

## Sommaire

N°	CHAPITRES	Pages
<b>MÉCANIQUE</b>		
M1	Cinématique	2
M2	Mouvement du centre d'inertie d'un système matériel	13
M3	Mouvement dans un champ uniforme	21
M4	Interaction gravitationnelle	26
M5	Oscillation mécanique libre	35
<b>ÉLECTRICITÉ</b>		
E1	Champ magnétique	43
E2	Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme	50
E3	Loi de Laplace	59
E4	Induction électromagnétique	66
E5	L'auto-induction	72
E6	Montage dérivateur et intégrateur	78
E7	Oscillations électriques libres dans un circuit LC	83
E8	Circuit RLC en régime sinusoïdale forcé	93
<b>RÉACTIONS NUCLÉAIRES</b>		
R1	Réactions nucléaires spontanées	105
R2	Réactions nucléaires provoquées	109

# CINÉMATIQUE DU POINT

La cinématique est l'étude du mouvement d'un point par rapport à un référentiel donné

## I. DEFINITIONS

### 1. Référentiel et Repère

#### 1.1 Référentiel

Le référentiel est l'ensemble des repères  $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  liés à un solide considéré immobile. Pour l'étude des mouvements de courtes durées au voisinage de la terre, le référentiel terrestre suffit : c'est tout repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  dont l'origine  $O$  est un point de la terre.

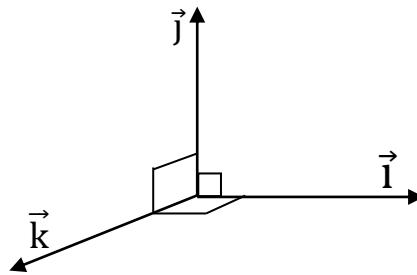
#### 1.2 Repère

##### a. repère d'espace

Un repère d'espace est l'association d'un point fixe  $O$  lié au référentiel (origine du repère) et d'une base composée de vecteurs unitaires  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

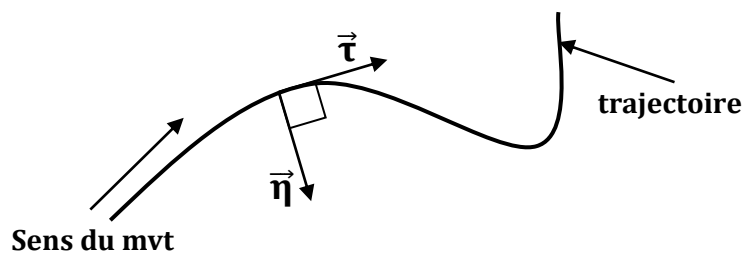
##### ▪ Exemples

- Le repère cartésien  $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$



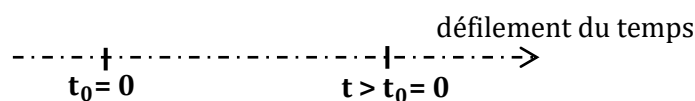
- Le repère de Frenet  $(A, \vec{\tau}, \vec{\eta})$

**NB :** La base liée au repère de Frenet est mobile et il est utilisé pour des trajectoires planes.

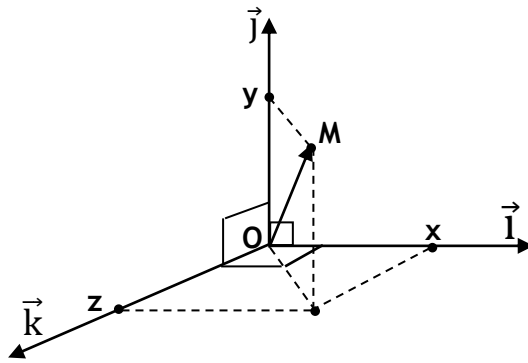


##### b. Repère de temps

Un repère de temps ou de dates nécessite la donnée d'une origine des temps liée à un événement précis et d'un appareil permettant de comptabiliser le temps (chronomètre...)



**2. Position d'un mobile**



$$\vec{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

$\vec{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$  : les coordonnées  $x, y$  et  $z$  du point M, dépendent du paramètre du temps. On a donc les équations horaires ou paramétriques du mouvement du point M.

**3. vecteur vitesse**

Le vecteur vitesse à un instant  $t$  donné est égal à la dérivée par rapport au temps du vecteur position de ce point.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}; \text{ alors } (V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}); \quad (V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}); \quad (V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z})$$

$$\vec{v}(t) = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + \dot{z} \vec{k}$$

**4. vecteur accélération**

**a. définition**

Le vecteur accélération est égal à la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{OM}}{dt} \right) = d^2 \frac{\vec{OM}}{dt^2}$$

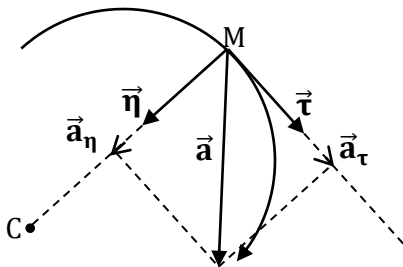
$$(a_x = \frac{dV_x}{dt} = d^2x/d^2t = \ddot{x})$$

$$(a_y = \frac{dV_y}{dt} = d^2y/d^2t = \ddot{y})$$

$$(a_z = \frac{dV_z}{dt} = d^2z/d^2t = \ddot{z})$$

Enfinement :  $\vec{a} = \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j} + \ddot{z} \vec{k}$

**b. expression dans la base de Frenet**



$$a_n = \frac{v^2}{R} = R \cdot \omega^2 : \text{accélération normale}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \text{accélération tangentielle}$$

$$\vec{a} = a_t \vec{\tau} + a_n \vec{\eta} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \vec{\eta}$$

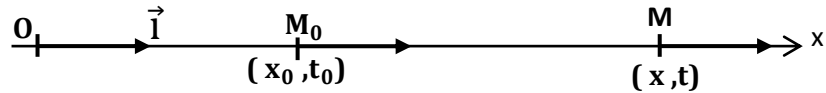
avec  $\vec{\eta}$  : vecteur unitaire normal et  $\vec{\tau}$  : vecteur unitaire tangentiel

## II. MOUVEMENT D'UN POINT MOBILE

### 1. mouvement rectiligne uniforme

Le mouvement d'un mobile est rectiligne uniforme si sa trajectoire est une droite et si son vecteur vitesse est constant  $\vec{v} = \overline{cte}$ .

La trajectoire peut être prise comme l'un des axes du repère :  $(O, \vec{i}) ; (O, \vec{j}) (O, \vec{k})$



A tout instant la position  $x$  du mobile est repérée par l'équation horaire suivante :

$$x(t) = v(t - t_0) + x_0 ;$$

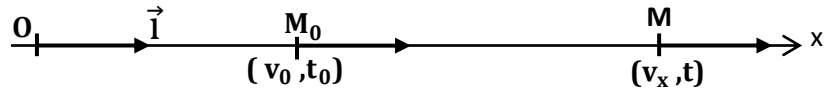
Si la date  $(t_0 = 0)$  et  $x_0$  est l'abscisse à la date  $(t=0)$  on a :

$$x(t) = v.t + x_0$$

### 2. mouvement rectiligne uniformément varié

#### a. équation horaire

Le mouvement d'un mobile est dit rectiligne uniformément varié (MRUV) si son vecteur vitesse accélération est constant.  $\vec{a} = \overline{Cte}$



A tout instant la vitesse  $v$  du mobile est repérée par l'équation horaire suivante :

$$v(t) = a(t - t_0) + v_0$$

Si la date  $(t_0 = 0)$  et  $v_0$  est la vitesse à la date  $(t=0)$  on a :

$$v(t) = a.t + v_0$$

L'équation horaire du mouvement d'un mobile effectuant un mouvement rectiligne uniformément variée est :  $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$

On a  $t_0 = 0$  ;  $v_0$  est la vitesse à la date  $t = 0$  et  $x_0$  est l'abscisse à la date  $t = 0$ .

#### b. autres expressions dans un MRUV

Un mobile effectuant un mouvement rectiligne uniformément variée passant à l'instant  $t_0$  au point  $M_0$  d'abscisse  $x_0$  à la vitesse  $v_0$  et au point  $M$  d'abscisse  $x$  à la vitesse  $v$  à l'instant  $t$  : on a l'expression :

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

si  $\vec{a} \cdot \vec{v} < 0$  alors (MRUR)

si  $\vec{a} \cdot \vec{v} > 0$  alors (MRUA)

### 3. mouvement circulaire uniforme

Un mobile est animé d'un mouvement circulaire uniforme si sa trajectoire décrit un cercle et si la valeur de sa vitesse instantanée est constante.

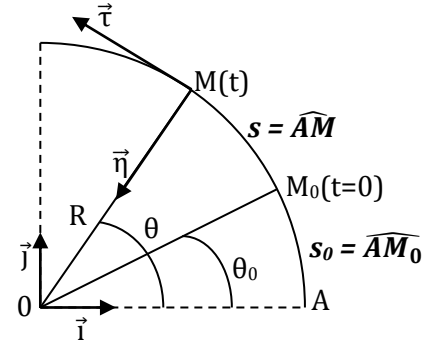
#### 3.1. Quelques définitions

##### a. abscisse angulaire $\theta(t)$

L'**abscisse angulaire** est l'équation horaire  $\theta(t)$  du mouvement d'un point mobile décrivant une trajectoire curviligne. On a :  $\theta = \omega \cdot t + \theta_0$

Où  $\theta_0$  est l'abscisse angulaire à l'instant  $t = 0$

Si  $\theta_0 = 0$  alors  $\theta = \omega \cdot t$



##### b. abscisse curviligne $s(t)$

L'**abscisse curviligne  $s(t)$**  est la longueur de l'arc de cercle décrit par le point M à un instant t donné,

$\mathbf{v}(t) = \frac{ds(t)}{dt}$  et à tout instant la position du mobile est repérée par l'équation horaire

$$s(t) = v \cdot t + s_0$$

Où  $s_0$  est l'abscisse curviligne à l'instant  $t = 0$

Si  $s_0 = 0$  alors  $s(t) = v \cdot t$

##### c. vitesse angulaire

La vitesse angulaire à un instant t est égale à la dérivée par rapport au temps de l'abscisse angulaire :

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \dot{\theta}(t)$$

$$\omega(\text{rad}); \theta(\text{rad}); t(\text{s})$$

##### d. vitesse linéaire

La vitesse linéaire de M à un instant t est égale au produit du rayon de courbure R par la vitesse angulaire  $\omega$ .

$$\mathbf{v} = R\omega = R \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} = R\dot{\theta}$$

$$\mathbf{v} = R \times \boldsymbol{\omega}$$

$$v(\text{m/s}); R(\text{m}); \omega(\text{rad/s})$$

**e. expression de l'accélération**

$$\vec{a} = a_t \vec{\tau} + a_n \vec{\eta} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \vec{\eta}$$

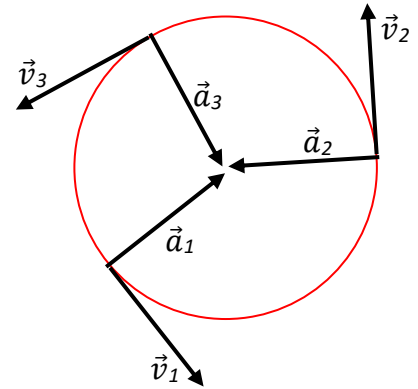
Si le mouvement circulaire est uniforme alors son accélération tangentielle est nulle et sa vitesse angulaire est constante : ( $\omega = \dot{\theta} = cte$  ; alors  $\frac{dv}{dt} = a_t = 0$ ) on a :

$$a_n = \frac{v^2}{R} = R \cdot \omega^2$$

**L'accélération est centripète.**

Remarque :

- Le vecteur vitesse change d'orientation à chaque instant, mais sa norme reste constante.
- Le vecteur accélération centripète  $\vec{a}$  change d'orientation, mais sa norme reste constante.

**3.2. Période et Fréquence du mouvement****a. période (T) du mouvement**

La période notée T est par définition le temps d'un tour.

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

**b. fréquence (N) du mouvement**

La fréquence notée N est par définition le nombre de tours par seconde ; c'est aussi l'inverse de la période.

$$N = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Exemple

Une voiture a une vitesse initiale de  $10\text{m.s}^{-1}$ . Elle est en train de rouler sur une route rectiligne avec une accélération constante de  $0,8\text{ m.s}^{-2}$ .

1. calculer sa vitesse au bout de 10 s.
2. calculer la distance parcourue entre  $t_1 = 2\text{s}$  et  $t_2 = 5\text{s}$
3. calculer la vitesse de la voiture après un parcours de 50 m.

Résolution

1. sa vitesse au bout de 10s est :

$$v = a.t + v_0 = 0,8 \times 10 + 10 = 18\text{m.s}^{-1}$$

2. la distance parcourue entre les dates  $t_1 = 2\text{s}$  et  $t_2 = 5\text{s}$

$$x_1 = \frac{1}{2} at_1^2 + v_0 t_1 = 0,44 \times 4 + 10 \times 2 = 21,6\text{ m}$$

$$x_2 = \frac{1}{2} at_2^2 + v_0 t_2 = 0,44 \times 25 + 10 \times 5 = 60\text{ m}$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 38,4\text{ m}$$

3. calcul de la vitesse après un parcours de 50 m.

$$v^2 - v_0^2 = 2.aX$$

$$v = \sqrt{100 + 1,6 \times 50} = 13,4\text{ m.s}^{-1}$$

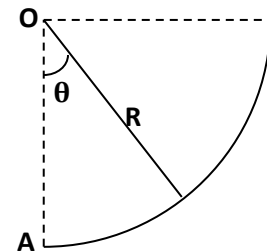
Exercice 1

Un mobile M aborde le tronçon circulaire d'un mouvement uniforme de vitesse  $v = 10\text{m.s}^{-1}$ .

Le rayon du tronçon est  $R = 10\text{cm}$ .

1. exprimer et calculer la vitesse angulaire  $\omega$  du mobile sur ce tronçon.
2. établir les lois horaires de l'abscisse angulaire  $\theta = f(t)$  et de l'abscisse curviligne  $s = g(t)$  du mobile sur le tronçon.

On précisera qu'à  $t=0$ , le mobile est au point A.

Résolution détaillée

1. Expression et calcul de la vitesse angulaire.

$$v = R\omega, \text{ donc } \omega = \frac{v}{R} \text{ et le calcul donne } \omega = 100\text{rad.s}^{-1}$$

2. Equations horaires  $\theta = f(t)$  et  $s = g(t)$

Nous avons un mouvement circulaire uniforme.

Donc,  $\theta = \omega.t + \theta_0$ ; avec,  $\theta_0 = 0$  car le mobile démarre en A.

Finalement,  **$\theta = 100.t$**

Aussi,  $s = R.\theta$ , donc  **$s = 10.t$**

Exercice 2

Un mobile aborde une piste circulaire BC de centre O et de rayon  $r=10\text{m}$ , avec une vitesse angulaire constante  $\omega = 0,1\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ .

Déterminer :

- la vitesse linéaire.
- L'équation horaire  $\theta(t)$  du mouvement du mobile ( $t=0\text{s}$  lorsque le mobile est en B).
- l'instant où le mobile atteint le point C.  
Sachant que l'angle  $(BOC) = 30^\circ$

Résolution détaillée

- vitesse linéaire  
 $v = R\omega = 0,1 \times 10 = 1\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
- équation horaire  
 $\theta(t) = \omega t + \theta_0$ ;  $\theta_0 = 0$  où  $\theta(t) = 0,1t$
- l'instant d'arrivé en C  
 $t = \frac{\theta(t)}{\omega} = \frac{\pi}{6\omega}$  où  $t = 5,23\text{s}$

EXERCICES D'APPLICATIONSExercice 1

Dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un vecteur position mobile M donnée à la date par :

$$\overrightarrow{OM} = (\vec{j} - 2\vec{k})t^2 + (4\vec{k} - 2\vec{j})t + 4\vec{i} + 5\vec{k}$$

Les unités de mesures sont celles du système international.

1. Donner l'expression  $\overrightarrow{OM} = f(t)$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
2. En déduire  $x(t)$  ;  $y(t)$  ;  $z(t)$
3. Montrer que le mouvement du mobile est plan puis préciser le plan dans lequel il se déroule.
  - a. Déterminer les expressions du vecteur vitesse  $\vec{v}$  et du vecteur accélération  $\vec{a}$  du mobile M.
  - b. Que peut-on dire du vecteur accélération ?
4. Etablir l'équation cartésienne de la trajectoire de M et préciser sa nature.

Résolution détaillée

$$1. \overrightarrow{OM} = 4\vec{i} + (t^2 - 2t)\vec{j} + (4t - 2t^2 + 5)\vec{k}$$

2.

$$\begin{cases} x(t) = 4 \\ y(t) = t^2 - 2t \\ z(t) = 4t - 2t^2 + 5 \end{cases}$$

3.  $x(t) = 4 = \text{cte}$  donc le mouvement du mobile M est plan et il se déroule dans le plan (y4z) ou le plan (yoz) parallèle à la droite d'équation  $x=4$

$$a. \vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}; \vec{v} = \begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 2t - 2 \\ \dot{z} = -4t + 4 \end{cases} \quad \boxed{\vec{v} = (2t-2)\vec{j} + (-4+4t)\vec{k}}$$

$$b. \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 2 \\ \ddot{z} = -4 \end{cases} \quad \boxed{\vec{a} = 2\vec{j} - 4\vec{k}}$$

donc  $\vec{a}$  est un vecteur constant car il est indépendant du temps.

4. équation de la trajectoire

$$y(t) = t^2 - 2t \quad \text{or} \quad z(t) = -2t^2 + 4t + 5 = -2(t^2 - 2t) + 5 = -2(y) + 5 \quad \text{finalement}$$

$$\boxed{z = -2y + 5}$$

C'est l'équation d'une droite, elle est de la forme  $z = a.x + b$

Exercice 2

On considère une montre comportant trois aiguilles : l'aiguille des heures, l'aiguille des minutes et des secondes ou (trotteuse).

1. déterminer la vitesse angulaire de chacune des aiguilles.
2. La trotteuse a une longueur de 13 mm
  - a. Quel est le vecteur vitesse de son extrémité
  - b. Quel est le vecteur accélération de son extrémité.

Résolution détaillée

1. vitesse angulaire de l'aiguille des heures :  $\omega = \frac{2 \times \pi \times \text{trs}}{t(\text{s})}$ 
  - L'aiguille des heures fait 1 tours en 12 heures :  $\omega = \frac{2\pi \times 1}{12 \times 3600} = 1,45 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$
  - L'aiguille des minutes fait 1 tours en 60 minutes :  $\omega = \frac{2\pi \times 1}{60 \times 60} = 1,74 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$
  - L'aiguille des secondes fait 1 tours en 60 secondes :  $\omega = \frac{2\pi \times 1}{60} = 1,05 \cdot 10^{-1} \text{ rad/s}$ .
2. déterminons la vitesse et l'accélération
 

La vitesse linéaire :  $v = R \cdot \omega = 13 \cdot 10^{-3} \times 1,05 \cdot 10^{-1} = 1,36 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$

L'accélération :  $1,05 \cdot 10^{-1} \times 1,36 \cdot 10^{-3} = 1,43 \cdot 10^{-4} \text{ ms}^{-2}$

Exercice 3

- A- un mobile décrit dans le repère  $(O, \vec{i})$  une trajectoire rectiligne d'un mouvement uniforme.  
Il part à l'instant  $t = 0 \text{ s}$  de l'abscisse  $x = -5 \text{ m}$  dans le sens positif avec la vitesse  $+3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .  
Établir l'équation horaire du mouvement ?
- B- un mobile décrit dans le repère  $(O, \vec{i})$ , une trajectoire rectiligne d'un mouvement uniforme. A l'instant  $t = 1 \text{ s}$ , l'abscisse du mobile est  $8 \text{ m}$ . A l'instant  $t = 3 \text{ s}$ , son abscisse est  $-4 \text{ m}$ .  
Établir les équations horaires  $x(t)$  et  $v(t)$  du mobile M.
- C- un mobile ponctuel est animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié sur une trajectoire  $(x'x)$  munie du repère  $(O, \vec{i})$ .  
A la date  $t = 0 \text{ s}$ , il est à l'abscisse  $x_0 = -1 \text{ m}$ .  
A la date  $t = 4 \text{ s}$ , il est à l'abscisse  $x_1 = 2 \text{ m}$ .  
A la date  $t = 3 \text{ s}$ , il est à l'abscisse  $x_2 = 4 \text{ m}$ .  
Établir les équations horaires  $x(t)$  et  $v(t)$  du mobile M.
- D- un mobile ponctuel M est animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié sur une trajectoire  $(x'x)$  munie du repère  $(O, \vec{i})$ .  
A la date  $t = 0$ , son abscisse est  $-1 \text{ m}$  et sa vitesse  $3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .  
A la date  $t = 1 \text{ s}$ , il passe par l'origine des abscisses.
- 1- Établir l'équation horaire  $x(t)$  du mouvement de M.
  - 2- Déterminer les intervalles de temps sur lesquels, le mouvement de M est soit retardé, soit accéléré. Signalons que la date  $t$  est comprise entre 0 et 2s.

E- un mobile M est animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié sur un axe ( $x'x$ ) munie du repère  $(O ; \vec{i})$ .

A l'instant  $t=0s$ , son abscisse est  $-1m$ , puis aux instants  $t=2s$  et  $t=6s$ , ses vitesses sont respectivement  $4m.s^{-1}$  et  $8m.s^{-1}$ .

- 1- Établir les équations horaires  $x(t)$  et de la vitesse  $v(t)$  du point M.
- 2- Calculer l'abscisse et la vitesse au bout de  $t=20s$ .

### Résolution détaillée

A- l'équation horaire est :  $x(t) = vt + x_0$  ( $x_0 = -5m$  et  $v_0 = 3m.s^{-1}$ )

$$x(t) = 3t - 5$$

B- l'équation horaire est :  $x(t) = v_0t + x_0$

$$\begin{cases} 8 = v_0t + x_0 \text{ à } t = 1s \\ -4 = v_0t + x_0 \text{ à } t = 3s \\ 8 = v_0 + x_0 \\ -4 = 3v_0 + x_0 \end{cases}$$

finalement  $v_0 = -6m$  et  $x_0 = 14m$  ; l'équation horaire est donc :  $x(t) = -6t + 14$

C- l'équation horaire est :  $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}at_1^2 + v_0t_1 + x_0 \\ x_2 = \frac{1}{2}at_2^2 + v_0t_2 + x_0 \end{cases} ; \begin{cases} 2 = \frac{1}{2}a(4)^2 + 4v_0 - 1 \\ 4 = \frac{1}{2}a(3)^2 + 3v_0 - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = 8a + 4v_0 - 1 \\ 4 = 4,5a + 3v_0 - 1 \end{cases}$$

$$\text{alors } v_0 = \frac{2-8a+1}{4} = 0,5-2a+0,25 = 0,75-2a$$

$$\begin{cases} v_0 = 0,75 - 2a \\ 4 = 4,5a + 3 \times (0,75 - 2a) - 1 \end{cases}$$

Finalement  $a = 1,83m.s^{-2}$  et  $v_0 = 4,41m.s^{-1}$

L'équation horaire est :  $x(t) = -0,915t^2 + 4,41t - 1$

L'équation horaire de la vitesse est :  $v(t) = -1,83t + 4,41$

D- l'équation horaire est :

$$\text{à } t=0 ; x_0 = -1m ; v_0 = 3m.s^{-1}$$

$$\text{à } t=1 ; x_0 = 0$$

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

$$x(t=1) = \frac{1}{2}a + 3 - 1 \text{ alors } a = -4m.s^{-1}$$

L'équation horaire du mouvement est :  $x(t) = -2t^2 + 3t - 1$

L'équation horaire de la vitesse est :  $v(t) = -4t + 3$

On étudiera le mouvement du mobile sur l'intervalle  $t \in [0; 2]$

L'accélération  $a = -2m.s^{-2} < 0$

La vitesse s'annule à la date  $t = \frac{3}{4}s = 0,75s$

Les racines de la position de  $x$  sont :  $x_1 = 0,5m$  et  $x_2 = 1m$

<b>t</b>	0	0,5	0,75	1	2
<b>a</b>		-		-	
<b>v</b>		+	0	-	
<b>x</b>		0	-1	0	
<b>v.a</b>		-	0	+	
		<i>mvt retardé</i>		<i>mvt accéléré</i>	

E- les équations horaires  $x(t)$  et  $v(t)$  sont :  $x_0 = -1\text{m}$

$$v(t) = at + v_0$$

$$\begin{cases} 4 = 2a + v_0 \\ 8 = 6a + v_0 \end{cases} \quad \begin{cases} v_0 = 4 - 2a \\ 8 = 6a + v_0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1\text{m}\cdot\text{s}^{-2} \\ v_0 = 2\text{m}\cdot\text{s}^{-1} \end{cases}$$

$$v(t) = t + 2$$

$$x(t) = 0,5t^2 + 2t - 1$$

Abscisse à la date ( $t=20\text{s}$ ) :  $x = 239\text{m}$  et  $v = 22\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

# MOUVEMENT DU CENTRE D'INERTIE D'UN SYSTEME MATÉRIEL

## I. LES RÉFÉRENTIELS GALILÉENS

### 1. Rappels

#### 1.1 Notion de force

##### a. définition

Une force est une action mécanique exercée sur un système, capable éventuellement de le déformer, de le maintenir en équilibre, d'amorcer ou de modifier son mouvement.

La force s'exprime en **newton (N)** et peut être mesuré grâce à un **dynamomètre**.

##### b. caractéristiques d'une force

Une force est une grandeur vectorielle caractérisée par :

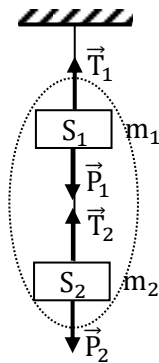
- Une direction
- Un sens
- Un point d'application
- Un module exprimé en newton (N)

##### c. forces extérieures et intérieures à un système

Un système défini est soumis à deux types de forces :

- Les forces intérieures (correspondant aux interactions entre les différentes parties du système)
- Les forces extérieures (correspondant aux interactions entre le système et le milieu extérieur)

Exemple :



Système : le solide  $S_1$

Les forces extérieures aux solide  $S_1$  :

$\vec{T}_1$  : tension du fil<sub>1</sub>

$\vec{P}_1$  : le poids du solide  $S_1$

Système : le solide  $S_2$

Les forces extérieures aux solide  $S_2$  :

$\vec{T}_2$  : tension du fil<sub>2</sub>

$\vec{P}_2$  : le poids du solide  $S_2$

Système : (solide  $S_1+S_2$ )

Les forces extérieures aux solide  $S_1$  :

$\vec{T}_1$  : tension du fil

$\vec{P}_2$  : le poids du solide ( $S_1+S_2$ )

**NB : les notions de forces extérieures et de forces intérieures dépendent système choisit.**

**d. Solide isolé ou pseudo-isolé**

Un système est mécaniquement isolé s'il n'est soumis à aucune force.

Un système est mécaniquement pseudo-isolé s'il n'est soumis à des forces (qui se compensent à chaque instant) alors la somme des forces appliquées au système est nulle.

**2. définition d'un référentiel galiléen ou référentiel d'inertie**

On considère un référentiel ( $\mathcal{R}$ ) muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Ce référentiel est appelé *référentiel galiléens*, lorsque le centre d'inertie G d'un solide isolé ou pseudo-isolé.

- y est animé d'un mouvement rectiligne uniforme :  $\vec{V}_G = \overrightarrow{cste}$
- ou bien y est immobile ou au repos :  $\vec{V}_G = \vec{0}$

**REMARQUE** : cas d'un solide non isolé :  $\sum \vec{F} \neq \vec{0}$

La somme des forces appliquées modifie le vecteur vitesse

*Exemple de référentiels galiléens :*

- référentiel de Copernic utilisé pour l'étude des mouvements des planètes (Origine : centre d'inertie du soleil et ses axes sont dirigés vers 3 étoiles lointaines)
- référentiel géocentrique utilisé pour l'étude des satellites de la terre (Origine : centre d'inertie de la terre et ses axes sont dirigés vers 3 étoiles et sont parallèles à ceux du référentiel de Copernic).
- référentiel terrestre peut être considéré comme galiléens pendant un bref instant.

**II. THÉORÈME DU CENTRE D'INERTIE****1. Quantité de mouvement**

Le vecteur quantité de mouvement  $\vec{p}$  d'un solide de masse m en mouvement de translation à la vitesse  $\vec{v}$  est le produit sa masse par son vecteur vitesse.

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

La norme du vecteur quantité de mouvement est :  $p = mv$

La quantité de mouvement p s'exprime en **kg.m.s<sup>-1</sup>**

Remarque : dans un référentiel galiléen, le vecteur quantité de mouvement se conserve.

**2. Relation fondamentale de la dynamique**

Dans un référentiel galiléen, la dérivé par rapport au temps du vecteur quantité de mouvement d'un système est égal à la somme vectorielle des forces appliquées à ce système.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$$

### 3. Théorème du centre d'inertie (2<sup>ème</sup> loi de Newton)

#### a. Énoncé du théorème

D'après la relation fondamentale de la dynamique, on a :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} \text{ implique } \sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v})$$

$$\text{soit } \sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \text{ or } \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} \text{ d'où } \sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}$$

Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un système est égale au produit de sa masse par le vecteur accélération de son centre d'inertie.

$$\boxed{\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}}$$

#### b. cas particuliers

- $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \text{ alors } \vec{a} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} \vec{v} = \vec{0} \text{ le système est immobile} \\ \vec{v} = \overrightarrow{\text{cste}} : \text{ le mouvement est uniforme} \end{cases}$$

C'est le principe de l'inertie ( $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$ ) : 1<sup>ère</sup> loi de Newton

- $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \overrightarrow{\text{cste}}$

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \overrightarrow{\text{cste}} \text{ or } \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} \Rightarrow \vec{v} = at + v_0$$

Si  $\vec{a}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires alors le mouvement est rectiligne uniformément varié.

Si  $\vec{a}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires alors le mouvement est parabolique (prochain chapitre).

### 4. principe des actions réciproques (3<sup>ème</sup> loi de Newton)

Si un corps A exerce une force  $\vec{F}_{B/A}$  sur un corps B, alors le corps B exerce également une force  $\vec{F}_{A/B}$  sur le corps A tel que :  $\vec{F}_{B/A} = -\vec{F}_{A/B}$

### 5. théorème de l'énergie cinétique

#### a. exploitation

Supposons que  $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{F} = m\vec{a}$  on définit  $\vec{v} = \frac{dl}{dt} \Rightarrow d\vec{l} = \vec{v} dt$  (déplacement élémentaire)

Le travail élémentaire de la force  $\vec{F}$  est :  $dW(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{l}$

$$dW(\vec{F}) = \left(m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}\right) \cdot (\vec{v} dt)$$

$$dW(\vec{F}) = m \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$dW(\vec{F}) = d\left(\frac{1}{2} m v^2\right)$$

$$dW(\vec{F}) = d(Ec)$$

Le travail de la force  $\vec{F}$  est :  $W(\vec{F}) = \Delta Ec$

**b. énoncé du théorème**

Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique d'un solide entre deux instants, est égale à la somme algébrique des travaux de toutes les forces s'exerçant sur le solide pendant cette durée de la variation.

$$\Delta E_{C_{A \rightarrow B}} = \sum W(\vec{F})_{A \rightarrow B}$$

**III. METHODOLOGIE DE RESOLUTION D'UN EXERCICE DE MECANIQUE**

Pour résoudre un problème de mécanique il faut :

- préciser le système
- choisir un référentiel galiléen muni d'un repère orthonormé
- faire le bilan des forces appliquées au système (faire un schéma si possible)
- appliquer le théorème du centre d'inertie ou le théorème de l'énergie cinétique.

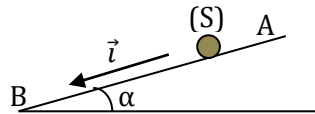
Exercices d'applicationsApplication N°1

Un solide de masse  $m$ , glisse sans vitesse initiale selon la ligne de plus grande pente d'un plan incliné faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale. Nous admettrons que le solide est en translation. Les forces de frottements sont équivalentes à une force unique  $f$ .

1. déterminer l'expression de l'accélération  $a$  du solide. En déduire la nature du mouvement.
2. donner l'expression de la vitesse pour une distance  $l$  parcourue.

Application N°2

Un solide ponctuel (S) de masse  $m=100\text{g}$ , abandonné sans vitesse initiale, glisse sur un plan incliné d'un angle  $\alpha=20^\circ$  par rapport au plan horizontal.



1. on considère les frottements négligeables.
  - 1.1 établir l'expression littérale de l'accélération du mouvement du solide en fonction de  $g$  et  $\alpha$ .  
en déduire la nature du mouvement de S.
  - 1.2 établir l'équation horaire du solide en prenant comme origine des abscisses la position A à laquelle le solide est abandonnée et pour origine des dates, l'instant de l'abandon.
  - 1.3 déterminer l'instant de passage du solide en B sachant que  $AB=2\text{m}$ .  
en déduire la durée du parcours AB.

Application N°3

Un solide de masse  $m$  assimilable à un point matériel est placé au sommet A d'une sphère de rayon  $r$ . Le solide S glisse sans frottement le long de la sphère. Sa vitesse initiale est  $V_A=0$ . La position de S est déterminée par l'angle  $\theta$ .

1. déterminer l'expression de la réaction  $R$  de la sphère sur le solide et en déduire la position où le solide S quitte la sphère
2. Quelle est sa vitesse au moment où elle quitte la sphère ?

Application N°4

Un corps A de masse  $m_A=70\text{g}$  entraîne dans sa chute un corps B de masse  $m_B=80\text{g}$  qui glisse sur un plan incliné d'un angle  $\alpha=30^\circ$ . A et B sont reliés par l'intermédiaire d'un fil inextensible qui passe par la gorge d'une poulie dont-on néglige la masse.

