physique

collection eurin-gié

Terminales C et E



HACHETTE
Lycées

Scanné avec CamScanner



Scanné avec CamScanner

physique

collection eurin-gié

Terminales C et E

"ma confiance est sans de façon ce et je ne me rapproche de rien"
Tt l'heure raison, il s'agit d'avoir. Mais pour vaincre, il faut avoir raison et ne pas trahir >>
Honoré Haka

P. BRAMAND
Lycée de Salon-de-Provence

J.-P. DURANDEAU
Inspecteur pédagogique régional à Bordeaux

Ph. FAYE
Lycée Thiers de Marseille

G. THOMASSIER
Lycée Thiers de Marseille

SILENCE

Nouvelle édition
conforme au programme 89

H (Honoré Haka)

HACHETTE
Lycées

Scanné avec CamScanner

Évaluation des capacités en sciences physiques

A. *Posséder des connaissances spécifiques aux sciences physiques*

1. *Des connaissances scientifiques*

a) vocabulaire, symboles, unités

b) ordres de grandeur

c) définitions, lois, modèles

2. *Des connaissances de savoir-faire*

a) dans le domaine expérimental

b) dans le domaine théorique

B. *Utiliser des connaissances et des savoir-faire non spécifiques aux sciences physiques*

1. *Accéder aux connaissances au moyen de différentes sources*

2. *Utiliser la langue française*

3. *Utiliser des outils mathématiques*

4. *Utiliser d'autres outils et moyens d'expression*

C. *Pratiquer une démarche scientifique*

Notamment : observer et analyser, choisir ou élaborer un modèle physique, organiser les étapes de la résolution, porter un jugement critique

1. *Dans une situation voisine d'une situation connue*

a) dans le domaine expérimental

b) dans le domaine théorique

2. *Dans une situation inconnue*

a) dans le domaine expérimental

b) dans le domaine théorique

Texte paru au *Bulletin Officiel* de l'Éducation Nationale, Spécial N° 3 du 9 juillet 1987.

Maquette : *Jean-Pierre Jauneau.*

Mise en pages : *Société Médiamax.*

Réalisation des schémas : *Remi Picard.*

ISBN 2-01-014724-3

© Hachette, 1989. — 79, boulevard St Germain, F 75006 Paris.

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article 40).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

Scanné avec CamScanner

PRÉFACE

Ce nouvel ouvrage pour les classes de Terminales C et E a été écrit en conformité avec le programme qui entre en vigueur à la rentrée 1989. Rédigé d'une manière simple, il évite tout formalisme ou abstraction inutiles et suit au plus près les commentaires officiels.

Les chapitres qui le composent sont regroupés en quatre parties : mécanique ; électromagnétisme et circuits ; optique ; physique atomique et nucléaire.

Chacun de ces chapitres comporte :

- des « **applications résolues** » : incorporées à la leçon, elles permettent une compréhension progressive du cours et une mise en œuvre des notions introduites ;
- des « **fiches expérimentales** » : elles favorisent la pratique et la démarche expérimentales par la réalisation d'expériences dont l'exploitation doit concrétiser l'essentiel du cours ; elles fournissent des exemples de **protocoles expérimentaux** ;
- des « **fiches techniques** » : elles ont pour objet de familiariser les élèves avec les appareils ou le matériel qu'ils utilisent, en leur en précisant le mode d'emploi ;
- des « **documents** » techniques ou historiques proposent les ouvertures nécessaires.

Chaque chapitre est clos par une série d'exercices regroupés en trois rubriques :

- « **l'essentiel du cours** » permet une revue rapide des notions essentielles du chapitre ;
- les « **exercices de base** » ont été conçus pour préparer l'élève à aborder l'ensemble des exercices proposés dans les « bancs d'essais » ;
- le « **banc d'essais** » est constitué de problèmes susceptibles d'être posés au baccalauréat. A la fin de la plupart de ces problèmes figure un renvoi (↳) à un ou plusieurs « exercices de base » dont la résolution peut faciliter celle du problème considéré.

Précisons que chaque exercice (souvent chaque question d'exercice) possède un codage indicatif conforme à la grille officielle d'évaluation (voir page ci-contre). Les exercices faisant référence à une démarche expérimentale sont accompagnés d'un filet rouge. Les exercices les plus difficiles sont repérés par un numéro de couleur bleue. Le chapitre consacré aux multivibrateurs est suivi d'exercices corrigés destinés à faire comprendre l'essentiel du sujet.

Enfin, on trouvera tout au long du livre une rubrique intitulée « l'évaluation au bac ». Elle donne des conseils généraux de résolution, illustrés de problèmes types assortis d'une grille de cotation et d'évaluation à l'instar de ce qui est prévu pour le baccalauréat.

Comme pour les autres ouvrages de la collection, outre l'usage de quatre couleurs, un soin tout particulier a été apporté dans la réalisation des schémas et dans le choix des illustrations.

Nous espérons présenter ainsi un ouvrage clair et utile, propre à motiver les élèves de classes à vocation essentiellement scientifique ou technique.

Nous serions reconnaissants à nos collègues utilisateurs de nous faire part de leurs remarques et nous les en remercions par avance.

Les Auteurs.

Scanné avec CamScanner

Programme de Physique

(applicable à la rentrée 1989)

A. Mécanique

I — *Cinématique*

Vecteurs vitesse et accélération d'un point dans un repère donné. Cas du mouvement circulaire uniforme.

II — *Dynamique*

1° Mouvement du centre d'inertie d'un solide. Relation $\frac{d\vec{p}}{dt}$ dans un repère galiléen.

2° L'interaction gravitationnelle. Mouvement circulaire des satellites.

3° Mouvement d'une particule soumise à une force constante.

4° Le pendule élastique : équation différentielle du mouvement d'un oscillateur harmonique non amorti. Fréquence propre. Conservation de l'énergie. Amortissement d'un oscillateur.

B. Électromagnétisme

I — *Le champ magnétique*

1° Mise en évidence expérimentale du champ magnétique. Spectres magnétiques. Vecteur champ magnétique $\vec{B}$. Champ magnétique créé par un solénoïde.

2° Étude expérimentale de la trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme : force subie, relation $\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

3° Action d'un champ magnétique sur un circuit parcouru par un courant; loi de Laplace.

II — *Induction électromagnétique*

1° Induction électromagnétique : mise en évidence expérimentale; loi de Lenz; f.e.m. d'induction.

2° Auto-induction : mise en évidence expérimentale; f.e.m. d'auto-induction; auto-inductance. Énergie emmagasinée par une bobine.

III — *Oscillations électriques*

1° Circuits oscillants.

a) Équation différentielle d'un circuit LC. Fréquence propre. Conservation de l'énergie.

b) Entretien des oscillations d'un circuit LC série à l'aide d'un circuit intégré linéaire.

2° Génération de signaux périodiques. Multivibrateur astable de type RC, à inverseurs logiques.

3° Circuits en régime sinusoïdal forcé.

a) Oscillations forcées en régime sinusoïdal d'un circuit RLC série, impédance. Résonance d'intensité, bande passante, facteur de qualité.

b) Intensité et tensions efficaces. Puissance, facteur de puissance.

C. Optique

I — *Lentilles minces*

1° Lentilles minces convergentes et divergentes. Position et grandeur de l'image. Vergence.

2° Principe de l'objectif photographique.

II — *Dispersion de la lumière par un prisme ; diffraction par un réseau*

D. Physique atomique et nucléaire

I — *Particules de grande énergie*

Les particules de grande énergie : expression de leur quantité de mouvement, de leur énergie totale et de leur énergie cinétique. Masse et énergie. Cas particulier du photon. Vérifications expérimentales.

II — *Niveaux d'énergie atomiques*

Spectres de raies d'émission et d'absorption. Existence de niveaux d'énergie discrets dans un atome. Relation $E_2 - E_1 = h\nu$.

III — *Noyau atomique*

1° Composition du noyau; les nucléons, énergie de liaison.

2° Réactions nucléaires spontanées; loi de décroissance d'un nucléide radioactif; radioactivités α, β^-, β^+; émission. Absorption des rayonnements.

3° Réactions nucléaires provoquées : fission et fusion.

Scanné avec CamScanner

TABLE DES MATIÈRES

MÉCANIQUE 6

1. Cinématique 8
2. Mouvement du centre d'inertie d'un solide 24
3. Interaction et champ gravitationnels 44
4. Mouvements dans un champ uniforme 62
5. Oscillations mécaniques libres 82

L'évaluation au bac : mécanique 96

ÉLECTROMAGNÉTISME ET OIRCUITS 100

6. Champ magnétique 102
7. Particule chargée en mouvement dans un champ magnétique 116

L'évaluation au bac : particules dans $\vec{E}$ et $\vec{B}$ 132

8. Loi de Laplace 136
9. Induction électromagnétique 152
10. Applications de l'induction électromagnétique 168
11. Auto-induction 178

L'évaluation au bac : induction ; auto-induction 194

12. Oscillations électriques libres 198
13. Multivibrateurs astables 214

Corrigé des exercices du chapitre 13 226

14. Oscillations électriques forcées 230
15. Puissance en régime sinusoïdal forcé 250

L'évaluation au bac : oscillations électriques forcées 264

OPTIQUE 268

16. Les lentilles minces 270
17. L'objectif photographique 290
18. Décomposition de la lumière. Spectres 302

L'évaluation au bac : les lentilles 314

PHYSIQUE ATOMIQUE ET NUCLÉAIRE 318

19. Spectroscopie. Niveaux d'énergie dans les atomes 320
20. Particules de grande énergie 340
21. Particules de grande énergie, vérifications expérimentales 354

L'évaluation au bac : particules relativistes 368

22. Noyaux atomiques 372
23. Réactions nucléaires spontanées 386
24. Réactions nucléaires provoquées 404

L'évaluation au bac : radioactivité 424

RÉPONSES AUX EXERCICES 427

Scanné avec CamScanner

UN PEU D'HISTOIRE

Physique galiléenne et physique newtonienne

Dans le texte suivant, le physicien allemand A. March expose les découvertes de deux grands génies de la physique : Galilée et Newton.

« Galilée fut le premier à fonder la physique sur l'expérience et non sur la spéculation. Il tenait fermement pour ce principe que, si l'on voulait apprendre quoi que ce soit sur la Nature, il fallait se fier à l'expérience et non s'adresser à des ouvrages jaunis par le temps.

Ces expériences lui enseignèrent qu'un corps abandonné à lui-même, qui n'est soumis à aucune force, n'est pas animé d'un mouvement circulaire(*) : ou bien il demeure au repos, ou bien il parcourt, à une vitesse uniforme, une trajectoire rectiligne(*) [...].

Par conséquent, il apparaît que l'action sur un corps n'a pas pour résultat une vitesse, mais un *changement de vitesse.* Depuis Galilée, ce changement de vitesse est désigné en mécanique par le terme d'*accélération,* notion qui, en physique, a un sens plus large que dans le langage quotidien. Ce dernier comprend uniquement par là une augmentation de vitesse, tandis qu'en mécanique on parlera aussi d'accélération si la vitesse diminue ou si la direction en change. Soit un mouvement circulaire à vitesse constante : il sera accéléré parce que la direction de la vitesse est modifiée de façon continue. [...]

Newton forma très jeune — il était encore étudiant — cette conjecture que la force gravifique agissant sur une pomme en train de tomber sur le sol devait avoir un rapport avec la force qui retenait la Lune sur son orbite. Il ramena ces deux forces à une attraction que la Terre exerce sur tous les corps et dont il supposa que la puissance décroît avec l'augmentation de la distance entre les corps. Afin de vérifier la justesse de cette hypothèse, il compara les forces agissant sur la Lune et sur la pomme. C'est ainsi qu'il parvint à sa fameuse loi de la gravitation universelle selon laquelle tous les corps s'attirent réciproquement en raison directe de leur masse et en raison inverse du carré de leur distance. [...]

La notion de gravitation incorporait, pour la première fois, notre planète à l'ensemble du cosmos en même temps qu'elle l'insérait dans une chaîne de forces unissant entre eux tous les corps célestes. [...] Seule une question demeurait pendante encore : pouvait-on faire dériver de la loi de la gravitation les lois du mouvement des planètes que Kepler avait découvertes un demi-siècle plus tôt(**)? Si la loi était exacte, elle devait pouvoir fournir toutes indications en ce qui concerne les mouvements observables dans le ciel. [...] Les calculs menèrent à un succès complet : il en résultait que les trois lois de Kepler étaient explicables à partir de la seule loi de la gravitation universelle.

A. March, *La physique moderne et ses théories,* Gallimard, collection « Idées ».

(*) Ce qui est contraire aux idées d'Aristote.

(**) Lois de Kepler : 1/ Les orbitres planétaires sont des ellipses dont le Soleil occupe l'un des foyers. 2/ Les aires décrites par les rayons vecteurs sont proportionnelles aux temps. 3/ Les carrés des temps des révolutions planétaires sont proportionnels aux cubes des grands axes des orbites.

Les fondateurs de la mécanique

Aristote (~384- ~322 av. J.-C.)

Philosophe et savant grec. C'est sans doute lui qui a le plus marqué la philosophie et la science des siècles suivants. Son principal titre de gloire a été de fonder la *logique,* c'est-à-dire cet ensemble de règles contraignantes qui permettent de faire du *discours* l'usage le plus cohérent et par là même le plus efficace. On peut estimer que le système aristotélicien, devenu au Moyen Age l'armature de toutes les scolastiques



arabes et chrétiennes, a figé le progrès de la pensée. Mais nous ne pouvons pas nier que, malgré cette imperfection, ce système a été le modèle de toute systématisation future.

En mécanique, Aristote et ses disciples, en regroupant l'ensemble des faits connus, tentent de formuler un certain nombre de principes et de lois à partir des observations pratiques de leur temps. Le sens commun constitue la trame de leur démarche : *Le mouvement, c'est-à-dire tout ce qui est transformation, changement, est inséparable de la nature; le temps est immuable, absolu, et il n'y a pas de temps sans mouvement ni changement.* Le philosophe distingue toutefois deux sortes de mouvement : *le mouvement en puissance* et *le mouvement en acte.* Dans ce dernier cas, il définit deux sortes de mouvement :

- le mouvement par nature : les corps vont vers leur lieu naturel (par exemple, un corps aura tendance à tomber parce que son lieu naturel est situé vers le bas);
- le mouvement par contrainte : ce mouvement est dû à un *moteur,* correspondant à notre concept de force, qui communique une vitesse proportionnelle à la force.

En fait, la mécanique d'Aristote tout entière est liée à la vision cosmologique du monde où tous les corps célestes tournent d'un mouvement circulaire autour d'une Terre centrale.

Archimède (~287- ~212 av. J.-C.)

Ingénieur, mathématicien et physicien grec. C'est l'un des plus grands génies scientifiques de tous les temps. Il conçoit,

Scanné avec CamScanner

avant Leibniz et Newton, le calcul intégral. En mécanique, il introduit la notion de masse volumique et de barycentre des masses. Se consacrant à la statique des solides, il étudie l'équilibre des corps. Contrairement aux développements d'Aristote, les démonstrations et les théorèmes de ce physicien sont de nos jours admis comme exacts et encore enseignés (Principe d'Archimède). Les apports et les réalisations des ingénieurs d'Alexandrie en mécanique se situent dans la lignée de ceux d'Archimède : machines hydrauliques de Ctésibios, de Philon, ...

Nicolas Copernic (1473-1543)



Astronome polonais. Abandonnant le géocentrisme dû à l'astronome grec Ptolémée (90-168), il reprend l'hypothèse dite héliocentrique, déjà émise par le grec Aristarque de Samos (~310-~230 av. J.-C.). Le système de Copernic considère les orbites des planètes comme circulaires; un demi-siècle plus tard, Kepler précisera cette représentation solaire. Cosmologie et mécanique étant alors intimement liées, la révolution de l'une entraînera obligatoirement celle de l'autre.

Galileo Galilei, dit Galilée (1564-1642)



Mathématicien, physicien et astronome italien. De 1594 jusqu'à sa mort, Galilée s'oppose à la mécanique d'Aristote; il est, par ailleurs, convaincu de la valeur du système de Copernic. Il énonce la loi de l'inertie peu avant Newton, esquisse la notion d'accélération, introduit la notion de moment et étudie les lois du pendule, de la chute des corps et de la statique des fluides. La finesse de son intelligence, la vivacité de son esprit et de sa plume expliquent le caractère percutant de son œuvre et l'énorme influence de l'esprit galiléen. Durant tout le XVII^{e} siècle, son œuvre est complétée par Descartes, Fermat, Roberval, Torricelli, Pascal, Huygens, ...

Isaac Newton (1642-1727)



Mathématicien, physicien et astronome anglais. Il est le fondateur de la mécanique classique, souvent appelée mécanique newtonienne. Ses principaux travaux portent sur le calcul infinitésimal, la nature de la lumière blanche et la gravitation universelle. L'ensemble des connaissances en mécanique est synthétisé et enrichi dans son œuvre : *Philosophiae naturalis principia mathematica*, qu'il publie en 1687. Il donne une forme logique parfaite à la mécanique, qui repose sur trois lois :

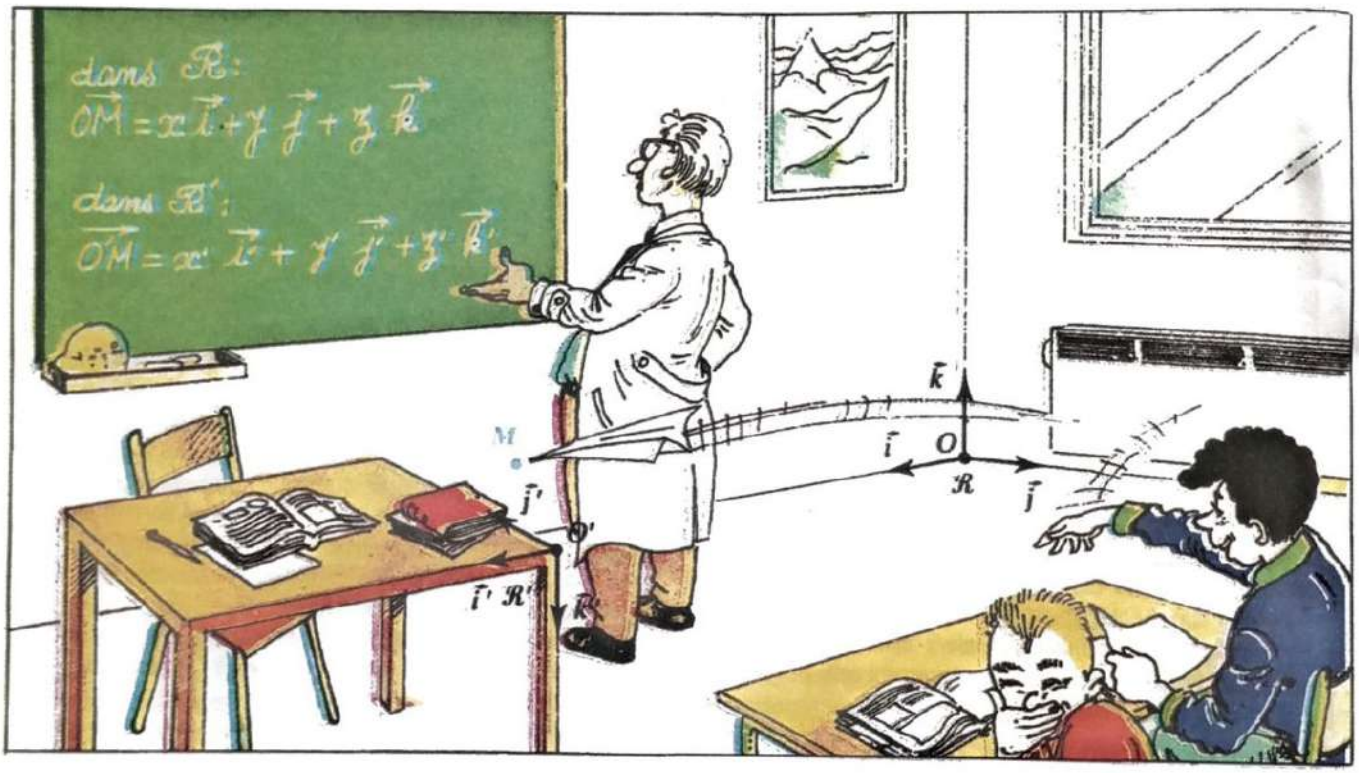
- principe de l'inertie : *tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui et ne le contraigne à changer d'état;*
- principe fondamental : *les changements qui arrivent dans la quantité de mouvement sont proportionnels à la force motrice et se font dans la ligne droite où cette force a été imprimée;*
- principe de l'action et de la réaction : *l'action est toujours opposée et égale à la réaction.*

Il explique ainsi un très grand nombre de phénomènes terrestres (mouvements des projectiles, variation de la pesanteur avec la latitude, marées, ...) et introduit la loi de gravitation universelle pour interpréter les lois de Kepler sur le mouvement des planètes autour du Soleil. Les travaux de Newton accomplirent une véritable révolution scientifique.

Les successeurs de Newton aux XVIII^{e} et XIX^{e} siècles développèrent de nouveaux calculs importants. Citons parmi les principaux : Euler, Lagrange (fondateur de la mécanique analytique), Bernoulli, d'Alembert, Laplace, Fourier, Gauss, Poisson, Cauchy, Coriolis, ...

Scanné avec CamScanner

1 CINÉMATIQUE



La cinématique est l'étude du mouvement. Le mouvement est relatif au solide de référence choisi : ainsi, un passager immobile par rapport à la voiture dans laquelle il est assis est en mouvement par rapport au sol.
Il convient toujours de bien préciser le *référentiel* par rapport auquel le mouvement est observé, un référentiel étant l'ensemble des repères $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ qui peuvent être associés à un solide de référence donné.

1.1 vecteur position

La position, à l'instant t, d'un point M d'un solide se définit dans un repère d'espace cartésien $\mathcal{R}$ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par le **vecteur position** (*fig.* 1) :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

Scanné avec CamScanner

où $x = \overrightarrow{OM}.\vec{i}$, $y = \overrightarrow{OM}.\vec{j}$, $z = \overrightarrow{OM}.\vec{k}$ constituent les coordonnées cartésiennes du vecteur position dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Nous noterons aussi le vecteur $\overrightarrow{OM}$:

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x \\ y \\ z. \end{cases}$$

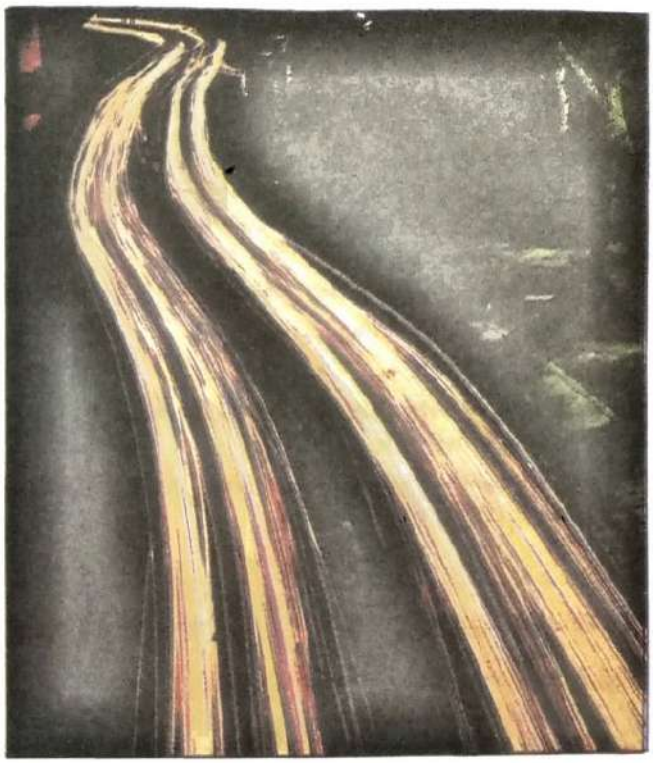
Si le point est au repos dans le repère $\mathcal{R}$, les coordonnées x, y, z sont indépendantes du temps.
Si le point est en mouvement dans le repère $\mathcal{R}$, elles sont des fonctions du temps t, et notées :

$$x(t), \quad y(t), \quad z(t).$$

Ces fonctions sont appelées **équations horaires** du mouvement.

• La trajectoire d'un point mobile est l'ensemble des positions occupées successivement par ce point.

Un mouvement est plan lorsque la trajectoire du point mobile est située dans un plan; un repère $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$ contenu dans ce plan suffit pour repérer le point mobile M dont la position est définie par deux coordonnées $x(t)$ et $y(t)$.
La fonction $x \longmapsto y(x)$ est l'*équation cartésienne* de la trajectoire.



2. *La photographie en pose permet de fixer sur la pellicule les trajectoires des phares d'automobiles.*

1.2 vecteur vitesse

1.2.1 définition

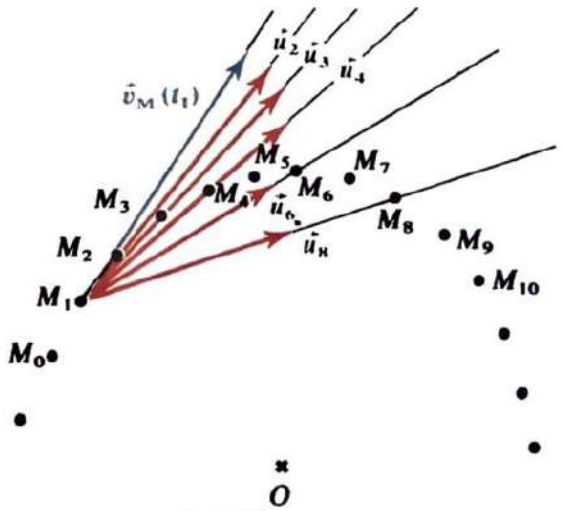
Soient $\overrightarrow{OM_0}$, $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$, ..., $\overrightarrow{OM_i}$, ... les vecteurs positions dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'un point mobile M aux dates successives t_0, t_1, t_2, ... t_i, ... (*fig.* 3).
La différence $\overrightarrow{OM_i} - \overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{M_1M_i}$ représente la variation de position, ou déplacement, du point mobile M entre les dates t_1 et t_i.
Le vecteur $\dfrac{\overrightarrow{OM_i} - \overrightarrow{OM_1}}{t_i - t_1}$ représente le taux de déplacement pour la durée $t_i - t_1$.
Faisons tendre la date t_i vers la date t_1. La durée $t_i - t_1$ tend vers zéro et la position M_i tend vers la position M_1.
Le vecteur $\dfrac{\overrightarrow{OM_i} - \overrightarrow{OM_1}}{t_i - t_1}$ tend alors vers une limite $\vec{v}_1$. Ce vecteur représente par définition le **vecteur vitesse instantanée** du point mobile à la date t_1 :

$$\vec{v}_1 = \lim_{t_i \to t_1} \frac{\overrightarrow{OM_i} - \overrightarrow{OM_1}}{t_i - t_1} = \lim_{t_i \to t_1} \frac{\overrightarrow{M_1M_i}}{t_i - t_1}.$$

• Le vecteur vitesse instantanée $\vec{v}$, à la date t, d'un point mobile M a :

— la direction de la tangente à la trajectoire en M;
— le sens du mouvement;
— une norme $\|\vec{v}\|$ égale à la mesure de la vitesse instantanée.

Dans le système international d'unités, la vitesse instantanée s'exprime en **mètres par seconde** (symbole : $\mathbf{m.s^{-1}}$).



3. *Les vecteurs* $\vec{u}_i = \dfrac{\overrightarrow{M_1M_i}}{t_i - t_1}$ *ont une même limite* $\vec{v}_1$ *lorsque* $t_i \longrightarrow t_1$.

Mathématiquement, ce résultat se traduit par :

$$\vec{v}(t) = \frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt}.$$

Autrement dit, le vecteur vitesse instantanée $\vec{v}(t)$, à la date t, d'un point mobile M, de vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ dans le repère $\mathcal{R}$, est égal à la dérivée, par rapport au temps, du vecteur $\overrightarrow{OM}$.
Le vecteur vitesse caractérise les variations du vecteur position au cours du temps.

1.2.2 vecteur vitesse et coordonnées cartésiennes

Soit $\overrightarrow{OM}$ le vecteur position d'un point mobile M. Dans le repère $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Calculons le vecteur vitesse $\vec{v} = \frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt}$ dans le référentiel auquel est associé le repère $\mathcal{R}$; il vient(*) :

$$\vec{v} = \frac{d(x\vec{i})}{dt} + \frac{d(y\vec{j})}{dt} + \frac{d(z\vec{k})}{dt}$$

$$= \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k},$$

les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ étant des vecteurs constants, indépendants du temps, dans le référentiel d'étude.

Notons comme le font les mécaniciens :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad \frac{dz}{dt} = \dot{z},$$

(le point symbolisant la dérivation par rapport au temps).
Nous obtenons :

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}.$$

•Les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}$ d'un point mobile M à la date t sont les dérivées, par rapport au temps, des coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ au même instant :

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \xrightarrow{\text{par dérivation}} \begin{cases} v_x = \dot{x} \\ v_y = \dot{y} \\ v_z = \dot{z} \end{cases}$$

1.2.3 vecteur vitesse et abscisse curviligne

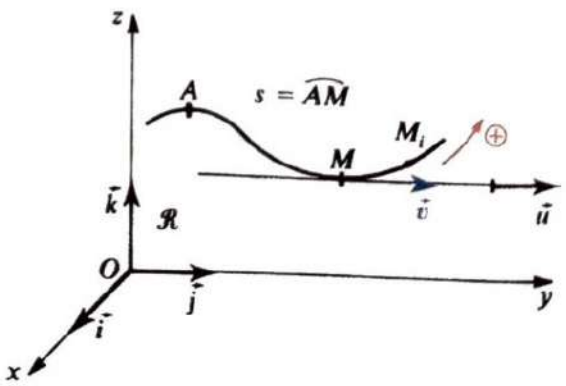
Si la trajectoire est connue, la position de M peut être repérée à chaque instant par son abscisse curviligne (*fig.* 5). Il suffit, pour cela, d'orienter la trajectoire et de choisir sur celle-ci une origine d'espace A.
Ainsi, à une date t, le point M est repéré par son **abscisse curviligne** : $s = \overset{\frown}{AM}$.
La fonction $t \longmapsto s = s(t)$ représente la loi horaire du mouvement.
A la date t, la vitesse algébrique v est définie par :

$$v = \lim_{t_i \to t} \frac{s(t_i) - s(t)}{t_i - t} = \dot{s}(t).$$

(*) Voir cours de mathématiques.



4. *Mouvement stroboscopé de la chute de plusieurs billes avec rebond sur une surface plane inclinée. A l'instant du rebond, le vecteur vitesse de chaque bille subit une discontinuité.*



5. *Le point M peut être repéré à chaque instant sur sa trajectoire par son abscisse curviligne s, et l'on a :*

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = v\vec{u} = \dot{s}\vec{u}.$$

Scanné avec CamScanner

Autrement dit, la dérivée, par rapport au temps, de l'abscisse curviligne $s(t)$ est égale à la mesure algébrique de la vitesse au même instant :

$$v = \frac{ds(t)}{dt} = \dot{s}.$$

Si $\vec{u}$ est le vecteur directeur de la tangente en M à la trajectoire et dont l'orientation est liée à celle de la trajectoire, nous avons donc :

$$\vec{v} = v\vec{u} = \dot{s}\vec{u}.$$

APPLICATION 1

Les équations paramétriques du mouvement d'un point matériel lancé dans l'espace sont :

$$\begin{cases} x = 2t, \\ y = 0, \\ z = -5t^2 + 4t. \end{cases}$$

Les distances sont mesurées en mètres, les durées en secondes et l'axe $(z'z, \vec{k})$ est vertical ascendant.
On prendra $t \geqslant 0$.

1/ Donner l'équation cartésienne de la trajectoire.

2/ Déterminer le vecteur vitesse du point matériel :

a/ lorsque ce point passe par le sommet de la trajectoire;
b/ lorsque ce point rencontre le plan $z = 0$;
c/ à la date $t = 5$ s.

1/ La trajectoire est dans le plan xOz, puisque $y = 0$. Son équation cartésienne s'obtient en éliminant le paramètre temps t :

$$t = \frac{x}{2}, \quad \text{soit} \quad z = -5\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{2}\right),$$

ou encore : $z = -1{,}25x^2 + 2x.$

Nous avons là l'équation d'une parabole d'axe vertical passant par l'origine ($x = 0$, $z = 0$) (*fig.* 6).
Le point matériel est animé d'un mouvement parabolique.

2/ On a $\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$; or :

$$\dot{x} = 2, \quad \dot{y} = 0 \quad \text{et} \quad \dot{z} = -10t + 4,$$

donc : $\vec{v} = 2\vec{i} + (-10t + 4)\vec{k}.$

a/ Au sommet de la parabole, $\vec{v}$ est parallèle à l'axe $(x'x, \vec{i})$, soit $v_z = 0$. Cela a lieu à la date :

$$-10t_1 + 4 = 0, \quad \text{soit} \quad t_1 = 0{,}4 \text{ s},$$

d'où : $\vec{v}_1 = 2\vec{i}, \quad v_1 = 2 \text{ m.s}^{-1}.$

Remarquons que, à une date quelconque :

$$v = \sqrt{2^2 + (-10t + 4)^2}.$$

La mesure de la vitesse est minimale pour $-10t + 4 = 0$, c'est-à-dire lorsque le point passe au sommet de sa trajectoire.

b/ Le point matériel rencontre le plan $z = 0$ pour :

$$-1{,}25x^2 + 2x = 0, \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_2 = \dfrac{2}{1{,}25} = 1{,}6 \text{ m}, \end{cases}$$

ce qui a lieu respectivement aux dates $t_0 = 0$ et $t_2 = \dfrac{x_2}{2} = 0{,}8$ s.

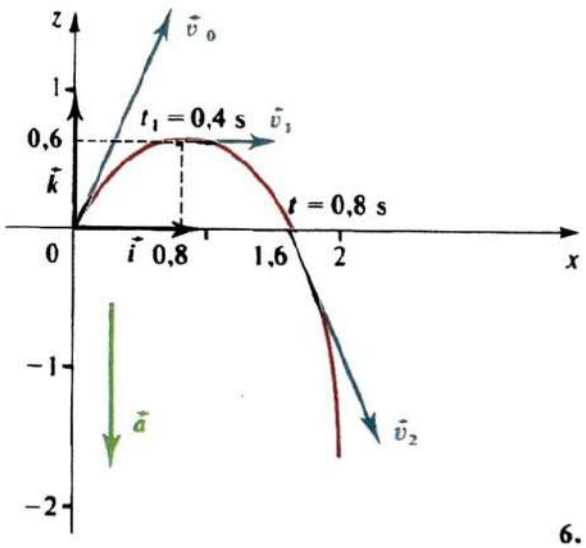
Les vecteurs vitesse correspondants sont :

$$\vec{v}_0 = 2\vec{i} + 4\vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{v}_2 = 2\vec{i} - 4\vec{k}.$$

Ces vecteurs ont même norme, égale à :

$$\sqrt{2^2 + 4^2} = 4{,}47 \text{ m.s}^{-1},$$

et ont des directions symétriques par rapport à l'axe de la parabole (*fig.* 6). Ce résultat est valable pour tous les points de même cote z.



6.

c/ A la date $t = 5$ s :

$$\vec{v}_5 = 2\vec{i} - 46\vec{k}.$$

Ce vecteur est quasi vertical, dirigé vers le bas et de mesure

$$\sqrt{2^2 + 46^2} \approx 46 \text{ m.s}^{-1}.$$

Donc, à partir de la date $t = 0$, la vitesse décroît jusqu'à ce que le point matériel atteigne le sommet de la parabole. La vitesse croît ensuite. Les vitesses, lors de la montée et de la descente du mobile, ont même mesure en deux points situés à la même altitude.

Scanné avec CamScanner

1.3 vecteur accélération

1.3.1 définition

Le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ caractérise la variation du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ du point mobile au cours du temps. En général, le vecteur vitesse varie lui aussi. Il est alors intéressant d'étudier les variations, dans le temps, de ce vecteur (*fig.* 7).

• Par définition, on appelle vecteur accélération $\vec{a}$ d'un point mobile à la date t le vecteur dérivée, par rapport au temps, du vecteur vitesse $\vec{v}$ à cet instant :

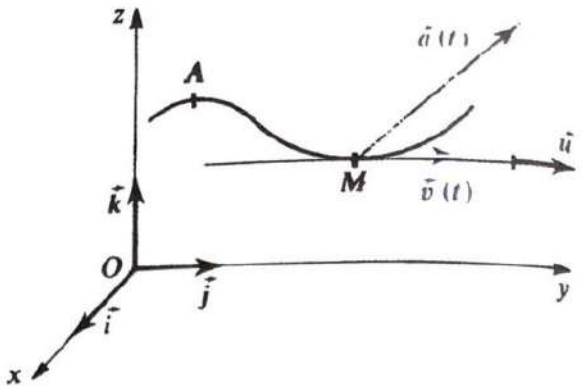
$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Ce vecteur est encore noté, puisque $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}.$$

La mesure de l'accélération s'exprime en **mètres par seconde par seconde** (symbole : $\mathbf{m.s^{-2}}$) dans le système international.

Le vecteur accélération caractérise les variations du vecteur vitesse au cours du temps.



7. Le vecteur accélération rend compte des variations du vecteur vitesse au cours du temps :

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}.$$

1.3.2 vecteur accélération et coordonnées cartésiennes

Calculons le vecteur accélération dans le référentiel d'étude auquel est associé le repère $\mathcal{R}$:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\dot{x}\vec{i})}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(\dot{y}\vec{j})}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(\dot{z}\vec{k})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}\dot{y}}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}t}\vec{k}.$$

En utilisant les notations :

$$\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t} = \ddot{x},$$
$$\frac{\mathrm{d}\dot{y}}{\mathrm{d}t} = \ddot{y},$$
$$\frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}t} = \ddot{z},$$

il vient :

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}.$$

• Les coordonnées du vecteur accélération $\vec{a}$ d'un point mobile M à la date t sont les dérivées, par rapport au temps, des coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}$ au même instant :

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = \dot{x} \\ v_y = \dot{y} \\ v_z = \dot{z} \end{cases} \xrightarrow{\text{par dérivation}} \vec{a}\begin{cases} a_x = \ddot{x} \\ a_y = \ddot{y} \\ a_z = \ddot{z}. \end{cases}$$

APPLICATION 2

Dans l'application précédente, déterminer le vecteur accélération du point matériel mobile. Conclure.

Nous avons établi l'expression :

$$\vec{v} = 2\vec{i} + (-10t + 4)\vec{k}.$$

Il vient donc :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -10\vec{k}.$$

Ce vecteur est constant. L'accélération du point mobile ne dépend pas du temps. Le vecteur accélération est dirigé suivant l'axe $z'z$ vers le bas et :

$$\|\vec{a}\| = 10.$$

La mesure de l'accélération est égale à 10 $\mathrm{m.s^{-2}}$, ce qui correspond, environ, à la mesure de l'accélération de la pesanteur.

Scanné avec CamScanner

1.3.3 vecteur accélération et base de Frenet

Le point mobile M décrit une trajectoire que nous supposerons plane. Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire tangent en M à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement (*fig.* 8); nous avons :

$$\vec{v} = v\vec{u},$$

soit :
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u} + v\frac{d\vec{u}}{dt}.$$

Le vecteur accélération peut donc se décomposer en deux vecteurs (*fig.* 8) :

- le **vecteur accélération tangentielle :**

$$\vec{a}_t = a_t\vec{u}, \quad \text{avec} \quad a_t = \frac{dv}{dt}.$$

L'accélération tangentielle caractérise la variation de la mesure algébrique de la vitesse;

- le **vecteur accélération normale :**

$$\vec{a}_n = v\frac{d\vec{u}}{dt}.$$

Soit $\vec{n}$ le vecteur unitaire orthogonal au vecteur $\vec{u}$ et orienté vers l'intérieur de la trajectoire; on démontre en mathématiques que :

$$\vec{a}_n = v\frac{d\vec{u}}{dt} = a_n\vec{n}, \quad \text{avec} \quad a_n = \frac{v^2}{\rho},$$

où ρ est appelé *rayon de courbure* de la trajectoire en M, tout se passant comme si on assimilait la trajectoire autour de M *à un arc de cercle de rayon* ρ, *tangent à la trajectoire.*

L'accélération normale est d'autant plus grande que la vitesse du point mobile est élevée et que « le virage est serré » (faible rayon de courbure). Remarquons par ailleurs que $\vec{a}_t$ peut être dans le sens de $\vec{u}$ ou dans le sens contraire, alors que $\vec{a}_n$ est toujours dans le sens de $\vec{n}$.

La base $(\vec{u}, \vec{n})$ associée au point mobile M constitue le **repère de projection de Frenet;** (a_t, a_n) *sont les coordonnées du vecteur accélération dans cette base.*

L'étude du vecteur accélération dans le cas particulier du mouvement circulaire, pour lequel ρ n'est autre que le rayon R de la trajectoire, fait l'objet du paragraphe 1.6 et de la fiche expérimentale.

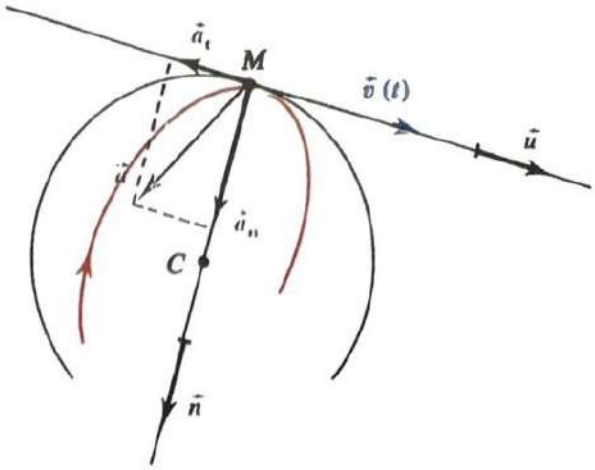
1.3.4 mouvements accélérés, retardés, uniformes

Un mouvement est dit **accéléré** si la mesure $\|\vec{v}\|$ de la vitesse du point mobile considéré augmente, **retardé** si elle diminue, **uniforme** si elle est constante.
Étudier les variations de $\|\vec{v}\|$ en fonction du temps revient à considérer celle de $\|\vec{v}\|^2 = \vec{v}^2$. Or :

$$\frac{d(\vec{v}^2)}{dt} = 2\vec{v}.\frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{v}.\vec{a},$$

et dans la base de Frenet :

$$\vec{v}.\vec{a} = (v\vec{u}).(a_t\vec{u} + a_n\vec{n}) = va_t.$$



- $\vec{u}$: vecteur unitaire orienté dans le sens du mouvement
- $\vec{n}$: vecteur unitaire orthogonal à $\vec{u}$ et orienté dans le sens de la concavité de la trajectoire
- C : centre du cercle assimilable à la trajectoire en M
- $\rho = MC$: rayon de courbure de la trajectoire en M

8. *La base* $(\vec{u}, \vec{n})$ *associée au point M constitue le repère de projection de Frenet. Dans cette base :*

$$\vec{a} = a_t\vec{u} + a_n\vec{n},$$

avec $a_t = \frac{dv}{dt}$ *et* $a_n = \frac{v^2}{\rho} \geqslant 0.$

Scanné avec CamScanner

Les variations de $\|\vec{v}\|$ dépendent donc du signe du produit scalaire $\vec{v}.\vec{a}$, ou encore de celui de va_t ; d'où :

- Un mouvement est accéléré si $\vec{v}.\vec{a}>0$.

Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{a}_t$ sont alors de même sens ($va_t>0$).

- Un mouvement est retardé si $\vec{v}.\vec{a}<0$.

Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{a}_t$ sont alors de sens contraire ($va_t<0$).

- Un mouvement est uniforme si $\vec{v}.\vec{a}=0$.

Dans ce cas $\vec{a}_t=\vec{0}$, et le vecteur accélération se réduit au vecteur accélération normale.

1.3.5 cas particulier : vecteur accélération constant

A partir du vecteur position $\overrightarrow{OM}$, nous avons défini les vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$:

$$\overrightarrow{OM} \xrightarrow{\text{dérivation}} \vec{v}=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \xrightarrow{\text{dérivation}} \vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Supposons maintenant connu le vecteur accélération $\vec{a}$ d'un point mobile et supposons en outre ce vecteur *constant*. La détermination des vecteurs vitesse et position à partir du vecteur $\vec{a}$ est alors simple. On démontre en effet en mathématiques que :

- $\vec{v}=t\vec{a}+\vec{v}_0$,

  où $\vec{v}_0$ est le vecteur vitesse initiale ($t=0$) du point mobile M;

- $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}t^2\vec{a}+t\vec{v}_0+\overrightarrow{OM}_0$,

  où M_0 est la position initiale ($t=0$) du point M.

On peut aisément vérifier, le vecteur $\vec{a}$ étant constant, que l'on a :

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{a} \quad \text{et} \quad \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=t\vec{a}+\vec{v}_0=\vec{v}.$$

Cette détermination de $\vec{v}$ à partir de $\vec{a}$ et $\vec{v}_0$, puis celle de $\overrightarrow{OM}$ à partir de $\vec{v}$ et $\overrightarrow{OM}_0$ correspondent à ce qu'on appelle en mathématiques des « intégrations »(*). Intégration et dérivation apparaissent ainsi comme des opérations « inverses » l'une de l'autre.
Nous reviendrons sur ces différents résultats dans le paragraphe 1.5.2.

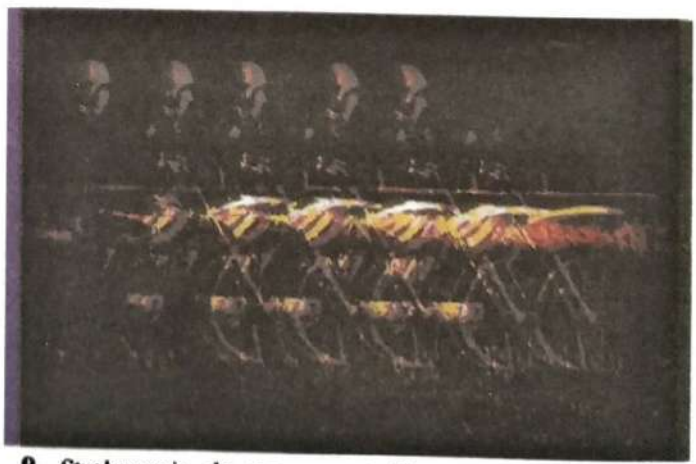
1.4 mouvement rectiligne uniforme

1.4.1 définition

- Un point mobile est dit animé d'un mouvement rectiligne uniforme si son vecteur vitesse est constant :

$$\vec{v}=\vec{v}_0.$$

(*) Une intégration étant liée à la recherche des primitives d'une fonction. Voir cours de mathématiques.



9. ***Stroboscopie du mouvement d'un motocyliste. Comment peut-on vérifier si ce motocycliste est animé d'un mouvement rectiligne uniforme?***

Scanné avec CamScanner

Le vecteur accélération est alors constamment nul; en effet :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} = \vec{0}.$$

1.4.2 équations horaires du mouvement

Sachant, *a priori*, que le mouvement du point est rectiligne, on a intérêt à choisir un repère $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dont l'un des axes, $(O, \vec{i})$ par exemple, est confondu avec la trajectoire rectiligne.
A l'instant initial $(t=0)$:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_0 = x_0\vec{i} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \vec{v}_0 = v_0\vec{i}.$$

- L'accélération est constamment nulle :

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} = \vec{0}, \quad \text{soit} \quad \ddot{x} = 0. \qquad (1)$$

- Le vecteur vitesse est constant :

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} = v_0\vec{i}, \quad \text{soit} \quad \dot{x} = v_0. \qquad (2)$$

- Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'obtient par intégration de la relation (2) :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i}, \quad \text{avec} \quad x = x(t) = v_0 t + x_0. \qquad (3)$$

On vérifie que pour $t=0$, $x = x_0$(*).

- Dans un mouvement rectiligne uniforme :

— l'accélération est nulle;
— la vitesse est constante;
— l'abscisse du point mobile est fonction affine du temps;

soit :

$$\begin{cases} a = 0 \\ v = v_0 \\ x = v_0 t + x_0. \end{cases}$$

Ces relations, *où toutes les grandeurs sont algébriques*, constituent les **équations horaires du mouvement.**

Remarque : L'axe $(O, \vec{i})$ étant confondu avec la trajectoire, l'abscisse x et l'abscisse curviligne s sont confondues.

1.5 mouvement rectiligne uniformément varié

1.5.1 définition

- Un point mobile est dit animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié si sa trajectoire est une droite et si son vecteur accélération est constant :

$$\vec{a} = \vec{a}_0.$$

1.5.2 équations horaires du mouvement

Choisissons un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dont l'axe $(O, \vec{i})$ est confondu avec la trajectoire rectiligne.
A l'instant initial $(t=0)$:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_0 = x_0\vec{i} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \vec{v}_0 = v_0\vec{i}.$$

- Le vecteur accélération est constant :

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} = a_0\vec{i}, \quad \text{soit} \quad \ddot{x} = a_0. \qquad (1)$$

(*) La fonction $x \longmapsto x(t)$ est la primitive de la constante v_0 qui vaut x_0 lorsque $t=0$.

APPLICATION 3

Les équations paramétriques du mouvement donnant le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ d'un point sont :

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 4 \\ z = 0. \end{cases}$$

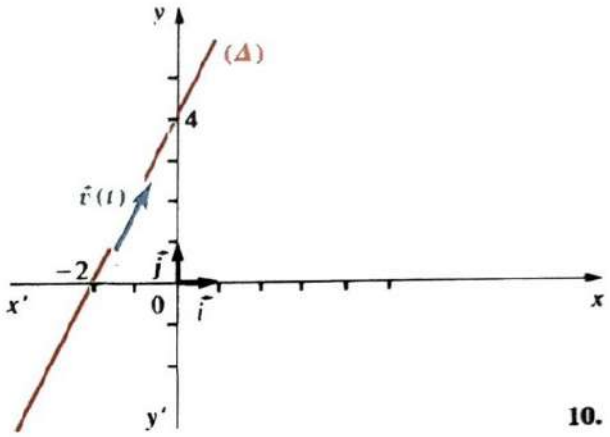
Les unités sont celles du système international.

Montrer que ce point est animé d'un mouvement rectiligne uniforme. Caractériser le vecteur vitesse.

Établissons tout d'abord l'équation de la trajectoire, laquelle se situe dans le plan xOy, puisque $z=0$.
Éliminons le paramètre temps t entre les deux premières équations; il vient immédiatement :

$$y = 2x + 4.$$

Nous avons là l'équation cartésienne d'une droite (*fig.* 10).



10.

Le mouvement est rectiligne.
Calculons les coordonnées du vecteur vitesse :

$$\vec{v}\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = 2, \\ \dot{z} = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}.$$

Le vecteur vitesse est constant; le mouvement est donc rectiligne uniforme.

On a : $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = 2{,}24 \text{ m.s}^{-1}$.

Le coefficient directeur de la direction de $\vec{v}$ est égal à $\frac{v_y}{v_x} = 2$; c'est celui de la droite Δ, support de la trajectoire.
Enfin, si l'on pose $\alpha = (\vec{i}, \vec{v})$, il vient, avec $\tan\alpha = 2$:

$$\alpha = 63{,}4°.$$

Scanné avec CamScanner

• Le vecteur vitesse s'obtient par intégration de la relation (1) :

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i}, \quad \text{avec} \quad \dot{x} = a_0 t + v_0. \qquad (2)$$

• Le vecteur position s'obtient par intégration de la relation (2) :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i}, \quad \text{avec} \quad x = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0. \qquad (3)$$

• Dans un mouvement rectiligne uniformément accéléré :

— l'accélération est constante;
— la vitesse est fonction affine du temps;
— l'abscisse du point mobile est une fonction du second degré du temps;

soit :

$$\begin{cases} a = a_0 \\ v = a_0 t + v_0 \\ x = \dfrac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0. \end{cases}$$

Ces relations, *où toutes les grandeurs sont algébriques*, constituent les **équations horaires du mouvement.**

Remarquons qu'en éliminant le temps t entre les deux dernières relations on obtient :

$$v^2 - v_0^2 = 2a_0(x - x_0).$$

Les équations horaires du mouvement peuvent se mettre sous forme vectorielle :

$$\begin{cases} \vec{a} = a_0\vec{i} \\ \vec{v} = (a_0 t + v_0)\vec{i} = t\vec{a} + \vec{v}_0 \\ \overrightarrow{OM} = \left(\dfrac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0\right)\vec{i} = \dfrac{1}{2} t^2\vec{a} + t\vec{v}_0 + \overrightarrow{OM}_0. \end{cases}$$



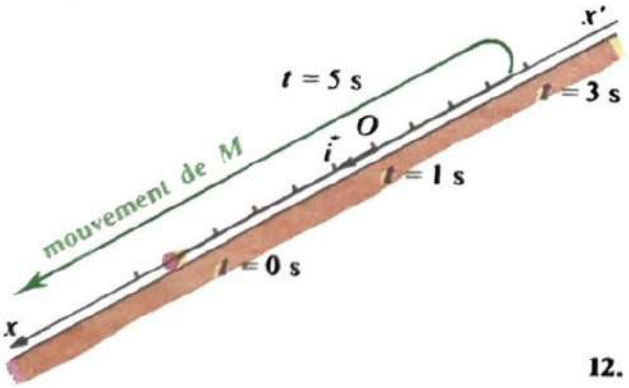
11. *Noter la différence avec la photo* 9.

APPLICATION 4

Étudier le mouvement d'une bille M qu'on lance vers le haut dans une gouttière rectiligne inclinée. Dans un repère $(O, \vec{i})$, ce mouvement est défini par :

$$\vec{a} = 2\vec{i}, \quad \vec{v}_0 = -6\vec{i}, \quad x_0 = 5 \text{ m}, \quad t \geqslant 0.$$

L'axe $(x'x, \vec{i})$, parallèle à la gouttière, est dirigé vers le bas (fig. 12).



12.

La trajectoire est rectiligne.
L'accélération est constante : $a = 2 \text{ m.s}^{-2}$. Le mouvement est donc uniformément varié.
La vitesse de la bille est donnée par $v = 2t - 6$.
Sa position est donnée par $x = t^2 - 6t + 5$.

La bille passe en O pour :

$$x = 0, \quad \text{soit} \quad t^2 - 6t + 5 = 0,$$

c'est-à-dire aux dates $t = 1$ s et $t = 5$ s. Remarquons qu'à ces dates : $|v| = 4 \text{ m.s}^{-1}$.

Le tableau de variations est le suivant :

t	0	1	3	5
a		+		+
v		−	0	+
x		0 ↘	−4	↗ 0
$va_t =$ va		− mvt retardé	0	+ mvt accéléré

Donc, pour :

• $t < 3$ s, la bille s'élève, en ralentissant (déplacement vers les $x < 0$);

• $t = 3$ s, la bille est au sommet de sa trajectoire, $v = 0$;

• $t > 3$ s, la bille descend, en allant de plus en plus vite.

Scanné avec CamScanner

1.6 mouvement circulaire

1.6.1 définition

• Un point mobile est dit animé d'un mouvement circulaire si sa trajectoire est un cercle.

Rappelons qu'un cercle est déterminé par son centre O et son rayon R.
La trajectoire étant connue, la position du point mobile M peut être définie par son abscisse curviligne (*fig.* 13) :

$$\widehat{AM} = \dot{s}(t),$$

A étant un point de la trajectoire choisi comme origine. La trajectoire est orientée.

Dans la base de Frenet (*cf.* 1.3.3), on a :

$$\vec{v} = v\vec{u} = \dot{s}\vec{u}$$

et :

$$\vec{a} = a_t\vec{u} + a_n\vec{n},$$

avec :

$$a_t = \frac{dv}{dt} \quad \text{et} \quad a_n = \frac{v^2}{R},$$

le rayon de courbure n'étant autre que le rayon R de la trajectoire circulaire.

Notons qu'en classe de Première nous avons vu que chaque point d'un solide en rotation autour d'un axe *fixe* décrit une trajectoire circulaire centrée sur l'axe.

1.6.2 grandeurs angulaires

La position du point mobile sur sa trajectoire circulaire peut être repérée par l'angle $\alpha = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}})$ (*fig.* 13 et 14)
La loi horaire $t \longmapsto \alpha = \alpha(t)$ donne la variation de l'angle α avec le temps.
La **vitesse angulaire** ω est définie par :

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha}.$$

L'unité de vitesse angulaire est le **radian par seconde** (symbole : rad.s^{-1}).

La mesure en radians de l'angle α est liée à l'abscisse curviligne s par :

$$\alpha = \frac{s}{R}.$$

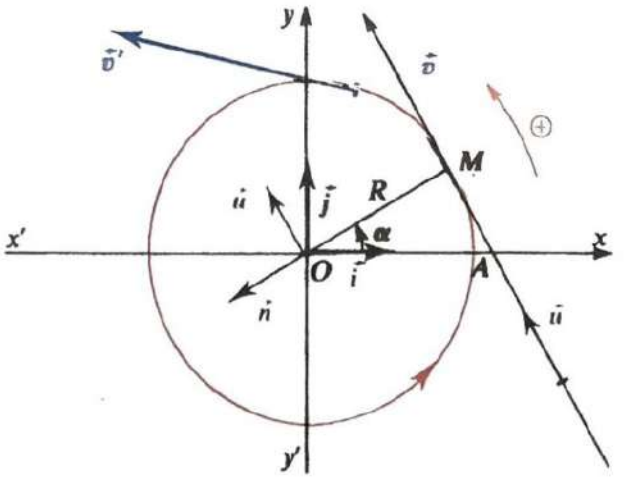
Il vient évidemment :

$$\omega = \dot{\alpha} = \frac{\dot{s}}{R} \quad \text{et} \quad \dot{\omega} = \ddot{\alpha} = \frac{\ddot{s}}{R},$$

soit, avec $\dot{s} = v$ et $\ddot{s} = \frac{dv}{dt} = a_t$:

$$\omega = \frac{v}{R} \quad \text{et} \quad \dot{\omega} = \frac{a_t}{R}.$$

Notons que dans un solide en rotation autour d'un axe fixe tous les points ont même accélération angulaire et même vitesse angulaire.

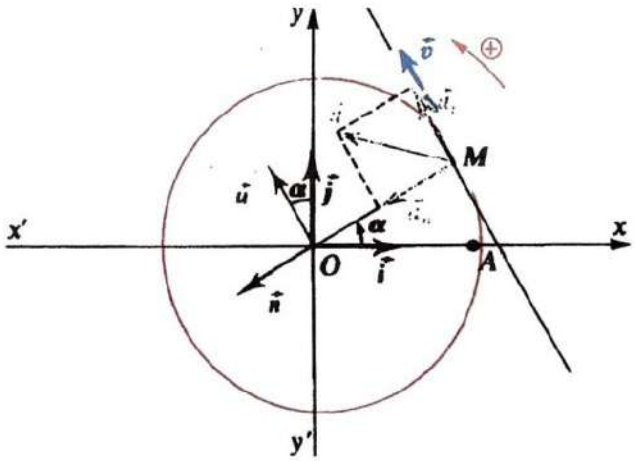


13. ***Dans un mouvement circulaire, le vecteur vitesse change d'orientation à chaque instant :***

$$\vec{v} = v\vec{u} = \dot{s}\vec{u}, \quad \textit{avec} \quad \widehat{AM} = s(t).$$

Par ailleurs :

$$\dot{\alpha} = \omega = \frac{v}{R}.$$



14. ***Mouvement circulaire et base de Frenet :***

• ***accélération tangentielle :*** $a_t = \frac{dv}{dt} = R\dot{\omega}$;

• ***accélération normale :*** $a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$.

Scanné avec CamScanner

1.6.3 mouvement circulaire uniforme

• Un mouvement circulaire est dit uniforme si la valeur algébrique de la vitesse du point mobile est constante :

$$v = v_0 .$$

Si la vitesse v est constante, il en est de même de la vitesse angulaire $\omega = \frac{v_0}{R} = \omega_0$.

La vitesse étant constante, l'accélération tangentielle et l'accélération angulaire sont nulles, car :

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\omega} = \frac{a_t}{R} = 0.$$

Mais le *vecteur vitesse* change à chaque instant d'orientation, et le vecteur accélération n'est *pas nul* :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_n \vec{n} = \frac{v^2}{R}\,\vec{n} = \omega_0^2 R \vec{n}.$$

Le vecteur accélération, constamment dirigé vers le centre de la trajectoire, est dit **centripète** (*fig.* 15).

• Dans un mouvement circulaire uniforme :
— la vitesse et la vitesse angulaire sont constantes;
— l'accélération tangentielle est nulle;
— le vecteur accélération est centripète;

soit :

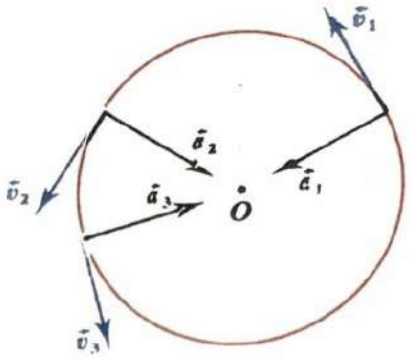
$$\begin{cases} \omega = \dfrac{v_0}{R} = \omega_0 \\ a_t = 0 \\ \vec{a} = \dfrac{v^2}{R}\,\vec{n} = \omega_0^2 R \vec{n}. \end{cases}$$

L'équation horaire est de la forme :

$$\dot{\alpha} = \omega_0, \quad \text{soit} \quad \alpha = \omega_0 t + \alpha_0,$$

où α_0 est la valeur de α au temps $t = 0$.

Enfin, la **fréquence** de rotation f, exprimée en hertz (symbole : Hz), est égale à $\frac{\omega}{2\pi}$ $(\omega > 0)$ et la **période T**, exprimée en secondes, à $\frac{1}{f}$.



15. ***Mouvement circulaire uniforme :***
• ***le vecteur vitesse $\vec{v}$ change d'orientation à chaque instant, mais sa norme reste constante;***
• ***l'accélération tangentielle est nulle;***
• ***le vecteur accélération centripète $\vec{a}$ change d'orientation, mais sa norme $a_n = v^2/R$ reste constante.***

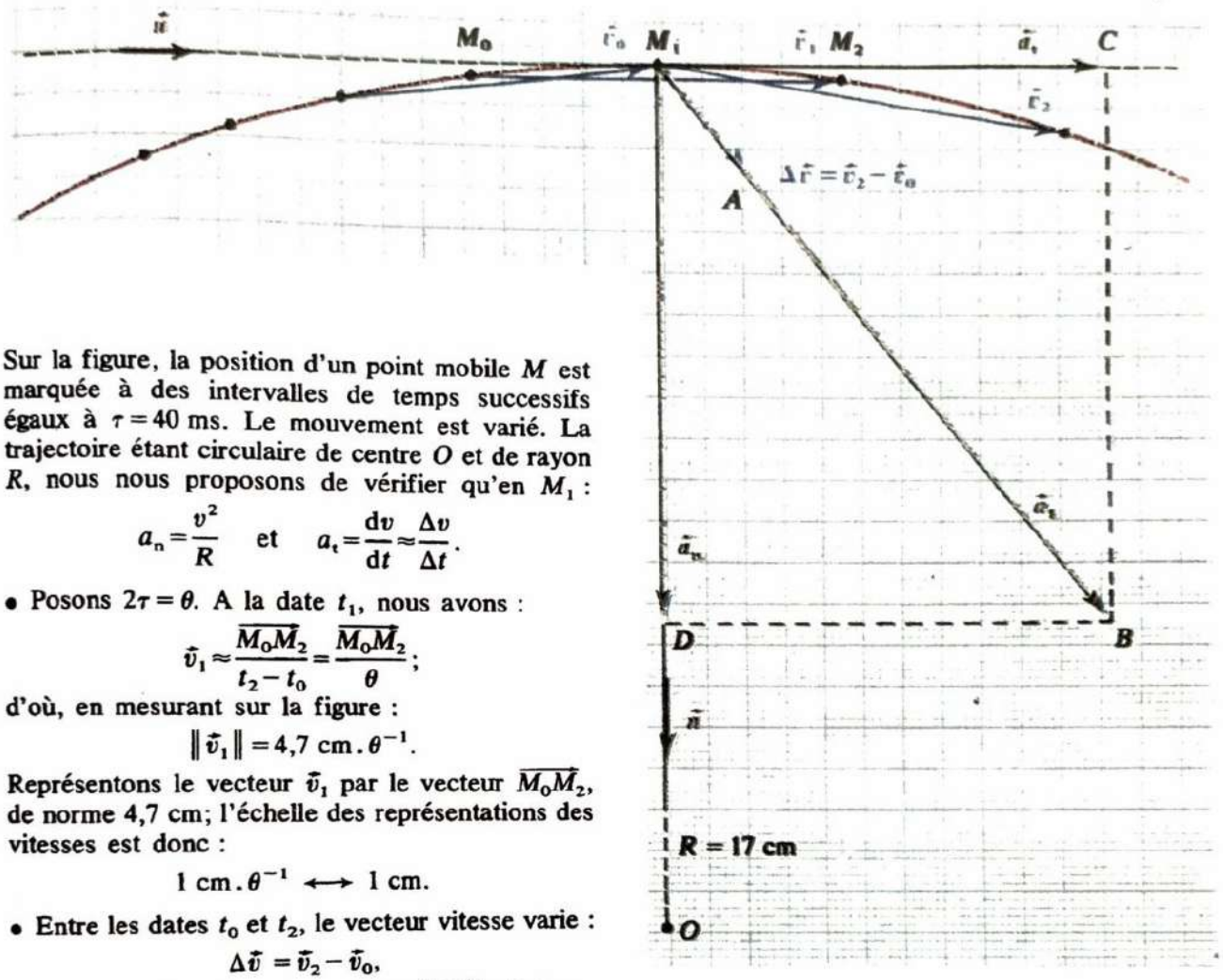


Un exemple de mouvement circulaire. L'inclinaison des balancelles est due aux effets de l'accélération.

Scanné avec CamScanner

fiche expérimentale

VECTEUR ACCÉLÉRATION D'UN MOUVEMENT CIRCULAIRE



Sur la figure, la position d'un point mobile M est marquée à des intervalles de temps successifs égaux à $\tau = 40$ ms. Le mouvement est varié. La trajectoire étant circulaire de centre O et de rayon R, nous nous proposons de vérifier qu'en M_1 :

$$a_n = \frac{v^2}{R} \quad \text{et} \quad a_t = \frac{dv}{dt} \approx \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

• Posons $2\tau = \theta$. A la date t_1, nous avons :

$$\vec{v}_1 \approx \frac{\overrightarrow{M_0M_2}}{t_2 - t_0} = \frac{\overrightarrow{M_0M_2}}{\theta};$$

d'où, en mesurant sur la figure :

$$\|\vec{v}_1\| = 4{,}7 \text{ cm} \cdot \theta^{-1}.$$

Représentons le vecteur $\vec{v}_1$ par le vecteur $\overrightarrow{M_0M_2}$, de norme 4,7 cm; l'échelle des représentations des vitesses est donc :

$$1 \text{ cm} \cdot \theta^{-1} \longleftrightarrow 1 \text{ cm}.$$

• Entre les dates t_0 et t_2, le vecteur vitesse varie :

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_0,$$

vecteur représenté par le vecteur $\overrightarrow{M_1A}$; d'où :

$$\|\Delta\vec{v}\| = 1{,}75 \text{ cm} \cdot \theta^{-1}.$$

Or le vecteur accélération à la date t_1 est défini par :

$$\vec{a}_1 = \frac{d\vec{v}}{dt} \approx \frac{\Delta\vec{v}}{\theta};$$

d'où :

$$\|\vec{a}_1\| = \frac{1{,}75 \text{ cm} \cdot \theta^{-1}}{\theta} = 1{,}75 \text{ cm} \cdot \theta^{-2}.$$

A l'échelle 1 cm $\cdot \theta^{-2}$ $\longleftrightarrow$ 5 cm, le vecteur $\vec{a}_1$ est donc représenté par le vecteur $\overrightarrow{M_1B}$, colinéaire à $\overrightarrow{M_1A}$ et de norme 8,75 cm.

• Soit $\vec{a}_n$ la composante normale de $\vec{a}_1$. Elle est représentée par le vecteur $\overrightarrow{M_1D}$; d'où, avec $M_1D = 6{,}7$ cm :

$$a_n = \frac{6{,}7}{5} = 1{,}34 \text{ cm} \cdot \theta^{-2}.$$

Nous obtenons de même, avec $M_1C = 5{,}7$ cm :

$$a_t = \frac{5{,}7}{5} = 1{,}14 \text{ cm} \cdot \theta^{-2},$$

$\vec{a}_t$ étant la composante tangentielle de $\vec{a}_1$.

Or : $$\frac{v_1^2}{R} = \frac{4{,}7^2}{17} = 1{,}3 \text{ cm} \cdot \theta^{-2}$$

et :

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_0}{\theta} = \frac{(5{,}2 - 1{,}4)\text{cm} \cdot \theta^{-1}}{\theta} = 1{,}2 \text{ cm} \cdot \theta^{-2};$$

aux erreurs de tracé près, nous retrouvons donc :

$$a_n = \frac{v^2}{R} \quad \text{et} \quad a_t \approx \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Scanné avec CamScanner

EXERCICES

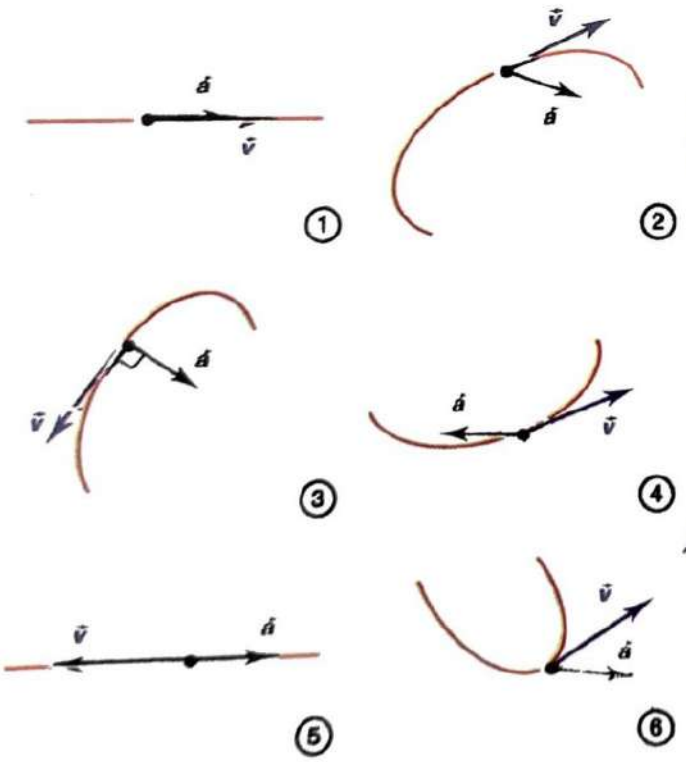
L'essentiel du cours

1.1 A *Vrai* ou *faux*?
On envisage le mouvement d'un point mobile décrivant une trajectoire, curviligne ou non.

- Le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire au point considéré.
- Dans un mouvement curviligne, le vecteur accélération peut être tangent à la trajectoire au point considéré.
- Une accélération tangentielle nulle implique un mouvement uniforme.
- Si $\vec{a}.\vec{v} < 0$, le mouvement est retardé.
- Une accélération tangentielle constante implique un mouvement uniformément accéléré ou retardé.
- Le vecteur accélération normal est dirigé vers l'intérieur d'une trajectoire curviligne.
- Si, à un instant t, la vitesse $\vec{v}$ est nulle, alors l'accélération $\vec{a}$ est aussi nulle.

1.2 A Sur différentes portions de trajectoires, on a représenté le vecteur vitesse $\vec{v}$ et le vecteur accélération $\vec{a}$ d'un point mobile.
A chacun des six cas de figure ci-dessous, associer une ou plusieurs des propositions suivantes :

a/ mouvement rectiligne ;
b/ mouvement curviligne ;
c/ mouvement uniforme ;
d/ mouvement accéléré ;
e/ mouvement retardé ;
f/ incohérent.



1.3 A Compléter le tableau ci-dessous.

	mouvement rectiligne uniforme		mouvement circulaire uniforme		justifications éventuelles
	V	F	V	F	
1. La norme du vecteur vitesse $v = \|\vec{v}\|$ est constante.					
2. Le vecteur vitesse $\vec{v}$ est constant.					
3. Le vecteur accélération est constant.					
4. La norme du vecteur accélération est constante.					
5. Le vecteur accélération est normal à la trajectoire.					
6. Le vecteur accélération est centripète.					

Exercices de base

Sauf spécifications contraires, les unités employées sont celles du Système international.

Mouvement rectiligne uniforme

1.4 Le vecteur position d'un point mobile se déplaçant sur un axe $(O, \vec{i})$ est $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$. L'équation horaire du mouvement de ce mobile est donnée par :

$$x = 5t + 4,$$

où x est en m et t en s.

1/ A Quelle est la position du mobile à l'instant $t = 0$?

2/ A Déterminer son vecteur vitesse $\vec{v} = v\vec{i}$ à chaque instant. Le mouvement est-il uniforme ou accéléré ?

3/ B Représenter graphiquement pour $t \geq 0$ les fonctions

$$t \mapsto x(t) \quad \text{et} \quad t \mapsto v(t).$$

1.5 A Un point M d'un mobile est animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

1/ Montrer que, au cours d'un tel mouvement, les distances parcourues pendant des durées identiques successives sont égales.

2/ Soit un repère $(O, \vec{i})$. Le vecteur vitesse du mobile est $\vec{v} = 10\vec{i}$. L'abscisse du mobile à l'instant $t = 0$ est $x_0 = 5$ m. Établir l'équation horaire du mouvement $t \mapsto x(t)$.

Mouvement rectiligne uniformément varié

1.6 Un point mobile M décrit sur un axe $(O, \vec{i})$ un mouvement uniformément varié d'accélération $\vec{a} = 4\vec{i}$. A l'instant $t = 0$, le vecteur vitesse est $\vec{v} = -8\vec{i}$ et le vecteur position de M est $\overrightarrow{OM_0} = 2\vec{i}$.

1/ A Établir les équations horaires du mouvement $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto v(t)$.

2/ B3 Déterminer la date et la position pour lesquelles la vitesse v s'annule.

Scanné avec CamScanner

3/ AB Entre quelles dates le mouvement est-il accéléré? retardé? Étudier pour cela le signe du produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{v}$.

1.7 AB3 Un véhicule animé d'un mouvement rectiligne a une vitesse v_0.

1/ Établir l'accélération constante qui permet l'arrêt du véhicule sur une distance ℓ.

2/ Calculer la durée du freinage.

Application numérique : $v_0 = 100$ km . h^{-1} ; $\ell = 100$ m.

1.8 A Soit $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$ le vecteur position d'un point mobile M animé d'un mouvement rectiligne d'équation horaire :

$$t \mapsto x = t^2 - 4t + 3, \quad t \geq 0.$$

1/ Donner les expressions des vecteurs vitesse et accélération de M. Quelle est la nature du mouvement ?

2/ Exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OM_0}$ et le vecteur vitesse $\vec{v}$ du point M à l'instant $t = 0$.

3/ Montrer que, pour un tel mouvement, le vecteur position de M est de la forme :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} t^2 \vec{a} + t\vec{v}_0 + \overrightarrow{OM_0}.$$

Mouvement dans un plan

1.9 A Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'axe Ox horizontal et d'axe Oy vertical descendant, la position d'un point mobile animé d'un mouvement curviligne de chute libre est donnée par les équations horaires suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = 3t + 2 \\ y(t) = 4{,}9t^2. \end{cases}$$

1/ Exprimer dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ les vecteurs position et vitesse du point M.

2/ Montrer que le vecteur accélération $\vec{a}$ est constant. Calculer $\|\vec{a}\|$.

3/ Déterminer les vecteurs position $\overrightarrow{OM_0}$ et vitesse $\vec{v}_0$ à l'instant initial.

4/ Montrer que, pour un tel mouvement (vecteur accélération constant), le vecteur position est de la forme :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} t^2 \vec{a} + t\vec{v}_0 + \overrightarrow{OM_0}.$$

Mouvement circulaire uniforme

1.10 Un point M d'un solide est animé d'un mouvement circulaire uniforme ; il décrit une trajectoire circulaire de rayon $R = 20$ cm à raison de $N = 2\,400$ tr . min^{-1}.

1a/ A Exprimer en fonction de N, en unités S.I. :
— la fréquence et la période du mouvement ;
— la vitesse angulaire du point M.

b/ A Exprimer en fonction de N et de R la vitesse linéaire et l'accélération du point M.

2/ B3 Déterminer numériquement :
— la fréquence et la période ;
— la vitesse angulaire ;
— la vitesse linéaire ;
— l'accélération du point M.

3/ A Sur un schéma, représenter la trajectoire et, à un instant t, le vecteur vitesse $\vec{v}$ et le vecteur accélération $\vec{a}$ du point M.

Mouvement circulaire uniformément varié

1.11 Un point M décrit une trajectoire circulaire de rayon $R = 30$ cm et de centre O. Il est repéré par un angle $\alpha = (\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM})$. Son accélération angulaire $\ddot{\alpha}$ est constante et égale à 4 rad . s^{-2}. A l'instant $t = 0$, $\alpha_0 = 0$ et $\omega_0 = 0$.

1/ AB3 Établir les équations horaires du mouvement :

$$t \mapsto \alpha(t), \quad t \mapsto \omega(t) \quad \text{et} \quad t \mapsto v(t),$$

où $v(t)$ est la vitesse linéaire.

2/ AB3 Exprimer l'accélération tangentielle a_t et l'accélération normale a_n.

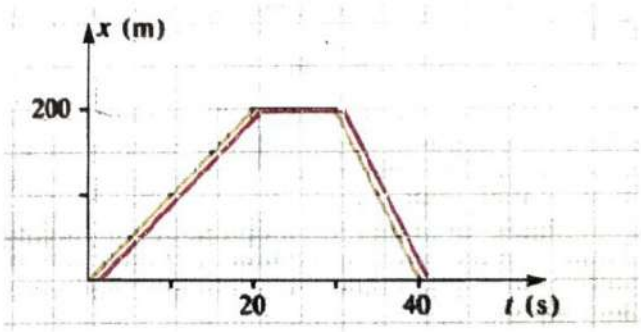
3/ B3 Calculer à l'instant $t = 0{,}5$ s l'angle $\beta = (\vec{v}, \vec{a})$.

Banc d'essais

Mouvement rectiligne uniforme

1.12 Un mobile décrit une trajectoire rectiligne. Sa position par rapport à un point O de la trajectoire orientée est repérée à la date t par son abscisse x.

1/ AB3 Donner l'équation $t \mapsto x(t)$ du mouvement du mobile durant les diverses étapes du trajet à partir du diagramme des espaces, celui-ci ayant été linéarisé pour simplifier (figure).



2/ C Les discontinuités du diagramme linéarisé sont-elles physiquement concevables ?

↳ cours 1.5.

1.13 Un point mobile M se déplace dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec un vecteur vitesse $\vec{v} = 4\vec{i} + 8\vec{j}$. A l'origine des dates, le vecteur position de M est $\overrightarrow{OM_0} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$.

1/ AB3 Déterminer les équations horaires du mouvement de M :

$$t \mapsto x(t) \quad \text{et} \quad t \mapsto y(t).$$

Exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

2/ AB3 Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire :

$$x \mapsto y(t).$$

En déduire la nature du mouvement de M dans le plan.

Scanné avec CamScanner

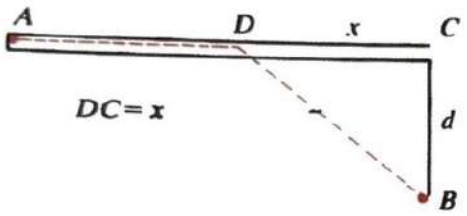
EXERCICES

3/ B3 Montrer que, pour un tel mouvement, le vecteur position de M est de la forme :

$$\overrightarrow{OM} = t\vec{v} + \overrightarrow{OM}_0.$$

↳ cours 1.5.

1.14 B3C Un tracteur partant d'un point A situé sur une route rectiligne doit atteindre un point B situé dans un champ à la distance $d = CB$ de la route, et ce, dans un temps minimal. On suppose les trajets successifs AD et DB rectilignes et parcourus à vitesse constante par le tracteur qui va deux fois moins vite dans le champ que sur la route (figure).



1/ Exprimer la relation $x \mapsto t(x)$.

2/ En quel point D le tracteur doit-il quitter la route ?

22 Mouvement rectiligne uniformément varié

1.15 Soit $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$ le vecteur position d'un point mobile M animé d'un mouvement rectiligne d'équation horaire :

$$t \mapsto x(t) = -5t^2 + 30t + 10, \quad t \geq 0.$$

1/ A Déterminer les vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ du point mobile. Quelle est la nature du mouvement ? Préciser les valeurs de l'accélération, de la vitesse et de l'abscisse de M à l'instant initial.

2/ AB3 Étudier la variation de la vitesse v en fonction du temps t. A quelle date le mouvement de M change-t-il de sens ? Entre quels instants ce mouvement est-il accéléré ? retardé ?

3/ B3 Représenter graphiquement la fonction $t \mapsto x(t)$. Déterminer sur ce graphique l'instant où le vecteur vitesse $\vec{v}$ s'annule et change de sens. Quelle est alors l'abscisse de M ?

4/ AB3 Exprimer la vitesse v en fonction de l'abscisse x. Retrouver à partir de cette relation l'abscisse correspondant au changement de sens du mouvement.

↳ ex. 1.6, 1.8.

1.16 Un point M d'un mobile est animé d'un mouvement rectiligne d'accélération constante $\vec{a} = -6\vec{i}$.

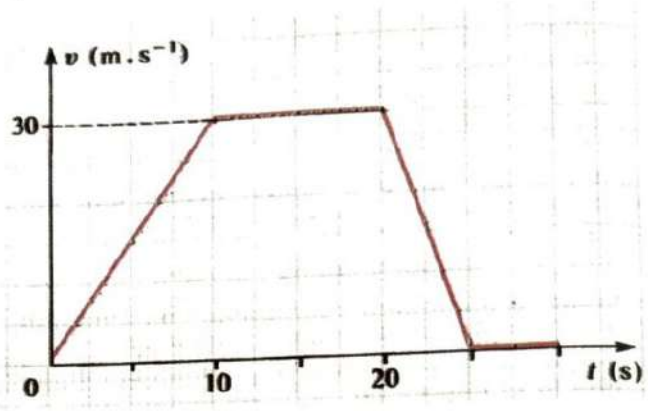
1/ B3 Par intégration du vecteur accélération, exprimer le vecteur vitesse $\vec{v}$ en fonction du temps sachant qu'à l'instant initial $\vec{v}_0 = 10\vec{i}$.

2/ B2 Par intégration du vecteur vitesse $\vec{v}$, exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en fonction du temps sachant qu'à l'instant initial $\overrightarrow{OM}_0 = 5\vec{i}$.

3/ B3 Donner l'équation horaire du mouvement $t \mapsto x(t)$.

↳ ex. 1.6, 1.8.

1.17 Un mobile décrit une trajectoire rectiligne. On a représenté sur la figure le diagramme des vitesses, celui-ci ayant été linéarisé pour simplifier.



1/ AB3 Donner les équations horaires :

$$t \mapsto x(t) \quad \text{et} \quad t \mapsto v(t)$$

du mouvement du mobile durant les diverses étapes du mouvement. Déterminer en particulier l'accélération et la distance totale parcourue pour chaque phase du mouvement.

2/ C Les discontinuités du diagramme linéarisé sont-elles physiquement concevables ?

↳ cours 1.5, 1.6.

1.18 C Une automobile est arrêtée à un feu rouge. Quand le feu passe au vert, l'automobiliste accélère uniformément pendant 8 s avec une accélération de 2 m . s^{-2}. Ensuite, l'automobile se déplace à vitesse constante. A l'instant de son démarrage, un camion la dépasse avec une vitesse constante de 12 m . s^{-1}.
Au bout de combien de temps, et à quelle distance du feu, l'automobile rattrapera-t-elle le camion ?

↳ ex. 1.6.

1.19 C Une automobile initialement arrêtée est soumise à une accélération constante égale à 1 m . s^{-2} durant 10 s. Pendant les 20 s qui suivent, l'automobile ralentit avec une décélération constante égale à 5 . 10^{-2} m . s^{-2}. Enfin l'automobile, freinée, prend un mouvement uniformément varié et s'arrête au bout de 5 s.
Calculer la distance totale parcourue par l'automobile.

↳ ex. 1.6.

Mouvement dans un plan

1.20 B3 Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ une particule est animée d'un mouvement curviligne avec un vecteur accélération constant $\vec{a} = 4\vec{j}$.

1/ Par intégration du vecteur accélération, exprimer le vecteur vitesse de la particule en fonction du temps sachant qu'à l'instant initial $\vec{v}_0 = 2\vec{i}$.

2/ Par intégration du vecteur vitesse, exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ de la particule en fonction du temps sachant qu'à l'instant initial $\overrightarrow{OM}_0 = 3\vec{j}$.

Scanné avec CamScanner

3/ Exprimer les équations horaires du mouvement :

$$t \mapsto x(t) \quad \text{et} \quad t \mapsto y(t).$$

4/ Donner l'équation cartésienne de la trajectoire :

$$x \mapsto y(x).$$

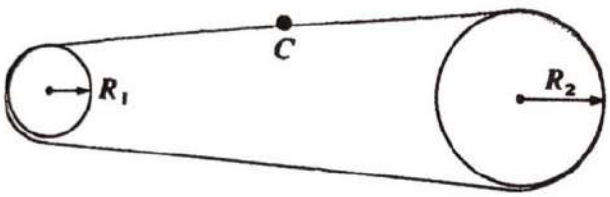
↳ ex. 1.9.

Mouvement circulaire uniforme

1.21 AB3 Un pilote de chasse fait un looping. La trajectoire circulaire est située dans un plan vertical. La vitesse est supposée constante et égale à 1800 km . h^{-1}.
Sachant que le corps humain ne peut pas supporter une accélération supérieure à $10g$ ($g = 10$ m . s^{-1}), calculer le rayon minimal que le pilote peut donner à la trajectoire.

↳ ex. 1.10.

1.22 CB3 On considère un système de deux poulies reliées par une courroie (figure). La première poulie a un rayon $R_1 = 5$ cm et tourne à la vitesse angulaire constante $\omega_0 = 180$ rad . s^{-1}, la seconde a un rayon $R_2 = 30$ cm.



1/ Calculer la vitesse angulaire de la seconde poulie.

2/ La courroie porte une marque C. Calculer l'accélération du point C au cours du mouvement.

↳ ex. 1.10.

1.23 La Terre tourne uniformément autour de son axe. Le jour sidéral est égal à $8{,}616 \cdot 10^4$ s.

1/ AB3 Calculer la vitesse angulaire de rotation de la Terre.

2/ B3C Trouver, en fonction de la latitude, la vitesse et l'accélération d'un point à la surface de la Terre.

3/ CB3 Calculer ces grandeurs en un point de l'Équateur ($R = 6{,}35 \cdot 10^6$ m). Pourquoi ne ressent-on pas les effets de cette grande vitesse ?

↳ ex. 1.10.

Mouvement circulaire uniformément varié

1.24 AB3 Un rotor est animé d'un mouvement circulaire uniformément varié. On donne, à la date t, l'accélération angulaire $\ddot{\alpha} = 40$ rad . s^{-2} et la vitesse angulaire $\dot{\alpha} = 30$ rad . s^{-1}.
Déterminer les normes des vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ d'un point M situé à 10 cm de l'axe du rotor.

↳ ex. 1.11.

1.25 CB3 Le mouvement d'une roue, immobile au départ, est accéléré de telle sorte que sa vitesse angulaire croît régulièrement jusqu'à 120 tr . min ^{1} en 1 min. Après avoir tourné un certain temps à cette vitesse, la roue est freinée régulièrement, et il faut 5 min pour l'arrêter.
Le nombre de tours étant de 1560, calculer la durée totale de la rotation.

↳ ex. 1.11.

1.26 Le rotor d'une machine tourne à 1200 tr . min^{-1}. A l'instant $t = 0$, il est soumis à une accélération angulaire $\ddot{\alpha}$ supposée constante qui provoque son arrêt en 300 tours.

1/ A Exprimer en fonction du temps la vitesse angulaire $\dot{\alpha}$ et l'angle α dont tourne le rotor à partir de l'instant $t = 0$.

2/ C Exprimer $\dot{\alpha}$ en fonction de $\ddot{\alpha}$ et α.

3/ B3 Calculer la valeur de α et la durée du freinage.

↳ ex. 1.7, 1.11.

Exploitation de documents

1.27 Au cours d'un essai de la *Renault 9*, on mesure la vitesse, départ arrêté, en fonction du temps :

t (s)	3,4	4,4	5,8	7,7	10
v (km . h^{-1})	40	50	60	70	80
t (s)	12,7	15,8	19,2	24,3	44,2
v (km . h^{-1})	90	100	110	120	140

1/ B1A Représenter graphiquement v en fonction de t.
Le mouvement est-il uniformément accéléré ?

2/ B1 Déterminer approximativement l'accélération de l'automobile aux instants $t = 5{,}8$ s et $t = 19{,}2$ s.

3/ B3 Déterminer, par intégration graphique, la distance parcourue à l'instant $t = 24{,}3$ s.

↳ ex. 1.3, 1.6.

Au cours d'un essai d'une *Fiat Ritmo 105C*, on a relevé la vitesse en fonction de la distance parcourue :

x (m)	100	200	300	400	500
v (km . h^{-1})	80,5	102	116	126,5	134
x (m)	600	700	800	900	1 000
v (km . h^{-1})	139,5	144	147	149,5	150,5

1/ B1A Représenter graphiquement v^2 en fonction de x. Le mouvement est-il uniformément accéléré ?

2/ B1B3 Représenter graphiquement v en fonction de x. Montrer que le coefficient directeur de la tangente à la courbe en un point est égal au quotient de l'accélération par la vitesse.
Déterminer approximativement l'accélération de l'automobile lorsque sa vitesse est 116 km . h^{-1}.

Scanné avec CamScanner

2 MOUVEMENT DU CENTRE D'INERTIE D'UN SOLIDE



A Pise, en présence de Jean de Medicis, Galilée (à gauche, penché sur un livre) étudie le mouvement d'une bille roulant sur un plan incliné : la mécanique prend son envol.

2.1 Introduction

Nous venons d'étudier dans le chapitre précédent des notions simples de cinématique. Nous ne nous sommes pas préoccupés des forces qui produisaient ces mouvements. Une telle étude entre dans le cadre de la *dynamique*.

Les expériences faites en classe de Seconde nous ont montré qu'une force appliquée à un solide, de masse m et de centre d'inertie G, pouvait modifier sa quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}_G$.

Nous nous proposons dans ce chapitre de préciser la relation existant entre les forces appliquées à un solide et la variation de sa quantité de mouvement.

Il nous sera alors possible de déterminer le *mouvement d'ensemble* du solide, c'est-à-dire le mouvement de son centre d'inertie.

Scanné avec CamScanner

2.2 une relation fondamentale de la dynamique

2.2.1 énoncé

• Si un ensemble de forces, de somme $\Sigma \vec{f}$, appliquées à un solide provoque une variation de sa quantité de mouvement $\vec{p}$, il existe un ensemble de référentiels espace-temps, dits galiléens, dans lesquels est satisfaite la relation :

$$\Sigma \vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Cette relation(*) de la dynamique est vérifiée par la concordance des résultats théoriques et expérimentaux dans de nombreux domaines aussi variés que l'astronautique, l'astronomie, la physique des particules, etc.

Une vérification expérimentale directe peut être réalisée sur table à coussin d'air (voir *fiche expérimentale*).

(*) Une seconde relation permet d'étudier le mouvement propre du solide.

APPLICATION 1

En utilisant les propriétés barycentriques du centre d'inertie (centre de masse, ou centre de gravité), montrer que la quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}_G$ d'un solide est égale à la somme des quantités de mouvement des éléments de matière constituant le solide.

Soit O un point fixe du repère choisi :

$$\vec{p} = m\vec{v}_G = \frac{d(m\overrightarrow{OG})}{dt}.$$

Désignons par A_1, A_2, ..., A_i, ..., chacun des éléments de matière de masse m_1, m_2, ..., m_i, ... constituant le solide (*fig.* 1); nous avons :

$$m = \sum_i m_i.$$

Le centre d'inertie G du solide est le barycentre des éléments A_i affectés, respectivement, du coefficient m_i, soit :

$$\left(\sum_i m_i\right)\overrightarrow{OG} = \sum_i (m_i\overrightarrow{OA_i}),$$

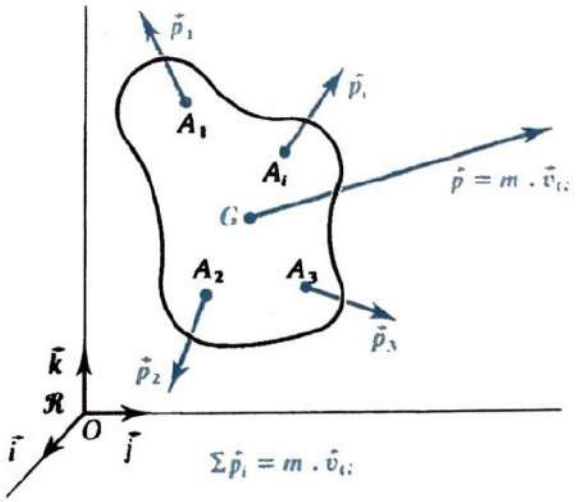
$$m\overrightarrow{OG} = \sum_i (m_i\overrightarrow{OA_i}).$$

Dérivons par rapport au temps :

$$\frac{d(m\overrightarrow{OG})}{dt} = \frac{d}{dt}[\Sigma(m_i\overrightarrow{OA_i})];$$

d'où :
$$\vec{p} = \Sigma\left(m_i\frac{d\overrightarrow{OA_i}}{dt}\right) = \Sigma(m_i\vec{v}_i),$$

et :
$$\vec{p} = m\vec{v}_G = \Sigma(m_i\vec{v}_i).$$



1. ***La quantité de mouvement du solide est égale à la somme des quantités de mouvement des points matériels qui le constituent.***

Qu'il soit en translation ou non, la quantité de mouvement d'un solide, somme des quantités de mouvement de tous les éléments constituant le solide, est égale à la quantité de mouvement du centre d'inertie affecté de toute la masse.

Nous avons ainsi démontré la relation liant la quantité de mouvement à la vitesse du centre d'inertie (relation valable, en fait, pour tout système matériel), que nous avions admise dans le cours de Seconde.

Scanné avec CamScanner

fiche expérimentale

VÉRIFICATION DE LA RELATION DE LA DYNAMIQUE

1. Principe

On enregistre le mouvement du centre d'inertie G d'un solide S de masse m, lié par un ressort de raideur k à un point fixe O d'une table à coussin d'air horizontale.

Lorsque G occupe la position M_2 à la date t_2, la force $\vec{F}_2$ exercée par le ressort a la direction et le sens du vecteur $\overrightarrow{M_2O}$.

De la longueur M_2O, on déduit la longueur l_2 du ressort, et son allongement $l_2 - l_0$ permet de calculer la norme de la force $\|\vec{F}_2\| = k(l_2 - l_0)$.

On détermine graphiquement la variation de vitesse $\Delta\vec{v}_2 = \vec{v}_3 - \vec{v}_1$ entre deux dates très proches ($\Delta t = t_3 - t_1 = 8.10^{-2}$ s) encadrant t_2.

On s'intéresse au vecteur $\dfrac{\Delta\vec{p}_2}{\Delta t} = m\dfrac{\Delta\vec{v}_2}{\Delta t}$.

On détermine $\dfrac{\|\Delta\vec{p}_2\|}{\Delta t}$, que l'on compare à $\|\vec{F}_2\|$.

Aux erreurs d'expérience près, on vérifie que les vecteurs $\dfrac{\Delta\vec{p}_2}{\Delta t}$ et $\vec{F}_2$ ont même direction, même sens et même norme :

$$\vec{F}_2 + \vec{R} + \vec{P} = \frac{\Delta\vec{p}_2}{\Delta t}, \quad \text{avec} \quad \vec{R} + \vec{P} = \vec{0}$$

(la réaction $\vec{R}$ du coussin d'air sur le palet étant compensée par le poids $\vec{P}$ de celui-ci), soit :

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} \approx \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

On vérifie ainsi directement la relation de la dynamique.

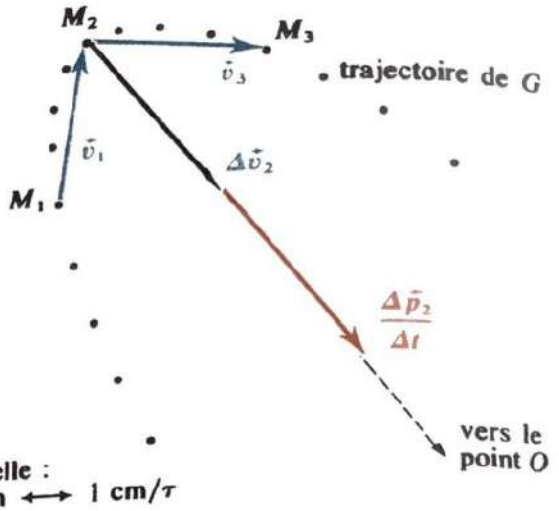
2. Résultats

Données :
$\tau = 1/50$ s ;
longueur à vide du ressort $l_0 = 30$ cm ;
constante de raideur $k = 3{,}5$ N·m^{-1}.

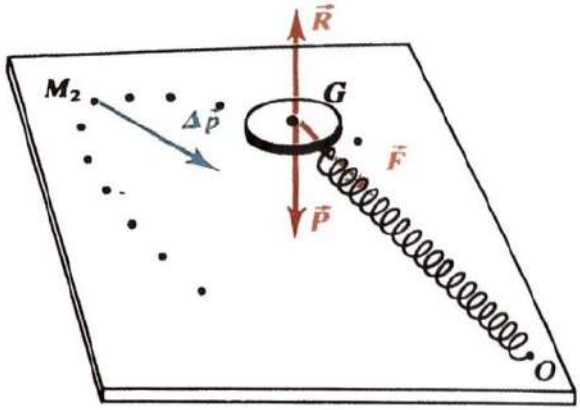
A la date t_2 :

• Caractéristiques de la force $\vec{F}_2$: direction et sens de $\overrightarrow{M_2O}$.
Longueur du ressort : $l_2 = 53$ cm ; d'où :

$$\|\vec{F}_2\| = 3{,}5 \times (0{,}53 - 0{,}30) \approx 0{,}80 \text{ N}.$$



échelle :
4 cm ⟷ 1 cm/τ



$m = 200$ g

table à coussin d'air horizontale

• Détermination de $\dfrac{\Delta\vec{p}_2}{\Delta t}$. Ce vecteur a quasiment la direction et le sens de $\overrightarrow{M_2O}$.
$\|\Delta\vec{v}_2$ image$\| = 2{,}5$ cm (sur l'enregistrement).
Compte tenu de l'échelle :

$$\|\Delta\vec{v}_2\| \approx 0{,}62 \text{ cm} \cdot \tau^{-1} = 0{,}31 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Avec $m = 0{,}2$ kg, il vient :

$$\|\Delta\vec{p}_2\| = 0{,}31 \times 0{,}2 = 0{,}062 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Or $\Delta t = 4\tau = 8.10^{-2}$ s ; d'où :

$$\frac{\|\Delta\vec{p}_2\|}{\Delta t} = \frac{0{,}062}{8.10^{-2}} = 0{,}78 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

• Conclusion :

$$\|\vec{F}_2\| = \frac{\|\Delta\vec{p}_2\|}{\Delta t} \text{ à } 2{,}5\ \% \text{ près},$$

et :

$$\vec{F}_2 \approx \frac{\overrightarrow{\Delta p_2}}{\Delta t}.$$

Pour cette expérience, le référentiel du laboratoire peut être considéré comme *galiléen*.

Scanné avec CamScanner

2.2.2 théorème du centre d'inertie

Avec $\vec{p} = m\vec{v}_G$, la relation précédente s'écrit, la masse m restant constante :

$$\Sigma \vec{f} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v}_G)}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}_G}{\mathrm{d}t},$$

soit : $$\vec{F} = \Sigma \vec{f} = m\vec{a}_G.$$

• Dans un référentiel galiléen, la somme $\vec{F} = \Sigma \vec{f}$ des forces appliquées à un solide est égale au produit de sa masse m par le vecteur accélération $\vec{a}_G$ de son centre d'inertie.

Cet énoncé constitue le *théorème du centre d'inertie*. Le vecteur accélération $\vec{a}_G$ a même orientation que la somme $\vec{F}$ des forces appliquées (*fig.* 2).
Ce théorème permet de déterminer le mouvement du centre d'inertie G, c'est-à-dire le mouvement d'ensemble du solide, indépendamment de son mouvement propre. Seule la somme des forces intervient pour déterminer le mouvement du centre d'inertie.

2.2.3 principe de l'inertie

Ce « principe », énoncé en classe de Seconde, apparaît ici comme un théorème, conséquence directe de la relation :

$$\Sigma \vec{f} = m\vec{a}_G.$$

Rappelons que, par définition, un solide mécaniquement isolé n'est soumis à aucune force et qu'un solide est dit *pseudo-isolé* si les forces agissant sur celui-ci se compensent à chaque instant.

Dans l'un et l'autre cas :

$$\Sigma \vec{f} = \vec{0}.$$

Il vient évidemment :

$$m\vec{a}_G = \vec{0}, \quad \text{soit} \quad \vec{a}_G = \vec{0};$$

$\vec{v}_G$ est donc un vecteur constant, et l'on peut énoncer :

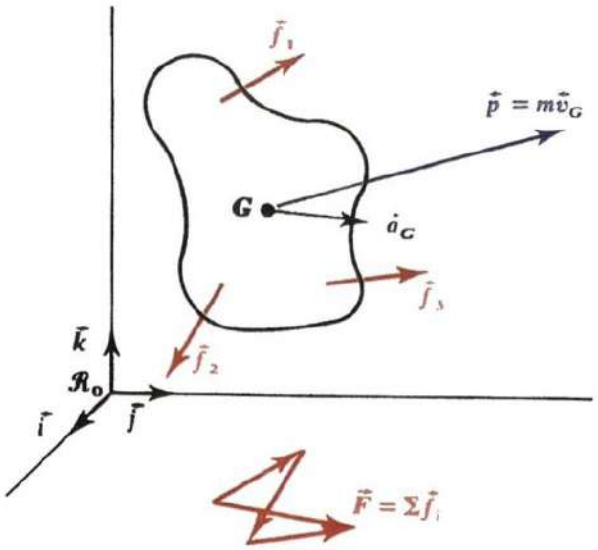
• Dans un référentiel galiléen, le mouvement du centre d'inertie d'un solide isolé (ou pseudo-isolé) est un mouvement rectiligne uniforme.

2.2.4 cas particuliers

1. Dans le cas d'un solide en *mouvement de translation*, tous les points de ce solide ont, à un instant donné, même accélération $\vec{a}$ (qui est aussi celle du centre d'inertie G). Dans un référentiel galiléen, le théorème du centre d'inertie s'écrit alors simplement :

$$\Sigma \vec{f} = m\vec{a}.$$

2. Un *point matériel* est un solide pour lequel on ne tient pas compte des effets de rotation propre. Un point matériel peut donc être confondu avec son centre d'inertie, et la relation ci-dessus s'applique.



2. Si $\mathcal{R}_0$ est un référentiel galiléen, on a :

$$\vec{F} = \Sigma \vec{f}_i = m\vec{a}_G = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}.$$

$\vec{F}$ et $\vec{a}_G$ ont même direction et même sens, alors que $\vec{F}$ et $\vec{v}_G$ ont en général des directions différentes.

Scanné avec CamScanner

2.3 choix du référentiel galiléen

La validité de la relation $\Sigma \vec{f} = m\vec{a}_G$ dépend du référentiel choisi.

Si on connaît un référentiel galiléen $\mathcal{R}_0$, on en connaît alors une infinité d'autres : tous ceux qui sont animés d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}_0$.

En effet, si $\vec{v}_G$ est la vitesse du point G dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}_0$ et si $\mathcal{R}$ est un référentiel animé d'une vitesse de translation rectiligne et uniforme $\vec{v}$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}_0$, la vitesse du point G dans $\mathcal{R}$ est :

$$\vec{v}'_G = \vec{v}_G - \vec{v},$$

de sorte que :

$$\vec{a}'_G = \frac{d\vec{v}'_G}{dt} = \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{a}_G,$$

puisque $\vec{v}$ est un vecteur constant.

On a donc bien dans $\mathcal{R}$:

$$\Sigma \vec{f} = m\vec{a}_G = m\vec{a}'_G.$$

2.3.1 référentiel de Copernic

Un repère du référentiel de Copernic a le centre d'inertie du système solaire pour origine et trois axes dirigés vers trois étoiles fixes (c'est-à-dire dont les positions dans le ciel n'ont pas varié depuis des centaines d'années).

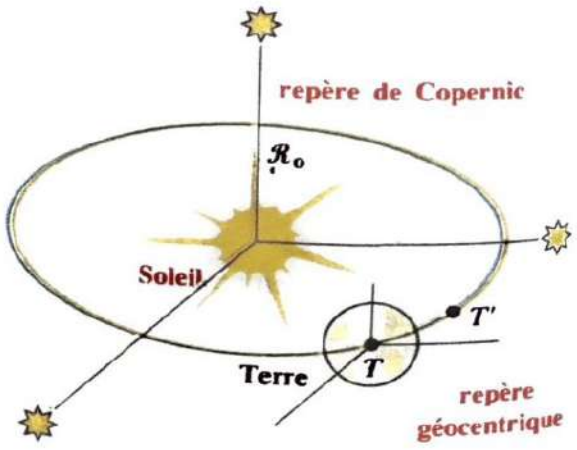
L'expérience montre *qu'un repère de Copernic est un excellent repère galiléen :* jusqu'à ce jour, tous les résultats donnés par le théorème du centre d'inertie sont en accord avec l'expérience. Par exemple, les mouvements des planètes et des sondes interplanétaires peuvent être décrits avec une grande précision dans ce repère.

Remarque : Pour des mesures ayant une précision de l'ordre de 10^{-10} (précision inaccessible actuellement), il faudrait tenir compte du mouvement du centre de Soleil autour du centre de la Galaxie (mouvement de rotation à la vitesse de 200 $km \cdot s^{-1}$) et du mouvement de la Galaxie par rapport aux galaxies voisines.

2.3.2 référentiel géocentrique

Un repère du référentiel géocentrique a pour origine le centre d'inertie de la Terre et trois axes dirigés vers trois étoiles fixes du référentiel de Copernic (*fig.* 3).

Dans un repère géocentrique, si on se limite à des régions de l'espace voisines de la Terre, on peut considérer, avec une très bonne approximation, ce repère comme galiléen à condition de ne pas prendre en compte les forces exercées par les astres autres que la Terre (Soleil, Lune). Cette approximation convient ainsi pour étudier le mouvement des satellites artificiels. En revanche, si on s'intéresse, par exemple, au phénomène des marées, l'approximation ne convient plus, le phénomène des marées étant précisément dû à l'action du Soleil et de la Lune sur les masses liquides (voir *chap.* 3).



3. ***Un repère géocentrique a pour origine le centre d'inertie de la Terre. Ses axes sont parallèles à ceux d'un repère de Copernic; ils gardent des directions dites « fixes ». Un repère géocentrique est animé d'un mouvement de translation curviligne autour du Soleil.***

Scanné avec CamScanner

2.3.3 référentiel terrestre ou du laboratoire

Un repère du référentiel terrestre est lié à la Terre; il est entraîné par cette dernière dans son mouvement de rotation sur elle-même. Si on ne demande pas une trop grande précision et si les expériences n'ont pas une trop longue durée, on peut également assimiler ce repère à un repère galiléen. C'est ce que nous ferons la plupart du temps.

En revanche, tout repère associé à un véhicule en mouvement accéléré par rapport au sol ne peut être considéré comme galiléen (*fig.* 4 et *application* 2).

Le référentiel d'espace étant choisi, il nous faut mesurer des durées et, par là même, choisir une chronologie.

2.3.4 chronologie

On a besoin d'une horloge qui donnera l'unité de temps. Une horloge utilise un phénomène périodique qui se reproduit identique à lui-même : saisons, jours, marées, lunaisons, etc. Depuis 1967, la seconde est définie à partir de la durée d'une *transition électronique* dans un atome de césium.

Nous verrons que l'émission d'une radiation par un atome excité est due au passage d'un électron d'un niveau supérieur d'énergie à un niveau inférieur d'énergie. C'est ce phénomène qui est appelé transition électronique. La fréquence de la radiation émise est très bien définie pour un isotope donné d'un élément. On a choisi le césium 133, $^{133}_{55}Cs$, et une radiation déterminée.



4. *Dans un virage serré pris rapidement, le passager est « tiré » vers l'extérieur du virage. En fait, il a tendance à continuer tout droit, tangentiellement à la courbe. Les forces de contact voiture-passager, de somme $\vec{R}$, obligent celui-ci à tourner en restant (heureusement!) dans la voiture.*

Dans un repère terrestre, le mouvement du passager est accéléré :

$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}.$$

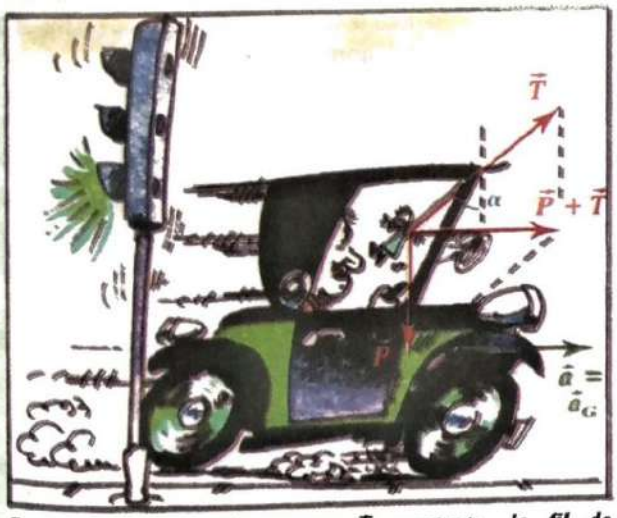
Dans un repère lié à l'automobile, le passager est immobile :

$$\vec{a}\,' = \vec{0}, \quad \text{avec} \quad \vec{P} + \vec{R} \neq \vec{0}.$$

La relation $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}\,'$ n'est donc pas vérifiée; l'automobile ne constitue pas un référentiel galiléen.

APPLICATION 2

Le fil d'attache de la poupée suspendue au rétroviseur intérieur d'une automobile s'incline vers l'arrière du véhicule lorsque celui-ci accélère. Pour une accélération constante $\vec{a}$ du véhicule, on constate que l'angle α que fait le fil de suspension avec la verticale garde une valeur constante (fig. 5).



5. ***La voiture accélère; pour $\vec{a}$ constante, le fil de suspension de la poupée fait un angle α constant avec la verticale.***

1/ Appliquer le théorème du centre d'inertie à la poupée, dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$.

2/ Cette relation peut-elle s'appliquer dans un repère $\mathcal{R}'$ lié à l'automobile?

1/ Faisons le bilan des forces appliquées à la poupée, que nous assimilons ici, pour simplifier, à un point matériel G : poids $\vec{P}$ et tension $\vec{T}$ du fil.

Dans un repère terrestre $\mathcal{R}$, considéré comme galiléen, le théorème du centre d'inertie s'écrit :

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}_G, \qquad (1)$$

ou encore, la poupée et l'automobile ayant même accélération (la poupée étant immobile par rapport à la voiture) :

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}. \qquad (2)$$

La relation (1) permet (*cf.* 2.7 et *application* 4) de déterminer l'angle d'inclinaison α.

2/ Par rapport à $\mathcal{R}$, le repère $\mathcal{R}'$ est animé d'un mouvement rectiligne accéléré (accélération $\vec{a}$). $\mathcal{R}'$ n'est donc pas galiléen; nous ne pouvons pas y appliquer la relation précédente.

Scanné avec CamScanner

La seconde comprend alors, par définition, 9 192 631 770 périodes de cette radiation. Autrement dit, la fréquence de cette radiation est, d'après le choix de la seconde, égale à 9 192 631 770 Hz.
On prend donc pour référentiel galiléen $\mathcal{R}_0$ un référentiel de Copernic, ou tout autre référentiel galiléen, muni de la chronologie définie précédemment.

2.3.5 conclusions

Selon la précision exigée pour certaines expériences réalisées sur la Terre, le référentiel terrestre peut être assimilé à un référentiel galiléen.
L'application du théorème du centre d'inertie au mouvement des satellites terrestres nécessite le choix du référentiel géocentrique.
L'étude du mouvement des planètes ou des sondes spatiales se fait dans le référentiel de Copernic.

2.4 théorème de l'énergie cinétique

Nous traitons dans ce qui suit du cas particulier d'un solide, de masse m, animé d'un *mouvement de translation*. A tout instant, chaque point du solide a, dans ces conditions, même vecteur vitesse que le centre d'inertie. Le solide ne tourne pas sur lui-même; il ne possède pas d'énergie cinétique de rotation. Son énergie cinétique vaut donc :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m \vec{v}^2, \quad \text{avec} \quad \vec{v} = \vec{v}_G.$$

Soit $\vec{F} = \Sigma \vec{f}$ la somme des forces appliquées au solide, à une date t. A cette date, la puissance de ces forces est :

$$\mathcal{P} = \vec{F} . \vec{v}.$$

Si le référentiel par rapport auquel on étudie le mouvement est galiléen, on peut écrire :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt},$$

soit :

$$\mathcal{P} = m \frac{d\vec{v}}{dt} . \vec{v}.$$

Or(*) :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \vec{v}^2\right) = m\vec{v} . \frac{d\vec{v}}{dt};$$

d'où :

$$\mathcal{P} = \frac{d(\mathcal{E}_c)}{dt}.$$

Un ensemble de forces de somme non nulle modifie la vitesse et par conséquent l'énergie cinétique du solide auquel elles sont appliquées. L'énergie cinétique $\mathcal{E}_c$ du solide en translation est bien fonction du temps t.

Or le travail W effectué par les forces appliquées est aussi fonction du temps t et sa dérivée par rapport au temps n'est autre que la puissance instantanée des forces appliquées :

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt}.$$

Donc les grandeurs $W(t)$ et $\mathcal{E}_c(t)$, qui ont même dérivée par rapport au temps t, sont égales à une constante près :

$$W = \mathcal{E}_c + \text{Cte.} \qquad (1)$$

Considérons un déplacement $A \longrightarrow B$ du solide, de durée Δt. La variation d'énergie cinétique est :

$$\Delta \mathcal{E}_c = \mathcal{E}_{c_B} - \mathcal{E}_{c_A}.$$

A cette variation d'énergie cinétique correspond, d'après (1), le travail :

$$W_{A \to B}(\vec{F}) = \Delta \mathcal{E}_c.$$

Ce résultat constitue le **théorème de l'énergie cinétique** pour un solide en translation :

$$W_{A \to B}(\vec{F}) = \mathcal{E}_{c_B} - \mathcal{E}_{c_A}.$$

• La variation, pour une durée donnée, de l'énergie cinétique d'un solide animé d'un mouvement de translation relativement à un référentiel galiléen est égale à la somme algébrique des travaux effectués par toutes les forces appliquées au solide pendant la même durée.

Le théorème de l'énergie cinétique(*) apparaît dans ce cas comme une conséquence de la relation :

$$\Sigma \vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

(*) Voir cours de mathématiques, dérivation des fonctions composées.

(*) Admis en classe de Première.

Scanné avec CamScanner

2.5 forces intérieures et principe d'interaction

Rappelons le **principe d'interaction**(*), étudié en classe de Seconde :

• Lorsqu'un corps 1 exerce sur un corps 2 une action mécanique représentée par une force $\vec{F}_{1\to 2}$ localisée en B, le corps 2 exerce sur le corps 1 une action mécanique représentée par une force $\vec{F}_{2\to 1}$ localisée en A. Ces deux forces ont même support (la droite AB) et sont telles que :

$$\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1}.$$

Un système (*fig.* 6) constitué par une locomotive 1 et ses wagons 2 et 3 est soumis à des *forces extérieures* réparties :

— les poids $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, de somme $\vec{P} = \Sigma \vec{P}_i$;
— les forces de contact $\vec{f}_i$ réparties, exercées par le sol sur les roues du système, de somme $\Sigma \vec{f}_i = \vec{F}$.

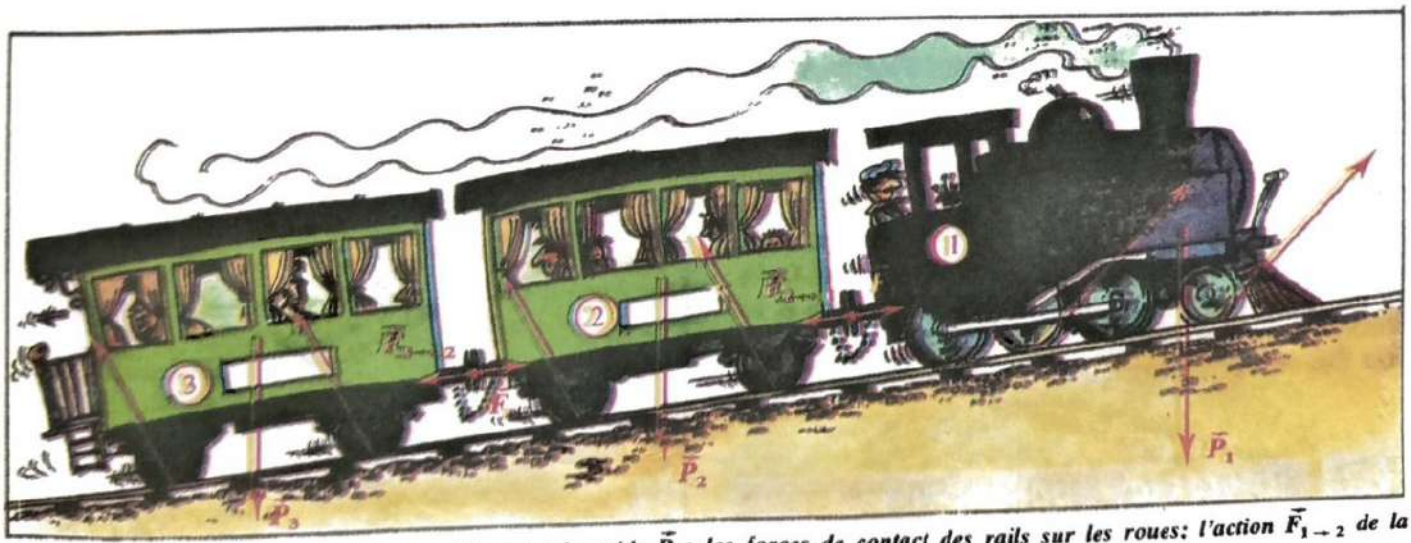
Dans le référentiel terrestre, supposé galiléen :

$$\vec{P} + \vec{F} = m\vec{a}.$$

Les forces intérieures, telles que $\vec{F}_{1\to 2}$ et $\vec{F}_{2\to 1}$, s'annulent deux à deux en vertu du principe d'interaction; elles n'interviennent donc pas pour modifier le mouvement d'ensemble du système.
Si, maintenant, le système étudié est le wagon 2 (à l'exception des roues du wagon), les forces $\vec{F}_{1\to 2}$ et $\vec{F}_{3\to 2}$ deviennent alors des forces extérieures appliquées à ce wagon. Si $\vec{F}_2$ est la somme des forces de contact exercées par les roues sur les essieux du wagon 2, la relation de la mécanique s'écrit :

$$\vec{P}_2 + \vec{F}_2 + \vec{F}_{1\to 2} + \vec{F}_{3\to 2} = m\vec{a}.$$

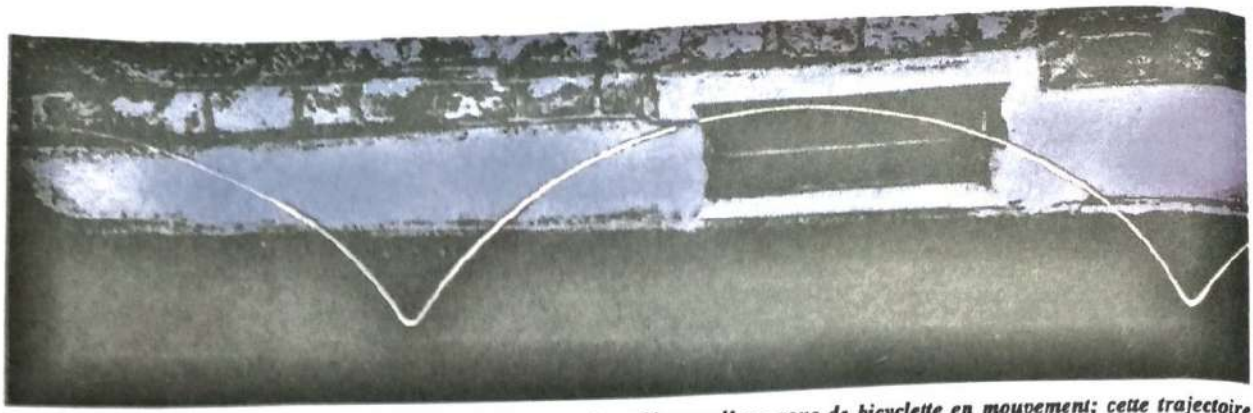
Il convient donc de bien définir un système pour faire le bilan des forces extérieures qui lui sont appliquées.



6. *Les forces appliquées sur le wagon* (2) *sont : le poids* $\vec{P}_2$ *; les forces de contact des rails sur les roues: l'action* $\vec{F}_{1\to 2}$ *de la locomotive* (1); *l'action* $\vec{F}_{3\to 2}$ *du wagon* (3).

(*) Encore appelé *principe de l'action et de la réaction*, ou *principe des actions réciproques*.

Scanné avec CamScanner



7. *Ce cliché représente la trajectoire d'un point situé sur la circonférence d'une roue de bicyclette en mouvement; cette trajectoire est une cycloïde.*

2.6 étude complète du mouvement d'un solide

Lançons un mobile d'une manière quelconque sur la table à coussin d'air et observons-le. Nous constatons que le mouvement d'ensemble de ce solide pseudo-isolé est rectiligne uniforme. D'autre part, le palet tourne sur lui-même, autour de son centre d'inertie *G*. Le mouvement du palet est déterminé si on connaît :

1. le mouvement de *G*, encore appelé *mouvement d'ensemble;*
2. le mouvement autour de *G* (plus précisément, autour de l'axe Δ perpendiculaire au palet et passant par *G*), encore appelé *mouvement propre.*

Il en est ainsi pour tous les solides. Par exemple, le mouvement d'une roue de bicyclette peut être décomposé en un mouvement de son centre et en un mouvement de rotation autour de son axe (*photo* 7). De même, l'étude du mouvement de la Terre se fait en considérant le mouvement de son centre d'inertie et son mouvement de rotation sur elle-même.

Le théorème du centre d'inertie permet de déterminer le mouvement du centre d'inertie d'un solide (mouvement d'ensemble), mais non son mouvement propre; si l'on excepte le cas des mouvements de translation, une étude particulière du mouvement propre est nécessaire. Cette étude, hors programme, nécessite l'utilisation d'un autre théorème, qui fait intervenir le moment par rapport à un axe fixe des forces appliquées au solide.

2.7 différentes applications

Pour résoudre les problèmes de mécanique proposés (*applications* 3 à 7), nous adoptons une méthode résumée ci-dessous :

1. *Préciser le système étudié.*

APPLICATION 3

Solide glissant sur un plan incliné

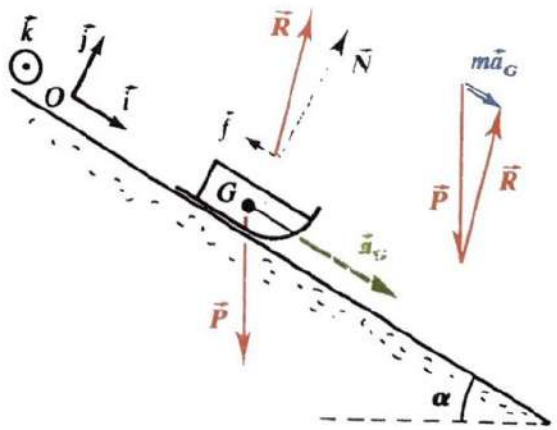
Une luge de masse m, abandonnée sans vitesse initiale, glisse selon une ligne de plus grande pente d'un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. Nous admettrons que la luge est un solide en translation.

Étudier le mouvement de la luge, les forces appliquées étant supposées constantes et indépendantes de la vitesse de la luge. On négligera la résistance de l'air.

1. Le système considéré est la luge (*fig.* 8).

2. Pour cette étude, le référentiel terrestre peut être considéré comme galiléen.

3. Faisons l'inventaire des forces appliquées à la luge.
La luge est soumise à son poids $\vec{P}$ et aux forces réparties dues au contact de la neige sur les patins; soit $\vec{R}$ la somme de ces forces. On néglige la résistance de l'air.
Remarquons que $\vec{R}$ peut être décomposée en deux vecteurs :



8. *$\vec{R}$ représente l'action de la neige sur la luge et peut être décomposée : $\vec{R} = \vec{f} + \vec{N}$, où $\vec{f}$ représente les frottements. On a :*

$$\vec{R} + \vec{P} = \vec{f} + \vec{N} + \vec{P} = m\vec{a}_G.$$

Scanné avec CamScanner

2. *Choisir le référentiel.* Celui-ci doit être galiléen si l'on veut appliquer le théorème du centre d'inertie ou le théorème de l'énergie cinétique.

3. *Faire le bilan des forces* appliquées au système.

4. *Appliquer,* dans le référentiel galiléen choisi, *le théorème du centre d'inertie* ou *le théorème de l'énergie cinétique.*

5. *Choisir un repère orthonormal de projection* où sera projetée la relation. Ce repère peut appartenir au référentiel galiléen choisi ou être un repère mobile tel que le repère de Frenet pour les mouvements circulaires.

Une méthode de résolution géométrique est parfois plus simple.

Le théorème du centre d'inertie permet de connaître l'accélération du centre d'inertie G du système. Compte tenu des conditions initiales, les intégrations successives de l'accélération donnent la vitesse, les équations horaires du mouvement et la trajectoire du point G.

Le théorème de l'énergie cinétique permet de connaître directement la vitesse de G.

Nous nous limiterons à des solides en translation ou à des solides considérés comme ponctuels (pour lesquels l'énergie cinétique liée à la rotation est négligeable).

- $\vec{f}$, parallèle au plan et opposée au vecteur vitesse de la luge, qui représente les forces de frottement;
- $\vec{N}$, orthogonale au plan.

4. Appliquons le théorème du centre d'inertie à la luge; il vient :

$$\vec{R} + \vec{P} = m\vec{a}_G. \qquad (1)$$

Les forces appliquées étant supposées constantes, *le vecteur accélération est constant.* Le mouvement du centre d'inertie G de la luge, considérée en translation, est donc *rectiligne uniformément accéléré.*

5. Choisissons un repère orthonormal de projection $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

L'origine O du repère est choisie en coïncidence avec la position initiale G_0 du centre d'inertie ($t=0$). Le centre d'inertie décrivant une ligne de plus grande pente du plan incliné, le vecteur $\vec{i}$ est choisi parallèle à celle-ci et le vecteur $\vec{j}$, orthogonal au plan; le choix du vecteur $\vec{k}$ en découle (base orthonormale directe).

Dans ce repère, $\vec{a}_G = \ddot{x}\vec{i}$.

En posant $g = \|\vec{g}\|$, $f = \|\vec{f}\|$ et $N = \|\vec{N}\|$, la relation (1) donne en projection :

$$mg \sin \alpha - f = m\ddot{x} \qquad (2)$$

$$N = mg \cos \alpha = 0. \qquad (3)$$

Sachant qu'à la date $t=0$, $v_0 = \dot{x}_0 = 0$, nous obtenons les équations du mouvement à partir de la relation (2), par intégrations successives :

$$\ddot{x} = g \sin \alpha - \frac{f}{m} = \text{Cte} = a_0$$

$$\dot{x} = v = a_0 t$$

$$x = \frac{1}{2} a_0 t^2.$$

La relation (3) permet de calculer $N = mg \cos \alpha$.

6. Le théorème de l'énergie cinétique permet d'exprimer la vitesse v en fonction de la distance x parcourue. En effet :

$$\mathcal{E}_c - \mathcal{E}_{c_0} = W(\vec{P}) + W(\vec{R}),$$

avec $\mathcal{E}_{c_0} = 0$ et $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} mv^2$.

Or :

$$W(\vec{P}) = m\vec{g} \cdot \overrightarrow{OG} = mgx \sin \alpha,$$

$$W(\vec{R}) = \vec{f} \cdot \overrightarrow{OG} = -fx;$$

d'où :

$$\frac{1}{2} mv^2 = mgx \sin \alpha - fx,$$

$$v^2 = 2x\left(g \sin \alpha - \frac{f}{m}\right).$$

Notons qu'en dérivant cette dernière relation par rapport au temps, on retrouve l'expression de l'accélération trouvée en (2) par application du théorème du centre d'inertie.



Les forces de frottement dues à l'air sont quelquefois très importantes. Par sa position, la nature de son équipement, ce skieur cherche à les diminuer. La « barre » des 200 km.h^{-1} a été franchie.

Scanné avec CamScanner

APPLICATION 4

Pendule dans un véhicule

Un véhicule est animé d'un mouvement de translation rectiligne horizontal, d'accélération $\vec{a}$ constante relativement à un repère galiléen.

Déterminer l'inclinaison que prend, à l'équilibre, un pendule suspendu au plafond du véhicule.

Le système considéré est la boule du pendule, qui est soumise à deux forces : son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la tension $\vec{T}$ du fil.

Un repère lié au véhicule n'est pas galiléen; choisissons un repère terrestre dans lequel le théorème du centre d'inertie s'écrit :

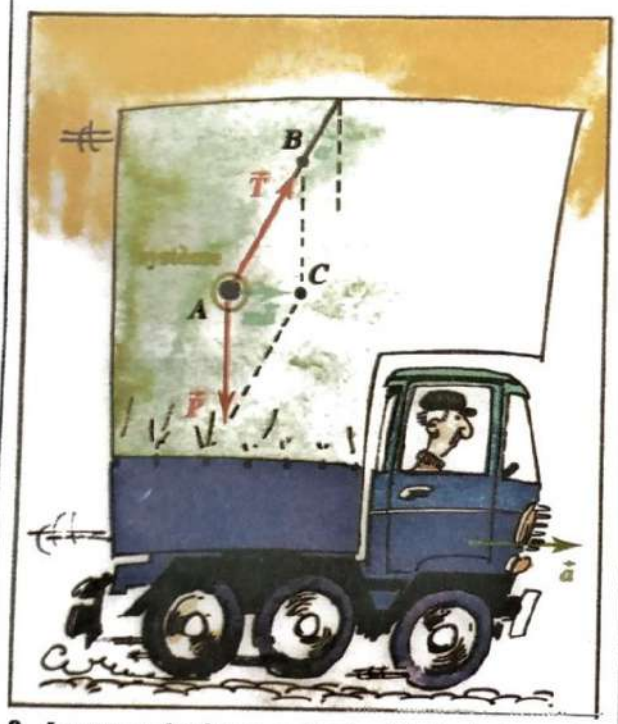
$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}. \qquad (1)$$

Véhicule et pendule (ce dernier étant immobile par rapport au véhicule) ont même accélération $\vec{a}$.

La figure montre que le pendule est nécessairement incliné en sens inverse de l'accélération.

En projection dans le repère (*fig.* 9) de base $(\vec{j}, \vec{k})$, la relation (1) devient :

$$\begin{cases} T \sin \alpha = ma & (2) \\ T \cos \alpha - mg = 0. & (3) \end{cases}$$



9. ***La somme des forces appliquées à la boule du pendule donne (triangle ABC) :***

$$\tan \alpha = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g}.$$

Nous obtenons :

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha = \frac{a}{g}.$$

L'angle α augmente avec l'accélération du véhicule. Connaissant a, nous obtenons α, puis la tension T du fil :

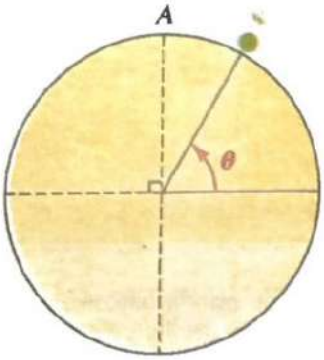
$$T = \frac{mg}{\cos \alpha}.$$

APPLICATION 5

Solide ponctuel glissant sur une sphère

Un solide S de petites dimensions, de masse m et assimilable à un point matériel, est placé au sommet A d'une sphère de rayon R. On déplace légèrement le point matériel S pour qu'il quitte la position A avec une vitesse quasiment nulle et glisse sans frottement le long de la sphère. La position de S peut être déterminée par l'angle θ (fig. 10 a).

Déterminer la position du solide au moment où il quitte la sphère. Quelle est alors sa vitesse?



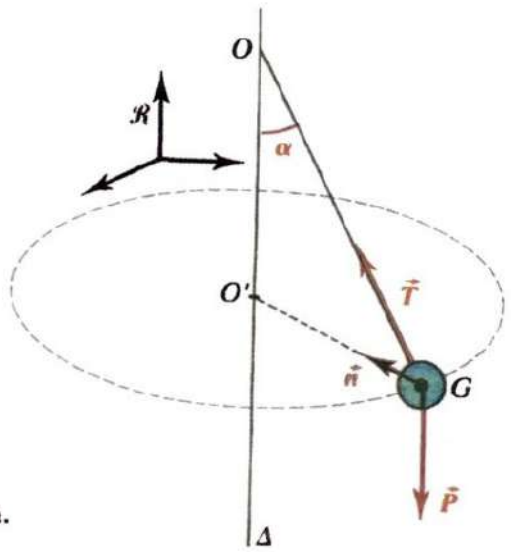
10 a.

APPLICATION 6

Pendule conique

On considère un pendule formé d'une petite boule B (masse m, centre d'inertie G) et d'un fil de longueur ℓ de masse négligeable. Ce pendule est mis en mouvement de rotation uniforme autour d'un axe vertical Δ d'un référentiel galiléen.

Montrer qu'un tel mouvement n'est possible que si la vitesse angulaire ω est supérieure à une valeur ω_0 que l'on calculera. Déterminer alors la valeur de l'angle d'inclinaison α que prend le fil par rapport à l'axe Δ (fig. 11 a).



11 a.

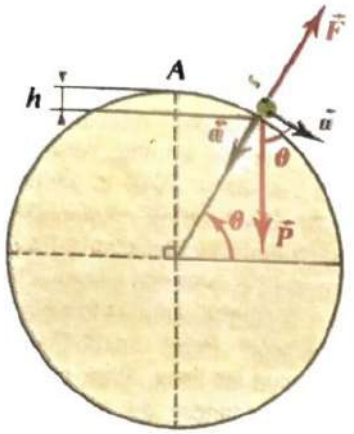
Scanné avec CamScanner

Le solide S est soumis à deux forces : son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et l'action de contact $\vec{F}$ exercée par la sphère, normale à la trajectoire puisqu'il n'y a pas de frottement.

Dans le référentiel terrestre, considéré comme étant galiléen, le théorème du centre d'inertie s'écrit :

$$\vec{P} + \vec{F} = m\vec{a}.$$

Dans le repère de Frenet de base $(\vec{u}, \vec{n})$, nous obtenons (*fig.* 10b) :



10b.

- selon la tangente orientée $(\vec{u})$:

$$mg\cos\theta = ma_t = m\frac{dv}{dt}; \qquad (1)$$

- selon la normale orientée $(\vec{n})$:

$$mg\sin\theta - F = ma_n = m\frac{v^2}{R}. \qquad (2)$$

Le théorème de l'énergie cinétique nous permet d'exprimer v^2. En effet : $W(\vec{F}) = 0$ et $W(\vec{P}) = mgh$;

d'où : $$\frac{1}{2}mv^2 = mgh,$$

et, avec $h = R(1 - \sin\theta)$: $v^2 = 2gR(1 - \sin\theta)$. (3)
Des relations (2) et (3), nous tirons l'expression de la force de contact : $F = mg(3\sin\theta - 2) \geqslant 0$.

Lorsque le solide S quitte la sphère, le solide n'appuie plus sur celle-ci ; on a donc $F = 0$, et :

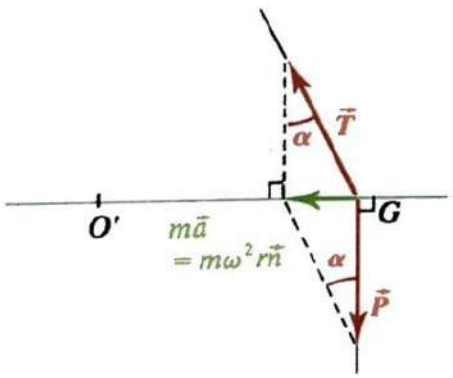
$$3\sin\theta - 2 = 0, \quad \text{soit} \quad \sin\theta = \frac{2}{3}.$$

Nous obtenons : $\theta = 41{,}8°$.

Pour $\sin\theta = \frac{2}{3}$, la relation (3) nous donne :

$$v = \sqrt{\frac{2}{3}gR}.$$

Le repère choisi est le repère galiléen $\mathcal{R}$. La boule est soumise à deux forces : son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la tension $\vec{T}$ du fil (*fig.* 11 b).



11b.

L'application du théorème du centre d'inertie permet d'écrire :

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}_G.$$

Lorsque le pendule est incliné d'un angle α par rapport à la verticale, son centre d'inertie décrit, d'un mouvement uniforme, une circonférence de rayon $r = \ell\sin\alpha$.

L'accélération centripète du centre d'inertie G est dirigée vers le centre O' de ce cercle et a pour mesure :

$$a_G = \omega^2 r = \omega^2 \ell\sin\alpha.$$

La construction graphique (*fig.* 11b) donne :

$$\tan\alpha = \frac{m\omega^2 r}{P} = \frac{m\omega^2 \ell\sin\alpha}{mg},$$

soit : $$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\omega^2 \ell\sin\alpha}{g}.$$

Si $\sin\alpha \neq 0$ ($\alpha \neq 0$ ou π), alors :

$$\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2\ell},$$

relation qui nous permet de déterminer l'inclinaison α du fil en fonction de la vitesse angulaire. Mais cette solution n'est possible que si $\cos\alpha < 1$, soit :

$$\frac{g}{\omega^2\ell} < 1.$$

Le pendule ne s'écarte donc de la verticale que si :

$$\omega > \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

En conclusion :

- si $\omega > \omega_0$, le fil du pendule prend une inclinaison α déterminée par $\cos\alpha = g/\omega^2\ell$;
- si $\omega \leqslant \omega_0$, le fil reste vertical ($\alpha = 0$).

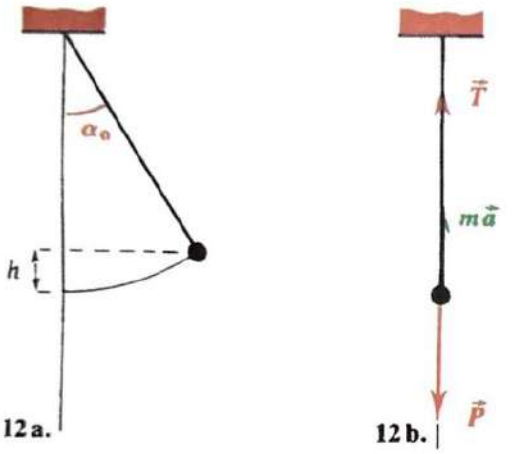
Scanné avec CamScanner

APPLICATION 7

Pendule oscillant

Un pendule est constitué par une sphère de petites dimensions, de masse m, suspendue à un point fixe par un fil inextensible de longueur ℓ. Le pendule est écarté d'un angle α_0 de sa position d'équilibre et abandonné sans vitesse initiale (fig. 12 a).
Déterminer la vitesse v du pendule lorsqu'il passe par sa position d'équilibre. Quelle est alors la tension du fil?

La boule du pendule, assimilée à un point matériel, est soumise à deux forces : son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la tension $\vec{T}$ du fil (*fig.* 12).



12 a. 12 b.

Dans le référentiel terrestre, considéré comme galiléen, appliquons le théorème de l'énergie cinétique.
La tension du fil, toujours perpendiculaire à la trajectoire, ne travaille pas, et (puisque $v_0 = 0$) :

$$W(\vec{P}) = \frac{1}{2} mv^2,$$

avec : $W(\vec{P}) = mg\ell(1 - \cos \alpha_0)$;

d'où : $v = \sqrt{2g\ell(1 - \cos \alpha_0)}$.

Dans ce même référentiel, le théorème du centre d'inertie s'écrit :

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}.$$

Lorsque le pendule passe par sa position d'équilibre, la direction des deux vecteurs $\vec{P}$ et $\vec{T}$, et donc celle de $\vec{a}$, est verticale, normale à la trajectoire. En projection sur la normale orientée, nous obtenons (*fig.* 12 b) :

$$T - mg = ma = ma_n = m\frac{v^2}{\ell}.$$

En remplaçant la vitesse par sa valeur précédemment déterminée, il vient :

$$T = mg + 2mg(1 - \cos \alpha_0)$$
$$= mg(3 - 2 \cos \alpha_0).$$

DOCUMENT

Une histoire de calendrier...

Notre calendrier remonte au moins au VIII[e] siècle avant J.-C. Le calendrier romain primitif reposait sur le mouvement apparent de la Lune : chaque mois débutait avec la nouvelle lune. Comme la période synodique(*) de la Lune est de 29 jours et demi, les mois avaient alternativement 29 et 30 jours. L'année, de 12 mois lunaires, contenait 354 jours, de sorte qu'en 3 ans elle avait pris un mois d'avance sur l'année tropique(*); les dates des saisons se décalaient donc. Pour y remédier, on intercala un treizième mois tous les trois ans. A l'époque de Jules César, le calendrier comportait 12 mois dont la durée variait entre 28 et 31 jours, formant un total de 355 jours; pour rétablir la concordance avec le retour des saisons, on ajoutait, certaines années, un mois supplémentaire entre le 23 et le 24 février. Cette décision était prise par les autorités religieuses; malheureusement, soumis aux pressions de tous ceux qui souhaitaient voir durer le plus longtemps possible leurs charges temporaires rémunérées, les prêtres ajoutaient ce fameux mois supplémentaire de façon assez anarchique, et, qui plus est, différemment selon les lieux. Ainsi, en voyageant de ville en ville, on pouvait changer de mois et d'année de façon imprévisible.

Le calendrier julien

Jules César, ou plus exactement l'astronome Sosigène qui le conseillait, fit adopter, en l'an 46 avant notre ère, un nouveau calendrier, connu sous le nom de calendrier julien. On abandonna la référence au mois lunaire; chaque année fut découpée en 12 mois, dont la durée moyenne passa de 29,5 jours à un peu moins de 30,5, de sorte que la durée de l'année fut égale à 365 jours. Pour rétablir le décalage de 0,25 jour, chaque année, avec l'année tropique, on ajoutait un jour à l'année tous les 4 ans, cette année étant qualifiée de bissextile.

En outre, pour rétablir l'accord avec la date de début du printemps, qui s'était fortement décalée, Jules César attribua 445 jours à l'année que nous notons −46, le calendrier julien débutant ensuite le 1[er] janvier de l'an −45. Après la mort de Jules César, on lui dédia le mois de juillet, avec 31 jours; plus tard, l'empereur Auguste se fit attribuer le mois suivant, doté d'un nombre égal de jours!

(*) On recherchera la signification de ce terme dans une encyclopédie.

Scanné avec CamScanner



4 octobre 1582 serait le 15 octobre. En France, le décalage eut lieu plus tard (le lundi 20 décembre succéda au dimanche 9 décembre 1582); en Angleterre, il eut lieu encore beaucoup plus tard, de telle sorte que le retard était devenu égal à 11 jours (le 14 septembre 1752 succéda au 2 septembre). Ensuite, pour éviter que ce glissement se reproduise, on modifia un peu la modalité de désignation des années bissextiles.

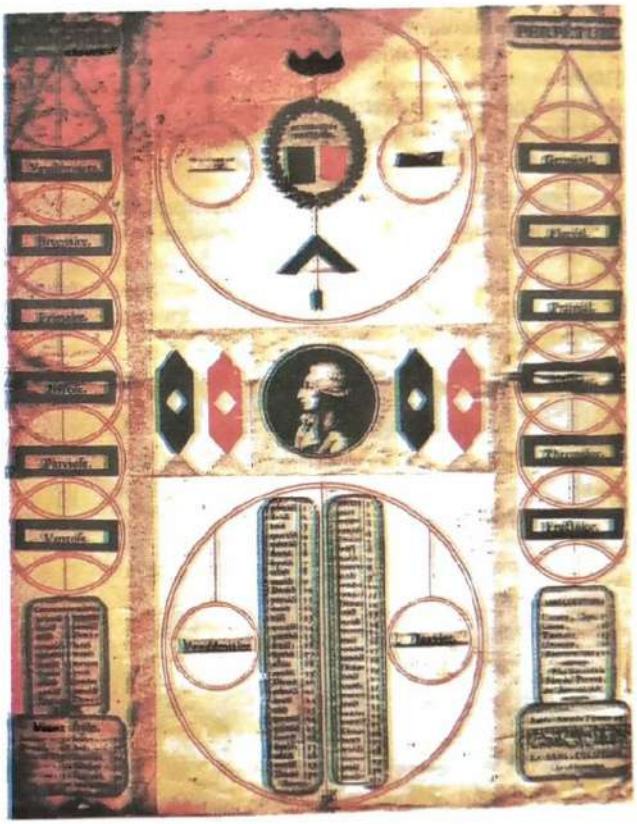
La différence entre l'année julienne et l'année tropique conduit à un écart d'un jour tous les 128 ans : il suffirait donc de décider de retirer un jour à l'année tous les 128 ans; on préfère appliquer une règle différente, fondée sur la réglementation des années bissextiles : on supprime toutes celles qui terminent un siècle, à moins que le nombre qui les représente ne soit divisible par 400. Ainsi, l'année 1900 n'était pas bissextile, l'année 2100 ne le sera pas; en revanche, l'an 2000 sera bissextile. Ceci revient à retirer un jour tous les 133 ans; l'erreur résiduelle est alors de 26 secondes par an, ce qui nécessite 3 300 ans pour atteindre un décalage d'un jour.

L. Gouguenheim,
extrait de *Méthodes de l'Astrophysique*,
Hachette-C. N. R. S., collection « Liaisons scientifiques ».

Le calendrier grégorien

L'année julienne, avec ses 365,25 jours, dure 11 min 14 s de plus que l'année tropique. En 1582, l'accumulation de cet excès avait provoqué un décalage d'une dizaine de jours : le printemps débutait le 11 mars. Comme le concile de Nicée (en 325 de notre ère) avait fixé la date de Pâques au premier dimanche après la pleine lune qui suit le début du printemps, cette fête se produisait de plus en plus tôt. Le pape Grégoire XIII introduisit alors une nouvelle réforme. Tout d'abord, pour rattraper le retard de 10 jours pris par l'année julienne sur l'année tropique depuis le concile de Nicée, on décida dans les États du Pape que le jour qui suivrait le





Scanné avec CamScanner

EXERCICES

L'essentiel au cours

2.1 A Le théorème du centre d'inertie appliqué à un solide s'écrit :

$$\vec{F} = m\vec{a}_G$$

1/ Que représente $\vec{F}$?

2/ Comment doit-on choisir le référentiel d'étude du mouvement ?

3/ Peut-on projeter cette relation dans une base quelconque ?

4/ Donner l'expression de $\vec{a}_G$ dans le cas :

a/ d'un mouvement rectiligne uniforme ;
b/ d'un mouvement circulaire uniforme.

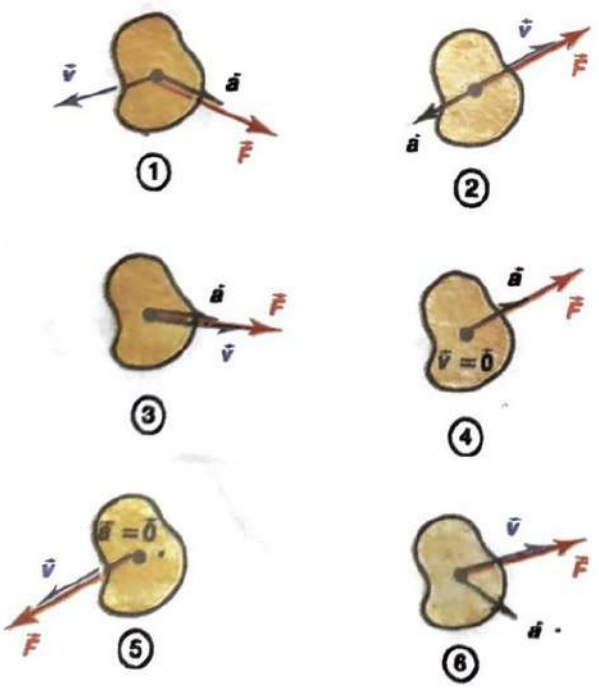
5/ Si $\vec{F} = \vec{0}$, le solide est-il nécessairement au repos ?

2.2 A *Vrai* ou *faux* ?

On considère un solide, assimilable à un point matériel, dans un référentiel galiléen. La somme des forces appliquées à ce solide n'est pas nulle.

- La vitesse est modifiée sans changement du sens et de la direction du mouvement.
- Le vecteur vitesse reste constant.
- Le solide passe de l'état de repos à l'état de mouvement.
- Le solide se maintient en mouvement circulaire uniforme.
- La direction du mouvement est modifiée sans changement de la vitesse.
- La vitesse est nulle à un instant donné.
- L'accélération est nulle à un instant donné.

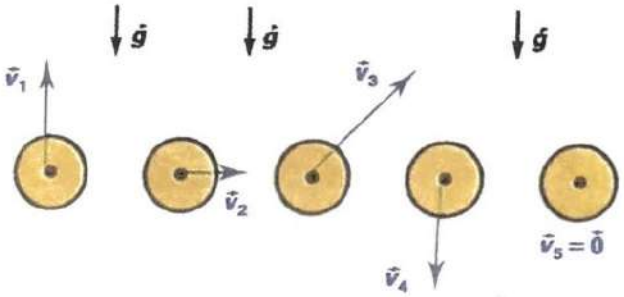
2.3 A Soit $\vec{F}$ la somme des forces appliquées à un solide animé d'un mouvement de translation de vecteur vitesse $\vec{v}$ et de vecteur accélération $\vec{a}$ au même instant. Parmi les schémas ci-dessous, indiquer ceux qui sont cohérents avec le théorème du centre d'inertie dans un référentiel galiléen.



2.4 A Une balle a été lancée de différentes façons dans le champ de pesanteur. Elle est soumise à son poids $\vec{P}$ et à une force $\vec{F}$ de même direction et de sens opposé au vecteur vitesse $\vec{v}_G$ de son centre d'inertie. On suppose que :

$$\|\vec{F}\| = \frac{1}{3}\|\vec{P}\|.$$

Les schémas ci-dessous représentent le vecteur vitesse $\vec{v}_G$ à différents instants.
Reproduire ces schémas. Dans chaque cas, représenter les forces appliquées ; en déduire la direction et le sens du vecteur accélération $\vec{a}_G$.



Exercices de base

Dans tous les exercices, le référentiel d'étude est galiléen.

2.5 Une tondeuse à gazon sur coussin d'air, de masse $m = 20$ kg, est initialement immobile sur un plan horizontal. A partir de l'instant $t = 0$, on lui applique un ensemble de forces de somme $\vec{F}$, constante, horizontale et de norme $F = 10$ N.

1/ AB3 Calculer l'accélération du centre d'inertie de la tondeuse.

2/ A Exprimer le vecteur quantité de mouvement à l'instant t en fonction de $\vec{F}$ et de t.

3/ AB3 Exprimer le travail de la force $\vec{F}$ durant l'intervalle de temps $[0, t]$ en fonction de F, t et m.

Application numérique : calculer le travail lorsque $t = 10$ s.

2.6 Un camion de masse $m = 15$ t, initialement immobile, est mis en mouvement de translation rectiligne par un ensemble de forces de somme $\vec{F}$, constante, parallèle à la trajectoire.
Il acquiert une vitesse $v = 72$ km . h^{-1} en 2 min.

1/ A L'accélération du camion est-elle nulle à l'instant du démarrage ? Varie-t-elle au cours du mouvement ?

2/ AB3 Exprimer le vecteur vitesse du camion à l'instant t en fonction de $\vec{F}$, m et t. En déduire $\|\vec{F}\|$.

3/ B3 Calculer l'énergie cinétique du camion à l'instant $t = 2$ min. En déduire la puissance mécanique moyenne de la force $\vec{F}$.

4/ AB3 Exprimer la puissance instantanée de la force $\vec{F}$ en fonction de F, t et m. Calculer cette puissance aux instants $t_1 = 1$ min et $t_2 = 2$ min.

Scanné avec CamScanner

2.7 Un ascenseur de masse $m_1 = 250$ kg transporte trois personnes de masse totale $m_2 = 250$ kg. Lorsque l'ascenseur est en mouvement, le câble exerce sur lui une force $\vec{F}$ verticale constante, dirigée vers le haut, d'intensité $F = 4\,800$ N.

a/ A Déterminer l'expression littérale de l'accélération de l'ascenseur. Préciser le sens du vecteur accélération.

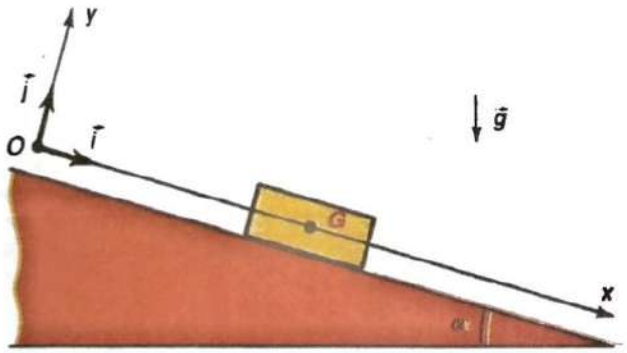
b/ B3 Calculer l'accélération de l'ascenseur (on prendra $g = 10\ m.s^{-2}$).

2a/ A L'ascenseur démarre sans vitesse initiale. Donner les expressions littérale de sa vitesse et de la variation d'altitude à l'instant t.

b/ B3 Calculer la vitesse et l'altitude à l'instant $t = 6$ s.

c/ B3 Calculer la puissance développée par la force $\vec{F}$ à l'instant $t = 6$ s.

2.8 Une pièce métallique de masse $m = 100$ kg glisse sans frottement sur un plan incliné d'un angle α avec l'horizontale. Le mouvement de translation se fait suivant une ligne de plus grande pente du plan, parallèle à l'axe $(O, \vec{i})$ d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



1/ A Faire un schéma et représenter les forces extérieures appliquées à ce solide.

2/ A Compte tenu de la direction et du sens du mouvement, préciser l'orientation du vecteur accélération. Appliquer le théorème du centre d'inertie et en projeter l'expression vectorielle dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Exprimer le vecteur accélération et en déduire la nature du mouvement.

3/ A La vitesse initiale est $v_0\vec{i}$. Montrer que le vecteur position du centre d'inertie G peut se mettre sous la forme :

$$\overrightarrow{OG} = \beta t^2\vec{i} + t\vec{v}_0.$$

Préciser β et la position de G à l'origine des dates.

4/ B3 Calculer la vitesse acquise après un déplacement de longueur $\ell = 1{,}0$ m avec $v_0 = 2{,}0\ m.s^{-1}$, $\alpha = 10°$ et $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$.

2.9 Un objet de masse $m = 20$ kg glisse le long d'une ligne de plus grande pente d'un plan incliné d'un angle $\alpha = 30°$ avec l'horizontale. La somme $\vec{R}$, supposée constante, des forces de contact réparties en surface exercées par le plan sur l'objet fait un angle β avec la normale au plan.

1/ A Exprimer le vecteur accélération du mobile en fonction de α, β, m, R et g.

2/ AB3 Lâché sans vitesse initiale, le mobile parcourt une distance $\ell = 5$ m en une durée $t = 1{,}7$ s. Calculer l'accélération. ($g = 10\ m.s^{-2}$.)

3/ AB3 Calculer l'angle β et la norme de $\vec{R}$.

2.10 Un solide est tiré le long de la ligne de plus grande pente d'un plan incliné par un câble parallèle à ce plan qui fait un angle α avec l'horizontale. La masse m du solide est égale à 980 kg.

1/ AB3 Le mouvement comporte trois phases.

- 1re phase : le mouvement est d'abord uniformément accéléré durant le temps Δt;
- 2e phase : le mouvement est uniforme durant 6 s, sur une distance de 36 m;
- 3e phase : le mouvement est uniformément retardé pendant une même durée Δt jusqu'à l'arrêt.

Sachant que la distance parcourue est de 60 m, calculer la durée totale du trajet effectué par le solide.

2/ AB3 Le déplacement se fait sans frottement. Déterminer la force de traction du câble et la réaction du sol sur le solide au cours des trois phases du mouvement.

Données : $\alpha = 20°$; $g = 9.8\ m.s^{-2}$.

3/ B3 Déterminer la puissance exercée par la force de traction pendant la deuxième phase.

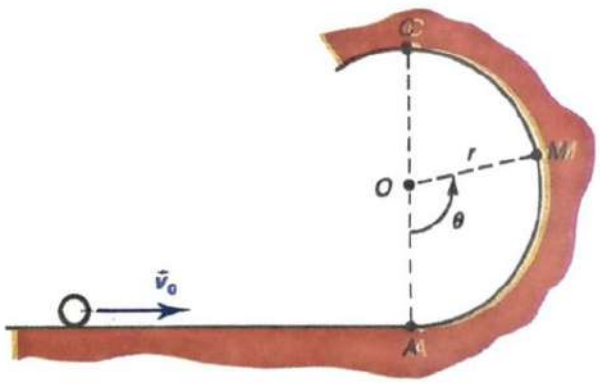
2.11 A Une bille d'acier de masse m est suspendue en un point fixe par un fil inextensible de longueur ℓ. Le pendule ainsi constitué est écarté d'un angle α_0 de sa position d'équilibre, puis abandonné sans vitesse initiale; il effectue alors des oscillations de part et d'autre de sa position d'équilibre. On néglige les frottements.

1/ A l'instant où la bille passe par sa position d'équilibre, déterminer l'expression littérale de sa vitesse en appliquant le théorème de l'énergie cinétique. En déduire l'accélération normale de la bille.

2/ En appliquant le théorème du centre d'inertie, montrer que l'accélération tangentielle est alors nulle.

3/ Exprimer la vitesse de la bille et la tension du fil lorsque celui-ci fait un angle α avec la verticale.

2.12 Un solide ponctuel de masse m est lancé avec une vitesse $\vec{v}_0$ sur une glissière circulaire de rayon r et de centre O (figure). Les frottements sont négligeables. La position du mobile sur la portion de trajectoire est repérée par l'angle $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$.



1/ A En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, exprimer la vitesse v du solide en fonction de r et θ.

2/ A Appliquer le théorème du centre d'inertie et en projeter l'expression dans la base de Frenet. Déterminer la norme R de la réaction $\vec{R}$ exercée par la glissière sur le solide.

Scanné avec CamScanner

EXERCICES

3/ C Montrer que R s'annule pour une valeur θ_m qui est fonction de v_0. Quelle est la valeur minimale de v_0 pour que le mobile atteigne le sommet C de la trajectoire ? Quelle est alors la vitesse en C ?

Banc d'essais

Mouvement d'un ascenseur

2.13 Un ascenseur de masse totale 1 800 kg s'élève d'une hauteur h entre le rez-de-chaussée et un étage élevé d'une tour. ($g = 9{,}8$ m . s^{-2}.)

1/ AB3 La montée comporte trois phases. Durant 2,5 s, le mouvement est uniformément accéléré. Les 6 s suivantes, le mouvement est uniforme sur une distance de 42 m. Enfin, le mouvement est uniformément retardé durant 4 s jusqu'à l'arrêt. Déterminer la hauteur h.

2/ AB3 Calculer la force exercée par le câble sur l'ascenseur au cours de chacune des phases du mouvement.

3/ B3 Exprimer, pour chaque phase, la puissance développée par cette force en fonction du temps t. Quel est le travail de la force sur la distance h ?

↳ **chap. 1 et ex. 2.7.**

Solide en translation sur un plan incliné

2.14 Un mobile de masse $m = 20$ kg, lancé avec une vitesse $v_0 = 4$ m . s^{-1}, monte, en un mouvement de translation rectiligne, le long d'une ligne de plus grande pente d'un plan incliné d'un angle $\alpha = 20°$ avec l'horizontale. ($g = 9{,}8$ m . s^{-2}.)
Les forces de frottement sont équivalentes à une force $\vec{f}$ opposée à la vitesse et de norme supposée constante $f = 40$ N.

1/ AB3 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, déterminer la distance parcourue par le mobile avant qu'il ne s'arrête.

2/ C Arrivé au sommet de sa trajectoire, le mobile redescend. Indiquer sur un schéma les forces extérieures appliquées à ce mobile au cours de la descente. Qu'y a-t-il de changé par rapport à la montée ?

3/ AB3 Calculer la vitesse avec laquelle le mobile repasse par sa position initiale. Quelle serait cette vitesse si les frottements étaient négligeables ?

↳ **ex. 2.8, 2.9.**

2.15 Un traîneau peut glisser en suivant la plus grande pente d'un plan incliné d'un angle α. La réaction $\vec{R}$, somme des forces de contact du sol sur le traîneau, comporte une composante $\vec{R}_n$ normale au plan et une composante $\vec{R}_t$ parallèle au plan incliné et de sens opposé au vecteur vitesse du traîneau. On montre expérimentalement que lorsqu'il y a mouvement : $\frac{R_t}{R_n} = f$, où f est le coefficient de frottement qui dépend de l'état des surfaces en contact. S'il n'y a pas mouvement : $\frac{R_t}{R_n} < f$.

1/ A Exprimer l'accélération du traîneau en fonction de α, f et g (accélération de la pesanteur).

2/ C Calculer la valeur α_m minimale pour que le glissement ait lieu.

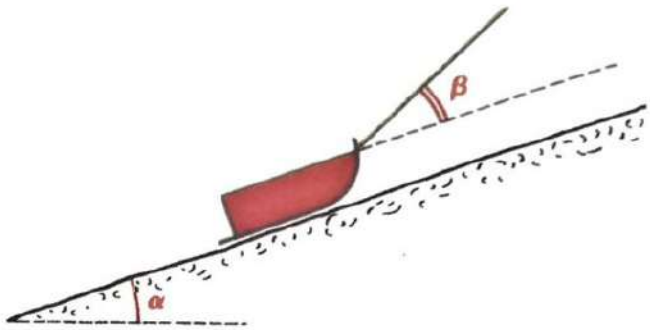
Données : $g = 9{,}8$ m . s^{-2} ; $f = 0{,}15$.

3/ AB3 Calculer l'accélération pour $\alpha = 2\alpha_m$.

4/ B3 Calculer l'angle $\beta = (\vec{R}_n, \vec{R})$ et la norme de $\vec{R}$.

↳ **ex. 2.8, 2.9.**

2.16 Un traîneau de masse $m = 200$ kg est tiré suivant une ligne de plus grande pente d'un plan incliné par l'intermédiaire d'un câble faisant un angle β avec celle-ci.



1/ AB3 La tension du câble vaut $T = 1\,000$ N. Le mouvement étant uniforme de vitesse $v = 10$ km . h^{-1}, déterminer la réaction $\vec{R}$ somme des forces de contact exercées par le sol sur le traîneau (norme et inclinaison par rapport à la normale au plan incliné).

Données : $\alpha = 20°$; $\beta = 30°$; $g = 10$ m . s^{-2}.

2/ On augmente la tension, et le mouvement du traîneau devient uniformément accéléré.

a/ C Les forces de frottement exercées par le sol restant identiques, la réaction $\vec{R}$ est-elle modifiée ?
b/ AB3 La vitesse du traîneau passe de 10 km . h^{-1} à 20 km . h^{-1} sur une distance de 10 m. Calculer la puissance exercée par la tension du câble lorsque la vitesse vaut 15 km . h^{-1}.

Analyse d'une expérience

2.17 Un mobile de masse m glisse le long de la ligne de plus grande pente d'une table inclinée d'un angle α par rapport au plan horizontal. Ce mobile a été lâché sans vitesse initiale, et l'enregistrement du mouvement du centre d'inertie a été déclenché à une date quelconque, que l'on prend pour origine des temps.
Le tableau ci-dessous donne les abscisses x du centre d'inertie du mobile sur sa trajectoire en fonction du temps :

t (s)	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
x (cm)	0	7,5	18	31,5	48	67,5	90

1*a*/ B1B3 Les intervalles de temps séparant deux mesures consécutives sont suffisamment courts pour qu'on puisse confondre les valeurs des vitesses instantanées et des vitesses moyennes. Calculer les valeurs de la vitesse aux dates $t = 0{,}05$ s, $t = 0{,}15$ s, ..., $t = 0{,}55$ s. Tracer la courbe représentant la vitesse du mobile en fonction du temps.

Scanné avec CamScanner

b/ AB3 En déduire l'accélération du mobile, sa vitesse à la date $t = 0$ s, ainsi que sa date de départ.

2/ AB3 On suppose tout d'abord les frottements négligeables. Établir l'expression de l'accélération du mobile et en déduire la valeur de l'angle α.

3/ CB3 En réalité, la mesure directe de α donne 23°. On suppose que la composante tangentielle de la réaction de la table est la seule force de frottement qui s'exerce sur le mobile, et qu'elle est constante. Donner alors les caractéristiques (norme et direction) de la réaction $\vec{R}$ exercée par la table sur le mobile. On représentera l'ensemble des forces sur un schéma soigné.

Données : $g = 10$ m . s $^{-2}$; $m = 200$ g.

↳ **chap. 1, ex. 2.8, 2.9.**

2.18 Un mobile de masse m est lâché sans vitesse initiale sur une table inclinée d'un angle α par rapport au plan horizontal. On suppose que le mobile est soumis au cours du mouvement à une force de frottement constante $\vec{f}$ s'opposant à ce dernier et parallèle à la trajectoire.

1a/ A Établir l'expression littérale de l'accélération $\vec{a}_1$ de son centre d'inertie. En déduire la nature de son mouvement.

b/ AB3 En déduire l'expression littérale de l'accélération $\vec{a}_2$ si le frottement est négligeable. Calculer sa valeur numérique dans ce cas.

2/ On a relevé les distances parcourues par le centre d'inertie du mobile au cours du temps, à partir de l'instant initial $t = 0$:

t (s)	0,060	0,120	0,180	0,240
d (cm)	0,3	1,1	2,5	4,45

t (s)	0,300	0,360	0,420	0,480
d (cm)	6,95	10,0	13,6	17,8

a/ B1B3 Représenter $d = f(t^2)$.

Échelles : 1 cm pour 1 cm et pour $1{,}00 \cdot 10^{-2}$ s^2.

b/ C Calculer la valeur numérique de l'accélération du mouvement.

L'expérience met-elle en évidence l'existence d'une force de frottement? Si oui, calculer son intensité f.

Données : $\alpha = 12°$; $m = 0{,}650$ kg; $g = 9{,}80$ m . s^{-2}.

↳ **chap. 1, ex. 2.8, 2.9.**

Mouvement circulaire : tension d'un fil

2.19 Une bille de masse $m = 100$ g est suspendue en un point O par un fil inextensible de longueur $\ell = 1$ m et de masse négligeable. Le pendule ainsi constitué peut effectuer des oscillations de part et d'autre de sa position d'équilibre. On l'écarte de la verticale d'un angle $\theta_0 = 45°$ et on l'abandonne sans vitesse initiale. On suppose les frottements négligeables. ($g = 10$ m . s^{-2}.)

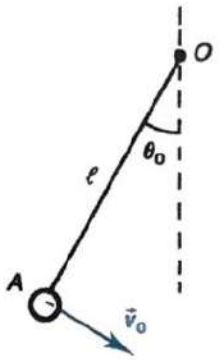
1/ C A l'instant t, le fil fait un angle θ avec la verticale. Exprimer les coordonnées du vecteur accélération dans le repère de Frenet en fonction de θ, θ_0 et g.

2/ B2 Calculer $\|\vec{a}\|$ et représenter sur un schéma le vecteur $\vec{a}$ dans les trois cas : $\theta = \theta_0$; $\theta = 30°$; $\theta = 0°$.

3/ AB3 Exprimer la norme de la tension du fil en fonction de θ, θ_0 et g; la calculer dans les trois cas précédents.

↳ **ex. 2.11.**

2.20 C Une bille de masse m est suspendue en un point O par un fil inextensible de longueur ℓ et de masse négligeable. Le pendule ainsi constitué est écarté de la verticale d'un angle θ_0. On lance alors la bille fil tendu, avec un vecteur vitesse $\vec{v}_0$ tangent au cercle de centre O et de rayon ℓ, dirigé vers le bas. Au cours du mouvement, la position du pendule est repérée par l'angle θ d'inclinaison du fil avec la verticale (figure). On suppose les frottements négligeables.

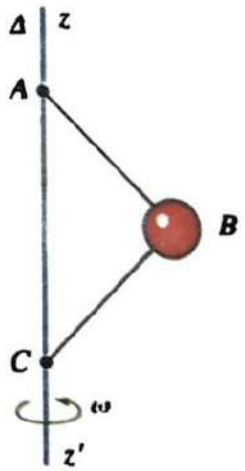


1/ Calculer la valeur minimale de la norme de $\vec{v}_0$ pour que la bille effectue un tour complet, le fil devant rester tendu au cours du mouvement circulaire.

2/ Avec cette valeur minimale de v_0, exprimer la vitesse de la bille lorsque celle-ci passe à la verticale du point O.

↳ **ex. 2.11, 2.12.**

2.21 Une bille assimilable à un point matériel B, de masse m, est reliée par deux fils de masse négligeable à deux points A et C d'un axe Δ (figure).



On note : $AB = BC = \ell$ et $AC = a$.

1/ C La bille B tourne à vitesse angulaire ω constante autour de l'axe Δ. Les fils restent constamment tendus. Calculer les tensions des fils en fonction de ω.

Scanné avec CamScanner

EXERCICES

2/ A Montrer que le fil BC n'est tendu qu'à partir d'une certaine valeur ω_0 de la vitesse angulaire.

Application numérique : $m = 0{,}6$ kg ; $\ell = 0{,}7$ m ; $a = 1$ m ; $g = 9{,}8$ m . s^{-2} ; $\omega = 8{,}0$ rad . s^{-1}, puis $4{,}0$ rad . s^{-1}.

↳ **cours 2.7.5, ex. 2.1.**

2.22 AB3 Une bille de masse $m = 50$ g est suspendue en un point O par un fil inextensible de longueur $\ell = 50$ cm et de masse négligeable. Le système est mis en mouvement de rotation uniforme autour de l'axe vertical Δ contenant le point O avec une vitesse angulaire $\omega = 5$ rad . s^{-1}. ($g = 9{,}8$ m . s^{-2}.)

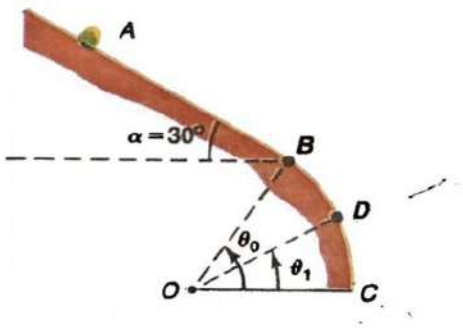
1/ Calculer l'angle α dont le fil s'écarte de l'axe Δ.

