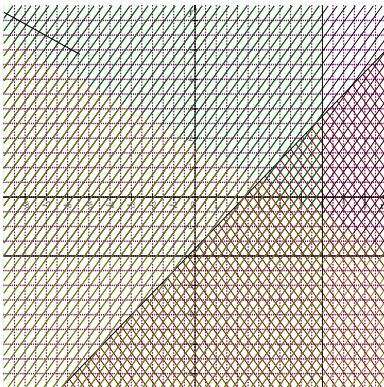
Exercice 3

(AB) : $x - y + 4 = 0$; (AC) : $x + y + 1 = 0$ et (BC) : $x + 4y - 11 = 0$.

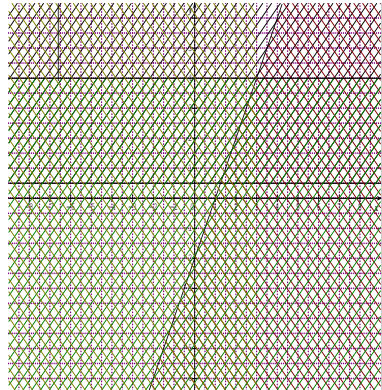
$$\begin{cases} x - y + 4 < 0 \\ x + y + 1 > 0 \\ x + 4y - 11 < 0 \end{cases}$$

Exercice 4

a)



b)

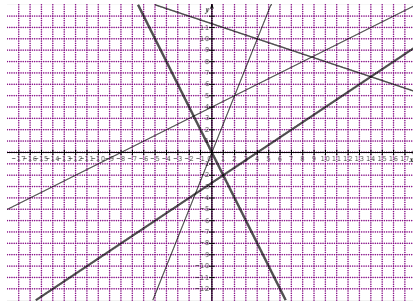


Exercice 5

1.
$$\begin{cases} x + 3y - 17 \leq 0 \\ 2x - y - 13 \leq 0 \\ 3x + 2y - 16 \geq 0 \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} -x + 4y - 19 \leq 0 \\ 3x - 2y - 17 \leq 0 \\ 5x + 8y - 17 \geq 0 \\ x + 2y - 11 \leq 0 \end{cases}$$
3.
$$\begin{cases} 3x - 4y - 8 \geq 0 \\ x + y - 7 \leq 0 \\ 3x + y - 11 \geq 0 \end{cases}$$
4.
$$\begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq -1 \\ x - 2y + 3 \geq 0 \\ x + y - 3 \leq 0 \end{cases}$$

Exercice 6

1.



2. il y'a 7 couples

Exercice 7

Soit x le nombre de chaises en plastique et y le nombre de chaises en bois.

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq x \\ 6000x + 12000y \leq 90000 \end{cases}$$

Il y a 12 possibilités d'achats :

(x, y) entiers tels que $M(x, y)$ appartient au triangle ou à son bord.

- 1) 1. Construction
 2. On compte 33 solutions (x, y) pour lesquelles x et y sont deux ()
 Nombres entiers.

SITUATIONS COMPLEXES

Exercice 8

1. Soit x la masse en kg de produit A et y la masse en kg de produit B fabriquée par jour

$$\begin{cases} y \geq 200 \\ 30x + 10y \leq 2200 \\ \frac{x}{100} + \frac{2y}{100} \leq 16 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 300 \\ y \geq 200 \\ 3x + y \leq 220 \\ x + 2y \leq 1600 \end{cases}$$

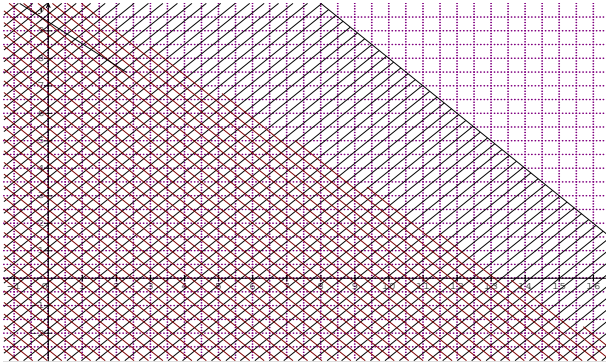
2. construction

3. $x + y$ est maximum pour $(400, 600)$; $(600, 400)$; $(500, 500)$

Exercice 9

Soit x le nombre de cars de 40 places et y le nombre de cars de 50 places.

$$\begin{cases} x + y \leq 18 \\ 40x + 50y \leq 540 \end{cases}$$



Il faut commander x cars de 40 places et y cars de 50 places tels que le point de coordonnées (x, y) appartienne à la partie hachurée de la figure.