Calculer en négligeant tous les frottements, l'accélération et la tension du fil ( $g=10\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ )

RÉSOLUTIONSApplication N°1

1. Donnons la nature du mouvement

Système : le solide

Repère :  $(O, \vec{i})$ 

Référentiel terrestre supposé galiléen

Bilan des forces extérieures :

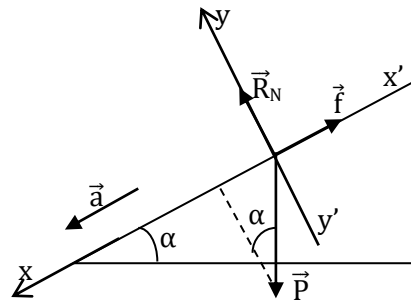
- $\vec{P}$  : le poids du solide
- $\vec{R}_N$  : la réaction normale
- $\vec{f}$  : les forces de frottements

Appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a} \text{ soit } \vec{P} + \vec{f} + \vec{R}_N = m\vec{a}$$

suivant l'axe  $(xx')$  :  $P\sin\alpha + 0 - f = ma$  soit  $\mathbf{a} = g\sin\alpha - \frac{f}{m}$ g,  $\alpha$ , m et f sont constantes alors  $a = \text{cste}$  et la trajectoire est une droite : le mouvement est donc rectiligne uniformément varié.

2. donnons l'expression de la vitesse pour une distance l parcourue

appliquons le théorème de l'énergie cinétique :  $\sum W(\vec{F})_{A \rightarrow B} = \Delta E_{C_{A \rightarrow B}}$  $E_{C_B} - E_{C_A} = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W(\vec{f})$  or  $W(\vec{R}) = 0$  car  $\vec{R}$  est perpendiculaire à la vitesse  $\vec{v}$  $W(\vec{f}) = -f \times l$  et  $W(\vec{P}) = mgh = mgl\sin\alpha$  ;  $v_A = 0 \text{ m.s}^{-1}$  (sans vitesse initiale)d'où  $\frac{1}{2}mv^2 = mgl\sin\alpha - f \times l$  soit  $v = \sqrt{2l(g\sin\alpha - \frac{f}{m})}$ NB : on peut aussi utiliser la relation  $2a(x - x_0) = v^2 - v_0^2$ Application N°2

1. calcul de l'accélération

Système : le solide

Repère :  $(O, \vec{i})$ 

Référentiel terrestre supposé galiléen

Bilan des forces extérieures :

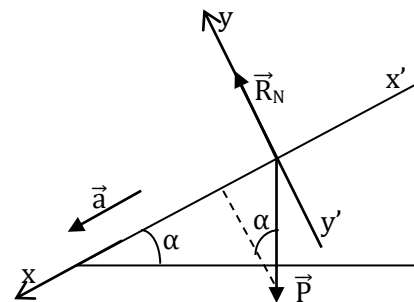
- $\vec{P}$  : le poids du solide
- $\vec{R}_N$  : la réaction normale

Appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a} \text{ soit } \vec{P} + \vec{f} + \vec{R}_N = m\vec{a}$$

suivant l'axe  $(xx')$  :  $P\sin\alpha + 0 - f = ma$  soit  $\mathbf{a} = g\sin\alpha$ g,  $\alpha$  et m sont constantes alors  $a = \text{cste}$  et la trajectoire est une droite : le mouvement est donc rectiligne uniformément varié.

2. équation horaire du mobile

MRUV : donc  $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$ (Sachant que  $\mathbf{a}_x = \mathbf{a} = g\sin\alpha$  ;  $v_{0x} = v_0 = 0$ ) car  $v_0 = \sqrt{(v_{0x}^2)} = v_{0x}$  idem pour l'accélération a.

$$x(t) = \frac{1}{2} (g \sin \alpha) \cdot t^2 \text{ d'où } x(t) = 1,7t^2$$

3. instant de passage en B

A origine alors  $x_A = 0$  ;  $AB = x_B - x_A = x_B$

$$x_B = \frac{1}{2} g \cdot \sin \alpha t_B^2 \text{ d'où } t_B = \sqrt{\frac{2 \cdot AB}{g \cdot \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{2 \times 2}{10 \times \sin 20^\circ}} = 1,1 \text{ s}$$

Le parcours dure  $\Delta t = t_B - t_A = 1,1 \text{ s}$  car le solide démarre à l'origine des dates  $t_A = 0 \text{ s}$

### Application N°3

1. déterminons la réaction R de la sphère

Système : le solide S

Repère de Frenet (S,  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{\eta}$ )

Référentiel terrestre supposé galiléen

Bilan des forces extérieures :

- $\vec{P}$  : le poids du solide
- $\vec{R}_N$  : la réaction normale

Appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a} \text{ soit } \vec{P} + \vec{R}_N = m\vec{a}$$

Projetons suivant les axes  $\vec{P} \begin{cases} P_\tau = P \cos \theta \\ P_\eta = P \sin \theta \end{cases}$  ;  $\vec{R} \begin{cases} R_\tau = 0 \\ R_\eta = -R \end{cases}$  et  $\vec{a} \begin{cases} a_\tau = \frac{dv}{dt} \\ a_\eta = \frac{v^2}{r} \end{cases}$

soit  $R = mg \sin \theta - \frac{mv^2}{r}$  ; le solide S quitte la sphère si et seulement si son contact avec cette dernière est rompu c'est-à-dire pour  $R=0$  ce qui implique  $mg \sin \theta - \frac{mv^2}{r} = 0$  **(1)**

2. déterminons l'expression de la vitesse v.

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique :  $\sum W(\vec{F})_{A \rightarrow B} = \Delta E_{C_{A \rightarrow B}}$

$E_{C_B} - E_{C_A} = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$  or  $W(\vec{R}) = 0$  car  $\vec{R}$  est perpendiculaire à la vitesse  $\vec{v}$

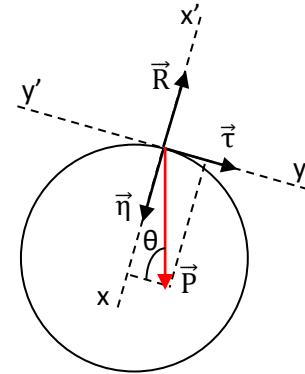
$W(\vec{P}) = mgh$  avec  $h = r(1 - \sin \theta)$  soit  $\frac{1}{2} mv^2 = mgr(1 - \sin \theta)$  d'où  $v^2 = 2gr(1 - \sin \theta)$  **(2)**

en portant **2** dans **1**, on aboutit  $\sin \theta = \frac{2}{3}$  soit  $\theta = 41,81^\circ$

3. sa vitesse au moment où elle quitte la sphère

En remplaçant la valeur de  $\sin \theta = \frac{2}{3}$  dans l'expression **(2)** on obtient :

$$v = \sqrt{\frac{2}{3} gr}$$



Application N°4Système : corps B

Référentiel : terrestre supposé galiléen

Bilan des forces :  $\vec{P}_B$ ,  $\vec{T}_B$  et  $\vec{R}$ TCI :  $\vec{P}_B + \vec{T}_B + \vec{R} = m_B \vec{a}$  projetons la relation vectorielle sur l'axe (Ox)

$$-P_B \sin \alpha + T_B = m_B a \text{ d'où } T_B = m_B (a + g \sin \alpha) \quad (1)$$

Système : corps A

Référentiel : terrestre supposé galiléen

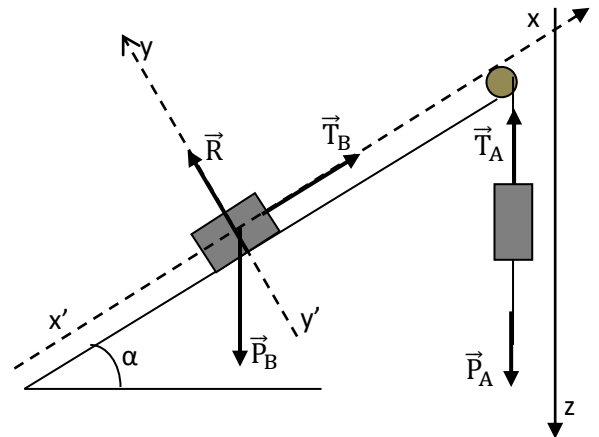
Bilan des forces :  $\vec{P}_A$ ,  $\vec{T}_A$ TCI :  $\vec{P}_A + \vec{T}_A = m_A \vec{a}$  projetons la relation vectorielle sur l'axe (Oz)

$$P_A - T_A = m_A a \Rightarrow T_A = m_A (g - a) \quad (2)$$

**La tension du fil inextensible est partout la même :  $T_A = T_B$** 

$$m_A (g - a) = m_B (a + g \sin \alpha) \text{ d'où } a = g \frac{m_A - m_B \sin \alpha}{m_A + m_B} ; \text{ A.N: } a = 2 \text{ m.s}^{-2}$$

$$\text{la tension des fils : } T_A = T_B = m_A (g - a) = 0,56 \text{ N}$$

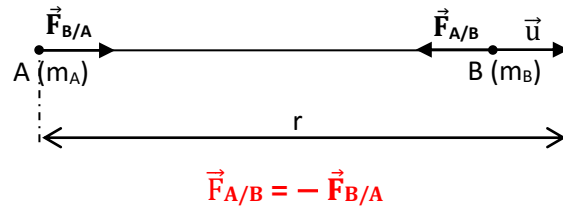


# INTERACTION GRAVITATIONNELLE

## I. CHAMP DE GRAVITATION

### 1. définition

Tous les corps ayant une masse non-nulle exercent des forces les uns sur les autres. Considérons deux corps A et B, de masse  $m_A$  et  $m_B$ , séparés par une distance  $r$ . A exerce une force sur B et B exerce une force sur A : les deux corps s'attirent mutuellement en créant une force d'attraction gravitationnelle. Les caractéristiques de ces forces d'attraction gravitationnelle sont :



**Direction** : celle de la droite (AB)

**Point d'application** : la force exercée par A sur B s'exerce en B ; la force exercée par B sur A s'exerce en A.

**Sens** : la force exercée par A sur B est dirigé vers A ; la force exercée par B sur A est dirigé vers B

**Intensité** : les forces exercées par A sur B et par B sur A ont la même valeur :

$$F_{A/B} = F_{B/A} = G \cdot \frac{m_A \cdot m_B}{r^2} \quad (\text{proportionnelle à leurs masses (produit) et inversement proportionnelle au carré de leur distance})$$

G est la constante de gravitation universelle :  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$

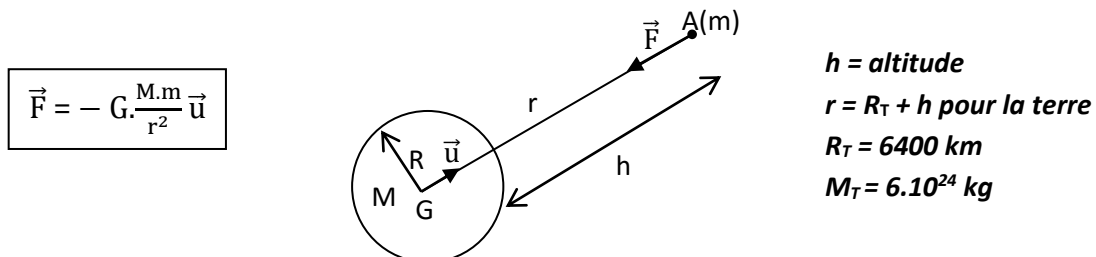
$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

Son expression vectorielle est :  $\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A} = -G \cdot \frac{m_A \cdot m_B}{r^2} \vec{u}$

**Remarque** : (corps à symétrie sphérique)

Il s'agit d'un corps sphérique homogène de masse M supposée concentrée en son centre d'inertie G et de rayon R. On considère que **le soleil, les planètes, donc la terre, sont des solides à répartition sphérique de masse.**

La force exercée par une attraction entre un corps A supposé ponctuel de masse m placé à une distance r de G est :



## 2. Champ de gravitation

### a. définition

Lorsque, en amenant un corps de masse  $m$  en un point et que celle-ci est soumise à une force gravitationnelle  $\vec{F}$  alors, il existe un champ de gravitation en ce point de l'espace notée  $G$ .

En un point  $A$  où existe un champ gravitationnel  $G$ , une masse ponctuelle  $m$  est soumise à une force gravitationnelle  $\vec{F}$ .

### b. vecteur champ de gravitation

En un point  $M$  d'un espace champ gravitationnelle le champ est caractérisé par un vecteur appelé vecteur champ gravitationnel  $\vec{G}$  proportionnel à la force de gravitation  $\vec{F}$ .

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m}$$

### Caractéristiques du vecteur $\vec{G}$

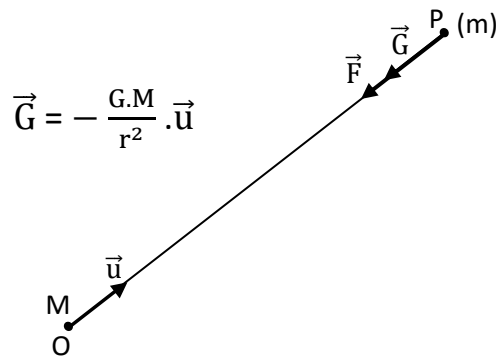
**Direction :** même direction que le vecteur  $\vec{F}$

**Sens :** même sens que le vecteur  $\vec{F}$

**Module ou intensité :**  $G = \frac{F}{m}$  ;  $G$  ( $N \cdot kg^{-1}$  ou  $m \cdot s^{-2}$ ) et  $m$  ( $kg$ )

**N.B :** le champ de gravitation  $G$  est une grandeur positive

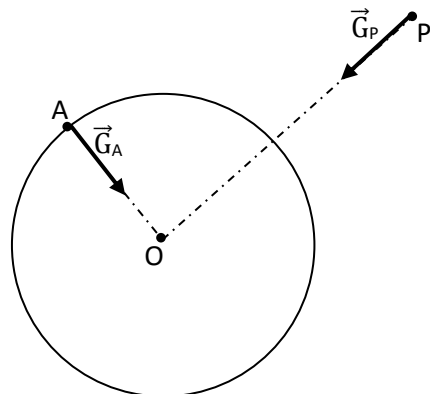
**Point d'application :**  $M$  (particule supposée ponctuelle)



### Remarque :

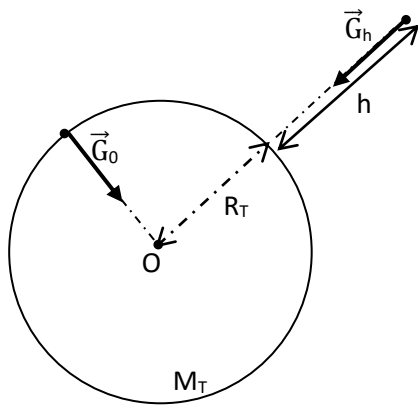
Le vecteur champ de gravitation crée par un solide à répartition sphérique de masse  $M$  à la même expression. Il est centripète car il est dirigé vers le centre  $O$  du solide.

$$\diamond \vec{G}_A = \frac{G.M}{r^2} \vec{u}$$



**c. champ de gravitation terrestre**

La terre, assimilée à une sphère à répartition sphérique de masse  $M_T$  et de rayon  $R_T$ , crée, dans tout l'espace qui l'entoure, un champ gravitationnel.



au niveau du sol, le champ est  $G_0 = \frac{G.M_T}{R_T^2}$

à l'altitude h de la terre, on a :  $G_h = \frac{G.M_T}{(R_T + h)^2}$

en faisant le rapport  $\frac{G_h}{G_0}$  on obtient finalement :

$$G_h = \frac{G_0 \cdot R_T^2}{(R_T + h)^2}$$

*champ de gravitation créé par la Terre en un point P situé à l'altitude h.*

**II. MOUVEMENT CIRCULAIRE DES SATELLITES**

**1. mouvement circulaire uniforme**

**Référentiel** : géocentrique supposé galiléen

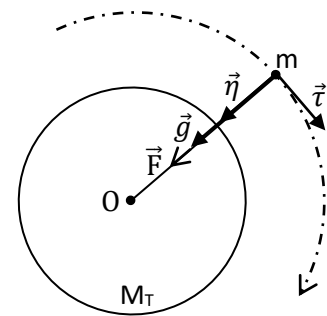
**Repère de Frenet** :  $(O, \vec{u}, \vec{n})$

**Système** : satellite de masse (m)

**Bilan des forces extérieures** :

$\vec{F} = m \cdot \vec{g}$  : la force de gravitation

**T.C.I** :  $\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}$  ;  $m \cdot \vec{G} = m \cdot \vec{a} \rightarrow \vec{G} = \vec{a}$



**Le mouvement d'un corps soumis au champ gravitationnel est indépendant de la masse de ce corps.**

$\frac{dv}{dt} \vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0$  ;  $\vec{G} = G \cdot \vec{n}$  est centripète et l'accélération tangentielle étant nulle on a :

$$\vec{a} = a \cdot \vec{n} = \frac{v^2}{r} \cdot \vec{n} \text{ d'où } G \cdot \vec{n} = a \cdot \vec{n} \Rightarrow G = \frac{v^2}{r}$$

Ce qui implique que  $v_0 = \sqrt{G \cdot r} = \text{constante}$  (**le mouvement est circulaire et uniforme**).

**Le mouvement d'un satellite en orbite circulaire est uniforme.**

**2. Vitesse des satellites**

Avec  $a \cdot \vec{n} = \frac{v^2}{r} \cdot \vec{n}$  et  $\vec{G} = G \cdot \frac{M_T}{r^2} \cdot \vec{n}$  ;  $a = G \Rightarrow \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{M_T}{r^2}$

On obtient  $v^2 = G \cdot \frac{M_T}{r}$

Comme :  $r = R_T + h$  (h = altitude et  $R_T$  = rayon de la Terre).

et  $g_0 = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}$  (Champ de pesanteur terrestre au niveau du sol).

On peut donc exprimer la vitesse sous les deux formes :

$$v = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)}} \quad \text{or} \quad M_T = \frac{g_0}{G} R_T^2 \quad \text{d'où} \quad v = \sqrt{g_0 \cdot \frac{R_T^2}{(R_T + h)}}$$

**La vitesse est indépendante de la masse du satellite. Elle n'est fonction que de son altitude h.**

✓ **Remarque** : la vitesse angulaire du satellite est  $\omega \text{ (rad.s}^{-1}\text{)} = \frac{v}{r} = \frac{v}{(R_T + h)}$

### 3. période du mouvement des satellites

La période est le temps d'un tour du satellite ( $t = T$ , pour  $2\pi$ )

Le mouvement du satellite est circulaire uniforme ; son abscisse curviligne est

$$s = vt \text{ avec } s = 2\pi r = v \cdot T \quad (1)$$

On a :  $v = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{r}}$  ; avec ( $r = R_T + h$ )  $\Rightarrow$  en élevant les deux membres de (1) au carré on a :

$$4\pi^2(R_T + h)^2 = \frac{G \cdot M_T}{r} \cdot T^2 \text{ et } M_T = \frac{g_0}{G} R_T^2 ; \text{ finalement on obtient :}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(R+h)^3}{G \cdot M_T}} \quad \text{aussi} \quad T = \frac{2\pi}{R_T \sqrt{g_0}} (R_T + h)^{3/2}$$

**La période T est indépendante de la masse du satellite. Elle croît avec l'altitude. Tous les satellites évoluant à la même altitude ont la même période.**

#### **Remarque** : (satellites géostationnaire)

Un satellite géostationnaire est un satellite qui reste sur une verticale d'un point de la terre. Il est donc immobile par rapport à la terre. Il tourne autour de l'axe des pôles dans le même sens et à la même vitesse angulaire que la terre.

➤ La période d'un tel satellite est : **T = 86 164 s** (jour sidéral) : « le jour sidéral correspondant à une rotation  $2\pi$  d'un point de la terre autour de l'axe des pôles » est différent du jour solaire : « de 24 H correspondant aux temps qui sépare deux passages consécutif du soleil à la vertical d'un lieu)

➤ Son altitude h est :  $(R_T + h)^3 = \frac{T^3 g_0 R_T^2}{4\pi^2}$  ( $R_T + h = 42000 \text{ km}$  ;  $R_T = 6400 \text{ km}$ )

Finalement : **h = 36000 km**

➤ On utilise ces satellites pour les télécommunications.

### 4. détermination de la masse des astres (3<sup>ème</sup> loi de Kepler)

$$v = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{r}} \quad \text{d'où} \quad 2\pi r = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{r}} \cdot T \Rightarrow (4\pi^2 r^2 = G \cdot \frac{M_T}{r} \cdot T^2) \Rightarrow 4\pi^2 r^3 = G \cdot M_T \cdot T^2$$

$$\text{On obtient finalement : } \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_T} = \text{cte}$$

**Autour d'un astre les carrés de la période de révolution des satellites en orbite circulaire sont proportionnels aux cubes des rayons des orbites.**

Application

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{G.M} \text{ avec } M = \text{masse de astre} \Rightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G.M}$$

On a :

$$M = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{r^3}{T^2}$$

# MOUVEMENT DANS UN CHAMP UNIFORME

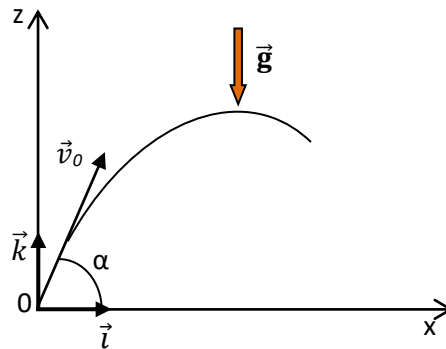
## I. PROJECTILE LANCE DANS CHAMP DE PESANTEUR UNIFORME

### Problème

Un projectile de masse  $m$  est lancé dans le champ de pesanteur  $\vec{g}$  terrestre, considéré localement comme uniforme. Le vecteur vitesse de lancement  $\vec{v}_0$ , supposé dans le plan vertical, fait un angle de tir  $\alpha$  avec le plan horizontal.

Étudions le mouvement du centre d'inertie  $G$  du projectile.

### 1. ETUDE DYNAMIQUE



#### a) Système

Le projectile de masse  $m$

#### b) Référentiel

Référentiel terrestre supposé galiléen lié au repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

#### c) Bilan des forces extérieures

$\vec{P}$  : le poids du projectile de masse  $m$

$\vec{F}$  : les forces de résistances de l'air

#### d) Théorème du centre d'inertie

$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \cdot \vec{a}$  d'où  $\vec{P} + \vec{F} = m \cdot \vec{a}$  les résistances de l'air étant négligeables alors

$\vec{P} = m \cdot \vec{a}$  ;  $m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a}$  finalement  $\vec{g} = \vec{a}$

**Remarque :  $\vec{a}$  et  $\vec{g}$  ont la même direction et le même sens ; l'accélération  $\vec{g}$  de pesanteur ne dépend pas de la masse du projectile**

## 2. ETUDE CINEMATIQUE

### 2.1. équation horaire du mouvement

$\mathbf{a = g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}}$  est une constante donc le mouvement est uniformément varié. On a alors l'équation horaire :

de la position  $\overrightarrow{OG}$  du centre d'inertie  $G$  du projectile

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2} \vec{g} \cdot t^2 + \vec{V}_0 \cdot t + \overrightarrow{OG}_0 \text{ car } \vec{a} = \vec{g}$$

et celle de la vitesse  $\vec{V}_G$  de son centre d'inertie  $G$ ,

$$\vec{V} = \vec{g} \cdot t + \vec{V}_0 \text{ car } \vec{a} = \vec{g}$$

À l'instant initial  $t = 0$  on a :

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = -a = -g \end{cases}; \quad \vec{V}_0 \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_{0y} = 0 \\ v_{0z} = v_0 \sin \alpha \end{cases}; \quad \vec{OG}_0 \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases}$$

À l'instant  $t \neq 0$ , l'équation horaire est ;

$$\vec{OG} \begin{cases} x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -\frac{1}{2} \cdot g t^2 + v_0 \sin \alpha \cdot t \end{cases}$$

On obtient celui de la vitesse en dérivant par le temps  $t$

À l'instant  $t \neq 0$ ; l'équation horaire de la vitesse est ;

$$\vec{V} \begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos \alpha \\ v_y(t) = 0 \\ v_z(t) = -g \cdot t + v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

Le mouvement du projectile se déroule dans le plan perpendiculaire à (oy) donc le plan (xoz) car  $y = 0$ .

## 2.2. Étude de la trajectoire

### a. équation cartésienne de la trajectoire

L'équation de la trajectoire s'obtient comme suit :

$x = v_0 \cos \alpha \cdot t$  alors  $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$  et en remplaçant la valeur de  $t$  dans  $z$  on a ce qui suit :

$$z = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \cdot \tan \alpha \quad \text{pour } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

La trajectoire est une parabole de concavité tournée vers les  $z$  négatif.

### b. la flèche H

C'est la hauteur maximale atteinte par le projectile par rapport au plan horizontal passant par l'origine de tir O.

Elle s'obtient comme suit :

Au sommet la coordonnée de vitesse selon l'axe (oz) est nulle

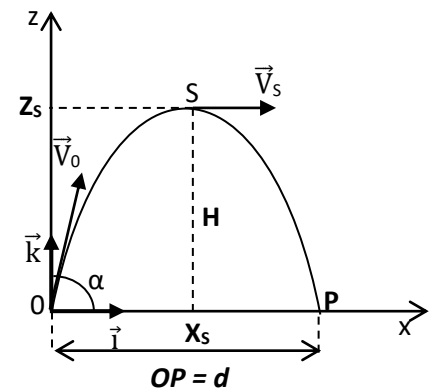
$$V_z = 0 \text{ d'où } V_z = \frac{dz}{dt} = -g \cdot t_s + V_0 \cdot \sin \alpha = 0$$

alors  $t_s = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$  et en remplaçant  $t_s$  dans l'expression de

l'équation horaire selon :  $z(t_s)$

On a :

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$



**NB : la flèche est maximale pour  $\sin^2 \alpha = 1$**

**d'où  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  (tir vertical)**

Exercice de maison

Déterminer l'abscisse  $X_s$  au sommet

**Remarque (autre méthode)**

On peut dériver l'équation de la trajectoire  $z = f(x)$  par rapport à la variable  $x$  et l'annuler afin d'obtenir l'abscisse au sommet  $x_s$ . ( $x_s = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$ )

On détermine finalement  $H$  en remplaçant  $x_s$  dans l'équation de la trajectoire d'où  $y_s = f(x_s)$

**c. la portée  $d$**

La portée horizontale  $OP = d = x_a$  du tir est l'intersection de la trajectoire du projectile avec le plan horizontal passant par l'origine.

en P ;  $z = 0$  alors  $z = f(x) = 0$  ;  $\frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x_p^2 + x_p \cdot \tan \alpha = 0$

$$d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

N.B : pour **une vitesse  $v_0$  donnée**

- la portée est maximale si  $\sin 2\alpha = 1$  ;  $\sin 2\alpha = \sin \frac{\pi}{2}$  donc  $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$

La portée maximale a pour valeur  $OP_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$

- si la portée n'est pas maximale c'est à dire pour  $d < d_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$  d'où

$$\sin 2\alpha = \frac{gd}{v_0^2}$$

- $\alpha_1 = \frac{gd}{v_0^2}$  (tir tendu)
- $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1$  (tir en cloche) avec  $\alpha_1 < \alpha_2$

### 3. ÉTUDE ÉNERGETIQUE

Il ya conservation de l'énergie mécanique sur tout le parcours du projectile. Soit A et B deux positions du projectile, on a :

$E_{mA} = E_{mB}$  alors  $E_{pA} + E_{cA} = E_{pB} + E_{cB}$

$$mgz_A + 1/2m.v_A^2 = mgz_B + 1/2m.v_B^2 \text{ d'où } mg(z_A - z_B) = \frac{1}{2} m(v_B^2 - v_A^2)$$

$$2g(z_A - z_B) = (v_B^2 - v_A^2)$$

**Exercice d'application**

Un projectile est lancé dans le champ de pesanteur avec une vitesse  $v_0 = 200 \text{ m.s}^{-1}$ .  
Calculer, pour une portée horizontale  $d = 2500 \text{ m}$  :

- les angles de tir possibles ;
  - la flèche ;
  - la durée du tir, l'impact se produisant sur le sol, plan horizontal qui contient le point de lancement ;
  - la vitesse lors de l'impact.
- On prendra  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ .

Résolution détaillée

- a) les angles possibles sont

$$\sin 2\alpha = \frac{gd}{v_0^2} = \frac{9,8 \times 2500}{200^2} = 0,6125 \text{ d'où } 2\alpha_1 = 37,8^\circ \text{ soit } \alpha_1 = 18,9^\circ$$

$$\text{et } \alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1 = 71,1^\circ$$

- b) la flèche

$$\text{nous avons } h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \text{ d'où}$$

$$\text{avec } \alpha_1 = 18,9^\circ, h = 214 \text{ m (tir tendu)}$$

$$\text{avec } \alpha_2 = 71,1^\circ, h = 1825 \text{ m (tir en cloche)}$$

- c) l'équation horaire selon la verticale est :  $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t$

$$\text{le projectile heurte le sol en C tel que : } z_C = 0 = t(-\frac{1}{2}gt + v_0 \sin \alpha) = 0$$

$$\text{d'où } t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

soit, avec  $\alpha_1$  ;  $t_1 = 13,2 \text{ s}$  et avec  $\alpha_2$  ;  $t_2 = 38,6 \text{ s}$

- d) des équations donnant les coordonnées du vecteur vitesse en fonction du temps,  
nous tirons :

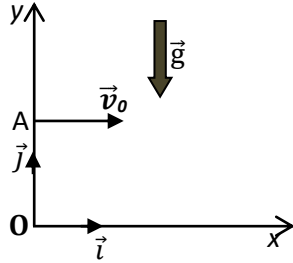
$$\begin{cases} \dot{x}_C = v_0 \cos \alpha \\ \dot{y}_C = 0 \\ \dot{z}_C = -v_0 \sin \alpha \end{cases} \text{ d'où } v_C = \sqrt{\dot{x}_C^2 + \dot{z}_C^2} = v_0 = 200 \text{ m.s}^{-1}$$

la norme du vecteur vitesse  $\vec{v}_C$  est égale à  $v_0$  et sa direction est symétrique de celle du vecteur  $\vec{v}_0$  par rapport à l'axe  $(O, \vec{k})$ . Ce dernier résultat peut être déduit directement des propriétés de symétrie de la parabole.

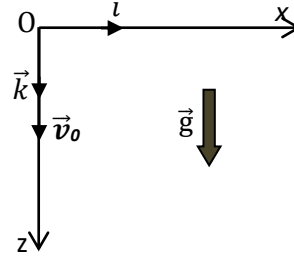
Application

Dans chacun des cas de figure suivant, déterminer :

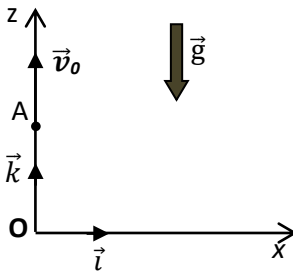
1. Les équations horaires du mouvement
2. En déduire les équations cartésiennes de leur trajectoire.



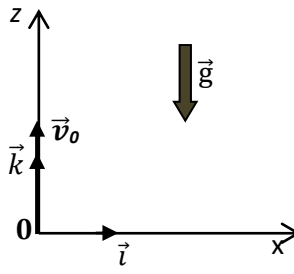
①



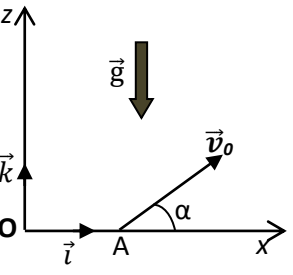
②



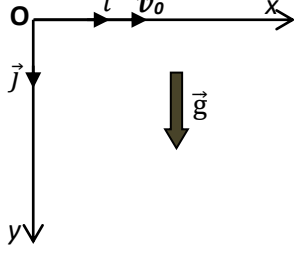
③



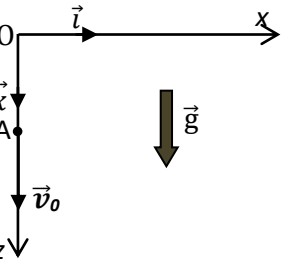
④



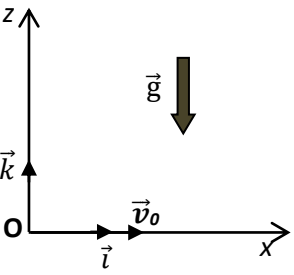
⑤



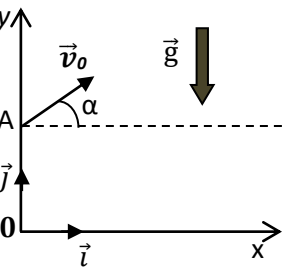
⑥



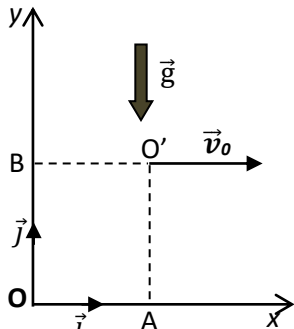
⑦



⑧



⑨

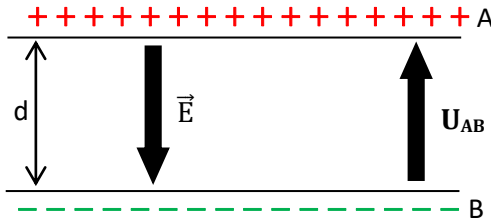


⑩

## II. PARTICULE CHARGÉE DANS UN CHAMP ÉLECTROSTATIQUE UNIFORME

### 1. Rappels (champ électrostatique uniforme)

Un champ électrostatique uniforme est obtenu entre deux (02) plaques métalliques parallèles séparées d'une distance  $d = AB$  par un isolant et soumis à une tension  $U_{AB} = V_A - V_B$  (avec  $V_A > V_B$ ).



$$U_{AB} = V_A - V_B = \vec{E} \cdot \vec{AB} = E \times d$$

Caractéristique du champ  $\vec{E}$ :

**Direction :** perpendiculaire aux plaques

**Sens :**  $\vec{E}$  décroît les potentiels

**Module :**  $E = \frac{|V_A - V_B|}{d} = \frac{U_{AB}}{d}$  ; avec  $d$  en (m) et  $U_{AB}$  en (V)

**Remarque :** la force électrostatique  $\vec{F}$  dépend de la charge de la particule et du champ  $\vec{E}$ .

On a :  $\vec{F} = q\vec{E}$  (si  $q > 0$  alors  $\vec{F}$  et  $\vec{E}$  ont le même sens)

(si  $q < 0$  alors  $\vec{F}$  et  $\vec{E}$  sont de sens contraire)

### 2. Mouvement de la particule chargée dans un champ électrostatique uniforme

#### Problème

Une particule de charge  $q < 0$  et de masse  $m$  pénètre en O entre deux plaques métalliques horizontales chargées et parallèles avec une vitesse constante  $\vec{V}_0$  parallèle aux plaques.