2/ Calculer la tension du fil.

↳ **cours 2.7.5.**

Réaction du support

2.23 CB3 Une glissière est constituée d'une partie rectiligne $AB = \ell = 1$ m et d'un arc de cercle BC de centre O, de rayon $r = 2$ m (figure). Un solide ponctuel est lâché du point A sans vitesse initiale. Les frottements sont négligeables.

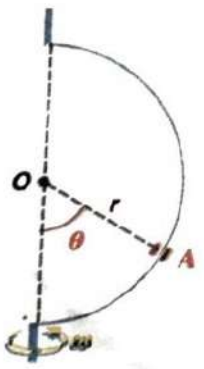


Montrer que le solide quitte la piste en un point D.
Calculer l'angle $\theta_1 = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$.

Application numérique : $\theta_0 = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}) = 60°$.

↳ **ex. 2.8, 2.12.**

2.24 Un petit manchon A de masse m peut glisser sans frottement le long d'un guide lisse en forme de demi-cercle de centre O et de rayon r (figure).



L'ensemble est mis en rotation à la vitesse angulaire constante ω autour d'un axe vertical Δ. Le manchon A décrit alors une trajectoire circulaire dans un plan horizontal. Sa position sur le guide est repérée par l'angle θ.

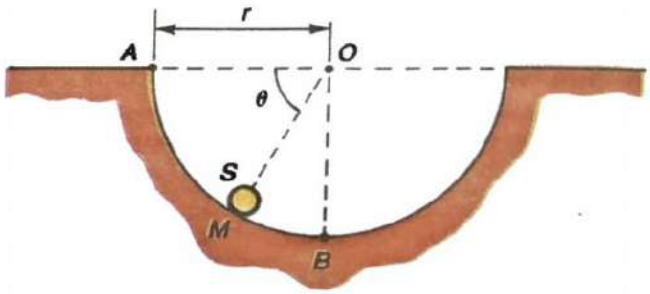
1/ C Exprimer la norme R de la réaction $\vec{R}$ du guide sur le manchon en fonction de la vitesse angulaire ω.

2/ A Montrer que l'angle θ est fonction de ω. Déterminer la valeur minimale de ω.

3/ C Le plan de la trajectoire peut-il contenir le point O ?

Mouvement circulaire d'un point matériel

2.25 Un solide S, assimilable à un point matériel de masse $m = 10$ g, peut glisser à l'intérieur d'une demi-sphère de centre O et de rayon $r = 1{,}25$ m. On le lâche du point A sans vitesse initiale. Sa position à l'intérieur de la demi-sphère est repérée par l'angle θ.



1/ AB3 On admet que le solide S glisse sans frottement.

a/ Exprimer sa vitesse au point M en fonction de g, r et θ. Calculer sa valeur numérique au point B. ($g = 10$ m . s^{-2}.)

b/ Quelles sont, en M, les caractéristiques de la force exercée par la demi-sphère sur le solide ? Exprimer son intensité en fonction de g, r et θ. Calculer sa valeur numérique au point B.

2/ AB3 En réalité, le solide S arrive en B avec une vitesse de $4{,}5$ m . s^{-1}. Il est donc soumis à une force de frottement $\vec{f}$ dont on admettra qu'elle est de même direction que la vitesse $\vec{v}$ du mobile, mais de sens opposé et d'intensité constante. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, calculer l'intensité de cette force $\vec{f}$.

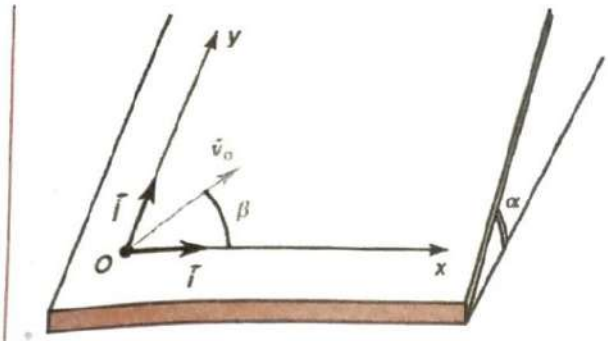
Exploitation d'un document

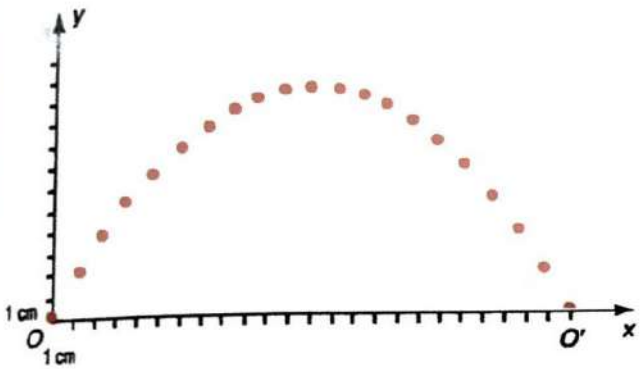
2.26 Un palet est mis en mouvement sans frottement sur une table à coussin d'air inclinée d'un angle α sur le plan horizontal. A l'instant $t = 0$, le palet est lancé vers le haut, dans le plan de la table ; son centre d'inertie G est alors en O, et le vecteur vitesse de G est $\vec{v}_0$ tel que :

$(\vec{i}, \vec{v}) = \beta$ (figure a, page suivante).

A l'aide d'un dispositif approprié, on a enregistré les positions du centre d'inertie G à des intervalles de temps réguliers de durée $\tau = 20$ ms (figure b). La première position sur le document correspond au point O, la dernière au point O'.

Scanné avec CamScanner





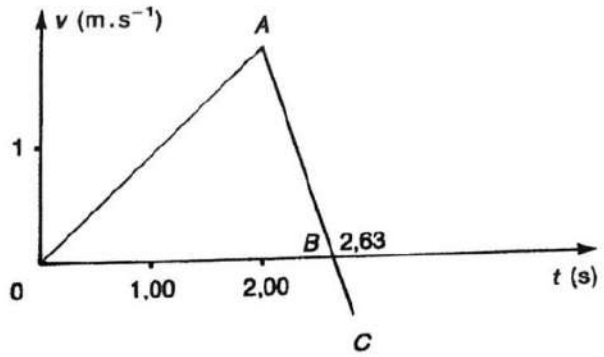
1/ C Établir les équations horaires $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ du mouvement de G dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, Ox étant horizontal et Oy étant parallèle aux lignes de plus grande pente du plan incliné. En déduire une équation de la trajectoire de G dans ce repère.

2/ B1B3 En utilisant le document (figure b), déterminer la durée du mouvement de O à O' et en déduire la valeur numérique de $\|\vec{v}_0\|$.

3/ CB3 Déterminer l'angle d'inclinaison α de la table.

Mouvement d'un solide sur un plan incliné

2.27 Un mobile M de masse $m = 0{,}500$ kg peut glisser sans frottement le long d'une ligne de plus grande pente Ox d'un plan incliné faisant un angle $\alpha = 16{,}0°$ par rapport au plan horizontal. Il est attaché à un fil inextensible tendu parallèle à Ox. A l'instant $t_0 = 0$, le mobile M est au repos au point O, origine de l'axe ; on applique au fil une traction qui fait gravir à M le plan incliné. On étudie le mouvement de M. On en déduit la mesure v de la vitesse de M à chaque instant ; on trace le graphique de la fonction $t \mapsto v(t)$ qui est le segment de droite $[O, A]$ (figure). Au temps $t_1 = 2{,}00$ s, le fil de traction casse.
En représentant maintenant la vitesse v du mobile en fonction du temps, on obtient une demi-droite AC qui coupe l'axe des temps au point B d'abscisse $t_2 = 2{,}63$ s.



1/ C Déduire du graphique, sans calcul, la nature du mouvement de M et le sens du déplacement entre les dates t_0 et t_1, t_1 et t_2, et $t > t_2$. On précisera sur un croquis les sens des vecteurs vitesse et accélération.

2/ AB3 Entre t_0 et t_1, calculer la valeur de l'accélération de M, la distance parcourue et la valeur de la force de traction exercée par le fil. ($g = 9{,}8$ m . s^{-2}.)

Réfléchissons

2.28 C Discuter le raisonnement suivant :
Une caravane est attelée à une automobile. A chaque instant, l'automobile exerce une force $\vec{F}$ tandis que, d'après le principe de l'action et de la réaction, la caravane exerce la force $\vec{F}' = -\vec{F}$. Le système ne devrait donc jamais se mettre en mouvement.

Scanné avec CamScanner

3 INTERACTION ET CHAMPS GRAVITATIONNELS



Photographie de Saturne prise par la sonde **Voyager 1** *le 22 août 1980. Les couleurs ont été traitées par ordinateur pour mettre en évidence les nuances des taches claires dans la zone tempérée nord de Saturne. Les anneaux ont une structure particulaire due à l'effet de marée dans le champ gravitationnel de la planète (voir document en fin de chapitre).*

3.1 Interaction gravitationnelle

La chute libre des corps, le mouvement de la Lune, celui des satellites autour de la Terre révèlent l'existence d'une force attractive exercée à distance par la Terre. De même, les planètes qui gravitent autour du Soleil sont soumises à l'attraction de ce dernier.

3.1.1 loi de Newton

A partir de l'observation du mouvement des planètes, Newton énonça en 1666 la **loi d'attraction universelle** :

• Deux corps ponctuels A et B, de masse m_A et m_B, exercent l'un sur l'autre des forces d'attraction directement opposées, dirigées suivant la droite (AB), d'intensités proportionnelles à leurs masses et inversement proportionnelles au carré de leur distance :

$$\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A} = -G\frac{m_A m_B}{r^2}\vec{u}_{AB},$$

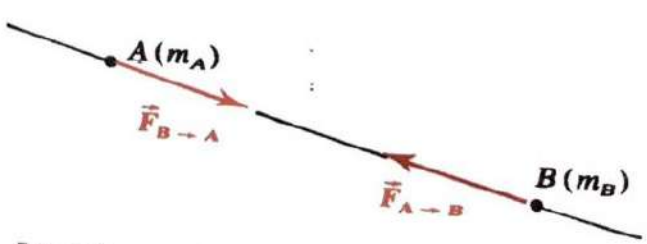
avec $r = \|\overrightarrow{AB}\|$ et $\vec{u}_{AB} = \frac{1}{r}\overrightarrow{AB}$.

La constante G est appelée **constante de la gravitation universelle**. Dans le système international :

$$G = 6{,}67.10^{-11}\ m^3.kg^{-1}.s^{-2}.$$

Ces forces d'attraction obéissent au principe d'interaction. Aussi parle-t-on d'*interaction gravitationnelle*.

De cette loi d'interaction entre solides ponctuels découle la loi d'interaction entre les astres.



1. ***Interaction gravitationnelle entre deux solides ponctuels A et B. Les deux forces d'attraction sont directement opposées :***

$$\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A};$$

elles ont même norme et même droite d'action (AB).

Scanné avec CamScanner

3.1.2 interaction entre deux solides à répartition sphérique de masse

Un corps sphérique dont la masse volumique en un point quelconque n'est fonction que de la distance séparant ce point du centre O de la sphère possède une *répartition sphérique de masse*. Il en est évidemment ainsi d'une sphère homogène. On peut admettre en première approximation que c'est aussi le cas des planètes, de leurs satellites, du Soleil et des étoiles.

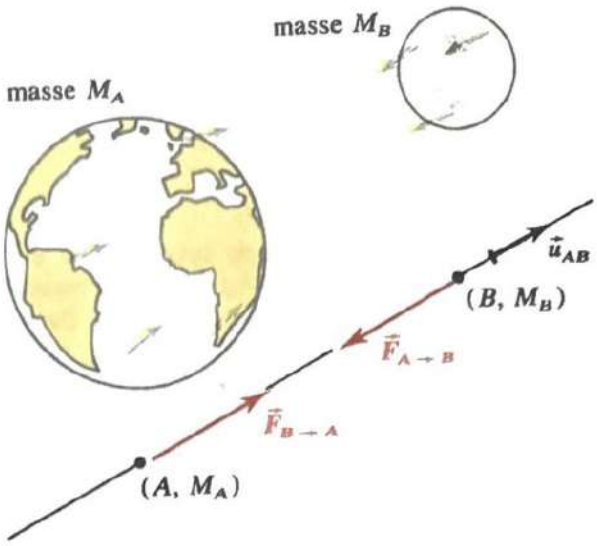
Considérons deux astres de masse M_A et M_B, de centres respectifs A et B (*fig.* 2). L'astre de centre A exerce sur l'astre de centre B un ensemble de forces d'attraction gravitationnelle réparties en volume.

Le calcul montre que la somme de ces forces est égale à la force $\vec{F}_{A\to B}$ qu'exercerait une masse ponctuelle M_A localisée en A sur une masse ponctuelle M_B localisée en B. Il en est de même, réciproquement, pour les forces exercées par l'astre de centre B sur l'astre de centre A :

$$\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A} = -G\frac{M_A M_B}{r^2}\vec{u}_{AB},$$

avec $r = \|\overrightarrow{AB}\|$ et $\vec{u}_{AB} = \frac{1}{r}\overrightarrow{AB}$.

Ainsi, dans l'étude des interactions gravitationnelles, un astre de masse M peut être assimilé à un point matériel situé en son centre où serait concentrée sa masse M.



2. ***Dans le cas de deux corps sphériques à répartition homogène, de centres respectifs A et B, les forces d'attraction gravitationnelle réparties en volume sont équivalentes à deux forces appliquées en A et B :***

$$\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A} = -G\frac{M_A M_B}{r^2}\vec{u}_{AB},$$

avec $r = \|\overrightarrow{AB}\|$ *et* $\vec{u}_{AB} = \frac{1}{r}\overrightarrow{AB}$.

APPLICATION 1

Calculer l'intensité de la force d'attraction gravitationnelle entre la Terre et le Soleil.

On donne : masse du Soleil, $M_S = 1{,}98.10^{30}$ kg;
masse de la Terre, $M_T = 5{,}98.10^{24}$ kg;
distance Terre-Soleil, $r = 149{,}5.10^{6}$ km.

Appliquons la loi de Newton :

$$F = F_{S\to T} = F_{T\to S} = G\frac{M_S M_T}{r^2}$$

$$= 6{,}67.10^{-11} \times \frac{1{,}98.10^{30} \times 5{,}98.10^{24}}{(1{,}495.10^{11})^2} \approx 3{,}5.10^{22}\ \text{N}.$$

L'action Soleil ⟶ Terre est perceptible : elle est à l'origine du mouvement de la Terre.
En revanche, l'action Terre ⟶ Soleil est négligeable, la masse du Soleil valant 3.10^5 fois celle de la Terre.

3.2 champ gravitationnel

3.2.1 définition et conséquence fondamentale

Considérons un astre à répartition sphérique de masse, de centre O, de masse M et de rayon R. Soit un point matériel S (par exemple un satellite dont les dimensions sont négligeables par rapport à celles de l'astre), de masse m, situé en un point P de l'espace environnant l'astre ($r = OP$).

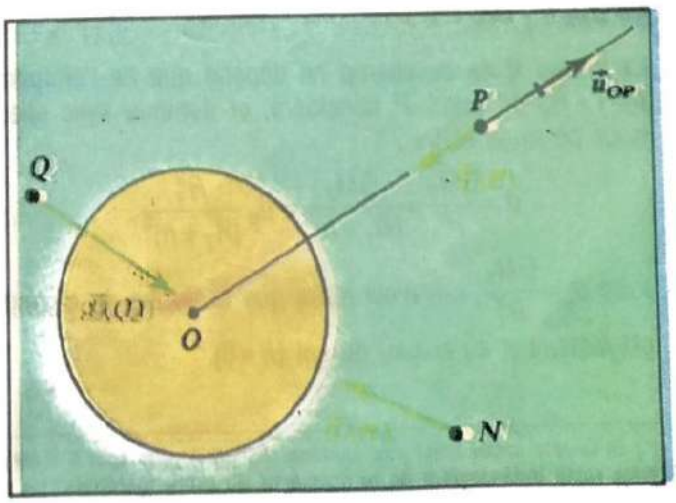
Le point matériel S est soumis à la force gravitationnelle :

$$\vec{F}_{O\to S} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_{OP},$$

soit : $$\vec{F}_{O\to S} = m\vec{\mathcal{G}}(P)$$

en posant : $$\vec{\mathcal{G}}(P) = -\frac{GM}{r^2}\vec{u}_{OP}.$$

Le vecteur $\vec{\mathcal{G}}(P)$ est appelé **vecteur champ de gravitation** en P (*fig.* 3).



3. ***Tout point P de l'espace environnant un astre à répartition sphérique, de centre O et de masse M, est caractérisé par un vecteur champ gravitationnel :***

$$\vec{\mathcal{G}}(P) = -G\frac{M}{OP^2}\vec{u}_{OP}.$$

Scanné avec CamScanner

Plus généralement, à tout point M de l'espace extérieur à un astre quelconque, nous pouvons associer un vecteur champ de gravitation $\vec{\mathcal{G}}(M)$. Cet espace est le siège d'un champ gravitationnel qui caractérise une propriété de l'espace, à savoir qu'un point matériel de masse m, situé en M, est soumis à une force :

$$\vec{F} = m\vec{\mathcal{G}}(M).$$

Une conséquence importante de cette relation est la suivante. Considérons un point matériel M, de masse m, soumis au *seul champ gravitationnel* $\vec{\mathcal{G}}(M)$. Dans un référentiel galiléen, ce point matériel possède l'accélération $\vec{a}_M$ telle que :

$$\vec{F} = m\vec{a}_M = m\vec{\mathcal{G}}(M),$$

soit :

$$\vec{a}_M = \vec{\mathcal{G}}(M).$$

Le vecteur accélération $\vec{a}_M$ s'identifie ainsi au vecteur champ gravitationnel $\vec{\mathcal{G}}(M)$; il est donc indépendant de la masse m. Cette dernière propriété, tout à fait remarquable, est spécifique des mouvements gravitationnels. Elle cesse d'être vérifiée dès que des forces d'un autre type rentrent en jeu (forces électriques, magnétiques, ...).
Nous pouvons donc énoncer :

- Le mouvement d'un corps soumis à la seule action du champ gravitationnel est indépendant de la masse de ce corps.

Cette propriété est évidemment valable dans un référentiel quelconque, galiléen ou non(*).

Dans le système international, l'unité de champ gravitationnel est le **mètre par seconde** (symbole : $\mathbf{m.s^{-2}}$), qui est l'unité de mesure d'accélération.

3.2.2 champ gravitationnel terrestre

La Terre crée dans tout l'espace qui l'environne un champ gravitationnel. Si, en première et bonne approximation, on assimile la Terre à une répartition homogène sphérique de masse, de centre O, de masse totale M_T et de rayon R_T, le champ gravitationnel créé en un point P tel que $OP = r > R_T$ a pour expression :

$$\vec{\mathcal{G}}(P) = -\frac{GM_T}{r^2}\vec{u}_{OP},$$

où $\vec{u}_{OP} = \frac{1}{r}\overrightarrow{OP}$.

La norme $\mathcal{G}$ de ce champ ne dépend que de l'altitude $h = r - R_T$ du point P considéré, et diminue avec elle. Nous pouvons écrire :

$$\mathcal{G} = \frac{GM_T}{r^2} = \frac{GM_T}{(R_T + h)^2} = \mathcal{G}_0\frac{R_T^2}{(R_T + h)^2},$$

avec $\mathcal{G}_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}$, qui n'est autre que la norme du champ gravitationnel au niveau du sol ($h = 0$).

(*) Si le référentiel n'est pas galiléen, $\vec{a}_M$ n'est plus égal à $\vec{\mathcal{G}}(M)$ mais reste indépendant de la masse m du point matériel.



Lancement du satellite **TDF1** *par la fusée* **Ariane.**

Scanné avec CamScanner

Pour de faibles altitudes ($h \ll R_T$) :

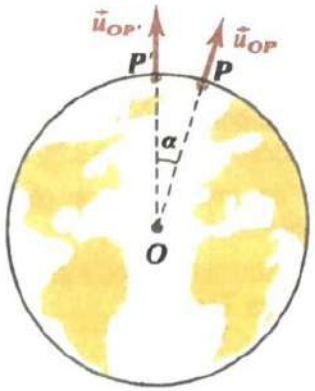
$$\frac{\mathcal{G}(h)}{\mathcal{G}_0} = \frac{R_T^2}{(R_T+h)^2} = \frac{1}{\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^2} \approx 1 - \frac{2h}{R_T},$$

soit : $$\mathcal{G}(h) \approx \mathcal{G}_0\left(1 - \frac{2h}{R_T}\right).$$

Ainsi, pour $h = 32$ km, $\frac{2h}{R_T} \approx 10^{-2}$: la diminution du champ par rapport au sol n'est que de 1 %.

En deux points de la surface de la Terre distants de 1 mille (1 852 m) l'angle que font entre eux les vecteurs champ de gravitation ne vaut qu'une minute : ils sont quasiment parallèles (*fig.* 4).

Dans une région limitée de l'espace environnant la Terre (de l'ordre de quelques kilomètres), le champ gravitationnel est donc *approximativement uniforme :* le vecteur $\vec{\mathcal{G}}$ est pratiquement le même en tout point.



4. *L'angle α est de une minute pour une distance PP' de un mille (soit* **1852 m** *environ).*

3.2.3 champ gravitationnel et champ de pesanteur

Dans les classes antérieures, le poids $\vec{P}$ d'un corps de masse m a été défini comme la force exercée à distance par la Terre sur ce corps, et le champ de pesanteur $\vec{g}$, par la relation :

$$\vec{P} = m\vec{g}.$$

Le poids et la force d'attraction gravitationnelle ne sont-ils pas une seule et même force? En fait, les deux champs $\vec{\mathcal{G}}$ et $\vec{g}$ ne sont pas, en toute rigueur, confondus(*); néanmoins, ils diffèrent très peu :

— leurs directions font un angle de quelques minutes maximum;

— l'écart relatif de leur intensité est inférieur à 3.10^{-4} (*cf. application* 2).

La différence est minime. Aussi assimilerons-nous dorénavant le poids à la force d'attraction gravitationnelle et le champ de pesanteur au champ gravitationnel :

$$\vec{P} \approx \vec{F} \quad \text{et} \quad \vec{g} \approx \vec{\mathcal{G}}.$$

APPLICATION 2

Calculer l'intensité $\mathcal{G}_0$ du champ gravitationnel à proximité de la surface de la Terre.

On donne : masse de la Terre, $M_T = 5{,}98.10^{24}$ kg;
rayon de la Terre, $R_T = 6\,370$ km.

Il vient : $$\mathcal{G}_0 = G\frac{M_T}{R_T^2},$$

soit :

$$\mathcal{G}_0 = 6{,}67\cdot10^{-11} \times \frac{5{,}98\cdot10^{24}}{(6{,}370\cdot10^{6})^2} \approx 9{,}8 \text{ m.s}^{-2}.$$

Nous retrouvons approximativement la valeur du champ de pesanteur au niveau du sol.

3.3 mouvement des satellites

De nombreux satellites artificiels (plus de 3 000 en 1988), destinés aux télécommunications, à la météorologie, à l'observation ou à la détection, évoluent dans le champ gravitationnel terrestre. La plupart ont, dans le référentiel géocentrique, des trajectoires elliptiques dont le centre de la Terre occupe l'un des foyers. D'autres ont des trajectoires circulaires.

Nous évoquerons dans le paragraphe 3.3.4, à titre d'information, le mode de lancement des satellites et des sondes spatiales.

(*) Cela est dû à la rotation de la Terre par rapport au référentiel géocentrique.

Scanné avec CamScanner

3.3.1 accélération d'un satellite en orbite

Considérons un satellite en orbite, évoluant autour de la Terre.

- L'étude du mouvement des satellites s'effectue dans le référentiel géocentrique (*cf.* 2.3.2), supposé galiléen.
- Le satellite, de masse m, de centre d'inertie G, constitue le système étudié.
- Le satellite est soumis à la seule attraction gravitationnelle exercée par la Terre :

$$\vec{F} = m\vec{\mathcal{G}}$$

(le champ $\vec{\mathcal{G}}$ étant supposé uniforme dans l'espace occupé par le satellite).

- Le théorème du centre d'inertie permet de déterminer l'accélération $\vec{a}_G$ du centre d'inertie du satellite :

$$\vec{F} = m\vec{a}_G.$$

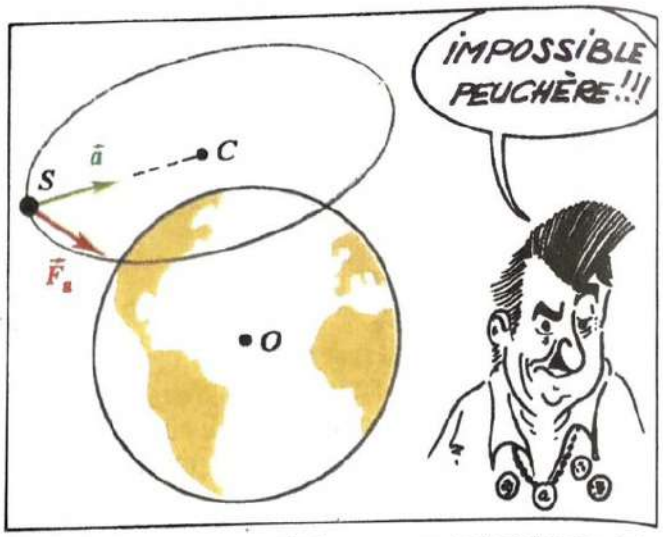
- D'où, O étant le centre de la Terre :

$$\vec{a}_G = \vec{\mathcal{G}} = -\frac{GM_T}{r^2}\vec{u}_{OG},$$

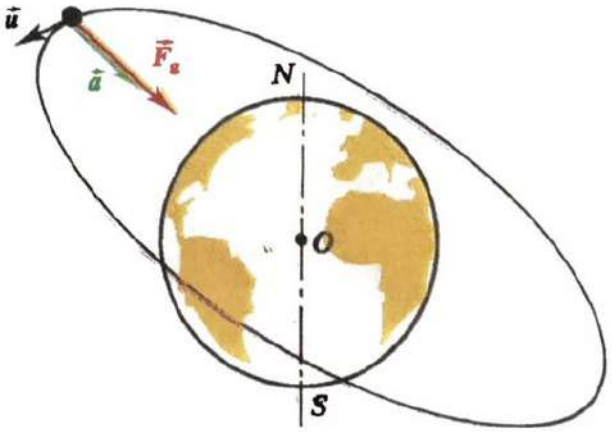
où $r = \|\overrightarrow{OG}\|$.

L'accélération du satellite est orientée vers le centre de la Terre. Elle est indépendante de la masse m du satellite. Conformément au résultat général (*cf.* 3.2.1), elle est égale en chaque point au champ gravitationnel.

- Le mouvement d'un satellite est indépendant de sa masse; il ne dépend que du champ gravitationnel en chaque point de l'espace où ce satellite évolue et des conditions initiales qui lui sont imposées.



5. ***Un satellite ne peut pas évoluer sur une trajectoire circulaire dont le plan ne contient pas le centre O de la Terre. En effet l'accélération $\vec{a}$ du satellite a même sens et même direction que la force gravitationnelle $\vec{F}_g$ dont la droite d'action passe par O.***



6. ***Satellite à trajectoire circulaire. On démontre que les centres respectifs de la trajectoire et de la Terre sont confondus. De plus, le plan de la trajectoire reste fixe par rapport au référentiel géocentrique.***

3.3.2 vitesse et période d'un satellite à trajectoire circulaire

Nous nous contenterons d'étudier le mouvement des satellites à trajectoire circulaire (*fig.* 5 et 6). On démontre, dans ce cas, que *le centre de la trajectoire circulaire est confondu avec le centre de la Terre.*

Dans la base de Frenet $(\vec{u}, \vec{n})$ de la figure 7 :

$$\vec{\mathcal{G}} = \mathcal{G}\vec{n}.$$

La trajectoire étant circulaire et de rayon r (*cf.* 1.3.3) :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u} + \frac{v^2}{r}\vec{n}.$$

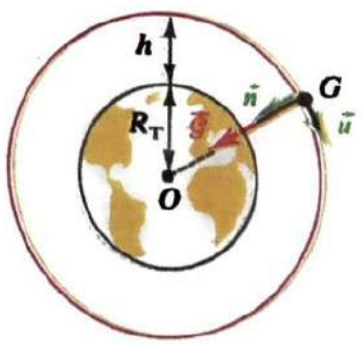
On en déduit, puisque $\vec{a} = \mathcal{G}\vec{n}$:

$$\frac{dv}{dt} = 0;$$

- Le mouvement d'un satellite à trajectoire circulaire est un mouvement uniforme.

Calculons la vitesse du satellite; il vient :

$$\frac{v^2}{r} = \mathcal{G}, \quad \text{soit} \quad v = \sqrt{\mathcal{G}r};$$



7. ***Satellite à trajectoire circulaire à l'altitude h. Dans la base de Frenet $(\vec{u}, \vec{n})$, on a :***

$$\vec{a} = \vec{\mathcal{G}} = \frac{v^2}{r}\vec{n},$$

avec $r = OG = R_T + h$, R_T étant le rayon de la Terre.

Scanné avec CamScanner

d'où, avec $r = R_T + h$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \dfrac{R_T^2}{(R_T+h)^2}$ et $\mathcal{G}_0 \approx g_0$:

$$v = R_T \sqrt{\frac{g_0}{R_T + h}}.$$

La vitesse du satellite n'est fonction que de son altitude h; elle diminue quand l'altitude augmente et elle est indépendante de la masse du satellite.
Déterminons la période de révolution T du satellite, c'est-à-dire la durée d'un tour; il vient :

$$T = \frac{2\pi(R_T + h)}{v},$$

soit :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{g_0 R_T^2}}$$

La période croît avec l'altitude. Cette durée est mesurée dans le référentiel géocentrique; elle est différente de celle mesurée par un observateur terrestre, qui se trouve entraîné dans le mouvement de rotation de la Terre.
Remarquons enfin que :

$$\frac{T^2}{(R_T+h)^3} = \frac{4\pi^2}{g_0 R_T^2} = \frac{4\pi^2}{GM_T}.$$

Le rapport $\dfrac{T^2}{r^3}$ est donc constant, c'est-à-dire *indépendant de la masse du satellite*. Ce résultat constitue la troisième loi de Kepler (voir 3.4.1 et *application* 4).

3.3.3 satellites géostationnaires

Le développement des télécommunications nécessite des satellites géostationnaires, c'est-à-dire immobiles par rapport à la Terre. Un tel satellite tourne donc dans le même sens et à la même vitesse que la Terre autour de l'axe des pôles (*fig.* 8). Sa trajectoire circulaire, dont le centre est celui de la Terre, est contenue dans le plan équatorial(*).
La période de rotation d'un satellite géostationnaire est donc égale à la période de rotation de la Terre autour de son axe, soit :

$$T = 86\,164 \text{ s} \quad \text{(jour sidéral)}.$$

Calculons son altitude; il vient :

$$(R_T + h)^3 = \frac{T^2 g_0 R_T^2}{4\pi^2}.$$

Le calcul donne $R_T + h \approx 42\,000$ km; d'où :

$$h \approx 36\,000 \text{ km} \quad (\text{avec } R_T \approx 6\,400 \text{ km}).$$

En résumé, tous les satellites géostationnaires évoluent sur une orbite circulaire, dans le plan équatorial, à l'altitude de 36 000 km.

(*) Ce fait montre tout l'intérêt de la base de lancement de Kourou, en Guyane, dont la latitude est seulement de 2° Nord; il y a peu de corrections à apporter à la trajectoire de lancement pour amener le satellite dans le plan équatorial.

APPLICATION 3

Calculer la vitesse et la période d'un satellite à trajectoire circulaire, d'altitude $h = 300$ km.

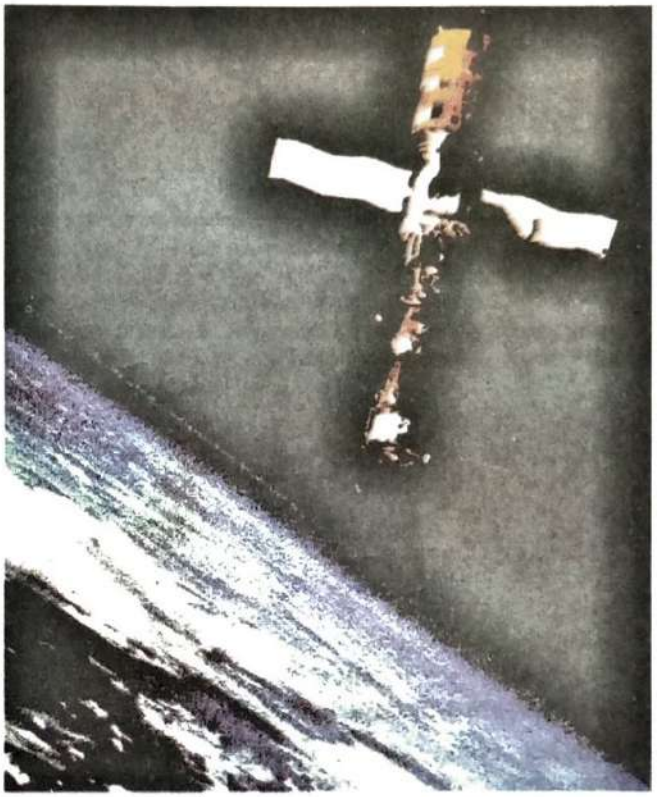
On donne : $R_T = 6370$ km; $g_0 = 9{,}8$ m.s^{-2}.

Nous avons successivement :

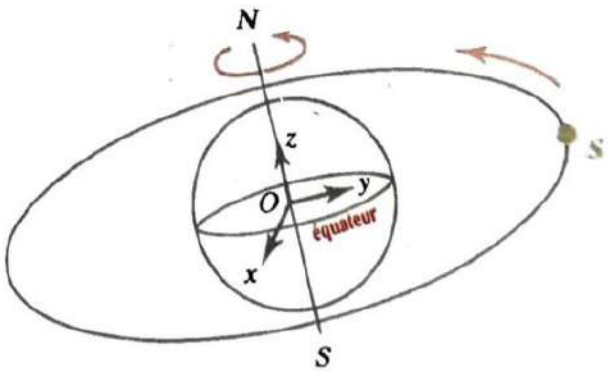
$$v = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{R_T + h}} = \sqrt{\frac{9{,}8 \times (6370)^2 . 10^6}{6670 . 10^3}} = 7720 \text{ m.s}^{-1},$$

ou encore : $v \approx 2{,}78 . 10^4$ km.h^{-1},

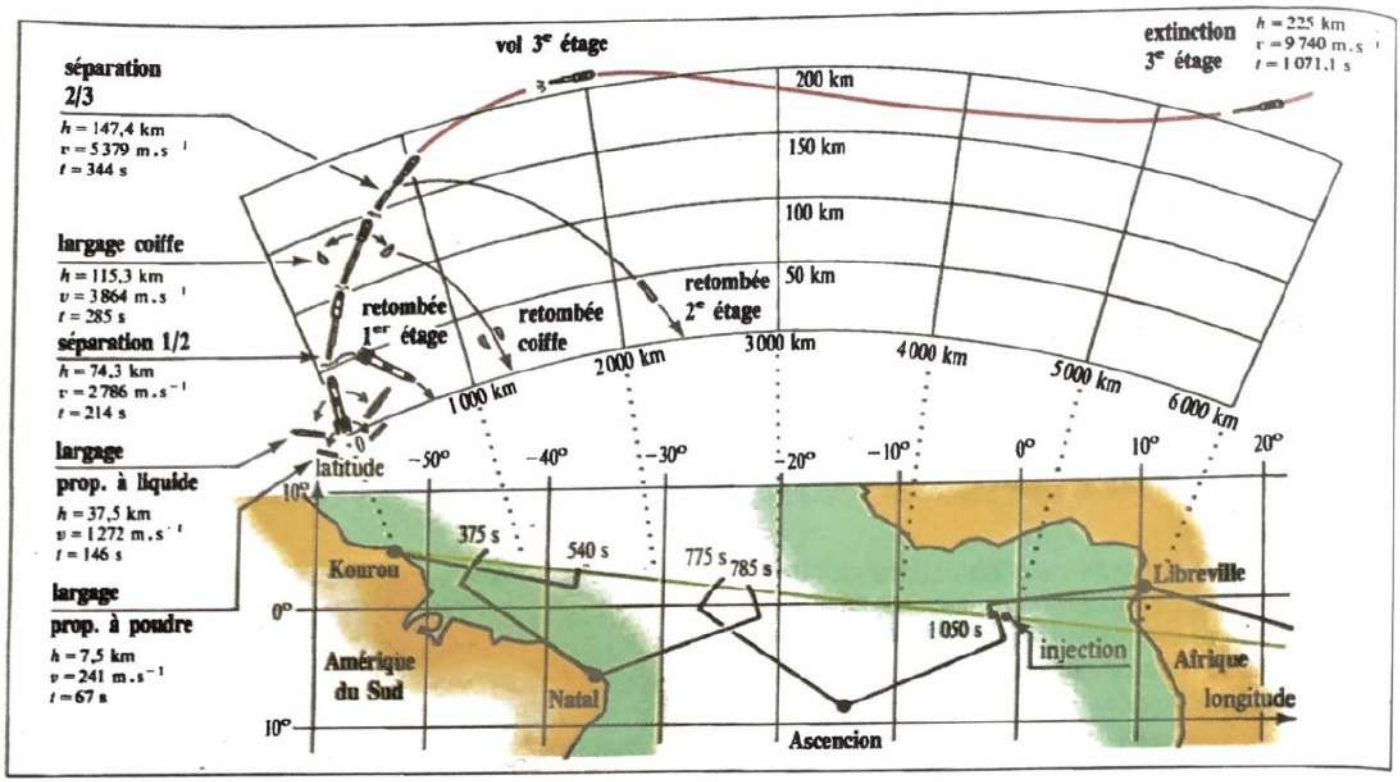
et : $T = \dfrac{2\pi(R_T + h)}{v} = 5\,430 \text{ s} \approx 1 \text{ h } 30 \text{ min}.$



***La station orbitale* Mir, *photographiée depuis un vaisseau* Soyouz.**



8. ***La trajectoire d'un satellite géostationnaire est un cercle situé dans le plan équatorial de la Terre. La vitesse angulaire de rotation du satellite autour de l'axe Sud-Nord est égale à celle de la Terre; le satellite apparaît immobile à un observateur terrestre.***



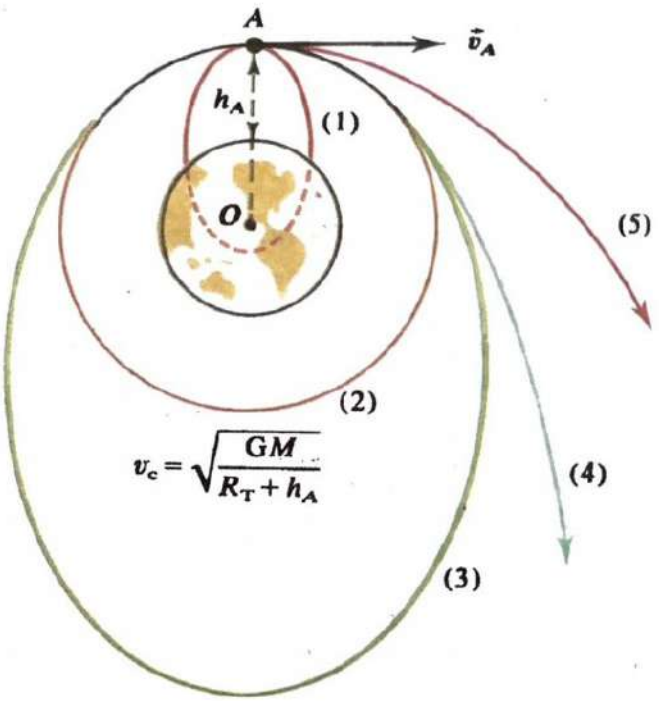
Les différentes étapes du tir de la fusée* Ariane IV.** ***Entre −20° et −10° de longitude,* Ariane *a perdu de l'altitude (h) pour gagner de la vitesse (v). Les crochets de part et d'autre de Kourou, Natal, Ascension et Libreville délimitent les zones de couverture des quatre radars correspondants.

3.3.4 Lancement des satellites

Les fusées porteuses de satellites, pour quitter le sol et s'élever dans l'espace, brûlent leur propergol par étages successifs. L'énergie « chimique » de ces combustions se transforme en partie en énergie mécanique (cinétique et potentielle).

Parvenu à l'altitude h_A (*fig.* 9), le satellite est abandonné dans le champ gravitationnel terrestre avec une vitesse initiale $\vec{v}_A$ par rapport au référentiel géocentrique. Son mouvement ultérieur dépend des deux paramètres h_A et $\vec{v}_A$. Supposons le satellite libéré au point A avec une vitesse $\vec{v}_A$ orthogonale au rayon OA. Selon la valeur de v_A, le satellite peut :

- décrire une orbite elliptique (ou circulaire) dont un des foyers est le centre de la Terre;
- décrire une trajectoire parabolique ou hyperbolique qui l'éloigne indéfiniment de la Terre.



v_A	nature de la trajectoire
$< v_c$	(1) elliptique avec retombée sur la Terre
v_c	(2) circulaire
$< \sqrt{2} v_c$	(3) elliptique
$\sqrt{2} v_c$	(4) parabolique
$> \sqrt{2} v_c$	(5) hyperbolique

***9.** La nature de la trajectoire d'un satellite dépend de la vitesse initiale v_A, au moment de la libération.*

Scanné avec CamScanner

3.4 mouvement des planètes : lois de Kepler

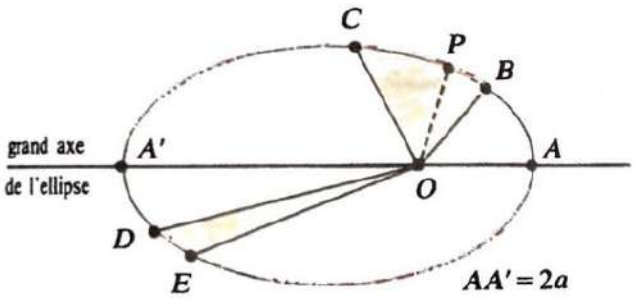
3.4.1 énoncé des lois

Les lois du mouvement des planètes du Soleil ont été énoncées par Johannes Kepler, astronome allemand (1571-1630), et portent son nom.

- *Première loi :* Dans un repère de Copernic, la trajectoire d'une planète est une ellipse dont le Soleil occupe un des foyers.
- *Deuxième loi :* Le segment de droite reliant le Soleil et la planète balaie des aires égales pendant des durées égales (*fig.* 10).
- *Troisième loi :* Pour toutes les planètes, le rapport entre le cube du demi-grand axe a de la trajectoire et le carré de la période de révolution est le même :

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{Cte};$$

cette constante ne dépend pas de la masse des planètes.



10. ***Lois de Kepler. La planète P décrit une ellipse dont l'un des foyers est le centre O du Soleil. Si la planète parcourt les trajets $\overset{\frown}{BC}$ et $\overset{\frown}{DE}$ en des durées égales, les aires correspondantes balayées par le segment OP sont aussi égales.***

Les ellipses décrites par les planètes sont presque circulaires, à l'exclusion de celles de Pluton et de Mercure. Si r est le rayon de la trajectoire circulaire, nous retrouvons (*cf. application* 4) :

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM_S}{4\pi^2} = \text{Cte},$$

en accord avec la troisième loi de Kepler ($a = r$).

APPLICATION 4

Retrouver la troisième loi de Kepler en considérant qu'une planète décrit une trajectoire circulaire dans un repère de Copernic, considéré comme galiléen.

Nous supposerons que cette planète, de centre P, est soumise à la seule force gravitationnelle due au Soleil, de masse M_S. Elle décrit une trajectoire circulaire de rayon r, et qui a pour centre celui du Soleil, origine du repère de Copernic. Ce repère étant galiléen, on a :

$$\vec{a}_P = \vec{a}_n = \vec{g},$$

avec : $a_n = \frac{v^2}{r}$ et $g = \frac{GM_S}{r^2}$;

d'où : $v^2 = \frac{GM_S}{r}$.

Sachant que $T = 2\pi \frac{r}{v}$, on en conclut :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S} = \text{Cte}.$$

Nous retrouvons bien la troisième loi de Kepler.

11. ***Principales données sur le système solaire.***

corps	rayon moyen (m)	masse (kg)	période de rotation propre (s)	rayon moyen de l'orbite (m)	période du mouvement orbital (s)
Soleil	$6{,}96.10^8$	$1{,}98.10^{30}$	$2{,}3\ .10^6$	—	—
Mercure	$2{,}34.10^6$	$3{,}28.10^{23}$	$5{,}03.10^6$	$5{,}79.10^{10}$	$7{,}60.10^6$
Vénus	$6{,}26.10^6$	$4{,}83.10^{24}$	$2{,}1\ .10^7$	$1{,}08.10^{11}$	$1{,}94.10^7$
Terre	$6{,}37.10^6$	$5{,}98.10^{24}$	$8{,}62.10^4$	$1{,}49.10^{11}$	$3{,}16.10^7$
Mars	$3{,}32.10^6$	$6{,}40.10^{23}$	$8{,}86.10^4$	$2{,}28.10^{11}$	$5{,}94.10^7$
Jupiter	$6{,}98{\cdot}10^7$	$1{,}90{\cdot}10^{27}$	$3{,}54{\cdot}10^4$	$7{,}78{\cdot}10^{11}$	$3{,}74{\cdot}10^8$
Saturne	$5{,}82.10^7$	$5{,}68.10^{26}$	$3{,}61.10^4$	$1{,}43.10^{12}$	$9{,}30.10^8$
Uranus	$2{,}37.10^7$	$8{,}67.10^{25}$	$3{,}85.10^4$	$2{,}87.10^{12}$	$2{,}66.10^9$
Neptune	$2{,}24.10^7$	$1{,}05.10^{26}$	$5{,}69.10^4$	$4{,}50.10^{12}$	$5{,}20.10^9$
Pluton	$2{,}93.10^6$	$5{,}37.10^{24}$	$5{,}52.10^5$	$5{,}91.10^{12}$	$7{,}82.10^9$
Lune	$1{,}74.10^6$	$7{,}34.10^{22}$	$2{,}36.10^6$	$3{,}84.10^8$	$2{,}36.10^6$

Scanné avec CamScanner

3.4.2 conséquences

C'est à partir des lois de Kepler que Newton élabora sa théorie de l'attraction gravitationnelle. On montre par exemple (*application* 5) que la troisième loi implique une force en $\frac{1}{r^2}$.

Par ailleurs, cette loi nous permet de déterminer le rapport de la masse d'une planète à celle du Soleil en examinant le mouvement des satellites de cette planète. C'est le cas de Jupiter, par exemple. Jupiter décrit une trajectoire circulaire de rayon r_J autour du Soleil et de période T_J; si on admet que son mouvement n'est pas perturbé par ses satellites, alors :

$$\frac{r_J^3}{T_J^2}=\frac{GM_S}{4\pi^2}.$$

Europe, satellite de Jupiter (*photo* 12), décrit une trajectoire presque circulaire autour de Jupiter, de rayon r_E et de période T_E; si on admet que son mouvement n'est pas perturbé par le Soleil, alors :

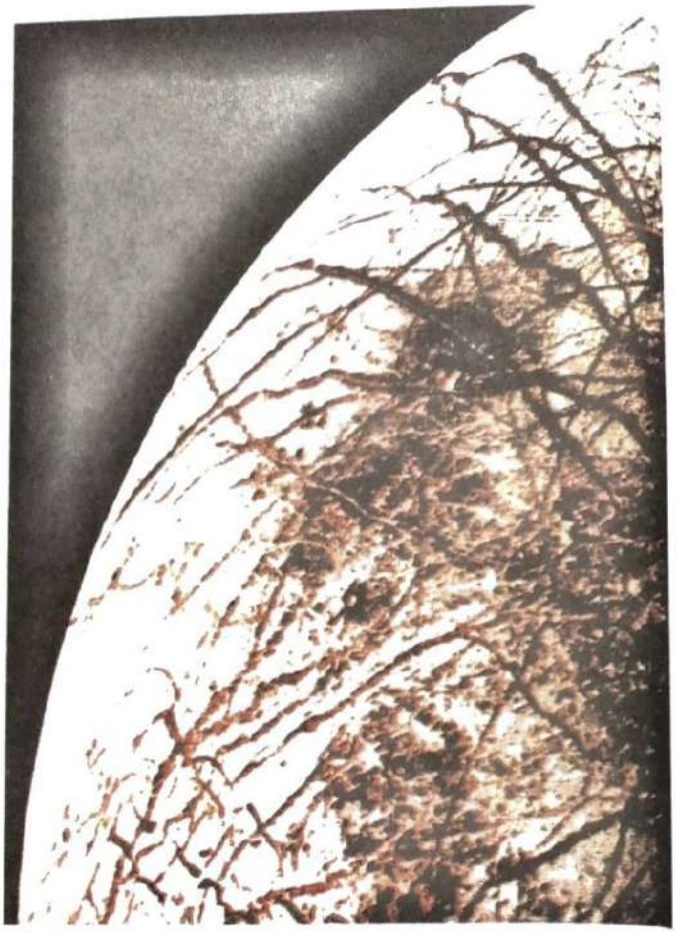
$$\frac{r_E^3}{T_E^2}=\frac{GM_J}{4\pi^2}.$$

Il vient donc :

$$\frac{M_J}{M_S}=\frac{r_E^3}{r_J^3}\frac{T_J^2}{T_E^2}.$$

Numériquement, avec $r_J=7{,}78.10^8$ km, $T_J=3{,}74.10^8$ s, $r_E=6{,}82.10^5$ km et $T_E=3{,}07.10^5$ s, on trouve :

$$\frac{M_J}{M_S}\approx 10^{-3}.$$



12. ***Europe, satellite de Jupiter a la taille de notre Lune. L'absence de relief est tout à fait compatible avec une surface gelée, fracturée par endroits et laissant apparaître une croûte supposée jeune et chaude.***

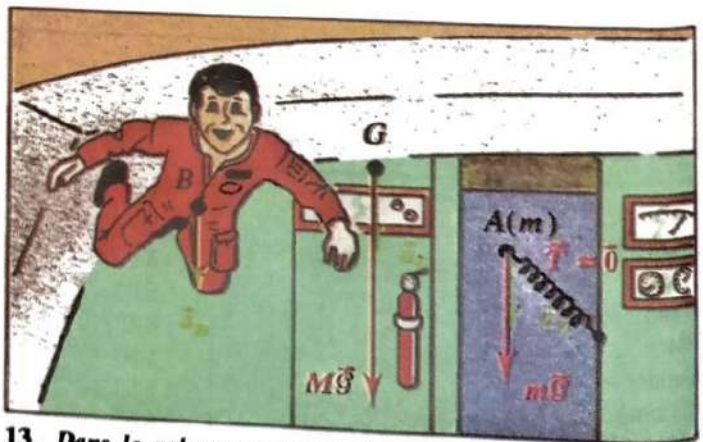
3.5 notion d'impesanteur

Envisageons une enceinte, de masse M, soumise aux seules forces gravitationnelles (satellites en orbite, engin balistique, ascenseur en chute libre, ...). Nous supposerons, en outre, l'enceinte de dimensions réduites : $\vec{\mathcal{G}}$ y est alors quasi uniforme. L'accélération du centre d'inertie G de cette enceinte relativement à un repère galiléen est telle que (*fig.* 13) :

$$M\vec{a}_G = M\vec{\mathcal{G}}, \quad \text{soit} \quad \vec{a}_G = \vec{\mathcal{G}}.$$

Nous pouvons admettre que tous les points de l'enceinte ont quasiment la même accélération $\vec{a} = \vec{a}_G$. A l'intérieur de l'enceinte (une cabine spatiale en orbite, par exemple), considérons un objet de masse m dont un cosmonaute veut déterminer le poids. Pour cela, il suspend l'objet à l'une des extrémités d'un ressort étalonné, l'autre extrémité du ressort étant fixée à la paroi de la cabine (*fig.* 13). La mesure de la tension du ressort donne la mesure du poids de l'objet (comme sur la Terre).

Appliquons, dans un référentiel galiléen, le théorème du centre d'inertie à la masse m; il vient : $m\vec{a} = m\vec{\mathcal{G}} + \vec{f}$ où $\vec{f}$ est la tension du ressort. Or, si l'objet est en



13. ***Dans le volume restreint d'un satellite, on peut supposer que le champ gravitationnel est uniforme; tous les points ont le même vecteur accélération :***

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B = \vec{a}_G = \vec{\mathcal{G}}.$$

Scanné avec CamScanner

APPLICATION 5

En supposant une planète animée d'un mouvement circulaire uniforme autour du Soleil, montrer que la troisième loi de Kepler implique qu'elle soit soumise à une force en $\frac{1}{r^2}$.

La planète étant animée d'un mouvement circulaire uniforme, son accélération est centripète et vaut :

$$a = a_n = \frac{v^2}{r}.$$

Si m est la masse de la planète, cette dernière est donc attirée par le Soleil avec la force :

$$F = m\frac{v^2}{r}.$$

La troisième loi de Kepler s'écrit :

$$\frac{T^2}{r^3} = \text{Cte} = k, \quad \text{soit} \quad T^2 = kr^3.$$

Or $T = 2\pi\frac{r}{v}$; d'où :

$$\frac{4\pi^2 r^2}{v^2} = kr^3, \quad \text{soit} \quad v^2 = \frac{4\pi^2}{kr}.$$

Il vient donc :

$$F = m\frac{4\pi^2}{kr^2} = \frac{K}{r^2}, \quad \text{avec} \quad K = \frac{4\pi^2 m}{k} = \text{Cte}.$$

La force qui s'exerce sur la planète est donc bien une force centrale en $\frac{1}{r^2}$.

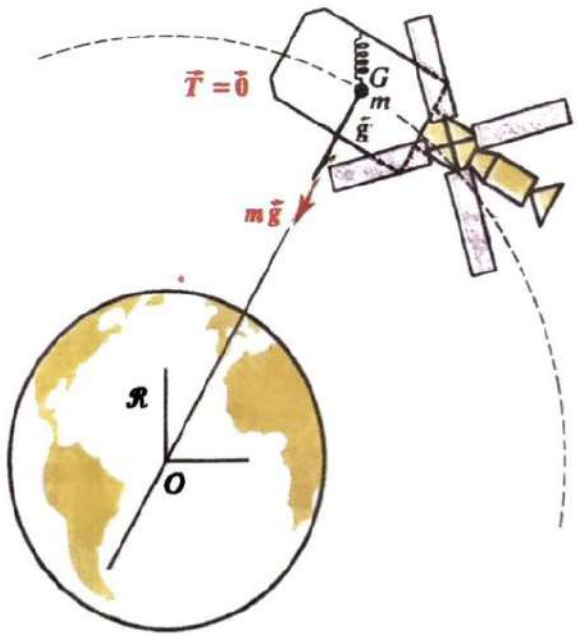
équilibre par rapport à l'enceinte, il a la même accélération que celle-ci :

$$\vec{a} = \vec{a}_G = \vec{\mathcal{G}};$$

la tension $\vec{T}$ est donc nulle. *L'objet reste en équilibre sans être retenu par le ressort; le cosmonaute conclut que le poids de l'objet est nul, d'où l'impression d'impesanteur.*

Le cosmonaute est lui-même en impesanteur; il n'a besoin d'aucun appui pour rester en équilibre dans la cabine, car l'éventuelle réaction exercée par une paroi sur le cosmonaute est nulle (*cf. application* 6). Un objet lancé avec une vitesse $\vec{v}_0$ par rapport à la cabine la traversera d'un mouvement rectiligne, « sans tomber ». Nous pourrions retrouver ce phénomène dans un ascenseur en chute libre : pendant quelques instants, le passager, ayant même accélération que l'ascenseur, ne serait plus en appui sur le plancher; tous deux auraient le même mouvement de chute.

La propriété d'impesanteur découle donc du fait que, localement, dans un champ gravitationnel, tous les objets ont quasiment la même accélération, indépendante de leur masse. L'impesanteur cesse dès que l'engin considéré est soumis à d'autres types de forces, telles que forces de frottement, actions de rétrofusées, etc. Dans tous ces cas, l'accélération, pour une force donnée, dépend de la masse des objets.



14. ***L'état d'impesanteur ne s'observe rigoureusement qu'au centre d'inertie d'un véhicule spatial. On parlera de « microgravité » pour le reste de l'habitacle.***

Scanné avec CamScanner



Cosmonaute en état d'impesanteur dans la navette spatiale.

APPLICATION 6

Dans une navette spatiale de masse M on a installé une balance. Cette dernière mesure l'intensité de la force $\vec{R}$ qu'elle exerce sur l'objet posé sur son plateau.

1/ La navette est satellisée. La masse de l'objet posé sur le plateau est m. Qu'indique alors la balance?

2/ La navette amorce sa rentrée dans l'atmosphère. Quelle est la nouvelle indication de la balance?

1/ Une fois satellisée, la navette n'est soumise qu'à l'attraction terrestre. L'accélération de chacun de ses points étant quasiment égale à celle de son centre d'inertie G, elle vaut donc :

$$\vec{a} = \vec{a}_G = \vec{g}.$$

L'objet, de masse m, est soumis à la force d'attraction $\vec{F} = m\vec{g}$ et à la réaction $\vec{R}$ de la balance, d'où :

$$m\vec{g} + \vec{R} = m\vec{a} \quad \text{(référentiel géocentrique)}.$$

L'objet ayant la même accélération que la navette, nous en déduisons que $\vec{R} = \vec{0}$; l'objet est en état d'impesanteur.

2/ Lorsque la navette rentre dans l'atmosphère, elle est soumise à la force de gravitation $\vec{F}' = M\vec{g}$ et à d'autres forces, de somme $\vec{f}$; son accélération vaut :

$$\vec{a}_G = \vec{g} + \frac{\vec{f}}{M} \quad \text{(repère géocentrique)}.$$

Or, pour l'objet, nous pouvons écrire :

$$\vec{a} = \vec{a}_G = \vec{g} + \frac{\vec{R}}{m};$$

d'où :

$$\vec{R} = \frac{m}{M}\vec{f}.$$

L'objet n'est plus en état d'impesanteur, il exerce sur le plateau de la balance une force :

$$\vec{R}' = -\vec{R} = -\frac{m}{M}\vec{f}.$$

L'état d'impesanteur cesse dès que la fusée est remise en marche...





Scanné avec CamScanner

Les effets de marée

Les effets de marée sont fréquemment cités. On les invoque, par exemple, pour expliquer la nature particulaire des anneaux de Saturne ou pour récuser telle hypothèse sur la formation des planètes.

Si l'on considère un point matériel, soumis aux seules actions gravitationnelles, son accélération $\vec{a}(M)$ au point M, relativement à un référentiel galiléen, est :

$$\vec{a}(M) = \vec{\mathcal{G}}(M),$$

où $\vec{\mathcal{G}}(M)$ est le champ gravitationnel en M. De façon tout à fait remarquable, cette accélération est indépendante de la masse du corps! C'est, sous une forme plus générale, la fameuse loi de la chute des corps : *dans le vide, tous les corps ont le même mouvement de chute libre*. Cette simplicité fondamentale est bien connue de tous, mais peut-être n'en tire-t-on pas suffisamment toutes les conséquences.

L'impesanteur est l'illustration évidente de la propriété précédente. Supposons, par exemple, un vaisseau spatial en mouvement sous l'action des seules forces gravitationnelles.

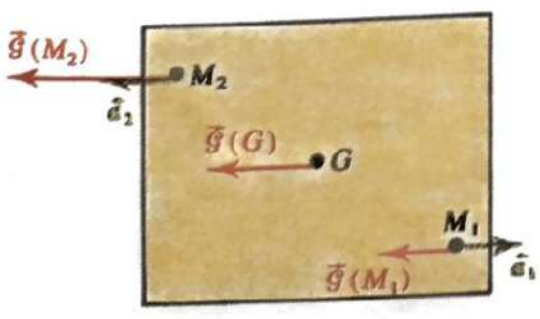
Si le mouvement du vaisseau est une translation d'accélération $\vec{a}$ (relativement à un référentiel galiléen), dans un champ de gravitation uniforme $\vec{\mathcal{G}}$, on a $\vec{a} = \vec{\mathcal{G}}$. Des objets de petites dimensions répartis dans le vaisseau spatial auront également la même accélération $\vec{a}$, *quelle que soit leur nature*.

Ces objets apparaîtront donc à un observateur lié au vaisseau spatial comme n'ayant pas d'accélération : ils seront, relativement au vaisseau, immobiles ou en mouvement rectiligne uniforme (avec chocs possibles sur les parois du vaisseau dans ce dernier cas). L'astronaute interprète ce comportement en termes d'impesanteur. Cette impesanteur cesse dès que l'on applique au vaisseau une force supplémentaire $\vec{F}$ non gravitationnelle qui produit un supplément d'accélération du seul vaisseau égal à $\frac{\vec{F}}{m}$ (où m est la masse du vaisseau).

Supposons maintenant le champ $\vec{\mathcal{G}}$ légèrement non uniforme, sa norme augmentant lorsqu'on passe d'une région 1 (point M_1) à une région 2 (point M_2). Si l'on suppose encore le vaisseau animé d'un mouvement de translation, son accélération $\vec{a}_v$ est, avec une excellente approximation, égale à la valeur du champ gravitationnel au centre d'inertie G du vaisseau, soit :

$$\vec{a}_v \approx \vec{\mathcal{G}}(G).$$

Un petit objet, situé en M_1, a l'accélération $\vec{a}(M_1) = \vec{\mathcal{G}}(M_1)$ et, de même, un objet situé en M_2 a l'accélération $\vec{a}(M_2) = \vec{\mathcal{G}}(M_2)$ (les accélérations étant mesurées dans un référentiel galiléen, *fig.* 1).



1.

Relativement au vaisseau spatial, l'objet en M_1 a l'accélération :

$$\vec{a}_1 = \vec{a}(M_1) - \vec{a}_v = \vec{\mathcal{G}}(M_1) - \vec{\mathcal{G}}(G).$$

Il s'agit d'une accélération *différentielle* dirigée vers l'arrière du vaisseau, puisque :

$$\|\vec{\mathcal{G}}(M_1)\| < \|\vec{\mathcal{G}}(G)\|.$$

De même, l'objet en M_2 a l'accélération différentielle :

$$\vec{a}_2 = \vec{a}(M_2) - \vec{a}_v = \vec{\mathcal{G}}(M_2) - \vec{\mathcal{G}}(G),$$

dirigée vers l'avant du vaisseau.

On observe ainsi, du fait de la non-uniformité du champ de gravitation, des accélérations différentielles dirigées en sens opposés, d'où un effet de *triage* des objets. Il n'y a donc plus strictement impesanteur, les effets gravitationnels se manifestant — il est vrai de façon discrète — sous forme d'effets différentiels. Le champ variant peu sur l'espace du vaisseau, ces termes différentiels restent petits par rapport au champ gravitationnel lui-même.

Le phénomène des marées s'explique par un effet différentiel du type précédent. La Terre (qui joue ici le rôle du vaisseau spatial) est plongée dans les champs de gravitation non uniformes de la Lune et du Soleil. Les éléments liquides des océans sont ainsi soumis à des accélérations différentielles de la forme :

$$\vec{\mathcal{G}}(M) - \vec{\mathcal{G}}(G),$$

M désignant la position de l'élément liquide considéré et G le centre d'inertie de la Terre; ces accélérations différentielles ne font intervenir en aucune manière les éléments liquides eux-mêmes. Seule compte leur position par rapport au centre d'inertie G de la Terre.

Simplifions l'étude en considérant l'action d'un astre unique A (Soleil ou Lune). Le champ gravitationnel créé par l'astre, soit $\frac{GM_A}{r^2}$, décroît du point M_2 au point M_1 (*fig.* 2); d'où les directions opposées en M_1 et en M_2 des accélérations différentielles :

$$\vec{\mathcal{G}}(M_1) - \vec{\mathcal{G}}(G) \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{G}}(M_2) - \vec{\mathcal{G}}(G).$$

C'est un effet analogue à l'effet de triage indiqué plus haut.

Le champ gravitationnel de l'astre A n'intervient pas directement, mais se manifeste par des effets de différence dus à sa non-uniformité. Dans un champ uniforme, il n'y aurait pas de phénomène de marées!

Évaluons l'ordre de grandeur de cet effet. Si r désigne la distance AG (*fig.* 2), il vient :

$$\mathcal{G}(G) = G\frac{M_A}{r^2},$$

$$\mathcal{G}(M_1) = G\frac{M_A}{(r+R)^2},$$

$$\mathcal{G}(M_2) = G\frac{M_A}{(r-R)^2},$$

où $R \ll r$ est le rayon de la Terre. Nous en déduisons :

$$|\mathcal{G}(M_1) - \mathcal{G}(G)| = \mathcal{G}(M_2) - \mathcal{G}(G) \approx \frac{2GM_AR}{r^3} \approx 2\mathcal{G}(G)\frac{R}{r}.$$

Scanné avec CamScanner

DOCUMENT

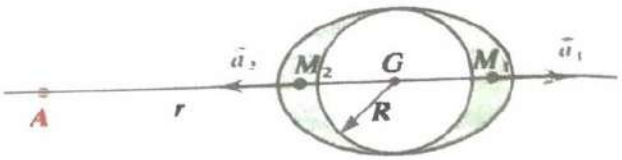
Pour le Soleil, $r = 1{,}5.10^8$ km; prenons $R \approx 6{,}4.10^3$ km. Le terme de marée a pour ordre de grandeur :

$$2\mathcal{G}(G)\frac{6{,}4.10^3}{1{,}5.10^8} \approx 8{,}5.10^{-5}\ \mathcal{G}(G),$$

c'est-à-dire environ le $\frac{1}{10\,000}$ de la valeur du champ lui-même.

L'effet lunaire est environ deux fois plus intense.

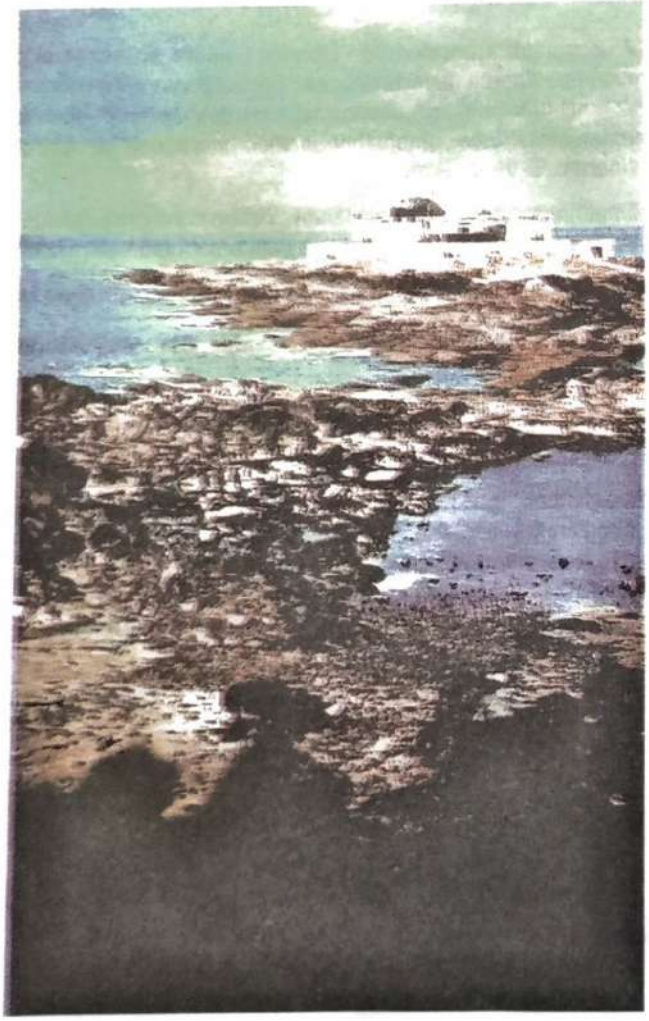
L'effet de marée a des effets visibles bien connus sur le mouvement des eaux des océans. L'étude complète du phénomène est en fait complexe, car il faut tenir compte de l'action simultanée du Soleil et de la Lune. En outre, interviennent des phénomènes d'amplification, on dit de *résonance*, car les masses d'eau concernées peuvent être plus ou moins enfermées dans des cuvettes sous-marines. On peut également noter que le globe terrestre lui-même n'est pas un solide tout à fait rigide. Les effets de marées se traduisent, de ce fait, par des déformations (très faibles) de notre globe. On explique aussi la constitution particulaire des anneaux de Saturne par effet de marée dans le champ (non uniforme) de la planète : des anneaux rigides seraient disloqués par cet effet de marée!

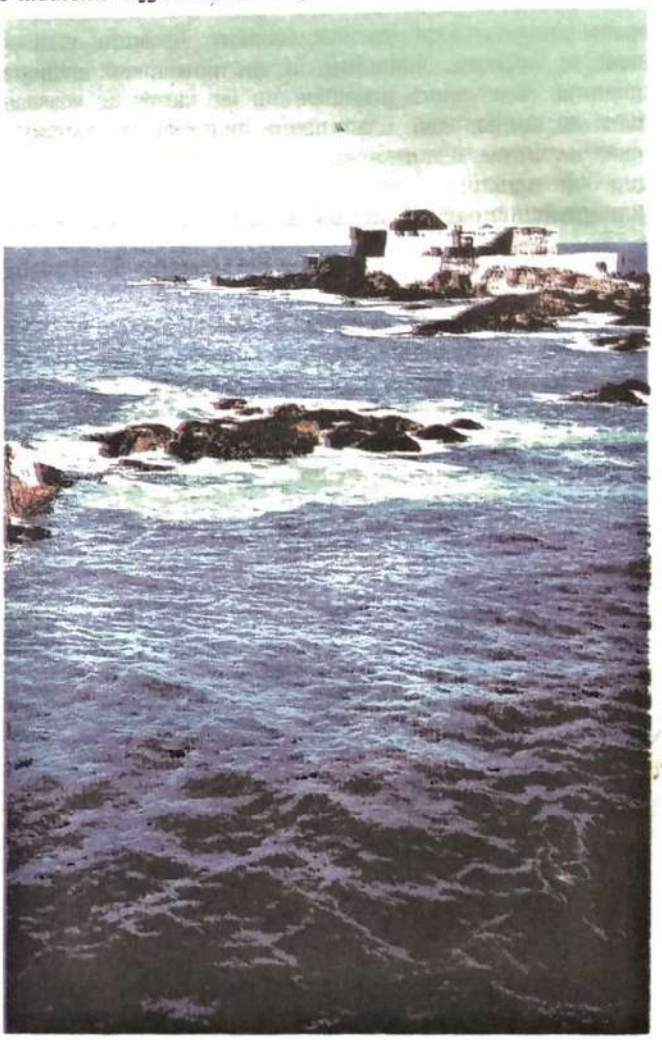


2.

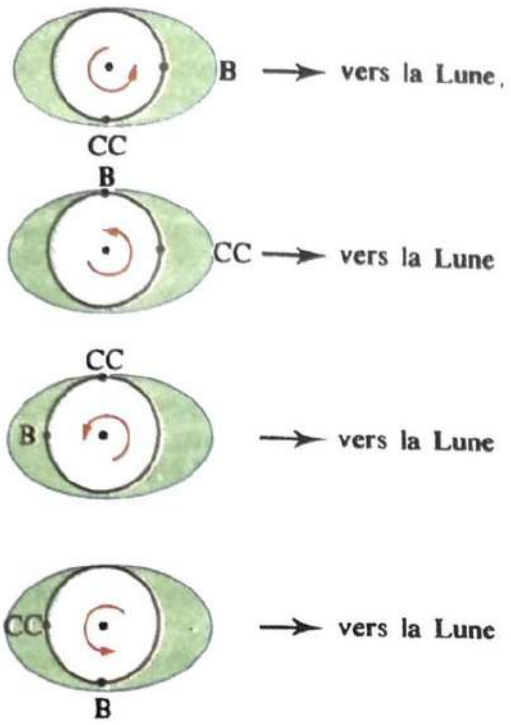
La théorie dite *catastrophique* de la formation des planètes de notre système solaire proposait l'éjection par le Soleil de globules planétaires sous l'effet d'une étoile perturbatrice. Une telle hypothèse doit être rejetée. Un calcul simple montre, en effet, que sous l'action des effets de marée dus au champ solaire, de tels globules seraient disloqués dès leur formation au voisinage du Soleil.

Saint-Malo : le Fort national vu à deux moments différents de la journée.

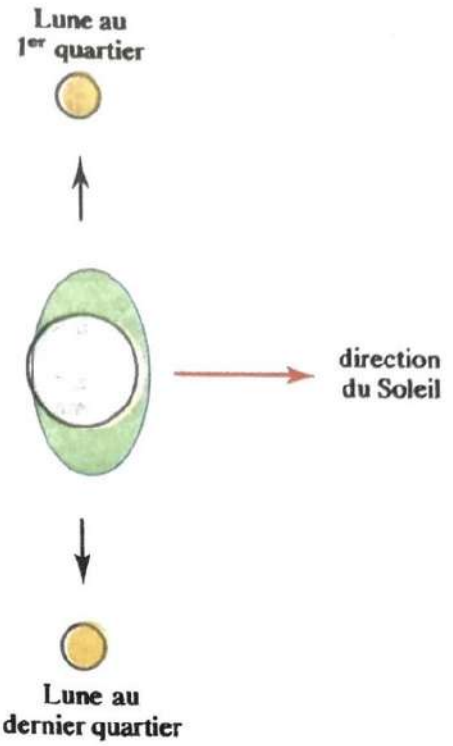




Scanné avec CamScanner

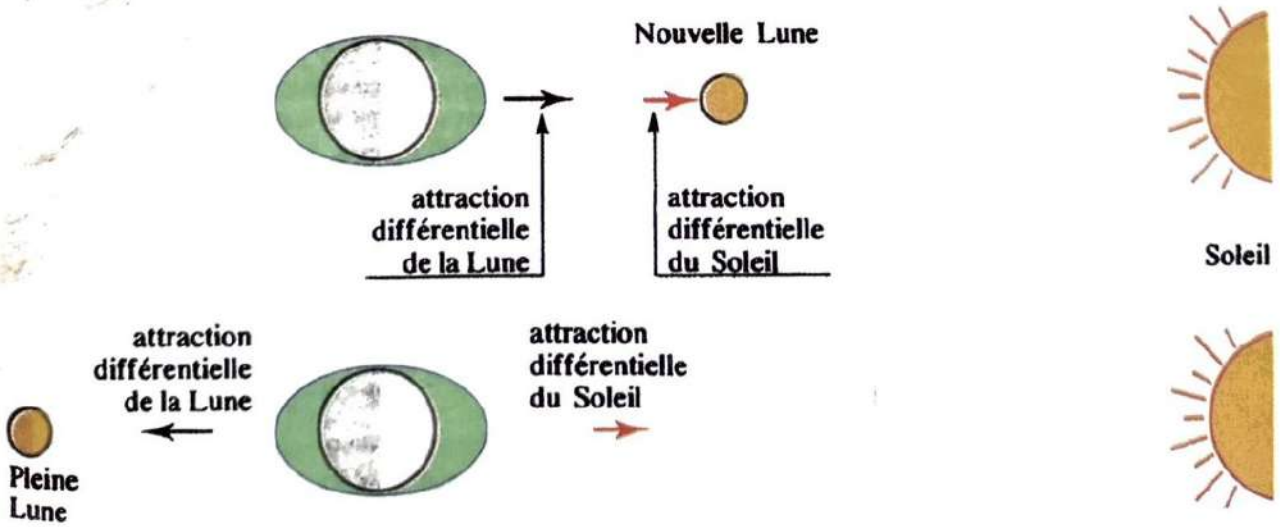


La marée est toujours dirigée vers la Lune ou dans la direction opposée. La rotation de la Terre fait défiler les divers lieux dans la situation de marée haute ou de marée basse.
La première figure traduit un instant où la marée est haute à Brest (B) et basse à Corpus Christi (CC), au Texas. Six heures plus tard, la Terre a effectué un quart de tour, et la marée est basse à Brest et haute à Corpus Christi. Douze heures plus tard, la marée est à nouveau haute à Brest et basse à Corpus Christi. Enfin, dix-huit heures plus tard, c'est la seconde marée basse de la journée pour Brest et la seconde marée haute pour Corpus Christi.



Quand le Soleil et la Lune sont situés dans des directions orthogonales, c'est-à-dire en périodes voisines du premier ou du dernier quartier, les effets de marée du Soleil et de la Lune se contrarient. Ce sont les marées de mortes-eaux.

En période de nouvelle Lune, c'est-à-dire quand la Lune est située dans la direction du Soleil, ou en période de pleine Lune, c'est-à-dire quand la Lune est située dans la direction opposée à celle du Soleil, le Soleil et la Lune conjuguent leurs effets de marée. Ce sont les marées de vives-eaux.



Scanné avec CamScanner

EXERCICES

L'essentiel du cours

3.1 A *Vrai* ou *faux* ?

- Le champ gravitationnel terrestre est uniforme.
- La Lune crée aussi un champ gravitationnel.
- Pour une répartition sphérique de masse, le champ gravitationnel se calcule comme si toute la masse de la répartition était située en son centre.
- Dans de nombreux cas, on confond $\vec{g}$ et $\vec{G}$.
- La trajectoire d'un satellite est nécessairement dans le plan équatorial.
- Un satellite géostationnaire peut se trouver à la verticale de Paris.
- Les lois de Kepler ne sont valables que pour les planètes ; on ne peut pas les appliquer aux satellites artificiels.

3.2 A La norme du champ gravitationnel terrestre est :

$$g = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2}.$$

1/ Donner les significations de R, g_0 et h.

2/ Quelle est la valeur couramment admise pour g_0 ?

Exercices de base

3.3 A Lire attentivement le texte ci-après et répondre aux questions qui suivent, en justifiant les réponses.

Mouvement d'un satellite

Intéressons-nous seulement aux satellites à trajectoires circulaires. On démontre (propriété d'un mobile soumis à une force centrale) que le centre de la trajectoire est le centre de la Terre.

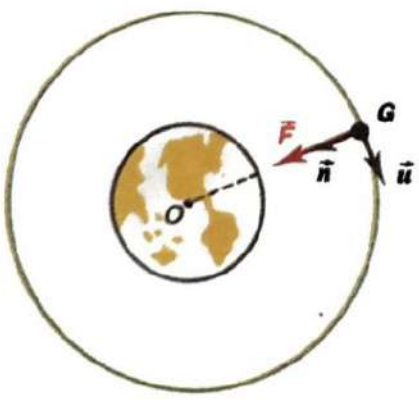
- Choisissons comme repère le repère géocentrique, que nous supposerons galiléen.
- Choisissons comme système matériel le satellite.
- Faisons le bilan des forces extérieures appliquées : le satellite n'est soumis qu'à l'attraction gravitationnelle due à la Terre.
- La relation fondamentale nous permet d'écrire :

$$\vec{F} = \sum \vec{f} = m\vec{a}_G, \quad \text{soit} \quad \vec{a}_G = \vec{g}.$$

Dans la base de Frenet $(\vec{u}, \vec{n})$, nous avons :

$$\vec{g}\begin{pmatrix}0\\ g\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{a}_G\begin{pmatrix}\frac{dv}{dt}\\ \frac{v^2}{r}\end{pmatrix},$$

$$g = G\frac{M}{(R+h)^2}.$$



1/ Pourquoi l'étude du mouvement du satellite n'est-elle pas effectuée dans le référentiel terrestre ? Quelle est la différence entre un repère terrestre ayant le centre de la Terre pour origine et un repère géocentrique ? Quel est l'intérêt de choisir un repère galiléen ?

2/ Le vecteur vitesse du satellite est-il constant ?

3/ Le mouvement du satellite est-il uniforme ?

4/ Établir l'expression de la vitesse v du satellite. Dépend-elle de sa masse ? Est-elle plus grande sur une orbite de basse altitude ou sur une orbite de haute altitude ?

5/ Donner l'expression de la période d'un satellite en fonction de son altitude h.

3.4 Une sphère homogène en fonte, de centre O, de rayon $R = 1$ m a pour masse volumique $\rho = 7\,800$ kg . m^{-3}.

1/ B3 Calculer la norme du champ gravitationnel créé par cette sphère en un point A situé à la distance $d = 2$ m de son centre.

Donnée : G = 6,67 . 10^{-11} S.I.

2/ B3 Calculer l'intensité de la force d'interaction gravitationnelle qui s'exerce sur un corps ponctuel de masse $m = 10$ g placé en A.

3/ A Donner les caractéristiques de la force exercée par le corps ponctuel sur la sphère.

3.5 Soit $d = 3{,}84 . 10^8$ m la distance qui sépare les centres respectifs O_1 et O_2 de la Terre et de la Lune, assimilées à des sphères homogènes de masses $M_1 = 5{,}98 . 10^{24}$ kg et $M_2 = 7{,}34 . 10^{22}$ kg.

1/ B3 Comparer les champs gravitationnels créés par la Terre et par la Lune en un point A du segment $[O_1, O_2]$ tel que $O_1A = 10^4$ km.

Donnée : G = 6,67 . 10^{-11} S.I.

2/ A Quelle est l'influence du champ gravitationnel lunaire sur le mouvement d'un satellite artificiel de la Terre ?

3.6 La Terre est supposée sphérique, de rayon $R = 6\,370$ km. La répartition des masses est à symétrie sphérique. On considère un satellite artificiel de la Terre, décrivant une trajectoire circulaire de centre O, de rayon $r = 7\,000$ km.

1/ A Définir le référentiel d'étude du mouvement du satellite.

2/ A Exprimer le champ gravitationnel à la distance r du centre de la Terre.

On prendra $g_0 = 9{,}8$ m . s^{-2}.

3/ AB3 Déterminer l'accélération du satellite. Montrer que le mouvement est uniforme et calculer la vitesse du satellite.

4/ AB3 Calculer la période du satellite.

3.7 Dans cet exercice, le mouvement est rapporté à un référentiel géocentrique, considéré comme galiléen. La Terre est supposée sphérique, de rayon R, de masse M. La répartition des masses est à symétrie sphérique. Le champ gravitationnel terrestre, à l'altitude h, a pour expression :

$$g = G\frac{M}{(R+h)^2},$$

où G est la constante de gravitation universelle.

Données : $g_0 = 9{,}80$ m . s^{-2} ; $R = 6\,370$ km ; vitesse angulaire de la rotation terrestre $\omega_T = 7{,}29 \times 10^{-5}$ rad . s^{-1}.

1/ A Établir l'expression de l'intensité du champ gravitationnel g à l'altitude h en fonction de h, R et g_0.

Scanné avec CamScanner

2/ A Soit un satellite, assimilable à un point matériel, ayant une orbite circulaire dont le centre est confondu avec celui de la Terre, à une altitude h. Établir l'expression de la vitesse du satellite sur sa trajectoire. En déduire l'expression de sa vitesse angulaire en fonction de h, R et g_0.

3/ *Météosat* est un satellite météorologique géostationnaire.

a/ A Définir le terme «géostationnaire»; préciser le plan de l'orbite.
b/ B3 A quelle altitude est placé *Météosat*?

3.8 Le repère de Kepler a pour origine le centre d'inertie O du Soleil; ses axes sont dirigés vers trois étoiles infiniment éloignées. Dans ce repère, la Terre décrit une trajectoire pratiquement circulaire de centre O, de rayon $r = 1{,}496 \cdot 10^{11}$ m avec une période $T = 365{,}25$ j.

1/ A Exprimer le champ gravitationnel créé par le Soleil à la distance r de son centre O.

2/ A La Terre est assimilée à une masse ponctuelle située en son centre d'inertie C. Exprimer la vitesse v_C du point C et la période T de révolution de la Terre autour du Soleil en fonction de la constante G de gravitation universelle, de la masse M_S du Soleil et de la distance r.

3/ B3 En déduire la masse M_S du Soleil.

Donnée : G = 6,67 . 10^{11} S.I.

3.9 A Un satellite décrit, dans un repère géocentrique, une orbite circulaire autour de la Terre à l'altitude h. Le champ gravitationnel a pour norme :

$$g = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2}.$$

1/ Un astronaute saisit une poignée solidaire du satellite. On suppose que l'astronaute, suspendu à cette poignée, est immobile par rapport au satellite. Quelle est l'intensité de la force exercée par la poignée sur l'astronaute?

2/ A l'intérieur du satellite, peut-on, à l'aide d'un fil à plomb, mesurer la direction de la verticale?

Banc d'essais

Point neutre

3.10 1/ A A quelle distance de la Terre le champ gravitationnel de celle-ci compense-t-il celui de la Lune? La distance entre la Terre et la Lune est $3{,}84 \cdot 10^8$ m. Le rapport des masses vaut :

$$\frac{M_T}{M_L} = 81.$$

2/ AB3 Jules Verne pensait que c'était seulement au point ainsi déterminé que des voyageurs se dirigeant vers la Lune dans un véhicule spatial, moteur arrêté, seraient en état d'impesanteur. Avait-il raison?

↳ ex. 3.5, 3.9.

Mouvement de satellite artificiel

3.11 AB3 Un satellite, placé sur une orbite circulaire de rayon R=20 000 km, dans le plan équatorial de la Terre, se déplace d'ouest en est. Par rapport au repère géocentrique, sa période est 7,82 h. Calculer la masse de la Terre.

Donnée : G = 6,67 . 10^{11} S.I.

↳ ex. 3.6, 3.8.

3.12 AB3 Le satellite *Explorer 3* avait une trajectoire circulaire. Il évoluait à 180 km au-dessus de la Terre. Calculer sa période de révolution et sa vitesse.

Données : $R = 6370$ km; $g_0 = 9{,}8$ m . s $^{-2}$.

3.13 On désigne par :
R le rayon de la Terre, supposée sphérique et homogène;
M la masse de la Terre;
G la constante de gravitation universelle;
h l'altitude.

1/ A A partir de la loi de l'attraction universelle, établir l'expression de l'intensité du champ de gravitation terrestre $\vec{g}$ en fonction de G, M, R et h.
Quelle est l'expression de l'intensité du vecteur champ de gravitation terrestre $\vec{g}_0$ au sol?
En déduire que $g = g_0 \left(\frac{R}{R+h}\right)^2$.

2/ La navette spatiale *Columbia* a été placée sur une orbite circulaire, à l'altitude $h = 250$ km.

A Établir, dans un repère géocentrique, les expressions de la vitesse v de ce satellite et de sa période de révolution T en fonction de g_0, R et h.

B3 *Application numérique :* R=6370 km; $g_0 = 9{,}81$ m . s^{-2}.

3/ CB3 Le plan de l'orbite de *Columbia* passait le 28 novembre 1983 par Cherbourg et Nice. Ces deux villes sont distantes de 940 km. On néglige la rotation terrestre. Calculer l'intervalle de temps séparant les passages de *Columbia* au-dessus de ces deux villes.

↳ ex. 3.6, 3.7.

3.14 Un satellite artificiel décrit une orbite circulaire de même centre que la Terre, dans le référentiel géocentrique.

1/ A Préciser la nature et les caractéristiques de la force responsable du mouvement.

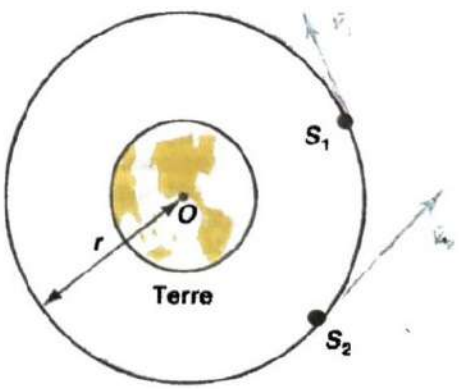
2/ La vitesse angulaire est égale à $8{,}055 \cdot 10^{-4}$ rad . s $^{-1}$. Calculer :

a/ l'altitude à laquelle évolue le satellite;
b/ AB3 sa vitesse linéaire;
c/ AB3 l'intensité du champ gravitationnel à l'altitude considérée.

Données : $R_T = 6370$ km; $g_0 = 9{,}8$ m . s^{-2}.

↳ ex. 3.6, 3.7.

3.15 Un satellite artificiel S_1, de masse m_1, est assimilable à un point matériel. Dans un repère géocentrique, supposé galiléen, son orbite est assimilée à un cercle de rayon r et de même centre O que la Terre. Le satellite n'est soumis qu'à l'attraction terrestre.



Scanné avec CamScanner

1/ A Exprimer la valeur v_1 de la vitesse de ce satellite en fonction de la constante de gravitation G, de la masse m_T de la Terre et de r.

Application numérique : $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N . m² . kg⁻² ; $m_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg ; $r = 7000$ km.

2/ B3 Un véhicule spatial S_2 de masse m_2 est sur la même orbite que S_1, ses moteurs étant éteints. A-t-il la même vitesse que S_1 ?

3/ Les astronautes de S_2 cherchent à rejoindre S_1 en restant sur la même orbite de rayon r. Pour cela, ils allument un moteur auxiliaire, faisant passer la vitesse de v_1 à v_2.

a/ C Indiquer la direction et l'orientation de la force $\vec{f}$ exercée par le moteur.
b/ C Exprimer la norme f en fonction de m_2, r, v_1 et v_2.
Dans le cas où $v_2 - v_1$ est très inférieur à v_1, on utilisera l'approximation :

$$v_2^2 - v_1^2 \approx 2v_1(v_2 - v_1).$$

Application numérique : $v_2 - v_1 = 5$ m . s⁻¹ ; $m_2 = 2 \cdot 10^3$ kg.

Mouvement des planètes

3.16 La Lune décrit une trajectoire quasi circulaire autour de la Terre, de rayon 384 000 km. Le champ gravitationnel à la surface de la Terre est égal à 9,8 m . s⁻², et le rayon terrestre est 6370 km.

1/ AB3 Calculer la valeur du champ gravitationnel terrestre au centre de la Lune.

2/ CB3 Appliquer le théorème du centre d'inertie à la Lune dans le référentiel géocentrique. En déduire :

a/ la vitesse de la Lune sur son orbite ;
b/ la période de révolution de la Lune autour de la Terre ; la comparer au mois lunaire.

↳ ex. 3.9.

3.17 La planète Mars décrit une trajectoire quasi circulaire autour du Soleil, de rayon moyen 228 millions de km, avec une période de 1,88 année, dans le référentiel de Copernic. Cette planète possède un satellite, Phobos. L'orbite de Phobos est un cercle de rayon 9380 km, parcouru avec une période de 7 h 39 min, dans un repère galiléen ayant pour centre le centre d'inertie de Mars et dont les axes sont liés à des étoiles données.

1/ A Définir le référentiel de Copernic.

2/ AB3 En utilisant la troisième loi de Kepler, déterminer le rapport entre les masses de Mars et du Soleil.

↳ ex. 3.9.

3.18 On se propose de déterminer la masse de Jupiter en étudiant le mouvement de ses principaux satellites : Io, Europe, Ganymède et Callisto (découverts par Galilée).

1/ A Le mouvement d'un satellite, de masse m, est étudié dans un repère considéré comme galiléen, ayant son origine au centre de Jupiter et ses axes dirigés vers des étoiles lointaines, considérées comme fixes. On supposera que Jupiter et ses satellites ont une répartition de masse à symétrie sphérique. Le satellite se déplace sur une trajectoire circulaire, à la distance R du centre de Jupiter.

a/ Déterminer la nature de son mouvement, puis sa vitesse v en fonction de R, de la masse M de Jupiter et de la constante de gravitation universelle G.
b/ En déduire l'expression de la période de révolution T du satellite.

c/ Montrer que le rapport $\frac{T^2}{R^3}$ est constant (ce qui constitue la troisième loi de Kepler) pour les différents satellites de Jupiter.

2/ Les périodes de révolution et les rayons des orbites des quatre principaux satellites de Jupiter ont les valeurs suivantes :

	Io	Europe	Ganymède	Callisto
T (heures)	42,5	85,2	171,7	400,5
R (km)	$422 \cdot 10^3$	$671 \cdot 10^3$	$1070 \cdot 10^3$	$1883 \cdot 10^3$

a/ B3 Représenter sur une feuille de papier millimétré le graphe donnant la variation de T^2 en fonction de R^3.
Échelles : 1 cm représente 10^{11} s² ; 1 cm représente $4 \cdot 10^{26}$ m³.
Conclure.
b/ AB3 En reliant ces résultats à ceux de la question 1 *b/*, déterminer la masse M de Jupiter.

Donnée : $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N . m² . kg⁻².

↳ ex. 3.3, 3.9.

Impesanteur

3.19 Trouver les erreurs parmi les causes invoquées ci-après pour expliquer l'impesanteur.

1/ A Les occupants d'une station orbitale sont en état d'impesanteur parce qu'il y a du vide autour de la station.

2/ A Dans une station orbitale règne l'état d'impesanteur parce qu'elle est éloignée de la Terre. A 36 000 km, par exemple, le champ gravitationnel est nul.

3/ A Pour obtenir l'état d'impesanteur, il faut communiquer au satellite une vitesse très élevée. Par exemple, dans un satellite gravitant à 200 km d'altitude à la vitesse de 7,8 km . s⁻¹, les astronautes sont en état d'impesanteur, alors qu'à 36 000 km à la vitesse de 3,1 km . s⁻¹ ils ressentent leur poids.

4/ C Pendant la phase propulsée du lancement d'un satellite, les astronautes sont en état d'impesanteur.

5/ C L'impesanteur s'obtient exclusivement sur les orbites circulaires.

Analyse de texte

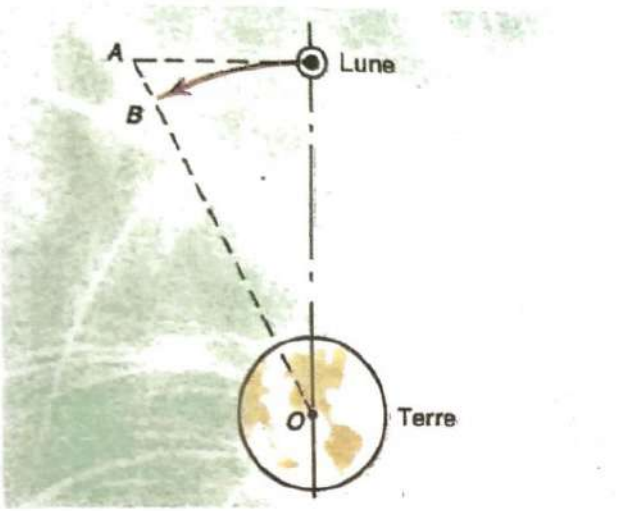
3.20 Le texte ci-après est tiré de *Astronomie populaire*, de Camille Flammarion.

« Voici comment s'effectue le calcul de la quantité dont la Lune tombe vers la Terre en une seconde de temps :
La Terre étant sphérique, et la longueur de la circonférence d'un de ses grands cercles (méridien ou équateur) étant de 40 millions de mètres, l'orbite de la Lune, tracée par une ouverture de compas égale à 60 fois le rayon de la Terre, aura une longueur de 60 fois 40 millions de mètres ou 2400 millions de mètres.
La Lune met à parcourir la totalité de cette orbite 27 jours 7 heures 43 minutes 11 secondes, ce qui fait un nombre de secondes égal à 2360591. En divisant 2400000000 mètres par ce nombre, on trouve que la Lune parcourt

Scanné avec CamScanner

dans chaque seconde 1 017 mètres, un peu plus d'un kilomètre.

Pour en conclure la quantité dont la Lune tombe vers la Terre en une seconde, supposons qu'elle se trouve au point marqué *L* (figure), à un certain moment, la Terre se trouvant au point marqué *T*. Lancée horizontalement de la droite vers la gauche, la Lune devrait parcourir la ligne droite *LA* si la Terre n'agissait pas sur elle ; mais au lieu de suivre cette tangente, elle suit l'arc *LB*. Supposons que cet arc mesure 1 017 mètres : ce serait le chemin parcouru en une seconde. Or, si l'on mesure la distance qui sépare le point *A* du point *B*, on trouve la quantité dont la Lune est tombée vers la Terre en une seconde, puisque, sans l'attraction de la Terre, elle se serait éloignée en ligne droite. Cette quantité est de 1,353 mm, c'est-à-dire à peu près 1 millimètre 1/3.



Eh bien, si l'on pouvait élever une pierre à la hauteur de la Lune et, là, la laisser tomber, elle tomberait précisément vers la Terre avec cette même vitesse de 1 mm 1/3 dans la première seconde de chute. La pesanteur diminue à mesure qu'on s'éloigne du centre de la Terre, en raison inverse du carré de la distance, c'est-à-dire de la distance multipliée par elle-même. Ainsi, à la surface de la Terre, une pierre qui tombe parcourt 4 mètres 90 centimètres dans la première seconde de chute. La Lune est à 60 fois la distance de la surface au centre de la Terre. La pesanteur est donc diminuée, en ce point, de 60 × 60, ou 3600. Pour savoir de quelle quantité tomberait en une seconde une pierre élevée à cette hauteur, il nous suffit donc de diviser 4,90 m par 3600. Or $\frac{4900}{3600} = 1{,}353$ mm, c'est-à-dire juste la quantité dont la Lune s'éloigne par seconde de la ligne droite.

Pourquoi la Lune ne tombe-t-elle pas tout à fait ? Parce qu'elle est lancée dans l'espace comme un boulet. Tout autre corps, boulet ou autre, lancé avec la même vitesse, à cette distance de la Terre, ferait exactement comme la Lune.

1/ **AB3** Retrouver que, au voisinage de la Terre, une pierre tombe de 4,90 m pendant la première seconde de chute.

2/ **AB3** Retrouver, en utilisant la loi de Newton, qu'à l'altitude 60 R_T, c'est-à-dire à la distance Terre-Lune, une pierre tomberait de 1,35 mm.

3/ **B1B3** Avec les données du texte, calculer le rayon terrestre, la distance Terre-Lune et la vitesse linéaire de la Lune dans le repère géocentrique.

4/ **B1B3** Avec les données du texte, calculer l'angle α en radians.

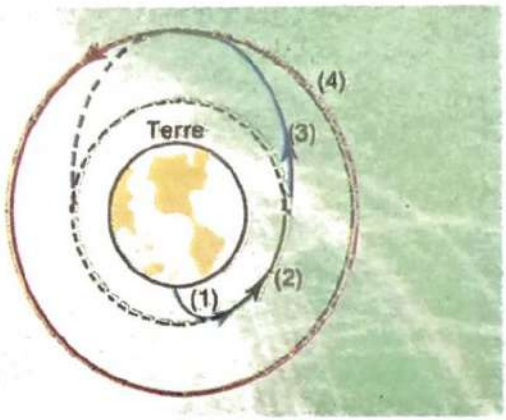
B3 Exprimer la longueur *AB* en fonction de α.

B3 L'angle α étant petit, utiliser l'expression approchée :

$$\frac{1}{\cos\alpha} \approx 1 + \frac{\alpha^2}{2}$$

et vérifier la mesure de *AB* indiquée dans le texte.

3.21 Voici un texte extrait d'un ouvrage scientifique : « Le lanceur européen *Ariane* a été conçu pour placer en orbite géosynchrone, c'est-à-dire en orbite circulaire équatoriale située à 35 800 km d'altitude, des satellites qui restent immobiles dans le ciel et qu'on appelle satellites géostationnaires.



1. Lancement du satellite.
2. Orbite basse.
3. Orbite elliptique intermédiaire.
4. Orbite définitive.

Les différentes parties du schéma ne sont pas représentées à la même échelle.

Comme il serait trop onéreux de propulser la fusée porteuse jusqu'à cette altitude, on procède par « transfert d'orbite » :

— dans un premier temps, le satellite est placé par la fusée porteuse sur une orbite basse (200 km) ;
— dans un deuxième temps, le lanceur largue le satellite en lui fournissant une impulsion qui le place sur une orbite elliptique dont le périgée est à l'altitude 200 km et l'apogée à l'altitude 35 800 km ;
— dans un troisième temps, le satellite assure lui-même, par une deuxième impulsion, sa circulation en orbite circulaire.

Les deux premières phases du lancement s'effectuent grâce à trois moteurs entrant successivement en fonctionnement et qui sont largués après avoir rempli leur rôle. »

1/ **B1A** Préciser l'expression utilisée par l'auteur : « satellites qui restent immobiles dans le ciel ».
A quel usage sont destinés de tels satellites ?

2/ **A** L'orbite d'un satellite géostationnaire est-elle nécessairement une « orbite circulaire équatoriale » ? Justifier la réponse, éventuellement à l'aide d'un schéma.

3/ **A** Dans le repère géocentrique, quel est le sens de rotation du satellite : vers l'est ou vers l'ouest ?

4/ **C** Quelle signification l'auteur donne-t-il au mot « impulsion » ?

Scanné avec CamScanner

4 MOUVEMENTS DANS UN CHAMP UNIFORME



La photographie en pose permet de matérialiser les trajectoires des blocs incandescents éjectés d'un volcan. Ces blocs peuvent être considérés comme des points matériels en mouvement dans le champ de pesenteur terrestre.

4.1 Introduction

La notion de champ (champ électrostatique, champ gravitationnel) permet de caractériser l'action subie par une charge ou une masse en un point de l'espace, sans se préoccuper des causes produisant cette action. Elle simplifie souvent la détermination des forces qui s'exerçent alors en ce point.

Un champ est caractérisé en chaque point de l'espace concerné par une grandeur physique scalaire ou vectorielle.

Le champ est uniforme si en chaque point la grandeur caractéristique est la même. Dans ce cas, l'étude du mouvement se ramène à celui d'un point matériel soumis à une *force constante* (donc d'*accélération constante* dans un référentiel galiléen). Nous nous limiterons à deux exemples importants de champs uniformes.

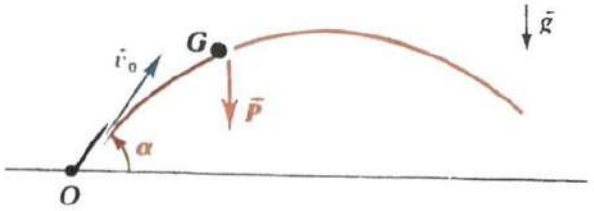
- Le **champ de pesanteur terrestre** est caractérisé par le vecteur champ de pesanteur $\vec{g}$ qui, dans un espace restreint(*), peut être considéré comme uniforme. Situé dans un tel champ, un corps de masse m est soumis à la force constante $\vec{P} = m\vec{g}$.
- Un **champ électrostatique** uniforme est caractérisé par un vecteur champ électrostatique $\vec{E}$. Dans un tel champ, une particule de charge électrique q est soumise à la force constante $\vec{F} = q\vec{E}$.

(*) Pour deux points situés à la même altitude et distants de 160 km, la direction de $\vec{g}$ varie seulement d'environ 0,2°. Pour une différence d'altitude de 100 km, la variation de l'intensité de $\vec{g}$ est seulement d'environ 3 %.

Scanné avec CamScanner

4.2 mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur

Un projectile de masse m est lancé dans le champ de pesanteur terrestre, considéré, localement, comme uniforme (*fig.* 1).
Le vecteur vitesse de lancement $\vec{v}_0$, supposé dans le plan vertical, fait un *angle de tir* α avec le plan horizontal. La résistance de l'air est négligée. Étudions le mouvement du centre d'inertie G du projectile.



1. *Mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur, localement uniforme. A l'instant $t=0$, le centre d'inertie G du projectile est en 0 et sa vitesse $\vec{v}_0$ est dans le plan vertical passant par 0*

4.2.1 accélération du centre d'inertie

Le théorème du centre d'inertie permet de déterminer l'accélération du point G.

1. *Choix du référentiel :* pour un lancer de courte durée (trajet de quelques kilomètres), le référentiel terrestre peut être considéré comme galiléen.

2. *Choix du système :* le projectile.

3. *Bilan des forces appliquées :* les frottements de l'air étant négligés, le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ est la seule force appliquée. La chute est *libre.*

4. *Application du théorème du centre d'inertie :*

$$m\vec{a}_G = \vec{P} = m\vec{g};$$

d'où :
$$\vec{a}_G = \vec{g}.$$

• Lors d'un mouvement de chute libre dans le champ de pesanteur terrestre localement uniforme, le vecteur accélération du centre d'inertie du projectile est constamment égal au vecteur champ de pesanteur. Le mouvement est indépendant de la masse du projectile.

4.2.2 équations vectorielles du mouvement du centre d'inertie

Le vecteur accélération $\vec{a}_G$ du centre d'inertie du projectile dans le champ de pesanteur localement uniforme est donc constant :

$$\vec{a}_G = \vec{g}. \qquad (1)$$

Précisons les conditions initiales de lancement : à l'instant $t=0$, le centre d'inertie occupe la position G_0 et sa vitesse est $\vec{v}_0$. Les équations vectorielles du mouvement s'obtiennent alors par intégrations successives de l'équation (1) [*cf.* 1.3.5] :

$$\vec{v} = t\vec{g} + \vec{v}_0; \qquad (2)$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}t^2\vec{g} + t\vec{v}_0 + \overrightarrow{OG}_0, \qquad (3)$$

où O est l'origine du repère choisi (voir 4.2.3), associé au référentiel terrestre.

4.2.3 équations horaires

Il convient de choisir le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le mieux adapté pour déterminer les coordonnées des vecteurs accélération, vitesse et position du centre d'inertie du projectile. Nous pouvons adopter (*fig.* 2) :

Scanné avec CamScanner

• l'axe $(O, \vec{k})$ vertical ascendant; alors :

$$\vec{g} = -g\vec{k}, \quad \text{avec} \quad g = \|\vec{g}\|;$$

• l'axe $(O, \vec{i})$ horizontal, le plan $(\vec{i}, \vec{k})$ contenant le vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$, vecteur caractérisé par la mesure α de l'angle $(\vec{i}, \vec{v}_0)$ telle que $0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$; alors :

$$\vec{v}_0 = v_0 \cos\alpha\,\vec{i} + v_0 \sin\alpha\,\vec{k}, \quad \text{avec} \quad v_0 = \|\vec{v}_0\|;$$

• l'axe $(O, \vec{j})$, horizontal, tel que la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ soit directe;

• l'origine O du repère en coïncidence avec la position initiale G_0; le vecteur position $\overrightarrow{OG_0}$ est alors nul.

Dans ce repère, les équations cartésiennes du mouvement s'obtiennent en projetant les relations vectorielles (1), (2) et (3) dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\vec{a}_G \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} ; \quad \vec{v}_G \begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos\alpha \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases} ;$$

$$\overrightarrow{OG} \begin{cases} x = (v_0 \cos\alpha)\,t \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2} g t^2 + (v_0 \sin\alpha)\,t. \end{cases}$$

Les équations horaires du mouvement nous montrent que (*fig.* 2) :

• le mouvement du projeté de G selon l'horizontale [axe $(O, \vec{i})$] est uniforme;

• le mouvement du projeté de G selon la verticale [axe $(O, \vec{k})$] est uniformément varié.

Cas particuliers

Pour $\vec{v}_0 = \vec{0}$, nous obtenons l'équation d'un mouvement de chute libre sans vitesse initiale :

$$z = -\frac{1}{2} g t^2.$$

Pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, le vecteur vitesse initial est parallèle à $\vec{g}$; le mouvement est rectiligne, uniformément varié, selon la verticale :

$$z = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t.$$

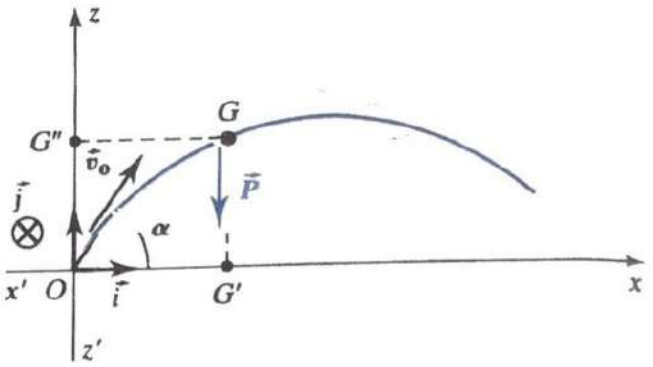
4.2.4 étude de la trajectoire

Pour $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, l'équation cartésienne de la trajectoire dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ s'obtient en éliminant le temps t entre les expressions $x(t)$ et $z(t)$; il vient :

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}; \quad \text{d'où} \quad z = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} x,$$

soit, avec $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$:

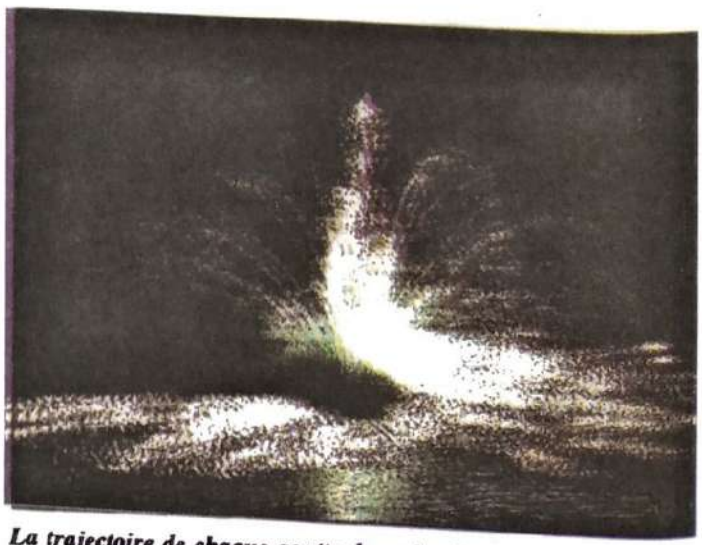
$$z = -\frac{g}{2v_0^2}(1 + \tan^2\alpha)\,x^2 + (\tan\alpha)\,x.$$



2. ***Mouvement du centre d'inertie du projectile dans le repère*** $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ **:**

• ***le point G' décrit l'axe horizontal*** $(O, \vec{i})$ ***avec un mouvement uniforme;***

• ***le point G'' décrit l'axe vertical*** $(O, \vec{k})$ ***avec un mouvement uniformément varié.***



La trajectoire de chaque goutte de ce jet d'eau est une parabole.

Scanné avec CamScanner

Nous avons là l'équation d'une parabole située dans le plan de tir $(O, \vec{i}, \vec{k})$ et dont la concavité est tournée vers le bas.

• Le mouvement du centre d'inertie d'un projectile en chute libre dans le champ de pesanteur localement uniforme est soit rectiligne uniformément varié (tir vertical), soit parabolique, les mouvements projetés étant alors respectivement uniforme selon l'horizontale et uniformément varié selon la verticale.

Examinons quelques caractéristiques de la trajectoire parabolique (*fig.* 3).

1. La **flèche** est l'altitude maximale h atteinte par le projectile. Soit M le point correspondant sur la trajectoire et situé au sommet de la parabole; on a :

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_M = \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x_M + \tan \alpha = 0,$$

soit : $$x_M = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha \tan \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g},$$

ou encore : $$x_M = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}.$$

Nous obtenons alors :

$$z_M = h = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \left(\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}\right)^2 + \tan \alpha \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g},$$

ou encore : $$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

La flèche est évidemment maximale pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (tir vertical).

2. La **portée horizontale** est l'abscisse d du point C de la trajectoire d'ordonnée nulle, c'est-à-dire situé dans le plan horizontal passant par O. Avec $z_C = 0$, on obtient :

$$0 = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x_C^2 + (\tan \alpha) x_C.$$

La solution $x = 0$ correspond au point de lancement O, l'autre solution au point C; d'où :

$$x_C = d = \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha \tan \alpha}{g} = \frac{2v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g},$$

ou encore : $$d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

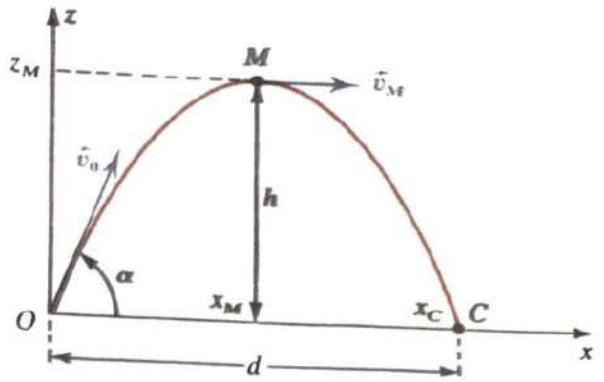
Remarquons que $d = 2x_M$.

Pour une vitesse initiale v_0 donnée, la portée est maximale pour $\sin 2\alpha = 1$, soit $\alpha = 45°$; d'où $d_{max} = \frac{v_0^2}{g}$.

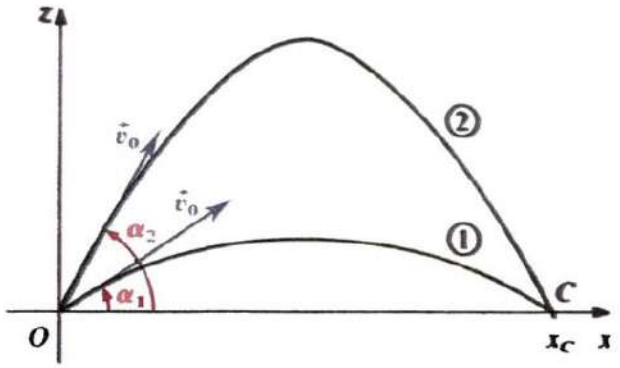
Pour $d < d_{max}$, $\sin 2\alpha = \frac{gd}{v_0^2}$. Cette équation admet deux solutions α_1 et α_2 telles que $2\alpha_2 = \pi - 2\alpha_1$, soit :

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1.$$

Deux angles de tir sont donc possibles pour obtenir une même portée horizontale (*fig.* 4).
Pour la portée maximale, $\alpha_1 = \alpha_2 = 45°$.

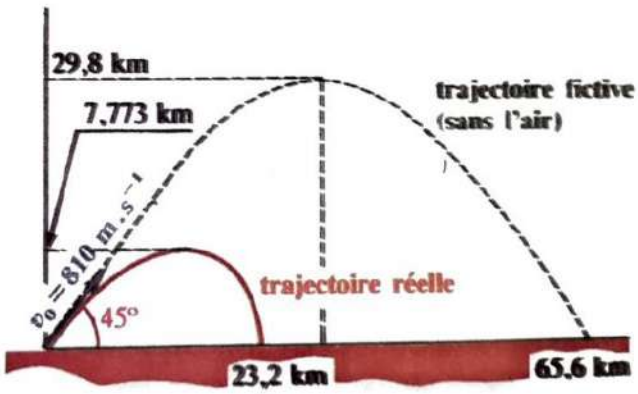


3. *Caractéristiques d'une trajectoire parabolique : α est l'angle de tir, h, la flèche, et d, la portée horizontale.*



4. *La vitesse initiale $\vec{v}_0$ étant fixée, il y a deux angles de tir possibles pour atteindre la point C tel que $x_C = d \leq v_0^2/g$:*

- α_1 : *tir tendu;*
- $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1$: *tir en cloche.*



vitesse initiale : 810 m · s⁻¹
distance de tir : 23 200 m
flèche : 7 733 m
angle de tir : 45°

5. *Trajectoires réelles et fictives d'un obus de 155. Ces trajectoires diffèrent notablement en raison de la résistance de l'air.*

Scanné avec CamScanner

APPLICATION 1

Un projectile est lancé dans le champ de pesanteur (fig. 3) avec une vitesse $v_0 = 200\ m.s^{-1}$.

Calculer, pour une portée horizontale $d = 2\,500$ m :

a/ les angles de tir possibles;
b/ la flèche;
c/ la durée du tir, l'impact se produisant sur le sol, plan horizontal qui contient le point de lancement;
d/ la vitesse lors de l'impact.

On prendra $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$.

a/ Nous avons :

$$\sin 2\alpha = \frac{gd}{v_0^2} = \frac{9{,}8 \times 2\,500}{(200)^2} = 0{,}612\,5;$$

d'où : $2\alpha_1 = 37{,}8°$, soit $\alpha_1 = 18{,}9°$,

et : $2\alpha_2 = \pi - 2\alpha_1 = 142{,}2°$, soit $\alpha_2 = 71{,}1°$.

b/ Nous avons $h = \dfrac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$; d'où :

avec $\alpha_1 = 18{,}9°$, $h = 214$ m (tir tendu);

avec $\alpha_2 = 71{,}1°$, $h = 1825$ m (tir en cloche).

c/ L'équation horaire du mouvement selon la verticale est :

$$z = -\frac{1}{2} gt^2 + (v_0 \sin \alpha)\, t.$$

Le projectile heurte le sol en C tel que :

$$z_C = 0 = t\left(-\frac{1}{2} gt + v_0 \sin \alpha\right);$$

d'où : $$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g},$$

soit, avec α_1, $t_1 = 13{,}2$ s et, avec α_2, $t_2 = 38{,}6$ s.

d/ Des équations donnant les coordonnées du vecteur vitesse en fonction du temps, nous tirons :

$$\begin{cases} \dot{x}_C = v_0 \cos \alpha \\ \dot{y}_C = 0 \\ \dot{z}_C = -v_0 \sin \alpha; \end{cases}$$

d'où : $v_C = \sqrt{\dot{x}_C^2 + \dot{z}_C^2} = v_0 = 200\ m.s^{-1}$.

La norme du vecteur $\vec{v}_C$ est égale à v_0 et sa direction est symétrique de celle du vecteur $\vec{v}_0$ par rapport à l'axe $(O, \vec{k})$. Ce dernier résultat peut être déduit directement des propriétés de symétrie de la parabole.

4.2.5 problème du tir

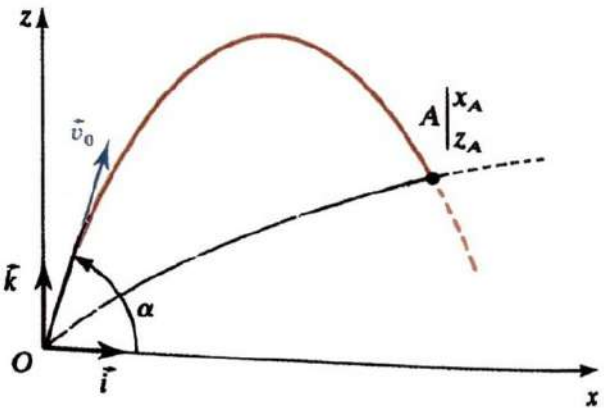
A partir d'un point O, on veut lancer un projectile avec une vitesse $\vec{v}_0$ convenable pour qu'il atteigne une cible A. On néglige les frottements dus à l'air.
Le vecteur $\vec{v}_0$ sera supposé situé dans le plan vertical contenant les points O et A et le repère, choisi en conséquence : O origine du repère; $\vec{k}$ vertical orienté vers le haut; plan de tir $(O, \vec{i}, \vec{k})$ contenant le point A (*fig.* 6).
Dans ce repère, la trajectoire du centre d'inertie du projectile obéit à l'équation :

$$z = -\frac{g}{2v_0^2}(1 + \tan^2 \alpha)\, x^2 + (\tan \alpha)\, x.$$

Le point A, de coordonnées (x_A, y_A, z_A), est situé sur cette trajectoire; d'où :

$$z_A = -\frac{g}{2v_0^2}(1 + \tan^2 \alpha)\, x_A^2 + (\tan \alpha)\, x_A.$$

Généralement la norme v_0 de la vitesse initiale est imposée. On résout alors l'équation du second degré avec $\tan \alpha$ comme inconnue.
On trouve généralement deux angles de tir possibles : α_1 et α_2 (tir tendu et tir en cloche). Si l'équation n'admet pas de solution, c'est que le point A ne peut être atteint.



6. ***Comment atteindre le point A à partir du point O?***

4.2.6 énergies cinétique et potentielle

Soit un axe $(O, \vec{k})$ vertical ascendant, et notons $g = \|\vec{g}\|$. Lorsqu'un corps ponctuel se déplace d'un point A (cote z_A) vers un point B (cote z_B), nous avons vu en classe de Première que le travail du poids de ce corps dans le référentiel terrestre vaut :

$$W_{A \to B}(\vec{P}) = mg(z_A - z_B).$$

Scanné avec CamScanner

Si $\vec{P}$ est la seule force appliquée, le théorème de l'énergie cinétique donne :

$$W_{A\to B}(\vec{P}) = \mathcal{E}_{c_B} - \mathcal{E}_{c_A} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2;$$

d'où :
$$mg(z_A - z_B) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2,$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + mgz_B = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgz_A,$$

soit :
$$\mathcal{E}_{c_B} + \mathcal{E}_{p_B} = \mathcal{E}_{c_A} + \mathcal{E}_{p_A},$$

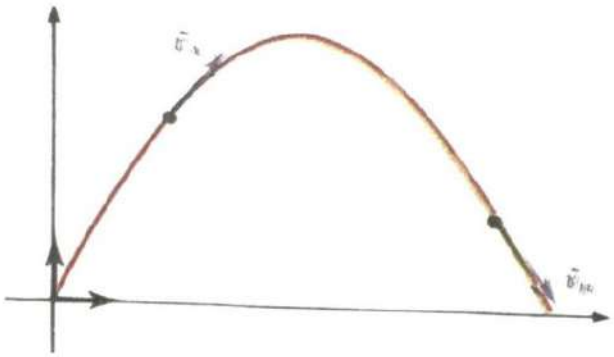
où $\mathcal{E}_p = mgz$ est l'énergie potentielle de pesanteur du corps à la cote z (énergie définie à une constante additive près, qui n'intervient pas dans le bilan, voir cours de Première).

Cette équation traduit la conservation de l'énergie mécanique (*fig.* 7). Nous en déduisons :

$$\boldsymbol{v_B^2 = v_A^2 + 2g(z_A - z_B).}$$

La vitesse v_B du corps ponctuel en un point B d'altitude z_B peut donc être calculée à partir de l'altitude z_A et de la vitesse v_A en un point A de la trajectoire.

Remarque : Pour un corps non ponctuel, il faudrait aussi prendre en compte l'énergie cinétique de rotation propre. En fait, le champ de pesanteur, localement uniforme, n'affectant pas la rotation propre, l'énergie cinétique liée à cette dernière reste constante, et n'intervient pas dans le bilan.



7. Conservation de l'énergie mécanique (la résistance de l'air étant négligée) :

$$mgz_A + \frac{1}{2}mv_A^2 = mgz_B + \frac{1}{2}mv_B^2.$$

APPLICATION 2

Une cible est située en un point A qui, dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, *a pour coordonnées* $x_A = 30$ m *et* $z_A = 20$ m (fig. 8). *A partir d'un point C de coordonnées* $x_C = 0$ *et* $z_C = 10$ m, *un projectile est lancé avec une vitesse* $v_C = 50\ m.s^{-1}$.
Déterminer les angles de tir qui permettent d'atteindre la cible.
On prendra $g = 10\ m.s^{-2}$.

Soit G le centre d'inertie du projectile. L'équation vectorielle du mouvement s'écrit :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}t^2\vec{g} + t\vec{v}_0 + \overrightarrow{OG}_0.$$

La position initiale du point G ne coïncide pas avec l'origine O du repère. Avec :

$$\overrightarrow{OG}_0 = z_0\vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{v}_0 = v_0\cos\alpha\,\vec{i} + v_0\sin\alpha\,\vec{k},$$

il vient :

$$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = (v_0\cos\alpha)\,t \\ y = 0 \\ z = -\dfrac{1}{2}gt^2 + (v_0\sin\alpha)\,t + z_0. \end{cases}$$

Nous en déduisons l'équation de la trajectoire :

$$z = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + (\tan\alpha)\,x + z_0.$$

Numériquement :

$$z = -\frac{10}{5.10^3}(1+\tan^2\alpha)\,x^2 + (\tan\alpha)\,x + 10.$$

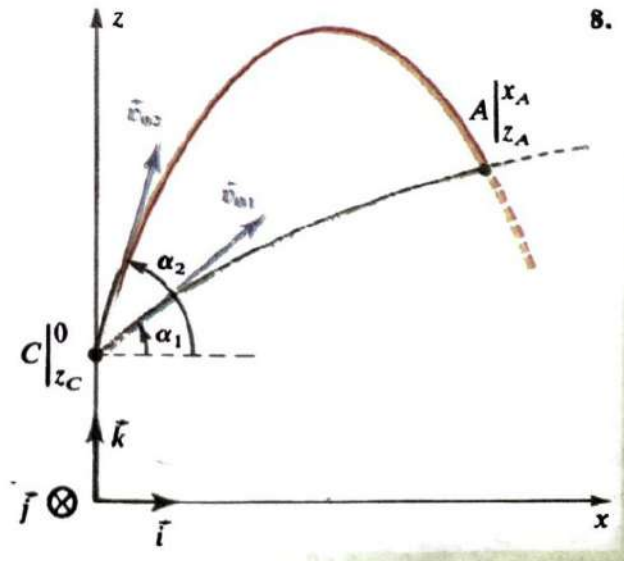
Le point A appartient à la trajectoire; d'où :

$$20 = -2.10^{-3}(1+\tan^2\alpha)\,9.10^2 + (\tan\alpha)\,30 + 10.$$

Nous sommes amenés à résoudre l'équation en $\tan\alpha$:

$$1{,}8\tan^2\alpha - 30\tan\alpha + 11{,}8 = 0;$$

d'où : $\tan\alpha_1 = 0{,}4$, soit $\alpha_1 \approx 22°$ (tir tendu);
$\tan\alpha_2 = 16{,}3$, soit $\alpha_2 \approx 86°$ (tir en cloche).



8.

APPLICATION 3

Un projectile est lancé depuis l'origine d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec une vitesse initiale $v_0 = 200\ m.s^{-1}$.

1/ Exprimer la vitesse v du projectile en fonction de son altitude z.

2/ Calculer :
a/ la vitesse au point d'impact C dans le plan horizontal contenant le point de lancement O;
b/ la vitesse à l'altitude 100 m;
c/ la valeur maximale de la flèche.

On prendra $g = 10\ m.s^{-2}$.

1/ La conservation de l'énergie mécanique s'écrit :

$$mgz + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2;$$

d'où : $v = \sqrt{v_0^2 - 2gz} = \sqrt{4.10^4 - 20z}$.

2/ a/ Pour $z = 0$ (points C et O), il vient :

$$v = v_0 = 200\ m.s^{-1}.$$

b/ Pour $z = 100$ m, il vient :

$$v = 195\ m.s^{-1}.$$

c/ La flèche est maximale pour un tir vertical $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$, et $v = 0$ en ce point, soit :

$$z = \frac{v_0^2}{2g} = 2\,000\ m.$$

4.3 mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme

Une particule de masse m, portant une charge électrique q, est lancée à la vitesse $\vec{v}_0$ dans une région de l'espace où règne un champ électrostatique uniforme $\vec{E}$ indépendant du temps.
Étudions le mouvement de la particule.

4.3.1 réalisation d'un champ électrostatique uniforme

Entre deux plaques conductrices (A) et (B), parallèles (*fig.* 9) et soumises à une différence de potentiel $V_A - V_B = u_{AB}$, règne un champ électrostatique uniforme $\vec{E}$ indépendant du temps si la tension u_{AB} est elle-même indépendante du temps.
La *d.d.p.* entre deux points M et N d'un tel champ est donnée par la relation (cours de Première) :

$$V_M - V_N = u_{MN} = \vec{E} \cdot \overrightarrow{MN}.$$

Les plans équipotentiels sont parallèles aux plaques. Le vecteur $\vec{E}$ est orthogonal aux plaques et *son sens est celui des potentiels décroissants.*
Pour deux points A et B situés sur chacune des plaques :

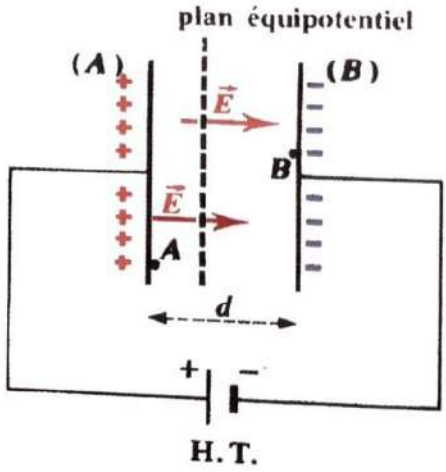
$$V_A - V_B = u_{AB} = \vec{E} \cdot \overrightarrow{AB},$$

soit :

$$U = Ed,$$

avec $U = |u_{AB}|$, $E = \|\vec{E}\|$ et où d est la distance entre les plaques.

La tension U se mesure en **volts** (symbole : **V**), la distance d en **mètres** (symbole : **m**) et l'intensité E du champ électrostatique en **volts par mètre** (symbole : $\mathbf{V.m^{-1}}$).



9. ***Champ électrostatique uniforme :***
- ***les plans équipotentiels sont parallèles aux plaques;***
- ***le vecteur $\vec{E}$, orthogonal aux plaques, a le sens des potentiels décroissants;***
- ***$u_{AB} = U = \vec{E} \cdot \overrightarrow{AB} = Ed$.***

Scanné avec CamScanner

4.3.2 accélération de la particule

Le théorème du centre d'inertie permet de déterminer l'accélération $\vec{a}$ de la particule.

1. *Choix du référentiel :* le référentiel du laboratoire, considéré comme galiléen.

2. *Choix du système :* la particule chargée, confondue avec son centre d'inertie G.

3. *Bilan des forces appliquées :* la force électrostatique $\vec{F} = q\vec{E}$, constante. Le poids est négligeable devant cette action.

4. *Application du théorème du centre d'inertie :*

$$\vec{F} = q\vec{E} = m\vec{a} ;$$

d'où :

$$\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$$

• Le vecteur accélération d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme est constant, colinéaire au champ et dépend de la charge et de la masse de la particule.

4.3.3 équations vectorielles du mouvement

Soient G_0 et $\vec{v}_0$ la position et le vecteur vitesse de la particule à l'instant initial dans une région de l'espace où règne un champ uniforme $\vec{E}$. Les équations vectorielles du mouvement s'obtiennent par intégrations successives du vecteur accélération constant :

$$\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E},$$

$$\vec{v} = \frac{q}{m}t\vec{E} + \vec{v}_0,$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\frac{q}{m}t^2\vec{E} + t\vec{v}_0 + \overrightarrow{OG}_0.$$

Remarquons la similitude complète avec les équations du mouvement d'un point matériel dans le champ de pesanteur; il suffit de remplacer $\vec{g}$ par $\frac{q}{m}\vec{E}$. Il est important cependant de noter qu'ici l'accélération dépend de la masse de la particule.

4.3.4 énergie cinétique et énergie potentielle électrique

Rappelons les principaux résultats acquis en classe de Première lors de l'étude de l'énergie potentielle d'une charge q placée dans un champ électrostatique $\vec{E}$.
Lorsqu'une particule se déplace d'un point A vers un point B dans un champ électrostatique uniforme $\vec{E}$, le travail de la force d'origine électrostatique est égal à (*fig.* 11) :

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = q\vec{E}.\overrightarrow{AB} ;$$

or :

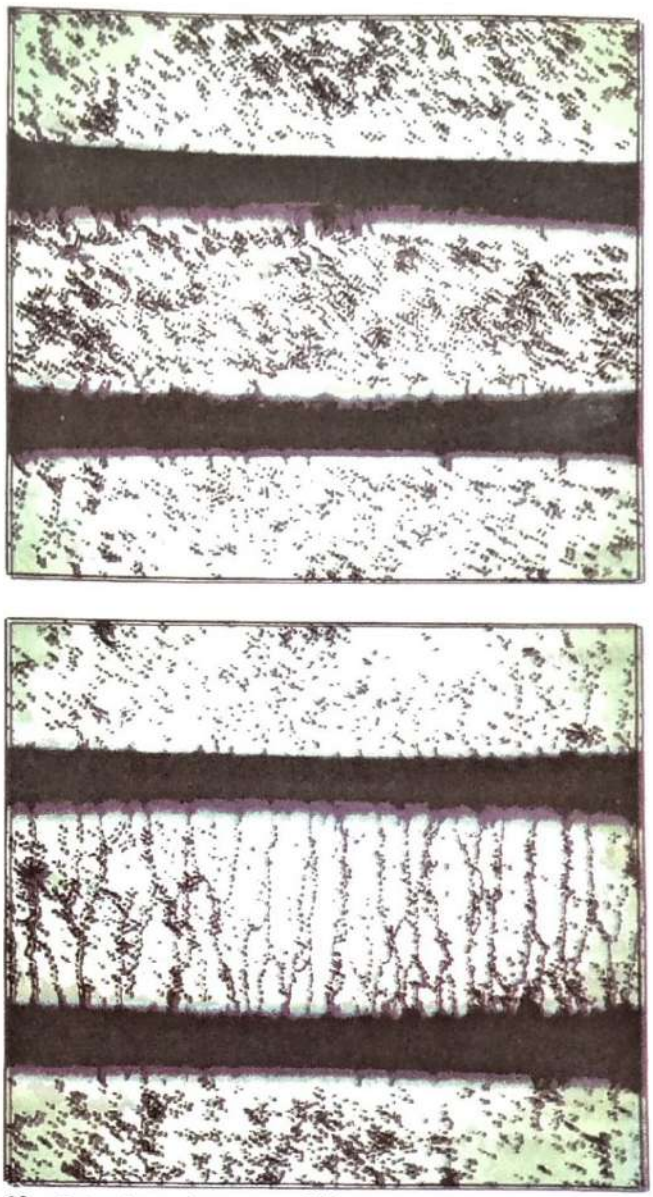
$$\vec{E}.\overrightarrow{AB} = V_A - V_B,$$

soit :

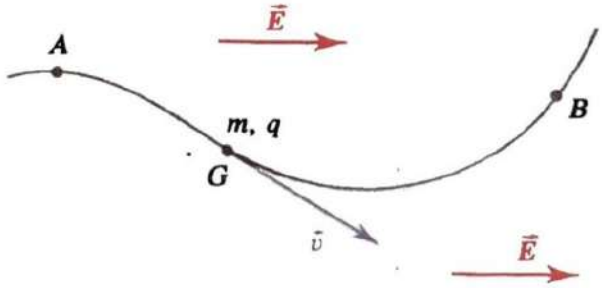
$$W_{A\to B}(\vec{F}) = q(V_A - V_B)$$

Si $\vec{F}$ est la seule force appliquée, le théorème de l'énergie cinétique donne :

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \mathcal{E}_{c_B} - \mathcal{E}_{c_A} ;$$



10. ***Entre deux plaques parallèles, un liquide isolant supporte des graines très légères.***
En haut, les plaques ne sont pas sous tension : les graines sont réparties de façon quelconque.
En bas, les plaques sont sous tension : les graines sont alignées selon la direction du champ électrostatique.



11. ***La particule, de masse m et de charge q, se déplace dans un champ électrostatique uniforme. On a alors :***

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + qV_B = \frac{1}{2}mv_A^2 + qV_A.$$

d'où : $$\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_A^2=q(V_A-V_B),$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2+qV_B=\frac{1}{2}mv_A^2+qV_A,$$

soit : $$\mathcal{E}_{c_B}+\mathcal{E}_{p_B}=\mathcal{E}_{c_A}+\mathcal{E}_{p_A},$$

où $\mathcal{E}_p=qV$ est l'énergie potentielle électrostatique, ou électrique, de la charge en un point où le potentiel est V par rapport à une référence de potentiel nul.
Cette équation traduit la conservation de l'énergie totale de la particule.

Remarque : On peut démontrer que la relation de conservation de l'énergie reste valable lorsque le champ $\vec{E}$ n'est pas uniforme.

Rappelons que q se mesure en **coulombs** (symbole : **C**), V en **volts** (symbole : **V**), $\mathcal{E}_p$ et $\mathcal{E}_c$ en **joules** (symbole : **J**). Pour ces deux dernières grandeurs, on utilise aussi l'**électronvolt** (symbole : **eV**) :

$$1\ \text{eV}=1{,}6\cdot10^{-19}\ \text{J}.$$

4.3.5 deux dispositifs simples

1. Canon à électron

Appliquons une tension $u_{AC}=U>0$ entre deux plaques parallèles (A) et (C). Entre celles-ci règne donc un champ électrique uniforme $\vec{E}$ (*fig.* 12).
Un filament chauffant émet des électrons qui pénètrent entre les deux plaques en O, avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ colinéaire à $\vec{E}$. Les équations vectorielles du mouvement d'un électron s'écrivent :

$$\vec{a}=\frac{q}{m}\vec{E},\qquad \vec{v}=\frac{q}{m}t\vec{E}+\vec{v}_0,$$

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}\frac{q}{m}t^2\vec{E}+t\vec{v}_0,$$

l'instant où l'électron pénètre dans le champ étant choisi comme origine des dates ($\overrightarrow{OG}_0=\vec{0}$).
Projetons ces équations sur l'axe Ox du repère (*fig.* 12); nous obtenons, avec $q=-e$:

$$\ddot{x}=\frac{e}{m}E,\quad \dot{x}=\frac{e}{m}Et+v_0,\quad x=\frac{1}{2}\frac{e}{m}Et^2+v_0t.$$

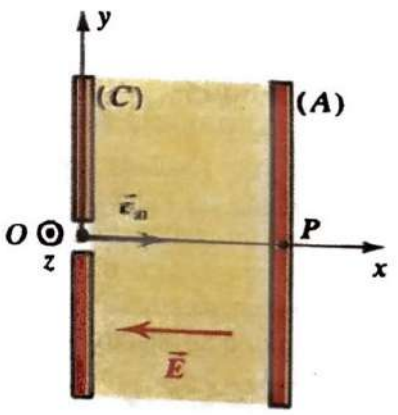
Le mouvement des électrons est donc rectiligne uniformément varié entre les deux plaques.

La vitesse d'un électron lorsqu'il arrive en P (*fig.* 12) peut être calculée à l'aide de la relation de conservation de l'énergie totale; il vient :

$$\frac{1}{2}mv_0^2+qV_C=\frac{1}{2}mv_P^2+qV_A,$$

soit : $$\frac{1}{2}mv_0^2-eV_C=\frac{1}{2}mv_P^2-eV_A,$$

et : $$v_P^2=v_0^2+\frac{2e}{m}(V_A-V_C).$$



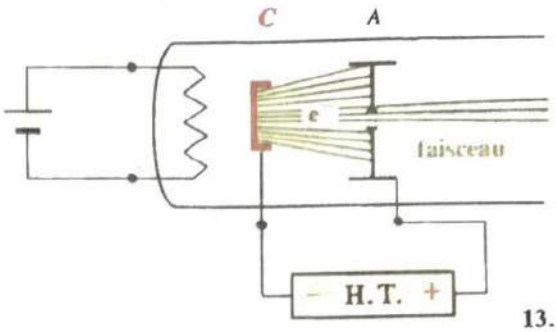
12.

APPLICATION 4

Dans le canon à électrons de la figure 13, les électrons sont émis à la cathode C avec une vitesse négligeable v_C. On applique entre l'anode A percée et la cathode une tension accélératrice $u_{AC} = U$ (positive).
Calculer l'énergie cinétique et la vitesse des électrons traversant l'anode pour $U = 5\,000$ V puis $U = 500\,000$ V.

On donne la masse et la charge d'un électron :

$$m = 9{,}1.10^{-31}\ kg, \quad q = -e = -1{,}6.10^{-19}\ C.$$



13.

Entre l'anode et la cathode, le champ électrique n'est ici manifestement pas uniforme. Néanmoins, la conservation de l'énergie s'applique toujours sous la forme :

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + qV_A = \frac{1}{2}mv_C^2 + qV_C,$$

ou encore :

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_C^2 + q(V_C - V_A)$$
$$= \frac{1}{2}mv_C^2 + eu_{AC}.$$

Or $v_C \approx 0$; d'où :

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = eU, \quad \text{et} \quad v_A = \sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

Pour $U = 5\,000$ V :

$\mathcal{E}_{c_A} = 5\,000$ eV $= 8.10^{-16}$ J et $v_A = 4{,}2 \cdot 10^7$ m.s^{-1}.

Pour $U = 500\,000$ V :

$\mathcal{E}_{c_A} = 0{,}5$ MeV et $v_A = 4{,}2.10^8$ m.s^{-1},

vitesse supérieure à la célérité de la lumière dans le vide (3.10^8 m.s^{-1})! Nous verrons, en mécanique relativiste, qu'aucune particule ne peut se déplacer à une vitesse supérieure à celle de la lumière dans le vide. La formule $\frac{1}{2}mv^2$ donnant l'énergie cinétique des particules n'est plus valable quand les vitesses deviennent voisines de celle de la lumière dans le vide.

2. Appareil à déviation électrostatique

Examinons maintenant le cas d'une particule chargée lancée *parallèlement* aux plaques (*A*) et (*B*), c'est-à-dire perpendiculairement aux lignes de champ (*fig.* 14).
L'instant où la particule pénètre dans le champ avec la vitesse $\vec{v}_0$ est choisi comme origine des dates. A cet instant, la particule est située au point *O* adopté comme origine du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que $\vec{i}$ ait l'orientation de $\vec{v}_0$ et $\vec{j}$ celle de $\vec{E}$. Ainsi :

$$\vec{v}_0 = v_0\vec{i} \quad \text{et} \quad \vec{E} = E\vec{j}.$$

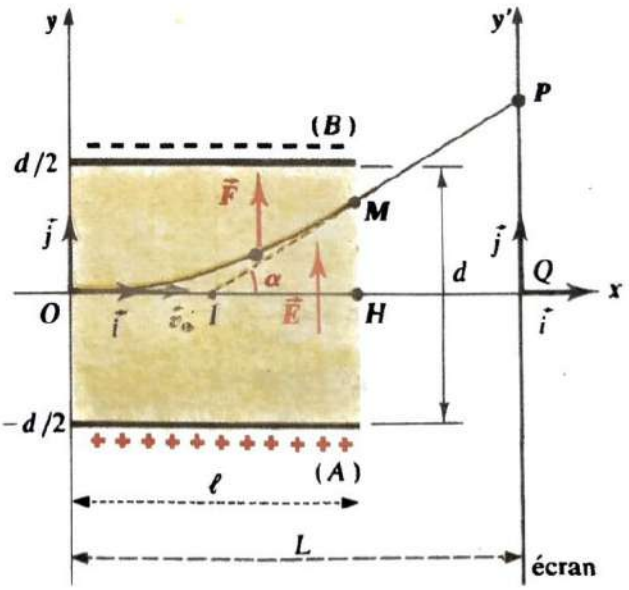
Les équations vectorielles du mouvement donnent en projection sur les axes :

$$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = v_0 t \\ y = \frac{1}{2}\frac{q}{m}Et^2 \\ z = 0. \end{cases}$$

L'équation cartésienne de la trajectoire de la particule dans le champ uniforme est donc :

$$y = \frac{1}{2}\frac{qE}{mv_0^2}x^2,$$

avec $O \leqslant x \leqslant \ell$, ℓ étant la longueur des plaques.
La particule décrit une trajectoire parabolique de sommet O.
La trajectoire correspond sur la figure 14 à celle d'une particule de charge *q* positive. Avec une charge négative la déviation se ferait vers le bas.



14. ***Trajectoire d'une particule chargée positivement entre deux plaques parallèles soumises à une tension $u_{AB} = Ed$.***
De O à M, la trajectoire est parabolique. De M à P, la trajectoire est rectiligne. La droite (MP) passe par le point I, milieu de OH. Elle est tangente à la trajectoire parabolique en M.

Scanné avec CamScanner

A la sortie du champ (en M, *fig.* 14), les particules ne sont plus soumises à aucune action : leur mouvement est rectiligne uniforme.
Plaçons une plaque sensible, formant écran, perpendiculairement à l'axe $(O, \vec{i})$, à une distance L du point O. On observe le point d'impact P du faisceau. Une particule subit la déviation $y(P) = QP$.

• ***Condition pour que les particules sortent du champ***

Soit d la distance qui sépare les plaques et ℓ leur longueur. Le faisceau sort des plaques si, pour $x = \ell$, $y < \frac{d}{2}$, soit :

$$y(\ell) = \frac{qE}{2mv_0^2}\ell^2 < \frac{d}{2};$$

avec $E = \frac{U_{AB}}{d} = \frac{U}{d}$, la condition s'écrit :

$$\frac{qU\ell^2}{mv_0^2 d^2} < 1.$$

Par exemple, pour U donnée, les particules sortent du champ si $v_0^2 > \frac{qU\ell^2}{md^2}$. Sinon, elles sont trop déviées et heurtent une plaque : plaque (B) dans le cas d'une particule chargée positivement, plaque (A) dans le cas d'une particule chargée négativement.

• ***Quelle est la déviation QP du point d'impact des particules sur l'écran?***

Le mouvement d'une particule à la sortie du champ est rectiligne uniforme ($\vec{F} = \vec{0}$) suivant la tangente à la parabole en M, point de sortie (*fig.* 14). On démontre en mathématiques(*) que cette droite passe par le milieu I du segment OH (propriété de la parabole). Le faisceau est donc dévié d'un angle α tel que :

$$\tan\alpha = \frac{y(M)}{\frac{\ell}{2}} = \frac{y(P)}{L - \frac{\ell}{2}},$$

en posant $OQ = L$.

Or $y(M) = \frac{qE\ell^2}{2mv_0^2}$; d'où :

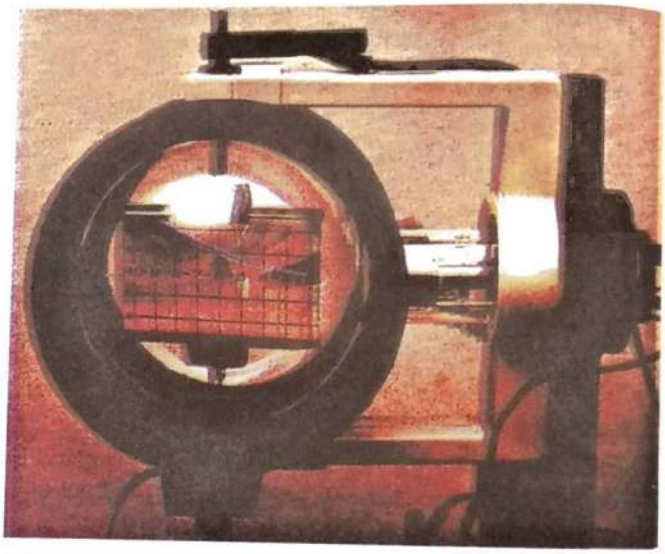
$$\tan\alpha = \frac{qE\ell}{mv_0^2}.$$

La déviation observée sur l'écran est :

$$\overline{QP} = y(P) = \frac{qE\ell}{mv_0^2}\left(L - \frac{\ell}{2}\right) = \frac{qU\ell}{mv_0^2 d}\left(L - \frac{\ell}{2}\right).$$

La mesure de la déviation QP permet de calculer le rapport $\frac{q}{mv_0^2}$, les autres grandeurs étant connues.

(*) Voir page ci-contre les compléments mathématiques.



15. ***Dispositif expérimental d'étude des déviations électrostatiques d'un faisceau d'électrons. (Les bobines qui entourent le tube sont destinées à l'étude des déviations magnétiques* [chap. 7]; *elles ne sont pas ici alimentées.)***

Ce dispositif permet donc de séparer des particules de même vitesse initiale $\vec{v}_0$ mais de charges massiques $\frac{q}{m}$ différentes (ions isotopes par exemple).
Par ailleurs, pour un faisceau de particules homocinétiques identiques, la déviation QP est proportionnelle à la tension appliquée $U = u_{AB}$. Ce résultat permet de comprendre le fonctionnement et l'utilisation d'un oscillographe (voir fiche technique).
Ce dispositif peut aussi servir d'*analyseur d'énergie* : il sépare des particules identiques, mais se déplaçant avec des énergies cinétiques différentes. Par exemple, nous verrons que certains corps radioactifs émettent des électrons (voir *chap.* 23) : tous les électrons de même énergie cinétique se concentreront en un même point de l'écran; mais, s'ils sont émis avec des énergies différentes, ils seront dispersés sur une région de l'écran.

Scanné avec CamScanner

APPLICATION 5

Un oscillographe (fig. 16) comporte un canon à électrons constitué d'une cathode C et d'une anode A entre lesquelles on applique une haute tension accélératrice $u_{AC} = U_0$. Deux plaques parallèles horizontales (Y, Y') permettent de provoquer une déviation verticale du faisceau lorsqu'elles sont soumises à une tension $u_{YY'} = U$. La plaque (Y') est reliée à la masse.

Montrer que la déviation QP observée sur l'écran est proportionnelle au rapport $\frac{U}{U_0}$.

A la sortie du canon, les électrons sont émis de la cathode sans vitesse initiale appréciable; nous pouvons donc écrire :

$$\frac{1}{2} mv_A^2 = qu_{CA} = -qU_0 = eU_0.$$

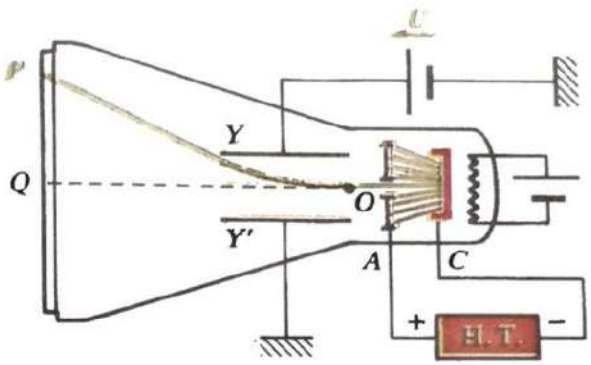
C'est avec cette énergie cinétique que les électrons pénètrent entre les plaques (Y, Y'). En adoptant les notations du cours, la déviation $D = \overline{QP}$ observée sur l'écran est :

$$D = \frac{qu_{YY'}\ell}{mv_A^2 d}\left(L - \frac{\ell}{2}\right),$$

soit, avec $q = -e$:

$$D = -\frac{\ell\left(L - \frac{\ell}{2}\right)}{2d}\frac{U}{U_0} = k\frac{U}{U_0},$$

où le facteur k ne dépend que des paramètres géométriques du système. La déviation est proportionnelle au rapport de la tension déviatrice U à la tension accélératrice U_0.
Avec U_0 fixée, la déviation n'est plus proportionnelle qu'à la tension déviatrice U; c'est le cas dans un oscillographe.



16. ***Seules les plaques de déviation verticale sont sous tension. La déviation QP du faisceau est proportionnelle à la tension U.***

COMPLÉMENTS MATHÉMATIQUES

L'équation d'une parabole d'axe Oy et de sommet O est :

$$y = ax^2, \quad \text{où} \quad a = \text{Cte}.$$

Déterminons l'équation $y = Ax + B$ de la droite Δ tangente en $M(x_M, y_M)$ à la parabole. Nous avons :

$$A = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_M} = 2ax_M.$$

De plus : $ax_M^2 = Ax_M + B$;

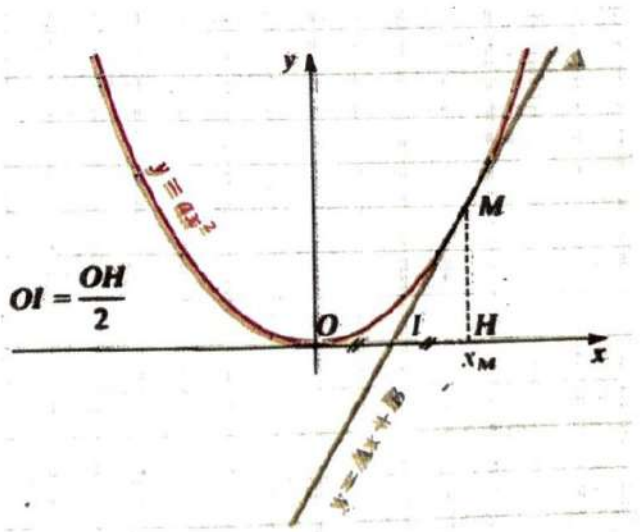
d'où : $B = -ax_M^2$,

et : $y = 2ax_M x - ax_M^2$,

soit : $y = 2ax_M\left(x - \frac{x_M}{2}\right)$.

Cette droite coupe l'axe $x'x$, tangent au sommet O de la parabole, au point I d'abscisse $x_I = \frac{x_M}{2}$; d'où :

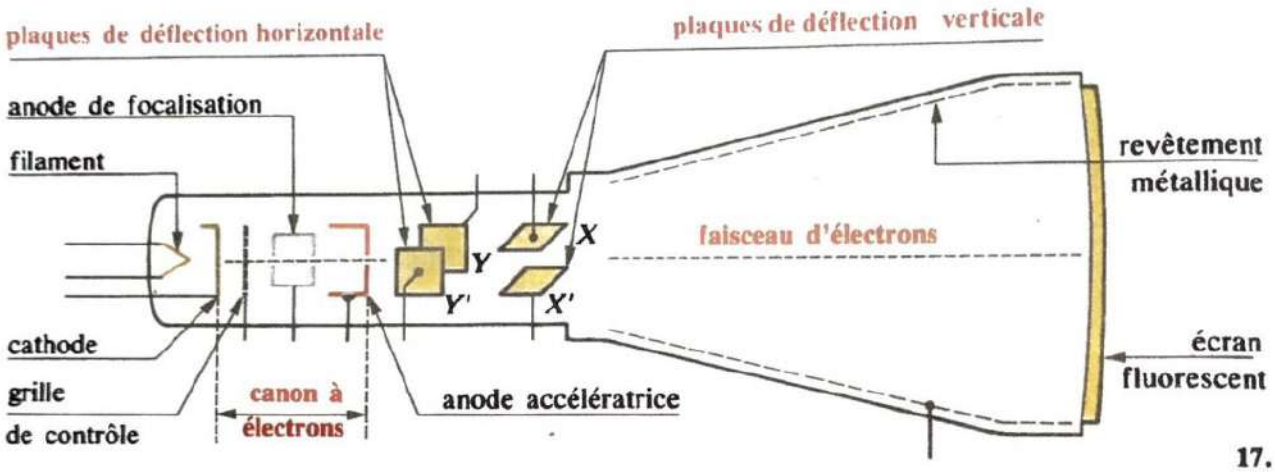
$$OI = \frac{OH}{2}.$$



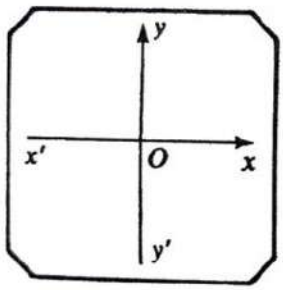
Scanné avec CamScanner

fiche technique

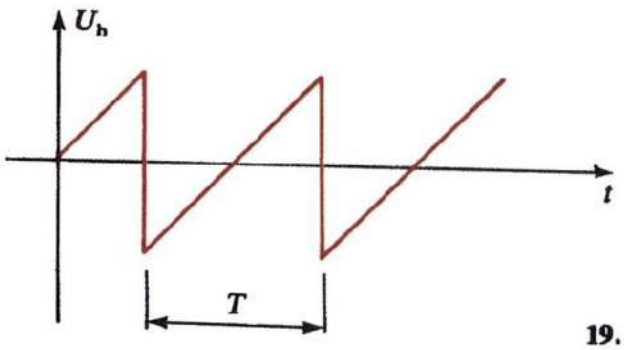
PRINCIPE DE L'OSCILLOGRAPHE



17.



18.



19.

Les électrons émis par la cathode sont accélérés par un champ électrique élevé. Un trou dans l'anode accélératrice leur permet de s'échapper du canon et de passer entre les plaques de déflexion horizontale et verticale (*fig.* 17).

Toute tension appliquée entre les plaques X et X' provoque une déviation verticale; le spot se déplace sur $y'y$ (*fig.* 18) d'une quantité y proportionnelle à la tension appliquée (*cf. application* 5) :

$$y = kU_v.$$

La mesure de y permet donc une mesure de U_v lorsque l'appareil a été étalonné; l'oscillographe est un voltmètre.

Un système incorporé à l'oscillographe peut produire une tension périodique en dents de scie U_h, de période T, entre les plaques Y et Y' (balayage).

Sur une période, la tension U_h est donc proportionnelle au temps t (*fig.* 19) :

$$t \in [nT, (n+1)T], \quad U_h = at.$$

Le déplacement du spot sur l'axe horizontal $x'x$ étant proportionnel à U_h, on a donc :

$$x = k't.$$

En l'absence de tension entre les plaques X et X', le spot est animé d'un mouvement rectiligne uniforme horizontal suivant $x'x$ pendant la montée de la tension, de gauche à droite, puis il revient brusquement vers la gauche, pour repartir à la période suivante. Lorsqu'on applique les deux tensions U_v et U_h, et si U_v dépend du temps, on obtiendra, sur une période T, la variation de U_v en fonction du temps.

La période T constitue la *base de temps* de l'oscillographe, que l'on peut régler.

Scanné avec CamScanner

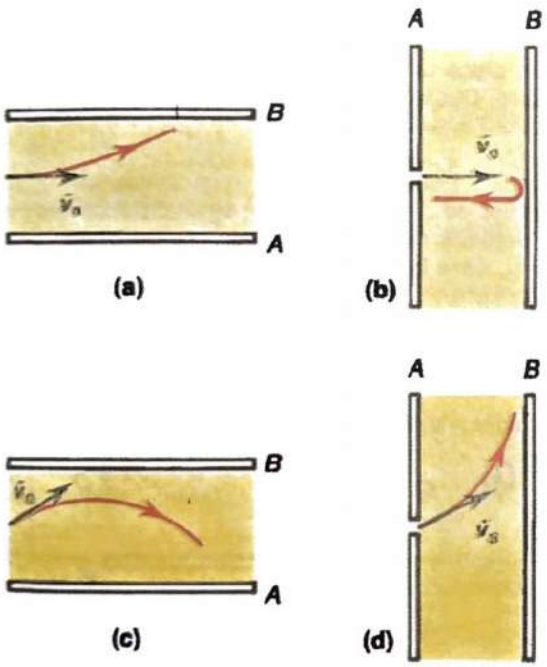
EXERCICES

L'essentiel du cours

4.1 A *Vrai* ou *faux* ?

- Un champ électrique $\vec{E}$ est uniforme si $\|\vec{E}\|$ est constante.
- L'accélération du centre d'inertie d'un solide soumis aux seules forces de pesanteur est indépendante de la masse de ce solide.
- Dans un champ électrique, l'accélération d'une particule ne dépend pas de sa masse.
- Dans un champ électrique, le vecteur accélération d'une particule et le vecteur champ sont toujours colinéaires et de même sens.
- Dans le champ de pesanteur, la trajectoire du centre d'inertie d'un solide est complètement déterminée à partir des conditions initiales.
- Dans un champ électrique uniforme, la trajectoire d'une particule chargée est circulaire.
- Dans un oscillographe, la déviation linéaire du spot sur l'écran est proportionnelle à la tension appliquée.

4.2 A Entre les deux plaques d'un condensateur plan, une différence de potentiel crée un champ électrique uniforme. Une particule chargée pénètre dans ce champ.



1/ On a représenté dans quatre cas la trajectoire d'une particule chargée positivement. Représenter dans chacun des cas le vecteur champ électrique $\vec{E}$ et le vecteur accélération $\vec{a}$ de la particule. Préciser le signe de la charge de chacune des plaques.

2/ Une particule de même masse, mais chargée négativement, pénètre dans le champ avec la même vitesse $\vec{v}_0$. Tracer approximativement, dans chaque cas, la trajectoire de la particule. Représenter le vecteur accélération.

3/ La particule ayant la même charge et la même vitesse initiale que dans la première question, on inverse le sens du champ électrique. Tracer approximativement les trajectoires dans les quatre cas de figure.

4.3 AC A l'instant $t = 0$, deux billes de centres d'inertie respectifs G et G' sont lancées dans le champ de pesanteur à partir d'un point O. Les vecteurs vitesse initiale $\vec{v}_0$ et $\vec{v}_0'$ des points G et G' ont la même norme, mais des orientations différentes.

1/ A l'aide du théorème du centre d'inertie, exprimer les vecteurs accélération $\vec{a}$ et $\vec{a}'$ des centres d'inertie de chaque bille.

2/ Par intégration, exprimer en fonction du temps, les vecteurs vitesse initiale et accélération, les vecteurs vitesse $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ et les vecteurs position $\overrightarrow{OG}$ et $\overrightarrow{OG'}$ des centres d'inertie de chaque bille.

3/ Les trajectoires des deux billes sont-elles identiques ? Sinon, quel est le paramètre à l'origine de cette différence ?

4/ A l'aide du théorème de l'énergie cinétique, montrer qu'à une même altitude h les vitesses v et v' de G et de G' sont égales.

Exercices de base

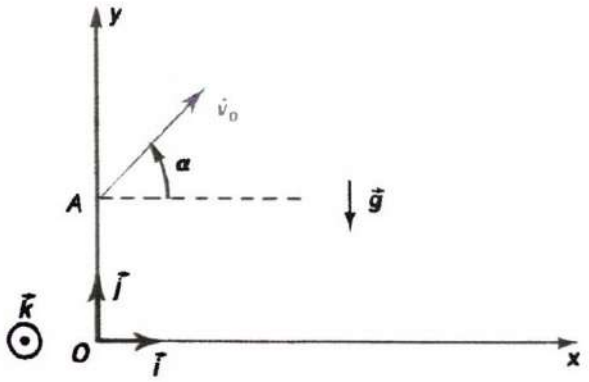
4.4 Une balle est lancée verticalement, sans rotation propre, vers le haut à partir du sol. Elle atteint une hauteur maximale $h = 15$ m et retombe verticalement. On néglige la résistance de l'air.

1/ A l'aide du théorème de l'énergie cinétique ou de l'énergie mécanique, calculer la vitesse initiale de cette balle.

Donnée : $g = 10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

2/ Établir l'équation horaire $t \mapsto z(t)$.
Quelle durée met la balle pour revenir à son point de lancement ?

4.5 Une bille M considérée comme ponctuelle est lancée, dans le champ de pesanteur, d'un point A (figure) avec une vitesse $\vec{v}_0$ faisant un angle α avec l'horizontale.



1/ A Exprimer les vecteurs vitesse $\vec{v}$ et position $\overrightarrow{OM}$ en fonction du temps t, des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\vec{v}_0$ et $\vec{g}$. Montrer que la trajectoire est située dans le plan vertical contenant $\vec{v}_0$.

2/ A Exprimer les vecteurs $\vec{v}$ et $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. En déduire les équations horaires du mouvement : $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$.

3/ AB3 Établir l'équation cartésienne de la trajectoire : $x \mapsto y(x)$.
En quel point et à quelle date la bille coupe-t-elle le plan horizontal $(O, \vec{i}, \vec{j})$? On prendra $OA = h = 5$ m.

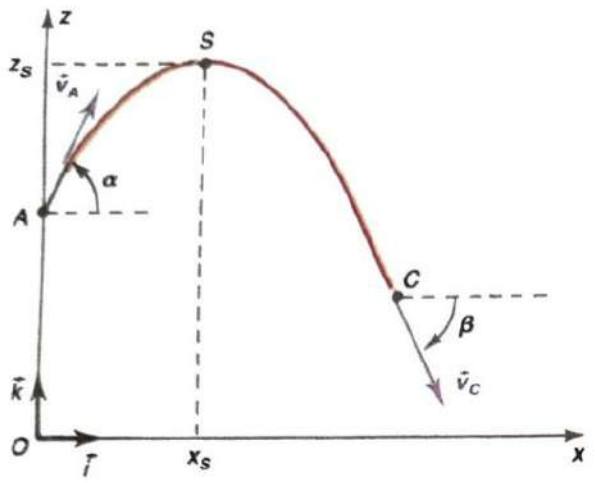
Données : $g = 10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$; $v_0 = 5\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; $\alpha = 60°$.

4.6 A Un solide de masse m est soumis aux seules forces de pesanteur. Son centre d'inertie G décrit une trajectoire parabolique dans un plan vertical (figure). A l'instant

Scanné avec CamScanner

EXERCICES

$t = 0$, G passe par le point A de coordonnées $(0, z_A)$, avec le vecteur vitesse $\vec{v}_A$ tel que $(\vec{i}, \vec{v}_A) = \alpha$. A l'instant t, G passe par le point C de coordonnées (x_C, z_C).



1/ A l'aide du théorème de l'énergie mécanique, déterminer la vitesse v_C en fonction de g, v_A, z_A et z_C.

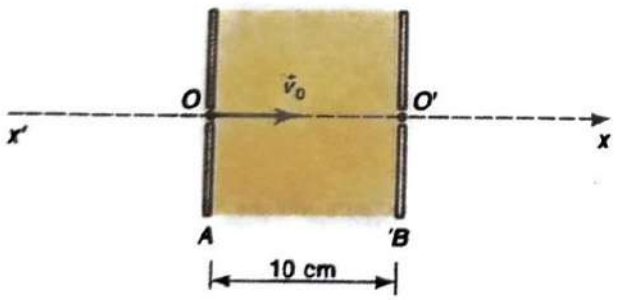
2/ Montrer que les coordonnées $\dot{x}_C$ et $\dot{x}_A$ des vecteurs $\vec{v}_C$ et $\vec{v}_A$ sont égales. En déduire :

$$\dot{z}_C = \vec{v}_C \cdot \vec{k}.$$

3/ Déterminer l'angle $\beta = (\vec{i}, \vec{v}_C)$. On exprimera $\tan\beta$ en fonction de $\dot{x}_C$ et de $\dot{z}_C$.

4/ Exprimer le vecteur vitesse $\vec{v}_S$ de G au sommet S de la trajectoire. Déterminer l'altitude maximale z_S atteinte par G en fonction de g, v_A, α et z_A.

4.7 AB3 Un proton H^+ est animé d'une vitesse $v_0 = 1\,500$ km . s^{-1}; il pénètre entre deux électrodes A et B, sous tension et distantes de 10 cm, parallèlement aux lignes de champ électrostatique. Il décrit un mouvement rectiligne suivant OO' (figure). On admettra que le champ est uniforme entre les deux plaques et que le poids du proton est négligeable.



1/ Le proton arrive en O' avec la vitesse de 2 000 km . s^{-1}. Calculer la tension $u_{AB} = V_A - V_B$.

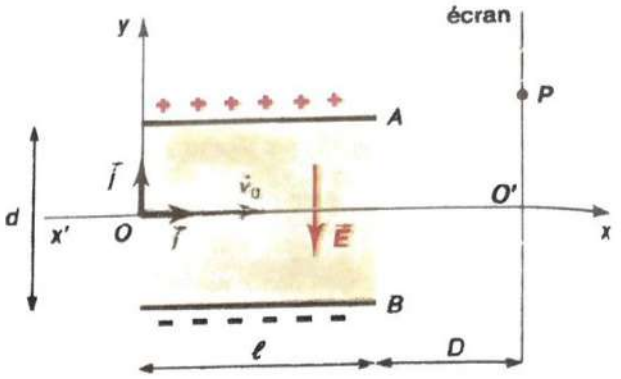
2/ Quelle est la durée du trajet OO' ?

Donnée : $m_p = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg.

4.8 AB3 On maintient entre les plaques (figure) une différence de potentiel U. La longueur de ces plaques est ℓ et leur distance est d. Un électron est injecté dans une direction perpendiculaire au champ avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{i}$, au point O milieu des plaques.

Données : $\ell = 2$ cm ; $d = 1$ cm ; $D = 50$ cm ; $U = 100$ V ; $v_0 = 10^7$ m . s^{-1} ; $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg ; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

On négligera le poids de l'électron.

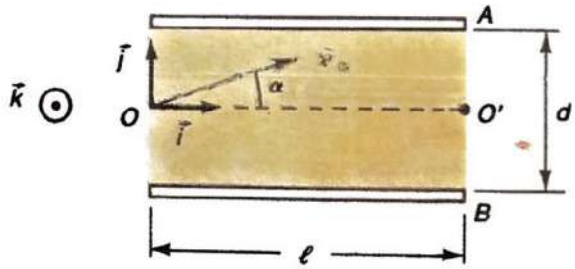


1/ Calculer le champ électrique (supposé uniforme) entre les deux plaques.

2/ L'électron sort de la région où règne le champ électrique en un point S. Calculer les coordonnées de S et celles du vecteur vitesse $\vec{v}_S$ en ce point. En déduire v_S.

3/ On place un écran à la distance D de l'extrémité des plaques. Quelle est la position du point d'impact de l'électron sur l'écran ?

4.9 A Entre les plaques d'un condensateur (figure), espacées de d, pénètre en O, à égale distance des plaques, une particule de masse m et de charge q. La vitesse initiale $\vec{v}_0$, dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$, fait un angle α avec le vecteur unitaire $\vec{i}$.



1/ La tension $U = V_A - V_B$ est positive. Tracer le vecteur champ électrique.

2/ On néglige le poids de la particule devant la force électrostatique. Représenter le vecteur accélération en un point de la trajectoire, dans chacun des cas $q > 0$ et $q < 0$.

3/ Les équations horaires de la trajectoire sont définies par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{OM} = t\vec{v}_0 + \frac{qt^2}{2m}\vec{E}.$$

Calculer $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$. Exprimer l'équation cartésienne de la trajectoire en fonction de q, $E = \|\vec{E}\|$ et $\tan\alpha$.

4/ Représenter approximativement la trajectoire pour $q > 0$ et $q < 0$.

5/ On suppose $q > 0$. Quelles doivent être la longueur ℓ des plaques et la distance minimale d pour que la particule ressorte en O', α et v_0 étant donnés ?

Scanné avec CamScanner

Banc d'essais

Mouvement rectiligne dans le champ de pesanteur

Dans tous les exercices qui suivent, on néglige les forces de frottement.

4.10 C Un projectile est lancé verticalement de la surface du sol. Un système de détection enclenche un chronomètre à l'instant du départ et enregistre les dates t_1 et t_2 de passage du projectile dans le plan horizontal d'altitude h. Déterminer la vitesse de lancement v_0 et l'altitude h en fonction des dates t_1 et t_2.

Application numérique : $t_1 = 0{,}875$ s ; $t_2 = 9{,}329$ s ; $g = 9{,}81$ m . s^{-2}.

↳ ex. 4.4.

Mouvement parabolique dans le champ de pesanteur

4.11 Deux billes identiques A et B, assimilables à des points matériels, partent en même temps d'un point O situé à la hauteur $h = 30$ m par rapport au sol dans les conditions initiales suivantes :
— la bille A n'a pas de vitesse initiale ;
— la vitesse initiale $\vec{v}_0$ de la bille B est parallèle au sol, avec $v_0 = 10$ m . s^{-1} ($g = 9{,}8$ m . s^{-2}).
Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal tel que l'axe $(O, \vec{i})$ soit dirigé suivant $\vec{v}_0$ et que l'axe $(O, \vec{k})$ soit vertical descendant.

1/ A Établir les équations horaires des mouvements et l'équation cartésienne des trajectoires.

2/ B3 Calculer les hauteurs de chute des deux billes au bout d'une seconde.

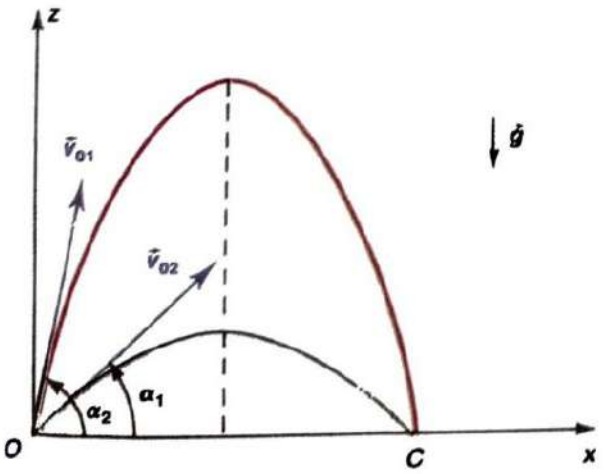
3/ B3 Déterminer la distance qui sépare sur le sol les deux points de chute.