DEVOIR DE NIVEAU

CORRIGE DEVOIR DE NIVEAU 1

Exercice 1

1- Faux ; 2-vrai ; 3-vrai ; 4- vrai ; 4- vrai ; 6- vrai

Exercice 2

$1 \rightarrow 5\sqrt{3}$; $2 \rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $3 \rightarrow$ un nombre réel ; $4 \rightarrow 1$; $5 \rightarrow 1$

Exercice 3

1)

S_I	
(BC)	(AD)
(IE)	(IE)

E est l'intersection des droites (BC) et (IE), donc E' image de E est l'intersection des droites (AD) et (IE).

On marque E' est l'intersection des droites (AD) et (IE).

2) On trace (IF) et soit F' l'intersection de (IF) et (AB).

Soit $(\Delta') = (E'F')$

3) Construction (D')

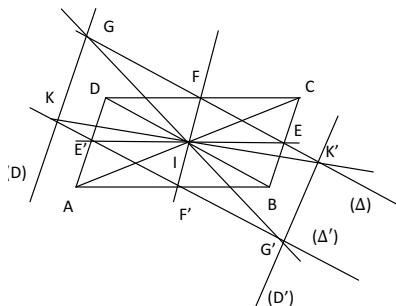
On trace (IG), soit G' l'intersection (IG) et (Δ') .

Posons K l'intersection de (Δ') et (D).

On trace (IK) et K' tel que K' est l'intersection de (IK) et (Δ) .

Donc $(D') = (K'G')$.

Figure



Exercice 4

1) $D_g = [-2; 8]$

2) $g(-1) = 2 ; g(5) = 4$

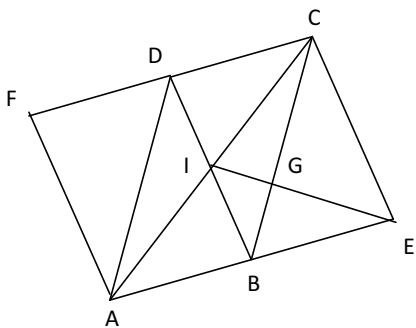
3) Les antécédents de -1 sont 0 et 2.

4.a) $g([1; 8]) = [-2; 4]$

b) l'image réciproque de $[2; 4]$ est $[-1,5; -1] \cup [3; 6,5]$

Exercice 5

1) Figure



2) G est le centre de gravité du triangle ACE.

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$3\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CE} = \vec{0}$$

$$3\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{CB} = \vec{0}$$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$$

3) G se trouve à l'intersection des droites (CB) et (EI).

F est tel que : $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DF}$, donc BAFD est un parallélogramme.

CORRIGE DEVOIR DE NIVEAU 2

Exercice 1

$$1 \rightarrow -\frac{3\pi}{4}; 2 \rightarrow \frac{\pi}{4}; 3 \rightarrow \frac{\pi}{3}; 4 \rightarrow -\frac{5\pi}{12}$$

Exercice 2

$$1 \rightarrow 3; 2 \rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1; 3 \rightarrow 4x^2 - 12x + 9; 4 \rightarrow 4 \left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} \right]$$

Exercice 3

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 2 \times 3 \times \frac{1}{2} = 3$$

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \text{ car } (AH) \perp (BC)$$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BK} = 3 \times \frac{3}{2} \cos(\pi) = -\frac{9}{2}$$

Exercice 4

Exercice 5

1- L'aire de la partie hachurée est : $3x + 3x - 9 = 6x - 9$

2- On sait que : $6x - 9 = 63$

$$6x - 9 = 63 \Leftrightarrow 6x = 72 \Leftrightarrow x = 12$$

Comme $x = 12$, l'aire de la partie cultivable est : $(x - 3)^2$ et en prenant $x = 12$ on a :

$$(12 - 3)^2 = 9^2 = 81 \text{ m}^2.$$

CORRIGE DEVOIR DE NIVEAU 3

Exercice 1

1- Vrai ; 2-faux ; 3-vrai ; 4- vrai ; 4- faux ;

Exercice 2

1 \rightarrow 3 ; 2 $\rightarrow \frac{2}{5}$; 3 $\rightarrow E$;

Exercice 3

$$1) 4x^2 - 9 - 2(2x - 3) + x(2x - 3) = 0 \Leftrightarrow (2x - 3)(3x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \text{ ou } x = \frac{3}{2}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{1}{3} ; \frac{3}{2} \right\}$$