**Étudions le mouvement des particules entre les plaques.**

#### 2.1 ETUDE DYNAMIQUE

##### a) système

Particule chargée ( $q = -e < 0$ ) de masse  $m$ .

##### b) référentiel

du laboratoire considéré comme galiléen lié au repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

##### c) bilan des forces extérieures

$\vec{P}$  : le poids de la particule

$\vec{F}$  : force électrostatique

d) théorème du centre d'inertie

$\vec{P} + \vec{F} = m\vec{a}$ ;

Le poids de la particule entre les plaques est négligeables devant la force électrostatique  $\vec{F}$  on écrit donc  $\vec{P} \ll \vec{F}$

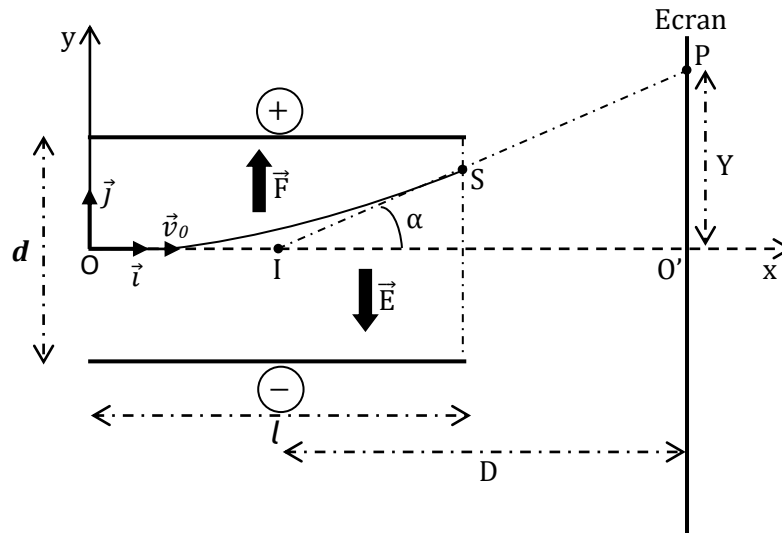
Finalement  $\vec{F} = q\vec{E} = m\vec{a}$  ; d'où

$$\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

$\vec{a}$  est constant car (**E, q et m sont constant**) et dépend de la masse et de charge de la particule. Le vecteur accélération  $\vec{a}$  et le vecteur champ électrostatique  $\vec{E}$  sont colinéaires.

**2.2 ETUDE CINEMATIQUE**

**2.2.1 équation horaire du mouvement**



$\vec{OM} = \frac{1}{2} \vec{a} \cdot t^2 + \vec{V}_0 \cdot t + \vec{OM}_0$  ;  $\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$  ( $q = -e < 0$ )

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = \frac{-qE}{m} \\ a_z = 0 \end{cases} ; \quad \vec{V}_0 \begin{cases} v_{0x} = v_0 \\ v_{0y} = 0 \\ v_{0z} = 0 \end{cases} ; \quad \vec{OG}_0 \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases}$$

**NB :**  $a_y = \alpha \vec{E} \cdot \vec{j} = E \times j \times \cos(\vec{E}, \vec{j})$  d'où ( $\alpha = \frac{q}{m}$ )

$$\vec{OM} \begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = \frac{-qE}{2m} t^2 \\ z(t) = 0 \end{cases} \text{ ou } (q = -e) \vec{OM} \begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = \frac{eE}{2m} t^2 \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

On obtient celui de la vitesse en dérivant par le temps t

$$\vec{V} \begin{cases} v_x(t) = v_0 \\ v_y(t) = \frac{eE}{m} t \\ v_z(t) = 0 \end{cases}$$

### 2.2.2 équation de la trajectoire

En tirant  $t$  dans l'équation (1) on a :  $t = \frac{x}{v_0}$

et en remplaçant dans l'équation horaire (2) on a :

$$y = \frac{eE}{2mV_0^2} x^2$$

La particule décrit une trajectoire parabolique d'axe de sommet O et sa concavité est tournée vers les y positif.

### 2.2.3 Étude de la trajectoire

#### a) position à la sortie (soit $l$ la longueur de la plaque)

Le faisceau de particule sort des plaques si son abscisse vaut la longueur des plaques ( $x = l$ ) d'où  $x_s = l$

On obtient  $y_s$  en remplaçant  $x = l$  dans l'expression de l'équation de la

trajectoire ; on obtient  $y = \frac{eE}{2mV_0^2} x^2$  d'où  $y = \frac{eE}{2mV_0^2} l^2$

$$\text{Coordonnées de sortie} \begin{cases} x_s = l \\ y_s = \frac{eE}{2mV_0^2} l^2 \end{cases}$$

#### b) vecteur vitesse de sortie

À la sortie S, on détermine le temps  $t_s$  de sortie :  $x_s = l = v_0 \cdot t_s$  alors  $t_s = \frac{l}{v_0}$

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \\ v_y(t) = \frac{eE}{m} t \end{cases} \text{ coordonnées de la vitesse de sortie (} t_s = \frac{l}{v_0} \text{)} \quad \vec{v}_s = \begin{cases} v_{xs} = v_0 \\ v_{ys} = \frac{eE}{mv_0} l \end{cases}$$

#### c) la condition de sortie des particules des plaques

Le faisceau de particule arrivera à sortir des plaques s'il parcourt la distance  $l$  et que son ordonnée à la sortie soit inférieur à  $d/2$  ; c'est-à-dire ( $y_s < \frac{d}{2}$ )

$$y_s = \frac{eE}{2mV_0^2} l^2 < \frac{d}{2} \text{ avec } E = \frac{U}{d}$$

La condition s'écrit :  $\frac{eU}{m \cdot d^2 \cdot V_0^2} l^2 < 1$

### 2.2.4 Déflexion électrique d'un faisceau de particule

On place une écran (E) à une distance D du milieu des plaques ( $D = 10'$ )

#### a) Déviation électrostatique

C'est l'angle  $\alpha$  de déviation que fait le vecteur vitesse  $\vec{v}_0$  à partir du milieu I des plaques avec l'axe (O, x) porté par le vecteur vitesse.

$$\tan \alpha = \frac{2y_s}{l} = \frac{v_{sy}}{v_{sx}} = \frac{eEl}{m \cdot V_0^2}$$

**b) Déflexion électrostatique**▪ **Définition**

C'est la distance entre l'axe (O, x) porté le vecteur vitesse  $\vec{v}_0$  et le point d'impact de la particule sur l'écran (E) : (Y = O'P).

▪ **Expression de la déflexion électrique Y**

A la sortie les particules sont uniquement soumises à leur poids qui est négligeables, donc à aucune forces extérieures, alors isolées ( $m\vec{a} = \vec{0}$  d'où  $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$  alors  $\vec{v} = \overrightarrow{cste}$ ); son mouvement est donc rectiligne uniforme de vitesse  $\vec{v}_S$  de sortie.

$\tan\alpha = \frac{Y}{D}$  alors  $Y = D.\tan\alpha$  avec  $\tan\alpha = \frac{eEl}{m.v_0^2}$  et  $E = \frac{U}{d}$  ( $\tan\alpha = \frac{eUl}{m.d.v_0^2}$ )

$$Y = \frac{e.U.l.D}{m.d.v_0^2}$$

$$Y = k.U$$

$$\text{avec } k = \frac{e.l.D}{m.d.v_0^2}$$

**La déflexion électrique est proportionnelle à la tension appliquée aux bornes du condensateur défecteur.**

**2.3 ÉTUDE ÉNERGÉTIQUE**

Il ya conservation de l'énergie mécanique sur tout le parcours de la particule q dans le champ  $\vec{E}$  entre les plaques. Soit A et B deux positions du projectile, on a :

$E_{mA} = E_{mB}$  alors  $E_{pA} + E_{CA} = E_{pB} + E_{CB}$

$$qV_A + 1/2m.v_A^2 = qV_B + 1/2m.v_B^2$$

$$q(V_A - V_B) = \frac{1}{2} m(v_B^2 - v_A^2)$$

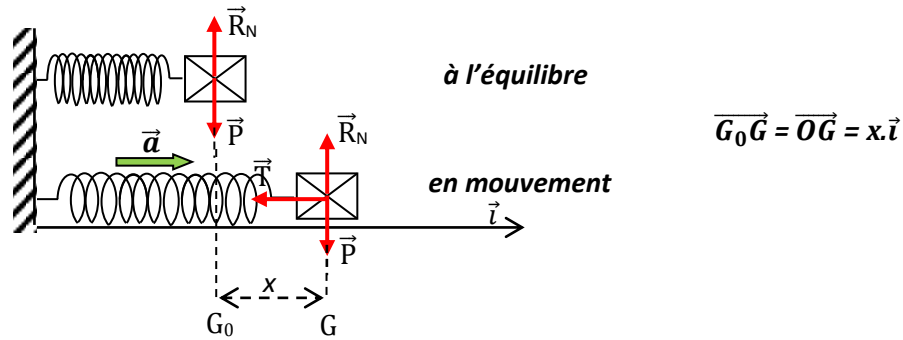
$$qU_{AB} = \frac{1}{2} m(v_B^2 - v_A^2)$$

# OSCILLATIONS MÉCANIQUES LIBRES

## I. ETUDE DU SYSTEME (RESSORT+ SOLIDE)

### 1. étude dynamique

Un solide (S) est accroché à l'extrémité libre d'un ressort horizontal. Le solide peut se déplacer horizontalement sans frottement sur un axe (x'x) parallèle à l'axe du ressort.



#### a. système

Le dispositif solide-ressort de masse (m)

#### b. référentiel

terrestre considéré comme galiléen

#### c. bilan des forces extérieures

$\vec{P}$  : le poids du solide de masse (m)

$\vec{R}_N$ : la réaction normal de l'axe de coulissement

$\vec{T}$  : la tension du ressort

#### d. équation différentielle du mouvement

TCI :  $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \cdot \vec{a}$  ;  $\vec{P} + \vec{T} + \vec{R}_N = m \cdot \vec{a}$

projection sur l'axe (x'x) :  $P_x + T_x + R_x = m \cdot a_x$  or  $T_x = -k \cdot x$

$-k \cdot x = m \cdot \ddot{x}$  finalement

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

**Cette équation liée à l'abscisse x et à sa dérivée seconde  $\ddot{x}$ , est l'équation différentielle du mouvement du solide.**

## 2. étude cinématique

### 2.1. solution de l'équation différentielle

Cette équation différentielle  $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$  a pour solution la fonction sinusoïdale dont l'équation horaire est de la forme :

$$x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$X_m$  : amplitude en (m) généralement choisie positive ou élongation maximale.  
 $\varphi$  : phase à l'origine des dates ( $t = 0$ ), s'exprime en (rad)  
 $\omega_0$  : pulsation propre ( $\text{rad.s}^{-1}$ ).  
 $(\omega_0 t + \varphi)$  : phase à un instant de date  $t$  en (rad).

$X_m$  et  $\varphi$  dépendent uniquement des conditions initiales.

Le mouvement du centre d'inertie de l'oscillateur est rectiligne sinusoïdale.

### 2.2. amplitude et phase à l'origine

L'Amplitude  $X_m$  et la phase  $\varphi$  à l'origine des dates dépendent uniquement des conditions initiales de la position  $x_0$  et de la vitesse  $v_0$  du mobile données par l'énoncé.

**Conditions initiales :  $x = x_0 = A > 0$**  équivaut à ( $t = 0$ ) ;  $x = x_0 = X_m \cos \varphi > 0$  (1)

**$v = v_0 = 0 \text{ m.s}^{-1}$**  équivaut à ( $t = 0$ )  $v = v_0 = -\omega_0 X_m \sin \varphi = 0$  (2)

(2)  $\sin \varphi = 0$  alors  $\varphi = 0$  ou  $\varphi = \pi$

pour  $\varphi = \pi$  ;  $X_m = \frac{A}{\cos \varphi} = \frac{A}{\cos \pi} = -A < 0$

pour  $\varphi = 0$  ;  $X_m = \frac{A}{\cos \varphi} = \frac{A}{\cos 0} = A > 0$  finalement  **$\varphi = 0$  et  $X_m = A$**

L'équation horaire cherchée est donc :  **$x(t) = A \cos \omega_0 t$**

### 2.3. pulsation propre $\omega_0$ période propre $T_0$ , fréquence propre $N_0$

#### a. pulsation propre $\omega_0$

Si l'équation horaire  $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$  est solution de l'équation différentielle alors, elle vérifie l'équation différentielle.

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \text{ équivaut à } -X_m \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\frac{k}{m}x$$

$$-\omega_0^2 X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\frac{k}{m}x$$

$$-\omega_0^2 x = -\frac{k}{m}x \text{ d'où } \omega_0^2 = \frac{k}{m}; \text{ finalement}$$

$$\omega_0^2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Il s'exprime en radian par seconde ( $\text{rad.s}^{-1}$ )

**$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$**  : caractéristique d'un oscillateur libre non-amorti (appelé aussi : mouvement harmonique simple MHS)

**b. période propre  $T_0$** 

C'est la durée d'une oscillation et s'exprime en seconde (s)

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} ; \text{ finalement}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

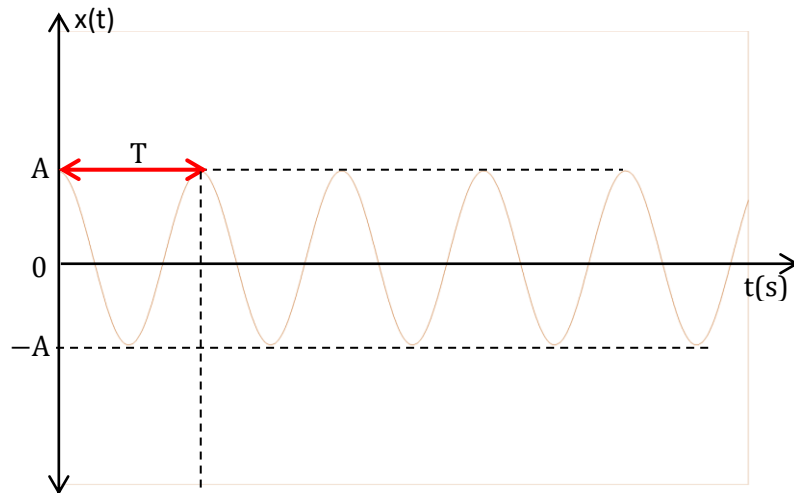
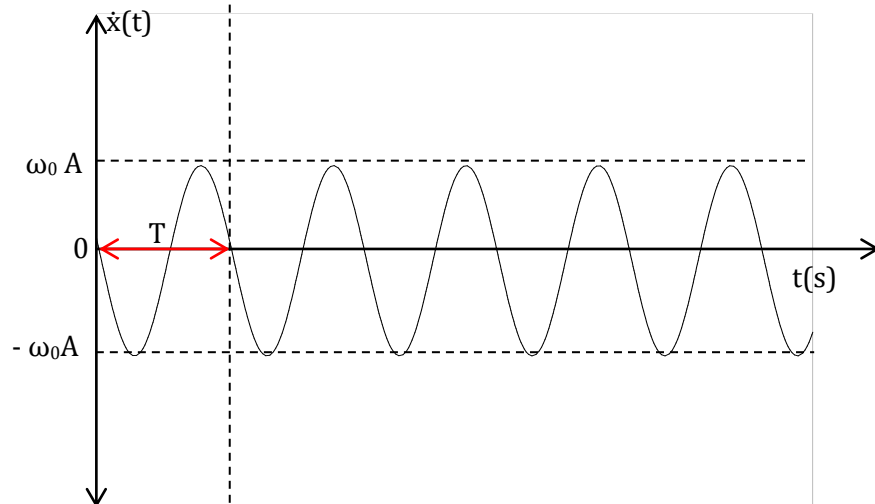
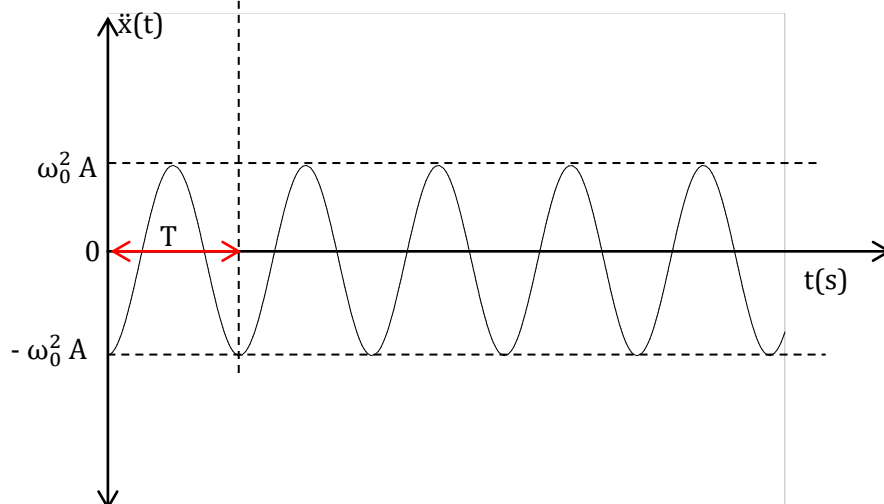
**c. fréquence propre  $N_0$** 

C'est le nombre d'oscillations par seconde, il s'exprime en Hertz (Hz)

$$N_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} ; \text{ finalement}$$

$$N_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

**N.B :** On parle de pulsation, période, et fréquence **propres**, car une fois le système lâché, plus aucun agent extérieur ne vient le modifier, dissiper ou lui apporter de l'énergie.

**d. représentation graphique :**position :  $x(t) = A\cos\omega_0 t$ vitesse :  $v(t) = \dot{x} = -\omega_0 A \sin\omega_0 t$ accélération :  $a(t) = \ddot{x} = -\omega_0^2 A \cos\omega_0 t$ 

## II. ÉTUDE ÉNERGÉTIQUE DU SYSTÈME (RESSORT+SOLIDE)

### 1. énergie mécanique d'un pendule élastique

$$E_m = E_c + E_{pe} = \frac{1}{2} m.v^2 + \frac{1}{2} k.x^2 = \frac{1}{2} m.\dot{x}^2 + \frac{1}{2} k.x^2$$

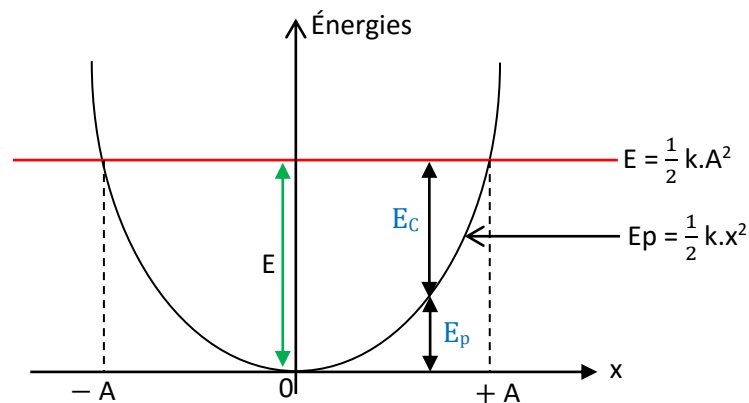
### 2. conservation de l'énergie mécanique

$$\begin{aligned} x &= X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) & E_m &= E_c + E_{pe} = \frac{1}{2} m.v^2 + \frac{1}{2} k.x^2 \\ x^2 &= X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) & E_m &= \frac{1}{2} m.\dot{x}^2 + \frac{1}{2} k.x^2 \\ \dot{x} &= -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi) & E_m &= \frac{1}{2} m.\omega_0^2 X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} k.X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) \\ \dot{x}^2 &= \omega_0^2 X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) & E_m &= \frac{1}{2} k.X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} k.X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) \\ \omega_0^2 &= \frac{k}{m} & E_m &= \frac{1}{2} k.X_m^2 \underbrace{[\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi)]} \end{aligned}$$

$$E_m = \frac{1}{2} k.X_m^2 = \text{constante}$$

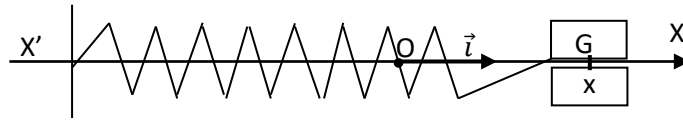
L'énergie mécanique totale d'un oscillateur non amorti est donc constante.

### COURBE D'ENERGIE



**Application N°1**

On considère un ressort de raideur  $k$ . On place un solide de masse  $m$  à l'extrémité libre d'un ressort. Le solide peut glisser sans frottement le long d'une tige horizontale.



A l'équilibre, le centre d'inertie  $G$  du solide coïncide avec l'origine  $O$  du repère. On écarte le solide de sa position d'équilibre et on l'abandonne sans vitesse initiale. Il oscille et son centre d'inertie est repère par son abscisse  $x$ .

**1- Étude dynamique**

- 1.1- Faire le bilan des forces extérieures qui s'exercent sur le solide et les représenter.
- 1.2- En appliquant le théorème du centre d'inertie, établir l'équation différentielle du mouvement du solide.

**2- Étude cinématique**

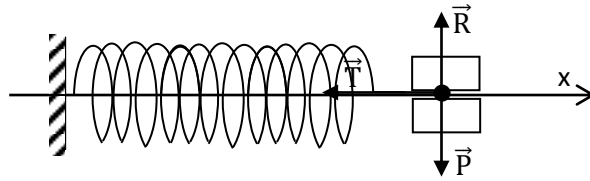
- 2.1- Montrer que  $x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$  est solution de l'équation différentielle ;
- 2.2- Déterminer les expressions de la pulsation propre  $\omega_0$ , de la période propre  $T_0$  et de la fréquence propre  $N_0$ .

**3- Étude énergétique**

- 3.1- Donner les expressions de l'énergie potentielle élastique, de l'énergie cinétique et de l'énergie mécanique du système en fonction du temps
- 3.2- Montrer que l'énergie mécanique du système se conserve
- 3.3- Retrouver l'équation différentielle du mouvement à partir de la conservation de l'énergie mécanique.

Résolution détaillée**1- Étude dynamique**

## 1.1- bilan des forces

 $\vec{P}$  : le poids du solide de masse (m) $\vec{T}$  : la tension du ressort $\vec{R}$  : la réaction de l'axe

## 1.2- équation différentielle

TCI :  $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m.\vec{a}$ sur  $(x)$  :  $-T + 0 + 0 = m.a_x$  or  $T = -kx$  ;  $a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$ 

$$-k.x = m.\ddot{x} \quad \text{alors} \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}.x = 0$$

**2- Étude cinématique**2.1- montrons que  $x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$  est solution

$$\text{posons : } \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$\dot{x} = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 .x \quad \text{et} \quad \ddot{x} = -\omega_0^2 .x \quad \text{d'où} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 .x = 0$$

x est solution de l'équation différentielle

## 2.2- la pulsation propre

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 .x = 0 \\ \ddot{x} + \frac{k}{m} .x = 0 \end{cases} ; \text{ alors par identification on a : } \omega_0^2 = \frac{k}{m} \text{ d'où } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ en rad/s}$$

## 2.3- la période propre

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \text{ (s)}$$

## 2.4- la fréquence propre

$$N_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ (Hz)}$$

**3- étude énergétique**

## 3.1 Expressions des énergies :

$$\text{Expression de l'énergie potentielle élastique } E_{pe} = \frac{1}{2} k.x^2 = \frac{1}{2} kX_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\text{Expression de l'énergie cinétique } E_c = \frac{1}{2} m.v^2 = \frac{1}{2} m.\omega_0^2 .X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

Expression de l'énergie mécanique

$$E_M = E_{pe} + E_c = \frac{1}{2} k.x^2 + \frac{1}{2} m.v^2 = \frac{1}{2} kX_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} m.\omega_0^2 .X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

## 3.2 montrons que l'énergie mécanique se conserve

$$E_m = \frac{1}{2} m.\dot{x}^2 + \frac{1}{2} k.x^2$$

$$E_m = \frac{1}{2} m.\omega_0^2 X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} k.X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E_m = \frac{1}{2} k.X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} k.X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E_m = \frac{1}{2} k.X_m^2 \underbrace{[(\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi))]}_{=1} \quad \text{donc : } E_m = \frac{1}{2} k.X_m^2 = \text{constante}$$

3.3 équation différentielle à partir de  $E_m$ 

$$E = \frac{1}{2} m.v^2 + \frac{1}{2} k.x^2 = \text{constante}$$

$$E = \frac{1}{2} m.\dot{x}^2 + \frac{1}{2} k.x^2 = \text{constante d'où } \frac{dE}{dt} = 0$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m.\dot{x}^2 + \frac{1}{2} k.x^2\right) = \frac{1}{2} m.\frac{d}{dt}(\dot{x}^2) + \frac{1}{2} k.\frac{d}{dt}(x^2) = 0$$

$$\frac{dE}{dt} = m.\dot{x}.\ddot{x} + k.\dot{x}.x = m.\dot{x}\left(\ddot{x} + \frac{k}{m}.x\right) = 0 \text{ d'où } \left(\ddot{x} + \frac{k}{m}.x\right) = 0$$

# LE CHAMP MAGNÉTIQUE

## I. MISE EN ÉVIDENCE DU CHAMP MAGNÉTIQUE

### 1. existence du champ magnétique

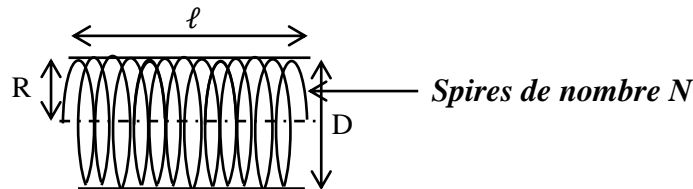
Approchons une substance ferromagnétique d'un aimant, elle est attirée par ce dernier. Éloignons progressivement cette substance de l'aimant, l'attraction diminue jusqu'à s'annuler. Il existe donc autour d'un aimant un champ **appelé champ magnétique**.

### 2. autres sources de champs magnétiques

#### a. champ créé par un courant

Un solénoïde est une bobine constituée par un fil électrique (recouvert de vernis isolant) régulièrement enroulé.

Lorsque le solénoïde est parcouru par un courant, il a les mêmes propriétés qu'un aimant donc se comporte comme un aimant.



#### Remarque :

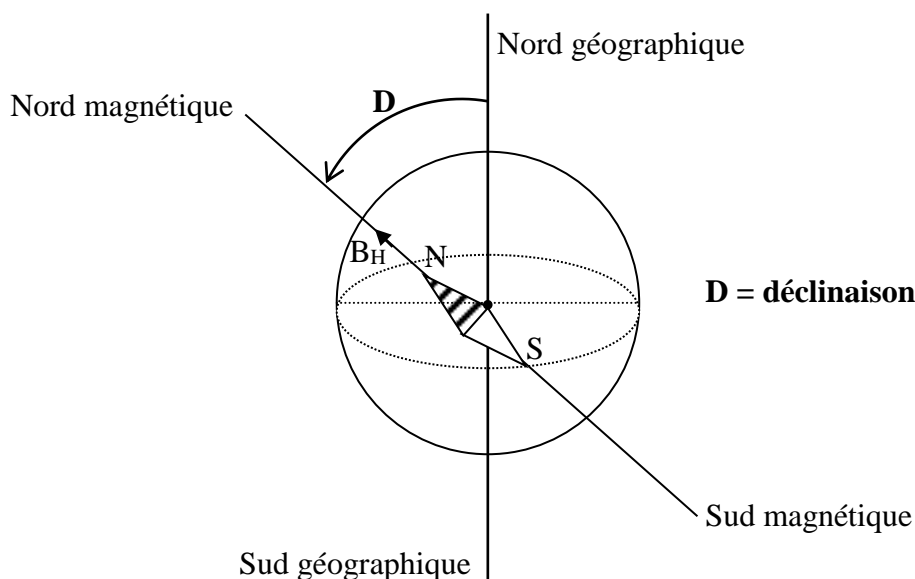
- une bobine est dite plate si la longueur  $l$  inférieure à  $R$  ( $l < R$ ).
- elle est dite longue si sa longueur  $l$  est supérieure à  $R$  ( $l > R$ )
- lorsque  $l \geq 10 R$  alors on a un solénoïde

Les bords d'un aimant sont appelés pôles (pôles SUD ; pôle NORD)

Les bords d'un solénoïde ou bobine sont appelés faces (face SUD, face NORD)

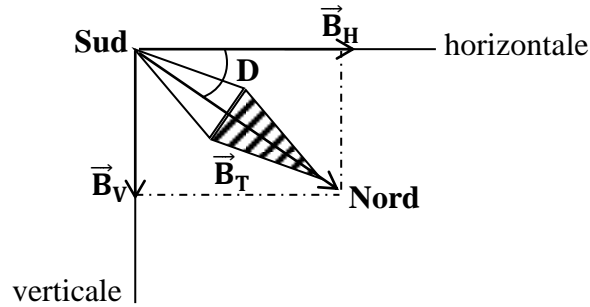
#### b. champ magnétique terrestre

Elle se comporte comme un énorme aimant ayant deux (02) pôles : **le pôle nord magnétique terrestre et le pôle sud magnétique terrestre**.



$B_H$  : Composante horizontale du champ magnétique terrestre.

$B_V$  : Composante verticale du champ magnétique terrestre.



$\vec{B}_T = \vec{B}_H + \vec{B}_V$  avec  $D = (\vec{B}_H, \vec{B}_T)$  ; l'inclinaison est égal à environ  $60^\circ$  en France  
 $B_H = B_T \cos 60^\circ = 2.10^{-6} T$

### 3. Espace champ magnétique

C'est l'espace délimité par l'aimant dans lequel il est capable d'attirer les substances ferromagnétiques.

## II. LE VECTEUR CHAMP MAGNÉTIQUE

### 1. définition

L'espace champ magnétique est caractérisé en chacun de ses points par un vecteur champ magnétique noté  $\vec{B}$ . Il a pour caractéristiques.

### 2. Caractéristiques

#### a. Direction

La direction de  $\vec{B}$  est donnée par l'axe de l'aiguille aimantée.

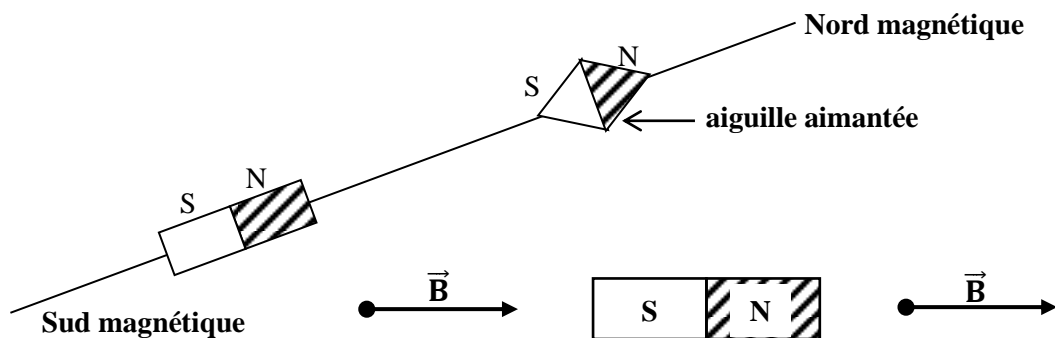
#### b. Sens

Le sens du vecteur champ magnétique est du pôle SUD vers le pôle NORD de l'aiguille.

#### c. Intensité

Elle donnée par un appareil de mesure appelé le Teslamètre et son unité est le Tesla (T)

#### d. représentation



- Le pôle dirigé vers le NORD est le pôle NORD de l'aimant
- Le pôle dirigé vers le SUD est le pôle SUD de l'aimant

### III. LES SPECTRES MAGNÉTIQUES

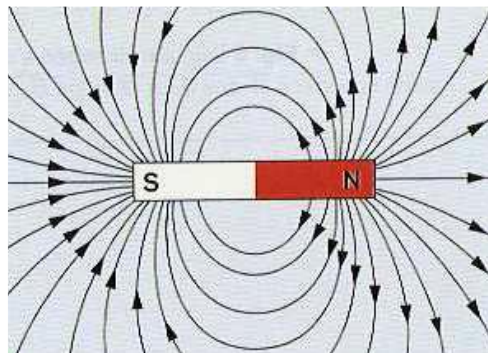
#### 1. définition

On appelle ligne de champ magnétique, une ligne tangente en chacun de ses points au vecteur champ magnétique  $\vec{B}$ . Elle est orientée dans le sens du vecteur champ magnétique  $\vec{B}$ .

L'ensemble des lignes de champ est appelé : **Spectre magnétique**

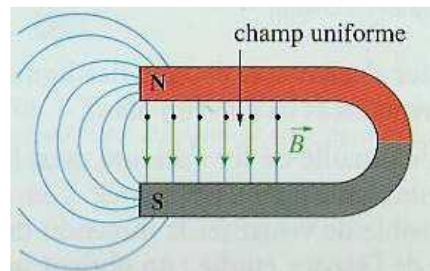
#### 2. Représentation de quelques spectres magnétiques

##### a. aimant droit



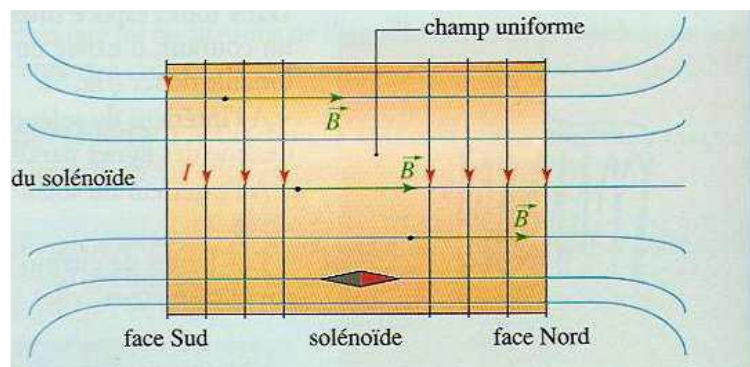
Pour un aimant droit les lignes de champ sortent du pôle nord et entrent par le pôle sud ; seul la ligne de champ passant par l'axe est rectiligne.

##### b. aimant en U



Entre deux branches d'un aimant en U les lignes de champ sont parallèles. Le champ magnétique y est uniforme.

##### c. solénoïde



A l'intérieur d'un solénoïde (bobine) les lignes de champ sont parallèles et orientées du Sud vers le nord. Le champ crée à l'intérieur du solénoïde est uniforme.