4/ B3 Représenter sur un schéma à une date t quelconque les positions des deux billes en mouvement.

↳ ex. 4.4, 4.5.

4.12 Un canon tire sur une cible éloignée de $d = 6$ km, située en C dans le même plan horizontal. La vitesse initiale de l'obus est de $v_0 = 300$ m . s^{-1}.

Donnée : $g = 9{,}8$ m . s^{-2}.



1/ A On rappelle que la trajectoire de l'obus est définie par :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} t^2 \vec{g} + t\vec{v}_0.$$

Calculer les coordonnées du vecteur vitesse et celles du vecteur position dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Écrire l'équation cartésienne de la trajectoire.

2/ AB3 Déterminer littéralement puis numériquement les deux angles de tir possibles α_1 et α_2 (tir tendu et tir en cloche).

3/ AB3 En envisageant les deux cas précédents, déterminer :

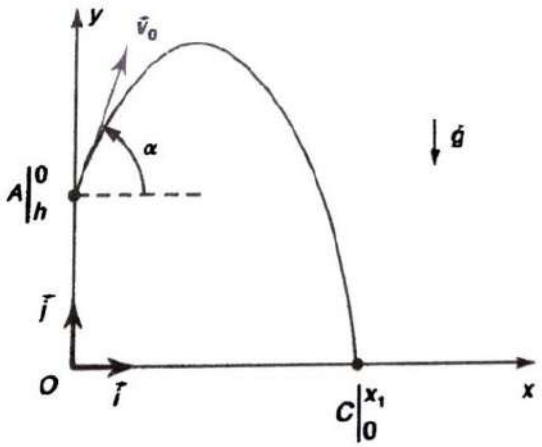
a/ la hauteur maximale atteinte ;
b/ le temps mis pour atteindre le point C.

4/ AB3C A quelle vitesse l'obus arrive-t-il en C ?
Avec la vitesse v_0 et les angles de tir calculés ci-dessus, l'obus pourrait-il réellement atteindre la cible ? Pourquoi ?

↳ ex. 5.5, 5.6.

Le lanceur de poids

4.13 Au cours d'un championnat, un athlète remporte l'épreuve du lancement de poids avec un jet de $x_1 = 19{,}43$ m. Le « poids » a une masse de 7,35 kg. La trajectoire part de A à une hauteur $h = 1{,}80$ m au-dessus du sol. Le vecteur vitesse $\vec{v}_0$ fait un angle $\alpha = 45°$ avec l'horizontale. On assimile le projectile à un solide ponctuel.



1/ A Établir l'équation cartésienne de la trajectoire en fonction de h, tan α et g.

2/ AB3 Déterminer la norme de la vitesse initiale en fonction de h, α, g et x_1.

Application numérique : $g = 9{,}8$ m . s^{-2} ; $\alpha = 45$.

3/ AB3 Calculer la hauteur maximale h_{max} atteinte par le projectile et les coordonnées du vecteur vitesse au sommet de la trajectoire.

4/ AB3 Déterminer la norme et la direction du vecteur vitesse du projectile au point C.

On rappelle que $v^2 = v_x^2 + v_y^2$ et tan $\beta = \frac{v_y}{v_x}$ avec $\beta = (\vec{i}, \vec{v})$.

↳ ex. 4.5, 4.6.

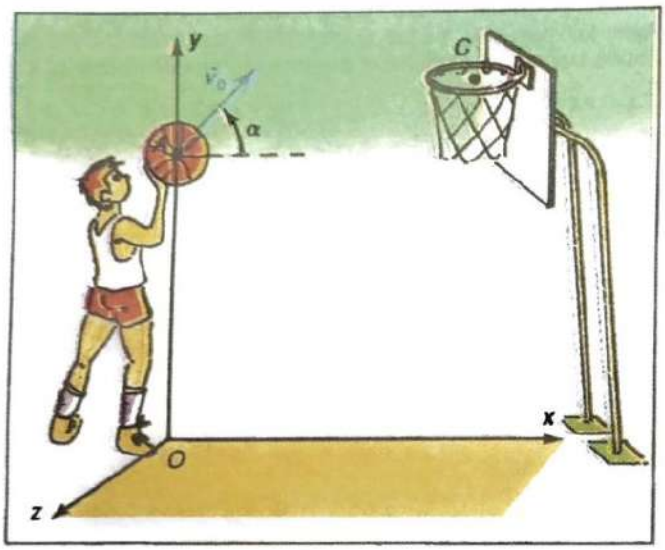
Scanné avec CamScanner

EXERCICES

Le basketteur

4.14 On négligera l'action de l'air. On prendra $g = 10\ m.s^{-2}$.
Lors d'un match de basket, pour marquer un panier, il faut que le ballon passe dans un cercle métallique situé dans un plan horizontal, à 3,05 m du sol. Pour simplifier, on remplacera le ballon par un point matériel devant passer exactement au centre C du cercle métallique. Le plan $(O, \vec{i}, \vec{k})$ est le plan du sol, supposé horizontal. Le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un plan vertical contenant le point C.

1/ D'un point A de $(O, \vec{j})$ situé à 2 m du sol, un basketteur, sans adversaire, lance le ballon avec une vitesse $\vec{v}_0$ contenue dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$. La direction du vecteur vitesse fait un angle de 45° avec un plan horizontal.



a/ A Montrer que la trajectoire du ballon est plane.

b/ A Établir l'équation de cette trajectoire dans le système d'axes indiqué, en fonction de v_0.

c/ B3 Les verticales de A et de C sont distantes de 7,10 m. Quelle doit être la valeur de v_0 pour que le panier soit réussi ?

d/ AB3 Quelle est la durée du trajet effectué par le ballon du point A au point C ?

2/ CB3 Voulant arrêter le ballon, un adversaire, situé à 0,90 m du tireur, saute verticalement en levant les bras. La hauteur atteinte alors par ses mains est de 2,70 m par rapport au sol. Les valeurs de α et de v_0 étant les mêmes que dans le cas précédent, le panier sera-t-il marqué ?

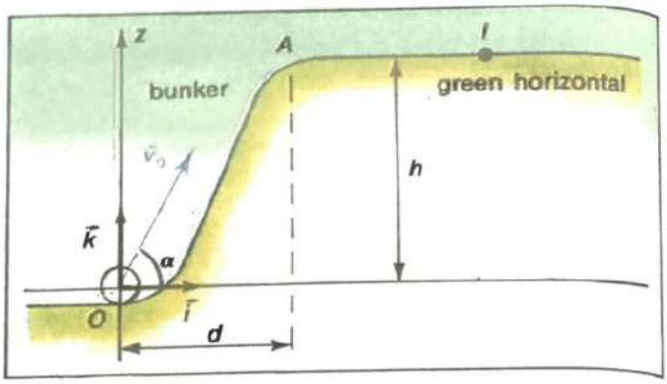
↳ **ex. 4.5, 4.6.**

Le golfeur

4.15 L'exercice porte sur l'étude théorique de la sortie de *bunker* (trou de sable près de la surface, appelée *green*, où se trouve le drapeau) que doit effecteur un joueur de golf.
Ce joueur utilise un club de golf et communique à la balle un vecteur vitesse initial $\vec{v}_0$ dans le plan vertical $(\vec{i}, \vec{k})$. On pose $\alpha = (\vec{i}, \vec{v}_0)$

A la date $t = 0$, la balle, supposée ponctuelle et de masse m, part de l'origine O du repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{k})$ lié à la Terre, avec le vecteur vitesse $\vec{v}_0$.

On considère le champ de pesanteur terrestre, noté $\vec{g}$, comme localement uniforme. On néglige les frottements de l'air sur la balle.



1/ A Déterminer l'équation et la nature de la trajectoire.

2/ AB3 L'objet du coup est de faire tomber la balle au point I (figure), qui se trouve sur le green horizontal près du trou. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, déterminer la norme v_1 du vecteur vitesse $\vec{v}_1$ de la balle au point I.

Application numérique : $v_0 = 9{,}0\ m.s^{-1}$; $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$; $h = 1{,}0$ m.

3/ AB3 On admet que le système (Terre + balle) est mécaniquement isolé. A partir de différentes expressions de l'énergie mécanique de ce système, déterminer l'expression littérale de l'altitude maximale h_0 atteinte par la balle au sommet S de la trajectoire.

Application numérique : $\alpha = 70°$.

4/ AB3 Déterminer littéralement puis numériquement l'abscisse ℓ du point I. Pour cela, on utilisera l'équation de la trajectoire établie dans la question 1/.

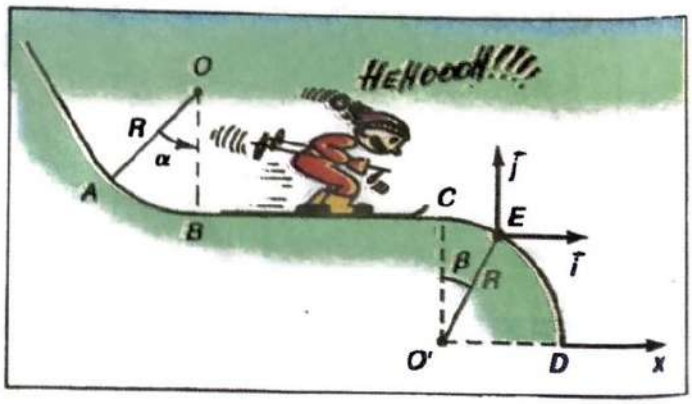
↳ **ex. 4.5, 4.6.**

Le skieur

4.16 Un skieur de masse $m = 60$ kg glisse sur une portion de piste formée de quatre parties AB, BC, CD et Dx. AB est un arc de cercle, de rayon R, de centre O et tel que :

$$\alpha = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{4}.$$

BC est une partie rectiligne horizontale de longueur $2R$;
CD est un quart de cercle de centre O' et de rayon R ;
Dx est une partie horizontale.
Toute la trajectoire est située dans un plan vertical. On prendra $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$.



Scanné avec CamScanner

Le skieur démarre sur la piste, en A, avec une vitesse nulle. Dans tout le problème, on assimilera le mouvement du skieur à celui d'un point matériel.

1/ La piste est bien enneigée. Pour simplifier, on admettra que le long du trajet ABC le frottement exercé par la neige se réduit à une force unique $\vec{F}$ de même direction que la vitesse $\vec{v}$, mais de sens contraire, et de norme constante F.

a/ C Exprimer les vitesses v_B et v_C du skieur en B et en C en fonction de F, R, m, g et α.

b/ AB3 Le skieur arrive en C avec une vitesse nulle. Déterminer l'expression littérale et la valeur numérique de F.

2/ Le skieur aborde la partie CD avec une vitesse nulle. La piste est maintenant verglacée ; les frottements sont négligeables.
Il perd le contact avec la piste en un point E tel que :

$$(\overrightarrow{O'C}, \overrightarrow{O'E}) = \beta.$$

a/ C Exprimer sa vitesse v_E en fonction de β, R et g.
b/ B3 Calculer numériquement β.

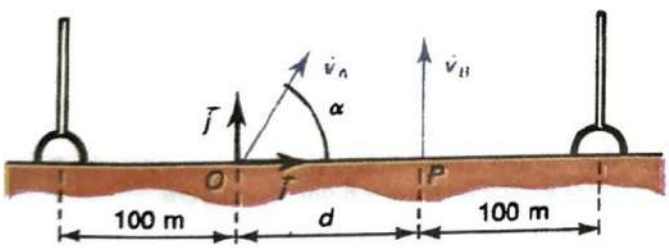
3/ A Déterminer, dans le repère $(E, \vec{i}, \vec{j})$, la nature de la trajectoire du skieur après son passage en E. (On ne demande pas l'équation de cette trajectoire.)

↳ **cours chap. 2 ; ex. 4.5, 4.6.**

L'artificier

4.17 Deux fusées A et B doivent être liées simultanément à partir de deux points O et P situés au sol et distants de $d = 30$ m. Les fusées vont exploser à la date $t_1 = 4$ s après leur lancement. L'une, B, est tirée de P avec une vitesse $\vec{v}_B$ verticale, l'autre, A, est tirée de O avec une vitesse $\vec{v}_A$ inclinée de α par rapport à l'horizontale et située dans un plan vertical passant par P.

Données : $\|\vec{v}_A\| = 51{,}4$ m . s^{-1} ; $\|\vec{v}_B\| = 50$ m . s^{-1}.



1/ A Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, établir, sous forme littérale uniquement, les équations horaires des mouvements de chaque fusée après leur lancement, instant qui sera choisi comme instant initial. Préciser la nature de leurs trajectoires et en donner l'allure.

2/ AB3 Déterminer l'inclinaison α de la vitesse initiale $\vec{v}_A$ de A pour que l'explosion ait lieu à la verticale de P.

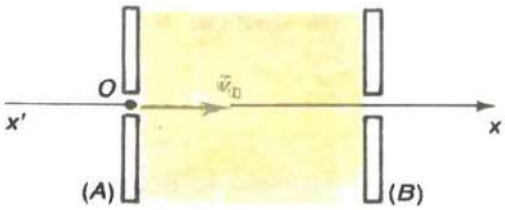
3/ AB3 Quelle est la distance qui sépare les deux fusées au moment de l'explosion ?

4/ CB3 Les barrières de sécurité pour les spectateurs sont installées de façon à respecter la distance de 100 m des points de lancement O et P. Ces spectateurs sont-ils en sécurité lors de la retombée des fusées en cas de non-explosion en altitude ?
On négligera les frottements de l'air.
On prendra $g = 9{,}8$ m . s^{-2}.

↳ **ex. 4.5, 4.6.**

Vitesse initiale colinéaire au champ électrique

4.18 Une particule α (ion He^{2+}), animée d'une vitesse $v_0 = 1\,500$ km . s^{-1}, est accélérée entre deux électrodes A et B distantes de 10 cm (figure).



1/ A Quel doit être le signe de la tension u_{AB} ?

2/ AB3 Donner la valeur de u_{AB} sachant qu'en B la vitesse de la particule est égale à 2 000 km . s^{-1}.

3/ AB3 En admettant que le champ électrique est uniforme entre A et B, calculer la durée du trajet AB.

Données : $m_\alpha = 6{,}64 \cdot 10^{-27}$ kg.

↳ **ex. 4.7.**

4.19 Un électron sort d'un canon à électrons à la vitesse $v_0 = 30\,000$ km . s^{-1} et pénètre dans une région de l'espace où règne un champ électrique uniforme créé par deux électrodes A et B distantes de 10 cm (même figure que dans l'exercice précédent).

1/ A Quel doit être le signe de la tension u_{AB} si l'on veut que le mouvement de l'électron soit retardé entre les deux électrodes ?

2/ AB3 Donner la valeur de u_{AB} afin que l'électron arrive au voisinage de B avec une vitesse nulle.

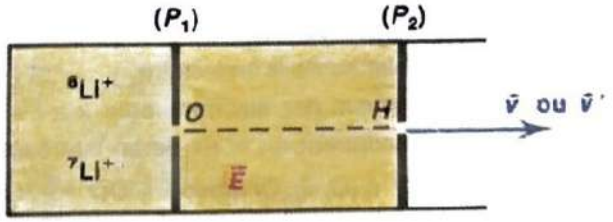
3/ AB3 On impose $u_{AB} = 100$ V. Donner l'équation horaire $t \mapsto x(t)$ de l'électron. Calculer la durée du trajet AB.

Donnée : $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

↳ **ex. 4.7.**

Vitesse initiale nulle

4.20 Des ions $^6_3Li^+$ et $^7_3Li^+$, de masses différentes m et m', sont produits dans une chambre d'ionisation. Ils pénètrent en O dans un champ électrique uniforme.



1/ A Quelle est la direction du champ $\vec{E}$? Déterminer le signe de la tension :

$$U = V_{P_1} - V_{P_2}$$

que l'on établit entre les plaques P_1 et P_2.

Scanné avec CamScanner

EXERCICES

2/A Comparer les énergies cinétiques des deux sortes d'ions en H. Établir la relation :

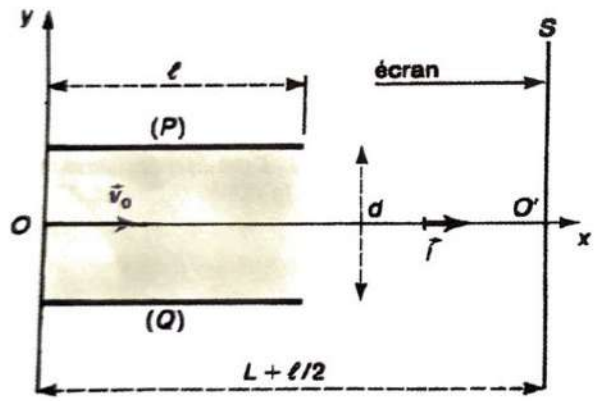
$$\frac{v}{v'} = \sqrt{\frac{m'}{m}}.$$

3/B3 *Application numérique :* $|U| = 10^4$ V ; $m \approx 10{,}0 \cdot 10^{-27}$ kg ; $m' \approx 11{,}7 \cdot 10^{-27}$ kg ; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C. Calculer en H l'énergie cinétique des ions (en eV) et leur vitesse.

↳ ex. 4.7.

Vitesse initiale perpendiculaire au champ

4.21 Deux plaques métalliques P et Q, planes, rectangulaires, sont disposées horizontalement, en face l'une de l'autre ; leur distance est d. L'axe $(O, \vec{i})$ (figure) est horizontal, parallèle aux côtés de longueur ℓ des plaques ; l'axe $(O, \vec{j})$ est vertical ; un troisième axe $(O, \vec{k})$ (non représenté sur la figure) est perpendiculaire aux précédents. Lorsque les plaques sont portées à des potentiels V_P et V_Q différents, il apparaît entre elles un champ électrique $\vec{E}$ parallèle à $(O, \vec{j})$. On admettra que ce champ est uniforme pour $0 \leq x \leq \ell$ et nul en dehors de ces limites.
Des électrons (masse m, charge $-e$) arrivent en O et forment un faisceau homocinétique de vitesse $\vec{v}_0$ parallèle à $(O, \vec{i})$, qui pénètre entre les deux plaques. Le poids des électrons est négligeable, et le mouvement se fait dans le vide.



1/A Trouver la loi horaire du mouvement, $t \mapsto x(t)$, $t \mapsto y(t)$, dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'un électron qui passe en O à l'instant $t = 0$, pour $0 \leq x \leq \ell$. (On se place dans le cas où l'électron ne rencontre aucune des plaques P et Q.) On posera :

$$U = u_{PQ} = V_P - V_Q > 0.$$

Écrire l'équation cartésienne de la trajectoire.

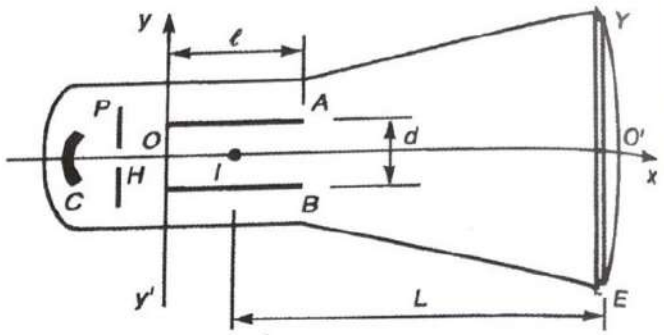
2/A Quel est le mouvement des électrons pour $x \geq \ell$?

3/A Les électrons rencontrent en M un écran fluorescent S perpendiculaire en O' à $(O, \vec{i})$. On pose $L = OO' - \frac{\ell}{2}$. Calculer l'ordonnée $y = \overline{O'M}$ du point M en fonction des données ; la mettre sous la forme $y = \lambda U$ et expliciter le coefficient λ.

4/B3 *Application numérique :* $d = 0{,}02$ m ; $\ell = 0{,}05$ m ; $L = 0{,}40$ m ; $v_0 = 16 \cdot 10^6$ m . s^{-1} ; $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg ; $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C.
Calculer λ en m . V^{-1} puis en cm . V^{-1}. Donner la valeur numérique de y lorsque $U = 50$ V.

↳ ex. 4.8.

4.22 A 1/ La cathode C d'un oscillographe émet des électrons dont la vitesse à la sortie du métal est négligeable. Ces électrons arrivent ensuite sur l'anode P, qu'ils traversent en H.



On établit une différence de potentiel $U_0 = V_P - V_C$. Calculer la vitesse v_0 des électrons à leur passage en H.
Quelle est la nature de leur mouvement au-delà de P ?

2/A Les électrons pénètrent en O entre les armatures horizontales A et B d'un condensateur. Les armatures, de longueur ℓ, sont distantes de d. On établit entre les armatures une tension $U = V_A - V_B$.

a/ Étudier le mouvement des électrons entre les deux plaques dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
b/ Quelle condition doit remplir U pour que les électrons sortent du condensateur ?

3/AB3 Le faisceau d'électrons arrive ensuite sur un écran fluorescent E situé à la distance L du centre de symétrie I des plaques. Calculer le déplacement y du spot sur l'écran et la sensibilité $s = \frac{U}{y}$ de l'appareil en volt par centimètre.

N.B. : On peut utiliser sans démonstration la propriété suivante : la tangente à la trajectoire à la sortie des plaques passe par le point I.

Données : $q = -e = -1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C ; $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg ; $U_0 = 1\,000$ V ; $d = 2$ cm ; $\ell = 6$ cm ; $L = 12$ cm.

↳ ex. 4.8.

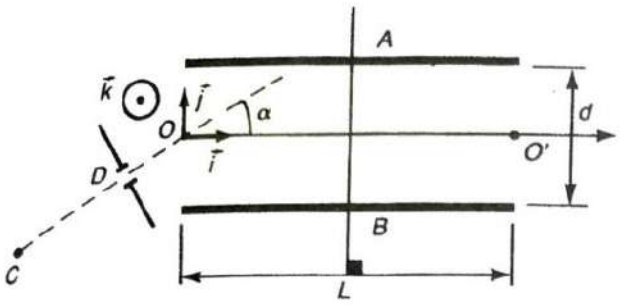
Vitesse initiale faisant un angle quelconque avec le champ

4.23 Un condensateur plan est constitué de deux plaques parallèles métalliques rectangulaires horizontales A et B de longueur L, séparées par une distance d.
On raisonnera dans le repère orthonormal direct $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le point O est équidistant des deux plaques.
Un faisceau homocinétique de protons, émis en C à vitesse nulle, est accéléré entre les points C et D, situés dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$; il pénètre en O, en formant l'angle α avec $\vec{i}$, dans le champ électrique $\vec{E}$, supposé uniforme, du condensateur.

1/AB3 Indiquer, en le justifiant, le signe de $V_D - V_C$. Calculer en fonction de $U = |V_D - V_C|$ la vitesse v_0 de pénétration dans le champ électrique uniforme.

Application numérique : $U = 1\,000$ V ; $m_p = 1{,}6 \cdot 10^{-27}$ kg ; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

Scanné avec CamScanner



2/ CB3 Indiquer, en le justifiant, le signe de $V_A - V_B$ tel que le faisceau de protons puisse passer par le point O' $(L, 0, 0)$. Établir l'équation de la trajectoire des protons dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ en fonction de U, $U' = |V_A - V_B|$, α et d.
Quelle est la nature du mouvement des protons ?
Calculer la valeur numérique de U' qui permet de réaliser la sortie en O' pour $\alpha = 30°$, $L = 20$ cm et $d = 7$ cm.

3/ AB3 Dans le cas où la tension U' a la valeur précédemment calculée, déterminer à quelle distance minimale du plateau supérieur passe le faisceau de protons.

N.B. : Toute l'expérience a lieu dans le vide, et on négligera les forces de pesanteur.

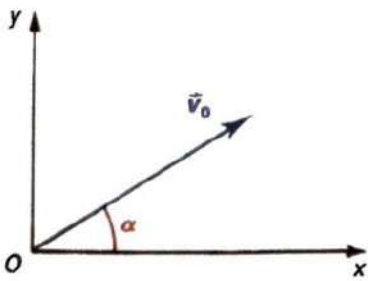
↳ **ex. 4.9.**

Analyse d'un document

4.24 On lance des projectiles, supposés ponctuels, dans une région de l'espace où le vecteur intensité du champ de pesanteur, $\vec{g}$, peut être considéré comme constant. On ne tient pas compte de la résistance de l'air. Répondre aux questions suivantes, pratiquement sans calcul, mais en justifiant la réponse.

1/ A Un projectile P est lancé avec une vitesse $\vec{v}_0$ dont la direction fait avec le plan horizontal un angle α, où $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ (figure *a*). Sa trajectoire est plane. Quel est le plan qui contient cette trajectoire ? Quelle est la forme de la trajectoire ?

(a)

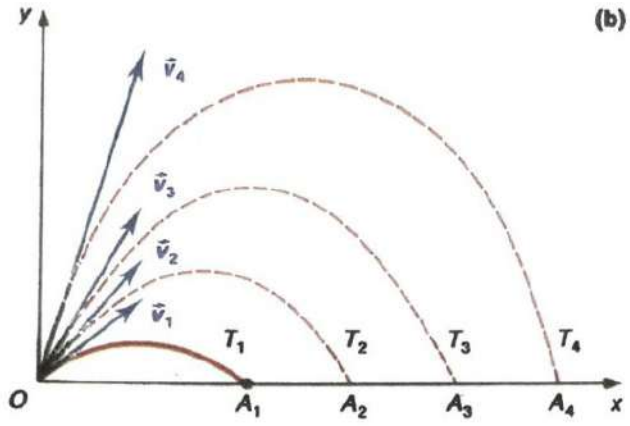


2/ a/ A Quelle est la nature du mouvement de la projection de P sur l'axe horizontal $(O, \vec{i})$ du plan de la trajectoire ?

b/ B1A On a représenté (figure *b*) les trajectoires T_1, T_2, T_3, T_4 de quatre projectiles P_1, P_2, P_3, P_4 lancés au même instant du même point O, avec des vitesses notées respectivement $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, $\vec{v}_4$. Comparer les projections de ces vecteurs sur l'axe horizontal $(O, \vec{i})$. Indiquer sur le document, en les justifiant, les positions P_2, P_3, P_4 lorsque le premier, P_1, est parvenu en A_1.

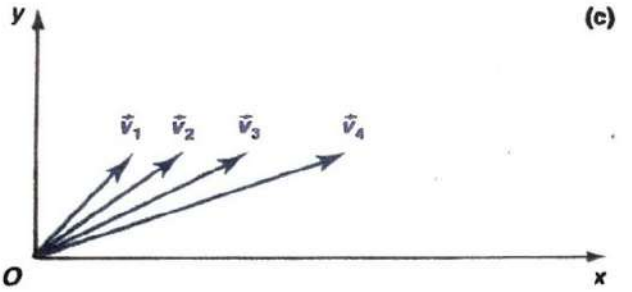
3/ a/ A Quelle est la nature du mouvement de la projection de P (figure *b*) sur l'axe vertical $(O, \vec{j})$?

(b)



b/ B1A On a représenté (figure *c*) les vitesses $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, $\vec{v}_4$ de quatre projectiles lancés du même point O à la date $t = 0$.

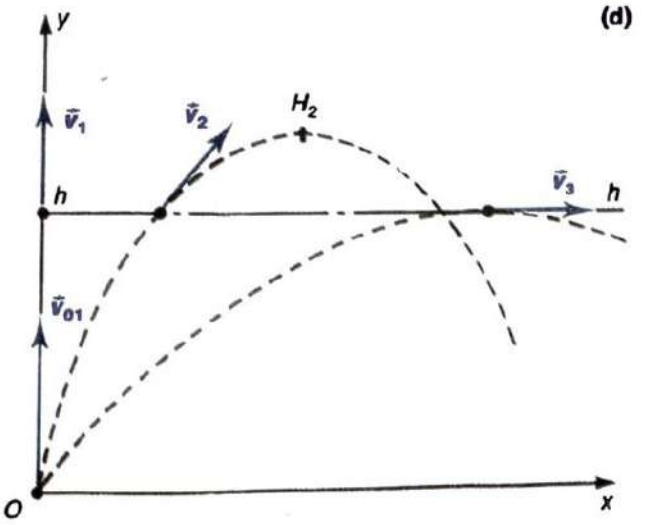
(c)



Comparer les projections de ces vecteurs sur l'axe vertical $(O, \vec{j})$, ainsi que la durée mise par chacun de ces projectiles pour atteindre son altitude maximale. Comparer les dates d'arrivée de ces projectiles sur l'axe $(O, \vec{i})$.

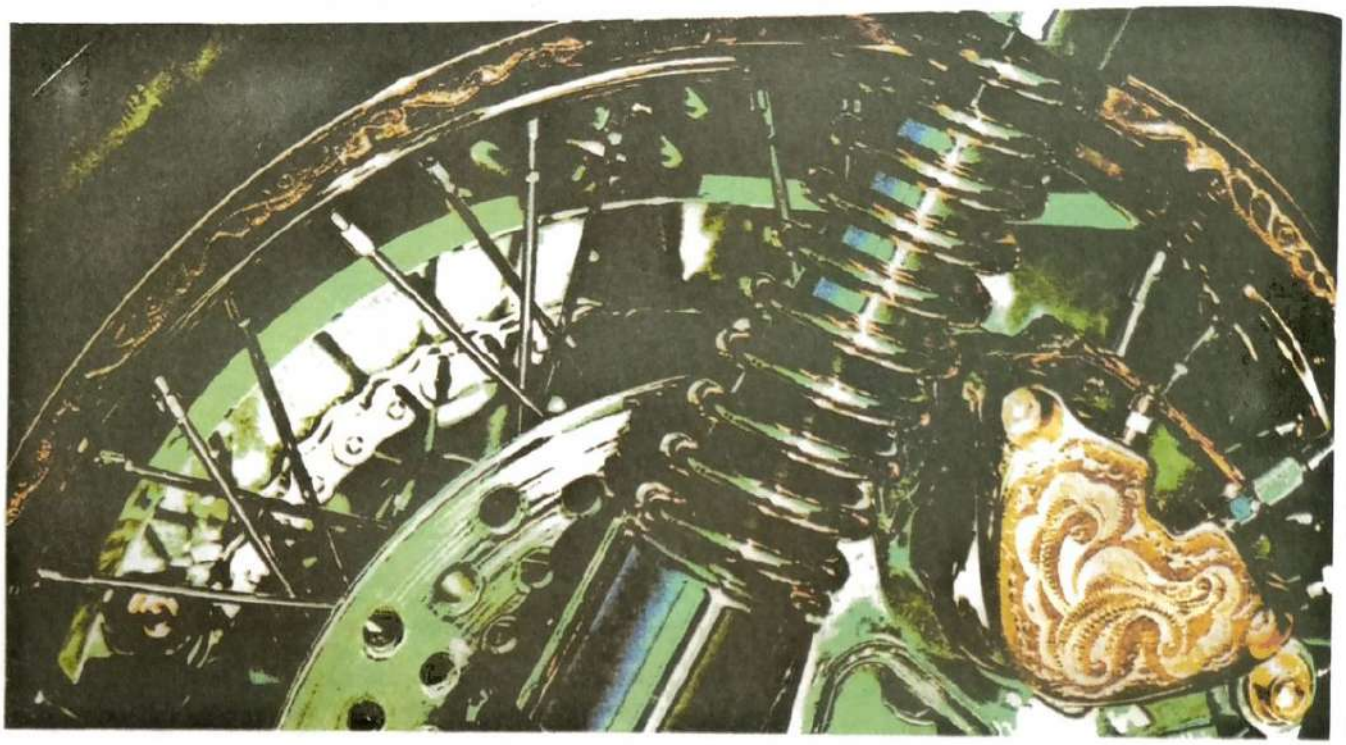
4/ C Trois projectiles P_1, P_2, P_3 sont maintenant lancés avec des vitesses $\vec{v}_{O_1}$, $\vec{v}_{O_2}$, $\vec{v}_{O_3}$ du même point O. Seule $\vec{v}_{O_1}$ est représentée (figure *d*). Ils atteignent l'altitude h avec des vitesses $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ dont les normes sont égales. En utilisant le principe de conservation de l'énergie mécanique, trouver avec quelles vitesses $\vec{v}_{O_2}$ et $\vec{v}_{O_3}$ les projectiles P_2 et P_3 ont été lancés. Représenter ces vecteurs vitesses. Construire le vecteur vitesse du projectile P_2 au sommet de sa trajectoire H_2.

(d)



Scanné avec CamScanner

5 OSCILLATIONS MÉCANIQUES LIBRES



La suspension arrière d'une moto est généralement constituée de deux ressorts fixés entre le moyeu de la roue et le cadre. Ces ressorts sont couplés à des amortisseurs destinés à réduire l'amplitude des oscillations. Le système ressorts-amortisseurs encaisse les chocs dus aux irrégularités de la chaussée, atténue les trépidations, améliore la stabilité et la tenue de route.

5.1 caractéristiques générales

Nous avons fait, en classe de Première, une étude expérimentale des phénomènes vibratoires. Rappelons les résultats essentiels :

- Un mouvement oscillatoire est un mouvement périodique de va-et-vient autour d'une position d'équilibre, qui se répète identique à lui-même à des intervalles de temps successifs égaux.
- La période T est la durée d'une oscillation complète. Elle se mesure en secondes.
- La fréquence correspond au nombre de périodes par seconde : $f = \frac{1}{T}$. Elle se mesure en **hertz** (symbole : **Hz**).
- Les oscillations sont libres si, une fois écarté de sa position d'équilibre, le système, susceptible d'osciller, est abandonné à lui-même.
- Si l'oscillateur n'est soumis à aucune force dissipative (frottements...), l'énergie mécanique totale est conservée. Dans ce cas idéal, il n'est pas nécessaire d'entretenir l'oscillateur. Nous reviendrons sur ce point.

5.2 le pendule élastique

5.2.1 dispositif expérimental

Un solide (S), de masse m et de centre d'inertie G, peut coulisser sans frottement le long d'une tige horizontale. Ce solide est soumis à l'action d'un ressort à spires non jointives, de masse négligeable, comme l'indique la figure 1.

La direction de l'horizontale est orientée suivant l'axe $(O, \vec{i})$. A l'équilibre, le centre d'inertie du solide occupe la position G_0 d'abscisse $x = 0$.

Scanné avec CamScanner

Écartons le solide de sa position d'équilibre et lâchons-le : il effectue un mouvement oscillatoire de translation de part et d'autre de sa position d'équilibre; nous dirons qu'il effectue des **oscillations libres.**
Le déplacement du centre d'inertie :

$$\overrightarrow{G_0G} = \overrightarrow{OG} = x\vec{i}$$

est fonction du temps.

5.2.2 équation différentielle du mouvement

Faisons le bilan des forces extérieures appliquées à (S) pris comme système (*fig.* 2). Le solide est soumis à son poids $\vec{P}$, à la tension $\vec{T}$ du ressort et aux actions de contact exercées par la tige sur le solide. Ces actions ont une somme $\vec{R}$, appelée réaction de la tige. Si nous négligeons les frottements, $\vec{R}$ est *normale* à la tige.
Appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = m\vec{a}_G.$$

Projetons cette relation sur l'axe $(O, \vec{i})$; il vient :

$$\vec{P}.\vec{i} + \vec{T}.\vec{i} + \vec{R}.\vec{i} = m\vec{a}_G.\vec{i},$$

$$\vec{P}.\vec{i} = \vec{R}.\vec{i} = 0,$$

soit :

$$\vec{T}.\vec{i} = m\vec{a}_G.\vec{i}.$$

Or la mesure de la tension d'un ressort est proportionnelle à son allongement par rapport à sa position de repos, le coefficient de proportionnalité k étant appelé **raideur du ressort;** la constante k, qui s'exprime en newtons par mètre (symbole : $N.m^{-1}$), est une caractéristique du ressort considéré. Nous pouvons donc écrire ici, avec les orientations choisies :

$$\vec{T} = -k\overrightarrow{G_0G} = -kx\vec{i}.$$

D'où, avec $\vec{a}_G = \ddot{x}\vec{i}$:

$$-kx = m\ddot{x},$$

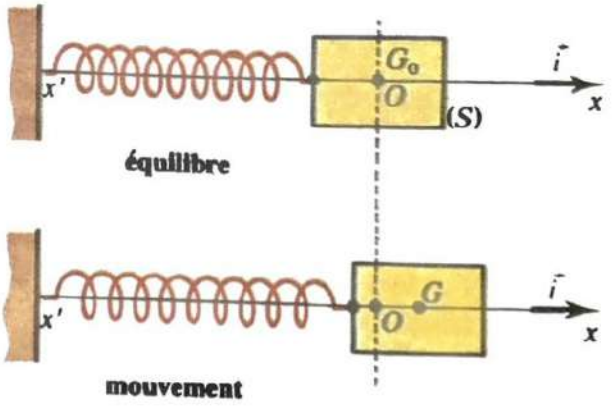
ou encore :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \qquad (1)$$

Cette relation représente l'**équation différentielle du mouvement de l'oscillateur**(*).

En négligeant toutes les forces dissipatives telles que frottements dus à l'air, frottements sur l'axe et masse du ressort devant celle du solide (S)), nous *idéalisons le système.*
Cette démarche, qui consiste à idéaliser un système en négligeant sciemment certains paramètres, pourtant présents, est souvent nécessaire en physique : elle permet une première approche simple de l'étude du phénomène.

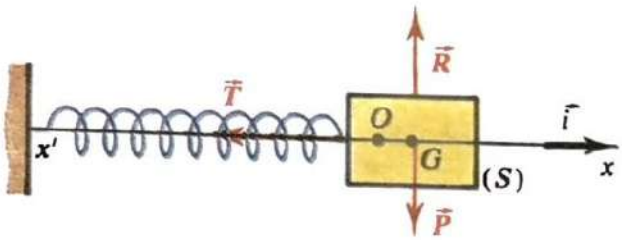
(*) Une équation qui fait intervenir une fonction f (ici x, fonction du temps t) et ses dérivées successives est appelée *équation différentielle.* Résoudre une équation différentielle consiste à trouver les fonctions f qui satisfont cette équation (voir cours de mathématiques).



1. ***Pendule élastique. Le mouvement du solide lié au ressort peut être caractérisé par le déplacement du centre d'inertie au cours du temps :***

$$\overrightarrow{G_0G} = \overrightarrow{OG} = x\vec{i}.$$

La quantité algébrique x, qui n'est autre que l'allongement du ressort, est appelée élongation du mouvement.



2. ***Le solide est soumis à son poids $\vec{P}$, à la tension $\vec{T}$ du ressort et à la réaction $\vec{R}$ de la tige.***

5.2.3 équation du mouvement

L'équation $\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0$, où x est une fonction du temps t, est une équation différentielle linéaire du second ordre(*). Montrons qu'elle est vérifiée par une solution sinusoïdale du type :

$$x(t)=X_m\cos(\omega_0 t+\varphi), \qquad (2)$$

où ω_0, X_m et φ sont des constantes dont nous allons donner la signification physique.
Calculons pour cette solution sinusoïdale :

— la vitesse : $\dot{x}=-\omega_0 X_m\sin(\omega_0 t+\varphi)$;

— l'accélération : $\ddot{x}=-\omega_0^2 X_m\cos(\omega_0 t+\varphi)$.

D'où : $\ddot{x}=-\omega_0^2 x$, soit $\ddot{x}+\omega_0^2 x=0$.

Nous retrouvons bien l'équation différentielle (1) du mouvement en posant :

$$\omega_0^2=\frac{k}{m}, \quad \text{soit} \quad \omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Le pendule élastique effectue des oscillations sinusoïdales (nous dirons encore *harmoniques*) autour de sa position d'équilibre ($x=0$).
La fonction x est appelée **élongation** du mouvement.

- L'équation différentielle :

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=0$$

est celle du mouvement d'un oscillateur sinusoïdal de translation non amorti.

5.2.4 caractéristiques du mouvement

Si ω_0 est caractéristique de l'oscillateur, X_m et φ dépendent des conditions initiales, c'est-à-dire de la façon dont on excite l'oscillateur : position initiale hors équilibre, vitesse initiale...

1. La constante ω_0 est appelée **pulsation propre** du système oscillant et s'exprime en **radians par seconde** (symbole : **rad.s^{-1}**).

Déterminons la période propre T_0 et la fréquence propre f_0 de l'oscillateur; il vient :

$$x(t)=x(t+nT_0), \quad n\in\mathbb{Z};$$

d'où :

$$X_m\cos(\omega_0 t+\varphi)=X_m\cos[\omega_0(t+nT_0)+\varphi]$$
$$=X_m\cos[\omega_0 t+\varphi+n2\pi],$$

soit :

$$\omega_0 nT_0=n2\pi, \quad \text{ou encore} \quad \omega_0=\frac{2\pi}{T_0}=2\pi f_0.$$

Nous avons donc :

$$T_0=\frac{1}{f_0}=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

(*) Car elle fait intervenir la dérivée seconde de la fonction x.

APPLICATION 1

On dispose d'un pendule élastique horizontal non amorti. Le ressort a une raideur $k=10\ \text{N.m}^{-1}$ et le solide (S) fixé à l'extrémité mobile a une masse $m=0{,}1$ kg.
L'abscisse x du centre d'inertie G de (S) est repérée par rapport au point O, position de G à l'équilibre.
On écarte (S) de sa position d'équilibre et on le lâche. A l'instant $t_0=0$, choisi comme origine des dates, son abscisse est $x_0=+2$ cm et sa vitesse $v_0=-0{,}20\ \text{m.s}^{-1}$.

1/ Déterminer ω_0, T_0 et f_0.

2/ Donner l'équation horaire du mouvement et la vitesse.

3/ Calculer à l'instant $t=6$ s la position et la vitesse de G.

1/ Nous avons successivement :

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}=10\ \text{rad.s}^{-1}; \quad T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=0{,}628\ \text{s};$$

$$f_0=\frac{1}{T_0}=1{,}59\ \text{Hz}.$$

2/ L'équation horaire du mouvement est de la forme :

$$x=X_m\cos(\omega_0 t+\varphi).$$

Déterminons φ et X_m à l'aide des conditions initiales. Avec :

$$v=-\omega_0 X_m\sin(\omega_0 t+\varphi),$$

il vient, pour $t_0=0$:

$$\begin{cases} x_0=2.10^{-2}=X_m\cos\varphi \\ v_0=-0{,}20=-10X_m\sin\varphi, \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} X_m\cos\varphi=0{,}02 \\ X_m\sin\varphi=0{,}02. \end{cases}$$

D'où $\sin\varphi=\cos\varphi$, et $\varphi=\frac{\pi}{4}+k\pi$:

- avec $\varphi=\frac{\pi}{4}$, $X_m=\dfrac{0{,}02}{\sin\frac{\pi}{4}}=0{,}028$ m;
- avec $\varphi=\frac{5\pi}{4}$, $X_m=-0{,}028$ m, solution à rejeter car $X_m>0$.

En conclusion :

$$x=0{,}028\cos\left(10t+\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{et} \quad v=-0{,}28\sin\left(10t+\frac{\pi}{4}\right).$$

3/ A l'instant $t=6$ s, nous obtenons :

$$x=0{,}028\cos\left(60+\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{et} \quad v=-0{,}28\sin\left(60+\frac{\pi}{4}\right),$$

soit : $x(6)\approx-0{,}013$ m et $v(6)\approx0{,}25\ \text{m.s}^{-1}$.

Scanné avec CamScanner

La période augmente avec la masse (l'inertie du solide s'oppose au mouvement) et diminue avec la raideur du ressort. Cette période n'est fonction que des paramètres caractéristiques de l'oscillateur et ne dépend donc pas de la manière dont l'opérateur l'a déplacé.

2. X_m représente l'élongation maximale, ou **amplitude**, des oscillations.

$\omega_0 t + \varphi$ est appelée **phase** du mouvement oscillatoire, φ étant la **phase à l'origine** des dates ($t = 0$).

X_m et φ sont déterminées par les conditions initiales :

$$\begin{cases} x_0 = X_m \cos \varphi \\ v_0 = -\omega_0 X_m \sin \varphi. \end{cases}$$

En particulier, si $v_0 = 0$, on obtient $\sin \varphi = 0$, soit $\cos \varphi = 1$ ou $\cos \varphi = -1$. De ces deux solutions, nous choisissons, par convention, celle qui conduit à une valeur positive de X_m (*).

Si $x_0 = a > 0$, alors $\cos \varphi = 1$, et :

$$\varphi = 2k\pi.$$

L'expression (2) s'écrit alors :

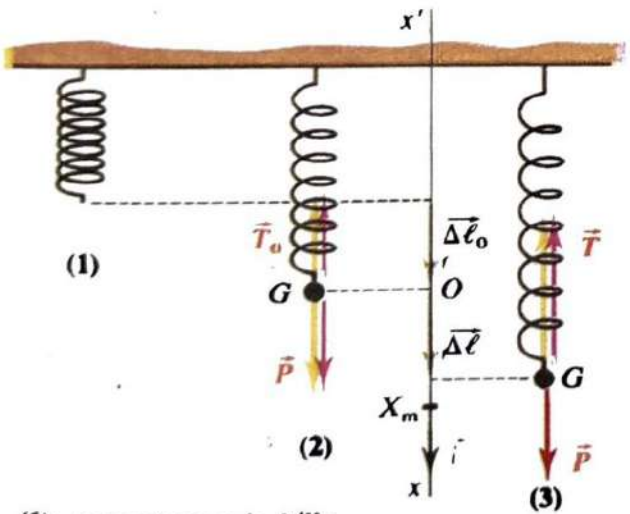
$$x = a \cos \omega_0 t,$$

forme simple que nous adopterons couramment lorsque nous serons libres de choisir l'origine des dates.

(*) Ce choix n'est pas restrictif, car changer X_m en $-X_m$ reviendrait à changer φ en $\varphi + \pi$.

APPLICATION 2

Établir l'équation du mouvement oscillatoire de translation d'un solide de masse m, suspendu à un ressort de raideur k et placé dans un champ de pesanteur $\vec{g}$.
Donner l'expression de la période propre des oscillations et l'équation horaire du mouvement.



(1) ressort sans la bille
(2) ressort et la bille à l'équilibre
(3) le ressort et la bille effectuent des oscillations

3.

Soit $\Delta\vec{\ell}_0$ l'allongement du ressort lorsque le solide est en équilibre et $\Delta\vec{\ell}_0 + \Delta\vec{\ell}$ l'allongement à un instant quelconque lors des oscillations. Nous avons (*fig.* 3) :

- à l'équilibre :

$$\vec{P} + \vec{T}_0 = \vec{0}, \quad \text{soit} \quad \vec{P} - k\Delta\vec{\ell}_0 = \vec{0}; \qquad (1)$$

- à un instant quelconque lors des oscillations :

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}_G,$$

$$\vec{P} - k(\Delta\vec{\ell}_0 + \Delta\vec{\ell}) = m\vec{a}_G,$$

soit, compte tenu de (1) : $-k\Delta\vec{\ell} = m\vec{a}_G$.

Sur l'axe $(O, \vec{i})$ le long duquel s'effectue le mouvement, l'origine correspond à la position du centre d'inertie G du solide à l'équilibre, soit :

$$\Delta\vec{\ell} = \overrightarrow{OG} = x\vec{i} \quad \text{et} \quad \vec{a}_G = \ddot{x}\vec{i};$$

d'où : $\quad -kx = m\ddot{x}, \quad$ soit $\quad \ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0.$

Nous avons là l'équation différentielle du mouvement. Les oscillations sont sinusoïdales, de pulsation :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

et de période : $\quad T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}};$

cette période, qui est la période propre de l'oscillateur, ne dépend pas du champ de pesanteur. L'équation différentielle admet la solution :

$$x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Le solide effectue des oscillations autour de la position d'équilibre correspondant à l'allongement $\Delta\vec{\ell}_0$ du ressort, et ce, avec la même période que l'oscillateur horizontal.

Scanné avec CamScanner

5.2.5 représentations graphiques

Choisissons l'origine des dates de telle sorte que :

$$x = X_m \cos(\omega_0 t).$$

- La représentation de $x(t)$ est donnée par la figure 4a.
- Dérivons x pour avoir la vitesse; il vient successivement :

$$v = \dot{x} = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t)$$
$$= \omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \pi)$$
$$= \omega_0 X_m \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right).$$

La vitesse est donc en avance de phase de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à l'élongation et son amplitude est égale à $V_m = \omega_0 X_m$. On en déduit la représentation de $v(t)$, donnée par la figure 4b.

- Dérivons une nouvelle fois pour avoir l'accélération :

$$a = \ddot{x} = -\omega_0^2 X_m \cos(\omega_0 t)$$
$$= \omega_0^2 X_m \cos(\omega_0 t + \pi).$$

L'accélération est donc en opposition de phase avec l'élongation et son amplitude est égale à $\omega_0^2 X_m$. Nous en déduisons la représentation de $a(t)$, donnée par la figure 4c.

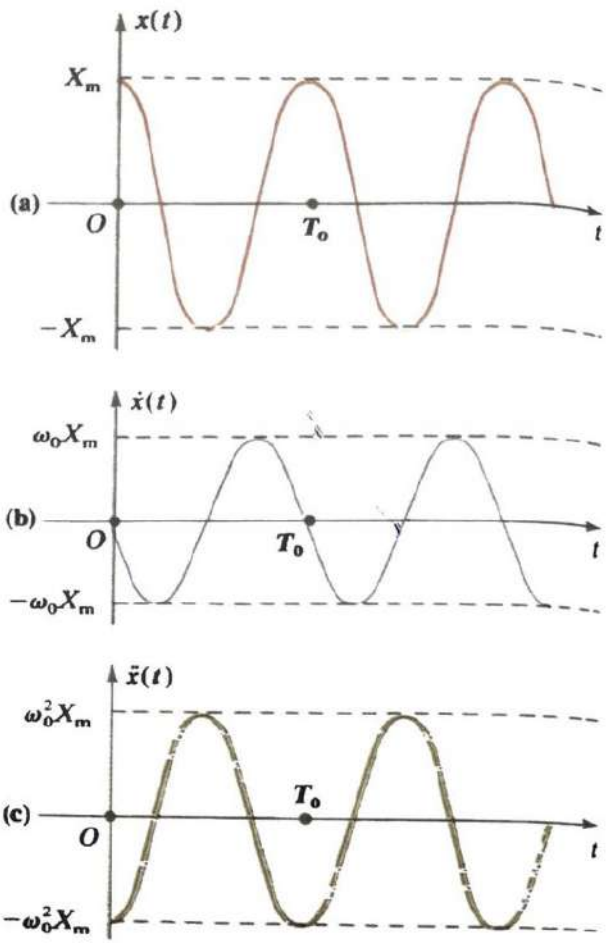
Observons les différentes représentations graphiques.

- Au passage par la position d'équilibre :

$$x = 0, \quad v = \pm V_m \quad \text{et} \quad a = 0;$$

la valeur absolue de la vitesse est maximale et l'accélération est nulle.

- Lorsque l'élongation est maximale ($x = \pm X_m$), $v = 0$ et la valeur absolue de l'accélération est maximale.



4. ***Représentations graphiques de l'élongation*** **(a),** ***de la vitesse*** **(b)** ***et de l'accélération*** **(c)** ***du mouvement du pendule élastique.***

5.3 étude énergétique

5.3.1 conséquence du théorème de l'énergie cinétique

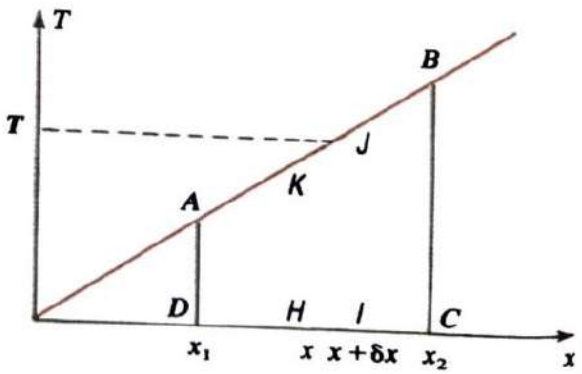
Considérons le pendule élastique horizontal. Plaçons-nous dans le cas où il n'y a pas de frottement. Lorsque le système oscille, seule la force de tension du ressort $\vec{T} = -kx\vec{i}$ travaille, le poids du solide en mouvement et la réaction de l'axe étant orthogonaux au déplacement.
Dans ces conditions, lorsque le système passe d'une élongation x_1 à une élongation x_2, le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\mathcal{E}_c(x_2) - \mathcal{E}_c(x_1) = W_{x_1 \to x_2}(\vec{T}).$$

Calculons le travail de $\vec{T}$. Le travail élémentaire de $\vec{T}$ lorsque l'élongation passe de la valeur x à la valeur $x + \delta x$ vaut :

$$\delta W(\vec{T}) = \vec{T} \cdot \delta\vec{\ell} = -kx\vec{i} \cdot \delta x\vec{i} = -kx\delta x.$$

Ce travail élémentaire est quasiment égal, en valeur absolue, à l'aire du trapèze élémentaire *HIJK* (*fig.* 5). Le travail de $\vec{T}$ lorsque l'élongation passe de la valeur x_1 à



5. ***L'aire du trapèze élémentaire HIJK correspond, en valeur absolue, au travail de la tension*** $\vec{T}$ ***du ressort lorsque l'élongation du pendule élastique passe de*** x ***à*** $x + \delta x$.

la valeur x_2, qui s'obtient en sommant tous les travaux élémentaires, vaut donc :

$$W_{x_1 \to x_2}(\vec{T}) = -\text{aire du trapèze } ABCD$$

$$= -\frac{1}{2}(kx_1 + kx_2)(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2,$$

ce que nous écrirons encore (*) :

$$W_{x_1 \to x_2}(\vec{T}) = \left[-\frac{1}{2}kx^2\right]_{x_1}^{x_2}.$$

Nous en déduisons donc :

$$\mathcal{E}_c(x_2) - \mathcal{E}_c(x_1) = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2,$$

soit : $$\mathcal{E}_c(x_2) + \frac{1}{2}kx_2^2 = \mathcal{E}_c(x_1) + \frac{1}{2}kx_1^2,$$

ou encore : $$\mathcal{E}_c(x) + \frac{1}{2}kx^2 = \text{Cte.}$$

5.3.2 expressions des énergies mécanique et potentielle

La quantité $\mathcal{E}_c + \frac{1}{2}kx^2$, qui se conserve au cours du mouvement, est appelée **énergie mécanique de l'oscillateur horizontal.**

La quantité $\frac{1}{2}kx^2$, qui ne dépend que de la variable de position x, définit l'**énergie potentielle élastique** de l'oscillateur; on la note $\mathcal{E}_p$.

Ainsi, pour un pendule élastique horizontal *non amorti*, nous aurons :

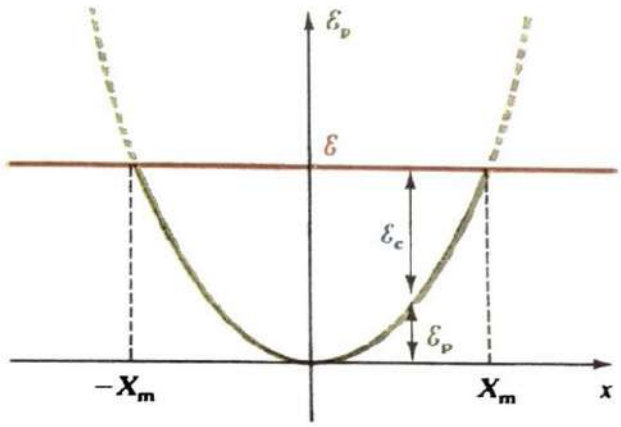
$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{Cte.}$$

Au cours des oscillations, il y a *conversion réciproque des énergies cinétique et potentielle*, de telle sorte que leur somme reste constante (*fig.* 6).

Notons que l'énergie potentielle élastique, qui se mesure en joules, est toujours positive ou nulle. De même que l'énergie potentielle de pesanteur (qui, elle, peut être négative), l'énergie potentielle élastique est définie à une constante additive près :

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}kx^2 + \mathcal{E}_{p_0}.$$



$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}kx^2 \qquad \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \mathcal{E} = \text{Cte}$$

6. ***La courbe représentant l'énergie potentielle d'un oscillateur sinusoïdal en fonction de son élongation est une parabole; on dit que l'oscillateur est dans une cuvette de potentiel parabolique.***
Lorsque l'oscillateur est écarté au maximum de sa position d'équilibre ($x = X_m$), son énergie mécanique est uniquement sous forme d'énergie potentielle ($\mathcal{E}_c = 0$). Au passage à la position d'équilibre ($x = 0$), elle est uniquement sous forme d'énergie cinétique ($\mathcal{E}_p = 0$). Au cours des oscillations, il y a conversion réciproque des énergies potentielle et cinétique.

(*) Ce résultat peut s'obtenir directement par application du calcul intégral à la détermination des aires (voir cours de mathématiques) :

$$W = \int_{x_1}^{x_2} -kx\,dx = \left[-\frac{1}{2}kx^2\right]_{x_1}^{x_2},$$

$\frac{1}{2}kx^2$ étant une primitive de la fonction kx.

Scanné avec CamScanner

Cependant, il est d'usage courant de prendre $\mathcal{E}_{p_0} = 0$, ce qui correspond à une énergie potentielle élastique nulle lorsque le ressort a sa longueur naturelle ($x = 0$). Quoi qu'il en soit, cela importe peu car seules les *variations d'énergie potentielle* présentent un intérêt physique.
Insistons enfin sur le fait que l'élongation x est la différence entre la longueur ℓ du ressort à un instant donné et sa longueur naturelle ℓ_0.

• L'énergie potentielle élastique $\mathcal{E}_p$ d'un ressort de raideur k et d'allongement x est égale à $\frac{1}{2} kx^2$.

• L'énergie mécanique totale d'un oscillateur élastique *non amorti* se conserve :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \text{Cte}.$$

5.3.3 calcul de l'énergie mécanique

A l'instant initial, un opérateur fournit de l'énergie mécanique à l'oscillateur, en lui communiquant une vitesse initiale v_0 et un allongement x_0. Il vient alors :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} mv_0^2 + \frac{1}{2} kx_0^2.$$

Cherchons une autre expression de la constante $\mathcal{E}$ à un instant quelconque. La vitesse du solide en mouvement est donnée par :

$$v = \dot{x} = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi);$$

d'où : $$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \underbrace{m\omega_0^2}_{k} X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi).$$

Par ailleurs :

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kX_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi).$$

Sachant que $m\omega_0^2 = k$, il vient alors (*fig.* 7) :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2} kX_m^2,$$

ou encore, avec $V_m = \omega_0 X_m$ (*cf.* 5.2.5) :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} mV_m^2.$$

Remarque : On retrouve directement ce résultat, puisque $\mathcal{E}$ est constante, en se plaçant respectivement aux points d'élongation maximale ($x = \pm X_m$, $v = 0$) et de vitesse maximale ($x = 0$, $v = \pm V_m$).

• L'énergie mécanique totale d'un oscillateur élastique horizontal non amorti est proportionnelle au carré de l'amplitude des oscillations :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} kX_m^2.$$

APPLICATION 3

Dans le cas d'un oscillateur idéalisé horizontal (m, k) non amorti, retrouver l'équation différentielle du mouvement à partir de l'expression de l'énergie mécanique.

L'énergie mécanique d'un tel oscillateur est égale à :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2.$$

Traduisons la conservation, dans le temps, de l'énergie mécanique :

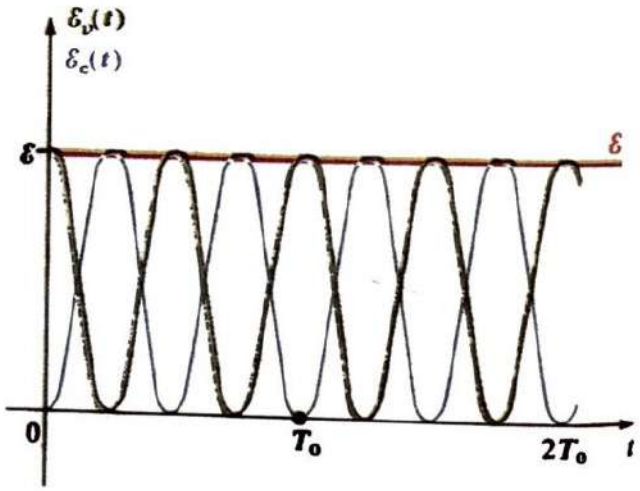
$$\mathcal{E} = \text{Cte}, \quad \text{soit} \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0;$$

d'où : $$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{1}{2} m(2\dot{x}\ddot{x}) + \frac{1}{2} k(2x\dot{x}).$$

Simplifions par $\dot{x}$, différent de zéro en dehors des points d'élongation maximale; il vient :

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad \text{soit} \quad \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0,$$

qui est l'équation différentielle du mouvement.



7. ***Variations de $\mathcal{E}_c$ et de $\mathcal{E}_p$ en fonction du temps. La somme des deux énergies est constante et vaut :***

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2} kX_m^2.$$

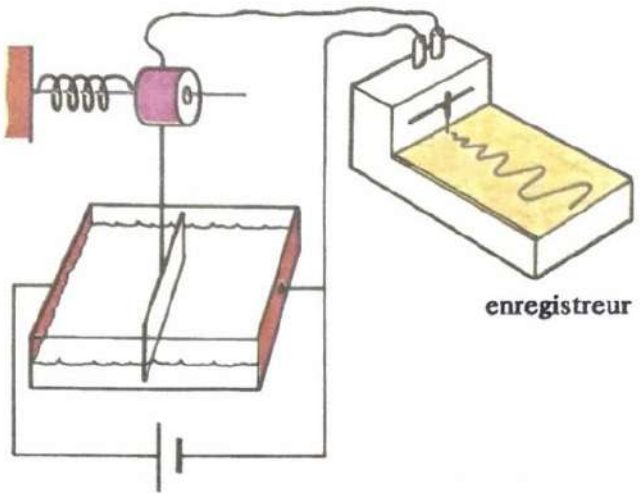
Scanné avec CamScanner

5.4 oscillateurs mécaniques amortis

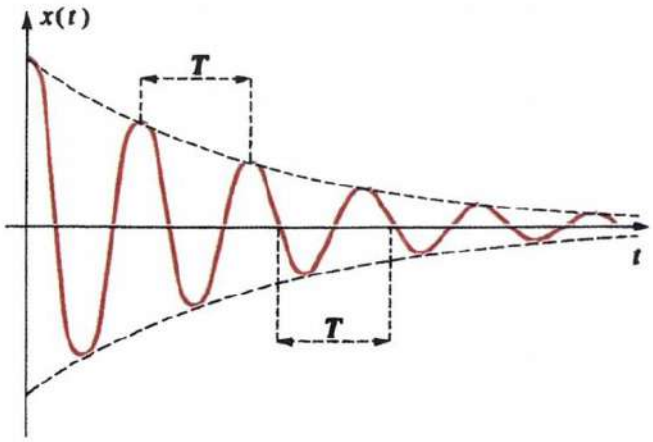
L'expérience montre que tous les oscillateurs libres mécaniques non entretenus effectuent des oscillations amorties dont l'amplitude décroît progressivement.
La variation d'énergie mécanique de l'oscillateur, négative, est égale au travail des forces de frottement :

$$\Delta\mathcal{E} = \Delta(\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p) = W_{\text{forces de frottement}} < 0.$$

L'énergie mécanique est progressivement transformée en chaleur, laquelle se répartit entre le système oscillant et le milieu extérieur.
La figure 8 représente un dispositif expérimental permettant d'enregistrer des oscillations amorties par des frottements de type fluide.
La courbe obtenue sur la figure 9a représente les variations de l'élongation du système au cours du temps. Il ne s'agit plus d'une sinusoïde. L'amplitude des oscillations diminue progressivement. Les élongations maximales sont cependant atteintes à des intervalles de temps successifs égaux à T. Le mouvement oscillatoire amorti est dit **pseudo-périodique**, T étant la **pseudo-période**.
La pseudo-période est, pour un oscillateur faiblement amorti, peu différente de la période propre T_0 qu'aurait l'oscillateur non amorti. La pseudo-période augmente avec l'amortissement. Si l'amortissement devient trop important, le pendule revient à sa position d'équilibre sans osciller : le mouvement est dit **apériodique** (*fig.* 9 b).
L'amortissement limite correspondant à la frontière entre les deux régimes (pseudo-périodique et apériodique) est appelé **amortissement critique** (*fig.* 9 c).
Dans certains systèmes mécaniques, il sera nécessaire d'entretenir le mouvement oscillatoire en fournissant de l'énergie sous forme d'impulsions brèves. Par exemple, dans une horloge ancienne, à chaque battement, un système d'échappement laisse tourner une roue dentée d'une petite fraction de tour; pendant ce temps, le balancier reçoit une légère impulsion pour compenser l'amortissement. L'énergie fournie est soustraite à l'énergie potentielle d'un contrepoids ou d'un ressort.
Dans d'autres cas, il faut supprimer le mouvement oscillatoire. Ainsi, pour qu'un appareil de mesure soit d'un emploi pratique, il faut que sa lecture puisse être faite rapidement; l'équipage mobile doit s'arrêter le plus vite possible à sa position d'équilibre. L'arrêt des oscillations est obtenu à l'aide de forces d'amortissement proportionnelles à la vitesse et dirigées en sens inverse de la vitesse. On utilise des systèmes se déplaçant dans des liquides visqueux, des courants de Foucault (voir chap. 10)...; l'amortissement est alors proche de l'amortissement critique.



8. ***La palette est immergée dans une solution conductrice de sulfate de cuivre; elle est en grande partie responsable de l'amortissement du pendule élastique.***



9 a. ***Variations de l'élongation de l'oscillateur de la figure 8 en fonction du temps. Le mouvement oscillatoire est un mouvement pseudo-périodique, de pseudo-période T.***



9 b. ***Lorsque l'amortissement s'accroît, le pendule élastique effectue de moins en moins d'oscillations avant de s'arrêter. A la limite, l'amortissement est dit critique.***



9 c. ***Pour un amortissement très fort (amortissement surcritique), le pendule retourne très lentement à sa position d'équilibre sans effectuer d'oscillations; le mouvement est apériodique.***

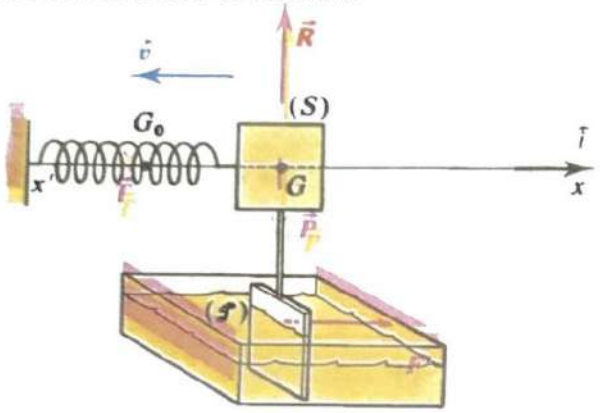
Scanné avec CamScanner

APPLICATION 4

On considère le dispositif de la figure 10. Le solide (S), de masse m, peut coulisser sans frottement suivant un axe horizontal. Le solide est muni d'une palette de masse négligeable trempant dans un liquide. La force de frottement qu'exerce le liquide sur la palette est proportionnelle à la vitesse de cette dernière; elle est de la forme $\vec{F}' = -f\vec{v}$.
La raideur du ressort est égale à k.

1/ Écrire l'équation différentielle du mouvement.

2/ Montrer que la variation de l'énergie mécanique est égale au travail de la force de frottement.



10.

1/ Lorsque le ressort n'est pas tendu, le centre d'inertie G du solide (S) occupe la position G_0 prise pour origine O des abscisses. L'allongement du ressort est repéré par

$$x = \overline{OG} = \overline{G_0G}.$$

Faisons le bilan des forces exercées sur le système {solide + palette}. Ce système est soumis :

- à son poids $\vec{P}$;
- à la réaction $\vec{R}$ de l'axe, normale à cet axe;
- à la force $\vec{T}$ exercée par le ressort : $-kx\vec{i}$;
- à la force $\vec{F}'$ exercée par le liquide :

$$-f\vec{v} = -f\dot{x}\vec{i}.$$

Appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a},$$

soit : $$\vec{P} + \vec{R} - kx\vec{i} - f\dot{x}\vec{i} = m\ddot{x}\vec{i}.$$

En projetant suivant $(O, \vec{i})$, il reste, puisque $\vec{P}$ et $\vec{R}$ sont verticaux :

$$-kx - f\dot{x} = m\ddot{x},$$

soit : $$m\ddot{x} + f\dot{x} + kx = 0. \qquad (1)$$

Nous avons là l'équation différentielle du mouvement.

2/ L'énergie mécanique de l'oscillateur est :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2.$$

Dérivons cette expression par rapport au temps :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = kx\dot{x} + m\dot{x}\ddot{x}$$

$$= (kx + m\ddot{x})\dot{x}.$$

Compte tenu de (1), il vient :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = (-f\dot{x})\dot{x} = \vec{F}'\vec{v},$$

soit : $$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = F'\frac{dx}{dt}.$$

Cette dernière relation peut se mettre sous la forme :

$$\delta\mathcal{E} = F'\delta x,$$

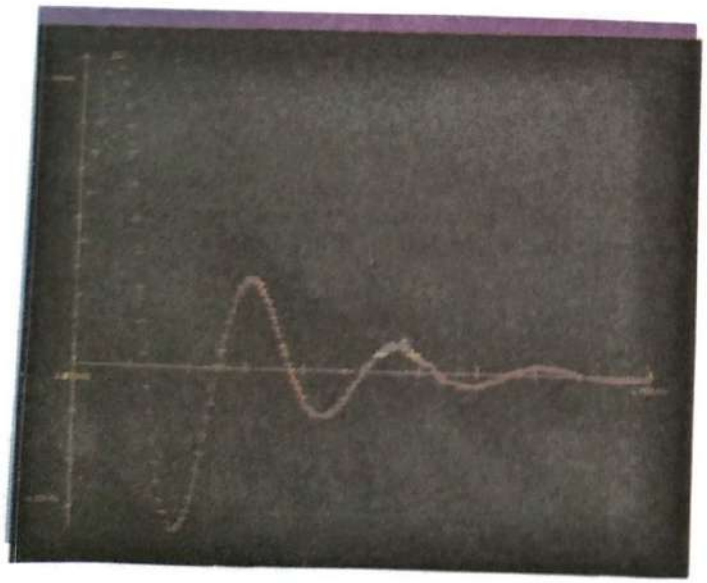
où $\delta\mathcal{E}$ représente la variation d'énergie correspondant au déplacement élémentaire δx du solide; d'où :

$$\delta\mathcal{E} = \delta W(\vec{F}').$$

En sommant les quantités élémentaires lorsque le système passe d'une élongation x_1 à une élongation x_2, nous obtenons alors :

$$\mathcal{E}(x_2) - \mathcal{E}(x_1) = W_{x_1 \to x_2}(\vec{F}').$$

La variation de l'énergie mécanique de l'oscillateur lors d'un déplacement donné du solide est égale au travail (négatif) de la force de frottement correspondant.



Un ordinateur associé à une interface permet d'enregistrer les oscillations amorties d'un système mécanique et d'en calculer différents paramètres. (Photo d'écran.)

Scanné avec CamScanner

L'essentiel du cours

5.1 A On considère un pendule élastique horizontal idéalisé. Voici six propositions :

1. La période des oscillations est d'autant plus grande que la masse m du solide est importante.
2. La pulsation ne dépend pas de la manière dont a été lancé le pendule.
3. Dans un satellite, ce système ne pourrait pas osciller.
4. L'énergie totale est proportionnelle au carré de l'amplitude de la vitesse.
5. L'énergie totale est proportionnelle au carré de l'amplitude des élongations.
6. L'énergie potentielle lorsque le ressort est comprimé est égale à $-\frac{1}{2}kx^2$.

Cocher la ou les cases correspondant à une bonne réponse :

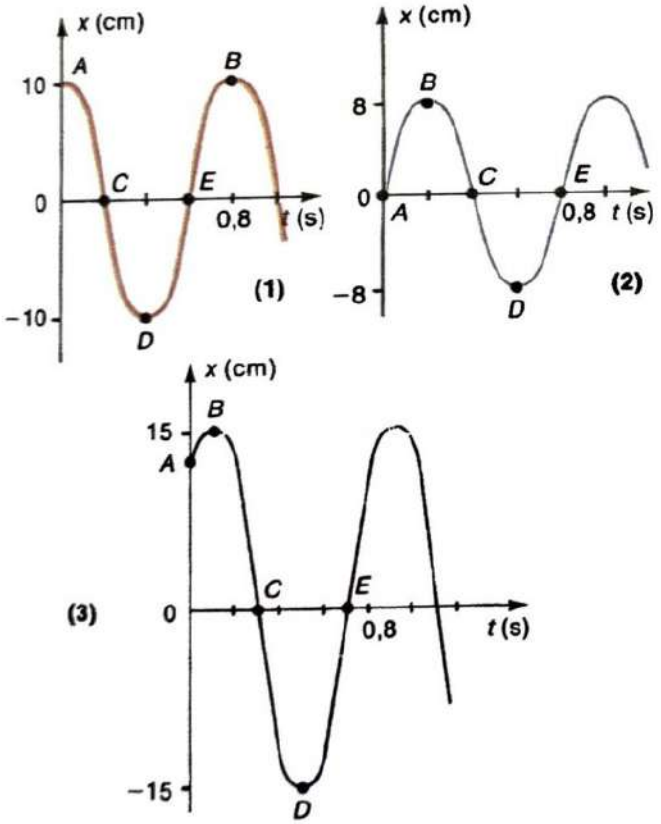
[a] Sont vraies les propositions 1, 3 et 5.

[b] Sont vraies les propositions 1, 2, 4 et 5.

[c] Sont vraies les propositions 3 et 6.

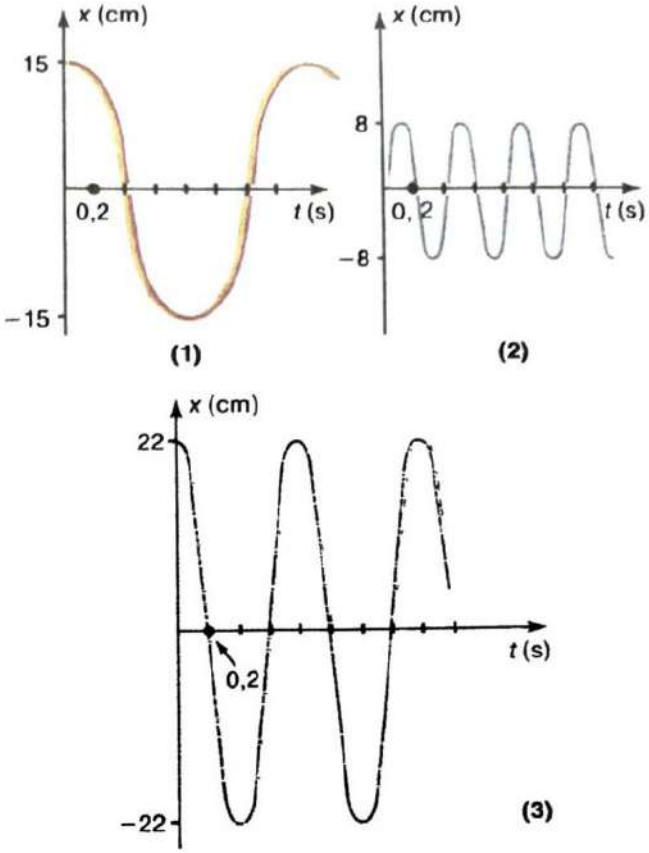
[d] Toutes les propositions sont vraies.

5.2 A Au cours d'essais, on a enregistré les oscillations d'un même oscillateur en mouvement sur un axe.



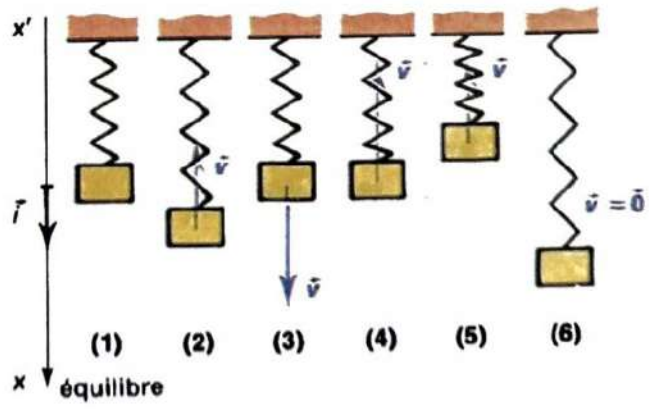
1/ Les conditions initiales sont-elles identiques ?
2/ En chacun des points A, B, C, D et E, préciser le sens du vecteur vitesse.
3/ Cet oscillateur peut-il osciller avec des périodes différentes ?
4/ Pourquoi les amplitudes ne sont-elles pas égales alors qu'il s'agit du même oscillateur ?
5/ Classer ces essais par énergie mécanique croissante.

5.3 A On considère un pendule élastique horizontal idéalisé. Au ressort de raideur k, on accroche successivement différentes masses m_1, m_2, m_3 correspondant respectivement aux schémas (1), (2) et (3).



1/ Indiquer le numéro du schéma correspondant à :
a/ la plus grande amplitude du mouvement ;
b/ la plus grande fréquence ;
c/ la plus grande énergie.
2/ Classer par valeurs croissantes m_1, m_2 et m_3.

5.4 A La figure représente une masse en équilibre, suspendue à un ressort. Les autres figures représentent différentes positions du système lors des oscillations, le vecteur vitesse $\vec{v}$ de la masse étant alors schématisé. Indiquer dans quels cas de figure l'accélération a, déterminée par $\vec{a} = a\vec{i}$ de la masse suspendue, est positive, négative ou nulle.



EXERCICES

Exercices de base

5.5 L'équation horaire du mouvement d'un oscillateur mécanique rectiligne sinusoïdal est donnée par la relation :

$$x = 3\cos\left(20t + \frac{\pi}{4}\right),$$

avec x en cm et t en s.

1/ AB3 Quelles sont la période, la fréquence et l'amplitude des oscillations ?

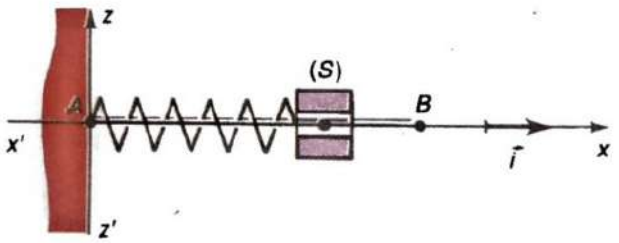
2/ A Exprimer la vitesse et l'accélération de l'oscillateur à chaque instant.

3/ B3 Calculer les amplitudes de la vitesse et de l'accélération.

4/ B3 Calculer la vitesse et l'élongation aux dates $t = 0$ et $t = 4$ s.

5/ AB3 Calculer l'énergie de l'oscillateur, sachant que sa masse est égale à 0,1 kg.

5.6 Un solide S, assimilable à un point, de masse m, peut glisser sans frottement sur une tige horizontale $A\grave{B}$; il est fixé à l'extrémité d'un ressort à spires non jointives, de masse négligeable, de raideur k. L'autre extrémité du ressort est accrochée en A.
On repère la position du centre d'inertie G du solide S par son abscisse x, sur un axe $(O, \vec{i})$ porté par AB.



Quand l'ensemble est en équilibre, le ressort n'est pas déformé et le point G a pour abscisse 0. L'équation différentielle du mouvement de S est :

$$m\ddot{x} + kx = 0.$$

La solution de cette équation différentielle peut se mettre sous la forme :

$$x = X_m \cos(\omega t + \varphi), \quad \text{avec } X_m > 0.$$

1/ A La pulsation ω est-elle égale à $\sqrt{\frac{k}{m}}$ ou à $\sqrt{\frac{m}{k}}$?

2/ A La période T des oscillations est-elle égale à $2\pi\omega$ ou à $\frac{2\pi}{\omega}$?

3/ A L'amplitude du mouvement oscillatoire est-elle X_m ou $X_m \cos\varphi$?

4/ A Les quantités X_m et φ dépendent-elles des conditions initiales ?

5/ B3 *Application numérique :* $X_m \cos\varphi = 5$ cm ; $\omega = 2$ rad . s $^{-1}$.
Calculer l'abscisse de G et la mesure algébrique de la vitesse à l'instant $t = 0$, dans les trois cas suivants : $\varphi = 60°$, $\varphi = 90°$, $\varphi = -60°$.
On représentera le vecteur vitesse sur un schéma.

5.7 A On reprend le dispositif décrit dans l'exercice précédent.

1/ Exprimer l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ du système (ressort + solide) à l'instant $t = 0$ en fonction de X_m et k, puis en fonction de m, ω et X_m.

2/ En déduire la norme du vecteur vitesse lorsque le ressort passe par sa position d'équilibre.

3/ Déterminer les positions de G lorsque la vitesse s'annule.

4/ A l'instant t, l'accélération de G s'écrit :

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} = -\omega^2 x\vec{i}.$$

En déduire la résultante des forces qui s'exercent sur le solide S lorsque :

a/ la vitesse s'annule ;
b/ le solide passe par sa position d'équilibre.

5.8 A On reprend encore le dispositif décrit dans l'exercice 5.6. On se propose de déterminer les équations horaires dans diverses conditions portant sur l'abscisse x_0 et la vitesse $\dot{x}_0$ à l'instant $t = 0$. On rappelle que les équations horaires du mouvement sont données par :

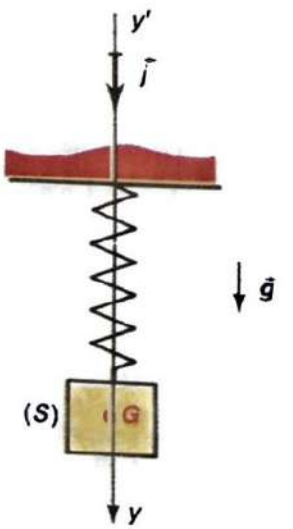
$$x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$
$$\dot{x} = -X_m\,\omega \sin(\omega t + \varphi).$$

1/ Compléter le tableau suivant, avec $\omega = 5$ rad . s $^{-1}$:

x_0 (m)	0,200	0	0	0,200	− 0,200
$\dot{x}_0$ (m . s^{-1})	0	0,200	− 0,500	0,400	0,500
X_m					
tan φ					
φ					

2/ Écrire dans chaque cas $x(t)$ et $\dot{x}(t)$.

5.9 Un oscillateur harmonique est constitué d'un ressort de masse négligeable suspendu à un point fixe A, auquel est accroché un solide ponctuel S de masse $m = 200$ g et de centre d'inertie G.



1/ La longueur à vide du ressort est $\ell_0 = 20$ cm. Quand on accroche le solide S, le ressort s'allonge de 8 cm. On prendra $g = 10$ m . s^{-2}.

Scanné avec CamScanner

a/ A Écrire la condition d'équilibre de la masse dans le champ de pesanteur.

b/ B3 Calculer la constante de raideur k du ressort.

2/ On tire le solide S verticalement vers le bas en donnant un allongement supplémentaire $a = 2$ cm au ressort. On lâche ensuite le solide sans vitesse initiale.

a/ A Faire un bilan des forces qui s'exercent sur S. On prendra comme origine des déplacements la position d'équilibre du ressort avec le solide accroché. L'axe vertical $(O, \vec{i})$ est orienté positivement vers le bas.

b/ A Établir l'équation différentielle du mouvement.

c/ B3 Déterminer l'équation horaire $t \mapsto y(t)$.

5.10 B3 L'équation différentielle du mouvement d'un oscillateur repéré par sa position x sur un axe $(O, \vec{i})$ est :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

La solution de cette équation différentielle peut s'écrire sous la forme :

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t. \qquad (1)$$

1/ Que représentent les paramètres x_0 et $\dot{x}_0$?

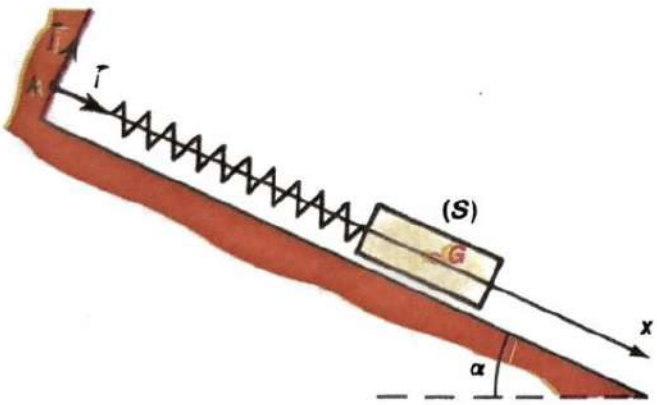
2/ Calculer la vitesse $\dot{x}(t)$.

3/ Montrer qu'on peut mettre la solution sous la forme :

$$x = X_m \cos(\omega t + \varphi). \qquad (2)$$

Exprimer X_m, $\cos \varphi$, $\sin \varphi$ et $\tan \varphi$ en fonction de x_0, $\dot{x}_0$ et ω.

5.11 Un solide S, de masse $m = 200$ g et de centre d'inertie G, peut se déplacer d'un mouvement de translation rectiligne, sans frottement, le long d'un banc à coussin d'air. Celui-ci fait un angle $\alpha = 10°$ avec l'horizontale. Le solide est attaché à l'extrémité inférieure d'un ressort de masse négligeable, à spires non jointives et à réponse linéaire ; l'autre extrémité du ressort est fixée en A (figure). On prendra $g = 10$ m . s^{-2}.



1/ Le solide S étant en équilibre, son centre d'inertie est en G_0. Le ressort, dont l'axe est parallèle à la direction du banc, a subi un allongement $\Delta\ell_0 = 6$ cm.

a/ A Représenter les forces qui s'exercent sur le solide S.

b/ A Écrire la condition d'équilibre du solide S sous forme vectorielle et projeter la relation suivant les deux axes $(O, \vec{i})$ et $(O, \vec{j})$.

c/ AB3 Exprimer le coefficient de raideur k du ressort en fonction des données. Calculer sa valeur numérique.

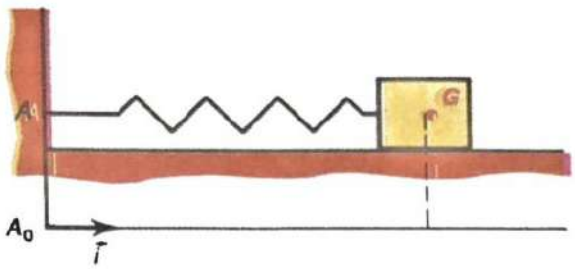
2/ On écarte le solide de sa position d'équilibre vers le bas. Son centre d'inertie est alors en G_1. La distance G_0G_1 mesurée le long du banc vaut $d = 5$ cm. On abandonne le solide sans vitesse à une date que l'on prendra pour origine des temps. La position G_0 sera prise comme origine des abscisses.

a/ C Écrire la relation de la dynamique (ou théorème du centre d'inertie).

b/ A Établir l'équation différentielle du mouvement.

c/ B3 Déterminer l'équation horaire du mouvement.

5.12 Un ressort à spires non jointives de raideur k, dont l'axe a une direction constante, est fixé en un point A par l'une de ses extrémités. A l'autre extrémité est accroché un palet de masse M. Ce palet peut se déplacer sans frottement, sur le plan horizontal.



A l'équilibre, son centre d'inertie G est en G_0. La position du centre d'inertie est repérée par :

$$\overrightarrow{G_0G} = x\vec{i}.$$

Le palet, dans sa position d'équilibre, est frappé par un autre palet de masse $M' = M/2$ animé d'une vitesse $\vec{v}'$ (colinéaire à $\vec{i}$). Le palet de masse M' s'incruste dans celui de masse M et reste fixé sur lui.

1/ AB3 Au moment du choc, il y a conservation de la quantité de mouvement de l'ensemble des deux palets. En déduire la vitesse $\vec{v}$ de l'ensemble juste après le choc.

2/ A Donner l'équation différentielle de l'oscillateur constitué par le ressort et les deux masses accolées.

3/ CB3 L'instant origine étant pris juste après le choc, quelle est l'énergie mécanique de l'oscillateur ? On supposera qu'à l'instant $t = 0$, $x_0 = 0$ et $\vec{v}_0 = \dot{x}_0\vec{i}$. En déduire l'amplitude du mouvement.

Application numérique : $k = 10$ N . m^{-1} ; $M = 100$ g ; $v' = 1{,}5$ m . s^{-1}.

4/ AB3 Établir l'équation horaire $t \mapsto x(t)$ du mouvement.

Banc d'essais

Équation du mouvement d'un oscillateur

5.13 AB3 Un oscillateur sinusoïdal est constitué d'un ressort à spires non jointives, de masse négligeable, de raideur $k = 4$ N . cm^{-1}, dont une des extrémités est fixe. L'autre extrémité est reliée à un solide de masse $M = 0{,}3$ kg qui peut glisser sans frottement suivant un axe horizontal $(O, \vec{i})$. On repère la position du centre d'inertie du solide par son abscisse x. Lorsque le ressort a sa longueur propre, $x = 0$.

Scanné avec CamScanner

EXERCICES

1/ En allongeant le ressort, on écarte le centre d'inertie de sa position d'équilibre d'une quantité $x_0 = +10$ cm et on lâche le système sans vitesse initiale à la date $t = 0$. Déterminer l'équation horaire du mouvement.

2/ On comprime le ressort en déplaçant le solide d'une quantité $x_0 = -10$ cm et on lâche le système sans vitesse initiale à la date $t = 0$. Déterminer l'équation horaire du mouvement.

↳ ex. 5.8, 5.10.

5.14 AB3 Un point matériel est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal sur un axe $(O, \vec{i})$ autour de la position $x = 0$. A l'instant $t = 0$, le mobile est situé à l'origine et est animé d'une vitesse de 40 cm . s $^{-1}$ vers les abscisses négatives. La fréquence du mouvement est $f = 5$ Hz.

1/ Déterminer l'équation horaire du mouvement.

2/ Calculer la position et la vitesse du mobile à la date $t = 5$ s.

↳ ex. 5.8, 5.10.

Énergie mécanique d'un oscillateur

5.15 Un oscillateur horizontal est constitué par une masse $m = 0{,}1$ kg attachée à un ressort de masse négligeable et de raideur $k = 1$ N . m $^{-1}$. Il oscille selon un axe $(O, \vec{i})$ autour de sa position d'équilibre $x = 0$. A l'instant $t = 0$, $x = x_0$ et $\dot{x} = \dot{x}_0$.

1/ AB3 Calculer la période T et la pulsation ω de cet oscillateur.

2/ CB3 Exprimer en fonction de x_0 et de $\dot{x}_0$ la phase ω et l'amplitude X_m du mouvement.

Application numérique : $\dot{x}_0 = 15$ cm . s $^{-1}$; $x_0 = 0{,}10$ m.

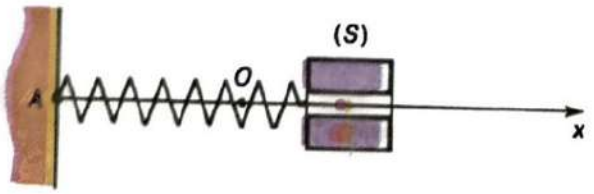
3/ AB3 Déterminer l'énergie mécanique de cet oscillateur.

↳ ex. 5.5, 5.6, 5.8, 5.10.

Analyse d'un texte

5.16 On dispose d'un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de raideur $k = 10{,}1$ N . m $^{-1}$. On néglige les frottements.

On engage le ressort sur une tige horizontale Ax ; l'une de ses extrémités est fixée en A, l'autre est reliée à un cylindre creux S de masse $m = 0{,}120$ kg qui peut glisser le long de la tige.



L'abscisse du centre d'inertie G de S est repérée par rapport à la position O de G à l'équilibre.

On écarte le cylindre de sa position d'équilibre et on le lâche à l'instant $t_0 = 0$. Son abscisse est alors $x_0 = +2{,}00$ cm et sa vitesse $v_0 = -0{,}200$ m . s $^{-1}$.

1/ B1C Quelles sont les hypothèses simplificatrices énoncées ?

2/ B1C Pourquoi précise-t-on « à spires non jointives » ? Vérifier qu'une calculatrice indique $T_0 = 0{,}684\,872$ s. Arrondir ce résultat.

3/ B1B3 Pourquoi précise-t-on $x_0 = +2{,}00$ cm et $v_0 = -0{,}200$ m . s $^{-1}$?

4/ AB3 Donner la valeur de l'énergie mécanique.

5/ C L'équation différentielle du mouvement est-elle modifiée si l'on change l'orientation de l'axe ?

5.17 On conserve les notations et les données de l'exercice précédent.

1/ En appliquant le principe de conservation de l'énergie mécanique, calculer :

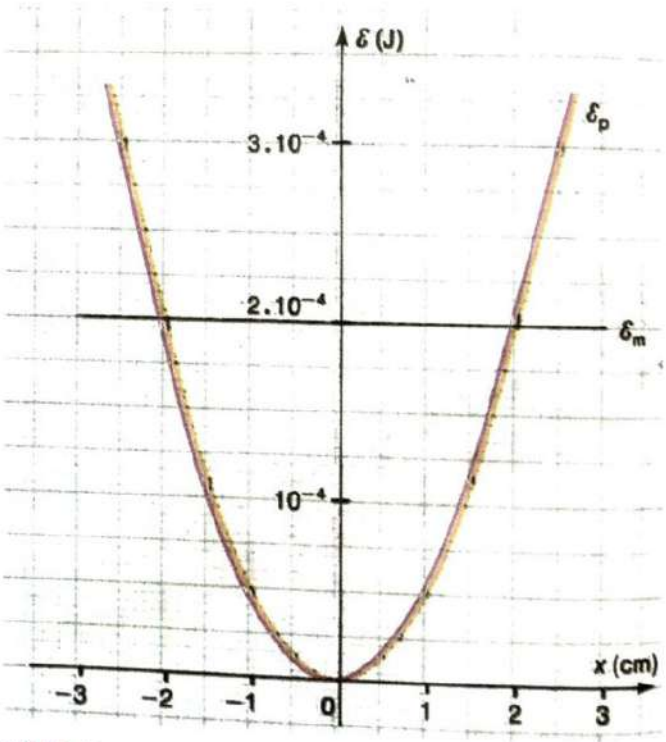
a/ AB3 la vitesse de G au passage par la position d'équilibre ;

b/ CB3 les positions de G pour lesquelles la vitesse s'annule.

2/ AB3 Établir l'équation horaire du mouvement de G.

Utilisation d'un graphique

5.18 On considère un pendule élastique, de masse m et de raideur k, mobile sans frottement sur un axe horizontal $(A, \vec{i})$. La figure donne l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ et l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ du système en fonction de l'abscisse x.



1/ B1C Montrer que le système effectue des oscillations.

2/ B1B3 En déduire l'amplitude du mouvement.

3/ AB3 Déterminer la raideur du ressort.

4/ CB3 Donner la valeur de l'énergie cinétique pour $x = 0$ et $x = -2$ cm.

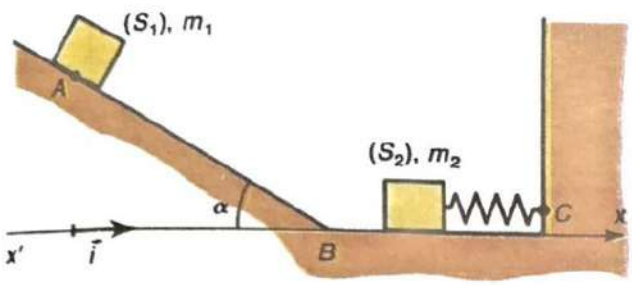
5/ CB3 La période des oscillations est égale à 0,628 s. Déterminer la vitesse de l'extrémité du ressort lorsque l'élongation est égale à + 1 cm.

↳ cours 5.2, 5.3.

Scanné avec CamScanner

Choc mou

5.19 Un solide S_1, *de masse* $m_1 = 50$ g, est lâché sans vitesse initiale d'un point A et glisse sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 30°$ sur l'horizontale. Après un parcours $AB = \ell = 1$ m, il aborde un plan horizontal sur lequel il continue à glisser avant de heurter un solide S_2 de masse $m_2 = 200$ g, immobile avant le choc.



1/ BA3 Calculer la norme de la vitesse $\vec{v}_1$ de S_1 juste avant le choc avec S_2.

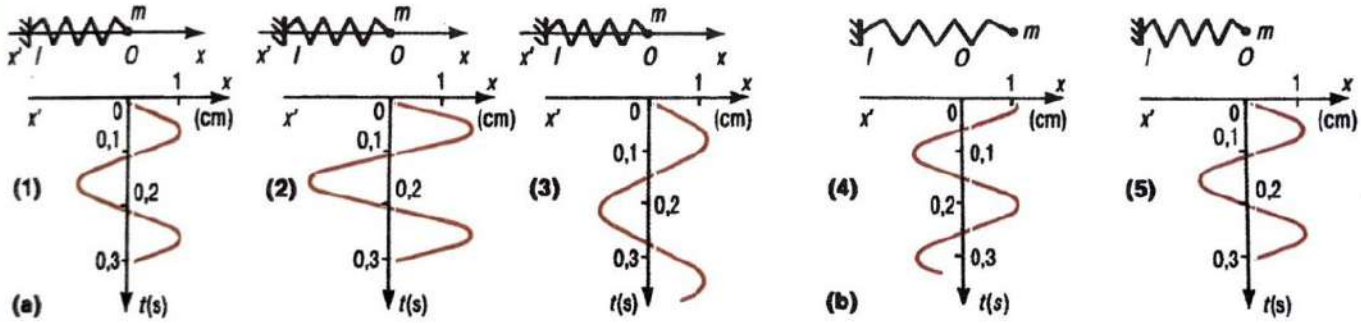
2/ AB3 Au moment du choc, il y a accrochage des deux solides qui forment alors un ensemble S de centre de masse G. En appliquant la conservation du vecteur quantité de mouvement du sytème (S_1, S_2), calculer la norme de la vitesse $\vec{v}_G$ de G juste après le choc.

3/ CB3 Le solide S_2 est relié à un ressort de masse négligeable, à spires non jointives, de constante de raideur $k = 50$ N.m^{-1} et dont l'autre extrémité C est fixe. Juste avant le choc, ce ressort est au repos. Après le choc, l'ensemble S reste lié au ressort et il continue son mouvement, les spires du ressort étant encore non jointives. La position de G sera repérée sur l'axe $(B, \vec{i})$ indiqué sur la figure, avec pour origine la position de G à l'instant du choc. On prendra pour origine des temps l'instant du choc. Trouver l'équation horaire $x = f(t)$. Calculer l'abscisse x_m de G lorsque sa vitesse s'annule pour la première fois.

↳ **cours chap. 2, ex. 5.11.**

Analyse d'un document

5.20 B1B3 On considère un ressort d'axe horizontal $(O, \vec{i})$ posé sur une table à coussin d'air, dont une extrémité l est fixe. On désigne par M un solide ponctuel de masse m, accroché à l'autre extrémité du ressort. On note k la raideur du ressort et x son allongement (ou son raccourcissement) compté à partir de la position O de l'extrémité libre du ressort non déformé. La force F exercée par le ressort sur M a pour valeur algébrique $-kx$. On s'arrange pour que, au cours des expériences, le ressort ne soit jamais à spires jointives ; on néglige sa masse devant m.



Dans tout le problème, le solide M, écarté de sa position d'équilibre, effectue des oscillations sinusoïdales en glissant sur la table, sans frottement, suivant l'axe $(O, \vec{i})$.

Chaque schéma à exploiter comporte :

— le ressort et le solide M, représentés à un instant donné t, dans une position donnée ;

— d'autre part, la courbe donnant la variation de x en fonction de t et traduisant le mouvement ultérieur de M. L'origine sur l'axe des abscisses est la position de M lorsque le ressort n'est pas déformé ; l'abscisse est en cm et le temps en s.

1/ Figure a(1). Déterminer la période et l'amplitude des oscillations effectuées par M.

Figure a(2). Déterminer la période et l'amplitude des oscillations effectuées par M.

Peut-on obtenir cette période et cette amplitude avec le même ressort, mais avec une autre masse que dans le cas précédent ?

Figure a(3). On garde le même ressort et on accroche un objet de masse m_1 différente de m. On obtient la courbe 3.

Calculer le rapport $\frac{m_1}{m}$.

2a/ Déterminer les conditions initiales (abscisse x_0 et vitesse v_0 à l'instant $t = 0$) pour les mouvements représentés figures b(4) et b(5).

b/ Écrire avec des coefficients numériques l'équation horaire du mouvement représenté figure b(4).

3a/ Déterminer les forces exercées sur M à l'instant 0 sur les figures c(6) et c(7). Comparer ces forces.

b/ Comparer pour ces deux mouvements les énergies potentielles $\mathcal{E}_{p_6}$ et $\mathcal{E}_{p_7}$ du système (ressort + masse) à cet instant.

c/ On désigne par $\mathcal{E}_{m_6}$ et $\mathcal{E}_{m_7}$ les énergies mécaniques du système en (6) et (7). Exprimer $\mathcal{E}_{m_7}$ en fonction de la raideur k du ressort. En déduire l'énergie cinétique $\mathcal{E}_{c_7}$ à l'instant 0.

MÉCANIQUE

Conseils de résolution

La résolution d'un problème de mécanique nécessite de :

1/ Définir le référentiel galiléen associé au solide de référence. Le référentiel terrestre peut être considéré comme galiléen pour les événements de courte durée se passant sur la Terre.

2/ Préciser le système étudié.

3/ Effectuer le bilan des forces extérieures appliquées au système.

4/ Écrire le théorème du centre d'inertie et/ou le théorème de l'énergie cinétique qui permettent d'exprimer le vecteur accélération et/ou la vitesse du centre d'inertie du système.

5/ Projeter le théorème du centre d'inertie sous forme vectorielle, dans un repère orthonormal adapté. Dans le cas de mouvements circulaires, choisir le repère de Frenet de base $(\vec{u}, \vec{n})$.
Dans certains problèmes, l'opération de projection n'est pas nécessaire, et on peut raisonner directement sur les vecteurs sans faire apparaître leurs coordonnées.

6/ Procéder à l'étude cinématique (voir chapitre 1) du mouvement du centre d'inertie du système.
Pour un mouvement plan, dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

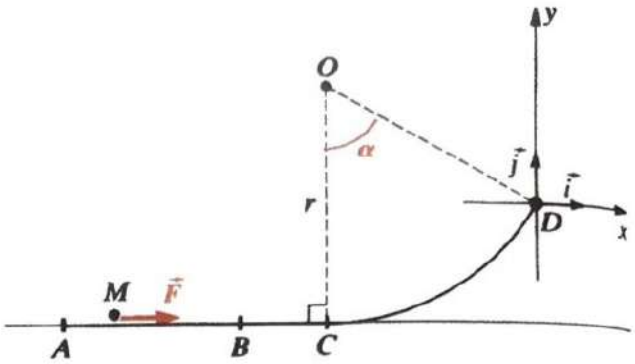
$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}.$$

En prenant les primitives successives des coordonnées $\ddot{x}$ et $\ddot{y}$ et en tenant compte des *conditions initiales*, on établit les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ du mouvement.
L'élimination du temps entre ces deux équations permet de connaître l'équation $y(x)$ de la trajectoire.
Pour un mouvement circulaire dans le repère de Frenet :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u} + \frac{v^2}{R}\vec{n}.$$

Problème résolu 1

La piste de lancement d'un projectile M comprend une partie rectiligne horizontale ABC et une portion circulaire CD, centrée en O, de rayon $r = 1$ m, d'angle au centre $\alpha = 60°$ et telle que OC soit perpendiculaire à AC.
Le projectile M, assimilable à un point matériel de masse $m = 0{,}5$ kg, est lancé suivant AB de longueur 1 m avec une force constante $\vec{F}$, horizontale et ne s'exerçant qu'entre *A* et *B.*



1a/ *Énoncer le théorème de l'énergie cinétique pour un solide assimilable à un point matériel.*
b/ *En appliquant ce théorème, déterminer l'intensité minimale à donner à $\vec{F}$ pour que le projectile quitte la piste en D.*
c/ *L'intensité de la force est égale à 150 N. Donner la valeur numérique de la vitesse v_D avec laquelle le projectile quitte la piste en D.*

2a/ *Donner l'équation de la trajectoire du solide au-delà de D dans un repère orthonormal d'origine D.*

b/ *Quelle est la hauteur maximale atteinte au-dessus de l'horizontale ABC ?*

3/ *Quelle est l'intensité de la force exercée par le projectile sur la piste au moment de la quitter en D avec la vitesse $\vec{v}_D$ précédente ? On négligera tous les frottements.*

Donnée : $g = 10\ \text{m.s}^{-2}$.

1a/ Voir cours.

B2.1 Qualité du français.
A1.1 Énoncé du théorème.

b/ Le référentiel terrestre étant considéré comme galiléen, nous pouvons appliquer le théorème de l'énergie cinétique. Sur tout le trajet, le projectile est soumis à son poids $\vec{P}$ et aux forces de contact de la piste, de somme $\vec{R}$, normale à la piste puisqu'il n'y a pas de frottement. La force $\vec{F}$ n'agit que sur le trajet *AB*.

$$W_{A\to B}(\vec{F}) + W_{A\to D}(\vec{P}) + W_{A\to D}(\vec{R}) = \frac{1}{2}mv_D^2 - \frac{1}{2}mv_A^2,$$

$$W_{A\to D}(\vec{R}) = 0,$$
$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = F.AB,$$
$$W_{A\to D}(\vec{P}) = -mgh = -mgr(1 - \cos\alpha).$$

Finalement, avec $v_A = 0$:

$$F.AB - mgr(1 - \cos\alpha) = \frac{1}{2}mv_D^2.$$

Pour que le projectile quitte la piste en *D*, il faut que $v_D \geqslant 0$; à la limite, $v_D = 0$ et :

$$F = \frac{mgr(1 - \cos\alpha)}{AB} = 2{,}5\ \text{N}.$$

C1b.4 Détailler la méthode :
- établir le travail des forces ;
- appliquer le théorème de l'$\mathcal{E}_c$.

B2.1 Qualité du français.

B3.1 Pour le calcul de *F*.

A2.1 Savoir qu'à la limite $v_D = 0$.

Scanné avec CamScanner

c/ Avec $F = 150$ N, on obtient :

$$v_D^2 = 2\frac{F}{m}AB - gr(1 - \cos\alpha),$$

$$v_D = 24{,}3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

B3.1 Calcul numérique.

2a/ Il s'agit de déterminer une équation de la trajectoire d'un projectile en chute libre avec vitesse initiale (question classique). Le vecteur vitesse initiale $\vec{v}_D$ fait un angle α avec l'axe Dx. On obtient :

A2b.2 Savoir-faire théorique : établissement de l'équation cartésienne du mouvement.

$$y = -\frac{1}{2}g\frac{1}{v_D^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha$$

$$y = -3{,}39 \cdot 10^{-2}x^2 + 1{,}732x.$$

B3.1 Calcul numérique.

b/ Il faut ensuite calculer la flèche, c'est-à-dire l'ordonnée y_E du point E correspondant à l'altitude maximale. La dérivée $\frac{dy}{dx}$ s'annule en ce point ; on obtient (calcul classique) :

$$x_E = \frac{v_D^2\cos^2\alpha\tan\alpha}{g}$$

A2b.2 Calcul littéral de y_E.

et : $$y_E = \frac{v_D^2\sin^2\alpha}{2g} = 22{,}15 \text{ m}.$$

B3.1 Calcul numérique de y_E.

La hauteur maximale atteinte est donc :

$$22{,}15 + 0{,}5 = 22{,}65 \text{ m}.$$

3/ Appliquons la relation fondamentale au projectile :

$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}.$$

C1.2 Organiser la résolution. Détailler les étapes et les indiquer.
1,5 pt : application du théorème du centre d'inertie et sa projection dans le repère de Frenet ;
0,5 pt : principe de l'action et de la réaction.

Projetons sur la normale orientée :

$$-mg\cos\alpha + R = ma_N = m\frac{v_D^2}{r}.$$

$\vec{R}$ est l'action de la piste sur le projectile ; en vertu du principe de l'action et de la réaction, la force $\vec{R}'$ exercée par le projectile sur la piste est opposée à $\vec{R}$ et de norme :

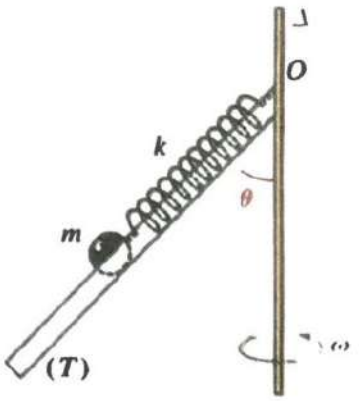
$$R' = R = m\frac{v_D^2}{r} + mg\cos\alpha \approx 300 \text{ N}.$$

A1.1 Formule de a_N.
B3.1 Calcul numérique de R'.

Problème résolu 2

Solide en rotation

Le système suivant est constitué d'une glissière T soudée à un bâti mobile autour d'un axe vertical Δ. Sur la glissière inclinée d'un angle θ par rapport à la verticale est posé un solide S, de masse m, qui peut glisser sans frottement. Ce solide, considéré comme ponctuel, est accroché à un ressort de raideur k et de longueur à vide $\ell_0 = 20$ cm (figure).



1.

1/ Le système est immobile. L'allongement du ressort est de 10 cm pour un angle θ = 60° et une masse m = 200 g.

Calculer la raideur k et la réaction $\vec{R}_1$ de la glissière sur S.

Donnée : $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

2/ Le système tourne autour de l'axe Δ à la vitesse angulaire constante ω.

a/ Déterminer la longueur ℓ_2 du ressort et la réaction $\vec{R}_2$ de la glissière sur le solide S lorsque celui-ci a atteint sa position d'équilibre.

A. N. : $\omega = 4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

b/ Montrer que S décolle de la glissière lorsque ω est supérieure à une valeur ω_0 que l'on calculera.

1/ Le solide S est soumis :
— à la tension $\vec{T}_1$ du ressort : $\|\vec{T}_1\| = k\Delta\ell$;
— aux forces de pesanteur équivalentes au poids : $\vec{P} = m\vec{g}$;
— à la réaction $\vec{R}_1$ de la glissière sur le solide. Cette réaction est orthogonale à la glissière, puisqu'il n'y a pas de frottement.

C1.3 Pour l'analyse correcte des forces et l'organisation des étapes de la résolution.

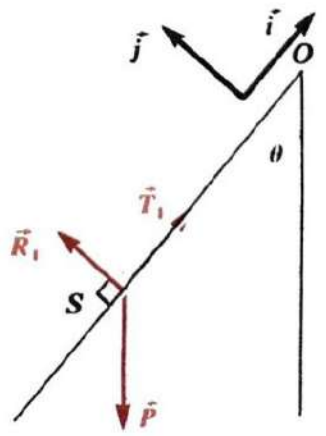
A2.2 Savoir-faire théorique pour la projection de la relation (1) sur des axes convenables.

A l'équilibre, on peut écrire, en assimilant un repère terrestre à un repère galiléen :

$$\vec{T}_1 + \vec{P} + \vec{R}_1 = \vec{0}. \qquad (1)$$

A1.1 Énoncé du théorème sur l'équilibre d'un solide soumis à 3 forces.

Ces trois forces sont coplanaires et concourantes ; leur somme est nulle.



2.

Scanné avec CamScanner

Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, la relation vectorielle (1) devient en projection :

— sur l'axe orienté par $\vec{i}$, parallèle à T :

$$-mg\cos\theta + k\Delta\ell = 0;$$

— sur l'axe orienté par $\vec{j}$, perpendiculaire à T :

$$R_1 - mg\sin\theta = 0;$$

$$k = \frac{mg\cos\theta}{\Delta\ell} = 10\ \text{N.m}^{-1},$$

d'où :

$$R_1 = mg\sin\theta = 1{,}73\ \text{N}.$$

B2.1 Qualité du français.

B4.1 S'appuyer sur un schéma pour représenter les forces.

B3.2 Calcul numérique.

2*a*/ Le solide S est encore soumis aux trois forces $\vec{T}_2$, $\vec{R}_2$ et $\vec{P}$. Il décrit un cercle horizontal de centre H et de rayon $SH = \ell_2 \sin\theta$. Le mouvement étant circulaire uniforme, l'accélération est centripète, égale à :

$$\vec{a} = \omega^2\overrightarrow{SH}.$$

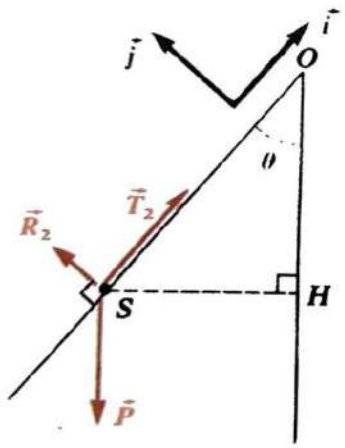
La relation fondamentale de la dynamique appliquée à S donne :

$$m\vec{a} = m\omega^2\overrightarrow{SH} = \vec{T}_2 + \vec{R}_2 + \vec{P}, \qquad (2)$$

avec : $\|\vec{T}_2\| = k(\ell_2 - \ell_0)$ et $\vec{R}_2$ orthogonal à T (figure).

C1.2 1 pt pour la démarche ;
1 pt pour l'interprétation finale.

A2.1 Savoir-faire pour la projection de la relation (2).



3.

Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, la relation vectorielle (2) devient :

— selon $\vec{i}$:

$$k(\ell_2 - \ell_0) - mg\cos\theta = m\omega^2\ell_2\sin^2\theta, \quad (3)$$

— selon $\vec{j}$:

$$R_2 - mg\sin\theta = -m\omega^2\ell_2\sin\theta\cos\theta. \quad (4)$$

De la relation (3), on tire :

$$\ell_2 = \frac{mg\cos\theta + k\ell_0}{k - m\omega^2\sin^2\theta}.$$

De la relation (4), on tire :

$$R_2 = mg\sin\theta - m\omega^2\ell_2\sin\theta\cos\theta.$$

Numériquement :

$\ell_2 = 39{,}5$ cm et $R_2 = 1{,}18$ N.

B2.1 Qualité du français.

B3.2 Calcul numérique.

Remarque. L'expression de ℓ_2 n'a de sens que pour :

$$k - m\omega^2\sin^2\theta > 0,$$

c'est-à-dire pour :

$$\omega^2 < \frac{k}{m\sin^2\theta}.$$

Le cas limite $\omega^2 = \dfrac{k}{m\sin^2\theta}$ correspondrait à ℓ_2 tendant vers $+\infty$; la limite d'élasticité du ressort serait bien évidemment dépassée.

b/ Il n'y a contact entre S et la glissière qui si $R_2 > 0$. Le solide S décolle pour la valeur de ω telle que :

$$m\sin\theta(g - \omega^2\ell_2\cos\theta) = 0.$$

Or, $\sin\theta \neq 0$; d'où :

$$g - \omega^2\cos\theta\,\frac{mg\cos\theta + k\ell_0}{k - m\omega^2\sin^2\theta} = 0;$$

$$\frac{kg - \omega^2(mg + k\ell_0\cos\theta)}{k - m\omega^2\sin^2\theta} = 0,$$

soit : $kg - \omega^2(mg + k\ell_0\cos\theta) = 0$;

$$\omega^2 = \omega_0^2 = \frac{kg}{mg + k\ell_0\cos\theta}.$$

Numériquement :

$$\omega_0 = 5{,}8\ \text{rad.s}^{-1}.$$

Pour $\omega > \omega_0$, le solide S décolle de la glissière.

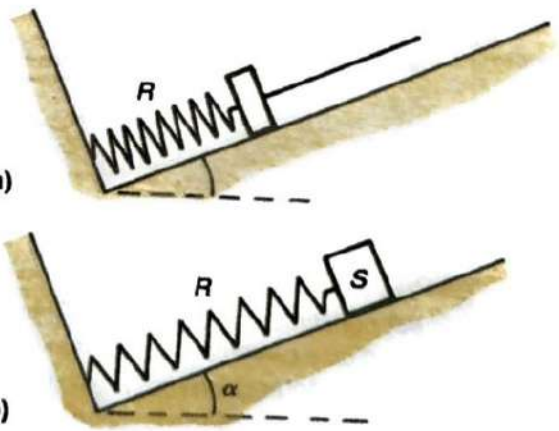
A2.3 1 pt pour le savoir-faire théorique ($R_2 > 0$) ;
2 pts pour le calcul littéral.

B3.1 Calcul numérique.

Problème résolu 3

1/ *Un ressort hélicoïdal à spires non jointives R, de constante de raideur k, a pour longueur à vide* $\ell_0 = 12$ cm. *Suspendu à un point fixe, il prend la longueur* $\ell_1 = 14$ cm *lorsqu'on y acccroche un solide S de masse* $m = 100$ g. *Déterminer la constante de raideur du ressort.*

Donnée : $g = 10\ \text{m.s}^{-2}$.



2/ *Le solide S, accroché au ressort R est astreint à se déplacer en translation sur la ligne de plus grande pente d'un plan, incliné d'un angle* α *par rapport à l'horizontale (voir figure). La longueur du ressort correspondant à la nou-*

Scanné avec CamScanner

velle position d'équilibre étant $\ell_2 = 11{,}5$ cm et en négligeant les frottements dans cet équilibre statique, calculer l'angle α.

3/ On déplace légèrement le solide S de G_0 à G_M de façon que

$$\overrightarrow{G_0G_M} = x_m\vec{u} \quad avec \quad x_m = +4{,}5 \text{ cm},$$

et on l'abandonne sans vitesse initiale.

a/ A l'instant t, le centre d'inertie du solide est en G tel que $\overrightarrow{G_0G} = x\vec{u}$. Quelle est la tension $\vec{T}$ du ressort ?

b/ Les forces de frottement sont proportionnelles à la vitesse du solide : $\vec{f} = -a\vec{v}$.
Établir l'équation différentielle du mouvement du solide S sur le plan incliné.

c/ En considérant que les frottements sont négligeables ($a = 0$), quelle est l'équation horaire du mouvement du solide S ?

Calculer la période des oscillations.

1/ Le solide S est soumis à son poids ($\vec{P} = m\vec{g}$) et à la tension du ressort ($\|\vec{T}\| = k|\Delta\ell|$).
A l'équilibre :

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$$
$$mg = k|\Delta\ell|;$$

d'où :

$$k = \frac{0{,}1 \times 10}{2 \cdot 10^{-2}} = 50 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} = 0{,}5 \text{ N} \cdot \text{cm}^{-1}.$$

A.3 Savoir-faire théorique, dont 1 pt pour les unités correctement employées.

B3.1 Application numérique.

2/ Le solide est soumis :

- à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$;
- à la tension du ressort : $\vec{T} = k|\Delta\ell|\,\vec{u}$;
- à la réaction $\vec{R}$ du plan sur S; cette réaction est normale au plan puisqu'on néglige les frottements.

A.3 Bilan des forces.

A l'équilibre :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = \vec{0}.$$

En projetant cette relation vectorielle sur l'axe $\vec{u}$, on obtient :

$$-mg \sin\alpha + k|\Delta\ell| = 0$$

$$\sin\alpha = \frac{k|\Delta\ell|}{mg} = \frac{50 \times 0{,}5 \cdot 10^{-2}}{0{,}1 \times 10} = 0{,}25$$

$$\alpha = 14{,}5°.$$

B3.2 Application numérique.

3a/ G_0 est la position d'équilibre du solide S.

$\vec{T} = -k(x - 0{,}5)\,\vec{u}$ avec x en cm et $k = 0{,}5$ N.cm^{-1}.

B3.1 Application numérique.

3b/ Le solide est soumis :

- à son poids $\vec{P}$;
- à la tension $\vec{T}$ du ressort;
- à la réaction du plan $\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{f}$.

A.4 Bilan des forces; théorème fondamental.

$\vec{R}_N$ est la composante normale au plan.
La relation fondamentale de la dynamique s'écrit en considérant le repère du laboratoire comme galiléen :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{R}. \qquad (1)$$

Or : $\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}$.

B2.2 Qualité du français.

En projection sur l'axe $\vec{u}$, la relation (1) donne :

$$m\ddot{x} = -mg \sin\alpha - k(x - 0{,}5) - a\dot{x}. \qquad (2)$$

Or, à l'équilibre, on avait :

$$0 = -mg \sin\alpha + k \times 0{,}5. \qquad (3)$$

Il vient par différence entre (2) et (3) :

$$m\ddot{x} + a\dot{x} + kx = 0.$$

C'est l'équation différentielle du mouvement.

3c/ $\ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0.$

C1.3 Bien préciser les conditions initiales; donner la forme générale de la solution; détail du calcul pour déterminer X_m et φ.

C'est l'équation différentielle d'un mouvement harmonique de pulsation propre ω_0 :

- $\omega_0^2 = k/m$; $\quad T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$;

A. N. : $T_0 = 0{,}28$ *s.*

La solution générale de cette équation différentielle est :

$$x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

A l'instant $t = 0$ $\begin{cases} x_0 = 4{,}5 \text{ cm} \\ \dot{x}_0 = 0. \end{cases}$

B3.1 Application numérique

On en déduit l'équation horaire du mouvement :

$$x = 4{,}5 \cos(\omega_0 t). \quad (x \text{ en cm}; \; t \text{ en s}).$$

Scanné avec CamScanner

La découverte de l'induction électromagnétique

Quand Œrsted eut montré en 1820 qu'un courant électrique produit des effets magnétiques, on songea à obtenir d'une façon inverse un courant à partir d'un aimant. En 1821, Ampère s'était demandé si un courant électrique pouvait en induire un autre dans un circuit voisin. Avec de la Rive, à Genève, il réussit même à mettre en évidence un courant induit; l'importance du phénomène échappa cependant au grand physicien.

Un autre expérimentateur, Colladon, physicien suisse, réalisa avant Faraday l'expérience qui consiste à introduire un aimant dans un solénoïde relié à un galvanomètre. De son côté, Frenel espéra un moment faire apparaître un courant dans des spires enroulées sur un aimant. Le résultat fut négatif, puisque seules des variations de flux peuvent induire un courant.

Arago, en 1824, avait observé que si l'on approche une aiguille aimantée d'un disque en rotation, l'aiguille étant centrée sur celui-ci, elle tourne dans le même sens que le disque.

Faraday, quant à lui, réalisa de très nombreuses expériences. Il examina avec minutie toutes les faces du problème et découvrit enfin le phénomène d'induction. A cette date, en 1831, le physicien américain Henry avait également obtenu des courants induits, mais il ne fit connaître ses résultats qu'après Faraday.

Cette découverte eut une grande répercussion pratique. En effet, Faraday, en montrant la possibilité de produire de l'électricité à partir du mouvement (autrement dit de transformer de l'énergie mécanique en énergie électrique, comme les piles le réalisaient à partir de l'énergie chimique), ouvrait la voie à Pixii, inventeur du premier alternateur, et à Gramme, inventeur de la première dynamo.

La première étude quantitative de l'induction fut entreprise par Weber, qui la publia en 1846.

En 1864, Maxwell publie une théorie qui englobe à la fois les phénomènes magnétiques et les phénomènes électrostatiques. Les équations de cette théorie l'amènent à prévoir l'existence d'ondes électromagnétiques, dont la célérité dans le vide dépend d'une certaine quantité (alors appelée « rapport des unités électriques et magnétiques »). La valeur de cette quantité, déterminée par Weber en 1855, conduit à une célérité des ondes électromagnétiques égale, aux incertitudes près, à celle de la lumière (déterminée en 1849 par Fizeau); Maxwell en conclut que la lumière est une onde électromagnétique. Tous ces résultats sont confirmés vingt ans plus tard par les expériences du physicien allemand Hertz.



Hans Christian Œrsted* (1777-1851), *physicien et chimiste danois. En juillet* 1820, *il observe la déviation d'une aiguille aimantée placée au voisinage d'un conducteur parcouru par un courant.

Scanné avec CamScanner



André-Marie Ampère (1775-1836), *physicien, chimiste, biologiste, mathématicien, poète et philosophe français. Ayant refait l'expérience d'Œrsted, il édifie en quelques jours (septembre* 1820) *une théorie des champs magnétiques créés par les courants continus. Il introduit l'hypothèse des « courants moléculaires », ou « courants ampériens », pour expliquer les propriétés de la matière aimantée. Ampère a également conçu ou perfectionné de nombreux appareils électriques (en particulier le solénoïde et le galvanomètre) et introduit les termes de « courant » et de « tension ».*



James Clerk Maxwell (1831-1879), *physicien écossais. En* 1864, *il établit les fameuses équations qui portent son nom et englobent les lois de l'électrostatique et du magnétisme. Compatible avec la relativité, la théorie des ondes électromagnétiques de Maxwell reste à la base des conceptions actuelles. Maxwell a également contribué au développement de la thermodynamique, et plus particulièrement à la théorie cinétique des gaz.*



Wilhelm Weber (1804-1891), *physicien allemand. Avec Gauss, il construit, en* 1834, *le premier télégraphe électrique. En* 1855, *il mesure le « rapport des unités électriques et magnétiques », détermination qui permettra à Maxwell de développer sa théorie électromagnétique de la lumière. Weber publie en* 1871 *une théorie du magnétisme, voisine des théories modernes. L'unité de flux magnétique porte son nom.*



Michael Faraday (1791-1867), *physicien et chimiste anglais. Expérimentateur de génie, il met en évidence, en* 1821, *l'action du champ magnétique d'un aimant sur un circuit parcouru par un courant et donne le principe des moteurs électriques. Son œuvre maîtresse est la découverte, en* 1831, *de l'induction électromagnétique. En* 1833, *il énonce les lois de l'électrolyse et, en* 1843, *élabore la théorie de l'influence électrostatique.*

Scanné avec CamScanner

6 CHAMP MAGNÉTIQUE

6.1 Introduction

Bien des siècles avant notre ère, les hommes ont remarqué que certains minerais de fer, comme la magnétite, avaient la propriété d'attirer de petits morceaux de fer (*photo* 1). Cette propriété existe à l'état naturel pour cinq éléments seulement : le fer, le cobalt, le manganèse, le gadolinium et le dysprosium, ainsi que pour de nombreux alliages de ces métaux.

Les corps doués de propriétés magnétiques sont appelés des **aimants**. Les régions d'un aimant où le magnétisme semble être concentré sont les **pôles**. La Terre elle-même se comporte comme un énorme aimant; c'est pourquoi les hommes ont pu se servir de la boussole, qui utilise les propriétés magnétiques (*photo* 2).

Au début du XIX^{e} siècle, Ampère et Œrsted mirent en évidence des interactions entre aimants et courants. Depuis, on englobe ces phénomènes dans une même partie de la physique : l'**électromagnétisme**.



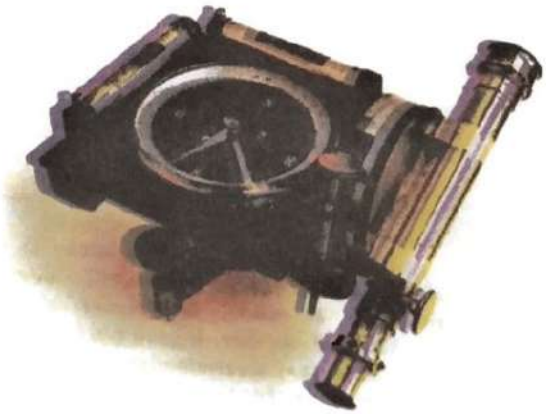
1. *Ces clous se dressent dans le champ magnétique intense créé par une roche magnétique.*

6.2 mise en évidence du champ magnétique

6.2.1 champ magnétique engendré par un aimant

Produisons un faisceau d'électrons dans un tube de Crookes. Approchons un aimant droit (*photo* 3a). L'aimant provoque la déviation du faisceau d'électrons; il est à l'origine d'une action mécanique à distance sur les porteurs de charge en mouvement. En revanche, un aimant est sans action sur un pendule électrostatique chargé.

Un aimant est à l'origine d'une action à distance sur des porteurs de charge *en mouvement*. Il provoque une modification de certaines des propriétés de l'espace l'environnant. On dit que cet espace est le siège d'un champ magnétique.



2. *Théodolite associé à une boussole. La mobilité de la lunette autour de deux axes (l'un vertical, l'autre horizontal) permet de pointer celle-ci vers un astre situé dans une direction quelconque sur la sphère céleste. La boussole indique l'azimut local de l'astre.*

Scanné avec CamScanner

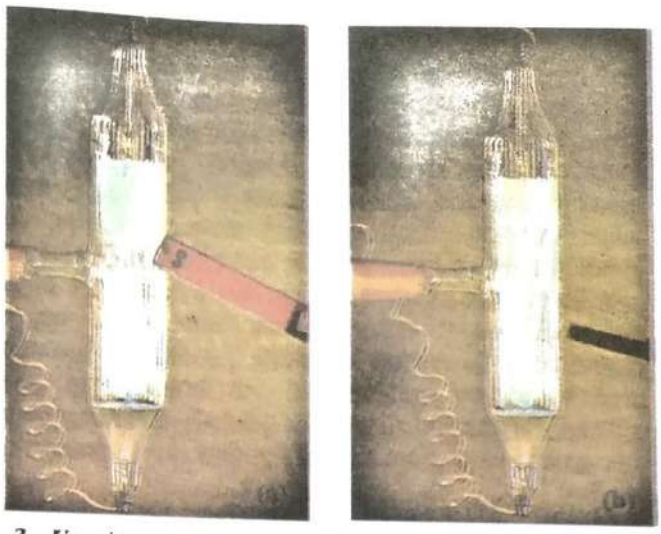
L'aimant est à l'origine du champ magnétique; il en est la source. Les porteurs de charge en mouvement, sensibles au champ magnétique, permettent de le détecter. L'aiguille aimantée d'une boussole est également sensible à un champ magnétique (*photo* 4).

Retournons l'aimant, la déviation du faisceau (ou de l'aiguille aimantée) change de sens (*photo* 3b). Nous pouvons admettre que la grandeur caractérisant le champ magnétique est une grandeur vectorielle dont le sens est lié à celui des forces exercées sur le détecteur.

• Un champ magnétique peut être décrit en un point M par les caractéristiques d'un vecteur appelé vecteur champ magnétique et noté $\vec{B}(M)$.

Dans le système international, l'unité de champ magnétique est le **tesla** (symbole : T).

Pour mesurer un champ magnétique, on utilise un *teslamètre* (voir *fiche expérimentale*). Au voisinage d'un aimant droit, le champ magnétique a une intensité de l'ordre de quelques dixièmes de tesla, au plus.

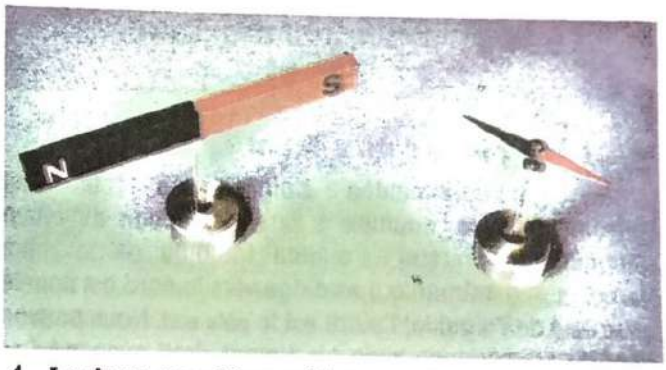


3. *Un aimant provoque la déviation du faisceau d'électrons produit dans un tube de Crookes. (Le faisceau est rectiligne en l'absence d'aimant). La déviation change de sens lorsqu'on retourne l'aimant.*

6.2.2 le courant électrique, source de magnétisme

Un **solénoïde** est une bobine constituée par un fil électrique (recouvert par un vernis isolant) régulièrement enroulé. Approchons d'un faisceau d'électrons (*photo* 5) ou d'une aiguille aimantée un solénoïde parcouru par un courant continu. Comme l'aimant, il provoque à distance la déviation du faisceau (ou de l'aiguille aimantée). Nous en concluons que le courant qui parcourt le solénoïde engendre un champ magnétique.
Plus généralement, tout courant, quelle que soit la forme du conducteur, produit un champ magnétique (*photo* 6).

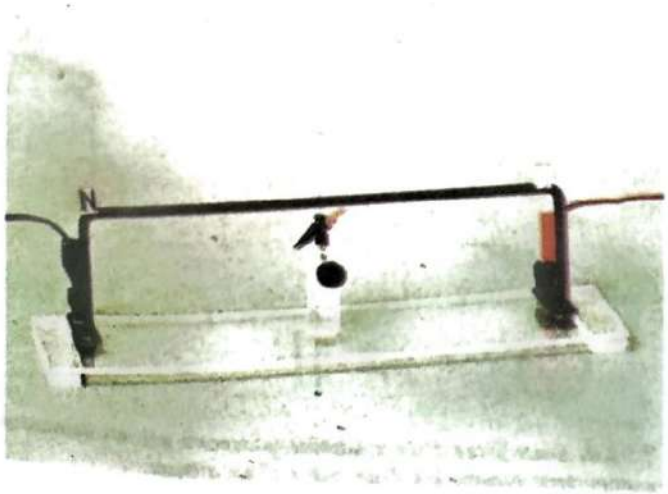
• Un champ magnétique apparaît au voisinage d'un circuit parcouru par un courant électrique.



4. *Le champ magnétique créé par un aimant agit sur l'aiguille aimantée d'une boussole.*



5. *Un solénoïde parcouru par un courant crée un champ magnétique. Ce champ est à l'origine des actions mécaniques subies par les porteurs de charge en mouvement qui constituent le faisceau d'électrons.*



6. *Expérience d'Œrsted. Un conducteur rectiligne est disposé horizontalement au-dessus d'une aiguille aimantée. Lorsqu'on établit le courant, l'aiguille aimantée, après quelques oscillations, tend à se placer perpendiculairement au fil. Si on inverse le sens du courant, la déviation de l'aiguille change de sens.*

Scanné avec CamScanner

6.2.3 Interprétation microscopique

On comprend mal, *a priori*, comment un aimant, bloc métallique, et un courant, constitué de porteurs de charge en mouvement, peuvent produire à distance les mêmes actions mécaniques. Ampère, dès 1820, donna une interprétation géniale de cette similitude. A l'échelle microscopique, chaque atome se comporte comme une petite boucle de courant. Dans la matière non aimantée, ces boucles de courant s'orientent au hasard et, de ce fait, compensent statistiquement leurs effets magnétiques. Dans la matière aimantée, il existe en revanche une orientation préférentielle des boucles, de sorte qu'une aimantation apparaît à l'échelle macroscopique (aimantation qui peut être temporaire ou permanente).

Remarque : Aujourd'hui, on considère que les électrons des atomes engendrent ces boucles de courant (en négligeant le magnétisme du noyau). On comprendra la hardiesse de l'hypothèse d'Ampère, à une époque où la structure des atomes et, *a fortiori*, l'électron étaient totalement inconnus.



7. Un aimant droit suspendu par un fil sans torsion s'oriente dans la direction sud-nord sous l'action du champ magnétique terrestre.

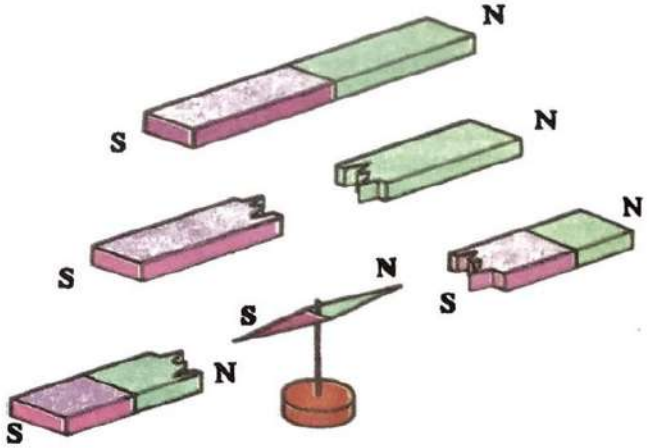
6.3 Action d'un champ magnétique sur un aimant et sur un courant

6.3.1 Les pôles d'un aimant

Une aiguille aimantée éloignée de tout objet ferromagnétique, soumise à la seule action du champ magnétique terrestre, s'oriente toujours de la même façon; son extrémité qui se dirige vers le nord est appelée **pôle nord** de l'aiguille; l'autre est le **pôle sud**. Nous pouvons répéter l'expérience avec un aimant droit suspendu par un fil sans torsion (*photo* 7).

• Tout aimant droit possède deux pôles : un pôle nord et un pôle sud.

La figure 8 indique que l'on ne peut pas séparer les deux pôles d'un aimant (expérience dite *de l'aimant brisé*). Il existe des aimants *multipolaires :* ils comportent plusieurs pôles nord et autant de pôles sud.

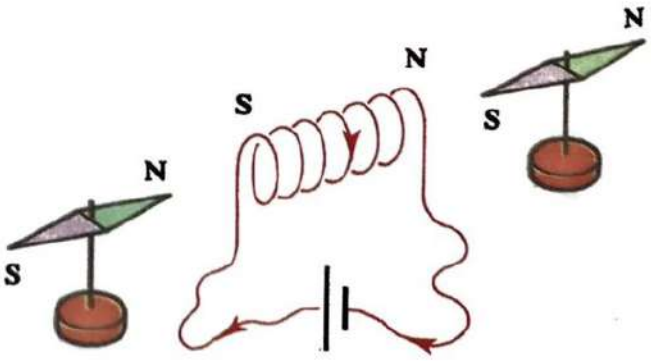


8. Les propriétés magnétiques d'un aimant sont liées à la structure de l'ensemble de la matière qui le constitue. Un aimant brisé donne deux aimants.

6.3.2 Action d'un champ magnétique sur un aimant; faces d'un solénoïde

1. Plaçons un aimant dans le champ magnétique d'un autre aimant. Nous constatons que les pôles de même nom se repoussent, alors que les pôles de noms différents s'attirent.

2. Plaçons un aimant dans le champ magnétique d'un solénoïde parcouru par un courant. L'un des pôles de l'aimant, le pôle sud par exemple, est attiré par une face du solénoïde, tandis que le pôle nord est repoussé par cette même face, laquelle se comporte donc comme le pôle nord d'un aimant (*fig.* 9). Inversement, l'autre face du solénoïde se comporte comme un pôle sud.



9. Les deux faces d'un solénoïde parcouru par un courant se comportent comme les deux pôles d'un aimant.

Scanné avec CamScanner

• Un solénoïde parcouru par un courant continu est caractérisé par une face nord et une face sud magnétiques.

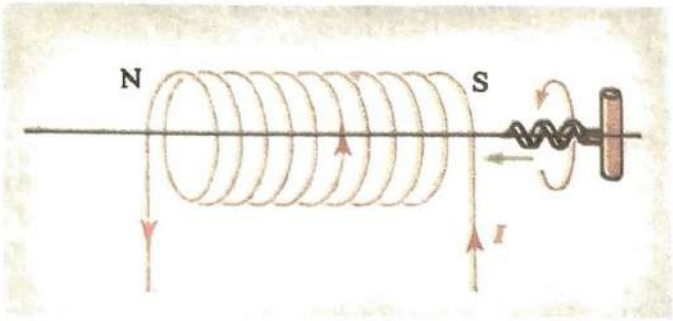
Inversons le sens du courant. Nous constatons que la face nord est devenue face sud et inversement.

• En changeant le sens du courant, on provoque une inversion du nom des faces d'un solénoïde.

La règle dite du **tire-bouchon de Maxwell** nous permet de relier la polarité d'un solénoïde au sens du courant qui le traverse (*fig.* 10) :

• Un tire-bouchon progresse de la face sud vers la face nord d'un solénoïde lorsqu'on le tourne dans le sens du courant.

Notons bien qu'il s'agit du sens du courant et non du sens d'enroulement des spires.
Une autre règle équivalente, couramment utilisée, est celle du **bonhomme d'Ampère** (*fig.* 11).



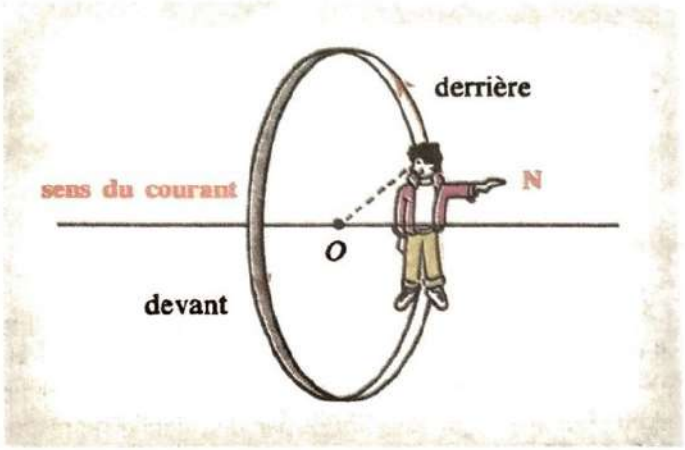
10. ***Règle du tire-bouchon de Maxwell. Un tire-bouchon progresse de la face sud vers la face nord d'un solénoïde lorsqu'on le tourne dans le sens du courant.***

6.3.3 action d'un champ magnétique sur un courant

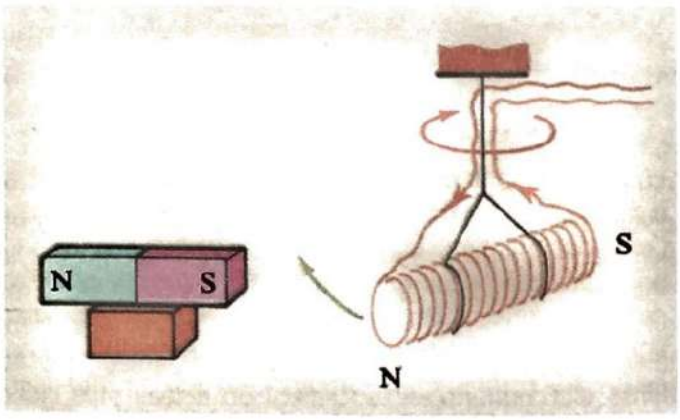
1. Dans le champ magnétique créé par un aimant droit, approchons un solénoïde suspendu à un étrier (*fig.* 12); les faces et les pôles de même nom se repoussent, tandis que les faces et les pôles de noms différents s'attirent.

2. Dans le champ magnétique créé par un solénoïde, approchons un autre solénoïde (*fig.* 13) : les faces de même nom se repoussent, tandis que les faces de noms différents s'attirent.

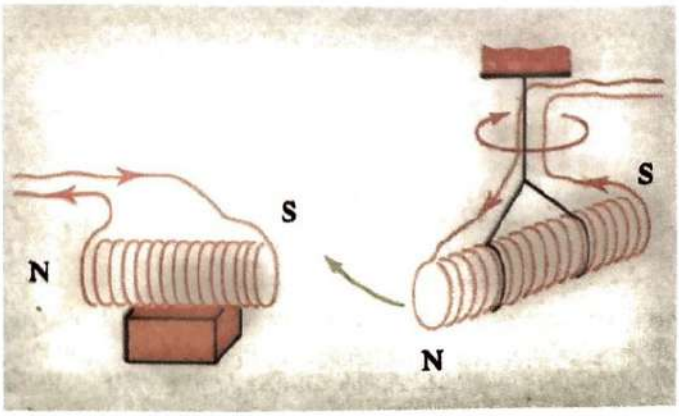
Ces expériences montrent l'analogie qui existe entre un aimant droit et un solénoïde, analogie déjà entrevue au paragraphe 6.2.2. *Quelle que soit son origine, un champ magnétique a toujours le même type d'action.*
Elles montrent également que si un champ magnétique créé par une source (aimant ou courant) agit sur un aimant ou un courant, ces derniers exercent réciproquement des actions mécaniques sur la source. Nous parlerons d'*interactions magnétiques.*



11. ***Règle du bonhomme d'Ampère. La face nord d'un solénoïde est indiquée par le bras gauche tendu d'un observateur regardant vers l'axe de l'enroulement et placé sur le fil de telle sorte que le courant entre par les pieds et sorte par la tête.***



12. ***La face nord du solénoïde est attirée par le pôle sud de l'aimant.*** ▶



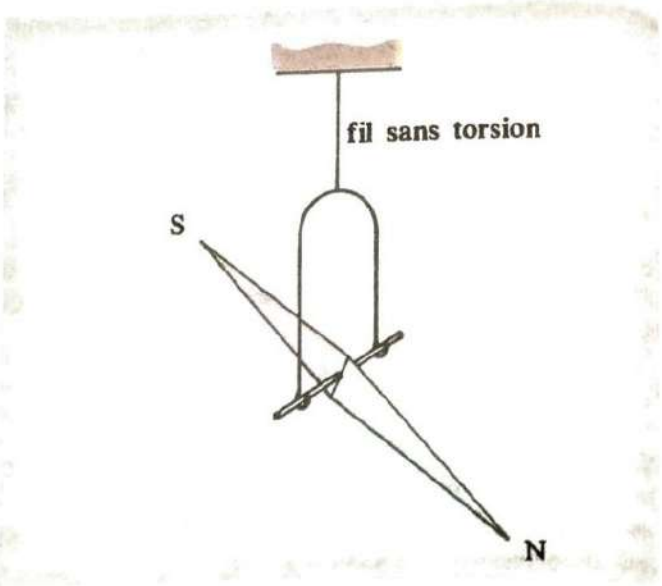
13. ***La face nord du solénoïde suspendu est attirée par la face sud du solénoïde fixe.*** ▶

Scanné avec CamScanner

6.4 topographie des champs magnétiques

6.4.1 utilisation d'une aiguille aimantée

La direction et le sens du vecteur champ magnétique $\vec{B}$ qui affecte une région de l'espace peuvent être définis à partir de la position adoptée dans cette région par une aiguille aimantée. Encore faut-il que cette dernière soit libre de s'orienter dans l'espace. Une aiguille sur pivot vertical (boussole) ne peut tourner que dans un plan horizontal. La figure 14 représente une aiguille mobile autour d'un axe horizontal passant par son centre d'inertie. L'axe est maintenu dans un étrier suspendu par un fil sans torsion. Une telle aiguille peut s'orienter librement dans l'espace.



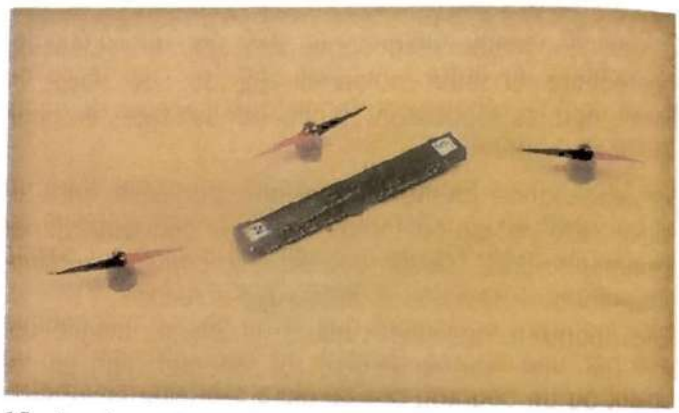
14. *Ainsi suspendue, cette aiguille aimantée peut s'orienter librement dans l'espace.*

• **La direction et le sens d'un vecteur champ magnétique $\vec{B}(M)$ sont définis par la direction orientée pôle sud-pôle nord que prend une aiguille aimantée libre de s'orienter dans l'espace et placée au point *M* considéré.**

6.4.2 topographie d'un champ magnétique créé par un aimant

La photographie 15 montre la position que prend une aiguille aimantée en différents points de l'espace environnant un aimant droit. En chaque point, le vecteur champ magnétique $\vec{B}$ peut être figuré par une flèche représentant sa direction et son sens.

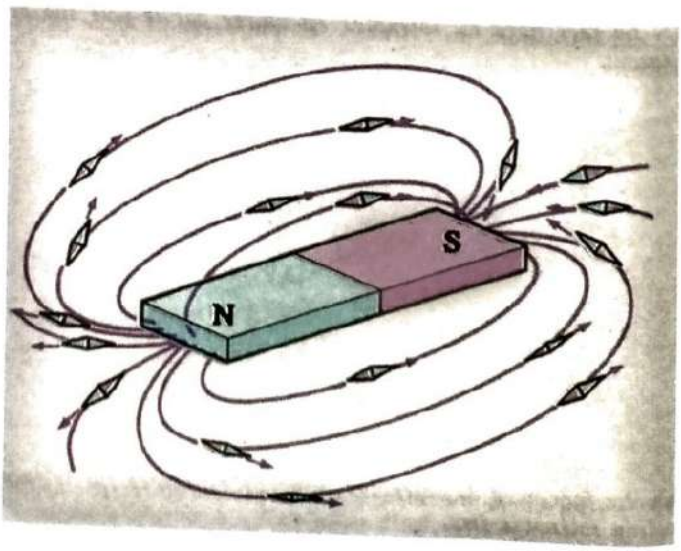
En déplaçant l'aiguille aimantée, on pourrait tracer une ligne tangente en chacun de ses points à la direction du vecteur champ magnétique : c'est une **ligne de champ**. Quelques lignes de champ sont représentées sur la figure 16.



15. *Les boussoles s'orientent suivant les lignes de champ de l'aimant droit.*

• **On appelle ligne de champ une courbe tangente au vecteur champ magnétique en chacun de ses points. On l'oriente dans le sens du champ magnétique, c'est-à-dire du pôle sud vers le pôle nord de l'aiguille aimantée exploratrice.**

Pour un aimant droit, les lignes de champ *sortent* en divergeant du pôle nord de l'aimant, le contournent, l'enveloppent dans tout l'espace et *convergent* vers le pôle sud. *Les lignes de champ ne se coupent pas.* Près des pôles, où le champ magnétique est particulièrement intense, elles sont très resserrées et forment un réseau dense. Au contraire, elles forment un réseau plus lâche dans les régions où le champ magnétique est faible.



16. *Positions prises par une aiguille aimantée dans le champ magnétique engendré par un aimant droit. Les lignes de champ, orientées dans le sens du champ, sortent du pôle nord et entrent par le pôle sud de l'aimant.* ▶

Scanné avec CamScanner

6.4.3 utilisation de la limaille de fer, spectres magnétiques

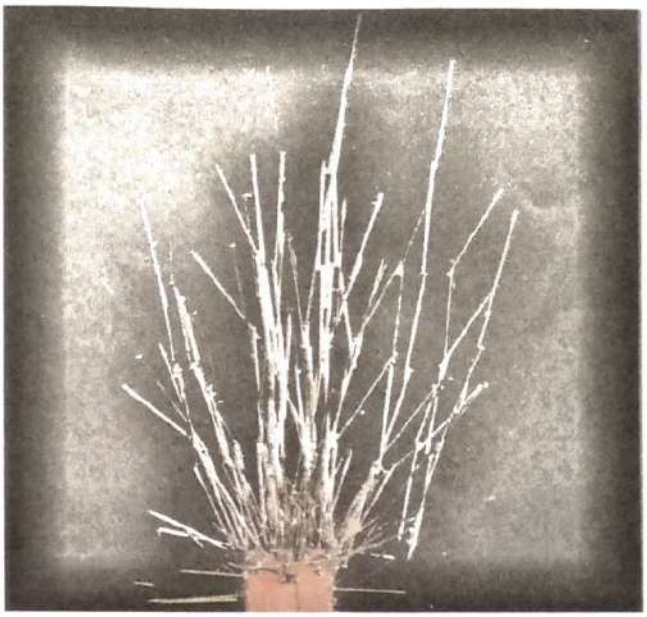
L'expérience de la photographie 17 permet d'expliquer la visualisation des lignes de champs à l'aide de la limaille de fer. Des grains de limaille situés dans un champ magnétique assez intense s'aimantent. Ils se comportent alors comme de petites aiguilles aimantées et se disposent les uns derrière les autres, matérialisant ainsi les lignes de champ. La figure obtenue est appelée **spectre magnétique**.

La photographie 18 donne le spectre magnétique d'un aimant droit obtenu à l'aide de grains de limaille de fer saupoudrés sur une feuille de Plexiglas posée sur l'aimant.

Il est également possible de poser sur l'aimant un récipient contenant une solution très sirupeuse au sein de laquelle des grains de limaille sont en suspension. On obtient alors en volume le spectre magnétique dans la région de l'espace qui surmonte l'aimant.

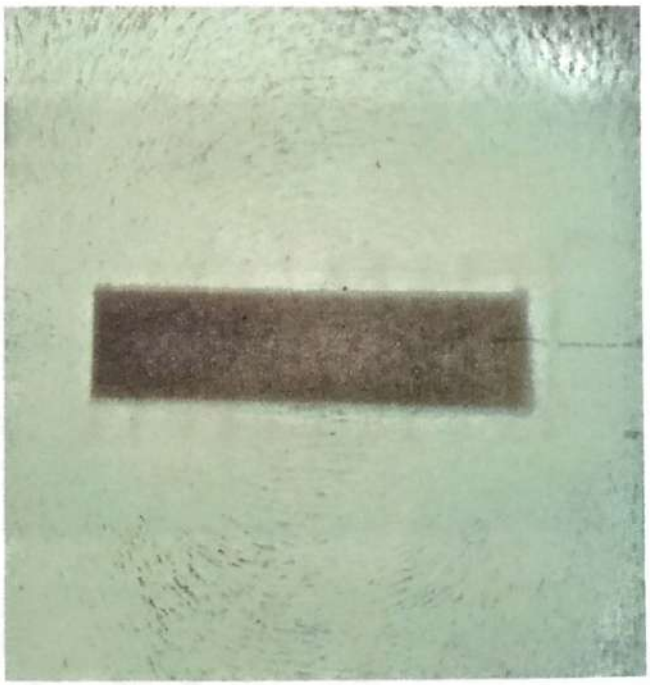
La photographie 19 montre le spectre magnétique d'un aimant en forme de U. Les lignes de champ sortent du pôle nord et convergent vers le pôle sud. Entre les deux branches de l'aimant, région appelée *entrefer*, les lignes de champ sont parallèles; en tout point de cette région, le vecteur champ magnétique a sensiblement même direction et même sens. Nous admettrons alors qu'il a même intensité, autrement dit qu'il *est uniforme*.

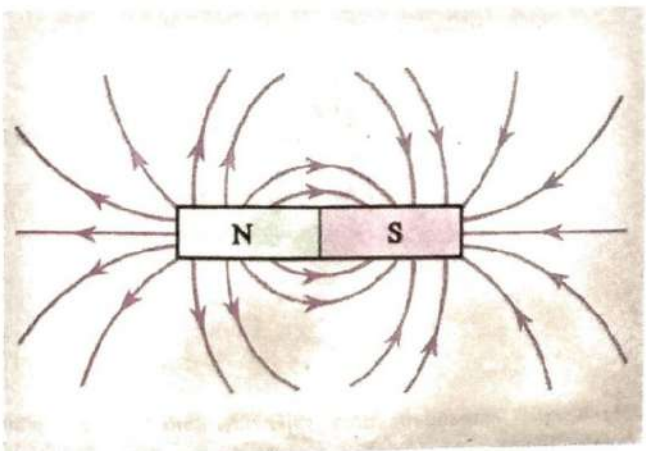
• **Dans une région de l'espace où les lignes de champ sont des droites parallèles, règne un champ magnétique uniforme, et réciproquement.**

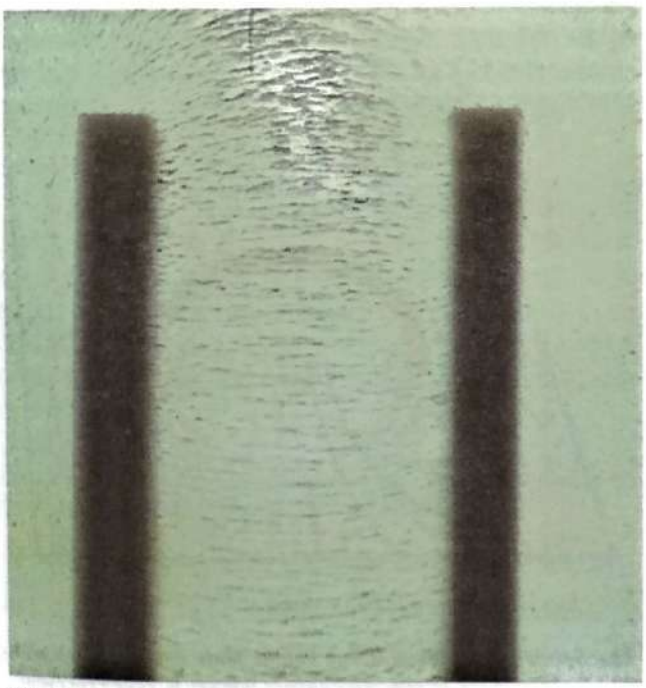


17. *Situées dans le champ magnétique intense créé par un aimant, des épingles s'aimantent et s'attirent les unes les autres.*

18. *Spectre magnétique d'un aimant droit* ▼







19. *Spectre magnétique d'un aimant en* **U.** ▲

Scanné avec CamScanner

6.4.4 spectres magnétiques engendrés par des courants

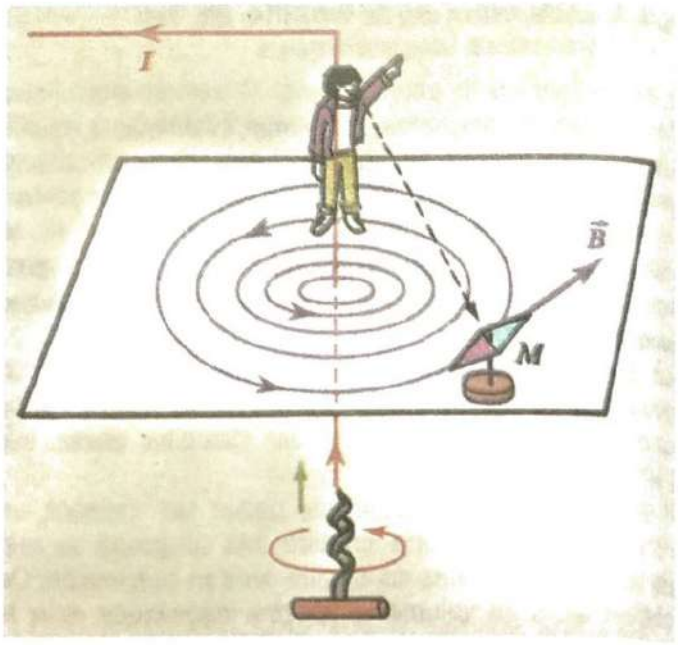
La figure 20 montre les lignes de champ dans un plan perpendiculaire à un conducteur rectiligne parcouru par un courant. Ce sont des lignes circulaires concentriques, centrées sur le conducteur. Le vecteur champ magnétique, tangent aux lignes de champ, est donc orthogonal au conducteur.

Nous pouvons prévoir le sens du vecteur champ magnétique. Le bonhomme d'Ampère couché sur le fil, le courant entrant par ses pieds, et sa tête regardant un point M, voit $\vec{B}(M)$ dirigé sur sa gauche. De même, un tire-bouchon qu'on fait progresser dans le sens du courant tourne dans le sens des lignes de champ.

La photographie 21 montre le spectre magnétique d'un solénoïde parcouru par un courant continu. A l'extérieur du solénoïde, les lignes de champ sont semblables à celles d'un aimant droit. Elles sortent en divergeant de la face nord pour converger vers la face sud. A l'intérieur, les lignes de champ sont parallèles.

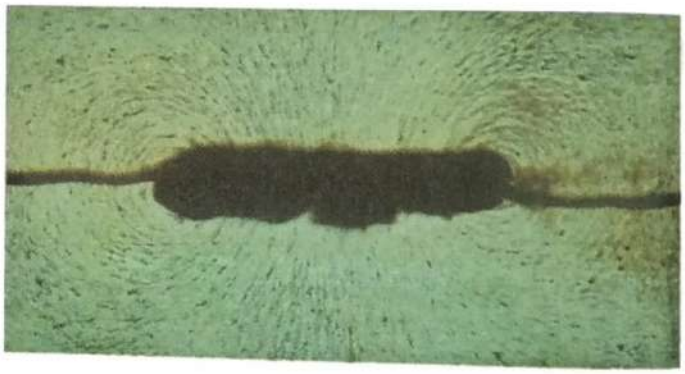
• Le champ magnétique est quasiment uniforme à l'intérieur d'un solénoïde.

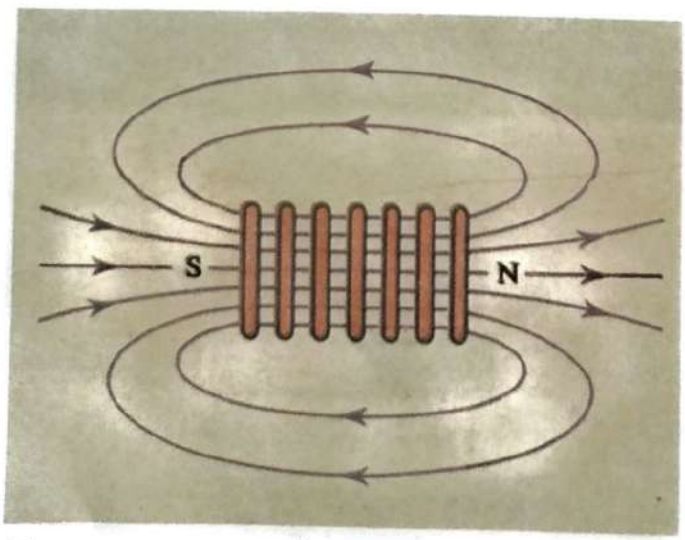
La photographie 22 montre l'aspect du spectre magnétique dans un plan orthogonal à une bobine plate et passant par son centre. On peut distinguer une face nord,



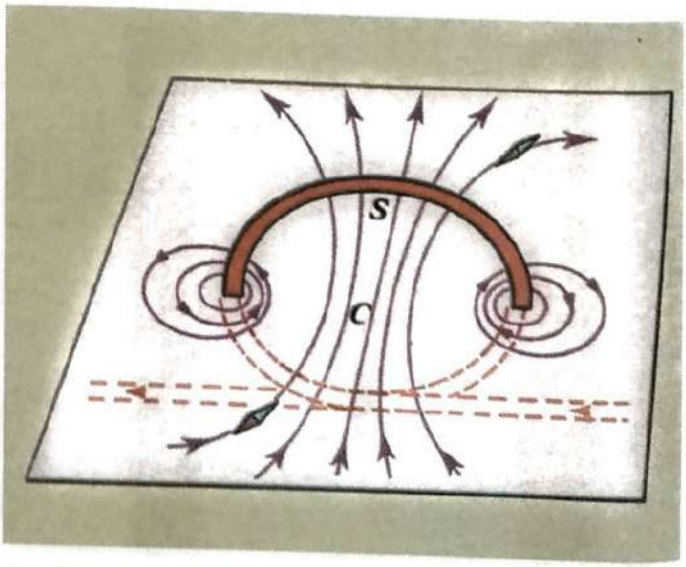
20. *Lignes de champ dans un plan perpendiculaire à un conducteur rectiligne parcouru par un courant continu. La règle du bonhomme d'Ampère, ou celle du tire-bouchon, permet d'orienter les lignes de champ.*







21. *Spectre magnétique d'un solénoïde dans l'un des plans longitudinaux.*

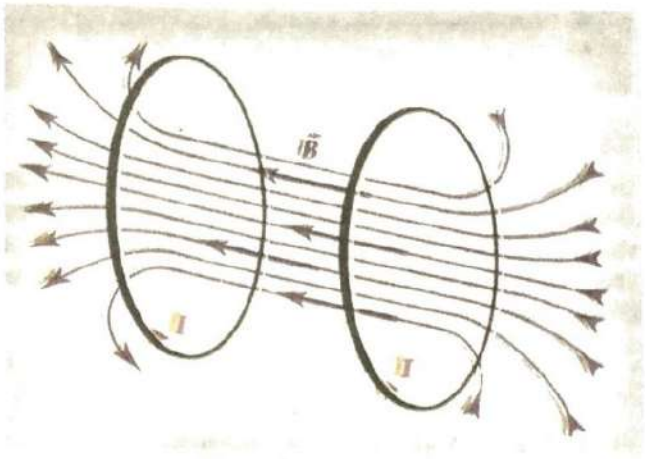


22. *Spectre magnétique d'une bobine plate dans l'un des plans de symétrie. Avec le sens du courant donné, la face représentée en avant du schéma est la face sud, l'autre la face nord.*

Scanné avec CamScanner

d'où sortent les lignes de champ, et une face sud, opposée. L'orientation du vecteur champ obéit aux règles du bonhomme d'Ampère ou du tire-bouchon de Maxwell.

Pour obtenir un champ magnétique uniforme dans une très petite étendue, on peut utiliser un aimant en U. Il est également commode d'utiliser deux bobines plates circulaires comme le montre la figure 23. De telles bobines coaxiales séparées par une distance égale à leur rayon, parcourues par des courants continus de même intensité et de même sens, sont appelées **bobines de Helmholtz**. Elles permettent d'obtenir un champ magnétique uniforme dans un plus grand volume.



23. ***Bobines de Helmholtz. La distance entre les deux bobines est égale à leur rayon (ce qui n'a pas été respecté, pour plus de clarté, sur le schéma). Le champ magnétique est quasiment uniforme dans la région de l'espace située entre les deux bobines.***

6.4.5 le champ magnétique terrestre (ou champ géomagnétique)

Si nous disposons de plusieurs aiguilles aimantées identiques pouvant s'orienter librement dans l'espace, nous observons qu'elles s'orientent toutes parallèlement entre elles, à condition de les placer assez loin les unes des autres et loin de tout aimant ou courant. Les lignes de champ étant parallèles, nous en concluons que le champ magnétique terrestre est uniforme dans une région limitée de l'espace. Son intensité est de l'ordre de 4.10^{-5} tesla.

Le plan vertical contenant la direction prise par l'aiguille aimantée est appelé *plan du méridien magnétique*. Le pôle nord de l'aiguille s'incline vers le sol, dans ce plan, d'un angle i par rapport à l'horizontale. Cet angle est appelé **inclinaison** (*fig.* 24).

Considérons les composantes horizontale $\vec{B}_h$ et verticale $\vec{B}_v$ du champ magnétique terrestre $\vec{B}_T$; nous pouvons écrire :

$$\vec{B}_T = \vec{B}_h + \vec{B}_v,$$

avec :

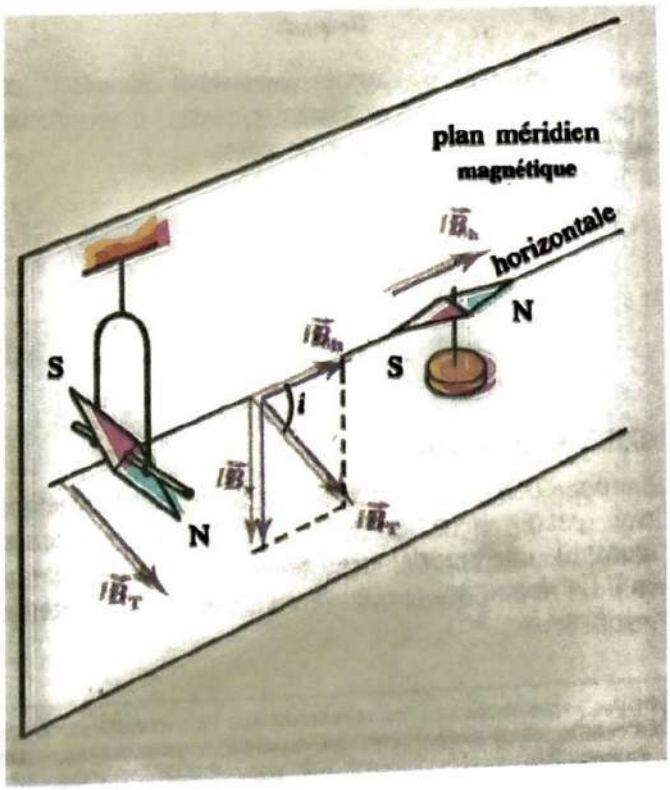
$$i = (\vec{B}_h, \vec{B}_T).$$

L'inclinaison, qui est égale à environ 60° en France, ne peut être mise en évidence avec une aiguille sur pivot (boussole ordinaire). Une telle aiguille, dans son usage habituel (axe vertical), n'est sensible qu'à la composante horizontale $\vec{B}_h$, dont la mesure est environ :

$$B_h = B_T \cos 60° = 2.10^{-5}\ \text{T}.$$

Le champ magnétique terrestre se superpose toujours aux champs créés par les autres sources (aimant, courant). Cependant, dans une région de l'espace où le champ magnétique engendré par un aimant ou par un courant est intense (notamment près des sources), nous négligerons généralement l'influence du champ magnétique terrestre.

Remarque : Dans l'espace environnant la Terre, la topographie du champ magnétique est assez complexe.



24. ***L'inclinaison i est l'angle défini par le vecteur champ magnétique terrestre $\vec{B}_T$ et sa composante horizontale $\vec{B}_h$.*** ▶

Scanné avec CamScanner

6.5 champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde long

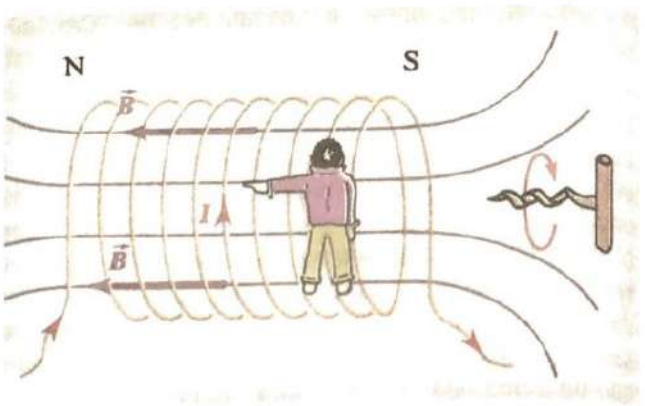
6.5.1 orientation du champ magnétique

Le spectre magnétique d'un solénoïde *long* (bobine dont la longueur est au moins dix fois supérieure à son rayon, voir *fiche expérimentale*) montre qu'à l'intérieur, sauf au voisinage des extrémités, les lignes de champ sont des droites parallèles à l'axe :

• A l'intérieur d'un solénoïde long, le champ magnétique est uniforme.

Ce champ a les caractéristiques suivantes :

• sa direction est celle de l'axe du solénoïde;
• son sens est celui de la progression d'un tire-bouchon tourné dans le sens du courant qui circule dans les spires, c'est-à-dire de la face sud vers la face nord (*fig.* 25).



25. *Dans la zone centrale interne d'un solénoïde, la direction du vecteur champ magnétique est celle de l'axe du solénoïde; son sens est donné par la règle du tire-bouchon (ou celle du bonhomme d'Ampère).*

6.5.2 intensité du champ magnétique

Plaçons l'extrémité de la sonde d'un teslamètre en différents points à l'intérieur d'un solénoïde long et mesurons l'intensité $B = \|\vec{B}\|$ du champ magnétique en ces points. Nous constatons (voir *fiche expérimentale*) que l'intensité du champ magnétique :

• est bien la même en tout point (sauf au voisinage des extrémités);
• est proportionnelle à l'intensité I du courant qui circule dans les spires;
• est proportionnelle au nombre n de spires par unité de longueur, les spires pouvant être réparties sur plusieurs couches.

Ces constatations peuvent se résumer dans la relation :

$$B = \mu_0 n I.$$

où le coefficient μ_0, appelé **perméabilité du vide**(*), est égal à $4\pi.10^{-7}$. B s'exprimant en teslas, n en nombre de spires par mètre et I en ampères.

$$B = 4\pi.10^{-7}\ n\ I.$$

T — nb spires.m^{-1} — A

APPLICATION

On veut produire au centre d'un solénoïde de longueur $L = 60$ cm *un champ magnétique de* 5.10^{-3} T, *l'intensité du courant étant de* 2 A.