2) L'ensemble de validité de l'inéquation est : $V_I = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$

Résolution de l'inéquation :

$$\frac{x+5}{x-1} \leq \frac{x-3}{x+2} \Leftrightarrow \frac{x+5}{x-1} - \frac{x-3}{x+2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{11x+7}{(x-1)(x+2)} \leq 0. \text{ Soit } Q(x) = \frac{11x+7}{(x-1)(x+2)} \text{ on a :}$$

x	-∞	-2	- $\frac{7}{11}$	1	+∞
11x + 7	-		0	+	+
x - 1	-			0	+
x + 2	-	0	+	+	+
Q(x)	-		+	0	-
					+

$$S =]-\infty; -2[\cup \left[-\frac{7}{11}; 1[$$

Exercice 4

Soit $r = R(A; \frac{\pi}{2})$

1.a) $r(D) = B ; r(C) = E$

b) $r(E) = F ; r(I) = J$

2.a)

r	
A	A
C	E
E	F

On a $AC = AE = AF ; Mes(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AF}) = Mes(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AE}) + Mes(\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AF}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

Donc A est milieu de $[CF]$.

b)

r	
D	B
E	F
I	J

On a : $r([DE]) = [BF]$ or I est milieu de $[DE]$, don J est milieu de $[BF]$

c) A est milieu de $[FC]$ et J est milieu de $[BF]$, dans le triangle FBC , d'après la propriété des milieux on a : $(AJ) // (BC)$.

3) $r((AI) = (AJ)$ donc $(AI) \perp (AJ)$ or $(AJ) // (BC)$. Donc $(AI) // (BC)$

$r(I) = J$ et $AI = AJ$ or $= \frac{1}{2}BC$, donc $AI = \frac{1}{2}BC$

Exercice 5

Soit x le nombre de filles et y le nombre de garçons.

1) Le problème se traduit par
$$\begin{cases} x \geq y \\ 50\,000x + 25\,000y \leq 500\,000 \\ x + y \leq 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq y \\ 50\,000x + 25\,000y \leq 500\,000 \\ x + y \leq 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq y \\ 2x + y \leq 20 \\ x + y \leq 16 \end{cases}$$

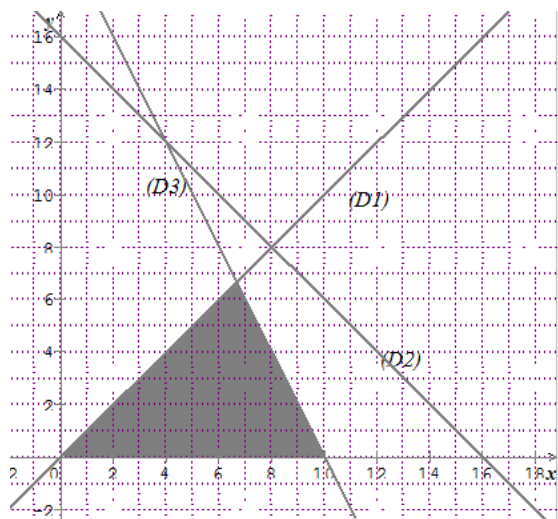
2) Résolution du système

Soient (D_1) , (D_2) et (D_3) les droites d'équations respectives : $x = y$; $2x + y = 20$ et $x + y = 16$

2)

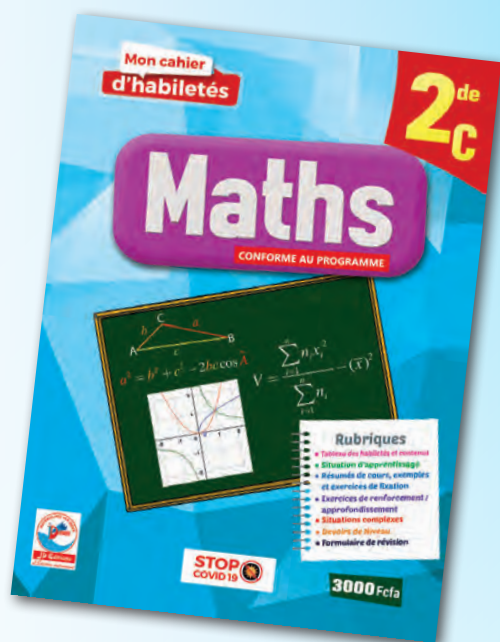
Voir figure

3)



Une solution représentant les conditions de l'ONG est 8 filles et 4 garçons.

De la même collection



MESURES BARRIÈRES