### 3. champ magnétique crée à l'intérieur d'un solénoïde

#### 3.1. caractéristiques du champ

##### a. direction

Le champ  $\vec{B}$  est parallèle à l'axe du solénoïde

##### b. Sens

Le champ  $\vec{B}$  est orienté de la face SUD vers la face NORD

##### c. intensité

Le champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde est proportionnel à l'intensité du courant électrique qui le traverse et au nombre de spires par unité de longueur de ce solénoïde.

$$B_0 = \mu_0 n I$$

avec  $n = \frac{N}{l}$

**N** : nombres de spires ( $N = \frac{l}{\pi D}$ )

**l** : longueur du solénoïde

**n** : nombre de spires par mètre (spires/m)

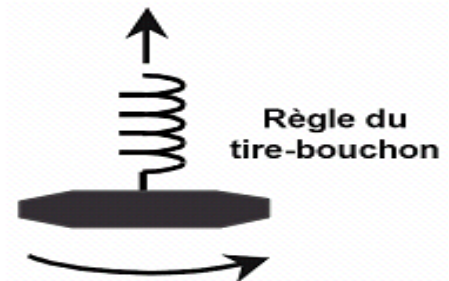
$\mu_0$  :  $4\pi \cdot 10^{-7}$  S.I : perméabilité magnétique du vide

$B_0$  se mesure en Tesla (T) :  $1 \text{ mT} = 10^{-3}\text{T}$  et  $1\mu\text{T} = 10^{-6}\text{T}$

#### 3.2. Détermination du sens du champ, du nom des faces ou du sens du courant dans un solénoïde

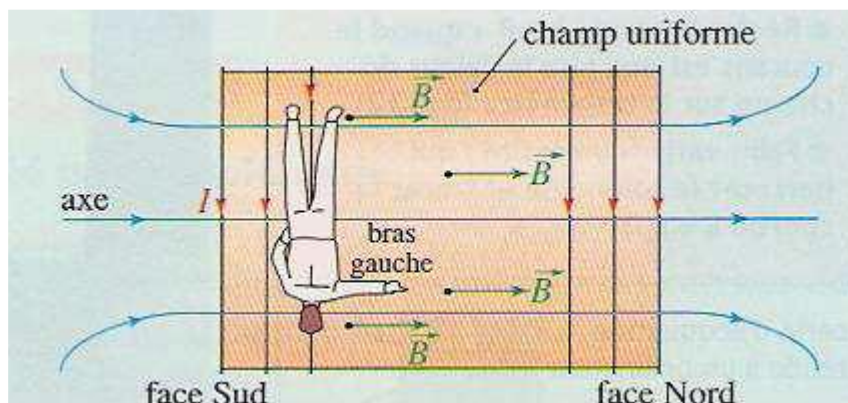
##### ▪ règle du tir bouchons

Le tir bouchon placé suivant l'axe de la bobine et tourné dans le sens du courant avance de la face sud vers la face nord.



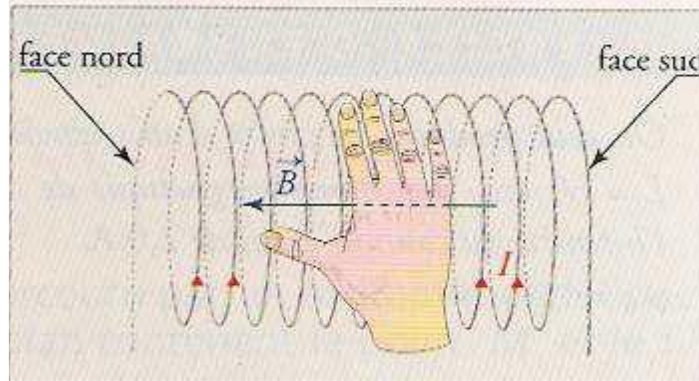
##### ▪ règle de l'observateur d'ampère

L'observateur d'ampère couchée sur la spire le courant rentrant par ses pieds et sortant par sa tête, il regarde l'intérieur de la bobine et indique la face Nord par son bras gauche.



▪ **Règle de la main droite**

Placer l'intérieur de la paume sur le fil visible. Les 4 doigts autres que le pouce dans le sens de I. Le pouce indique alors le sens de  $\vec{B}$ . Connaissant le sens de  $\vec{B}$  on a déduit le nom des faces.



**Exercice d'application N°1**

On étudie à l'aide d'un teslamètre l'intensité B du champ magnétique créé par un courant passant dans un solénoïde en son centre en fonction de divers paramètres.

1- **expérience 1** (influence de l'intensité du courant)

On utilise un solénoïde de longueur  $l_1 = 0,5\text{m}$  comportant  $N_1 = 240$  spires. On fait varier l'intensité I du courant qui passe dans le solénoïde. Pour chaque valeur de I, on note la valeur  $B_1$  du champ magnétique. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

I(A)	1	2	3	4
$B_1(\text{T})$	$6.10^{-4}$	$12.10^{-4}$	$18.10^{-4}$	$24.10^{-4}$
$B_1/I$				

- 1-1. Compléter le tableau.
- 1-2. En déduire une relation entre  $B_1$  et I.

2- **expérience 2** (influence du nombre de spires par unité de longueur)

On refait la même avec un solénoïde de longueur  $l_2 = 0,80\text{m}$  comportant  $N_2 = 768$  spires. On obtient les résultats suivants :

<b>I(A)</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
<b><math>B_2(\text{T})</math></b>	<b><math>12.10^{-4}</math></b>	<b><math>24.10^{-4}</math></b>	<b><math>36.10^{-4}</math></b>	<b><math>48.10^{-4}</math></b>

- 2.1- Calculer le nombre  $n_1$  et  $n_2$  de spires par mètre pour chacun des deux solénoïdes.
- 2.2- déduire des expériences 1 et 2 une relation entre B et n.
- 3- -

3.1- compléter le tableau suivant :

<b>I(A)</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
<b><math>B_1(\text{T})</math></b>	<b><math>6.10^{-4}</math></b>	<b><math>12.10^{-4}</math></b>	<b><math>18.10^{-4}</math></b>	<b><math>24.10^{-4}</math></b>
<b><math>B_1/n_1.I</math></b>				

- 3.2- En déduire une relation entre  $B_1$ ,  $n_1$  et I

3.3-  $B_1$  est de la forme :  $B_1 = k.n_1.I$

3.3.1- Comparer le coefficient  $k$  à  $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$  S.I

3.3.2- En déduire l'expression générale de l'intensité du champ magnétique  $B$  à l'intérieur d'un solénoïde.

### Résolution détaillée

1.1) remplissage du tableau

<b>I(A)</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
<b><math>B_1</math>(T)</b>	<b><math>6.10^{-4}</math></b>	<b><math>12.10^{-4}</math></b>	<b><math>18.10^{-4}</math></b>	<b><math>24.10^{-4}</math></b>
<b><math>B_1/I</math></b>	<b><math>6.10^{-4}</math></b>	<b><math>6.10^{-4}</math></b>	<b><math>6.10^{-4}</math></b>	<b><math>6.10^{-4}</math></b>

1.2) relation entre  $B_1$  et  $I$

$B_1$  est proportionnel à  $I$  alors  $B_1 = k.I = 6.10^{-4} I$

2.1) nombre de spires/mètre

solénoïde 1 :  $n_1 = \frac{N_1}{l_1} = 480$  spires/mètre

solénoïde 2 :  $n_2 = \frac{N_2}{l_2} = 960$  spires/mètre ; on constate que  $n_2 = 2n_1$

2.2) relation entre  $B$  et  $n$ .

On constate que lorsque le nombre de spires/mètre double, l'intensité du champ magnétique double, pour une même intensité du courant.  **$B = k'.n$**

3.1) complétons du tableau.

<b>I(A)</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
<b><math>B_1</math>(T)</b>	<b><math>6.10^{-4}</math></b>	<b><math>12.10^{-4}</math></b>	<b><math>18.10^{-4}</math></b>	<b><math>24.10^{-4}</math></b>
<b><math>B_1/n_1.I</math></b>	<b><math>1,25.10^{-6}</math></b>	<b><math>1,25.10^{-6}</math></b>	<b><math>1,25.10^{-6}</math></b>	<b><math>1,25.10^{-6}</math></b>

3.2) relation entre  $B_1$ ,  $n_1$  et  $I$

$B_1$  est proportionnel à  $n_1 I$  d'où  $B_1 = 1,25.10^{-6} n_1.I$

3.3)  $B_1 = k''.n_1.I$

3.3.1) comparaison de  $k''$  et  $\mu_0$

$$k'' = 1,25.10^{-6} \text{ S.I}$$

$$\mu_0 = 4\pi.10^{-7} = 1,25.10^{-6} \text{ S.I} ; \text{ alors } k'' = \mu_0 \text{ d'où } B_1 = \mu_0.n_1.I$$

3.3.2) généralisation

L'intensité du champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde est proportionnel à  $I$ , et à  $n$  on a :  $B = \mu_0.n.I$

### **Exercice d'application N°2**

On mesure un champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde à l'aide d'un teslamètre placé au centre de ce solénoïde. On fait varier l'intensité  $I$  qui circule dans les spires et on mesure le champ  $B$  dont les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous.

I(A)	5,0	4,5	4,0	3,0	2,0	1,0	0,5
B (mT)	3,3	3,0	2,8	2	1,4	0,7	0,4

1. Montrer, en traçant le graphe  $B = f(I)$  que le champ magnétique est proportionnel à l'intensité  $I$  du courant.
2. Calculer le nombre de spires qui constituent le solénoïde sachant que sa longueur  $\ell = 40\text{cm}$  et son diamètre est de  $4\text{cm}$ . On donne  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\text{SI}$

#### Résolution détaillée

1. le graphe  $B = f(I)$  est une droite passant par l'origine des axes donc l'intensité  $I$  du courant est proportionnelle à  $B$  ou vis versa.

On peut écrire pour cela :  $B = k \cdot I$

2. déterminons la constante  $k$ .

$$B = \mu_0 \cdot n \cdot I = \mu_0 \frac{N}{\ell} I = k \cdot I ; \text{ alors } k = \mu_0 \times \frac{N}{\ell}$$

(échelle :  $1\text{cm} = 1\text{A}$  et  $4\text{cm} = 1\text{mT}$ )

$$k = \frac{\Delta B}{\Delta I} = \frac{(3,3 - 0,4) \cdot 10^{-3}}{5 - 0,5} = 6,44 \cdot 10^{-4} \text{ T/A}$$

$$N = \frac{k \cdot \ell}{\mu_0} ; \text{ A.N : } N = \frac{0,4 \times 6,44 \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 204,99 \text{ soit } 205 \text{ spires.}$$

# MOUVEMENT D'UNE PARTICULE CHARGÉE DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE UNIFORME

## I- FORCE MAGNÉTIQUE OU FORCE DE LORENTZ

### 1. définition

Une particule de charge  $q$ , se déplaçant à la vitesse  $v_0$ , dans un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme subie une force magnétique ou de Lorentz  $\vec{F}$ ; et a pour expression

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v}_0 \wedge \vec{B}$$

### 2. caractéristiques de la force magnétique $\vec{F}$

a. **direction** : perpendiculaire au plan formé par le vecteur vitesse  $\vec{v}$  et le vecteur champ magnétique  $\vec{B}$ .

b. **Sens** : son sens est tel que le trièdre  $(q \cdot \vec{v}, \vec{B}, \vec{F})$  soit direct et il est déterminé par l'observateur d'ampère ou la règle des trois doigts de la main droite.

c. **point d'application** : la particule supposée ponctuelle.

d. **Intensité** :  $F = |q| \cdot v \cdot B \cdot \sin \alpha$  ( $\alpha$  : angle entre  $\vec{v}$  et  $\vec{B}$ )

pour  $\vec{v}$  perpendiculaire à  $\vec{B}$  on a :  $F = |q| \cdot v \cdot B$

$F$  : Newton (N)

$v$  : mètre /seconde (m/s)

$B$  : en Testla (T)

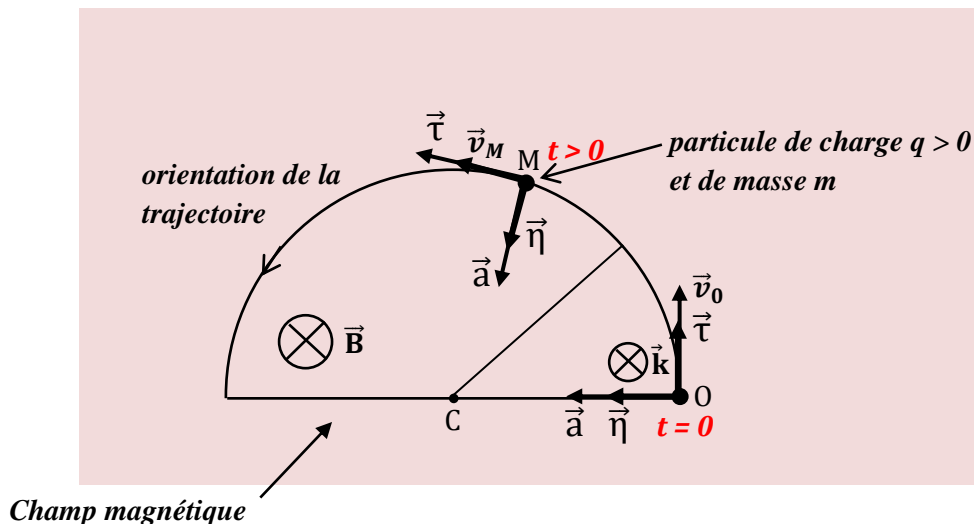
$q$  : en coulomb (C)

## II- TRAJECTOIRE D'UNE PARTICULE CHARGÉE DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE UNIFORME

### Problème

- cas d'où la vitesse initiale  $v_0$  est perpendiculaire au champ magnétique  $\vec{B}$

À l'instant initiale ( $t = 0$ ) une particule de charge ( $q > 0$ ) et de masse  $m$  pénètre avec une vitesse  $v_0$  par un point O dans une région de l'espace où règne un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme. On choisit  $\vec{v}_0 = v_0 \cdot \vec{i}$ ,  $\vec{B} = B \cdot \vec{k}$



Nous étudions le mouvement de la particule à l'intérieur du champ magnétique uniquement.

### 1. étude dynamique du mouvement

- Système** : particule chargée de masse (m)
- référentiel** : terrestre supposé Galiléen
- Repère** :  $(O, \vec{\tau}, \vec{\eta}, \vec{k})$
- bilan des forces extérieures**

$\vec{P} = m \cdot \vec{g}$  : le poids de la particule

$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$  : la force magnétique

- théorème du centre d'inertie**

T.C.I :  $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$  car  $\vec{F} \gg \vec{P}$  d'où  $\vec{F} = q \cdot v_0 \cdot B \cdot \vec{n}$  (*car  $\vec{v}_0$  est perpendiculaire à  $\vec{B}$* )

$m \cdot a \cdot \vec{n} = q \cdot v_0 \cdot B \cdot \vec{n}$  alors

$$a = \frac{|q|}{m} v_0 \cdot B$$

### 2. étude du mouvement

#### 2.1. une trajectoire plane

$a_k = \frac{dv_k}{dt} = 0$  alors  $v_k = v_{0k} = \text{constante}$  ; Donc il n'y a pas de mouvement suivant  $\vec{k}$ .

Le mouvement de la particule est plan et il s'effectue dans le plan (xoy) perpendiculaire à  $\vec{B}$  puis contenant la vitesse initiale  $\vec{v}_0$ .

#### 2.2. un mouvement circulaire

$\vec{a} = \frac{q}{m} \vec{v} \wedge \vec{B} = \frac{q}{m} v_0 \cdot B \cdot \vec{n}$  ( $\vec{v}$  perpendiculaire à  $\vec{B}$ )

Dans la base de Frenet on a :  $\begin{cases} \vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v_0}{r} \vec{\eta} \\ \vec{a} = \frac{q}{m} v \cdot B \cdot \vec{\eta} \end{cases}$  ; par identification on a :

$$\frac{v_0}{r} = \frac{q \cdot v_0 \cdot B}{m} \quad \text{d'où} \quad r = \frac{m \cdot v_0}{|q| \cdot B} = (m, q, B, v_0 = \text{constante})$$

Donc le mouvement de la particule est circulaire.

#### 2.3. un mouvement uniforme

$a_T = \frac{dv_T}{dt} = 0$  ce qui implique que  $v_T = v = \text{constante}$

Donc le mouvement de la particule est uniforme.

### Conclusion (nature du mouvement)

**Une particule chargée entrant dans un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme avec une vitesse  $v_0$  perpendiculaire au champ  $\vec{B}$  décrit un mouvement circulaire et uniforme dans un plan contenant la vitesse  $v_0$ .**

**Le rayon de la trajectoire est donnée par l'expression :  $r = \frac{m \cdot v_0}{|q| \cdot B}$**

#### ▪ Cas particuliers

Si l'angle entre  $v_0$  et  $\vec{B}$  est différent de  $0^\circ$  et  $90^\circ$ , la particule décrit un mouvement uniforme hélicoïdal (trajectoire d'hélice)

### 3. expression de la vitesse linéaire, vitesse angulaire, période, fréquence

#### a. vitesse linéaire $v_0$

$$v_0 = \frac{|q|.B.r}{m}$$

#### b. vitesse angulaire $\omega$

La vitesse angulaire est reliée à la vitesse linéaire par  $\omega = \frac{v}{r}$

$$\omega = \frac{|q|.B}{m}$$

#### c. la période T

La période de révolution est le temps mis par la particule pour effectuer un tour)

$T = \frac{2\pi}{\omega}$  ce qui donne

$$T = 2\pi \frac{m}{|q|.B}$$

#### d. la fréquence f

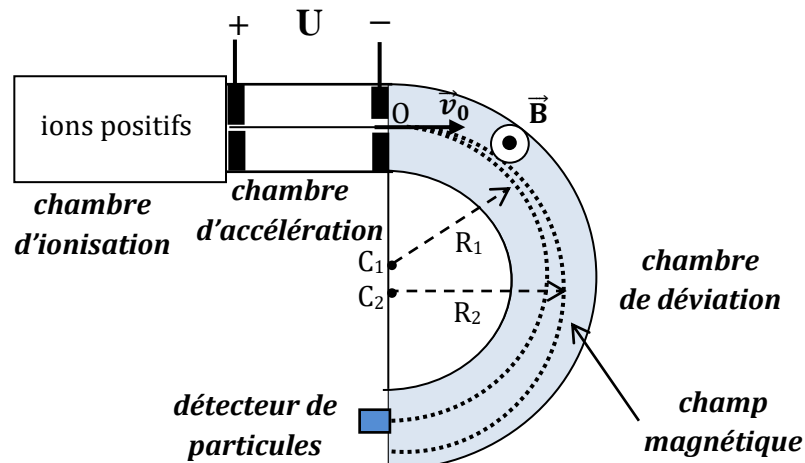
La fréquence est reliée à la période par  $f = \frac{1}{T}$  ce qui donne

$$f = \frac{1}{2\pi} \frac{m}{|q|.B}$$

## III- APPLICATIONS PRATIQUES

### 1. spectrographe de masse (Tle D)

Le spectrographe de masse sert à séparer les isotopes d'un même élément. Il est formé de trois chambres où règne un vide très poussée.



- **chambre d'ionisation** : On y produit des ions de même charge  $q$  mais de masses  $m_1$  et  $m_2$  différents.
- **chambre d'accélération** : A travers une première fente, les ions pénètrent dans cette chambre avec une vitesse négligeable. Ils sont accélérés par la tension

$$U > 0 \text{ et sortent avec une vitesse } v_0 = \sqrt{\frac{2|q| \cdot U}{m}}$$

- **chambre de déviation** : Les ions sont déviés par un champ magnétique  $\vec{B}$  et ont pour trajectoire des demi-cercles dont les rayons  $R_1$  et  $R_2$  dépendent des masses  $m_1$  et  $m_2$  ; ce qui donne  $R_1 = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2 \cdot m_1 U}{|q|}}$  et  $R_2 = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2 \cdot m_2 U}{|q|}}$

**NB : le rayon de la trajectoire augmente avec la masse.**

### Conclusion

**On arrive ainsi à recueillir sur le détecteur des particules de même masse ; la position du détecteur permet de déterminer le rayon  $R$  de la trajectoire.**

**Connaissant la charge  $q$ , on détermine la masse  $m$  de la particule.**

### 2. filtre de vitesse ou filtre de Wien (Tle D)

Il permet de sélectionner une particule en fonction de sa vitesse. Il superpose à la fois le champ magnétique et le champ électrique.

### 3. cyclotron (découvert en 1929 par E. O. LAWRENCE aux USA) (Tle C)

Un cyclotron est **un accélérateur de particules chargées**. Il comporte deux électrodes creuses (des demi-cylindres plats) en forme de la lettre "D", les "dee" (en anglais) ou "dés" (en français), entre lesquelles est appliquée une tension alternative. Les "dés" baignent dans un champ magnétique uniforme.

En son centre (point O) se trouve une source qui injecte des particules chargées : protons, deutons (= particules formées d'un proton et d'un neutron), particules alpha (= particules formées par 2 protons et 2 neutrons),...

Ces particules sont accélérées vers le "dé" supérieur, où elles arrivent en  $A_1$  avec une vitesse  $V_{A1}$ . Elles décrivent alors avec la vitesse  $V_{A1}$  constante un demi-cercle. Au moment précis où elles s'apprêtent à sortir du dé (point  $B_1$ ), la tension appliquée entre les deux "dés" a changé de signe : les particules sont accélérées vers le "dé" inférieur (entre  $B_1$  et  $C_1$ ) : sa nouvelle vitesse est  $V_{C1} > V_{A1}$ . Dans le "dé" inférieur les particules décrivent aussi un demi-cercle, de rayon supérieur au précédent, avec la vitesse  $V_{C1}$  constante. Lorsqu'elles s'en sortent (point  $D_1$ ) la polarité des "dés" a encore changé : les particules sont accélérées vers le "dé" supérieur (entre  $D_1$  et  $A_2$ ) et entrent dans ce "dé" avec la vitesse  $V_{A2} > V_{C1}$ .

A chaque traversée de l'intervalle entre les "dés", la tension appliquée accélère les particules. Lorsque les particules sont à l'intérieur des "dés", elles décrivent des demi-

cercles avec des vitesses de plus en plus grandes et donc avec des rayons de plus en plus grands.

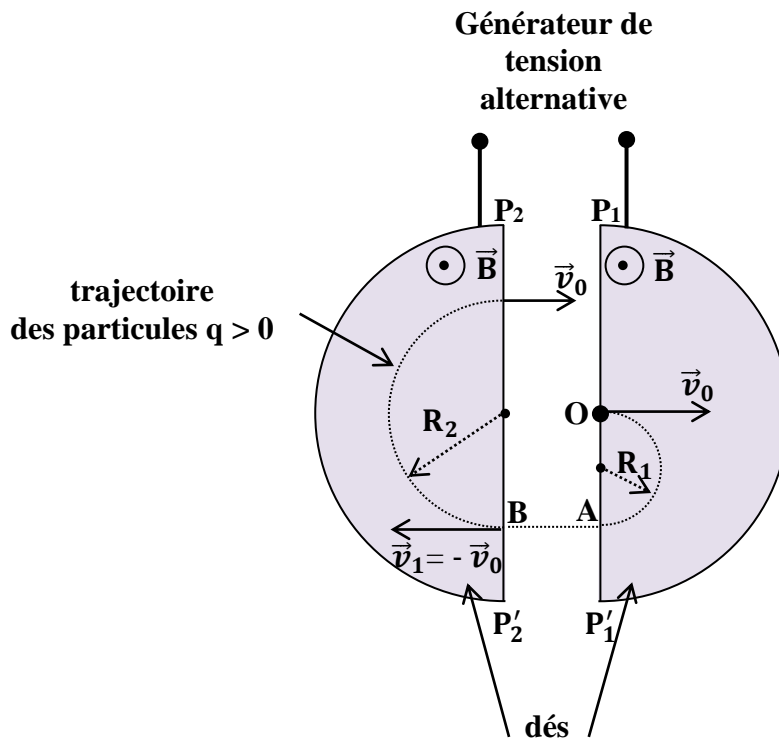
**La durée de parcours des demi-cercles est constante, égale à la demi-période :**

$$\frac{T}{2} = \pi \frac{m}{|q| \cdot B}$$

**La fréquence du générateur doit donc correspondre exactement à la fréquence constante des particules en mouvement circulaire.** (On néglige les durées du parcours entre les dés)

Après avoir tourné quelques centaines de tours, les particules arrivent à la périphérie des "dés" (rayon R) et sortent tangentiellement à la trajectoire avec une vitesse v. Elles peuvent alors être utilisées comme projectiles corpusculaire de haute énergie.

$$V = \frac{|q|B \cdot R}{m} \text{ et l'énergie cinétique des particules : } E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2 B^2 R^2}{m}$$



1. a) déterminons le rayon  $R_1 = \frac{m \cdot v_0}{|q| \cdot B} = \frac{m \cdot v_0}{e \cdot B}$
- b) la durée  $t_1$  du trajet :  $t_1 = \frac{d}{v_0} = \frac{\text{demi périmètre}}{v_0} = \frac{\pi \cdot R_1}{v_0} = \frac{\pi \cdot m \cdot v_0}{e \cdot B \cdot v_0} = \frac{\pi \cdot m}{e \cdot B}$
2. vecteur vitesse  $\vec{v}_1$
- $\vec{v}_1 = -\vec{v}_0$
- signe de U
- $U_{P_1 P_2} = U = V_{P_1} - V_{P_2} > 0$
- vitesse du proton en  $D_2$

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre  $P_1$  et  $P_2$

Système : proton

Référentiel : terrestre supposé galiléen

Bilan des forces est :

- force électrostatique  $\vec{F}_e$
- le poids négligeable

$$\frac{1}{2} m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 = e \cdot U \text{ d'où } v_2^2 = \frac{2 \cdot e \cdot U}{m} + v_0^2$$

2- calcul du rayon  $R_2$

$$R_2 = \frac{m \cdot v_2}{e \cdot B}$$

3- la durée  $t_2$  du trajet

$$t_2 = \frac{\pi \cdot R_2}{v_2} = \frac{\pi \cdot m \cdot v_2}{e \cdot B \cdot v_2} = \frac{\pi \cdot m}{e \cdot B}$$

4- Signe de  $U = U_{P1P2}$

$$V_{P1} - V_{P2} < 0$$

- période

$$T = t_1 + t_2 = \frac{2 \cdot \pi \cdot m}{e \cdot B}$$

- fréquence

$$f = \frac{1}{T} = \frac{e \cdot B}{2 \cdot \pi \cdot m}$$

- vitesse maximale

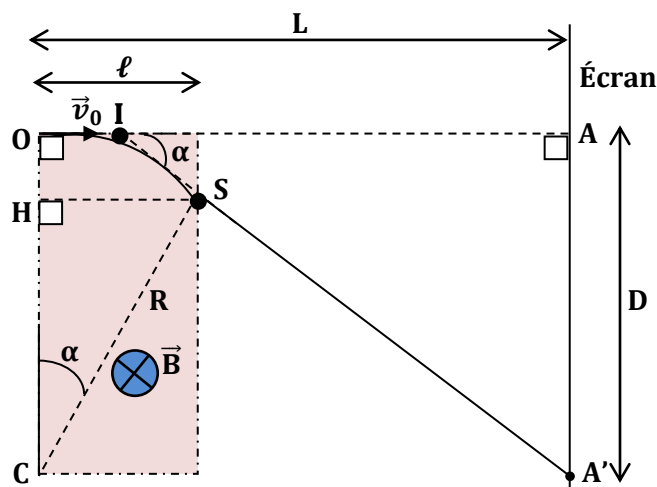
$$R_D = \frac{m \cdot V_{max}}{e \cdot B} \text{ alors } V_{max} = \frac{R_D \cdot e \cdot B}{m}$$

- énergie

$$E_{Cmax} = \frac{1}{2} m \cdot v_{max}^2$$

#### 4. Déflexion magnétique (Tle D)

Un faisceau de particule de charge  $q < 0$  et de masse  $m$  pénètre en O dans une région de largeur  $l$  où règne un champ  $\vec{B}$  uniforme avec une vitesse  $\vec{v}_0$  perpendiculaire et dirigé suivant OA. Ils arrivent en A' sur un écran E.



**a. définition**

La déflexion magnétique D est la distance entre le point d'impact de la particule sur l'écran E et l'axe perpendiculaire à l'écran porté par  $\vec{v}_0$ .

**b. expression**

soit  $\alpha = (\vec{CO}, \vec{CS}) = (\vec{IA}, \vec{IA'})$  : la déviation angulaire et  $\sin\alpha = \frac{HS}{CS} = \frac{\ell}{R}$

On a  $\tan\alpha = \frac{AA'}{IA} = \frac{D}{L}$  ; (pour  $\alpha$  très petit  $\sin\alpha = \tan\alpha$  ; et  $L - \frac{\ell}{2} = L$ ) ; d'où  $\frac{\ell}{R} = \frac{D}{L}$

La déflexion magnétique est donc :  $D = \frac{L \times \ell}{R}$  or  $R = \frac{m \cdot v_0}{|q| \cdot B}$

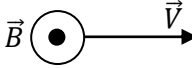
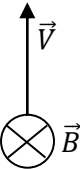
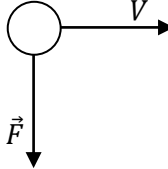
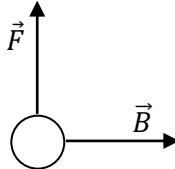
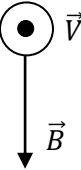
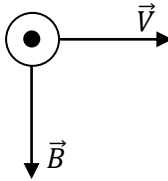
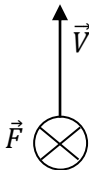
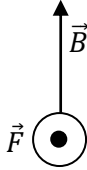
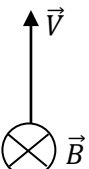
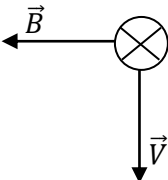
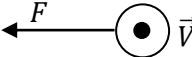
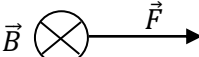
$$D = \frac{|q|}{m \cdot v_0} \times B \cdot L \cdot \ell$$

**N.B.** : la mesure de la déflexion magnétique D permet de calculer la charge massique  $\frac{q}{m}$

**ACTIVITE 1**

Sur les schémas ci-dessous doivent figurer  $\vec{v}$ ,  $\vec{B}$  et  $\vec{F}$  (force de Lorentz), Sachant que  $\vec{v}$  est orthogonal à  $\vec{B}$ .

Représenter le vecteur manquant et déterminer le signe de la charge  $q$  si elle n'est pas donnée.

Représentation de $\vec{F}$	Signe de la charge $q$	Représentation de $\vec{B}$	Représentation de $\vec{v}$
$q > 0$ 	 $q \dots\dots\dots$	$q < 0$ 	$q < 0$ 
$q < 0$ 	 $q \dots\dots\dots$	$q > 0$ 	$q > 0$ 
$q > 0$ 	 $q \dots\dots\dots$	$q < 0$ 	$q < 0$ 

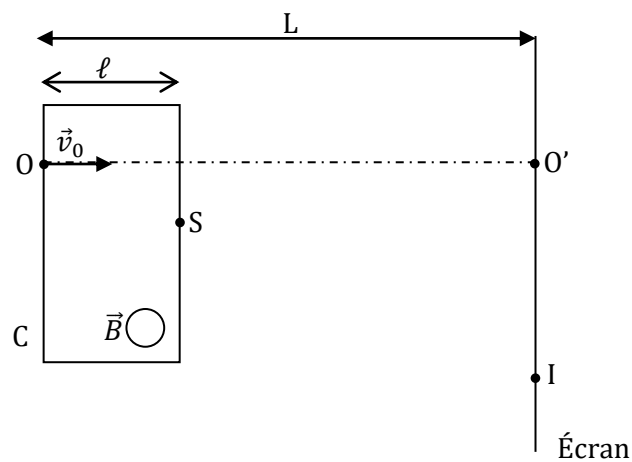
**Activité 2**

Un faisceau homocinétique d'électrons de vecteur vitesse  $\vec{v}_0$  pénètre en un point O dans une région où règne un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$ . Dans cette région de largeur  $\ell$ , leur trajectoire est circulaire de centre O et de rayon R. Les électrons sortent de cette région en un point S.

- 1- Préciser l'orientation du vecteur  $\vec{B}$
- 2-
  - 2.1- Représenter la trajectoire des électrons dans le champ  $\vec{B}$
  - 2.2- On considère que l'angle  $(\vec{CS}, \vec{CD}) = \alpha$ . Montrer que  $\sin \alpha = \frac{\ell}{R}$ . ( $\ell < R$ )

- 3- Quelle est la nature du mouvement des électrons une fois sortis du champ magnétique ?
- 4- Les électrons heurtent en un point I, un écran situé à la distance L du point O. On suppose que  $\ell \ll L$ .
  - 4.1- Représenter la trajectoire des électrons entre les points S et I.
  - 4.2- Exprimer  $\tan\alpha$  en fonction de la déflexion magnétique D et de L.
- 5- On suppose que  $\tan\alpha$  est petit.
  - 5.1- Exprimer alors la déflexion D en fonction de q, m,  $v_0$ , B,  $\ell$  et L.
  - 5.2- Calculer la valeur de D.

**Données :** masse d'un électron  $m = 9,1.10^{-31} \text{kg}$  ; charge d'un électron  $q = -e = -1,6.10^{-19} \text{C}$  ;  
 $B = 3,2.10^{-4} \text{T}$  ;  $\ell = 2 \text{cm}$  ;  $L = 30 \text{cm}$  ;  $v_0 = 2,1.10^7 \text{ m.s}^{-1}$ .