1/ *Quel est le nombre N de spires nécessaires?*

2/ *L'enroulement est réalisé sur un cylindre creux en matière plastique à l'aide d'un fil gainé de* 2 mm *de diamètre, les spires étant jointives.*
Quel est le nombre de couches qu'il faudra disposer sur le cylindre?

1/ Le champ à l'intérieur du solénoïde est donné par :

$$B = \mu_0 \frac{N}{L} I;$$

d'où : $N = \frac{BL}{\mu_0 I} = \frac{5.10^{-3} \times 0{,}6}{4\pi.10^{-7} \times 2} \approx 1200$ spires.

2/ Une couche comporte $\frac{60}{0{,}2} = 300$ spires. Nous devrons donc disposer 4 couches de spires pour produire un tel champ.

6.5.3 conclusion

La proportionnalité de l'intensité du champ magnétique, créé par un circuit électrique, à l'intensité du courant constitue une propriété très générale, vérifiée quelle que soit la forme du circuit en l'absence de matériaux magnétiques.

On utilise très souvent des circuits électriques pour produire des champs magnétiques. Mais les bobines usuelles ne supportent pas des courants très intenses, et le champ magnétique n'excède pas quelques teslas. Pour créer des champs continus de quelques dizaines de teslas (utilisés par exemple dans les appareils de R.M.N. qui donnent des images en coupe du corps humain) et des champs transitoires (très brefs) de plus de 2000 teslas, on utilise aujourd'hui des bobines supraconductrices parcourues par des courants très intenses.

(*) Les expériences ont été réalisées dans l'air mais la valeur de ce coefficient de proportionnalité est égale à celle obtenue dans le vide.

Scanné avec CamScanner

fiche expérimentale

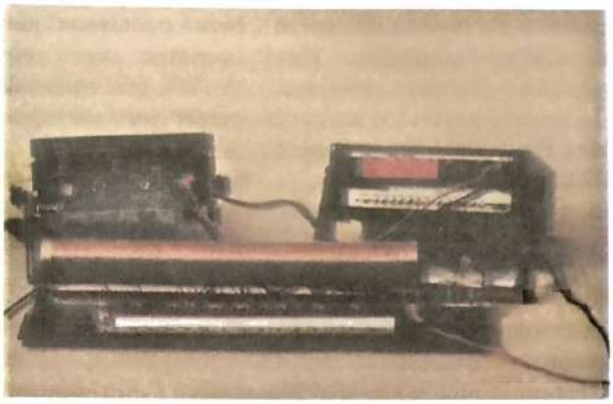
ÉTUDE DU CHAMP MAGNÉTIQUE CRÉÉ PAR UN SOLÉNOÏDE LONG

1. *Dispositif expérimental*

Nous disposons d'un enroulement muni de bornes d'entrée intermédiaires, ce qui permet de faire varier la longueur 2ℓ du solénoïde et le nombre de spires.

L'intensité $B = \|\vec{B}\|$ du champ magnétique est mesurée à l'aide d'un teslamètre à sonde de Hall. Cette sonde délivre une tension proportionnelle à l'intensité du champ et amplifiée par un système électronique.

La distance de la sonde au centre O, sur l'axe du solénoïde, est repérée grâce à la graduation du bras porte-sonde (*photo* 1).



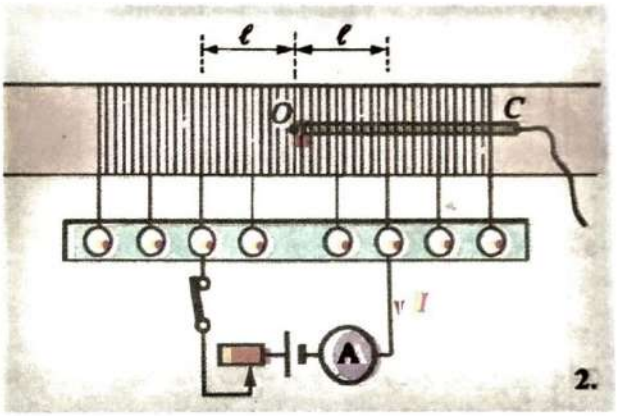
1. *Étude du champ magnétique créé par un solénoïde long. On distingue, à gauche, le teslamètre couplé à un système amplificateur avec affichage numérique et, au premier plan, la sonde placée à l'extrémité d'une tige graduée.*

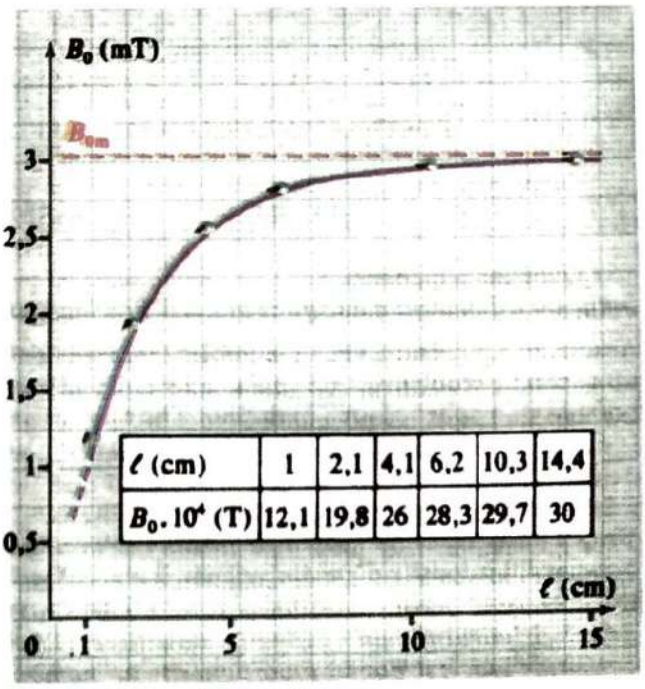
2. *Première expérience : solénoïde long*

La sonde est placée au centre O de la bobine. En utilisant successivement les différentes bornes d'entrée, faisons varier la longueur 2ℓ de la partie utile de la bobine et mesurons la valeur B_0 du champ magnétique au centre, tout en maintenant l'intensité constante.

Les résultats obtenus sont donnés sur la figure 2. Nous constatons que le champ magnétique tend vers une valeur limite $B_{0m} \approx 3$ mT, quasiment atteinte pour $\ell = 15$ cm, soit pour une longueur totale $2\ell = 30$ cm, soit douze fois le rayon R des spires ($R = 2{,}5$ cm).

Si nous qualifions de *long* un solénoïde dont la longueur est au moins dix fois supérieure à son rayon, nous retiendrons que *le champ magnétique au centre d'un solénoïde long est indépendant de la longueur du solénoïde.*





ℓ (cm)	1	2,1	4,1	6,2	10,3	14,4
$B_0 \cdot 10^4$ (T)	12,1	19,8	26	28,3	29,7	30

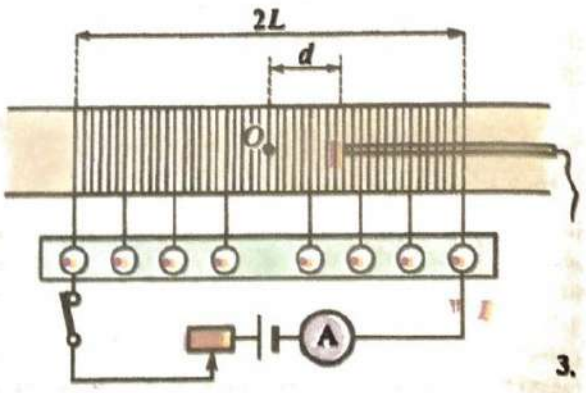
Scanné avec CamScanner

3. Deuxième expérience : uniformité du champ à l'intérieur d'un solénoïde long

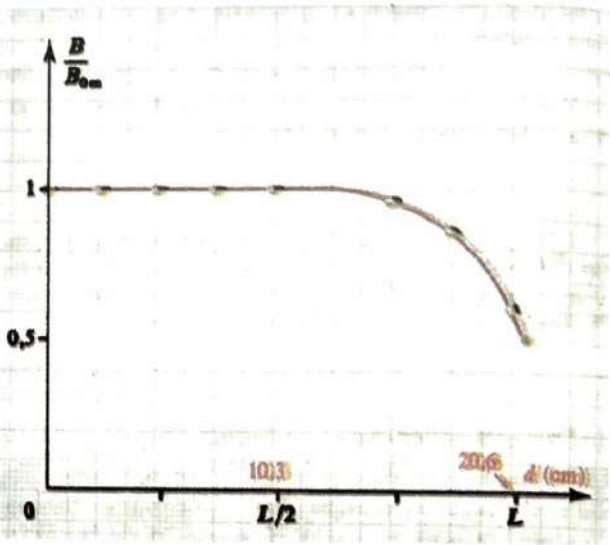
Utilisons le solénoïde sur toute sa longueur $2L = 41{,}2$ cm. L'intensité du courant est fixée à 5 A. A l'aide du porte-sonde gradué, plaçons la sonde à des distances différentes d du centre du solénoïde et relevons les mesures correspondantes de l'intensité B du champ magnétique.

Le graphique de la figure 3 donne les variations du rapport B/B_0 en fonction de d (B_0 étant la mesure du champ au centre). Nous constatons que le champ magnétique reste constant avec une variation relative inférieure à 5 % sur environ 15 cm de part et d'autre du centre, soit sur plus des deux tiers de la longueur du solénoïde.

Dans un solénoïde long, le champ magnétique est donc uniforme, sauf au voisinage des extrémités.



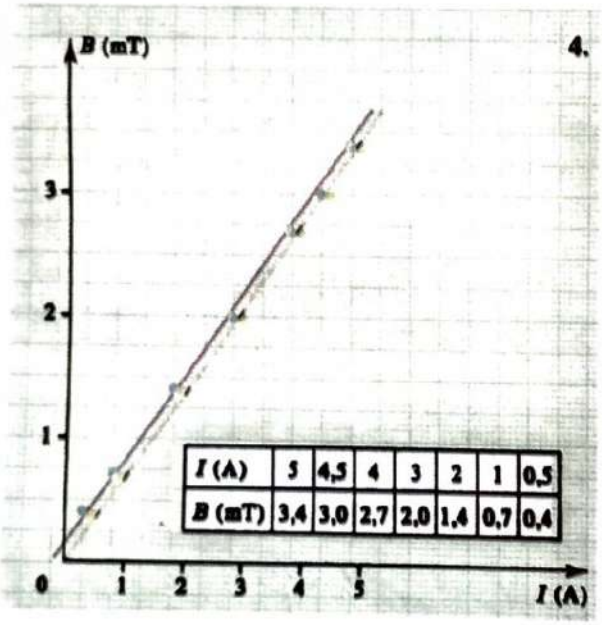
3.



4. Troisième expérience : influence de l'intensité du courant

Pour une position donnée de la sonde de Hall, mesurons l'intensité B du champ magnétique pour différentes valeurs de l'intensité I du courant circulant dans les spires.

Nous obtenons une droite qui passe par l'origine (*fig.* 4). *L'intensité du champ magnétique est donc proportionnelle à l'intensité du courant.*



I (A)	5	4,5	4	3	2	1	0,5
B (mT)	3,4	3,0	2,7	2,0	1,4	0,7	0,4

4.

5. Quatrième expérience : influence du nombre de spires par unité de longueur

Associons en série avec le premier enroulement un second enroulement de même axe et de même nombre de spires. Nous multiplions ainsi par deux le nombre de spires par unité de longueur. Les deux bobines coaxiales sont parcourues par le même courant, qui circule dans le même sens.

Nous constatons que, pour une même intensité du courant, l'intensité du champ magnétique au centre du solénoïde ainsi constitué est multipliée par deux. *L'intensité du champ magnétique d'un solénoïde long est donc proportionnelle au nombre de spires par unité de longueur.*

EXERCICES

L'essentiel du cours

6.1 A *Vrai* ou *faux* ?

- Le champ magnétique terrestre est uniforme.
- Éloignée de toute substance ferromagnétique, l'aiguille d'une boussole donne l'orientation du champ magnétique terrestre.
- En France, la mesure du champ magnétique terrestre est d'environ $4 . 10^{-5}$ T.
- L'intensité du champ magnétique terrestre est toujours négligeable par rapport à l'intensité du champ créé par un aimant.
- Les lignes de champ d'un champ magnétique ne se coupent jamais.
- Dans un champ magnétique uniforme, les lignes de champ sont parallèles.
- On peut réaliser un spectre magnétique avec la limaille d'un métal quelconque.
- Si le champ magnétique créé par un aimant agit sur une aiguille aimantée, réciproquement l'aiguille crée un champ magnétique qui agit sur l'aimant.

6.2 A Voici cinq propositions :

1. Au centre d'une bobine, le champ magnétique est proportionnel à l'intensité du courant qui circule dans cette bobine.
2. A l'intérieur d'un solénoïde, les lignes de champ sont orientées de la face nord vers la face sud.
3. Le champ magnétique à l'intérieur d'une bobine est multiplié par 2 si on double la longueur de cette bobine.
4. Lorsqu'un solénoïde parcouru par un courant est libre de se déplacer dans le champ magnétique terrestre, sa face nord est dirigée vers le pôle Sud terrestre.
5. L'intensité du champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde long est donnée par :

$$B = 4\pi . 10^{-7} nI,$$

où n désigne le nombre de spires par mètre.

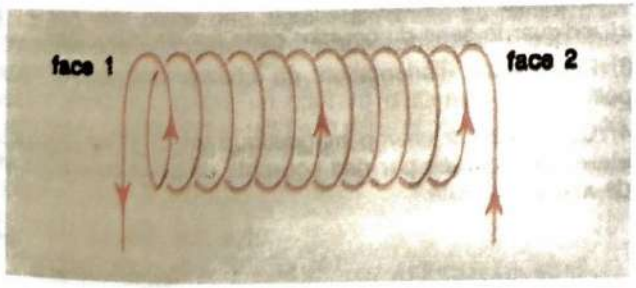
Cocher la ou les cases correspondant à une bonne réponse :

[a] Toutes les propositions sont fausses.

[b] Sont vraies les propositions 1 et 5.

[c] Sont fausses les propositions 2 à 5.

6.3 A Une bobine est parcourue par un courant (figure).

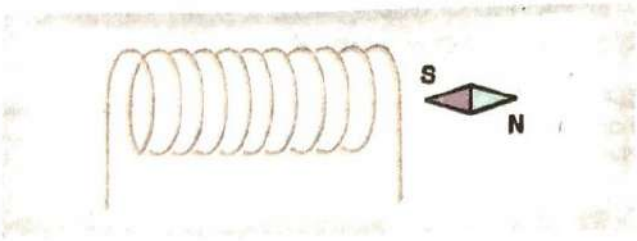


1/ Quelle est la direction du champ $\vec{B}$ à l'intérieur de la bobine ? Représenter les lignes de champ.

2/ Placer devant chaque face une aiguille aimantée dont on donnera la position.

3/ Donner le nom de chaque face.

6.4 A Un solénoïde est parcouru par un courant. Une aiguille aimantée placée devant l'une de ses faces dévie.



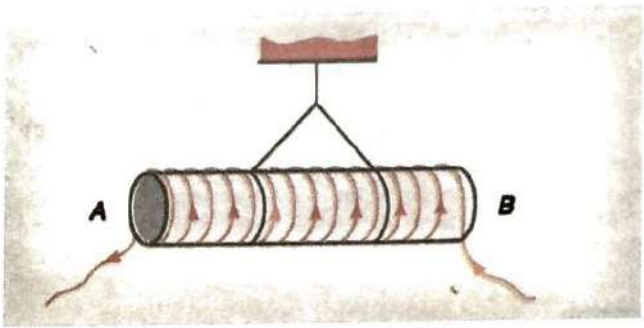
1/ Indiquer la face nord et la face sud de la bobine.

2/ Préciser la direction et l'orientation des lignes de champ dans ce solénoïde.

3/ Déterminer le sens du courant dans le fil.

Exercices de base

6.5 A Une bobine parcourue par un courant est suspendue à un fil de coton vertical (figure).



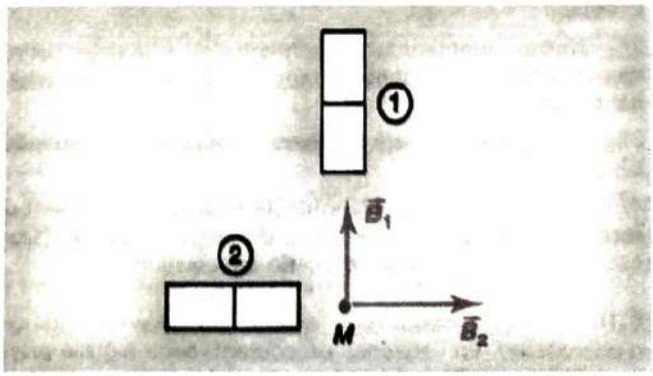
1/ Quelle orientation prend-elle dans le champ magnétique terrestre ?

2/ On approche le pôle sud d'un aimant de la face *B*. Déterminer le mouvement de la bobine.

3/ Que se serait-il passé si l'on avait approché le pôle nord de l'aimant de cette même face *B* ?

6.6 A Une aiguille aimantée est placée au centre d'un solénoïde parcouru par un courant. L'aiguille tourne-t-elle forcément de 180° lorsqu'on inverse le sens du courant ? Justifier la réponse.

6.7 En un point *M* de l'espace se superposent deux champs magnétiques $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ créés par deux aimants dont les directions sont orthogonales (figure). Leurs intensités sont respectivement $\|\vec{B}_1\| = 3 . 10^{-3}$ T et $\|\vec{B}_2\| = 4 . 10^{-3}$ T.



1/ A Déterminer les pôles des deux aimants.

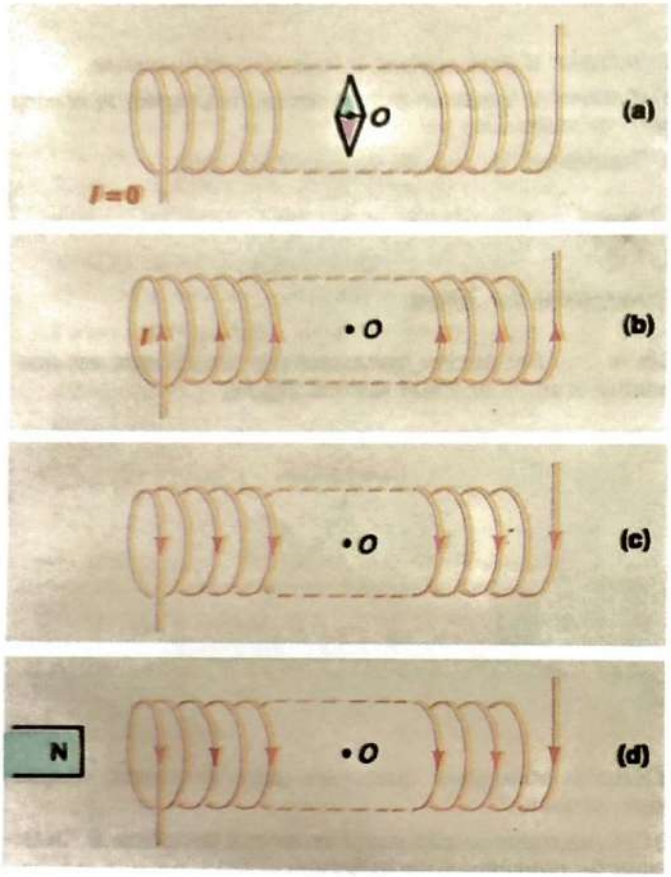
Scanné avec CamScanner

EXERCICES

2/ B3 Représenter graphiquement le champ résultant $\vec{B}$.

3/ B3 Calculer $\|\vec{B}\|$ et $\alpha = (\vec{B}_1, \vec{B})$.

6.8 A La figure a représente un solénoïde et une boussole vus de dessus. La boussole est à l'intérieur du solénoïde.



Dans les trois autres cas, l'intensité I du courant est telle que le champ magnétique créé par le solénoïde en son centre est égal à la composante horizontale du champ magnétique terrestre. Représenter l'aiguille aimantée sur les figures b, c et d.

6.9 Une bobine, de longueur 50 cm, comprenant 1 000 spires de diamètre 4 cm, est parcourue par un courant d'intensité 300 mA.

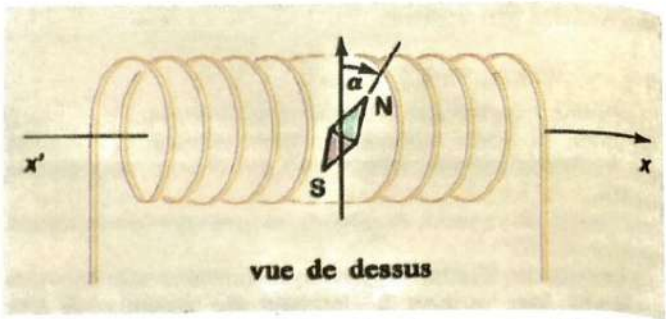
1/ A Peut-on considérer que le champ magnétique au centre de cette bobine est donné par la relation $B = 4\pi . 10^{-7} nI$? Pourquoi a-t-on donné le diamètre de la bobine ?

2/ A Quelles grandeurs représentent n et I? Indiquer leurs valeurs pour cette bobine dans le Système international d'unités.

3/ B3 Calculer l'intensité du champ magnétique à l'intérieur du solénoïde.

4/ A On juxtapose un solénoïde identique au précédent de façon à constituer un solénoïde de longueur double. Quel est le champ à l'intérieur de cette association ?

6.10 On dispose une aiguille aimantée à l'intérieur d'une bobine. En l'absence de courant, cette aiguille prend une direction horizontale perpendiculaire à l'axe $x'x$ de la bobine, lui aussi horizontal.



1/ A Quelle est la direction du champ magnétique terrestre ?

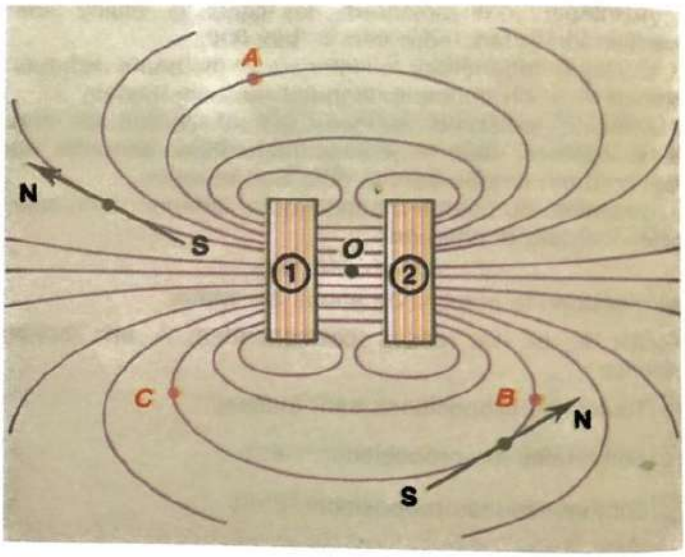
2/ On fait passer un courant d'intensité I. L'aiguille dévie d'un angle α (figure).

a/ A Déterminer le sens du courant dans la bobine.

b/ AB3 Calculer l'intensité du champ créé par la bobine et celle du champ résultant.

Données : $\alpha = 30°$; $B_{Th} = 2 . 10^{-5}$ T (composante horizontale du champ magnétique terrestre).

6.11 A La figure représente le spectre magnétique de deux bobines de Helmholtz.



1/ Dans quelle région le champ magnétique peut-il être considéré comme uniforme ?

2/ Indiquer le sens du courant dans les deux bobines.

3/ Représenter l'orientation du champ magnétique aux points O, A, B et C.

4/ Quel serait le champ magnétique en O si les bobines étaient parcourues par des courants de sens contraires et de même intensité ?

Banc d'essais

6.12 Un solénoïde d'axe horizontal est suspendu à un fil sans torsion. Ce solénoïde, de longueur de 0,5 m, comporte 1 000 spires de 2 cm de diamètre ; il est parcouru par un courant de 10 A.

1/ A Représenter graphiquement la direction et l'orientation des lignes de champ, ainsi que le sens du courant.

Scanné avec CamScanner

2/ AB3 Quelle est la valeur du champ magnétique à l'intérieur du solénoïde ? Pourquoi a-t-on donné le diamètre des spires ?

3/ A Comment s'oriente le solénoïde dans le champ magnétique terrestre ?

4/ A On approche de sa face nord le pôle nord d'un aimant droit. Que se passe-t-il ?

↳ ex. 6.5, 6.9.

6.13 Un solénoïde long est constitué par cinq couches de fil à spires jointives ; le fil a un diamètre de 1 mm, isolant compris. Son axe, horizontal, est perpendiculaire au méridien magnétique. Une boussole est placée en son centre.

1/ B4 Dessiner une vue de dessus.

2/ On fait passer dans le solénoïde un courant de 5 mA.

a/ B4C Indiquer sur le schéma le sens du courant et le sens de rotation de l'aiguille aimantée.

b/ B3 De quel angle tourne l'aiguille ?

Donnée : $B_{Th} = 2 . 10^{-5}$ T.

↳ ex. 6.7, 6.8, 6.10.

6.14 B3C Pour chaque question de cet exercice, on fera un schéma.

Un solénoïde d'axe horizontal se trouve dans le plan du méridien magnétique ; il comporte n spires par mètre. On place en son centre une aiguille aimantée.

1/ Déterminer le sens et l'intensité I_1 du courant qui devra traverser les spires pour que l'aiguille ne prenne aucune direction privilégiée à l'intérieur du solénoïde.

Données : $B_{Th} = 2 . 10^{-5}$ T ; $n = 1\,000$.

2/ On fait passer dans le solénoïde un courant d'intensité $I_2 = 2I_1$. Déterminer l'angle α dont on doit faire tourner le solénoïde autour d'un axe vertical pour que l'aiguille tourne de 90° :

a/ si le courant a le même sens que dans la question 1 ;

b/ s'il est de sens contraire.

↳ ex. 6.7, 6.8, 6.9, 6.10.

6.15 B3C On place une aiguille aimantée au centre d'un solénoïde d'axe horizontal comprenant 500 spires par mètre. L'aiguille tourne d'un angle $\alpha = 30°$ lorsqu'on fait passer dans les spires un courant d'intensité $I = 61$ mA. Déterminer l'angle θ que fait l'axe du solénoïde avec le plan du méridien magnétique.

Donnée : $B_{Th} = 2 . 10^{-5}$ T.

↳ ex. 6.7, 6.8, 6.9, 6.10.

Analyse d'une expérience

6.16 On reprend l'expérience de la figure 3 de la fiche expérimentale. La position de la sonde servant à déterminer l'intensité B (en mT) du champ magnétique est repérée par sa distance d (en cm) au centre du solénoïde.

On relève les valeurs suivantes :

d	0	2	4	6	8	10
B	3,41	3,41	3,40	3,40	3,40	3,39
d	12	14	16	18	20	22
B	3,38	3,31	3,16	2,69	1,54	0,53

1/ B4 Représenter graphiquement B en fonction de d.

2/ B3 Sur quelle partie du solénoïde peut-on considérer que le champ diffère de moins de 10 % du champ existant au centre ?

3/ AB3 Le solénoïde a une longueur de 37 cm et il comporte N spires, de rayon moyen 2,5 cm. L'intensité du courant est de 5 A. Calculer N.

4/ C Expliquer qualitativement la décroissance du champ lorsqu'on s'écarte du centre.

↳ ex. 6.7.

6.17 B3B4 On étudie à l'aide d'un teslamètre l'intensité $\|\vec{B}\|$ du champ magnétique créé par un courant passant dans un solénoïde en son centre, en fonction de divers paramètres.

1/ B3B4 Dans une première expérience, on utilise un solénoïde de longueur $\ell_1 = 0{,}50$ m comportant $N_1 = 240$ spires. On fait varier l'intensité I (en A) du courant qui passe dans le solénoïde ; pour chaque valeur de I, on note la valeur $\|\vec{B}\|$ (en T). Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

I	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$\|\vec{B}\|$	$60 . 10^{-5}$	$85 . 10^{-5}$	$120 . 10^{-5}$	$150 . 10^{-5}$	$190 . 10^{-5}$
I	3,5	4,0	4,5	5,0	
$\|\vec{B}\|$	$215 . 10^{-5}$	$245 . 10^{-5}$	$275 . 10^{-5}$	$310 . 10^{-5}$	

Représenter graphiquement $\|\vec{B}\|$ en fonction de I.
(Échelles : 1 cm pour 0,5 A ; 1 cm pour $20 . 10^{-5}$ T.)
En déduire une relation entre $\|\vec{B}\|$ et I.

2/ On refait la même expérience avec un solénoïde de longueur $\ell_2 = 0{,}80$ m comportant $N_2 = 768$ spires. On obtient les résultats suivants :

I	1,0	2,0	3,0	4,0
$\|\vec{B}\|$	$120 . 10^{-5}$	$240 . 10^{-5}$	$380 . 10^{-5}$	$480 . 10^{-5}$

a/ Calculer le nombre n de spires par mètre pour chacun des deux solénoïdes.

b/ Déduire des deux expériences une relation entre I et n.

c/ Déduire des deux expériences une relation entre B, I et n.

d/ Dans la formule théorique liant B, n et I intervient un coefficient $\mu_0 = 4\pi . 10^{-7}$ (unité S.I.). Comparer cette valeur à celle qui est déterminée par le graphique obtenu à la question 1.

↳ ex. 6.7.

Scanné avec CamScanner

7 PARTICULE CHARGÉE EN MOUVEMENT DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE

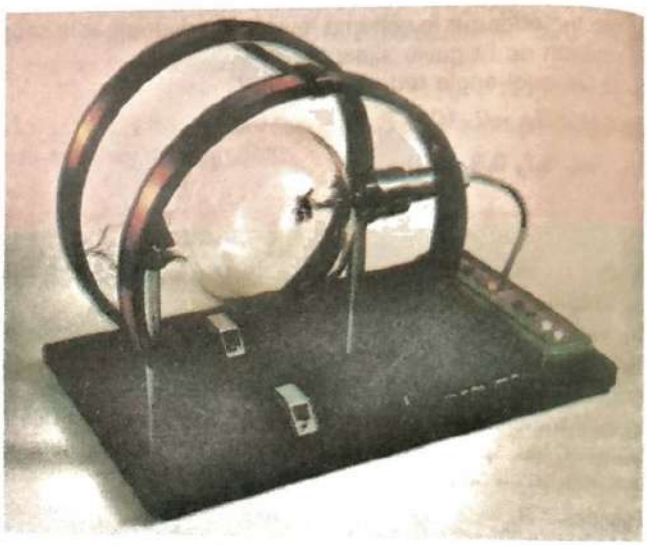
7.1 dispositif expérimental

L'étude de la trajectoire d'une particule chargée qu'on lance dans un champ magnétique peut être réalisée au moyen du dispositif de la photographie 1.

Une ampoule sphérique est munie d'un canon à électrons. Celui-ci permet de réaliser un pinceau d'électrons lancés à une vitesse que l'on peut faire varier en agissant sur la tension d'accélération. Ce pinceau est quasiment *homocinétique* : tous les électrons qui le composent ont la même vitesse.

Un gaz raréfié, contenu dans l'ampoule et susceptible de devenir luminescent sur la trajectoire des électrons, permet de visualiser cette dernière.

L'ampoule est placée entre deux bobines de Helmholtz qui, lorsqu'elles sont parcourues par un courant, créent un champ magnétique normal à leurs plans et quasiment uniforme dans la zone de déplacement des électrons. L'intensité du champ magnétique croît avec l'intensité du courant qui circule dans les bobines. Enfin, une rotation de l'ampoule permet de modifier l'orientation de la vitesse $\vec{v}_0$ des électrons sortant du canon : cette vitesse pourra être normale au champ magnétique ou avoir une direction oblique par rapport à ce champ.



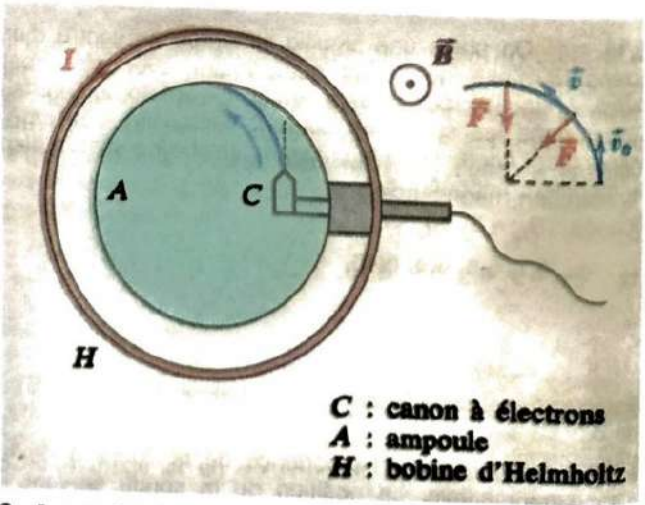
1. *Appareil pour l'étude de la trajectoire des électrons dans un champ magnétique uniforme (créé par deux bobines de Helmholtz).*

7.2 résultats expérimentaux

1. Orientons le canon à électrons *perpendiculairement à l'axe des bobines.* En l'absence de courant dans les bobines, la trajectoire des électrons est rectiligne.

Établissons le courant : la trajectoire s'incurve dans un plan parallèle à celui des bobines, donc orthogonal au champ magnétique $\vec{B}$ (*fig.* 2). Le vecteur variation de quantité de mouvement et, par conséquent, la force $\vec{F}$ exercée sur un électron du faisceau sont localisés dans ce plan.

Si nous augmentons l'intensité du champ magnétique, la trajectoire des électrons s'incurve de plus en plus et nous observons finalement une trajectoire circulaire complète



2. *La trajectoire des électrons s'incurve dans un plan orthogonal au vecteur champ magnétique* $\vec{B}$.

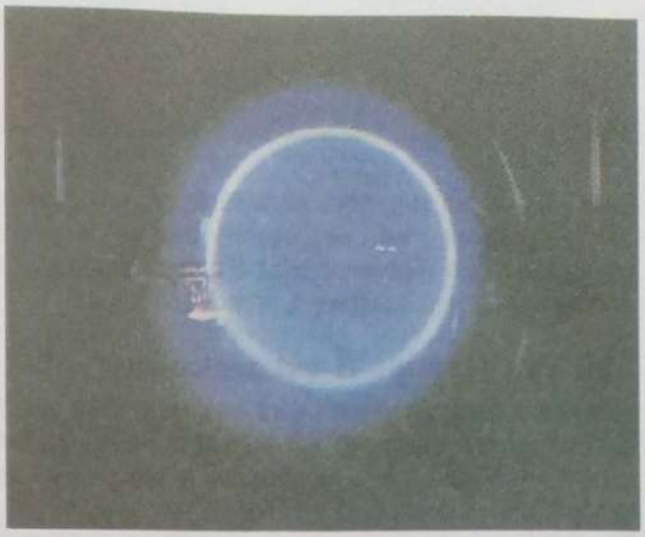
Scanné avec CamScanner

(*photo* 3). Le rayon de cette trajectoire circulaire diminue si nous augmentons l'intensité du champ magnétique ou si nous diminuons la vitesse initiale v_0 des électrons. En changeant le sens du courant dans les bobines, le sens de la courbure de la trajectoire change.

• **La force exercée par un champ magnétique $\vec{B}$ sur une particule chargée en mouvement est située dans un plan normal à $\vec{B}$. Elle dépend de la vitesse $\vec{v}$ de la particule et du champ.**

2. La déviation du faisceau s'annule si nous pouvons orienter l'ampoule de façon que le faisceau d'électrons soit *parallèle à l'axe des bobines*, donc au champ magnétique $\vec{B}$.

• **La force exercée par un champ magnétique $\vec{B}$ sur une particule chargée s'annule lorsque la vitesse de cette particule a la même direction que $\vec{B}$.**



3. Pour une orientation convenable de leur vitesse d'éjection par rapport au champ magnétique, les électrons ont une trajectoire circulaire.

7.3 force magnétique de Lorentz

Nous admettrons que la force $\vec{F}$ exercée sur un porteur de charge q, animé d'une vitesse $\vec{v}$ et placé dans un champ magnétique $\vec{B}$, est donnée par la relation vectorielle :

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}.$$

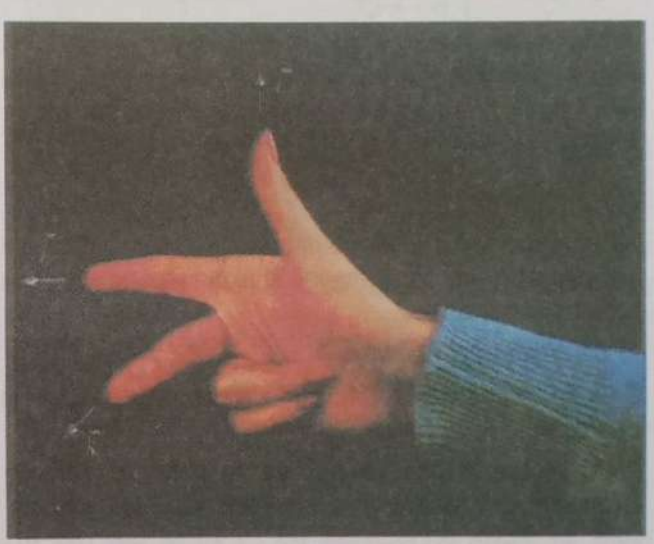
Cette relation, dite *de Lorentz*, fait intervenir un *produit vectoriel* (voir cours de mathématiques); elle permet de connaître les caractéristiques de la force magnétique :

- **direction** : $\vec{F}$ est orthogonale à la fois à $\vec{v}$ et à $\vec{B}$, donc au plan défini par $\vec{v}$ et $\vec{B}$;
- **sens** : le trièdre $(q\vec{v}, \vec{B}, \vec{F})$ est *direct* (*photo* 4 et *fig.* 5);
- **intensité** : si α est l'angle formé par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{B}$, l'intensité de $\vec{F}$ est égale à :

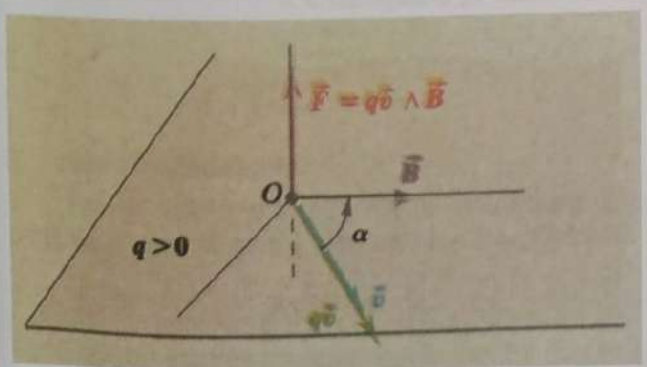
$$F = |q \sin \alpha| vB.$$

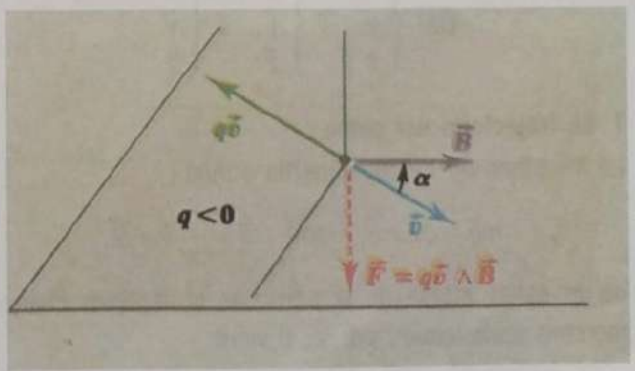
(T) (N) (C) (m.s⁻¹)

Nous pouvons vérifier que la relation donnant $\vec{F}$ est compatible avec les observations de l'étude expérimentale du paragraphe précédent; en particulier, si $\vec{v}$ et $\vec{B}$ sont colinéaires, $\vec{F} = \vec{0}$.



4. Le pouce, l'index, le majeur (pris dans cet ordre) de la main droite sont placés suivant les axes $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'un trièdre direct. La main droite peut donc servir à trouver le sens d'une force magnétique, puisque le trièdre $(q\vec{v}, \vec{B}, \vec{F})$ associé est direct.





5. La force magnétique qui s'exerce sur une particule de charge q, animée d'une vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique $\vec{B}$, est $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$; le trièdre $(q\vec{v}, \vec{B}, \vec{F})$ est direct.

Scanné avec CamScanner

7.4 mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique

Dans tout ce qui suit, nous considérerons que le poids de la particule est négligeable devant la force magnétique. En l'absence de champ électrique, la particule sera donc soumise à cette seule force.

7.4.1 cas général : $\vec{B}$ est quelconque

Lorsqu'une particule pénètre dans un champ magnétique quelconque, sa trajectoire est complexe, curviligne en général. Mais nous allons montrer que le mouvement est toujours uniforme.

En effet, la puissance de la force magnétique en chaque point de la trajectoire est telle que :

$$\mathcal{P} = \vec{F}.\vec{v} = q(\vec{v} \wedge \vec{B}).\vec{v}.$$

Cette puissance est donc nulle puisque $\vec{v}$ est constamment orthogonal au vecteur $\vec{v} \wedge \vec{B}$. Autrement dit, l'énergie cinétique de la particule soumise à la seule force magnétique *reste constante* (*cf.* 2.4, *théorème de l'énergie cinétique*). La norme du vecteur vitesse reste donc également constante : *le mouvement est uniforme.*

• Dans un champ magnétique, le mouvement d'une particule chargée est uniforme. Si la particule est initialement au repos, elle reste au repos. La force magnétique ne modifie que la direction du vecteur vitesse de la particule.

7.4.2 cas particulier

Considérons maintenant le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique qui répond aux deux conditions suivantes :

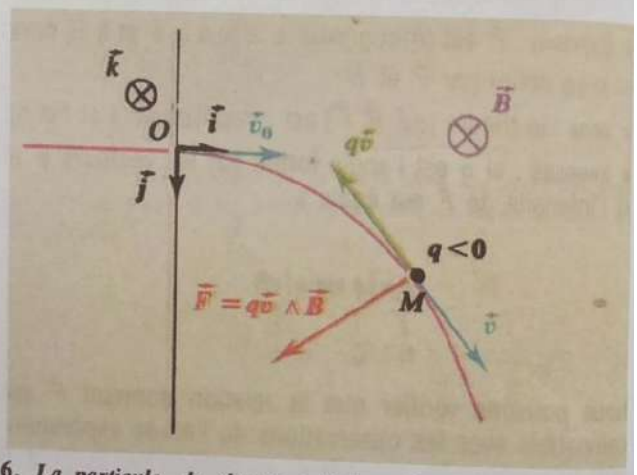
1. *Ce champ est uniforme.*

2. *Il est orthogonal au vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$ de la particule.*

Pour décrire le mouvement de la particule dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen, choisissons un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que (*fig.* 6) : $\vec{B} = B\vec{k}$; $\vec{v}_0 = v_0\vec{i}$; la particule pénètre dans le champ en O à la date $t = 0$.

Dans ce repère, la particule est caractérisée à chaque instant par ses vecteurs position, vitesse et accélération :

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x \\ y, \\ z \end{cases} \quad \vec{v}\begin{cases} \dot{x} \\ \dot{y}, \\ \dot{z} \end{cases} \quad \vec{a}\begin{cases} \ddot{x} \\ \ddot{y}. \\ \ddot{z} \end{cases}$$



6. *La particule, de charge q (ici $q<0$), pénètre en O dans une région où règne un champ magnétique uniforme, avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ orthogonale à $\vec{B}$.*

1. La trajectoire est plane

Le théorème du centre d'inertie donne :

$$m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B}, \quad \text{soit} \quad \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{v} \wedge \vec{B},$$

où m est la masse de la particule. Multiplions chaque membre scalairement par $\vec{k}$; il vient :

$$\vec{a}.\vec{k} = \frac{q}{m}(\vec{v} \wedge \vec{B}).\vec{k} = 0.$$

Scanné avec CamScanner

car $\vec{B}$ est colinéaire à $\vec{k}$, soit :

$$\ddot{z}=0.$$

Nous en déduisons par intégration (*cf. chap.* 1) que :

$$z=at+b,$$

où a et b sont des constantes qu'il reste à définir.

Or à $t=0$: $\dot{z}=a=0$ (car $\vec{v}_0=v_0\vec{i}$),
$z=b=0$ (car la particule est en O).

La coordonnée z étant toujours nulle, le mouvement de la particule a lieu dans le plan $z=0$, c'est-à-dire le plan xOy orthogonal à $\vec{B}$.

Toute particule chargée pénétrant dans un champ magnétique uniforme perpendiculairement aux lignes de champs décrit donc une trajectoire plane. Le plan de cette trajectoire, qui contient le vecteur vitesse initial de la particule, est orthogonal à $\vec{B}$.

2. La trajectoire est circulaire

La particule a une trajectoire curviligne plane. Utilisons la base de projection de Frenet $(\vec{u}, \vec{n})$ pour exprimer les composantes de l'accélération (*fig.* 7); il vient :

$$\vec{a}=\vec{a}_t+\vec{a}_n=\frac{dv}{dt}\vec{u}+\frac{v^2}{\rho}\vec{n}, \qquad (1)$$

où ρ est le rayon de courbure de la trajectoire au point considéré. De plus :

$$\vec{a}=\frac{q}{m}\vec{v}\wedge\vec{B}=\frac{|q|}{m}|v|B\vec{n}. \qquad (2)$$

Comparons (1) et (2). Avec $v=\text{Cte}=v_0$, le mouvement étant uniforme, nous obtenons :

$$\frac{v_0^2}{\rho}=\frac{|q|}{m}v_0B,$$

soit :

$$\rho=\frac{mv_0}{|q|B}=\text{Cte}. \qquad (3)$$

Le rayon de courbure ρ de la trajectoire est donc constant : la trajectoire est circulaire.

• Une particule de charge q et de masse m pénétrant dans un champ magnétique uniforme d'intensité B avec une vitesse $\vec{v}_0$ orthogonale au champ prend un mouvement circulaire uniforme. La trajectoire est dans un plan orthogonal au champ et son rayon vaut :

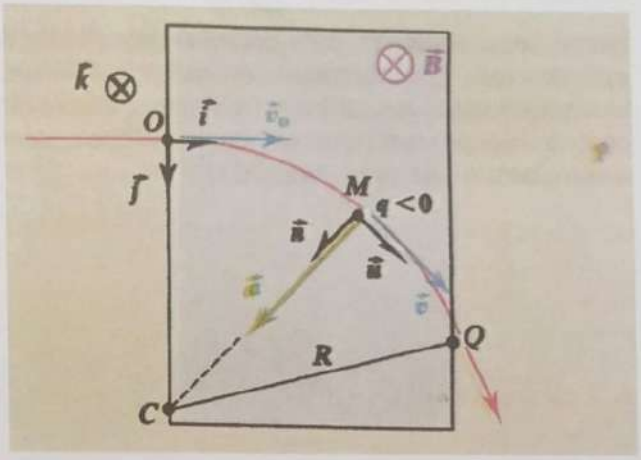
$$R=\frac{mv_0}{|q|B}.$$

3. Autres caractéristiques

• Si l'on fait intervenir la quantité de mouvement de la particule $\vec{p}=m\vec{v}$, de norme constante $p=mv_0$, (3) s'écrit :

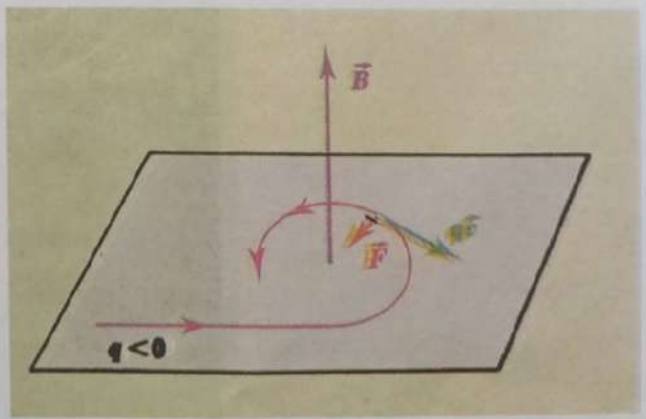
$$p=|q|RB.$$

Cette relation est très importante; elle montre que nous pouvons déterminer la quantité de mouvement de la particule en mesurant la courbure de sa trajectoire.



7. ***Dans le champ magnétique uniforme, le rayon de courbure de la trajectoire de la particule chargée (ici un électron) est constant; cette trajectoire est circulaire.*** $(\vec{u}, \vec{n})$ ***est la base de projection de Frenet en M.***

$\vec{a}=\frac{q}{m}\vec{v}\wedge\vec{B}$, ***vecteur orthogonal à*** $\vec{v}$ ***et à*** $\vec{B}$, ***a la direction de*** $\vec{n}$.



8. ***Une particule de charge négative « s'enroule » autour de*** $\vec{B}$ ***dans le sens trigonométrique.***

Scanné avec CamScanner

• La vitesse angulaire de la particule est donnée par :

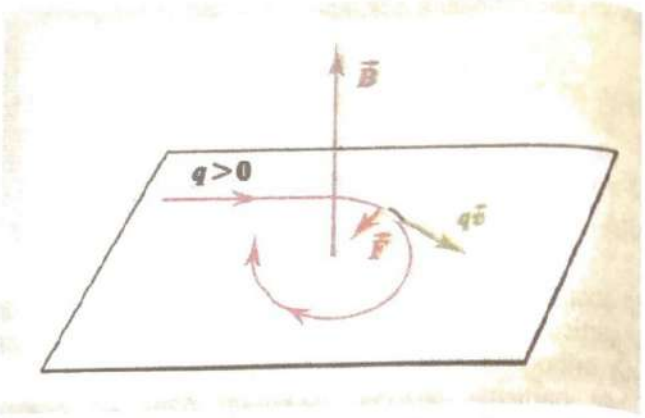
$$\omega = \frac{v_0}{R} = \frac{|q|B}{m}.$$

• Pour trouver le sens de rotation, remarquons que la force (ou l'accélération) est nécessairement centripète; les particules de charge négative tournent autour de $\vec{B}$ dans le sens trigonométrique (sens inverse des aiguilles d'une montre), les particules de charge positive en sens contraire (*fig.* 8 et 9).

• La période de révolution T, c'est-à-dire le temps mis par la particule pour faire un tour, est :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{|q|B}.$$

Nous constatons que la vitesse angulaire et la période ne dépendent que du rapport $\frac{|q|}{m}$ et de l'intensité B du champ. Nous utiliserons cette propriété dans l'étude du cyclotron (voir 7.5.3). Signalons cependant qu'elle n'est plus vérifiée pour les particules relativistes, c'est-à-dire dont les vitesses sont proches de la célérité c de la lumière dans le vide (voir *chap.* 20 et 21).



9. Une particule de charge positive « s'enroule » autour de $\vec{B}$ dans le sens inverse du sens trigonométrique.

APPLICATION 1

Dans un appareil de détection, le rayon de la trajectoire circulaire d'un proton est de 3,6 cm. L'intensité du champ magnétique vaut 1,4 T. Calculer la quantité de mouvement de ce proton, sa vitesse et sa vitesse angulaire, sachant que sa masse vaut $m_p = 1{,}67.10^{-27}$ kg.

La quantité de mouvement du proton est donnée par :

$$p = |q|RB,$$

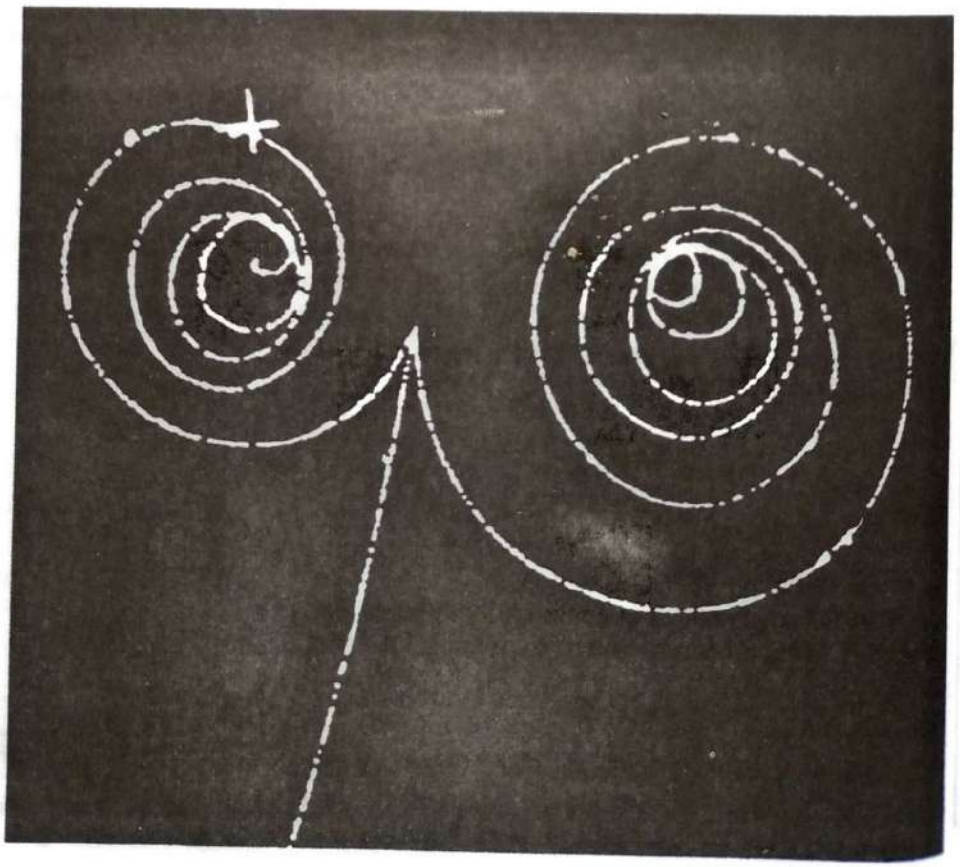
soit :
$$p = 1{,}6.10^{-19} \times 3{,}6.10^{-2} \times 1{,}4$$
$$= 8{,}06.10^{-21}\ \text{kg.m.s}^{-1}.$$

Nous en déduisons sa vitesse :

$$v = \frac{p}{m} = 4{,}83.10^{6}\ \text{m.s}^{-1},$$

puis sa vitesse angulaire :

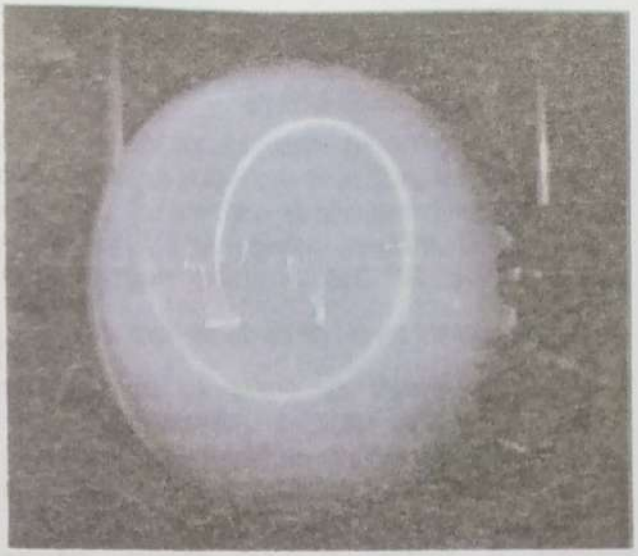
$$\omega = \frac{v}{R} = 1{,}34.10^{8}\ \text{rad.s}^{-1}.$$



10. ***Trajectoires d'un électron et d'un positon apparus lors d'une collision dans une chambre à bulles (voir chap. 20). Ces deux particules, de même masse et de charges opposées, décrivent deux spirales en sens inverse autour du champ magnétique. Les trajectoires ne sont pas circulaires car les particules sont freinées par le liquide de la chambre à bulles.***

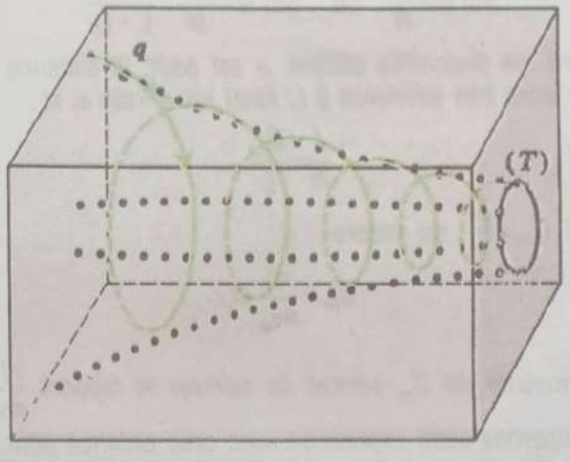
Scanné avec CamScanner

Remarque : Lorsque $\vec{v}_0$ et $\vec{B}$ ne sont plus orthogonaux, la trajectoire est une hélice (*photo* 11). Si $\vec{B}$ est quelconque, la trajectoire s'enroule sur un tube de lignes de champ, dont le rayon est d'autant plus petit que le champ est intense (*fig.* 12). Il arrive même que la particule reparte en arrière. Le champ magnétique apparaît alors comme un « miroir magnétique ». Ces propriétés sont utilisées pour le confinement des gaz ionisés et, plus particulièrement, des plasmas. Elles permettent, par exemple, d'expliquer l'existence des ceintures de radiations de Van Allen. Ces ceintures sont composées de particules chargées, piégées dans le champ magnétique terrestre et en mouvement autour de la Terre à des altitudes comprises entre 800 et 4 000 km (voir *document* du chapitre 6).



11. *Trajectoire hélicoïdale d'un faisceau d'électrons soumis à un champ magnétique qui n'est pas orthogonal à la vitesse initiale.*

12. *La trajectoire d'une particule chargée s'enroule sur un tube de lignes de champ (T).* ▶



Aurore boréale. Lors de ses éruptions, le Soleil lance dans l'espace des jets de particules élémentaires électrisées. Le mouvement de ces particules dans le champ magnétique terrestre intense qui règne aux pôles est complexe. En rencontrant les couches élevées de l'atmosphère, ces particules provoquent une luminescence identique à celle observée dans un tube de Crookes.



Scanné avec CamScanner

7.5 applications pratiques

7.5.1 déflexion magnétique

Un faisceau de particules identiques, de charge q et de masse m, pénètre en O dans une région de largeur ℓ où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}$. La vitesse initiale $\vec{v}_0$ des particules, orthogonale à $\vec{B}$, est dirigée suivant OA (*fig.* 13). Dans le champ magnétique les particules décrivent un arc de cercle de rayon $R=\dfrac{mv_0}{|q|B}$.

Les particules sortent du champ au point M. Leur mouvement est alors rectiligne uniforme selon la tangente en M à la trajectoire circulaire. Elles arrivent en A' sur l'écran E, perpendiculaire à OA et situé à la distance L du point O.

Évaluons la quantité $D_m = AA'$, appelée **déflexion magnétique**. La déviation angulaire $\alpha = (\widehat{\vec{CO}, \vec{CM}})$ est donnée par (*fig.* 13) :

$$\sin\alpha = \frac{\ell}{R} \quad \text{ou} \quad \tan\alpha = \frac{AA'}{IA} = \frac{D_m}{L - OI}.$$

Dans les dispositifs utilisés, α est petit; la distance OI est alors très inférieure à L. Ainsi $\sin\alpha \approx \tan\alpha$, et :

$$\frac{\ell}{R} \approx \frac{D_m}{L},$$

soit $D_m = \dfrac{L\ell}{R}$, ou encore :

$$D_m = \frac{|q|}{mv_0} BL\ell.$$

La mesure de D_m permet de calculer le rapport $\dfrac{|q|}{mv_0}$.

Comparons cette expression avec celle obtenue pour la déflexion électrostatique (*cf.* 4.3.5), lorsque $L \gg \ell$:

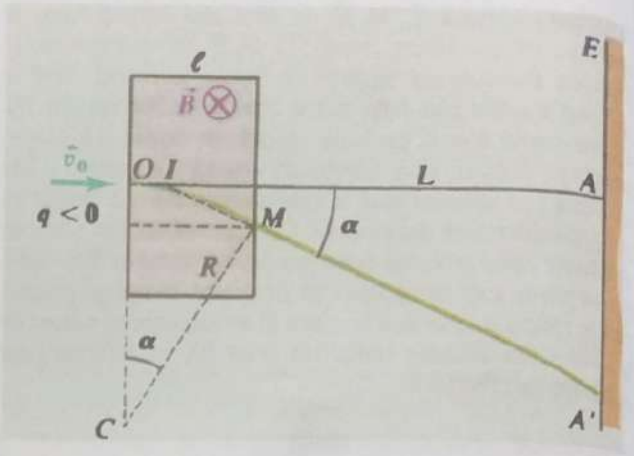
$$D_e \approx \frac{|q|}{mv_0^2} EL\ell.$$

Dans les deux cas, la déviation est proportionnelle au champ (pour le champ $\vec{B}$, seulement si α est petit). La déviation magnétique est mieux adaptée à la déviation de particules très rapides, car elle est proportionnelle à $1/v_0$ et non plus à $1/v_0^2$.

Cette déflexion magnétique est utilisée dans les tubes de télévision. Le déplacement du spot est assuré par deux bobines dont les axes sont perpendiculaires entre eux et au faisceau incident. Ainsi, sous l'action du champ des deux bobines, le spot peut parcourir tout l'écran. On donne aux deux balayages croisés simultanés des vitesses très différentes. Le spot parcourt l'écran de 625 ou 819 lignes en 1/25 de seconde; cela est suffisant pour que l'œil perçoive une continuité des images grâce à la persistance des impressions lumineuses sur la rétine.

7.5.2 spectromètre de masse

Un spectromètre de masse est un appareil qui permet de trier des ions de masses ou de charges différentes par utilisation d'un champ magnétique et d'un champ électrique.



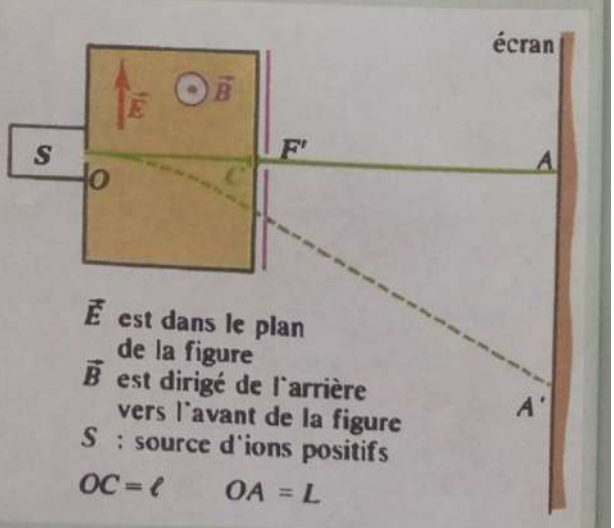
13. *Déflexion magnétique. Dans le cas où l'angle α est petit, on peut écrire :*

$$\sin\alpha \approx \tan\alpha = \frac{AA'}{IA} \approx \frac{AA'}{L}.$$

$(\vec{IA}, \vec{IA'}) = (\vec{CO}, \vec{CM}) = \alpha$, car ces angles sont à côtés perpendiculaires.

APPLICATION 2

Dans une région de l'espace de largeur ℓ règnent un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{B}$. Ces deux champs sont uniformes et $\vec{B}$ est orthogonal à $\vec{E}$. Un faisceau de particules, formé d'ions positifs de masses différentes mais de même charge, pénètre en O dans le dispositif.



1/ Montrer que seuls les ions animés d'une vitesse v_0 déterminée ont un mouvement rectiligne uniforme selon OA et passent par une fente F' disposée sur OA. On justifiera l'orientation de $\vec{E}$.

Scanné avec CamScanner

Un spectromètre de type Dempster (*fig.* 14) comprend :

• une *chambre d'ionisation* (1) où sont produits les ions;

• une *chambre d'accélération* (2). Les ions y pénètrent avec une vitesse quasiment nulle et sont accélérés par un champ électrique $\vec{E}$, sous une tension U: ils en sortent au point O avec une vitesse $\vec{v}_0$ telle que :

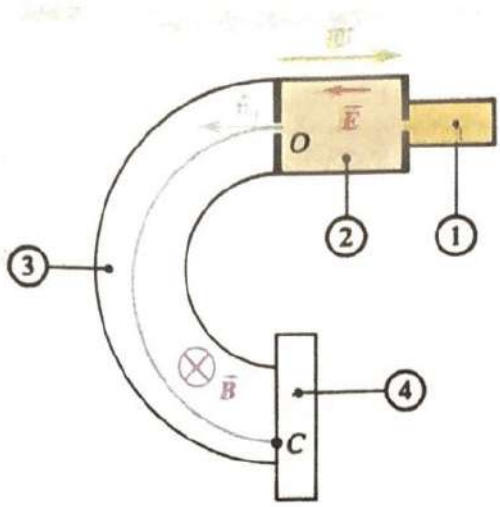
$$\frac{1}{2} m v_0^2 = |q| U;$$

• une *chambre de déviation* (3), semi-circulaire. Les particules y sont soumises à l'action d'un champ magnétique uniforme $\vec{B}$; elles décrivent un demi-cercle dont le diamètre D est tel que :

$$D = OC = 2R = \frac{2mv_0}{|q|B};$$

• un *détecteur* (4) (plaque photographique, compteur, collecteur...) où sont recueillies les particules.

L'ensemble du système est sous vide. Pour U et B fixés, les ions caractérisés par le même rapport $\frac{|q|}{m}$ décrivent la même trajectoire circulaire de rayon R; la mesure de D permet donc de déterminer ce rapport. En revanche, des ions de même charge mais de masses différentes décriront chacun une trajectoire dont le diamètre D est proportionnel à la racine carrée de leurs masses (voir *application* 3).



14. *Spectromètre de masse de type Dempster.*

2/ On supprime le champ électrique et la fente F'. Le faisceau, constitué maintenant de particules identiques, est recueilli en A' sur un écran situé à la distance L du point O. On rétablit ensuite le champ électrique et l'on règle son intensité de façon à ce que le spot soit ramené au centre A de l'écran. Montrer que cette expérience permet de calculer le rapport $\frac{|q|}{m}$ des particules étudiées.

1/ Si une particule du faisceau est animée d'un mouvement rectiligne uniforme selon la direction initiale de sa vitesse, c'est-à-dire OA, son accélération est nulle. Nous en concluons que la somme des forces auxquelles la particule est soumise est nulle, autrement dit que la force magnétique $\vec{F}_m$ est compensée par la force électrique $\vec{F}_e$:

$$\vec{F}_m + \vec{F}_e = \vec{0}.$$

soit : $$q(\vec{v} \wedge \vec{B} + \vec{E}) = \vec{0}.$$

ou encore : $$\vec{E} = -\vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{B} \wedge \vec{v};$$

les vecteurs $\vec{B}$, $\vec{v}$ et $\vec{E}$ forment donc un trièdre direct. Avec les normes, la relation s'écrit :

$$E = Bv, \quad \text{soit} \quad v = \frac{E}{B} = \text{Cte} = v_0.$$

Tous les ions ayant la vitesse v_0, quelle que soit leur masse, auront un mouvement rectiligne uniforme. Ils passeront alors par la fente F'. Le dispositif est un *filtre de vitesses.*

2/ Le champ magnétique agissant seul, nous mesurons expérimentalement la déviation :

$$D_m = \frac{|q| BL\ell}{mv_0}.$$

Superposons à nouveau un champ électrique au champ magnétique et réglons son intensité de telle façon que le spot soit ramené au centre A de l'écran. Le mouvement des particules est alors rectiligne uniforme, et la question précédente nous a montré que $E = Bv_0$.

Reportons v_0 dans l'expression de D_m: il vient :

$$D_m = \frac{|q| B^2 L\ell}{mE}, \quad \text{soit} \quad \frac{|q|}{m} = \frac{E}{B^2 L\ell} D_m.$$

Nous en déduisons la valeur du rapport $\frac{|q|}{m}$. Le signe de la charge sera obtenu en comparant cette dernière à celle d'un électron, par exemple.

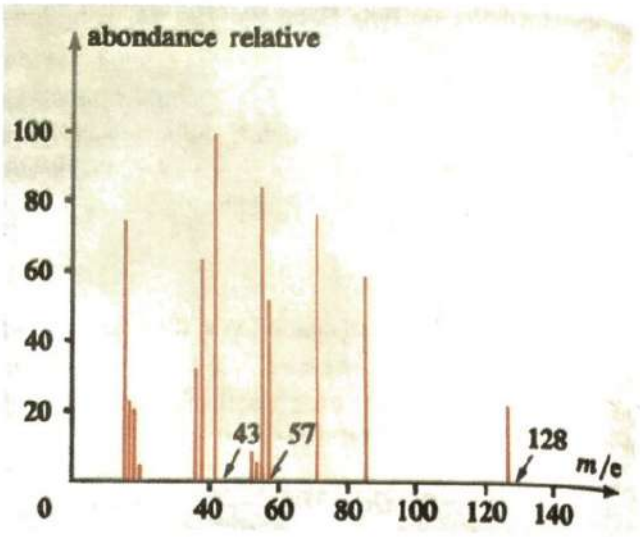
Cette méthode a permis à J.-J. Thomson de calculer, dès 1897, le rapport $\frac{e}{m}$ pour l'électron. R.-A. Millikan détermina plus tard la charge élémentaire e. La mesure de la masse m de l'électron en découlait. Des mesures récentes utilisant diverses méthodes donnent :

$$e = (1{,}602\,191\,7 \pm 0.000\,007\,0).10^{-19}\ \text{C};$$
$$m = (9.109\,558 \pm 0.000\,054).10^{-31}\ \text{kg}.$$

Scanné avec CamScanner

Le spectrographe de masse est un appareil très utile. Il permet :

— de mesurer la masse des isotopes (voir *chap.* 22);
— d'identifier des isotopes d'un élément;
— de déterminer le pourcentage de chaque isotope contenu dans un élément;
— d'analyser un mélange gazeux ou solide;
— de préciser la formule des composés organiques (dans la chambre d'ionisation, les molécules organiques sont fragmentées en ions, identifiés par détermination massique [*fig.* 15]).



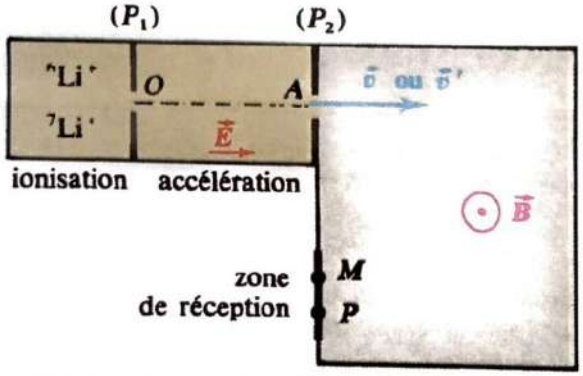
15. *Spectrogramme de masse de la 4-octanone :*

$$CH_3—CH_2—CH_2—\underset{\displaystyle O}{\overset{\displaystyle \|}{C}}—CH_2—CH_2—CH_2—CH_3.$$

Les masses sont exprimées en $g.mol^{-1}$ *et la charge de l'électron est choisie comme unité. Le pic le plus à droite* (128) *correspond à la molécule de 4-octanone ionisée une fois. Les pics les plus intenses* (43 *et* 57) *correspondent aux ions* $C_3H_7^+$ *et* $C_4H_9^+$; *cela montre que les liaisons* C—C *de part et d'autre du groupement carbonyle sont assez fragiles.*

APPLICATION 3

A l'aide du spectrographe de masse schématisé ci-contre, on se propose de séparer les ions $^6Li^+$ *et* $^7Li^+$ *de masses respectives m et m'. Les ions* Li^+ *pénètrent en O dans le champ électrique uniforme créé par la tension U qui règne entre les deux plaques verticales* (P_1) *et* (P_2) *pour y être accélérés jusqu'en A.*



1/ Les ions $^6Li^+$ *et* $^7Li^+$ *sortent en A du champ électrique avec des vitesses respectives v et v'. Leur vitesse en O est négligeable devant v et v'. Établir la relation :*

$$\frac{v}{v'}=\sqrt{\frac{m'}{m}}.$$

2/ Les ions Li^+ *pénètrent en A dans un champ magnétique uniforme* $\vec{B}$ *orthogonal au plan du schéma et parviennent dans la zone de réception indiquée. Exprimer la distance MP entre les deux types d'ions à leur arrivée dans la zone de réception, en fonction de B, m, m', U et de la charge élémentaire e.*

Données : $U=1{,}00.10^4$ V; $B=2{,}00.10^{-1}$ T; $m\approx 6$ u; $m'\approx 7$ u; 1 u $=1{,}67.10^{-27}$ kg; $e=1{,}60.10^{-19}$ C.

1/ Les ions sont soumis au champ créé par les plaques. La tension U est positive, les ions positifs étant accélérés entre O et A; $\vec{E}$ est dirigé de (P_1) vers (P_2).

Les ions $^6Li^+$ étant soumis entre O et A à la seule force électrostatique, le théorème de l'énergie cinétique donne :

$$\frac{1}{2}mv_A^2-\frac{1}{2}mv_O^2=qU;$$

d'où, avec $v_O\approx 0$ et $q=e$:

$$v^2=v_A^2=2\frac{eU}{m}. \qquad (1)$$

De même, pour les ions $^7Li^+$, de même charge e :

$$v'^2=2\frac{eU}{m'}. \qquad (1')$$

A partir des relations (1) et (1'), nous obtenons :

$$\frac{v^2}{v'^2}=\frac{m'}{m}, \quad \text{soit} \quad \frac{v}{v'}=\sqrt{\frac{m'}{m}}.$$

2/ Les ions $^6Li^+$ décrivent une trajectoire semi-circulaire de diamètre :

$$D=AM=\frac{2mv}{eB},$$

soit, compte tenu de (1) :

$$D=\sqrt{m}\sqrt{\frac{8U}{eB^2}}.$$

De même, pour les ions $^7Li^+$:

$$D'=AP=\sqrt{m'}\sqrt{\frac{8U}{eB^2}}.$$

D'où :

$$MP=D'-D=\sqrt{\frac{8U}{eB^2}}(\sqrt{m'}-\sqrt{m}).$$

Application numérique :

$$MP=\sqrt{\frac{8\times 10^4\times 1{,}67.10^{-27}}{1{,}6.10^{-19}\times 4.10^{-2}}}\times(\sqrt{7}-\sqrt{6})$$
$$=0{,}028\ \text{m}=2{,}8\ \text{cm}.$$

Scanné avec CamScanner

7.5.3 cyclotron

Nous venons de voir qu'une particule de vitesse $\vec{v}$ décrit, dans un champ $\vec{B}$ uniforme orthogonal à cette vitesse, une trajectoire circulaire de rayon $R = \dfrac{mv}{|q|B}$, à la vitesse angulaire $\omega = \dfrac{|q|}{m} B$. La durée de révolution de la particule sur le cercle est :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{B|q|}.$$

La fréquence $f = 1/T$ est appelée *fréquence cyclotron*. Les quantités ω, T et f sont indépendantes de la vitesse v.

Un **cyclotron** est un accélérateur de particules. Il comporte deux boîtes semi-cylindriques de cuivre, D_1 et D_2, dans lesquelles on maintient un vide très poussé. Ces boîtes, appelées *dees* en raison de leur forme (lettre D en anglais), sont placées horizontalement dans un champ magnétique uniforme et vertical créé par de puissants électroaimants (*fig.* 16). Entre ces dees, un oscillateur produit une tension alternative de période T égale à la période cyclotron des ions à accélérer.

Les ions produits par la source S, à l'instant où le champ électrique est maximal, sont accélérés vers D_1 (temps de parcours négligeable); ils y décrivent alors un demi-cercle pendant la durée $T/2$ et se présentent en A_2 lorsque le champ $\vec{E}$ est inversé. Les ions sont ainsi accélérés à nouveau vers D_2, où ils décrivent un autre demi-cercle de rayon plus grand, et ainsi de suite. A chaque traversée des dees, leur énergie s'accroît et le rayon de la trajectoire augmente. Le champ $\vec{B}$ ne fait que courber la trajectoire; il ne modifie pas la norme de la vitesse.

La vitesse maximale v_m acquise par ces ions est liée au rayon utile maximal des dees; si R_m est ce rayon :

$$v_m = \frac{|q| R_m B}{m}.$$

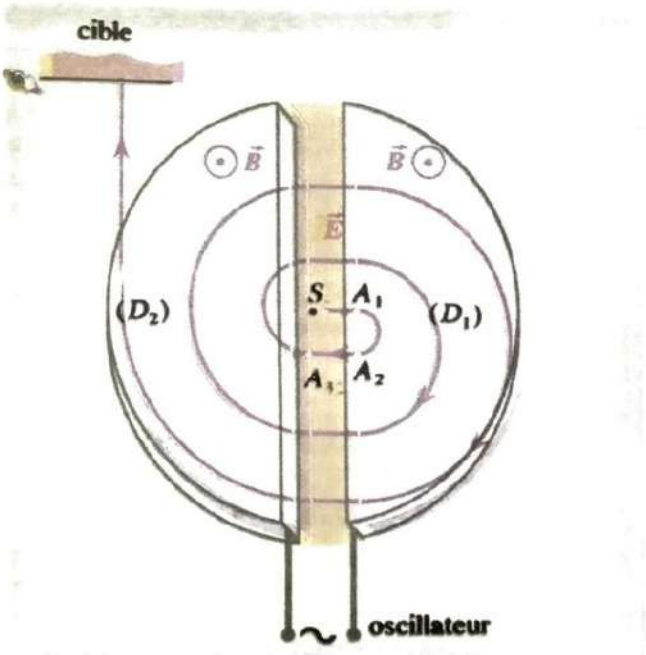
L'énergie cinétique maximale est alors :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m v_m^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2 B^2}{m} R_m^2.$$

Les particules arrivant à la périphérie des dees sont éjectées à l'extérieur par une ouverture adaptée munie d'un dispositif déflecteur et envoyées sur des trajectoires de stockage ou sur des cibles.

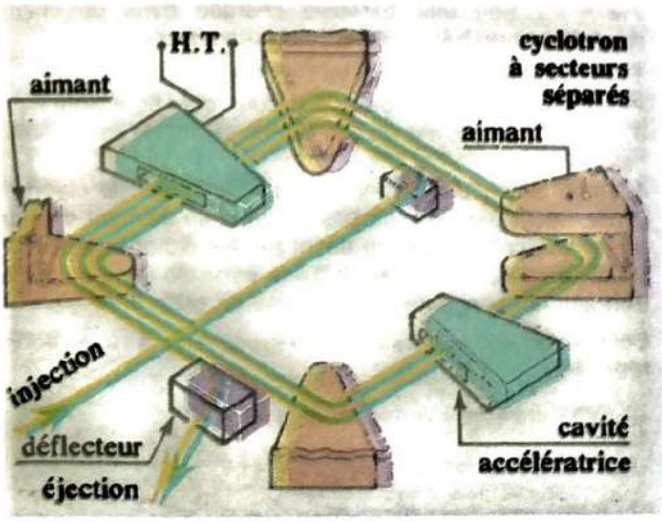
Notons que l'énergie maximale dépend des caractéristiques du cyclotron, mais non de la tension accélératrice. Les valeurs de B et de R_m sont limitées par des considérations technologiques et économiques.

Remarque : On pourrait penser qu'il est possible de communiquer aux particules des vitesses très élevées et, pourquoi pas, supérieures à celle de la lumière. Mais les résultats établis ne sont valables que lorsque les vitesses sont nettement inférieures à celle de la lumière (voir *chap.* 20). Lorsque ce n'est pas le cas, la période cyclotron augmente avec la vitesse et il faut constamment synchroniser la période de la tension alternative. Aussi un tel appareil est-il appelé un **synchrocyclotron.**



16. *Schéma de principe d'un cyclotron. La particule porte une charge positive.*





17. *Le GANIL (Grand Accélérateur National d'Ions Lourds), installé à Caen, est un cyclotron à secteurs séparés.*

APPLICATION 4

Le cyclotron du C.E.A. de Saclay a un rayon maximal d'extraction $R_m = 387{,}5$ mm. La tension accélératrice a une valeur maximale de 200 kV et une fréquence $f = 11{,}4$ MHz.

1/ Calculer l'énergie cinétique que possèdent des atomes de carbone quatre fois ionisés à la sortie de l'appareil. On néglige la vitesse initiale des ions.

2/ Donner la valeur du champ magnétique régnant dans les dees. Évaluer le nombre de tours effectués par les ions avant leur extraction.

Données : $M(C^{4+}) \approx 12$ u; 1 u = $6{,}02.10^{-26}$ kg.

1/ La vitesse maximale des ions est donnée par :

$$v_m = R_m\omega = R_m 2\pi f$$
$$= 2{,}78.10^{7}\ \text{m.s}^{-1}.$$

L'énergie cinétique acquise est donc égale à :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} M v_m^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{6{,}02.10^{-26}} (2{,}78.10^7)^2,$$

soit : $\mathcal{E}_c = 7{,}70.10^{-12}$ J.

L'électronvolt est une unité d'énergie mieux adaptée :

$$1\ \text{eV} = 1{,}60.10^{-19}\ \text{J};$$

d'où : $\mathcal{E}_c = 48{,}1$ MeV.

2/ L'intensité du champ $\vec{B}$ est égale à :

$$B = \frac{m\omega}{|q|} = \frac{12 \times 2\pi \times 11{,}4.10^6}{6{,}02.10^{-26} \times 4 \times 1{,}6.10^{-19}},$$

soit : $B = 2{,}23$ T.

Calculons le nombre de tours effectués. A chaque tour, les ions sont accélérés deux fois et accroissent leur énergie cinétique de :

$$\Delta\mathcal{E}_c = 2qU$$
$$= 2 \times 4 \times 1{,}60.10^{-19} \times 200.10^3\ \text{J},$$

soit : $\Delta\mathcal{E}_c = 2{,}56.10^{-13}$ J.

Le nombre de tours cherché est donc :

$$n = \frac{\mathcal{E}_c}{\Delta\mathcal{E}_c} \approx 30 \text{ tours}.$$

EXERCICES

L'essentiel du cours

7.1 A *Vrai ou faux ?*

Soit une particule chargée en mouvement dans un champ magnétique.

- La force magnétique est orthogonale au champ $\vec{B}$.
- La force magnétique est orthogonale au vecteur vitesse.
- La force magnétique est orthogonale à l'accélération.
- Un champ magnétique modifie le vecteur vitesse.
- Un champ magnétique peut freiner une particule chargée.
- La puissance exercée par la force magnétique est nulle.

7.2 A Soit une particule chargée dans un champ magnétique uniforme. Voici cinq propositions :

1. La trajectoire est toujours circulaire.
2. L'énergie cinétique de la particule reste constante.
3. Le mouvement est plan si la vitesse initiale est orthogonale au champ.
4. Dans un spectrographe du type Demptser, le rayon du cercle décrit par les isotopes lourds d'un élément est plus grand que celui du cercle décrit par les isotopes légers.
5. La fréquence de rotation d'une particule dans un cyclotron est indépendante de la vitesse de cette particule

Cocher la ou les cases correspondant à une bonne réponse :

a. Sont vraies les propositions 1, 3 et 4.

b. Sont vraies les propositions 4 et 5.

c. Sont vraies les propositions 2 et 5.

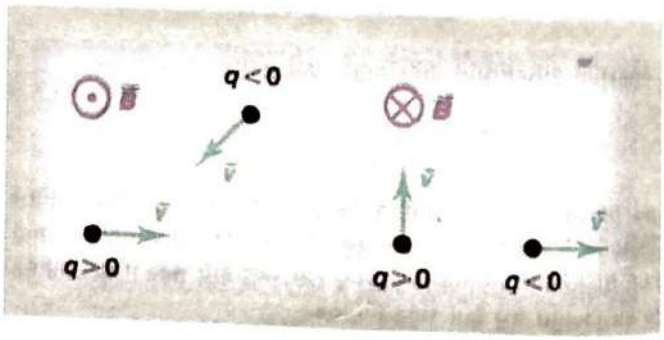
d. Sont vraies les propositions 2 à 5.

7.3 Dans chacun des cas de la figure :

1/ Tracer le vecteur $q\vec{v}$.

2/ Tracer le vecteur force.

3/ Indiquer l'allure de la trajectoire et le sens de rotation.



Dans tous les exercices qui suivent, on prendra :

- $e = 1.6.10^{-19}$ C; $m_e = 9.1.10^{-31}$ kg;
  $m_p = 1.67.10^{-27}$ kg; 1 u = $1.66.10^{-27}$ kg.

Exercices de base

7.4 Des électrons pénètrent dans un champ magnétique $\vec{B}$ orthogonal à leur vecteur vitesse $\vec{v}_0$.

1/ A Représenter sur un schéma $\vec{v}_0$, $\vec{B}$ et la force $\vec{F}$.

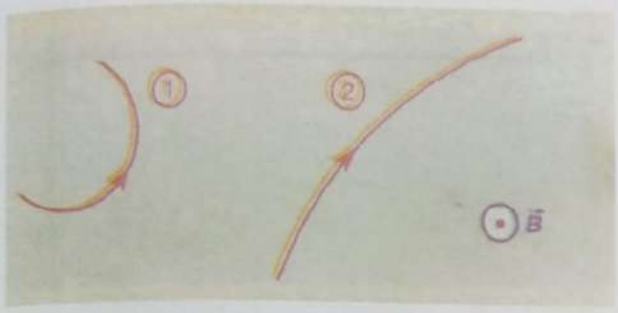
2/ B3 Calculer $\|\vec{F}\|$ pour $\|\vec{v}_0\| = 2.10^7$ m.s^{-1} et $\|\vec{B}\| = 0{,}2$ T.

Scanné avec CamScanner

3/ B3 Comparer l'intensité de cette force au poids de l'électron. Conclure.

4/ B3 Répondre aux mêmes questions pour une particule α. Les particules α sont des noyaux d'hélium He^{2+} de masse $6{,}7 . 10^{-27}$ kg.

7.5 A Dans une chambre à bulles, on a observé deux trajectoires circulaires. La particule (1) est chargée négativement.



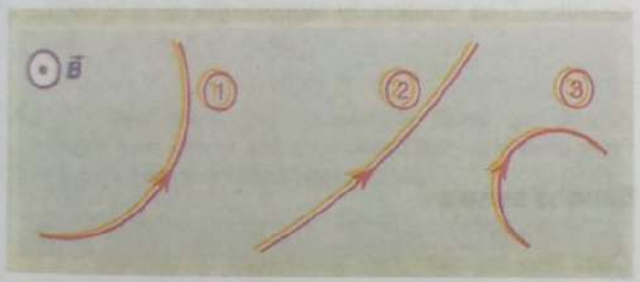
1/ Tracer le vecteur force en un point de la trajectoire (1).

2/ Tracer en ce même point le vecteur $q\vec{v}$. En déduire la direction et le sens du champ magnétique. Représenter le vecteur $\vec{B}$.

3/ Déterminer le signe de la charge de la particule (2).

4/ Les deux particules ont la même masse et des charges de même valeur absolue. Déterminer la particule qui a la plus grande vitesse.

7.6 A Dans une chambre à bulles, on a observé trois trajectoires.



1/ Déterminer le signe de la charge de chaque particule.

2/ Les particules ont des charges de même valeur absolue. Classer les particules suivant la norme de leur quantité de mouvement.

3/ Les particules ont en outre la même vitesse. Déterminer la particule qui a la masse la plus grande.

7.7 Des protons pénètrent dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ orthogonale à $\vec{B}$.

1/ A Pourquoi la norme de la vitesse des protons est-elle constante ?

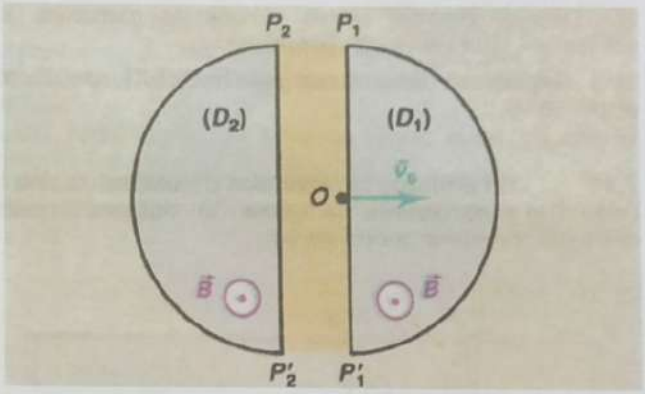
2/ A Montrer que la trajectoire est plane.

3/ A Montrer que la trajectoire est circulaire. Exprimer son rayon R en fonction de m, v_0, q et B.

4/ B3 L'énergie cinétique des protons est de 5 MeV et le rayon de la trajectoire est R = 120 cm. Calculer la quantité de mouvement et la vitesse d'un proton, ainsi que la norme de $\vec{B}$.

7.8 B3 Calculer le rayon de la trajectoire d'un électron animé d'une vitesse de 10^7 m . s $^{-1}$ et soumis à un champ magnétique uniforme de direction orthogonale au vecteur vitesse, d'intensité $B = 8 . 10^{-4}$ T. Calculer la fréquence de révolution et la période correspondante.

7.9 A A l'intérieur des deux dees D_1 et D_2 d'un cyclotron règne un champ magnétique uniforme (figure).



Une tension U est maintenue entre les parois $P_1P'_1$ et $P_2P'_2$; cette tension change de signe périodiquement. Des protons sont lancés à partir d'un point O dans la région D_1 avec un vecteur vitesse $\vec{v}_0$.

1/ Exprimer le rayon R_1 de la trajectoire des protons dans la région D_1, ainsi que la durée du trajet effectué.

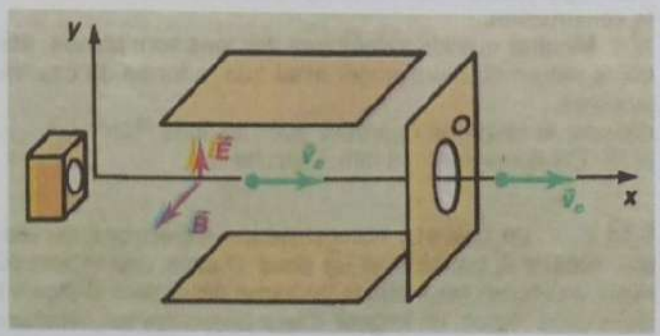
2/ Déterminer le vecteur vitesse $\vec{v}_1$ des protons lorsqu'ils sortent de la région D_1 en traversant la paroi $P_1P'_1$. Quel doit être alors le signe de la tension U pour accélérer les protons ? Avec quelle vitesse v_2 pénètrent-ils dans la région D_2 ?

3/ Exprimer le rayon R_2 de la trajectoire des protons dans la région D_2, ainsi que la durée du trajet effectué.

4/ Quel est le signe de la tension U lorsque les protons quittent la région D_2 en traversant la paroi $P_2P'_2$?
Calculer la période et la fréquence de la tension U, en négligeant la durée de transfert dans l'intervalle entre les deux dees.

5/ Soit R_D le rayon des dees. Calculer la vitesse et l'énergie cinétique maximales acquises par les protons.

7.10 Pour obtenir un faisceau homocinétique à l'entrée d'un spectromètre de masse, on place avant la chambre de déviation un sélecteur de vitesses (filtre de Wien). Ce filtre ne laissera passer par une ouverture O que les particules ayant une certaine vitesse v_0 et déviera les particules ayant une vitesse différente.



Scanné avec CamScanner

EXERCICES

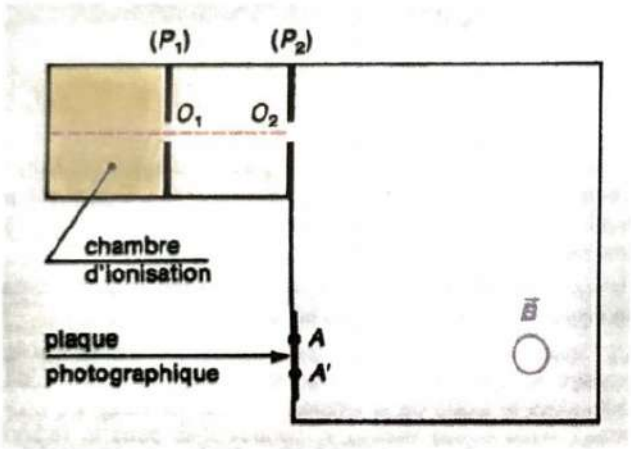
Le principe du filtre considéré est le suivant :
— des particules chargées positivement sont projetées dans l'appareil suivant l'axe des abscisses ;
— deux plaques parallèles distantes de d entre lesquelles existe une tension U produisent un champ électrique $\vec{E}$;
— dans toute la région où règne $\vec{E}$ existe un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ orthogonal à $\vec{E}$ et à l'axe des abscisses.

1/ A On observe que pour une certaine vitesse v_0 les particules ne sont pas déviées. Montrer que : $v_0 = \frac{E}{B}$.

2/ A Décrire comment seront déviées les particules de vitesse $v > v_0$ et celles de vitesse $v < v_0$.

3/ B3 Calculer v_0 dans le cas où $B = 0{,}10$ T, $d = 0{,}5$ cm et $U = 50$ V.

7.11 On envisage la séparation d'isotopes du zinc à l'aide d'un spectrographe de masse. On négligera le poids des ions devant les autres forces.



1/ Une chambre d'ionisation produit des ions $^{68}Zn^{2+}$ et $^{x}Zn^{2+}$, de masses respectives 68 u et x u. Ces ions sont ensuite accélérés dans le vide entre deux plaques métalliques parallèles P_1 et P_2. La tension accélératrice a pour valeur $U = 10^3$ V.
On négligera la vitesse des ions lorsqu'ils traversent la plaque P_1 en O_1.

a/ A Quelle est la plaque qui doit être portée au potentiel le plus élevé ?

b/ AB3 Calculer la vitesse v_0 des ions $^{68}Zn^{2+}$ lorsqu'ils sont en O_2.

c/ B3 Exprimer en fonction de x et de v_0 la vitesse v_0' des ions $^{x}Zn^{2+}$ en O_2.

2/ Les ions pénètrent ensuite dans une région où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ orthogonal au plan de la figure, d'intensité $B = 0{,}1$ T.

a/ A Indiquer sur un schéma le vecteur $\vec{B}$ pour que les ions $^{68}Zn^{2+}$ parviennent en A, et les ions $^{x}Zn^{2+}$ en A'. Justifier la construction.

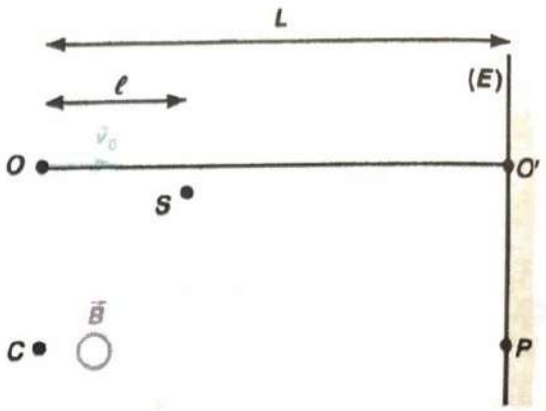
b/ A Montrer que les trajectoires des ions sont planes ; établir la nature du mouvement ainsi que la forme de ces trajectoires.
Calculer le rayon de courbure pour les ions $^{68}Zn^{2+}$.

c/ B3 On donne $AA' = 8$ mm. Calculer x.

7.12 A Un faisceau homocinétique d'électrons de vecteur vitesse $\vec{v}_0$ pénètre en un point O dans une région où règne un champ magnétique uniforme de vecteur $\vec{B}$ (figure). Dans cette région, de largeur ℓ, leur trajectoire est circulaire de centre C et de rayon :

$$R = \frac{mv_0}{eB}.$$

Les électrons sortent de cette région en un point S.



1/ Préciser l'orientation du vecteur $\vec{B}$

2/ On considère l'angle $\alpha = (\overrightarrow{CS}, \overrightarrow{CO})$. Montrer que :

$$\sin \alpha = \frac{\ell}{R}.$$

3/ Quelle est la nature du mouvement des électrons une fois sortis du champ magnétique ?

4/ Les électrons heurtent, en un point P, un écran situé à la distance $L = OO'$ du point O. En supposant L nettement supérieur à ℓ, donner une valeur approchée de $\tan \alpha$ en fonction de la déviation $D = O'P$ et de L.

5/ On suppose que l'angle α est petit. Exprimer alors la déviation D en fonction du rapport q/m et de la vitesse v_0.

Banc d'essais

Dans tous les exercices qui suivent, on prendra :
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C ; $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg ; $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg ;
$1\text{ u} = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg.

Particules chargées dans un champ magnétique

7.13 On considère un faisceau homocinétique d'électrons dans le vide, de vitesse $v = 10\,000$ km . s^{-1}. Ces électrons abordent une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme, de vecteur $\vec{B}$ orthogonal à $\vec{v}$ et d'intensité $B = 1{,}1 \cdot 10^{-3}$ T.

1/ A Déterminer les caractéristiques de la force $\vec{F}$ qui s'exerce sur les électrons. Faire un schéma où l'on indiquera les vecteurs $\vec{v}$, $\vec{B}$ et $\vec{F}$.

2/ AB3 Indiquer la nature du mouvement des électrons sous l'action de la force $\vec{F}$. Préciser le plan de la trajectoire et calculer son rayon R.
Calculer le temps T mis par les électrons pour faire un tour sur leur trajectoire.

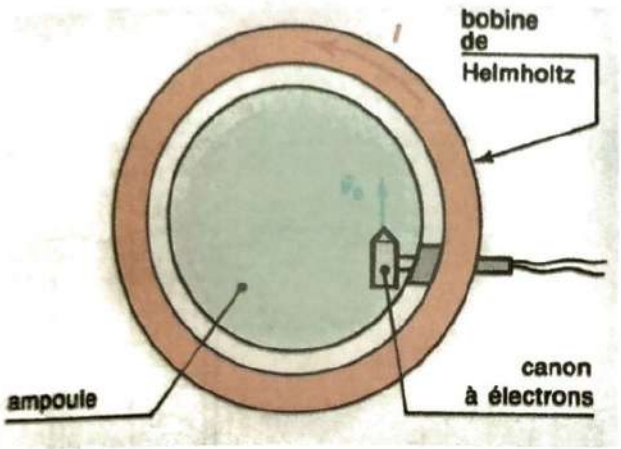
3/ B3C Déterminer la valeur v' de la vitesse pour que le rayon de la trajectoire devienne $R' = 8{,}0$ cm.

Scanné avec CamScanner

Calculer le temps T' mis par les électrons pour faire un tour sur la trajectoire de rayon R'. Justifier le résultat obtenu.

↳ **ex. 7.3, 7.5, 7.11, 7.12.**

7.14 On place un canon à électrons dans une ampoule contenant un gaz raréfié. Cette ampoule est placée entre deux bobines de Helmholtz qui créent un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ orthogonal au vecteur vitesse $\vec{v}_0$ des électrons. On observe un cercle de rayon $R = 2{,}7$ cm.



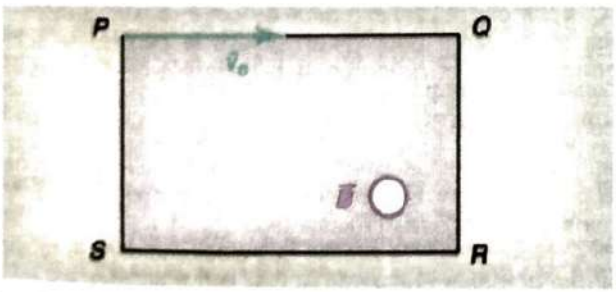
1/ A Quelle est la force responsable de ce mouvement? Donner les caractéristiques de cette force. Faire un schéma sur lequel on placera $\vec{v}_0$, $\vec{B}$, $\vec{F}$ et la trajectoire.
Calculer le rayon R de cette trajectoire.

2/ AB3 Calculer v_0 et la période du mouvement d'un électron. Cette période dépend-elle de v_0?

Donnée : $B = 1{,}25 \cdot 10^{-3}$ T.

↳ **ex. 7.3, 7.5, 7.11, 7.12.**

7.15 Des particules pénètrent dans un champ magnétique après avoir été accélérées par un champ électrique à partir d'une vitesse négligeable.



Dans le carré $PQRS$ de 5 cm de côté, le champ magnétique $\vec{B}$, orthogonal au plan du carré, est constant, d'intensité $2{,}5 \cdot 10^{-1}$ T. A la sortie du champ électrique, les particules entrent en P dans le champ magnétique avec un vecteur vitesse $\vec{v}_0$ colinéaire à $\overrightarrow{PQ}$ (figure).

1/ A Les particules sont des deutons (noyaux de deutérium, isotope de l'hydrogène de formule ^2_1H, et notés D^+). Préciser le sens de $\vec{B}$ pour que les particules parviennent en S. Déterminer la trajectoire des particules entre P et S, et les caractéristiques de leur vecteur vitesse en S.

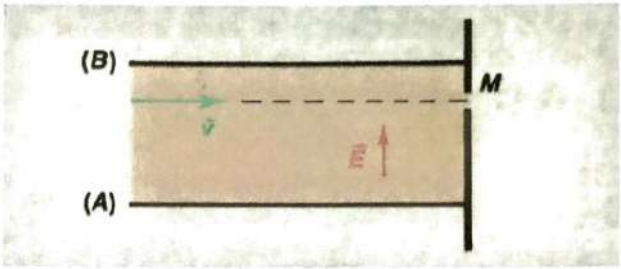
2/ BC3 On injecte maintenant un faisceau de particules α (He^{2+}_2). Déterminer le vecteur vitesse d'injection $\vec{v}_1$ en P dans le champ magnétique pour que les particules α parviennent en R. Préciser les caractéristiques de leur vecteur vitesse en ce point et trouver la tension accélératrice U nécessaire pour obtenir $\vec{v}_1$.

Données : $m_0 \approx 3{,}32 \cdot 10^{-27}$ kg ; $m_\alpha = 6{,}64 \cdot 10^{-27}$ kg.

↳ **ex. 7.5, 7.7.**

Filtre de vitesse

7.16 AB3 Un faisceau de particules électrisées positivement pénètre avec un vecteur vitesse $\vec{v}$ horizontal entre deux plaques conductrices A et B, parallèles, horizontales, distantes de d. On établit entre les plaques une tension U telle que le champ électrostatique $\vec{E}$ soit orienté vers le haut.
Dans cette région de l'espace règne aussi un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ orthogonal à $\vec{v}$.



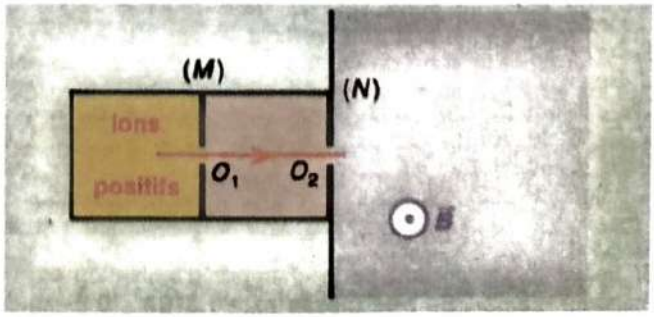
1/ Déterminer à quelle condition le faisceau de particules traverse le dispositif en ligne droite (ce qui lui permet d'atteindre l'orifice M). Le vecteur champ électrostatique $\vec{E}$ ayant la direction et le sens indiqués sur le schéma, préciser le vecteur $\vec{B}$ satisfaisant à cette condition et le représenter. Calculer $\vec{v}_0$ lorsque $B = 0{,}1$ T et $E = 10^4$ V . m^{-1}.

2/ Le faisceau n'est plus constitué de particules identiques, mais par des ions hélium $^4_2He^{2+}$ et $^3_2He^{2+}$, de masses respectives $6{,}6 \cdot 10^{-27}$ kg et $5{,}0 \cdot 10^{-27}$ kg, préalablement accélérés à partir d'une vitesse nulle par une même tension U_0. Le champ magnétique ayant toujours pour intensité $B = 0{,}1$ T, montrer qu'en choisissant convenablement U on peut recueillir en M l'un ou l'autre des isotopes.
Soit $U_1 = 100$ V la valeur de U qui permet de recueillir en M les ions $^4_2He^{2+}$. Déterminer la valeur U_2 de U qui permet de recueillir les ions $^3_2He^{2+}$.

↳ **ex. 7.5, 7.10.**

Spectrographe de masse

7.17 La figure illustre le principe du spectromètre de Dempster. Un dispositif non représenté produit des ions $^6_3Li^+$ et des ions $^7_3Li^+$ qui sont injectés en O_1 avec une vitesse négligeable. L'expérience se déroule dans le vide. On négligera le poids des particules devant les autres forces, et on appliquera les lois de la mécanique classique.



EXERCICES

1/ Les ions sont d'abord accélérés entre les plaques M et N par une tension $u_{MN} = U$.

a/ A Quel doit être le signe de cette tension ?

b/ AB3 Exprimer la vitesse v des ions $^6_3Li^+$ lorsqu'ils traversent la plaque N par l'ouverture O_2, en fonction de leur masse m, de leur charge q et de la tension U.

En déduire l'expression de la vitesse des ions $^7_3Li^+$ au même endroit, en fonction de leur masse m', de leur charge q et de la tension U.

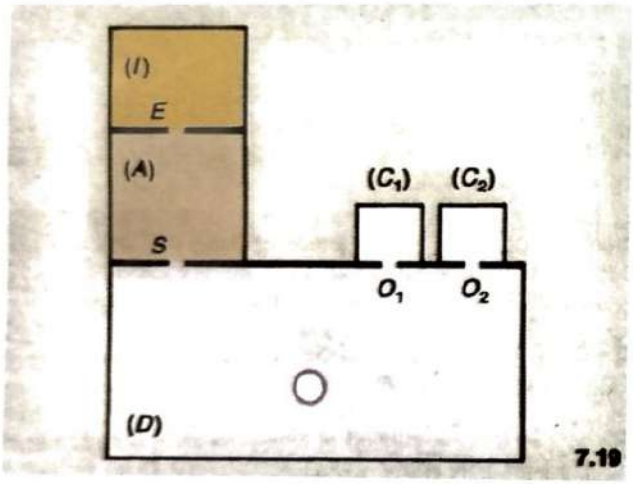
Calculer le rapport v'/v littéralement, puis numériquement, sachant que les masses molaires des ions $^6_3Li^+$ et $^7_3Li^+$ sont respectivement 6 g.mol^{-1} et 7 g.mol^{-1}. Comparer les énergies cinétiques des deux sortes d'ions en O_2.

2/ AB3 Les ions pénètrent ensuite dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ orthogonal au plan de la figure. Montrer que le mouvement des ions est circulaire uniforme.

Exprimer le rayon R de la trajectoire de l'ion $^6_3Li^+$ en fonction des caractéristiques de la particule, du champ magnétique et de la vitesse. Calculer de même le rayon R' de la trajectoire de l'ion $^7_3Li^+$ ainsi que le rapport R'/R.

↳ **ex. 7.7, 7.11.**

7.18 La figure représente une coupe horizontale, vue de dessus, d'un spectrographe de masse.



7.18

1/ A Des ions de masse m et de charge $q < 0$ sont produits dans la chambre d'ionisation I avec une vitesse négligeable. Ils entrent en E dans l'enceinte A, sous vide, où ils sont accélérés, et ils ressortent en S. Les orifices E et S sont pratiquement ponctuels. On note U_0 la différence de potentiel accélératrice. La vitesse des ions reste suffisamment faible pour que les lois de la mécanique classique s'appliquent.

Exprimer la norme du vecteur vitesse d'un ion à sa sortie en S, en fonction de m, q et U_0.

2/ A A leur sortie en S, les ions pénètrent dans une seconde enceinte sous vide D, dans laquelle règne un champ magnétique uniforme vertical.

a/ Déterminer le sens du vecteur champ magnétique pour que les ions puissent atteindre le point O_1 ou le point O_2.

b/ En S, le vecteur vitesse des ions est orthogonal à la droite passant par les points O_1, O_2 et S. Montrer que la trajectoire d'un ion dans l'enceinte D est plane et que la vitesse est constante. Prouver que la trajectoire est un cercle dont on déterminera le rayon.

3/ Le jet d'ions sortant de la chambre d'ionisation est un mélange d'ions $^{79}Br^-$, de masse $m_1 = 1{,}3104 \cdot 10^{-25}$ kg, et d'ions $^{81}Br^-$, de masse $m_2 = 1{,}3436 \cdot 10^{-25}$ kg.

a/ A Déterminer le collecteur C_1 ou C_2 qui reçoit les ions de masse m_1.

b/ AB3 Calculer la distance entre les entrées O_1 et O_2 des deux collecteurs.

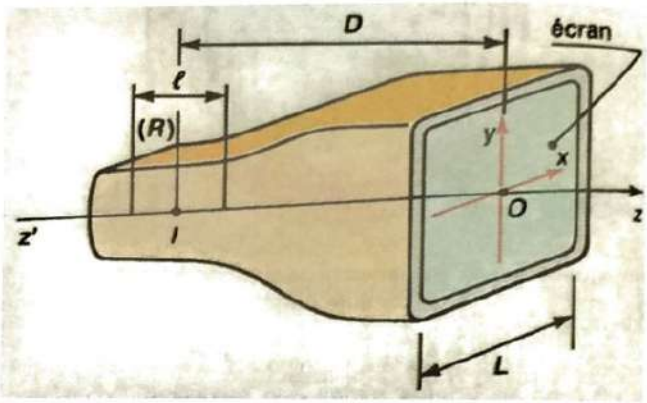
c/ C Les quantités d'électricité reçues en une minute par les collecteurs C_1 et C_2 sont respectivement $q_1 = -6{,}60 \cdot 10^{-8}$ C et $q_2 = -1{,}95 \cdot 10^{-8}$ C. Déterminer la composition du mélange d'ions.

Données : $|U_0| = 4{,}00 \cdot 10^3$ V ; $B = 1{,}00 \cdot 10^{-1}$ T.

↳ **ex. 7.7, 7.11.**

Déflexion magnétique

7.19 Dans cet exercice, les électrons se déplacent dans le vide ; leur poids a un effet négligeable.



1/ AB3 Dans un téléviseur, les électrons sont accélérés à partir du repos par une tension $U = 500$ V. Calculer l'énergie cinétique qu'ils ont acquise ainsi que leur vitesse.

2/ On se propose d'étudier le balayage horizontal de l'écran du récepteur, obtenu grâce à un champ magnétique $\vec{B}$ variable au cours du temps, appliqué sur les électrons après la phase accélératrice. Ce champ magnétique est uniforme, de grandeur B, dans une région $\mathcal{R}$ de l'espace qui s'étend sur une distance ℓ le long de l'axe horizontal $(O, \vec{k})$; il est nul à l'extérieur de cette région. Sa variation est assez lente pour qu'on puisse le considérer comme constant pendant la durée de la traversée de $\mathcal{R}$ par un électron. En l'absence de champ, le faisceau d'électrons est confondu avec l'axe $(O, \vec{k})$, et le spot est en O.

a/ A Déterminer la direction et le sens qu'il faut donner à $\vec{B}$ pour déplacer le spot sur l'axe horizontal $(O, \vec{i})$ dans le sens des abscisses croissantes.

b/ A Montrer que la vitesse des électrons dans la région $\mathcal{R}$ a une grandeur constante et que leur trajectoire est un arc de cercle. Exprimer le rayon R du cercle en fonction de e, m, B et de la vitesse v des électrons.

c/ AB3 Montrer que la trajectoire des électrons à la sortie de la région $\mathcal{R}$ est portée par une droite qui fait avec l'axe $(O, \vec{k})$ un angle α tel que :

$$\sin \alpha = \frac{\ell}{R}.$$

d/ B3C On admet que la droite passe par un point fixe I de l'axe $(O, \vec{k})$, situé à la distance D de O. Calculer la valeur de B pour que le spot atteigne le bord de l'écran.

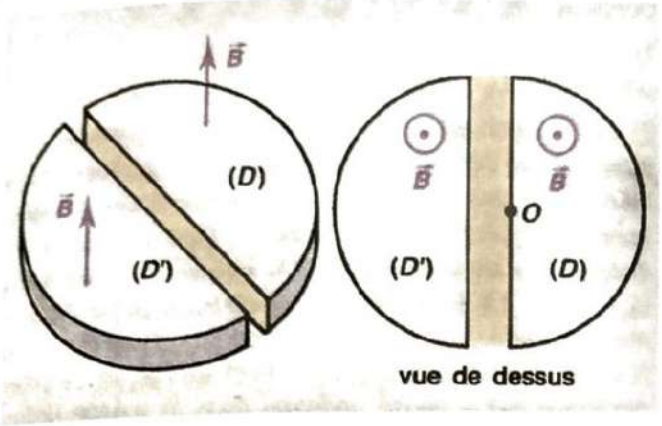
Données : $D = 20$ cm ; $\ell = 2$ cm ; largeur de l'écran $L = 50$ cm.

↳ **cours 7.5.1, ex. 7.12.**

Scanné avec CamScanner

Cyclotron

Un cyclotron est constitué par deux boîtes demi-cylindriques D et D' à l'intérieur desquelles on établit un champ magnétique de vecteur $\vec{B}$. Dans l'espace compris entre ces boîtes, on établit une tension alternative U_{DD} de valeur maximale U. Des ions positifs de charge q et de masse m sont injectés en O avec une vitesse négligeable mais non nulle.



1/ A La tension U_{DD} est positive.

a/ B3 Exprimer l'énergie cinétique E_c et la vitesse v de ces ions à leur première arrivée en D'. On suppose que les ions sont soumis au champ électrique d'intensité maximale.

Application numérique :

$q = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ C ; $m = 0{,}33 \cdot 10^{-26}$ kg ; $U = 10^5$ V.

b/ AB3 Ces ions pénètrent alors dans D'. Quel est leur mouvement ultérieur ? Exprimer le rayon R de leur trajectoire en fonction de B, q, U et m.

Application numérique : $\|\vec{B}\| = 1$ T.

2/ C Les ions ressortent de D'. On inverse la tension U_{DD} en conservant la valeur de U.

Établir les expressions littérales :

a/ de leur vitesse et de leur énergie cinétique ;

b/ du rayon de leur trajectoire dans D.

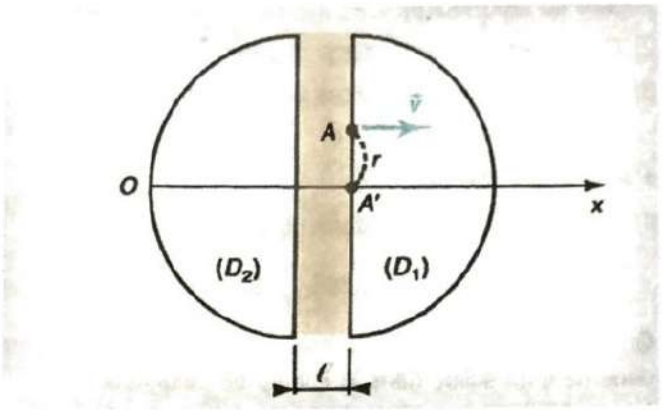
Plus généralement, exprimer le rayon de la trajectoire des ions en fonction de R et du nombre n de passages entre D et D'

3/ B3C Le rayon du cyclotron étant de 49,5 cm, calculer le nombre total de tours décrits par ces ions et leur énergie cinétique (en eV) à leur sortie.

↳ **ex. 7.9.**

7.21 On considère un cyclotron constitué de deux demi-cylindres D_1 et D_2, séparés par une distance ℓ très petite devant leur diamètre. L'ensemble est placé dans le vide. Un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ orthogonal au plan de la figure est créé dans D_1 et D_2. On introduit un faisceau homocinétique d'ions Al^{3+} en un point A situé à la distance r de l'axe de symétrie $(O, \vec{i})$ du dispositif, avec une vitesse $\vec{v}$ orthogonale à $\vec{B}$ et aux bords rectilignes des demi-cylindres.

On admettra que les vitesses restent suffisamment faibles pour que les lois de la mécanique classique s'appliquent. On négligera le poids des ions devant la force magnétique qu'ils subissent.



1/ AB3 Montrer qu'à l'intérieur d'un demi-cylindre le mouvement des ions est circulaire et uniforme.

Déterminer le sens et l'intensité du champ magnétique $\vec{B}$ pour que le faisceau d'ions pénétrant en A dans D_1 en ressorte au point A' symétrique de A par rapport à l'axe $(O, \vec{i})$.

Application numérique : $r = 4 \cdot 10^{-2}$ m ; $v = 5 \cdot 10^4$ m.s^{-1} ; masse d'une mole d'ions Al^{3+} : 27 g ; constante d'Avogadro : $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}.

2/ On applique entre D_1 et D_2 une tension U de telle sorte que l'ion, lorsqu'il traverse l'espace situé entre D_1 et D_2, subisse une accélération. Le champ électrique ainsi produit n'existe que dans l'espace entre les deux demi-cylindres.

a/ AB3 Calculer littéralement, puis numériquement, la durée T d'un demi-tour. Montrer qu'elle ne dépend pas de la vitesse, donc qu'elle n'est pas modifiée par la présence du champ électrique accélérateur.

b/ C La tension appliquée est alternative de fréquence f, ce qui permet d'accélérer les ions à chaque passage. On néglige le temps de transfert dans l'intervalle entre les deux demi-cylindres. Exprimer en fonction de T les valeurs de f qui permettent cette accélération.

Application numérique : calculer la plus petite valeur de f.

3/ AB3 La tension étant en place, un orifice permet aux ions de sortir quand le rayon de la trajectoire est $r' = 4$ m. Calculer alors la vitesse de ces ions.

↳ **ex. 7.9.**

Scanné avec CamScanner

PARTICULES DANS $\vec{E}$ ET $\vec{B}$

Conseils de résolution

Particules dans $\vec{E}$

Le problème est avant tout un problème de mécanique. Il est conseillé :

1/ De définir le repère associé au solide de référence (repère du laboratoire).

2/ De choisir comme système la particule.

3/ De faire le bilan des forces extérieures appliquées :

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{P} = m\vec{g}.$$

$\vec{P}$ est négligeable devant $\vec{F}$.

4/ D'écrire la relation fondamentale de la dynamique :

$$m\vec{a} = q\vec{E}, \quad \text{soit :} \quad \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}.$$

On obtient une équation du même type que pour le centre d'inertie d'un solide dans le champ de pesanteur.
Nous obtenons par intégration :

$$\vec{v} = \frac{q}{m}\vec{E}t + \vec{v}_0$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{q}{2m}\vec{E}t^2 + \vec{v}_0 t + \overrightarrow{OM}_0.$$

On peut projeter ces relations dans un repère orthonormal pour obtenir les équations paramétriques de la vitesse et du vecteur position de la particule $(x(t), y(t), z(t))$.
Par élimination du temps t, on obtient les équations cartésiennes.

Remarque 1. La trajectoire est parabolique si le vecteur $\vec{v}(0)$ n'est pas colinéaire à $\vec{E}$.

Remarque 2. La déviation du faisceau à la sortie du champ se calcule de manière très précise (tangente à la trajectoire).

Particules dans $\vec{B}$

On suivra la méthode indiquée ci-dessus et on aboutira à la relation :

$$m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B}.$$

Pour étudier le mouvement, il faut montrer que la norme de la vitesse est constante, égale à celle de la vitesse initiale. Puis, lorsque la vitesse initiale $\vec{v}_0$ est orthogonale au champ $\vec{B}$, on en déduit que la trajectoire est plane.
Le choix, comme repère de projection, du repère de Frenet lié à la particule permet de conclure que le mouvement est circulaire, uniforme, de rayon :

$$R = \frac{mv}{|q|B}.$$

On recommande donc de bien suivre la démonstration du cours.

Remarque. Le calcul de la déviation est délicat, sauf si celle-ci est faible.

Problème résolu 1

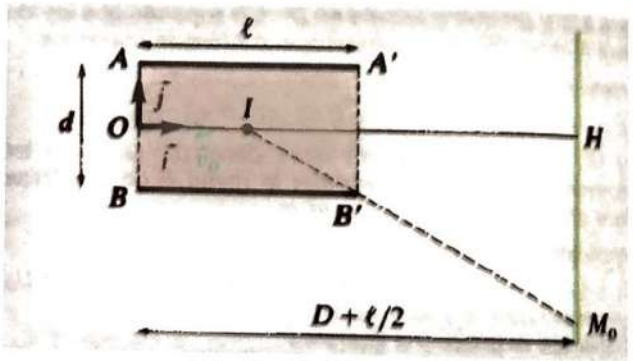
Particules chargées dans un champ électrique uniforme

Dans tout le problème, on négligera l'action de la pesanteur.

Données : $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg ; $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C.

1/ *Un électron émis sans vitesse initiale est accéléré par une tension $U_0 = 500$ V. Quelle vitesse v_0 atteint-il ?*

2/ *Cet électron arrive en O, à la vitesse $\vec{v}_0$, entre les armatures AA' et BB' d'un condensateur plan. Le point O est à mi-distance des armatures et le vecteur $\vec{v}_0$ est parallèle à celles-ci (figure). Ces armatures ont pour longueur ℓ et la distance qui les sépare est d. On leur applique une tension $u_{BA} = U = 0$. Un écran fluorescent est placé perpendiculairement aux armatures, à une distance $D = \ell/2$ de O. Le point H est la projection orthogonale de O sur l'écran. Le champ électrique est supposé uniforme dans le volume délimité par les deux plaques.*



a/ *Déterminer la position du point d'impact M de l'électron sur l'écran. On exprimera HM en fonction de U_0, U, ℓ, d et D.*

A.N. $U_0 = 500$ V ; $\ell = 4$ cm ; $d = 2$ cm ; $D = 50$ cm.

b/ *On peut régler la tension U. Comment doit-on la choisir pour que l'électron sorte effectivement du condensateur sans être intercepté par l'une des armatures ?*

3/ *La tension U est à nouveau fixée à 50 V ; le vecteur vitesse $\vec{v}_0$ est à présent incliné sur l'horizontale d'un angle α et dirigé vers le haut. Calculer la valeur de α pour que l'électron émerge du condensateur parallèlement à OH.*

1/ Énoncer le théorème de l'énergie cinétique (voir cours).
Appliquons le théorème de l'énergie cinétique en admettant que la seule force qui intervient est la force électrique (on néglige la pesanteur) :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = |e|U_0 ;$$

$$v_0 = 1.3 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

A1 2 Énonce du théorème
B2 1 Qualité du français
B3 1 Calcul

Scanné avec CamScanner

2a/ Question classique. Le champ électrique est dirigé vers le haut : la déviation est donc vers le bas et la position de M, en dessous de H, est donnée par :

$$HM = \frac{e}{mv_0^2} E\ell D,$$

soit : $$HM = \frac{U}{2U_0}\frac{\ell}{d} D.$$

Numériquement : $HM = 5$ cm.

b/ La droite portant la trajectoire de l'électron sorti du condensateur coupe la droite OH en I situé au milieu du condensateur. Un électron qui effleure en B' l'armature inférieure frappe l'écran en M_0.

Considérons l'angle $\beta = \widehat{HIM_0}$:

$$\tan\beta = \frac{\frac{d}{2}}{\frac{\ell}{2}} = \frac{HM_0}{D}, \text{ d'où : } HM_0 = \frac{d}{\ell} D.$$

La déviation HM est limitée par HM_0, autrement dit : $HM \leqslant HM_0$; d'où :

$$\frac{U\ell D}{2U_0 d} < \frac{dD}{\ell}, \text{ soit : } \frac{U}{U_0} \leq 2\frac{d^2}{\ell^2},$$

$$U \leqslant 2\frac{d^2}{\ell^2} U_0.$$

Numériquement : $U \leqslant 250$ V.

3/ Le champ $\vec{E}$ est dirigé suivant $\vec{j}$:

$$\vec{E} = E\vec{j}, \text{ avec : } E = |\vec{E}|,$$

et : $$\vec{F} = -eE\vec{j} = -\frac{eU}{d}\vec{j}.$$

Établissons les équations horaires du mouvement :

$$m\vec{a} = -e\vec{E}, \quad \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = \dfrac{-eU}{md} \end{cases}.$$

Par intégration :

$$\dot{x} = v_0 \cos\alpha ; \; x = v_0(\cos\alpha)\, t$$

et : $$\dot{y} = \frac{-eU}{md} t + v_0 \sin\alpha ;$$

$$y = \frac{-eU}{2md} t^2 + v_0(\sin\alpha)\, t.$$

D'où :

$$y = -\frac{U}{4dU_0}\frac{x^2}{\cos^2\alpha} + x\tan\alpha.$$

C1 3 Organiser les étapes de la résolution (application du théorème fondamental et projection des équations)

A2 2 Savoir-faire théorique

B2 1 Qualité du français.

B3 2 Calcul numérique et outil mathématique

A2 1 Savoir-faire théorique

B3 1 Valeur numérique

C2 3 2 pts organiser les étapes de la résolution.
1 pt porter un jugement critique sur les 2 valeurs de α.

L'électron émerge parallèlement à OH si, pour $x = \ell$, la vitesse est parallèle à OH, donc :

$$\dot{y}_{x=\ell} = 0.$$

On en déduit, d'après (1) et (2) :

$$t = \frac{\ell}{v_0 \cos\alpha} \quad \text{et} \quad t = \frac{v_0 \sin\alpha\, md}{eU},$$

donc : $$\frac{\ell}{v_0\cos\alpha} = \frac{v_0 \sin\alpha\, md}{eU}$$

$$\frac{\ell eU}{mv_0^2 d} = \cos\alpha \sin\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}.$$

Or : $$\frac{1}{2}mv_0^2 = eU_0 ;$$

donc : $$\sin 2\alpha = \frac{\ell U}{dU_0}.$$

Il existe deux solutions : α_1 et $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1$.

Numériquement :

$$\alpha_1 \approx 5{,}8° \quad \text{et} \quad \alpha_2 \approx 84{,}2°.$$

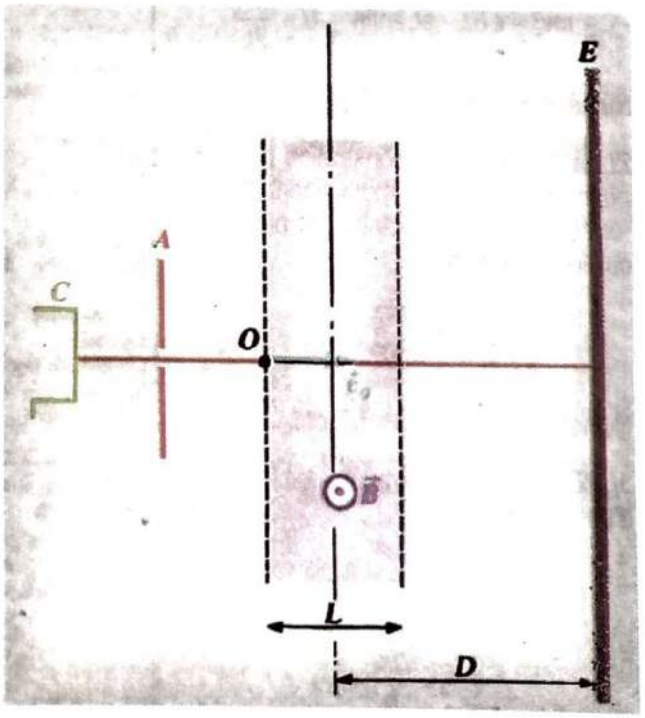
Pour $\alpha_1 \approx 5{,}8°$, l'ordonnée de sortie, 0,2 cm, convient.

Pour $\alpha_2 = 84{,}2°$, l'ordonnée de sortie, 19,8 cm, ne convient pas : l'électron est capté par la plaque AA'.

B3 3 2 pts outil mathématique pour le calcul de α :
1 pt application numérique

Problème résolu 2

Dans un tube cathodique, des électrons sont émis sans vitesse initiale par une cathode C, puis accélérés par l'anode A ; ils pénètrent en O avec une vitesse horizontale $\vec{v}_0$ dans un champ magnétique $\vec{B}$, orthogonal au plan de la figure. Le champ $\vec{B}$ n'existe que sur une zone de longueur L.



Scanné avec CamScanner

1/ *Calculer la tension accélératrice $u_{AC} = U$ entre l'anode et la cathode.*

Données :

$$v_0 = 10^7 \text{ m.s}^{-1};$$
$$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31} \text{ kg};$$
$$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ C}.$$

On appliquera les lois de la mécanique newtonienne.

2/ *Étudier la nature du mouvement d'un électron dans le champ magnétique et calculer la grandeur caractéristique de la trajectoire, sachant que* $B = 10^{-3}$ T.

3/ *Un écran E, placé à une distance* $D = 50$ cm *de O, reçoit le faisceau d'électrons. Calculer la déviation sur l'écran du faisceau d'électrons provoquée par le champ magnétique sachant que la longueur* $L = 1$ cm *est très inférieure à D.*

4/ *Dans l'espace de longueur* $L = 1$ cm, *on fait agir simultanément le champ magnétique précédent et un champ électrique* $\vec{E}$ *afin de ne plus observer de déviation sur l'écran (mouvement rectiligne).*
Calculer l'intensité du champ électrique ; représenter sur un schéma les vecteurs $\vec{E}$, $\vec{B}$ *et les forces appliquées à l'électron.*

1/ Appliquons le théorème de l'énergie cinétique à l'électron :

$$\frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{1}{2}mv_C^2 = W_{C\to A}(\vec{F}) = qu_{CA}.$$

Or $v_C = 0$, $v_A = v_0$ et $q = -e < 0$.

D'où :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = -eu_{CA} = eu_{AC}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = eU, \quad \text{et enfin} \quad U = \frac{mv_0^2}{2e}.$$

Numériquement : $U = 284$ V.

2/ Bien revoir la démonstration du cours pour conclure que le mouvement est uniforme et que la trajectoire est plane, circulaire, de rayon :

$$R = \frac{mv_0}{eB}.$$

Numériquement : $R = 5{,}7$ cm.

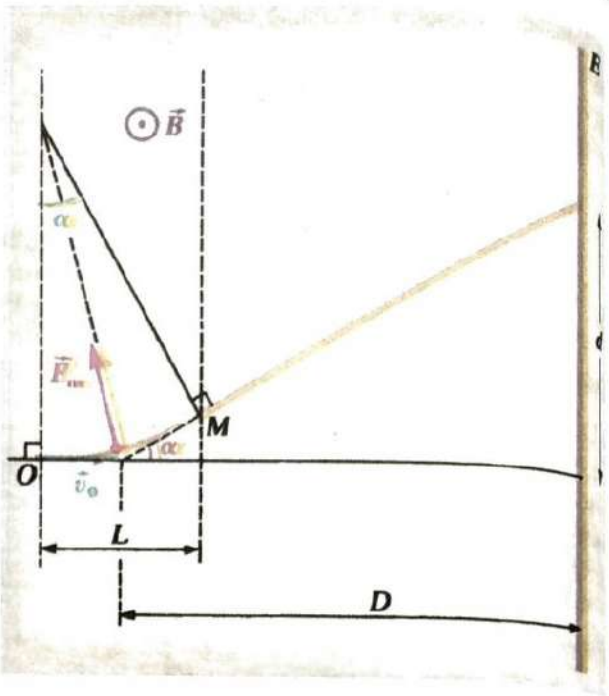
3/ Pour la démonstration, on s'aidera d'un dessin.

$$\alpha = \frac{OM}{R}.$$

A1.2 Enonce du theoreme de l'energie cinetique
B3.2.1 pt deroulement du calcul.
1 pt valeur numerique

C1.4 organiser les etapes de la resolution
1 pt vitesse constante.
1 pt trajectoire plane.
2 pts calcul de R
B2.1 Utilisation du français
A2.2 Savoir-faire theorique (Utilisation du repere de Frenet)
B3.2 Application numerique

B4.2 Utilisation d un schema explicite



Si α est petit : $\alpha \approx \frac{L}{R}$.

La déviation d sur l'écran E vaut :

$$d \approx \alpha D = \frac{|q|B}{mv_0} LD.$$

Numériquement : $d = 8{,}8$ cm.

4/ Les forces appliquées à l'électron doivent se compenser :

$$\vec{F}_e + \vec{F}_m = \vec{0}$$

avec : $\vec{F}_e = q\vec{E}$.

La force $\vec{F}_e$ doit être dirigée vers le bas, donc $\vec{E}$ vers le haut ($q < 0$).

Le mouvement de l'électron est rectiligne uniforme de vitesse $\vec{v}_0$. Ainsi :

$$|q|E = |q|v_0B,$$
$$E = v_0B.$$

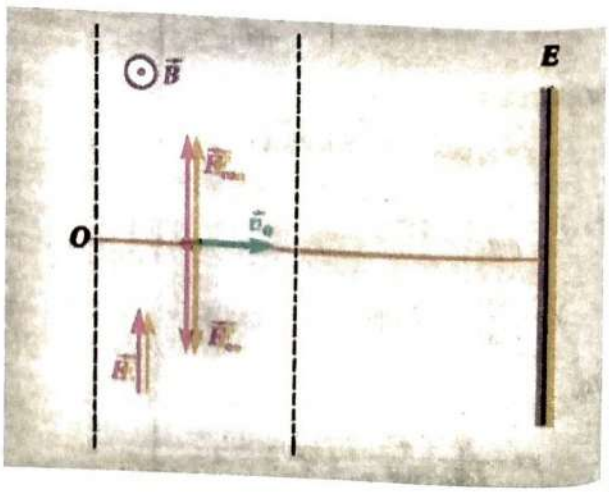
Numériquement : $E = 10^4$ V.m^{-1}.

C2.1 Savoir-faire theorique pour le calcul de α et d

B3.1 Application numerique

A2.1 Savoir-faire theorique (mouvement rectiligne uniforme si $\sum \vec{F} = \vec{0}$).

B3.1 Calcul du champ
B4.1 Utilisation d un schema explicite montrant la direction des forces



Scanné avec CamScanner

Problème résolu 3

On observe la trajectoire d'un faisceau d'électrons dans une ampoule contenant un gaz sous faible pression. Cette ampoule est placée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ horizontal créé par deux bobines de Helmholtz parcourues par un courant d'intensité I.
Le faisceau est issu d'un « canon à électrons » dans lequel les électrons accélérés sous une tension U acquièrent un vecteur vitesse $\vec{v}_0$ vertical.
Sous l'action du champ $\vec{B}$, les électrons décrivent un cercle. Ce cercle peut être photographié, et son rayon mesuré. On fait plusieurs expériences et on note :

	1re expérience	2e expérience	3e expérience
$I_{(A)}$	1,2	1,3	2,1
$U_{(V)}$	150	350	600
$R_{(cm)}$	4,6	6,5	5,2

1/ Quel est le rôle du gaz sous faible pression dans l'ampoule ? Que se passerait-il si on réalisait un vide très poussé dans l'ampoule ?

2/ Quelle est la condition portant sur la direction du vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$ pour que la trajectoire soit un cercle ?

3/ Rappeler la formule donnant le rayon R de la trajectoire en fonction de e, m, B et v_0. On justifiera que le mouvement est uniforme.

4/ Sachant que la norme B du champ magnétique est proportionnelle à l'intensité I du courant circulant dans les bobines d'Helmholtz, montrer que les résultats de l'expérience sont conformes à ce que l'on peut attendre de la théorie. Sur quelle grandeur, la précision de la mesure est-elle la plus petite ?

On doit donc vérifier pour les 3 expériences ce résultat.

	1re expérience	2e expérience	3e expérience
$RI/\sqrt{U}$	0,4507	0,4516	0,4458

Aux erreurs de mesure près, nous pouvons donc admettre que les résultats de l'expérience sont conformes à ceux prévus par la théorie.
La principale erreur provient de la mesure du rayon du cercle. En effet, la tension et l'intensité du courant peuvent être mesurées avec une bonne précision avec des appareils de qualité. En revanche, la mesure du rayon est délicate.

1/ Il permet de visualiser la trajectoire des électrons. Dans un vide très poussé, la trajectoire serait invisible.

2/ La vitesse initiale $\vec{v}_0$ doit être perpendiculaire au champ magnétique $\vec{B}$. La force qui s'exerce sur les électrons doit être centripète.

3/ La trajectoire est décrite à vitesse constante ($v = v_0$) : la puissance de la force de Lorentz est nulle ; l'énergie cinétique des particules reste donc constante (théorème de l'énergie cinétique).

$$p = mv_0 = e\,RB; \quad R = \frac{mv_0}{e\,B}. \quad (1)$$

4/ B est proportionnel à l'intensité I :

$$B = kI.$$

L'énergie cinétique des électrons $\left(\frac{1}{2}\,mv_0^2\right)$ est proportionnelle à la tension d'accélération :

$$\frac{1}{2}\,mv_0^2 = e\,U.$$

La vitesse v_0 est donc proportionnelle à $\sqrt{U}$: $v_0 = k'\sqrt{U}$.

En reportant B et v_0 dans la formule (1), il vient :

$$\frac{RI}{\sqrt{U}} = \frac{mk'}{ek} = Cte.$$

A2 3 Connaissance du cours
B2 1 Qualite du francais

B4 3 Schema representant la force de Lorentz

A1 2 Enonce du theoreme de l energie cinetique

A2b 2 Savoir-faire theorique

C1 4 Choix du raisonnement pour verifier l accord de la theorie avec l experience

B2 3 Qualite du français

B3 1 Calcul numerique

Scanné avec CamScanner

8 LOI DE LAPLACE

Au chapitre 6, nous avons vu qu'un champ magnétique peut exercer des forces sur des porteurs de charge en mouvement. Le courant électrique dans un conducteur métallique consistant en un déplacement d'ensemble d'électrons, un champ magnétique est donc susceptible d'exercer des forces sur un conducteur parcouru par un courant : ce sont les forces dites *de Laplace*, que nous allons étudier.

8.1 étude expérimentale

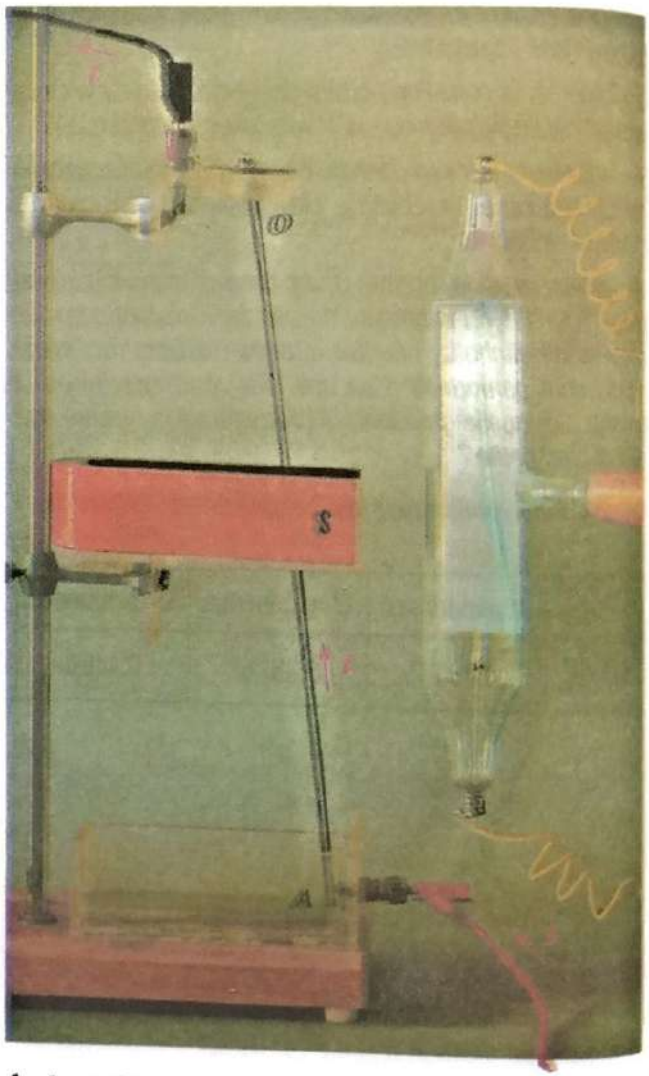
Réalisons l'expérience de la photographie 1.

Faisons passer un courant intense dans la tige conductrice mobile *OA* située dans un champ magnétique : la tige se déplace dans un plan perpendiculaire aux lignes de champ.
Inversons le sens du courant : le déplacement se fait toujours dans le même plan, mais en sens inverse.
Permutons les pôles de l'aimant : le déplacement change de sens.
Inclinons l'aimant : la déviation est moins importante; elle s'annule lorsque le fil est parallèle aux lignes de champ.

D'autres expériences, comme celle des rails de Laplace (*photo* 2), permettent de préciser les caractéristiques de la force d'origine électromagnétique qui s'exerce sur une portion rectiligne d'un conducteur plongée dans un champ magnétique $\vec{B}$:

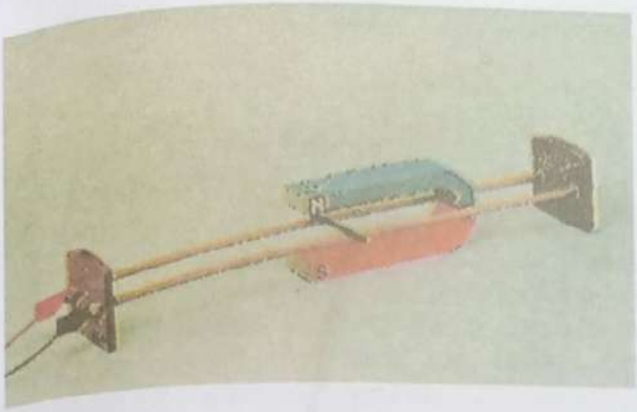
- La *direction* de la force est orthogonale au plan défini par $\vec{B}$ et la portion de conducteur.
- Le *sens* dépend du sens du courant et de celui de $\vec{B}$. Il est conforme à la règle du bonhomme d'Ampère; si un observateur placé le long du fil, le courant entrant par ses pieds, regarde dans le sens des lignes de champ, alors *la force électromagnétique est dirigée vers sa gauche* (*fig.* 3).

Remarque : En fait, chaque petit élément du conducteur est soumis à une force électromagnétique, l'ensemble de ces forces étant équivalent à la force unique que nous venons de définir.



1. ***Le conducteur rectiligne OA peut pivoter autour d'un axe qui passe par O; son extrémité A est plongée dans du mercure. Lorsque le courant circule dans le sens indiqué, le conducteur, sous l'influence du champ magnétique créé par l'aimant, est dévié dans le même sens que le faisceau d'électrons du tube de Crookes.***

Scanné avec CamScanner



2. *Expérience des rails de Laplace. Un conducteur est posé sur deux rails dans l'entrefer d'un aimant en U. Lorsqu'un courant circule, ce conducteur est mis en mouvement par l'action du champ magnétique.*



3. *Le sens de la force électromagnétique exercée par le champ $\vec{B}$ sur la portion CD du conducteur est donné par la règle du bonhomme d'Ampère.*

8.2 loi de Laplace

Cette loi s'énonce ainsi :

• Une portion rectiligne d'un conducteur, de longueur ℓ, parcourue par un courant d'intensité I et placée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, est soumise à une force électromagnétique $\vec{F}$ appliquée en son milieu et donnée par la relation :

$$\vec{F} = I\vec{\ell} \wedge \vec{B},$$

le sens du vecteur $\vec{\ell}$ étant celui du courant.

La force de Laplace a donc les caractéristiques suivantes :

• **direction** : $\vec{F}$ est toujours orthogonale au plan formé par le conducteur et le champ (*fig.* 4);

• **sens** : il est conforme à la règle du bonhomme d'Ampère. Nous dirons également que le trièdre $(\vec{\ell}, \vec{B}, \vec{F})$ est *direct* (*fig.* 5).

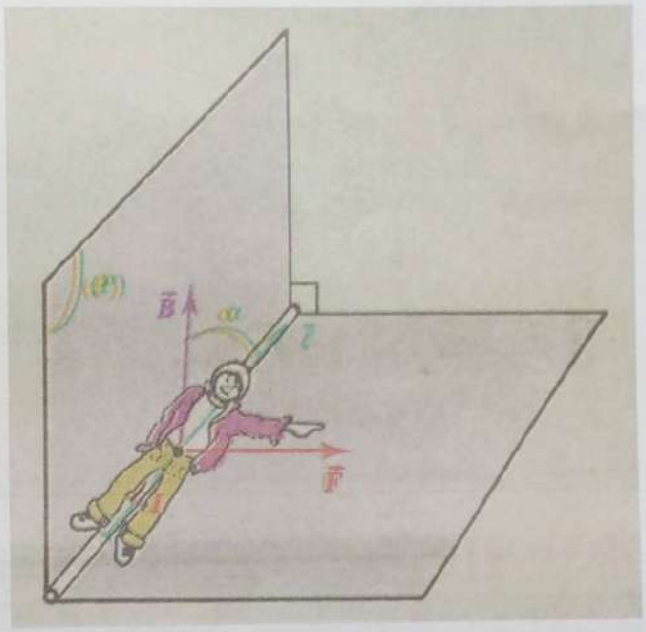
• **intensité** : si α est l'angle non orienté formé par les directions du conducteur et du champ, l'intensité de $\vec{F}$ est égale à :

$$F = I\ell B \sin \alpha.$$

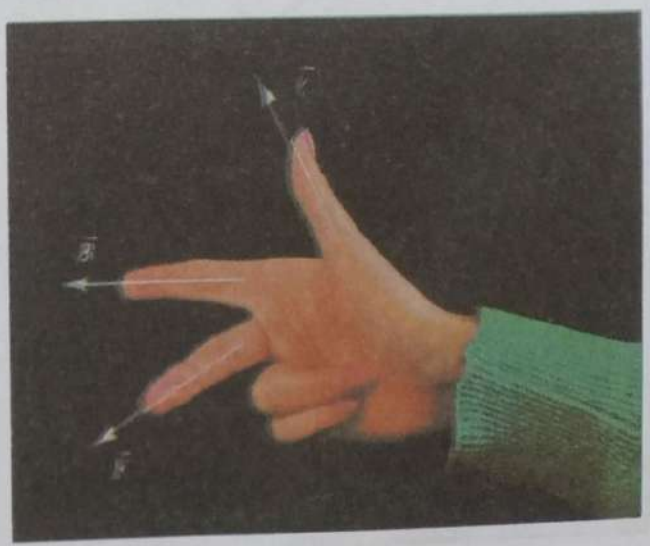
(m T ; N A)

L'intensité de $\vec{F}$ est maximale lorsque $\alpha = 90°$ ($\vec{B}$ orthogonal à $\vec{\ell}$); dans ce cas $F = I\ell B$.

Remarque : La loi de Laplace n'est qu'une conséquence de la relation $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ du chapitre 6. Nous n'étudierons pas le mécanisme, assez complexe, du transfert sur le conducteur métallique lui-même des forces qui s'exercent sur les porteurs de charges que sont les électrons libres du métal, et dont le mouvement d'ensemble correspond au courant électrique.



4. *La force électromagnétique est orthogonale au plan formé par le conducteur et le champ.*

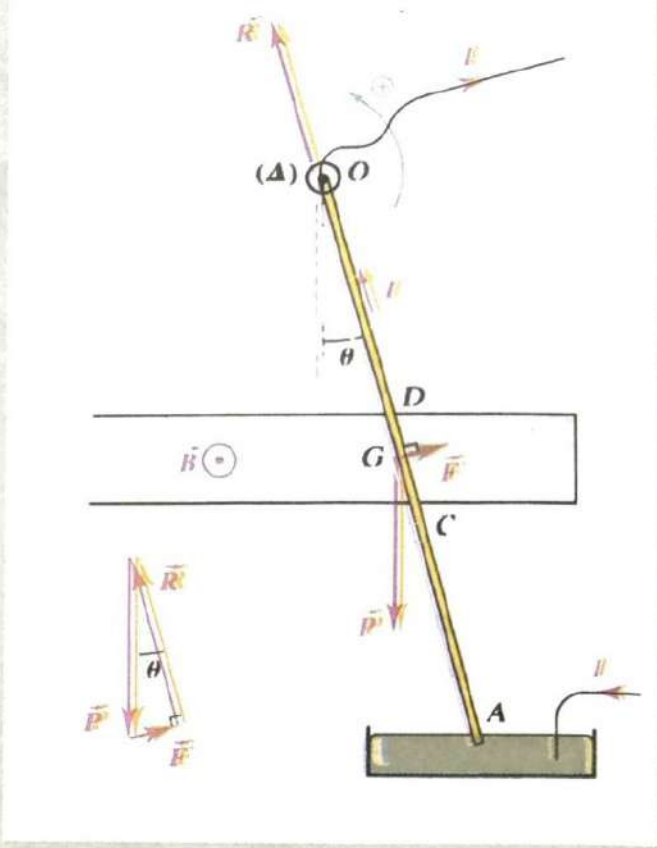


5. *La règle des trois doigts de la main droite permet de trouver le sens d'une force de Laplace, le trièdre $(\vec{\ell}, \vec{B}, \vec{F})$ étant direct. ($\vec{F}$ est orienté dans le sens du courant.)* ▶

Scanné avec CamScanner

APPLICATION 1

Dans l'expérience schématisée sur la figure ci-contre, le conducteur rectiligne OA a un poids de 0,1 N. *Il est parcouru par un courant d'intensité* 20 A. *Le champ magnétique uniforme horizontal, d'intensité* 2.10^{-2} T, *agit sur la portion* $CD = \ell = 5$ cm *située au milieu du conducteur.*
Calculer l'angle θ *que fait, à l'équilibre, le conducteur OA avec la verticale.*



Le fil conducteur *OA* est soumis :

- à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ appliqué en son centre d'inertie *G*;
- à la force de Laplace $\vec{F}$ appliquée au milieu du segment *CD* (c'est-à-dire *G*), partie du conducteur plongée dans le champ magnétique;
- à la réaction $\vec{R}$ de l'axe.

Puisque le conducteur est en équilibre, ces trois forces sont concourantes (en *G*) et leur somme vectorielle est nulle :

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{R} = \vec{0}.$$

L'angle θ d'équilibre est alors donné par :

$$\sin\theta = \frac{F}{P}.$$

D'autre part, $\vec{B}$ étant orthogonal au conducteur :

$$F = IlB = 20 \times 5.10^{-2} \times 2.10^{-2},$$

soit : $F = 2.10^{-2}$ N;

d'où : $\sin\theta = 0{,}2$, et $\theta = 11° 30'$.

Remarquons que la condition d'équilibre sur les moments est bien vérifiée. En effet, Δ étant l'axe horizontal passant par *O*, orientons le plan vertical contenant le fil; il vient :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -P\frac{OA}{2}\sin\theta,$$

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = F\frac{OA}{2}, \quad \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = 0;$$

d'où, avec $\sin\theta = \frac{F}{P}$:

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = 0.$$

APPLICATION 2

Balance de Cotton

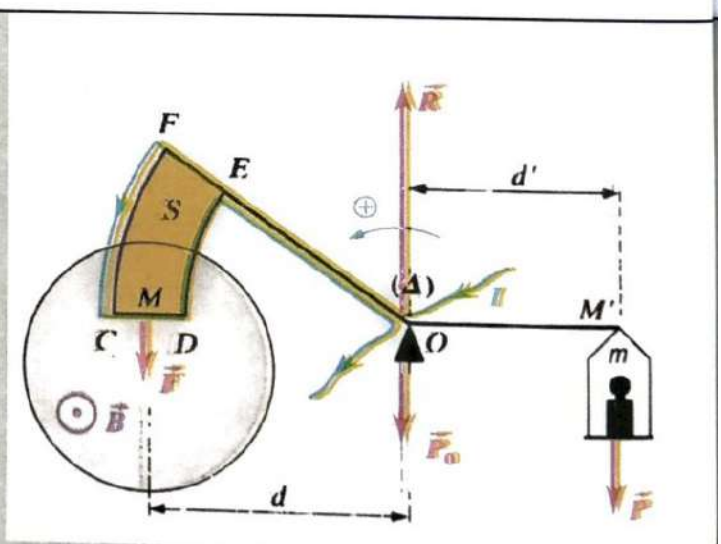
L'intensité d'un champ magnétique peut être mesurée à l'aide d'une balance de Cotton. *Le fléau d'une telle balance, de forme particulière, supporte un secteur isolant S en matière plastique limité par deux arcs de cercle centrés sur l'axe de rotation Δ du fléau. Ce secteur comporte une partie rectiligne CD de longueur ℓ, horizontale lorsque la balance est en équilibre.*

Un fil conducteur part de O, suit le fléau et les bords du secteur, puis revient en O. L'autre bras du fléau supporte un plateau.

On règle la balance de façon que l'équilibre soit réalisé lorsqu'aucun courant ne passe dans le fil conducteur.

Si l'on plonge le secteur S dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ orthogonal au plan de la figure et dirigé vers l'avant, l'équilibre de la balance est rompu lorsqu'un courant circule dans le fil. Pour le rétablir, il suffit de placer une masse m sur le plateau.

Établir la condition d'équilibre de la balance en considérant le moment des forces par rapport à l'axe (O, Δ).



Le système {fléau, plateau, masse marquée} est soumis :

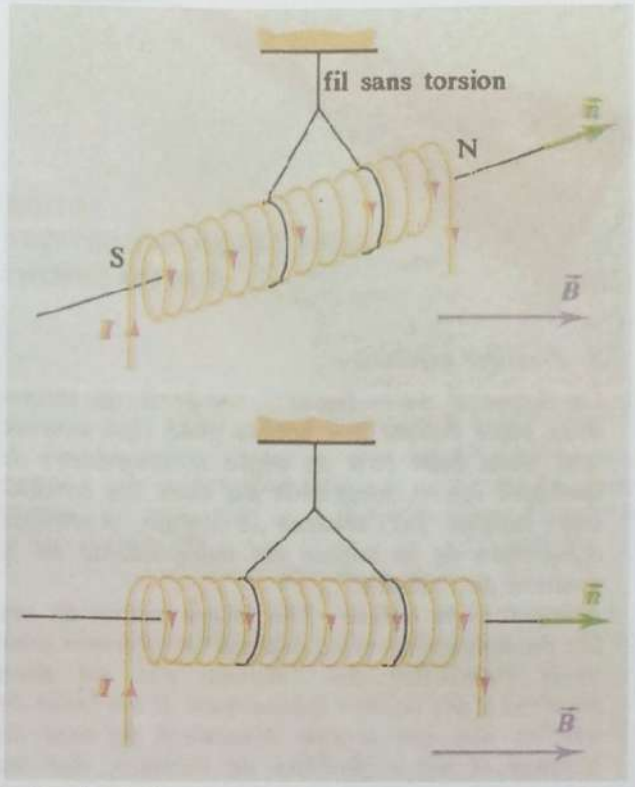
- au poids $\vec{P}_0$ de l'ensemble {fléau, plateau} appliqué au centre d'inertie du système, *O* par construction;
- au poids $\vec{P} = m\vec{g}$ s'exerçant sur la masse marquée et dont la direction passe par *M'*;

Scanné avec CamScanner

8.3 action d'un champ magnétique sur un circuit

8.3.1 action sur une bobine (ou un cadre)

Une bobine (ou un cadre) parcourue par un courant et placée dans un champ magnétique $\vec{B}$ subit des actions mécaniques analogues à celles qui s'exercent sur un aimant droit placé dans le même champ. Ces actions mécaniques résultent des forces de Laplace qui s'appliquent sur chaque portion du fil.
Sous l'action de ces forces, la bobine se déplace de telle façon qu'un vecteur $\vec{n}$ ayant le sens face sud-face nord et pour direction l'axe de la bobine (*fig.* 6) tend à devenir colinéaire à $\vec{B}$ et de même sens (voir *fiche expérimentale*).
Pour étudier avec plus de précision un tel déplacement, il est nécessaire d'avoir recours à la notion de **flux magnétique**, que nous allons maintenant introduire.



6. *Soumise à des forces de Laplace, la bobine se déplace de telle façon que le vecteur $\vec{n}$ devienne colinéaire à $\vec{B}$ et de même sens.*

• aux forces de Laplace qui s'exercent sur les conducteurs placés dans le champ $\vec{B}$. La force $\vec{F}$ de Laplace s'exerçant sur *CD* s'applique au milieu *M* de *CD*; elle est orthogonale à *CD*. Les forces de Laplace s'exerçant sur *CF* et *DE* sont normales en chaque point du conducteur aux arcs de cercle *CF* et *DE*. Leurs supports rencontrant l'axe Δ, leurs moments par rapport à cet axe sont nuls;

• aux forces de contact exercées par le couteau; nous admettrons qu'elles sont équivalentes à une force unique $\vec{R}$ appliquée en *O*.

Le système étant mobile autour de l'axe (O, Δ), la condition nécessaire d'équilibre sur les moments s'écrit :

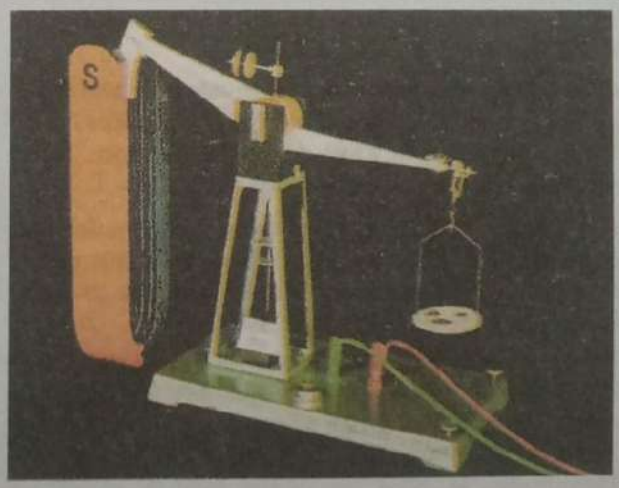
$$\Sigma . \mathcal{M}_{\Delta} = 0.$$

A l'équilibre, par construction, le fléau *OM'* est horizontal. Il vient alors :

$$.\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}_0) = 0, \quad .\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) = -mgd',$$
$$.\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = I\ell Bd, \quad .\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}) = 0.$$

La condition d'équilibre s'écrit donc :

$$mgd' = I\ell Bd.$$



Ainsi, la masse *m* est-elle, à l'équilibre, proportionnelle à l'intensité *I*.
Ce dispositif a été utilisé en son temps pour mesurer l'intensité des champs magnétiques. Nous disposons aujourd'hui d'appareils bien plus commodes, tels que le teslamètre à effet Hall; la balance de Cotton n'est plus qu'un objet de collection.

Scanné avec CamScanner

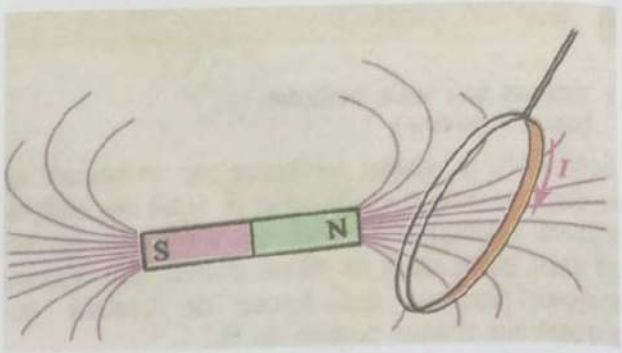
fiche expérimentale

ACTION D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE SUR UN CIRCUIT

1. Première expérience

Le dispositif de la figure 7 comporte un aimant droit placé devant une bobine plate (qui pourrait tout aussi bien être un cadre rectangulaire) de quelques spires, suspendue par deux fils conducteurs souples. En l'absence de courant, la position d'équilibre de la bobine est indépendante de la position de l'aimant.

Alimentons la bobine. Elle tourne autour de ses fils de suspension et se déplace latéralement pour venir s'emboîter sur l'aimant; elle est donc soumise à des actions mécaniques. Il est facile de vérifier que ces actions dépendent du sens du courant et de la position de l'aimant. Sur les photographies, on observe une attraction de la bobine par le pôle nord de l'aimant; si l'on change le sens du courant, il y a répulsion, retournement, puis attraction de la bobine.



7. La bobine plate se déplace et s'oriente dans le champ créé par l'aimant.

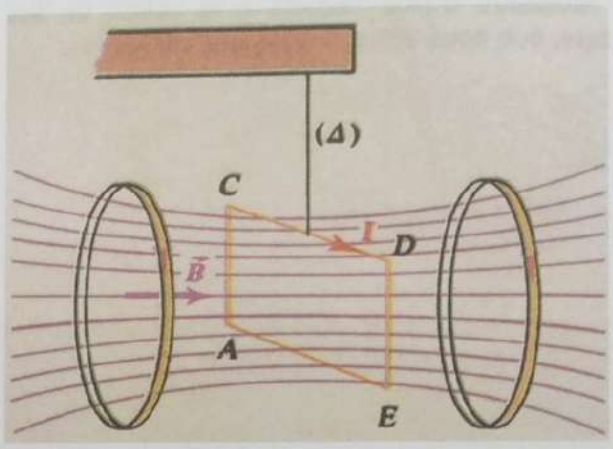
2. Seconde expérience

Le dispositif de la figure 8 comporte un cadre rectangulaire parcouru par un courant et suspendu à l'aide de deux fils conducteurs sans torsion entre deux bobines de Helmholtz, région où règne un champ magnétique quasi uniforme horizontal. L'axe de suspension Δ est un axe de symétrie du cadre : situé dans le plan du cadre, il est parallèle aux deux côtés AC et ED et équidistant de ceux-ci. Le cadre est donc mobile autour de cet axe Δ vertical. En l'absence de champ magnétique, il est soumis :

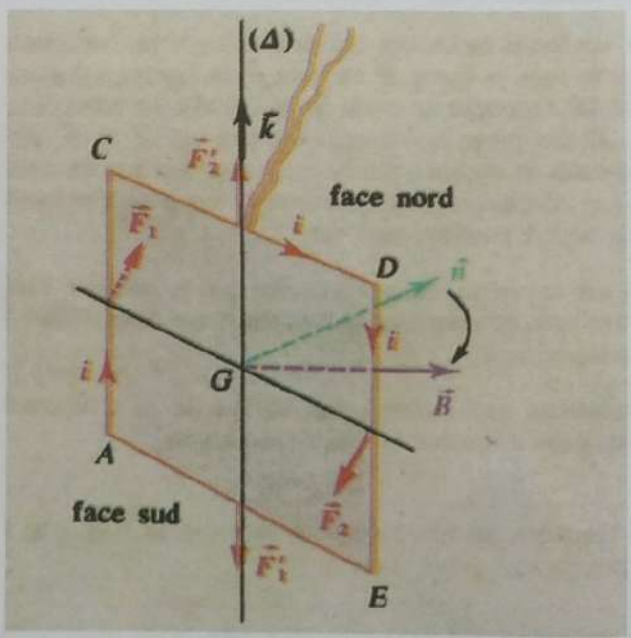
- aux forces de pesanteur équivalant à une force $\vec{P}$ appliquée au centre d'inertie G du cadre; cette force, parallèle à l'axe Δ de suspension, a un moment nul par rapport à cet axe;
- à l'action du fil sans torsion; cette action est équivalente à une force de même direction que Δ et passant également par G; le moment de cette force par rapport à l'axe Δ est nul.

La position de ce cadre autour de l'axe Δ est donc indifférente, puisque le moment des forces appliquées par rapport à cet axe est nul.

Lorsque le courant est établi dans les bobines de Helmholtz, le plan du cadre tend à se placer orthogonalement au champ magnétique, en tournant autour de l'axe Δ. Il est soumis à un couple dû aux forces électromagnétiques qui s'exercent sur chaque brin du cadre. Le vecteur normal $\vec{n}$ au cadre, orienté de la face sud vers la face nord, tend sous l'action de ce couple à devenir colinéaire à $\vec{B}$ et de même sens (*fig.* 9).



8. Dans le champ magnétique uniforme créé par les bobines d'Helmholtz, le plan du cadre tend à devenir perpendiculaire aux lignes de champ.



9. Sous l'effet du couple des forces de Laplace $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$, le vecteur normal au cadre $\vec{n}$ tend à devenir colinéaire à $\vec{B}$ et de même sens.

Scanné avec CamScanner

8.3.2 notion de flux magnétique

1. Cas d'un circuit plan et d'un champ uniforme

Envisageons le cas simple d'*une spire plane située dans un champ magnétique uniforme*. Sur ce circuit, définissons *arbitrairement* un sens de parcours (sens positif). Ce sens nous permet de définir, à l'aide de la règle du tire-bouchon, un vecteur unitaire $\vec{n}$ normal au plan du circuit (*fig.* 10).

• On appelle flux d'un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ à travers la surface d'aire S d'un circuit plan, la grandeur algébrique définie par :

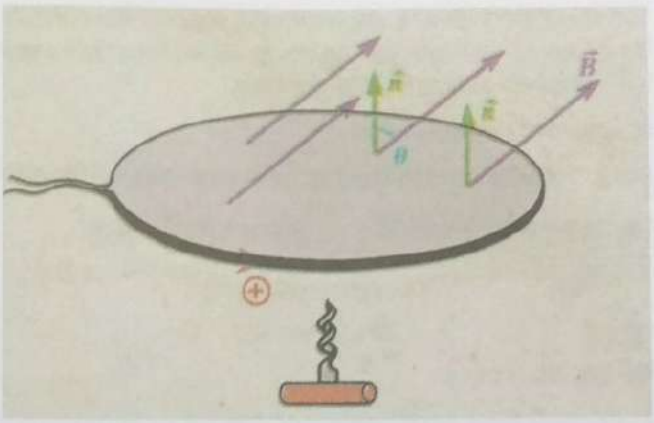
$$\Phi = \vec{B} . \vec{n} S,$$

où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal au plan du circuit orienté.

Dans le système international d'unités, le flux se mesure en **webers** (symbole : **Wb**). Nous retiendrons :

$$\Phi = BS \cos\theta, \quad \text{avec} \quad \theta = (\vec{n}, \vec{B}).$$

Wb T m^2



10. *La règle du tire-bouchon définit le sens du vecteur unitaire normal $\vec{n}$ à la surface plane, d'aire S, du circuit. Le champ magnétique $\vec{B}$ étant uniforme, le flux de ce champ à travers le circuit est défini par :*

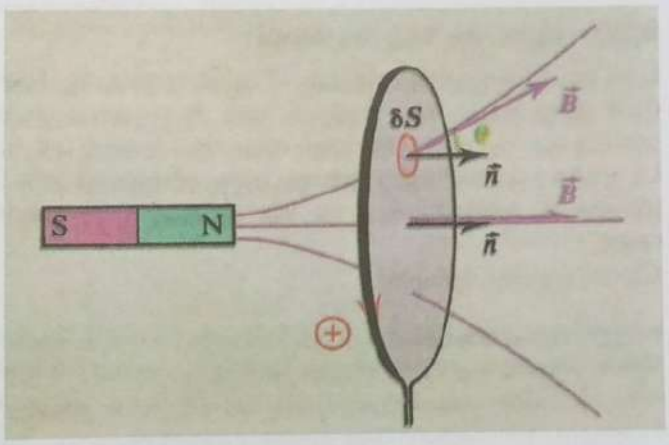
$$\Phi = \vec{B} . \vec{n} S = BS \cos\theta.$$

2. Cas général

Considérons une spire placée devant le pôle nord d'un aimant droit (*fig.* 11). Le champ créé par l'aimant n'est pas uniforme. Le calcul du flux de $\vec{B}$ à travers la surface de la spire est très complexe. Il convient de décomposer cette surface en éléments très petits d'aire δS, à travers lesquels le champ magnétique peut être localement considéré comme uniforme.

Orientons le contour de la spire. A cette orientation arbitraire correspond un vecteur unitaire $\vec{n}$ normal à la surface. Le flux à travers la spire est la somme des flux élémentaires à travers les surfaces d'aire δS, soit :

$$\Phi = \Sigma \delta\Phi, \quad \text{avec} \quad \delta\Phi = \vec{B} . \vec{n} \delta S.$$



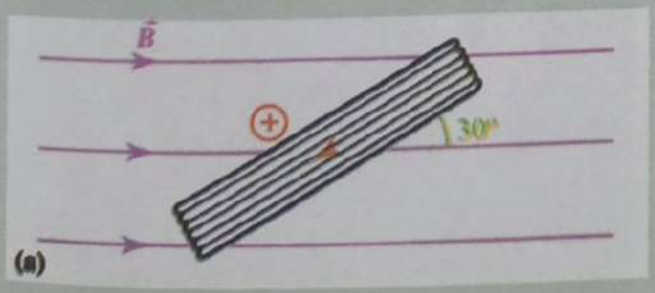
11. *Si la spire est parcourue par un courant qui circule dans le sens positif choisi, elle est attirée par le pôle nord de l'aimant, ce qui correspond à une augmentation du flux Φ. La position d'équilibre stable de la spire correspond à la valeur maximale de Φ.*

APPLICATION 3

Une bobine plate d'aire $S = 30\ cm^2$ comporte $N = 50$ spires. Elle est placée dans un champ magnétique uniforme d'intensité $B = 0{,}02$ T, comme l'indique la figure ci-dessous.

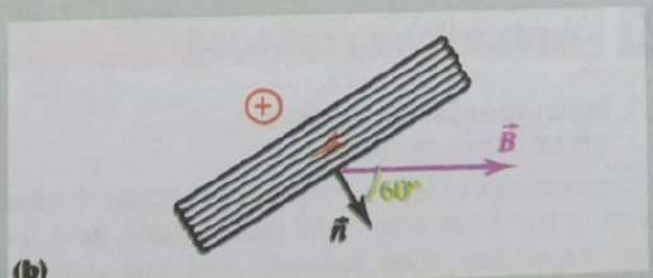
L'orientation choisie pour le sens de circulation sur la bobine est indiquée sur la figure.

Calculer le flux du champ magnétique à travers la bobine.



(a)

Traçons le vecteur unitaire normal $\vec{n}$ (règle du tire-bouchon); nous avons $(\vec{B}, \vec{n}) = 60°$.



(b)

Le flux à travers la bobine est égal à la somme des flux à travers chaque spire; d'où :

$$\Phi = N\vec{B} . \vec{n} S = NBS \cos 60°$$
$$= 50 \times 2.10^{-2} \times 30.10^{-4} \times \cos 60°,$$

soit : $\Phi = 1{,}5.10^{-3}$ Wb.

Si l'orientation imposée avait été de sens contraire, nous aurions trouvé :

$$\Phi = -1{,}5.10^{-3} \text{ Wb}.$$

Scanné avec CamScanner

Le calcul de Φ dans le cas envisagé suppose de connaître le champ $\vec{B}$ en tous les points de la surface de la spire ($\vec{B}$ varie en direction et en norme!).

• ***Quel est le signe de Φ?***

Avec l'orientation choisie (*fig.* 9) et quel que soit le point de la surface, $\theta = (\vec{n}, \vec{B}) < \frac{\pi}{2}$, soit $\cos\theta > 0$; d'où :

$$\delta\Phi = B\delta S \cos\theta > 0,$$

et : $$\Phi = \Sigma\,\delta\Phi > 0;$$

le flux est positif.

• ***Comment varie Φ si l'on déplace l'aimant ou la bobine?***

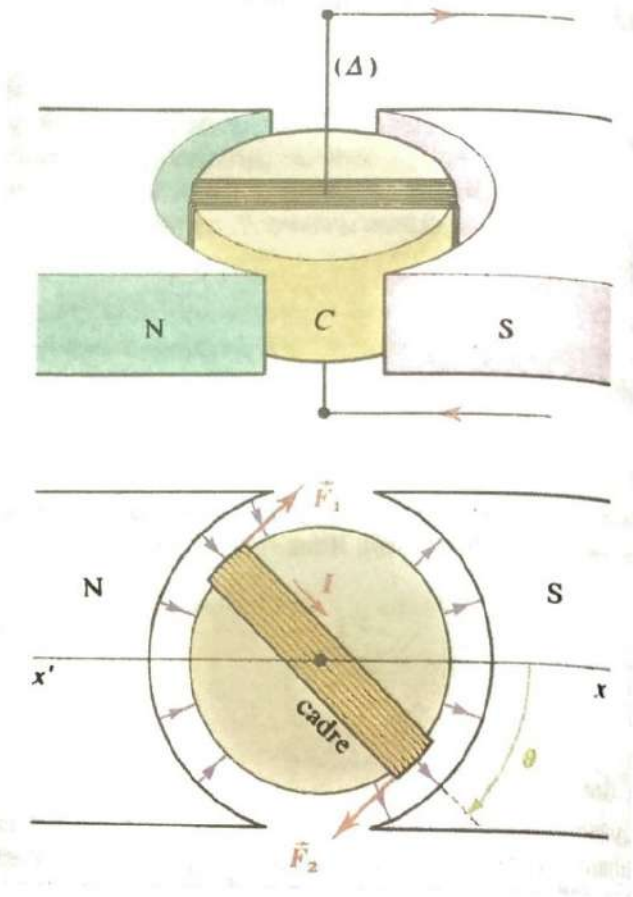
Lorsqu'on rapproche l'aimant de la bobine, l'intensité B du champ magnétique croît en chaque point de la surface; il en est de même pour $\delta\Phi$, donc pour Φ. Inversement, lorsqu'on éloigne l'aimant, Φ décroît.

8.3.3 règle du flux maximal

Lors de l'étude expérimentale, $\vec{n}$ a été orienté de façon qu'il sorte par la face nord; le sens de parcours (sens positif) sur le cadre est donc celui du courant (*fig.* 9). La position d'équilibre stable du cadre correspond à $\theta = 0$ ($\cos\theta = 1$), c'est-à-dire à un **flux maximal** à travers le cadre.
Ce résultat est général.

• **Si le sens de parcours choisi est celui du courant, la position stable d'équilibre d'un circuit plan, libre de se déplacer et situé dans un champ magnétique, correspond à la valeur maximale du flux du champ magnétique à travers ce circuit.**

Nous comprenons pourquoi lors de l'expérience représentée sur la figure 7 (et analogue à celle représentée sur la figure 11), la bobine est attirée par le pôle nord de l'aimant : lorsque la bobine se rapproche de l'aimant, le flux magnétique croît; elle va donc s'emboîter sur l'aimant afin que le flux qui la traverse soit maximal.



C : cylindre en fer doux
(Δ) : fil de torsion (alimentation du cadre)

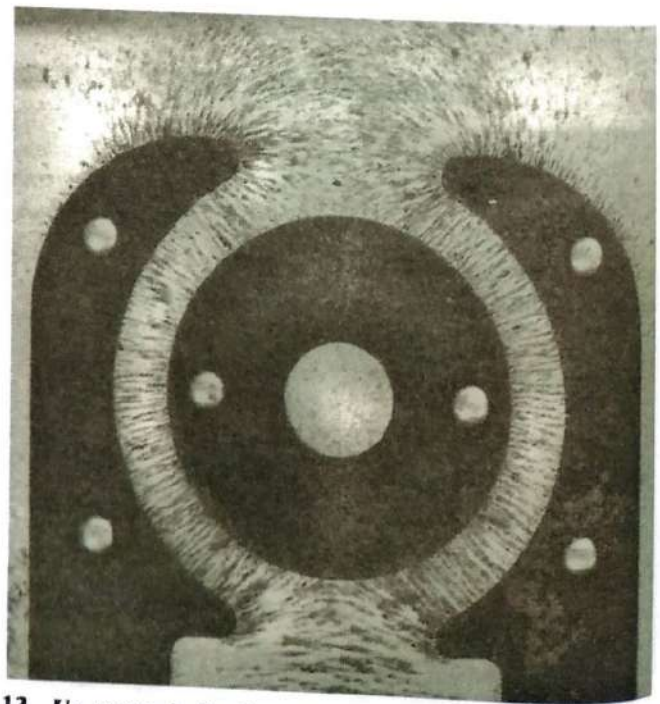
12. ***Principe d'un appareil à cadre mobile. Le champ magnétique, radial, est toujours parallèle au plan du cadre, quelle que soit la position de celui-ci.***

8.4 applications pratiques

8.4.1 instruments de mesure en courant continu

Les ampèremètres et les voltmètres *magnéto-électriques* utilisent la technique d'un cadre mobile placé dans un champ magnétique. (Ces appareils sont dits *à cadre mobile.*)

Dans un ampèremètre à cadre mobile, un cadre rectangulaire, sur lequel sont enroulées des spires de fil conducteur, est suspendu par un fil de torsion vertical qui constitue l'axe de rotation ⊥ du cadre et sert à alimenter en courant les spires. Ce cadre se meut dans l'entrefer cylindrique d'un aimant permanent. Dans cette cavité, est disposé un cylindre de *fer doux*, qui canalise les lignes de champ (*fig.* 12); entre les pôles de l'aimant et le cylindre de fer doux, les lignes de champ sont dirigées, comme le montre la photographie 13, suivant



13. ***Un noyau de fer doux (au centre) permet de canaliser les lignes de champ dans l'entrefer cylindrique d'un aimant; le champ ainsi obtenu est radial.***

Scanné avec CamScanner

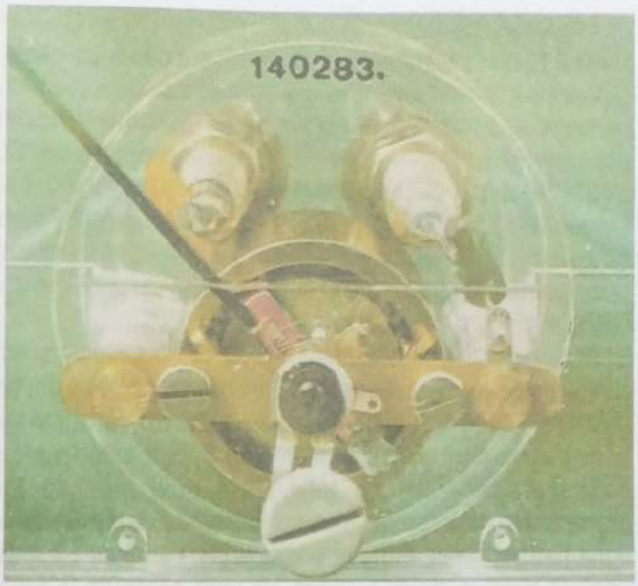
les rayons des deux cylindres coaxiaux : le champ magnétique est dit *radial*. Ainsi, le champ magnétique qui agit sur le cadre est parallèle à son plan, et ce, quelle que soit sa position.

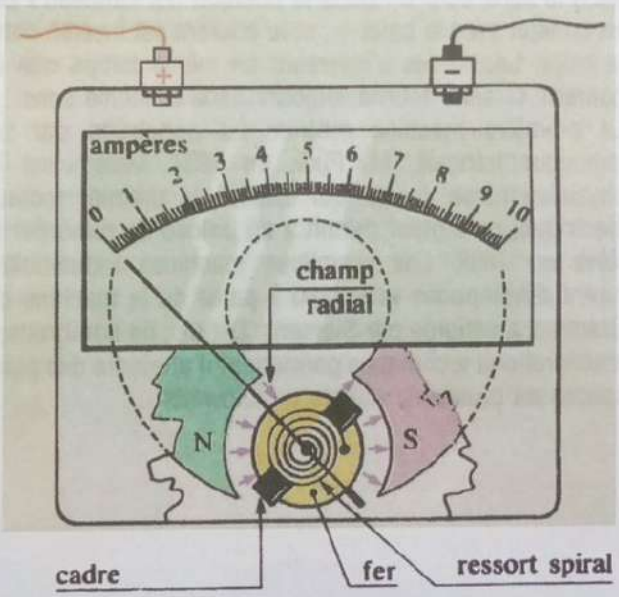
En l'absence de courant, le cadre est parallèle à l'axe $x'x$, par exemple. Lorsqu'un courant d'intensité I circule dans les fils, le cadre est soumis à des forces électromagnétiques qui le font tourner autour de l'axe Δ. Le moment de ces forces est compensé par le moment du couple de torsion créé par un ressort spiral (*fig.* 14). Le cadre a alors tourné d'un angle θ. On démontre facilement, à partir de la loi de Laplace, que cet angle est fonction linéaire de l'intensité I :

$$\theta = kI.$$

Grâce à un ensemble de shunts, les ampèremètres à cadre mobile permettent de mesurer des intensités relativement importantes (plusieurs dizaines d'ampères). Nous savons que de tels appareils, associés en série à des conducteurs ohmiques de grande résistance, sont utilisés en voltmètres.

Aujourd'hui, les appareils à cadre mobile sont, sauf usages particuliers, remplacés dans l'industrie et dans les laboratoires par les multimètres électroniques.



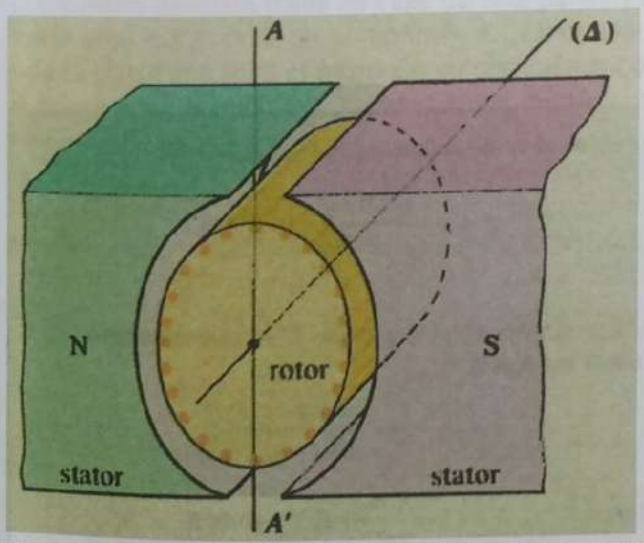


14. ***Ampèremètre à cadre mobile.***

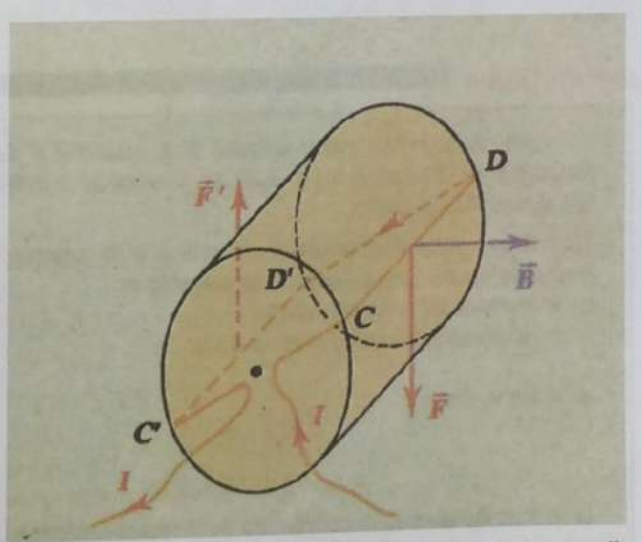
8.4.2 moteur électrique à courant continu

Un moteur comporte un cylindre formé de tôles empilées(*), appelé **rotor**, pouvant tourner autour d'un axe Δ entre deux pôles d'un électroaimant, appelé **stator** (*fig.* 15). Le champ magnétique créé est orthogonal à la surface du rotor. Des conducteurs, tel CD, sont logés dans des encoches du rotor (*fig.* 16). Lorsqu'ils sont parcourus par un courant électrique, ils sont soumis à une force électromagnétique qui a tendance à faire tourner le rotor.

(*) Afin d'atténuer les courants de Foucault (voir chap 10)



15. ***Dans un moteur à courant continu, le rotor est mobile autour d'un axe Δ entre les deux pôles d'un électroaimant, qui constituent le stator.***



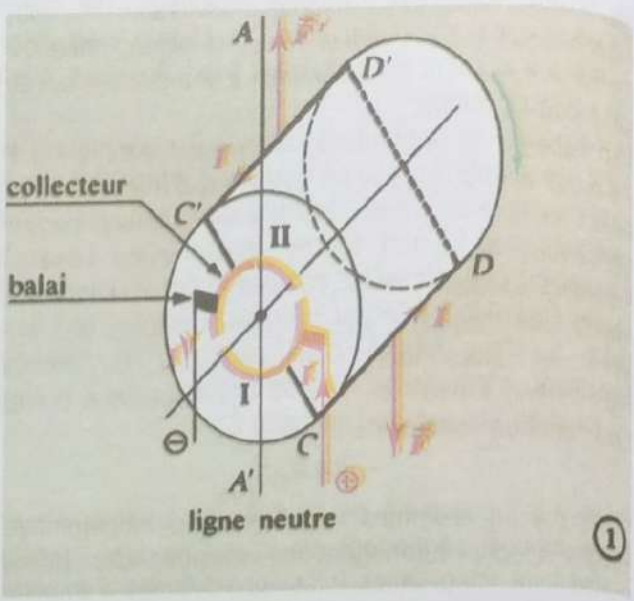
16. ***Le mouvement du rotor est dû aux couples de forces, telles $\vec{F}$ et $\vec{F}'$, qui s'exercent sur les brins de l'enroulement parcouru par un courant.***

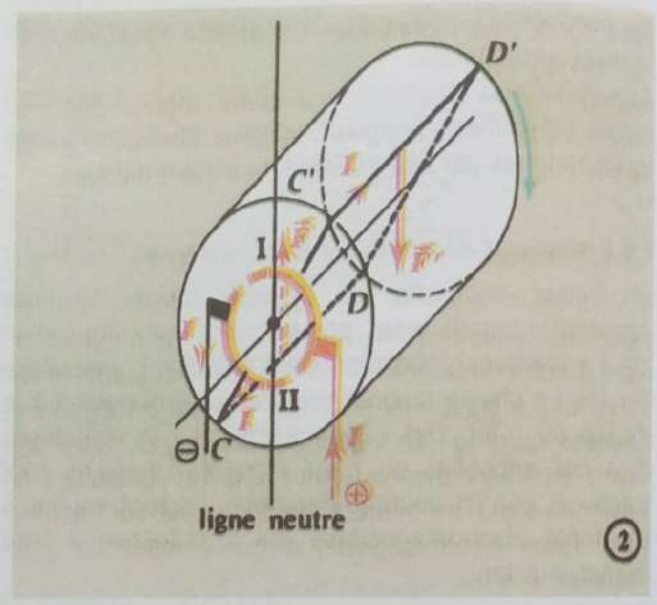
Scanné avec CamScanner

Si nous considérons deux brins opposés *CD* et *C'D'* et si nous voulons que les forces n'annulent pas leurs effets, ces deux brins doivent être parcourus par des courants de sens opposés. C'est pourquoi on peut les associer pour former une spire. Mais, lorsque les conducteurs *CD* et *C'D'* passent simultanément la *ligne neutre AA'* où la force électromagnétique s'annule, il faut changer le sens du courant dans les brins si l'on veut que le mouvement se poursuive toujours dans le même sens (*fig.* 17); c'est l'un des rôles du **collecteur**.

Dans le modèle simplifié de la figure 17, le collecteur est formé par deux demi-anneaux de cuivre, isolés l'un de l'autre et tournant avec la spire. Des balais appuient contre ceux-ci et sont connectés au circuit extérieur. Le collecteur est placé de telle sorte qu'il permute les connexions de la spire au circuit lors du passage de la ligne neutre. Ainsi, dans la position (1), l'anneau I est en contact avec le balai +, et le courant parcourt la spire dans le sens *CDD'C'*. Dans la position (2), l'anneau I est en contact avec le balai −, et le courant est inversé dans la spire. Les forces s'inversant en même temps que le courant, la spire tourne toujours dans le même sens.

La première machine motrice fut construite par un ingénieur français, M. Pixii, en 1832. Mais c'est le physicien russe Jacobi qui élabora le premier moteur électrique; ce moteur permit à un bateau de remonter la Neva en 1838. Les premières machines industrielles furent développées vers 1880 à partir de la machine de Gramme, améliorée par Siemens. Depuis, de nombreuses améliorations techniques permettent d'atteindre des puissances de plusieurs milliers de kilowatts.





17. ***Le système balais-collecteur permet d'inverser le sens de circulation du courant dans les brins de l'enroulement, de part et d'autre de la ligne neutre.***

APPLICATION 4

Un moteur à courant continu absorbe 30 A *sous* 230 V. *La résistance de l'induit est* 0,3 Ω *et sa vitesse de rotation* 650 $tr.min^{-1}$. *Calculer :*

a/ la force contre-électromotrice du moteur et la puissance électrique convertible en puissance mécanique;
b/ le moment du couple moteur;
c/ le rendement énergétique du moteur.

a/ Nous avons :

$$e' = u_{AB} - RI,$$
$$= 230 - 0{,}3 \times 30 = 221 \text{ V}.$$

La puissance électrique convertible en puissance mécanique est donc :

$$\mathcal{P}' = e'I = 221 \times 30 = 6\,630 \text{ W}.$$

b/ Le moment du couple moteur est donné par :

$$\mathcal{M} = \frac{\mathcal{P}'}{\omega} = \frac{6\,630 \times 60}{2\pi \times 650} = 97{,}4 \text{ N.m.}$$

c/ Le rendement énergétique électrique-mécanique du moteur est égal à :

$$\eta = \frac{\mathcal{P}'}{\mathcal{P}} = \frac{e'I}{u_{AB}I} = \frac{e'}{u_{AB}};$$

d'où :
$$\eta = \frac{221}{230} = 0{,}96, \text{ soit } 96\ \%.$$

Un moteur électrique est un très bon convertisseur d'énergie.

Scanné avec CamScanner

Un moteur fonctionnant en courant continu est un *dipôle récepteur* (A, B); à ses bornes, nous pouvons écrire :

$$u_{AB} = RI + e', \quad \text{avec} \quad I > 0 \quad \text{et} \quad e' > 0.$$

- e' est la force contre-électromotrice (f.c.e.m.[*]). Elle est proportionnelle à la vitesse de rotation du moteur :

$$e' = k\omega.$$

- R est la résistance des conducteurs, ou résistance d'induit. Remarquons que lorsque $\omega = 0$ (on empêche le moteur de tourner), $u_{AB} = RI$. Si u_{AB} est imposée, I peut alors atteindre des valeurs très importantes et détruire les enroulements.

La puissance fournie au moteur est :

$$\mathcal{P} = u_{AB} I = RI^2 + e'I.$$

- RI^2 est la puissance dissipée par effet Joule dans les enroulements.

- $e'I$ est la puissance convertible en énergie mécanique.

Il existe d'autres moteurs électriques, de puissance plus faible, fonctionnant avec le courant alternatif. Leur principe de construction est différent.

8.4.3 haut-parleur électrodynamique

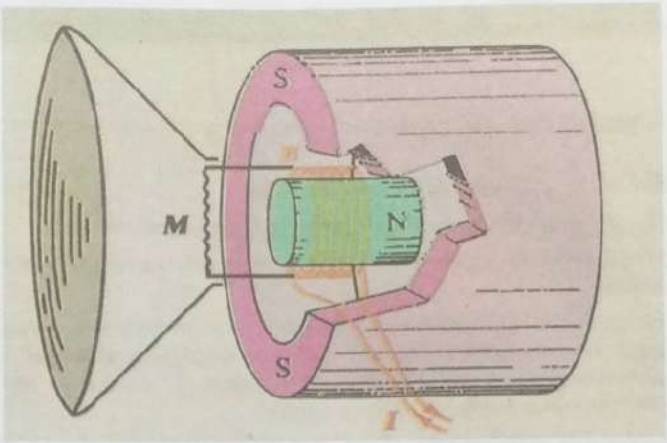
Un haut-parleur électrodynamique est constitué par une bobine pouvant coulisser entre les pôles d'un aimant de forme particulière. L'aimant crée un champ radial : le champ magnétique, en chaque point d'une spire, est dirigé vers le centre de celle-ci. La bobine est solidaire d'une membrane M (*fig.* 18).

Lorsqu'un courant circule dans la bobine, chaque spire est soumise à des forces de Laplace qui la déplacent. Décomposons chaque spire en portions élémentaires pouvant être assimilées à des segments de droite de longueur $\delta\ell$ (*fig.* 19). Chaque portion élémentaire est soumise à une force élémentaire :

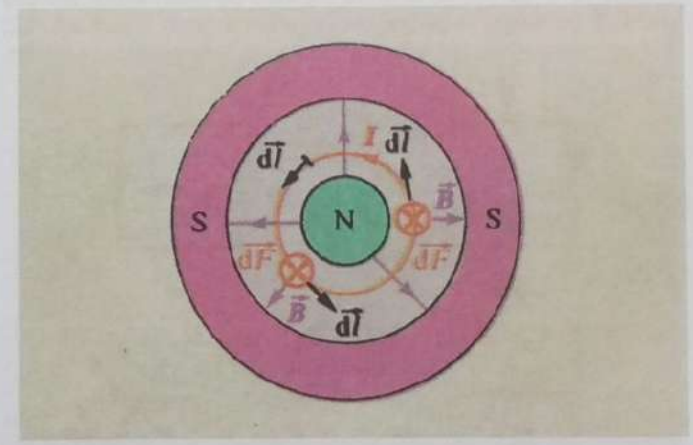
$$\delta\vec{F} = I\delta\vec{\ell} \wedge \vec{B}.$$

Toutes ces forces élémentaires sont proportionnelles à I et ont même direction (celle de l'axe du haut-parleur) et même sens; leur somme, proportionnelle à I, est orthogonale au plan d'une spire et provoque un coulissement de la bobine entre les pôles de l'aimant, donc un déplacement de la membrane.

Si le courant est variable (par exemple périodique), la force résultante va suivre fidèlement, en intensité et en sens, la mesure de l'intensité et le sens du courant. La membrane va donc vibrer et émettre un son de même fréquence que le courant qui circule dans la bobine.



18. ***Haut-parleur électrodynamique. Sous l'action des forces de Laplace dont l'intensité est proportionnelle à I, la bobine solidaire de la membrane coulisse autour du pôle nord de l'aimant.***



19. ***Vue en coupe d'un haut-parleur électrodynamique. Lorsqu'un courant circule dans le sens indiqué, la bobine se déplace vers l'arrière. Si l'on change le sens du courant, la bobine se déplace vers l'avant.***

(*) Pour un moteur, certains auteurs utilisent le terme de force électromotrice.

Scanné avec CamScanner

EXERCICES

L'essentiel du cours

8.1 A *Choisir la bonne réponse.*

1/ La force de Laplace est *orthogonale/colinéaire* à $\vec{B}$.

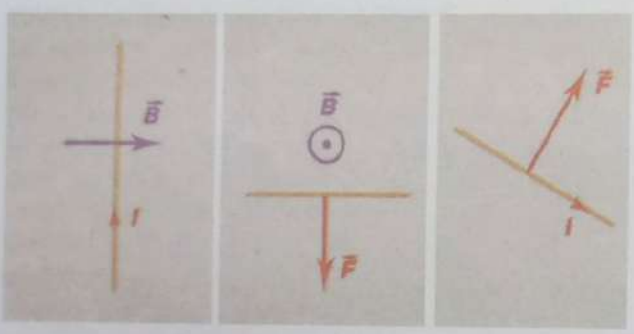
2/ La force de Laplace est *orthogonale/colinéaire* au fil rectiligne.

3/ La force de Laplace qui s'exerce sur une portion rectiligne de conducteur plongé dans un champ magnétique a une intensité *maximale/minimale* lorsque le champ $\vec{B}$ est orthogonal à cette portion rectiligne.

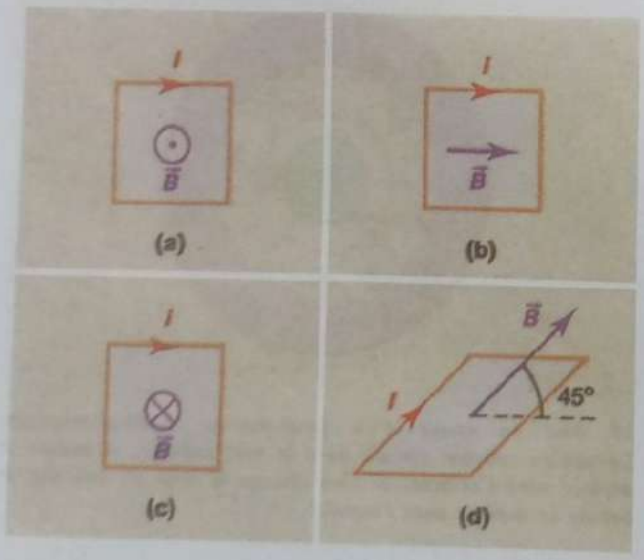
4/ Le flux d'un champ $\vec{B}$ à travers une spire est nul si ce champ est *orthogonal/parallèle* au plan de la spire.

5/ La position d'équilibre d'un circuit dans un champ magnétique correspond à un flux *maximal/minimal* (préciser l'orientation du circuit).

8.2 A Compléter les schémas en représentant le vecteur champ magnétique $\vec{B}$, le vecteur force $\vec{F}$ ou le sens du courant.



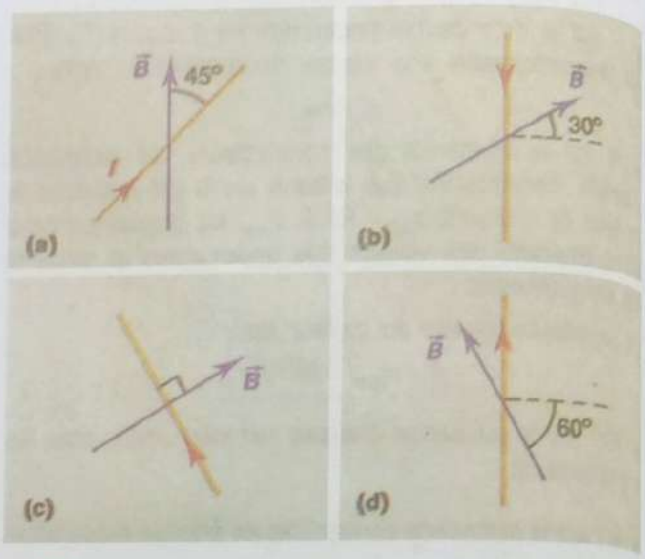
8.3 A Classer les quatre cas de figure par valeurs décroissantes du flux du champ magnétique à travers le circuit.



Exercices de base

8.4 Une portion de conducteur, de longueur a, traversée par un courant I, est placée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$.

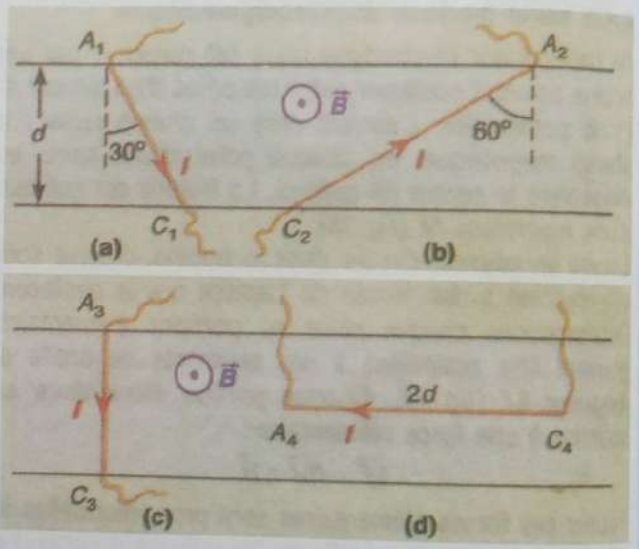
1/ A Représenter le vecteur force de Laplace dans les quatre cas.



2/ AB3 Calculer la norme de ce vecteur.

Données : $a = 20$ cm ; $B = 100$ mT ; $I = 10$ A.

8.5 Différents brins de fil conducteur A_1C_1 sont placés dans un champ magnétique uniforme (figure).



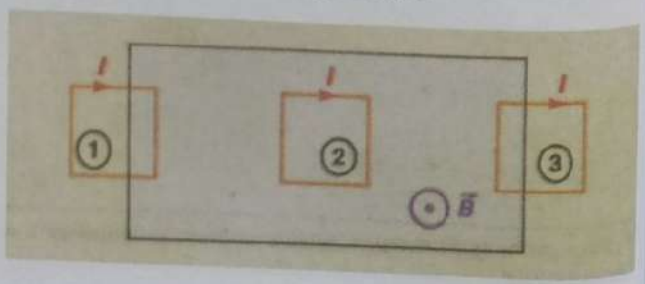
1/ A Représenter le vecteur force $\vec{F}$ s'exerçant sur A_1C_1.

2/ AB3 Calculer la norme de cette force.

Données : $d = 20$ cm ; $I = 500$ mA ; $B = 0{,}4$ T.

3/ AB3 Calculer le moment de cette force par rapport à un axe passant par A_1 et parallèle au champ magnétique $\vec{B}$.

8.6 Sur un cadre carré de côté a est enroulé un fil parcouru par un courant d'intensité I maintenue constante. Ce cadre pénètre dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$. Le plan du cadre reste orthogonal à $\vec{B}$.



Scanné avec CamScanner

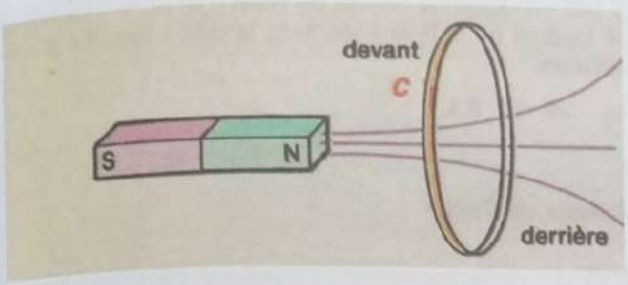
EXERCICES

1/ A Calculer et représenter dans chacun des trois cas la somme $\vec{F}$ des forces de Laplace qui s'exercent sur le cadre.

2/ AB3 La normale au cadre étant orientée d'après le sens du courant, calculer le flux de $\vec{B}$ dans la position 2. Ce flux est-il maximal ?

Données : $a = 2$ cm ; $B = 10^{-4}$ T.

8.7 A Sur la spire C (figure), on a choisi un sens de parcours.

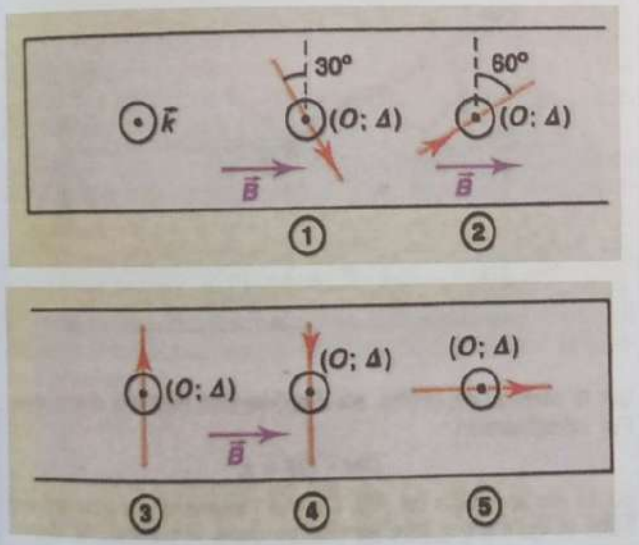


1/ Quel est le signe du flux ?

2/ On éloigne l'aimant droit. Quel est le sens de variation du flux ?

3/ Reprendre les questions précédentes lorsque les pôles de l'aimant sont inversés.

8.8 Une spire de rayon a est mobile autour d'un axe vertical $(O, \vec{k})$. On a représenté dans cinq cas la spire vue de dessus (figure). Le champ magnétique $\vec{B}$ est uniforme et orthogonal à l'axe Δ.

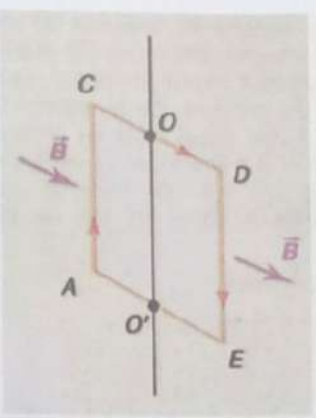


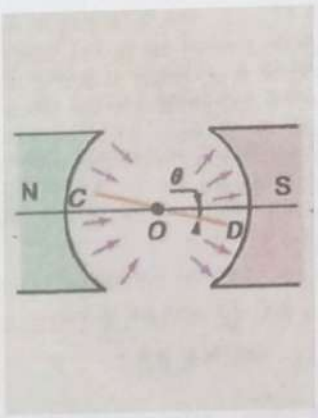
1/ AB3 Pour chaque position, calculer le flux du champ $\vec{B}$ à travers la spire.

Données : $\|\vec{B}\| = 3.10^{-2}$ T ; $a = 4$ cm.

2/ A Déterminer les positions où le flux est maximal, minimal, nul. En déduire la position d'équilibre stable de cette spire si elle n'est soumise qu'aux seules forces électromagnétiques.

8.9 A Un cadre $ACDE$ est mobile autour d'un axe OO'. Un courant d'intensité I circule dans un fil enroulé sur ce cadre.
Le cadre est placé dans un champ magnétique radial $\vec{B}$, orthogonal aux côtés AC et DE.





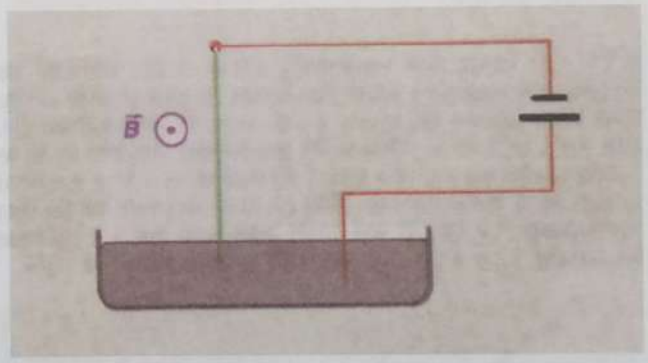
1/ Calculer et représenter les forces qui s'exercent sur chacun des brins AC et DE dans la position indiquée sur la figure.

2/ Pourquoi peut-on dire que le cadre est soumis à un couple de forces ?

Banc d'essais

Tige mobile

8.10 Un fil de cuivre rigide, rectiligne, homogène, de longueur ℓ et de poids P, peut se déplacer dans un plan vertical autour d'une de ses extrémités. L'autre extrémité plonge dans un bac de mercure qui permet de maintenir le contact électrique avec un générateur de tension continue (figure). L'intensité du courant dans le circuit est I. Le dispositif est placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, horizontal et orthogonal au plan de la figure.



1/ A Décrire le mouvement de la tige dans les trois cas suivants :

$I = 0$, $B \neq 0$; $I \neq 0$, $B = 0$; $I \neq 0$, $B \neq 0$.

Examiner l'effet d'une permutation des bornes du générateur.

2/ B3C On néglige la longueur de la partie de la tige située dans le mercure. On admet que la ligne d'action de la force électromagnétique passe par le milieu de la tige. Calculer la déviation angulaire de cette tige quand elle atteint sa position d'équilibre.

Données : $I = 6$ A ; $B = 2.10^{-2}$ T ; $\ell = 10$ cm ; $P = 8.10^{-2}$ N.

↳ **ex. 8.4, 8.5.**

Scanné avec CamScanner

EXERCICES

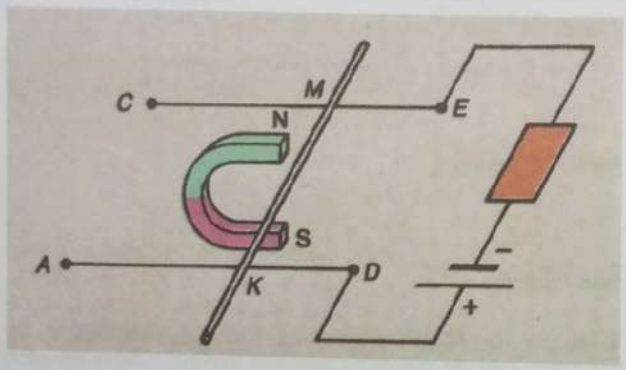
8.11 Un fil rectiligne, homogène, de longueur 30 cm et de masse 10 g, est suspendu par son extrémité supérieure à un point O autour duquel il tourne librement. Son autre extrémité plonge dans du mercure. Ce fil, parcouru par un courant d'intensité 8 A, est placé dans un champ magnétique horizontal uniforme. Il s'écarte de la verticale d'un angle de 6°. Le champ agit sur une longueur de 4 cm entre deux points situés à 20 et 24 cm de O. ($g = 9{,}8$ m . s $^{-2}$.)

1/ C Faire un schéma de l'expérience.

2/ B3C En déduire la valeur du champ.

↳ **ex. 8.4, 8.5.**

8.12 Une tige de cuivre KM, de masse m, homogène et de section constante, est placée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, sur une longueur ℓ, et parcourue par un courant constant d'intensité I. On admet que la tige ne peut que glisser sans frottement sur ses rails.



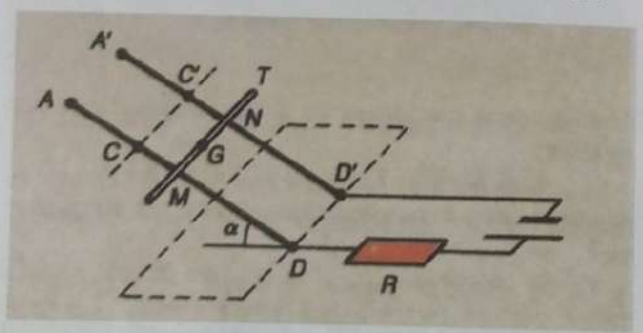
Déterminer dans quel sens et de quel angle α on peut incliner les rails AD et CE pour que la tige soit en équilibre, dans les deux cas suivants :

1/ C $\vec{B}$ reste orthogonal aux rails ;

2/ B3C $\vec{B}$ reste vertical.

↳ **ex. 8.2, 8.4.**

8.13 Deux rails parallèles AD et $A'D'$, distants de 12 cm, sont disposés selon des lignes de plus grande pente d'un plan faisant un angle $\alpha = 8°$ avec le plan horizontal. Les deux rails sont reliés à un générateur électrique, et le circuit est fermé par une tige T de masse $m = 32$ g qui peut glisser sans frottement en M et en N sur les rails en restant horizontale. Le circuit est alors parcouru par un courant d'intensité $I = 2$ A (indépendant de la position de la tige).



1/ Un champ magnétique uniforme et vertical s'exerce sur la tige.

a/ A Représenter les trois forces qui s'exercent sur la barre MN.

b/ B3C Déterminer le sens et la norme du vecteur champ magnétique $\vec{B}$ pour que la tige reste immobile. ($g = 10$ m . s $^{-2}$.)

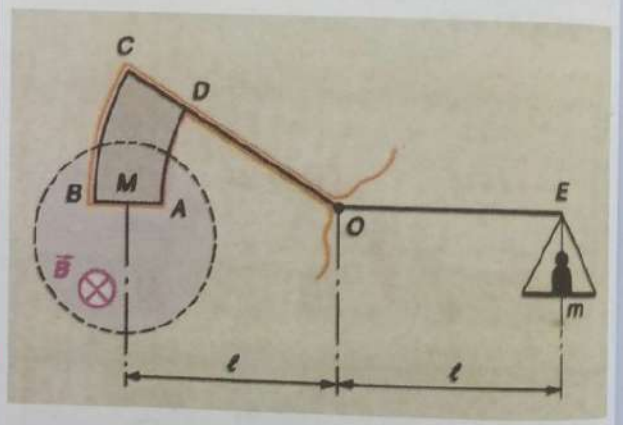
2/ On supprime instantanément le champ magnétique à une date $t = 0$. Indiquer la nature du mouvement du centre d'inertie G de la tige (situé au milieu de MN). Préciser son équation horaire jusqu'aux extrémités D et D' des rails, supposées situées dans un même plan horizontal. Calculer sa vitesse à ce moment si, à l'instant initial, elle occupe la position CC' telle que $CD = 15$ cm.

3/ B3C En réalité, la vitesse de G est 0,60 m . s $^{-1}$. Expliquer les raisons de la différence avec la valeur calculée précédemment.

↳ **ex. 8.2, 8.4.**

Balance de Cotton

8.14 Une balance de Cotton est constituée par un fléau en alliage non magnétique rigide $DABCOE$, mobile autour d'un axe fixe O. Les bords CB et AD sont des arcs de cercles de centre O. A l'équilibre, AB et OE sont sur une même horizontale. Dans la région limitée par des hachures, on crée un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme au voisinage de AB, orthogonal au plan de la figure et dirigé vers l'arrière. Un fil conducteur est fixé le long de $ODABCO$; il correspond à une portion de circuit électrique dans lequel on peut régler l'intensité I d'un courant continu, intensité qu'on lit sur un ampèremètre.



Sur le plateau de droite, on dispose des masses marquées. Par construction :

$$OM = OE = \ell,$$

où M est le milieu de AB. Quand l'intensité du courant est nulle et qu'il n'y a pas de masse dans le plateau, le dispositif est en équilibre.

1/a/ A Indiquer sur un schéma les directions et les orientations des forces qui s'exercent sur le dispositif quand l'équilibre est réalisé pour une intensité I et une masse m. Préciser le sens du courant.

b/ C Montrer que la condition d'équilibre se réduit à :

$$m = \frac{BdI}{g}, \text{ où } d = AB.$$

2/ B4C Des mesures ont donné le tableau suivant :

m (g)	0,3	0,5	0,7	1	1,2	1,5	1,8	2,0	2,2	2,4
I (A)	0,4	0,8	1,25	1,6	2,1	2,6	2,9	3,3	3,6	4

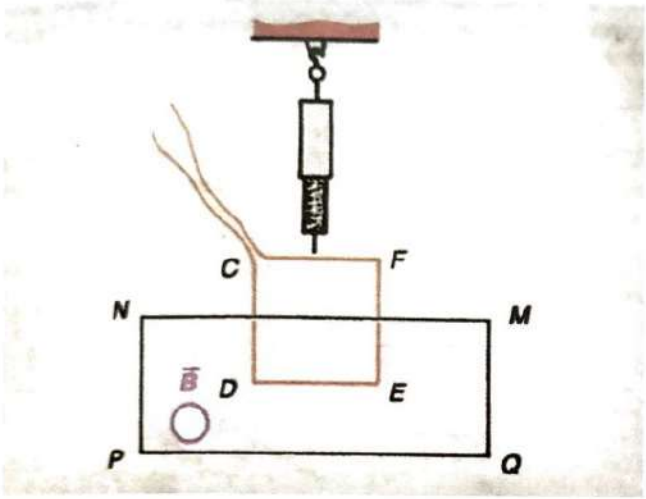
Scanné avec CamScanner

Tracer la courbe représentative de m en fonction de I. En déduire une valeur du champ B. Échelles : 5 cm pour 1 g, 5 cm pour 1 A.

Données : $d = 2$ cm ; $g = 10$ m . s $^{-2}$.

↳ **ex. 8.2, 8.4, 8.5, cours : application 2.**

8.15 A Un cadre rectangulaire indéformable *CDEF* comportant N=100 spires est suspendu à un dynamomètre (figure). Il se trouve partiellement plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ qui reste orthogonal au plan du cadre, supposé vertical. On admet que ce champ est limité par le rectangle *MNPQ*. La longueur des brins horizontaux *CF* et *DE* est $\ell = 5$ cm.



Lorsqu'on établit un courant d'intensité constante $I = 0{,}5$ A, l'ensemble prend une position d'équilibre, et l'indication du dynamomètre augmente de 0,5 N. On suppose que les fils amenant le courant ne perturbent pas l'équilibre du cadre, dont le plan reste fixe.

1/ Montrer que, quels que soient les sens du courant et du champ magnétique, les forces s'exerçant sur les brins verticaux du cadre n'ont pas d'action sur son équilibre.

2/ Le courant circulant dans le conducteur *DE* de *D* vers *E*, déterminer le sens et l'intensité du vecteur $\vec{B}$.

3/ Que se passe-t-il si le cadre est entièrement plongé dans le champ magnétique $\vec{B}$ et si l'on maintient le courant précédent ?

↳ **ex. 8.2, 8.4.**

8.16 A On considère les six faces d'un cube.

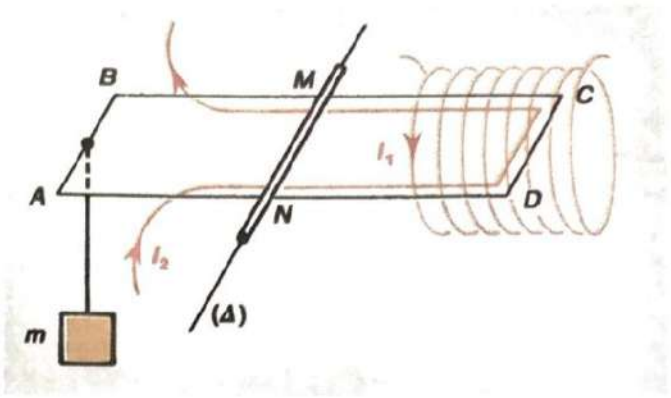
1/ Orienter ces six faces de manières compatibles entre elles.

2/ Déterminer le flux total à travers ces six faces ainsi orientées d'un champ magnétique uniforme $\vec{B}$.
On pourra prendre d'abord $\vec{B}$ orthogonal à deux des faces.

8.17 AB3 1/ Donner les caractéristiques du champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde long comportant 2 500 spires par mètre et parcouru par un courant d'intensité $I_1 = 3$ A. Comment s'oriente une petite aiguille aimantée placée au centre du solénoïde ? Faire un schéma. ($\mu_0 = 4\pi . 10^{-7}$ S.I.)

2/ B4 On enlève l'aiguille et on introduit à l'intérieur du solénoïde une plaquette isolante homogène et rectangulaire *ABCD* mobile autour d'un axe horizontal passant par les milieux respectifs *M* et *N* de *BC* et *AD* (figure).

Un fil conducteur parcouru par un courant d'intensité I_2 suit le contour *MCDN*. La plaquette est en équilibre dans la position horizontale quand $I_2 = 0$.



3 a/ A Quelles sont les forces exercées sur les conducteurs *MC*, *CD* et *DN* ?

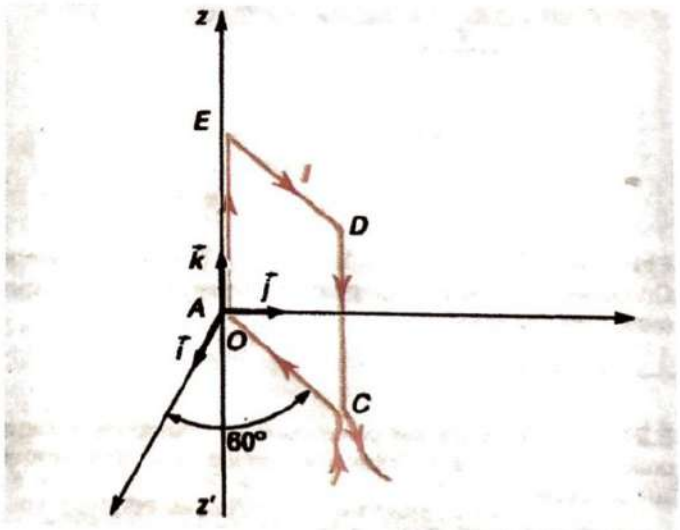
b/ B3C Lorsque $I_2 = 2$ A, déterminer la masse m qu'il faut suspendre au milieu de *AB* pour ramener la plaquette en position horizontale et l'y maintenir en équilibre.

Données : $CD = 4$ cm ; $g = 10$ m . s $^{-2}$.

↳ **ex. 8.2, 8.4, 8.5 et 6.9.**

8.18 AB3 Une spire rectangulaire rigide est mobile autour d'un axe $(O, \vec{k})$ passant par le côté *AE*. Elle est parcourue par un courant d'intensité I dans le sens indiqué sur la figure et elle est placée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ colinéaire à $\vec{i}$ et de même sens que ce vecteur.

Données : $AC = 10$ cm ; $AE = 8$ cm ; $B = 0{,}3$ T ; $I = 10$ A ; $\alpha = (\vec{i}, \overrightarrow{AC}) = 60°$.



1/ Calculer les intensités des forces de Laplace qui s'exercent sur chacun des côtés du cadre.

2/ Calculer la somme des moments de ces forces par rapport à l'axe $(O, \vec{k})$.

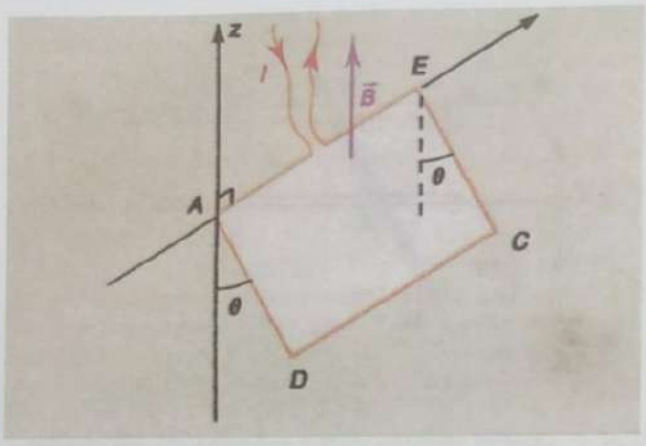
↳ **ex. 8.2, 8.4, 8.5.**

8.19 B3C Un cadre rectangulaire *AECD*, parcouru par un courant d'intensité 20 A, peut tourner autour de son côté *AE* maintenu horizontal. Ce cadre est constitué par un fil rigide de masse 1 g par cm. Soumis à l'action d'un champ

Scanné avec CamScanner

EXERCICES

magnétique uniforme vertical, dirigé vers le haut et d'intensité 0,03 T, il prend une position d'équilibre définie par une rotation d'angle θ autour de AE.

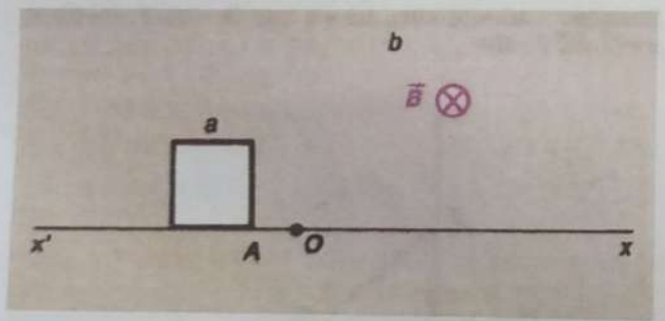


On néglige le champ magnétique terrestre. Calculer θ et préciser le sens du courant.

Données : $AE = 20$ cm ; $EC = 10$ cm ; $g = 10$ m.s^{-2}.

↳ **ex. 8.2, 8.4, 8.5.**

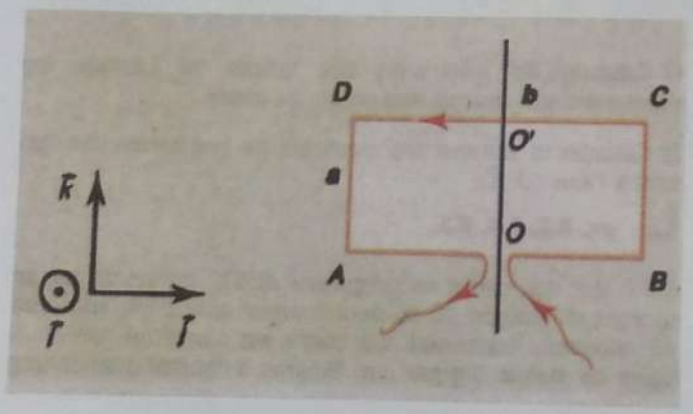
8.20 B3C Dans l'entrefer d'un électro-aimant règne un champ magnétique uniforme, affectant une région limitée par un parallélépipède rectangle de section carrée de côté b (figure). Une spire carrée, de côté a, pénètre dans le champ en se déplaçant horizontalement à vitesse constante v. On pose $\overrightarrow{OA} = x\vec{i}$.



Exprimer le flux à travers la spire en fonction du temps. On notera x l'abscisse du point A. Représenter graphiquement cette fonction.

↳ **ex. 8.3, 8.6.**

8.21 Un cadre est placé dans un champ magnétique uniforme. Un courant d'intensité I circule dans un fil enroulé sur ce cadre.



Données : $a = 5$ cm ; $b = 10$ cm ; $I = 15$ A ; $B = 0{,}2$ T.

1/ On prend $\vec{B} = B\vec{j}$.

a/ AB3 Calculer les forces de Laplace qui s'exercent sur chacun des côtés.

b/ B3 Calculer la résultante de ces forces et leur moment par rapport à l'axe de symétrie OO'.

c/ A Calculer le flux du champ magnétique à travers ce cadre.

2/ AB3 Répondre aux mêmes questions dans les deux cas suivants :

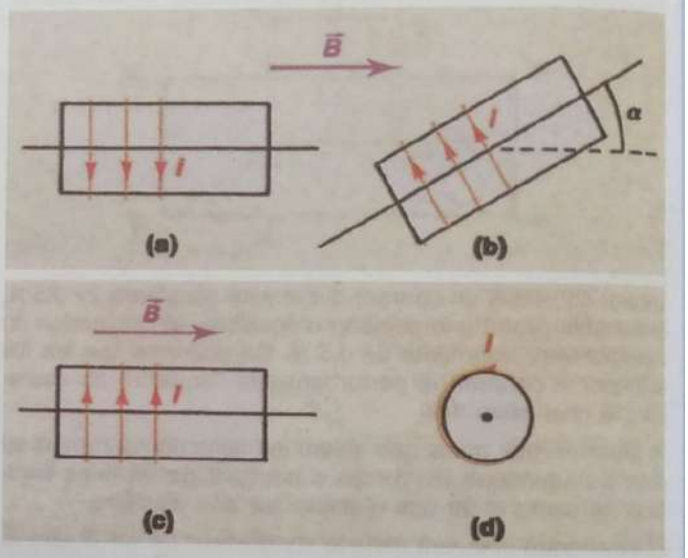
a/ $\vec{B} = B\vec{i}$;

b/ $\vec{B} = -B\vec{i}$.

3/ C On revient au cas où $\vec{B} = B\vec{j}$. On suppose que le cadre, soumis aux seules forces électromagnétiques, peut tourner autour de l'axe OO'. Quelle est sa position d'équilibre ?

↳ **ex. 8.2, 8.4, 8.5, 8.8.**

8.22 Dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, on a placé un solénoïde à N spires, de rayon a, où circule un courant d'intensité I.



Dans chacun des quatre cas, déterminer :

a/ A la face nord et la face sud de la bobine ;

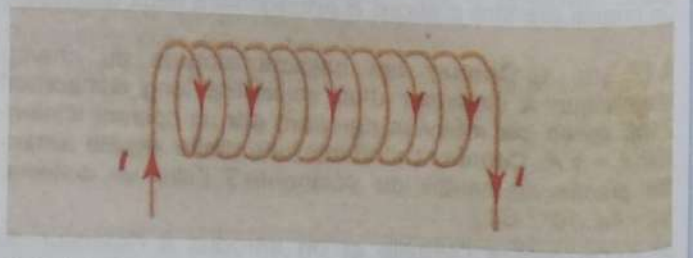
b/ A le flux du champ $\vec{B}$ dans une spire ;

c/ A le flux du champ $\vec{B}$ à travers les N spires ;

d/ C la position d'équilibre stable, la bobine étant soumise aux seules forces électromagnétiques.

↳ **ex. 8.3, 8.8, 6.9.**

8.23 A Une bobine longue, de longueur ℓ et de rayon $a \ll \ell$, comportant N spires, est traversée par un courant d'intensité I.



1/ Indiquer les faces nord et sud de la bobine. Caractériser le champ magnétique $\vec{B}$ créé à l'intérieur de cette bobine.

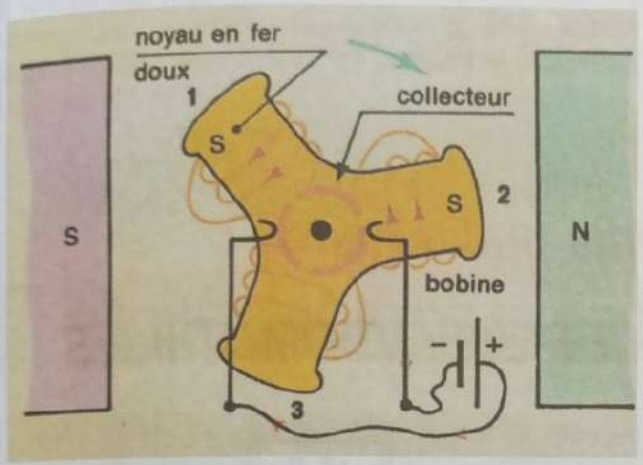
Scanné avec CamScanner

2 On suppose que le champ magnétique $\vec{B}$ est uniforme à travers les N spires. Calculer le flux de $\vec{B}$ à travers une spire, puis à travers les N spires. Déterminer le signe de ce flux. (On orientera les spires dans le sens du courant.)

↳ ex. 8.3, 8.8, 6.9.

Applications aux moteurs

8.24 La figure montre le fonctionnement d'un moteur à trois enroulements d'induit, alimenté en courant continu.



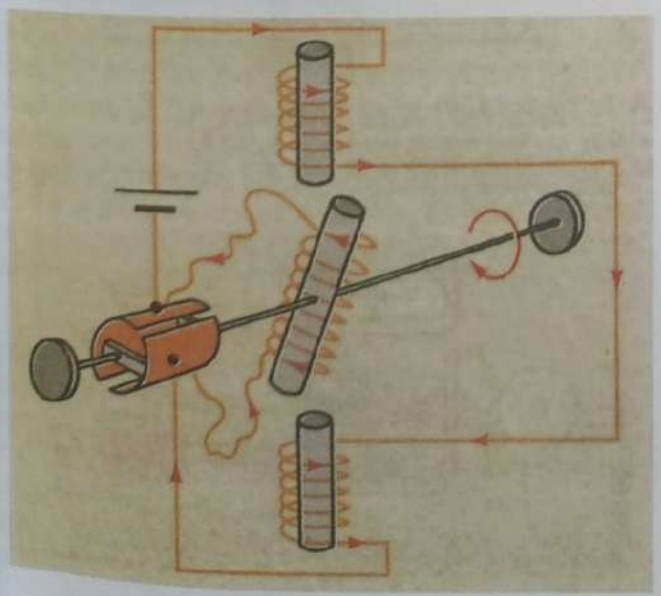
1/ B4C Dans la position de la figure, les bobines 1 et 2 présentent leurs faces sud vers l'extérieur. En analysant le sens du courant, déterminer la nature de la face de la bobine 3. Expliquer pourquoi le rotor peut tourner autour de son axe.

2/ C Le rotor ayant tourné d'un tiers de tour, indiquer les noms des faces de chaque bobine. Montrer que le mouvement de rotation est entretenu.

3/ C Que se passerait-il si les bobines du rotor étaient alimentées en courant alternatif ?

4/ C Sur certains modèles de moteurs, l'aimant est remplacé par un électro-aimant, la bobine excitatrice étant alors en série avec les bornes du contacteur. Montrer que dans ces conditions le moteur peut fonctionner en courant continu et en courant alternatif.

8.25 La figure montre le principe d'un moteur série.



1/ A Indiquer sur chaque bobine les faces nord et sud. Dans quel sens tourne la bobine centrale ?

2/ B2 Quelles sont les parties du système qui constituent le rotor et le stator du moteur ?

3/ C Déterminer le sens du courant dans la bobine centrale et les positions des faces nord et sud au bout d'un demi-tour. Expliquer le mouvement de rotation du moteur.

4/ C Examiner l'effet d'une inversion des bornes de la pile.

5/ C Le moteur peut-il fonctionner en courant alternatif ?

6/ C Le moteur peut-il démarrer quelle que soit la position du rotor ?

8.26 B3C Dans un moteur électrique, les fils actifs sont placés sur les génératrices d'un cylindre — le rotor — de 9 cm de rayon. Chaque fil de 15 cm de longueur est parcouru par un courant d'intensité $I = 10$ A. Les fils sont placés dans un champ magnétique radial $\vec{B}$ de 1,2 T.

1/ Calculer la force qui agit sur chaque fil.

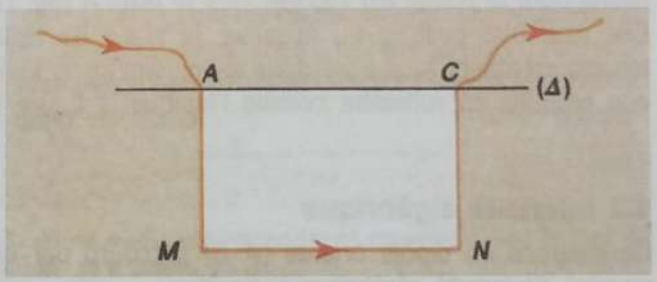
2/ Calculer le travail de cette force, toujours motrice, lorsque le cylindre fait un tour.

3/ Les actions sur chaque fil s'ajoutent : le rotor comprend 700 fils. Calculer la puissance de ce moteur sachant qu'il tourne à 1 800 tr . min $^{-1}$.

↳ ex. 8.4.

Exercice bilan

8.27 Un conducteur indéformable $AMNC$ est composé de trois parties rectilignes de même section formant trois côtés d'un rectangle. Il est mobile sans frottement autour d'un axe horizontal fixe passant par A et C. Des fils souples réunissent les points A et C à un générateur qui fait circuler un courant d'intensité I dans le sens de A vers C.



1/ C1 Le cadre est en équilibre sous l'action de son poids et de la réaction de l'axe. Déterminer la position du plan $AMNC$.

2/ A Déterminer dans lequel des trois cas suivants le cadre quitte sa position d'équilibre initiale :
a/ $\vec{B}$ est colinéaire à MN et de même sens que le courant dans ce côté ;
b/ $\vec{B}$ est orthogonal au plan vertical contenant l'axe de rotation, et dirigé de l'arrière vers l'avant ;
c/ $\vec{B}$ est vertical, dirigé du bas vers le haut.

3/ B3C2 Dans le cas où le cadre prend une nouvelle position d'équilibre écartée du plan vertical d'un angle x, déterminer les caractéristiques de la force électromagnétique appliquée sur chacun de ses trois côtés.
Faire l'inventaire de toutes les forces appliquées au cadre. En écrivant que la somme algébrique des moments de ces forces par rapport à l'axe est nulle, calculer x.

Application numérique : $AM - CN = a = 6$ cm ; $MN - \ell = 12$ cm ; $I = 1$ A ; $B = 0{,}2$ T ; masse du conducteur par unité de longueur $\mu = 5 . 10^{-2}$ kg . m $^{-1}$; $g = 10$ m . s $^{-2}$.

↳ ex. 8.2, 8.4, 8.5.

Scanné avec CamScanner

9 INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE

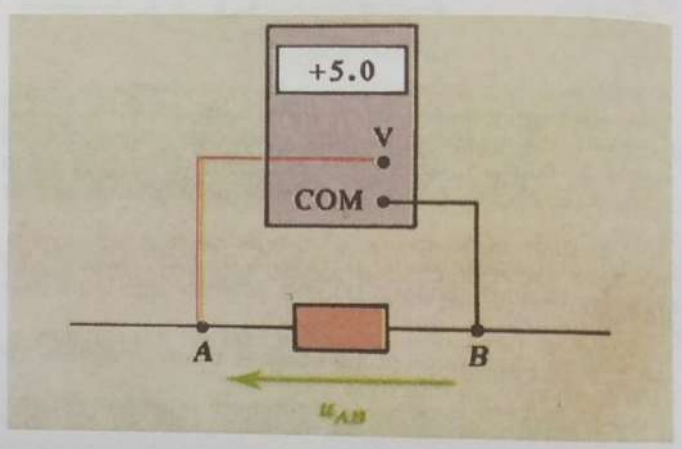
rappels et compléments préliminaires :

ALGÉBRISATION DES FORCES ÉLECTROMOTRICES

1. tension et intensité algébriques

1.1 tension algébrique

La tension, ou différence de potentiel, $u_{AB} = V_A - V_B$ entre deux points *A* et *B* d'un circuit est représentée par une flèche *dont la pointe est tournée vers le point A* (*fig.* 1). Elle peut être positive ou négative; le signe de cette tension est affiché lorsqu'on utilise un multimètre numérique branché en voltmètre comme l'indique la figure 1.



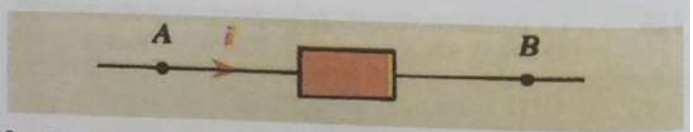
1. *Ainsi branché (point B relié à la borne* COM*), le multimètre affiche la tension* $u_{AB} = V_A - V_B$ *et son signe.* (*Ici,* $u_{AB} = +5{,}0$ V > 0.)

1.2 intensité algébrique

Considérons un dipôle orienté (*A*, *B*) parcouru par un courant d'intensité *algébrique i* (*fig.* 2) :

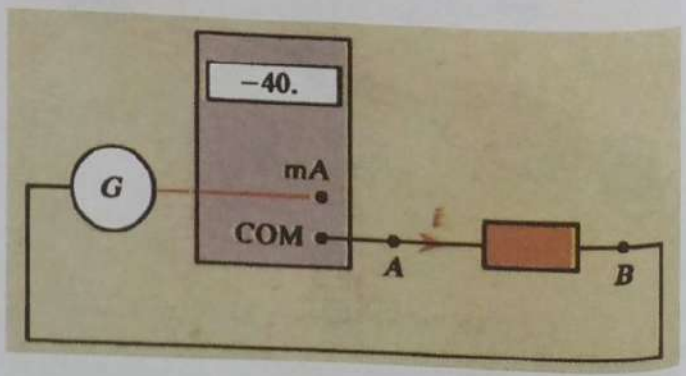
- si le courant traverse le dipôle dans le sens choisi (sens positif), $i > 0$;
- si le courant traverse le dipôle dans le sens contraire, $i < 0$.

Le signe de cette intensité est affiché lorsqu'on utilise un multimètre numérique branché en ampèremètre comme l'indique la figure 3.



2. *Le dipôle (A, B) est ici orienté de A vers B :*
- *si le courant circule de A vers B,* $i > 0$;
- *si le courant circule de B vers A,* $i < 0$.

Remarque : Nous choisirons le plus souvent comme sens d'orientation du dipôle (*A*, *B*) le sens conventionnel du courant s'il est connu à l'avance; ainsi *i* sera positif.



3. *Ainsi branché (point A relié à la borne* COM*), le multimètre affiche l'intensité algébrique qui traverse le dipôle (A, B), orienté de A vers B. (Ici,* $i = -40$ mA*; le courant traverse le dipôle de B vers A.)*

1.3 association de dipôles; additivité des tensions

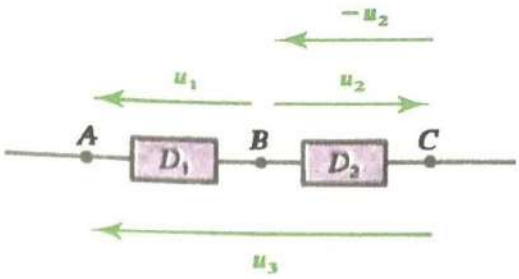
Considérons deux dipôles D_1 et D_2 associés en série (*fig.* 4). Posons $u_{AB} = u_1$ et $u_{CB} = u_2$ et exprimons la tension $u_{AC} = u_3$ en fonction de u_1 et de u_2. D'après la loi d'additivité des tensions, nous pouvons écrire :

$$u_3 = u_{AC} = u_{AB} + u_{BC},$$

soit, avec $u_{BC} = -u_{CB} = -u_2$:

$$u_3 = u_1 - u_2.$$

Si nous observons maintenant sur la figure 4 les flèches représentatives des trois tensions, nous remarquons qu'à la relation algébrique précédente correspond, pour les flèches, une opération équivalente à une *somme vectorielle*. Cette constatation est générale et s'applique à tous les cas de figure.



4. *Avec $u_1 = u_{AB}$, $u_2 = u_{CB}$ et $u_3 = u_{AC}$, il vient :*

$$u_3 = u_1 - u_2,$$

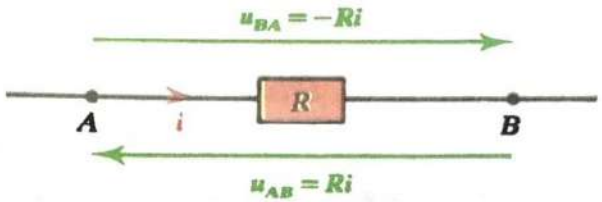
quels que soient les signes de u_1, u_2 et u_3.

2. loi d'Ohm pour un conducteur ohmique

Le dipôle (A, B) est une résistance R (*fig.* 5). Si nous orientons le dipôle **de A vers B**, i et u_{AB} seront toujours deux nombres de même signe, *quel que soit le sens du courant;* la loi d'Ohm s'écrit alors :

$$u_{AB} = Ri \quad (\text{ou } u_{BA} = -Ri).$$

Remarquons qu'avec l'orientation choisie, la flèche associée à la tension u_{AB} et la flèche associée à la circulation du courant sont *en sens inverse.*



5. *Si un dipôle ohmique (A, B) est orienté de A vers B, on a toujours :*

$$u_{AB} = Ri \quad (\text{ou } u_{BA} = -Ri),$$

quel que soit le sens de circulation du courant.

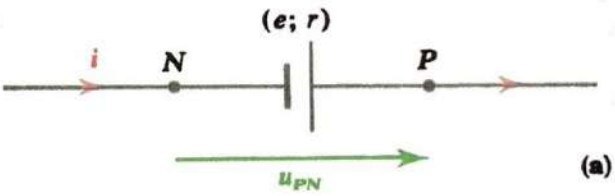
3. loi d'Ohm généralisée

3.1 dipôle générateur

Soit un dipôle (P, N) fonctionnant en générateur, de force électromotrice e et de résistance interne r (fig. 6 a). Nous avons vu en classe de Première qu'un tel dipôle est équivalent à l'association série d'un générateur idéal de tension (résistance interne nulle) de force électromotrice e et d'une résistance r (*fig.* 6 b). Si nous orientons le dipôle dans le sens du courant, c'est-à-dire de la borne négative N vers la borne positive P, la loi d'Ohm s'écrit :

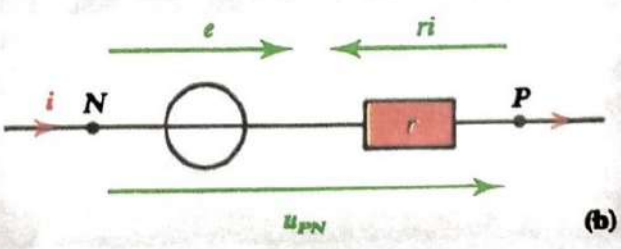
$$u_{PN} = e - ri,$$

où e et i sont des nombres positifs.
Il est aisé de vérifier que l'addition vectorielle des flèches représentatives des tensions est compatible avec la relation algébrique précédente, la force électromotrice étant représentée par une flèche orientée dans le sens du courant (sa pointe correspond à la borne positive du générateur *fig.* 6 b).



6 a. *Si un dipôle générateur (e; r) est orienté dans le sens du courant qu'il débite, on a :*

$$u_{PN} = e - ri.$$

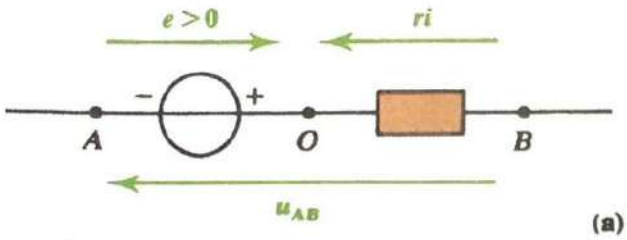


6 b. *Un dipôle générateur (e; r) est équivalent à l'association série d'un générateur idéal de tension de f.e.m. e et d'une résistance r. La relation :*

$$u_{PN} = e - ri, \quad \text{avec } e > 0,\ i > 0,$$

correspond à la loi d'additivité des tensions. La pointe de la flèche associée au générateur correspond à la borne positive.

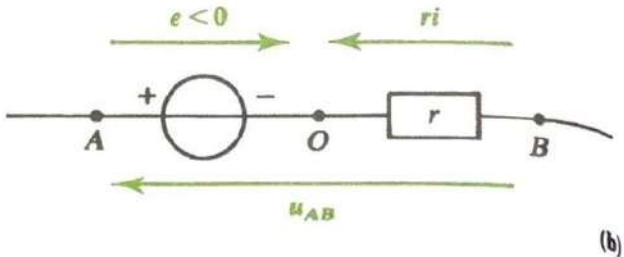
Scanné avec CamScanner



(a)

7 a. *Le dipôle générateur et la flèche associée à la f.e.m.* **algébrique** *e sont orientés dans le même sens : de A vers B. Le générateur tend ici à faire passer le courant dans le sens de l'orientation choisie, et :*

$$u_{AB} = ri - e, \quad avec \quad e > 0.$$



(b)

7 b. *Le dipôle générateur et la flèche associée à la f.e.m.* **algébrique** *e sont orientés dans le même sens : de A vers B. Le générateur tend ici à faire passer le courant dans le sens contraire à l'orientation choisie, et :*

$$u_{AB} = ri - e, \quad avec \quad e < 0.$$

3.2 force électromotrice algébrique

Considérons un dipôle générateur (A, B), de résistance interne r, et orientons-le **de A vers B**. La force électromotrice de ce dipôle peut être *algébrisée* de la façon suivante :

- si le dipôle (A, B) tend à faire passer le courant dans le sens positif, c'est-à-dire de A vers B, $e > 0$ (*fig.* 7 a);
- si le dipôle (A, B) tend à faire passer le courant dans le sens négatif, c'est-à-dire de B vers A, $e < 0$ (*fig.* 7 b).

Avec cette convention, nous aurons toujours :

$$u_{AB} = ri - e \quad (\text{ou } u_{BA} = e - ri),$$

la tension u_{AO} étant égale à $-e$, *quel que soit le sens du courant* (*fig.* 7). La flèche associée à e est orientée dans le même sens que le dipôle, c'est-à-dire de A vers B (*fig.* 7).

- Si le courant a effectivement le sens correspondant à celui que tend à imposer le dipôle générateur (A, B), e et i sont de même signe, et *le produit ei est positif.* Cela correspond à un fonctionnement normal du générateur, qui fournit au reste du circuit une puissance électrique $\mathcal{P}$ telle que $\mathcal{P} = ei - ri^2$, où ri^2 est la puissance Joule consommée par le générateur.

- Si au contraire le courant traverse le générateur à contresens (cas d'un générateur monté en opposition vis-à-vis d'autres générateurs présents dans le reste du circuit), e et i sont de signes contraires, et *le produit ei est négatif.* Dans ce cas, le générateur consomme, outre la puissance Joule, la puissance $-ei$; il se comporte, de fait, comme un *récepteur.*

De ces considérations énergétiques, il ressort que la loi d'Ohm algébrique se généralise à un dipôle récepteur habituel (voltamètre, moteur); si ce dipôle (A, B) est orienté **de A vers B**, alors :

$$u_{AB} = r'i - e', \quad \textbf{avec } e'i < 0,$$

$|e'|$ étant la force contre-électromotrice du récepteur et r' sa résistance interne.

Le développement considérable de l'électricité a été rendu possible grâce à la découverte, vers 1830, par M. Faraday et J. Henry, du phénomène d'induction électromagnétique. Ce phénomène, que nous allons étudier, est à la base du fonctionnement des générateurs de grande puissance, dynamos et surtout alternateurs, et des transformateurs.

9.1 étude expérimentale

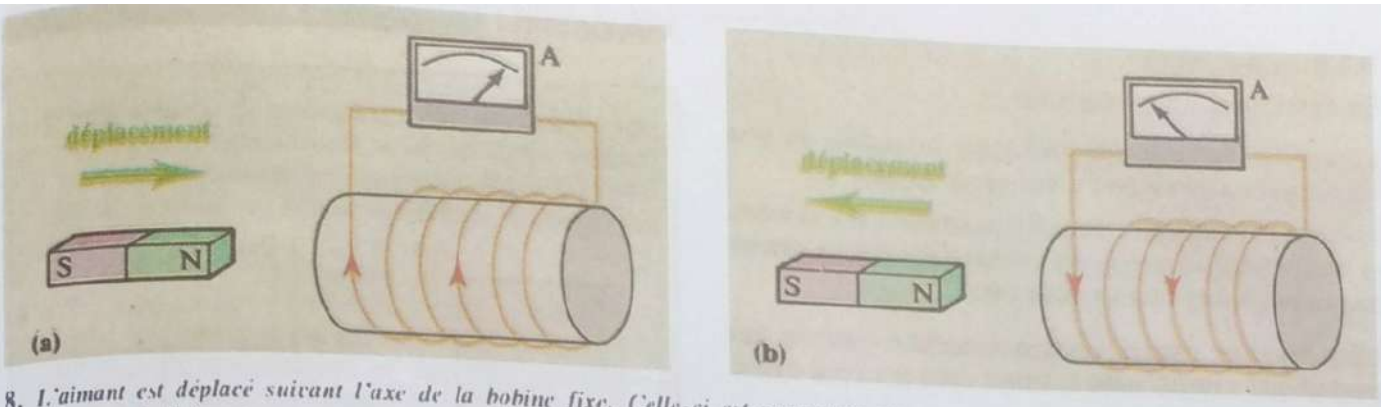
9.1.1 déplacement relatif d'un aimant et d'une bobine

1. Une bobine est reliée à un milliampèremètre (*fig.* 8 a). Approchons de la bobine fixe un aimant, qui crée un champ magnétique. Durant le déplacement, le milliampèremètre indique qu'un courant circule dans le circuit fermé de la bobine. Ce phénomène est appelé **phénomène d'induction électromagnétique**.

Durant le déplacement de l'aimant, tout se passe comme si un générateur était présent dans le circuit fermé de la bobine. Nous dirons que l'aimant en déplacement est l'**inducteur**, que la bobine est l'**induit** et qu'une **force électromotrice d'induction**, ou induite, apparaît dans le circuit de la bobine.

2. Éloignons l'aimant de la bobine toujours fixe (*fig.* 8 b). Durant le déplacement de l'aimant, un courant induit prend naissance dans le circuit fermé de la bobine. Ce courant circule en sens inverse de celui qui a été observé dans l'expérience précédente.

Scanné avec CamScanner



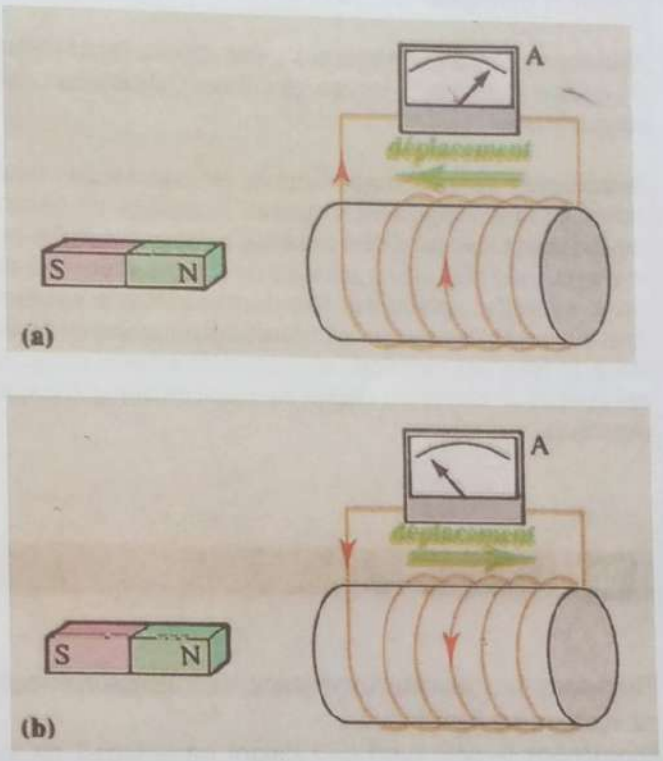
8. L'aimant est déplacé suivant l'axe de la bobine fixe. Celle-ci est parcourue par un courant dont le sens dépend de celui du déplacement de l'aimant.

3. Rapprochons maintenant la bobine de l'aimant fixe (*fig.* 9a). Un courant prend naissance dans l'induit. Nous observons le même phénomène que dans l'expérience de la figure 8a (le courant circule dans le même sens).

4. Éloignons enfin la bobine de l'aimant fixe (*fig.* 9b). Le courant induit dans la bobine circule dans le même sens que celui qui a été observé dans l'expérience de la figure 8b.

En définitive, le phénomène d'induction électromagnétique apparaît dès qu'il y a *déplacement relatif d'un inducteur et d'un induit*. Pendant ce déplacement relatif, une force électromotrice d'induction apparaît, qui engendre un courant dans l'induit; lorsqu'il n'y a plus déplacement, le phénomène cesse.

Remarque : Si nous remplaçons l'aimant par une bobine parcourue par un courant *(bobine inductrice)*, les mêmes phénomènes apparaissent. Nous vérifions, là encore, l'équivalence entre un aimant et une bobine parcourue par un courant.



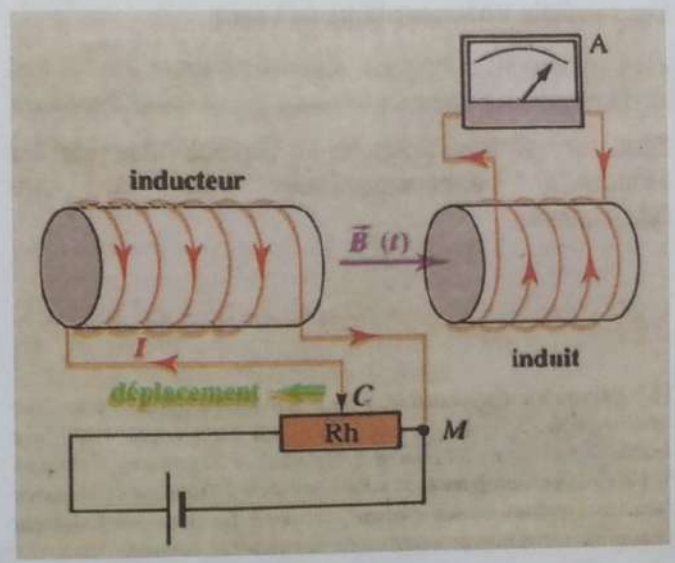
9. La bobine est déplacée suivant l'axe de l'aimant fixe. La bobine est parcourue par un courant dont le sens dépend de celui du déplacement. On notera les correspondances entre les cas 8a et 9a, d'une part, 8b et 9b, d'autre part.

9.1.2 variation au cours du temps du champ magnétique dans un circuit fixe

Faisons varier à l'aide d'un rhéostat l'intensité du courant électrique dans une bobine fixe (inducteur) placée au voisinage d'une autre bobine fixe (induit) reliée à un milliampèremètre (*fig.* 10). Un courant apparaît dans l'induit, le sens de ce courant dépendant du sens de la variation de l'intensité.

Le courant dans l'inducteur varie avec le temps; il crée ainsi dans l'induit un champ magnétique *variable*, qui est la cause du courant induit observé.

Remarque : Le phénomène est beaucoup plus marqué si on utilise des bobines munies d'un noyau de fer doux.



10. Mise en évidence du phénomène d'induction dans un circuit fixe (induit) lors de la variation, au cours du temps, du champ magnétique.
Lorsqu'on déplace dans le sens indiqué le curseur du rhéostat, l'intensité du courant dans l'inducteur augmente. Cette variation de i, et donc du champ $\vec{B}$ créé par l'inducteur, fait apparaître dans l'induit un courant qui a le sens indiqué.

Scanné avec CamScanner

9.1.3 conclusion

En conclusion, nous énoncerons :

• **Une force électromotrice d'induction, susceptible de faire circuler un courant dans un circuit fermé, apparaît :**

— lorsqu'il y a déplacement relatif d'un inducteur et d'un induit;
— lorsqu'un inducteur engendre un champ magnétique variable au cours du temps dans un induit fixe.

Dans les deux cas, le système inducteur crée un *flux magnétique variable* avec le temps dans le circuit induit. Ainsi :

• **Une force électromotrice d'induction apparaît dans un circuit lorsque le flux du champ magnétique varie à travers ce circuit.**

Remarque 1 : Bien évidemment, une force électromotrice d'induction apparaît lorsque les deux phénomènes sont concomitants.

Remarque 2 : Dans le cas particulier du déplacement d'un induit dans un champ magnétique inducteur, l'apparition du courant induit s'interprète par l'effet d'une force de Lorentz exercée par le champ inducteur sur les porteurs de charges (électrons) du circuit induit. Ces porteurs de charge sont en effet en mouvement dans le champ inducteur, du fait même du déplacement du circuit induit. La force de Lorentz crée alors un déplacement d'ensemble des porteurs de charge par rapport au réseau métallique (courant électrique).

9.2 loi de Lenz

Reprenons la première expérience et intéressons-nous au sens du courant induit.
Approchons le pôle nord de l'aimant de la face 1 de la bobine (*fig.* 11). Le milliampèremètre indique le sens du courant induit : ce courant parcourt la bobine dans un sens tel que la face 1 devient face nord et s'oppose à l'approche du pôle nord de l'aimant.
Éloignons le pôle nord de cette face 1 : le sens du courant induit est tel qu'elle devient face sud et s'oppose au retrait de l'aimant.
Ces résultats traduisent la **loi de Lenz** :

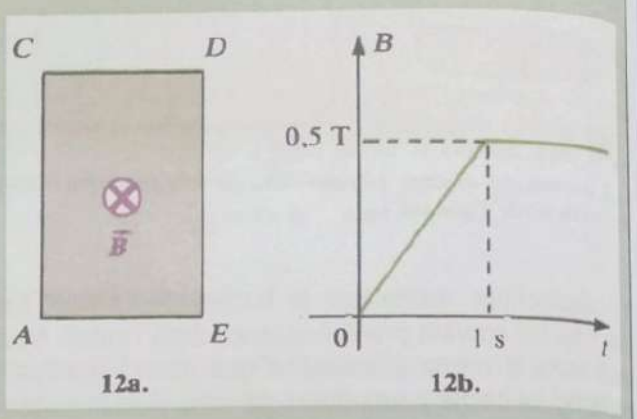
• **Le phénomène d'induction électromagnétique est tel que, par ses effets, il s'oppose à la cause qui lui donne naissance.**

Cette loi est très générale et englobe tous les cas d'induction électromagnétique, avec ou sans déplacement.

11. Lorsqu'on approche le pôle nord de l'aimant d'une face de la bobine, le sens du courant induit est tel que cette face devient face nord; la bobine tend donc à repousser l'aimant. Si on éloigne maintenant le pôle nord de l'aimant de cette même face, le courant induit change de sens: la face nord devient face sud, et la bobine tend alors à retenir l'aimant.

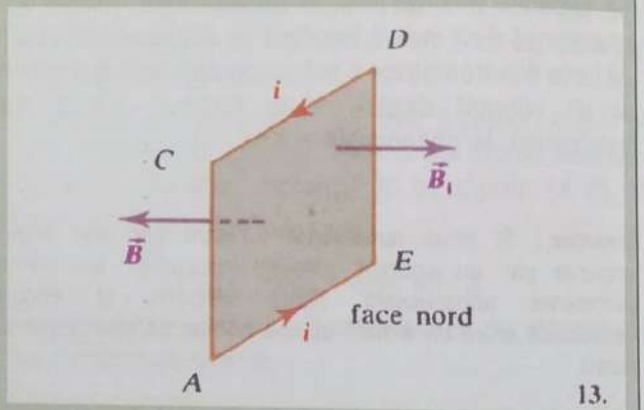
APPLICATION 1

Une spire carrée est placée dans un champ magnétique uniforme (fig. 12a) dont la norme varie comme l'indique la figure 12b. Déterminer le sens du courant induit.



12a. 12b.

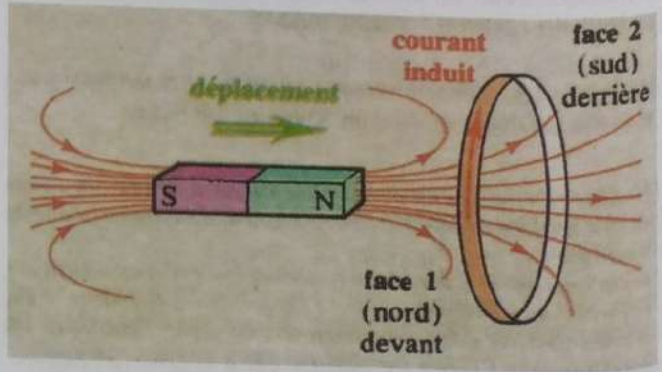
L'intensité B du champ magnétique croît avec le temps. Le courant induit va créer un champ magnétique $\vec{B}_i$ qui s'oppose à cette croissance, donc de sens opposé à $\vec{B}$, c'est-à-dire dirigé vers l'avant. Le courant induit circule dans le sens *AEDC* (*fig.* 13).



13.

Autre méthode
Tout se passe, pour le sens du courant induit, comme si on approchait devant la spire le pôle nord d'un aimant droit. Une face nord apparaît donc sur la spire; le courant induit circule dans le sens *AEDC*.

Le courant induit n'apparaît que lorsque $\vec{B}$ varie, c'est-à-dire pour t appartenant à l'intervalle [0 s, 1 s].

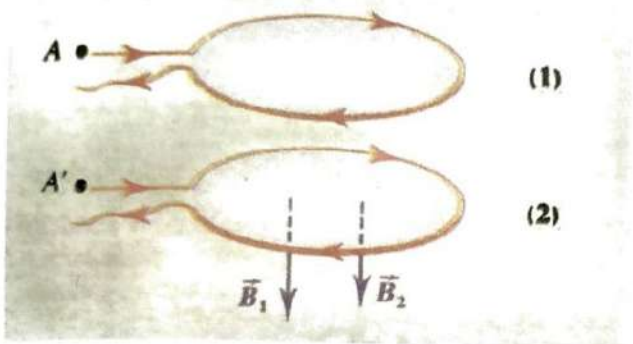


fiche expérimentale

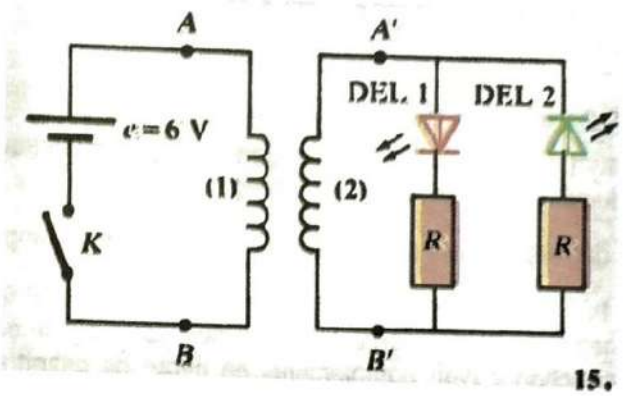
I. APPLICATION DE LA LOI DE LENZ

Nous nous proposons de rechercher les bornes homologues de deux enroulements en appliquant la loi de Lenz.

Par définition, les bornes A et A' des deux enroulements de la figure 14 sont dites *homologues* si les courants qui entrent par A et par A' créent des champs magnétiques et des flux qui ajoutent leurs effets dans les deux enroulements.



14. *Afin de simplifier le schéma, chacun des deux enroulements a été réduit à une seule spire.*
• $\vec{B}_1$ *est le champ créé par l'enroulement* (1) *à travers l'enroulement* (2);
• $\vec{B}_2$ *est le champ créé par l'enroulement* (2) *à travers lui-même.*
Ici, les champs $\vec{B}_1$ *et* $\vec{B}_2$ *ajoutent leurs effets : les bornes A et A' sont homologues.*



15.

La détermination des bornes homologues est indispensable si l'on veut vérifier le sens de la force électromotrice induite.

La recherche de ces bornes nécessite *a priori* de connaître le sens d'enroulement des bobinages, ce qui n'est pas toujours facile. Aussi procéderons-nous à l'expérience suivante.

1. Expérience

Réalisons le montage de la figure 15. Les deux bobines comportent 500 spires et sont placées côte à côte ou dans le prolongement l'une de l'autre. Les deux DEL (l'une rouge, l'autre verte) sont disposées en parallèle aux bornes de la seconde bobine, mais montées en sens inverse. Elles sont protégées par deux résistances de 390 Ω.

Fermons l'interrupteur K ; la DEL 1 s'allume pendant un court instant. Ouvrons K ; la DEL 2 s'allume pendant un court instant. Montrons que nous pouvons conclure de ces résultats expérimentaux que les bornes A et A' des deux enroulements sont homologues.

2. Interprétation

• A la fermeture de K, le courant entre par la borne A de l'enroulement (1) et crée un flux magnétique à travers l'enroulement (2). Cette brusque variation de flux donne naissance à une force électromotrice d'induction dans le circuit (2). D'après la loi de Lenz, le courant induit dans (2) s'oppose à l'installation du flux inducteur. Or ce courant rentre dans l'enroulement (2) par la borne B', puisque c'est la DEL 1 qui s'allume. Nous en concluons que les flux créés par les deux enroulements s'opposent lorsque les courants rentrent respectivement par les bornes A et B' de ces enroulements, autrement dit que les bornes A et A' sont homologues.

• A l'ouverture de K, le flux induit s'oppose à la brusque annulation du flux inducteur; les deux flux ajoutent leurs effets et le courant induit rentre par la borne A' de l'enroulement (2) : la DEL 2 s'allume pendant un court instant.

Bien évidemment, nous aurions conclu que les bornes A et B' (ou B et A') étaient homologues si les DEL s'étaient allumées dans l'ordre inverse.

Scanné avec CamScanner

9.3 force électromotrice induite

9.3.1 expérience

Reprenons l'une des expériences précédentes, l'expérience 1 par exemple (*fig.* 8). Approchons *lentement* l'aimant de la bobine : l'intensité du courant induit mesurée par le milliampèremètre est faible.
Approchons *rapidement* l'aimant : l'intensité du courant induit est nettement plus grande pour une même variation de flux provoquée.

L'intensité du courant induit et la force électromotrice d'induction qui l'engendre augmentent donc lorsque la variation de flux provoquée est plus rapide.

9.3.2 relation de Faraday-Lenz

Durant le phénomène d'induction, le flux magnétique inducteur Φ est fonction du temps : $t \longmapsto \Phi(t)$.
La dérivée $\frac{d\Phi}{dt}$ du flux par rapport au temps rend compte de la « rapidité » et du sens des variations du flux Φ qui engendrent la force électromotrice *algébrique* d'induction e (voir compléments en début de chapitre). Une étude expérimentale quantitative conduit à la relation de Faraday-Lenz :

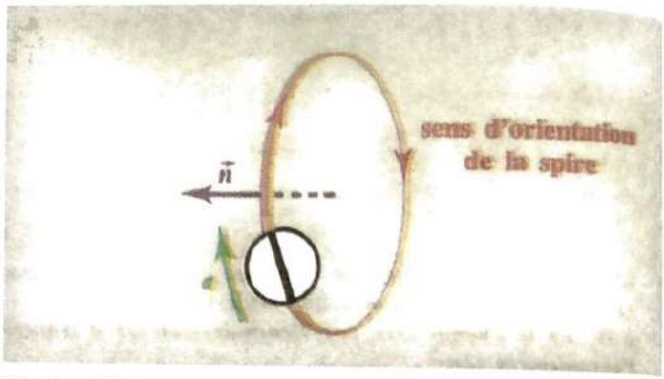
$$e = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

• La force électromotrice d'induction est égale à l'opposé de la dérivée par rapport au temps du flux magnétique inducteur.

Cette force électromotrice se mesure en volts, Φ étant exprimé en webers et t en secondes.

Conventions d'orientation

Orientons, *a priori* arbitrairement, le circuit (choix d'un sens de parcours positif); l'orientation choisie définit le sens du vecteur unitaire normal $\vec{n}$ en chaque point de la surface du circuit et détermine le signe du flux magnétique Φ (*fig.* 16). La flèche associée à la force électromotrice est orientée dans le même sens que le sens positif d'orientation du circuit.



16. *La flèche associée à la force électromotrice d'induction e a le même sens que le sens positif d'orientation choisi sur le circuit. A $e > 0$ correspond une f.e.m. qui tend à faire circuler un courant induit dans le sens positif.*

Signe de la force électromotrice d'induction

Le signe − traduit mathématiquement la loi de Lenz :

• à une augmentation de flux $\left(\frac{d\Phi}{dt} > 0\right)$ correspond une f.e.m. négative qui tend à faire circuler un courant dans le sens négatif. Ce courant s'oppose à l'augmentation du flux;

• à une diminution de flux $\left(\frac{d\Phi}{dt} < 0\right)$ correspond une f.e.m. positive qui tend à faire circuler un courant dans le sens positif. Ce courant s'oppose à la diminution du flux.

Intensité du courant induit

Si R est la résistance du circuit induit, en l'absence de toute autre force électromotrice dans le circuit, l'intensité *algébrique* du courant induit est donnée par la relation :

$$i = \frac{e}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}.$$

Si $i > 0$, le courant induit circule dans le sens positif d'orientation du circuit; si $i < 0$, il circule en sens inverse.

Remarque : Le plus souvent, on se borne à calculer $|e| = \left|\frac{d\Phi}{dt}\right|$ et $|i| = \frac{|e|}{R}$, le sens du courant induit étant directement donné par la loi de Lenz.

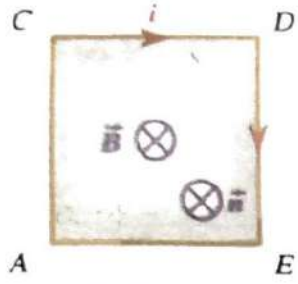
Scanné avec CamScanner

APPLICATION 2

On reprend l'application précédente. La spire carrée a une résistance $R = 0{,}1\ \Omega$; la longueur d'un côté est $a = 10$ cm. Déterminer le courant induit qui apparaît. (On négligera le flux créé par le courant induit à travers son propre circuit.)

Orientons le vecteur unitaire $\vec{n}$, normal au plan de la spire, dans le sens de $\vec{B}$ afin d'avoir un flux positif. Ce choix implique un sens positif *ACDE* (règle du tire-bouchon) sur la spire (*fig.* 17). Avec cette convention, nous avons :

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{n}S = Ba^2 > 0.$$



17.

- Pour $t \in [0\text{ s}, 1\text{ s}[$ et $B = 0{,}5t$ (en teslas) :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -a^2 \frac{dB}{dt} = -(0{,}1)^2 \times 0{,}5 = -5 \cdot 10^{-3}\ \text{V};$$

d'où : $$i = \frac{e}{R} = -5 \cdot 10^{-2}\ \text{A}.$$

Le nombre obtenu est négatif; nous en déduisons que le courant induit, d'intensité 50 mA, circule dans le sens *AEDC*, opposé au sens positif choisi.

- Pour $t > 1$ s, B et Φ sont constants; d'où :

$$e = 0,\ i = 0.$$

Remarque : Montrons que ce résultat est bien indépendant de notre choix d'orientation initial. Orientons la normale $\vec{n}$ dans le sens opposé à celui de $\vec{B}$. Le sens positif le long de la spire est maintenant *AEDC* et le flux est négatif :

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{n}S = Ba^2 \cos(\vec{n}, \vec{B}) = -Ba^2;$$

d'où : $$e = -\frac{d\Phi}{dt} = a^2 \frac{dB}{dt}.$$

Avec $\frac{dB}{dt} = 0{,}5$, il vient :

$$e = (0{,}1)^2 \times 0{,}5 = 5 \cdot 10^{-3}\ \text{V}$$

et : $$i = \frac{e}{R} = 5 \cdot 10^{-2}\ \text{A}.$$

Le nombre obtenu est positif; nous en déduisons que le courant induit, d'intensité 50 mA, circule dans le sens *AEDC*, sens positif choisi. Nous arrivons aux mêmes conclusions.

APPLICATION 3

On considère le circuit schématisé sur la figure 18 a, *à travers lequel on fait varier le flux d'un champ magnétique. Exprimer l'intensité du courant induit en fonction de R_1, R_2 et e, force électromotrice induite.*

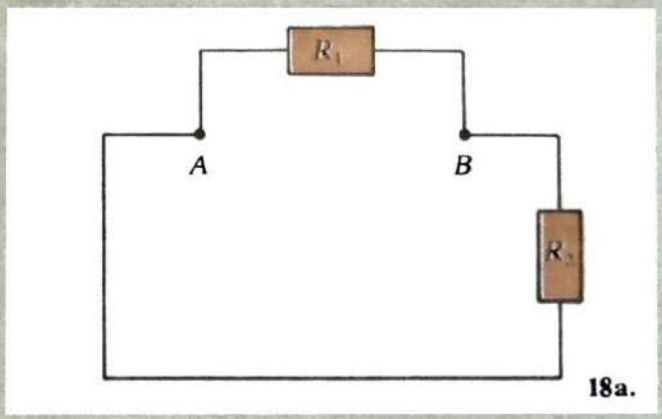
Orientons le circuit comme l'indique la figure 18 b. La force électromotrice induite est équivalente à un générateur idéal de tension placé, arbitrairement, dans la partie du circuit comprise entre *A* et *B* et qui comprend la résistance R_2. Appliquons la loi d'Ohm généralisée entre *A* et *B*, pour les deux portions du circuit comprenant respectivement R_1 et R_2; il vient, i étant l'intensité algébrique du courant induit :

$$u_{AB} = R_2 i - e \quad \text{et} \quad u_{BA} = R_1 i;$$

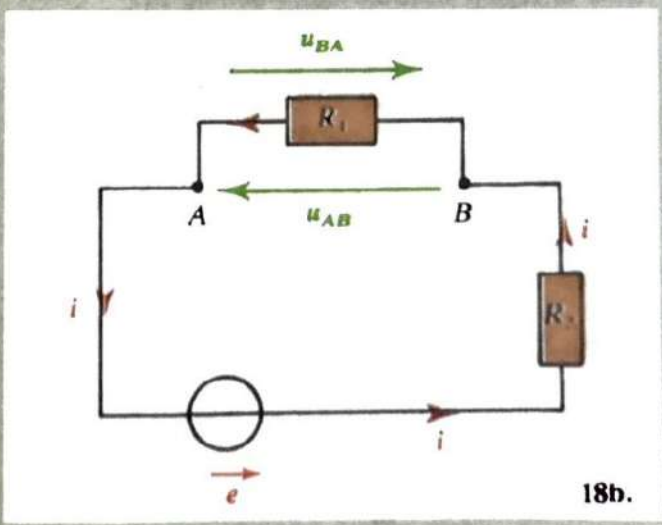
d'où, avec $u_{AB} = -u_{BA}$:

$$i = \frac{e}{R_1 + R_2},$$

relation qui traduit la loi de Pouillet (voir cours de Seconde) sous forme algébrique.



18a.

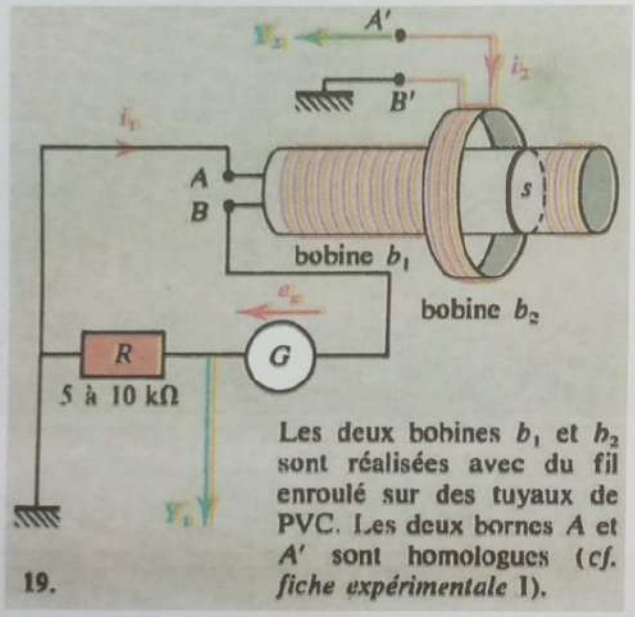


18b.

fiche expérimentale

II. VÉRIFICATION DE LA RELATION DE FARADAY-LENZ

Réalisons le montage de la figure 19. Un oscillographe permet de visualiser les variations de l'intensité i_1 dans la bobine b_1 (voie Y_1) et celles de la tension $u_{A'B'}$ (voie Y_2).



19. Les deux bobines b_1 et b_2 sont réalisées avec du fil enroulé sur des tuyaux de PVC. Les deux bornes A et A' sont homologues (*cf. fiche expérimentale* 1).

Première expérience

• Le générateur G (dont la masse est isolée de la terre du secteur) délivre un signal sinusoïdal basse fréquence de pulsation ω; nous observons que :

— la tension $u_{A'B'}$ est sinusoïdale;
— l'amplitude de $u_{A'B'}$ augmente avec la fréquence $f = \omega/2\pi$ du signal sinusoïdal;
— l'oscillogramme n'est pas modifié si nous déplaçons la bobine externe b_2, tout en restant dans la région centrale de la bobine b_1.

• *Interprétation*

La bobine b_1 engendre à travers b_2 un flux magnétique Φ variable au cours du temps; b_2 est le siège d'une f.e.m. d'induction e.

Le champ magnétique $\vec{B}_1$ crée par b_1 est proportionnel à i_1, de sorte que Φ est de la forme :

$$\Phi = ki_1, \quad \text{avec} \quad i_1 = I_{1m} \cos \omega t,$$

k étant une constante de proportionnalité.

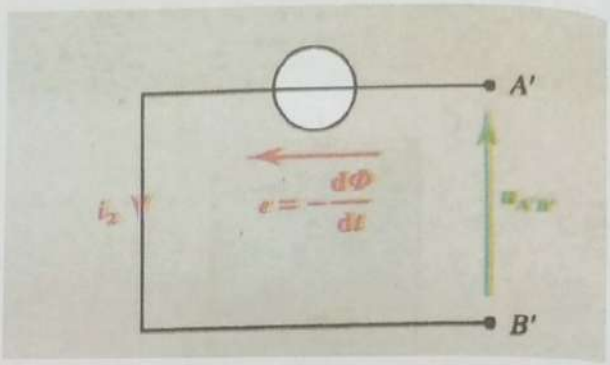
Avec les conventions d'orientation choisies (*fig.* 19 et 20), il vient :

$$u_{A'B'} = -e = +\frac{d\Phi}{dt},$$

soit : $$u_{A'B'} = k\frac{di_1}{dt} = -kI_{1m}\omega \sin \omega t.$$

Cette expression, qui découle de la relation de Faraday-Lenz, est bien conforme aux résultats expérimentaux (tension sinusoïdale, d'amplitude proportionnelle à $f = \omega/2\pi$).

Enfin, lorsqu'on déplace la bobine b_2, le flux Φ — et donc la tension $u_{A'B'}$ — garde la même valeur instantanée, à condition de rester dans la région centrale de la bobine b_1 où le champ B_1 est *uniforme*.



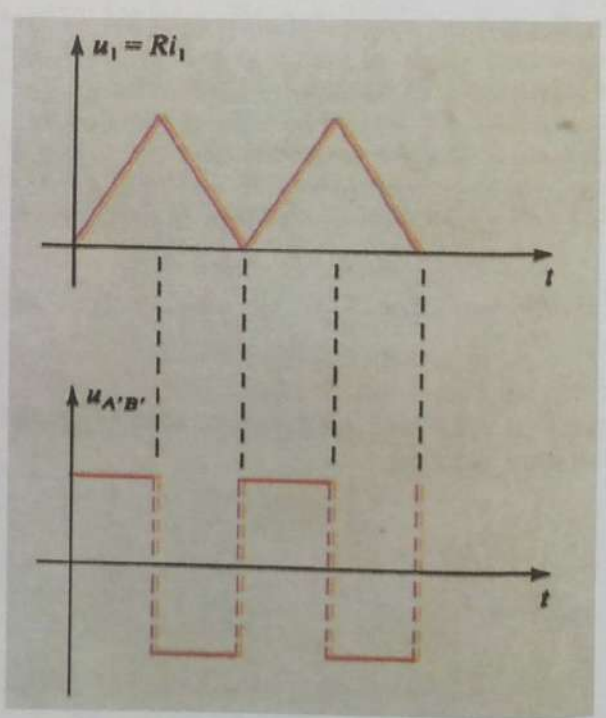
20. *Les sens positifs choisis pour i_1 (fig. 19) et pour i_2 correspondent à des courants entrant par les bornes homologues A et A' des bobines b_1 et b_2. Le flux Φ créé par b_1 à travers b_2 a donc le même signe que i_1 :*

$$\Phi = ki_1, \quad \text{avec } k > 0.$$

Seconde expérience

• Le générateur délivre maintenant une tension en dents de scie. La résistance R étant de l'ordre de 10 kΩ, nous observons que (*fig.* 21) :

— l'intensité i_1 est en dents de scie;
— la tension $u_{A'B'}$ est en créneaux.



21. *Oscillogramme obtenu avec le montage de la figure 19; en haut : voie 1; en bas : voie 2.*

Scanné avec CamScanner

• *Interprétation*

Soit N_1 le nombre de spires de la bobine b_1 et ℓ_1 sa longueur. Le champ magnétique $\vec{B}_1$ a pour intensité :

$$B_1 = \mu_0 \frac{N_1}{\ell_1} i_1 .$$

Le flux de ce champ à travers la bobine b_2 est donc :

$$\Phi = N_2 B_1 s = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell_1} s i_1 ,$$

où N_2 est le nombre de spires de b_2 et s, l'aire de la section droite de b_1 (dans la région centrale de b_1, le champ $\vec{B}_1$ est en effet nul à l'extérieur de cette bobine). Il vient alors :

$$u_{A'B'} = \frac{d\Phi}{dt} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell_1} s \frac{di_1}{dt} ,$$

soit, $u_1 = Ri_1$ étant la tension aux bornes de la résistance :

$$u_{A'B'} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 s}{\ell_1 R} \frac{du_1}{dt} .$$

La tension u_1 étant en dents de scie, $\frac{du_1}{dt}$ et donc $u_{A'B'}$ sont deux tensions en créneaux. Ce résultat, obtenu par application de la relation de Faraday-Lenz, est bien conforme aux observations expérimentales.

APPLICATION 4

Un conducteur rectiligne CD de longueur ℓ est posé sur deux rails parallèles et horizontaux (fig. 22), perpendiculairement à ceux-ci. L'ensemble est placé dans l'entrefer d'un aimant en U. Les lignes de champ du champ magnétique uniforme $\vec{B}$ sont perpendiculaires au plan des rails. Un milliampèremètre, branché aux extrémités E et F, ferme le circuit FCDEF. On provoque le déplacement de la barre CD le long des rails : le microampèremètre détecte un courant induit. La résistance du circuit, supposée constante, est égale à R.

Établir l'expression de l'intensité i du courant induit en fonction de B, ℓ et v, vitesse de la barre par rapport au laboratoire.

Application numérique : $B = 0{,}1$ T; $v = 1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $\ell = 5$ cm; $R = 200\ \Omega$.

Orientons la normale $\vec{n}$ au plan du circuit dans le sens de $\vec{B}$. Il en résulte un sens positif *FCDE* sur le circuit (*fig.* 23). Désignons par Φ_0 le flux initial à travers le circuit comprenant la barre et les rails. A une translation x de la barre de longueur ℓ correspond une variation $\Delta S = x\ell$ de l'aire de la surface du circuit induit, et le flux devient :

$$\Phi = \Phi_0 + \vec{B} \cdot \vec{n} \ell x = \Phi_0 + B\ell x,$$

$\vec{B}$ et $\vec{n}$ ayant même direction et même sens.

La force électromotrice d'induction e s'écrit :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\ell \frac{dx}{dt},$$

soit :

$$e = -B\ell v;$$

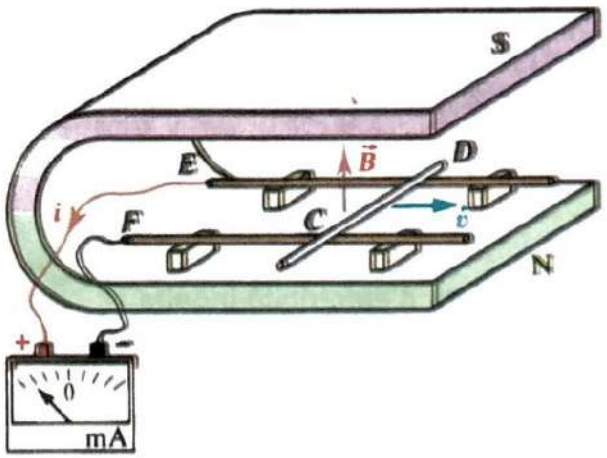
d'où :

$$i = \frac{e}{R} = -\frac{B\ell v}{R}.$$

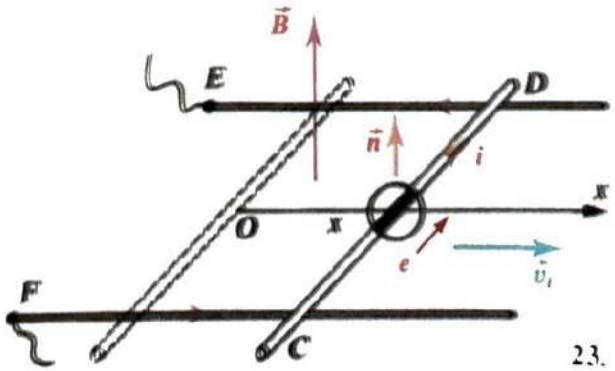
Si v est positif (la barre se déplace vers la droite), i est négatif : le courant circule de D vers C dans la barre. Ce résultat est bien conforme à la loi de Lenz. En effet, si la barre se déplace vers la droite, la surface du circuit et le flux de $\vec{B}$ tendent à augmenter; le courant induit, qui doit créer un flux antagoniste, circule dans le sens négatif.

Application numérique :

$$i = \frac{0{,}1 \times 5 \cdot 10^{-2} \times 1}{200} = 2{,}5 \cdot 10^{-5}\ \text{A} = 25\ \mu\text{A}.$$



22. ***Le déplacement du conducteur mobile CD dans le champ magnétique engendre un courant induit dont le sens dépend de celui du champ $\vec{B}$ et de la vitesse $\vec{v}$. Si l'aiguille du milliampèremètre dévie vers la gauche, $i<0$; si elle dévie vers la droite, $i>0$.***



23.

Scanné avec CamScanner

9.3.3 tension induite en circuit ouvert

Que se passe-t-il si on fait varier le flux magnétique au travers d'un circuit ouvert? Bien évidemment aucun courant induit ne peut circuler. Néanmoins, il apparaît une tension induite aux bornes du circuit.

Branchons une spire ouverte (*A*, *B*) aux bornes *Y* et *Y'* d'un oscillographe (*fig.* 24). Comme lors de la première expérience du paragraphe 9.1.1, approchons un aimant de l'une des faces de la spire. Le spot dévie : la tension u_{AB} n'est pas nulle.

L'oscillographe ayant une résistance pratiquement infinie, l'intensité dans la spire est nulle. Tout se passe comme si on mesurait la tension aux bornes d'un générateur idéal de tension de force électromotrice *e*, avec :

$$u_{AB} = \pm e = \pm \frac{d\Phi}{dt},$$

le signe dépendant de l'orientation choisie.

• **La tension induite qui apparaît aux bornes d'un circuit, dans lequel l'intensité du courant est nulle, est égale en valeur absolue à la force électromotrice d'induction.**

9.3.4 force électromotrice induite moyenne

L'utilisation de la relation $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ nécessite la connaissance de la fonction $\Phi(t)$. Ce n'est pas le cas dans de nombreuses expériences où l'on peut, en revanche, déterminer la variation de flux $\Delta\Phi$ qui s'effectue pendant une durée finie Δt. On définit alors une force électromotrice induite moyenne sur l'intervalle de temps Δt :

$$e_{moy} = \frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t}.$$

9.3.5 quantité d'électricité induite

Si *q* est la charge transportée par le courant induit d'intensité *i* dans un circuit de résistance *R* qui ne comporte pas d'autres forces électromotrices, nous avons :

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}.$$

Intégrons cette relation par rapport au temps, entre deux dates t_1 et t_2; il vient :

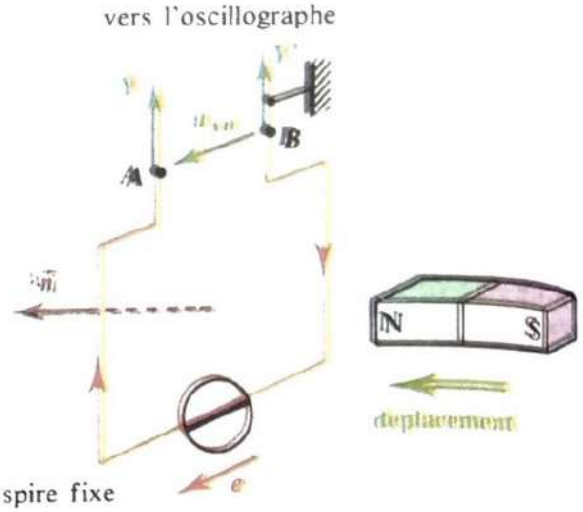
$$\left[q(t)\right]_{t_1}^{t_2} = -\frac{1}{R}\left[\Phi(t)\right]_{t_1}^{t_2},$$

soit : $$q_2 - q_1 = -\frac{1}{R}(\Phi_2 - \Phi_1).$$

Pour une variation finie $|\Delta\Phi|$ du flux, la valeur absolue *Q* de la charge électrique transportée par le courant induit vaut donc :

$$Q = |\Delta q| = \frac{1}{R}|\Delta\Phi|.$$

Nous noterons que *Q* est indépendante de la durée Δt de la variation du flux magnétique.



24. *Avec l'orientation de la spire (A, B) indiquée, on a :*

$$u_{AB} = e = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Toujours avec l'orientation choisie, le flux Φ du champ magnétique créé par l'aimant augmente lorsque celui-ci se rapproche de la spire; on a donc $\frac{d\Phi}{dt} > 0$, soit $u_{AB} < 0$.

APPLICATION 5

Une bobine plate formée de N = 500 spires circulaires de rayon r = 0,1 m a son axe initialement parallèle aux lignes d'un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme d'intensité 0,2 T (fig. 25). En 0,5 s, son axe devient orthogonal à $\vec{B}$.
Quelle est la f.e.m. induite moyenne qui apparaît?
Quel est le sens du courant induit?

Dans sa position initiale, orientons le vecteur unitaire $\vec{n}$ normal au plan des spires dans le même sens que $\vec{B}$. Les spires sont donc orientées dans le sens positif indiqué (flèche rouge). Avec ces conventions, le flux est positif et égal à :

$$\Phi_0 = N\vec{B}\,.\,\vec{n}S = NBS$$
$$= 500 \times 0{,}2 \times \pi \times (0{,}1)^2 = 3{,}14 \text{ Wb}.$$

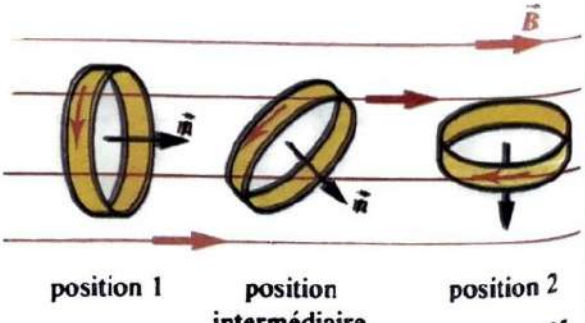
Dans sa position finale, $\Phi_1 = 0$, car $\vec{B}$ est alors orthogonal à $\vec{n}$. Donc, au cours du mouvement :

$$\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_0 = -3{,}14 \text{ Wb}.$$

La f.e.m. moyenne induite pendant la durée $\Delta t = 0{,}5$ s vaut :

$$e_{moy} = -\frac{(-3{,}14)}{0{,}5} = 6{,}28 \text{ V}.$$

Le flux Φ diminue et le courant induit circule, pendant toute la durée du déplacement, dans le sens positif choisi.

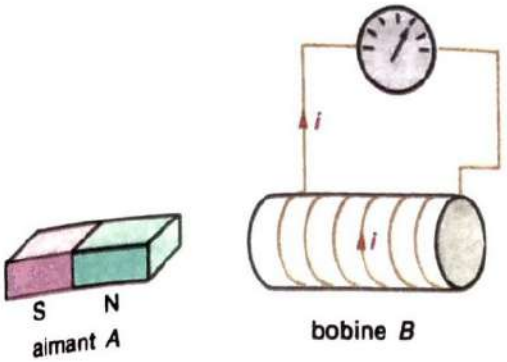


25.

L'essentiel du cours

9.1 A On considère un aimant A et une bobine B reliée à un ampèremètre. Voici sept propositions :

Un courant circule dans le sens indiqué lorsque :
1. on approche A de B fixe ;
2. on approche B de A fixe ;
3. on éloigne A de B fixe ;
4. on éloigne B de A fixe ;
5. on approche en même temps A et B ;
6. on éloigne en même temps A et B ;
7. on fait subir à A une rotation de $\pi/2$ autour de l'axe sud-nord.



Cocher la ou les cases correspondant à une bonne réponse :

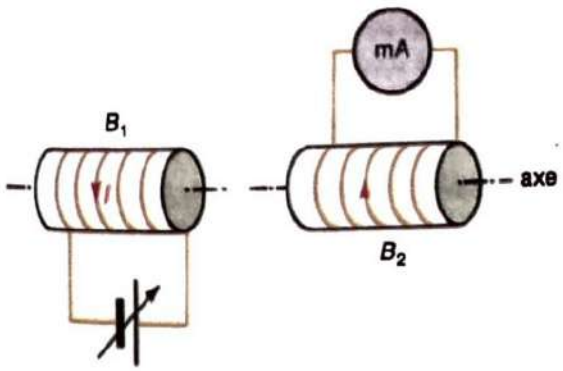
[a] Sont vraies les propositions 1 et 5.

[b] Sont vraies les propositions 3, 4 et 6.

[c] Sont vraies les propositions 1, 2 et 7.

[d] Sont vraies les propositions 1, 2 et 5.

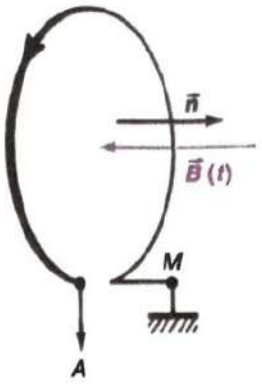
9.2 A *Vrai* ou *faux* ?
On considère deux bobines B_1 et B_2 (figure).



- B_1 est l'induit, et B_2 est l'inducteur.

Un courant circule dans B_2 dans le sens indiqué lorsque :
- on augmente I ;
- on diminue I ;
- on éloigne B_2 de B_1 ;
- on rapproche B_2 de B_1 ;
- on fait tourner B_2 de $\pi/2$ autour de son axe Δ ;
- on fait tourner B_1 de $\pi/2$ autour de son axe Δ.

9.3 A Une spire rectangulaire d'aire S est placée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ de norme $B(t)$ variant en fonction du temps t. On choisit un sens d'orientation sur cette spire (figure).



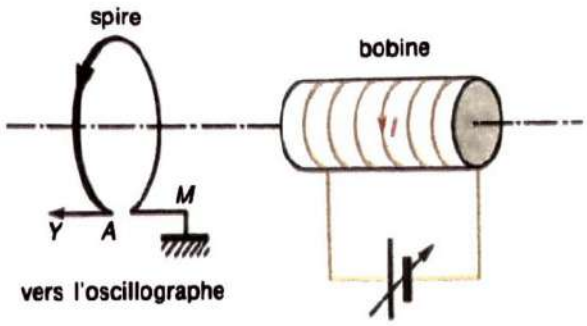
1/ Donner l'expression du flux du champ magnétique à travers la spire.

2/ Exprimer la f.e.m. d'induction en fonction de la dérivée $\frac{dB}{dt}$.

3/ La spire est en circuit ouvert. Donner l'expression de la tension u_{AM}.

4/ Le potentiel du point M est pris comme potentiel de référence ($v_M = 0$). Quel est le potentiel v_A en A ?

9.4 A Dans quels cas le spot de l'oscillographe se déplace-t-il vers le bas ?



1/ On approche la bobine de la spire.

2/ On éloigne la bobine de la spire.

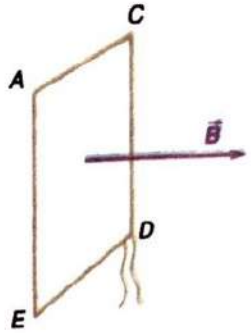
3/ On diminue l'intensité I.

4/ On augmente l'intensité I.

5/ On diminue l'aire de la spire.

Exercices de base

9.5 A On considère une spire rectangulaire conductrice placée dans un champ magnétique uniforme. La direction du vecteur champ est orthogonale au plan du cadre.



Scanné avec CamScanner

EXERCICES

1/ On augmente progressivement la norme du champ $\vec{B}$. Dans quel sens circule le courant induit ?

2/ On diminue progressivement la norme du champ $\vec{B}$. Dans quel sens circule le courant induit ?

3/ Le champ $\vec{B}$ garde maintenant une norme constante, mais il change progressivement d'orientation pour tourner de π. Le courant induit garde-t-il toujours le même sens ?

4/ On supprime brusquement le champ $\vec{B}$. Y a-t-il création d'un courant induit ? Si oui, son intensité est-elle plus grande que dans la première question ?

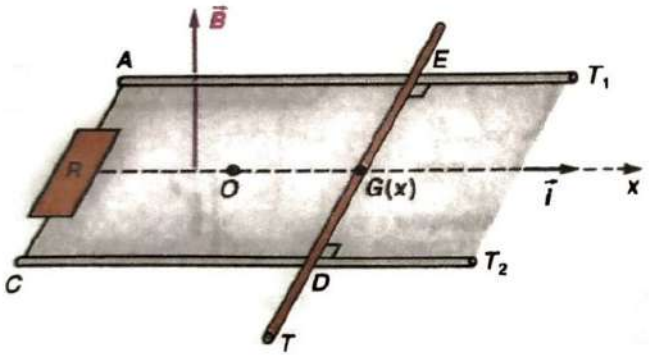
9.6 AB3 A l'aide de bobines de Helmholtz, on crée un champ magnétique dont les lignes de champ sont des droites parallèles, mais dont l'intensité varie en fonction du temps, selon la loi :

$$B = B_0 \cos \omega t.$$

On place dans ce champ une petite bobine plate de diamètre 8 cm et comportant 100 spires. L'axe de cette bobine est orthogonal aux lignes de champ. Calculer l'amplitude de la f.e.m. induite dans cette bobine.

Données : $B_0 = 0{,}05$ T ; $\omega = 50\ \pi$ rad . s $^{-1}$.

9.7 Une tige T se déplace sans frottement à la vitesse constante $\vec{v} = v\vec{j}$ sur deux glissières rectilignes T_1 et T_2, horizontales et parallèles, distantes de ℓ. La tige T est perpendiculaire aux glissières (figure). On exerce une face $\vec{F} = F\vec{j}$.



La tige, les glissières et la résistance R constituent un circuit électrique, lequel est placé dans un champ magnétique uniforme vertical $\vec{B}$ d'intensité $B = 0{,}4$ T.

1/ A Expliquer pourquoi il apparaît un courant induit dans le circuit.

2/ A Quel est le sens du courant induit ?

3/ A Le circuit est orienté dans le sens du courant induit. Montrer que le flux du champ magnétique à travers la surface délimitée par le circuit s'écrit :

$$\Phi = \Phi_0 + at,$$

où a est une constante que l'on déterminera.

4/ A En déduire la f.e.m. e induite dans le circuit et l'intensité du courant. (On négligera la résistance des rails et de la tige devant R.)

5/ A Analyser les forces qui s'exercent sur la tige. Quelle force $\vec{F}$ doit-on exercer sur la tige pour maintenir sa vitesse constante ?

6/ B3 *Application numérique :* $\ell = 12$ cm ; $v = 2$ m . s $^{-1}$; $R = 2\ \Omega$.
Calculer e et $|\vec{F}|$

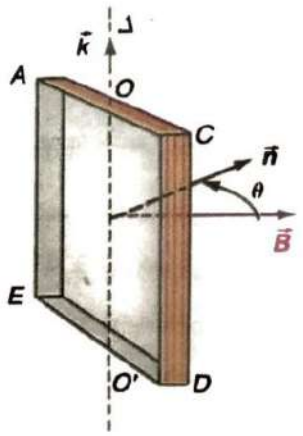
9.8 On reprend le dispositif de l'exercice précédent avec les mêmes conditions expérimentales, mais on branche un voltmètre aux bornes A et C de la résistance.

1/ Exprimer la tension u_{CA} en fonction de B, ℓ et v.

2/ On enlève maintenant la résistance R, mais on laisse entre A et C le voltmètre, de résistance interne pratiquement infinie.

a/ Apparaît-il une tension u_{CA} lorsque la barre se déplace ? Si oui, donner sa valeur littérale.
b/ Existe-t-il un courant induit ?
c/ Faut-il exercer une force $\vec{F} = F\vec{i}$ pour maintenir constante la vitesse de la barre ?

9.9 Principe de l'alternateur : Un cadre indéformable $ACDE$, d'aire S, comportant N spires, peut tourner autour d'un axe Δ passant par les milieux des côtés AC et DE. Ce cadre est placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ orthogonal à Δ. Les spires sont orientées dans le sens $ACDE$. La normale au plan du cadre fait un angle θ, orienté autour de l'axe $(\Delta, \vec{k})$, avec la direction du champ $\vec{B}$.

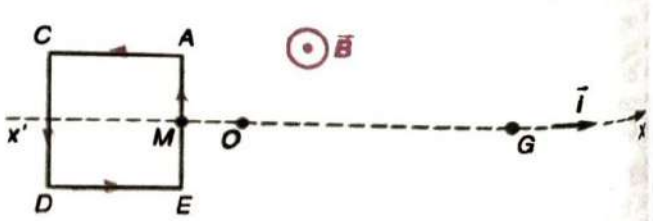


1/ A Calculer le flux du champ magnétique à travers une spire, puis à travers l'ensemble de la bobine.

2/ C La bobine tourne à la vitesse angulaire constante ω autour de Δ. Montrer qu'il apparaît dans la bobine une f.e.m. induite sinusoïdale. Préciser l'amplitude de cette f.e.m.

3/ B3 *Application numérique :* $N = 150$; $S = 900$ cm^2 ; $B = 0{,}6$ T ; $\omega = 3\,000$ tr . min $^{-1}$. Calculer l'amplitude de la f.e.m.

9.10 C Un cadre carré $ACDE$, de côté a, constitué d'un fil métallique, pénètre dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, de largeur $\overline{OG} = 2a$. Le plan du cadre est orthogonal à $\vec{B}$. On oriente le cadre selon le sens $ACDE$.



Scanné avec CamScanner

Le cadre se déplace à la vitesse constante $\vec{v} = v\vec{i}$ le long de l'axe $(O, \vec{i})$; sa position est définie par :

$$\overrightarrow{OM} = vt\vec{i}.$$

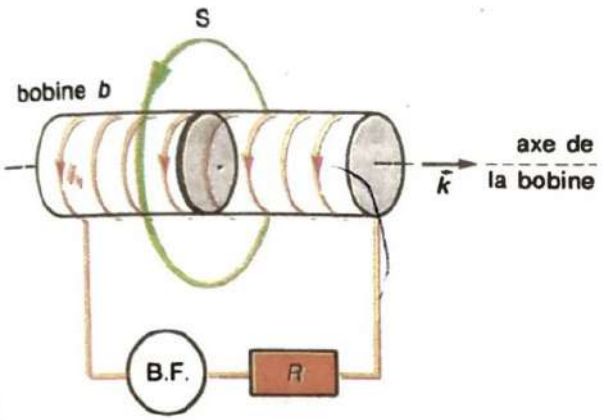
1/ Exprimer le flux Φ du champ $\vec{B}$ à traves le cadre en fonction de a, v et t. (On distinguera plusieurs cas de figure.)

2/ Représenter graphiquement la variation de Φ en fonction de t.

3/ En déduire la f.e.m. d'induction qui apparait dans le circuit. Représenter graphiquement sa variation en fonction du temps.

4/ Préciser le sens du courant i selon la position du cadre.

9.11 Une bobine de longueur $\ell = 24$ cm et de rayon moyen $r = 1$ cm comprend $n = 2500$ spires ; elle est traversée par un courant d'intensité i_1 (figure).



1/ A Le champ magnétique dans la région centrale de la bobine est $\vec{B}_1$. Déterminer sa direction et sa norme.

2/ Une spire conductrice entoure la bobine précédente dans sa région centrale (figure).

a/ A L'axe de la bobine est orthogonal au plan de la spire. Calculer le flux du champ $\vec{B}_1$ à travers la spire.

b/ C Montrer que ce flux est inchangé lorsqu'on déplace la spire parallèlement à l'axe de la bobine ou lorsqu'on la fait pivoter.

3/ AB3 Un générateur B.F. délivre l'intensité :

$$i_1 = 5 \sin 100\pi t,$$

où i est en A et t en s. Calculer la f.e.m. d'induction e qui prend naissance dans la spire. Préciser son amplitude et sa fréquence. ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ S.I.)

9.12 Un solénoïde parcouru par un courant d'intensité i crée un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, de norme $B = ki$ (figure). On met à l'intérieur du solénoïde une bobine plate à N spires d'aire S. La normale au plan de la bobine est parallèle à l'axe du solénoïde ; on oriente cette normale dans le sens de $\vec{B}$. Le courant $i(t)$ a la forme représentée sur la figure.

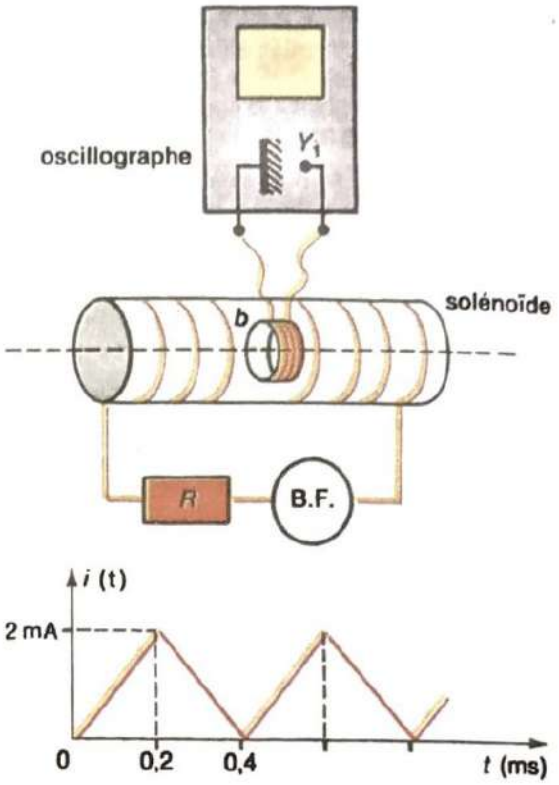
1/ A Calculer le flux du champ magnétique $\vec{B}$ à travers la bobine plate.

2/ A Calculer la f.e.m. induite dans cette bobine.

3/ C On branche un oscillographe aux bornes de cette bobine. Montrer que la tension observée sur l'écran est soit U, soit $-U$.

4/ B3 Représenter ce que l'on peut observer sur cet écran.

Application numérique : $k = 10^{-2}$; $S = 5$ cm² ; $N = 1000$.



9.13 AB3 Une bobine de 200 spires d'aire 10 cm² chacune est placée dans un champ magnétique uniforme d'intensité 1,1 T. Les lignes de champ sont parallèles à l'axe de la bobine. Les bornes étant en court-circuit, on annule le champ magnétique. La résistance de la bobine est 8 Ω. Calculer la quantité d'électricité induite. Cette quantité dépend-elle de la durée de l'opération ?

9.14 AB3 Un solénoïde comportant 200 spires de rayon $r = 5$ cm est placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ de telle façon que son axe ait pour direction celle de $\vec{B}$.

1/ Calculer le flux du champ $\vec{B}$ à travers une spire, puis à travers tout le solénoïde.

Application numérique : $B = 0{,}1$ T.

2/ La norme du champ $\vec{B}$ décroît de 0,1 T à 0,05 T en 0,05 s. Calculer la valeur absolue de la f.e.m. moyenne induite qui apparaît aux bornes du solénoïde.

Banc d'essais

9.15 AB3 Une bobine plate est formée de 100 spires de rayon 0,10 m. Elle est placée perpendiculairement aux lignes de champ d'un champ magnétique uniforme d'intensité 0,2 T.

Trouver la valeur absolue de la f.e.m. induite dans la bobine si, en 0,1 s à partir de la même position initiale :
— le champ est doublé ;
— le champ est ramené à zéro ;
— le champ change de sens mais en conservant la même intensité ;
— la bobine est tournée de $\pi/2$;
— la bobine est tournée de π.
Dans chaque cas, faire un schéma indiquant le sens du courant induit.

↳ ex. 9.13.

Scanné avec CamScanner

EXERCICES

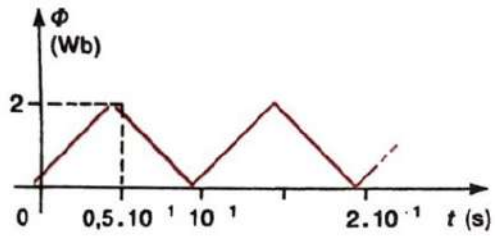
9.16 AB3 Dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, de norme constante égale à 0,05 T, on introduit une bobine plate constituée de 100 spires enroulées sur un cadre carré de 5 cm de côté.

1/ Calculer le flux du champ $\vec{B}$ lorsque le plan du cadre fait un angle θ avec le vecteur $\vec{B}$.

2/ Ce cadre tourne autour d'un axe médian avec une vitesse angulaire constante $\omega = 100\,\pi$ rad . s $^{-1}$. Calculer la f.e.m. induite.
On indiquera sur un dessin le sens d'orientation choisi sur la spire.

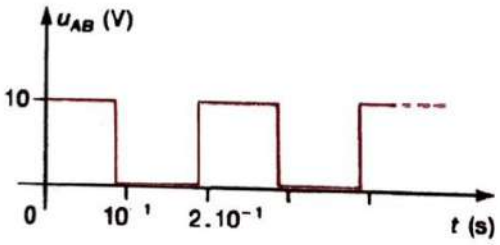
↳ ex. 9.7.

9.17 AB3 Le flux magnétique Φ à travers une bobine varie en fonction du temps (figure).



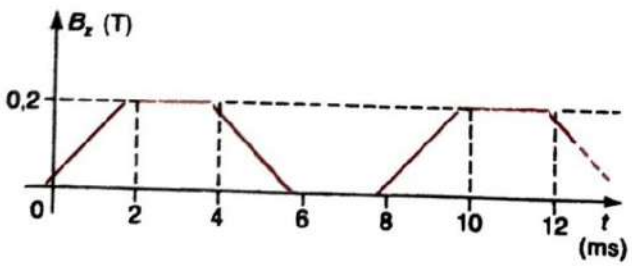
Calculer la f.e.m. induite. Représenter graphiquement la variation de la tension aux bornes de la bobine en fonction du temps.

9.18 B3C La tension u_{AB} aux bornes d'une bobine varie en fonction du temps (figure). Cette tension résulte d'une variation de flux magnétique Φ à travers la bobine.



Représenter graphiquement la variation du flux Φ en fonction du temps. Y a-t-il plusieurs solutions possibles ? Examiner le cas où l'on précise que le flux s'annule périodiquement.

9.19 AB3 Une spire conductrice carrée, de côté 0,3 m. est placé dans un champ magnétique uniforme. La composante B_z du champ magnétique suivant l'axe de la spire varie en fonction du temps (figure).



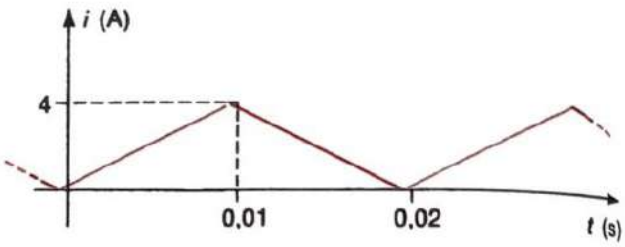
Calculer la f.e.m. induite dans la spire.
On relie les deux bornes de la spire à celles d'un oscillographe. Qu'observe-t-on à l'écran ?

↳ ex. 9.4.

9.20 AB3 Sur un manchon isolant de 10 cm de diamètre et 4 m de longueur, on enroule régulièrement 2586 m de fil de cuivre.

1/ Exprimer le champ magnétique B à l'intérieur de la bobine en fonction de l'intensité i du courant circulant dans le fil. (On considérera que la bobine est infiniment longue et que les spires sont jointives.)

2/ On place au centre de cette bobine une petite bobine plate comportant 500 spires de 5 cm de diamètre. Les deux bobines ont le même axe. On relie la petite bobine à un oscillographe afin d'observer la tension à ses bornes. Le courant i est périodique (figure).



Calculer la f.e.m. induite dans la bobine plate. Quel est le signal observé sur l'oscillographe ?

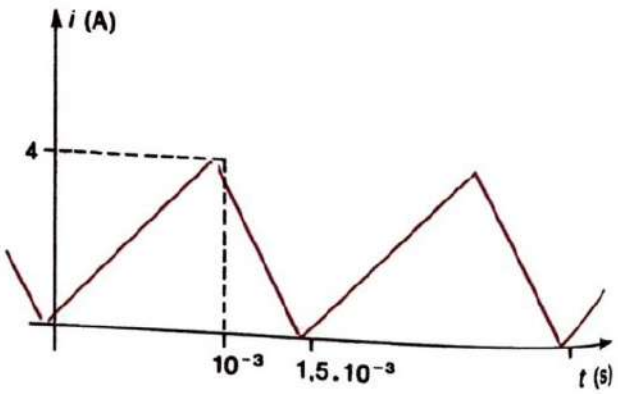
↳ ex. 9.12.

9.21 AB3 Un solénoïde comprend 1 000 spires de section moyenne 10 cm² réparties régulièrement sur une longueur de 30 cm.

1/ Les bornes de cette bobine, de résistance $R = 5\ \Omega$, sont branchées aux bornes d'un générateur de f.e.m. constante égale à 20 V. Donner les caractéristiques du vecteur champ magnétique créé à l'intérieur de la bobine.

2/ On introduit à l'intérieur du solénoïde une bobine plate d'aire 5 cm² comportant 50 spires. L'axe du solénoïde est orthogonal au plan de la bobine. Calculer le flux d'induction magnétique à travers la bobine.

3/ Le générateur est remplacé par un autre générateur qui délivre un courant d'intensité périodique (figure). On relie la bobine intérieure à un oscillographe.

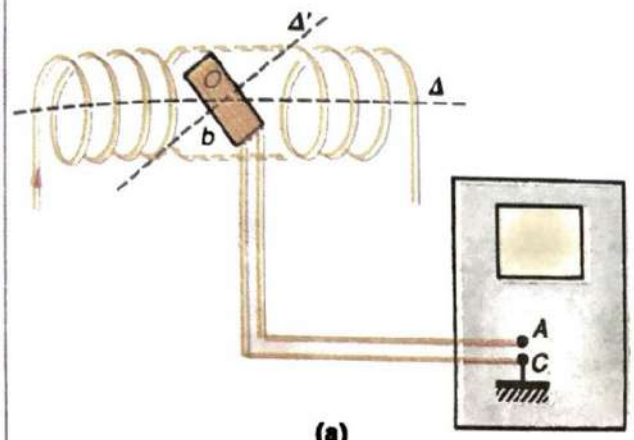


La base de temps est sur la graduation 0,5 ms . cm $^{-1}$.
La sensibilité verticale est sur la graduation 0,25 V . cm $^{-1}$.
Représenter la tension observée sur l'écran de l'oscillographe.

↳ ex. 9.4, 9.12.

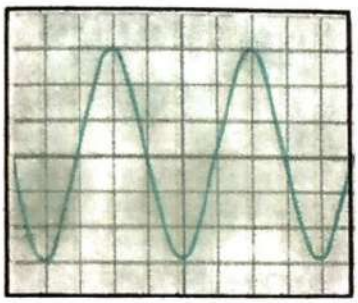
Scanné avec CamScanner

9.22 1/ Un solénoïde long, d'axe Δ, est parcouru par un courant sinusoïdal de pulsation ω (figure a). On dispose d'une petite bobine plate d'axe Δ', de centre O, comportant $N = 100$ spires d'aire $S = 10$ cm². Cette bobine est reliée à un oscillographe; on la place à l'intérieur du solénoïde (figure a). On obtient alors sur l'écran une courbe d'allure sinusoïdale.

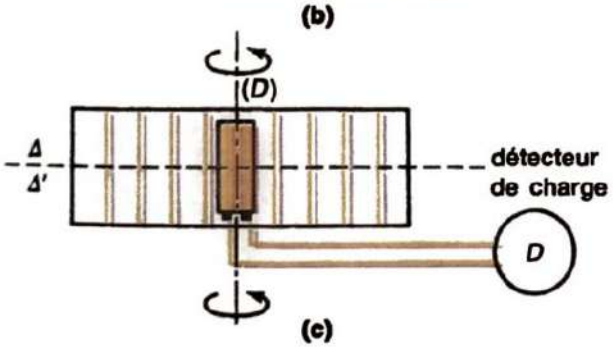


(a)

oscillographe



(b)



(c)

a/ A Que représente cette courbe ? Justifier son allure.

b/ C On règle l'orientation de la bobine pour rendre maximale l'amplitude du signal observé sur l'oscillographe. On obtient alors la courbe reproduite sur la figure b. Quelle direction a-t-on donnée à l'axe Δ' par rapport à Δ? Pourquoi ?

c/ AB3 On a pris pour base de temps 0,5 ms/div et pour sensibilité verticale 0,5 V/div.
Déterminer la pulsation ω et la tension maximale U_M aux bornes de la bobine.
Calculer la valeur maximale B_M du champ magnétique à l'intérieur du solénoïde.

2/ AB3 Le solénoïde est parcouru à présent par un courant continu.

a/ Qu'observe-t-on à l'oscillographe si le dispositif de mesure précédent est maintenu ?

b/ On déconnecte la bobine de l'oscillogaphe pour la brancher à un détecteur de charge. Le circuit ainsi constitué a une résistance totale $R = 20\ \Omega$. (Lorsqu'un détecteur de charge est traversé par un courant de faible durée, son aiguille dévie d'un angle proportionnel à la quantité d'électricité transportée par ce courant.)
La bobine, toujours placée à l'intérieur du solénoïde, est mobile autour d'un axe D orthogonal à Δ (figure c). On la fait pivoter de $\pi/2$ en un intervalle de temps très court Δt. L'aiguille du détecteur dévie. Pourquoi ?

c/ Montrer que la quantité d'électricité Δq transportée par le courant induit au cours de la rotation est indépendante de la durée Δt de cette rotation.
Le détecteur de charge mesure le passage de $50 . 10^{-6}$ C. Calculer la variation de flux à travers la bobine et la valeur du champ magnétique à l'intérieur du solénoïde.

↳ ex. 9.13.

9.23 AB3 On considère un solénoïde de longueur $\ell = 75$ cm, comportant 1 500 spires.

1/ Déterminer l'intensité i du courant donnant le champ magnétique $B = 2 . 10^{-2}$ T au centre du solénoïde.

2/ On place dans le solénoïde une bobine plate circulaire, de diamètre 8 cm et comportant 250 spires.

a/ Déterminer la position de la bobine pour que le flux qui la traverse soit maximal. Calculer ce flux.

b/ On fait tourner la bobine autour d'un axe orthogonal à celui du solénoïde, avec une vitesse de rotation de 4 500 tr . min $^{-1}$. Donner l'expression de la f.e.m. d'induction dans la bobine. On prendra la date $t = 0$ à un moment où le flux à travers la bobine est maximal.

↳ ex. 9.9.

Scanné avec CamScanner

10 APPLICATIONS DE L'INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE

10.1 transformateurs

10.1.1 principe

Les transformateurs utilisent le phénomène d'induction électromagnétique.

Plaçons deux bobines face à face (*fig.* 2a). Branchons l'une d'elles (1) à une source de tension alternative. L'autre (2) est branchée à l'entrée d'un oscillographe.

Les variations alternatives du flux magnétique engendré par la bobine (1) [inducteur] dans la bobine (2) [induit] donnent naissance dans cette dernière à une force électromotrice induite alternative. L'oscillographe permet de visualiser la tension alternative ainsi engendrée aux bornes de la bobine (2).

Si une barre de fer doux est introduite à l'intérieur des deux bobines (*fig.* 2b). le phénomene est plus important (le fer doux canalise les lignes de champ et les pertes magnétiques sont moins importantes).

On améliore encore le *couplage électromagnétique* entre les deux bobines avec une carcasse de barres de fer doux qui constitue ce qu'on appelle un *circuit magnétique* fermé.

Un transformateur est un quadripôle. c'est-à-dire qu'il comporte deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie. La bobine qui joue le rôle d'inducteur est appelée **circuit primaire** (entrée du quadripôle); la bobine qui joue le rôle d'induit est appelée **circuit secondaire** (sortie du quadripôle).

La représentation symbolique d'un transformateur est donnée à la figure 3.

10.1.2 expériences

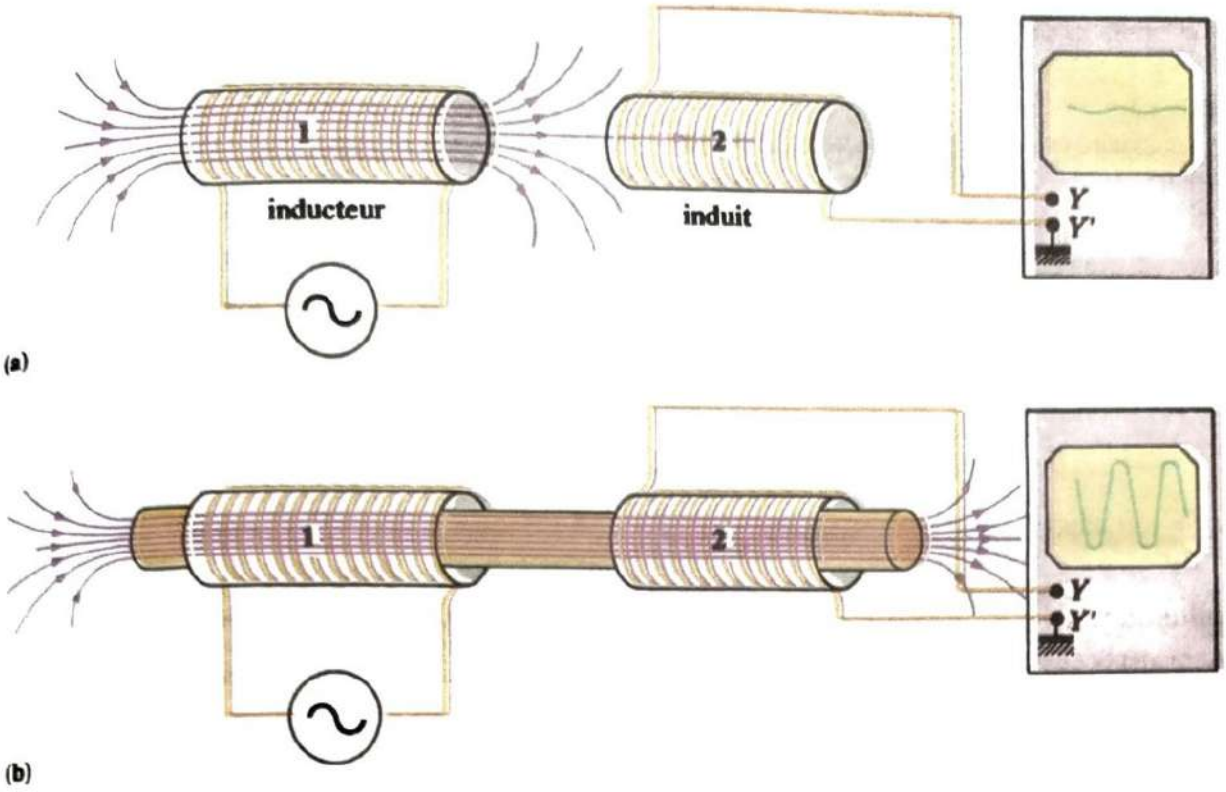
Réalisons le montage de la figure 4. La sortie du transformateur est reliée à un conducteur ohmique qui constitue la *charge* du circuit secondaire. c'est-à-dire le circuit d'utilisation.

Soient n_1 et n_2 les nombres de spires respectifs du circuit primaire et du circuit secondaire.



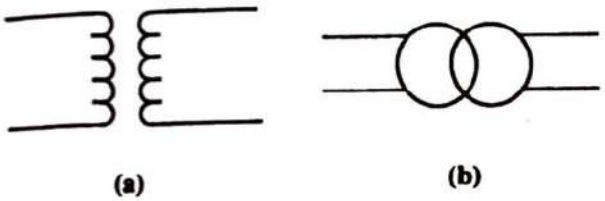
1. *Transformateur de grande puissance, destiné à la liaison France-Angleterre.*

Scanné avec CamScanner

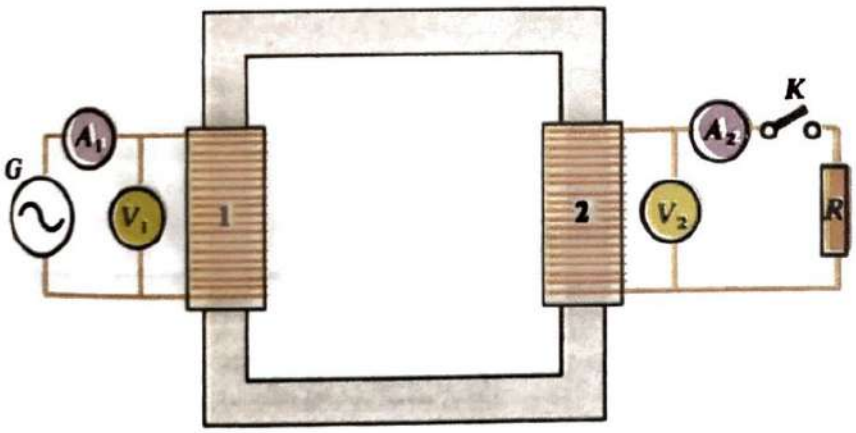


2. *Principe de fonctionnement d'un transformateur* (a) *et amélioration du couplage à l'aide du fer doux* (b).

◀ 3. *Schématisations symbolique* (a) *et normalisée* (b) *d'un transformateur monophasé.*



4. *Montage d'étude générale d'un transformateur.* ▼



- **G : générateur de tension variable**
- **K : interrupteur permettant de faire débiter le transformateur dans la charge R**
- **1 : primaire comportant n_1 spires**
- **2 : secondaire comportant n_2 spires**

Première expérience

Le circuit secondaire est ouvert (interrupteur K ouvert). Nous constatons que si on applique une tension sinusoïdale (de valeur efficace U_1) au primaire, l'intensité efficace I_1 dans le circuit primaire est presque nulle.

- La puissance électrique consommée par le primaire d'un transformateur dont le circuit secondaire est ouvert est pratiquement nulle.

En outre, il apparaît aux bornes du secondaire une tension sinusoïdale de valeur efficace U_2.
Nous constatons que le rapport des tensions efficaces aux bornes du secondaire et du primaire est constant et égal au rapport des nombres de spires de chaque enroulement :

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Scanné avec CamScanner

Remarque : Les notions de tension et d'intensité efficaces, déjà rencontrées en classe de Seconde, seront à nouveau définies dans les chapitres 14 et 15.

Seconde expérience

Le circuit secondaire est fermé sur une charge (K fermé). Faisons varier U_1. Le rapport U_2/U_1 des tensions efficaces est légèrement inférieur à n_2/n_1. Il est pratiquement égal à n_2/n_1 lorsque l'intensité débitée dans la charge n'est pas trop grande.
Nous constatons également que le rapport des intensités efficaces I_1/I_2 est voisin de n_2/n_1.
Nous adopterons les approximations suivantes :

$$\frac{U_2}{U_1}=\frac{n_2}{n_1}=\frac{I_1}{I_2}.$$

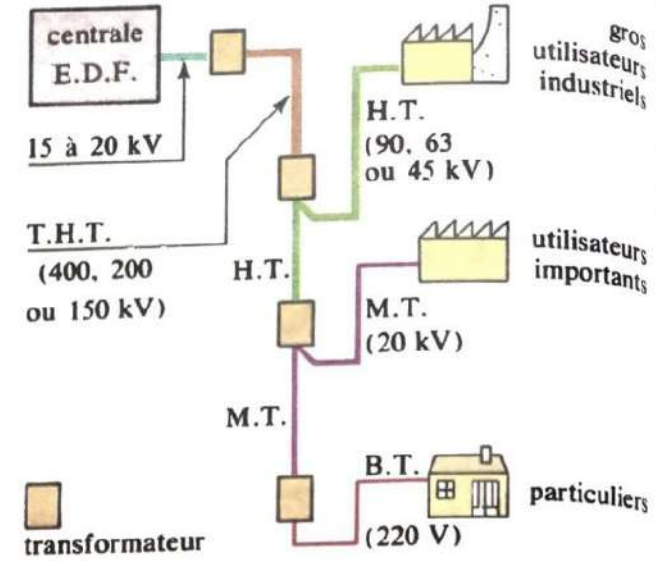
Le rapport $\frac{n_2}{n_1}$ est appelé **rapport de transformation**.

10.1.3 utilisations

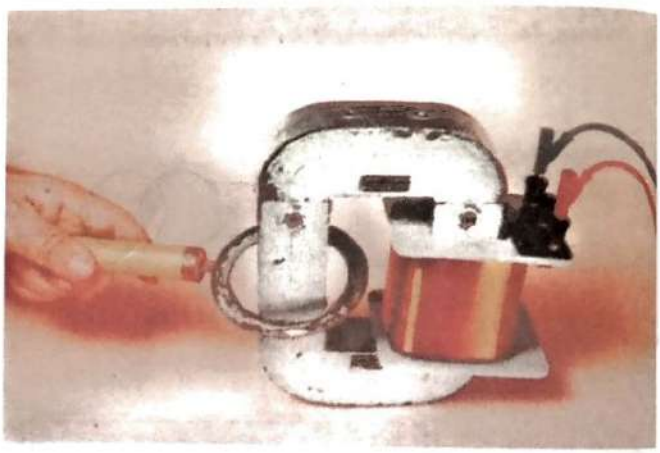
Les transformateurs sont des appareils d'usage commun qui ne peuvent être évidemment utilisés qu'en courant alternatif.

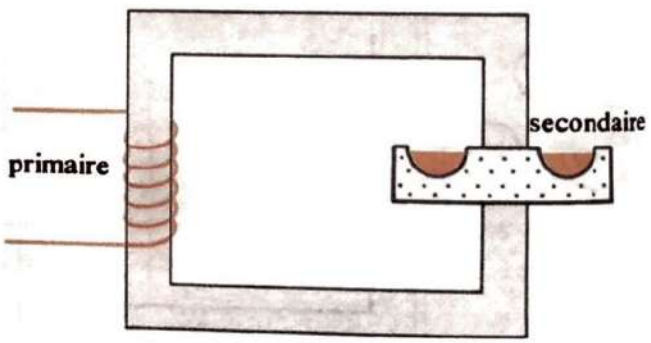
• Si $\frac{n_2}{n_1}>1$, $U_2>U_1$: le transformateur est *élévateur de tension*. De tels transformateurs sont utilisés pour le transport à grande distance de l'énergie électrique (*photo* 1 et *fig.* 5), dans les postes de télévision, les oscillographes, les moteurs. Les tubes luminescents comportent des transformateurs élévateurs de tension. Les générateurs de rayons X nécessitent des tensions de plusieurs dizaines de milliers de volts.

• Si $\frac{n_2}{n_1}<1$, $U_2<U_1$: le transformateur est *abaisseur de tension*. Pour raison de sécurité, les jouets électriques, par exemple, sont munis de transformateurs qui abaissent la tension 220 V du secteur à 12 V, 9 V, ou même 6 V. Lorsque $n_2 \ll n_1$, il est possible d'obtenir des intensités très élevées dans le circuit secondaire, utilisées notamment pour la soudure électrique (un courant de plusieurs centaines d'ampères traverse les plaques métalliques à souder et en provoque localement la fusion par effet Joule, *fig.* 7).

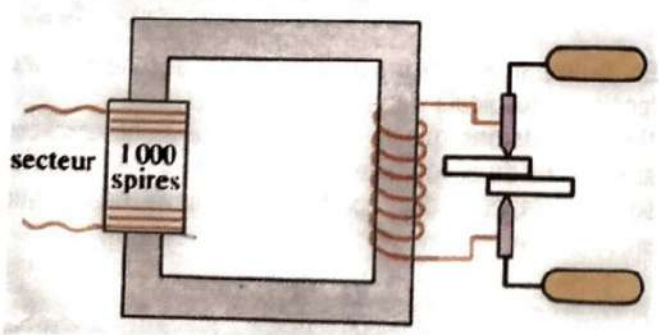


5. *Le transport de l'énergie électrique est effectué sous très haute tension pour limiter les pertes dans les lignes par effet Joule. La tension est ensuite abaissée avant fourniture aux utilisateurs.*



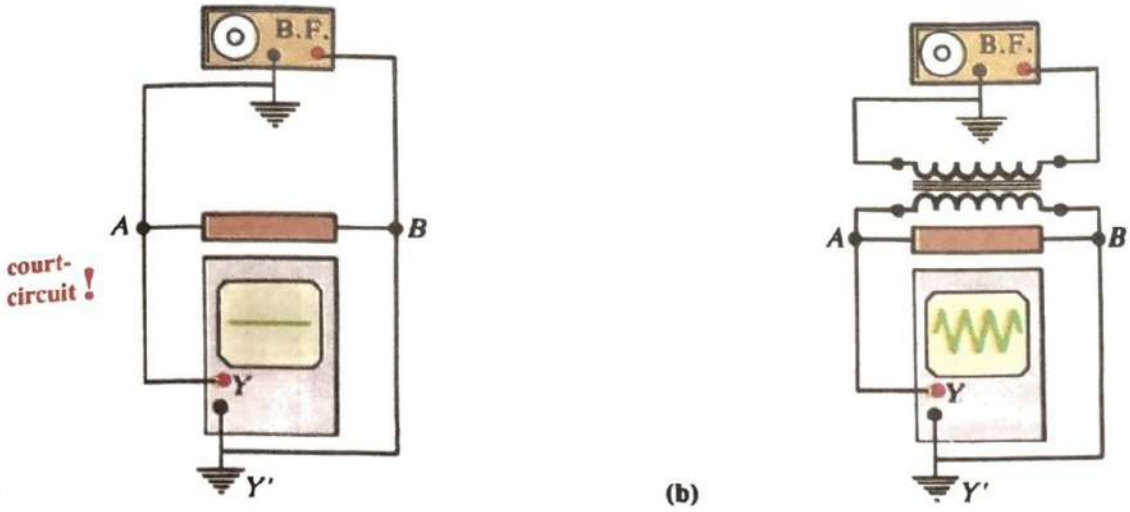


6. *Utilisation du principe du transformateur en métallurgie. Le secondaire comprend une seule spire constituée de morceaux métalliques au fond d'une gouttière réfractaire. Lorsque le primaire est alimenté, l'intensité dans le secondaire est assez importante pour faire fondre rapidement le métal. Cette technique est utilisée dans l'affinage des aciers et alliages spéciaux.*



7. *Principe de la soudure électrique. Avec $n_2/n_1 \ll 1$, on obtient des intensités très grandes dans le secondaire.*

Scanné avec CamScanner



8. *Exemple d'utilisation d'un transformateur d'isolement* ($n_2/n_1 = 1$). *Couramment, l'une des bornes d'entrée ou de sortie d'un appareil, reliée à la masse, est également reliée à la terre.*
a. *En branchant l'oscillographe, la sortie du générateur B.F. est mise en court-circuit par l'intermédiaire de la terre.*
b. *Le transformateur d'isolement permet d'éviter les courts-circuits par l'intermédiaire de la terre, sans pour autant modifier la tension appliquée au dipôle (A, B).*

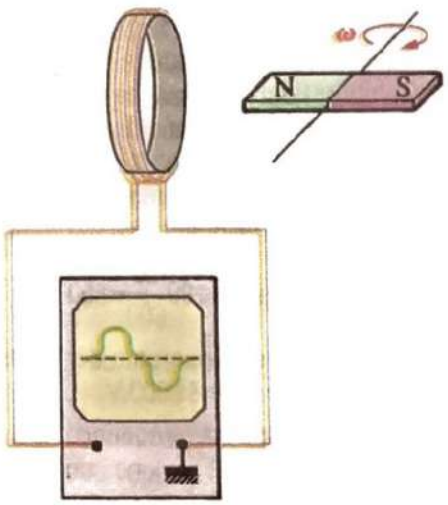
• Si $\frac{n_2}{n_1} = 1$: le transformateur est dit d'*isolement*. Il permet d'isoler électriquement un circuit (primaire) d'un autre (secondaire). La figure 8 montre l'intérêt d'un tel transformateur.

La fiche technique, en fin de chapitre, donne quelques indications complémentaires sur les transformateurs.

10.2 alternateurs

10.2.1 principe

Devant une bobine branchée aux plaques d'un oscillographe, faisons tourner un aimant droit comme l'indique la figure 9. Soit $\Phi(t)$ le flux magnétique qui traverse la bobine. Ce flux est fonction périodique du temps lorsque l'aimant tourne à vitesse constante. La f.e.m. induite $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ s'annule et change de signe pour les valeurs extrêmes du flux. La tension appliquée à l'entrée de l'oscillographe est fonction périodique du temps et sa fréquence dépend de la vitesse angulaire de rotation de l'aimant.
La bobine fixe, qui joue le rôle d'induit, porte le nom de **stator**, tandis que l'aimant inducteur est appelé **rotor**. L'ensemble constitue un **alternateur** simplifié à deux pôles permettant d'obtenir des tensions et des courants alternatifs. Cette machine assure la conversion d'énergie mécanique en énergie électrique.
Dans le phénomène d'induction, seul compte le déplacement relatif de l'induit et de l'inducteur; on obtient donc également des tensions et des courants alternatifs en faisant tourner une bobine devant un aimant droit fixe. L'induit est alors le rotor, l'inducteur le stator.



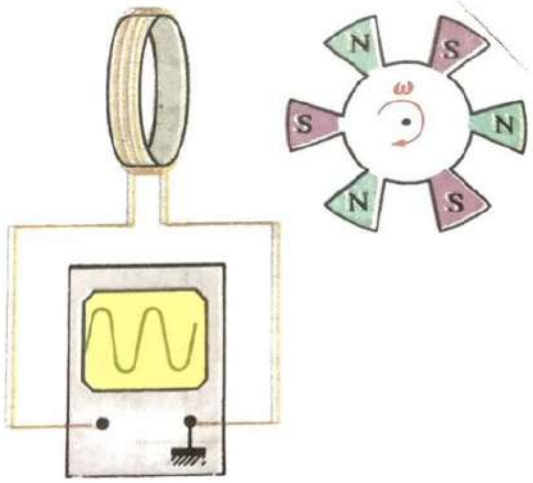
9. *La rotation de l'aimant à la vitesse angulaire ω provoque une variation de flux à travers la bobine; celle-ci est le siège d'une f.e.m. induite alternative de fréquence* $f = \omega/2\pi$.

Scanné avec CamScanner

Si nous remplaçons l'aimant droit inducteur de la figure 9 par un système d'aimants identiques, associés de telle sorte que leurs axes soient radiaux et leurs pôles alternés (*fig.* 10), nous obtenons un alternateur *multipolaire*. Le passage devant la face d'entrée de la bobine d'un pôle nord ou sud provoque une variation de flux et une f.e.m. induite, fonction périodique du temps. Si p est le nombre de paires de pôles et n, le nombre de tours par seconde effectués par le rotor qui entraîne les aimants, la fréquence de la f.e.m. vaut :

$$f = pn.$$

L'induit (stator) peut être constitué par plusieurs bobines connectées et convenablement réparties autour du rotor inducteur.



10. *Principe d'une génératrice multipolaire. Avec trois paires de pôles ($p=3$), la fréquence de la f.e.m. induite vaut :*

$$f = p\frac{\omega}{2\pi} = \frac{3\omega}{2\pi}.$$

10.2.2 alternateurs industriels

Les alternateurs industriels comportent un induit fixe (stator) constitué de plusieurs bobines connectées. Le rotor inducteur comporte des électroaimants, c'est-à-dire des bobines à noyau de fer doux alimentées en courant continu délivré par une dynamo. Il existe deux principaux types de rotors inducteurs.

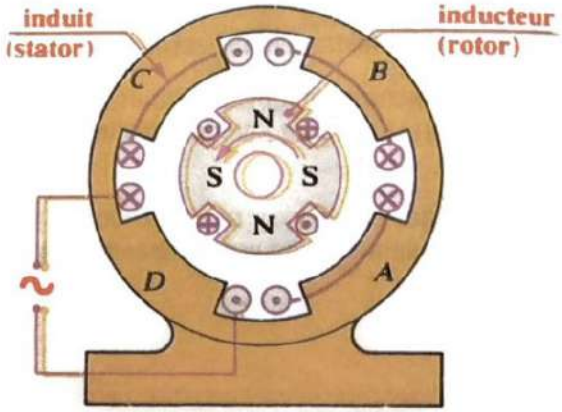
• Les *rotors à pôles lisses* (*fig.* 11 et *photo* 13) équipent les turboalternateurs des centrales thermiques. Ils peuvent tourner à très grande vitesse :

— 3000 tr·min^{-1} s'ils comportent une paire de pôles ($p=1$ et $f=n=50$ Hz);

— 1500 tr·min^{-1} s'ils comportent deux paires de pôles

$$\left(p=2 \text{ et } f=pn=2\frac{1500}{60}=50 \text{ Hz}\right).$$

Leur puissance varie de 250 à 600 MW.



11. *Schéma de principe d'un alternateur à deux paires de pôles lisses. Dans l'enroulement A, par exemple, l'un des pôles nord de l'inducteur, en se rapprochant, crée une variation de flux; on en déduit le sens du courant induit, qui s'oppose à cette variation.*

• Les *rotors à pôles saillants* (*fig.* 12 et *photo* 14) équipent les centrales hydrauliques. Leur vitesse de rotation est moindre; leur puissance ne dépasse pas 500 MW. A titre d'exemple, l'usine hydro-électrique de Génissiat, sur le Rhône, est équipée d'un alternateur dont le rotor a 7,1 m de diamètre extérieur. Il porte 20 paires de pôles et tourne, par conséquent, à 150 tr.min^{-1} :

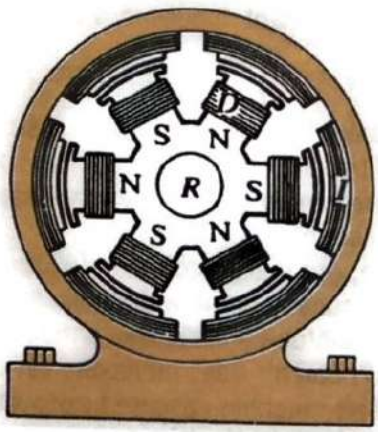
$$p=20 \quad \text{et} \quad f=pn=20\frac{150}{60}=50 \text{ Hz}.$$

Il peut fournir une puissance apparente de 110 MVA (voir *chap.* 15) sous une tension de 15000 V.

Le maintien rigoureux de la fréquence du courant alternatif distribué par E.D.F. exige une vitesse de rotation constante de tous les alternateurs qui alimentent le réseau national et, par conséquent, celle des moteurs hydrauliques ou thermiques d'entraînement; cela pose des problèmes délicats de régulation. Par ailleurs, ces machines nécessitent un refroidissement efficace compte tenu de la puissance thermique dissipée (frottements et effet Joule en particulier).