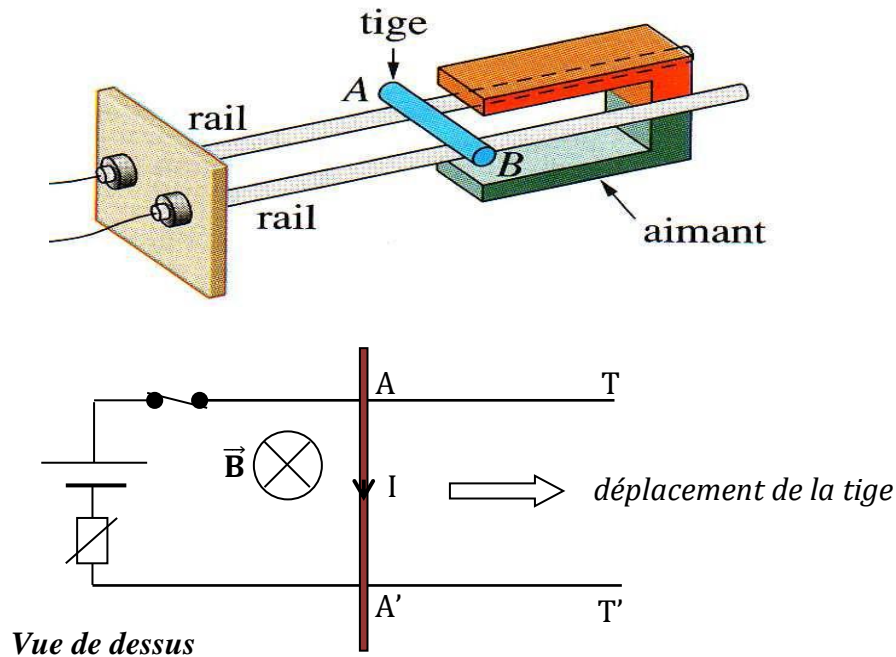


# LOI DE LAPLACE

## I. MISE EN EVIDENCE

### 1. expérience

On utilise les rails de Laplace constitués de deux tiges métalliques parallèles et horizontales ; d'une tige de cuivre AA' vertical et normal aux deux tiges.



On ferme le circuit et on établit un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme normale à la tige AA'.

### Observations

La tige se déplace dans le sens indiqué par la figure, elle est alors soumise à une force.

- **changeons le sens de  $I$** 
  - la tige se déplace dans l'autre sens d'où la force change de sens
- **changeons le sens de  $\vec{B}$** 
  - la tige se déplace dans l'autre sens d'où la force change de sens

**Remarque :** Le sens de la force  $\vec{F}$  dépend de ceux de  $\vec{B}$  et  $I$ .

- Si  $\vec{B} //$  à (AA') On observe aucun déplacement de la tige donc  $F = 0$  N.

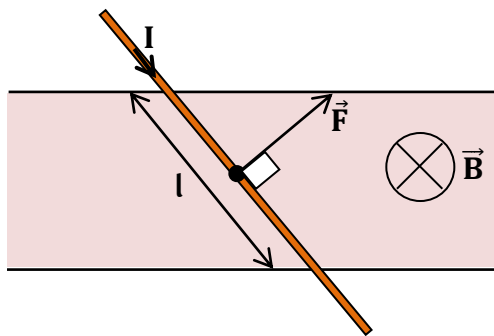
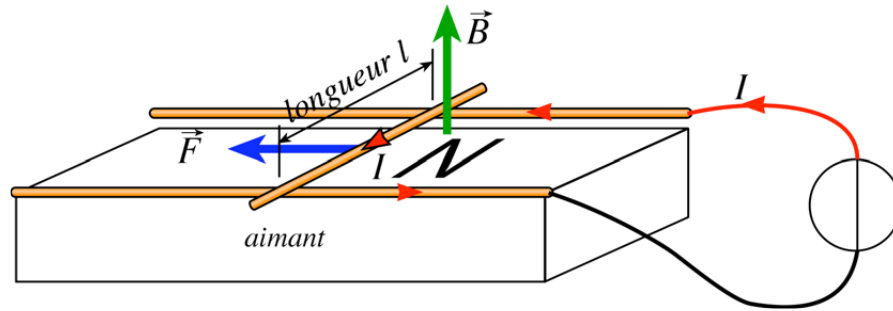
**Remarque :** la force  $\vec{F}$  dépend du sinus de l'angle entre la tige et le champ magnétique  $\vec{B}$ .

## 2. Loi de Laplace

### a. énoncé de la loi

Un conducteur de longueur  $l$  parcouru par un courant  $i$  et placé dans un magnétique  $\vec{B}$  est soumis à une force électromagnétique  $\vec{F}$  (Force de Laplace) appliquée au milieu du conducteur.

$$\vec{F} = I \vec{\ell} \wedge \vec{B}$$



- *Direction : le conducteur  $\vec{\ell}$*
- *Sens : celui de  $I$*
- *Intensité : longueur placée dans le circuit*

### b. Caractéristiques de la force de Laplace $\vec{F}$

**Point d'application** : milieu de la portion plongée dans le champ magnétique  $\vec{B}$ .

**Direction** : Normal au plan formé par la tige et le champ  $\vec{B}$ .

**Sens** : tel que  $(I\vec{\ell}, \vec{B}, \vec{F})$  forment un trièdre direct.

On détermine ce sens en utilisant les règles d'identification de la force de Lorentz mais en remplaçant la valeur  $q\vec{v}_0$  par  $I\vec{\ell}$ .

**Intensité** :  $F = I \cdot \ell \cdot B |\sin(\angle \vec{\ell}, \vec{B})|$

**N.B** : pour  $I\vec{\ell}$  perpendiculaire à  $\vec{B}$  on a :  $F = I \cdot \ell \cdot B$

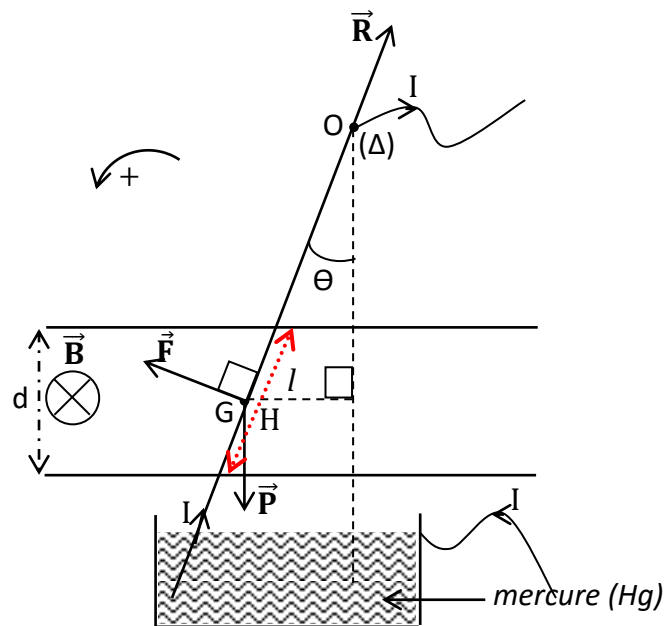
## II. APPLICATIONS

### 1- le conducteur pendule (tige de Laplace)

Il est constitué d'une tige de cuivre libre en rotation autour d'un axe horizontale passant par O dont l'une des extrémités est plongé dans du mercure. Cette tige traversée par un courant  $I$  et plongée dans un champ uniforme  $\vec{B}$  sur une longueur  $l$  est soumise à une force  $\vec{F}$  qui l'incline d'un angle  $\theta$ .

Résolution du problème**référentiel** : terrestre supposé galiléen**Repère** :  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ **système** : la tige**bilan des forces extérieures** : $\vec{P}$  : le poids de la tige en G $\vec{R}$  : la réaction de l'axe en O $\vec{F}$  : la Force de Laplace en H milieu de l.

On suppose que H et G sont confondus au même point.

À l'équilibre de la tige  $\sum_{i=1}^n M_{\Delta}(\vec{F}_{ext}) = 0$ 

- On a  $M_{\Delta}(\vec{R}) = 0$  car  $d = 0$  ou  $\vec{R}$  rencontre  $(\Delta)$  en O.
- $m.g.OG.\sin\theta - F.OG = 0$  ;

$$\sin\theta = \frac{F}{mg}$$

- **condition 1** : Si  $\theta$  petit alors  $(l = d)$  et comme  $\vec{B}$  perpendiculaire à  $\vec{l}$  on a :

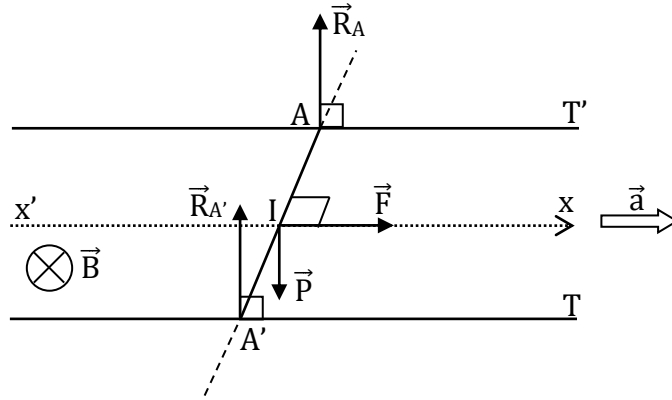
 $\sin(\vec{l}, \vec{B}) = 1$  donc  $F = I.d.B$ 

$$\sin\theta = \frac{F}{m.g} = \frac{I.d.B}{m.g} \quad \text{finalement ; } \sin\theta = \frac{I.d.B}{m.g}$$

- **condition 2** : si  $\theta$  est grand  $l > d$  ;  $d = l.\cos\theta$  et  $l = \frac{d}{\cos\theta}$

**2- les rails de Laplace****Référentiel** : terrestre supposé galiléen**Repère** : l'axe  $(Ox)$  ou  $(xx')$ **Système** : la tige  $AA'$ **Bilan des forces extérieures** :

- $\vec{P}$  : le poids de la tige en I
- $\vec{R}$  : la réaction de la tige en A et en A'
- $\vec{F}$  : la Force de Laplace en I.



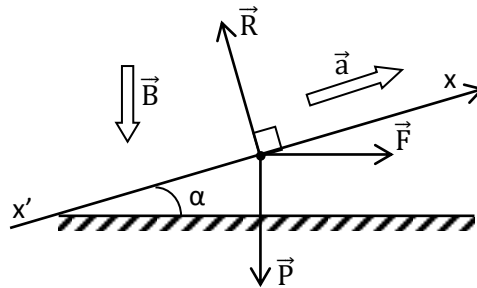
T.C.I :  $\vec{F} + \vec{R} + \vec{P} = m.\vec{a}$  ; avec  $\vec{R} = \vec{R}_A + \vec{R}_{A'}$

$\vec{R}_A$  et  $\vec{R}_{A'}$  et  $\vec{P}$  sont perpendiculaire à l'axe (xx') alors  $\vec{F} = m.\vec{a}$  d'où  $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\overline{IAA'} \wedge \vec{B}}{m}$

$F = I.AA'.B.\sin(\overline{IAA'}, \vec{B})$  ;  $\overline{AA'}$  perpendiculaire à  $\vec{B}$  donc  $F = I.AA'.B = m.a$

Finalemnt :  $a = \frac{I.AA'.B}{m}$

- **condition** : Si les rails sont relevés
  - *1ère cas* :  $\vec{B}$  vertical alors  $\vec{B}$  perpendiculaire à la force de Laplace  $\vec{F}$



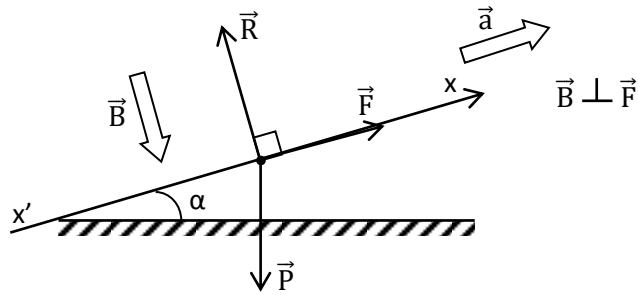
Appliquons T.CI suivant l'axe (xx') :  $\vec{F} + \vec{R} + \vec{P} = m.\vec{a}$  d'où  $P_x + R_x + F_x = m.a_x$

$-m.g.\sin\alpha + F.\cos\alpha = m.a$  ; or  $F = I.AA'.B$

d'où

$$a = \frac{I.AA'.B.\cos\alpha}{m} - g.\sin\alpha$$

➤ 2<sup>ème</sup> cas :  $\vec{B}$  est perpendiculaire à l'axe  $(xx')$

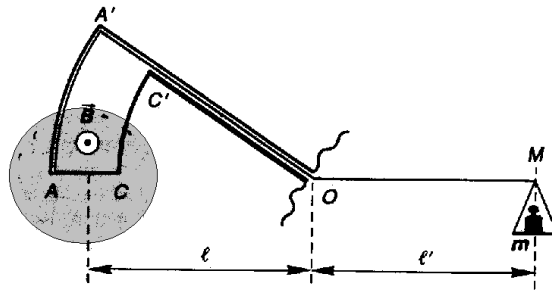


Appliquons T.CI suivant l'axe  $(xx')$  :  $\vec{F} + \vec{R} + \vec{P} = m \cdot \vec{a}$  d'où  $P_x + R_x + F_x = m \cdot a_x$   
 $I \cdot AA' \cdot B + mg \cdot \sin\alpha = m \cdot a$  alors

$$a = \frac{I \cdot AA' \cdot B}{m} - g \cdot \sin\alpha$$

N.B : à l'équilibre ( $a = 0$ )  $\sin\alpha = \frac{I \cdot AA' \cdot B}{mg}$

### 3- Balance de Cotton



Les portions  $AA'$  et  $CC'$  sont des portions d'arc de cercle, les forces de Laplace sur ces deux portions de cercle ont un moment nul.

D'après le théorème des moments appliqués à la balance.

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = 0 ; \text{ on a : } \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = 0 \text{ et } \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = 0;$$

$$\mathcal{M}_\Delta(m\vec{g}) = -m \cdot g \cdot l' \text{ et } \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = F \cdot l$$

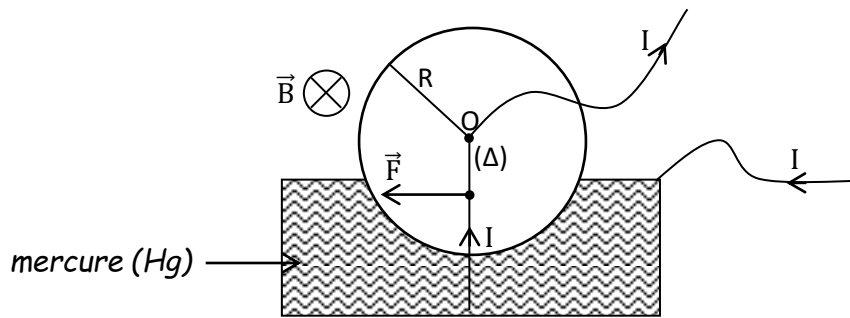
$$F \cdot l - mg \cdot l' = 0 ; F = \frac{mg \cdot l'}{l} \text{ avec } F = I \cdot AC \cdot B \text{ et finalement}$$

$$B = \frac{mg}{I \cdot AC} \cdot \frac{l'}{l}$$

on choisit :  $l = l'$  ; alors

$$B = \frac{mg}{I \cdot AC}$$

### 3- Roue de Barlow



$\vec{F} = I \cdot d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = I \cdot \vec{R} \wedge \vec{B}$  or  $\vec{B}$  est perpendiculaire à  $\vec{R}$  donc  $F = I \cdot R \cdot B$

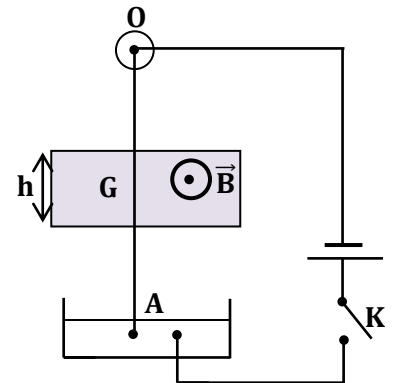
$P(\vec{F}) = M_{\Delta}(\vec{F}) \cdot \omega$  ; avec  $M_{\Delta}(\vec{F}) = F \times \frac{R}{2} = \frac{I \cdot R^2 \cdot B}{2}$

$P(\vec{F}) = \frac{1}{2} \cdot I \cdot R^2 \cdot B \cdot \omega$  ; or  $\omega = 2\pi \cdot N$  avec  $N =$  fréquence de rotation de la roue

$$P(\vec{F}) = I \cdot R^2 \cdot B \cdot \pi \cdot N$$

#### ACTIVITE 1

Une tige de cuivre OA, de masse  $m = 8,3\text{g}$ , homogène, de longueur  $L=30\text{cm}$ , peut se mouvoir dans un plan vertical autour de l'axe  $\Delta$  perpendiculaire au plan de la figure, passant par O. L'extrémité A plonge dans une cuve à mercure qui assure le contact électrique avec le reste du circuit. Sur une hauteur  $h = 3\text{cm}$ , la partie centrale de la tige est placée dans un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme et parallèle à  $(\Delta)$ , pointant vers le lecteur.



1. Que se passe-t-il quand l'interrupteur K est ouvert ?
2. Que se passe-t-il quand l'interrupteur K est fermé ?
3. Quand  $I=10\text{A}$ , la tige déviée de  $\theta = 5^\circ$  et reste en équilibre. Faire le schéma.

En déduire la valeur de  $\vec{B}$ . Comment peut-on réaliser expérimentalement un tel champ magnétique ?

Résolution détaillée

1. K ouvert :  $I = 0$  A. Puisque  $I = 0$ , il n'y a pas de force Laplace.
2. K fermé :  $I \neq 0$  et circule de A vers O et la tige est déviée.

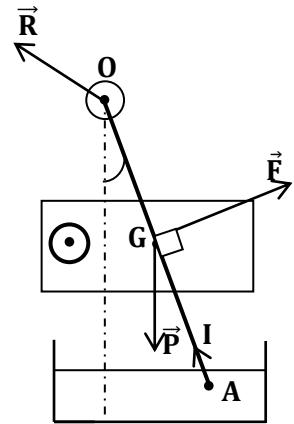
$$3. F = I\ell B \text{ avec } \ell = \frac{h}{\cos\theta} \Rightarrow F = \frac{Ih.B}{\cos\theta}$$

La tige est en équilibre:  $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = 0$

$$\text{on a : } \frac{-mgL\sin\theta}{2} + \frac{F.L}{2} = 0 \text{ d'où } F = mg\sin\theta \quad (1)$$

$$\frac{I.h.B}{\cos\theta} = mg.\sin\theta \text{ d'où } B = \frac{mg\sin 2\theta}{2Ih} = \frac{8,3 \cdot 10^{-3} \times 9,8 \times \sin(2 \times 5)}{2 \times 10 \times 3 \cdot 10^{-2}}$$

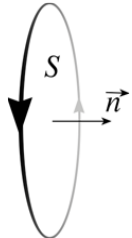
$$B = 2,3 \cdot 10^{-2} \text{ T}$$



# INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE

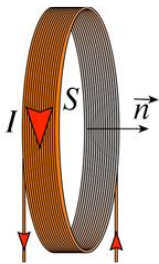
## I. NOTION DE FLUX MAGNÉTIQUE

### 1. vecteur surface



Soit une surface  $S$  délimité par un cercle ; on choisit un sens de parcours sur le cercle et on définit le vecteur  $\vec{n}$  unitaire normale à la surface avec la règle de la main droite.

On peut également définir le vecteur  $\vec{S} = S \cdot \vec{n}$



Pour une bobine parcourue par un courant, le sens de parcours sera donné par le sens du courant. Et donc  $\vec{n}$  est orienté comme le champ magnétique génère par la bobine ( $\vec{n}$  pointe vers la face NORD de la bobine)

### 2. Le flux magnétique

Le flux magnétique représente la quantité de champ magnétique « vu » à travers les spires d'un enroulement (une bobine). Le flux change selon l'orientation de la bobine par rapport au champ magnétique.

Le flux magnétique  $\phi$  à travers un circuit est le produit du champ magnétique par la surface apparente que lui présente le circuit.

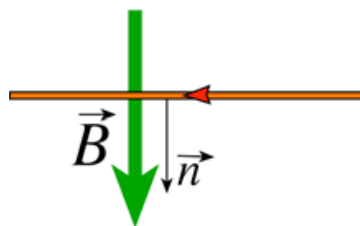
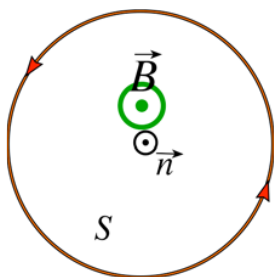
$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot S = B \times S \times \cos\theta$$

- l'unité du flux est le Weber (Wb)
- $\theta$  (rad) est l'angle entre la normale  $\vec{n}$  à la surface et le champ magnétique  $\vec{B}$

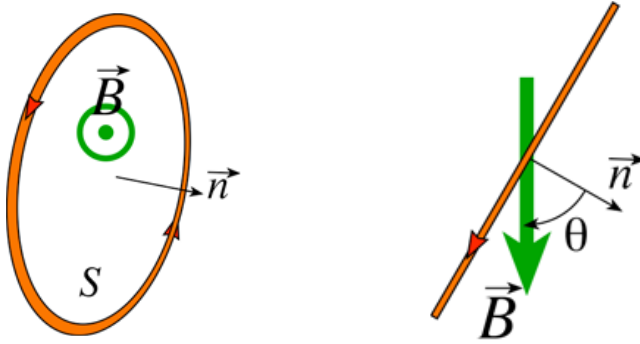
**Remarque :** Pour une bobine comportant  $N$  spires on a :  $\phi = N \cdot \vec{B} \cdot \vec{S}$

### Variation du flux

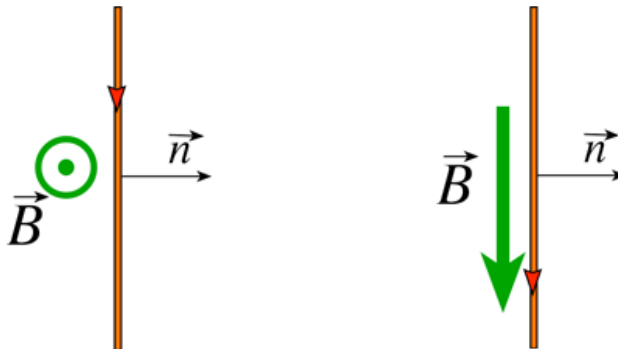
- l'angle  $\theta = (\vec{B}, \vec{n})$  est nul ;  $\cos\theta = 1$  : le flux est maximum



- le champ magnétique dépend de l'angle  $\theta$  ;  $S_{vue} = S \times \cos\theta$



- l'angle  $\theta = (\vec{B}, \vec{n})$  fait  $90^\circ$  ;  $\cos\theta = 0$  : le flux est nul.



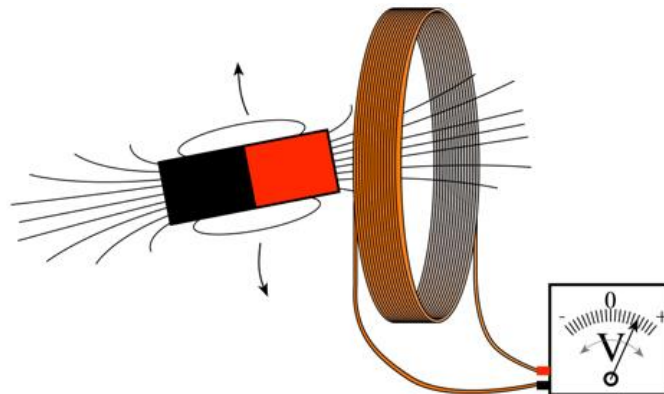
**Le champ magnétique ne traverse pas la spire**

### 3. force électromotrice

#### a. étude expérimentale

Relions les bornes d'une bobine à celui d'un milliampèremètre à l'aide de fils de connexions.

- approchons un aimant (qui crée un champ magnétique) de la bobine fixe (non alimentée).



L'aiguille dévie dans le sens positif.

- Éloignons l'aimant de la bobine toujours fixe.

L'aiguille dévie dans le sens négatif.

N.B : Réciproquement, on peut fixer l'aimant, ensuite approcher et éloigner la bobine.

b. conclusion

La variation du flux du champ  $\vec{B}$  à travers la surface de la spire fait apparaître un courant (courant induit) dans la spire : **C'est le phénomène d'induction électromagnétique.**

**II. LOI DE L'INDUCTION ELECTROMAGNETIQUE**1. loi de Lenz

Le sens du courant induit est tel que, par ces effets, il s'oppose à la cause qui lui donne naissance.

**N.B :** la loi de Lenz permet de prévoir le sens du courant induit mais pas son intensité.

2. Loi de Faraday

Le flux magnétique inducteur  $\phi$  est fonction du temps donc noté  $\phi(t)$ .

La f.é.m d'induction  $e$  est égale à l'opposé de la dérivée par rapport au temps du flux magnétique inducteur.

$$e = - \frac{d\phi(t)}{dt}$$

$e$  : f.é.m en (V)

$\phi$  : en Weber (Wb)

$dt$  : temps (en seconde : s)

N.B : pour une variation finie on a :  $e = - \frac{\Delta\phi(t)}{\Delta t}$

3. intensité du courant induit

Si  $R$  est la résistance totale du circuit, l'intensité algébrique du courant induit  $i$  est le rapport de la f.é.m  $e$  par la résistance  $R$  du circuit.

$$i = \frac{e}{R} = - \frac{1}{R} \cdot \frac{d\phi(t)}{dt}$$

Remarque  $i$  et  $e$  ont le même sens.

Le sens arbitraire positif choisit définit le sens du vecteur surface  $\vec{S} = S \cdot \vec{n}$

- À une augmentation du flux :  $\frac{\Delta\phi(t)}{\Delta t} > 0$  ; ( $e < 0$  ;  $i < 0$ )

Alors le sens arbitraire est opposé au sens du courant

- À une diminution du flux  $\frac{\Delta\phi(t)}{\Delta t} < 0$  ; ( $e > 0$  ;  $i > 0$ )

Alors le sens du courant est celui choisit arbitrairement.

4. tension induite

La variation du flux magnétique au travers d'un circuit ouvert crée une tension induite aux bornes du circuit.

$$u_{AB} = r \cdot i \pm e = r \cdot i \pm \frac{\Delta\phi(t)}{\Delta t}$$

le signe dépend de l'orientation choisie

N.B : si la résistance  $r$  du circuit est nulle alors  $u_{AB} = \pm \frac{\Delta\phi(t)}{\Delta t}$

### 5. Quantité d'électricité induite

Si  $q$  est la charge transportée par le courant induit d'intensité  $i$  dans un circuit de résistance  $R$  et qui ne comporte pas d'autres forces électromotrices  $e$  on a :

$$|dq| = |i|dt ; \text{ or } |i| = \frac{1}{R} \cdot \frac{d\phi(t)}{dt} ; |dq| = \frac{1}{R} \cdot |d\phi|$$

finalement :

$$Q = \frac{|Q(2) - Q(1)|}{R}$$

## III. APPLICATIONS

### 1- les transformateurs

#### a. principe

Les deux bobines transforment un courant alternatif en une tension alternative.

*schéma :*



#### b. propriété

On montre expérimentalement que la puissance consommée par un transformateur dont le circuit secondaire est ouvert est nul.

On montre aussi que :  $\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} = \text{constante}$

- si  $K$  est fermé  $\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{I_1}{I_2}$  on a  $U_2 \cdot I_2 = U_1 \cdot I_1$  donc  $P \neq 0$  et  $P_1 = P_2$

- si  $N_2 > N_1$  ;  $\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} > 1$  on a  $U_2 > U_1$

On a un transformateur élévateur de tension.

- si  $N_2 < N_1$  ;  $\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} < 1$  on a  $U_2 < U_1$

On a un transformateur abaisseur de tension.

#### c. utilisation

Le transformateur élévateur de tension est utilisé à la sortie des centres de production du courant ; (centre thermique). Il faut élever la tension pour transporter le courant et pour minimiser les pertes en ligne.

Les transformateurs abaisseurs de tension sont utilisés dans les agglomérations (sites habités, ménages).

### 2- les alternateurs

Un rotor (aimant) tourne devant la face d'un stator qui est un électro-aimant (bobine) on obtient une tension alternative aux bornes de la bobine. La fréquence de cette tension dépend de la vitesse de rotation de la bobine et du nombre de pôle du rotor. La f.é.m dépend du nombre de bobine conductrice.

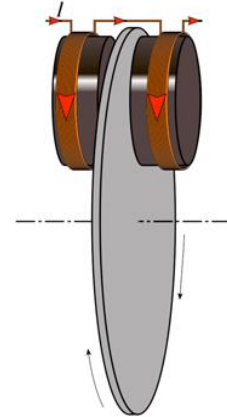
Les alternateurs sont utilisés dans les installations de productions de courant qui sont les centrales hydroélectrique ; centrale thermique.

### 3- Le courant de Foucault

Le pendule tournant constitué d'une tige et d'un disque oscille entre les pôles en fer doux du noyau d'une bobine.

On fait passer un courant dans la bobine ; les oscillations sont rapidement amorties. L'amortissement est dû aux forces de Laplace créées sur la surface du disque par les courants induits appelé courant de Foucault dont les effets s'opposent aux oscillations.

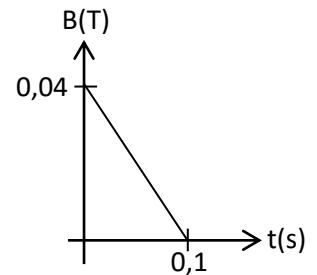
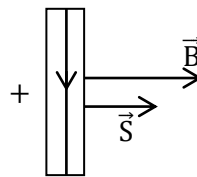
Les courants de Foucault s'utilisent dans les freinages électromagnétiques.



### EXERCICES D'APPLICATIONS

#### Exercice 1

Une bobine comporte  $N = 100$  spires de rayon moyen  $r = 4\text{cm}$ . Elle est placée dans un champ magnétique parallèle à son axe et qui varie linéairement de  $0,04\text{ T}$  à  $0,00\text{ T}$  en  $0,1\text{ s}$  (voir figure). Calculer le f.é.m d'induction qui apparaît aux bornes de la bobine.



#### Résolution détaillée

Flux  $\phi$  à travers la bobine

$$\phi = N \cdot \vec{B} \cdot \vec{S} = NBS \cdot \cos(0) = N \cdot B \cdot S$$

f.é.m induite, seul B est fonction du temps

$$e = - \frac{d\phi}{dt} = - \frac{d(N \cdot B \cdot S)}{dt} = - NS \cdot \frac{dB}{dt} = - N \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \frac{dB}{dt}$$

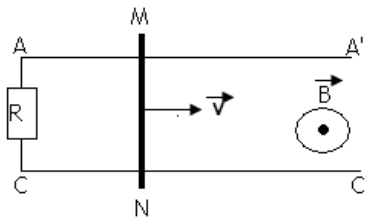
B varie linéairement, donc son expression est de la forme  $B = a \cdot t + b$ .

$$\frac{dB}{dt} = a, \text{ coefficient directeur de } B(t).$$

$$\frac{dB}{dt} = \frac{0 - 0,04}{0,1 - 0} = -0,4 \text{ T} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$e = -100 \times 3,14 \times (0,04)^2 \times (-0,4) = 0,2 \text{ V} ; \text{ d'où } e = 0,2 \text{ V (e est positif)}$$

Si la bobine est en circuit fermé, le courant passe donc dans le sens positif.

Exercice 2

Une tige MN, homogène de masse  $m$  peut glisser sans frottement le long des rails métalliques AC et A'C' séparées d'une distance  $l$  et placées sur un plan horizontal où règne un champ magnétique  $\vec{B}$  sortant. La tige est perpendiculaire aux rails. (Voir figure 1).

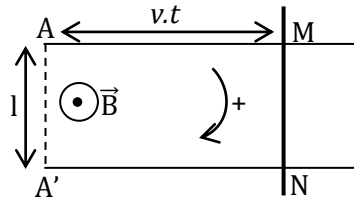
La résistance de la longueur  $l$  de la tige est  $r = 0,5\Omega$ . Les

deux rails sont reliés par un conducteur ohmique de résistance  $R$ . On déplace la tige à vitesse constante  $V=10\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$  de AA' vers CC'.

1. préciser en le justifiant le sens du courant induit.
2. exprimer la f.é.m induite en fonction de  $B$ ,  $V$ ,  $l$ . la calculer numériquement.
3. Calculer l'intensité du courant induit.
4. Montrer qu'une force électromagnétique est créée et donner ses caractéristiques. On donne :  $B = 1\text{T}$ ,  $R = 0,5\Omega$ ,  $l = 20\text{cm}$

**Résolution détaillée**

1. précisons le sens du courant induit



soit  $\vec{n}$  le vecteur unitaire normal à la surface  $S$  décrite par AMNA'. Le flux à travers cette surface est  $\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = S \cdot \vec{B} \cdot \vec{n} = S \cdot B \cdot \cos(\vec{B}, \vec{n})$

l'orientation positive arbitrairement choisie est telle que  $\vec{B}$  et  $\vec{n}$  parallèles de sens

opposés  $\cos(\vec{B}, \vec{n}) = -1$  d'où  $\phi = -B \cdot S$

- $e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d(-B \cdot S)}{dt} = B \cdot \frac{dS}{dt}$ ;  $S$  croit alors  $\frac{dS}{dt} > 0$
- $B \cdot \frac{dS}{dt} > 0$  d'où la f.é.m induite  $e > 0$

Le courant induit circule dans le sens positif arbitrairement choisit de M vers N.