Ce sont des alternateurs de faible puissance qui équipent certains véhicules : bicyclette, automobile, etc.

On réalise également des alternateurs triphasés. Le stator (induit) comporte alors un triple jeu de bobines.

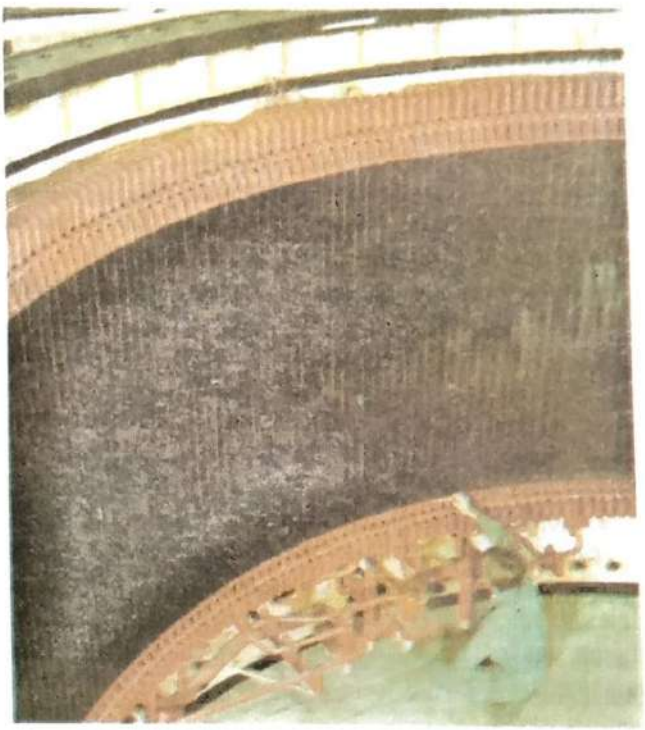


12. *Principe d'un alternateur à six pôles saillants. Le rotor R est constitué de noyaux de fer doux munis d'enroulements tel D, dans lesquels circule un courant continu. Les sens d'enroulement sont alternés de façon à créer une succession de pôles nord et de pôles sud. I désigne l'un des enroulements de l'induit.*

Scanné avec CamScanner



13. *Rotor d'un alternateur à pôles lisses de* 1 000 MW *en cours de bobinage.*



14. *Stator d'un alternateur à pôles saillants de* 500 MVA.

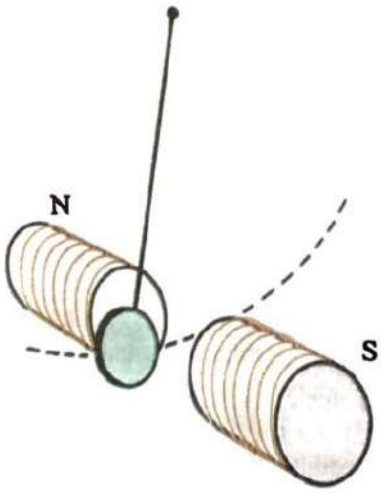
Remarque : Un alternateur peut également constituer un moteur dit *synchrone*. On constate en effet que, si l'induit est alimenté par un courant alternatif de fréquence *f* égale à celle qu'il délivre en tant que générateur et si on lance le rotor, celui-ci continue à tourner régulièrement dans le même sens, à la fréquence *f*. On dit qu'il est *accroché* sur le courant alternatif.

10.3 courants de Foucault

10.3.1 mouvement d'une masse conductrice dans un champ magnétique

Réalisons l'expérience suivante. Un disque de cuivre (métal bon conducteur) suspendu à une tige peut osciller entre les pièces polaires d'un électroaimant. Il coupe normalement les lignes de champ (*fig.* 15). Lorsque l'électroaimant n'est pas excité, le pendule oscille librement. Établissons le champ magnétique : le pendule est freiné énergiquement. Comment interpréter ce phénomène?

Le disque en mouvement dans le champ est à l'origine de courants induits dans le cuivre. Il est alors soumis à des actions mécaniques d'origine électromagnétique. D'après la loi de Lenz, le sens de ces actions est tel que celles-ci s'opposent à la cause qui leur a donné naissance, c'est-à-dire au mouvement du disque. Ce dernier est donc freiné. D'autre part, nous constatons que le disque s'est échauffé après plusieurs mouvements de va-et-vient dans le champ magnétique. L'énergie mécanique est finalement dissipée en chaleur par effet Joule. Ces courants induits sont appelés **courants de Foucault.**



15. *Le disque métallique est freiné lors de son passage dans l'entrefer de l'électroaimant.*

Scanné avec CamScanner

10.3.2 masse conductrice dans un champ magnétique variable

Des pièces métalliques telles que les noyaux de fer des électroaimants ou les carcasses des transformateurs sont soumises à des champs magnétiques variables au cours du temps. Elles sont par conséquent le siège de courants induits qui entraînent une déperdition d'énergie sous forme de chaleur.

• **Des courants induits prennent naissance dans toute masse conductrice en mouvement dans un champ magnétique ou soumise à un champ magnétique variant dans le temps. Ces courants sont appelés courants de Foucault.**

10.3.3 inconvénients des courants de Foucault

Dans de nombreuses applications industrielles, le freinage des pièces métalliques est un inconvénient. Par exemple, une partie de l'énergie mécanique fournie au rotor d'une dynamo ou d'un alternateur est absorbée par les forces de freinage et convertie en chaleur par effet Joule dans la masse conductrice, et ce, par les courants de Foucault.

De même, les courants de Foucault qui prennent naissance dans les carcasses métalliques des transformateurs sont en partie responsables de la diminution du rendement de la conversion d'énergie électrique.

On remédie à cette dégradation d'énergie en diminuant l'intensité des courants de Foucault. Si l'on recommence l'expérience du pendule freiné avec un disque présentant de nombreuses encoches, l'amortissement est nettement plus faible. Aussi les pièces métalliques sont-elles découpées en tranches isolées les unes des autres par une couche de vernis, le feuilletage étant perpendiculaire à la direction principale des courants de Foucault. Ainsi, les cylindres constituant le rotor et le stator des dynamos et des alternateurs sont des assemblages de tôles en acier au silicium de quelques millimètres d'épaisseur. De même, les carcasses en fer des transformateurs sont feuilletées.

10.3.4 utilisation des courants de Foucault

L'intensité des courants induits est fonction croissante de la vitesse de déplacement des éléments conducteurs en mouvement. Les forces de freinage dues aux courants de Foucault sont donc fonction croissante de la vitesse de l'élément conducteur en mouvement.

Ainsi, le freinage de certaines machines ou de véhicules lourds peut être assuré par les courants induits qui se développent dans un disque lié à l'arbre et tournant dans l'entrefer d'un électroaimant (*photo* 16).

Les compteurs électriques sont des petits moteurs électriques dont le rotor est solidaire d'un disque de cuivre ou d'aluminium qui passe entre les branches d'un aimant en U. La rotation du disque est freinée par des courants induits, proportionnellement à la vitesse angulaire. On montre que le nombre de tours effectués par le disque est proportionnel à l'énergie électrique consommée par l'utilisateur.



16. ***Ralentisseur électromagnétique utilisé sur les véhicules lourds. Son efficacité est d'autant plus grande que la vitesse du véhicule est élevée.***

Scanné avec CamScanner

LES TRANSFORMATEURS

fiche technique

Puissance de fonctionnement

Un transformateur est vendu pour une puissance apparente de fonctionnement donnée (voir *chap.* 15), exprimée en volt-ampères (symbole : VA). La puissance moyenne à l'entrée est sensiblement égale à la puissance apparente $U_1 I_1$. La puissance moyenne à la sortie est également voisine de $U_2 I_2$.

Le rendement énergétique, rapport de la puissance électrique fournie par le secondaire à la puissance reçue par le primaire dans les conditions normales de fonctionnement, est voisin de 1 car $U_1 I_1 \approx U_2 I_2$, d'après :

$$\frac{U_2}{U_1} \approx \frac{I_1}{I_2} \approx \frac{n_2}{n_1}.$$

Pour les transformateurs industriels, le rendement est compris entre 90 et 98 %. Les pertes d'énergie sont donc faibles. Elles sont dues essentiellement :

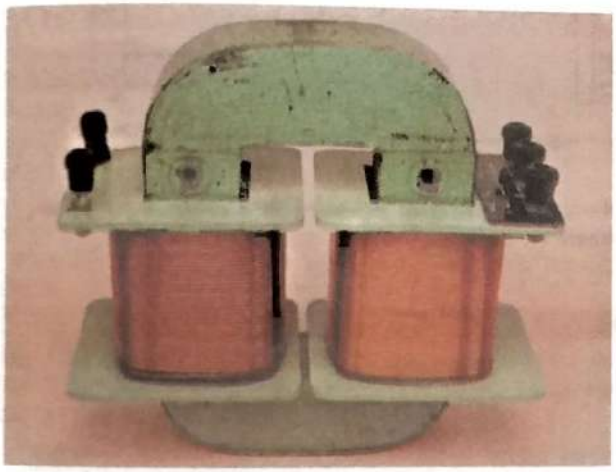
— aux pertes par effet Joule dans les enroulements. En augmentant la section des conducteurs, on réduit ces pertes, mais l'appareil devient plus volumineux et coûteux;

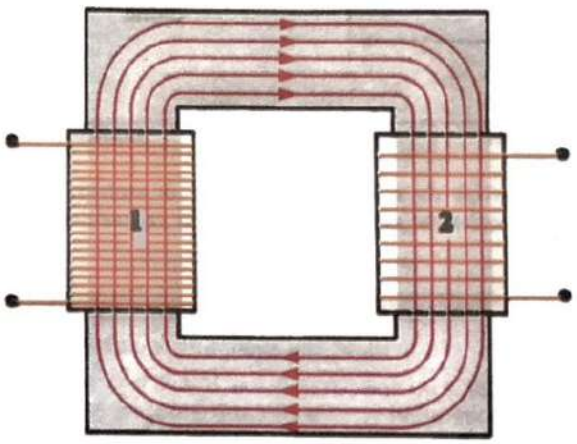
— aux courants de Foucault;

— à la qualité des substances ferromagnétiques qui constituent le circuit magnétique, où une partie de l'énergie fournie est encore dissipée en chaleur (pertes par hystérésis).

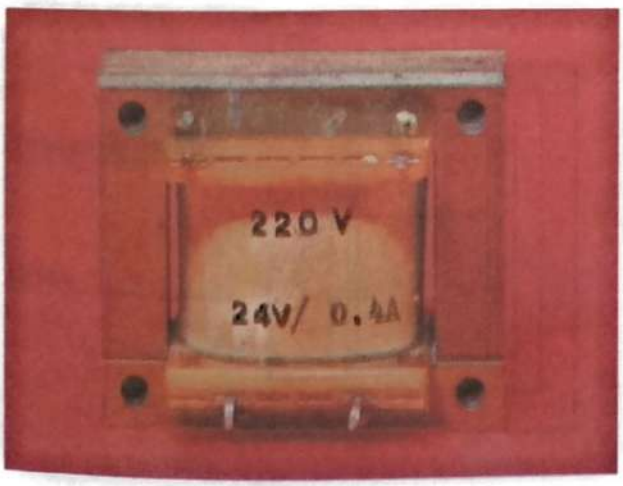
Transformateur domestique de 400 VA, 220 V-24 V

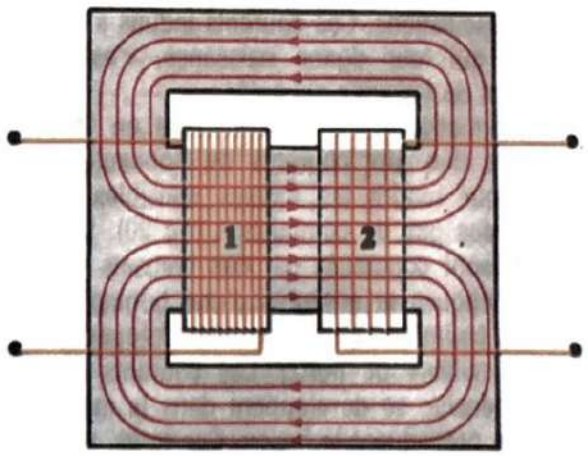
Ce transformateur monophasé comporte deux enroulements, l'un haute tension, l'autre basse tension (*fig.* 18). Le constructeur indique les deux tensions efficaces nominales de fonctionnement à ne pas dépasser : 220 V pour l'enroulement haute tension; 24 V pour l'enroulement basse tension.





carcasse métallique canalise les lignes de champ.





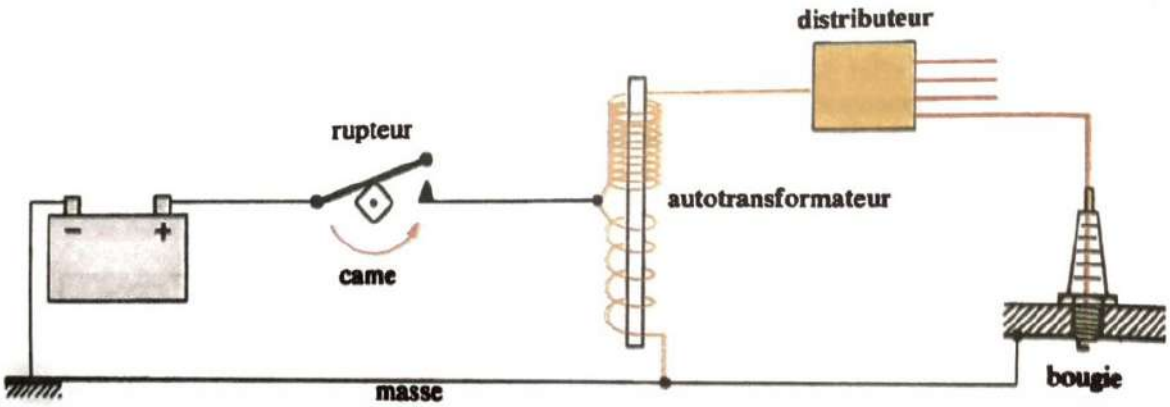
18. ***Transformateur domestique* 220 V-24 V.**

Ainsi, il n'est pas possible d'appliquer une tension de 220 V sur l'enroulement basse tension car le transformateur serait détruit. En revanche, nous pouvons parfaitement utiliser l'enroulement basse tension comme primaire, à condition de lui appliquer une tension inférieure ou égale à 24 V. La puissance apparente nominale de ce transformateur vaut 400 VA.

Allumage d'un moteur (autotransformateur)

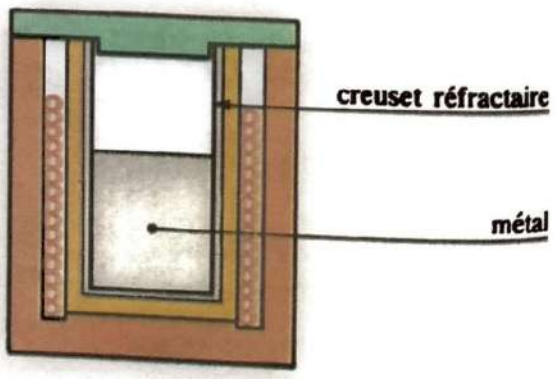
En démontant la « bobine » d'allumage d'un moteur de véhicule automobile, nous constatons que le primaire est constitué par un enroulement de quelques spires de gros fil. Le secondaire, lui, comporte un très grand nombre de spires (20 000 environ). De plus, le secondaire étant monté en série avec le primaire, cette « bobine » constitue ce qu'on appelle un *autotransformateur* (*fig.* 19).

Le rupteur a pour rôle de provoquer des courants variables dans le transformateur élévateur de tension que constitue la « bobine », en vue d'alimenter les bougies qui produisent des étincelles afin de provoquer l'explosion du mélange gazeux combustible.
Sur certaines voitures récentes, le rupteur est remplacé par un dispositif dit à « allumage électronique intégral ». Un calculateur reçoit des informations sur la vitesse de rotation du moteur et sur la pression du mélange air-essence. Il commande l'envoi d'impulsions électriques (brèves variations de tension) dans le primaire de la bobine. L'allumage électronique permet d'obtenir des tensions plus élevées entre les électrodes des bougies (30 000 V au lieu de 15 000 V). Il procure un meilleur rendement, facilite les démarrages à froid et est très fiable (car il ne comporte pas de pièces mécaniques mobiles).



19. ***Principe du circuit d'allumage d'un moteur. Pour plus de clarté, l'enroulement primaire de l'autotransformateur, qui normalement entoure l'enroulement secondaire, a ici été représenté en dessous.***

Les oscillations de l'aiguille d'une boussole peuvent être amorties par les courants induits qui se développent dans une plaque de cuivre fixée au boîtier, parallèlement au plan des oscillations. Ces courants induits s'opposent à la cause qui leur donne naissance, c'est-à-dire au mouvement de l'aiguille aimantée.
La transformation d'énergie électrique en chaleur par effet Joule due aux courants de Foucault peut être utilisée pour fondre les métaux sensibles à l'action chimique des gaz de combustion (*fig.* 20). Les *fours à induction* sont constitués par des creusets réfractaires non magnétiques et entourés d'une bobine parcourue par des courants alternatifs de fréquence élevée (quelques milliers de hertz). Les courants induits, de grande intensité, se développent dans la masse métallique et en provoquent la fusion. Ces fours, particulièrement adaptés à la fusion sous vide ou sous gaz inerte, permettent d'obtenir des métaux très propres et ayant de très hautes caractéristiques mécaniques.



20. ***Principe du four à induction. La bobine d'induction, alimentée en courant alternatif haute fréquence, entoure le creuset réfractaire contenant le métal.***

Scanné avec CamScanner

Banc d'essais

Ces trois problèmes font intervenir le phénomène d'induction ; il est donc nécessaire de résoudre d'abord les exercices de base du chapitre 9.
On rappelle que $\mu_0 = 4\pi . 10^{-7}$ S.I.

10.1 AB3 1/ On désire obtenir un champ magnétique $B = 2 . 10^{-2}$ T dans un solénoïde de longueur $\ell = 75$ cm, comportant 1 500 spires. Cette valeur de B sera conservée dans toutes les questions.

a/ Calculer l'intensité I du courant donnant le champ B au centre du solénoïde.
b/ Calculer l'inductance L du solénoïde sachant que son diamètre est de 10 cm.

2a/ On place dans le solénoïde une bobine plate circulaire, de diamètre 8 cm, comportant 250 spires, de façon que le flux qui la traverse soit maximal. Préciser la position de la bobine et calculer le flux qui la traverse.
b/ On fait alors tourner la bobine autour d'un axe perpendiculaire à celui du solénoïde, avec une vitesse de rotation de 4 500 tr . min^{-1}. Exprimer en fonction du temps la f.e.m. d'induction dans la bobine, en choisissant la date $t = 0$ au moment où le flux à travers la bobine est maximal. Calculer la valeur efficace de cette f.e.m.

10.2 On considère une bobine de longueur $\ell = 12$ cm, de rayon moyen $r = 1$ cm, comprenant $n = 2\,500$ spires par mètre. Cette bobine est un solénoïde long par rapport au rayon des spires.

1/ AB3 La bobine est traversée par un courant d'intensité I. Le champ magnétique $\vec{B}_0$ au centre de la bobine a une intensité de 0,01 T. Calculer I.
Après avoir choisi un sens de parcours du courant, indiquer sur un schéma comment se placerait une petite aiguille aimantée au centre de la bobine.

2/ La bobine, d'axe horizontal, toujours traversée par le courant I, est placée dans un champ magnétique horizontal uniforme $\vec{B}_0$ d'intensité 0,01 T. La direction de $\vec{B}_0$ est orthogonale à l'axe de la bobine.

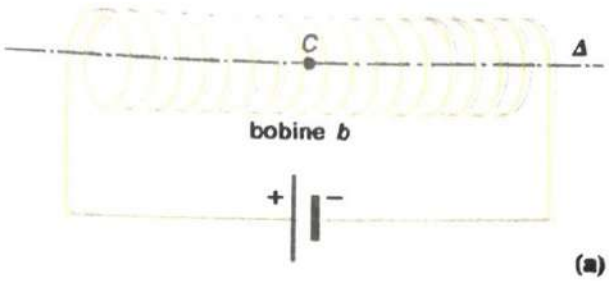
a/ C Comment peut-on créer un champ magnétique sensiblement uniforme ?
b/ B3B4 Dessiner les vecteurs représentatifs des champs magnétiques $\vec{B}_b$ et $\vec{B}_0$ dans un plan horizontal. Quelle est l'intensité du champ magnétique total existant à l'intérieur de la bobine ?
c/ B3 De quel angle a tourné la petite aiguille aimantée par rapport à la position trouvée à la question 1 ?

3/ La bobine est maintenant en circuit ouvert. Dans le champ magnétique uniforme horizontal $\vec{B}_0$, un dispositif permet de faire tourner librement la bobine autour d'un axe vertical passant par son centre, avec une vitesse angulaire constante $\omega = 4\pi$ rad . s^{-1}.

a/ A A l'instant $t = 0$, l'axe de la bobine est parallèle à $\vec{B}_0$.
La normale aux spires étant orientée dans le sens de $\vec{B}_0$, calculer le flux Φ_0 à travers la bobine.
b/ A A un instant t, la bobine a tourné de l'angle ωt. Exprimer en fonction des données le flux $\Phi(t)$ à travers la bobine.
c/ AB3 Calculer le flux $\Phi(t)$ à travers la bobine, à la date $t = 0{,}25$ s.

4/ B3C Montrer que la bobine est le siège d'une f.e.m. d'induction $e(t)$ à la date t. Calculer sa valeur maximale.

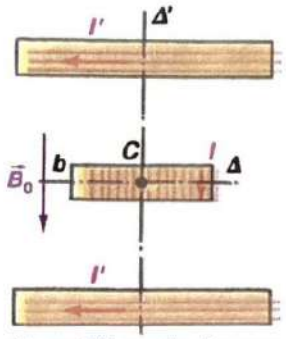
10.3 Une bobine b est formée d'un solénoïde long, de longueur $\ell = 20$ cm, de rayon $r = 2$ cm et comprenant $N = 500$ spires. Cette bobine est parcourue par un courant d'intensité $I = 2$ A (fig. a).



(a)

1/ A Préciser les caractéristiques du champ magnétique $\vec{B}_0$ au centre C de cette bobine.

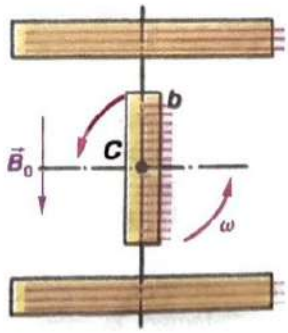
2/ AB4 La bobine, toujours parcourue par le courant d'intensité $I = 2$ A, d'axe horizontal Δ, est placée perpendiculairement à l'axe Δ' de deux bobines qui créent un champ magnétique vertical uniforme de mesure $B = 2 . 10^{-3}$ (fig. b).



dispositif vu du dessus (b)

Préciser les caractéristiques du champ magnétique au point C. Faire un schéma.

3/ La bobine b d'axe Δ est maintenant en circuit ouvert. Elle se trouve toujours dans le champ magnétique $\vec{B}_0$. Un moteur permet de la faire tourner avec une vitesse constante de 2 tr . s^{-1}, autour d'un axe vertical perpendiculaire à Δ et Δ' et passant par C. A la date $t = 0$, la position de la bobine b est donnée par la figure c.



(c)

a/ AC Après avoir choisi une orientation pour la bobine b, exprimer le flux $\Phi(t)$ à travers cette bobine en fonction de t.
b/ A En déduire la f.e.m. d'induction $e(t)$ à l'instant t.
c/ AB4 Représenter $e(t)$ en fonction du temps entre 0 et 1,5 s. Échelles : 10 cm pour 1 s ; 3 cm pour 0,01 V.

Scanné avec CamScanner

11 AUTO-INDUCTION

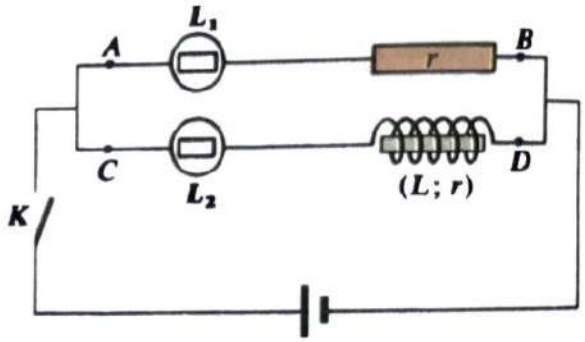
Toute variation de flux d'un champ magnétique à travers un circuit crée une force électromotrice d'induction dans ce circuit. Or un circuit parcouru par un courant électrique crée dans tout l'espace environnant un champ magnétique, donc un **flux propre** au travers de lui-même. Aussi pouvons-nous nous attendre à ce que toute variation de ce courant crée, du fait de la variation correspondante du flux propre, une force électromotrice d'induction qui tend à s'opposer à cette variation.

11.1 mise en évidence de l'auto-induction

11.1.1 première expérience

Réalisons le circuit de la figure 1. Les lampes L_1 et L_2 sont identiques. La branche *CD* comporte une bobine à noyau de fer doux possédant la même résistance que celle du conducteur ohmique de la branche *AB*. Fermons le circuit :

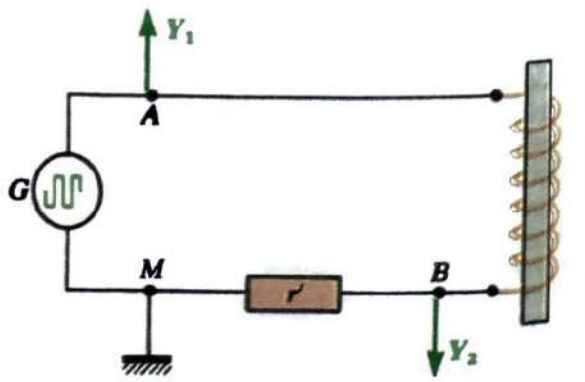
— la lampe L_1 brille instantanément;
— la lampe L_2 brille progressivement : la bobine est donc la cause du retard à l'établissement du courant dans *CD*.



1. ***Pour réaliser ce montage, utiliser un accumulateur 6 V, un transformateur démontable (2 fois 1 000 spires), deux lampes (3,5 V; 0,2 A) et une résistance de 20 Ω.***

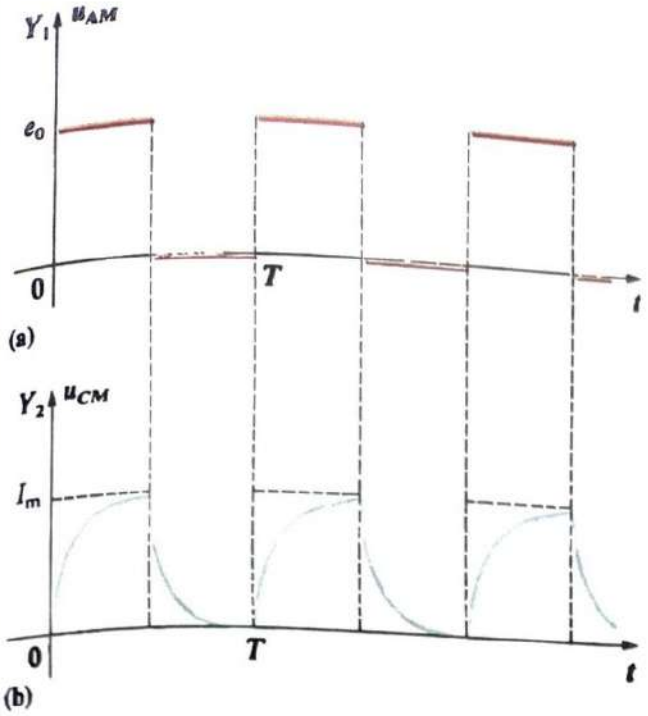
11.1.2 seconde expérience

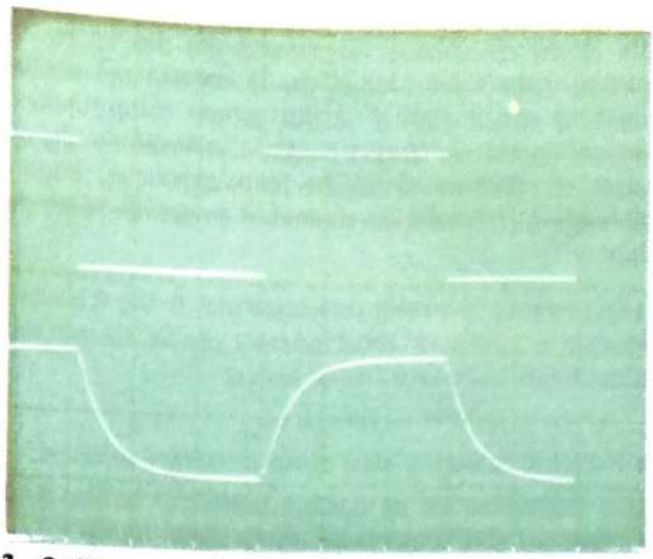
Réalisons une autre expérience, schématisée sur la figure 2. Le générateur *G* délivre des signaux carrés; la tension u_{AM} est visualisée sur la première voie d'un oscillographe (*fig.* 3a). A l'aide de la deuxième voie, observons les variations de l'intensité dans le circuit ($i = u_{BM}/r'$). Nous constatons (*fig.* 3b) que l'intensité n'atteint pas immédiatement la valeur maximale I_m. De même, lorsque la tension aux bornes du générateur s'annule, le courant diminue progressivement : il y a retard à la décroissance de l'intensité. La bobine présente une opposition systématique à toute variation du courant; l'intensité qui la traverse *n'est jamais discontinue.*



2. ***Pour réaliser ce montage, on peut adopter : $I_m \leq 1$ A; $r' = 1\,000\ \Omega$; $f = 500$ Hz (fréquence des signaux carrés).***

Scanné avec CamScanner





3. ***Oscillogramme obtenu avec le montage de la figure 2 : l'établissement et la rupture du courant sont retardés par la bobine.***

• Une bobine placée dans un circuit s'oppose à l'établissement d'un courant ou à sa rupture; ce phénomène porte le nom d'auto-induction. L'intensité du courant qui traverse la bobine n'est jamais discontinue.

11.1.3 Interprétation

Le courant crée un champ magnétique dans l'espace intérieur à la bobine. La bobine est donc traversée par un flux magnétique dû au courant qui la parcourt. Si l'intensité de ce dernier varie, le flux propre varie également. D'où l'apparition d'une force électromotrice induite qui, pendant la durée de la variation du courant et conformément à la loi de Lenz, va s'opposer à cette variation.

• Toute variation du flux propre à travers un circuit engendre une force électromotrice induite propre qui, par ses effets, va s'opposer à la cause qui lui donne naissance : c'est le phénomène d'auto-induction (ou self-induction).

Le phénomène d'auto-induction n'intervient pas en courant continu car, dans ce cas, le flux propre ne varie pas. En revanche, il apparaît dans tout circuit parcouru par un courant d'intensité variable, en particulier avec les courants alternatifs et dans les phases transitoires (établissement ou fin d'un régime permanent).
Le phénomène d'auto-induction n'a des effets sensibles que dans les circuits qui comportent des bobines; sans elles, en effet, le flux propre est faible et la force électromotrice d'auto-induction, négligeable.

Scanné avec CamScanner

11.2 flux propre et inductance

Un circuit quelconque est traversé par des lignes du champ magnétique produit par le courant qui circule dans ce circuit. Soit Φ le flux propre correspondant, encore appelé **flux d'auto-induction**. L'intensité du champ étant, en l'absence de matière ferromagnétique, proportionnelle à l'intensité du courant, il en est de même du flux Φ.

• En l'absence de matière ferromagnétique, le flux Φ d'auto-induction à travers un circuit parcouru par un courant est proportionnel à l'intensité i de ce courant :

$$\Phi = Li,$$

le coefficient constant L étant appelé inductance du circuit.

Une inductance est un nombre *positif* car le flux Φ et l'intensité i sont toujours de même signe (*fig.* 4).

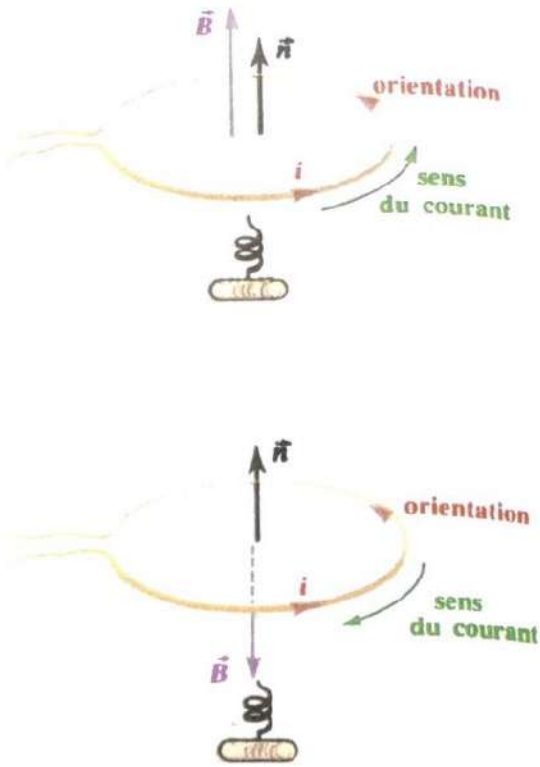
Dans le système international, l'inductance s'exprime en **henrys** (symbole : H).

Le calcul de l'inductance d'un circuit est généralement compliqué et approximatif; aussi détermine-t-on le plus souvent sa valeur expérimentalement.

Remarque : L'inductance d'une portion de circuit dépend de la forme géométrique de cette portion. Par ailleurs, il est impossible de définir l'inductance d'une bobine à noyau de fer doux (*photo* 5). En effet, le flux d'induction n'est plus proportionnel à l'intensité du courant. Pourtant, de telles bobines sont utilisées en courant alternatif. On définit alors une inductance moyenne qui n'a de valeur que pour des conditions d'emploi et des intensités bien déterminées.



5. ***Bobine à noyau mobile. Son inductance peut varier de 0,1 H à 1 H suivant la position du noyau.***



4. ***Le flux propre Φ de la spire et l'intensité i sont de même signe :***

a. $i>0$: $\Phi>0$, *car* $\vec{B}$ *et* $\vec{n}$ *sont de même sens;*

b. $i<0$: $\Phi<0$, *car* $\vec{B}$ *et* $\vec{n}$ *sont de sens contraires.*

APPLICATION 1

Calculer l'inductance d'un solénoïde dont la longueur ℓ est très grande devant son rayon r. Le nombre de spires par unité de longueur est n.

Application numérique :

$$\ell = 0{,}5 \text{ m}, \quad r = 2{,}5 \text{ cm}, \quad n = 2.10^4 \text{ spires.m}^{-1}.$$

Orientons les spires dans le sens de passage du courant. Un courant d'intensité i positive crée, à l'intérieur du solénoïde, un champ uniforme parallèle à son axe (donc normal au plan des spires), dont l'intensité est donnée par :

$$B = \mu_0 ni.$$

Le flux traversant une spire est donc :

$$\Phi_0 = BS = \mu_0 ni\pi r^2.$$

Le flux propre total traversant les $N = n\ell$ spires du solénoïde est donc égal à :

$$\Phi = n\ell\Phi_0 = \mu_0 n^2 \ell \pi r^2 i.$$

Cette expression est bien de la forme $\Phi = Li$, l'inductance du solénoïde étant égale à :

$$L = \mu_0 n^2 \ell \pi r^2.$$

Numériquement :

$$L = 4\pi.10^{-7} \times 4.10^8 \times 0{,}5 \times \pi \times (2{,}5.10^{-2})^2,$$

soit :

$$L \approx 0{,}5 \text{ H}.$$

En enroulant un fil conducteur, il est donc possible de fabriquer des inductances de l'ordre du henry. L'inconvénient est que les bobines ainsi obtenues possèdent une résistance relativement importante, car les spires sont très nombreuses.

Scanné avec CamScanner

11.3 loi de Faraday-Lenz

Une bobine, caractérisée par une inductance L, est parcourue par un courant d'intensité i. Lorsque cette intensité varie au cours du temps, il apparaît dans la bobine un phénomène d'auto-induction qui tend à s'opposer aux variations de i et du flux propre Φ. Tout se passe comme s'il existait dans la bobine un générateur de force électromotrice donnée par l'expression :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

La grandeur algébrique e, orientée dans le sens positif choisi sur le circuit (*fig.* 6), est appelée **force électromotrice d'auto-induction**.

Dans un circuit indéformable, sans fer, l'inductance propre est *constante*; il vient alors :

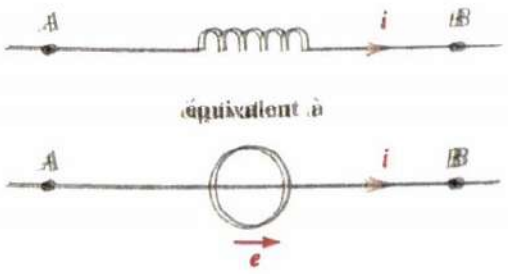
$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt},$$

soit :

$$e = -L\frac{di}{dt}.$$

• La force électromotrice d'auto-induction est proportionnelle à l'opposé de la dérivée de l'intensité du courant par rapport au temps.

L'inductance L étant une grandeur positive, e et $\frac{di}{dt}$ sont de signes opposés. Par exemple, si i est un nombre positif et tend à augmenter, alors e est un nombre négatif : la force électromotrice d'auto-induction s'oppose au passage du courant; elle modère l'augmentation de i, ce qui est conforme à la loi de Lenz.



6. *Lorsque i varie, une bobine non résistive se comporte comme un générateur idéal de tension, de f.e.m. algébrique :*

$$e = -L\frac{di}{dt},$$

orientée dans le sens positif choisi sur le circuit dans lequel s'insère la bobine.

11.4 tension aux bornes d'une bobine

Plaçons une bobine d'inductance L entre les points A et B d'un circuit électrique parcouru par un courant d'intensité i. Le dipôle (A, B) est caractérisé par la résistance r du fil de la bobine, mais aussi, si i varie, par une force électromotrice d'auto-induction $e = -L\frac{di}{dt}$.

Orientons le dipôle de A vers B (*fig.* 7); la loi d'Ohm s'écrit (*cf. compléments* en début du chapitre 9) :

$$u_{AB} = ri - e,$$

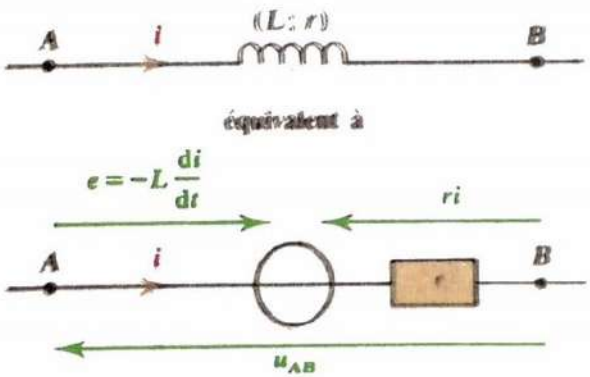
soit :

$$u_{AB} = ri + L\frac{di}{dt}.$$

La vérification de cette relation fait l'objet de la fiche expérimentale I.

• Aux bornes (A, B) d'une bobine d'inductance L et de résistance r, orientée de A vers B et traversée par un courant d'intensité i, la tension est égale à :

$$u_{AB} = ri + L\frac{di}{dt}.$$



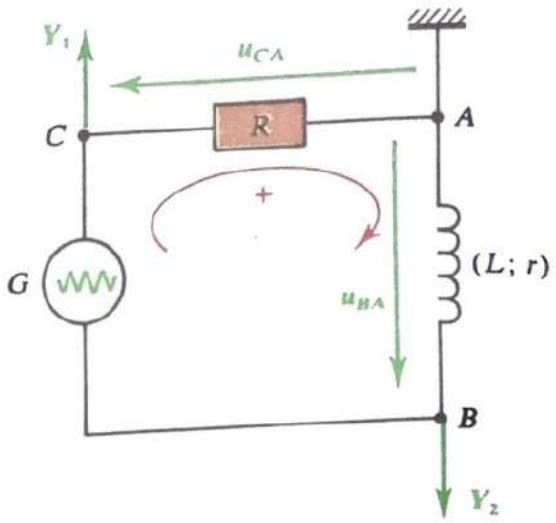
7. *Schéma équivalent d'une bobine parcourue par un courant dépendant du temps. On a :*

$$u_{AB} = ri - e, \quad \text{soit} \quad u_{AB} = ri + L\frac{di}{dt}.$$

Scanné avec CamScanner

fiche expérimentale

I. VÉRIFICATION DE LA LOI DE FARADAY-LENZ



8. ***On prendra soin de vérifier que la terre du secteur et la masse du générateur ne sont pas en liaison. Le cas échéant, on utilisera un transformateur d'isolement.***

1. Montage d'étude et principe

Le montage de la figure 8 comporte un générateur de signaux triangulaires (dents de scie) de fréquence réglé sur 250 Hz, en série avec une résistance R de $10^4\ \Omega$ et une bobine. L'inductance L de la bobine vaut environ 0,5 H et sa résistance r est de quelques ohms.

Un oscillographe permet de visualiser les variations respectives des tensions u aux bornes de la résistance R (voie 1, sensibilité : $2\ \text{V.div}^{-1}$) et aux bornes de la bobine (voie 2, sensibilité : $0{,}1\ \text{V.div}^{-1}$). La base de temps est réglée sur $1\ \text{ms.div}^{-1}$.

Les caractéristiques de ce montage sont telles que le produit ri est négligeable devant $L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

L'expression de la loi de Faraday-Lenz, que nous nous proposons de vérifier :

$$u_{AB} = ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

s'écrit donc : $\quad u_{AB} \approx L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

D'autre part, aux bornes de la résistance, nous avons, avec l'orientation choisie :

$$u_{CA} = Ri, \quad \text{soit} \quad i = \frac{u_{CA}}{R};$$

d'où finalement :

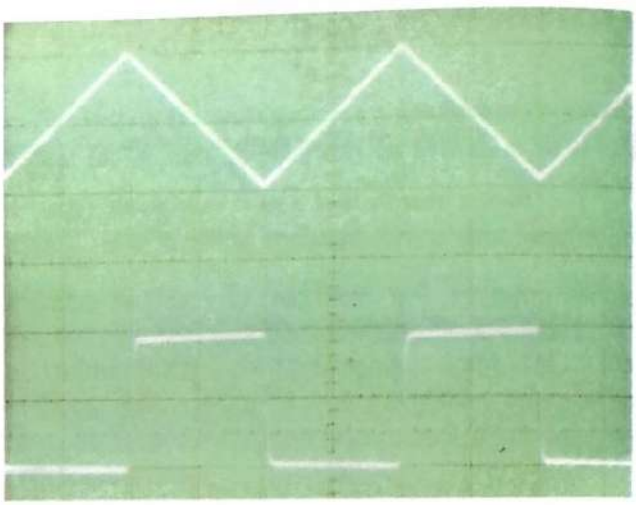
$$u_{BA} = -u_{AB} \approx -\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}u_{CA}}{\mathrm{d}t}. \qquad (1)$$

2. Résultats et exploitation

L'oscillogramme de la photographie 9 présente les caractéristiques suivantes :

- lorsque u_{CA} est fonction affine croissante du temps, la tension u_{BA} a une valeur constante négative;
- lorsque u_{CA} est fonction affine décroissante du temps, la tension u_{BA} a une valeur constante positive.

Ces résultats sont bien conformes qualitativement à la relation (1) entre u_{BA} et u_{CA}, la dérivée d'une fonction affine étant une constante, positive si la fonction est croissante, négative dans le cas contraire.



9. ***Oscillogramme obtenu avec le montage de la figure 8 : en haut, tension u_{CA} aux bornes de la résistance ($f = 250$ Hz); en bas, tension u_{BA} aux bornes de la bobine. Pour plus de clarté, les deux tensions ont été décalées de part et d'autre de la ligne médiane (décalage de $-0{,}2$ V pour la tension u_{BA}).***

Pour la vérification numérique, écrivons :

$$u_{CA} = at + b, \quad \text{soit} \quad \frac{\mathrm{d}u_{CA}}{\mathrm{d}t} = a.$$

- Lorsque u_{CA} est une fonction croissante ($a > 0$), elle croît de 4 V ($2\ \text{div} \times 2\ \text{V.div}^{-1}$) en 2 ms ($2\ \text{div} \times 1\ \text{ms.div}^{-1}$); d'où :

$$a = \frac{4}{2.10^{-3}} = 2\,000\ \text{V.s}^{-1}.$$

Avec $L \approx 0{,}5$ H et $R = 10^4\ \Omega$, il vient donc :

$$u_{AB} = \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}u_{CA}}{\mathrm{d}t} = \frac{0{,}5}{10^4} \times 2.10^3 = 0{,}1\ \text{V}.$$

Mesurons la tension u_{BA} sur l'oscillogramme : nous trouvons $-0{,}1$ V; la relation (1) est bien vérifiée.

- Lorsque u_{CA} est une fonction décroissante ($a < 0$), la vérification s'effectue de même.

Scanné avec CamScanner

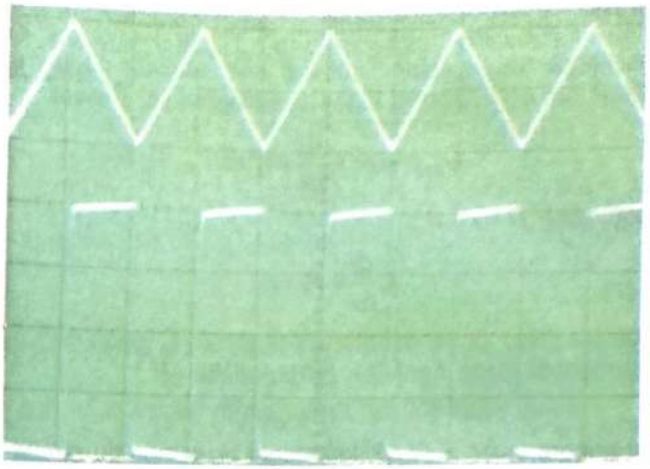
3. Influence de la fréquence de la tension variable

Réglons la fréquence du générateur sur 500 Hz sans modifier l'amplitude du signal. Les variations de u_{CA} sont alors deux fois plus «rapides», la période du signal passant de 4 ms à 2 ms. La pente des dents de scie a donc doublée, soit :

$$a = \pm 4\,000 \text{ V.s}^{-1};$$

d'où : $$u_{BA} = -\frac{L}{R}\frac{du_{CA}}{dt} = \pm 0{,}2 \text{ V}.$$

L'oscillographe nous permet de vérifier ce résultat (*photo* 10).



10. *Par rapport à la photographie* 9, *la fréquence du signal triangulaire a été doublée* ($f = 500$ Hz). ▶

11.5 établissement et annulation du courant dans un circuit inductif; constante de temps

Nous sommes maintenant en mesure d'interpréter la seconde expérience du paragraphe 11.1 (*fig.* 2 *et* 3).

11.5.1 établissement du courant

La tension u_{AM} (*fig.* 11) est une tension en créneaux. Durant l'établissement du courant, le générateur, de résistance négligeable, délivre une tension constante e_0; le circuit est équivalent à celui de la figure 12. Il vient :

$$u_{AM} = e_0 = u_{AB} + u_{BM},$$

soit : $$e_0 = L\frac{di}{dt} + ri + r'i,$$

d'où, en posant $R = r + r'$, résistance totale du circuit :

$$L\frac{di}{dt} + Ri = e_0.$$

Compte tenu de la condition initiale $i = 0$ pour $t = 0$, la solution de cette équation différentielle est :

$$t \longmapsto i(t) = \frac{e_0}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}),$$

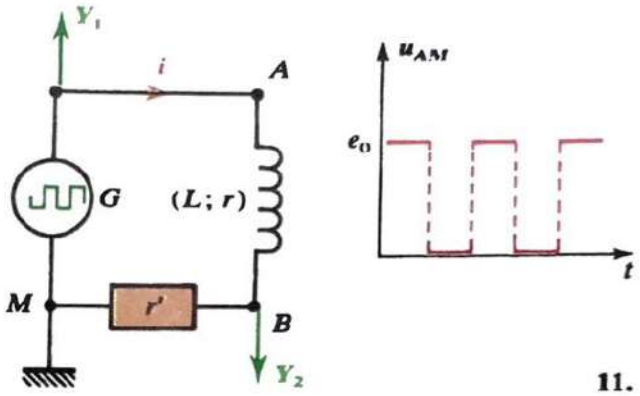
ou encore, en posant $I_0 = e_0/R$ et $\tau = L/R$:

$$i(t) = I_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

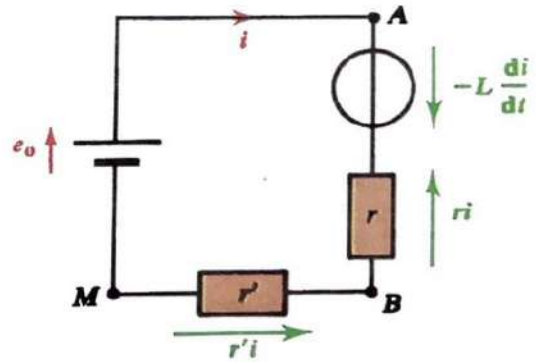
$\tau = L/R$ est appelé **constante de temps** du circuit et s'exprime en secondes.

A partir de l'instant $t = 0$, l'intensité du courant croît donc selon une loi exponentielle de zéro à la valeur maximale $I_0 = e_0/R$. Lorsque le régime permanent est établi ($i = I_0$) — théoriquement au bout d'une durée infinie —, la bobine se comporte comme une simple résistance r. Le calcul montre que pour $t = 5\tau$, $i > 0{,}99\ I_0$.

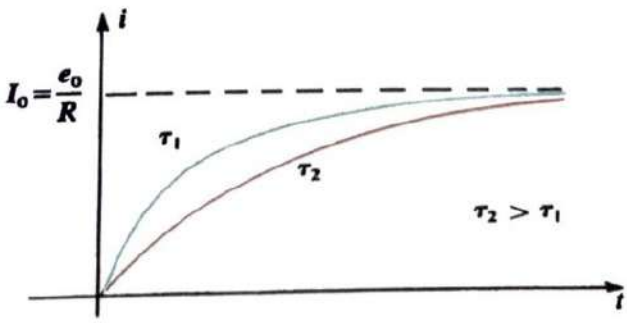
La durée d'établissement du courant augmente avec la constante de temps τ du circuit (*fig.* 13).



11.



12. *Circuit équivalent à celui de la figure* 11 *lors de l'établissement du courant.*



13. *La durée d'établissement du courant augmente avec la constante de temps du circuit* ($\tau_2 > \tau_1$).

Scanné avec CamScanner

11.5.2 annulation du courant

Durant l'annulation du courant (*fig.* 11), le générateur, de résistance négligeable, délivre une tension nulle; le circuit est équivalent à celui de la figure 14. Il vient :

$$u_{AM} = 0 = L\frac{di}{dt} + ri + r'i;$$

d'où, avec $R = r + r'$:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0.$$

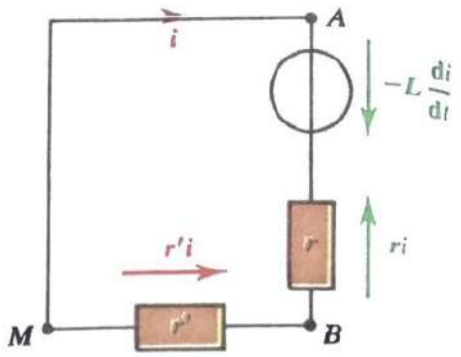
Compte tenu de la condition initiale $i = I_0$ pour $t = 0$, la solution de cette équation différentielle est :

$$t \longmapsto i(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t},$$

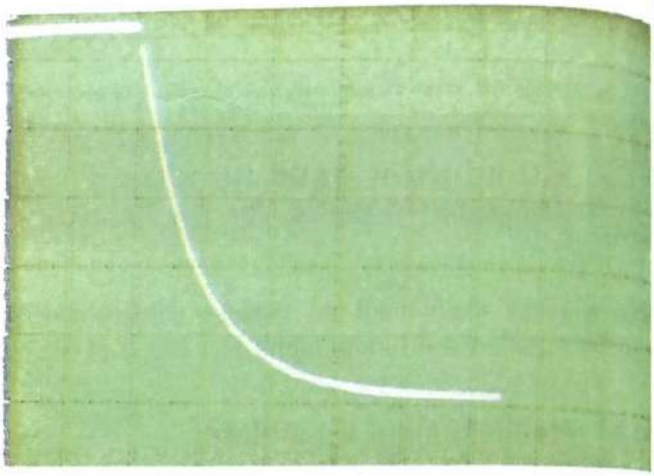
ou encore, avec $\tau = L/R$, constante de temps du circuit :

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

La photographie 15 montre un oscillogramme correspondant à cette fonction.
L'intensité du courant, de valeur initiale I_0, s'annule d'autant plus lentement que la constante de temps τ du circuit est grande.



14. *Circuit équivalent à celui de la figure* **11** *lors de l'annulation du courant.*



15. *Oscillogramme de la tension* u_{BM} *(fig.* **11** *et* **14**) *lors de l'annulation du courant.* ▶

APPLICATION 2

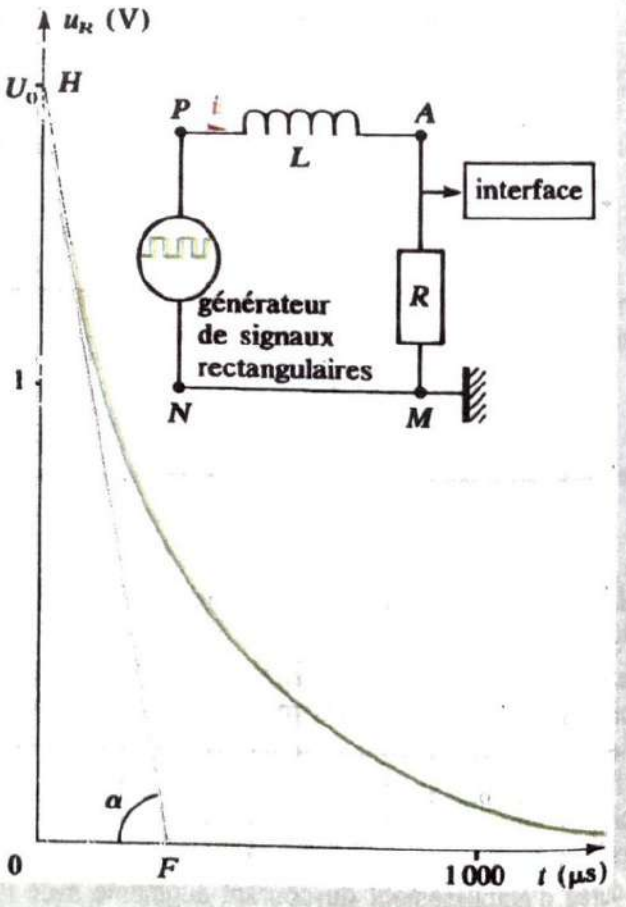
Détermination graphique de l'inductance d'une bobine de résistance négligeable

On a réalisé le montage schématisé sur la figure ci-contre afin de faire une détermination approchée de l'inductance L d'une bobine de résistance négligeable.
Une interface reliée à un ordinateur permet de tracer la courbe représentative de la tension u_R aux bornes du conducteur ohmique en fonction du temps. Pendant l'enregistrement la tension délivrée par le générateur de signaux rectangulaires est nulle.

1/ Établir l'équation différentielle à laquelle obéit la tension u_R durant l'enregistrement.

2/ Vérifier que la solution de cette équation est de la forme $u_R = RI_0 e^{-t/\tau}$. On explicitera τ en fonction de L et de R.

3/ Montrer que la tangente à la courbe à l'instant $t = 0$ coupe l'axe des temps au point d'abscisse $t = \tau$. En déduire la valeur de l'inductance L de la bobine sachant que $R = 150\ \Omega$.



11.5.3 conclusion

Nous retiendrons :

• L'établissement et l'annulation du courant dans un circuit inductif, de résistance totale R et d'inductance L, ne se font pas instantanément; dans un tel circuit, l'intensité ne varie jamais de façon discontinue.

Les durées d'établissement et d'annulation du courant sont caractérisées par la constante de temps du circuit :



11.6 énergie magnétique emmagasinée dans une bobine

11.6.1 échanges énergétiques

Calculons la puissance électrique reçue à chaque instant par une bobine (A, B) d'inductance L et de résistance r, parcourue par un courant d'intensité i. En utilisant le circuit équivalent de la figure 7, il vient :

$$\mathcal{P} = u_{AB} i = (ri - e)\, i = ri^2 - ei,$$

soit : $$\mathcal{P} = \mathcal{P}_J + \mathcal{P}_m,$$

où : • $\mathcal{P}_J = ri^2$, terme toujours positif, est la puissance Joule transformée en chaleur;

• $\mathcal{P}_m = -ei$, terme positif ou négatif, est la puissance électrique emmagasinée ($\mathcal{P}_m > 0$) ou restituée ($\mathcal{P}_m < 0$) par la bobine.

Avec $e = -L\dfrac{di}{dt}$, il vient :

$$\mathcal{P}_m = Li\frac{di}{dt},$$

soit, d'après les règles de dérivation des fonctions :

$$\mathcal{P}_m = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right).$$

De cette relation, nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

• lorsque la valeur absolue de l'intensité augmente, $\mathcal{P}_m$ est positif : *la bobine reçoit de l'énergie électrique* qu'elle emmagasine (effet récepteur);

• lorsque la valeur absolue de l'intensité diminue, $\mathcal{P}_m$ est négatif : *la bobine restitue de l'énergie électrique* au reste du circuit (effet générateur).

1/ Lorsque le générateur délivre une tension nulle, il est équivalent à un court-circuit ($u_{PN} = 0$). Or :

$$u_{PN} = u_{PA} + u_{AN};$$

d'où : $$0 = L\frac{di}{dt} + Ri.$$

Avec $u_R = Ri$, il vient :

$$0 = \frac{L}{R}\frac{du_R}{dt} + u_R.$$

C'est l'équation différentielle qui régit les variations de la tension aux bornes de la résistance en fonction du temps durant l'enregistrement.

2/ Vérifions que la solution proposée convient. Par dérivation, il vient :

$$\frac{du_R}{dt} = -\frac{RI_0}{\tau}e^{-t/\tau};$$

d'où, en reportant dans l'équation précédemment trouvée :

$$-\frac{L}{R}\frac{RI_0}{\tau}e^{-t/\tau} + RI_0 e^{-t/\tau} = 0.$$

Cette relation est vérifiée pour $\tau = \dfrac{L}{R}$.

De plus, à l'instant $t = 0$, $u_R = RI_0 = U_0$, I_0 étant l'intensité en régime permanent lorsque le générateur délivre une tension constante e (égale à U_0).

3/ A l'instant $t = 0$, il vient :

$$\frac{du_R}{dt} = -\frac{RI_0}{\tau} = -\frac{U_0}{\tau}.$$

Nous obtenons ainsi la pente de la tangente à la courbe à l'instant $t = 0$ (point H). Traçons cette tangente; elle coupe l'axe des temps au point F tel que :

$$\tan\alpha = \frac{OH}{OF} = \left|-\frac{U_0}{\tau}\right|.$$

Or $OH = U_0$; d'où $OF = \tau$: la tangente à l'origine coupe l'axe des temps au point d'abscisse τ. Graphiquement, nous obtenons ainsi :

$$\tau = \frac{1{,}5}{5}\,1\,000 = 300\ \mu s.$$

Il vient alors, avec $L = R\tau$:

$$L = 150 \times 300.10^{-6} = 0{,}045\ H = 45\ mH.$$

Scanné avec CamScanner

11.6.2 énergie emmaganisée

Dans l'expression $\mathcal{E}_m = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} Li^2\right)$, le terme $\frac{1}{2} Li^2$ apparaît comme une énergie; c'est l'énergie que la bobine a emmagasinée (lorsque $\mathcal{E}_m > 0$). Cette énergie est à l'origine du champ magnétique produit par la bobine; aussi est-elle dite « magnétique ».

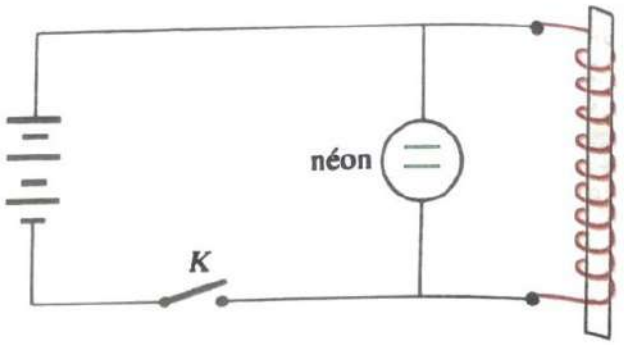
• L'énergie magnétique emmaganisée par une bobine d'inductance L est proportionnelle au carré de l'intensité du courant qui la traverse :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} Li^2.$$

J H A

Lorsqu'on établit le courant, la bobine emmagasine de l'énergie magnétique et retarde, de ce fait, l'établissement du courant. En effet, cette énergie ne peut être emmagasinée instantanément, ce qui équivaudrait à une puissance infinie!
Lorsqu'on ouvre le circuit, la bobine restitue cette énergie et prolonge, de ce fait, la circulation du courant.

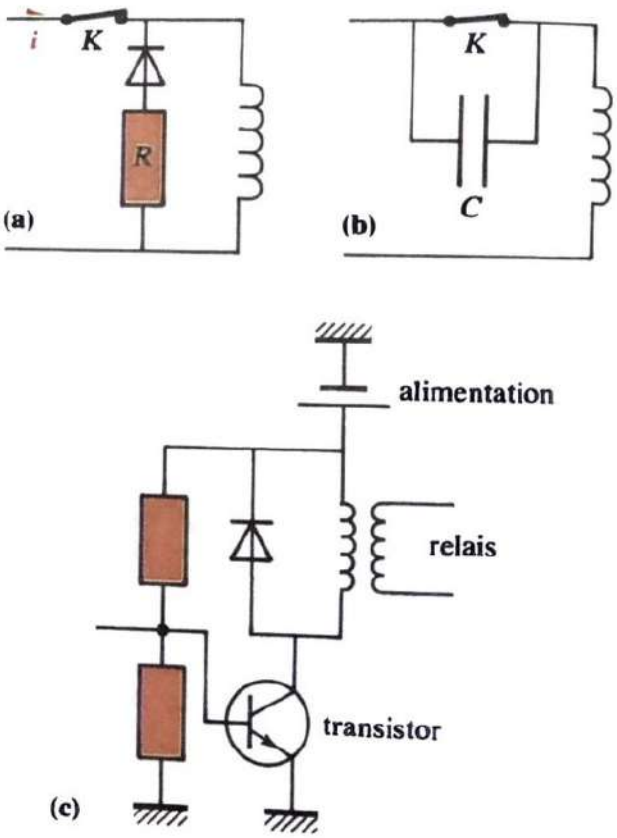
Une mise en évidence expérimentale de l'énergie magnétique fait l'objet de la fiche expérimentale II.



16. *Le générateur délivre une tension insuffisante pour allumer la lampe au néon. En revanche, la lampe s'allume lorsqu'on ouvre le circuit, grâce à la f.e.m. d'auto-induction qui prend naissance dans la bobine.*

11.7 coupure d'un courant continu dans un circuit inductif

Considérons le circuit de la figure 16, où la tension d'allumage de la lampe au néon est de 62 V (puissance 0,15 W) et réalisons l'expérience suivante. Alimentons le circuit avec une tension de 50 V : la lampe reste éteinte. Ouvrons l'interrupteur K : la lampe produit un bref mais intense éclair; la tension à ses bornes a donc dépassé 62 V au moment de l'ouverture du circuit. La variation de l'intensité donne naissance à une force électromotrice d'auto-induction dans la bobine, qui est à l'origine d'une surtension aux bornes de la lampe au néon et provoque son allumage. Si nous supprimons la lampe, le phénomène se reporte entièrement aux bornes de l'interrupteur et provoque l'apparition d'étincelles qui peuvent endommager ces bornes ou claquer l'isolant de la bobine.
Nous avons tous observé de telles *étincelles de rupture*. Lorsqu'on débranche brusquement des appareils ménagers comportant des moteurs (donc des bobines) en fonctionnement, il apparaît de fortes étincelles sur la prise de courant. La plupart du temps, ce phénomène doit être atténué sous peine de détérioration, notamment, des balais et des lames du collecteur dans les dynamos et les moteurs et des interrupteurs à haute tension. On y remédie en plaçant en parallèle aux bornes des bobines une résistance et une diode ou un condensateur aux bornes des interrupteurs (*fig.* 17).
On supprime également ainsi les parasites gênants pour les récepteurs radio; les étincelles de rupture provoquent en effet des ondes électromagnétiques qui sont interceptées par l'antenne et perturbent la réception.



17. *Systèmes de protection contre les étincelles et les surtensions de rupture :*
a. *Lorsqu'on ouvre l'interrupteur K, le courant de rupture s'amortit à travers la résistance R.*
b. *Lorsqu'on ouvre l'interrupteur K, il y a échange d'énergie entre la bobine et le condensateur; le courant s'amortit à travers la résistance de la bobine.*
c. *La diode protège le transistor des surtensions que peut provoquer le relais.*

Scanné avec CamScanner

II. MISE EN ÉVIDENCE DE L'ÉNERGIE MAGNÉTIQUE EMMAGASINÉE PAR UNE BOBINE

fiche expérimentale

1. *Montage et principe*

Le montage utilisé est schématisé sur la figure 18. Le but de l'expérience est de mettre en évidence l'énergie magnétique emmagasinée par la bobine par transfert de cette énergie dans le condensateur.

2. *Manipulation*

• Fermons l'interrupteur K, le condensateur étant initialement déchargé. Une fois le régime permanent établi, un courant d'intensité I constante circule dans la bobine.
La tension u_{AM} aux bornes du condensateur reste nulle, la diode D, en inverse, bloquant la circulation du courant.

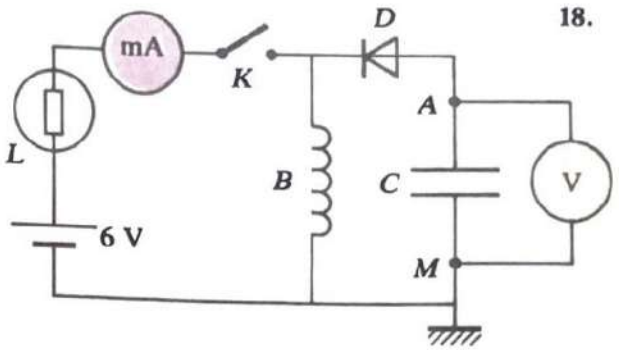
• Ouvrons l'interrupteur. Le condensateur se charge : une tension U, négative, apparaît à ses bornes. La diode empêche maintenant le condensateur de se décharger dans la bobine.

3. *Interprétation et exploitation des résultats*

Durant la première phase de l'expérience, la bobine emmagasine l'énergie magnétique :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} LI^2.$$

Durant la seconde phase, cette énergie est à l'origine d'une force électromotrice d'auto-induction. Cette dernière engendre un courant qui circule dans le circuit maintenant constitué de la bobine et du condensateur. Nous pouvons également dire que ce courant « prolonge » celui qui circulait dans la bobine avant l'ouverture de l'interrupteur (loi de Lenz).
Le condensateur se charge; il reçoit l'énergie $\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} CU^2$ (voir cours de Première), libérée par la bobine.



18.

- B : bobine à air de 500 spires, $L = 11{,}4$ mH
- L : lampe 6 V
- D : diode 1 N 4007
- C : condensateur 5 µF
- V : voltmètre électronique (grande résistance interne)

Nous pouvons calculer le rendement de ce transfert d'énergie; il vient :

$$\eta = \frac{\mathcal{E}_e}{\mathcal{E}_m} = \frac{CU^2}{LI^2}.$$

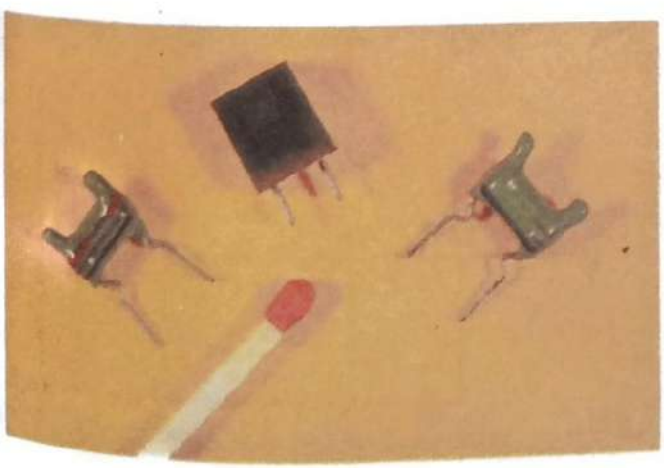
Lors d'une expérience, nous avons mesuré :

$$I = 760 \text{ mA} \quad \text{et} \quad |U| = 28 \text{ V};$$

avec $C = 5$ µF et $L = 11{,}4$ mH, il vient alors :

$$\eta = 0{,}6 \quad \text{soit} \quad 60\ \%.$$

Nous noterons enfin que la force électromotrice d'auto-induction charge le condensateur sous une tension (28 V) supérieure à la force électromotrice du générateur (6 V).





Les bobines que l'on trouve dans les laboratoires des lycées sont encombrantes et produisent des effets parasites. En radioélectricité, on utilise des bobines moulées, réalisées autour d'un petit noyau de poudre de fer. Les bobines ajustables des récepteurs sont munies de noyau de ferrite plongeur miniaturisé.

Scanné avec CamScanner

Scanné avec CamScanner

L'essentiel du cours

11.1 A 1/ Donner la définition de l'inductance d'une bobine.

2/ Quelle est l'unité d'inductance ?

3/ L'inductance d'une bobine à air est-elle de l'ordre de quelques dizaines de mH ou de quelques dizaines de H ?

4/ L'inductance d'une bobine sans noyau de fer dépend-elle de l'intensité qui la traverse ?

5/ Donner la relation qui existe aux bornes d'une bobine (R, L) entre la tension et l'intensité. Préciser le sens du courant.

6/ Dans un circuit (R, L) série, la constante de temps qui caractérise l'établissement ou la décroissance de l'intensité est-elle égale à R/L ? à L/R ? à LR ?

7/ Donner l'expression de l'énergie magnétique emmagasinée dans une bobine traversée par un courant i.

8/ L'intensité du courant dans une bobine peut-elle subir une discontinuité ?

11.2 A Le dipôle (A, B) est constitué par une bobine ; il est traversé par un courant d'intensité $i(t)$.

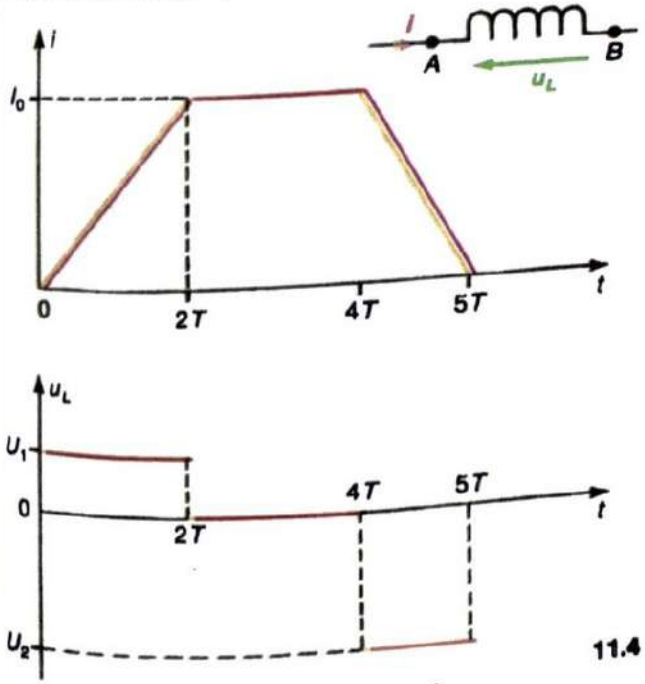


1/ Déterminer le sens du courant si $i(t) < 0$.

2/ La bobine a une inductance L et une résistance négligeable. Calculer la tension $u_{AB}(t)$ et la force électromotrice d'auto-induction $e(t)$.

3/ Mêmes questions lorsque la bobine a une résistance r.

11.3 A L'intensité dans une bobine d'inductance L, de résistance négligeable, varie en fonction du temps selon la forme indiquée (figure).

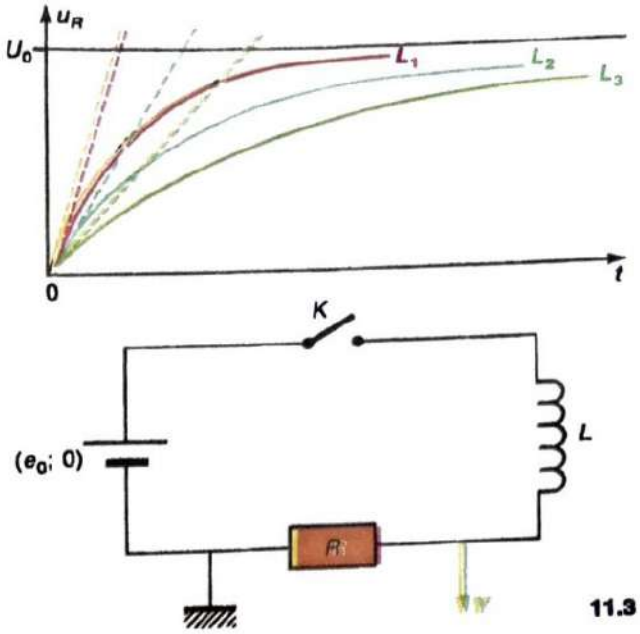


11.4

1/ Trouver l'allure de la tension aux bornes de la bobine.

2/ Calculer la valeur U_1 de la tension dans l'intervalle $[0, 2T]$, et la valeur U_2 dans l'intervalle $[4T, 5T]$. Trouver une relation simple entre U_1 et U_2.

11.4 On a relevé la tension aux bornes d'une résistance R lors de l'établissement du courant dans un circuit (R, L) pour trois bobines différentes L_1, L_2 et L_3 de résistances négligeables (figure).



11.3

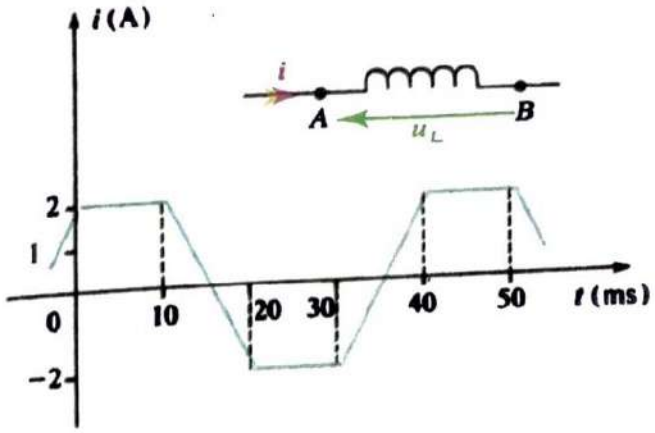
1/ A Pourquoi la tension limite u_0 aux bornes de R est-elle la même quelle que soit la bobine ? Cette tension dépend-elle de L ou de R ?

2/ C Quelle est la bobine qui a la plus grande inductance ? la plus petite inductance ?

3/ B3 L'inductance de L_1 est égale à 40 mH. Donner des valeurs approchées de L_2 et de L_3.

Exercices de base

11.5 Le graphique représente la variation au cours du temps de l'intensité i qui traverse une bobine d'inductance $L = 40$ mH et de résistance négligeable.



Scanné avec CamScanner

EXERCICES

1/ A Calculer les valeurs prises par la f.e.m. d'auto-induction e depuis l'origine des dates jusqu'à l'instant t=40 ms.

2/ B4 Représenter graphiquement e en fonction du temps.

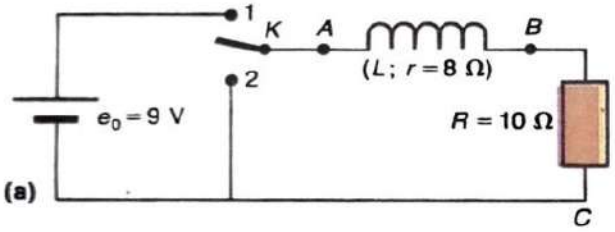
3/ A Déterminer la tension $u_{AB} = u_L$.

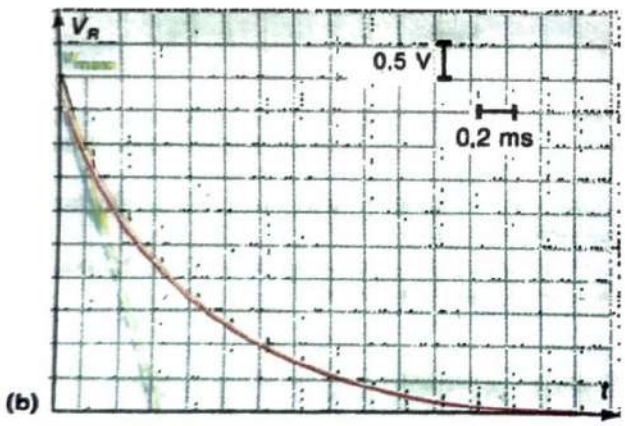
4/ AB3 Représenter graphiquement l'énergie emmagasinée dans la bobine en fonction du temps. Calculer la valeur maximale $\mathcal{E}_m$ de cette énergie.

11.6 Un solénoïde de 50 cm de longueur et de 8 cm de diamètre est considéré comme infiniment long; il comporte 2 000 spires par mètre.

1/ AB3 Donner les caractéristiques du vecteur champ magnétique à l'intérieur du solénoïde quand celui-ci est parcouru par un courant. Calculer l'inductance L du solénoïde.

2/ AB3 On réalise avec ce solénoïde le montage de la figure a. La résistance interne du générateur est négligeable.





a/ L'interrupteur K est dans la position 1. Déterminer l'intensité I_0 du courant dans le circuit en régime permanent.
b/ A l'instant $t = 0$ (en un temps négligeable), l'interrupteur passe de la position 1 à la position 2. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité i du courant dans le circuit. Montrer que l'intensité est donnée en fonction du temps par la relation :

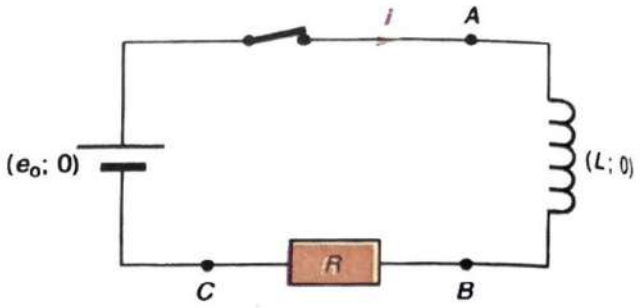
$$i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

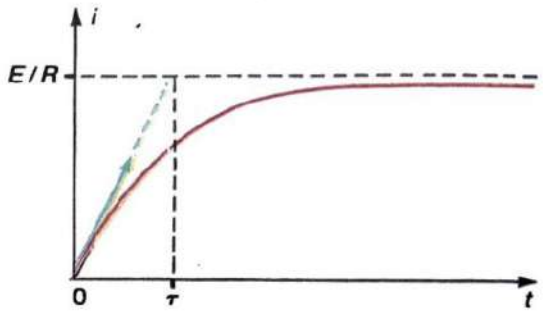
où $\tau = \dfrac{L}{R + r}$ (constante de temps).

3/ Soit u_R la tension aux bornes du dipôle (B, C). On désigne respectivement par t_1 et t_2 les temps au bout desquels u_R atteint 90 % et 10 % de sa valeur maximale.

a/ AB3 Exprimer $t_d = t_2 - t_1$ en fonction de τ.
b/ B4 A partir de la représentation graphique de u_R en fonction de t (figure b), déterminer t_d : en déduire la valeur de τ.
c/ B4 Retrouver cette valeur à partir de la tangente à la courbe à l'origine.

11.7 Le circuit représenté ci-dessous comporte, placés en série, une bobine d'inductance L et de résistance négligeable, une résistance R et un générateur, de f.e.m. constante e_0 et de résistance interne nulle. On a représenté la variation de l'intensité du courant pendant l'établissement de celui-ci.





1/ AB3 Représenter graphiquement la tension u_R aux bornes de la résistance R en fonction du temps.

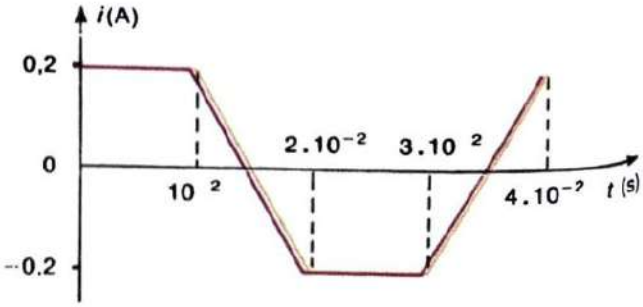
2/ AB3 Exprimer la tension u_L aux bornes de la bobine en fonction de e_0 et u_R. En déduire la courbe représentant la variation de u_L en fonction du temps.

3/ A Pourquoi peut-on dire que la bobine est équivalente à un court-circuit en régime permanent (c'est-à-dire au bout d'un temps $t \gg \tau = L/R$) ?

11.8 Une portion de circuit (A, B) est constituée d'une bobine sans noyau, d'inductance L = 5,0 mH et de résistance $r = 2{,}0\ \Omega$. La bobine est orientée de A vers B.

1/ AB3 Calculer la variation du flux propre à travers la bobine quand elle est parcourue par un courant d'intensité $i = 0{,}20$ A.

2/ La bobine est parcourue par un courant dont l'intensité varie avec le temps (figure).



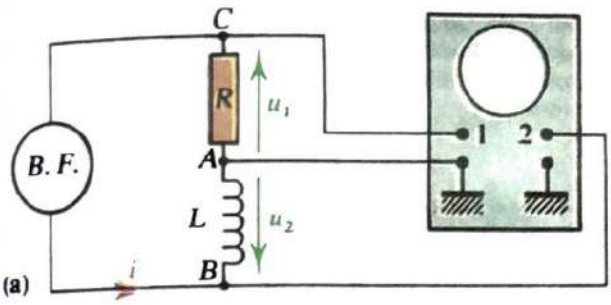
Scanné avec CamScanner

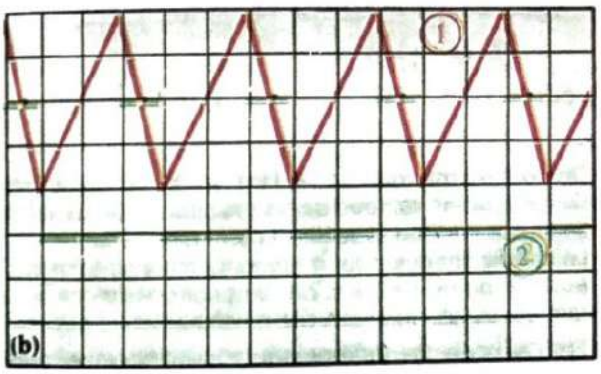
a/ A Pour quels intervalles de temps y a-t-il variation du flux propre à travers la bobine ? On se limitera aux instants t tels que $0 \leqslant t \leqslant 0{,}04$ (en s).

b/ AB3 En déduire que la bobine est le siège d'une f.e.m. d'auto-induction e, dans certains intervalles de temps que l'on précisera. Calculer cette f.e.m. dans chaque cas.

c/ AB3 Donner l'expression littérale de la tension u_{AB} aux bornes de la bobine. Représenter graphiquement la variation de cette tension en fonction du temps. (Préciser les échelles choisies.)

11.9 On branche en série aux bornes d'un générateur un conducteur ohmique de résistance $R = 100\ \Omega$ et une bobine d'inductance L et de résistance négligeable (figure a).





Les tensions $u_1 = u_{CA}$ et $u_2 = u_{BA}$ sont appliquées aux bornes d'un oscillographe à deux voies. On obtient sur l'écran l'oscillogramme de la figure b.

L'oscillographe est réglé de la façon suivante :

- base de temps : 1 ms/div (1 div = 1 carreau) ;
- voie 1 : 1 V/div ;
- voie 2 : 0,5 V/div.

En l'absence de tension, les traces du spot sont confondues avec la ligne horizontale au milieu de l'écran.

1/ A La tension u_1 détectée sur la voie 1 est-elle u_{CA} ou u_{AC} ? Exprimer u_1 en fonction de R et i.

2/ A La tension u_2 détectée sur la voie 2 est-elle u_{AB} ou u_{BA} ? Trouver une relation entre L, R, u_2 et $\frac{du_1}{dt}$.

3/ A Pourquoi la tension u_2 est-elle rectangulaire avec deux créneaux de hauteurs différentes ?
Pourquoi cette tension est-elle négative lorsque la tension u_1 croît ?

4/ AB3 Calculer l'inductance L de la bobine.

Banc d'essais

Dans tous les exercices, on prendra $\mu_0 = 4\pi . 10^{-7}$ S.I.

11.10 AB3 Calculer l'inductance d'un solénoïde de 40 cm de longueur, 20 cm² de section et comportant 1 000 spires, en supposant que le champ est uniforme à l'intérieur.

↳ **ex. 11.6.**

11.11 AB3 Le flux propre qui passe à travers une bobine est de $2 . 10^{-3}$ Wb lorsqu'elle est traversée par un courant d'intensité 2 A. Quelle est son inductance ?

↳ **ex. 11.8.**

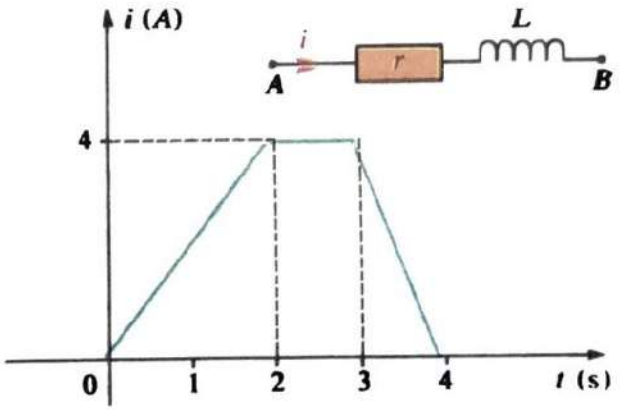
11.12 AB3 1/ Calculer l'inductance L d'un solénoïde formé de 1 000 tours de fil uniformément enroulé sur un tube de carton de 50 cm de longueur et de 4 cm de diamètre.

2/ Si on produit une variation de 1,5 A en 0,02 s du courant qui traverse le solénoïde, quelle est la f.e.m. moyenne induite ?

3/ Le coefficient L a-t-il en réalité une valeur supérieure ou inférieure à celle qui a été calculée ?

↳ **ex. 11.6.**

11.13 Une bobine (A, B) d'inductance $L = 0{,}2$ H et de résistance $r = 5\ \Omega$ est traversée par un courant d'intensité i.



1/ AB3 L'intensité du courant dans la bobine varie en fonction du temps (figure). Déterminer la f.e.m. e induite dans la bobine pendant les intervalles de temps (en s)]0, 2[,]2, 3[et]3, 4[.
Représenter graphiquement e en fonction du temps.

2/ B3 Exprimer i en fonction du temps sur chacun des intervalles précédents.

3/ B3 Déterminer la tension u_{AB} aux bornes de la bobine pendant ces mêmes intervalles de temps. Représenter graphiquement u_{AB} en fonction du temps.

↳ **ex. 11.8.**

11.14 Un circuit électrique comporte, montés en série :

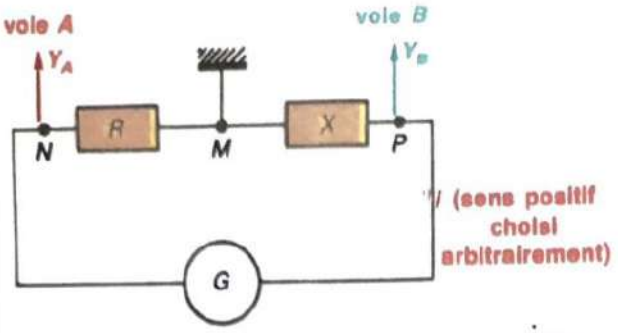
— un générateur G ;
— une résistance R ;
— un dipôle X.

Les natures du générateur G et du dipôle X seront précisées à chaque question.

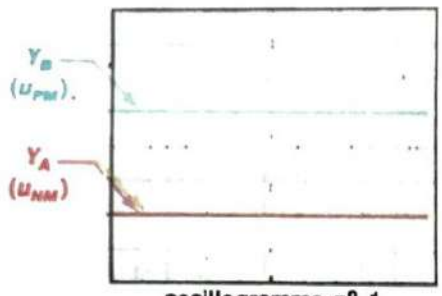
Scanné avec CamScanner

EXERCICES

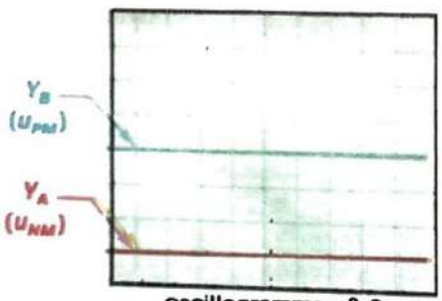
Un oscillographe bicourbe permet d'observer sur la voie *A* la tension u_{NM} aux bornes de la résistance et sur la voie *B* la tension u_{PM} aux bornes du dipôle *X* (figure).



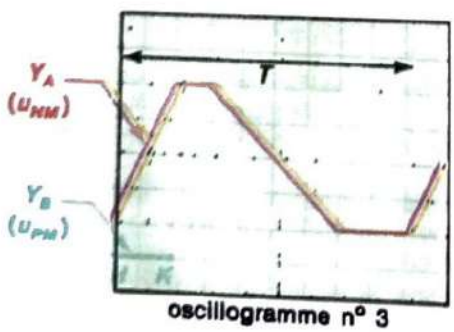
réglages : base de temps : 0,2 ms par division; sensibilités verticales de la voie *A* et de la voie *B* : 1 V par division



oscillogramme n° 1



oscillogramme n° 2



oscillogramme n° 3

1/ On prend pour *G* un générateur G_1 de tension constante et pour *X* une résistance $R_1 = 50\ \Omega$. On observe l'oscillogramme 1.

a/ A Exprimer u_{NM} et u_{PM} en fonction de *i*.

b/ C Préciser si le pôle positif de G_1 est relié au point *P* ou au point *N*.

c/ B3 Calculer la valeur de *R*.

2/ On prend toujours pour *G* le générateur G_1 de tension constante; *X* est maintenant une bobine *B* d'inductance *L* et de résistance R_2 de valeurs inconnues. Quand le régime stationnaire est établi, on observe l'oscillogramme 2.

a/ A Exprimer u_{PM} en fonction de *i*.

b/ C Pourquoi peut-on affirmer que la résistance R_2 de la bobine est négligeable?

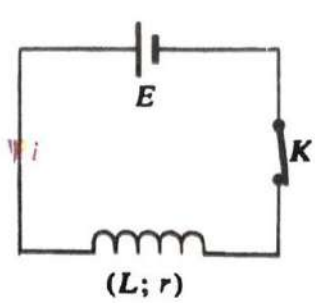
3/ C On prend pour *G* un générateur G_2 délivrant une tension variable de période *T*; *X* est toujours la bobine *B* étudiée dans la question 2. On observe l'oscillogramme 3. (Seule la partie *HK* de la trace correspondant à la voie B a été représentée.)

a/ Calculer *L*.

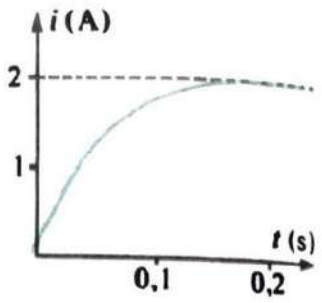
b/ Compléter l'oscillogramme de la voie *B*.

↳ **ex. 11.8, 11.9.**

11.15 Un circuit se compose d'un générateur, de f.e.m. $e_0 = 20$ V et de résistance intérieure négligeable, d'un interrupteur et d'une bobine de résistance *r* et d'inductance *L* (figure a).



(a)



(b)

On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$. On enregistre à l'oscillographe la représentation graphique de la variation de l'intensité *i* en fonction du temps *t* (figure b).
Le coefficient directeur de la tangente à l'origine est 40 S.I. Au bout du temps $t = 0{,}2$ s, on peut considérer que le courant est établi, son intensité étant constante et égale à 2 A.

1/ C A l'aide de la représentation graphique, préciser le sens de variation de la valeur absolue de la f.e.m. *e* d'auto-induction.

2/ B3C Déterminer, à l'instant de la fermeture, lorsque l'intensité est encore pratiquement nulle, la valeur absolue de *e*. En déduire l'inductance *L* de la bobine.

3/ B3C Calculer la valeur de *e* lorsque $t > 0{,}2$ s. En déduire la résistance de la bobine.

↳ **ex. 11.4, 11.6, 11.7.**

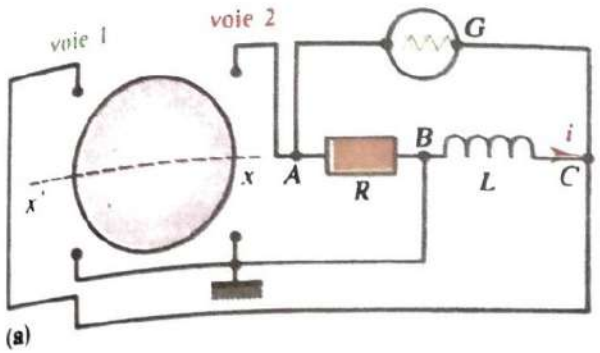
11.16 Un circuit comporte, montés en série :

- entre les points *A* et *B*, un conducteur ohmique de résistance $R = 1\,000\ \Omega$;
- entre les points *B* et *C*, une bobine de résistance négligeable et d'inductance *L*.

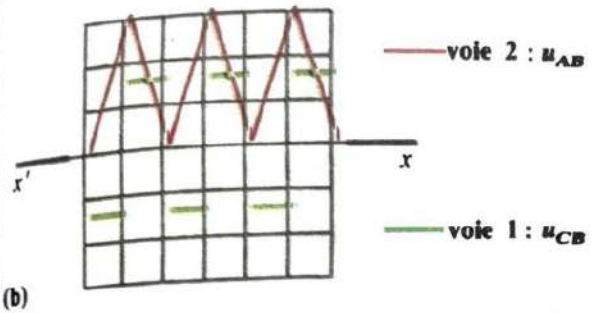
Ce circuit est alimenté par un générateur de tension *G*. On applique :

- d'une part, sur la voie 1, la tension u_{CB} aux bornes de la bobine;
- d'autre part, sur la voie 2, la tension u_{AB} aux bornes de la résistance.

Scanné avec CamScanner



(a)



(b)

On a réglé la base de temps sur la sensibilité de 10^{-3} s/div, la sensibilité verticale sur 20 mV/div pour la voie 1 et 2 V/div pour la voie 2.

1/ B3C La trace de la tension u_{AB} est pratiquement triangulaire. Justifier la tension en créneaux observée pour la tension u_{CB} (figure b).

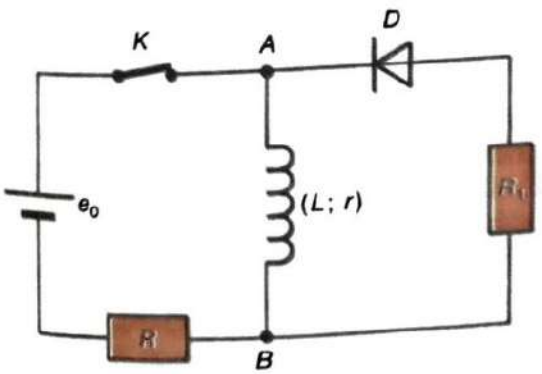
2/ B3C Calculer l'inductance L de la bobine.

3/ C *a/* A quelle condition portant sur R observe-t-on une tension u_{AB} identique à la tension délivrée par le générateur ?

b/ La masse du générateur n'est pas figurée sur le schéma du montage. Qu'observe-t-on sur l'oscillographe si cette masse est reliée à la borne C ? Comment faudrait-il modifier le montage ?

↳ ex. 11.9.

11.17 Un générateur de courant continu, de f.e.m. e_0 et de résistance négligeable, alimente un circuit (figure). La diode D est considérée comme parfaite.



1/ L'interrupteur est fermé. Lorsque le régime permanent est atteint (à un instant après la fermeture très supérieur à la constante de temps du circuit), la bobine se comporte comme une résistance r.

a/ C Montrer que, dans ces conditions, il ne circule pas de courant dans la résistance R_1.

b/ A Quelle est l'intensité du courant qui circule dans la bobine ?

c/ A Quelle est l'énergie emmagasinée dans la bobine ?

2/ L'interrupteur est ouvert brusquement à un instant pris pour origine.

a/ C2 Déterminer les intensités dans la bobine et dans la résistance R juste après cet instant.

b/ A Donner le sens du courant qui circule dans R_1.

c/ A Calculer la constante de temps τ.

d/ C Représenter graphiquement la décroissance de l'intensité de ce courant.

c/ C Que devient l'énergie magnétique initialement emmagasinée dans la bobine ?

Exercice T.P. : surtension aux bornes d'une bobine

11.18 1/ *Montage* (figure a)

- e_0 : générateur continu 2 V ;
- L : bobine à air avec noyau en fer doux, $L = 1$ H ; $R = 10\ \Omega$;
- I.L.S. : interrupteur à lame souple, dont la commande d'ouverture et de fermeture est réalisée au moyen d'un électroaimant alimenté par le secteur ;
- oscillographe pour observer la tension u_{AM}.

2/ *Observation*

Relever l'oscillogramme obtenu. Déterminer la valeur du pic de tension.

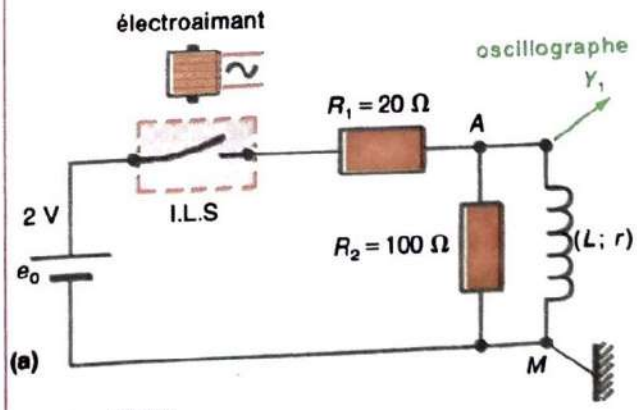
3/ *Questions*

a/ La lame souple de l'I.L.S. est attirée deux fois par période du secteur. Quelle est la fréquence du fonctionnement du récepteur ?

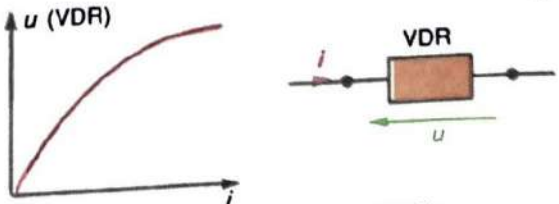
b/ Pourquoi y a-t-il surtension lorsque l'interrupteur est ouvert ?

c/ On maintient l'interrupteur fermé. Calculer la tension u_{AM} en régime permanent. Contrôler le résultat à l'oscillographe.

d/ On remplace R_2 par une varistance (V.D.R.), caractérisée par la courbe tension-intensité représentée sur la figure b.



(a)



(b) caractéristique d'une varistance (VDR)

Vérifier sur l'écran de l'oscillographe que la présence de la V.D.R. atténue fortement le phénomène de surtension.

Scanné avec CamScanner

INDUCTION - AUTO-INDUCTION

Conseils de résolution

Force de Laplace

Cette force est donnée par $\vec{F} = I\vec{\ell} \wedge \vec{B}$. Le conducteur est orienté dans le sens du courant. Le sens de $\vec{F}$ est tel que le trièdre $(\vec{F}, \vec{\ell}, \vec{B})$ soit direct. Généralement, $\vec{\ell}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux et la norme de $\vec{F}$ est alors donnée par :

$$F = I\ell B.$$

Lorsque le conducteur est en équilibre :

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}, \quad \Sigma \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = 0.$$

(Ne pas oublier le poids du conducteur et les forces de contact éventuelles.)

Induction électromagnétique

Il est nécessaire *d'orienter le circuit*. Si $\vec{B}$ est connu, on a intérêt à orienter le circuit d'après le sens de $\vec{B}$ ($\vec{n}$ colinéaire à $\vec{B}$ et de même sens) afin d'avoir un flux positif.

La f.é.m. induite est donnée par $e = -\dfrac{d\Phi}{dt}$ et l'intensité du courant induit, $i = \dfrac{e}{R}$ (R : résistance du circuit), a le signe de e (par exemple, si $e > 0$, le courant va dans le sens positif choisi).

Il est recommandé de vérifier le sens trouvé pour i en utilisant la loi de Lenz.

Enfin, lorsqu'on demande d'étudier le mouvement d'un conducteur soumis à une force de Laplace due à un courant induit, il est nécessaire d'établir deux équations :

- Une équation électrique (1) donnant l'intensité i du courant induit.
- Une équation mécanique (2) à partir de la relation fondamentale de la dynamique. Dans cette équation, i doit intervenir (par l'intermédiaire de la force de Laplace). On éliminera i entre (1) et (2).

Auto-induction

La f.é.m. induite est donnée par :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt}, \quad \text{car} \quad \Phi = Li.$$

Dans ces conditions, la tension u_{AB} aux bornes d'une bobine (L, r), orientée de A vers B et parcourue par un courant d'intensité i, est égale à :

$$u_{AB} = ri + L\frac{di}{dt}.$$

Si $R = 0$, alors :

$$u_{AB} = -e = L\frac{di}{dt}.$$

Problème résolu 1

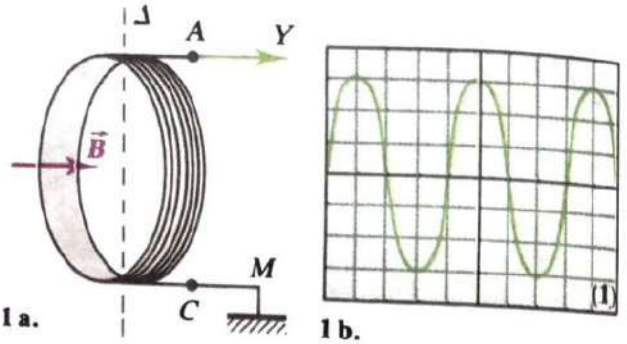
On négligera le phénomène d'auto-induction.

Une bobine plate est formée de $N = 500$ spires circulaires de fil conducteur isolé. La superficie de chaque spire est $S = 100$ cm².

La bobine tourne à vitesse angulaire constante autour d'un axe Δ diamétral et vertical dans un champ magnétique uniforme horizontal et constant dans le temps ; ce champ est noté $\vec{B}$.

Des contacts électriques mobiles permettent de relier les extrémités A et C du conducteur respectivement à l'entrée Y et à la masse M d'un oscillographe (figure 1a).

1/ *Le balayage horizontal étant réglé sur 10 ms . div⁻¹ et la sensibilité verticale sur 1 V . div⁻¹, on observe la courbe 1 sur l'écran de l'oscillographe (figure 1b).*



1 a. 1 b.

a/ *Justifier qualitativement l'existence d'une tension entre A et C lors de la rotation de la bobine.*

b/ *Déterminer la valeur ω_1 de la vitesse angulaire de la bobine.*

c/ *Déterminer l'intensité B du champ magnétique.*

2/ *On fait tourner la bobine deux fois moins vite. Le réglage de l'oscillographe n'est pas modifié. Donner, en la justifiant, l'allure de la courbe décrite par les spots en précisant sa période et son amplitude.*

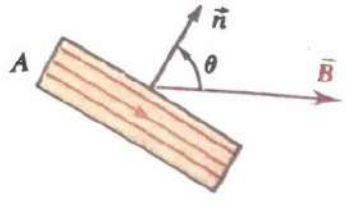
3/ *La bobine a une résistance $R = 100\ \Omega$; on branche entre les extrémités A et C un conducteur ohmique de résistance $R' = 200\ \Omega$. La bobine tournant à la vitesse angulaire ω_1 calculée dans la question 1/ et l'oscillographe étant toujours branché et réglé de la même manière, donner l'allure de la courbe observée sur l'écran en la justifiant.*

1a/ Lors de la rotation, le flux magnétique à travers la bobine varie en fonction du temps. Il se crée donc une f. é. m. induite. Le circuit étant ouvert, il apparaît alors une tension entre A et C.

b/ On oriente le courant i dans le sens de A vers C (figure 2).

B2 1 Utilisation du français.
A2 1 Explication du phénomène - savoir-faire théorique
C1.2 Organisation des étapes de la résolution.

Scanné avec CamScanner



2.

Le flux du champ magnétique à travers la bobine est :

$$\Phi = NS\vec{B}.\vec{n} = NSB\cos\theta,$$

avec : $\theta = (\vec{B}, \vec{n})$.

A2b.3 Savoir-faire théorique (lois de Faraday et d'Ohm, analyse de la courbe)

B2.1 Utilisation du français.

D'après la loi de Faraday, lorsque $\theta = \omega_1 t + \theta_0$ varie, il se crée une f.é.m. induite :

$$e = \frac{d\Phi}{dt} = \omega_1 NSB\sin(\omega_1 t + \theta_0).$$

La tension aux bornes de la bobine est telle que :

$$u_{AC} = ri - e.$$

B3.3 Outil mathématique
1 pt dérivation,
2 pts valeur numérique de la vitesse angulaire.

Comme $i = 0$, il vient :

$$u_{AC} = -e = -\omega_1 NSB\sin(\omega_1 t + \theta_0).$$

On détermine ω_1 à partir de la courbe visualisée sur l'écran de l'oscillographe :

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}.$$

Ainsi : $T_1 = 4 \times 10.10^{-3} = 4.10^{-2}$ s.

$$\omega_1 = 157 \text{ rad.s}^{-1}.$$

c/ La courbe 1 a pour amplitude :

$$U_1 = NSB\omega_1.$$

A2b.0,5 Analyse de la courbe

La sensibilité verticale étant réglée sur 1 V.div^{-1} et l'amplitude de la courbe correspondant à 3 divisions, on a :

$$B = \frac{U_1}{NS\omega_1} = 3{,}8.10^{-3}\text{ T}.$$

B3.1 Valeurs numériques de U_1 et B.
A1.0,5 Unité du champ.

2/ La bobine tourne deux fois moins vite :

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{2};$$

A2b.1 Savoir-faire théorique.

la période est donc double : $T_2 = 2T_1$.
En revanche, la tension maximale est divisée par 2 :

B3.1 Calculs de T_2 et U_2

$$U_2 = \frac{U_1}{2} = 1{,}5\text{ V}.$$

B4.1,5 Tracé de la courbe.

La courbe 2 est tracée sur la figure 3a.

3/ On a :

$$i = \frac{e}{R+R'} = \frac{NSB\omega_1}{R+R'}\sin(\omega_1 t + \theta_0).$$

A2.1 Savoir-faire théorique, avec application de la loi d'Ohm.

Or :

$$u_{AC} = -R'i.$$

Donc :

$$u_{AC} = -\frac{R'}{R+R'}NSB\omega_1\sin(\omega_1 t + \theta_0).$$

Ainsi, la courbe visualisée a la même période T_1 ; son amplitude est multipliée par :

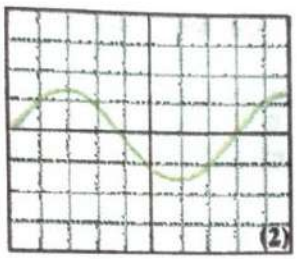
$$\frac{R}{R+R'} = \frac{2}{3}.$$

B4.1,5 Tracé de la courbe.

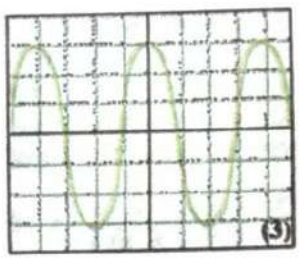
B3.1 Calcul de l'amplitude.

Donc : $(u_{AC})_{max} = 2$ V.

La courbe 3 est tracée sur la figure 3b.



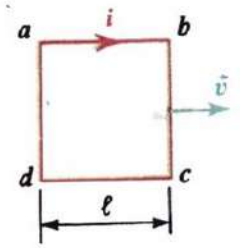
3a.

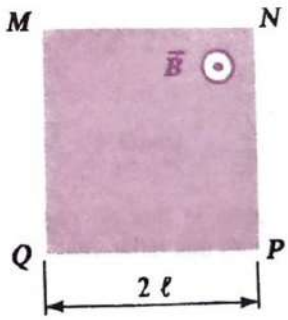


3b.

Problème résolu 2

Un cadre abcd de forme carrée, de côté $\ell = 2$ cm, est constitué par un seul fil métallique de résistance totale $R = 10^{-2}\ \Omega$. Ce cadre est disposé dans un plan vertical de façon que son côté bc soit vertical et situé en entier hors d'un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, horizontal, dirigé vers l'avant de la figure et perpendiculaire au plan du cadre.





Ce champ magnétique est limité, dans le plan de figure, par un carré vertical MNPQ, de côté $2\ell = 4$ cm. Son intensité vaut $B = 0{,}1$ T et le champ est nul en dehors de MNPQ.
On déplace le cadre abcd avec une vitesse horizontale $\vec{v}$ contenue dans le plan du cadre et de norme $v = 2$ m.s^{-1}.
A un instant pris comme origine des dates, le cadre pénètre dans le champ magnétique et en ressort ultérieurement.
On s'intéresse au courant induit qui peut parcourir le cadre abcd, sur lequel on choisit le sens positif de a vers b. On suppose l'inductance du cadre abcd négligeable ; de même, on néglige l'influence du champ magnétique terrestre.

1/ Justifier la possibilité de négliger le champ magnétique terrestre.

2/ Calculer l'intensité du courant induit circulant dans le cadre et déterminer son sens pendant les différentes phases du phénomène.

3/ Représenter graphiquement la variation de l'intensité du courant induit en fonction du temps (avant et après la date $t = 0$), en adoptant les échelles suivantes :
— en abscisse, 1 cm représente 5 ms ;
— en ordonnée, 1 cm représente 0,2 A.

4/ En supposant que le cadre n'est soumis qu'aux seules forces magnétiques et à une force exercée par un opérateur, déterminer la force que doit exercer l'opérateur pour que la vitesse $\vec{v}$ soit constante.

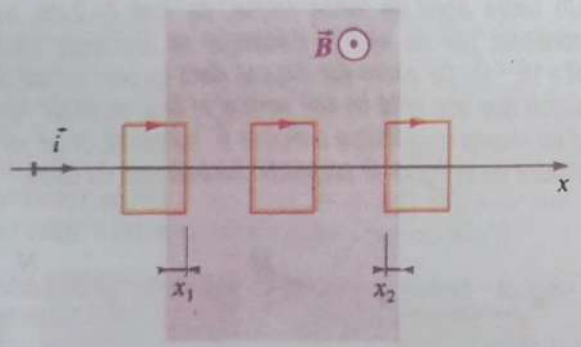
1/ L'intensité du champ magnétique terrestre est de l'ordre de 2.10^{-5} T, donc négligeable devant celle du champ magnétique utilisé, à savoir 0,1 T. En effet, le rapport des intensités est :

$$\frac{0,1}{2.10^{-5}} = 5.10^{3}.$$

A1 0,5 Ordre de grandeur du champ magnétique.
C1 1 Jugement critique sur approximation.
B2 0,5 Utilisation du français.

2/ Le sens du courant pendant les phases successives est le suivant :

C1 3 Organiser les étapes de la résolution ; 2 pts si seulement sporadiquement organisé.



phase 1 **phase 2** **phase 3**

Évaluons le flux du champ magnétique au cours des différentes phases. Compte tenu de l'orientation de la spire, nous obtenons :

B3 4 Outil mathématique 2 pts mise en équation du flux ; 2 pts calcul numérique pour Φ_3.

- 1re phase : $0 < t < \dfrac{\ell}{v}$ $\quad \Phi_1 = -x_1 \ell B = -vt\ell B$
- 2e phase : $\dfrac{\ell}{v} < t < \dfrac{2\ell}{v}$ $\quad \Phi_2 = -B\ell^2$
- 3e phase : $\dfrac{2\ell}{v} < t < \dfrac{3\ell}{v}$

$$\Phi_3 = -x_2 \ell B = -\left[\ell - v\left(t - \frac{2\ell}{v}\right)\right] B\ell$$

$$\Phi_3 = -B\ell(3\ell - vt).$$

A2 2 Savoir-faire théorique : lois de Faraday et d'Ohm.

Évaluons la f.é.m. e et l'intensité i au cours des trois phases, sachant que $i = \dfrac{e}{R}$:

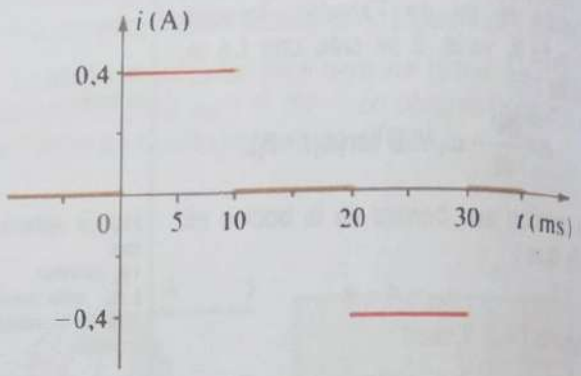
$$e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = v\ell B, \quad \text{d'où } i = \frac{B\ell v}{R} = 0,4 \text{ A}$$

$$e_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = 0, \quad \text{d'où } i = 0.$$

$$e_3 = -\frac{d\Phi_3}{dt} = v\ell B, \quad \text{d'où } i = -\frac{B\ell v}{R} = -0,4 \text{ A}.$$

A1 2 Unités

3/ Représentation graphique (t en ms) :



$t < 0$	$\Phi = 0$	$i = 0$
$0 < t < 10$		$i = 0,4$ A
$10 < t < 20$		$i = 0$
$20 < t < 30$		$i = -0,4$ A
$t > 30$	$\Phi = 0$	$i = 0$.

B4 3 Représentation graphique

4/ A chaque instant, la vitesse du cadre étant constante, l'opérateur doit exercer une force $\vec{F}_{op}$ opposée à la force électromagnétique $\vec{F}_e$ donnée par la loi de Laplace :

$$\vec{F}_{op} + \vec{F}_e = \vec{0}.$$

- 1re phase : $\vec{F}_e = |i|\vec{\ell} \wedge \vec{B} = -B|i|\ell\vec{j}$.

d'où : $\vec{F}_{op} = B|i|\ell\vec{j} = \dfrac{B^2\ell^2}{R}\vec{v}$.

- 2e phase : $\vec{F}_e = \vec{0}$, d'où : $\vec{F}_{op} = \vec{0}$.
- 3e phase $\vec{F}_e = B|i|\ell\vec{j}$.

d'où : $\vec{F}_{op} = -B|i|\ell\vec{j} = -\dfrac{B^2\ell^2}{R}\vec{v}$.

A1 4 Notion d'énergie, principe de l'inertie, 3 pts expression de $\vec{F}_{op}$.

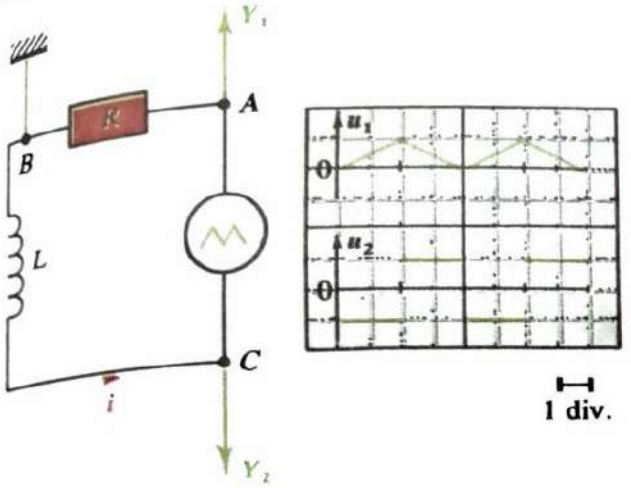
Problème résolu 3

Auto-induction

Une bobine de résistance négligeable et d'inductance propre L est montée en série avec un condensateur ohmique de résistance R = 1000 Ω. L'ensemble est ali-

Scanné avec CamScanner

menté par un générateur délivrant un signal triangulaire. On étudie à l'aide d'un oscillographe à deux voies la tension u_1 aux bornes du conducteur ohmique et la tension u_2 aux bornes de la bobine. L'aspect de l'écran est donné sur la figure.



Le balayage horizontal est réglé sur 10 ms . div^{-1} *et la sensibilité verticale sur* 1 V . div^{-1} *pour la voie* 1, *sur* 10^{-4} V . div^{-1} *pour la voie* 2.

1/ Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant $i(t)$ lorsque le générateur délivre une tension $u_{AC} = e(t)$.

2/ Compte tenu des tensions u_1 et u_2 observées à l'oscillographe, simplifier cette équation différentielle. En déduire que l'intensité est proportionnelle à $e(t)$.

3/ Justifier la courbe obtenue en Y_2. Exprimer u_{CB} en fonction de L, R et $\frac{di}{dt}$.

4/ Calculer la valeur de L.

1/ Le courant étant orienté selon *ABC* :

$$u_1 = u_{AB} = Ri, \quad u_{BC} = L\frac{di}{dt} = -u_2,$$

$$u_{AB} + u_{BC} + u_{AC} = e(t),$$

$$e(t) = Ri + L\frac{di}{dt}.$$

2/ Comme $u_2 \ll u_1$, on peut admettre que :

$$u_1 \approx e(t) = Ri(t).$$

La forme de la courbe représentative de $u_1(t)$ est donc la même que pour $e(t)$ (signaux triangulaires).

3/ On a :

$$u_2 = -L\frac{di}{dt} = -\frac{L}{R}\frac{de(t)}{dt} = -\frac{L}{R}\frac{du_1}{dt}.$$

Or, u_1 varie linéairement :

$$\frac{du_1}{dt} = \pm 1\,000 \text{ V} . \text{s}^{-1}.$$

Donc : $u_2 = \mp 1\,000\,\frac{L}{R}$ (alternativement).

4/ La figure montre que :

$$|u_2| = 10^{-4} \text{ V}.$$

On en déduit la valeur de l'inductance propre :

$$L = \frac{|U_2|R}{1\,000} = 10^{-4} \text{ H}.$$

C1.2 Organisation des etapes de la résolution.
A2b.2 Savoir-faire théonque pour établir l'équation differen-belle.

A2.2 Savoir-faire expérimental pour repérer u_1 et u_2.

C1.2 Observer et analyser les courbes

C1.4 Justification des courbes

A2.4 Savoir-faire théonque et expen-mental.

B3.3 Outil mathema-tique et calcul.

A1.1 Unrité d'induc-tance

Scanné avec CamScanner

12 OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES LIBRES

12.1 étude expérimentale

Nous allons étudier les **régimes transitoires** qui règnent lors de l'établissement ou de la rupture du courant dans un circuit comportant une bobine et un condensateur. Un tel régime, compris par exemple entre l'instant de fermeture du circuit et celui où s'installe un régime permanent, a une durée généralement très brève.

Réalisons le montage de la figure 1. Le générateur délivre des signaux rectangulaires dissymétriques.

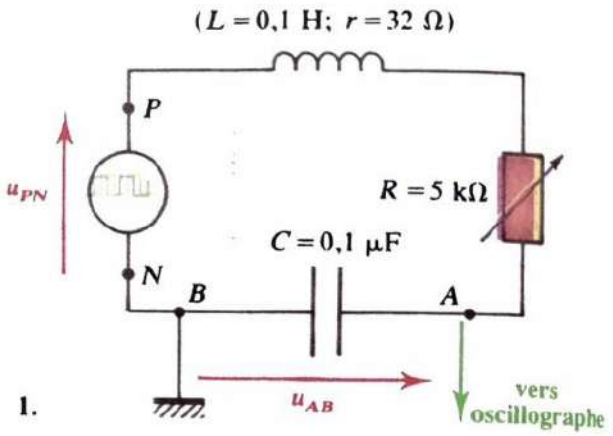
Lorsque u_{PN} passe de 0 à e, le condensateur se charge. Il se décharge ensuite lorsque u_{PN} passe de e à 0. L'oscillographe branché aux bornes du condensateur, de capacité C, permet d'étudier cette charge et cette décharge (*photo* 2).

Si $q = q_A$ est la charge de l'armature A, nous visualisons la tension $u_{AB} = \frac{q}{C}$, proportionnelle à $q(t)$. Nous constatons que charges et décharges ne sont pas instantanées.

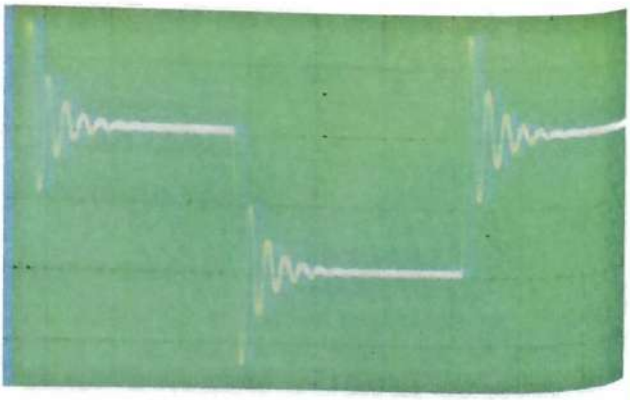
Observons une décharge lorsque nous modifions la résistance du circuit.

- Si $R = 0$, nous observons une courbe déjà rencontrée au chapitre 5 (*fig.* 3a); elle est caractéristique d'un oscillateur **pseudo-périodique amorti**. La charge s'annule à des intervalles de temps T égaux, appelés **pseudo-période**.
- Augmentons R : la décharge est de plus en plus amortie (*fig.* 3b). Lorsque la résistance devient trop grande, les oscillations disparaissent (*fig.* 3c); la décharge est alors **apériodique**.

Il est donc possible d'obtenir des oscillations électriques libres en montant en série un condensateur et une bobine dont la résistance est suffisamment faible pour que les oscillations soient peu amorties. Nous nous proposons maintenant d'étudier le cas limite où la résistance de la bobine est négligeable (inductance pure).

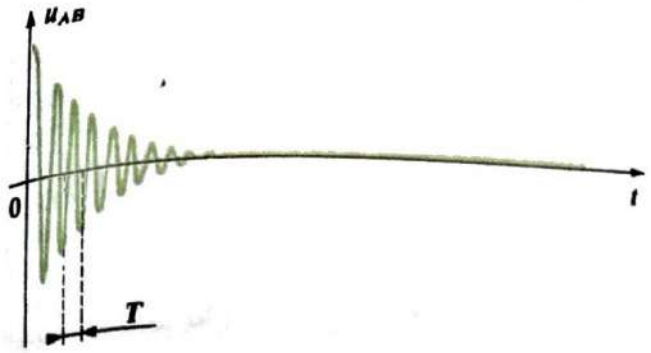


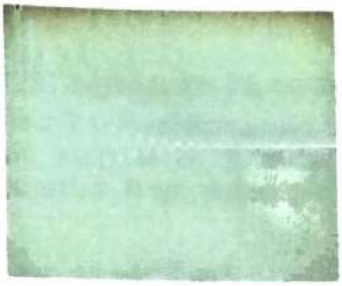
1.



2. *Visualisation de la tension u_{AB} aux bornes du condensateur du montage de la figure 1.* ▶

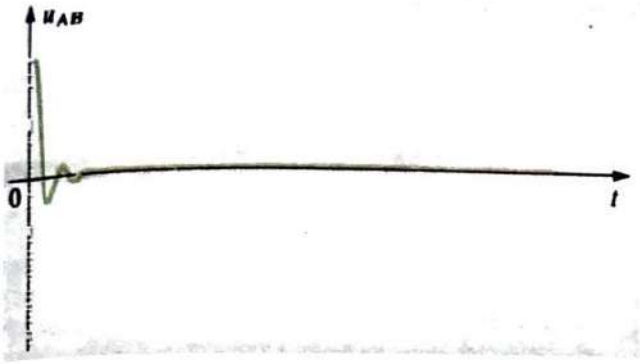
Scanné avec CamScanner

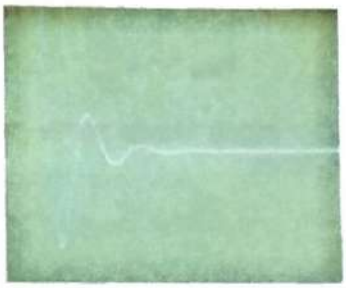




(a)

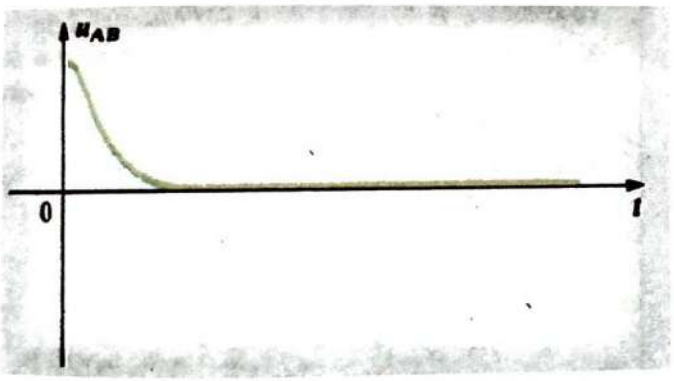
3a. *Si $R = 0$, la résistance totale du circuit se réduit à la résistance r de la bobine; on observe des oscillations pseudo-périodiques.*





(b)

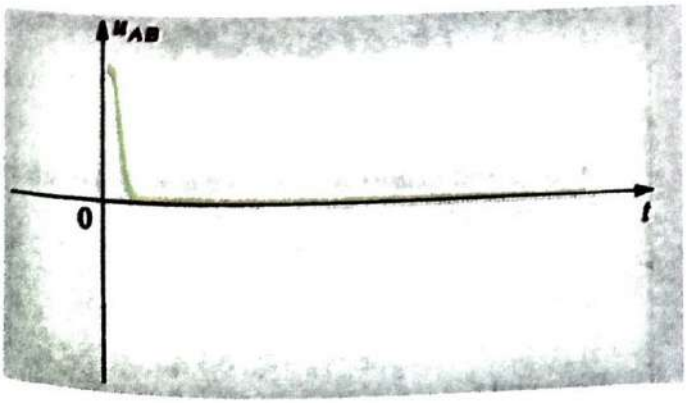
3b. *Si $R = 500\ \Omega$, la tension devient nulle au bout de quelques oscillations très amorties.*





(c)

3c. *Si $R > 2000\ \Omega$, la tension tend lentement vers zéro; la décharge est apériodique.*





(d)

3d. *La valeur $R = 2000\ \Omega$ correspond à la limite entre le régime oscillant et le régime apériodique; la tension s'annule rapidement. Le régime est dit « apériodique critique ».*

Scanné avec CamScanner

12.2 décharge d'un condensateur dans une inductance pure

12.2.1 équation de décharge

Réunissons les deux armatures A et B d'un condensateur chargé aux bornes N et M d'une bobine dont la résistance est négligeable (*fig.* 4). A chaque instant, nous avons :

$$u_{AB} = u_{NM}. \qquad (1)$$

Choisissons un sens algébrique pour l'intensité : $i>0$ si le courant traverse la bobine de M vers N.
Aux bornes de la bobine d'inductance L, la loi sur l'auto-induction donne, le terme ri étant négligeable :

$$u_{MN} = L\frac{di}{dt},$$

soit :

$$u_{NM} = -L\frac{di}{dt}. \qquad (2)$$

En notant $q_A(t) = q(t)$ la charge portée par l'armature A, nous pouvons écrire :

$$i = \frac{dq_A}{dt} = \frac{dq}{dt} = \dot{q}.$$

- Si $i>0$, la charge $q = q_A$ croît $\left(\frac{dq}{dt}>0\right)$.
- Si $i<0$, la charge $q = q_A$ décroît $\left(\frac{dq}{dt}<0\right)$.

Aux bornes du condensateur, de capacité C, la tension est égale à :

$$u_{AB} = \frac{q}{C}. \qquad (3)$$

La relation (1) implique :

$$\frac{q}{C} = -L\frac{di}{dt}.$$

Or $i = \dot{q}$ et $\frac{di}{dt} = \ddot{q}$; il vient alors :

$$L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = 0$$

ou encore :

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0, \qquad (4)$$

soit :

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = 1/LC. \qquad (5)$$

Cette équation différentielle régit la variation, dans le temps, de la charge du condensateur. Elle a la même forme que celle obtenue avec le pendule élastique (*chap.* 5) :

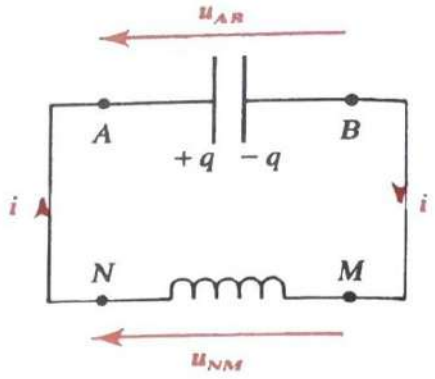
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

La solution de l'équation différentielle est de la forme :

$$q = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

avec :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \text{ou} \quad LC\omega_0^2 = 1.$$



4.

APPLICATION 1

La différence de potentiel aux bornes d'un condensateur (A, B) de capacité $C = 0{,}1$ µF est $u_{AB} = 120$ V. A la date $t=0$, ce condensateur est branché aux bornes (M, N) d'une bobine de résistance négligeable et d'inductance $L = 1$ H. L'intensité du courant est nulle à cette date.

1/ Calculer les pulsation, période et fréquence propres (ω_0, T_0, f_0) de ce circuit oscillant.

2/ Donner les variations, dans le temps, de la charge du condensateur et de l'intensité du courant.

3/ Calculer la charge prise par le condensateur aux dates $t_1 = 0{,}5$ ms, $t_2 = 1$ ms, $t_3 = 1{,}5$ ms, ainsi que les valeurs correspondantes de l'intensité du courant.

1/ Nous avons :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad \text{et} \quad f_0 = \frac{1}{T_0},$$

soit numériquement :

$\omega_0 = 3162$ rad.s^{-1}, $T_0 = 2.10^{-3}$ s et $f_0 = 500$ Hz.

2/ Calculons la charge Q du condensateur à la date $t=0$; il vient :

$$Q = Cu_{AB} = 0{,}1.10^{-6} \times 120 = 1{,}2.10^{-5}\ \text{C}.$$

Nous savons que les équations demandées sont de la forme :

$$\begin{cases} q = q_A = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ i = \dfrac{dq}{dt} = -Q_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi). \end{cases}$$

Les conditions initiales, à savoir $i=0$ et $q=Q$ à la date $t=0$, impliquent :

$$Q_m = Q = 1{,}2.10^{-5}\ \text{C} \quad \text{et} \quad \varphi = 0.$$

De plus :

$$I_m = Q_m\omega_0 = 3{,}8.10^{-2}\ \text{A}.$$

Finalement :

$$\begin{cases} q = q_A = Q_m \cos \omega_0 t \\ i = I_m \cos\left(\omega_0 t + \dfrac{\pi}{2}\right), \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

Q_m (charge maximale du condensateur) et φ (phase à l'origine des dates) sont déterminées par les *conditions initiales*.

Le condensateur est le siège de charges et de décharges successives. Ainsi, l'armature A, chargée initialement, par exemple positivement, se charge négativement tandis que l'armature B se charge positivement, et ainsi de suite. Le signe des charges portées par les armatures du condensateur change périodiquement. Le courant qui apparaît est alternatif, de période T_0.

L'intensité du courant est donnée par :

$$i = q = -Q_m\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

soit :
$$i = I_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

avec :
$$I_m = Q_m\omega_0 \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

I_m est l'intensité maximale du courant, ou amplitude de l'intensité.

L'intensité est aussi une fonction sinusoïdale du temps. Sa phase (on dit encore « différence de phase » ou « déphasage ») par rapport à la charge étant de $+\pi/2$, on dit qu'elle est en **quadrature avance** sur la charge $q = q_A$ du condensateur.

• Lorsqu'on branche les armatures d'un condensateur chargé, de capacité C, aux bornes d'une bobine non résistive, d'inductance L, le circuit ainsi constitué est le siège d'oscillations électriques libres non amorties, de période :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC} \quad \text{(formule de Thomson).}$$

ω_0, T_0 et f_0 sont appelées respectivement pulsation propre, période propre et fréquence propre du circuit oscillant.

soit numériquement :

$$\begin{cases} q = 1{,}2.10^{-5} \cos 3162t, \\ i = 3{,}8.10^{-2} \cos\left(3162t + \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

3/ • A la date $t_1 = 0{,}5 \text{ ms} = \frac{T_0}{4}$:

$$q_1 = Q_m \cos\omega_0 \frac{T_0}{4},$$

soit :
$$q_1 = Q_m \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Le condensateur est déchargé :

$$i_1 = I_m \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -I_m.$$

Le courant va de N vers M et son intensité est maximale.

• A la date $t_2 = 1 \text{ ms} = \frac{T_0}{2}$:

$$q_2 = Q_m \cos\omega_0 \frac{T_0}{2}$$
$$= Q_m \cos\pi = -Q_m.$$

Le condensateur est rechargé, mais l'armature A porte des charges négatives. De plus :

$$i_2 = I_m \cdot \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

L'intensité du courant est nulle.

• A la date $t_3 = 1{,}5 \text{ ms} = \frac{3T_0}{4}$:

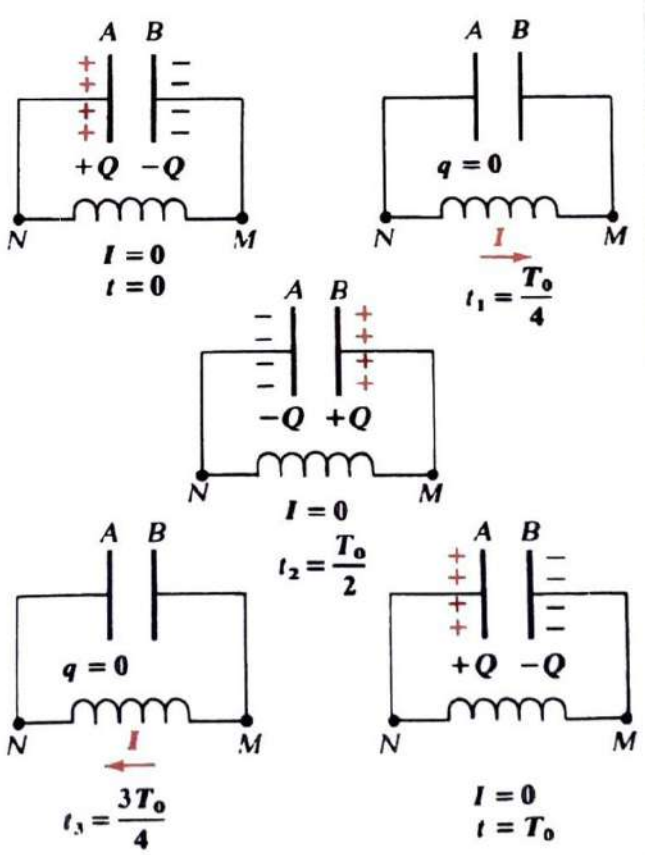
$$q_3 = Q_m \cos\omega_0 \frac{3T_0}{4}$$
$$= Q_m \cos\frac{3\pi}{2} = 0.$$

Le condensateur est à nouveau déchargé, et :

$$i_3 = I_m \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = I_m \cos(2\pi) = I_m.$$

Le courant va maintenant de M vers N et son intensité est maximale.

Nous constatons que l'intensité du courant est maximale chaque fois que le condensateur est déchargé. L'intensité est nulle lorsque le condensateur est rechargé. Les différentes solutions sont représentées sur la figure ci-dessous.



Scanné avec CamScanner

12.2.2 représentations graphiques

Nous prendrons la phase de la charge à l'origine nulle ($\varphi = 0$), grâce à un choix convenable de l'origine des dates. Sur la figure 5 sont représentées :

$$\begin{cases} q = Q_m \cos \omega_0 t \\ i = I_m \cos\left(\omega_0 t + \dfrac{\pi}{2}\right), \text{ avec } I_m = Q_m \omega_0. \end{cases}$$

Les représentations graphiques de $q(t)$ et $i(t)$ nous montrent que :

- lorsque la charge est extrémale, l'intensité est nulle;
- lorsque la charge est nulle, l'intensité est extrémale.

De plus, les extrémums de la charge sont en avance, dans le temps, de $\dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{\omega_0} = \dfrac{T_0}{4}$ par rapport à ceux de l'intensité; cela indique que l'intensité est en quadrature avance sur la charge portée par le condensateur.

Quant à la tension u_{AB} aux bornes du condensateur, elle vaut :

$$u_{AB} = \frac{q_A}{C} = \frac{Q_m}{C} \cos \omega_0 t,$$

soit : $u_{AB} = U_m \cos \omega_0 t$, avec $U_m = \dfrac{Q_m}{C}$.

La tension $u_{AB}(t)$ est en phase avec la charge $q_A(t) = q(t)$ portée par l'armature A du condensateur; elle est donc en quadrature retard sur l'intensité $i(t)$.

La tension maximale $U_m = \dfrac{Q_m}{C}$ est égale à la tension initialement imposée aux bornes du condensateur.

Aux bornes de la bobine, la tension vaut :

$$u_{MN} = L\frac{di}{dt} = -L\omega_0^2 Q_m \cos \omega_0 t,$$

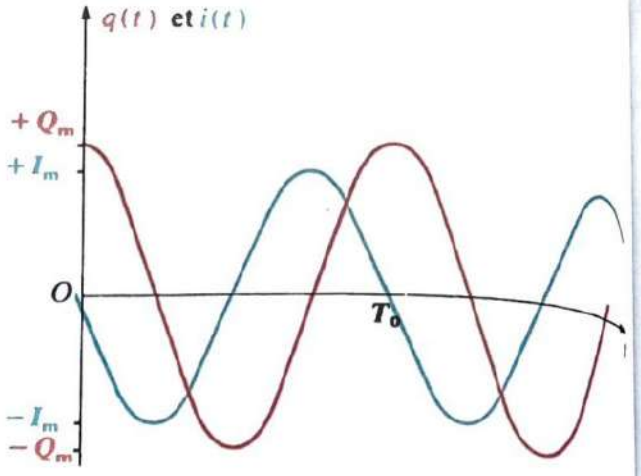
avec : $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$ et $\dfrac{Q_m}{C} = U_m$.

Finalement : $u_{MN} = -U_m \cos \omega_0 t$.

Nous retrouvons bien entendu :

$$u_{AB} + u_{MN} = 0;$$

ces deux tensions sont opposées.



5. *Variations de l'intensité et de la charge du condensateur dans le circuit de la figure* **4.** *i(t) est en quadrature avance sur q(t).*

12.3 énergie

12.3.1 énergie emmagasinée dans le condensateur

L'énergie électrique emmagasinée dans le condensateur est, à chaque instant, de la forme (voir cours de Première) : $\mathcal{E}_e = \dfrac{1}{2} Cu^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{q^2}{C}$.

Dans le cas présent :

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2}\frac{Q_m^2}{C}\cos^2 \omega_0 t = \frac{1}{4}\frac{Q_m^2}{C}\left[1 + \cos 2\omega_0 t\right].$$

Scanné avec CamScanner

Les variations de $\mathcal{E}_e(t)$ sont représentées sur la figure 6. Elles sont périodiques, de période $\frac{T_0}{2}$.

12.3.2 énergie emmagasinée dans la bobine

Nous savons que cette énergie est, à chaque instant, de la forme :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} L i^2.$$

Dans le cas présent :

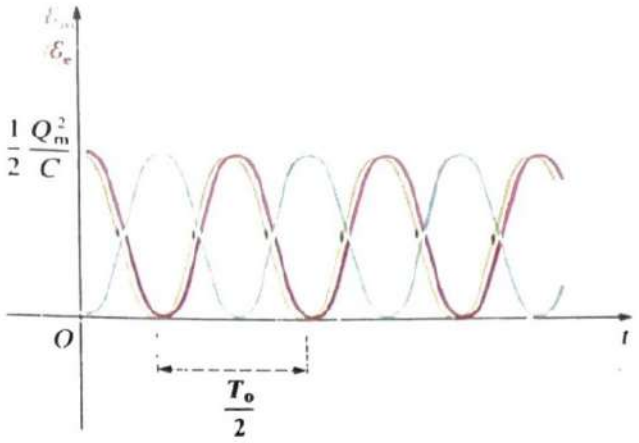
$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} L I_m^2 \sin^2 \omega_0 t$$

$$= \frac{1}{4} L I_m^2 [1 - \cos 2\omega_0 t].$$

Avec : $L = \frac{1}{C\omega_0^2}$ et $I_m = \omega_0 Q_m$,

on obtient : $\mathcal{E}_m = \frac{1}{4} \frac{Q_m^2}{C} [1 - \cos 2\omega_0 t]$.

Les variations de $\mathcal{E}_m(t)$ sont représentées sur la figure 6. Elles sont, comme celles de $\mathcal{E}_e(t)$, périodiques, de période $\frac{T_0}{2}$.



6. *Les énergies emmagasinées respectivement dans le condensateur ($\mathcal{E}_e$) et dans la bobine ($\mathcal{E}_m$) sont périodiques, de période $T_0/2$.*

12.3.3 énergie électrique totale d'un circuit (*L*, *C*)

L'énergie totale emmagasinée par le circuit est donnée par :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} L i^2.$$

Nous remarquons alors que :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{Q_m^2}{C} = \frac{1}{2} C U_m^2 = \frac{1}{2} L I_m^2.$$

• L'énergie totale d'un circuit comportant un condensateur et une bobine non résistive (inductance pure) est constante.

Cette énergie est l'énergie initiale du condensateur chargé. Elle peut être comparée à l'énergie potentielle élastique $\frac{1}{2} k X_m^2$ initialement fournie à un pendule élastique déplacé de sa position d'équilibre par un opérateur. Q_m représente la charge initialement imposée au condensateur et X_m le déplacement initialement imposé au pendule.

Au cours des oscillations, l'une des formes d'énergie se transforme périodiquement en l'autre forme, la somme $\mathcal{E} = \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_m$ restant constante. Cela doit être rapproché des transformations mutuelles d'énergies potentielle et cinétique qui accompagnent les oscillations non amorties d'un oscillateur mécanique idéal dont l'énergie totale $\mathcal{E} = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m v^2$ reste constante en l'absence de frottement.

grandeurs électriques circuit (*L*, *C*)	grandeurs mécaniques pendule élastique (masse – ressort)
q	x
i	v
L	m
$\frac{1}{C}$	k
U	F

7. *Analogies formelles entre un oscillateur constitué par un pendule élastique et un circuit électrique (L, C) oscillant.*

Scanné avec CamScanner

12.4 circuit avec résistance

Un circuit idéal sans résistance n'existe pas (sauf dans le cas, exceptionnel, des supraconducteurs). C'est pourquoi les oscillations s'amortissent d'autant plus vite que la résistance du circuit, où l'énergie est dissipée par effet Joule, est plus grande. La fiche expérimentale met en évidence cette perte d'énergie.

Soit un circuit comprenant une bobine d'inductance L et de résistance r associée à un condensateur de capacité C (*fig.* 8).

Orientons le circuit de M vers N à tout instant :

$$u_{AB} + u_{MN} = 0,$$

avec :

$$u_{AB} = \frac{q_A}{C} = \frac{q}{C}$$

et $$u_{MN} = ri - e = ri + L\frac{di}{dt},$$

soit : $$\frac{q}{C} + ri + L\frac{di}{dt} = 0. \qquad (6)$$

A une date t, l'énergie électrique et magnétique totale $\mathcal{E}$ du circuit vaut :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2.$$

Dérivons cette expression par rapport au temps :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} + Li\frac{di}{dt}$$

$$= \left(\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt}\right) i,$$

car, avec l'orientation choisie, $i = \dot{q}$; compte tenu de l'équation différentielle (6), nous obtenons :

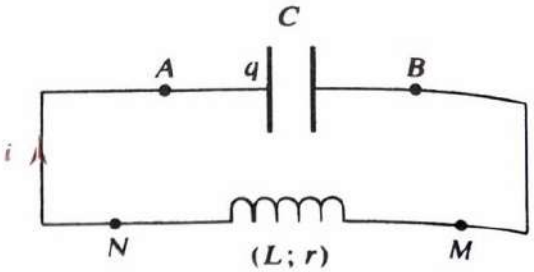
$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = (-ri)\, i = -ri^2.$$

L'énergie totale diminue car $\frac{d\mathcal{E}}{dt} < 0$; elle n'est plus constante. $(-ri^2)$ représente la puissance Joule dissipée dans le circuit et évacuée vers l'extérieur sous forme de chaleur.

● Un circuit (r, L, C) est amorti. L'énergie Joule dépensée dans le circuit est égale à la diminution de l'énergie totale du circuit.

Nous retrouvons une situation déjà observée dans un oscillateur mécanique. Comme les frottements en mécanique, la résistance des conducteurs électriques entraîne une perte inéluctable d'énergie. Pour réaliser un oscillateur électrique permanent, il faut associer à un circuit (r, L, C) un dispositif d'entretien qui compense les pertes d'énergie par effet Joule.

L'énergie d'entretien est alors fournie par l'alimentation du dispositif.



8.

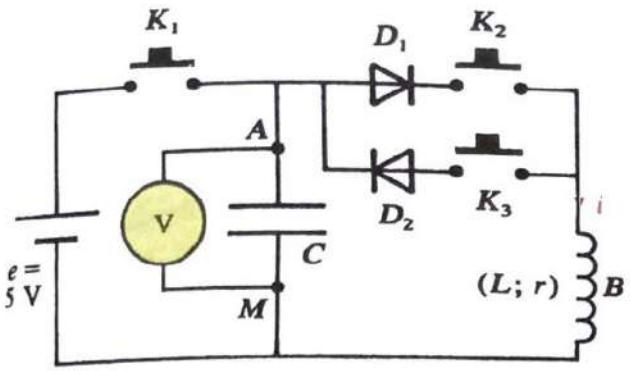
Scanné avec CamScanner

OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES LIBRES AMORTIES

fiche expérimentale

1. Premier montage

Réalisons le montage de la figure 9. Il va nous permettre de mettre en évidence les extrémums au cours des oscillations amorties.



- C : condensateur 3,3 µF
- B : bobine de 2 000 spires, $L = 120$ mH

9.

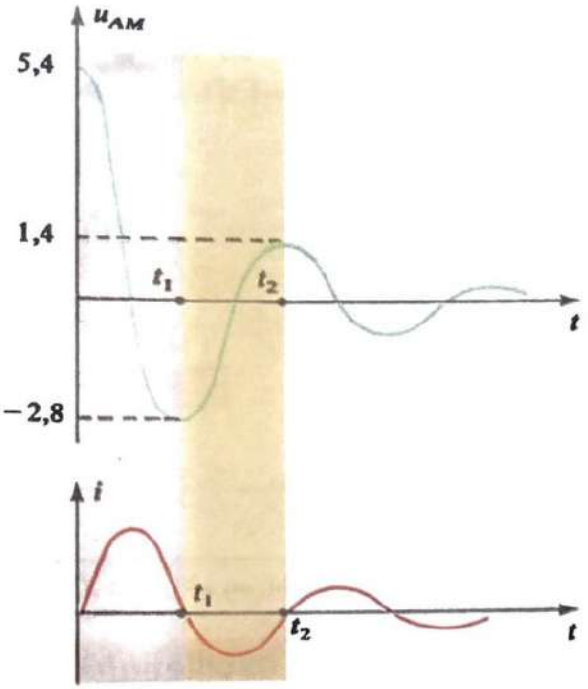
• Manipulation

Réalisons les opérations suivantes :

1. K_2 et K_3 étant ouverts, fermons K_1. Le condensateur se charge instantanément et reste chargé lorsque K_1 est relâché. Le voltmètre indique $u_{AM} = 5{,}2$ V. Par la suite K_1 reste ouvert.
2. K_3 étant ouvert, fermons K_2. Presque immédiatement, le voltmètre indique :
$$u_{AM} = -2{,}8 \text{ V}.$$
3. Ouvrons K_2 et fermons K_3. Presque immédiatement, le voltmètre indique :
$$u_{AM} = 1{,}4 \text{ V}.$$

• Interprétation

Lors de l'opération 2, le condensateur qui a accumulé des charges positives en A ($u_{AM} > 0$) peut se décharger dans la bobine, car la diode D_1 est passante. La résistance du circuit étant faible, il s'agit d'une décharge oscillante. Toutefois on n'observe qu'une demi-oscillation (*fig.* 10). En effet, à l'instant t_1 où $u_{AM} = -2{,}8$ V, le courant s'annule pour changer de sens; la diode D_1 ne conduit plus et le système est bloqué, la tension u_{AM} restant égale à $-2{,}8$ V.



10. ***Variations de la tension aux bornes du condensateur et de l'intensité du courant dans la bobine lors de la manipulation effectuée avec le circuit de la figure 9.***

Lors de l'opération 3, la charge de l'armature M est maintenant positive et le condensateur peut se décharger dans la bobine, car la diode D_2 est passante. Nous n'observons encore qu'une demi-oscillation (*fig.* 10). En effet, à l'instant t_2 où $u_{AM} = 1{,}4$ V, le courant s'annule pour changer de sens; la diode D_2 ne conduit plus et le système est bloqué, la tension u_{AM} restant égale à 1,4 V.

• Bilan énergétique

Après une oscillation, la tension aux bornes du condensateur est passée de :
$$U_1 = 5{,}2 \text{ V} \quad \text{à} \quad U_2 = 1{,}4 \text{ V}.$$
Il s'est donc produit une perte d'énergie, donnée par :
$$\frac{1}{2} CU_1^2 - \frac{1}{2} CU_2^2 = \frac{1}{2} C(U_1^2 - U_2^2).$$
Cette énergie est dissipée par effet Joule dans la résistance du circuit.

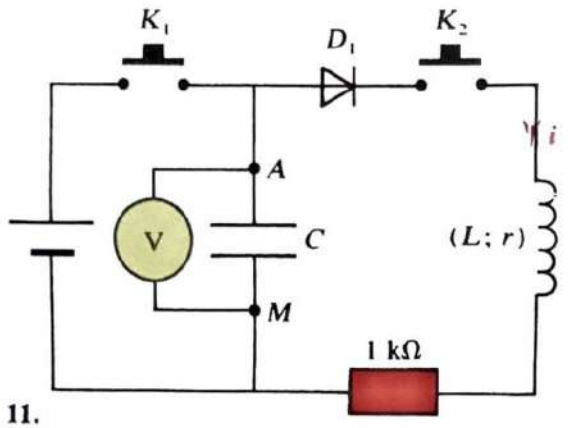
Scanné avec CamScanner

2. Second montage

Modifions le premier montage en ajoutant dans le circuit une résistance $R = 1\ \text{k}\Omega$ (*fig.* 11).

• *Manipulation*

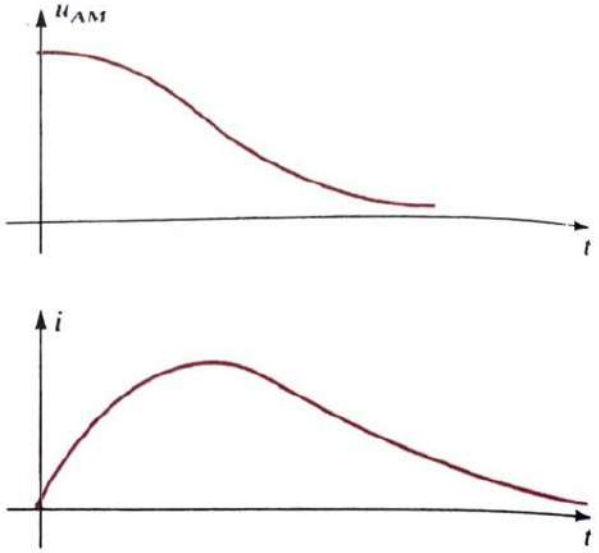
1. Fermons K_1, K_2 restant ouvert. Le condensateur se charge: $u_{AM} = 5{,}2$ V.
2. Ouvrons K_1 et fermons K_2. La tension u_{AM} s'annule rapidement sans changer de signe.



11.

• *Interprétation*

La résistance du circuit est maintenant élevée et la décharge du condensateur est apériodique; la tension u_{AM} ne change pas de signe. Il en est de même pour i (*fig.* 12).



12. *Variations de la tension aux bornes du condensateur et de l'intensité du courant dans la bobine lors de la manipulation effectuée avec le circuit de la figure* 11.

12.5 entretien des oscillations

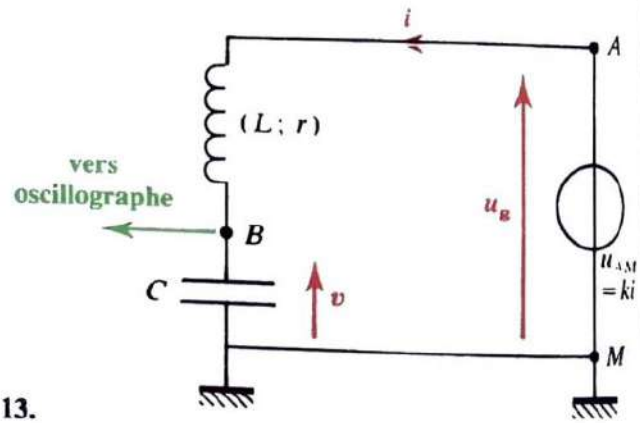
12.5.1 expérience

Aux bornes (A, M) d'un circuit (r, L, C), plaçons un générateur fournissant à ses bornes une tension proportionnelle au courant qu'il délivre (*fig.* 13) :

$$u_{AM} = ki, \quad \text{avec } k > 0.$$

Un tel générateur peut être construit à l'aide d'un amplificateur opérationnel (voir *fiche technique*), le coefficient k étant ajustable.

Branchons un oscillographe aux bornes du condensateur et faisons varier k. Dès que $k = r$ (qui correspond à la résistance de la bobine), des oscillations sinusoïdales apparaissent sur l'écran. Ces oscillations ont la pulsation propre du circuit : $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$. Elles persistent, mais sont déformées, si $k > r$.



13.

12.5.2 interprétation

La loi d'Ohm nous permet d'écrire : $u_{AM} = u_{AB} + u_{BM}$,

soit : $$ki = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + ri + \frac{q}{C},$$

ou encore : $$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + (r - k)\,i + \frac{q}{C} = 0.$$

Nous dirons que le générateur se comporte comme une « résistance négative de valeur $-k$ ».

Scanné avec CamScanner

GÉNÉRATEUR DÉLIVRANT UNE TENSION PROPORTIONNELLE AU COURANT DÉBITÉ

fiche technique

Réalisons avec un amplificateur opérationnel (A.O.) le montage schématisé sur la figure ci-contre.
Nous supposons l'A. O. idéal et en fonctionnement linéaire, c'est-à-dire :

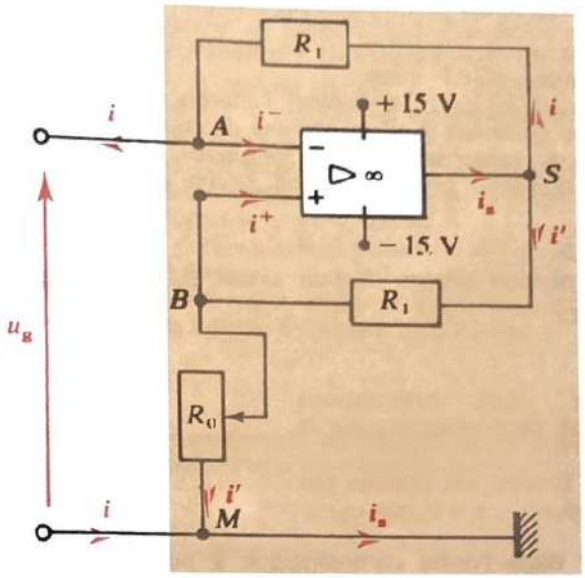
$$i^+ = i^- = 0 \quad \text{et} \quad u_{AB} = 0.$$

La résistance R_1 de la branche AS est traversée par le courant d'intensité i (car $i^- = 0$).
La résistance R_1 de la branche SB ainsi que R_0 sont parcourues par le même courant d'intensité i' (car $i^+ = 0$).
Calculons la tension de sortie u_g du montage en fonction de i. Il vient :

$$u_g = u_{AM} = u_{AS} + u_{SB} + u_{BM}$$
$$= -R_1 i + R_1 i' + R_0 i'.$$

D'autre part : $u_{AS} = u_{AB} + u_{BS}$,
soit : $-R_1 i = 0 - R_1 i'$; d'où : $i = i'$.
Finalement : $u_g = -R_1 i + (R_1 + R_0) i$,
soit : $u_g = R_0 i$.
Le générateur délivre donc une tension u_g proportionnelle à l'intensité i du courant débité. Le coefficient de proportionnalité est variable, puisque $k = R_0$.
Le dispositif fournit au circuit extérieur la puissance $\mathcal{P} = u_g i = R_0 i^2$. Cette puissance est délivrée par l'alimentation de l'A. O.

R_0 sera constituée, par exemple, par une résistance bobinée réglable entre 0 et 100 Ω.
Pour observer des oscillations de grande amplitude, on prendra R_1 de l'ordre de 1 kΩ. Une valeur plus grande (10 kΩ, par exemple), sans modifier la fréquence d'oscillation, limiterait l'amplitude des oscillations par effet de saturation de l'A. O.



- A.O. : TL 081 ou 741
- R_1 : 1 kΩ
- R_0 : résistance variable de 100 Ω max.

Remarque : On notera que dans ce montage l'A. O. débite un courant d'intensité $i_s = i + i' = 2i$. Cette intensité est nécessairement délivrée par l'alimentation de l'A. O., la circulation du courant correspondant se refermant par l'intermédiaire de la masse.

Avec $i = \frac{dq}{dt} = C\frac{dv}{dt}$, $v = u_{BM}$ étant la tension visualisée à l'oscillographe, il vient : $LC\frac{d^2v}{dt^2} + (r-k)C\frac{dv}{dt} + v = 0$.

Pour $k = r$, nous obtenons : $LC\frac{d^2v}{dt^2} + v = 0$,

ou encore : $\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{LC}v = 0$.

La solution de cette équation différentielle correspond bien à un signal sinusoïdal de pulsation $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

12.5.3 étude énergétique

Nous avons vu dans le paragraphe 12.4 que l'énergie électrique d'un circuit (r, L, C) diminuait selon la loi :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -ri^2.$$

Le générateur fournit la puissance : $\mathcal{P}_g = u_{AM} i = ki^2$.
Si $k = r$, $ki^2 = ri^2$, et le générateur compense exactement l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance; le système, entretenu, se comporte comme un circuit oscillant idéal.
Si $k > r$, nous pourrions penser que l'amplitude des oscillations va croître indéfiniment. Il n'en est rien, car l'amplificateur opérationnel utilisé dans le montage du générateur atteint la saturation (fonctionnement non linéaire); les oscillations restent périodiques mais ne sont plus tout à fait sinusoïdales.

Remarque : L'égalité $k = r$ n'est jamais strictement réalisée; dans la pratique, k est légèrement supérieur à r.

Scanné avec CamScanner

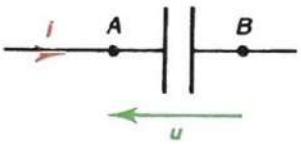
EXERCICES

L'essentiel du cours

12.1 A *Vrai* ou *faux* ?

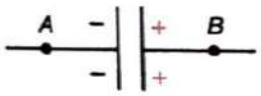
- La décharge d'un condensateur dans un conducteur ohmique est oscillante.
- Dans un circuit (L, C), l'intensité du courant et la charge du condensateur sont déphasées de $\frac{\pi}{2}$.
- Dans un circuit (L, C), si on double L, la période des oscillations double aussi.
- Dans un circuit (L, C) résistif, l'énergie est constante.
- Dans un circuit (L, C), l'intensité du courant et la charge du condensateur ont la même fréquence.
- La pulsation propre ω d'un circuit (L, C) est égale à $\frac{1}{\sqrt{LC}}$.
- La période propre T d'un circuit (L, C) est égale à $2\pi\sqrt{LC}$.

12.2 A Les orientations choisies sont indiquées sur la figure.



1/ La tension est donnée par la relation : $u = U_m \sin \omega_0 t$.

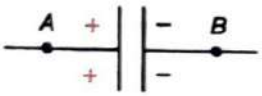
Placer dans l'ordre chronologique à partir de $t = 0$ les schémas suivants :



① $i = 0$



② $i = I_m > 0$, $u = 0$



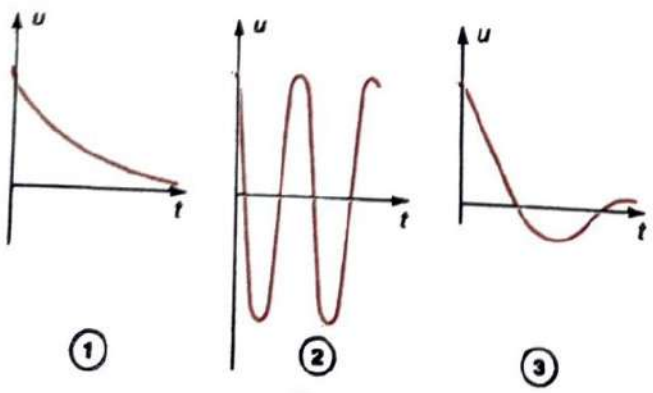
③ $i = 0$



④ $i = -I_m$, $u = 0$

2/ Reprendre la question précédente avec : $u = U_m \cos \omega_0 t$.

12.3 A Un condensateur, chargé, se décharge au travers d'un dipôle Z. Les schémas 1, 2 et 3 donnent la tension aux bornes du condensateur en fonction du temps.



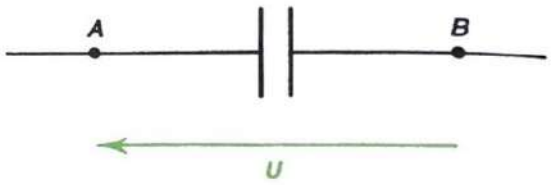
Le dipôle Z est soit :
— un conducteur ohmique (a) ;
— une bobine de résistance négligeable (b) ;
— une bobine de résistance non négligeable (c).

Parmi les associations proposées ci-après, barrer celles qui sont impossibles :

2a ; 1a ; 1b ; 3a ; 3c ; 2b.

Exercices de base

12.4 Un condensateur de capacité C est chargé sous une tension constante $u_{AB} = U (U > 0)$ (figure).



1/ A Calculer les charges portées par les armatures A et B.

2/ A L'énergie $\mathcal{E}_e$ emmagasinée par le condensateur s'exprime de deux façons différentes. Choisir parmi les expressions suivantes les deux bonnes relations :

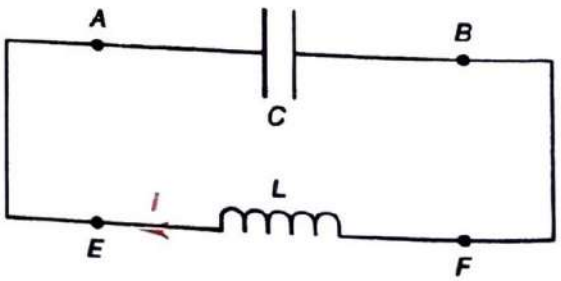
$$\frac{1}{2}\frac{q^2}{C} ; \quad \frac{1}{2} Cq^2 ; \quad \frac{1}{2}\frac{U^2}{C} ; \quad \frac{1}{2} CU^2.$$

3/ B3 *Application numérique :*

$$C = 2{,}5\ \mu\text{F} ; \quad u_{AB} = U = 20\ \text{V}.$$

Calculer q_A, q_B et $\mathcal{E}_e$.

12.5 AB3 Un circuit comprend un condensateur, de capacité C, et une bobine, d'inductance $L = 10$ mH et de résistance négligeable. Il est le siège d'oscillations électriques.



La tension aux bornes du condensateur est, en volts :

$$u_{AB} = 5 \cos 100\, \pi t,$$

le temps étant en secondes.

1/ Préciser l'amplitude de la tension aux bornes du condensateur, la pulsation, la période et la fréquence des oscillations.

2/ Déterminer la tension aux bornes de la bobine. On oriente la bobine de F vers E. Exprimer l'intensité $i(t)$ du courant en fonction du temps.

3/ Calculer la capacité C du condensateur.

Scanné avec CamScanner

4/ Déterminer l'énergie $\mathcal{E}_e$ dans le condensateur et l'énergie $\mathcal{E}_m$ emmagasinée dans la bobine à l'instant t.
Préciser les énergies emmagasinées maximales.

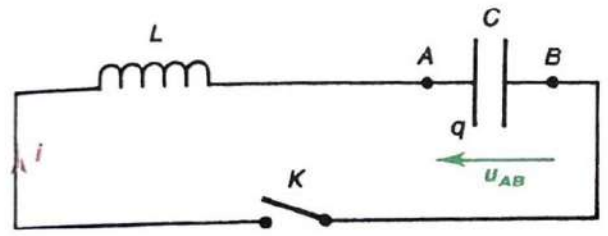
5/ Vérifier que l'énergie totale :

$$\mathcal{E}_t = \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_m$$

est constante.

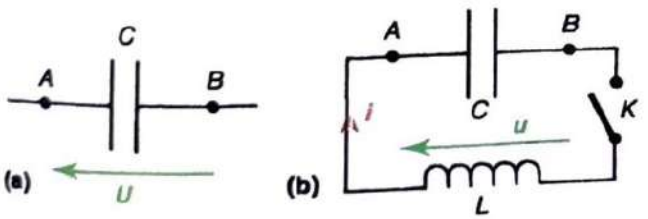
12.6 AB3 1/ Un condensateur de capacité C est chargé sous une tension constante U. Calculer sa charge q_0 ainsi que l'énergie emmagasinée $\mathcal{E}_e$.
Application numérique : $C = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ F ; $U = 20$ V.

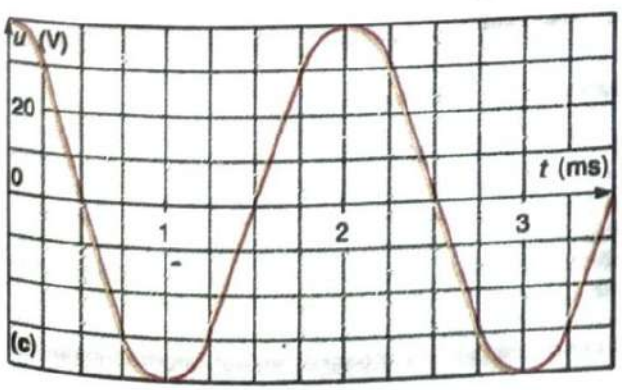
2/ Les armatures de ce condensateur chargé sont reliées à une bobine d'inductance L dont on néglige la résistance. A un instant pris comme origine des temps, on ferme l'interrupteur K.
L'intensité $i(t)$ du courant est comptée positivement dans le sens indiqué sur la figure. On note $q(t)$ la charge de l'armature reliée au point A ; à l'instant $t = 0$, cette armature est chargée positivement.



a/ Établir l'équation différentielle de ce circuit oscillant. Calculer la pulsation propre ω_0 de ce circuit.
Application numérique : $C = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ F ; $L = 25$ mH.
b/ Exprimer $q(t)$ et $i(t)$ en fonction du temps. Calculer les valeurs numériques des coefficients.
c/ Exprimer en fonction du temps les énergies $\mathcal{E}_c(t)$ et $\mathcal{E}_b(t)$ stockées dans le condensateur et dans la bobine. Calculer les valeurs numériques des coefficients.
Établir une relation entre $\mathcal{E}_c(t)$, $\mathcal{E}_b(t)$ et la valeur $\mathcal{E}_e$ trouvée dans la question 1.

12.7 AB3 1/ Un condensateur de capacité C est chargé sous une tension constante U (figure a).

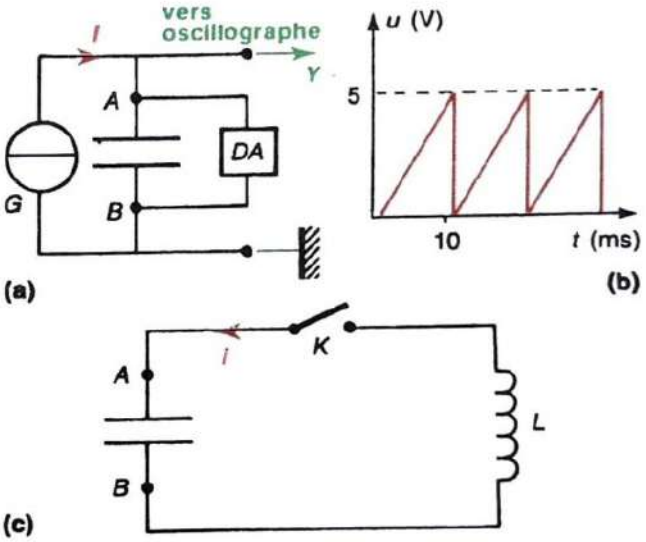




Calculer la charge Q portée par l'armature, ainsi que l'énergie emmagasinée $\mathcal{E}_e$.
Application numérique : $C = 10^{-6}$ F ; $U = 40$ V.

2/ Le condensateur C, chargé dans les conditions précédentes, est isolé, puis relié à une bobine d'inductance L. La résistance du circuit est négligeable (figure b).
On ferme l'interrupteur K à l'instant $t = 0$. Un oscillographe permet de visualiser la tension $u(t)$ aux bornes de la bobine. On obtient la courbe représentée figure c.
a/ On note $q(t)$ la charge portée par l'armature A à la date t. L'intensité $i(t)$ du courant est comptée positivement dans le sens indiqué sur la figure.
A partir de la courbe observée, exprimer $u(t)$ en fonction du temps. Préciser la tension maximale et la pulsation.
b/ Calculer l'inductance L de la bobine.
c/ Représenter graphiquement l'intensité $i(t)$ pour t compris entre 0 et 3,5 ms.
d/ Déterminer les énergies emmagasinées dans le condensateur et dans la bobine à l'instant $t = 0{,}75$ ms.

12.8 AB3B4 On se propose de déterminer la capacité C d'un condensateur à l'aide du montage suivant (figure a).



Le générateur G débite un courant d'intensité constante $I = 1$ mA. Dès que la tension $u_{AB} = u$ entre A et B atteint la valeur $U_M = 5$ V, un dispositif (noté DA sur la figure) permet de décharger automatiquement et instantanément le condensateur.
L'oscillographe permet d'observer les charges et décharges successives (figure b).

1a/ Déduire de l'oscillogramme l'expression de la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur pour t compris entre 0 et 10 ms.
b/ Dans le même intervalle de temps, exprimer $u(t)$ en fonction de l'intensité I du courant débité par le générateur. (On admettra que l'intensité du courant dérivé dans le dispositif DA lors de la charge du condensateur est négligeable.) En déduire la capacité C du condensateur.

2/ A l'instant $t = 6$ ms, on isole le condensateur du circuit précédent et on l'associe à une bobine, d'inductance $L = 0{,}5$ H et de résistance négligeable. On note q la charge instantanée de l'armature A et i l'intensité instantanée, dont le sens positif est précisé sur la figure c.

Scanné avec CamScanner

EXERCICES

a/ Établir l'équation différentielle vérifiée par la fonction $q(t)$ après la fermeture de l'interrupteur K.
b/ Calculer la période des oscillations électriques qui prennent naissance dans le circuit.
c/ En précisant les valeurs numériques des constantes, exprimer $u(t)$ en fonction du temps. On prendra l'instant de fermeture de l'interrupteur K comme instant initial.

Banc d'essais

12.9 AB3 Une bobine de résistance négligeable est associée à un condensateur de 50 µF. Calculer son inductance pour que la fréquence des oscillations obtenues soit 440 Hz (diapason).
Même question avec un condensateur de 1 pF pour la fréquence 91,25 MHz (France Inter).

↳ **ex. 12.1, 12.6**

12.10 AB3 Un fréquencemètre permet de mesurer la fréquence des oscillations d'un circuit (L, C). On trouve 356,0 Hz.

1/ Un condensateur de capacité $C_1 = 10$ µF est branché en parallèle avec le condensateur du circuit initial. La fréquence des oscillations devient 290,7 Hz. Calculer les valeurs de la capacité C et de l'inductance L du circuit initial.

2/ Que devient la fréquence si la capacité C_1 est associée en série dans le circuit initial ?

↳ **ex. 12.1, 12.6.**

12.11 A l'entrée d'un récepteur de radio se trouve un circuit oscillant (L, C) dont on règle la fréquence propre grâce à un condensateur variable. Le circuit est accordé sur un émetteur lorsque la fréquence propre du circuit oscillant est égale à la fréquence de l'onde porteuse envoyée par l'émetteur.

1/ AB3 Le condensateur est constitué de lames distantes de 0,4 mm dont l'aire en regard peut varier de 3 cm² à 30 cm². On rappelle que :

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{e}, \quad \text{où} \quad \varepsilon_0 = 8{,}84 \cdot 10^{-12} \text{ S.I.}$$

Entre quelles valeurs varie la capacité C du condensateur ?

2/ B3C L'inductance L peut prendre les valeurs 1,5 mH et 35 mH. Déterminer dans chaque cas le domaine de fréquences des ondes pouvant être captées.

↳ **ex. 12.1, 12.6.**

12.12 AB3C Une bobine, d'inductance $L = 0{,}5$ H, pouvant supporter un courant d'intensité maximale 3 A, est associée à un condensateur de capacité $C = 200$ µF que l'on charge sous une tension de 100 V.

1/ Quelle est l'énergie fournie au condensateur ?

2/ Le condensateur étant chargé, le générateur de tension est déconnecté, et l'on court-circuite l'association (L, C). Que se passe-t-il ? Quelle est l'intensité maximale du courant dans le circuit ?

3/ Examiner le cas où le condensateur est remplacé par une association en parallèle de trois condensateurs ayant chacun une capacité de 200 µF.

↳ **ex. 12.4, 12.6.**

12.13 AB3 Le condensateur d'un circuit (L, C), où $L = 10^{-3}$ H et $C = 10^{-5}$ F, est initialement chargé sous une tension de 20 V.

1/ Exprimer en fonction du temps les énergies $\mathcal{E}_e$ et $\mathcal{E}_m$ emmagasinées dans le condensateur et dans la bobine. Ces grandeurs varient-elles périodiquement ? Si oui, avec quelle fréquence ?

2/ En dérivant l'expression $\mathcal{E} = \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_m$ par rapport au temps, retrouver l'équation différentielle régissant le fonctionnement du circuit oscillant.

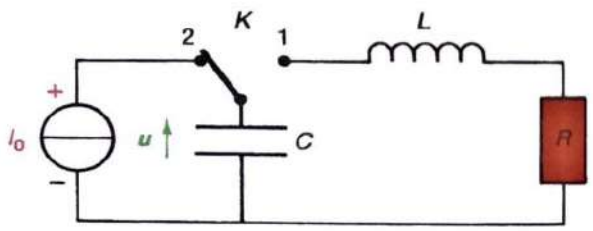
↳ **ex. 12.6.**

12.14 AB3 Un circuit (R, L, C) comporte un condensateur de capacité 100 µF et une bobine d'inductance 10 mH. Initialement, le condensateur est chargé sous une tension de 20 V.

1/ Quelle est l'énergie initialement fournie au condensateur ?

2/ Au bout de 100 oscillations, l'énergie électrique initialement emmagasinée a diminué de 20 %. Calculer la quantité de chaleur dégagée et la puissance moyenne dissipée durant ces 100 oscillations.

12.15 Un interrupteur électronique K bascule instantanément d'une position à l'autre tous les centièmes de seconde. Le générateur de courant G, supposé idéal, délivre un courant constant d'intensité I_0. A l'instant $t = 0$, K bascule en position 2, et C est déchargé.



1/ Déterminer les valeurs maximales de la charge du condensateur et de la tension à ses bornes.
Application numérique : $I_0 = 1$ A ; $C = 220$ µF.

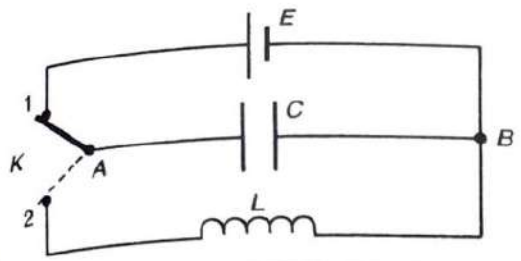
2/ Représenter graphiquement la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur en fonction du temps.

↳ **ex. 12.8.**

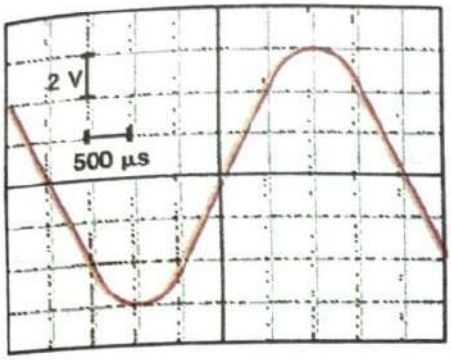
Analyse d'expérience

12.16 C On charge un condensateur de capacité $C = 0{,}8$ µF à l'aide d'un générateur de f.e.m. e_0 au moyen du circuit représenté figure a lorsque l'interrupteur est placé dans la position 1. On le décharge ensuite dans une bobine, d'inductance L et de résistance négligeable, en basculant l'interrupteur en position 2. Un ordinateur, couplé à un interface, permet de visualiser la tension aux bornes du condensateur. On observe le chronogramme représenté figure b.

Scanné avec CamScanner



(a)



(b)

1/ Quelle est la charge maximale du condensateur ?

2/ Quelle est l'énergie maximale emmagasinée par le condensateur ?

3/ Établir une relation entre la charge q du condensateur, q, L et C.

4/ Quelle est la valeur de l'inductance L de la bobine ?

5/ Quelle est la valeur intensité maximale du courant ?

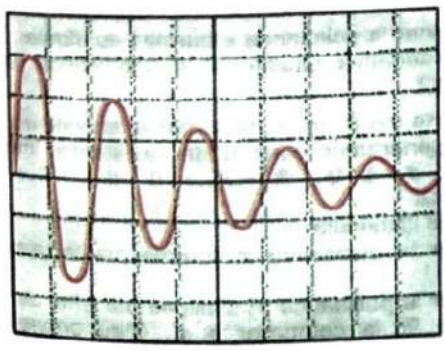
6/ Comment serait modifié le chronogramme si l'inductance de la bobine avait été divisée par 4 ?

7/ Comment serait modifié le chronogramme si la résistance du circuit n'était plus négligeable ?

↳ ex. 12.7.

Étude d'un oscillateur amorti

12.17 C Un circuit en série comprend une bobine, d'inductance L et de résistance R, et un condensateur, de capacité C. Le condensateur, initialement chargé, se décharge dans la bobine. On observe la tension u_C aux bornes du condensateur à l'aide d'un oscillographe (figure). La base de temps est sur la position 75 µs . cm^{-1}. L'étalonnage vertical est 2 V . cm^{-1}.



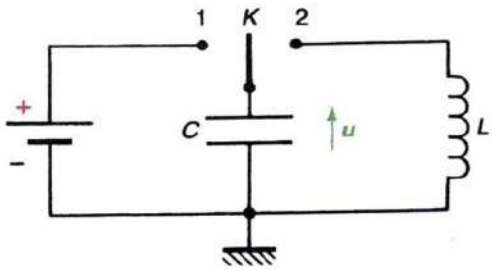
1/ Déterminer la pseudo-période et la pseudo-fréquence des oscillations électriques.

2/ L'inductance de la bobine est égale à 0,2 H. Calculer la capacité du condensateur si l'on admet que la pseudo-période est pratiquement égale à la période propre d'un circuit (L, C) sans résistance.

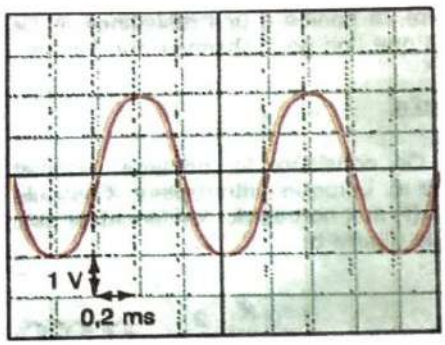
3/ Montrer que le rapport entre deux extrémums successifs de la tension u_C est sensiblement constant.
Quelle est la fraction de l'énergie initiale emmagasinée dans le condensateur dissipée par effet Joule au bout de quatre pseudo-périodes ? On admettra que $i = 0$ lorsque u_C est maximale.

12.18 C On réalise le montage schématisé ci-dessous (figure a). Un ordinateur couplé à un interface permet de visualiser la tension aux bornes du condensateur.
La capacité du condensateur est $C = 0{,}1$ µF, et l'inductance L de la bobine est inconnue.

1/ On place l'inverseur K en position 1. Que se passe-t-il pour le condensateur ? On place ensuite K en position 2. On observe alors sur l'écran la courbe suivante (figure b) :



(a)



(b)

Quel phénomène représente-t-elle ?
Quelle est la valeur de la pseudo-période ?
L'amortissement est considéré comme négligeable dans la suite de l'exercice.

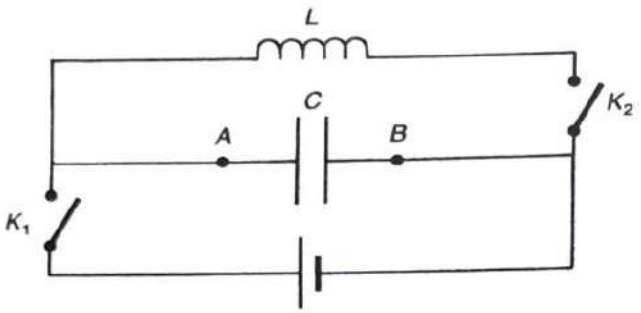
2*a*/ En déduire les expressions de la charge q du condensateur et de l'intensité i en fonction du temps. (On prend pour origine des temps à l'instant où q prend sa valeur maximale.)
Représenter sur un même graphique les variations de q et de i.
b/ Déterminer les énergies emmagasinées dans le condensateur et dans la bobine. Représenter graphiquement leurs variations en fonction du temps.
c/ Calculer l'énergie totale du circuit.

↳ ex. 12.7.

Scanné avec CamScanner

Exercices bilans

12.19 BC 1/ On charge un condensateur de capacité $C = 12{,}5\ \mu F$ et de résistance négligeable grâce à une batterie de f.e.m. 12 V (l'interrupteur K_1 étant fermé et l'interrupteur K_2 ouvert).



Calculer la charge maximale du condensateur et préciser sur la figure l'armature qui s'est chargée positivement.

2/ Ce condensateur peut ensuite se décharger dans une bobine d'inductance $L = 0{,}8$ H et de résistance nulle. Pour cela, on ouvre K_1 et, à la date $t = 0$, on ferme K_2.

a/ Déterminer les valeurs U_0 de la tension u_{AB} et l'intensité i_0 du courant dans le circuit (L, C) à la date $t = 0$.

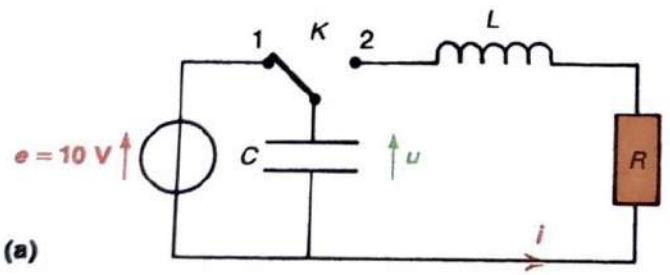
b/ Étudier la variation de la tension u_C aux bornes du condensateur en fonction du temps. Calculer la pulsation propre ω_0 et la fréquence propre du circuit (L, C). Exprimer $u_C = u_{AB}$ en fonction de t, ω_0 et U_0.

c/ On visualise u_C sur l'écran d'un oscillographe. Le balayage horizontal correspond à 5.10^{-3} s.cm^{-1}, et la sensibilité verticale est 6 V.cm^{-1}. La largeur de l'écran est 8 cm. Représenter la courbe $u_C(t)$ que l'on observe sur l'écran.

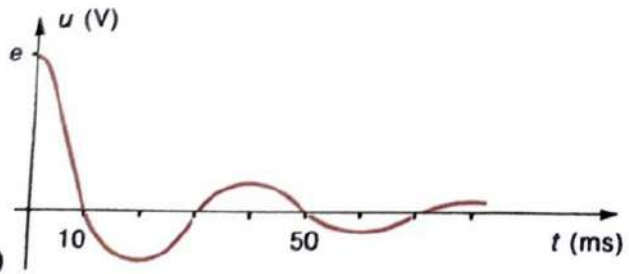
d/ En réalité, la bobine a une résistance R. Dessiner une des allures que l'on peut observer sur l'écran. Quel est le rôle de R?

↳ **ex. 12.6.**

12.20 C On considère le montage schématisé ci-dessous (figure a). Lorsque l'interrupteur K bascule de 1 en 2, la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur est donnée par le graphique (figure b)



(a)



(b)

1/ Interpréter le graphique.

2/ La capacité du condensateur est de 1 mF. La pseudo-période des oscillations est peu différente de la période du circuit sans résistance. En déduire l'inductance L de la bobine.

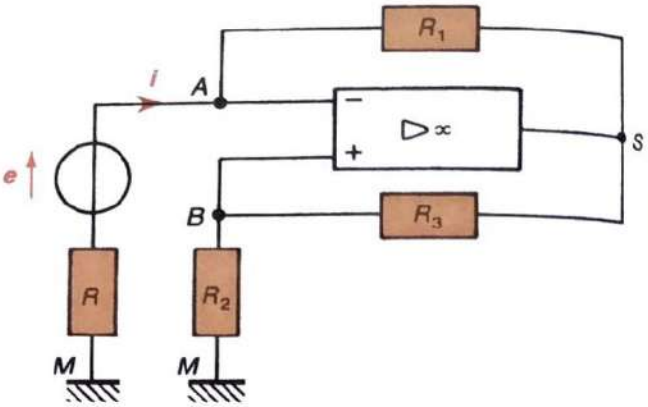
3/ Que devient la pulsation du circuit si la valeur de L est multipliée par 4 ?

4/ Quelle est l'énergie électrique dissipée en chaleur ?

5/ Représenter graphiquement la variation de $u(t)$ en fonction du temps dans le cas où $R = 0$. En déduire $i(t)$.

Résistance négative

12.21 On a réalisé le montage de la figure ci-dessous.



Le dipôle entre A et M, conçu à l'aide d'un amplificateur opérationnel alimenté par des sources auxiliaires, constitue une « résistance négative ». L'amplificateur opérationnel, considéré comme parfait, fonctionne convenablement :

$$u_{AB} = V_A - V_B = 0.$$

Il n'entre ni ne sort de courant des bornes (+) et (−) de l'amplificateur. On prend pour potentiel de référence celui du point M (masse).

1/ Montrer que :

$$V_B = \frac{R_2}{R_2 + R_3} V_S.$$

Exprimer $V_A - V_S$ en fonction de R_1 et de l'intensité algébrique i qui arrive en A.

2/ En déduire la différence de potentiel :

$$u_{AM} = V_A - V_M$$

en fonction de i, R_1, R_2 et R_3. Pourquoi peut-on dire que le dipôle (A, M) est une résistance négative ?

3/ Déterminer la puissance « fournie » au dipôle. Cette puissance est négative. Quelle est la signification physique de ce résultat ?

4/ Dans une expérience, on a relevé les valeurs suivantes avec un générateur continu de résistance interne négligeable : $e = 6$ V ; $R_2 = R_3 = 10$ kΩ ; $R_1 = 1\,000$ Ω ; $R = 2\,000$ Ω.

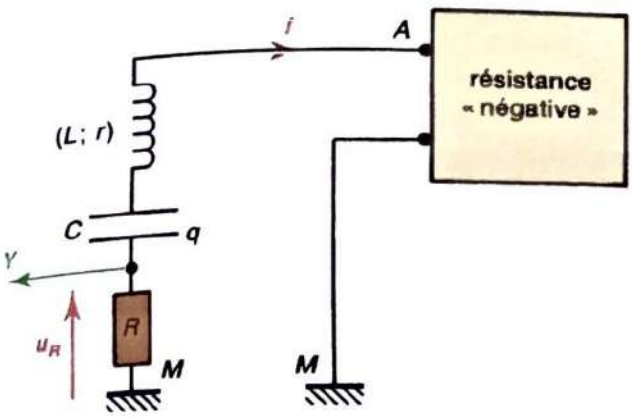
a/ Calculer l'intensité i.

b/ Calculer la puissance $\mathcal{P}_1$ fournie par le générateur de f.e.m. e.

c/ Calculer la puissance $\mathcal{P}_2$ dissipée par effet Joule dans la résistance R ; la comparer à $\mathcal{P}_1$. D'où provient la puissance $\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1$?

Scanné avec CamScanner

12.22 On reprend le dipôle (A, M) de l'exercice précédent (« résistance négative »). On branche à ses bornes, en série, une bobine (L, r), un condensateur de capacité C, une résistance variable R (figure).



On donne : $R_1 = R_2 = R_3 = 1\,000\ \Omega$. On observe à l'oscillographe la tension u_R aux bornes de R. On diminue progressivement la valeur de R en partant de $R = 2\,000\ \Omega$. On observe :

- une tension nulle pour $R > R_1 + r$;
- une tension sinusoïdale de fréquence f pour R légèrement inférieur à $R_1 + r$.

1/ Écrire l'équation différentielle vérifiée par l'intensité i du courant dans le circuit.

2/ Déduire de cette équation différentielle que la charge q du condensateur satisfait à la relation :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2\right) = -(R + r - R_1)\,i^2.$$

3/ A quelle condition l'énergie électrique $\frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2$ est-elle conservée ?
Cette condition étant réalisée, exprimer en fonction de L et C la fréquence f des oscillations électriques sinusoïdales.

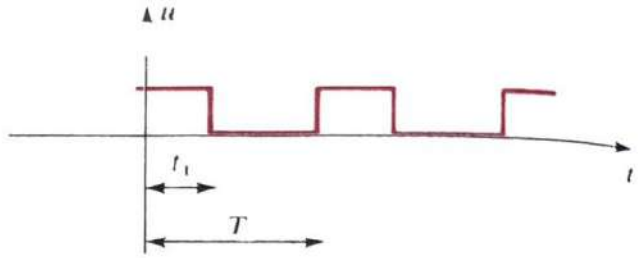
Application numérique : $L = 44$ mH ; $C = 1$ µF. Calculer f.

Scanné avec CamScanner

13 MULTIVIBRATEURS ASTABLES

Les multivibrateurs astables sont des générateurs de signaux rectangulaires (*fig.* 1). La différence de potentiel u disponible à leurs bornes évolue perpétuellement entre deux états, l'un haut, l'autre bas.

De nombreuses techniques permettent de réaliser les multivibrateurs astables; nous utiliserons ici des inverseurs logiques (voir *document* en fin de chapitre).



1. *Signal rectangulaire délivré par un multivibrateur astable. Si T est la période du signal et t_1 la durée d'un créneau en l'état haut, on définit le rapport cyclique du signal par $r = t_1/T$.*

13.1 étude de l'inverseur logique HCMOS

Nous utilisons un quadruple NON ET 74 HC 00, et nous réalisons un inverseur logique avec une seule porte NON ET (*fig.* 3). La masse étant prise comme référence, nous noterons les différences de potentiel :

$$v_E - v_M \quad \text{et} \quad v_S - v_M$$

respectivement v_E et v_S, et parlerons dorénavant du potentiel (ou tension) d'un point.

Relevons la *caractéristique de transfert* $v_S = f(v_E)$ de l'inverseur. Pour une tension d'alimentation V_{cc} de 4,8 V, nous obtenons la courbe de la figure 4a. La figure 4b représente la caractéristique de transfert idéalisée.

Sur la courbe idéalisée, nous avons posé à titre de simplification $V_b = \frac{V_{cc}}{2}$. V_b désignant le potentiel, ou tension, de basculement. En fait nous observons, sur la courbe expérimentale, une tension de basculement inférieure à la moitié de la tension d'alimentation V_{cc}.

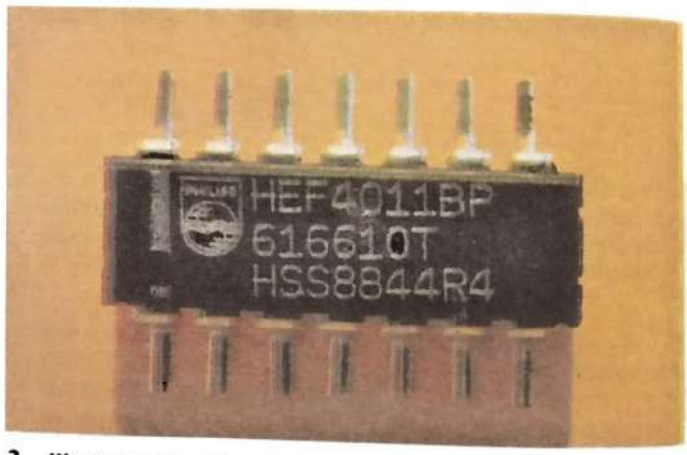
Nous remarquons sur la courbe de transfert idéale une dissymétrie entre l'entrée et la sortie. *Idéalement, le potentiel, ou tension, de sortie n'a que deux valeurs :*

$$V_{cc} \quad \text{ou} \quad 0.$$

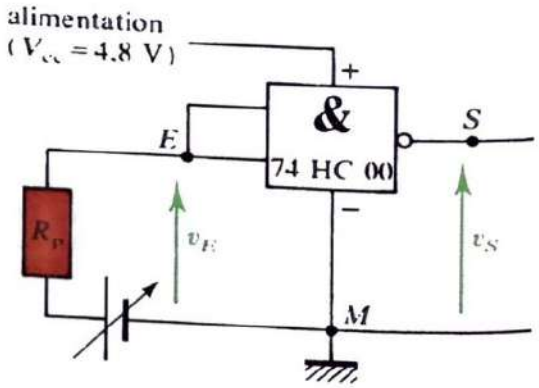
En revanche le potentiel d'entrée peut avoir une infinité de valeurs :

- si $v_E < V_b$, la sortie est au **niveau haut**;
- si $v_E > V_b$, la sortie est au **niveau bas**.

Cette propriété est fondamentale, nous l'utiliserons constamment lors de l'étude des multivibrateurs astables.



2. *Photographie d'un circuit intégré comportant quatre portes* **NON ET** *(NAND pour les anglo-saxons).*



3. *Porte* **NON ET** *montée en inverseur logique. Les deux entrées sont reliées entre elles au point E. La résistance de protection R_p est de 100 kΩ.*

En principe, le potentiel d'entrée doit être compris dans le domaine $[0, V_{cc}]$, sous peine d'un dysfonctionnement des circuits CMOS et HCMOS.

Remarque : En plaçant un voltmètre aux bornes de la résistance de protection R_p, on peut évaluer le courant d'entrée de l'inverseur (*fig.* 3). La tension détectée aux bornes de $R_p = 100$ kΩ est inférieure au millivolt : l'intensité du courant d'entrée est donc inférieure à 10 μA; nous considérerons que ce courant est négligeable dans les développements qui suivent.

13.2 charge et décharge d'un condensateur

Nous avons étudié en classe de Première les condensateurs, leur charge et leur décharge. Rappelons les caractéristiques de ces phénomènes à l'aide d'un montage simple (*fig.* 5), où le générateur délivre des créneaux de tension non symétriques $(0, e_m)$.

13.2.1 équation différentielle

Soit u_C la tension aux bornes du condensateur et $e(t)$ la tension délivrée par le générateur. Il vient :

$$e(t) = u_R + u_C,$$

soit :

$$e(t) = Ri + u_C.$$

Or :

$$q = Cu_C \quad \text{et} \quad i = \frac{dq}{dt};$$

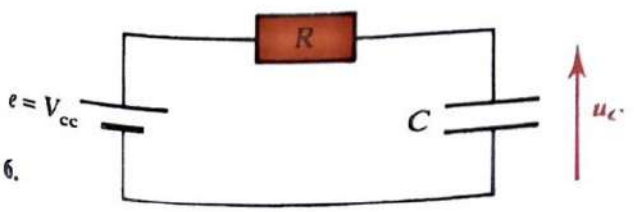
d'où :

$$e(t) = RC\frac{du_C}{dt} + u_C.$$

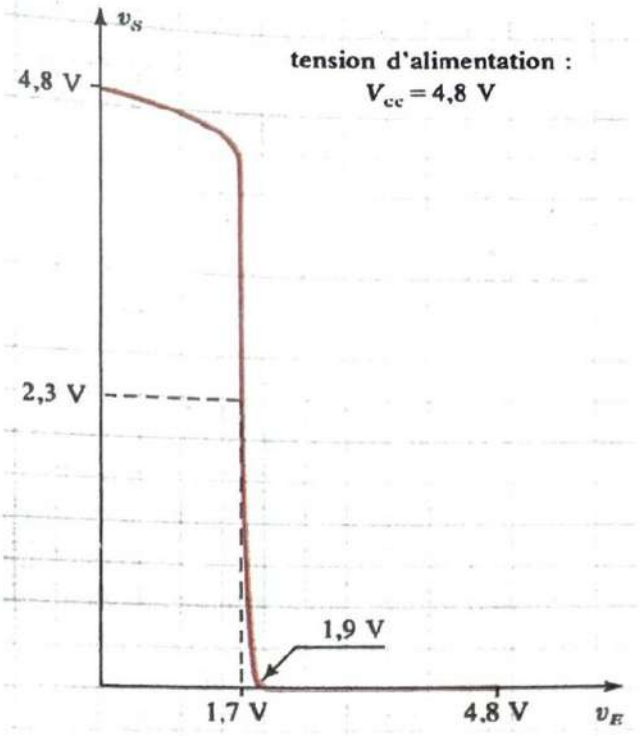
Supposons maintenant que $e(t) = V_{cc} = \text{Cte}$ (*fig.* 6); l'expression générale de la solution de cette équation différentielle est :

$$u_C = Ae^{-\frac{t}{RC}} + B,$$

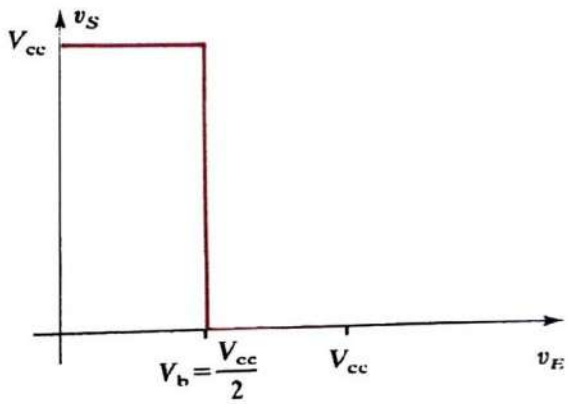
où A et B sont des constantes.
Pour déterminer B, examinons la situation au bout d'un temps infini : le condensateur est alors chargé sous la tension V_{cc} (et l'intensité du courant est nulle dans le circuit). Or u_C tend vers B lorsque t devient très grand par rapport à la durée $\tau = RC$, caractéristique du circuit et appelée **constante de temps du circuit**. Nous avons donc $B = V_{cc}$.
La constante A dépend, elle des conditions initiales (condensateur chargé ou non).



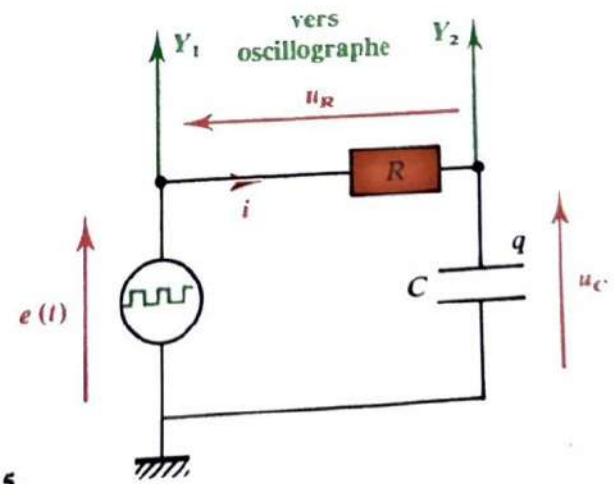
6.



4 a. *Caractéristique de transfert de l'inverseur logique de la figure* 3.



4 b. *Caractéristique de transfert idéalisée d'un inverseur logique* HCMOS. V_{cc} *est la tension d'alimentation de l'inverseur.*



5.

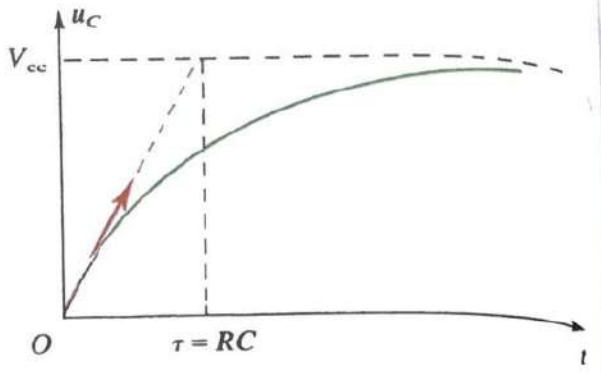
La figure 7 représente l'évolution de u_C dans le cas où le condensateur est initialement déchargé.
La figure et la photographie 8 donnent l'allure de la décharge du condensateur initialement chargé sous la tension V_{cc}, lorsque $e(t)=0$.
La photographie 9 montre l'oscillogramme obtenu avec le montage de la figure 5.

13.2.2 continuité de la tension aux bornes d'un condensateur

La quantité d'électricité q portée par une armature de condensateur ne peut varier brutalement au cours d'un intervalle de temps très court. En effet, si q subissait une variation Δq finie au cours d'une durée très petite, il en résulterait une intensité très grande, nécessitant un apport d'énergie énorme, ce qui n'est pas possible. Nous dirons que q est continue. Par exemple, si la charge d'une armature est q_0 juste avant la fermeture de l'interrupteur du circuit de la figure 10, elle est encore égale à q_0 juste après. Or :

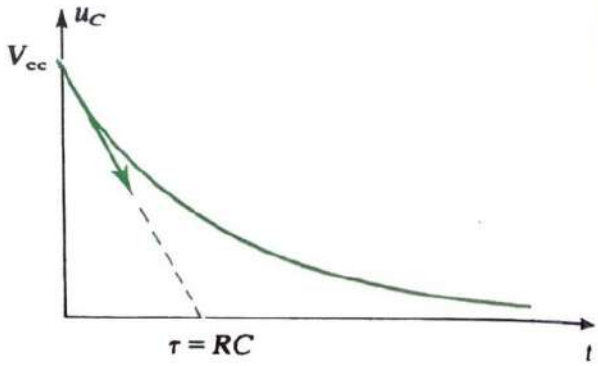
$$q = Cu_C = C(v_A - v_B);$$

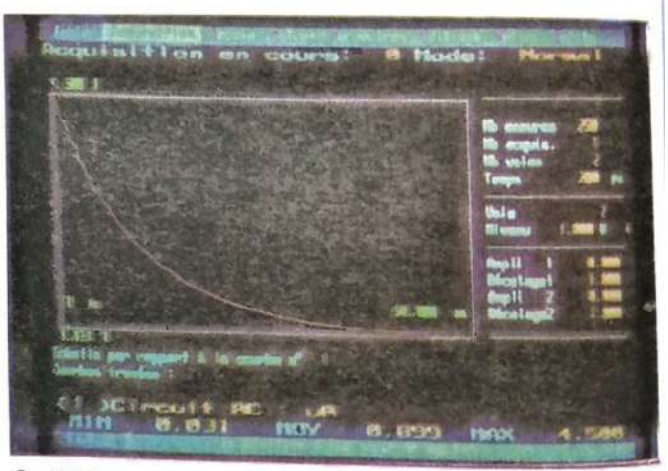
par conséquent la différence de potentiel u_c aux bornes du condensateur est aussi continue. Mais cela ne signifie pas que les potentiels respectifs v_A et v_B des deux armatures (par rapport à la masse prise comme référence) soient eux-mêmes continus; ils peuvent varier brutalement au cours d'un intervalle de temps très petit. Cependant, si v_A varie brutalement de Δv_A, v_B doit varier de la quantité $\Delta v_B = \Delta v_A$, de sorte que la différence de potentiel $u_C = v_A - v_B$ ne subisse pas de discontinuité. En revanche, l'intensité dans un circuit peut subir des discontinuités (*fig.* 10).



7. *Charge du condensateur initialement déchargé (figure 6); à $t=0$, $u_c=0$, d'où :*

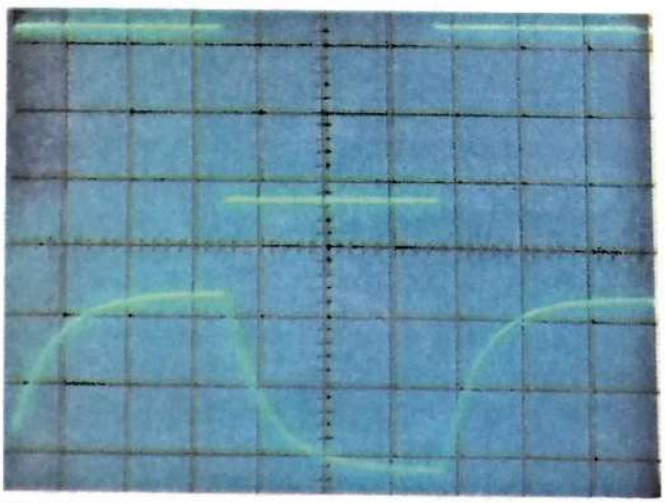
$$u_c = V_{cc}(1 - e^{-t/\tau}).$$



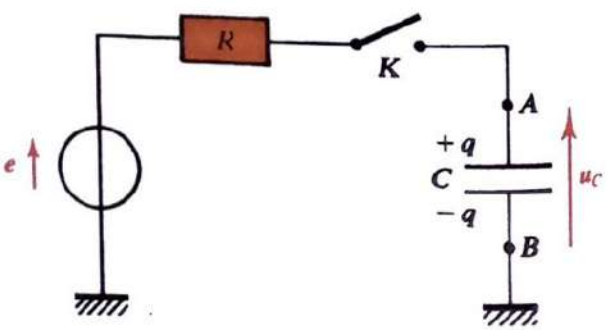


8. *Décharge du condensateur dont la charge initiale est égale à CV_{cc} :*

$$u_c = V_{cc}e^{-t/\tau}.$$

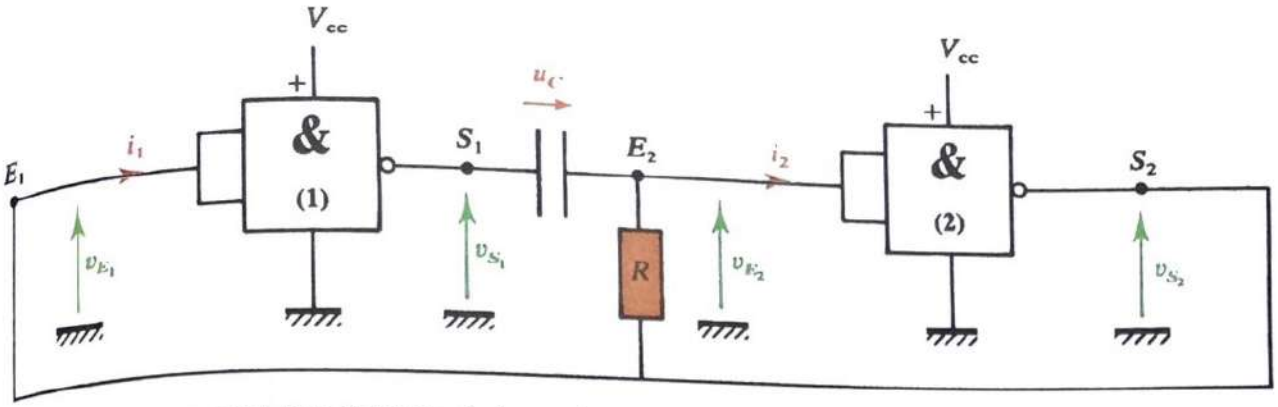


9. *Oscillogramme obtenu avec le montage de la figure 5. Le condensateur se charge et se décharge alternativement (voie Y_2, en bas), au rythme du signal rectangulaire délivré par le générateur (voie Y_1, en haut).*

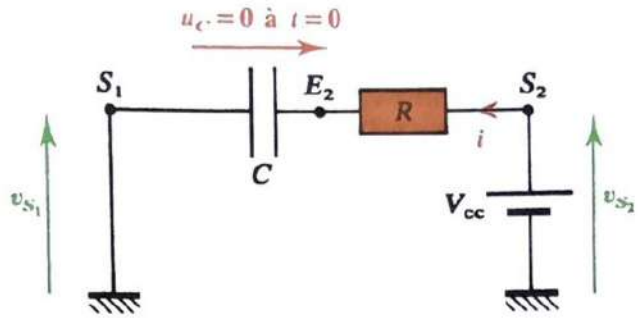


10. *La charge du condensateur est la même juste avant et juste après la fermeture de l'interrupteur K; les variations de la charge sont continues. En revanche, l'intensité peut subir des discontinuités : elle est nulle juste avant la fermeture de K et vaut e/R juste après.* ▶

Scanné avec CamScanner



▲ 11. *Ce montage comprend deux inverseurs logiques, dont la résistance d'entrée est infinie : les intensités i_1 et i_2 sont quasiment nulles.*



12. *Schéma équivalent du montage de la figure 11 en situation initiale : $v_{S_1} = 0$ et $v_{S_2} = V_{cc}$.* ▶

13.3 association d'inverseurs et d'une cellule (*R*, *C*) : multivibrateur astable

Réalisons le montage de la figure 11 (qui comprend deux inverseurs logiques) et faisons les hypothèses suivantes :

– vu de l'entrée, un inverseur se comporte comme une résistance infiniment grande (nous dirons que *la résistance d'entrée est infinie*), de telle sorte que l'intensité d'entrée est négligeable;

– vu de la sortie, un inverseur au niveau haut se comporte comme un générateur idéal de tension, c'est-à-dire de résistance interne nulle (nous dirons que *la résistance de sortie est nulle*), délivrant une tension V_{cc} constante;

– les inverseurs 1 et 2 ont la même caractéristique de transfert, supposée idéale (*fig.* 4 b).

13.3.1 évolution des potentiels d'entrée et de sortie des inverseurs

v_{S_1} et v_{S_2}, potentiels de sortie des deux inverseurs, n'ont que deux valeurs possibles : V_{cc} ou zéro.

Les points E_1 et S_2 sont reliés : nous avons toujours $v_{E_1} = v_{S_2}$.

1. Situation initiale

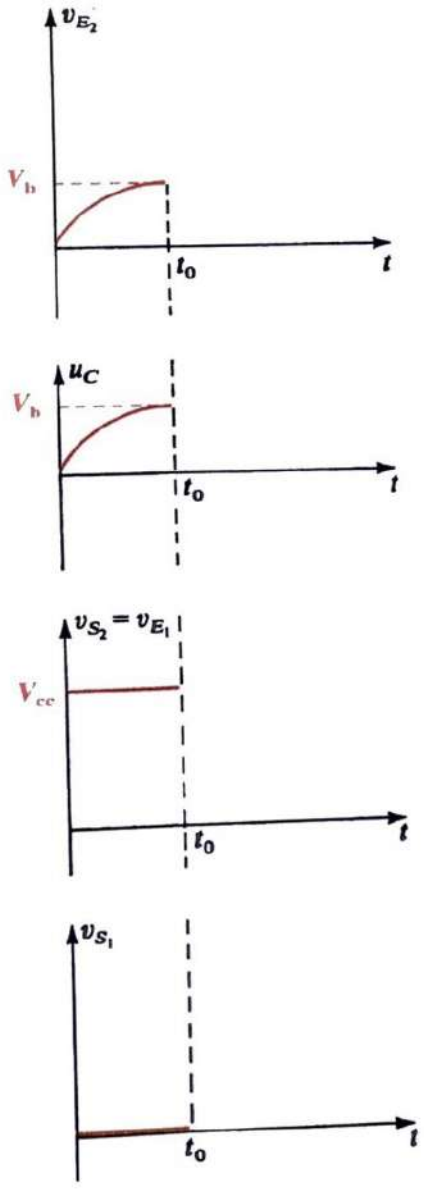
Supposons qu'à l'instant $t = 0$, $v_{S_1} = 0$ et que le condensateur soit déchargé ($u_C = 0$); il vient :

$$u_C = v_{E_2} - v_{S_1} = 0, \quad \text{soit} \quad v_{E_2} = v_{S_1} = 0.$$

D'après la caractéristique de l'inverseur 2, nous obtenons alors avec $v_{E_2} = 0$:

$$v_{S_2} = V_{cc}.$$

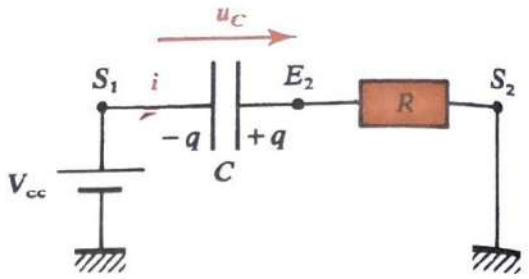
Le schéma équivalent du montage en situation initiale est représenté sur la figure 12.



13. *Chronogramme des tensions durant la charge du condensateur* (phase 1). ▶

2. Charge du condensateur (phase 1, *fig.* 13)

Le circuit ne peut rester dans l'état précédent; le condensateur va se charger à travers la résistance R, le courant circulant de S_2 vers S_1 (*fig.* 12).
Si l'état du circuit évoluait indéfiniment, u_C tendrait exponentiellement vers V_{cc} (voir *application 1*). Mais dès que la tension $u_C = v_{E_2}$ ($v_{S_1} = 0$) atteint la valeur caractéristique V_b, tension de basculement de l'inverseur 2, ce dernier bascule et alors $v_{S_2} = 0$ (*fig.* 13). Notons t_0 la date du basculement.



14. *Schéma équivalent du montage de la figure* **11** *à partir de la date t_0 de basculement des portes.*

3. Basculement

Le basculement de l'inverseur 2 entraîne celui de l'inverseur 1. En effet, le potentiel d'entrée v_{E_1} de l'inverseur 1 devient nul ($v_{E_1} = v_{S_2}$). Le potentiel de sortie v_{S_1} de cet inverseur est alors égal à V_{cc}.
A partir de t_0, date du basculement, le nouveau circuit équivalent est celui de la figure 14.

4. Décharge du condensateur (phase 2, *fig.* 15)

Au début de la phase 2, à l'instant t_0, la tension u_C aux bornes du condensateur est égale à V_b. Le courant change de sens et le condensateur se décharge. Si l'état du circuit équivalent évoluait indéfiniment, u_C tendrait vers $-V_{cc}$ (voir *application 2*).
Étudions l'évolution du potentiel v_{E_2}. Calculons ce potentiel juste après le basculement (instant t_{0+}). Le potentiel de S_1 augmente brutalement de V_{cc}; v_{E_2} doit donc augmenter de la même quantité afin que soit respectée la condition de continuité de la tension u_C aux bornes du condensateur, soit :

$$v_{E_2}(t_{0+}) = v_{E_2}(t_{0-}) + V_{cc} = V_b + V_{cc}.$$

Ensuite, pour $t > t_{0+}$, u_C diminue de façon exponentielle. Or :

$$v_{E_2} = u_C + v_{S_1} = u_C + V_{cc};$$

donc v_{E_2} diminue également. v_{E_2} décroît jusqu'à la tension V_b, tension de basculement de l'inverseur 2. Cela se produit à l'instant t_1 (*fig.* 15).

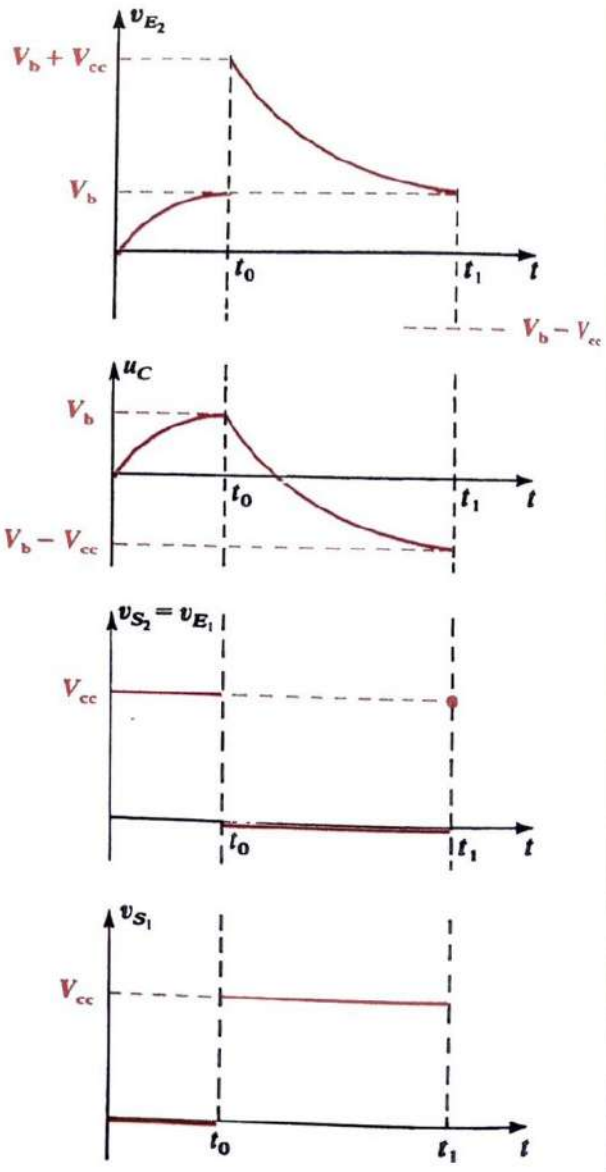
5. Nouveau basculement

A partir de l'instant t_1, nous avons $v_{E_2} < V_b$, ce qui implique que $v_{S_2} = V_{cc}$. Le basculement de l'inverseur 2 entraîne, comme précédemment, celui de l'inverseur 1, et $v_{S_1} = 0$.
Le circuit équivalent est à nouveau celui de la figure 12, mais les conditions initiales sont différentes.

6. Nouvelle charge du condensateur (phase 3)

Entre les instants t_{1-} et t_{1+}, le potentiel du point S_1 a brutalement diminué de V_{cc}; la condition de continuité de la différence de potentiel aux bornes du condensateur devant être respectée, il en est de même du potentiel E_2, soit :

$$v_{E_2}(t_{1+}) = v_{E_2}(t_{1-}) - V_{cc} = V_b - V_{cc}.$$



15. *Chronogramme des tensions :* **phase 1** *(phase de condensateur) et* **phase 2** *(décharge).*

Scanné avec CamScanner

Si la charge du condensateur pouvait évoluer pendant un temps infini, la tension à ses bornes tendrait vers V_{cc}. Cette tension égale à $V_b - V_{cc}$ à l'instant t_1, il s'agit bien d'une charge. En fait, la tension $u_C = v_{E_2}$ va augmenter jusqu'à la valeur V_b, atteinte à l'instant t_2. Il se produira alors un nouveau basculement et le phénomène se reproduira, identique à lui-même.

Le chronogramme des tensions v_{E_2}, u_C, $v_{S_2} = v_{E_1}$ et v_{S_1} est donné par la figure 16.

L'expérience montre que la période T des signaux *est proportionnelle à la constante de temps* τ *de la cellule (R, C),* soit : $T = kRC$.

13.3.2 montage pratique

Nous avons raisonné sur un modèle simplifié. Pour observer effectivement le chronogramme de la figure 16, l'expérience montre qu'il est nécessaire d'insérer une forte résistance (4,7 MΩ) à l'entrée de l'inverseur 2 (*fig.* 17). E_2 désigne maintenant le point commun au condensateur C et à la résistance R.

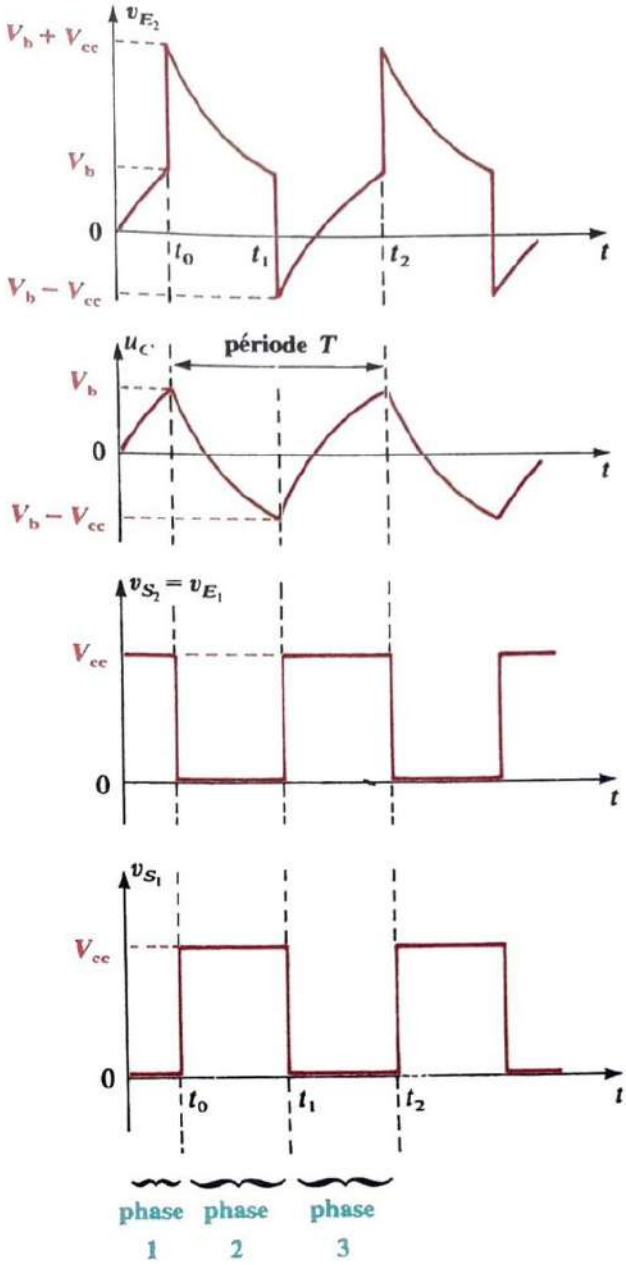
Dans le cas où $V_b \approx \frac{V_{cc}}{2}$, on établit (voir *application* 3) que la période du signal rectangulaire est donnée par :

$$T = 2RC \ln 3 \approx 2{,}2\ RC.$$

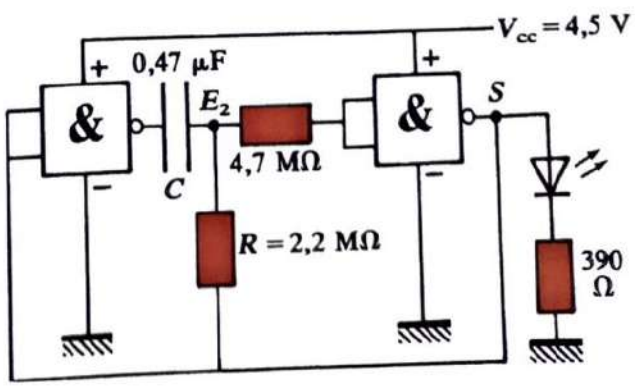
Si $V_b \neq \frac{V_{cc}}{2}$, les durées $t_2 - t_1$ et $t_1 - t_0$ sont en fait différentes. La période T correspond à une décharge et à une charge partielles du condensateur de capacité C dans la résistance R, la durée d'une telle décharge ou charge étant de l'ordre de RC.

13.3.3 conclusion

Il existe de nombreux dispositifs permettant de réaliser des multivibrateurs astables, mais, à l'heure actuelle, les multivibrateurs à inverseurs logiques sont les seuls qu'on utilise effectivement (que les inverseurs soient individualisés ou qu'ils soient intégrés dans un circuit unique auquel il ne reste plus qu'à adjoindre un condensateur). Les différentes « horloges » des ordinateurs, des montres, des multimètres numériques, etc., sont réalisées selon ce principe. Pour obtenir une fréquence très précise, on utilise un quartz à la place du condensateur.



16. ***Chronogramme complet des tensions du multivibrateur.***



17. ***Multivibrateur astable : montage pratique.***
Ici, $RC = 1$ s; la DEL branchée en S clignote avec une période $T \approx 2{,}2$ s. Pour obtenir un régime plus rapide, observable à l'oscillographe, on prendra, par exemple, $C = 100$ nF et $R = 10$ kΩ.

Scanné avec CamScanner

APPLICATION 1

On considère le montage ci-contre (fig. 18). *A* $t=0$, *le condensateur est déchargé.*

1/ Sachant que la tension u_C *aux bornes du condensateur est de la forme :*

$$u_C = Ae^{-\frac{t}{RC}} + B,$$

déterminer les constantes A et B.

2/ A quelle date a-t-on $u_C = \frac{V_{cc}}{2}$ *?*

18. $C = 0{,}47\ \mu F$; $R = 2{,}2\ M\Omega$; u_C ; $V_{cc} = 4{,}8\ V$

1/ Au bout d'un temps infini, aucun courant ne traverse plus le circuit, et le condensateur est chargé sous la tension V_{cc} ; d'où :

$$B = V_{cc}.$$

Lorsque $t=0$, $u_C=0$; d'où :

$$A + B = 0, \quad \text{soit} \quad A = -V_{cc}.$$

Finalement : $u_C = V_{cc}(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$.

(Le graphe de cette fonction est représenté sur la figure 7.)

2/ Si $u_C = V_{cc}$, il vient :

$$\frac{V_{cc}}{2} = V_{cc}(1 - e^{-\frac{t}{RC}}), \quad \text{soit} \quad e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{1}{2};$$

d'où : $t = RC \ln 2$.

Avec : $\tau = RC = 0{,}47.10^{-6} \times 2{,}2.10^{6} \approx 1\ s$,

nous obtenons : $t \approx 0{,}7\ s$.

APPLICATION 2

On considère le montage ci-contre (fig. 19). *A* $t=0$, *la tension* u_C *aux bornes du condensateur est égale à* $V_b > 0$.

1/ Sachant que la tension u_C *est de la forme :*

$$u_C = Ae^{-\frac{t}{RC}} + B,$$

déterminer les constantes A et B.

2/ v_P *étant le potentiel du point P (référence :* $V_M = 0$*), à quelle date a-t-on :*

$$v_P = V_b = \frac{V_{cc}}{2} ?$$

19. $C = 0{,}47\ \mu F$; P ; $R = 2{,}2\ M\Omega$; $V_{cc} = 4{,}8\ V$; u_C ; M ; M

1/ Au bout d'un temps infini, aucun courant ne traverse plus le circuit, et le condensateur est chargé sous la tension V_{cc} ; d'où, avec les conventions de signes choisies :

$$B = u_C = -V_{cc}.$$

Lorsque $t=0$, $u_C = V_b$; d'où :

$$A + B = V_b, \quad \text{soit} \quad A = V_b + V_{cc}.$$

Finalement : $u_C = (V_b + V_{cc})e^{-\frac{t}{RC}} - V_{cc}$.

Le graphe de cette fonction est représenté ci-contre (*fig.* 20).

20. u_C ; V_b ; $\tau = RC$; t ; $-V_{cc}$

2/ Nous avons : $v_P = V_{cc} + u_C$,

soit : $v_P = (V_b + V_{cc})e^{-\frac{t}{RC}}$.

Si $v_P = \frac{V_{cc}}{2} = V_b$, il vient alors :

$$\frac{V_{cc}}{2} = \frac{3}{2} V_{cc} e^{-\frac{t}{RC}}, \quad \text{soit} \quad e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{1}{3};$$

d'où : $t = RC \ln 3$.

Avec : $\tau = RC = 0{,}47.10^{-6} \times 2{,}2.10^{6} \approx 1\ s$,

nous obtenons : $t \approx 0{,}7\ s$.

Scanné avec CamScanner

fiche technique

CHOIX D'UNE TECHNOLOGIE

Les portes logiques sont actuellement réalisées avec des circuits intégrés. Chaque boîtier comporte en général plusieurs portes identiques.

Les principales technologies utilisées sont les suivantes :

• TTL *(Transistor-Transistor-Logic)*, portes constituées avec des transistors bipolaires;
• CMOS *(Complementary Metal-Oxide-Semiconductor)*, portes constituées avec des transistors MOS complémentaires;
• HCMOS (*High speed* CMOS), permettant de travailler à haute fréquence.

Les technologies CMOS et HCMOS présentent un certain nombre d'avantages sur la technologie TTL :

— la tension d'alimentation est de 5 V à 18 V pour les portes CMOS, 2 à 6 V pour les portes HCMOS, alors qu'elle est rigoureusement de 5 V pour les portes TTL;

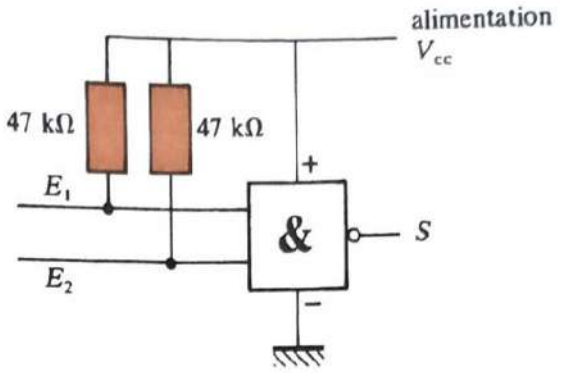
— la consommation statique de la source d'alimentation du circuit intégré est beaucoup plus faible dans le cas des portes CMOS et HCMOS. La consommation est dite *statique* lorsque la sortie de la porte se trouve dans un état déterminé. Elle est de l'ordre du microampère pour un boîtier comportant quatre portes CMOS ou HCMOS. En revanche, l'alimentation d'un boîtier à quatre portes TTL nécessite 10 mA lorsque les sorties sont au niveau haut, et 2 mA supplémentaires lorsqu'une seule sortie est portée au niveau bas. Ainsi une pile du type Leclanché de 4,5 V suffit pour alimenter les boîtiers CMOS et HCMOS. Nous préférerons donc ces technologies à la TTL. Toutefois, la consommation des boîtiers CMOS et HCMOS augmente de façon importante lorsque les portes basculent d'un état à l'autre (consommation *dynamique*).

Bouclage des entrées sur l'alimentation

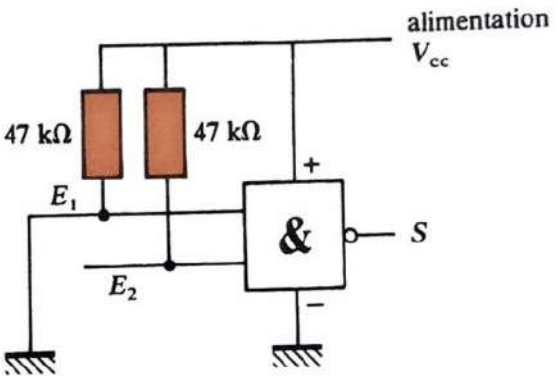
Si l'on veut éviter que la sortie d'une porte bascule aléatoirement, on ne laisse jamais une entrée flottante, mais on la relie à la borne + de l'alimentation par une très grande résistance (47 kΩ) (*fig.* 1). Ainsi, lorsqu'aucune tension n'est appliquée sur cette entrée, son niveau est toujours haut et le potentiel de sortie est bien défini. Lorsqu'on impose un niveau bas à une entrée, par exemple en la reliant à la masse (*fig.* 2), l'alimentation débite alors dans la résistance de 47 kΩ, qui limite l'intensité du courant.

Brochage des boîtiers

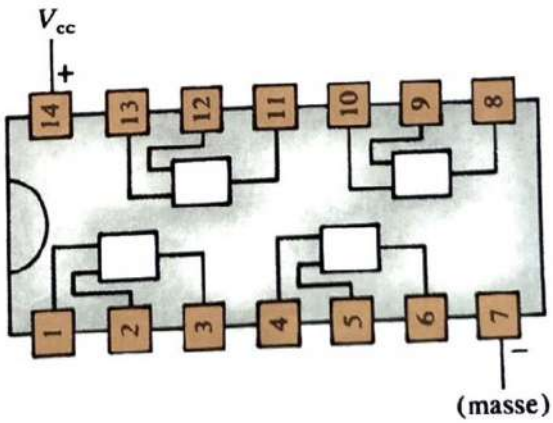
Le brochage des boîtiers HCMOS (et TTL) à quatre portes fait l'objet de la figure 3, celui des boîtiers CMOS, de la figure 4.
Attention, le brochage des boîtiers CMOS est différent de celui des boîtiers HCMOS!



1. ***Bouclage des entrées sur l'alimentation.***



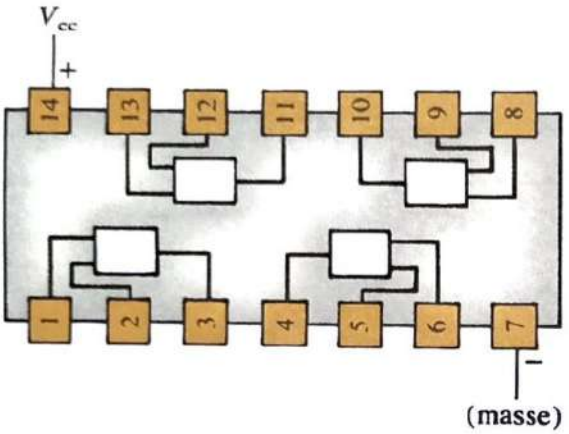
2. ***L'alimentation débite dans la résistance de 47 kΩ.***



3. ***Brochage des boîtiers* HCMOS *et* TTL *(quatre portes).***

Données techniques

Selon les prescriptions des constructeurs de portes HC MOS, un niveau d'entrée sera considéré comme *haut* (code 1 en logique positive) si la tension correspondante *est supérieure à* 3,2 V, pour une tension d'alimentation de 4,5 V. Un niveau d'entrée sera considéré comme *bas* (code 0 en logique positive) si la tension correspondante *est inférieure à* 0,9 V, pour une tension d'alimentation de 4,5 V. Ces seuils dépendent de la tension d'alimentation.



HC MOS SN 74 HC			min	nom	max
V_{cc}	*tension d'alimentation*		2	5	6
V_{IH}	*tension d'entrée niveau haut*	$V_{cc}=2$ $V_{cc}=4,5$ $V_{cc}=6$	1,5 3,15 4,2		
V_{IL}	*tension d'entrée niveau bas*	$V_{cc}=2$ $V_{cc}=4,5$ $V_{cc}=6$			0,3 0,9 1,2
V_I	*tension d'entrée*		0		V_{cc}
V_O	*tension de sortie*		0		V_{cc}

(Les tensions sont exprimées en volts.)

***Extrait de catalogue* (HC MOS Logic Data Book, *Texas Instruments*, 1984).**

◀ **4.** *Brochage des boîtiers* **C MOS** *(quatre portes).*

APPLICATION 3

Montrer que la période du multivibrateur astable de la figure 11 *est donnée par :*

$$T = RC \ln \frac{(V_b + V_{cc})(2V_{cc} - V_b)}{V_b(V_{cc} - V_b)}.$$

Qu'en est-il lorsque $V_b = \frac{V_{cc}}{2}$?

Nous avons (*fig.* 16) :

$$T = (t_1 - t_0) + (t_2 - t_1).$$

Calculons $(t_1 - t_0)$ et $(t_2 - t_1)$.

1. Durant la phase 2, u_C est de la forme :

$$u_C = Ae^{-t/RC} - V_{cc}.$$

- A $t = t_0$, $u_C = V_b$; d'où :

$$A = (V_b + V_{cc})e^{t_0/RC}.$$

- A $t = t_1$, $u_C = V_b - V_{cc}$; d'où :

$$V_b - V_{cc} = Ae^{-t_1/RC} - V_{cc},$$

soit, avec la valeur de A trouvée précédemment :

$$V_b = (V_b + V_{cc})\, e^{(t_0 - t_1)/RC},$$

d'où l'on tire :

$$t_1 - t_0 = RC \ln \frac{V_b + V_{cc}}{V_b}.$$

2. Durant la phase 3, u_C est de la forme :

$$u_C = A'e^{-t/RC} + V_{cc}.$$

- A $t = t_1$, $u_C = V_b - V_{cc}$; d'où :

$$A' = (V_b - 2V_{cc})e^{t_1/RC}.$$

- A $t = t_2$, $u_C = V_b$; d'où :

$$V_b = A'e^{-t_2/RC} + V_{cc},$$

soit, avec la valeur de A' trouvée précédemment :

$$V_b = (V_b - 2V_{cc})e^{(t_1 - t_2)/RC} + V_{cc};$$

d'où l'on tire :

$$t_2 - t_1 = RC \ln \frac{2V_{cc} - V_b}{V_{cc} - V_b}.$$

3. Finalement, nous obtenons :

$$T = (t_1 - t_0) + (t_2 - t_1)$$
$$= RC \ln \frac{(V_b + V_{cc})(2V_{cc} - V_b)}{V_b(V_{cc} - V_b)}.$$

Si $V_b = \frac{V_{cc}}{2}$, il vient alors :

$$t_1 - t_0 = RC \ln 3 \quad \text{et} \quad t_2 - t_1 = RC \ln 3;$$

d'où : $$T = 2RC \ln 3.$$

Remarquons que dans ce cas :

$$t_1 - t_0 = t_2 - t_1.$$

Le *rapport cyclique* des signaux délivrés par le multivibrateur, défini par :

$$r = \frac{t_2 - t_1}{t_2 - t_0},$$

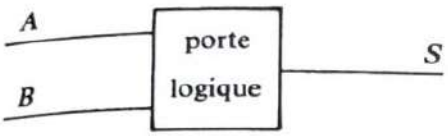
est de 50 %.

Scanné avec CamScanner

DOCUMENT

Les inverseurs logiques

L'électronique est divisée en deux grands domaines : l'*électronique analogique*, dans laquelle les signaux varient de façon continue, et l'*électronique logique*, dans laquelle on ne considère que deux niveaux de tension : le niveau haut, codé 1, et le niveau bas, codé 0, en *logique positive* (avec la convention contraire, on travaille en *logique négative*).
Les inverseurs logiques appartiennent à la famille des *portes logiques*, composants fondamentaux utilisés en électronique logique. Elles comportent des entrées et une sortie (*fig.* 1).

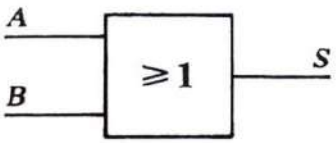


1. *Symbole d'une porte logique.*

Aux entrées A, B et à la sortie S, on associe les variables logiques a, b, s, qui peuvent prendre les valeurs 0 ou 1.
Nous donnons ci-après les spécificités de quelques portes logiques, notamment leurs tables de vérité (tables de correspondances entre les valeurs des variables a, b et s).

• **Porte OU** (*fig.* 2)

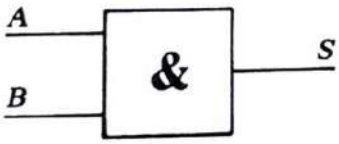
a	b	s
0	0	0
0	1	1
1	1	1
1	0	1



La sortie n'est à l'état 0 que si les deux entrées sont à l'état 0.
Notation : $s = a + b$.

• **Porte ET** (*fig.* 3)

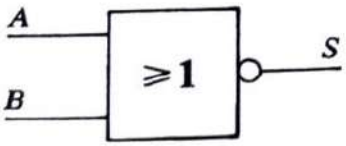
a	b	s
0	0	0
0	1	0
1	1	1
1	0	0



La sortie n'est à l'état 1 que si les deux entrées sont à l'état 1.
Notation : $s = a.b$.

• **Porte NON OU,** ou **NI** (*fig.* 4)

a	b	s
0	0	1
0	1	0
1	1	0
1	0	0



Le symbole ○ qui figure à la sortie indique que celle-ci est complémentaire(*) de celle d'une porte OU.
Notation : $s = \overline{a + b}$.

• **Porte NON ET** (*fig.* 5)

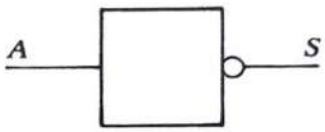
a	b	s
0	0	1
0	1	1
1	1	0
1	0	1



La sortie est complémentaire de celle d'une porte ET.
Notation : $s = \overline{a.b}$.

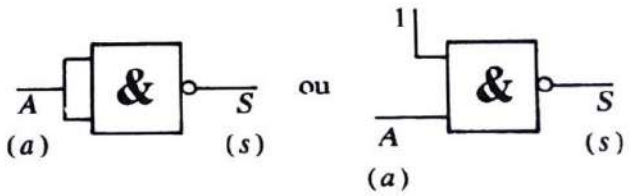
• **Porte NON,** ou inverseur logique (*fig.* 6)

a	s
0	1
1	0

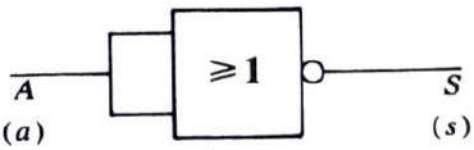


Cette porte ne comporte qu'une seule entrée. La sortie est complémentaire de l'entrée.
Notation : $s = \bar{a}$.

Une porte NON peut être réalisée à l'aide d'une porte NON ET (*fig.* 7). Une première solution consiste à relier les deux entrées de la porte NON ET; on constate alors, en observant la table de vérité, que la sortie est le complément de l'entrée commune. On peut également maintenir l'une des entrées à 1; on constate alors que la sortie est le complément de l'autre entrée.
Ajoutons que les portes NON ET permettent de générer toutes les autres portes.
On peut aussi réaliser une porte NON à partir d'une porte NON OU, dont on relie les deux entrées (*fig.* 8).



7. ***Réalisation d'un inverseur logique avec une porte* NON ET (*ou* NAND).** ***Dans les deux cas,*** $s = \bar{a}$.



8. ***Réalisation d'un inverseur logique avec une porte* NON OU (*ou* NOR).**

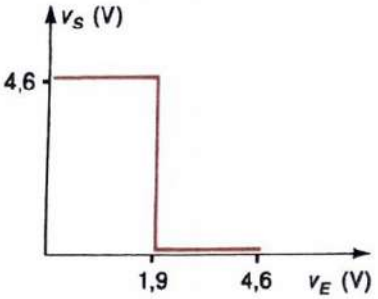
(*) Dans un ensemble à deux éléments (ici : {0, 1}), les deux éléments sont complémentaires l'un de l'autre.

Scanné avec CamScanner

EXERCICES

L'essentiel du cours

13.1 A La figure représente la caractéristique de transfert d'une porte NON ET ; la tension d'alimentation est $V_{cc} = 4{,}6$ V.

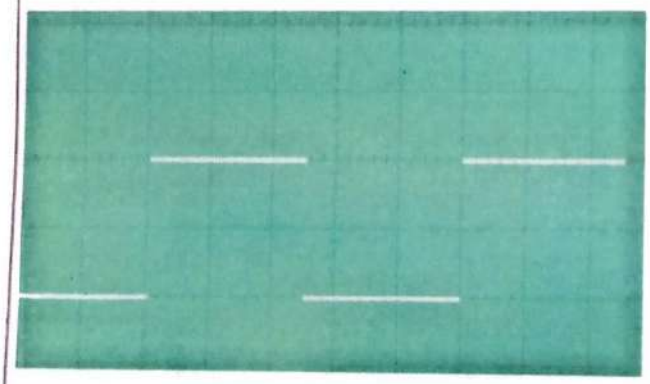


1/ Quelle est la valeur de la tension V_b de basculement ?

2/ Pour quelles valeurs du potentiel d'entrée v_E la sortie est-elle au niveau haut ?

3/ Pour quelles valeurs du potentiel d'entrée v_E la sortie est-elle au niveau bas ?

13.2 La photographie représente l'oscillogramme observé à la sortie d'un oscillateur astable. Le balayage est sur la sensibilité 0,5 ms . cm $^{-1}$.



1/ A Quelle est la période des oscillations ?

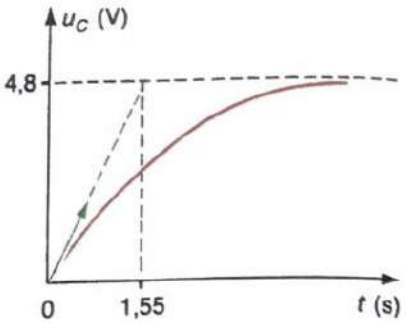
2/ Pour ce multivibrateur, la période est donnée par la relation :

$$T = 2\,\tau \ln 3,$$

où τ est la constante de temps du circuit (R, C).
On donne $R = 47$ kΩ. Calculer la capacité du condensateur.

Exercices de base

13.3 AB3 La figure ci-après représente la tension aux bornes d'un condensateur de capacité C en fonction du temps t, lors de sa charge à travers une résistance R à l'aide d'un générateur de tension.

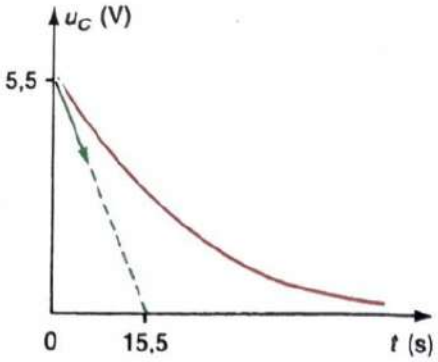


1/ Définir la constante de temps τ du circuit (R, C).

2/ Déterminer la valeur de τ à l'aide du graphe.

3/ La capacité du condensateur est égale à 47 µF. Quelle est la valeur de la résistance associée ?

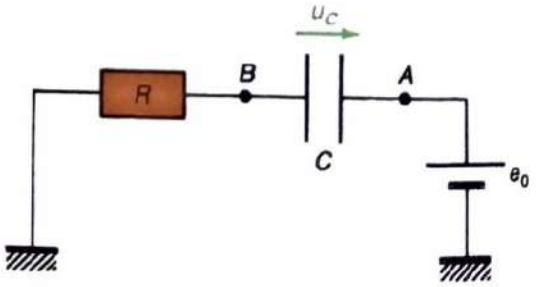
13.4 AB3 La figure représente la tension aux bornes d'un condensateur de capacité C en fonction du temps t, lors de sa décharge à travers une résistance R.



1/ Déterminer la valeur de τ à l'aide du graphe.

2/ La résistance du condensateur est égale à 470 kΩ. Quelle est la valeur de la capacité du condensateur ?

13.5 AB3 On considère le montage schématisé sur la figure.



A l'instant $t = 0$, le condensateur est déchargé. Le générateur, de résistance interne nulle, a une f.e.m. e_0.

1/ Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur.

2/ La tension u_C est de la forme :

$$u_C = Ae^{-t/\tau} + B.$$

Exprimer les constantes A, B et τ en fonction de R, C et e_0.

3/ On donne $R = 4{,}7$ MΩ ; $C = 0{,}22$ µF ; $e_0 = 6$ V.

a/ Calculer τ.
b/ Déterminer la date à laquelle $u_C = 3$ V.
c/ Représenter graphiquement u_C en fonction du temps.

Scanné avec CamScanner

13.6 AB3 On reprend le montage de l'exercice précédent, mais avec la condition initiale $u_C(0) = V_b > 0$.

1/ La tension u_C est de la forme :

$$u_C = Ae^{-t/\tau} + B.$$

Exprimer les constantes A, B et τ en fonction de R, C et e_0.

3/ On donne $R = 330$ kΩ ; $C = 4{,}7$ µF ; $e_0 = 4{,}8$ V ; $V_b = 1{,}9$ V.

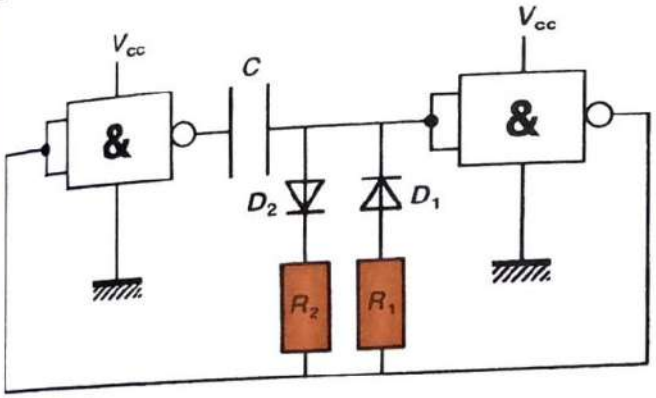
a/ Calculer τ.

b/ Représenter graphiquement u_C en fonction du temps.

Exercices résolus

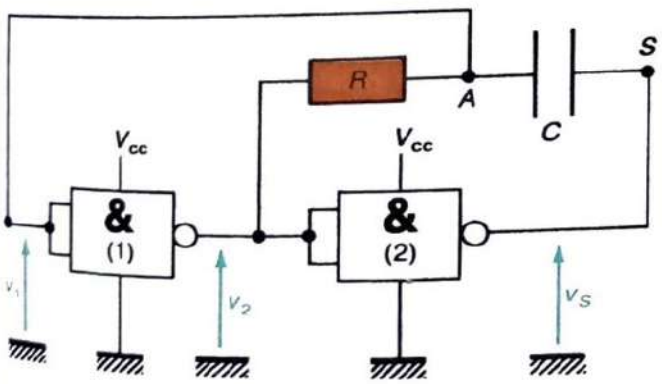
Les corrigés de ces exercices sont donnés pp. 226 à 229.

13.7 C Le montage de l'oscillateur astable étudié dans le cours est modifié selon la figure.



Quel intérêt présente ce nouveau dispositif ?

13.8 On considère le multivibrateur représenté sur la figure. Les deux inverseurs, alimentés sous la tension V_{cc}, sont supposés idéaux et ont la même constante de basculement V_b.



1/ A A l'instant $t = 0$, $v_S = 0$, $v_2 = V_{cc}$, et le condensateur est déchargé. Quelle est alors la valeur de v_1 ?

2/ C *Étude de la première phase*

a/ Représenter le circuit de charge du condensateur.

b/ Dans quel sens évolue v_1 au cours de la charge ?

c/ Quelle est la valeur de v_1 juste avant le basculement des portes ? En déduire la valeur de la tension $u_C = v_A - v_S$ aux bornes du condensateur à cet instant.

3/ C *Étude de la deuxième phase*

a/ Représenter le circuit de décharge du condensateur après le premier basculement des portes (inverseurs).

b/ Quelle est la valeur de u_C juste après le premier basculement des portes ? En déduire la valeur de v_1 à cet instant.

c/ Pourquoi parle-t-on de « décharge » du condensateur au cours de cette phase ? Dans quel sens évolue v_1 au cours de cette phase ?

d/ Déterminer v_1 et u_C juste avant le deuxième basculement des portes.

4/ C *Étude de la troisième phase*

a/ Représenter le circuit de charge du condensateur.

b/ Quelle est la valeur de u_C juste après le deuxième basculement des portes ? En déduire la valeur de v_1 à cet instant.

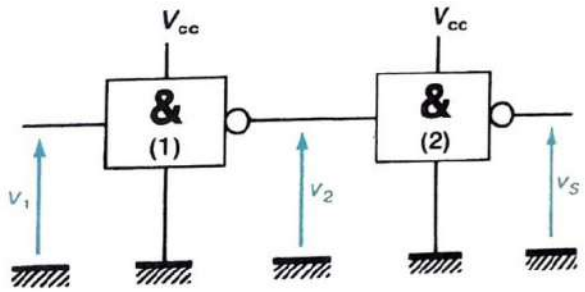
c/ Justifier le terme « charge » du condensateur.

d/ Quelle est la valeur de v_1 à la fin de la troisième phase ?

5/ C Représenter graphiquement les variations de v_1, u_C et v_S en fonction du temps.

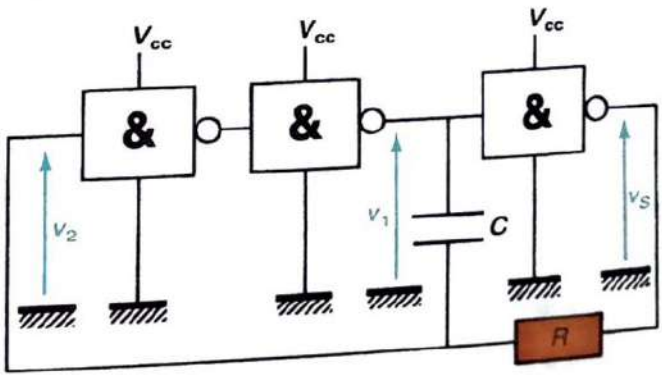
6/ C Retrouver les résultats de cet exercice sans calculs, à partir du cours.

13.9 C Deux inverseurs logiques, supposés idéaux, sont montés en série (figure) ; ils ont la même tension de basculement V_b.



Représenter la tension de transfert de l'ensemble.

13.10 On considère le multivibrateur représenté sur la figure.



Les inverseurs logiques, supposés idéaux, ont la même tension de basculement V_b. A l'instant $t = 0$, le condensateur est déchargé.

1/ A Déterminer v_1 et v_2 à l'instant $t = 0$.

2/ C Représenter graphiquement $v_2(t)$, $v_1(t)$ et $v_S(t)$.

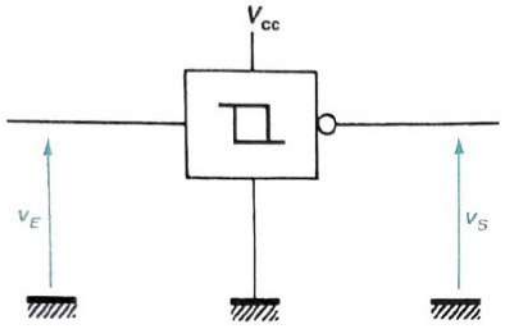
3/ B3 Calculer la période du signal rectangulaire dans le cas où $V_b = \frac{1}{2} V_{cc}$.

Scanné avec CamScanner

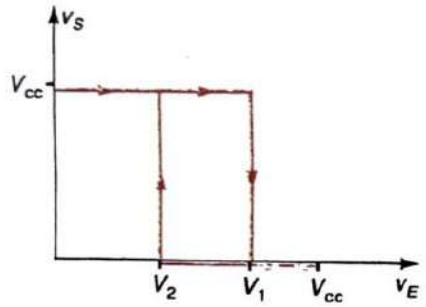
EXERCICES

Réalisation d'un multivibrateur astable à l'aide d'un inverseur à hystérésis

13.11 C Les fabricants de composants électroniques fournissent des inverseurs spéciaux qui permettent de construire facilement des multivibrateurs astables. Citons par exemple le boîtier HC MOS 74HC 14, qui comporte six inverseurs à cycle d'hystérésis (ou *triggers de Schmitt*).
Le symbole de ces inverseurs est représenté figure a. Leur caractéristique de transfert est représentée figure b.



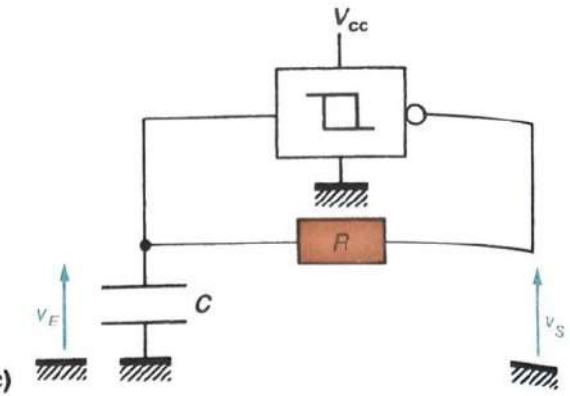
(a) symbole de l'inverseur à cycle d'hystérésis



(b) caractéristique de transfert pour le circuit HC MOS : $V_{cc} = 4{,}5$ V ; $V_1 = 2{,}5$ V ; $V_2 = 0{,}9$ V

1/ On fait croître le potentiel v_E de 0 à V_{cc}, puis on le fait décroître de V_{cc} à 0. Quelles sont les différentes valeurs de v_S lors de ce cycle ?

2/ On considère le montage de la figure c. Le condensateur est initialement déchargé.

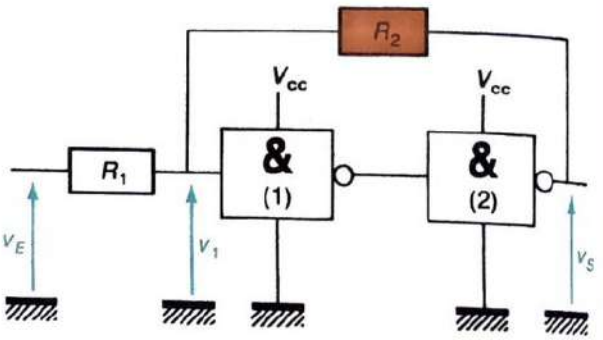


(c)

Indiquer les valeurs de v_E et de v_S à l'instant $t = 0$.
Représenter graphiquement les variations de v_E et de v_S en fonction du temps.
Calculer la période du signal rectangulaire obtenu.

Réalisation d'un trigger de Schmitt (ex. 13.11) ***à l'aide de deux inverseurs logiques HC MOS***

13.12 C On considère le montage représenté sur la figure.



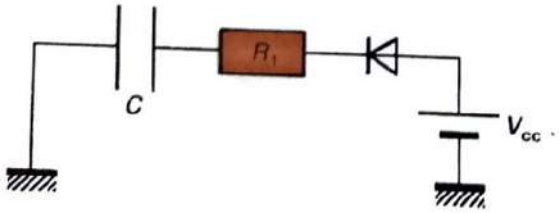
Les deux inverseurs logiques, supposés idéaux, ont la même tension de basculement V_b.

1/ Représenter la caractéristique de transfert $v_S = f(v_1)$ de l'ensemble des deux inverseurs montés en série.
2/ On fait croître le potentiel v_E de 0 à V_{cc} puis on le fait diminuer de V_{cc} à 0. Établir la caractéristique de transfert $v_S = f(v_E)$ du montage. Traiter le cas particulier où $V_b = V_{cc}/2$.

Corrigés des exercices 13.7 à 13.12

13.7 Ce dispositif permet d'obtenir un rapport cyclique différent de 50 %. En effet, la charge du condensateur se produit à travers la résistance R_1 selon le schéma équivalant à la figure a.

$$t_1 - t_0 \approx R_1 C \ln 3.$$



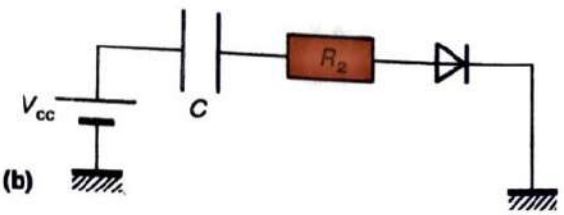
(a)

La décharge du condensateur se produit à travers la résistance R_2 selon le schéma équivalant à la figure b.

$$t_2 - t_1 = R_2 C \ln 3 ; \quad T = (R_1 + R_2) C \ln 3.$$

Rapport cyclique de v_S :

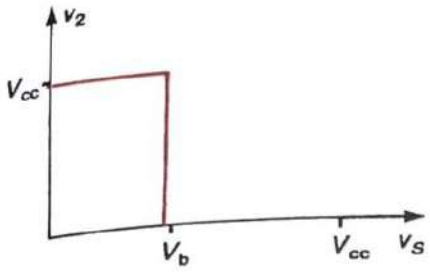
$$\frac{t_1 - t_0}{T} = \frac{R_1 C}{(R_1 + R_2) C} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$



(b)

Scanné avec CamScanner

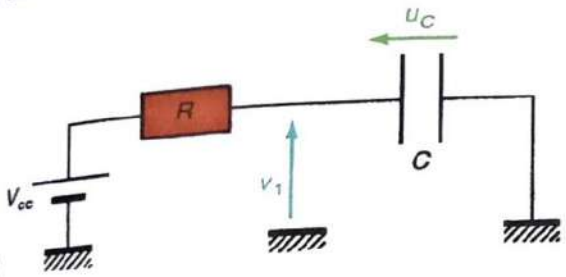
13.8 1/ La porte 1 a sa sortie au niveau haut, $v_1 < V_b$ d'après la caractéristique de transfert (figure a).



(a)

2/ *Étude de la première phase*

a/ Le circuit de charge est représenté sur la figure b.



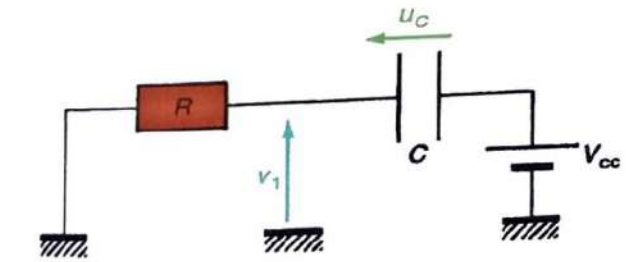
(b)

b/ Le condensateur se charge ; u_C augmente. Or $v_1 = u_C$, donc v_1 augmente.

c/ Juste avant le premier basculement, $v_1 = V_b$ et $u_C = v_1 = V_b$.

3/ *Étude de la deuxième phase*

a/ Après le basculement, $v_2 = 0$ et $v_S = V_{cc}$; d'où le circuit de décharge du condensateur de la figure c.



(c)

b/ Juste après le premier basculement, $u_C = V_b$, car u_C est une fonction continue du temps. Or $v_1 = u_C + V_{cc}$; d'où $v_1 = V_b + V_{cc}$ juste après le premier basculement.

c/ Si cette phase durait indéfiniment, l'intensité dans le circuit tendrait vers 0 et u_C tendrait vers $-V_{cc}$. Ainsi, la tension aux bornes du condensateur passerait de la valeur $V_b + V_{cc}$ à $-V_{cc}$: la tension diminuant, il s'agit bien d'une décharge du condensateur. Or $v_1 = u_C + V_{cc}$; comme u_C diminue, v_1 diminue donc au cours de la deuxième phase.

d/ Juste avant le deuxième basculement des portes :

$$v_1 = V_b ; \quad u_C = v_1 - V_{cc} = V_b - V_{cc}.$$

4/ *Étude de la troisième phase*

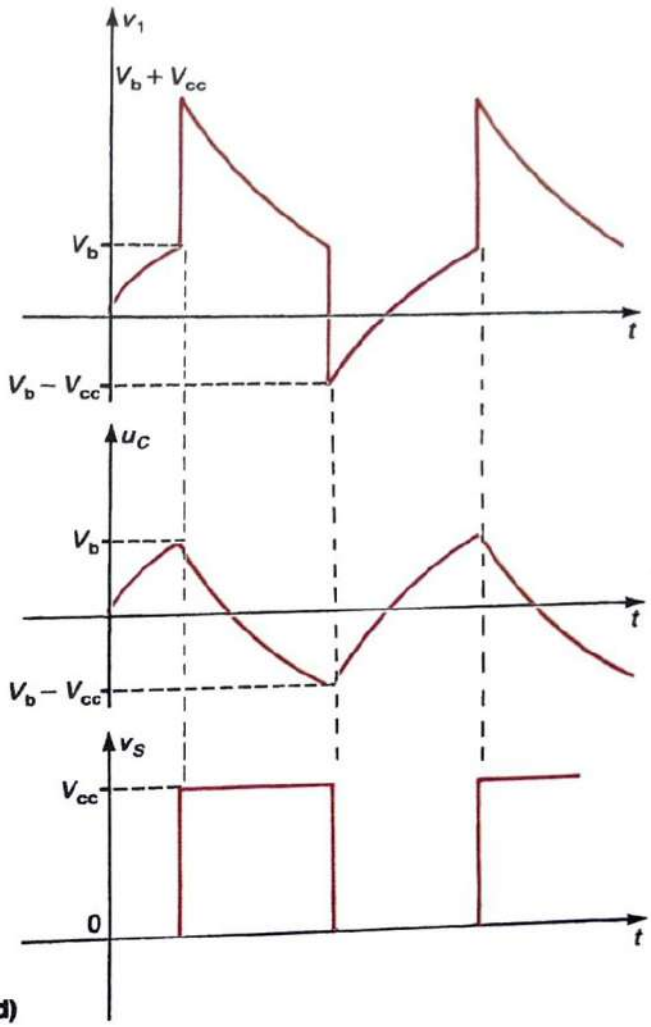
a/ Le circuit de charge du condensateur est le même que celui de la première phase (figure b).

b/ Juste après le deuxième basculement, $u_C = V_b - V_{cc}$. Or $v_1 = u_C$; d'où $v_1 = V_b - V_{cc}$ à cet instant.

c/ Au bout d'un temps infini, $u_C = V_{cc}$; u_C croît de la valeur $V_b - V_{cc}$ à V_{cc}. Il s'agit d'une décharge du condensateur.

d/ A la fin de la troisième phase, $v_1 = V_b$; les portes basculent.

5/ Les représentations de v_1, u_C et v_S en fonction du temps sont données par la figure d.



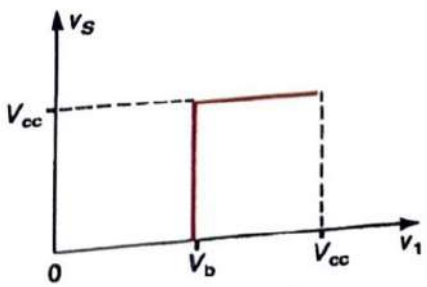
(d)

6/ L'allure des oscillogrammes est identique à celle des courbes établies dans le cours. En fait, il s'agit globalement du même montage. Dans le schéma de l'exercice, on a simplement permuté les deux inverseurs logiques.

13.9 Les potentiels de sortie des deux inverseurs logiques, v_S et v_2, ne peuvent valoir que 0 ou V_{cc} :

- si $v_S = V_{cc}$, alors $v_2 = 0$ et $v_1 > V_b$;
- si $v_S = 0$, alors $v_2 = V_{cc}$ et $v_1 < V_b$.

D'où la caractéristique de transfert de l'ensemble des deux inverseurs (figure).

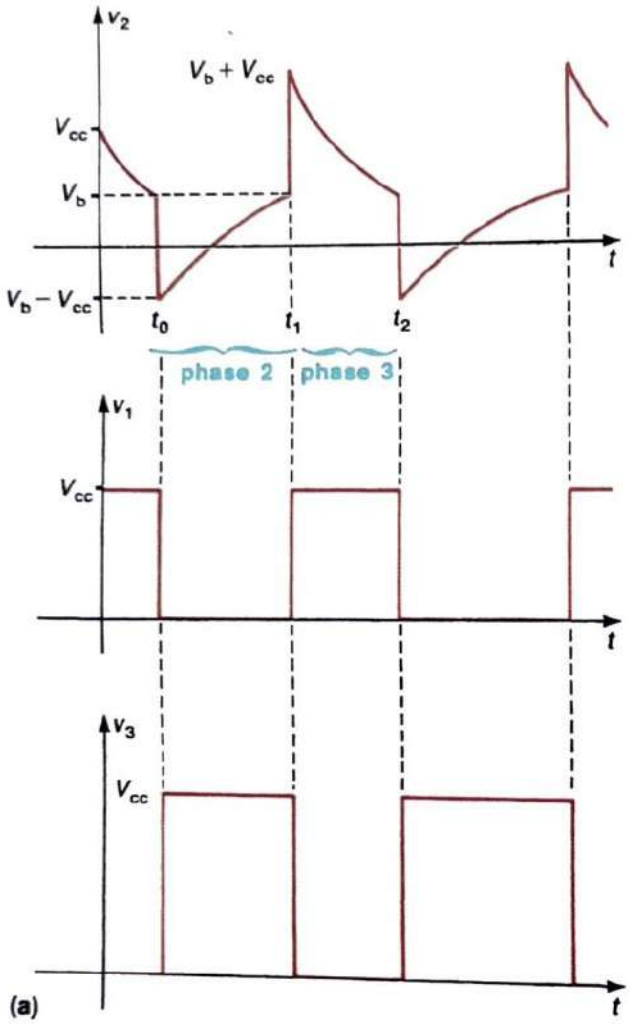


Scanné avec CamScanner

EXERCICES

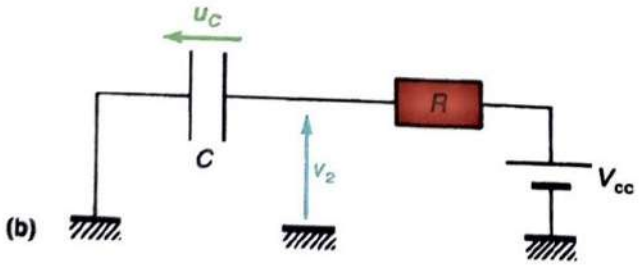
13.10 1/ A l'instant $t = 0$, $v_S = 0$. La tension de sortie v_1 de l'inverseur ne peut valoir que 0 ou V_{cc}. Prenons $v_1 = V_{cc}$, car la sortie du dernier inverseur est à 0.
Le condensateur est déchargé, d'où $v_2 = V_{cc}$.

2/ L'allure des chronogrammes est donnée par la figure a.



3/ Calcul de la période.

• Le circuit équivalent pendant la phase 2 est donné par la figure b.



Nous en déduisons :

$$u_C = Ae^{\,t/RC} - V_{cc} \quad \text{et} \quad v_2 = -u_C = V_{cc} - Ae^{\,t/RC}.$$

Or :

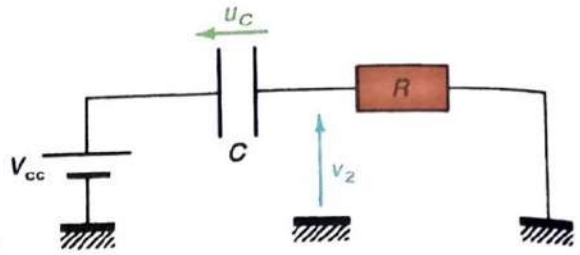
— à $t = t_0$, $v_2 = V_b - V_{cc} = V_{cc} - Ae^{\,t_0/RC}$, soit :

$$A = (2V_{cc} - V_b)e^{\,t_0/RC};$$

— à $t = t_1$, $v_2 = V_b$; d'où $V_b = V_{cc} + (V_b - 2V_{cc})e^{(t_0 - t_1)/RC}$, soit :

$$t_1 - t_0 = RC \ln \frac{2V_{cc} - V_b}{V_{cc} - V_b}.$$

• Le circuit équivalent pendant la phase 3 est donné par la figure c.



Nous en déduisons :

$$u_C = A'e^{\,t/RC} + V_{cc} \quad \text{et} \quad v_2 = V_{cc} - u_C = -A'e^{\,t/RC}.$$

Or :

— à $t = t_1$, $v_2 = V_b + V_{cc} = -A'e^{\,t_1/RC}$, soit :

$$A' = (V_b + V_{cc})e^{t_1/RC};$$

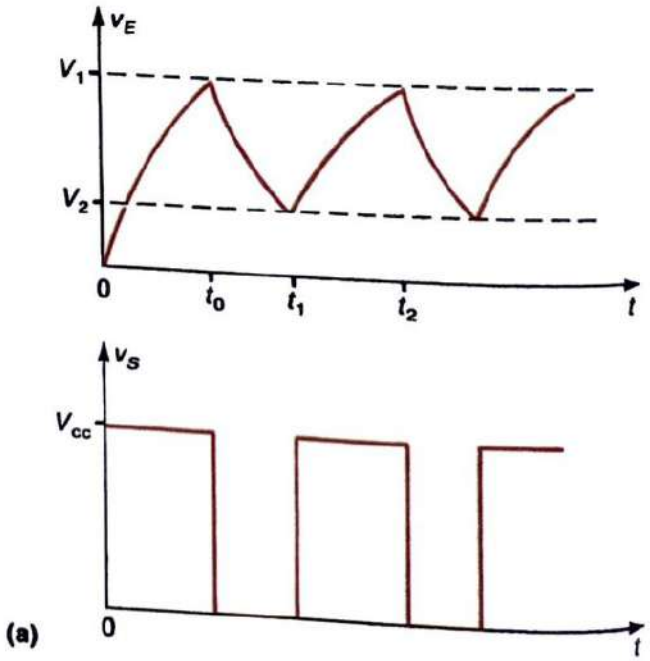
— à $t = t_2$, $v_2 = V_b$; d'où $V_b = (V_b + V_{cc})e^{(t_1 - t_2)/RC}$, soit :

$$t_2 - t_1 = RC \ln \frac{V_b + V_{cc}}{V_b}.$$

• Si $V_b = \frac{V_{cc}}{2}$, $t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = RC\ln 3$; d'où : $T = 2RC \ln 3$.

13.11 1/ Si v_E croît de 0 à V_1, v_S reste égale à V_{cc}. La sortie de l'inverseur bascule ensuite à 0 et reste à cette valeur lorsque v_E croît de V_1 à V_{cc}.
Si v_E décroît de V_{cc} à V_2, v_S reste égale à 0. L'inverseur bascule lorsque v_E continue à diminuer. Ainsi, le deuxième basculement ne se produit pas pour $v_E = V_1$, mais pour $v_E = V_2 < V_1$. Il en résulte un phénomène de retard, d'où le terme d'« hystérésis » qui signifie retard.

2/ Étude du multivibrateur. Dans une première phase, le condensateur se charge ; v_E croît jusqu'à V_1, car $v_S = V_{cc}$. Puis v_E recommence à croître jusqu'à V_1 (figure a).



Calcul de la période :

• De t_0 à t_1 : $v_E = Ae^{t/RC}$. Or, à $t = t_0$, $v_E = V_1$ et à $t = t_1$, $v_E = V_2$; d'où :

$$A = V_1 e^{t_0/RC} \quad \text{et} \quad V_2 = V_1 e^{(t_0 - t_1)/RC},$$

soit :

$$t_1 - t_0 = RC \ln \frac{V_1}{V_2}.$$

• De t_1 à t_2 : $v_E = A' e^{t/RC} + V_{cc}$. Or, à $t = t_1$, $v_E = V_2$ et à $t = t_2$, $v_E = V_1$; d'où :

$$A' = (V_2 - V_{cc}) e^{t_1/RC} \quad \text{et} \quad V_1 = (V_2 - V_{cc}) e^{(t_1 - t_2)/RC},$$

soit :

$$t_2 - t_1 = RC \ln \frac{V_{cc} - V_2}{V_{cc} - V_1}.$$

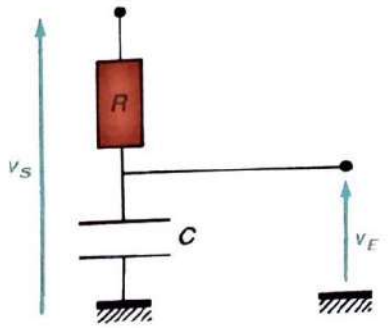
Il vient :

$$T = t_2 - t_0 = RC \ln \frac{V_1 (V_{cc} - V_2)}{V_2 (V_{cc} - V_1)}.$$

Avec $V_1 = 2{,}5$ V, $V_2 = 0{,}9$ V et $V_{cc} = 4{,}6$ V, nous obtenons $T = 1{,}6RC$.

Remarque importante : La cellule (R, C) est un intégrateur (*cf.* classe de Première). Si RC est très inférieur à T, l'intégrateur est quasiment parfait, et :

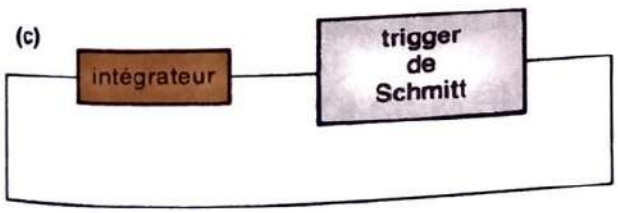
$$v_E = \frac{1}{RC} \int v_S \, dt + \text{Cte} \text{ (figure b)}.$$



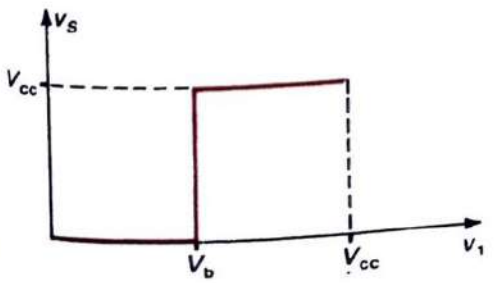
(b)

Pour obtenir un multivibrateur astable, il suffit de réaliser le système « bouclé » représenté sur la figure c. De nombreux dispositifs qui réalisent des multivibrateurs astables fonctionnent sur ce principe. Le sens du cycle d'hystérésis doit être choisi convenablement.

(c)



13.12 1/ La caractéristique de transfert de l'ensemble des deux inverseurs est donnée par la figure a.



(a)

2/ Selon l'état de sortie, v_S est égal à V_{cc} ou à 0. Calculons v_1 en fonction de v_f et de v_S. Soit I l'intensité du courant circulant dans R_1 et R_2 : il vient :

$$v_S - v_f = (R_1 + R_2) I \quad \text{et} \quad v_1 - v_f = R_1 I ;$$

d'où :

$$v_1 = v_f \frac{R_2}{R_1 + R_2} + v_S \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

• Lorsque v_E est faible, v_1 est faible et $v_1 < V_2$: nous avons donc $v_S = 0$, et la relation entre v_1 et v_f s'écrit :

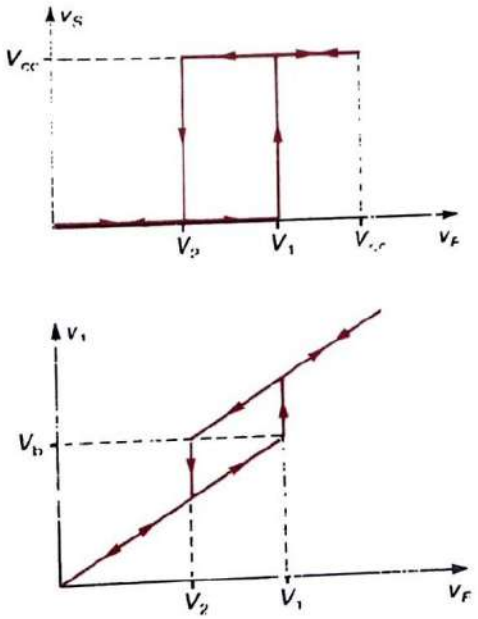
$$v_1 = v_f \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Donc, pour $v_1 = V_2$: $v_f = V_2 \dfrac{R_1 + R_2}{R_2} = v_+$.

• Lorsque v_E atteint v_+, les deux inverseurs basculent, et la nouvelle relation entre v_1 et v_f s'écrit :

$$v_1 = v_f \frac{R_2}{R_1 + R_2} + V_{cc} \frac{R_1}{R_1 + R_2},$$

car $v_S = V_{cc}$. La sortie reste dans cet état lorsque v_E continue à croître jusqu'à V_1 (figure b).



(b)

• Lorsque v_E décroît, v_1 décroît jusqu'à $v_E = v_-$ tel que :

$$v_- = V_2 \frac{R_2}{R_1 + R_2} + V_{cc} \frac{R_1}{R_1 + R_2},$$

soit :

$$v_- = V_+ \frac{R_1 + R_2}{R_2} - V_{cc} \frac{R_1}{R_2}.$$

Les deux inverseurs basculent, et nous nous retrouvons dans le cas $v_1 = V_+$ (figure b).

Si $V_+ = \dfrac{V_{cc}}{2}$, il vient : $v_- = \dfrac{V_{cc}}{2} \dfrac{R_1 - R_2}{R_2}$ et $v_+ = \dfrac{V_{cc}}{2} \dfrac{R_2 - R_1}{R_2}$.

Centre du cycle : $\dfrac{V_+ + V_-}{2} = \dfrac{V_{cc}}{2}$.

Largeur du cycle : $v_+ - v_- = V_{cc} \dfrac{R_1}{R_2}$.

Remarque : On doit choisir $R_2 > R_1$, car v_- doit être positif pour des circuits HC MOS.

Scanné avec CamScanner

14 OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES FORCÉES

14.1 courant alternatif sinusoïdal

14.1.1 définition

Un courant alternatif sinusoïdal, déjà rencontré à propos des oscillations libres d'un circuit (L, C) dont la résistance est négligeable (*cf.* 12.2), est un courant dont l'intensité i est une fonction sinusoïdale du temps, c'est-à-dire de la forme :

$$i = I_m \cos(\omega t + \varphi),$$

où I_m est l'intensité maximale du courant, ou amplitude de l'intensité, $(\omega t + \varphi)$, la phase à la date t et φ, la phase à l'instant $t = 0$.

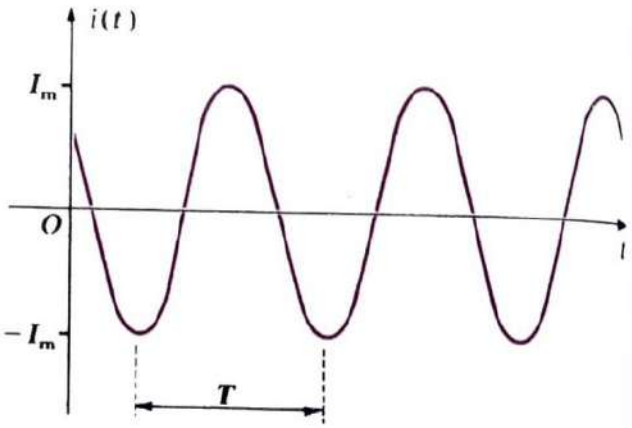
Un choix convenable de l'origine des dates permet de prendre $\varphi = 0$ et, dans ce cas, nous aurons plus simplement :

$$i = I_m \cos \omega t.$$

La figure 1 donne la représentation graphique de la fonction $i(t)$. Nous savons qu'une telle fonction est périodique, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ et de fréquence $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$.

En classe de Seconde, nous avons vu que la fréquence du courant débité par les centrales d'E.D.F. était 50 Hz. Il en est de même pour les courants industriels européens. Les courants dits téléphoniques de hautes fréquences (jusqu'à 30 MHz) sont aussi des courants alternatifs sinusoïdaux, modulés pour reproduire les sons audibles.

Remarque : Nous admettrons, comme pour un courant continu, que l'intensité est la même, à chaque instant, en tous les points d'un circuit électrique ne comportant pas de dérivations et parcouru par un courant alternatif sinusoïdal. En fait, cette propriété cesse d'être vérifiée pour les courants dont la fréquence atteint ou dépasse quelques dizaines de MHz.



1. ***Variations de l'intensité d'un courant alternatif sinusoïdal :***

$$i = I_m \cos(\omega t + \varphi).$$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ ***est la période du courant.***

Scanné avec CamScanner

14.1.2 intensité et tension efficaces

Depuis la classe de Seconde, nous savons que les ampèremètres et voltmètres utilisés en alternatif mesurent respectivement l'intensité efficace du courant et la tension efficace aux bornes d'un dipôle.
D'autre part, nous avons déjà vu que la tension efficace U et la tension maximale U_m d'un courant sinusoïdal étaient liées par la relation :

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}.$$

Nous avons une relation analogue entre intensité efficace I et intensité maximale I_m :

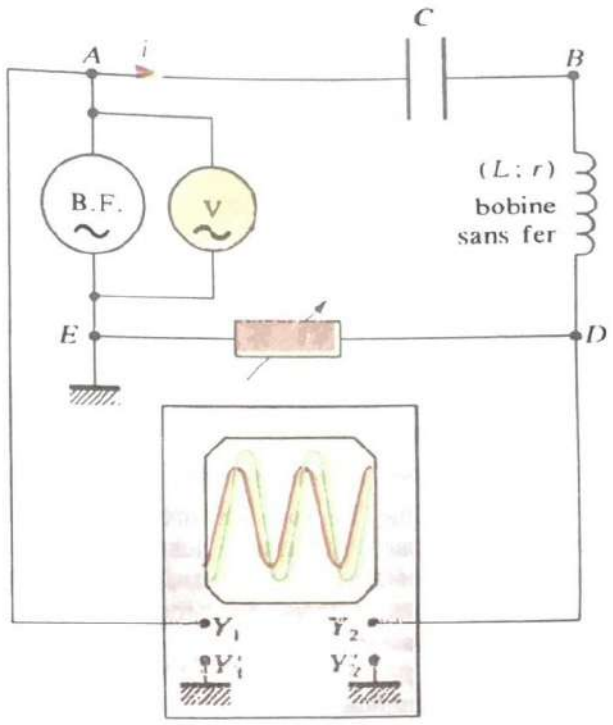
$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Nous reviendrons plus en détail, au chapitre suivant, sur ces relations entre grandeurs efficaces et grandeurs maximales. Retenons :

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Remarque : Lorsqu'on dit que la tension du secteur est 220 V (ou 230 V dans certaines régions), c'est d'une grandeur efficace qu'il s'agit. La valeur maximale de la tension (encore appelée *tension de crête*) est :

$$220\sqrt{2} = 311 \text{ V}.$$



2. Sur la voie Y_1, on visualise la tension délivrée par le générateur B.F. (courbe bleue). Sur la voie Y_2, on visualise $u = ri$, tension proportionnelle à l'intensité du courant dans le circuit (courbe rouge).

14.2 réponse d'un circuit (R, L, C) à une excitation sinusoidale

Réalisons le circuit schématisé sur la figure 2. Le générateur B.F. impose, à ses bornes, une tension sinusoïdale $u = u_{AE}$ d'amplitude U_m et de pulsation ω. Étudions la réponse de ce circuit série.

14.2.1 oscillations forcées

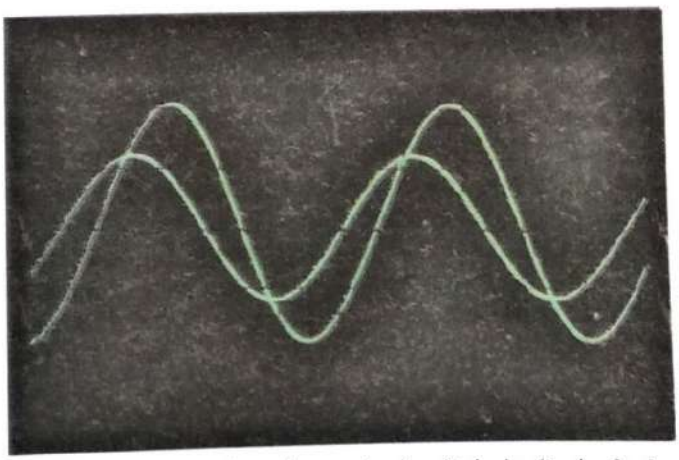
Un oscillographe bicourbe permet de visualiser à la fois la tension u_{AE} imposée :

[branchement $(Y_1, Y'_1) \longleftrightarrow (A, E)$]

et la tension u_{DE} :

[branchement $(Y_2, Y'_2) \longleftrightarrow (D, E)$].

Or $u_{DE} = r'i$; nous observons donc, sur la voie 2, un signal proportionnel à l'intensité du courant dans le circuit.
Sur l'écran apparaissent *deux sinusoïdes, de même période et décalées l'une par rapport à l'autre suivant l'horizontale* (*photo* 3) : une des tensions présente une phase (on dit encore un *déphasage*) par rapport à l'autre (et vice-versa).
Le générateur B.F. impose la pulsation ω, qui est différente, en général, de la pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ du circuit (*cf.* chap. 12); on dit que l'on a des **oscillations forcées**.



3. Oscillogramme observé avec le circuit de la figure 2. Les variations de u et de i sont sinusoïdales et ont même période.

Scanné avec CamScanner

14.2.2 résonance d'intensité

Le générateur B.F. délivre une tension dont la fréquence et par conséquent la pulsation sont réglables. Faisons varier ω, tout en maintenant constante la tension efficace U délivrée par le générateur (l'amplitude U_m de la tension reste donc constante).

Lorsque ω croît, nous observons deux sinusoïdes de même pulsation dont le décalage horizontal varie. D'autre part, l'amplitude de la sinusoïde visualisant $u = ri$ passe par un maximum, puis décroît. Ce maximum est atteint quand la pulsation ω imposée par le générateur est égale à $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et, à ce moment-là, la phase de i par rapport à u est nulle (*fig.* 4).

Ainsi, nous pouvons déduire de cette expérience que :

— l'amplitude I_m de l'intensité est fonction de ω. Cette amplitude passe par un maximum quand la pulsation ω imposée par le générateur est en accord avec la pulsation ω_0 des oscillations propres du circuit (L, C) : nous dirons qu'il y a **résonance d'intensité**;

— la phase de i par rapport à u est fonction de ω et s'annule à la résonance.

Ce terme de résonance a son origine dans l'acoustique : on parle de résonance d'une salle pour caractériser le fait que certains sons y sont particulièrement amplifiés. Nous dirons que le circuit est un **résonateur** et que le générateur est un **excitateur**.

• **A la résonance d'intensité dans un circuit série (R, L, C) alimenté sous une tension U alternative sinusoïdale donnée :**

—la pulsation du courant délivrée par le générateur est égale à la pulsation propre $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, caractéristique du circuit;

—l'amplitude de l'intensité et sa valeur efficace sont maximales;

—l'intensité et la tension aux bornes du circuit sont en phase.

14.3 étude théorique

14.3.1 position du problème

Connaissant les caractéristiques du circuit (capacité C, inductance L et résistance $R = r + r'$) et celles de la tention $u(t)$ imposée (pulsation ω et amplitude U_m), nous allons calculer les paramètres qui caractérisent l'intensité $i(t)$ du courant sinusoïdal.

Nous venons de voir expérimentalement que tension et intensité sont des fonctions sinusoïdales qui ont la même pulsation ω et présentent généralement une différence de phase.

Désignons par φ *la phase de la tension par rapport à l'intensité.* Ainsi :

$$i = I_m \cos \omega t$$

et :
$$u = U_m \cos(\omega t + \varphi).$$

La tension instantanée $u(t) = u_{AE}$ (*fig.* 2) se répartit à chaque instant aux bornes des différents dipôles du circuit (R, L, C) :

$$u_{AE} = u_{AB} + u_{BD} + u_{DE}.$$

Explicitons les termes de cette somme :

— aux bornes du conducteur ohmique (D, E) :

$$u_{DE} = u_R = r'i = r'I_m \cos \omega t;$$

— aux bornes de la bobine (B, D) :

$$u_{BD} = u_L = ri + L\frac{di}{dt}$$

$$= rI_m \cos \omega t + L\omega I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right);$$

— aux bornes du condensateur (A, B) :

$$u_{AB} = u_C = \frac{q_A}{C} = \frac{q}{C};$$

or $i = \dfrac{dq}{dt}$; q est donc la primitive de i qui s'annule pour $t = 0$ (en supposant le condensateur déchargé à l'origine des dates), soit :

$$q = \int_0^t i\, dt = \frac{I_m}{\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$

et :
$$u_{AB} = \frac{I_m}{C\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

La tension imposée aux bornes de l'association en série vaut donc :

$$u = (r + r')i + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i dt;$$

d'où, avec $R = r + r'$:

$$u = RI_m \cos \omega t + L\omega I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{I_m}{C\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Nous devons ainsi faire la somme de trois fonctions sinusoïdales de même pulsation.

14.3.2 construction de Fresnel

Plaçons-nous à la date $t = 0$ et faisons correspondre un vecteur à chaque terme de la somme (voir *compléments mathématiques* en fin de chapitre). Nous obtenons la figure 5, où :

- $\overrightarrow{MN}$ représente la tension u_R :
$$u_R = RI_m \cos \omega t;$$
- $\overrightarrow{NP}$ représente la tension u_L :
$$u_L = L\omega I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right);$$
- $\overrightarrow{PQ}$ représente la tension u_C :
$$u_C = \frac{I_m}{C\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right);$$
- $\overrightarrow{MQ}$ représente la tension u :
$$u = U_m \cos(\omega t + \varphi).$$

Scanné avec CamScanner

Ces quatre vecteurs sont tels que :

$$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ}.$$

La construction géométrique et les relations dans un triangle rectangle permettent de calculer immédiatement :

$$MQ = \sqrt{MN^2 + (NP - PQ)^2},$$

soit :

$$U_m = I_m \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}.$$

Nous obtenons également :

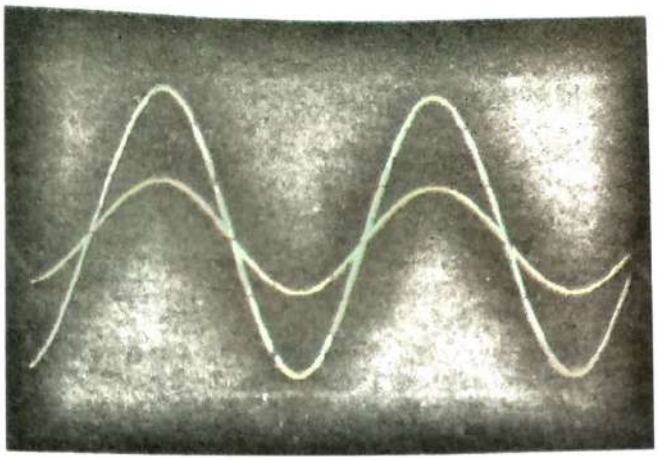
$$\tan \varphi = \frac{NQ}{MN} \quad \text{et} \quad \cos \varphi = \frac{MN}{MQ},$$

soit :

$$\begin{cases} \tan \varphi = \dfrac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R} \\ \cos \varphi = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}}. \end{cases}$$

Remarque : L'angle φ représentant la phase de u par rapport à i, on dit que u est en avance de φ sur i. Il revient au même de dire que i est en retard de φ sur u, et l'on pourra écrire, en déplaçant l'origine des dates :

$$i = I_m \cos(\omega t - \varphi) \quad \text{et} \quad u = U_m \cos \omega t.$$



4. *Lorsque $\omega = \omega_0$, tension et intensité sont en phase et I_m est maximale; il y a résonance d'intensité.*

14.3.3 caractéristiques d'un circuit série (*R*, *L*, *C*)

1. Impédance

Nous venons d'établir la relation :

$$U_m = I_m \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}.$$

• Soit un circuit alimenté sous une tension alternative sinusoïdale d'amplitude U_m et de pulsation ω. I_m étant l'amplitude de l'intensité du courant, le rapport $\dfrac{U_m}{I_m}$ est appelé impédance du circuit et noté Z. Pour un circuit série (R, L, C) :

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}.$$

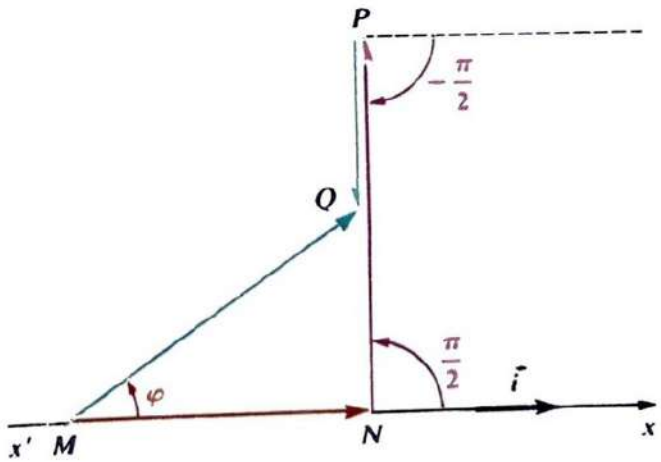
Nous retiendrons qu'en courant alternatif sinusoïdal, l'impédance d'un dipôle dépend de la pulsation du courant.

R s'exprimant en ohms (Ω), L en henrys (H), C en farads (F) et ω en radians par seconde (rad.s^{-1}), l'unité d'impédance est l'**ohm**.

L'inverse $Y = \dfrac{1}{Z}$ de l'impédance est appelé **admittance** du dipôle : $Y = \dfrac{I_m}{U_m}$.

L'unité d'admittance est le **siemens** (symbole : **S**).

La différence $L\omega - \dfrac{1}{C\omega}$ est appelée **réactance** du circuit;



5. *Construction de Fresnel. On a :*

$$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ},$$

avec : $MQ = U_m$, $MN = RI_m$,

$$NP = L\omega I_m, \quad PQ = \frac{I_m}{C\omega}.$$

Scanné avec CamScanner

$L\omega$ représente la réactance d'induction, $\frac{1}{C\omega}$ la réactance de capacité. Une réactance se mesure en ohms.

Remarque : Nous avons défini les grandeurs efficaces par :

$$I=\frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad U=\frac{U_m}{\sqrt{2}}.$$

Nous avons donc également : $Z=\frac{U_m}{I_m}=\frac{U}{I}$.

L'impédance est déterminée par de simples mesures d'intensité et de tension efficaces à l'aide d'un ampèremètre et d'un voltmètre.

2. Phase

Les expressions de tan φ et de cos φ ont été établies à la fin du paragraphe 14.3.2. Celle de cos φ s'écrit encore, en utilisant l'impédance Z du circuit : $\cos\varphi=\frac{R}{Z}$.

- Dans un circuit série (R, L, C) en régime alternatif sinusoïdal de pulsation ω, la phase φ de la tension aux bornes par rapport à l'intensité obéit aux relations :

$$\cos\varphi=\frac{R}{Z} \quad \text{et} \quad \tan\varphi=\frac{L\omega-\frac{1}{C\omega}}{R}.$$

Notons que l'expression de tan φ peut aussi s'écrire :

$$\tan\varphi=\frac{L}{R}\left(\frac{\omega^2-\omega_0^2}{\omega}\right), \quad \text{avec } \omega_0^2=1/LC.$$

- Si $\varphi=0$ (résonance d'intensité), la tension et l'intensité sont en phase et $\omega=\omega_0$ (*fig.* 6).

- Si $\varphi>0$, la tension est en avance sur l'intensité et $\omega>\omega_0$, (*fig.* 7). L'effet d'inductance l'emporte sur l'effet de capacité $\left(L\omega>\frac{1}{C\omega}\right)$.

- Si $\varphi<0$, la tension est en retard sur l'intensité et $\omega<\omega_0$, (*fig.* 8). L'effet de capacité l'emporte sur l'effet d'inductance $\left(\frac{1}{C\omega}>L\omega\right)$.

14.3.4 étude de quelques cas particuliers

- Dans le cas d'une bobine d'inductance L et de résistance r : $Z=\sqrt{L^2\omega^2+r^2}$ et $\tan\varphi=\frac{L\omega}{r}$.

L'impédance Z croît avec ω (*fig.* 9) et l'intensité i est en retard de phase sur la tension appliquée (tan $\varphi>0$). Ces résultats illustrent la loi de Lenz. Le phénomène d'auto-induction a pour effet de s'opposer aux variations de l'intensité du courant, et cela d'autant plus que ces variations sont plus rapides (ω grand).
Notons que lorsque $r\longrightarrow 0$ (inductance pure) :

$$\varphi\longrightarrow+\frac{\pi}{2}\ (\tan\varphi\longrightarrow+\infty) \quad \text{et} \quad Z\longrightarrow L\omega.$$

- Dans le cas d'un condensateur de capacité C :

$$Z=\frac{1}{C\omega} \quad \text{et} \quad \varphi=-\frac{\pi}{2}$$

(cos $\varphi=0$ et tan $\varphi\longrightarrow-\infty$, car $L=R=0$).
L'impédance décroît avec ω (*fig.* 9) et l'intensité est en quadrature avance sur la tension.
Lorsque $\omega\longrightarrow 0$, $Z\longrightarrow\infty$, ce qui illustre le fait que lorsqu'un circuit est alimenté par un générateur de tension continue, un courant ne peut pas s'établir dans une branche qui comporte un condensateur.

- Enfin, pour un conducteur ohmique de résistance R :

$$Z=R \quad \text{et} \quad \varphi=0.$$

L'intensité et la tension sont en phase, l'impédance étant simplement égale à la résistance.

14.4 étude de la résonance d'intensité

14.4.1 valeur des grandeurs caractéristiques

La théorie est-elle en accord avec les résultats expérimentaux, à savoir :

— résonance d'intensité pour $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$,

— déphasage nul à la résonance ?

- La résonance d'intensité a lieu lorsque l'amplitude de l'intensité $I_m=\frac{U_m}{Z}$ passe par un maximum, c'est-à-dire lorsque l'impédance $Z=\sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}$ est minimale, soit, pour : $L\omega-\frac{1}{C\omega}=0$;

d'où : $LC\omega^2=1$ et $\omega=\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$.

- Montrons que le déphasage est nul à la résonance. Il vient, avec $\omega=\omega_0$:

$$\tan\varphi=\frac{L\omega_0-\frac{1}{C\omega_0}}{R}=0 \quad \text{et} \quad \cos\varphi=\frac{R}{Z}=1;$$

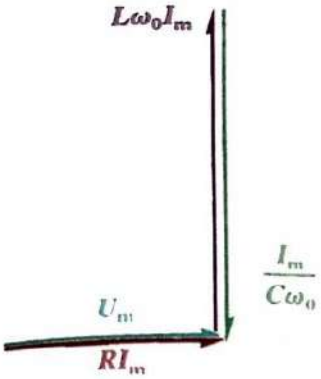
d'où : $\varphi=0$.

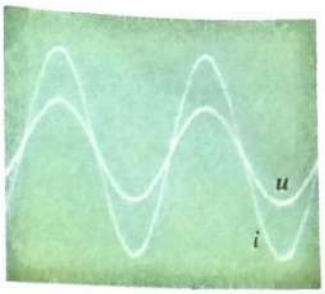
- Dans un circuit série (R, L, C), à la résonance d'intensité :

$\omega=\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$, $Z=R$, $\varphi=0$, $I_m(\omega_0)=\frac{U_m}{R}$ et $I(\omega_0)=\frac{U}{R}$

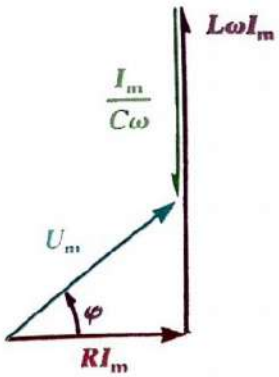
$I_m(\omega_0)$ est l'amplitude maximale et $I(\omega_0)$ l'intensité efficace maximale dans le circuit pour une tension U efficace imposée à ses bornes.

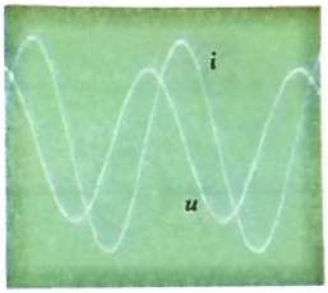
Scanné avec CamScanner



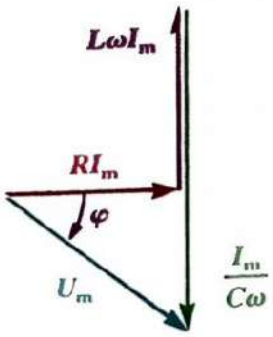


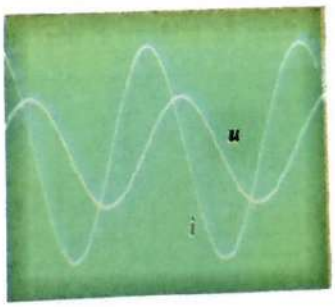
6. *Les effets de capacité et d'inductance se compensent : $\varphi = 0$ et $\omega = \omega_0$; c'est la résonance d'intensité; tension et intensité sont en phase.*



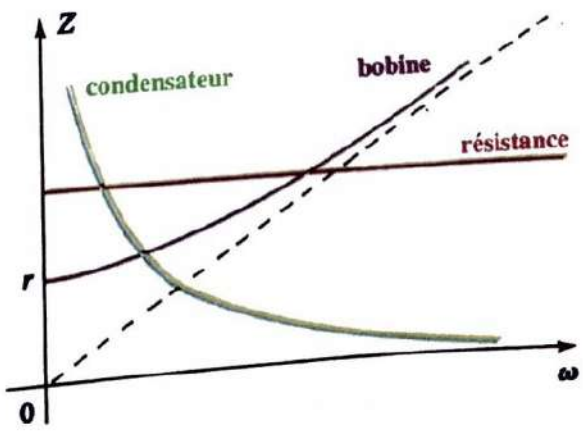


7. *L'effet d'inductance l'emporte sur l'effet de capacité : $\varphi > 0$ et $\omega > \omega_0$; la tension est en avance sur l'intensité.*





8. *L'effet de capacité l'emporte sur l'effet d'inductance : $\varphi < 0$ et $\omega < \omega_0$; la tension est en retard sur l'intensité.*



9. *Variation de l'impédance en fonction de ω dans le cas d'un condensateur, celui d'une bobine et celui d'une résistance.* ▶

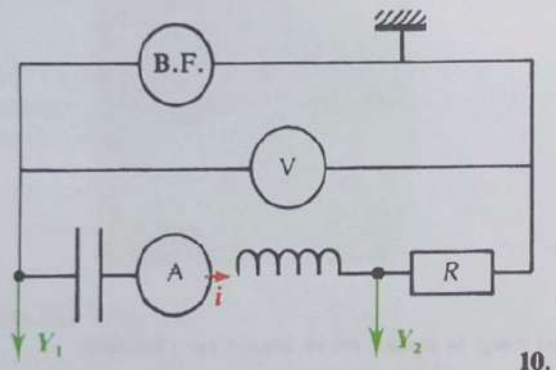
Scanné avec CamScanner

fiche expérimentale

I. DÉTERMINATION DE L'IMPÉDANCE ET DE LA PHASE D'UN CIRCUIT

1. *Détermination de l'impédance*

Réalisons le montage de la figure 10, où le circuit série (R, L, C), dont on se propose de déterminer l'impédance et la phase, est alimenté par un générateur variable B. F.



10.

Les mesures de l'intensité efficace I, obtenues en faisant varier la tension efficace U aux bornes du dipôle respectivement pour 100 Hz et 500 Hz, sont regroupées dans le tableau ci-dessous.

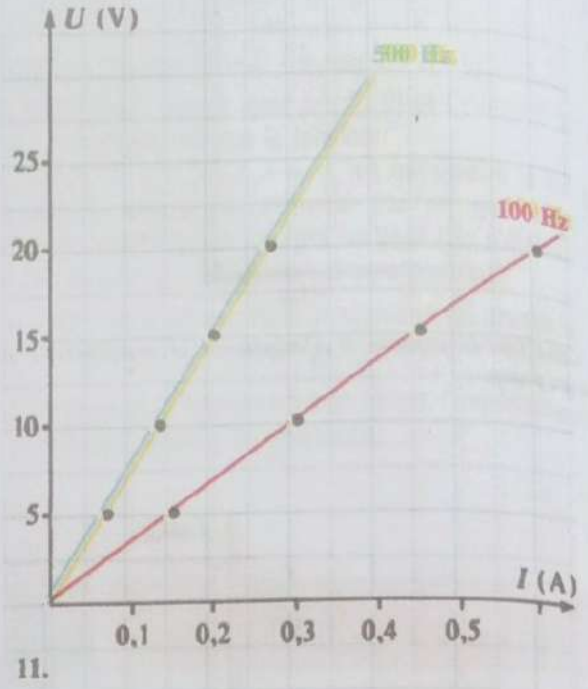
fréquence (Hz)	U (V)	5	10	15	20
100	I (A)	0,07	0,13	0,20	0,27
500	I (A)	0,15	0,30	0,45	0,60

A fréquence constante, le rapport $\frac{U}{I}$ est constant : c'est l'impédance Z du dipôle (A, B), égale à la pente de la droite correspondante (*fig.* 11). Nous obtenons :

- pour $f_1 = 100$ Hz, $Z_1 = \frac{15}{0,2} = 75\ \Omega$;
- pour $f_2 = 500$ Hz, $Z_2 = 33\ \Omega$.

Pour déterminer plus rapidement Z, nous pouvons utiliser un oscillographe, et mesurer U_m et I_m (connaissant R); nous obtenons :

$$Z = \frac{U_m}{I_m}.$$



11.

2. *Détermination de la phase*

Le générateur B. F. est réglé sur 500 Hz et le balayage de l'oscillographe, sur 0,5 ms.cm^{-1}. En Y_1 nous observons la tension u_1 aux bornes du circuit, en Y_2 la tension u_2 aux bornes de R, proportionnelle à l'intensité i (*fig.* 10).

- Vérifions tout d'abord que la fréquence est bien égale à 500 Hz. Une période occupe 4 cm sur l'écran (*photo* 12), donc :

$$T = 4 \times 0,5 = 2 \text{ ms},$$

soit :
$$f = \frac{1}{T} = 500 \text{ Hz}.$$

- A l'aide des boutons de réglage, centrons correctement les deux courbes sur l'écran.

Soit φ la phase de u_2 par rapport à u_1. Lorsqu'on se déplace sur l'axe des temps de gauche à droite, la courbe u_1 passe la première par un maximum (*photo* 12); u_1 est donc en avance de phase sur u_2. Autrement dit, u_2 est en retard de phase sur u_1; la phase φ est donc négative.

Le décalage temporel τ entre les deux courbes est proportionnel à φ. Comme un décalage d'une période T correspond à 2π, il vient :

$$|\varphi| = 2\pi \frac{\tau}{T}.$$

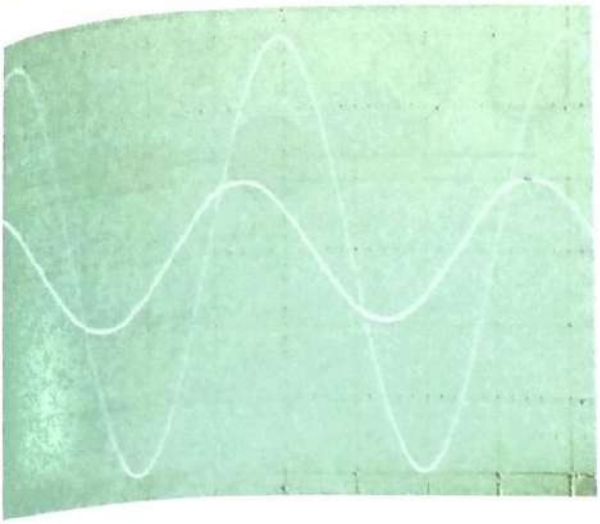
La mesure de τ donne 0,5 cm; d'où, la période T occupant 4 cm :

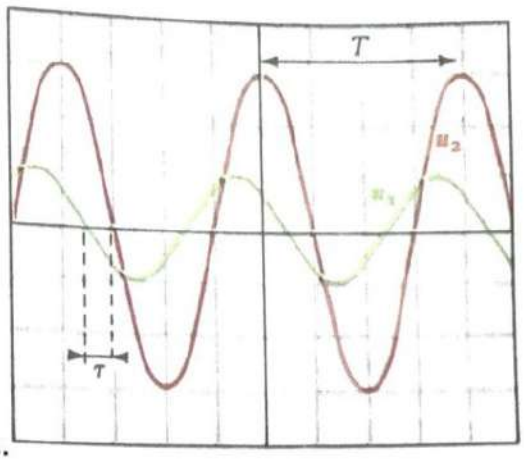
$$|\varphi| = \frac{\pi}{4} \text{ rd}.$$

Nous pourrons donc finalement écrire :

$$u = U_m \cos \omega t \quad \text{et} \quad i = I_m \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Scanné avec CamScanner





12.

APPLICATION 1

1/ Un conducteur ohmique de 2000 Ω est branché aux bornes d'un générateur imposant à ses bornes une tension sinusoïdale d'amplitude $U_m = 311$ V et de fréquence 50 Hz. Quelle est l'intensité efficace du courant dans le circuit?

2/ Quelle est la capacité du condensateur qui, branché aux bornes du générateur précédent, possède la même impédance que celle du conducteur ohmique?

3/ On associe en série les trois dipôles précédents : générateur, conducteur ohmique et condensateur. Calculer :

a/ l'impédance du circuit;
b/ l'intensité efficace du courant;
c/ la phase de la tension par rapport à l'intensité.

1/ Pour un conducteur ohmique, $Z = R$; d'où : $I_m = \dfrac{U_m}{Z}$,

soit : $$I_m = \frac{311}{2000} = 0{,}15 \text{ A}.$$

L'intensité efficace du courant est :

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad \text{soit} \quad I = 0{,}11 \text{ A}.$$

2/ Pour un condensateur, $Z = \dfrac{1}{C\omega}$; avec :

$$\omega = 2\pi f = 100\pi \text{ rad.s}^{-1},$$

il vient : $$\frac{1}{C\omega} = R, \quad \text{soit} \quad C = \frac{1}{R\omega} = 1{,}6 \ \mu\text{F}.$$

3a/ L'impédance de l'association en série conducteur ohmique-condensateur est égale à :

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}} = R\sqrt{2} = 2830 \ \Omega.$$

Remarquons que les impédances ne s'ajoutent pas.

b/ Il vient : $$I = \frac{U}{Z},$$

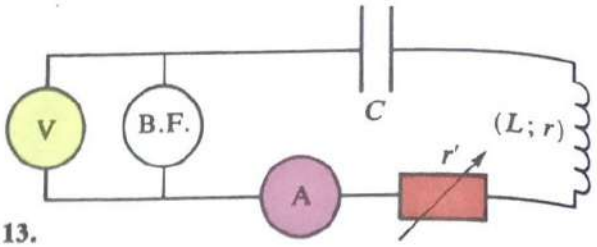
soit, avec $Z = 2830 \ \Omega$ et $U = \dfrac{U_m}{\sqrt{2}} = \dfrac{311}{\sqrt{2}} = 220$ V : $I = 0{,}08$ A.

c/ Enfin $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$, car $\tan\varphi = \dfrac{\dfrac{-1}{C\omega}}{R} = -1$.

Scanné avec CamScanner

14.4.2 courbe de résonance d'intensité

Plaçons dans le circuit schématisé sur la figure 13 un ampèremètre (voir *fiche expérimentale* II). Cet ampèremètre et le voltmètre mesurent respectivement l'intensité efficace I du courant dans le circuit et la tension efficace U aux bornes du générateur.
Faisons varier ω et, tout en maintenant U constante, relevons les différentes valeurs de I.
Les résultats sont regroupés dans la fiche expérimenale II. Avec les valeurs $C = 5\ \mu F$, $L = 0{,}1\ H$ et $R = 20\ \Omega$, nous obtenons la courbe tracée en vert. En prenant quelques points sur cette courbe, nous pouvons vérifier que la théorie est en accord avec l'expérience. Cette courbe met clairement en évidence le phénomène de résonance. Elle présente un maximum très prononcé pour $\omega = \omega_0$.



13.

Remarque : Il existe d'autres courbes de résonance. En particulier, si l'on étudie la tension efficace aux bornes du condensateur, cette dernière passe, dans certaines conditions, par un maximum pour la pulsation $\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{R^2}{2L^2}$. La résonance de tension aux bornes du condensateur a donc lieu pour $\omega \neq \omega_0$.

14.4.3 bande passante à trois décibels

La bande passante dite à « trois décibels (ou encore « à −3 db ») d'un circuit correspond aux pulsations pour lesquelles $I(\omega)$ est supérieure à $\frac{I(\omega_0)}{\sqrt{2}}$, $I(\omega_0)$ étant l'intensité efficace à la résonance.
Les pulsations limites ω_1 et ω_2 de cette bande sont donc telles que :

$$I(\omega_2) = I(\omega_1) = \frac{I(\omega_0)}{\sqrt{2}}.$$

$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ est la largeur de la bande passante à −3 db du circuit (R, L, C) considéré. Elle s'exprime en radians par seconde ou en hertz (si l'on donne $\Delta f = \Delta\omega/2\pi$).
Calculons la largeur de la bande passante. A la résonance, nous avons :

$$I(\omega_0) = \frac{U}{Z(\omega_0)} = \frac{U}{R}.$$

Les limites de la bande passante correspondent à :

$$I(\omega_1) = I(\omega_2) = \frac{I(\omega_0)}{\sqrt{2}},$$

soit :
$$\frac{U}{Z(\omega_1)} = \frac{U}{Z(\omega_2)} = \frac{U}{R\sqrt{2}},$$

ou encore :
$$Z^2(\omega_1) = Z^2(\omega_2) = 2R^2;$$

d'où, avec $Z(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$:

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = \pm R.$$


14. *Multimètre numérique réglé sur l'échelle des décibels* (db). *Les décibels correspondent à une échelle logarithmique et permettent de mesurer le rapport de deux grandeurs de même nature. On pourra ainsi exprimer une intensité (ou une tension) en décibels, une fois choisie une intensité (ou une tension) de référence. Par exemple, le rapport* $I(\omega_1)/I(\omega_0) = 1/\sqrt{2}$ *conduit, par l'intermédiaire des logarithmes, à la relation :*

$$I(\omega_1) - I(\omega_0) = -3 \text{ db}.$$

Scanné avec CamScanner

Les limites ω_1 et ω_2 de la bande passante sont donc les solutions positives des équations du second degré :

$$\begin{cases} LC\omega^2 + RC\omega - 1 = 0 & (1) \\ LC\omega^2 - RC\omega - 1 = 0. & (2) \end{cases}$$

La solution positive, pour l'équation (1), est :

$$\omega_1 = \frac{-RC + \sqrt{\Delta}}{2LC}, \quad \text{avec} \quad \Delta = R^2C^2 + 4LC.$$

La solution positive, pour l'équation (2), est :

$$\omega_2 = \frac{+RC + \sqrt{\Delta}}{2LC}.$$

Finalement, on obtient pour la largeur de la bande passante :

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} \quad \left(\text{ou } \Delta f = f_2 - f_1 = \frac{R}{2\pi L}\right).$$

La largeur de la bande passante ne dépend que des caractéristiques propres au circuit (R, L, C).

14.4.4 acuité de la résonance, facteur de qualité

Quelle est l'influence de la résistance du circuit sur l'allure de la courbe de résonance?
Dans la fiche expérimentale, nous avons tracé une autre courbe de résonance pour $R' = 100\ \Omega$ (courbe violette). Cette courbe est plus aplatie que la précédente; la résonance est moins prononcée, moins aiguë : elle est dite floue.
L'acuité de la résonance est caractérisée par le rapport :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f}, \quad \text{soit :} \quad Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}.$$

Q est appelé **facteur de qualité du circuit.** Ce facteur peut couramment prendre des valeurs supérieures à 10, et même atteindre 100. Nous dirons alors que le circuit est **sélectif** (*fig.* 15). Un tel circuit n'oscille de façon marquée que dans un domaine étroit de fréquences.
Si Q est de l'ordre de l'unité, le circuit est dit peu sélectif : il ne privilégie aucune fréquence (*fig.* 16).

En résumé :

- La bande passante d'un circuit série (R, L, C) caractérise la courbe de résonance. Elle correspond à la différence des pulsations ω_2 et ω_1 pour lesquelles :

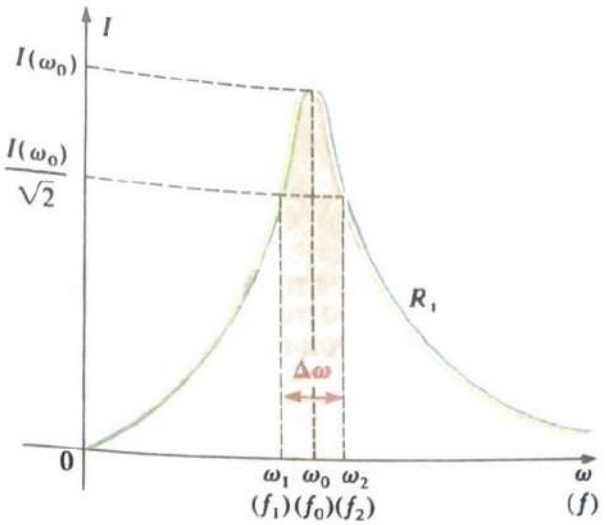
$$I(\omega_1) = I(\omega_2) = \frac{I(\omega_0)}{\sqrt{2}},$$

soit :

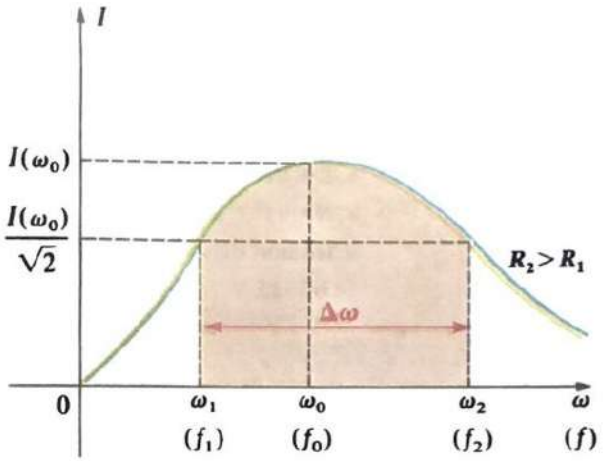
$$\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega = \frac{R}{L} \quad \text{ou} \quad \Delta f = \frac{R}{2\pi L}.$$

Le facteur de qualité du circuit est défini par :

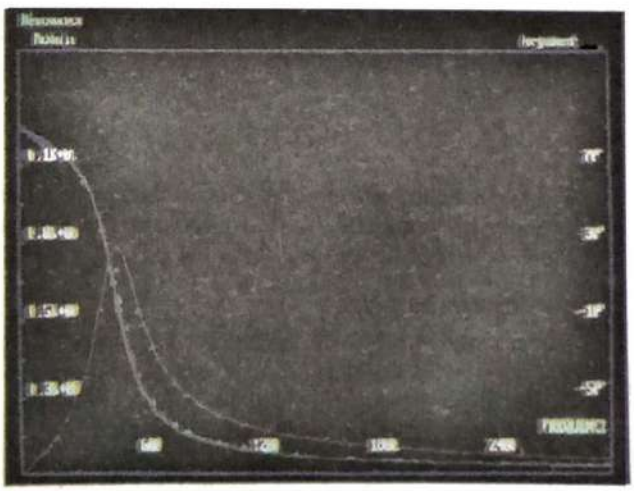
$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f}.$$



15. *Résonance aiguë. Le facteur de qualité est important.*



16. *Résonance floue. Le facteur de qualité est faible.*



17. *Une saisie automatique de l'intensité et de la tension dans un circuit (R, L, C), à l'aide d'un ordinateur et d'une interface (interface* CANDIBUS*), permet d'obtenir rapidement la courbe de résonance (en rouge) et la courbe de phase (en violet) en fonction de la fréquence.*

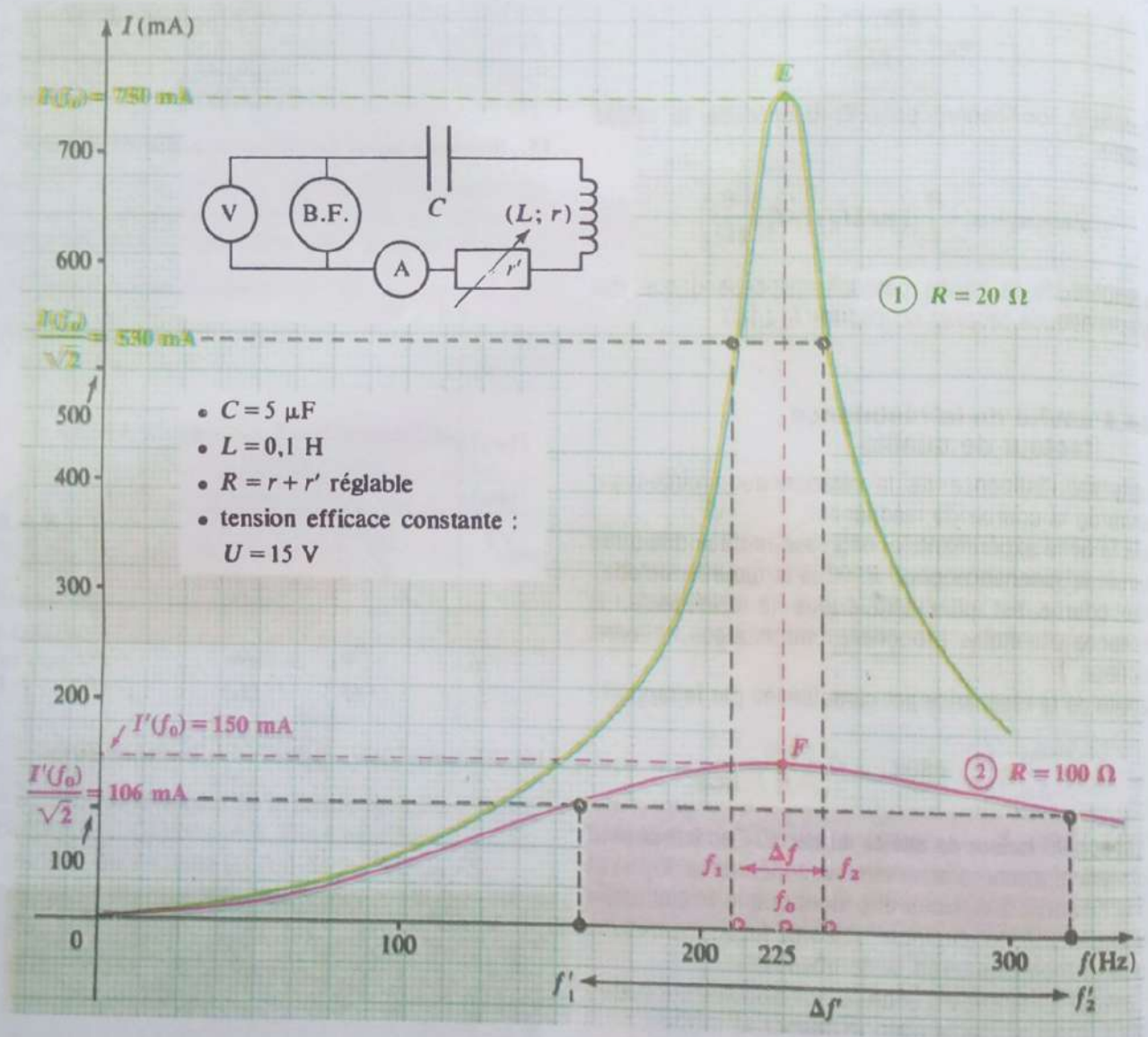
Scanné avec CamScanner

fiche expérimentale

II. ÉTUDE DE LA RÉSONANCE D'INTENSITÉ D'UN CIRCUIT SÉRIE (*R*, *L*, *C*)

Les courbes ci-dessous ont été obtenues expérimentalement; ce sont les courbes de réponse du circuit (*R*, *L*, *C*) considéré, pour deux valeurs distinctes de *R*.

L'intensité efficace est maximale, dans les deux cas, pour $f = 225$ Hz (valeur expérimentale). Or, théoriquement : $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 225{,}1$ Hz.



L'expérience confirme bien que la résonance a lieu lorsque la fréquence f des oscillations forcées est égale à la fréquence propre f_0 du circuit.

1. Première expérience

La résistance r' a été réglée de façon que $R = r + r' = 20\ \Omega$; la résonance est aiguë, et :

$$I(f_0) = \frac{U}{R} = \frac{15}{20} = 0{,}75 \text{ A}.$$

L'expérience confirme ce résultat (point E).

$$I(f_1) = I(f_2) = \frac{I(f_0)}{\sqrt{2}} = 0{,}53 \text{ A}.$$

La bande passante, mesurée sur la courbe expérimentale, est étroite :

$$\Delta f = f_2 - f_1 \approx 32 \text{ Hz} \quad (\Delta\omega \approx 200 \text{ rad.s}^{-1}).$$

Le facteur de qualité est égal à :

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{225}{32} \approx 7,$$

résultat expérimental en concordance avec la valeur théorique :

$$Q = \frac{2\pi L f_0}{R} \approx 7.$$

La résonance est aiguë.

Scanné avec CamScanner

2. Seconde expérience.

La résistance r' a été réglée de façon que $R = r + r' = 100\ \Omega$; la résonance est floue, et :

$$I'(f_0) = \frac{U}{R} = \frac{15}{100} = 0{,}15\ \text{A}.$$

L'expérience confirme ce résultat (point F).

$$I'(f_1) = I'(f_2) = \frac{I'(f_0)}{\sqrt{2}} = 0{,}105\ \text{A}.$$

La bande passante, mesurée sur la courbe expérimentale, est large :

$\Delta f' = f'_2 - f'_1 = 160$ Hz $\quad (\Delta\omega' \approx 1\,000\ \text{rad.s}^{-1})$.

Le facteur de qualité est égal à :

$$Q' = \frac{f_0}{\Delta f'} \approx 1{,}4;$$

Le circuit est peu sélectif; l'amortissement est important, la résonance est floue.

Conclusion

A la résonance, l'amplitude des oscillations forcées diminue lorsque la résistance du circuit augmente. L'acuité de la résonance est caractérisée par le facteur de qualité.

14.4.5 surtension

Nous avons constaté que la tension aux bornes du condensateur d'un circuit série (R, L, C) est en quadrature retard sur l'intensité :

$$u_C = \frac{1}{C\omega} I_m \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{avec :} \quad i = I_m \cos \omega t.$$

A la résonance d'intensité, la tension efficace U_C, compte tenu du fait que $I(\omega_0) = \dfrac{U}{R}$, vaut :

$$U_C = \frac{I(\omega_0)}{C\omega_0} = \frac{U}{RC\omega_0}, \quad \text{soit :} \quad U_C = QU.$$

Ainsi, à la résonance d'intensité, la tension efficace aux bornes du condensateur d'un circuit (R, L, C) est égale au produit de la tension efficace imposée aux bornes du circuit par son facteur de qualité.

Dans la fiche expérimentale, nous avons vu, pour la première expérience, que $Q = 7$; d'où :

$$U_C = 7 \times 15 = 105\ \text{V}.$$

C'est une tension très supérieure à la tension imposée de 15 V.

Un phénomène analogue s'observe aux bornes de la bobine. Pour simplifier, supposons négligeable la résistance r de la bobine; il vient :

$$u_L = L\omega I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

A la résonance d'intensité, la tension efficace vaut :

$$U_L = L\omega_0 I(\omega_0) = \frac{L\omega_0}{R} RI(\omega_0), \quad \text{soit :} \quad U_L = QU.$$

Les tensions aux bornes du condensateur et de la bobine (dont la résistance est négligeable) se compensent exactement, comme le veut, à la résonance, l'équivalence du circuit à la résistance R. Ces tensions peuvent être très élevées et donner naissance à des accidents dans les circuits non prévus à cet effet.

APPLICATION 2

Dans un circuit série (R, L, C), montrer que, aux bornes du circuit, la phase de la tension par rapport au courant passe de $-\dfrac{\pi}{4}$ à $\dfrac{\pi}{4}$ lorsque ω décrit la bande passante du circuit.

La phase est donnée par :

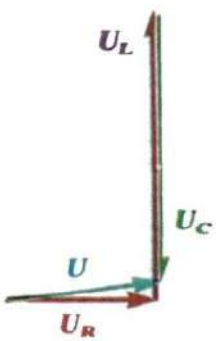
$$\tan \varphi = \frac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R}.$$

Les fréquences limites pour lesquelles la phase passe de $-\dfrac{\pi}{4}$ à $\dfrac{\pi}{4}$ correspondent à $\tan \varphi = \pm 1$, soit :

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = \pm R.$$

Cette équation correspond aux équations donnant les pulsations limites ω_1 et ω_2 de la bande passante.

La phase varie donc rapidement de $\dfrac{\pi}{2}$ au voisinage de la fréquence de résonance si le circuit est très sélectif.



18. ***La construction de Fresnel montre facilement qu'au voisinage de la résonance ($\varphi \sim 0$), on a $U_C \sim U_L \geqslant U$.***

Scanné avec CamScanner

COMPLÉMENTS MATHÉMATIQUES

construction de Fresnel

1. Représentation de Fresnel d'une grandeur sinusoïdale

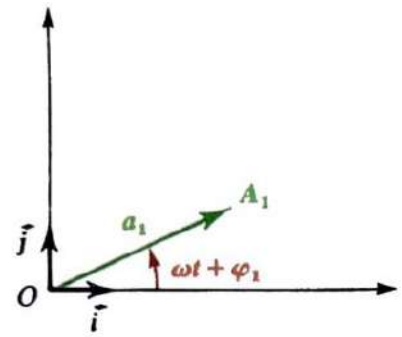
$$s_1 = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

Soit un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. L'unité est celle de la grandeur représentée (*fig* 1)

Associons à s_1 le vecteur $\overrightarrow{OA}$ du plan, tel que

- $\|\overrightarrow{OA}\| = a_1$.
- $(\vec{i}, \overrightarrow{OA}) = \omega t + \varphi_1$:
- $\overrightarrow{OA}$ tourne autour de O à la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$. A chaque instant $\quad \overrightarrow{OA} \cdot \vec{i} = \text{proj } \overrightarrow{OA} \cos(\vec{i}, \overrightarrow{OA})$.

soit $\quad \text{proj } \overrightarrow{OA} = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1) = s_1$



1.

Donc, à toute grandeur sinusoïdale de pulsation ω, on peut faire correspondre un vecteur du plan tournant à la vitesse $\omega\vec{k}$. Inversement, à tout vecteur tournant du plan, on pourra faire correspondre une grandeur sinusoïdale ayant une pulsation égale à la vitesse angulaire de rotation

2. Somme de grandeurs sinusoïdales de même pulsation (*fig* 2)

Soit à faire la somme .

$$s = s_1 + s_2 = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + a_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

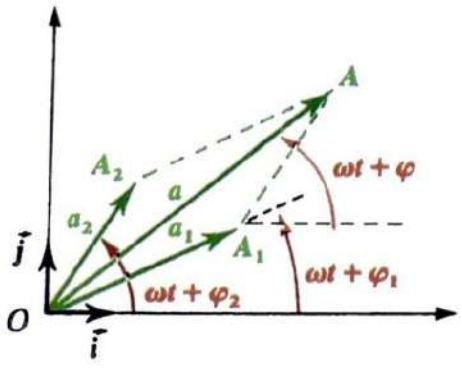
Dans le plan, associons à s_1 et à s_2 deux vecteurs tournants :

$$s_1 \longleftrightarrow \overrightarrow{OA_1}, \quad s_2 \longleftrightarrow \overrightarrow{OA_2}.$$

Construisons le vecteur somme $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$

$$\text{proj. } \overrightarrow{OA} = \text{proj. } \overrightarrow{OA_1} + \text{proj. } \overrightarrow{OA_2},$$

soit $\quad s = s_1 + s_2$



2.

Le vecteur $\overrightarrow{OA}$ tournant à la vitesse angulaire ω représente bien le vecteur somme des deux fonctions sinusoïdales s_1 et s_2.

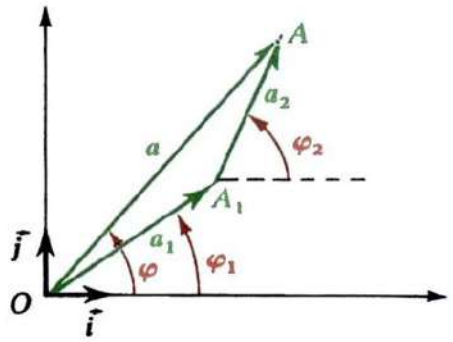
Le parallélogramme OA_1AA_2 tourne, sans se déformer, à la vitesse angulaire ω. Le vecteur $\overrightarrow{OA}$ tourne donc à la vitesse angulaire ω. Il représente une grandeur sinusoïdale de la forme

$$s = a \cos(\omega t + \varphi) \longleftrightarrow \overrightarrow{OA}.$$

Il reste à déterminer a et φ en fonction de a_1, a_2, φ_1 et φ_2, soit par construction graphique, soit par le calcul.

Notons enfin que, tous les vecteurs tournant à la même vitesse angulaire ω, il est plus simple de les représenter dans une position particulière, par exemple à l'instant $t = 0$ (*fig* 3), et d'associer à s_2 le vecteur $\overrightarrow{A_1A} = \overrightarrow{OA_2}$.

On peut généraliser ces résultats à la somme de n fonctions sinusoïdales de même pulsation



3.

3. Représentations particulières (*fig* 4)

Soit $\quad s = a \cos(\omega t + \varphi) \longleftrightarrow \overrightarrow{OA}\ (a, \varphi)$.

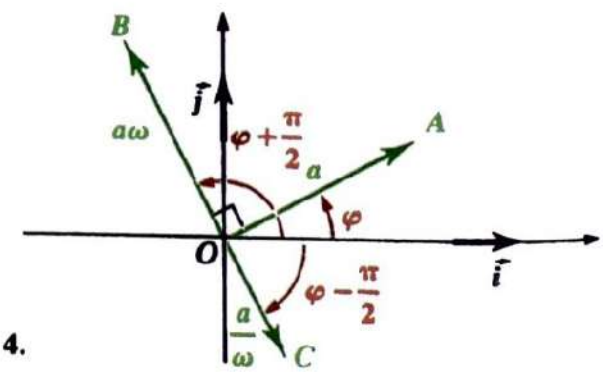
Représentons les grandeurs $\dfrac{ds}{dt}$ et $\int s\,dt$ (à une constante près)

- $\dfrac{ds}{dt} = -a\omega \sin(\omega t + \varphi) = a\omega \cos\left(\omega t + \varphi + \dfrac{\pi}{2}\right)$:

d'où : $\quad \dfrac{ds}{dt} \longleftrightarrow \overrightarrow{OB}\left(a\omega, \varphi + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

- $\int s\,dt = \dfrac{a}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) = \dfrac{a}{\omega} \cos\left(\omega t + \varphi - \dfrac{\pi}{2}\right)$:

d'où : $\quad \int s\,dt \longleftrightarrow \overrightarrow{OC}\left(\dfrac{a}{\omega}, \varphi - \dfrac{\pi}{2}\right)$.



4.

Scanné avec CamScanner

L'essentiel du cours

14.1 A 1/ Quelles sont les unités S.I. de fréquence et de pulsation ?

2/ Quelle est l'unité d'impédance ?

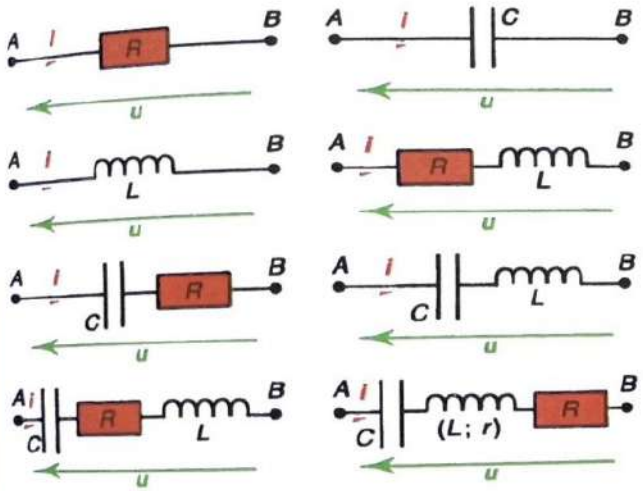
3/ Quelles grandeurs physiques mesurent un voltmètre et un ampèremètre lorsque leur commutateur est branché sur la position ~ ou AC ?

4/ A une fréquence donnée, comment mesure-t-on l'impédance d'un dipôle avec un voltmètre et un ampèremètre ?

5/ Quelles sont les caractéristiques d'une tension sinusoïdale que l'on peut mesurer avec un oscillographe ?

14.2 A Pour chacun des huit dipôles représentés sur la figure, où $i = I_m \cos \omega t$, $u = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ et où φ est la phase de la tension aux bornes du dipôle par rapport à l'intensité, donner :

a/ le diagramme de Fresnel correspondant ;
b/ la valeur de l'impédance Z_{AB} ;
c/ les valeurs de tan φ et cos φ.

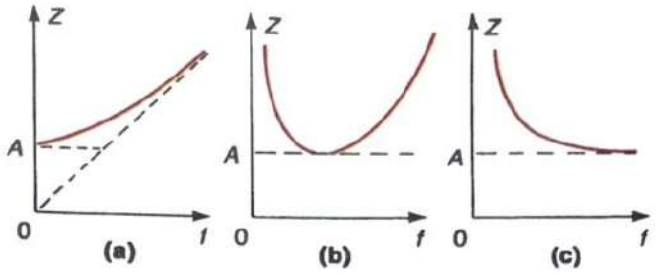


14.3 A On dispose d'un conducteur ohmique de résistance R, d'un condensateur de capacité C, d'une bobine d'inductance L et de résistance négligeable. On réalise successivement trois circuits à l'aide de ces composants : un circuit série (R, L), un circuit série (R, C) et un circuit série (R, L, C). Pour alimenter ces circuits, on utilise la même source S de tension sinusoïdale u, de valeur efficace U, de fréquence f variable.

1/ Dans le dernier cas, justifier sans calcul l'expression « oscillations forcées » utilisée pour désigner le courant qui s'établit dans le circuit.
Que peut-on dire de la fréquence du courant i par rapport à celle de la tension u de la source S ?

2/ On étudie l'impédance de chaque circuit en fonction de la fréquence. On trouve les courbes a, b et c ci-après.

a/ Exprimer les impédances de chacun des circuits (R, L), (R, C) et (R, L, C) en fonction des caractéristisques de ces circuits et de la fréquence.
b/ En déduire, sans faire une étude détaillée, la correspondance entre les trois courbes et les trois circuits.
c/ Que représente l'ordonnée A figurant sur chacune de ces courbes ? Préciser la valeur de cette ordonnée commune.



d/ Pourquoi peut-on dire qu'une inductance se comporte comme un court-circuit en basse fréquence et qu'un condensateur se comporte comme un court-circuit en haute fréquence ?

3/ Dans le cas du circuit (R, L, C), calculer la fréquence pour laquelle l'impédance est la plus faible.

14.4 A Soit un circuit comportant une résistance R, une bobine d'inductance L et de résistance négligeable, un condensateur de capacité C, branchés en série aux bornes d'un générateur B.F. Ce générateur délivre une tension u de pulsation variable ω, de valeur efficace U :

$$u = U\sqrt{2} \cos \omega t.$$

L'intensité dans le circuit est donnée par la relation :

$$i = I\sqrt{2} \cos(\omega t - \varphi).$$

1/ Quelle relation existe-t-il entre U, I et l'impédance Z du circuit ?

2/ Exprimer Z, tan φ et cos φ en fonction de L, C, R et ω.

3/ On choisit une pulsation ω_0 correspondant à la résonance d'intensité pour une tension donnée U.

a/ Qu'appelle-t-on « résonance d'intensité » ?
b/ Quelle relation existe-t-il entre ω_0, L et C ?
c/ Calculer Z et I pour la pulsation ω_0. Ces valeurs sont-elles maximales ? minimales ?

4/ Qu'appelle-t-on bande passante à 3 db ? Sa valeur est-elle $\Delta\omega = \frac{R}{L}$ ou $\Delta\omega = \frac{L}{R}$?

5/ Définir le facteur de qualité Q à la résonance d'intensité. Exprimer Q en fonction de L, R et ω_0, puis en fonction de R, C et ω_0.

6/ Montrer que la tension efficace U_C aux bornes du condensateur est égale à QU au voisinage de la résonance d'intensité.