2. expression de la f.é.m induite

$$e = B \cdot \frac{dS}{dt} \text{ avec } S = AM \times MN = v \cdot t \cdot l$$

$$dS = v \cdot l \cdot dt, \text{ alors } e = B \cdot v \cdot l \cdot \frac{dt}{dt} = B \cdot v \cdot l; \text{ donc } \mathbf{e = B \cdot v \cdot l}; \text{ AN : } e = 1 \times 10 \times 20 \cdot 10^{-2} = 2\text{V}$$

3. courant induit

$$i = \frac{e}{\Sigma R} = \frac{B \cdot V \cdot l}{R + r}; \text{ A.N : } i = \frac{2}{0,5 + 0,5} = 2\text{A}$$

4. la tige MN plongée dans le champ magnétique  $\vec{B}$  et traversée par le courant induit est soumise à l'action de la force de Laplace  $\vec{F} = i \cdot \overrightarrow{MN} \wedge \vec{B}$  orientée de M vers A

$$F_L = I \cdot l \cdot B; \text{ AN : } F_L = 2 \times 20 \cdot 10^{-2} \times 1 = 0,4\text{N}$$

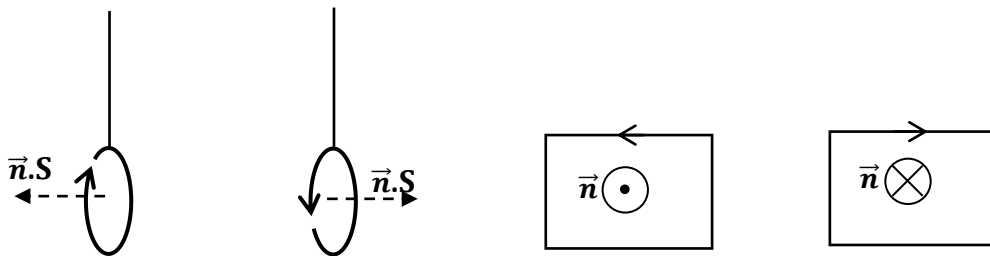
# AUTO INDUCTION

## I. NOTION DE FLUX MAGNÉTIQUE

### 1- vecteur surface

Considérons un circuit fermé plan orienté (on choisit un sens positif pour le contour de la surface). On appelle vecteur surface  $\vec{S} = S.\vec{n}$  caractérisé par :

- son point d'application : le centre de la surface
- direction : perpendiculaire à la surface
- sens : déterminé par la règle de la main droite : les doigts courbés indiquent le sens + et le pouce indique le sens de  $\vec{S}$ .
- norme : la valeur S de la surface (en m<sup>2</sup>)

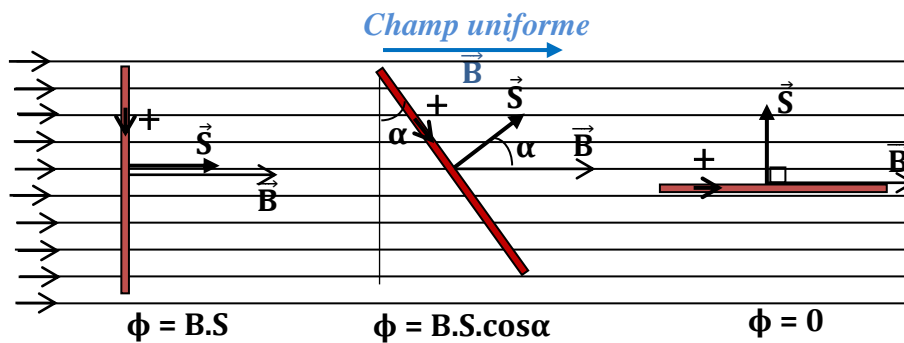


### 2- définition du flux magnétique

Le flux magnétique à travers un contour délimité par une surface S est le nombre de lignes de champ qui traverse ce contour fermé. Son expression est :

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B.S \times \cos\theta ; \text{ avec } \theta = (\vec{B}, \vec{S}) \text{ avec } \vec{S} = S.\vec{n}$$

Le flux magnétique s'exprime en Weber (symbole : Wb)



#### Remarque :

Si le champ magnétique  $\vec{B}$  est  $\parallel$  à  $\vec{n}S$  alors  $\phi = B.S$

et si la surface est délimitée par un circuit bobiné comportant N spires

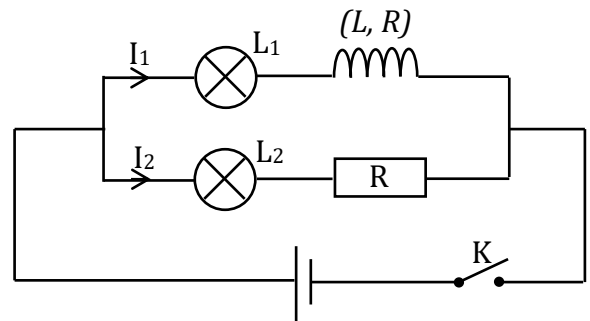
la surface totale vaut N fois la surface d'une spire, et :  $\phi = N.B.S$

## II. MISE EN ÉVIDENCE EXPÉRIMENTALE DU PHÉNOMÈNE D'AUTO-INDUCTION

### 1. expérience

#### a. montage

Dans le montage suivant les deux lampes sont identiques  
Le conducteur ohmique et la bobine ont la même résistance.



#### b. Observations

Lorsqu'on ferme l'interrupteur K la lampe  $L_2$  s'allume instantanément mais  $L_1$  s'allume progressivement puis fini par avoir le même éclat que  $L_2$ .

Lorsqu'on ouvre K, la lampe  $L_2$  s'éteint très tôt alors que  $L_1$  s'éteint progressivement.

#### c. interprétation

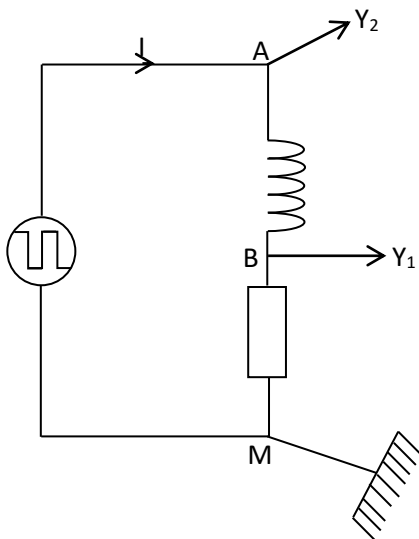
À la fermeture ou à l'ouverture de K, les deux lampes  $L_1$  et  $L_2$  ne sont pas traversées par les mêmes intensités de courants.

#### d. conclusion

La bobine est donc la cause du retard à l'établissement et à l'annulation du courant dans la branche 2.

### 2. visualisation du phénomène à l'oscilloscope

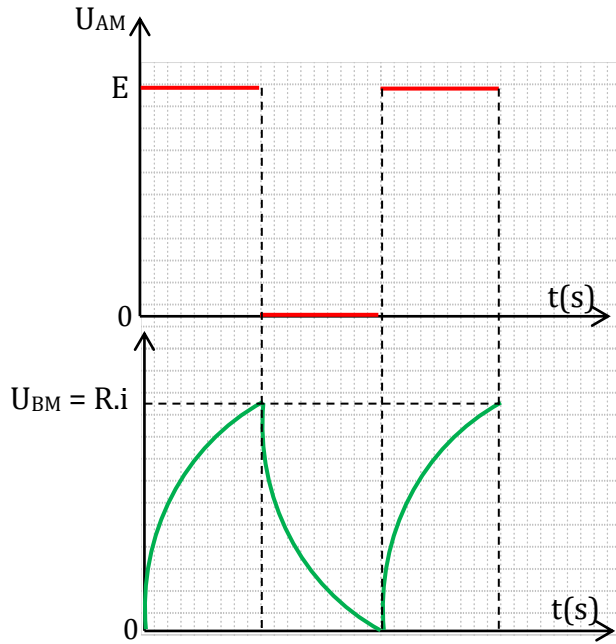
#### a. montage



la voie  $Y_1$  visualise les variations de  $U_{BM}$  aux bornes du conducteur Ohmique, donc de l'intensité du courant

la voie  $Y_2$  visualise la tension rectangulaire  $U_{AM}$  aux bornes du générateur.

#### b. visualisation

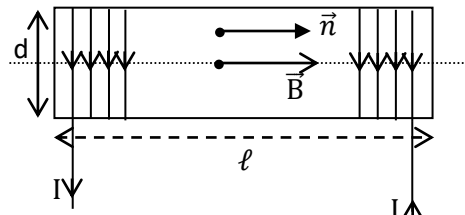


Lorsque la tension aux bornes du générateur est maximale, l'intensité du courant n'atteint pas immédiatement sa valeur maximale.

De même si la tension est nulle, le courant  $i$  diminue progressivement avant de s'annuler

### III. CARACTERISTIQUES DE L'AUTO INDUCTION

#### 1. flux propre d'une bobine



La bobine est constituée de  $N$  spires, le flux du champ magnétique à travers cette bobine est son flux propre.

$$\Phi_P = N \cdot B \cdot S$$

#### 2. inductance d'une bobine

On montre que le flux propre d'une bobine est proportionnel à l'intensité  $I$  du courant qui le traverse.  $\Phi_P = L \cdot I$  ( $L$  est l'inductance de la bobine, une grandeur caractéristique propre à chaque bobine)

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_P = L \cdot I \\ \Phi_P = N \cdot B \cdot S = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell} I \end{array} \right. \text{ donc } \boxed{L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell}} \quad \begin{array}{l} \text{Surface } S \text{ (en m}^2\text{)} \\ \ell \text{ en mètre (m)} \\ L \text{ en Henrys (H)} \end{array}$$

#### 3. force électromotrice d'induction

Lorsque le flux propre à travers une bobine varie, il apparaît à ses bornes une f.é.m d'auto-induction notée  $e$ .

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}; \quad \Phi_L = L \cdot i \quad \text{donc } e = - L \cdot \frac{di}{dt} \quad \text{e s'exprime en volt (V)}$$

**N.B :**  $e$  et  $i$  ont toujours le même sens.

#### 4. courant d'auto-induction

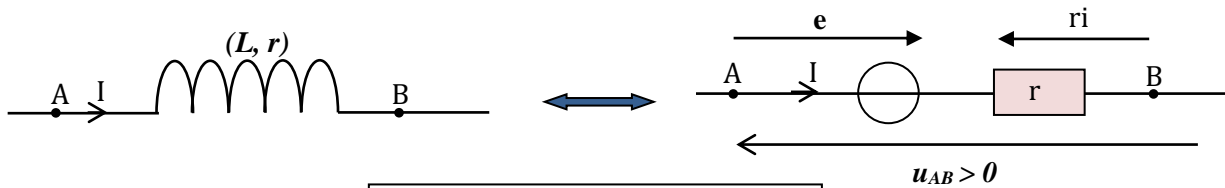
Dans un circuit fermé de résistance R l'intensité du courant d'auto-induction est :

$$i = \frac{e}{R}; \quad e = -\frac{d\phi}{dt} \quad \text{d'où}$$

$$i = -\frac{1}{R} \frac{d\phi}{dt}$$

#### 5. tension aux bornes d'une bobine

La bobine est un récepteur donc la tension à ses bornes est positive en convention récepteur : Son symbole et son schéma équivalent est :



$$u_{AB} = ri - e; \text{ soit } u_{AB} = ri + L \frac{di}{dt}$$

#### Remarque :

- Dans le cas où la bobine est une inductance pure, sa résistance est nulle et la tension à ses bornes s'écrit :  $u_{AB} = L \frac{di}{dt}$
- En régime permanent, le courant est constant ( $i = \text{cte}$ ), la tension aux bornes de la bobine s'écrit  $u_{AB} = ri$  : la bobine se comporte comme un conducteur Ohmique.

### IV. ÉNERGIE EMMAGASINÉE DANS UNE BOBINE

#### 1. puissance reçue par une bobine

La puissance reçue par la bobine est  $p = u_{AB} \times i$

or  $u_{AB} = ri + L \frac{di}{dt}$  ;  $p = (ri + L \frac{di}{dt}) \cdot i$  ;

$$p = ri^2 + Li \frac{di}{dt} = P_{th} + P_m$$

#### 2. Énergie emmagasinée

L'énergie emmagasinée dans une bobine est :  $E = ri^2 t + \frac{1}{2} Li^2$  mais pour une bobine d'inductance pure ( $r = 0$ ) on a :

$$P_m = Li \frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right) = \frac{dE}{dt} ; \text{ par analogie}$$

$$E = \frac{1}{2} Li^2$$

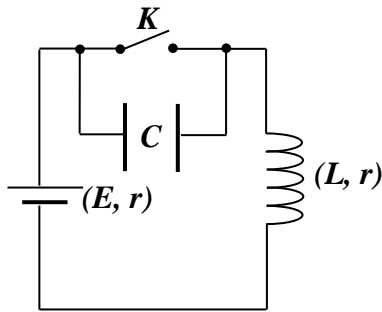
#### Remarque :

- Lorsque le courant s'établit, la bobine emmagasine de l'énergie  $E = \frac{1}{2} Li^2 > 0$  : ceci crée un retard à l'établissement du courant.
- Quand il ya rupture du courant, la bobine restitue l'énergie emmagasinée  $E = \frac{1}{2} Li^2 < 0$  : ceci entraine un retard à l'annulation du courant.

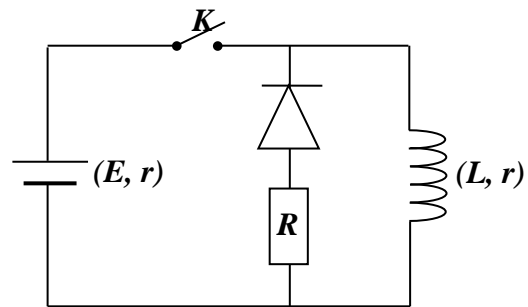
### 3. étincelle de rupture

Lorsqu'on ouvre l'interrupteur d'un circuit contenant une bobine l'énergie magnétique libérée par celle-ci se reporte aux bornes de l'interrupteur et fait apparaître de l'étincelle.

L'étincelle peut détériorer les contacts et l'isolation de cette interrupteur. Pour prévenir ce désagrément, on réalise des dérivations qui n'interviennent pas dans le fonctionnement normal du circuit.



*À l'ouverture du circuit, l'énergie libérée par la bobine est stockée par le condensateur C*



*À l'ouverture du circuit, l'énergie libérée par la bobine est dissipée par la résistance R*

### ACTIVITÉ

Un solénoïde de longueur  $\ell = 50\text{cm}$  et de diamètre  $d = 5\text{cm}$ , comporte  $N = 1000$  spires jointives.

- 1- Calculer l'inductance  $L$  du solénoïde.
- 2- le solénoïde est parcourue par un courant d'intensité  $I = 2\text{A}$ .
  - 2.1- Déterminer l'intensité du champ magnétique à l'intérieur du solénoïde.
  - 2.2- Quelle est l'énergie magnétique emmagasinée dans le solénoïde ?
- 3- Le solénoïde est maintenant parcouru par un courant variable d'intensité  $i = -10t + 0,2$ .
  - 3.1- calculer la f.é.m auto-induite dans le solénoïde.
  - 3.2- la résistance de la bobine est  $r = 2\Omega$ .
    - 3.2.1- Exprimer en fonction du temps la tension aux bornes du solénoïde.
    - 3.2.2- Calculer sa valeur pour  $t = 5\text{ms}$ .

### résolution détaillée

- 1-  $L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi r^2$  avec  $r = \frac{d}{2}$   
 $L = 4\pi \cdot 10^{-7} \times \frac{(1000)^2}{0,5} \times \pi \times \left(\frac{0,05^2}{2}\right) = 4,93 \cdot 10^{-3} \text{ H}$
- 2-
  - 2.1- intensité de  $\vec{B}$   
 $B = \mu_0 n \cdot I = \mu_0 \frac{N}{\ell} I = 4\pi \cdot 10^{-7} \times \frac{1000}{0,5} \times 2$  d'où  $B = 5\text{mT}$
  - 2.2- énergie magnétique  
 $E = \frac{1}{2} Li^2 = 0,5 \times 4,93 \cdot 10^{-3} \times 2^2$  d'où  $E = 9,96 \cdot 10^{-3} \text{ J}$

3-

3.1- f.é.m d'auto induction

$$e = -L \frac{di}{dt} \text{ or } (i = -10t + 0,2) ; e = 10L = 10 \times 4,93 \cdot 10^{-3} = 4,93 \cdot 10^{-2} \text{V}$$

$$e = 4,93 \cdot 10^{-2} \text{V}$$

3.2-

3.2.1- tension aux bornes du solénoïde

$$u = r \cdot i - e = 2(-10t + 0,2) - 4,93 \cdot 10^{-2}$$

$$u = -20t + 0,45$$

3.2.2- valeur de u à t = 5ms

$$u = -20 \times 5 \cdot 10^{-3} + 0,45$$

$$u = 0,35 \text{V}$$

# MONTAGE INTÉGRATEUR ET DÉRIVATEUR

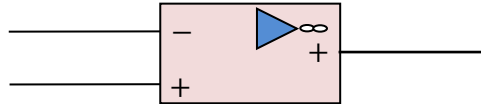
## I. RAPPELS

### 1. l'amplificateur opérationnel ou A.O

#### a. présentation

Un amplificateur opérationnel est un circuit intégré contenant des transistors, des résistors, des condensateurs etc.... Il se présente sous la forme de plaquette avec 8 pôles ou pattes et est utilisé pour effectuer des opérations mathématiques.

- son symbole



#### b. propriétés

L'amplificateur opérationnel a deux modes de fonctionnement :

- **fonctionnement linéaire**
  - Dans ce régime les courants d'entrées ( $i^+$  et  $i^-$ ) sont négligeables donc supposés nuls, on écrit :  $i^+ = i^- = 0$ .
  - La différence de potentielle entre l'entrée inverseuse  $E^-$  et l'entrée non inverseuse  $E^+$  est nulle, car ils sont pratiquement au même potentiel, on écrit :  $\varepsilon = V_{E^+} - V_{E^-} = 0$
  - La tension de sortie est toujours inférieure à la tension de saturation de l'A.O, on écrit :  $|U_S| < V_{sat}$  ce qui donne ;  $-V_{sat} < U_S < +V_{sat}$
- **fonctionnement saturé**

En régime saturé ( $\varepsilon = V_{E^+} - V_{E^-}$  est différent de zéro). L'amplificateur opérationnel est utilisé simplement comme comparateur c'est-à-dire :

Pour  $\varepsilon = V_{E^+} - V_{E^-} > 0$  alors  $U_S = +V_{sat}$

Pour  $\varepsilon = V_{E^+} - V_{E^-} < 0$  alors  $U_S = -V_{sat}$

### Conclusion

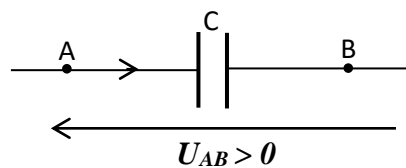
Les applications que nous allons utiliser dans ce chapitre concernent uniquement le régime linéaire.

### 2. le condensateur

#### a. présentation

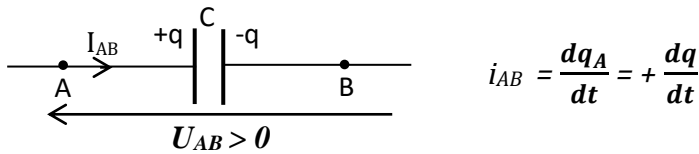
Un condensateur est constitué de deux plaques métalliques appelées armatures séparés par un isolant appelée diélectrique. Il est caractérisé par sa capacité  $C$  et est exprimé en Farad (F).

- son symbole :

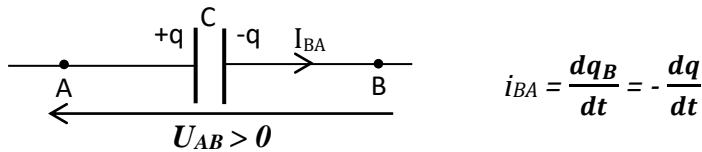


b. propriétés

Un condensateur est un réservoir d'énergie. Lorsqu'il est monté avec un générateur, il se charge on a alors :



En absence de générateur le condensateur restitue l'énergie stockée au milieu extérieur, il se comporte comme un générateur on dit qu'il se décharge.



Remarque : tension aux bornes d'un condensateur :

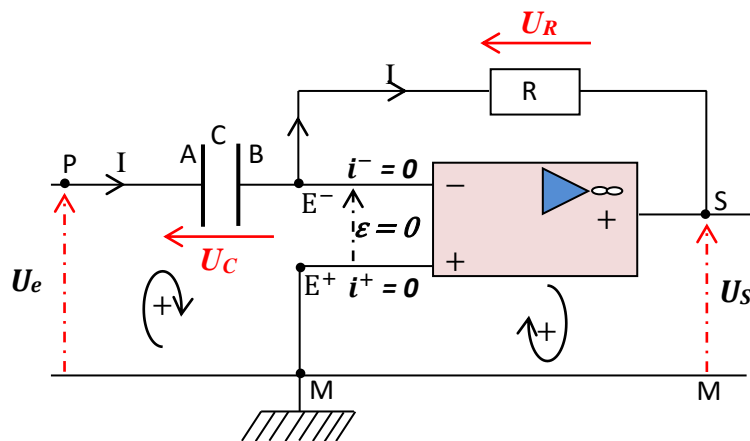
$q = C.U$  or  $i = \frac{dq}{dt}$  d'ou  $dq = i.dt$  et  $q = \int idt$

donc  $u = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int idt$  ; finalement  $u = \frac{1}{C} \int idt$

II. **MONTAGE DÉRIVATEUR**

1. schéma du montage

Dans le montage dérivateur on fait monter le condensateur à l'entrée et la résistance à la sortie. La tension d'entrée  $U_e$  est appliquée à l'entrée inverseuse.



2. Relation entre la tension de sortie  $U_s$  et la tension d'entrée  $U_e$

Dans la maille MAE<sup>-</sup>M :  $U_e - U_C - U_{E^-} = 0$  ; or  $(U_{E^-} = U_{E^+} = 0$  car  $i^+ = i^- = 0)$

$U_e = U_C = \frac{q}{C}$  alors  $q = C.U_e$  (I)

Dans la maille ME<sup>-</sup>SM :  $U_{E^-} - U_R - U_S = 0$  alors  $U_{E^-} - R.i - U_S = 0$

$(U_{E^-} = U_{E^+} = 0$  car  $i^+ = i^- = 0)$  d'où  $U_S = -R.i$  (II)

Le condensateur se charge donc :  $i = \frac{dq}{dt}$

d'après (I) ;  $i = \frac{d}{dt}(C.U_e) = C \cdot \frac{dU_e}{dt}$

et d'après (II) ;  $U_s = -R.C \frac{dU_e}{dt}$  finalement on a :

$$U_s = -R.C \frac{dU_e(t)}{dt}$$

### 3. conclusion

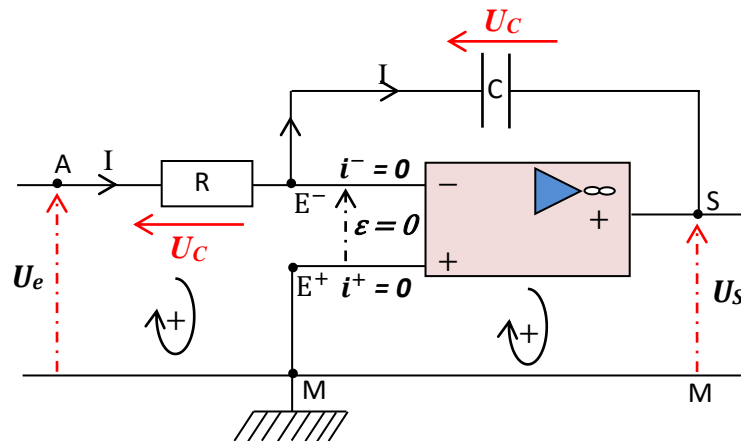
La tension de sortie est proportionnelle à la dérivée par rapport au temps de la tension d'entrée. Ce montage dérive à la sortie la tension d'entrée  $U_e$ .

Dans la pratique on l'utilise pour obtenir une tension en créneau à partir d'une tension en dent de scie.

## III. MONTAGE INTÉGRATEUR

### 1. schéma du montage

Dans le montage intégrateur on fait monter la résistance à l'entrée et le condensateur à la sortie. La tension d'entrée  $U_e$  est appliquée à l'entrée inverseuse.



### 2. Relation entre la tension de sortie $U_s$ et la tension d'entrée $U_e$

Dans la maille MAE<sup>-</sup>M :  $U_e - U_R - U_{E^-} = 0$  ;  $U_e - R.i - U_{E^-} = 0$

or ( $U_{E^-} = U_{E^+} = 0$  car  $i^+ = i^- = 0$ ) alors  $U_e = R.i$  (I)

Dans la maille ME<sup>+</sup>SM :  $U_{E^+} - U_C - U_s = 0$  alors  $U_s = -U_C = \frac{q}{C}$

d'où  $q = -C.U_C = -C.U_s$  (II)

Le condensateur se charge donc :  $i = \frac{dq}{dt}$

d'après (I) ;  $U_e = R \cdot \frac{dq}{dt}$

et d'après (II) ;  $U_e = R \cdot \frac{d(-C.U_s)}{dt} = -R.C \frac{dU_s}{dt}$  d'où  $dU_s = -\frac{1}{RC} U_e dt$

$$U_s = -\frac{1}{RC} \int_0^t U_e dt$$

### 3. conclusion

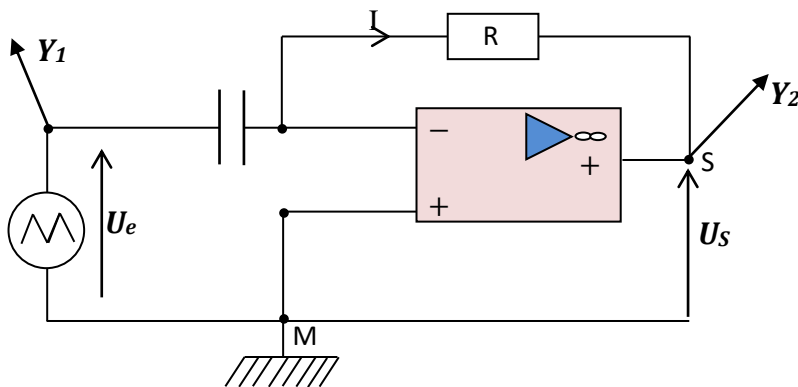
La tension de sortie  $U_s$  est proportionnelle à la primitive de la tension d'entrée  $U_e$ . Ce montage intègre la tension d'entrée à la sortie. C'est un montage intégrateur.

Dans la pratique, on l'utilise pour transformer une tension en créneau en une tension en dent de scie.

### 4. visualisation de $U_s$ et $U_e$ à l'oscilloscope

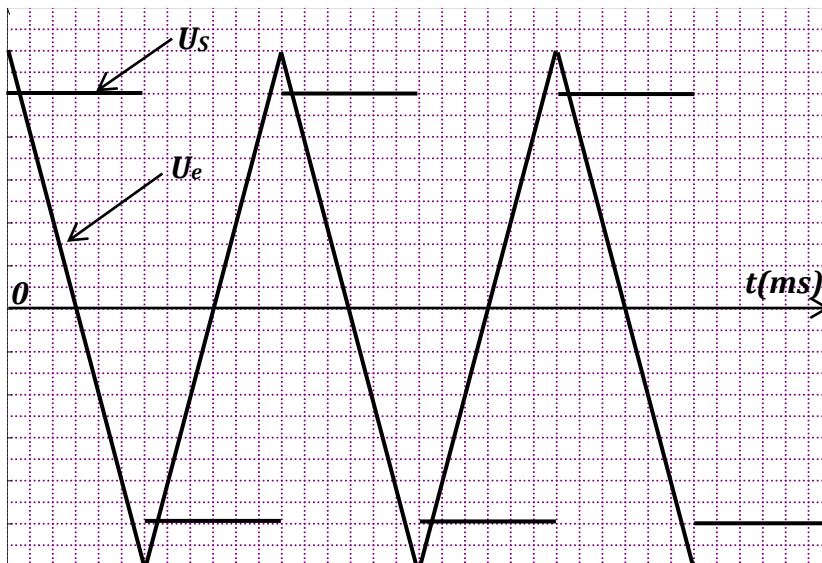
#### a. montage intégrateur

On applique à l'entrée de l'A.O une tension d'entrée  $U_e$  périodique en dents de scie à l'aide d'un générateur GBF et on visualise les tensions  $U_e$  et  $U_s$  sur l'écran d'un oscilloscope.



Voie  $Y_1$  : tension d'entrée  $U_e$   
(dents de scies)

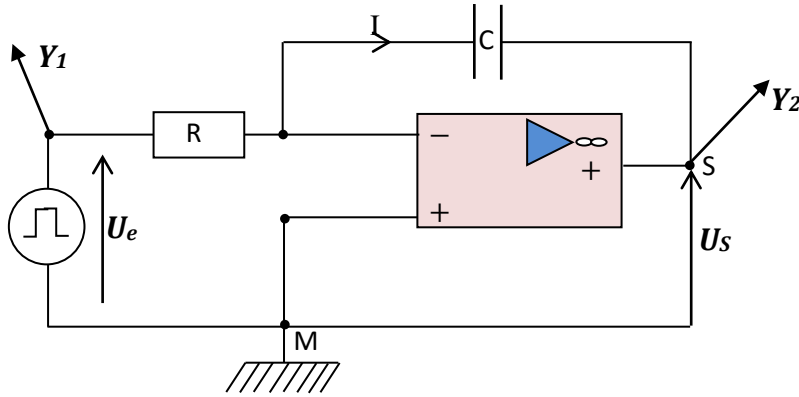
Voie  $Y_2$  : tension de sortie  $U_s$   
(en créneau)



Lorsque  $U_e$  décroît,  $U_s$  est constante et positive et lorsque  $U_e$  croît  $U_s$  est constante et négative. La réponse à une tension d'entrée  $U_e$  triangulaire est une tension de sortie  $U_s$  rectangulaire.

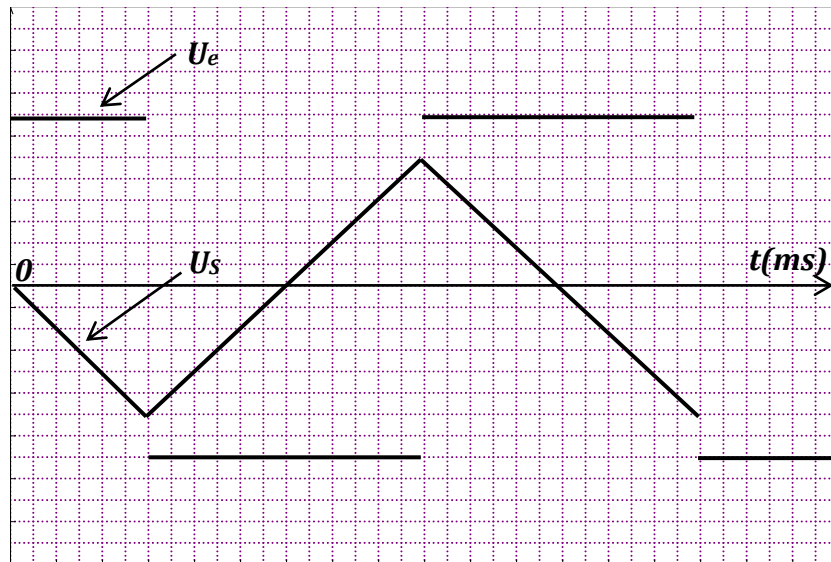
## b. montage intégrateur

On applique à l'entrée de l'A.O une tension d'entrée  $U_e$  périodique en dents créneau à l'aide d'un générateur GBF et on visualise les tensions  $U_e$  et  $U_s$  sur l'écran d'un oscilloscope.



Voie  $Y_1$ : tension d'entrée  $U_e$   
(dents de scies)

Voie  $Y_2$ : tension de sortie  $U_s$   
(en créneau)



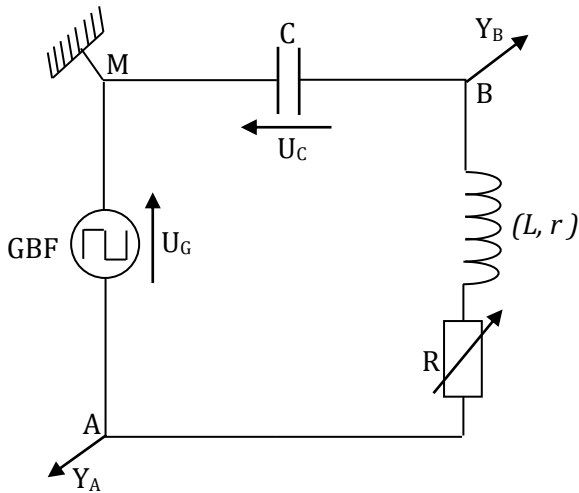
Lorsque  $U_e$  est constant et positif,  $U_s$  est décroît et lorsque  $U_e$  est constant et négatif  $U_s$  croît. La réponse à une tension d'entrée  $U_e$  rectangulaire est une tension de sortie  $U_s$  triangulaire.

# OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES LIBRES DANS UN CIRCUIT (L, C)

## I. ETUDE EXPÉRIMENTALE

### 1. schéma du montage

On réalise le montage qui comprend en série, une bobine d'inductance  $L$  et de résistance interne  $r$ , un conducteur ohmique variable  $R$  et un condensateur de capacité  $C$ .



$Y_A$  : Voie A mesure la tension en créneau aux bornes du générateur

$Y_B$  : Voie B : mesure la tension aux bornes du condensateur

$R_{\text{eq}} = R + r$  : résistance équivalente du circuit

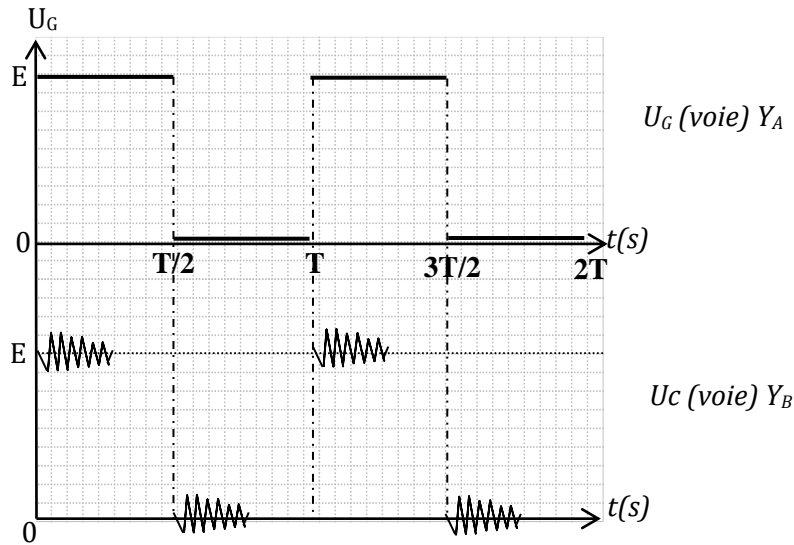
Lorsque le GBF délivre une tension  $u = E$ , le courant établi dans le circuit permet la charge du condensateur et lorsqu'on annule cette tension  $u = 0V$  aucun courant ne circule dans le circuit ; le condensateur chargé se comporte comme un générateur et se décharge dans la bobine.

### 2. interprétation et visualisation

Étudions le mouvement sur une période c'est-à-dire de l'intervalle  $[0, T]$ .

À l'établissement du courant, le générateur délivre une tension  $U_G$  qui passe de 0 à  $E$  sur l'intervalle  $\left[0, \frac{T}{2}\right]$  ; de même, le condensateur se charge.

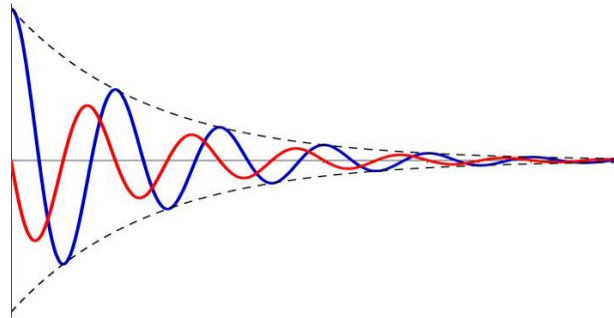
À la rupture, la tension passe de  $E$  à 0 sur l'intervalle  $\left[\frac{T}{2}, T\right]$ , au même instant le condensateur se décharge dans la bobine.



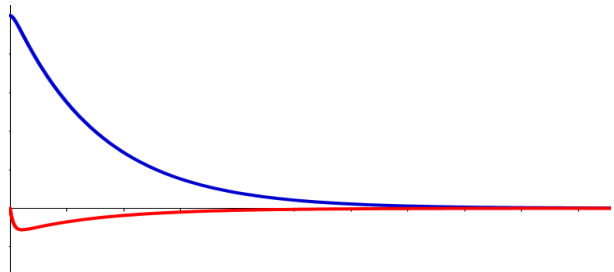
3. les deux (02) régimes de décharge

(le circuit qui oscille ne contient aucun générateur, les oscillations sont dites libres).

$R_{\text{éq}} = R + r$  ; si  $R = 0$ , la seule résistance du circuit est  $r$  ; la tension  $U_c$  oscille autour de la valeur zéro. La décharge du condensateur est oscillatoire et amortie. La décharge est alors qualifiée de **pseudo-périodique** de pseudo-période  $T$ .



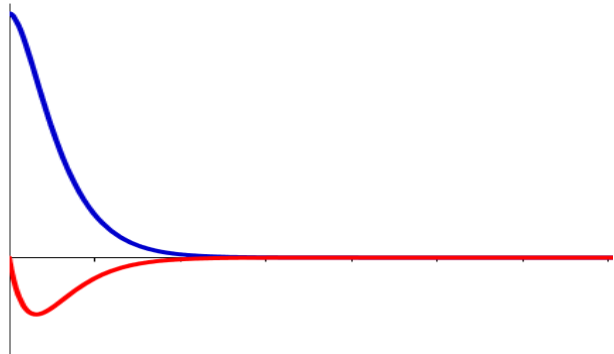
Si  $R_{\text{éq}} = R + r$  croît l'amortissement est devenu trop important, la tension  $U_c$  tend vers zéro sans osciller. La décharge est dite **apériodique**.



**Remarque :**

Il existe une valeur particulière  $R_c$  de la résistance électrique  $R$  du circuit qui délimite ces deux régimes de fonctionnement. Cette résistance est appelée résistance critique et est telle que

$$R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$



R	$R < R_c$	$R = R_c$	$R > R_c$
Régime	pseudo-périodique	critique	apériodique

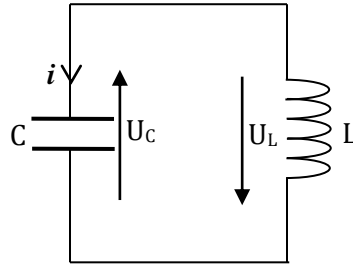
#### 4. conclusion

Dans le cas où  $R_{\text{éq}} = R+r$  n'est pas nulle ; La tension  $U_C$  aux bornes du condensateur n'est pas périodique ; On dit que les **oscillations sont amorties**.

Dans le cas où  $R_{\text{éq}} = R+r = 0$  ; alors on a des **oscillations non amorties** et une tension périodique aux bornes du condensateur (c'est le cas que nous étudierons dans ce chapitre)

## II. OSCILLATIONS NON AMORTIES DANS UN CIRCUIT LC

### 1. montage d'étude



### 2. équation différentielle du circuit LC

D'après la loi des mailles, on obtient la relation :

$$u_C(t) + u_L(t) = 0 \text{ avec } u_C(t) = \frac{q}{C} \text{ et } u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$\frac{q}{C} + L \frac{di(t)}{dt} = 0 \text{ avec } i(t) = \frac{dq}{dt} \text{ finalement } \frac{q}{C} + L \frac{d^2q}{dt^2} = 0 ; \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0$$

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0 \text{ équivaut à } \ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

On obtient une équation différentielle du second ordre. La décharge d'un condensateur dans une inductance pure donne lieu à des oscillations sinusoïdales.

Sachant que  $q = C.U$  on a aussi :  $\frac{d^2U_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} U_C = 0$

### 3. Solution de l'équation différentielle

L'équation horaire de la charge  $q$  en fonction du temps  $t$  est de la forme

$$q(t) = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = Q_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$$

$Q_m$  : L'amplitude ou la valeur maximale de la charge  $q$   
 $(\omega_0 t + \varphi)$  : est la phase à l'instant  $t$   
 $\varphi$  : est la phase à l'instant ( $t=0$ ) où phase à l'origine

$Q_m$  et  $\varphi$  sont des constantes qui dépendent uniquement des conditions initiales.

#### 3.1 détermination de $Q_m$ et de $\varphi$

$$q(t=0) = Q_m \text{ équivaut à } Q_m \cos \varphi = Q_m > 0 \text{ et } i = 0$$

Nous avons  $Q_m \cos \varphi = +Q_m$  ce qui entraîne  $\cos \varphi = +1$ , soit  $\varphi = 0$

$$\text{Ainsi : } q = Q_m \cos \omega_0 t$$

### 3.2 détermination de la période propre $T_0$ , pulsation, propre $\omega_0$ , et de la fréquence propre $N_0$ du circuit

Si  $q(t) = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$  est solution de l'équation différentielle alors il vérifie cette équation différentielle on a :

$$\begin{aligned} \ddot{q} + \frac{1}{LC} q &= 0 \text{ équivaut à } -\omega_0^2 Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{LC} Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = 0 \\ -\omega_0^2 Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{LC} Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi) &= 0 \end{aligned}$$

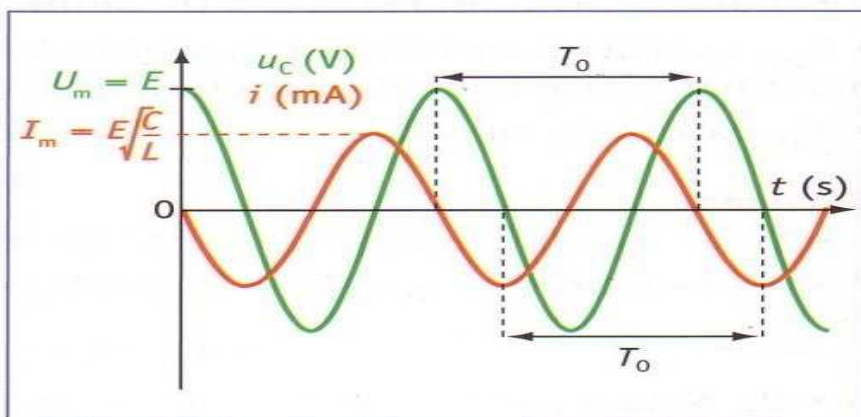
$$Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \left[ -\omega_0^2 + \frac{1}{LC} \right] = 0 \text{ d'où } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Si  $q(t) = Q_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$  est solution de l'équation différentielle alors il vérifie cette équation différentielle on a :

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0 \text{ équivaut à } -\frac{4\pi^2}{T_0^2} Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{LC} Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = 0$$

$$\Rightarrow Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \left[ -\frac{4\pi^2}{T_0^2} + \frac{1}{LC} \right] = 0$$

$$\text{d'où } T_0 = 2\pi\sqrt{LC} \text{ et la fréquence est } N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

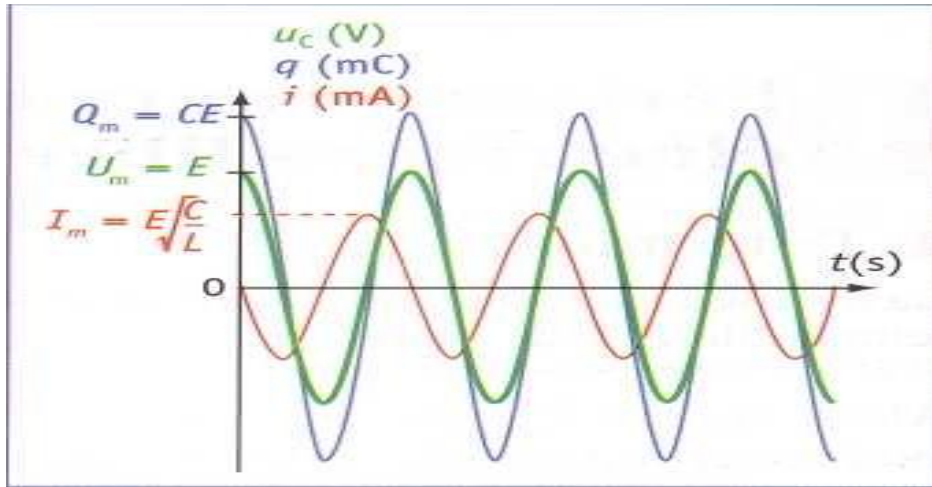


### 3.3 expression de $u_C(t)$ et $i(t)$

$$u_C = \frac{q}{C} = \frac{Q_m}{C} \cos \omega_0 t \text{ d'où la valeur maximale de la tension est } U_m = \frac{Q_m}{C}$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 Q_m \sin \omega_0 t = \omega_0 Q_m \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ d'où la valeur maximale de l'intensité du courant est : } I_m = Q_m \omega_0$$

L'intensité du courant est en retard de  $\frac{\pi}{2}$  sur la tension du condensateur et sur la charge du condensateur. Les deux courbes présentent un décalage horaire de  $\frac{T_0}{4}$ ; On dit qu'ils sont en quadrature de phase (**lorsque l'une des courbes atteint son maximum l'autre s'annule**).

4. représentation des graphes5. bilan énergétique dans un circuit LCa. énergie totale

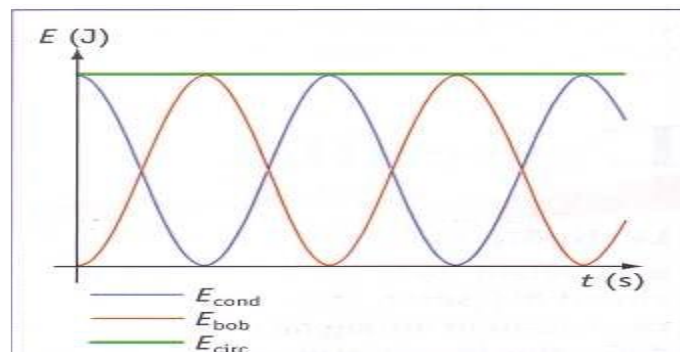
L'énergie emmagasinée à un instant  $t$  dans une bobine est :

$$E = \frac{1}{2} Cu^2 + \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} qu + \frac{1}{2} Li^2$$

b. conservation de l'énergie dans un circuit LC

Dans un circuit LC l'énergie emmagasinée se conserve ; cette énergie est constante. Il ya transfert de l'énergie magnétique de la bobine en énergie électrique dans le condensateur et inversement.

$$E_0 = \frac{1}{2} \frac{Q_m^2}{C} = \frac{1}{2} CU_m^2 = \frac{1}{2} QU_m = \frac{1}{2} LI_m^2 = E$$

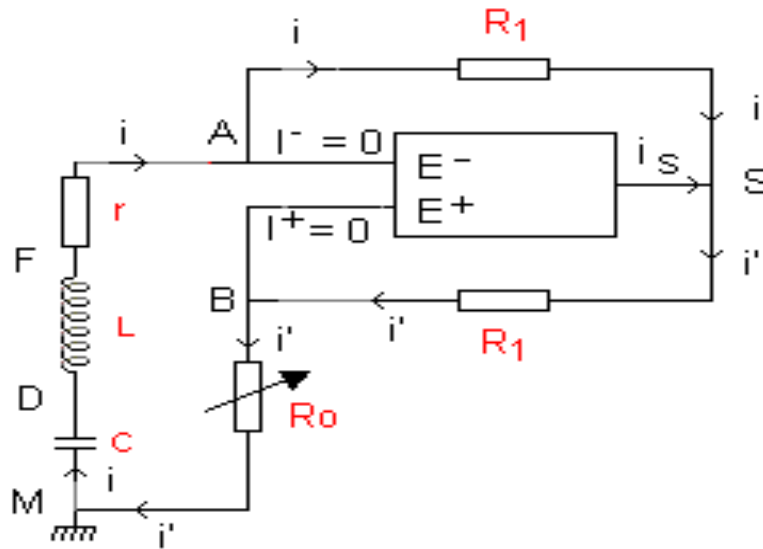


**Remarque :** L'énergie électrique et l'énergie magnétique sont en opposition de phase.

### III. ENTRETIEN DES OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES

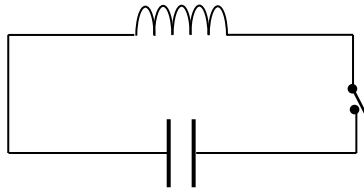
En réalité tout circuit LC possède une résistance  $R$  responsable de la perte d'énergie sous forme d'effet joule. Pour compenser cette perte d'énergie, on apporte de l'énergie fournie par un générateur qui impose aux bornes du dipôle une tension  $U_G = k.i$ .

Le montage suivant permet d'entretenir des oscillations quasi sinusoïdales dans un circuit  $r, L, C$  malgré la présence de la résistance  $r$ . Nous allons montrer la partie ABM du circuit permet de compenser  $r$  si on choisit  $R_0 = r$



**ACTIVITE 1**

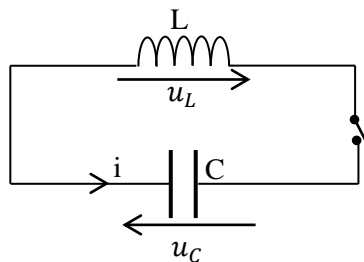
Un circuit est constitué d'un condensateur de capacité  $C$ , initialement chargé et d'une bobine d'inductance  $L$  et de résistance interne négligeable.



- 1- représenter les tensions  $u_L$  aux bornes de la bobine et  $u_C$  aux bornes du condensateur. On utilisera la convention récepteur pour le condensateur.
- 2- Etablir l'équation différentielle du circuit donnant la variation de la charge  $q$  du condensateur en fonction du temps.
- 3- -
  - 3.1- Montrer que  $q = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$  est solution de l'équation différentielle.
  - 3.2- Déterminer les expressions de la pulsation propre  $\omega_0$ , la période  $T_0$  et la fréquence propre  $N_0$ .
- 4- **-Étude énergétique**
  - 4.1- Donner les expressions de l'énergie magnétique  $E_L$  et de l'énergie électrostatique  $E_C$  en fonction du temps.
  - 4.2- Montrer que l'énergie totale du circuit est constante.
- 5- Retrouver l'équation différentielle du circuit à partir de la conservation de l'énergie totale.
- 6- Dédurre de la question 2) l'équation différentielle vérifiée par la tension  $u_C$ .

**RÉSOLUTION DÉTAILLÉE**

- 1- représentation de  $u_C$  et  $u_L$



- 2- Équation différentielle de la charge  $q$ .

La loi des mailles :  $u_L + u_C = 0$

$$\frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} = 0 \text{ or } i = \frac{dq}{dt} \text{ alors } \frac{q}{C} + L \frac{d^2q}{dt^2} = 0 \text{ d'où } \ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0 \text{ ou } \ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

- 3-

- 3.1- montrons que  $q = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$  est solution

$$\dot{q} = -\omega_0 Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\ddot{q} = -\omega_0^2 Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = -\omega_0^2 Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi) + \omega_0^2 [Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)] = 0$$

donc  $q$  est solution de l'équation différentielle

3.2- Expression de  $\omega_0$ ,  $T_0$  et  $N_0$ .

La pulsation propre

$$\begin{cases} \ddot{q} + \omega_0^2 \cdot x = 0 \\ \ddot{q} + \frac{1}{LC} \cdot x = 0 \end{cases}; \text{ alors par identification on a : } \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \text{ d'où } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \text{ en rad/s}$$

2.5- la période propre

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$$

2.6- la fréquence propre

$$N_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

#### 4- étude énergétique

4.1 Expressions des énergies

$$\text{Expression de l'énergie magnétique } E_L = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} L \omega_0^2 Q_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\text{avec } i = \frac{dq}{dt} = \dot{q} = -\omega_0 Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\text{Expression de l'énergie électrostatique } E_C = \frac{1}{2} C u_C^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_m^2}{C} \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\text{or } \frac{1}{C} = L \cdot \omega_0^2 \text{ d'où } E_C = \frac{1}{2} L Q_m^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

a. montrons que l'énergie mécanique se conserve

Expression de l'énergie mécanique

$$E_M = E_L + E_C = \frac{1}{2} k \cdot x^2 + \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} L \omega_0^2 Q_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} L Q_m^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E_M = \frac{1}{2} L Q_m^2 \omega_0^2 \underbrace{[\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi)]}$$

$$E_M = \frac{1}{2} L Q_m^2 \omega_0^2 = \frac{1}{2} L I_m^2 = \frac{1}{2} \frac{Q_m^2}{C} = \text{constante}$$

5- équation différentielle à partir de la conservation de E

$$E = \text{constante d'où } \frac{dE}{dt} = 0$$

$$\text{or } E = \frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \text{ d'où } \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} L \frac{d(i^2)}{dt} + \frac{1}{2C} \frac{d(q^2)}{dt} = 0$$

$$L \cdot i \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} q \cdot \dot{q} = 0 \text{ et } L \dot{q} \cdot \ddot{q} + \frac{1}{C} q \cdot \dot{q} = 0$$

$$\dot{q}(L\ddot{q} + \frac{1}{C}q) = 0 \text{ et } L\dot{q}(\ddot{q} + \frac{1}{LC}q) = 0 \text{ d'où le résultat } (\ddot{q} + \frac{1}{LC}q) = 0 \text{ (équation différentielle)}$$

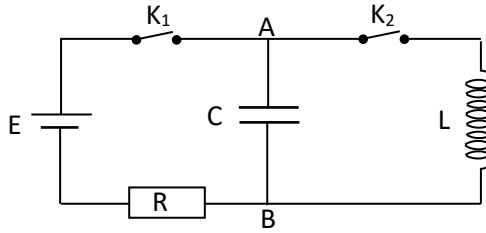
6- équation différentielle en  $u_C$

$$q = C \cdot u_C \text{ alors } \ddot{q} = C \cdot \ddot{u}_C$$

$$C \cdot \ddot{u}_C + \frac{1}{L} u_C = 0 \text{ d'où } C(\ddot{u}_C + \frac{1}{LC} u_C); \text{ finalement } \ddot{u}_C + \frac{1}{LC} u_C = 0$$

**ACTIVITÉ 2**

On considère le montage électrique représenté ci-dessous.



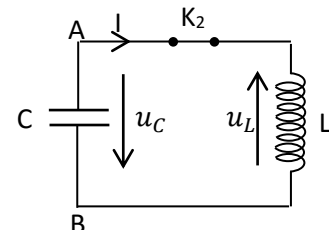
E est la f.é.m d'un générateur idéal de tension ;  $E = 6V$ . Le conducteur ohmique a pour résistance  $R = 100\Omega$ .

Le condensateur a pour capacité  $C = 10nF$  et l'inductance de la bobine est  $L = 10mH$ . Sa résistance est nulle. A l'instant  $t$ , la charge de l'armature A du condensateur est  $q$ , la tension à ses bornes est  $u_C$  et l'intensité du courant dans le circuit est  $i$  (figure 1).

- 1- Le condensateur étant déchargé, on laisse l'interrupteur  $K_2$  ouvert et on ferme  $K_1$ .
  - 1.1- Quel est le signe de la charge  $q$  de l'armature A ?
  - 1.2- On se place à la fin de la charge ;  $q$  est alors constante. Calculer la valeur de l'intensité du courant à travers le conducteur ohmique.
  - 1.3- Calculer les valeurs des tensions aux bornes du conducteur Ohmique et du condensateur.
  - 1.4- Calculer la charge  $q_0$  du condensateur.
- 2- Le condensateur étant chargé, on ouvre l'interrupteur  $K_1$  et on ferme  $K_2$  à l'instant  $t_0 = 0$ .
  - 2.1- Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension  $u_C$  aux bornes du condensateur.
  - 2.2- Déterminer la solution de cette équation différentielle.
  - 2.3- Calculer la période  $T_0$  des oscillations qui prennent naissance dans le circuit.
- 3- Calculer l'énergie électromagnétique E de l'oscillateur étudié.

**RÉSOLUTION DÉTAILLÉE**

- 1-
  - 1.1- la charge de A est positive.
  - 1.2-  $i = \frac{dq}{dt}$  or  $q = cste$  alors  $i = 0A$
  - 1.3-  $u_R = R.i = 0V$  et  $u_C = E = 6V$
  - 1.4-  $q_e = C. u_C = C.E$  ;  $q_e = 10.10^{-9} \times 6 = 6.10^{-8}C$ .



- 2-
  - 2.1- équation différentielle
 
$$u_C + u_L = 0 \Rightarrow i = \frac{dq}{dt} = C. \frac{du_C}{dt}$$

$$u_C + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} = 0 \Rightarrow \ddot{u}_C + \frac{1}{LC} u_C = 0$$
  - 2.2- solution de cette équation différentielle.
 
$$u_C = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-2} \times 10^{-8}}} = 10^5 \text{ rad/s}$$

$$\text{à } t = 0, u_C = U_m \cos \varphi = E = U_m$$

$$\cos \varphi = 1 \Leftrightarrow \varphi = 0 ; u_C = E \cdot \cos \omega_0 t \text{ d'où } u_C = 6 \cos 10^5 t$$

2.3- calcul de la période  $T_0$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{10^5} ; T = 6,28 \cdot 10^{-5} \text{ s}$$

3- calcul de l'énergie électromagnétique  $E$  de l'oscillateur.

$$E_m = \frac{1}{2} L I_m^2 ; I_m = C \cdot E \omega_0$$

$$\text{donc } E_m = \frac{1}{2} L (C \cdot E \omega_0)^2 = \frac{1}{2} LC^2 \times \left(\frac{1}{LC}\right) \times E^2 \text{ avec } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$E = \frac{1}{2} C \cdot E^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times 10^{-9} \times 6^2 = 1,8 \cdot 10^{-7} \text{ J}$$

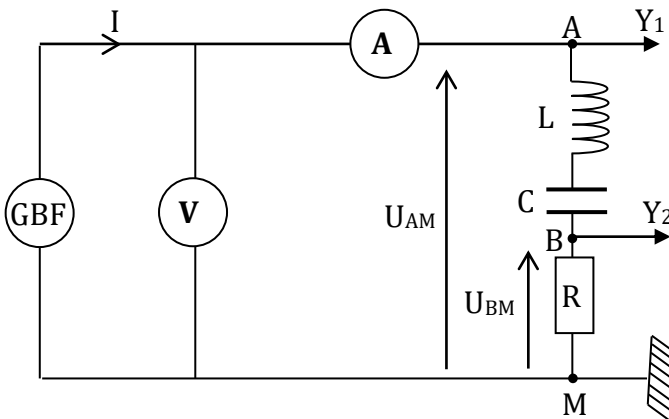
# OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES FORCÉES D'UN CIRCUIT (R, L, C)

## I. ÉTUDE EXPÉRIMENTALE

### 1- expérience

Considérons le montage de la figure ci-dessous ; le circuit étudié est formé de trois dipôles en série : une bobine d'inductance  $L$  et de résistance négligeable (sans noyau de fer), un condensateur de capacité  $C$  et un conducteur ohmique de résistance  $R$ .

On établit aux bornes de ce circuit une tension alternative sinusoïdale de fréquence  $N$  et de valeur efficace  $U$  ( $U$  est constant mais réglable).



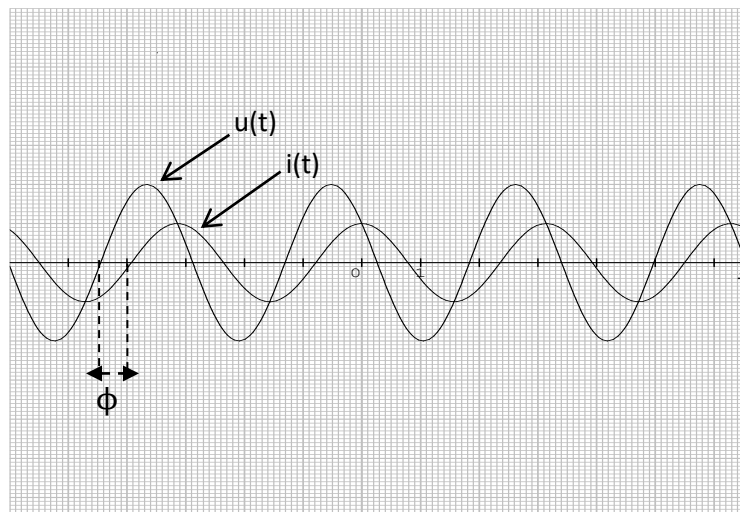
Sur la voie  $Y_1$  ; on visualise la tension  $U_{AM}$   
Sur la voie  $Y_2$  ; on visualise la tension  $U_{BM}$

- L'ampèremètre permet de mesurer l'intensité efficace  $I$ .
- Le voltmètre permet de mesurer la tension efficace  $U$  aux bornes du circuit aussi la tension aux bornes du générateur.

### 2- Observations et interprétations

Il apparaît aux bornes du conducteur Ohmique une tension sinusoïdale de même période  $T$  mais décalée.

On a :  $U_R = R.i$  d'où  $i = \frac{U_R}{R}$  donc a un facteur multiplicatif près,  $i$  et  $u$  ont la même allure.



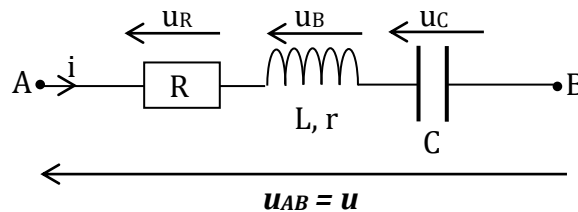
### 3- conclusion

Lorsqu'on attaque un circuit (R, L, C) série par un générateur délivrant à ses bornes une tension alternative sinusoïdale, le circuit R, L, C répond à cette sollicitation, en laissant circuler en son sein, un courant alternatif sinusoïdale de même fréquence que celle imposée par le générateur.

u est en avance sur i ; on définit la phase u sur i par  $\varphi = \frac{2\pi\Delta t}{T}$

## II. ÉTUDE THÉORIQUE D'UN CIRCUIT (R, L, C) SÉRIE

### 1- équation différentielle régissant les variations de i



La loi d'additivité des tensions nous permet d'écrire :  $u = u_R + u_B + u_C$

avec,  $u_R = R.i$  ;  $u_B = ri + L \cdot \frac{di}{dt}$  et  $u_C = \frac{q}{C}$  or  $q = \int idt$  d'où  $u_C = \frac{1}{C} \int idt$

$$u = (R+r)i + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt$$

Cette équation est l'équation différentielle régissant les variations de i.

L'étude expérimentale nous a montré que la tension u aux bornes du circuit et l'intensité i qui le traverse sont des fonctions sinusoïdales de même fréquence (donc de même pulsation ou de même période) qui présentent entre elles, un décalage  $\Delta t$  non nul (ce qui induit que la phase de u par rapport à i est non nulle).

### 2- Résolution de l'équation différentielle

#### a- Les différentes solutions

En prenant  $i = I_m \cdot \cos \omega t$  ; on obtient pour u, l'expression suivante :

$$u = U_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$\varphi$  (grandeur algébrique) désigne la phase de u par rapport à i (ou encore décalage angulaire entre u et i) et  $\omega$  représenter la pulsation imposée par le générateur.

La relation liant le décalage angulaire du décalage horaire est la suivante :

$$|\varphi| = \frac{2\pi \cdot \tau}{T}$$

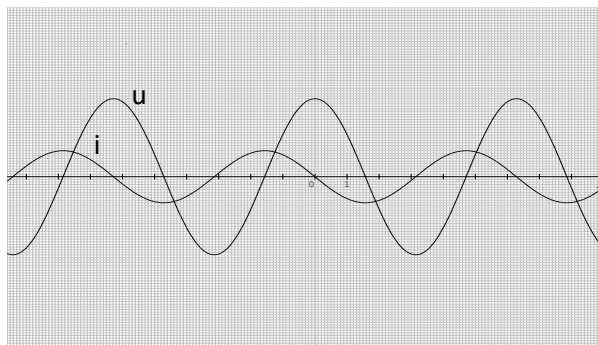
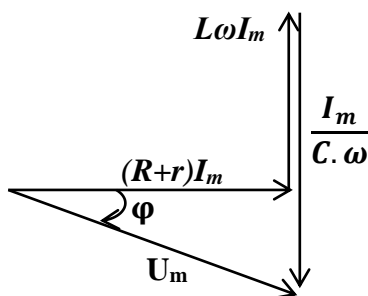
- $u = U_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$  et  $i = I_m \cdot \cos \omega t$
- $L \cdot \frac{di}{dt} = -L \cdot \omega \cdot I_m \sin \omega t = L \cdot \omega \cdot I_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$
- $\frac{1}{C} \int idt = \frac{I_m}{C} \int \cos \omega t = \frac{I_m}{C \cdot \omega} \sin \omega t = \frac{I_m}{C \cdot \omega} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$

En remplaçant ces résultats dans l'équation différentielle, **la résolution nécessite la construction de Fresnel.**

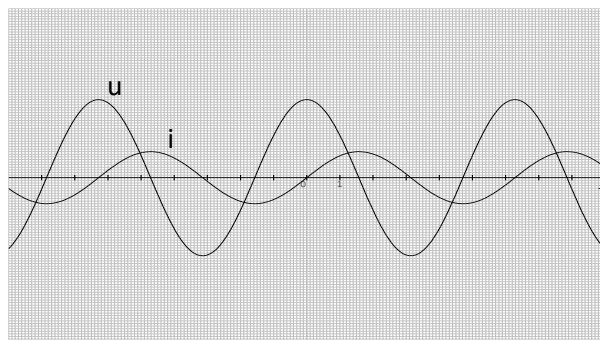
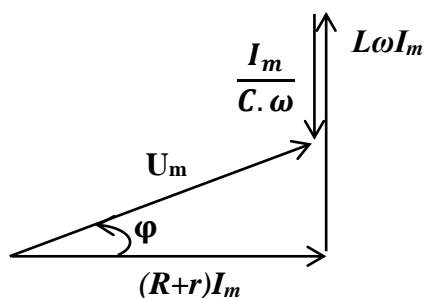
b- Construction de Fresnel

Fonctions	Amplitude	Phase à la date t	Phase à l'origine (t = 0)
$u = U_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$	$U_m$	$\omega \cdot t + \varphi$	$\varphi$
$u_R = (R+r)I_m \cdot \cos \omega \cdot t$	$(R+r)I_m$	$\omega \cdot t$	0
$u_L = L \cdot \omega \cdot I_m \cos(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2})$	$L \cdot \omega \cdot I_m$	$\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}$	$+\frac{\pi}{2}$
$u_C = \frac{I_m}{C \cdot \omega} \cos(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2})$	$\frac{I_m}{C \cdot \omega}$	$\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$

**1<sup>ère</sup> Cas :**  $L\omega < \frac{1}{C \cdot \omega}$  ou  $LC \cdot \omega^2 < 1$  (l'effet de capacité l'emporte sur l'effet d'inductance :  $\varphi < 0$  et  $\omega < \omega_0$ ), la tension u est en retard sur l'intensité i. **Le circuit est dit capacitif**



**2<sup>ème</sup> Cas :**  $L\omega > \frac{1}{C \cdot \omega}$  ou  $LC \cdot \omega^2 > 1$  (l'effet d'inductance l'emporte sur l'effet de capacité :  $\varphi > 0$  et  $\omega > \omega_0$ ), la tension u est en avance sur l'intensité i. **Le circuit est dit inductif.**



### 3- Expressions de l'impédance Z et de la phase $\varphi$

#### 3.1. Impédance Z

L'impédance Z est le quotient de la tension par l'intensité dans un circuit en régime alternatif sinusoïdale, il a pour expression.

$$Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I}$$

$$\text{et } Z = \sqrt{(R + r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$$

**N.B :** elle représente l'opposition au passage d'un courant alternatif.

$R+r$  : résistance du circuit [ $\Omega$ ]

$L\omega$  : réactance d'induction [ $\Omega$ ]

$\frac{1}{C\omega}$  : réactance de capacité [ $\Omega$ ]

$L\omega - \frac{1}{C\omega}$  : réactance du circuit RLC [ $\Omega$ ]

**Note Bien :** elle exprime l'opposition faite au passage du courant I à travers les éléments composant le circuit, ainsi que le déphasage  $\varphi$  provoqué par ces éléments entre la tension U et le courant I. Il s'exprime en [ $\Omega$ ] ohm.

#### 3.2. La phase $\varphi$

Dans un circuit R, L, C en régime alternatif sinusoïdal de pulsation  $\omega$ , la phase  $\varphi$  de la tension par rapport à l'intensité obéit aux relations :

$$\cos\varphi = \frac{\sum R}{Z} = \frac{U_R}{U}$$

$$\tan\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R+r}$$

On utilise aussi :  $\tan\varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R}$

#### 3.3. Tension maximale et tension efficace

Selon le diagramme de Fresnel, en utilisant le théorème de Pythagore la tension maximale se détermine comme suit :

$$U_{\max} = Z.I_{\max} ; U_{\max} = \sqrt{(R + r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} I_{\max} \text{ et } U_{\text{eff}} = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}$$

3.4. Étude de quelques dipôles particuliers

dipôles	impédance $Z$	phase $\varphi_{u/i}$ (rad)	schéma du circuit	diagramme de Fresnel
<b>Conducteur Ohmique R</b>	$Z = R$	$\varphi = 0$ (u et i sont en phase)		
<b>Bobine idéale L (r = 0)</b>	$Z = L\omega$	$\varphi = +\frac{\pi}{2}$		
<b>Bobine réelle (L, r)</b>	$Z = \sqrt{(L\omega)^2 + r^2}$	$\tan\varphi = \frac{L\omega}{r}$		
<b>Condensateur Parfait C</b>	$Z = \frac{1}{C\omega}$	$\varphi = -\frac{\pi}{2}$		
<b>Dipôle (R, L) avec (r = 0)</b>	$Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2}$	$\tan\varphi = \frac{L\omega}{R}$		
<b>Dipôle (L, C) avec (r = 0)</b>	$Z = \left  L\omega - \frac{1}{C\omega} \right $	$\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$		
<b>Dipôle (R, C)</b>	$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}$	$\tan\varphi = -\frac{1}{RC\omega}$		

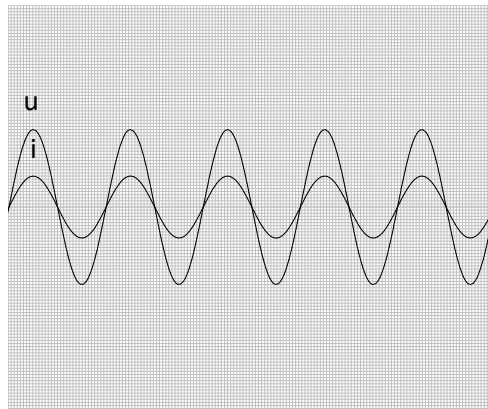
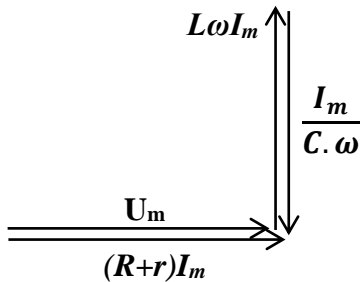
### III. RÉSONANCE D'INTENSITÉ

#### 1. définition

Le dipôle RLC est à la résonance d'intensité chaque fois que la fréquence N imposé par le générateur GBF est égale à celle du dipôle LC :  $N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$  ; aussi lorsque I passe par sa valeur maximale  $I_0$  pour une valeur particulière de  $N_0$ .

#### 2. propriétés du circuit à la résonance

- Impédance Z minimale  $Z = Z_0 = R + r$
- L'intensité I est maximale  $I = I_0 = \frac{U}{Z_0} = \frac{U}{R+r}$
- **La représentation de Fresnel dans le cas de la résonance est :**  
 $L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0}$  ou  $LC.\omega_0^2 = 1$  et  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$



- La tension u et l'intensité i sont en phase :  $\varphi_{u/i} = \varphi_u - \varphi_i = 0$
- Les tensions  $u_b$  et  $u_c$  respectivement aux bornes de la bobine et du condensateur vibrent en opposition de phase.

#### 3. étude expérimentale

##### 3.1. expérience

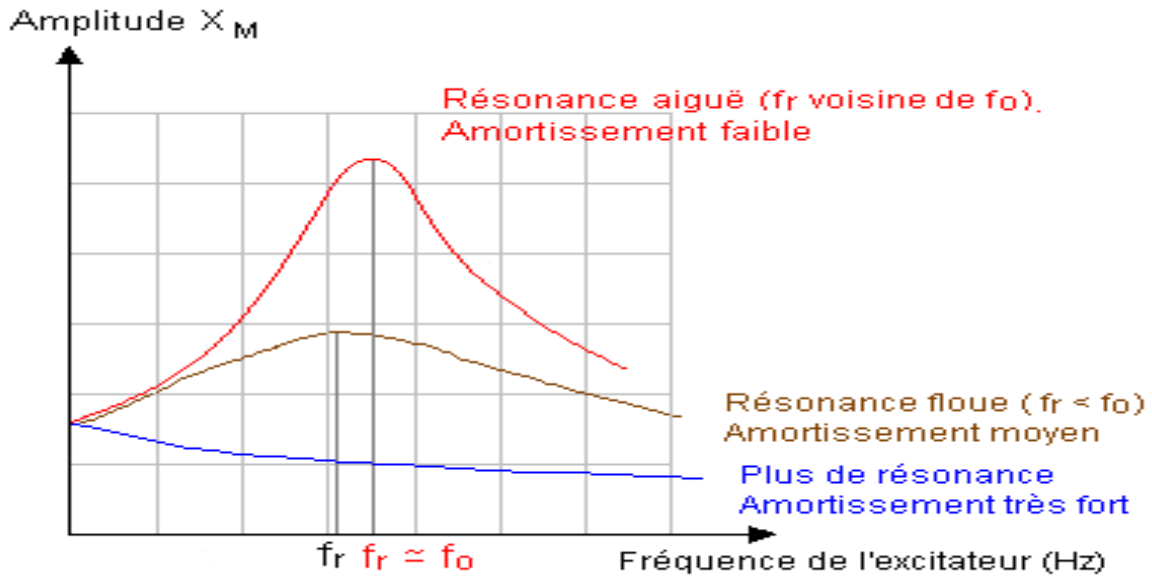
Un circuit comprenant en série un conducteur ohmique de résistance R, une inductance pure L, un condensateur de capacité C, est alimenté sous une tension alternative sinusoïdale, de valeur efficace U et de fréquence réglable.

On donne  $U = 2V$  ;  $R = 28\Omega$  ;  $L = 69,6mH$  ;  $C = 10\mu F$ . La valeur efficace U de la tension d'alimentation est maintenue constante. Pour des fréquences variant de 90Hz à 300Hz, on relève les valeurs correspondantes de l'intensité efficace du courant. On obtient le tableau suivant :

##### 3.2. tableau de mesures

N(Hz)	90	120	150	160	170	180	185	190	195	200	210	250	300
I(mA)	14,9	22,8	38,5	60,4	83,2	116,3	132,7	142,5	141,7	135,4	93,5	40,9	25,7

3.3. Courbe :  $I = f(N)$  échelle : 1cm = 20Hz et 1cm = 10mA



L'excitateur impose sa fréquence au résonateur.

Remarque :

- Lorsque R est faible, la résonance est aiguë, **on dit qu'elle atteint son acuité.**
- Lorsque R est grand **la résonance devient floue.**

3.4. exploitation de la courbe  $I = f(N)$

3.4.1. fréquence de résonance  $N_0$

C'est la fréquence  $N_0$  à laquelle l'intensité efficace  $I_0$  du courant est maximale

Graphiquement :  **$N_0 = 190\text{Hz}$  et  $I_0 = 142,5\text{ mA} = 142,5 \cdot 10^{-3}\text{A}$**

Vérification  $N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi \times \sqrt{69,6 \cdot 10^{-3} \times 10 \times 10^{-6}}} = 190,77\text{ Hz}$

3.4.2. bande passante  $\Delta N$

a. définition

La bande passante d'un circuit RLC série est l'ensemble des fréquences  $N$  ou des pulsations  $\omega$  pour lesquelles  $I \geq \frac{I_0}{\sqrt{2}}$  avec  $I_0$  l'intensité efficace à la résonance.

La largeur de la bande passante notée  $\Delta N$  ou  $\Delta\omega$  est :

$$\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega = 2\pi\Delta N = \frac{R}{L} \quad \text{d'où } N_2 - N_1 = \Delta N = \frac{R}{2\pi L}$$

b. détermination graphique

$$\frac{I_0}{\sqrt{2}} = 0,1007\text{A} = 100,7\text{ mA}$$

Pour  $I = 100,7\text{ mA}$ , on trouve :  $N_1 = 176\text{Hz}$  et  $N_2 = 240\text{Hz}$  d'où

$\Delta N = 240 - 176 = 64\text{Hz}$  ; et en vérifiant avec la formule on a :

$$\Delta N = \frac{R}{2\pi L} = \frac{28}{2\pi \times 69,6 \cdot 10^{-3}} = 64,027 \text{ Hz}$$

### 3.4.3. facteur de qualité Q d'un circuit

#### a. définition

Le facteur de qualité Q ou acuité de la résonance d'un circuit RLC est le quotient de la fréquence  $N_0$  de résonance par la largeur de la bande passante  $\Delta N$ . On écrit :

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{U_b}{U} = \frac{U_c}{U}$$

#### b. détermination graphique

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{N_0}{\Delta N} = \frac{190}{240-176} = \frac{190}{64} = 2,96875 \approx 3 \text{ et en vérifiant avec la formule on a :}$$

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{2\pi \times N_0 \times L}{R} = \frac{69,6 \cdot 10^{-3} \times 2\pi \times 190}{28} = 2,967 \approx 3$$

$$Q = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R \times C \times 2\pi \times N_0} = \frac{1}{28 \times 10 \times 10^{-6} \times 2\pi \times 190} = 2,99 \approx 3$$

### 3.4.4. surtension à la résonance

On montre qu'à la résonance, nous avons les relations suivantes :

$$U_c = Q.U \text{ et } U_L = Q.U$$

Lorsque  $Q > 1$ , il ya surtension à la résonance aux bornes du condensateur et aux bornes de la bobine.

## IV. PUISSANCE EN RÉGIME SINUSOÏDALE FORCÉES

### 1. puissance instantanée

$$p = u \times i \text{ or } i = I_m \cos \omega t \text{ et } u = U_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$p = U_m \cdot I_m \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

### 2. puissance apparente

La puissance apparente est le produit  $U \times I$  en courant alternatif.

$$P_a = U \cdot I$$

N.B : Cette puissance s'exprime en volt-ampère (V.A) parce qu'elle ne correspond pas une puissance électrique réelle

### 3. puissance moyenne ou active

La puissance moyenne ou active consommée par un dipôle quelconque en régime alternatif sinusoïdale forcé s'exprime comme suit.

$$P_{\text{moy}} = U \cdot I \cdot \cos \varphi = P_a \cos \varphi \text{ avec } \cos \varphi = \frac{R}{Z}$$

- $\cos \varphi$  est le facteur de puissance et est sans unité
- U (V) et I (A) désignent les valeurs efficaces de la tension et de l'intensité.

**Remarque** :  $P_{\text{moy}} = U.I.\cos\varphi = R.I^2 = \frac{U^2}{R}$

(La puissance moyenne dissipée par un dipôle RLC l'est uniquement par effet joule)

Lorsque le dipôle est un condensateur parfait ou une bobine sans résistance alors :

$$P_{\text{moy}} = 0$$

### EXERCICES D'APPLICATIONS

#### Application N°1

Un circuit est constitué d'un conducteur ohmique de résistance  $R = 200\Omega$ , d'une bobine d'inductance  $L = 0,1\text{H}$  et de résistance négligeable et d'un condensateur de capacité  $C = 1\mu\text{F}$  placé en série. Il est alimenté par un générateur BF qui délivre entre ses bornes une tension alternative sinusoïdale  $u$  de fréquence  $N = 250\text{Hz}$  et de valeur  $U = 5\text{V}$ .

- 1- Déterminer les impédances :
  - 1.1-  $Z$  du circuit RLC série.
  - 1.2-  $Z_R$  du conducteur ohmique.
  - 1.3-  $Z_b$  de la bobine.
  - 1.4-  $Z_C$  du condensateur.
- 2- Calculer l'intensité efficace  $I$  du courant qui traverse le circuit.
- 3- Calculer les tensions efficaces :
  - 3.1-  $U_R$  aux bornes du conducteur ohmique.
  - 3.2-  $U_b$  aux bornes de la bobine.
  - 3.3-  $U_C$  aux bornes du condensateur.
- 4-
  - 4.1- Représenter le diagramme de Fresnel (échelle : 1,5 cm pour 1V)
  - 4.2- Déterminer graphiquement la phase  $\varphi$  entre la tension et le courant.  
Retrouver le résultat par le calcul.
  - 4.3- Le circuit est-il globalement inductif ou capacitif ?
- 5- Pour quelle valeur de la fréquence la tension aux bornes du GBF et le courant sont-ils en phase ? Quel phénomène observe-t-on ?

### RÉSOLUTION DÉTAILLÉE

- 1-
  - 1.1- Calcul de l'impédance  $Z$  du circuit
 
$$Z = \sqrt{R^2 - (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} = \sqrt{R^2 - (2\pi N.L - \frac{1}{2\pi N.C})^2}$$
 AN :  $Z = 519,58\Omega$
  - 1.2- impédance aux bornes du conducteur Ohmique  
 $Z_R = R = 200\Omega$
  - 1.3- impédance aux bornes de la bobine  
 $Z_b = L\omega = 2\pi N.L = 157,07\Omega$
  - 1.4- impédance aux bornes du condensateur  
 $Z_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{2\pi N.C} = 636,62\Omega$

2- l'intensité efficace du courant qui traverse le circuit est :

loi d'Ohm en courant alternatif :  $U = Z.I$  ; d'où  $I = \frac{U}{Z}$

$$I = \frac{5}{519,58} = 9,62 \cdot 10^{-3} \text{ A soit } 9,62 \text{ mA}$$

3-

3.1- tension efficace aux bornes du conducteur ohmique

$$U_R = Z_R.I = R.I = 200 \times 9,62 \cdot 10^{-3} = 1,92 \text{ V}$$

3.2- tension efficace aux bornes de la bobine

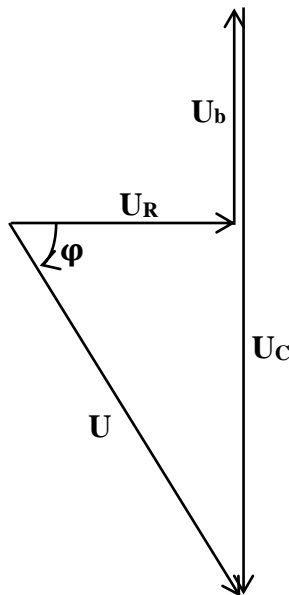
$$U_b = Z_b.I = L\omega.I = 157,07 \times 9,62 \cdot 10^{-3} = 1,51 \text{ V}$$

3.3- tension efficace aux bornes du condensateur

$$U_C = Z_C.I = \frac{I}{C\omega} = 636,62 \times 9,62 \cdot 10^{-3} = 6,13 \text{ V}$$

4-

4.1- digramme de Fresnel



échelle :  $1 \text{ V} = 1,5 \text{ cm}$

- $U_R = 2,9 \text{ cm}$
- $U_b = 2,3 \text{ cm}$
- $U_C = 9,2 \text{ cm}$
- $U = 7,5 \text{ cm}$

4.2- détermination graphique de la phase  $\varphi$  :

$$\cos\varphi = \frac{U_R}{U} = \frac{1,92}{5} = 0,384 \text{ soit } \varphi = 67,41^\circ$$

$$\sin\varphi = \frac{U_C - U_b}{U} = \frac{6,13 - 1,51}{5} = 0,924 \text{ soit } \varphi = 67,51^\circ$$

$$\tan\varphi = \frac{U_C - U_b}{U_R} = \frac{6,13 - 1,51}{1,92} = 2,40625 \text{ soit } \varphi = 67,43^\circ$$

détermination par calcul

$$\tan\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} = \frac{2\pi N.L - \frac{1}{2\pi N.C}}{R} = -2,40 \text{ soit } -67,36^\circ = 1,18 \text{ rad}$$

4.3-  $\varphi < 0$ , le circuit est globalement capacitif.

5- Valeur de la fréquence pour que  $u$  et  $i$  soit en phase :

$$LC\omega_0^2 = 1 \text{ d'où } (2\pi N_0)^2 LC = 1$$

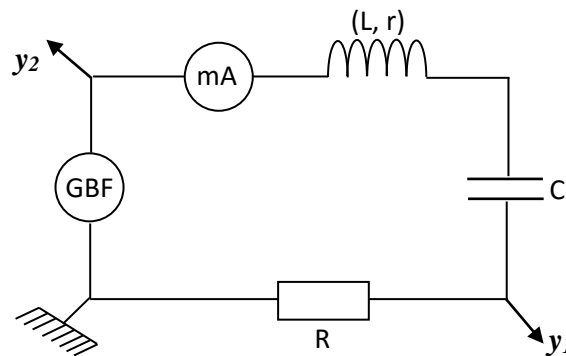
$$N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 503,29 \text{ Hz}$$

On observe le phénomène de résonance.

### Application N°2

Une bobine de résistance  $r$  et d'inductance  $L$  est montée en série avec un condensateur de capacité  $C$  et un résistor de résistance  $R = 100\Omega$ .

Cet ensemble constitue un circuit alimenté par un générateur de basses fréquences délivrant une tension sinusoïdale de fréquence  $N$  réglable et de valeur efficace  $U = 1V$  (voir schéma ci-dessous)



- 1) Donner l'expression de l'impédance  $Z$  du circuit en fonction de  $R$ ,  $r$ ,  $\omega$ ,  $L$  et  $C$ .
- 2) Donner l'expression de l'impédance  $Z$  du circuit en fonction de  $U$  et  $I$ .
- 3) On fait varier la fréquence de la tension entre 300Hz et 1000Hz. On relève alors le tableau de résultats suivants où  $I$  est la valeur efficace de l'intensité du courant.

N(Hz)	300	500	600	650	677	700	735	780	796	850	900	1000
I(mA)	0,74	1,90	3,47	5,20	6,61	8,05	9,35	7,48	6,61	4,50	3,44	2,40

- 3.1- Tracer sur papier millimétré la courbe  $I = f(N)$ .  
*Échelle : abscisse : 1cm représente 50Hz.*  
*ordonnée : 1cm représente 1mA*  
*On commencera à graduer l'axe des abscisses à partir de 300Hz*
- 3.2- Déterminer graphiquement la fréquence  $N_0$  et  $I_0$  à la résonance d'intensité.
- 3.3- Déterminer l'impédance  $Z$  du circuit pour  $N = N_0$ .
- 3.4- En déduire la valeur de la résistance  $r$  de la bobine.
- 4)
  - 4.1- Déterminer graphiquement la largeur de la bande passante.
  - 4.2- En déduire le facteur de qualité du circuit.
  - 4.3- Déduire également des résultats des questions précédentes les valeurs de  $L$  et de  $C$ .

Application N°3

On considère un dipôle (R, L, C) aux bornes duquel est appliquée une tension sinusoïdale de valeur efficace  $U = 24V$ .

Déterminer pour la fréquence de résonance d'intensité  $f_0$  et pour la fréquence  $f$  de 50Hz :

- l'intensité efficace du courant ;
- la puissance apparente ;
- la puissance moyenne consommée.

Données :  $R = 20\Omega$  ;  $L = 0,5H$  ;  $C = 5\mu F$

RÉSOLUTION DÉTAILLÉE

a) à la résonance d'intensité, nous avons :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0,5 \times 5 \cdot 10^{-6}}} = 100,7\text{Hz}$$

La loi d'ohm en courant alternatif :  $U = Z.I$  (or  $Z = R$  à la résonance)

$$I = \frac{U}{R} = \frac{24}{20} = 1,2A$$

$$\text{Pour } f = 50\text{Hz} ; Z = \sqrt{R^2 - (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} = \sqrt{R^2 - (2\pi N \cdot L - \frac{1}{2\pi N \cdot C})^2} = 480\Omega$$

La loi d'ohm en courant alternatif :  $U = Z.I$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{24}{480} = 0,05A$$

b) la puissance apparente est

pour  $f_0 = 100,7\text{Hz}$

$$P_a = U.I = 24 \times 1,2 = 28,8 \text{ VA}$$

pour  $f = 50\text{Hz}$

$$P_a = U.I = 24 \times 0,05 = 1,2 \text{ VA}$$

c) la puissance moyenne consommée est

pour  $f_0 = 100,7\text{Hz}$

$$\varphi = 0 ; \cos\varphi = 1 ; P_{\text{moy}} = U.I\cos\varphi = U.I = P_a = 28,8 \text{ W}$$

pour  $f = 50\text{Hz}$

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{20}{480} = 0,042 ; P_{\text{moy}} = U.I\cos\varphi = 24 \times 0,05 \times 0,042 = 0,05\text{W}$$

# RÉACTIONS NUCLÉAIRES SPONTANÉES

## I. RAPPELS

### 1. Structure de la matière

La matière est fait à partir d'atomes, chaque atome comprend au centre un noyau chargé (+) autour duquel gravitent des électrons chargés (-). L'atome est électriquement neutre.

### 2. Composition du noyau

#### a. les nucléons

Le noyau d'un atome est constitué de particules appelées nucléons. Leur nombre est le nombre de masse et se note A. Ils sont de deux types : **les protons et les neutrons**.

- les protons sont chargés (+) et leur nombre appelé charge ou numéro atomique se note Z.
- les neutrons ont une charge nulle et leur nombre se note (A-Z).

#### b. l'élément chimique

Un élément chimique est l'ensemble d'entités chimique qui ont le même Z, il se note :  ${}_Z\text{X}$ .

#### c. un nucléide

Un nucléide est un type de noyau caractérisé par A et Z, il se note :  ${}_Z^A\text{X}$ .

#### d. isotope

On appelle isotope des nucléides qui ont la même valeur de Z et des valeurs de A différents. Ils appartiennent au même élément chimique.

#### e. l'unité de masse atomique

L'unité de masse atomique noté u est par convention le  $\frac{1}{12}$  de la masse d'atome d'isotope 12 du carbone. Elle a pour valeur  **$u = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$** .

$u = 931,5 \text{ MeV}/c^2$  avec  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ .

#### f. la masse du noyau

La masse d'un nucléide  ${}_Z^A\text{X}$  a pour expression :  $m_X = Z \cdot m_p + (A-Z)m_n$  avec  $m_p = m_n$  : (respectivement la masse d'un proton et d'un neutron).

Remarque : Si  $m_p = m_n = u$ , alors  $m_X = Am_p = Au$

#### g. la masse volumique du noyau

Le noyau est assimilable à une sphère de rayon R, son volume est alors :  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ .

Sa masse volumique est donc :  $\rho = \frac{m}{V} = \frac{3m}{4\pi R^3}$ .

## II. LA RADIOACTIVITÉ

### 1. définition

La radioactivité est le fait que certains nucléides naturels ou artificiels se décomposent de façon spontanée pour donner d'autres nucléides avec émission d'une ou plusieurs particules appelées **rayonnement**.

### 2. Émission radioactive

Cette décomposition est une réaction nucléaire spontanées ou désintégration ou émission radioactive.

### 3. les différents types de radioactivité

Suivant la nature du rayonnement émis, on distingue trois (03) types de radioactivité résumé dans le tableau ci-dessous.

radioactivité	Particule émise	Nom de la particule	Symbole de la particule
Radioactivité $\alpha$	Particule $\alpha$	Noyau d'hélium	${}^4_2\text{He}$
Radioactivité $\beta$	Particule $\beta^-$	Électron	${}_{-1}^0\text{e}^-$
	Particule $\beta^+$	Positon (antiélectron)	${}_{-1}^0\text{e}^+$
Radioactivité $\gamma$	Particule $\gamma$	Photon	${}^0_0\gamma$

Remarque : Obtention de l'électron et du positon

- Pour avoir un électron dans le noyau on transforme un neutron en proton selon l'équation :

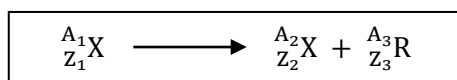
.....  
 .....

- Pour avoir un positon dans le noyau on transforme un proton en neutron selon l'équation :

.....  
 .....

#### 4. Les lois de conservation

Le bilan d'une désintégration s'écrit sous la forme symbolique :



*X* : symbole du noyau père

*Y* : symbole du noyau fils

*R* : symbole du rayonnement

- a. conservation de la charge

$$Z_1 = Z_2 + Z_3$$

- b. conservation du nombre de masse

$$A_1 = A_2 + A_3$$

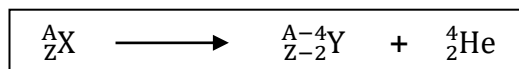
- c. conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie

Le bilan de la désintégration doit respecter la conservation du vecteur quantité de mouvement et de l'énergie.

#### 5. Étude des radioactivités

- a. la radioactivité  $\alpha$

C'est l'émission d'un noyau d'hélium selon l'équation :



#### Exercice d'application

Le polonium se désintègre spontanément en donnant un nucléide inconnu X et en émettant des particules  $\alpha$ .

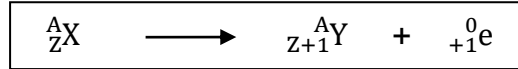
- 1) Donner la composition du noyau du polonium. ( ${}^{210}_{84}\text{Po}$ )
- 2) Écrire l'équation de cette désintégration.
- 3) A l'aide du tableau de classification périodique, donner le nom du nucléide X.

#### Résolution

L'élément X est le plomb

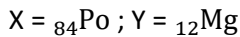
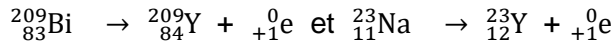
b. la radioactivité  $\beta^-$ 

C'est l'émission d'un électron selon l'équation.

Exercice d'application

Les désintégrations du bismuth et du sodium Y sont  $\beta^-$ .

- 1) Écrire les équations de ces désintégrations.
- 2) Donner le nom du noyau fils dans chaque cas.

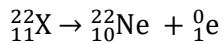
Résolutionc. la radioactivité  $\beta^+$ 

C'est l'émission d'un positon selon l'équation.

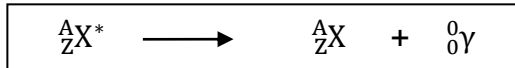
Exercice

La désintégration  $\beta^+$  d'un nucléide inconnu X donne le néon.

- 1) Écrire son équation de désintégration
- 2) Donner le nom du noyau père X

Résolutiond. la radioactivité  $\gamma$ 

C'est le passage d'un nucléide de l'état excité à l'état fondamental avec émission d'un photon. Le bilan de la désintégration s'écrit.

**III. LA DECROISSANCE RADIOACTIVE**1. La loi de décroissance radioactive

Considérons un échantillon de substance radioactive. Le nombre de noyau aux dates indiqués sont :

Dates	$N_0$ de noyaux radioactifs
$t_0 = 0$	$N_0$
$t$	$N$
$t + dt$	$N + dN$

$$-dN = \lambda N dt \text{ d'où } \frac{dN}{N} = -\lambda dt ; [\ln N]_{N_0}^N = -\lambda [t]_{t_0=0}^t \Rightarrow \ln N - \ln N_0 = \ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t \Rightarrow \frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t} ;$$

Finalement on obtient :  $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$

- Le nombre  $dN < 0$  car il y a diminution du nombre de noyaux.
- $-dN$  est le nombre de noyaux désintégrés pendant la durée  $dt$ , il est proportionnel à  $N$  et à  $dt$ .

2. L'activité d'une substance radioactive

$$A = \lambda N \text{ or } N = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \Rightarrow A = \lambda N_0 \cdot e^{-\lambda t} \Rightarrow A = A_0 e^{-\lambda t} \text{ avec } A_0 = \lambda N_0$$

### 3. La période radioactive ou demi-vie

La période T est le temps t au bout duquel la moitié des noyaux radioactifs a disparu. Pour obtenir donc  $t = T$  on procède comme suit :

La moitié des noyaux est :  $N = \frac{N_0}{2}$  et  $t = T$  alors  $\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-\lambda T}$  ;  $\frac{1}{2} = e^{-\lambda T} \Rightarrow -\ln 2 = -\lambda T$

Finalement :  $T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}$

### 4. activité et datation au carbone

On date ou on calcul l'âge d'un échantillon ancien à partir de la mesure de l'activité du carbone 14 contenu dans l'échantillon ancien d'une part et dans l'échantillon actuel de même nature d'autre part. On obtient :

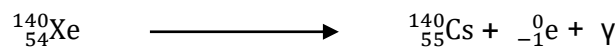
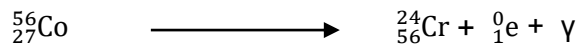
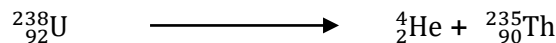
### 5. familles radioactives

Une famille radioactive est un ensemble de nucléides radioactifs issus d'un noyau initial père instable qui par désintégration en chaîne conduit à un noyau final stable.

## IV. EXERCICE D'APPLICATION ET DE CONSOLIDATION DES ACQUIS

### Exercice 1

Les transformations suivantes sont-elles a priori possibles ? Justifier votre réponse.



### Exercice 2

Le Thorium  ${}_{90}^{227}\text{Th}$  est radioactif émetteur  $\alpha$ .

- 1) Écrire l'équation bilan de sa désintégration radioactive sachant qu'elle conduit au radium.
- 2) La période (demi vie) du thorium 227 est  $T = 18,3$  jours. Calculer l'activité radioactive  $A_0$  d'un échantillon de masse 1mg de thorium  ${}_{90}^{227}\text{Th}$  ( $N = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ ).
- 3) Quelle masse de thorium de l'échantillon considéré a disparu au bout de 36h ?
- 4) Quelle est alors l'activité de l'échantillon ?

### Exercice 3

Le phosphore  ${}_{15}^{32}\text{P}$  est radioactif  $\beta^-$ .

- 1) Écrire l'équation bilan de sa désintégration (le noyau fils est du soufre).
- 2) La période radioactive du phosphore 32 est égale à  $T = 14,3$  jours.
  - a. qu'appelle-t-on période d'un nucléide radioactif ?
  - b. calculer la constante radioactive du phosphore 32.

# RÉACTIONS NUCLÉAIRES PROVOQUÉES

Découverte en 1938 par Hahn et Strassmann, la fission nucléaire est la division d'un noyau atomique en plusieurs fragments, sous l'impact d'une particule (généralement un neutron), alors que la fusion nucléaire est la réunion de plusieurs noyaux atomique en un seul. Ces deux types de réactions libèrent d'importantes quantités d'énergie. Sur le schéma de droite, la fusion de deux noyaux de deutérium conduit à la formation d'un noyau d'hélium  ${}^4_2\text{He}$ , avec émission de 3,2MeV d'énergie et d'un neutron (noté n).

## I. ÉTUDE ÉNERGÉTIQUE DU NOYAU

### 1. Notion de défaut de masse

On appelle défaut de masse, la différence de masse entre la masse du noyau obtenu par le calcul et celle mesuré expérimentalement.

### 2. énergie de liaison du noyau

L'énergie de liaison par nucléon du noyau notée  $E_\ell$  est l'énergie qu'il faut fournir à un noyau pour que ces nucléons se séparent en protons et neutrons. Elle a pour expression :

$$E_\ell = \Delta m \cdot c^2 ; \text{ avec } c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

### 3. Énergie de liaison par nucléons : stabilité des noyaux

C'est le rapport ou le quotient de  $E_\ell$  par son nombre de masse A. Elle se note  $E_a$

$$E_a = \frac{E_\ell}{A} = \frac{\Delta m \cdot c^2}{A}$$

#### Remarque :

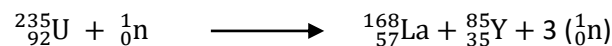
Un nucléide est d'autant plus stable que son énergie de liaison par nucléons  $E_a$  est élevée.

## II. LES TRANSMUTATIONS

### 1. Définition

Une réaction de fission est une réaction au cours de laquelle un noyau cible plus lourds bombardé par une particule se scinde en deux autres noyaux plus légers.

### 2. exemple de réactions de fissions



### 3. conclusion

Les réactions de fissions sont très énergétiques :

1g d'uranium libèrent autant d'énergie que 2 tonnes de pétrole ; si la réaction en chaîne n'est pas contrôlée, une énergie énorme est libérée en quelques secondes et produisant une explosion.

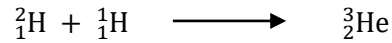
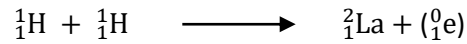
#### Exercice d'application

L'uranium bombardé par un neutron produit du Xénon, autre noyau inconnu Y et deux neutrons.

- 1) écrire l'équation bilan de la réaction de fission.
- 2) Déterminer le nom du noyau inconnu Y.

**V. LA FUSION**1. définition

On appelle réaction de fusion, une réaction nucléaire provoquée au cours de laquelle des noyaux légers s'assemblent pour donner un noyau plus lourd.

2. exemple de réaction de fusion3. conclusion

Les réactions de fusion sont plus énergétiques que les réactions de fissions.

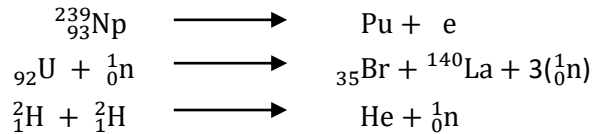
Exercice d'application

Deux isotopes de l'hydrogène dont le deutérium s'assemblent pour donner le noyau d'hélium et un neutron.

- 1) Écrire l'équation bilan de la réaction de fusion.
- 2) Déterminer le symbole chimique et le nom de l'autre isotope.

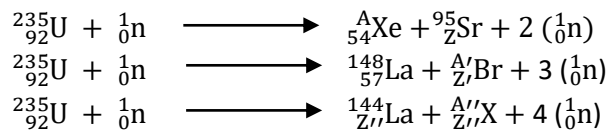
**V. EXERCICES D'APPLICATION ET DE CONSOLIDATION DES ACQUIS**Exercice 1

Complete chacune des équations de réactions nucléaires suivantes et indiquer chacune d'elles, s'il s'agit de transmutation naturelle, artificielle, d'une fission ou d'une fusion.

Exercice 2

La fission d'un noyau d'uranium 235 bombardé par un neutron fournit divers produits.

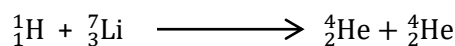
Parmi les réactions qui se produisent, on peut citer :



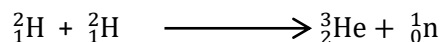
- 1) Déterminer A, Z, A', Z', A'' et Z''.
- 2) Déterminer la nature de X.

Exercice 3

Soit la transmutation suivante :



- 1) Déterminer le bilan énergétique de cette réaction nucléaire.
- 2) Déterminer l'énergie libérée par la réaction :



#### Exercice 4

Le polonium  ${}_{84}^{210}\text{Po}$  est un noyau instable qui donne par désintégration  $\alpha$ , un noyau de plomb avec émission de rayonnement  $\gamma$ .

- 1) Quelle est la signification des nombres placés à gauche du symbole Po ? En déduire la composition du noyau de polonium.
- 2) Calculer en MeV, l'énergie de liaison par nucléons pour le noyau de polonium.
- 3) Écrire l'équation de désintégration du noyau de polonium.
- 4) Calculer l'énergie libérée au cours de cette désintégration.
- 5) Les particules  $\alpha$  émises servent à bombarder des noyaux d'aluminium  ${}_{13}^{27}\text{Al}$  qui se transforment en un isotope radioactif du phosphore  ${}_{15}^{30}\text{P}$  avec émission d'une particule. Le noyau  ${}_{15}^{30}\text{P}$ , se transforme, à son tour, en noyau stable de silicium  ${}_{14}^{30}\text{Si}$ .
  - 5.a- Écrire l'équation de ces transformations successives.
  - 5.b- Donner les caractéristiques des particules émises dans chaque cas.

On donne :  $m_{\text{Po}} = 210,0482u$  ;  $m_{\text{Pb}} = 206,0385u$  ;  $m_{\alpha} = 4,0015u$ .