Exercices de base

14.5 B3 Reprendre les résultats de l'exercice 14.2. Donner les valeurs numériques correspondant à Z_{AB} (en ohms) et à φ (en radians et en degrés) avec les composants électroniques suivants :

$$L = 1 \text{ H} ; C = 2 \text{ µF} ; R = 1 \text{ k}\Omega ; r = 100 \Omega.$$

La pulsation est fixée à 1 000 rad . s^{-1}.

14.6 AB3 Un générateur impose aux bornes d'un dipôle une tension sinusoïdale (en V) :

$$u = 25 \cos 100 \pi t \quad (t \text{ en s}).$$

Scanné avec CamScanner

EXERCICES

L'intensité (en A) qui traverse ce dipôle est de la forme :

$$i = 0{,}5 \cos\left(2\pi f t - \frac{\pi}{4}\right).$$

1/ Calculer l'intensité efficace et la tension efficace aux bornes de ce dipôle.

2/ Quelle est la fréquence du courant ?

3/ Déterminer la phase de l'intensité par rapport à la tension.

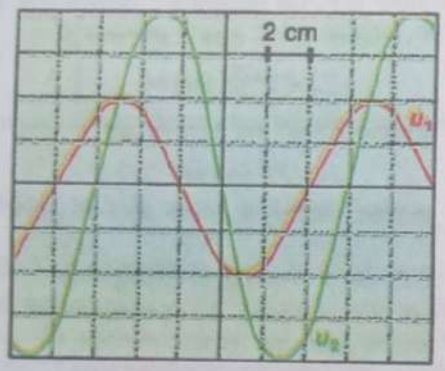
4/ Calculer l'impédance Z du dipôle.

5/ On peut écrire l'intensité sous la forme :

$$i = 0{,}5 \sin 100\,\pi t'.$$

Comment s'écrit alors u ?

14.7 AB3 On a observé sur l'écran d'un oscillographe deux tensions u_1 et u_2. Le calibre sur les deux voies est de 5 V.cm^{-1} ; la base de temps est sur la position 0,1 ms.cm^{-1}.



1/ Déterminer les amplitudes des deux tensions, les tensions efficaces correspondantes, la période et la fréquence des oscillations électriques.

2/ On prend comme référence la tension u_1, qu'on écrit sous la forme :

$$u_1 = U_{m1} \cos \omega t.$$

a/ Pour quelles valeurs de ωt cette tension est-elle maximale ?

b/ La tension u_2 se met sous la forme :

$$u_2 = U_{m2} \cos(\omega t + \varphi).$$

Exprimer en fonction de φ les valeurs de ωt pour lesquelles cette tension est maximale.

c/ Comparer les deux séries de valeurs de ωt obtenues en *a*/ et en *b*/.

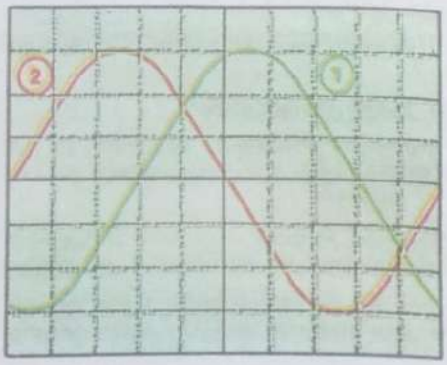
En déduire à l'aide de l'oscillogramme que u_2 est en retard de phase ($\varphi < 0$) par rapport à u_1. Calculer φ.

3/ Expliciter u_1 et u_2 en remplaçant les constantes par leurs valeurs numériques.

14.8 AB3 Les schémas ci-après représentent trois écrans d'oscillographe.

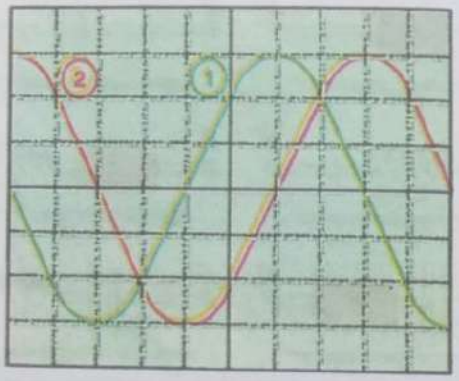
Préciser dans chaque cas :

a/ les amplitudes U_{1m} et U_{2m} ;
b/ les tensions efficaces correspondantes ;
c/ la phase φ ;
d/ la fréquence des tensions.



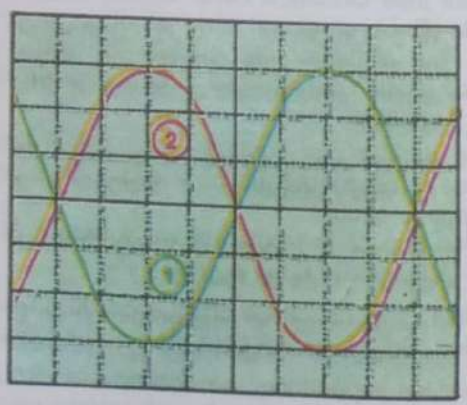
voie 1 = 2 V.cm^{-1}
voie 2 = 1 V.cm^{-1}
balayage = 0,20 ms.cm^{-1}
$u_1 = U_{1m} \cos \omega t$
$u_2 = U_{2m} \cos(\omega t + \varphi)$

①



voie 1 = 1 V.cm^{-1}
voie 2 = 4 V.cm^{-1}
balayage = 1 ms.cm^{-1}
$u_1 = U_{1m} \sin \omega t$
$u_2 = U_{2m} \sin(\omega t + \varphi)$

②

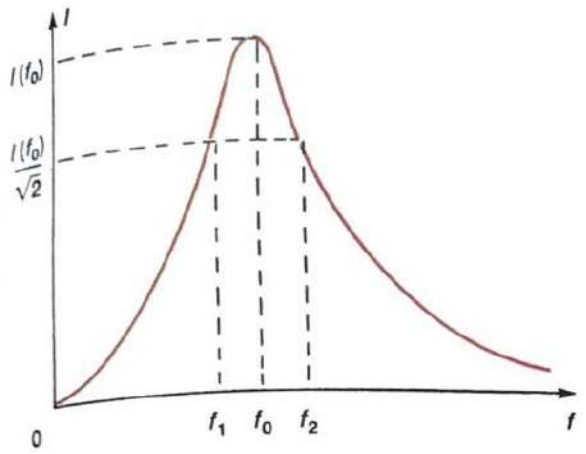


voie 1 = 4 V.cm^{-1}
voie 2 = 1 V.cm^{-1}
balayage = 10 ms.cm^{-1}
$u_1 = U_{1m} \cos(\omega t + \varphi)$
$u_2 = U_{2m} \cos \omega t$

③

Scanné avec CamScanner

14.9 AB3 La figure représente une courbe obtenue expérimentalement lors de l'étude de la résonance d'intensité dans un circuit ; ce dernier, alimenté par un générateur B.F., comporte en série un conducteur ohmique de résistance R, une bobine d'inductance L et de résistance négligeable, un condensateur de capacité C.



On note I l'intensité efficace dans le circuit pour une fréquence f imposée par le générateur B.F. ; φ est la phase de la tension par rapport à l'intensité.
Le générateur délivre une tension efficace U=5 V. A partir de la courbe expérimentale, on a obtenu : f = 1125 Hz; $I(f_0)$ = 50 mA ; $f_2 - f_1$ = 160 Hz.

1/ Déterminer les valeurs de R, Q, L et C.

2/ On se place à la résonance d'intensité.

a/ Calculer les tensions efficaces aux bornes de la résistance, du condensateur et de la bobine.

b/ Représenter dans un diagramme de Fresnel les tensions u_R, u_C, u_L et u. On précisera l'échelle choisie.

3/ On se place maintenant à la fréquence f_1 = 1045 Hz.

a/ Calculer les amplitudes des tensions aux bornes de chacun des dipôles.

b/ Déterminer la phase φ_1 de la tension par rapport à l'intensité.

c/ Représenter dans un diagramme de Fresnel les tensions u_E, u_C, u_L et u. Retrouver graphiquement la valeur de φ_1.

14.10 AB3 Un dipôle AB comprend en série une bobine de résistance R = 400 Ω et d'inductance L = 1 H, un condensateur de capacité C = 1 µF. On applique aux bornes du dipôle une tension sinusoïdale d'expression (en V) :

$$u = 100\sqrt{2}\cos \omega t.$$

1/ Déterminer l'intensité efficace I du courant dans le dipôle. Calculer cette intensité pour les valeurs suivantes de la pulsation :

ω_1 = 800 rad . s^{-1} ; ω_2 = 1 000 rad . s^{-1} ; ω_3 = 1 200 rad . s^{-1}.

2/ Étudier la variation de l'intensité efficace en fonction de ω. Montrer l'existence d'un maximum. Calculer les coordonnées $(\omega_0, I(\omega_0))$ de ce maximum.

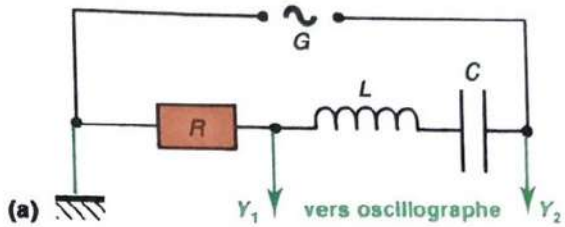
3/ Calculer littéralement les valeurs ω_4 et ω_5 pour lesquelles :

$$\frac{I(\omega_4)}{I(\omega_0)} = \frac{I(\omega_5)}{I(\omega_0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

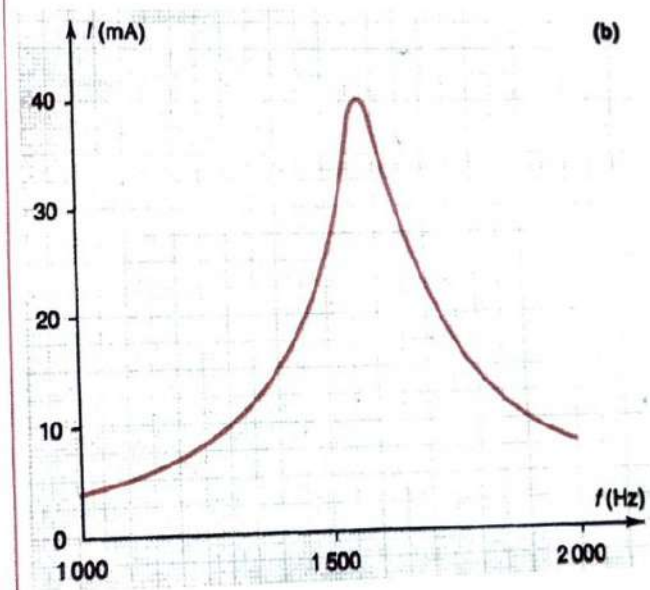
Exprimer $\Delta\omega = |\omega_4 - \omega_5|$ en fonction de L et R. Calculer la valeur numérique de cette différence et préciser l'intérêt de cette valeur.

4/ Montrer que pour les pulsations ω_4 et ω_5 la phase de l'intensité par rapport à la tension est soit $-\frac{\pi}{4}$ soit $\frac{\pi}{4}$.

14.11 AB3C Un circuit comprend, montés en série, un générateur G, un conducteur ohmique de résistance R, une bobine d'inductance L et de résistance négligeable, un condensateur de capacité C. Le générateur maintient entre ses bornes une tension sinusoïdale de valeur efficace U = 4 V, de fréquence réglable f.



La figure b représente la variation de I en fonction de f.



1*a*/ Expliquer pourquoi la courbe présente un maximum. En utilisant cette courbe, trouver la fréquence de résonance f_0 et la valeur de R.

b/ Trouver à partir de la courbe la bande passante et le facteur de qualité Q. En déduire L et C

c/ Quelle est la valeur de I pour f = 0 ?

2/ On branche un oscillographe bicourbe (figure a).

a/ Quelles sont les grandeurs électriques visualisées par les voies Y_1 et Y_2 de l'oscillographe ?

b/ On règle f pour que ces deux grandeurs soient en phase. Quelle est alors la longueur occupée par une période si le balayage est réglé à 100 µs par cm ?

3/ On règle maintenant la fréquence à la valeur f_1 telle que :

$$I(f_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} I(f_0),$$

avec $f_1 < f_0$.

Scanné avec CamScanner

EXERCICES

a/ Montrer que la phase de la tension par rapport à l'intensité est $-\frac{\pi}{4}$.

b/ Exprimer en fonction de la période le décalage observé entre les deux courbes. Déterminer (en cm) le décalage, avec le réglage du balayage précédent, entre deux sommets successifs de u_1 et u_2.

14.12 AB3C 1/ Un dipôle AD comprend en série une bobine de résistance r et d'inductance L, un conducteur ohmique de résistance $R = 20\ \Omega$. On applique aux bornes du dipôle une tension sinusoïdale d'expression (en V) :

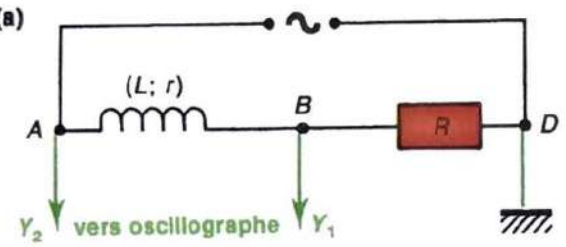
$$u_{AD} = U\sqrt{2}\cos \omega t.$$

L'intensité instantanée est alors exprimée par :

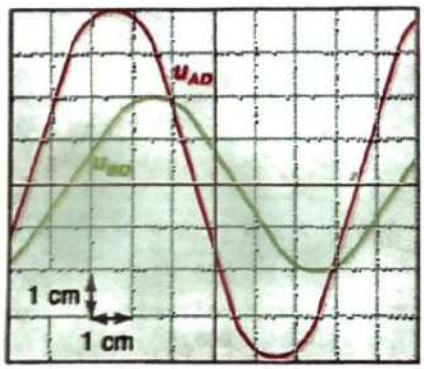
$$i_{AD} = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi).$$

On branche un oscillographe bicourbe (figure a). Le balayage est réglé à 2,5 ms . cm $^{-1}$, la sensibilité des voies Y_1 et Y_2 à 1 V . cm $^{-1}$.

(a)



On observe sur l'écran la figure b.



(b)

a/ Déduire de ces courbes :
— la période des oscillations ;
— la pulsation et la fréquence ;
— les valeurs de U et de I ;
— la phase de l'intensité par rapport à la tension u_{AD}.

b/ Exprimer l'impédance Z en fonction de L, r, R et ω.

c/ Montrer que :

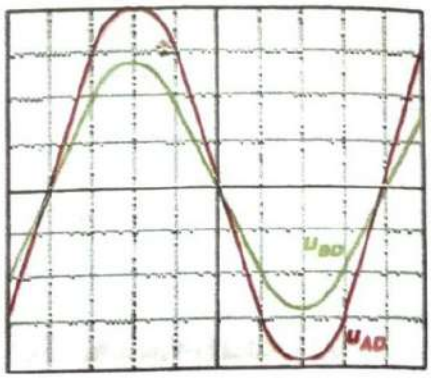
$$\cos \varphi = \frac{R + r}{Z} \quad \text{et} \quad \sin \varphi = -\frac{L\omega}{Z}.$$

d/ Déduire des mesures la valeur de Z, puis celles de r et L.

2/ On intercale entre A et B, en série avec la bobine, un condensateur de capacité $C = 112\ \mu F$. Sans changer les réglages de l'oscillographe, on observe sur l'écran la figure c.

a/ Quel est le nouveau déphasage entre i_{AD} et u_{AD} ? Vérifier que ce résultat est compatible avec la valeur de L trouvée dans la question 1/.

b/ Quelle est la nouvelle valeur de l'intensité maximale ? En utilisant ce résultat, retrouver la valeur de r.



(c)

Construction de Fresnel

14.13 B3C On considère trois dipôles associés en série : un conducteur ohmique de résistance R, une bobine d'inductance L et de résistance r, un condensateur de capacité C. Ils sont branchés aux bornes d'un générateur délivrant une tension sinusoïdale. A l'aide d'un voltmètre, on a mesuré les tensions efficaces : $U_R = 24$ V ; $U_C = 50$ V ; $U = 30$ V, tension efficace aux bornes de l'ensemble.
A l'aide d'un oscillographe, on a trouvé que la tension u aux bornes de l'ensemble est en retard de phase $\varphi = -30°$ par rapport à l'intensité.

1/ Soit φ_B la phase de la tension aux bornes de la bobine par rapport à l'intensité. Représenter sur un diagramme de Fresnel les tensions u_R, u_B, u_C et u. Faire apparaître sur le schéma φ_B et φ.

2/ Montrer que :

$$\tan \varphi_B = \frac{U_C - U\sin|\varphi|}{U\cos\varphi - U_R} \quad \text{et} \quad U_B = \frac{U\cos\varphi - U_R}{\cos\varphi_B}.$$

3/ Calculer les valeurs numériques de U_B et de φ_B.

4/ La résistance R est égale à 200 Ω. La fréquence utilisée est 500 Hz. Calculer l'impédance de la bobine, son inductance et sa résistance, ainsi que la capacité du condensateur.

Banc d'essais

14.14 AB3 Une bobine d'inductance $L = 0{,}1$ H et de résistance $r = 10\ \Omega$ est alimentée par un courant alternatif sinusoïdal de fréquence 50 Hz.

1/ Quelle est l'impédance de cette bobine ?

2/ Quelle est la phase de la tension par rapport à l'intensité ?

3/ Quelle est la phase de l'intensité par rapport à la tension ?

4/ La tension imposée s'écrit sous la forme (en V) :

$$u = 10\sqrt{2}\cos 100\,\pi t.$$

Écrire l'expression de $i(t)$.

↳ **ex. 14.2, 14.6.**

Scanné avec CamScanner

14.15 AB3 Un condensateur de capacité $C = 10\ \mu F$ est alimenté par un courant alternatif sinusoïdal de fréquence 50 Hz.

1/ Quelle est son impédance ?

2/ Quelle est la phase de la tension par rapport à l'intensité ?

3/ Quelle est la phase de l'intensité par rapport à la tension ?

4/ La tension imposée s'écrit sous la forme (en V) :

$$u = 10\sqrt{2} \sin 100\ \pi t.$$

Écrire l'expression de $i(t)$.

↳ **ex. 14.2, 14.6.**

14.16 AB3 1/ Un condensateur de capacité $C = 5\ \mu F$ est alimenté par un courant alternatif sinusoïdal de fréquence 400 Hz et d'intensité efficace $I = 0{,}16$ A. L'intensité instantanée s'écrit :

$$i = I_m \sin \omega t.$$

Donner l'expression de la tension instantanée aux bornes de ce condensateur.

2/ Le même courant traverse maintenant une bobine d'inductance $L = 3$ mH et de résistance nulle. Donner l'expression de la tension instantanée aux bornes de cette bobine.

↳ **ex. 14.2.**

14.17 Un condensateur de capacité $C = 1\ \mu F$ est associé en série avec un conducteur ohmique de résistance $R = 100\ \Omega$. Cette association est soumise à une tension de valeur efficace $U = 30$ V, dont la fréquence f peut varier de 100 Hz à 5000 Hz.

1/ A Exprimer la tension efficace du courant en fonction de f, R, C et U.

2/ B3 Sur un ampèremètre, on lit une intensité efficace égale à 135 mA. Quelle est la fréquence de la tension ?

↳ **ex. 14.2.**

14.18 Une bobine, alimentée sous une tension continue de 120 V, est parcourue par un courant d'intensité 2 A ; alimentée sous une tension sinusoïdale de fréquence 50 Hz, de valeur efficace 100 V, elle est parcourue par un courant d'intensité efficace 0,5 A.

1/ B3C Calculer l'inductance et la résistance de la bobine.

2/ AB3 Donner la valeur en degrés de la phase de la tension par rapport à l'intensité pour une telle tension alternative sinusoïdale appliquée aux bornes de cette bobine. Donner les expressions des valeurs instantanées du courant traversant cette bobine et de la tension aux bornes.

↳ **ex. 14.2, 14.6.**

Détermination de la nature d'un dipôle

14.19 AB3C On considère trois dipôles : un conducteur ohmique de résistance R, un condensateur de capacité C, une bobine de résistance r et d'inductance L, enfermés dans trois boîtes différentes.

1/ On branche successivement ces trois dipôles sur une alimentation continue délivrant une tension de 12 V. On mesure l'intensité du courant (en régime permanent). On obtient :

— pour la boîte 1, $I_1 = 0$;

— pour les boîtes 2 et 3, $I_2 = I_3 = 240$ mA.

Quelles sont les conclusions que l'on peut tirer de ces résultats ?

2/ On branche successivement ces trois dipôles sur une alimentation alternative délivrant une tension efficace de 24 V de fréquence 50 Hz.

On mesure l'intensité efficace du courant traversant chaque dipôle. On obtient :

— pour la boîte 1, $I_1 = 75$ mA ;

— pour la boîte 2, $I_2 = 480$ mA ;

— pour la boîte 3, $I_3 = 406$ mA.

a/ Calculer les impédances des trois dipôles.

b/ Préciser le contenu de chacune des boîtes. Déterminer les valeurs de L et C.

3/ On monte ces trois dipôles en série. On alimente ce circuit (R, L, C) en courant alternatif de tension efficace 24 V et de fréquence variable.

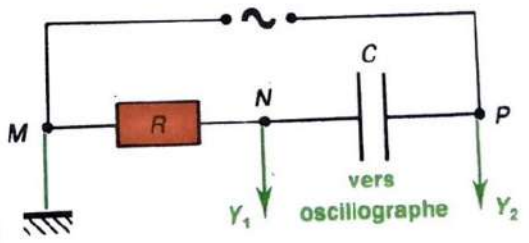
a/ Pour quelle fréquence l'intensité et la tension seront-elles en phase ?

b/ Quelle est alors l'intensité efficace du courant ?

↳ **ex. 14.2, 14.3.**

Détermination d'une capacité

14.20 AB3C On place en série, entre M et N, un conducteur ohmique de résistance $R = 100\ \Omega$, entre N et P, un condensateur de capacité C. On alimente l'ensemble entre M et P par une tension sinusoïdale de fréquence f. On branche un oscillographe bicourbe (figure a).



(a)

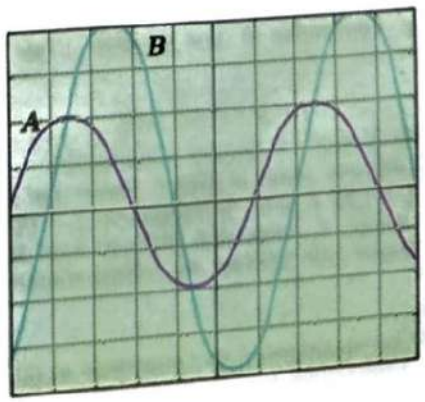
1/ Indiquer quelles sont les tensions observées sur chacune des voies de l'oscillographe.

2/ Le réglage de l'oscillographe correspond, pour les deux voies :

— en abscisses, à 1 ms par division ;

— en ordonnées, à 2 V par division.

On observe l'oscillogramme représenté sur la figure b.



(b)

Scanné avec CamScanner

a/ Quelle est la période de la tension d'alimentation ?
b/ En utilisant les valeurs maximales des deux voies, identifier les courbes de chacune de ces voies.
c/ Quelle est l'intensité maximale du courant ?
d/ Quelle est la phase de la tension d'alimentation par rapport à l'intensité du courant ?

3*a/* Calculer l'impédance du dipôle (*M*, *P*).
b/ Calculer l'impédance et la capacité du condensateur.

↳ ex. 14.7, 14.8.

Résonance d'intensité

14.21 AC On considère un dipôle contenant, montés en série, un conducteur ohmique de résistance *R*, une bobine de résistance négligeable et d'inductance *L*, un condensateur de capacité *C*. On applique aux bornes de ce dipôle une tension sinusoïdale *u* de fréquence *f* réglable de 10 Hz à 10 000 Hz, de valeur efficace 5 V.

1/ Donner l'allure de la courbe représentative des variations de l'intensité efficace *I* en fonction de *f*.

2/ Le maximum de *I* est $I_0 = 250$ mA, obtenu pour $f_0 = 355$ Hz. D'autre part, la valeur de l'intensité efficace correspondant à $f_1 = 390$ Hz est :

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0 = 177 \text{ mA}.$$

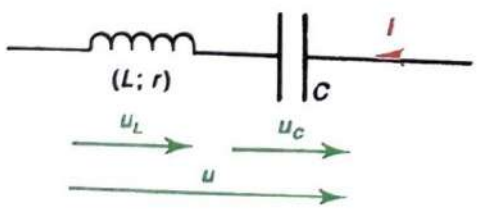
a/ Calculer la valeur de *R*.
b/ Trouver des relations entre *L*, *C* et f_1 d'une part, *L*, *C* et f_0 d'autre part. En déduire *L* et *C*.

3/ Pour la fréquence f_1, représenter graphiquement $Y_1 = Ri(t)$ et $Y_2 = u(t)$ que l'on observerait sur un oscillographe dont on précisera le branchement sur un schéma.
Échelles : 0,4 ms par cm ; 2 V par cm.

↳ ex. 14.9, 14.10.

Détermination des caractéristiques d'un circuit

14.22 AB3C On monte en série une bobine de résistance *r* et d'inductance *L* et un condensateur de capacité *C*.



On soumet l'ensemble à une tension *u* de fréquence réglable :

$$u = U\sqrt{2} \cos 2\pi ft,$$

avec $U = 120$ V. Soit *i* l'intensité instantanée.
L'intensité efficace dans le circuit passe par une valeur maximale $I_0 = 1{,}33$ A pour la fréquence $f_0 = 159$ Hz. Pour une autre valeur, f_1, l'intensité efficace vaut 0,8 A, et la tension efficace aux bornes du condensateur est alors $U_C = 128$ V.

1/ Calculer *r*.
Déterminer les impédances de l'ensemble et du condensateur pour la fréquence f_1.

2/ Dans le cas où $f = f_1$, l'impédance du condensateur est supérieure à celle de la bobine. Laquelle des fonctions *i* et *u* est-elle en avance sur l'autre ? Calculer la phase de la tension par rapport au courant.

3/ Soit φ_B et φ_C les phases des tensions u_B et u_C par rapport à l'intensité pour la fréquence f_1.

a/ Représenter sur un diagramme de Fresnel les tensions u_B, u_C et *u*. Faire apparaître sur le schéma φ et φ_B.
b/ En déduire une expression de tan φ en fonction de u_C, *u* et φ. Calculer φ_B.
c/ Calculer *L*, *C* et f_1.

↳ ex. 14.13.

Exercice bilan

14.23 AB3C Les trois questions sont indépendantes.

1/ Un circuit oscillant non amorti comporte en série un condensateur de capacité $C = 10$ µF et une bobine d'inductance $L = 13{,}1$ mH.

a/ Établir l'équation différentielle de ce circuit, en prenant pour variable la charge *q* du condensateur ; donner sa solution, sachant qu'à l'instant $t = 0$, la charge du condensateur est q_0 et l'intensité est nulle.
b/ Préciser la valeur de la fréquence propre du circuit.

2/ Entre les bornes d'un dipôle série constitué par une bobine et un conducteur ohmique de résistance $R = 40\ \Omega$, on maintient une tension sinusoïdale de valeur efficace 130 V. La phase φ_B de la tension aux bornes de la bobine par rapport à l'intensité est telle que $\cos \varphi_B = 0{,}866$. L'intensité efficace traversant le circuit est $I = 2$ A.

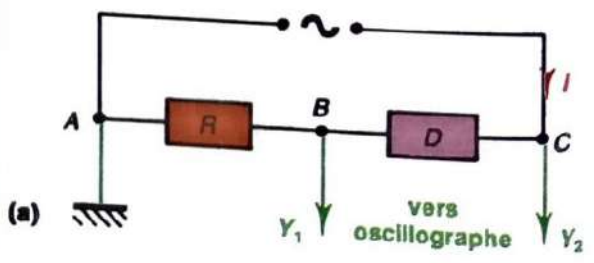
a/ Faire la construction de Fresnel (sur papier millimétré).
b/ Utiliser cette construction pour déterminer la valeur de la tension efficace aux bornes de la bobine et la phase de la tension par rapport à l'intensité aux bornes de l'ensemble {bobine, conducteur ohmique}.

3/ Un dipôle (*R*, *L*, *C*) série comprend un conducteur ohmique de résistance *R*, une bobine d'inductance *L*, un condensateur de capacité $C = 10$ µF. Ce dipôle est alimenté par une tension sinusoïdale de fréquence $f = 310$ Hz.

a/ Pour quelle valeur de *L* la tension aux bornes du condensateur est-elle en quadrature avec la tension aux bornes du dipôle ?
b/ On diminue la valeur de la résistance *R*. Y a-t-il conservation de la résonance ? modification de l'intensité efficace ?

Nature d'un dipôle inconnu

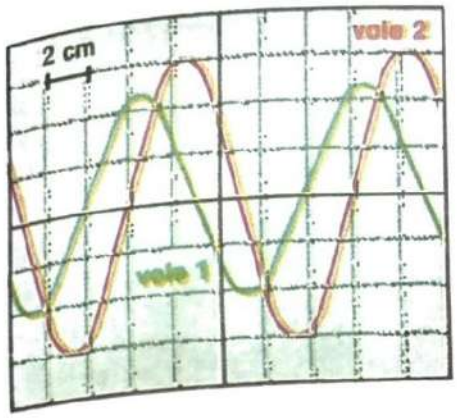
14.24 AB3C On considère un dipôle *D* de nature inconnue, monté en série avec un conducteur ohmique de résistance $R = 100\ \Omega$ et un générateur B.F. de tension sinusoïdale dont la fréquence et la tension efficaces sont réglables.



Scanné avec CamScanner

On utilise un oscillographe dont les réglages sont les suivants : $5 . 10^{-2}$ ms . cm^{-1} pour le balayage ; 0,5 V . cm^{-1} pour la voie 1 ; 1 V . cm^{-1} pour la voie 2.

La figure b représente l'écran lorsque l'oscillographe est branché selon le schéma précédent.



(b)

1/ Déduire de cette figure :

a/ la fréquence de la tension sinusoïdale ;

b/ les valeurs efficaces de l'intensité instantanée i qui traverse le circuit et de la tension instantanée u_{CA} aux bornes du générateur ;

c/ le déphasage φ de la tension u_{CA} par rapport à l'intensité i. Préciser s'il y a avance ou retard de phase de u_{CA} par rapport à i.

On envisage les hypothèses suivantes :

- D est un conducteur ohmique de résistance R ;
- D est une bobine de résistance r et d'inductance L ;
- D est un condensateur de capacité C ;
- D est une bobine de résistance r et d'inductance L en série avec un condensateur de capacité C.

Montrer que l'on peut éliminer certaines de ces hypothèses.

2/ La tension efficace aux bornes du générateur étant maintenue constante à la valeur $U = 12$ V, on fait varier la fréquence. On constate que l'intensité efficace passe par un maximum de valeur $I_0 = 107$ mA pour la fréquence $f_0 = 2{,}15 . 10^3$ Hz. Quelle est la nature du dipôle D ? En déduire ses caractéristiques.

↳ ex. 14.11, 14.12.

Exercice bilan

14.25 AB3C On considère un condensateur de capacité C.

1a/ Le condensateur porte une charge Q. Sous quelle tension a-t-il été chargé ?

b/ Calculer l'énergie emmagasinée par le condensateur.

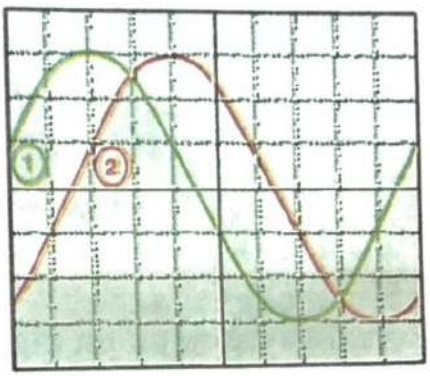
Application numérique : $C = 4$ µF ; $Q = 6 . 10^{-4}$ C.

2/ Soit un circuit comprenant en série le condensateur précédent, une bobine d'inductance L et de résistance négligeable, un conducteur ohmique de résistance R, un générateur B.F. fournissant une tension sinusoïdale.

On se propose d'étudier, lorsque la fréquence du générateur varie, le déphasage entre l'intensité du courant et la tension aux bornes du dipôle (R, L, C) d'une part, l'intensité efficace du courant d'autre part.

Indépendamment du dipôle étudié et du générateur, quels sont les appareils indispensables à la réalisation expérimentale de cette étude ? Préciser leurs fonctions et faire un schéma du montage à réaliser.

3/ En réalisant l'expérience, on obtient les courbes de la figure a.



(a)

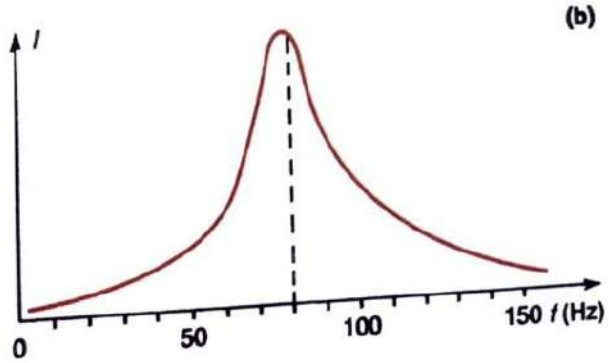
La courbe (1) correspond à la tension aux bornes du dipôle (R, L, C) ; la courbe (2) correspond à l'intensité du courant.

Le balayage est de 1 ms par division.

Déterminer, à partir de ces courbes, la période et la fréquence de la tension, ainsi que la phase de la tension par rapport à l'intensité.

4/ La figure b représente la variation de l'intensité efficace du courant en fonction de la fréquence du générateur.

(b)



a/ A quel phénomène correspond le maximum observé sur la courbe ?

La capacité du condensateur est $C = 3$ µF. Déterminer l'inductance de la bobine.

b/ En tenant compte des résultats de la question 3/, calculer la résistance du dipôle (R, L, C).

↳ ex. 14.11, 14.12.

Scanné avec CamScanner

15 PUISSANCE EN RÉGIME SINUSOÏDAL FORCÉ

15.1 puissance moyenne consommée dans un dipôle

15.1.1 puissance instantanée

Soient $i(t) = I_m \cos(\omega t)$ l'intensité du courant sinusoïdal dans un dipôle (A, B) (*fig.* 1) et $u_{AB}(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ la tension aux bornes.

La puissance instantanée reçue par ce dipôle vaut :

$$p(t) = u_{AB}(t)\, i(t)$$

$$= U_m I_m \cos \omega t \cos(\omega t + \varphi)$$

$$= \frac{U_m I_m}{2}\left[\cos(2\omega t + \varphi) + \cos \varphi\right],$$

soit, en introduisant les grandeurs efficaces :

$$U = U_m/\sqrt{2} \quad \text{et} \quad I = I_m/\sqrt{2},$$

$$p(t) = UI\left[\cos(2\omega t + \varphi) + \cos \varphi\right].$$

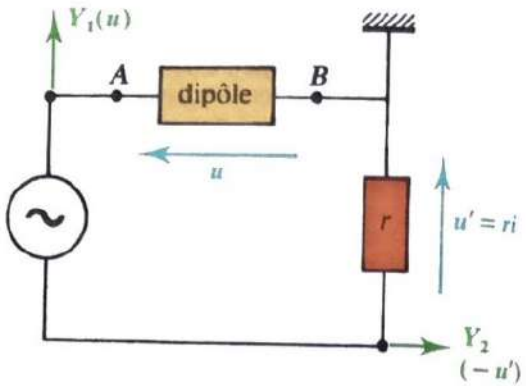
Cette puissance est fonction sinusoïdale du temps, de pulsation 2ω, donc de période $T/2$ (T étant la période du courant, ou de la tension) et de fréquence $2f$.

La puissance instantanée ne permet pas de faire le bilan de l'énergie reçue par le dipôle. Elle indique seulement si, *à un instant donné*, le dipôle est en train de recevoir de l'énergie ($p(t) > 0$) ou d'en céder ($p(t) < 0$). Aussi, est-il nécessaire de définir une puissance moyenne.

15.1.2 puissance moyenne

Par définition, la puissance instantanée consommée est la dérivée, par rapport au temps, de l'énergie consommée par le dipôle :

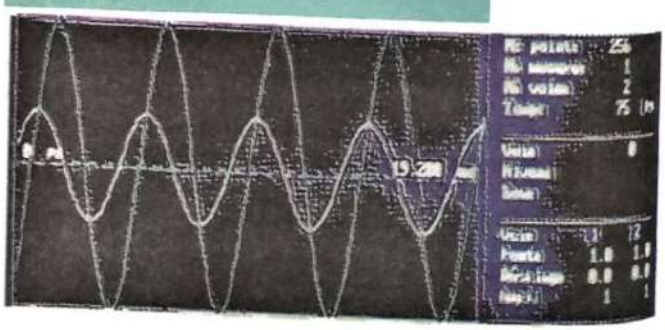
$$p(t) = \frac{d\mathcal{E}}{dt}.$$



1. *Montage d'étude de la puissance instantanée reçue par un dipôle en régime sinusoïdal forcé :*

$$p(t) = u(t)\, i(t).$$

On dispose, aux bornes de la résistance, d'une tension proportionnelle à l'intensité i du courant qui traverse le dipôle.



2. *Visualisation des variations de la tension u et de l'intensité i, obtenue à l'aide d'un ordinateur et d'une interface (interface* **Candibus***) associés au montage de la figure* **1**.

Scanné avec CamScanner

Calculons l'énergie consommée par le dipôle pendant une période du courant; il vient :

$$\mathcal{E}(T)=\int_0^T p(t)\,dt$$

$$=UI\int_0^T[\cos(2\omega t+\varphi)+\cos\varphi]\,dt$$

$$=UI\left[\int_0^T\cos(2\omega t+\varphi)\,dt+\int_0^T\cos\varphi\,dt\right].$$

La première intégrale est nulle, car la période de la fonction $\sin(2\omega t+\varphi)$ est $T/2$:

$$\int_0^T\cos(2\omega t+\varphi)\,dt=\left[\frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t+\varphi)\right]_0^T=0.$$

De plus : $$\int_0^T\cos\varphi\,dt=T\cos\varphi.$$

Finalement, l'énergie consommée durant une période vaut : $\mathcal{E}(T)=UIT\cos\varphi$.

Par définition, **la puissance moyenne** consommée dans le dipôle est égale à :

$$\mathcal{P}=\frac{\mathcal{E}(T)}{T}$$

soit :

$$\mathcal{P}=UI\cos\varphi.$$

(A : I ; W : $\mathcal{P}$; V : U)

La puissance consommée s'exprime en watts (W) lorsque U est exprimée en volts (V) et I en ampères (A). Elle est souvent appelée **puissance active** et se mesure à l'aide d'un wattmètre ou de dispositifs électroniques (voir *fiche technique* en fin de chapitre).

$\cos\varphi$ est appelé **facteur de puissance** du dipôle considéré, φ désignant la phase de la tension aux bornes par rapport à l'intensité.

Notons que pour un dipôle récepteur, la puissance moyenne étant positive, $\cos\varphi$ est positif $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

• La puissance moyenne, ou active, consommée par un dipôle en régime alternatif sinusoïdal est :

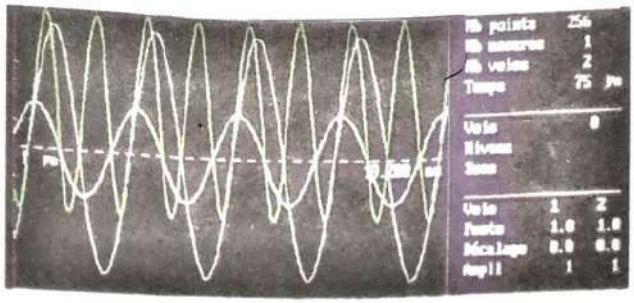
$$\mathcal{P}=UI\cos\varphi.$$

où U et I désignent les valeurs efficaces de la tension aux bornes et de l'intensité et φ la phase de la tension par rapport à l'intensité.

Remarque : Notons que la puissance instantanée peut s'écrire :

$$p(t)=\mathcal{P}+UI\cos(2\omega t+\varphi).$$

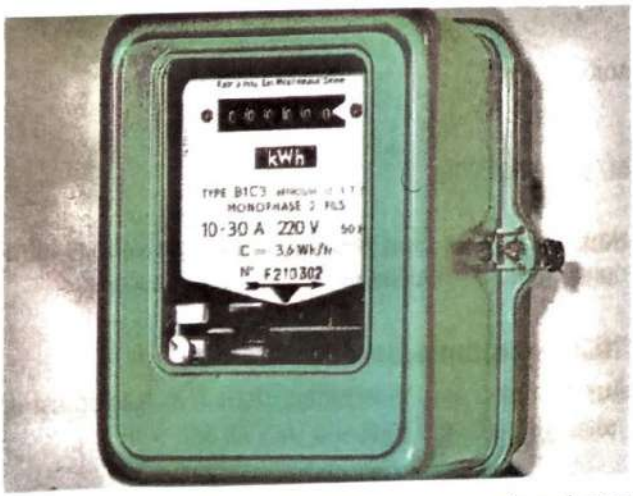
$p(t)$ varie donc autour de la valeur moyenne $\mathcal{P}$ avec la fréquence $2f$; $p(t)$ pouvant être positif ou négatif, le dipôle est tantôt effectivement récepteur ($p>0$), tantôt effectivement générateur ($p<0$) au cours d'une même période.



3. *L'interface utilisée pour obtenir l'écran de la figure 2 permet aussi d'effectuer le produit ui, donc de visualiser les variations de la puissance instantanée (courbe verte). On constate que cette puissance a une valeur moyenne non nulle et que sa fréquence est le double de celle de la tension et de l'intensité.*

appareils	cos φ moyen
lampe à incandescence	1
convecteur	≈ 1
lampe à fluorescence	0,5
four à induction	0,85
machine à souder	0,8 à 0,9
transformateur redresseur pour soudage à l'arc	0,7 à 0,8
moteur asynchrone	
à vide	0,17
à charge moitié	0,73
à pleine charge	0,85

4. *Facteurs de puissance de quelques appareils électriques.*



5. *Compteur E.D.F. Un tel compteur mesure la puissance active consommée par une installation. Le mouvement du disque est dû au phénomène d'induction.*

Scanné avec CamScanner

15.1.3 puissance apparente

Par définition, le produit de la tension efficace aux bornes du dipôle et de l'intensité efficace est appelé **puissance apparente**, notée souvent S :

$$S = UI.$$

En électrotechnique, la puissance apparente est exprimée en **voltampères** (symbole : **VA**), pour la distinguer de la puissance effectivement consommée (la puissance active), exprimée en watts.

Notons enfin que : $\frac{\mathcal{P}}{S} = \cos\varphi$.

15.2 puissance moyenne absorbée par des dipôles idéaux

15.2.1 conducteur ohmique

L'intensité dans un conducteur ohmique, de résistance R, et la tension aux bornes sont en phase ($\varphi = 0$); le facteur de puissance est égal à 1, et (*fig.* 6) :

$$\mathcal{P}_R = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}.$$

Cette puissance moyenne, ou puissance active, est absorbée par effet Joule; elle est transférée à l'extérieur sous forme de chaleur.

En utilisant les amplitudes de l'intensité et de la tension, la relation ci-dessus s'écrit :

$$\mathcal{P}_R = \frac{RI_m^2}{2} = \frac{U_m^2}{2R}.$$

Or, par définition :

- L'intensité efficace d'un courant sinusoïdal d'amplitude I_m est égale à l'intensité I du courant continu qui, passant dans un même conducteur ohmique, céderait une puissance égale à la puissance moyenne cédée par le courant sinusoïdal.

D'où : $RI^2 = R\frac{I_m^2}{2}$,

soit : $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$

et, par extension : $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$.

Nous retrouvons ainsi théoriquement les relations introduites expérimentalement en classe de Seconde.

15.2.2 condensateur parfait

Aux bornes d'un condensateur parfait, la tension est en retard de $\pi/2$ sur l'intensité (*fig.* 7), soit :

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}, \quad \text{et} \quad \cos\varphi = 0;$$

d'où : $\mathcal{P}_C = 0$.

APPLICATION 1

Les facteurs de puissance des circuits primaire et secondaire d'un transformateur en fonctionnement sont très voisins de l'unité. La tension efficace aux bornes du secondaire de ce transformateur, supposé parfait, est $U_2 = 120$ V; l'intensité efficace du courant qui y circule est $I_2 = 20$ A. La tension efficace aux bornes du primaire est de 20 kV.

1/ Quelle est la puissance à la sortie du transformateur?

2/ Quelle est l'intensité du courant dans le primaire?

3/ Quel est le rapport entre le nombre de tours de fil du primaire et le nombre de tours de fil du secondaire?

1/ La puissance disponible à la sortie du transformateur est :

$$\mathcal{P} = U_2 I_2 \cos\varphi_2, \quad \text{avec} \quad \cos\varphi_2 = 1;$$

d'où : $\mathcal{P} = 120 \times 20 = 2\,400$ W.

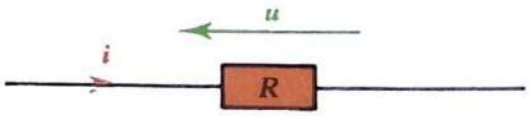
2/ Puisque ce transformateur est considéré comme parfait, nous devons retrouver la même puissance à l'entrée et à la sortie (rendement égal à 1). Donc :

$$I_1 = \frac{\mathcal{P}}{U_1 \cos\varphi_1}, \quad \text{avec} \quad \cos\varphi_1 = 1;$$

d'où : $I_1 = \frac{2\,400}{20\,000} = 0{,}12$ A.

3/ Nous avons :

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1}, \quad \text{soit} \quad \frac{n_1}{n_2} = \frac{20\,000}{120} = 167.$$



$\cos\varphi = 1$ $\quad \mathcal{P}_R = RI^2$

6. ***Conducteur ohmique. La phase φ de u par rapport à i est nulle : $\cos\varphi = 1$.***

Scanné avec CamScanner

La puissance moyenne est nulle : *un condensateur parfait ne consomme globalement aucune énergie.* Interprétons ce résultat. La puissance instantanée aux bornes du condensateur est de la forme :

$$p = UI \sin 2\omega t.$$

Elle varie avec une pulsation 2ω; la raison en est que le condensateur emmagasine de l'énergie sur une demi-période et la restitue sur la demi-période suivante. Globalement, l'échange d'énergie est donc nul.

15.2.3 bobine non résistive

Soit une bobine de résistance nulle et d'inductance L. La tension aux bornes de cette bobine est en avance de $\pi/2$ sur l'intensité (*fig.* 8), soit :

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \text{et} \quad \cos\varphi = 0;$$

d'où :

$$\mathcal{P}_L = 0.$$

La puissance moyenne est nulle : *une bobine non résistive ne consomme globalement aucune énergie;* elle emmagasine de l'énergie sur une demi-période et la restitue sur la demi-période suivante.

15.2.4 dipôle série (*R, L, C*)

Le facteur de puissance a pour expression :

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z},$$

avec :

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}.$$

De plus :

$$U = ZI;$$

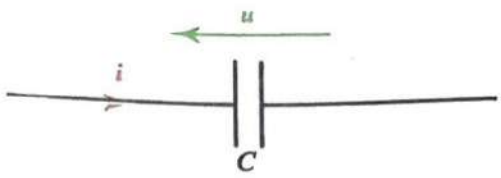
d'où :

$$\mathcal{P} = UI\cos\varphi = RI^2.$$

Nous trouvons une puissance moyenne égale à celle consommée par un simple conducteur ohmique, de résistance R. Autrement dit :

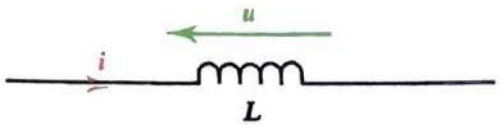
• En régime alternatif sinusoïdal, toute la puissance moyenne consommée par un dipôle série (R, L, C) est absorbée dans la partie résistive de ce dipôle, par effet Joule, et transférée à l'extérieur sous forme de chaleur :

$$\mathcal{P} = UI\cos\varphi = RI^2.$$



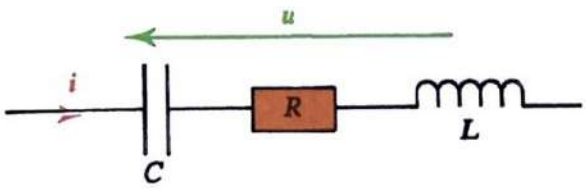
$\cos\varphi = 0 \qquad \mathcal{P}_C = 0$

7. *Condensateur parfait. La phase φ de u par rapport à i est égale à $-\pi/2$: $\cos\varphi = 0$.*



$\cos\varphi = 0 \qquad \mathcal{P}_L = 0$

8. *Inductance pure. La phase φ de u par rapport à i est égale à $\pi/2$: $\cos\varphi = 0$.*



$\cos\varphi = \frac{R}{Z} \qquad \mathcal{P} = RI^2 = UI\cos\varphi$

9. *Dipôle série (R, L, C). Toute la puissance moyenne consommée est absorbée par la résistance.*

Scanné avec CamScanner

fiche expérimentale

VISUALISATION D'UNE PUISSANCE INSTANTANÉE ET EXPLOITATION

1. Objectifs

Considérons un dipôle (R, L, C) alimenté en courant sinusoïdal (*fig.* 1).
Soit $u = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$ la tension entre ses bornes et $i = I\sqrt{2}\cos\omega t$ l'intensité du courant qui le traverse.
La tension u peut être directement prélevée aux bornes du dipôle (R, L, C). Une tension u' proportionnelle à l'intensité $(u' = ki)$ peut être prélevée aux bornes d'un conducteur ohmique de résistance r branché en série (*fig.* 1) ou mieux d'un détecteur de courant (voir *fiche technique* I).
L'objectif est de visualiser sur l'écran d'un oscillographe ou du moniteur d'un ordinateur les variations de la puissance instantanée en fonction du temps, soit :

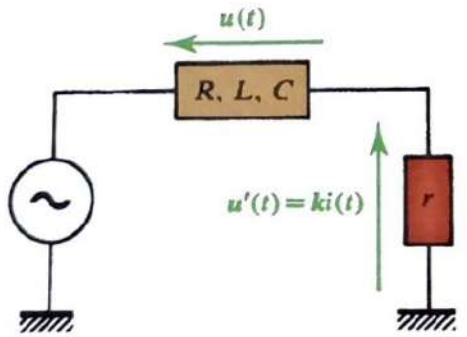
$$t \longmapsto p = ui$$

ou, à défaut, celles de :

$$t \longmapsto uu' = kui,$$

grandeur proportionnelle à p.
Cette visualisation sera ensuite utilisée pour déterminer la puissance moyenne :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt = UI\cos\varphi.$$



1.

2. Utilisation d'un ordinateur

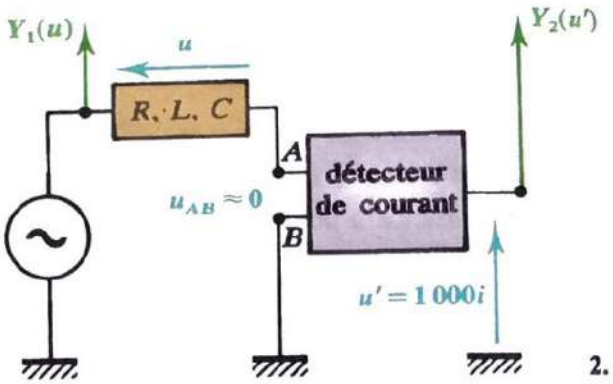
L'ordinateur doit être équipé d'une interface adaptée (par exemple, interface *Candibus*).
Les tensions u et $u' = ki$ sont appliquées à l'entrée de l'interface qui les transmet à l'ordinateur. Celui-ci, grâce à un logiciel approprié, stocke les mesures transmises et trace les représentations graphiques de $t \longrightarrow u(t)$ et $t \longrightarrow i(t)$. Dans le même temps il effectue le produit ui et trace $t \longrightarrow p(t)$.
L'ordinateur effectue aussi le calcul de la puissance moyenne $\mathcal{P}$ (*photo* 3, en début de chapitre).

3. Utilisation d'un oscillographe et d'un détecteur de courant

• *Montage*
Le dipôle série est constitué d'une résistance $(R = 100\ \Omega)$, d'un condensateur $(C = 100\ \text{nF})$ et d'une bobine $(L = 4{,}3\ \text{mH};\ r = 10\ \Omega)$.

La tension efficace maintenue aux bornes du dipôle est $U = 1\ \text{V}$; la fréquence choisie est $f = 10\ \text{kHz}$.
Le dipôle est associé à un détecteur de courant (voir *fiche technique* I) qui délivre une tension $u' = 1\,000\ i$ (unités S.I.) proportionnelle à l'intensité i du courant qui traverse le dipôle (*fig.* 2).
Les tensions u aux bornes du dipôle et u' à la sortie du détecteur sont appliquées à l'entrée d'un oscillographe (balayage : $10\ \mu\text{s}.\text{div}^{-1}$). La figure 3 reproduit les oscillogrammes observés :

voie 1 $(0{,}5\ \text{V}.\text{div}^{-1})$, $t \longmapsto u(t)$;
voie 2 $(5\ \text{V}.\text{div}^{-1})$, $t \longmapsto u'(t) = 1\,000\ i(t)$.



2.

• *Exploitation*
Déterminons U, I et φ à partir des oscillogrammes précédents; il vient :

voie 1, $U_m = 0{,}5 \times 2{,}8 = 1{,}4\ \text{V}$, soit $U \approx 1\ \text{V}$;
voie 2, $1\,000\ I_m = 5 \times 1{,}8 = 9\ \text{V}$, soit $I = 6{,}4\ \text{mA}$.

L'intensité est en retard sur la tension de $\theta = 12\ \mu\text{s}$; d'où :

$$\varphi = 2\pi\,\frac{\theta}{T} = 2\pi \times \frac{12}{100} = 0{,}24\ \pi,$$

et : $\cos\varphi = 0{,}73.$

Nous déduisons de ces résultats la puissance active : $\mathcal{P} = 1 \times 6{,}4.10^{-3} \times 0{,}73 = 4{,}7\ \text{mW}$.

4. Adjonction d'un multiplieur

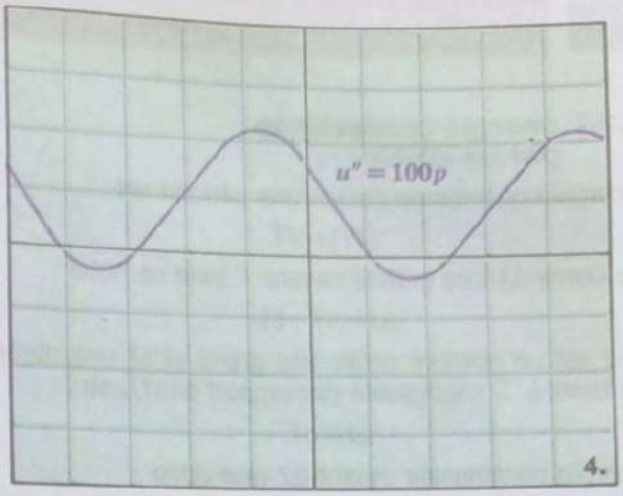
La tension u aux bornes du dipôle précédent et la tension $u' = 1\,000\ i$ (unités S.I.) donnée par le détecteur sont appliquées à l'entrée d'un multiplieur (voir *fiche technique* II).
A la sortie du multiplieur, nous disposons d'une tension u'' telle que :

$$u'' = \frac{1}{10}\,uu' = 100\ ui = 100\ p.$$

Cette tension u'', proportionnelle à la puissance instantanée $p(t)$ reçue par le dipôle, est appliquée à l'entrée de l'oscillographe.

Scanné avec CamScanner





La figure 4 reproduit l'oscillogramme observé (balayage : 10 $\mu s.div^{-1}$; sensibilité : 0,5 $V.div^{-1}$).

• *Exploitation*

Nous savons que :

$$p(t) = UI\left[\cos\varphi + \cos(2\omega t + \varphi)\right],$$

relation qui s'écrit : $p = \mathcal{P} + UI\cos(2\omega t + \varphi)$.

La tension u'' observée est donc de la forme :

$$u'' = 100\,\mathcal{P} + 100\,UI\cos(2\omega t + \varphi).$$

Sur l'écran de l'oscillographe, nous observons bien une sinusoïde de fréquence $2f$. Cette sinusoïde est décalée d'environ 0,5 V par rapport à l'origine des tensions; d'où : $100\,\mathcal{P} = 0{,}5$ V,

soit : $\mathcal{P} = 5$ mW,

résultat du même ordre de grandeur que celui trouvé précédemment.

Remarquons par ailleurs que la puissance maximale reçue par le dipôle est d'environ 12 mW et la puissance minimale d'environ $-1{,}5$ mW (le dipôle cède alors de l'énergie).

APPLICATION 2

Une usine consomme une puissance $\mathcal{P} = 200$ kW. Cette puissance électrique est fournie par l'E.D.F. par l'intermédiaire d'une ligne de transport de grande longueur, de résistance $R = 100\ \Omega$.

1/ Soit U la tension efficace dont dispose l'utilisateur au bout de la ligne. Exprimer en fonction de U, de la puissance consommée $\mathcal{P}$ et du facteur de puissance de l'installation, la puissance $\mathcal{P}'$ perdue par effet Joule dans la ligne de transport.

2/ Le facteur de puissance de l'installation est 0,9. Comparer $\mathcal{P}'$ à $\mathcal{P}$ dans le cas d'un transport sous une tension U de 20 kV, puis sous une tension de 220 V.
Pourquoi, sur de longues distances, l'E.D.F. assure-t-elle le transport de l'énergie électrique sous de hautes, voire de très hautes tensions?

3/ Le facteur de puissance de l'installation est 0,7. Comparer $\mathcal{P}'$ à $\mathcal{P}$ avec $U = 20$ kV.
Pourquoi l'E.D.F. pénalise-t-elle les consommateurs dont l'installation a un facteur de puissance faible?

1/ La puissance consommée vaut :

$$\mathcal{P} = UI\cos\varphi, \quad \text{soit} \quad I = \frac{\mathcal{P}}{U\cos\varphi}.$$

La puissance perdue par effet Joule dans la ligne de transport est : $\mathcal{P}' = RI^2 = R\dfrac{\mathcal{P}^2}{U^2\cos^2\varphi}$.

D'où : $\dfrac{\mathcal{P}'}{\mathcal{P}} = R\dfrac{\mathcal{P}}{U^2\cos^2\varphi}$.

2/ Avec $R = 100\ \Omega$, $\mathcal{P} = 2.10^5$ W et $\cos\varphi = 0{,}9$, il vient, en posant $\eta = \dfrac{\mathcal{P}'}{\mathcal{P}}$: pour $U = 2.10^4$ V, $\eta = 6{,}17.10^{-2}$, soit 6 %;

pour $U = 220$ V, $\eta = 510$.

Dans ce dernier cas, la puissance perdue lors du transport vaut 510 fois la puissance consommée par l'utilisateur (à qui l'E.D.F. ne facture que la puissance consommée)! On comprend pourquoi, sur de longues distances, l'énergie électrique est transportée sous de hautes ou très hautes tensions.

3/ Avec $R = 100\ \Omega$, $\mathcal{P} = 2.10^5$ W et $U = 2.10^4$ V, il vient :

pour $\cos\varphi = 0{,}7$, $\eta = 10{,}2$ % et pour $\cos\varphi = 0{,}9$, $\eta = 6$ %.

L'énergie électrique perdue lors du transport (et non facturée) est plus importante lorsque le facteur de puissance de l'installation est faible.

Cela explique pourquoi l'E.D.F. impose à l'utilisateur des installations dont le facteur de puissance est élevé. Au-dessous de 0,86, le consommateur est pénalisé.

On peut améliorer le facteur de puissance en disposant convenablement des condensateurs qui compensent en partie les effets inductifs dus aux bobinages des moteurs.

Scanné avec CamScanner

15.3 énergie consommée par un dipôle (R, L, C)

15.3.1 énergie consommée par un dipôle

L'énergie consommée durant une période est :

$$\mathcal{E}(T) = \mathcal{P}T.$$

Une durée Δt très grande devant T peut se noter :

$$\Delta t = nT + \delta t,$$

où n est un nombre entier très grand et δt une durée inférieure à T, négligeable par rapport à nT, soit :

$$\Delta t \approx nT.$$

L'énergie consommée durant Δt vaut donc :

$$\mathcal{E} = n\mathcal{E}(T) = \mathcal{P}nT,$$

soit :

$$\mathcal{E} = \mathcal{P}\Delta t.$$

- **Pour une durée Δt longue par rapport à la période T, l'énergie consommée par une portion de circuit est égale au produit de la puissance moyenne consommée par la durée Δt**

L'énergie s'exprime en joules, Δt étant mesurée en secondes.

15.3.2 échange d'énergie

Nous savons que la tension u_{AB} aux bornes A et B d'un dipôle (R, L, C), orienté de A vers B, vérifie l'équation :

$$u_{AB} = L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C}.$$

La puissance instantanée consommée par un tel circuit est, à une date t :

$$p = u_{AB}i = L\frac{di}{dt}i + Ri^2 + \frac{q}{C}i$$

$$= Li\frac{di}{dt} + Ri^2 + \frac{1}{C}q\frac{dq}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) + Ri^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{2C}\right).$$

Quelle est la signification physique de ces trois termes?

- $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) = \frac{d}{dt}(\mathcal{E}_m) = p_m$ représente la puissance instantanée correspondant à l'énergie magnétique $\mathcal{E}_m$ de la bobine. Selon le signe de p_m, la bobine emmagasine ou restitue de l'énergie.

- $Ri^2 = p_J$ est la puissance Joule, toujours positive, à laquelle correspond un transfert d'énergie vers l'extérieur sous forme de chaleur.

- $\frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{2C}\right) = \frac{d}{dt}(\mathcal{E}_e) = p_e$ représente la puissance instantanée correspondant à l'énergie électrique $\mathcal{E}_e$ du condensateur. Selon le signe de p_e le condensateur emmagasine ou restitue de l'énergie.

Finalement, le bilan d'énergie s'exprime, à chaque instant, sous la forme :

$$p - Ri^2 = p_e + p_m = \frac{d}{dt}(\mathcal{E}_e + \mathcal{E}_m).$$

La puissance moyenne consommée par le dipôle étant totalement absorbée par la résistance, ce bilan devient, sur une période :

$$\mathcal{E}(T) = \int_0^T p\,dt = \int_0^T Ri^2\,dt$$

et :

$$[\mathcal{E}_e + \mathcal{E}_m]_0^T = 0,$$

cette dernière relation exprimant qu'il y a transfert périodique d'énergie entre la bobine et le condensateur.

15.3.3 énergies à la résonance

Déterminons, *à chaque instant*, la somme des énergies emmagasinées par le condensateur et par la bobine *à la résonance* ($\omega = \omega_0$ et $\varphi = 0$).

Nous savons, d'une part, que :

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}.$$

Or, à la résonance, la tension u_C aux bornes du condensateur s'écrit :

$$u_C = \frac{I_m}{C\omega_0}\sin\omega_0 t;$$

d'où, avec $q = Cu_C$:

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2}\frac{I_m^2}{C\omega_0^2}\sin^2\omega_0 t,$$

ou encore, avec $LC\omega_0^2 = 1$:

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2}LI_m^2\sin^2\omega_0 t.$$

D'autre part :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}LI_m^2\cos^2\omega_0 t.$$

Il vient alors :

$$\mathcal{E}_e + \mathcal{E}_m = \frac{1}{2}LI_m^2 = LI^2.$$

A la résonance et à chaque instant, la somme des énergies emmagasinées par le condensateur et par la bobine est constante.

Remarque 1 : Nous avons vu (*cf.* 15.3.2) que la puissance instantanée $p = u_{AB}i$ consommée par un dipôle (R, L, C) obéissait à la relation :

$$p - Ri^2 = \frac{d}{dt}(\mathcal{E}_e + \mathcal{E}_m).$$

Il en résulte, à la résonance :

$$p = u_{AB}i = Ri^2,$$

la somme $(\mathcal{E}_e + \mathcal{E}_m)$ étant constante. Ce dernier résultat est en accord avec la relation, à la résonance :

$$u_{AB} = Ri.$$

Scanné avec CamScanner

Remarque 2 : La puissance consommée à la résonance est maximale, l'intensité efficace I étant maximale, et vaut :

$$\mathcal{P}(\omega_0) = RI^2(\omega_0).$$

Pour les pulsations ω_1 et ω_2 correspondant aux limites de la bande passante, la puissance consommée est égale à :

$$\mathcal{P}(\omega_1) = \mathcal{P}(\omega_2) = RI^2(\omega_1) = \frac{RI^2(\omega_0)}{2} = \frac{\mathcal{P}(\omega_0)}{2}.$$

• Les limites de la bande passante correspondent à une diminution de moitié de la puissance consommée à la résonance.

La définition de la bande passante en puissance (facteur 1/2) justifie le choix de $1/\sqrt{2}$ pour la bande passante en intensité, définie dans le chapitre précédent.

APPLICATION 3

On considère un dipôle série (R, L, C), aux bornes duquel est appliquée une tension sinusoïdale de valeur efficace $U = 24$ V.

1/ Déterminer pour la fréquence de résonance d'intensité et pour la fréquence de 50 Hz :

a/ l'intensité efficace du courant;
b/ la puissance apparente;
c/ la puissance moyenne consommée.

2/ Pour quelles fréquences la puissance moyenne consommée vaut-elle la moitié de celle absorbée à la résonance?

3/ A la résonance, faire le rapport entre l'énergie accumulée et l'énergie dissipée pendant chaque période et exprimer ce rapport en fonction du facteur de qualité du circuit.

Données : $R = 20\ \Omega$; $L = 0{,}5$ H; $C = 5\ \mu$F.

1 a/ A la résonance d'intensité, nous avons :

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 632 \text{ rad.s}^{-1} \text{ et } f_0 = 100{,}7 \text{ Hz}.$$

De plus :

$$Z = R = 20\ \Omega, \quad \text{soit} \quad I = \frac{U}{Z} = 1{,}2 \text{ A}.$$

Pour $f = 50$ Hz :

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = 480\ \Omega;$$

soit :

$$I = \frac{U}{Z} = 0{,}05 \text{ A}.$$

b/ Pour $f = f_0 = 100{,}7$ Hz :

$$S = UI = 24 \times 1{,}2 = 28{,}8 \text{ VA}.$$

Pour $f = 50$ Hz :

$$S = UI = 24 \times 0{,}05 = 1{,}2 \text{ VA}.$$

Pour $f = f_0 = 100{,}7$ Hz :

$$\cos\varphi = 1, \quad \text{et} \quad \mathcal{P} = S = 28{,}8 \text{ W}.$$

Pour $f = 50$ Hz :

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{20}{480} = 0{,}042$$

et :

$$\mathcal{P} = 1{,}2 \times 0{,}042 = 0{,}05 \text{ W}.$$

2/ Pour de telles fréquences, nous avons :

$$\frac{\mathcal{P}(f)}{\mathcal{P}(f_0)} = \frac{1}{2} = \frac{RI^2(f)}{RI^2(f_0)},$$

d'où :

$$\frac{I(f)}{I(f_0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Il s'agit des fréquences f_1 et f_2 qui limitent la bande passante du dipôle.

3/ A la résonance, l'énergie emmagasinée est constante et vaut :

$$\mathcal{E} = LI^2.$$

L'énergie dissipée par effet Joule pendant une période vaut :

$$\mathcal{E}_J = RI^2 T_0.$$

Il vient :

$$\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_J} = \frac{LI^2}{RI^2 T_0} = \frac{L}{RT_0}.$$

Ce rapport, compte tenu du fait que $\frac{L\omega_0}{R} = Q$, peut s'exprimer simplement en fonction du facteur de qualité Q du dipôle :

$$\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_J} = \frac{Q}{\omega_0 T_0} = \frac{Q}{2\pi};$$

il est directement lié au facteur de qualité du circuit.
Numériquement :

$$\mathcal{E} = 0{,}72 \text{ J}, \quad \mathcal{E}_J = 0{,}286 \text{ J}, \quad \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_J} = 2{,}52,$$

d'où :

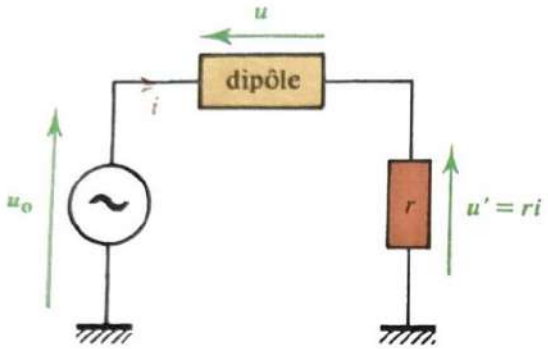
$$Q = 15{,}8.$$

Scanné avec CamScanner

fiches techniques

I. DÉTECTEUR DE COURANT

Considérons un dipôle alimenté sous une tension u_0 sinusoïdale. Si, pour obtenir une tension u' proportionnelle à l'intensité i du courant qui traverse le dipôle, nous branchons en série une résistance r ($u' = ri$), le dipôle n'est plus alimenté sous la tension u_0 mais sous la tension $u = u_0 - u'$ (*fig.* 1).



1. *Le dipôle est alimenté sous la tension $u = u_0 - u'$.*

Le détecteur de courant étudié permet d'obtenir une tension proportionnelle à i, sans provoquer cette chute de tension.

Le montage (*fig.* 2) comporte deux amplificateurs opérationnels regroupés dans un même circuit intégré (TLO 82). Les amplicateurs étant idéaux :

$$u_1 = -R_1 i \quad \text{et} \quad u_2 = -u_1 \frac{2R_2}{R_2} = -2u_1,$$

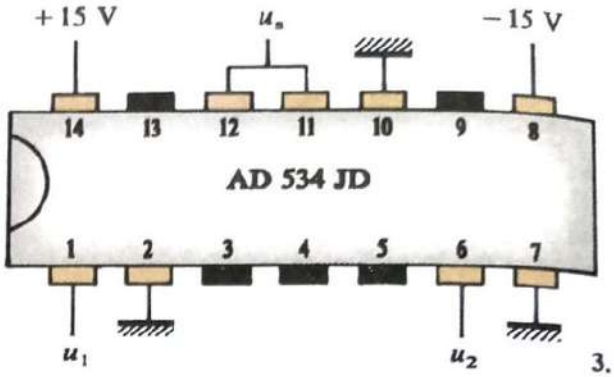
soit : $u_2 = 2R_1 i = 1\,000\, i$ (unités S. I.).

De plus $u_{AB} = 0$; le dipôle reste alimenté sous la tension $u_0 = u$.

II. MULTIPLIEUR

Un multiplieur peut être réalisé avec, par exemple, le circuit intégré AD 534 JD, dont les broches sont utilisées de la manière qu'indique la figure 3.
Si u_1 et u_2 sont les deux tensions d'entrée et u_s la tension de sortie, on obtient directement :

$$u_s = \frac{1}{10} u_1 u_2 \quad \text{(unités S. I.)}.$$



3.

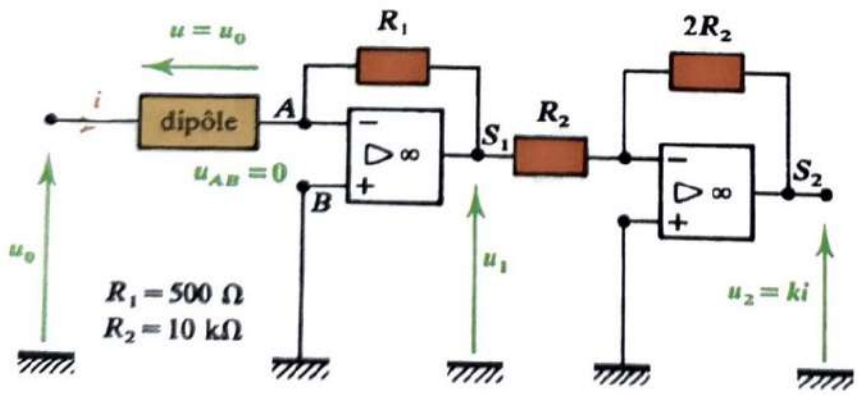
III. WATTMÈTRE

• *Description*

Une partie de l'appareil est montée en série avec le dipôle, et l'autre en parallèle (*photo* 4).
Les diverses entrées correspondent à différents calibres de puissance.



4. *Wattmètre. Les bornes A et B sont branchées en série dans le circuit (comme les bornes d'un ampèremètre). Les bornes C et D sont branchées en dérivation sur le dipôle (comme les bornes d'un voltmètre).*



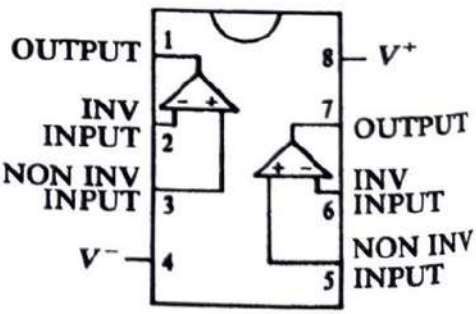
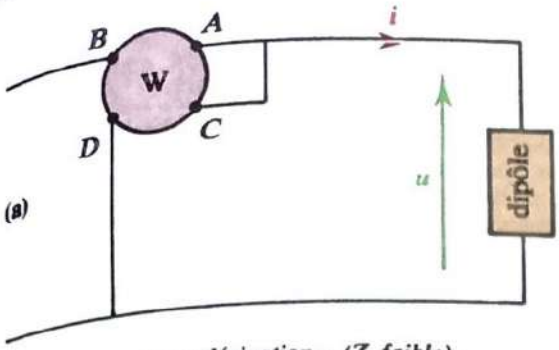


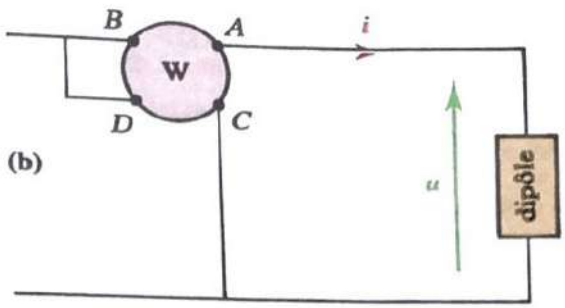
schéma de brochage du TL 082 (composant RCA)

2. *Le détecteur de courant permet d'obtenir une tension u' proportionnelle à i tout en maintenant une tension $u = u_0$ aux bornes du dipôle. Les deux amplificateurs sont regroupés dans un même boîtier.*

Scanné avec CamScanner



5a. *Montage « courte dérivation » (Z faible).*



5b. *Montage « longue dérivation » (Z grand).*

• *Branchement*

Deux types de branchements sont réalisables :

— pour les impédances faibles, montage dit « courte dérivation » (*fig.* 5a);

— pour les grandes impédances, montage dit « longue dérivation » (*fig.* 5b).

• *Utilisation*

On obtient par simple lecture la puissance active $\mathcal{P}$ consommée par un dipôle.

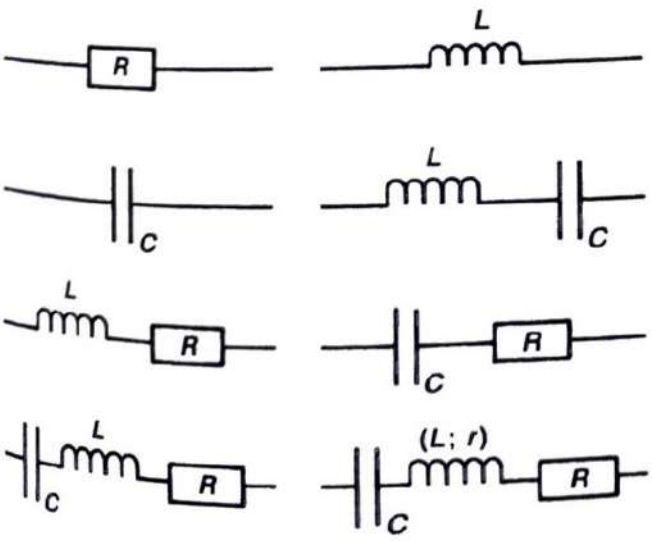
Notons que si l'on a mesuré par ailleurs U et I, on peut alors calculer directement le facteur de puissance par $\cos\varphi = \dfrac{\mathcal{P}}{UI}$.

EXERCICES

L'essentiel du cours

15.1 A La figure représente huit dipôles aux bornes desquels on applique une tension sinusoïdale de valeur efficace U et de fréquence f; l'intensité qui les traverse a pour valeur efficace I. Pour chacun de ces dipôles, exprimer la puissance moyenne :

a/ en fonction de I, de f et des caractéristiques du dipôle;
b/ en fonction de U, de f et des caractéristiques du dipôle.



15.2 A La puissance active consommée dans un dipôle soumis à une tension sinusoïdale est une puissance moyenne donnée par la relation :

$$\mathcal{P} = UI\cos\varphi.$$

1/ Que représentent les lettres U, I et φ?

2/ Quelles sont les unités S.I. correspondantes?

3/ Définir la puissance apparente S. Quelle est l'unité employée?

4/ On connaît $\mathcal{P}$. Quelle est l'énergie moyenne consommée dans un dipôle pendant une durée $\tau \gg T$?

5/ Exprimer $\mathcal{P}$ en fonction des amplitudes U_m et I_m de la tension et de l'intensité.

15.3 AB3 La tension aux bornes d'un appareil est :

$$u_{AB} = 311\cos 100\pi t.$$

L'intensité du courant qui le traverse est (en A) :

$$i = 2{,}4\cos(100\pi t + 0{,}3).$$

On demande :

a/ l'intensité et la tension efficaces;
b/ la phase de l'intensité par rapport à la tension (en rad);
c/ le facteur de puissance;
d/ la puissance apparente;
e/ la puissance moyenne consommée;
f/ l'énergie consommée (en J et en kWh) pendant 15 h de fonctionnement.

Scanné avec CamScanner

EXERCICES

Exercices de base

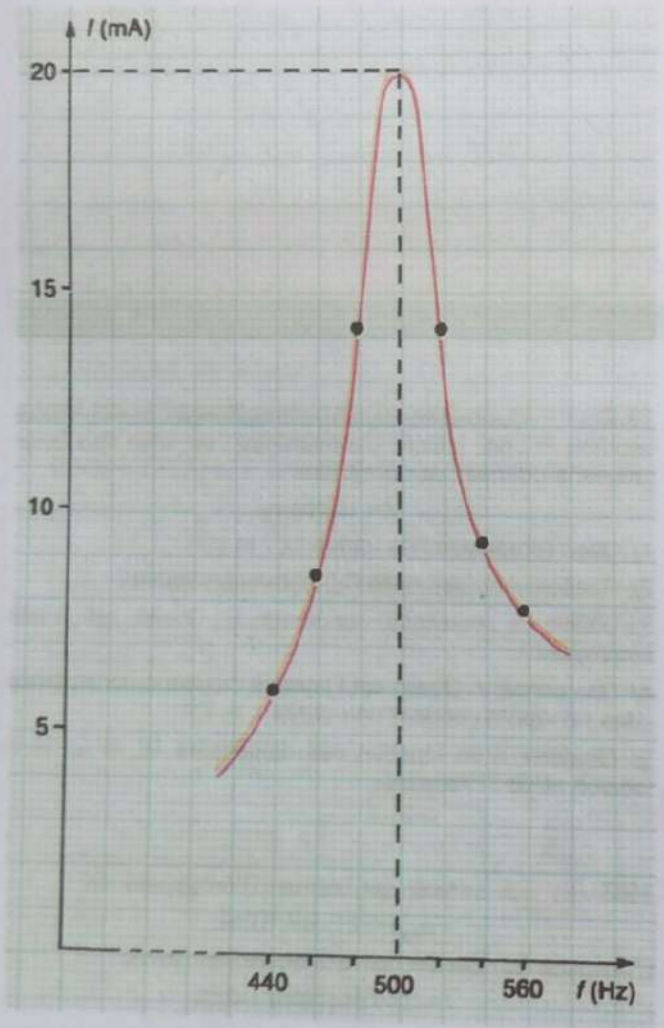
15.4 AB3C A l'aide d'un wattmètre, on a mesuré la puissance moyenne consommée dans un appareil électrique, soit 2,1 kW. La tension efficace est de 220 V, pour une intensité efficace de 10,1 A. La fréquence est celle du secteur.

1/ Calculer le facteur de puissance de l'appareil.

2/ Calculer l'impédance de cet appareil.

3/ Du point de vue électrique, ce récepteur est équivalent à une résistance R et une inductance L. Exprimer la puissance moyenne consommée en fonction de R et de l'intensité efficace I. Calculer R et L.

15.5 AB3 Un circuit en série comprend un conducteur ohmique de résistance R, un condensateur de capacité C, une bobine d'inductance L et de résistance négligeable. Un générateur maintient aux bornes de ce circuit une tension sinusoïdale de valeur efficace constante $U = 4$ V et de fréquence variable. On a relevé l'intensité efficace I en fonction de la fréquence f (figure).



1/ Exprimer les puissances moyennes consommées par le conducteur ohmique, par la bobine, par le condensateur et par le circuit. Exprimer cette dernière puissance en fonction de R et de I.

2/ Calculer la puissance moyenne maximale $\mathcal{P}_0$ consommée par le circuit. Pour quelle fréquence est-elle obtenue ? Calculer la résistance R.

3/ Calculer la puissance moyenne consommée lorsque $f = 440$ Hz. Quel est alors le facteur de puissance du circuit ?

4/ Pour les fréquences $f_1 = 481$ Hz et $f_2 = 521$ Hz, la puissance moyenne consommée est $\mathcal{P} = 40$ mW. Comparer cette puissance à $\mathcal{P}_0$. Que représentent les fréquences f_1 et f_2 ? Quels sont alors le facteur de puissance et l'impédance du circuit ?

15.6 AB3C Un circuit est constitué d'un conducteur ohmique de résistance R et d'une bobine de résistance négligeable.

1/ On alimente le circuit sous une tension continue de 6 V. L'intensité du courant est 0,2 A. Déterminer la résistance et la puissance consommée.

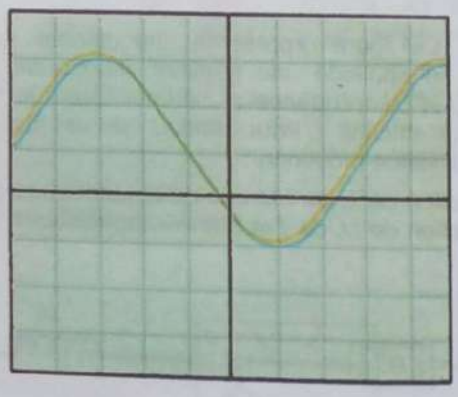
2/ Le circuit est ensuite alimenté sous une tension alternative de valeur efficace 6 V et de fréquence 50 Hz. L'intensité efficace est 0,1 A. Calculer :

a/ la puissance consommée ;
b/ le facteur de puissance ;
c/ la réactance $L\omega$ du circuit et l'inductance L de la bobine.

3/ Un condensateur associé en série ramène le facteur de puissance du circuit à 0,8. Calculer :

a/ l'impédance du circuit et sa réactance ;
b/ les deux valeurs possibles de la capacité du condensateur ;
c/ la puissance consommée par ce circuit si la tension efficace aux bornes de l'association reste égale à 6 V.

15.7 AB3 La tension visualisée sur l'oscillogramme (figure) est proportionnelle à la puissance instantanée reçue par un circuit (R, L, C) alimenté sous une tension $u(t) = U\sqrt{2}\cos \omega t$ et parcouru par un courant d'intensité $i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$.



1/ Montrer que la puissance instantanée est de la forme :

$$p(t) = UI[\cos(2\omega t + \varphi) + \cos \varphi].$$

2/ A partir de l'oscillogramme, déterminer la puissance moyenne consommée et la puissance apparente. La sensibilité de l'oscillographe est réglée sur 2 V par division. Le coefficient de proportionnalité entre la puissance et la tension détectée est 0,1 W . V $^{-1}$.

3/ Déterminer le facteur de puissance du circuit et les valeurs possibles de la phase.

4/ Déterminer la pulsation et la fréquence de la tension. (Le balayage est réglé sur 0,5 ms par division.)

5/ La résistance du circuit est de 50 Ω. Calculer U et I.

Scanné avec CamScanner

6/ Déterminer les valeurs extrémales de la puissance instantanée à partir de l'oscillogramme. A certains instants, le circuit, qui ne comporte pourtant pas de générateur, cède de l'énergie au lieu d'en recevoir. D'où provient cette énergie ?

15.8 Un moteur alimenté par une tension sinusoïdale de valeur efficace 220 V est traversé par un courant d'intensité efficace 5 A. Son facteur de puissance est 0,9. Il fournit une puissance mécanique de 900 W.

1/ AB3 Calculer la puissance apparente et la puissance moyenne consommée par le moteur.

2/ B3C Calculer le rendement du moteur et la puissance dissipée sous forme thermique.

3/ C Dans une bobine de résistance r et d'inductance L, la puissance moyenne consommée vaut :

$$\mathcal{P} = UI \cos \varphi = rI^2.$$

Un moteur comporte des bobines de résistance r et d'inductance L. Pourquoi l'égalité précédente ne s'applique-t-elle pas à ce moteur en fonctionnement ?

15.9 A Un transformateur parfait fournit un courant de 30 A sous une tension efficace de 220 V. La tension efficace au primaire est égale à 20 kV.

1/ Quelles sont les puissances moyennes dans le circuit primaire et dans le circuit secondaire ? (On suppose que la tension est en phase avec l'intensité à l'entrée et à la sortie.)

2/ Quelle est l'intensité efficace du courant qui circule dans le primaire ?

3/ Quel est le rapport de transformation ?

15.10 Une lampe consomme une puissance moyenne de 75 W lorsqu'elle est alimentée par une tension sinusoïdale de valeur efficace 220 V. Cette lampe est branchée en série avec un condensateur de capacité C et une bobine de résistance négligeable et d'inductance 1 H. La fréquence est 50 Hz. Pour quelle valeur de C la puissance moyenne consommée est-elle maximale ? Quelle est cette puissance ?

Banc d'essais

15.11 L'impédance d'un appareil électrique est la même que celle d'un dipôle formé par l'association en série d'un conducteur ohmique de résistance $R = 400\ \Omega$ et d'une bobine d'inductance L.
L'appareil est alimenté en courant alternatif délivré par le réseau E.D.F. sous la tension efficace 220 V. L'intensité efficace est de 0,5 A.

1/ Calculer la puissance moyenne dissipée dans cet appareil.

2/ En déduire le facteur de puissance, l'impédance de l'appareil et la valeur de l'inductance L.

↳ **ex.15.4.**

15.12 L'impédance d'un appareil électrique est la même que celle d'un dipôle formé par l'association en série d'un conducteur ohmique de résistance $R = 100\ \Omega$ et d'un condensateur de capacité $C = 10\ \mu F$.
L'appareil est alimenté en courant alternatif délivré par le réseau E.D.F. sous la tension efficace 220 V.

1/ Calculer son facteur de puissance.

2/ Quelle est la puissance moyenne qu'il consomme ? Quelle est l'énergie consommée en 24 h de fonctionnement ?

↳ **ex.15.4.**

15.13 A Un circuit en série comprend un conducteur ohmique de résistance $R = 144\ \Omega$, une bobine de résistance $r = 6\ \Omega$ et d'inductance $L = 1$ H, et un condensateur de capacité $C = 20\ \mu F$. On néglige la résistance des fils de jonction. On applique entre les bornes de ce circuit une tension sinusoïdale de valeur efficace 220 V et de fréquence 50 Hz.

1/ Calculer la puissance moyenne consommée par ce circuit.

2/ Calculer les puissances moyennes consommées par le conducteur ohmique, la bobine et le condensateur.

↳ **ex.15.6.**

Détermination de la nature d'un dipôle

15.14 C Soit un dipôle électrique dont la nature exacte est inconnue. On envisage les hypothèses suivantes ; le dipôle est :

— une bobine de résistance r et d'inductance L ;

— un conducteur ohmique de résistance R et un condensateur de capacité C en série ;

— un conducteur ohmique de résistance R.

1/ On alimente ce dipôle par une tension continue. En régime permanent, un courant constant traverse ce dipôle. On alimente ensuite le dipôle par un courant sinusoïdal de fréquence 50 Hz. On mesure une intensité efficace de 0,6 A, une tension efficace de 120 V, une puissance moyenne dissipée de 36 W.
Déterminer la nature des éléments composant le dipôle et les valeurs de ses paramètres.

2/ On place en série avec le dipôle un condensateur de capacité variable C'. L'ensemble est alimenté par une tension sinusoïdale de fréquence 50 Hz et de valeur efficace 120 V. Déterminer littéralement, puis numériquement, la valeur de la capacité C' pour que la puissance consommée soit maximale. Quelle est alors cette puissance ?

↳ **ex.15.4, 15.5.**

15.15 C Une bobine de résistance 100 Ω et d'inductance 0,1 H est parcourue par un courant sinusoïdal de fréquence f.

1/ Calculer f pour que le facteur de puissance soit égal à 0,3.

2/ Dans ces conditions, on place en série avec la bobine un condensateur afin de ramener le facteur de puissance à 0,95. Quelles sont les valeurs possible de la capacité de ce condensateur ?

↳ **ex.15.6.**

Scanné avec CamScanner

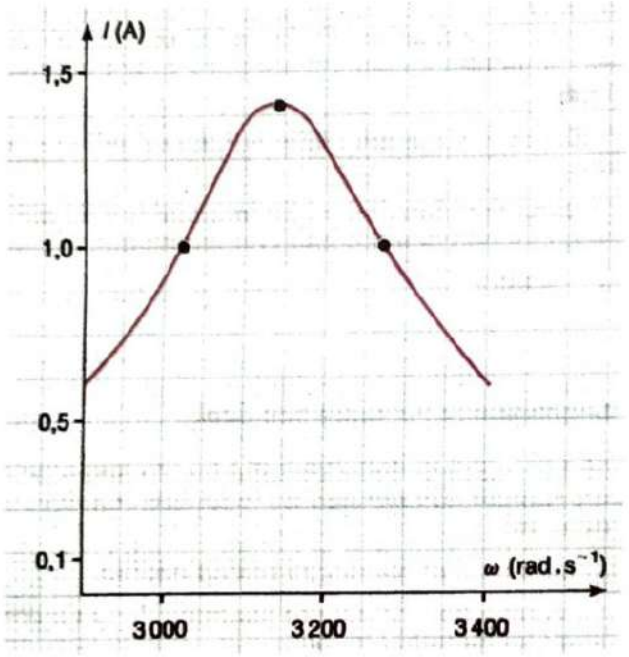
EXERCICES

Puissance et bande passante

15.16 Un dipôle est formé d'un conducteur ohmique de résistance R, d'une bobine de résistance négligeable et d'inductance L et d'un condensateur de capacité C associés en série. Il est soumis à une tension de valeur instantanée :

$$u = U_m \cos \omega t.$$

On donne $U_m = 40$ V. La variation de l'intensité efficace en fonction de la pulsation est représentée sur la figure.



1/ Pour quelle pulsation ω_0 la puissance moyenne consommée par le dipôle est-elle maximale ? Calculer la valeur $\mathcal{P}_0$ du maximum et déterminer la résistance R.

2/ Pour quelles pulsations ω_1 et ω_2 la puissance moyenne consommée par le dipôle est-elle égale à $\frac{1}{2}\mathcal{P}_0$?

3/ Déterminer la bande passante du circuit et calculer le facteur de qualité.

4/ Déterminer le facteur de puissance du circuit pour ω_0, ω_1, ω_2 et $\omega = 2900$ rad . s $^{-1}$.

↳ **ex.15.5.**

Transformateur

15.17 AB3 On applique une tension efficace de 220 V au primaire d'un transformateur parfait. L'intensité efficace du courant qui y circule est égale à 50 mA. Le primaire est formé de 1 050 tours de fil et le secondaire, de 30 tours.

1/ Quelle est la tension efficace au secondaire ?

2/ Quelle est l'intensité efficace du courant dans le secondaire ?

3/ Quelle est la puissance moyenne utilisée au primaire par le transformateur ?

4/ Quelle est la puissance moyenne disponible au secondaire ?

↳ **ex.15.9.**

B3C Un transformateur, connecté à un dipôle par l'intermédiaire d'une ligne de résistance $R = 2\ \Omega$, fournit une puissance de 4 kW sous une tension de 110 V. (On admet que la tension est pratiquement en phase avec l'intensité à l'entrée comme à la sortie de ce transformateur.)

1/ Quelle est l'intensité efficace du courant dans la ligne ?

2/ Quelle est la chute de potentiel dans la ligne ?

3/ Quelle est la tension efficace disponible en bout de ligne ?

4/ Quelle est la perte relative de puissance dans cette ligne ?

5/ On remplace le transformateur précédent par un autre transformateur, de puissance identique mais délivrant une tension efficace de 220 V. Répondre aux mêmes questions. Conclure.

↳ **cours, application 2.**

Exercices bilans

15.19 C2 On considère une bobine d'inductance $L = 0{,}2$ H et de résistance $r = 36\ \Omega$. On veut brancher directement la bobine sur le secteur, qui délivre une tension de fréquence 50 Hz et dont la valeur instantanée est de la forme :

$$u = 220\sqrt{2} \sin \omega t.$$

Mais, pour éviter de détériorer la bobine, on veille à ce que l'intensité efficace ne dépasse pas 2 A. Pour cela, on a le choix entre deux montages :

- brancher en série un condensateur de capacité variable C;
- brancher en série un conducteur ohmique de résistance variable R.

1/ A quelle condition doivent satisfaire R et C pour que l'intensité efficace ne dépasse pas 2 A ?

2/ Pour une même intensité efficace, comparer les puissances moyennes consommées. Quel est le montage le plus économique ?

↳ **ex.15.4.**

15.20 Une source S fournit entre deux points E et F une tension alternative sinusoïdale :

$$u = U\sqrt{2} \cos \omega t$$

de valeur efficace $U = 20$ V et de pulsation réglable ω.

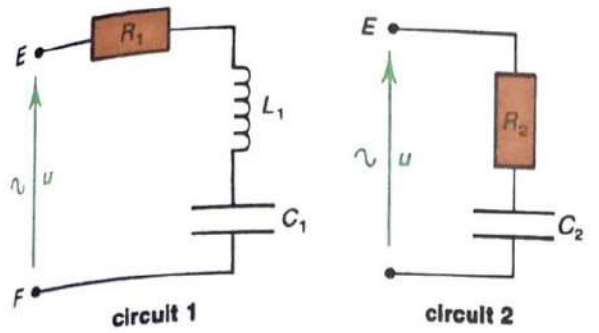
1/ On branche entre E et F le circuit 1, qui comprend en série un conducteur ohmique de résistance $R_1 = 400\ \Omega$, un condensateur de capacité $C_1 = 0{,}5\ \mu$F, une bobine d'inductance $L_1 = 0{,}25$ H et de résistance négligeable (figure).

a/ A Donner les expressions littérales de l'impédance Z_1 de ce circuit et de la puissance $\mathcal{P}_1$ consommée en régime sinusoïdal forcé. Dans quel élément du circuit cette puissance est-elle dissipée ?

b/ B3 Déterminer pour quelle valeur ω_0 de la pulsation la puissance consommée dans le circuit est maximale.
Application numérique : calculer ω_0 et le maximum de la puissance.

2/ C2 On remplace le circuit 1 par un circuit 2 comprenant en série un conducteur ohmique de résistance $R_2 = R_1$ et un condensateur de capacité $C_2 = 1\ \mu$F (figure).

Scanné avec CamScanner



a/ Exprimer littéralement la puissance $\mathcal{P}_2$ consommée dans le circuit 2.
Montrer que les puissances $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont égales pour deux valeurs ω' et ω'' de ω, que l'on exprimera en fonction de L_1, C_1 et C_2.
Calculer ω' et ω'' (avec $\omega' < \omega''$).
b/ On note i_1 et i_2 les valeurs instantanées des intensités des courants circulant respectivement dans les circuits 1 et 2.
Montrer que, pour $\omega = \omega'$, les déphasages φ_1 et φ_2 des intensités i_1 et i_2 par rapport à u sont égaux.

↳ ex.15.5.

15.21 B3C On considère un circuit comprenant en série un conducteur ohmique de résistance $R = 6\ \Omega$, une bobine d'inductance $L = 20$ mH et de résistance négligeable, un condensateur de capacité $C = 5\ \mu$F.
On applique aux bornes de ce circuit une tension :

$$u = 24\sqrt{2} \sin 2\pi ft,$$

de fréquence $f = 480$ Hz.

1/ Calculer l'impédance de ce circuit. Déterminer la phase de l'intensité par rapport à la tension. Exprimer l'intensité en fonction du temps.

2/ On fait varier R sans modifier les autres paramètres du circuit.

a/ Exprimer en fonction de R la puissance moyenne consommée dans le circuit.
b/ Pour quelle valeur de R la puissance consommée est-elle maximale ?

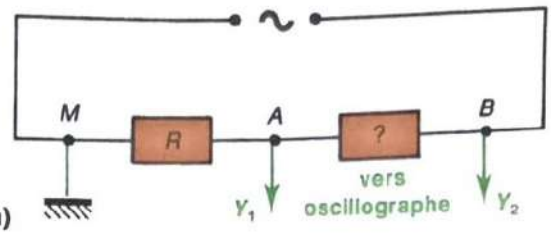
↳ ex.15.3, 15.5.

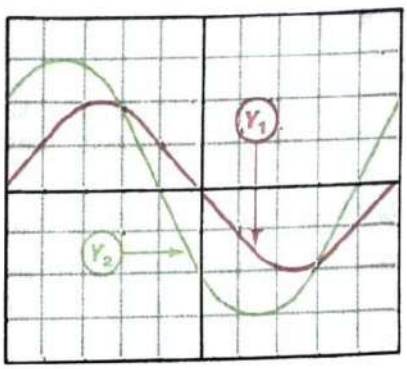
15.22 AC On considère un circuit comprenant en série un conducteur ohmique de résistance $R = 10\ \Omega$ et un dipôle de nature inconnue. On applique aux bornes de ce circuit une tension sinusoïdale de fréquence f.
Un oscillographe est branché comme l'indique la figure. Les réglages sont les suivants : 1 ms . cm^{-1} pour le balayage ; 0,2 V . cm^{-1} pour la voie 1 ; 2 V . cm^{-1} pour la voie 2.

1/ L'origine des axes gradués au centre de l'écran de l'oscillographe coïncide avec l'origine des dates. A l'aide de l'oscillogramme obtenu, exprimer en fonction du temps la tension instantanée u et l'intensité instantanée i dans le dipôle (M, B).

2/ Calculer la puissance moyenne consommée dans ce dipôle.

3/ Le dipôle (A, B) peut être :
— un conducteur ohmique ;
— une bobine de résistance r et d'inductance L ;
— un condensateur de capacité C ;
— une bobine de résistance r et d'inductance L, et un condensateur en série.
Montrer qu'on peut éliminer certaines des hypothèses.

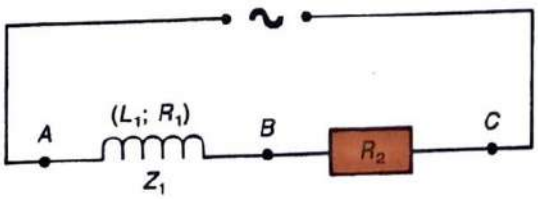




4/ On dispose d'un générateur de tension dont on peut faire varier la fréquence dans un grand intervalle. Montrer comment on peut déterminer expérimentalement la bonne hypothèse.

15.23 BC Un générateur fournit une tension sinusoïdale de pulsation ω. Entre A et B se trouve une bobine de résistance R_1 et d'inductance L_1 ; son impédance est notée Z_1. Entre B et C se trouve un conducteur ohmique de résistance R_2. L'intensité instantanée du courant est :

$$i = I_m \sin \omega t.$$



1/ On note φ la phase de la tension entre les bornes A et B par rapport à l'intensité du courant. Exprimer en fonction Z_1, R_2, I_m, t et φ les tensions instantanées u_{AB} et u_{BC}.

2/ On place un voltmètre de grande impédance successivement entre A et B, puis entre B et C et entre A et C ; il indique les valeurs efficaces suivantes :

$$U_{AB} = 45\ \text{V} ; \quad U_{BC} = 40\ \text{V} ; \quad U_{AC} = 75\ \text{V}.$$

a Écrire la relation entre les tensions instantanées u_{AB}, u_{BC} et u_{AC}.
b/ En utilisant la construction de Fresnel, montrer que la phase φ vérifie la relation :

$$\cos \varphi = \frac{U_{AC}^2 - U_{BC}^2 - U_{AB}^2}{2U_{BC}\,U_{AB}}.$$

3/ On donne $R_2 = 20\ \Omega$. Calculer :

a/ la puissance consommée dans le conducteur ohmique ;
b/ la puissance consommée dans la bobine ;
c/ la résistance de la bobine.

Scanné avec CamScanner

OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES FORCÉES

Conseils de résolution

On demande généralement de déterminer les impédances des différentes parties d'un circuit, les déphasages entre l'intensité du courant et les tensions entre différents points d'un circuit.
Indiquer en indice les différentes portions du circuit concernées :

$$U_{AB} = Z_{AB} I, \quad U_{BC} = Z_{BC} I, \ldots$$

La construction de Fresnel donne les déphasages et les impédances.

Attention !

1/ Les tensions efficaces ne s'ajoutent pas, ainsi que les impédances (sauf pour les conducteurs ohmiques) ; en général :

$$U_{AC} \neq U_{AB} + U_{BC} \quad \text{et} \quad Z_{AC} \neq Z_{AB} + Z_{BC}.$$

2/ En courant continu, une bobine (L, R) se comporte comme un conducteur ohmique (R). Un condensateur arrête un tel courant.

Utilisation d'une courbe de résonance dans un circuit (R, L, C)

Le maximum de la courbe $I = f(\omega)$ donne la valeur $f(\omega_0)$ et la pulsation de résonance ω_0. Connaissant la tension efficace aux bornes du circuit, on en déduit :

— la résistance $R = \dfrac{U}{f(\omega_0)}$;

— le produit $LC = \dfrac{1}{\omega_0^2}$;

— le facteur de qualité, en déterminant la largeur de la bande passante : $Q = \dfrac{\omega_0}{\Delta\omega}$; L et C sont alors donnés par $L = \dfrac{QR}{\omega_0}$ et $C = \dfrac{1}{L\omega_0^2}$.

Utilisation des courbes données par un oscillographe

L'oscillographe visualise la tension appliquée à ses bornes d'entrée et permet de mesurer directement la valeur maximale U_m.
La donnée de la valeur efficace I permet de calculer l'impédance de la portion de circuit concernée :

$$Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U_m}{I\sqrt{2}}.$$

Le branchement de l'oscillographe aux bornes d'un conducteur ohmique R visualise l'intensité du courant. On en déduit la valeur de la résistance :

$$R = \frac{U_m}{I_m}.$$

Dans un oscillographe bicourbe, on peut visualiser deux tensions simultanément, ce qui permet de connaître :
— les impédances des parties correspondantes du circuit ;
— leur déphasage.

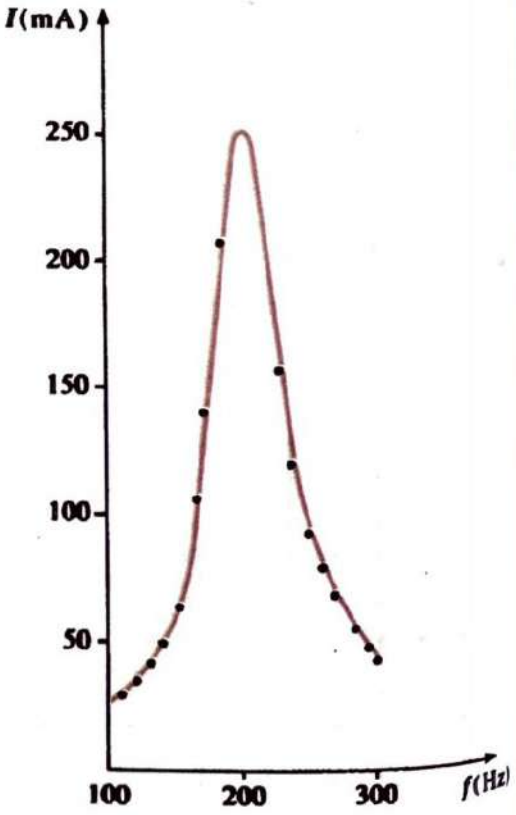
Puissance

Dans la relation $P = UI \cos\varphi$, U et I sont des grandeurs efficaces. Dans un circuit (R, L, C), $P = RI^2$. La puissance se mesure en watts.

Remarque. Un oscillographe permet de connaître les valeurs maximales (en amplitude) de u et de i ; un voltmètre et un ampèremètre branchés en alternatif donnent leurs valeurs efficaces.

Problème résolu 1

Un circuit comprenant une bobine d'inductance $L = 0{,}2$ H et un condensateur de capacité C montés en série est alimenté par un générateur maintenant entre ses bornes une tension alternative de valeur efficace constante. Pour des fréquences variant de 100 *à* 300 Hz, *on relève les valeurs correspondantes de l'intensité efficace I du courant. La figure* 1 *donne les valeurs de I en fonction de la fréquence.*



1.

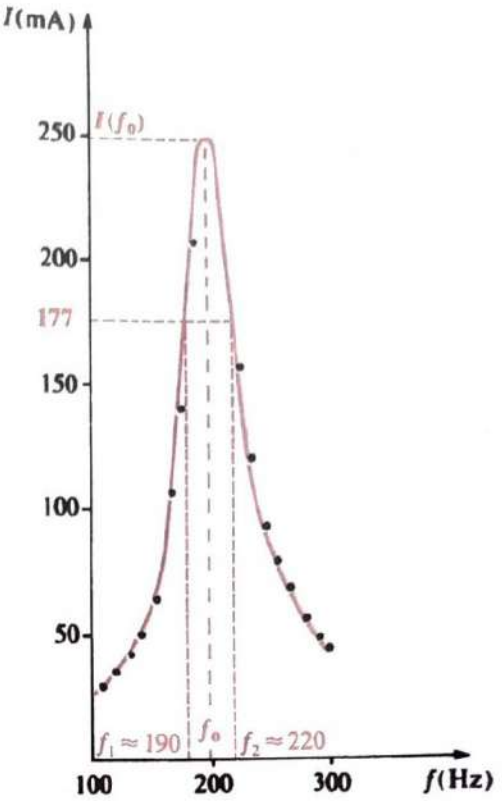
1/ *En déduire la fréquence f_0 et l'intensité efficace I_0 du courant correspondant à la résonance.*

2/ *Rappeler la relation entre L, C et f_0. Calculer C.*

Scanné avec CamScanner

3a/ Rappeler les définitions de la bande passante à 3 dB et du facteur de qualité Q.
b/ Mesurer sur le graphique la bande passante du circuit et en déduire le facteur de qualité Q.
c/ Déduire des résultats précédents des valeurs approchées de la résistance du circuit et de la tension efficace aux bornes du générateur.

4/ On dispose d'un générateur B.F. à fréquence réglable, d'un ampèremètre, d'un voltmètre, d'un oscillographe, d'une résistance (R_1), d'une bobine (L, R) et d'un condensateur (C).
a/ Donner le schéma d'un montage permettant de relever l'intensité efficace en fonction de la fréquence f.
b/ Comment brancher l'oscillographe pour visualiser la résonance d'intensité ? Qu'observe-t-on alors sur l'écran ?



2.

1/ Le générateur délivrant une tension efficace constante quelle que soit la fréquence, la fréquence f_0 de résonance correspond à la valeur maximale de l'intensité efficace du courant. Repérons sur la courbe ce maximum d'intensité :

$$f_0 = 200 \text{ Hz}$$

et : $I(f_0) = 250 \text{ mA} = 0{,}25 \text{ A}.$

B2.2 Expression écrite
A2.1 Savoir-faire expérimental

2/ A la résonance, on a : $LC\omega_0^2 = 1$, c'est-à-dire :

$$4\pi^2 f_0^2 LC = 1.$$

Donc : $C = \dfrac{1}{4\pi^2 L f_0^2} = 3 \text{ µF}.$

A1 1 Formules

B3 1 Calcul

3a/ La bande passante à 3 dB est l'intervalle de fréquences pour lequel l'intensité efficace est supérieure à $I(f_0)/\sqrt{2}$. Les limites f_1 et f_2 de la bande passante sont données par :

$$I(f_1) = I(f_2) = \frac{I(f_0)}{\sqrt{2}}.$$

A1.2 Définitions

B2.2 Expression écrite

La largeur de la bande passante est :

$$\Delta f = |f_2 - f_1|.$$

Le facteur de qualité Q est donné par la relation :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f}.$$

b/ On voit sur la figure de l'énoncé que :

$$\frac{I(f_0)}{\sqrt{2}} = \frac{250}{\sqrt{2}} \approx 177 \text{ mA}.$$

A1 1 Formules

Nous déterminons graphiquement (figure 2) : $f_1 \approx 190$ Hz et $f_2 \approx 220$ Hz ;

d'où : $\Delta f \approx 30$ Hz.

B3 1 Calcul

On en déduit le facteur de qualité :

$$Q = \frac{200}{30} \approx 6{,}7.$$

c/ La relation $Q = \dfrac{L\omega_0}{R}$ conduit à :

$$R = \frac{L\omega_0}{Q} = \frac{L2\pi f_0}{Q} \approx 40 \ \Omega.$$

A1.1 Formule.

A la résonance, le circuit est équivalent à une résistance R, d'où la valeur de la tension efficace aux bornes :

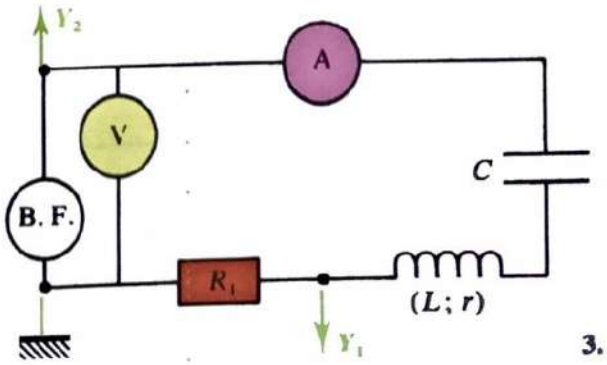
$$U = RI(f_0) = 40 \times 0{,}25 = 10 \text{ V}.$$

B3.2 Calcul

4a/ Le montage de la figure 3 permet de relever l'intensité efficace en fonction de la fréquence.

B4 1 Graphisme.

La place de l'ampèremètre n'a pas



3.

d'importance, mais celui-ci doit être monté en série dans le circuit (R, L, C). La résistance R du circuit est donc donnée par la relation :

$$R = R_1 + r + R_a,$$

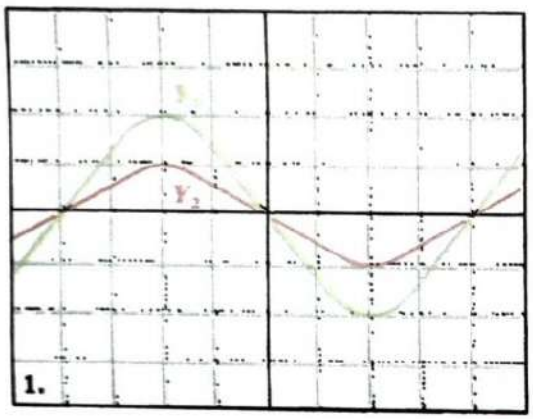
où R_a est la résistance de l'ampèremètre. Le voltmètre sert à contrôler la constance de la tension aux bornes du générateur lorsqu'on fait varier la fréquence.

A2.2 Savoir-faire expérimental.

b/ On observe les tensions aux bornes du générateur B.F. et de la résistance R_1. Lorsque les deux sinusoïdes sont en phase (figure 4), il y a résonance d'intensité.

A2.2 Savoir-faire expérimental.

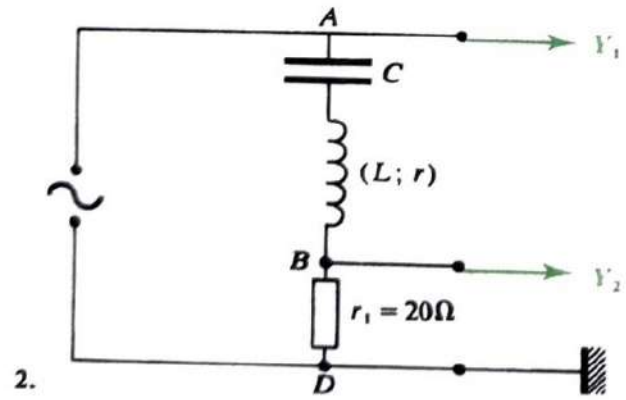
B4.1 Graphisme.



Problème résolu 2

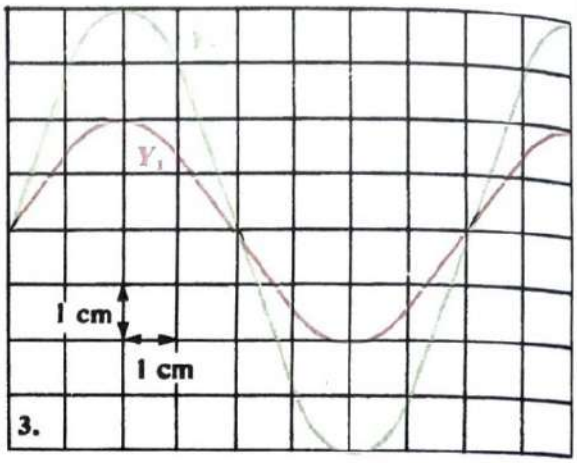
Circuit (R, L, C). Étude à l'aide de l'oscillographe

Le circuit représenté sur la figure 1 *est branché aux bornes d'un générateur délivrant une tension alternative sinusoïdale u de pulsation* ω.



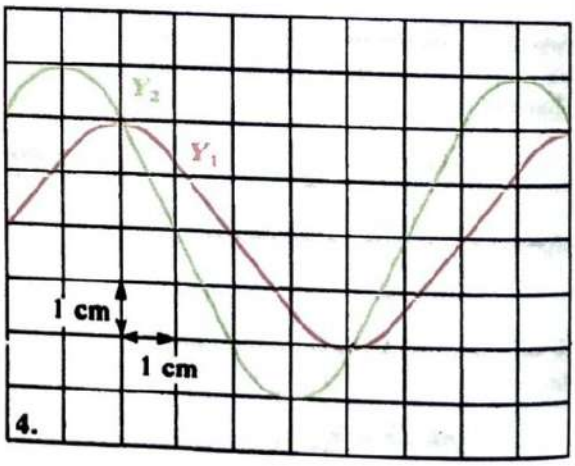
La tension $u = u_{AD}$ *est représentée sur l'écran de l'oscillographe (voie* Y_1*). La tension* $u_1 = u_{BD}$*, proportionnelle à l'intensité i du courant électrique, est également représentée sur cet écran (voie* Y_2*).*
Le balayage horizontal est réglé sur 2 ms . cm^{-1} *et la sensibilité verticale sur* 2 V . cm^{-1} *pour la voie* 1*, sur* 0,25 V . cm^{-1} *pour la voie* 2.

1/ *On observe sur l'écran les courbes de la figure* 2.



a/ *Définir l'état particulier dans lequel se trouve le circuit, en justifiant la réponse.*
b/ *A l'aide de l'oscillogramme* 1 (*figure* 2)*, déterminer la période T, la fréquence f, la pulsation* ω *et la résistance* $R = r + r_1$ *du circuit.*

2/ *La bobine est remplacée par une résistance de valeur r. On observe sur l'écran les courbes de la figure* 3*, avec les mêmes réglages que précédemment pour l'oscillographe.*



a/ *La tension* u_{AD} *est-elle en avance ou en retard de phase par rapport à* u_{BD}*? Pouvait-on prévoir ce résultat?*
b/ *En utilisant l'oscillogramme, calculer le déphasage* φ *de la tension* u_{AD} *par rapport à* u_{BD}*. Expliciter* $u_{AD}(t)$ *et* $u_{CD}(t)$*.*
c/ *A l'aide d'une construction de Fresnel, trouver une relation entre* φ*, R, C et* ω*.*
d/ *Calculer des valeurs approchées de L et de C.*

Scanné avec CamScanner

1a/ L'oscillographe permet d'oberver la tension $u_{BD}(t)$, proportionnelle à l'intensité $i(t)$, et la tension $u_{AD}(t)$ aux bornes du circuit. Les deux tensions sont en phase; il y a résonance d'intensité.

A2.1 Savoir-faire expérimental
B2 1 Expression écrite

b/ Une période s'inscrit sur 8 cm :

$$T = 8 \times 2 . 10^{-3} = 16 . 10^{-3} \text{ s},$$

$$f = \frac{1}{T} = 62{,}5 \text{ Hz},$$

$$\omega_0 = 393 \text{ rad/s}^{-1}.$$

A1.2 Unites
A2.2 Savoir-faire expérimental
B3.2 Calculs

A la résonance :

$$I_{max} = \frac{U_{max}}{R}.$$

L'amplitude de la tension est :

$$U_{max} = 2 \times 2 = 4 \text{ V}.$$

L'amplitude de l'intensité est aussi donnée par :

$$I_{max} = \frac{(u_{BD})_{max}}{r_1}.$$

Or : $(u_{BD})_{max} = 4 \times 0{,}25 = 1$ V ;

donc : $I_{max} = \frac{1}{20} = 0{,}05$ A.

Finalement :

$$R = \frac{4}{0{,}05} = 80\ \Omega.$$

2a/ La tension u_{AD} est en retard de phase par rapport à la tension. Ce résultat est lié au fait que le circuit comprend seulement un condensateur et des conducteurs ohmiques ; l'intensité (proportionnelle à u_{BD}) est en avance de phase sur la tension u_{AD}; par suite, u_{AD} est en retard sur u_{BD}.

A2 1 Savoir-faire expérimental
C1 2 Jugement critique

b/ La tension u_{BD} atteint sa valeur maximale un huitième de période avant u_{AD}, ce qui correspond à un déphasage $|\varphi|$:

$$\frac{|\varphi|}{2\pi} = \frac{1}{8}, \quad \text{d'où} \quad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

A2 1 Savoir-faire expérimental

Les amplitudes ont été calculées dans la question 1 :

$$(u_{AD})_{max} = 4 \text{ V}, \quad (u_{BD})_{max} = 0{,}75 \text{ V}.$$

B3.3 Calculs

Par suite :

$$u_{AD} = 4 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

et : $u_{BD} = 0{,}75 \cos \omega t$,

avec $\omega \approx 393$ rad . s^{-1}.

c/ A l'aide de la construction de Fresnel de la figure 4, on obtient :

$$\tan |\varphi| = \frac{1}{RC\omega}.$$

B3 1 Calcul
B4 1 Outil mathématique

d/ La valeur de C s'en déduit :

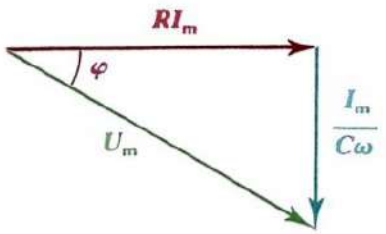
$$C = \frac{1}{R\omega \tan \varphi} \approx 32\ \mu\text{F}.$$

A1 1 Unités
A2 1 Savoir-faire

La relation $LC\omega_0^2 = 1$ conduit enfin à :

$$L = 0{,}2 \text{ H}.$$

B3 1 Calcul



5.

Scanné avec CamScanner

UN PEU D'HISTOIRE

L'optique à travers quelques grands



René Descartes (1596-1650). *Il publie en* 1637 *les lois de la réflexion et de la réfraction obtenues, sans doute en* 1621, *par Snell.*



Christiaan Huygens (1629-1695), *astronome, physicien et mathématicien hollandais. Ayant perfectionné la lunette astronomique, il découvre en* 1655 *les anneaux de Saturne. Il élabore à partir de* 1678 *une théorie ondulatoire de la lumière qui lui permet d'interpréter les lois de la réflexion et de la réfraction. Il introduit la notion de polarisation de la lumière et donne une interprétation du phénomène de biréfringence, découvert en* 1669 *par Erasmus Bartholinus.*



Sir Isaac Newton (1642-1727), *astronome, mathématicien, physicien et théologien anglais. Parmi son œuvre, considérable dans tous les domaines, on citera le traité d'optique paru en* 1675. *Newton explique la dispersion de la lumière par le prisme. Partisan d'une théorie particulaire de l'optique, il ne parvient pas à expliquer les phénomènes d'interférence qu'il observe.*



Augustin Fresnel (1788-1827), *physicien français. Il explique complètement en* 1815 *les phénomènes de diffraction et d'interférence. Il réalise en* 1821 *la première détermination des longueurs d'onde lumineuses et développe de* 1821 *à* 1823 *la théorie de l'optique des milieux anisotropes.*



Joseph Nicephore Niepce (1765-1833). *Il réalisa en* 1826 *la première photographie dans une chambre noire.*

Scanné avec CamScanner



James Clerk Maxwell (1831-1879), *physicien écossais. Il énonce de nombreuses lois en électromagnétisme. Ces lois l'amènent à prévoir l'existence d'ondes électromagnétiques et le conduisent à admettre que la lumière est une onde électromagnétique.*

Ernst Abbe (1840-1905), *physicien allemand. Spécialiste de l'optique, il perfectionne les verres optiques, le microscope et introduit la notion d'ouverture numérique.*

George Eastman (1854-1932). *En* 1888, *il mit au point l'appareil Kodak grâce auquel la photographie devint accessible à tous.*



Jacques Daguerre (1787-1851). *Il inventa le procédé du « daguerrotype » (des plaques argentées, traitées aux vapeurs d'iode, réagissent à la lumière) pour obtenir des photographies. Le développement de l'image latente se faisait à la vapeur de mercure.*



Louis et Auguste Lumière (1864-1948 *et* 1862-1954). *La vision des films fut révolutionnée en* 1895 *par leur invention : un projecteur appelé cinématographe.*

Scanné avec CamScanner

16 LES LENTILLES MINCES

16.1 description

16.1.1 définitions

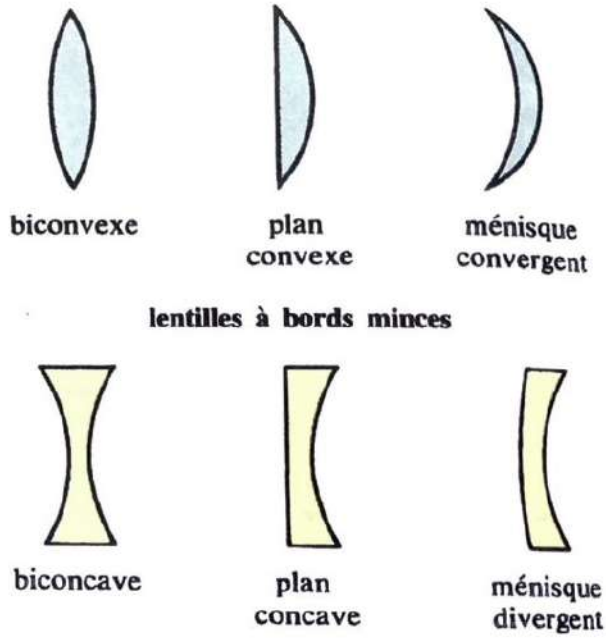
Par définition :

• On appelle lentille tout milieu transparent limité par deux surfaces dont l'une au moins n'est pas plane.

La plupart des lentilles utilisées sont en verre ou en matière plastique; elles sont limitées généralement par deux calottes sphériques. Elles affectent six formes principales représentées sur la figure 1. Habituellement, on les classe en deux catégories : les lentilles à *bords minces* et les lentilles *à bords épais*.

Les éléments géométriques d'une lentille sont (*fig.* 2) :
— les **centres de courbure** C_1 et C_2 des calottes sphériques et les **rayons de courbures** R_1 et R_2;
— l'**axe principal** Δ, axe de révolution passant par C_1 et C_2 et appelé le plus souvent *axe* de la lentille;
— une **section principale,** plan de symétrie passant par l'axe principal. C'est dans ce plan que nous représenterons les rayons lumineux;
— le **diamètre d'ouverture** D, diamètre du cercle limitant la lentille.

Nous limiterons l'étude qui suit aux **lentilles minces,** c'est-à-dire aux lentilles (à bords minces ou épais) telles que leur épaisseur S_1S_2 (*fig.* 2) est négligeable devant les rayons de courbure R_1 et R_2(*).

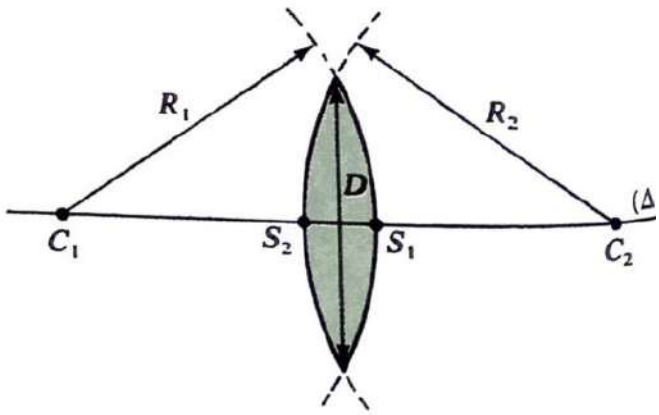


1.

16.1.2 lentilles convergentes

Dans une cuve à ondes, lorsqu'une onde plane atteint une lentille à bords minces, elle est transformée en une onde approximativement sphérique qui converge vers une région de l'axe (*fig.* 3).
Une expérience semblable peut être réalisée en optique (*fig.* 4 et 5), un faisceau de rayons parallèles donnant un faisceau de rayons convergents.

• Une lentille à bords minces est convergente.



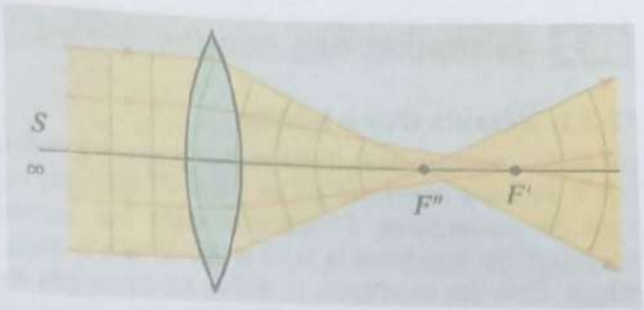
C_1 et C_2 : centres de courbure
R_1 et R_2 : rayons de courbure
Δ : axe principal
D : diamètre d'ouverture

2.

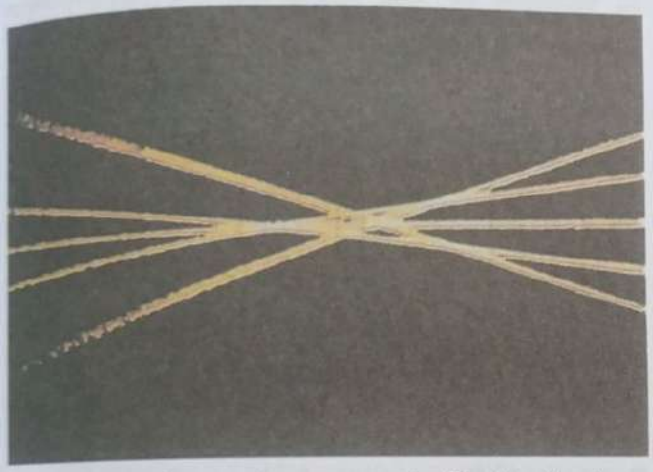
(*) En toute rigueur négligeable aussi devant $|R_2 - R_1|$ dans le cas d'un ménisque à bords épais

Scanné avec CamScanner

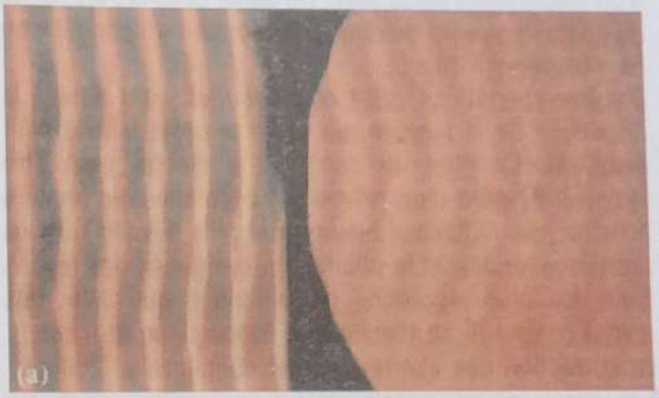


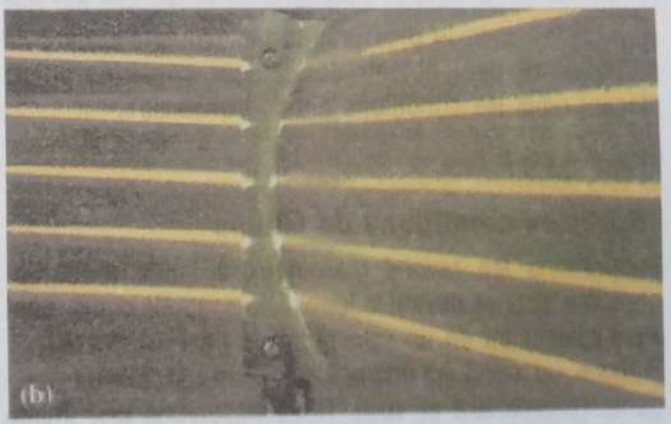


4. *L'onde plane incidente est transformée en une onde approximativement sphérique. Les rayons centraux viennent converger en F'. Les rayons marginaux sont plus convergents. Une lentille à bords minces est convergente.*



5. *Faisceaux lumineux tombant sur une lentille à bords minces. Les faisceaux tombant sur les bords de la lentille convergent plus que les faisceaux du centre.*

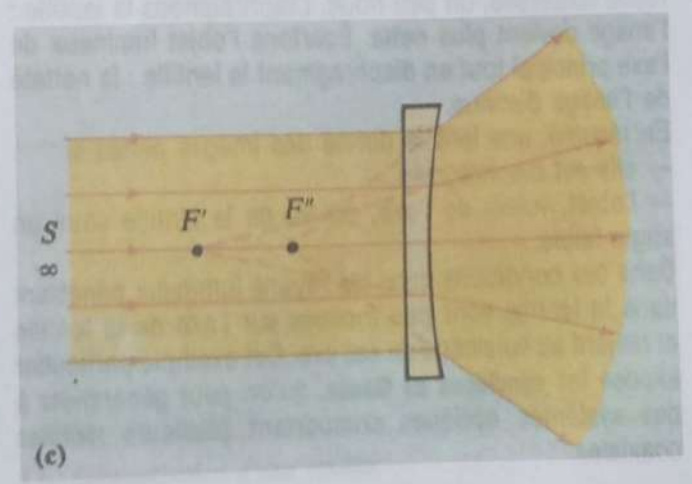




16.1.3 lentilles divergentes

Les photographies 6 montrent que, par rapport aux rayons incidents, les rayons émergents s'écartent de l'axe optique d'une lentille à bords épais. Alors que les rayons du faisceau incident sont parallèles, ceux du faisceau émergent sont divergents et semblent provenir d'une région située devant la lentille.

- Une lentille à bords épais est divergente.



6a. *Expérience sur la cuve à ondes : divergence des ondes traversant une lentille à bords épais.*

b. *Expérience d'optique : la lentille à bords épais provoque la divergence du faisceau lumineux.*

c. *L'image F' donnée par les rayons centraux est différente de celle qui est donnée par les rayons marginaux : il y a aberration de sphéricité.*

Scanné avec CamScanner

16.2 formation des images

16.2.1. défauts d'une lentille

Les rayons centraux issus d'une source S située à l'infini (*fig.* 4) viennent converger en un point F' différent du point de convergence F'' correspondant aux rayons marginaux qui atteignent le bord d'une lentille à bords minces. Dans ces conditions, la lentille ne donne pas de la source S une image nette : on dit que la lentille n'est pas **stigmatique** et qu'elle présente une *aberration de sphéricité* (*photo* 7). Un phénomène analogue s'observe avec une lentille divergente.

D'une manière générale, dès que les rayons ne sont plus voisins de l'axe de la lentille, il n'est pas possible d'obtenir une image nette d'un objet; la figure observée est plus ou moins floue et déformée.

Parmi les diverses aberrations, citons l'*aberration de distorsion*, mise aisément en évidence en réalisant l'image d'un quadrillage sur un écran à l'aide d'une lentille et d'un diaphragme placé avant ou après celle-ci : les lignes du quadrillage sont déformées en forme de « barillet » ou de « coussinet » (*fig.* 8).

D'autres aberrations, dites *chromatiques*, sont dues à la dispersion de la lumière par le verre de la lentille (voir *chap.* 18). En effet, le bord d'une lentille peut être assimilé à l'arête d'un prisme : il décompose la lumière blanche. Les radiations bleues sont plus déviées que les radiations rouges, et le point de convergence des rayons bleus est plus rapproché de la lentille que celui des rayons rouges. Il en résulte une image floue et irisée.

La correction des aberrations est complexe et délicate. Elle exige qu'on accole plusieurs lentilles dont les courbures et les indices sont calculés et réalisés par des spécialistes avec le plus grand soin. Toutefois, dans la pratique, on peut obtenir des images correctes en se plaçant dans les conditions dites « de Gauss ».



7. *Lentille présentant une aberration de sphéricité; les rayons marginaux enveloppent une surface de révolution sur laquelle s'accumule la lumière.*



8. *Distorsion d'un système optique.*

16.2.2 les conditions de Gauss

Supprimons les rayons marginaux à l'aide d'un diaphragme disposé devant la lentille. Les rayons convergent alors quasiment en un seul point de l'axe (*photo* 9).

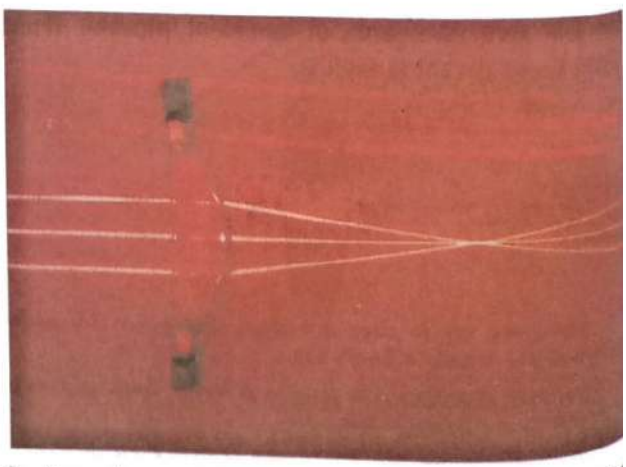
Plaçons un objet lumineux devant une lentille convergente (*photos* 10 a et 10 b). Nous observons une image réelle renversée, un peu floue. Diaphragmons la lentille : l'image devient plus nette. Écartons l'objet lumineux de l'axe principal tout en diaphragmant la lentille : la netteté de l'image diminue.

En résumé, une lentille donne des images nettes si :

— elle est diaphragmée;

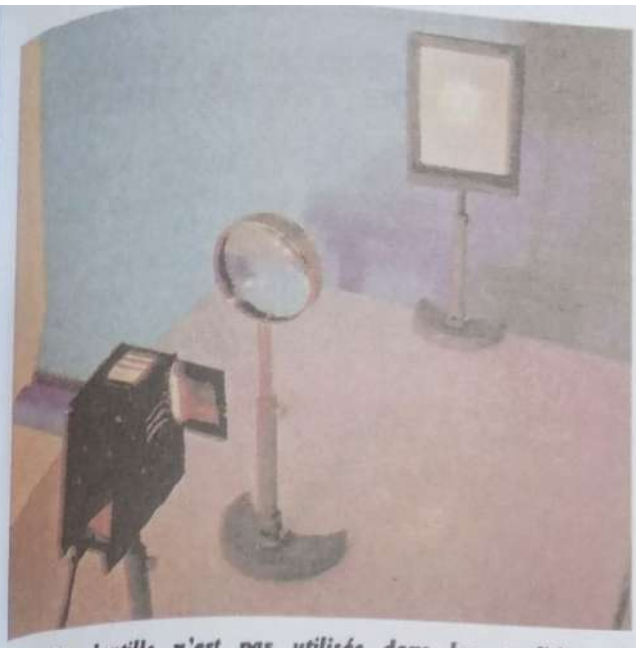
— l'objet, voisin de l'axe, est vu de la lentille sous un angle faible.

Dans ces conditions, tous les rayons lumineux pénétrant dans la lentille sont peu inclinés sur l'axe de la lentille et restent au voisinage de cet axe. Cet exemple particulier expose les **conditions de Gauss,** qu'on peut généraliser à des systèmes optiques comportant plusieurs lentilles coaxiales.



9. *Dans les conditions de Gauss, les rayons convergent pratiquement en un seul point de l'axe de la lentille.*

Scanné avec CamScanner



10a. *La lentille n'est pas utilisée dans les conditions de Gauss : l'image est floue.*



10b. *Un diaphragme est placé contre la lentille : l'image apparaît nette sur l'écran.*

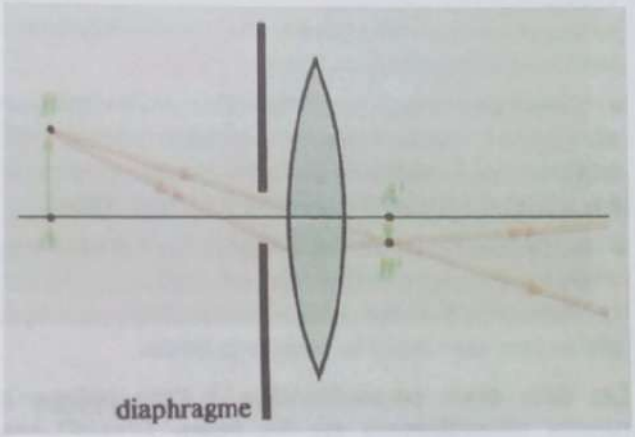
• Les conditions de Gauss sont au nombre de deux :

1/ Les rayons lumineux font un petit angle avec l'axe optique de la lentille.

2/ Les rayons lumineux rencontrent la lentille au voisinage de sa région centrale.

Utilisée dans ces conditions, une lentille donne des images nettes.

Par la suite, nous supposerons toujours que ces conditions sont réalisées. En outre, nous ne considérerons que des objets *AB* dont tous les points sont situés dans un même plan perpendiculaire à l'axe principal (plan appelé *plan de front*). L'image, semblable à l'objet, sera elle aussi dans un plan de front (*fig.* 11). Il suffira alors, pour connaître l'image *A'B'* de *AB*, de connaître l'image *B'* du point *B* hors de l'axe. Nous en déduirons immédiatement *A'*. Le plus souvent, pour plus de clarté, les figures seront dilatées et les angles, en particulier, paraîtront beaucoup plus grands qu'ils ne le sont en réalité.



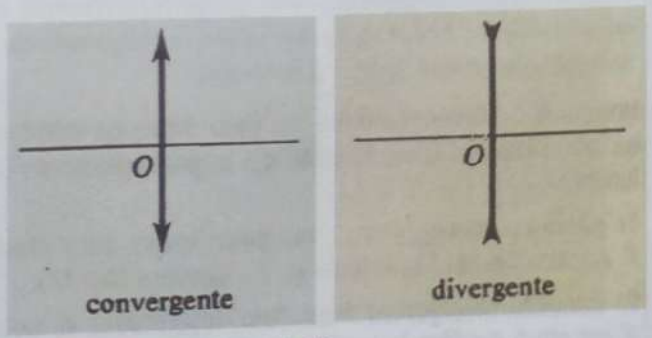
11. *Lentille utilisée dans les conditions de Gauss :*
— rayons extrêmes peu inclinés par rapport à l'axe optique;
— rayons extrêmes voisins de l'axe optique et tombant près du centre de la lentille.

Remarque : Il n'est pas toujours possible, dans les conditions optimales de fonctionnement d'un instrument d'optique, de se placer dans les conditions de Gauss. Aussi convient-il de construire des objectifs complexes qui minimisent les aberrations (objectifs photographiques, objectifs de microscope).

16.3 propriétés des lentilles minces

16.3.1. centre optique

Nous limiterons notre étude aux lentilles minces. Nous négligerons leur épaisseur centrale et schématiserons les différentes lentilles suivant les conventions de la figure 12. Le point *O*, intersection de l'axe principal et du plan de la lentille, est appelé **centre optique.**



12. *Schématisation d'une lentille.*

Scanné avec CamScanner

16.3.2 quelques propriétés fondamentales

Les diverses expériences décrites dans la fiche expérimentale nous permettent de définir certains points associés à une lentille et de préciser la marche de faisceaux ou rayons lumineux particuliers.
Nous retiendrons les résultats suivants :

Expérience 1

- Tout rayon lumineux passant par le centre optique d'une lentille (convergente ou divergente) ne subit aucune déviation.

Expériences 2 et 4

- Tout rayon incident parallèle à l'axe d'une lentille convergente émerge selon un rayon qui passe par un point de l'axe optique appelé *foyer principal image* et noté *F'*.
- Tout rayon incident parallèle à l'axe d'une lentille divergente émerge selon un rayon dont le support virtuel passe par un point de l'axe optique appelé *foyer principal image* et noté *F'*.

Expériences 3 et 5

- Il existe un point de l'axe optique d'une lentille convergente situé devant la lentille, appelé foyer principal objet et noté *F*, tel que tout rayon incident passant par ce point émerge de la lentille parallèlement à l'axe optique.
- Il existe un point de l'axe optique d'une lentille divergente, situé derrière la lentille, appelé *foyer principal objet* et noté *F*, tel que tout rayon incident virtuel dont le support passe par ce point émerge de la lentille parallèlement à l'axe optique.
- Pour les deux types de lentilles, foyer objet *F* et foyer image *F'* sont symétriques par rapport au centre optique de la lentille. Leur distance à ce centre, appelée *distance focale*, ne dépend pas du sens dans lequel se propage la lumière.

Les deux plans perpendiculaires à l'axe optique et passant respectivement par les foyers *F* et *F'* sont appelés **plans focaux** (objet et image).

Un point d'un plan focal (objet ou image) est appelée **foyer secondaire** (objet ou image).

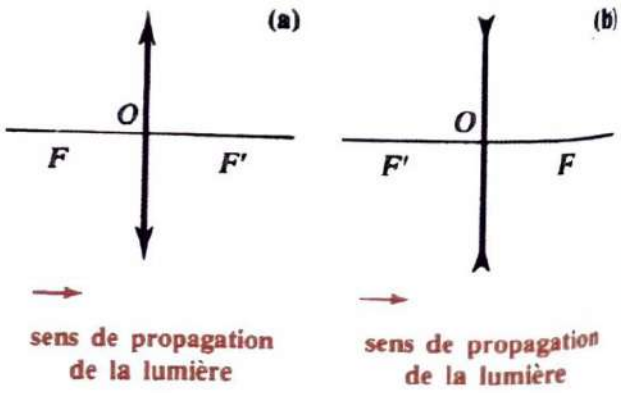
Expérience 6

- Un faisceau de rayons parallèles inclinés sur l'axe principal donne un faisceau de rayons dont les supports convergent vers un foyer secondaire image, obtenu par l'intersection du plan focal image et de l'axe secondaire auquel est parallèle le faisceau incident.
- Un faisceau de rayons incidents dont les supports se croisent en un foyer secondaire objet donne un faisceau émergent de rayons parallèles à l'axe secondaire, obtenu en joignant le foyer secondaire au centre optique de la lentille.

Notons les différences entre les deux types de lentilles, en nous plaçant dans le sens de la propagation de la lumière :

1/ *Lentilles convergentes :* les deux foyers sont réels; *F* est situé devant la lentille et *F'* derrière (*fig.* 13a).

2/ *Lentilles divergentes :* les deux foyers sont virtuels; *F* est situé derrière la lentille et *F'* devant (*fig.* 13b).



13. *En suivant le sens de propagation de la lumière, pour une lentille convergente, F est situé devant la lentille, et F', derrière la lentille. C'est l'inverse dans le cas d'une lentille divergente.*

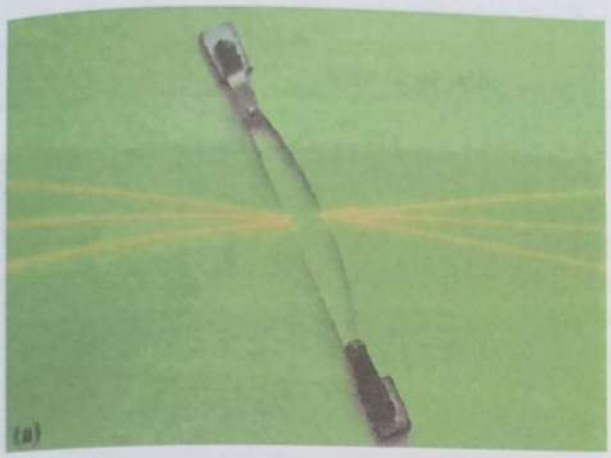
Scanné avec CamScanner

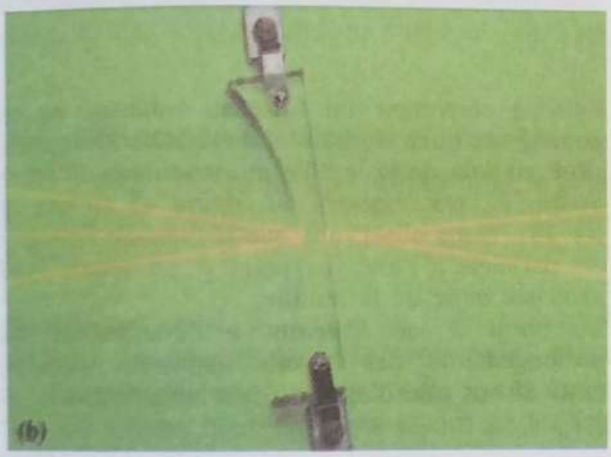
PROPRIÉTÉS ET CARACTÉRISTIQUES FONDAMENTALES DES LENTILLES MINCES

fiche expérimentale

1. Centre optique

Nous constatons sur les photographies 14 que, pour les deux types de lentilles, tout rayon passant par le centre optique ne subit quasiment aucune déviation.





14. ***Tout rayon passant par le centre optique ne subit quasiment aucune déviation.***

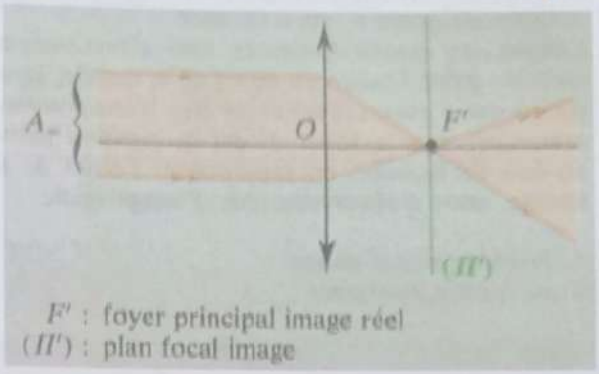
2. Foyer principal image d'une lentille convergente

Éclairons, dans les conditions de Gauss, une lentille convergente avec un faisceau parallèle à son axe principal (*photo* et *fig.* 15) : tous les rayons émergents convergent en un point F' de l'axe principal. Ce point est appelé ***foyer principal image*** de la lentille.

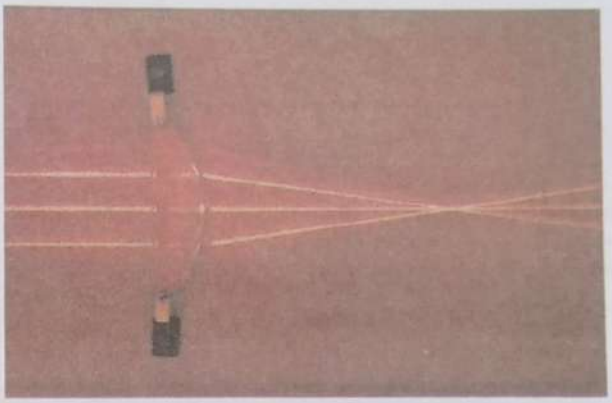
Si nous retournons face pour face la lentille, la position du point F' est inchangée.

L'objet A, situé à l'infini sur l'axe optique, et le foyer principal image F' sont dits *points conjugués*. Comme la lumière passe effectivement par le point F', nous dirons que c'est un foyer image *réel*.

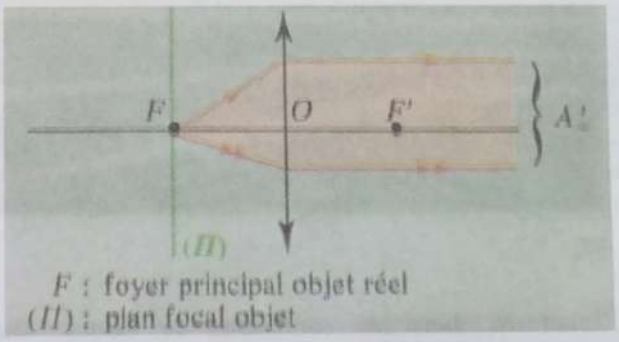
15. ▼



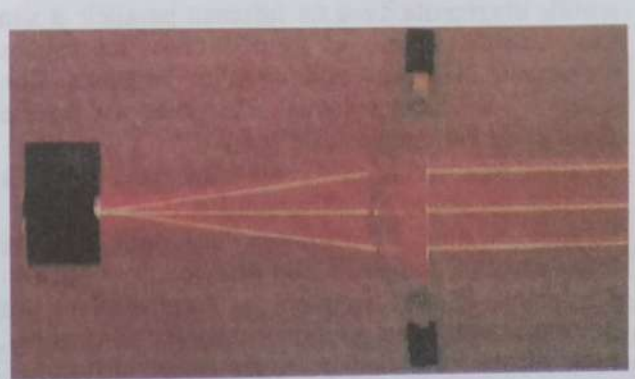
F' : foyer principal image réel
(H') : plan focal image



3. Foyer principal objet d'une lentille convergente



F : foyer principal objet réel
(H) : plan focal objet

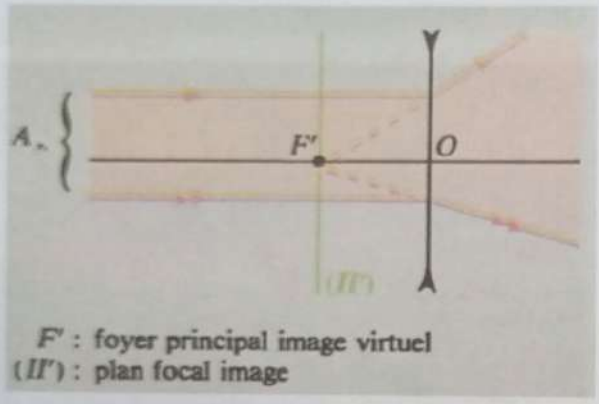


16. ▶

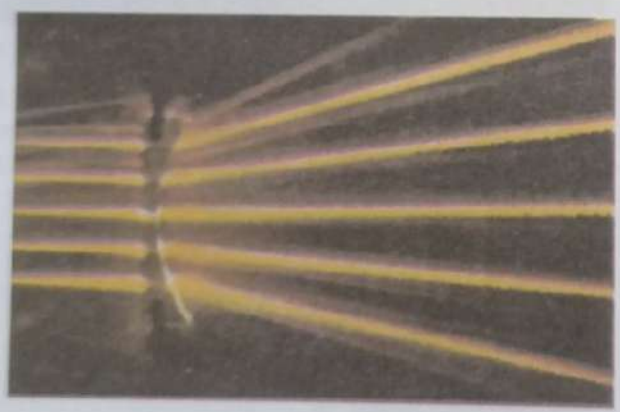
Scanné avec CamScanner

Plaçons une source lumineuse quasi ponctuelle au point F situé sur l'axe et symétrique du foyer image F' par rapport au centre optique O (*photo* et *fig.* 16) : les rayons issus de F émergent de la lentille parallèlement à l'axe principal. Ce point est appelé ***foyer principal objet*** de la lentille.
Le point F et son image A' située à l'infini sur l'axe optique sont dits *points conjugués*.
Si nous retournons face pour face la lentille, la position du point F est inchangée.
Comme les rayons lumineux sont effectivement issus du point F, situé en avant de la lentille, nous dirons que c'est un foyer objet *réel*. Nous pouvons remarquer que le foyer F est la position limite au-delà de laquelle, en rapprochant l'objet de la lentille, nous n'observons plus d'image réelle.

4. Foyer principal image d'une lentille divergente



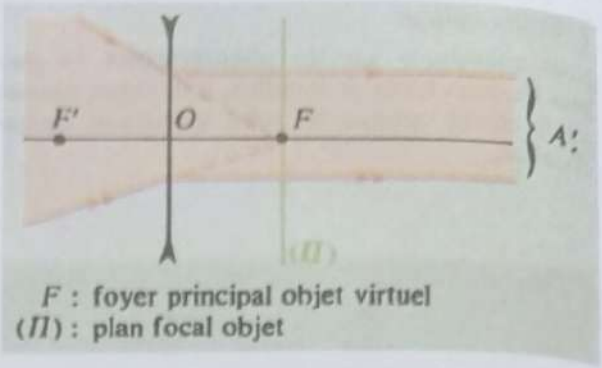
F' : foyer principal image virtuel
(II') : plan focal image



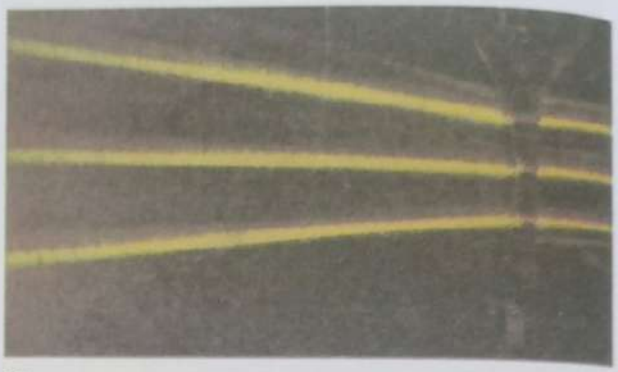
17.

Éclairons, dans les conditions de Gauss, une lentille divergente avec un faisceau parallèle à son axe principal (*photo* et *fig.* 17) : tous les rayons émergents divergent comme s'ils venaient d'un point F' de l'axe principal. Ce point est appelé ***foyer principal image*** de la lentille.
Si nous retournons face pour face la lentille, la position du point F' est inchangée.
L'objet A, situé à l'infini sur l'axe optique, et le foyer principal image F' sont dits *points conjugués*.
Le point F' se trouvant à l'intersection des prolongements des rayons lumineux émergents, nous dirons que c'est un foyer image *virtuel*.

5. Foyer principal objet d'une lentille divergente



F : foyer principal objet virtuel
(II) : plan focal objet



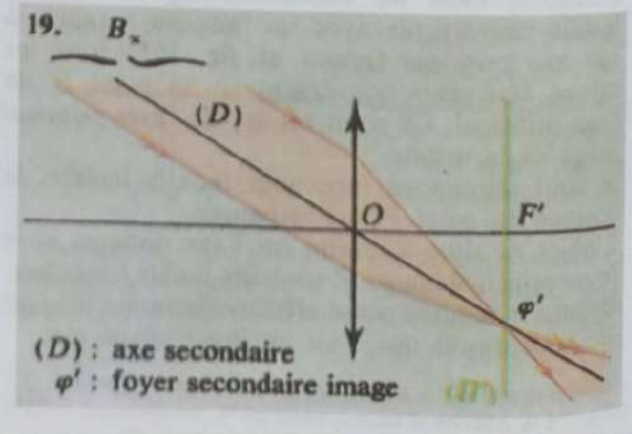
18.

Faisons converger un faisceau lumineux en un point F de l'axe optique d'une lentille divergente, situé au-delà de la lentille et symétrique du foyer image F' par rapport au centre O (*photo* et *fig.* 18). Nous observons que le faisceau émergent est parallèle à l'axe. Le point F est appelé ***foyer principal objet*** de la lentille.
Le point F se trouvant à l'intersection des prolongements des rayons lumineux incidents, nous dirons que c'est un foyer objet *virtuel*.

6. Foyers secondaires

Inclinons légèrement sur l'axe principal d'une lentille un faisceau incident de rayons parallèles : les rayons émergents convergent en un point φ' du plan de front passant par F' (*fig.* 19). Ce point

19.

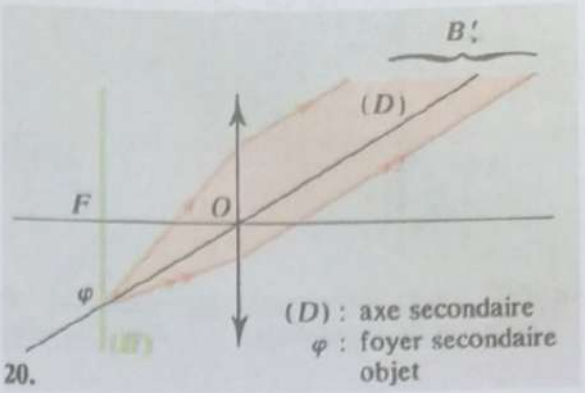


(D) : axe secondaire
φ' : foyer secondaire image

Scanné avec CamScanner

φ' est appelé *foyer secondaire image*. Il est situé à l'intersection du plan de front passant par F' *(plan focal image)* et du rayon incident passant par le centre optique O, rayon non dévié. Le support d'un tel rayon $\varphi' O$ définit un *axe secondaire*.

De même, si nous plaçons une source lumineuse en un point quelconque φ du plan de front passant par F *(plan focal objet)*, tous les rayons émergents de la lentille sont parallèles (*fig.* 20). φ est appelé *foyer secondaire objet*. La droite φO définit un axe secondaire; les rayons émergents sont parallèles à cet axe.

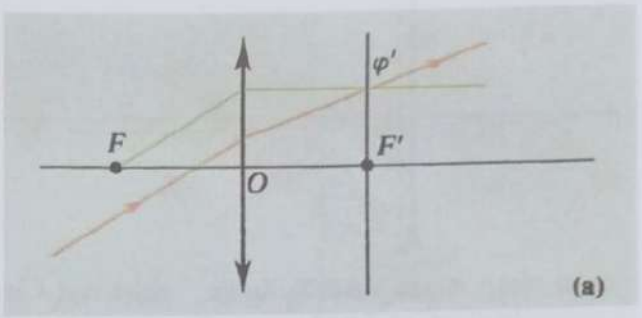


20.

16.3.3 marche d'un rayon lumineux

Connaissant la direction d'un rayon lumineux incident arrivant sur une lentille, nous voulons tracer le rayon émergent. A cette fin, il nous suffit d'utiliser les propriétés que nous venons d'énoncer. Nous disposons de trois méthodes, qui font l'objet des figures 21 :

- utilisation du foyer objet (*fig.* 21 a);
- utilisation d'un foyer secondaire objet φ (*fig.* 21 b);
- utilisation d'un foyer secondaire image φ' (*fig.* 21 c).



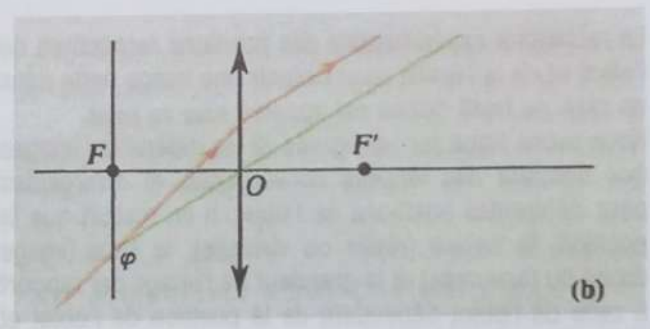
21 a. *Traçons un rayon fictif passant par F et parallèle au rayon considéré. Ce rayon émerge de la lentille parallèlement à l'axe optique et coupe le plan focal imag en φ'. Les rayons incidents étant parallèles, les rayons émergents doivent se croiser en φ'.*

16.3.4 construction de l'image d'un objet

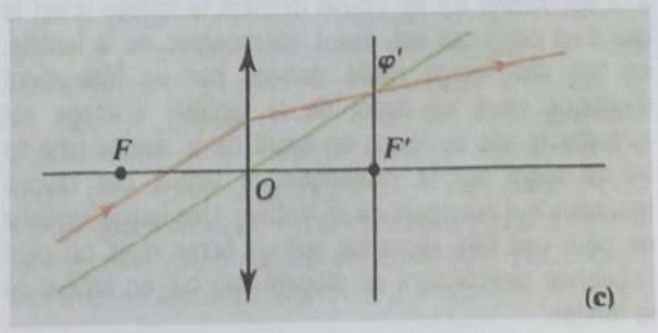
Soit un objet AB contenu dans un plan de front, le point A étant sur l'axe principal. Quelle est son image $A'B'$? Tout rayon issu de B et traversant la lentille passe par le point image B'. Il suffit donc de tracer deux rayons particuliers issus de B; B', image de B, se trouvera à l'intersection des deux rayons émergents (point image réel) ou à celle de leurs prolongements (point image virtuel). On utilisera deux des trois rayons particuliers suivants :

- *rayon issu de B et passant par le centre optique, rayon qui n'est pas dévié;*
- *rayon issu de B et parallèle à l'axe optique, rayon qui émerge en passant par le foyer image F';*
- *rayon issu de B et passant par le foyer objet F, rayon qui émerge parallèlement à l'axe optique.*

L'image $A'B'$ cherchée est, comme l'objet, perpendiculaire à l'axe principal; A', image de A, sera donc la projection orthogonale de B' sur l'axe principal. Le point objet A et son image A' sont appelés **points conjugués.** Il en est de même pour les points B et B'.

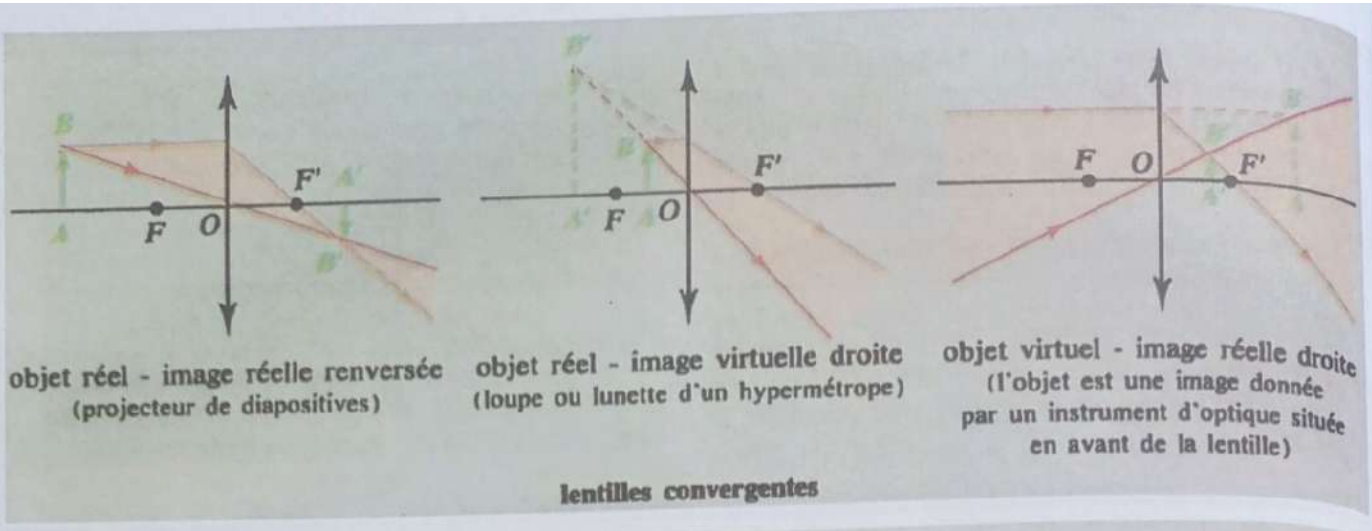


21 b. *L'intersection du rayon lumineux avec le plan focal objet définit un foyer secondaire objet φ. Le rayon émergeant de la lentille est parallèle au rayon fictif φO qui n'est pas dévié.*



21 c. *L'intersection avec le plan focal image du rayon fictif, parallèle au rayon incident et passant par le centre optique, définit le foyer secondaire image φ'. Le rayon lumineux émergent passe lui aussi par φ'.*

Scanné avec CamScanner

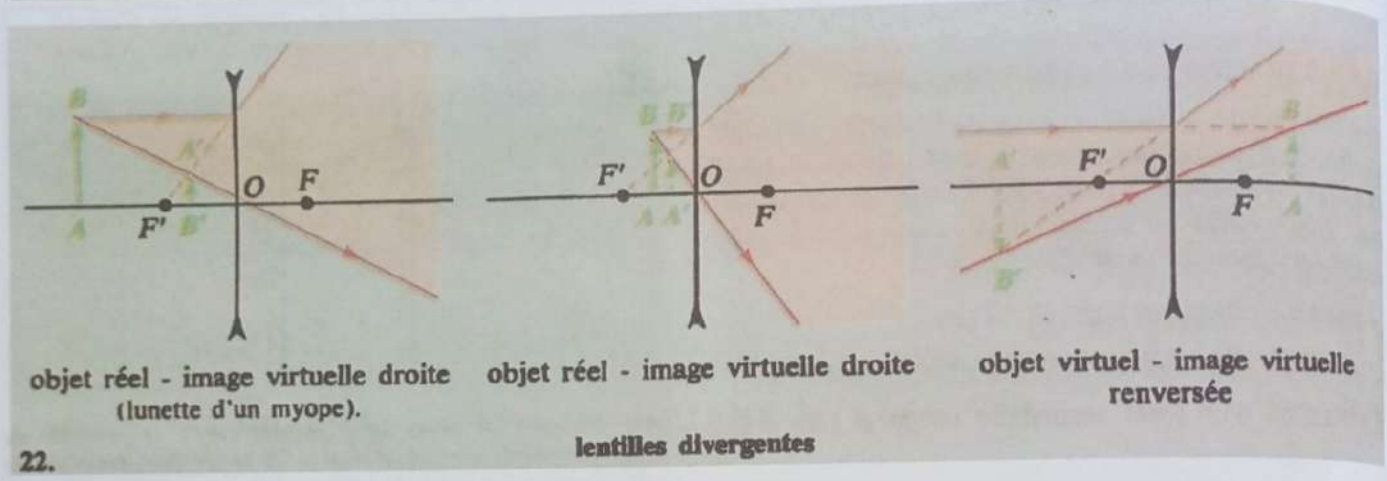


objet réel - image réelle renversée (projecteur de diapositives)

objet réel - image virtuelle droite (loupe ou lunette d'un hypermétrope)

objet virtuel - image réelle droite (l'objet est une image donnée par un instrument d'optique située en avant de la lentille)

lentilles convergentes



objet réel - image virtuelle droite (lunette d'un myope).

objet réel - image virtuelle droite

objet virtuel - image virtuelle renversée

lentilles divergentes

22.

La recherche expérimentale des positions respectives de l'objet et de la lentille pour obtenir une image nette dans un plan de front donné est appelée **mise au point.**

Nous avons tracé sur les figures 22 les différentes images que donnent des lentilles convergentes et divergentes pour différentes positions de l'objet. Il en ressort que la position, la nature (réelle ou virtuelle), le sens (image droite ou renversée) et la grandeur de l'image par rapport à celle de l'objet dépendent de la position de l'objet et du type de lentille utilisé (convergente ou divergente).

- L'objet est *réel* s'il est situé en avant de la lentille; l'image est *réelle* si elle se forme derrière la lentille; elle peut donc être recueillie sur un écran.

- Il est *virtuel* s'il se trouve derrière la lentille (c'est le cas d'un objet qui est, avant interposition de la lentille, en fait une image réelle donnée par un instrument d'optique situé en avant de la lentille). L'image est *virtuelle* si elle se forme en avant de la lentille (elle se trouve alors sur le prolongement virtuel des rayons lumineux qui émergent de la lentille). Une image virtuelle ne peut pas être recueillie sur un écran mais on peut l'observer directement en plaçant son œil en arrière de la lentille.

- L'image est dite *droite* si son sens est le même que celui de l'objet; elle est *renversée* si elle a un sens contraire.

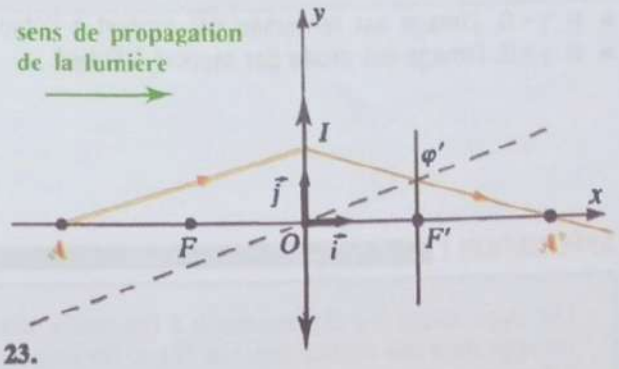
Scanné avec CamScanner

16.4 formules des lentilles minces

Nous venons de déterminer à l'aide de constructions simples la position et la grandeur de l'image, connaissant la distance focale et la nature (convergente ou divergente) de la lentille. Nous pouvons retrouver ces résultats par le calcul. A cette fin, définissons un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal de la façon suivante : le point O est le centre optique; $\vec{i}$, un vecteur unitaire porté par l'axe principal et orienté dans le sens de la propagation de la lumière; $\vec{j}$, un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{i}$ et situé dans le plan de la figure où cheminеront les rayons lumineux (*fig.* 23). Nous utiliserons comme unité de longueur le centimètre ou le mètre et, dans les formules qui suivent, les mesures des segments seront des grandeurs algébriques.

16.4.1 formule de conjugaison

Soit un point objet A situé sur l'axe optique d'une lentille; il émet un rayon lumineux AI (*fig.* 23). Pour construire le rayon émergent IA', traçons la droite passant par O et parallèle à AI; elle coupe le plan focal image en φ'. Le rayon émergent est alors $I\varphi'$, qui coupe l'axe en A', image de A.



23.

Posons $\overline{OA} = p$, $\overline{OA'} = p'$ et $\overline{OI} = r$. La droite $O\varphi'$ a même pente que la droite AI, c'est-à-dire $-\frac{r}{p}$. Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, son équation s'écrit donc :

$$y = -\frac{r}{p}x.$$

Nous en déduisons les coordonnées de φ' :

$$x = \overline{OF'}, \quad y = -\frac{r}{p}\overline{OF'}.$$

La droite IA' a pour équation :

$$\frac{x}{p'} + \frac{y}{r} = 1.$$

Le point φ' appartenant aussi à cette droite, il vient :

$$\frac{\overline{OF'}}{p'} - \frac{r\overline{OF'}}{rp} = 1, \quad \text{ou encore} \quad \frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{\overline{OF'}},$$

soit :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}}.$$

Ce raisonnement est général et ne dépend pas de la nature (convergente ou divergente) de la lentille mince. Cette formule, appelée **relation de conjugaison**, permet de déterminer la position de l'image connaissant celle de l'objet, et inversement. Elle permet de déterminer également la distance focale image $\overline{OF'}$ (grandeur algébrique) de la lentille. Avec nos conventions, la distance focale image est **positive** pour une lentille **convergente, négative** pour une lentille **divergente.**

Remarque 1 : Les foyers F et F' ne sont pas des points conjugués. Lorsque le point A tend vers un point situé à l'infini,

Scanné avec CamScanner

A' tend vers le foyer F' (*fig.* 15 et 17). Lorsque le point A tend vers le foyer F, A' tend vers un point situé à l'infini (*fig.* 16 et 18).

Remarque 2 :

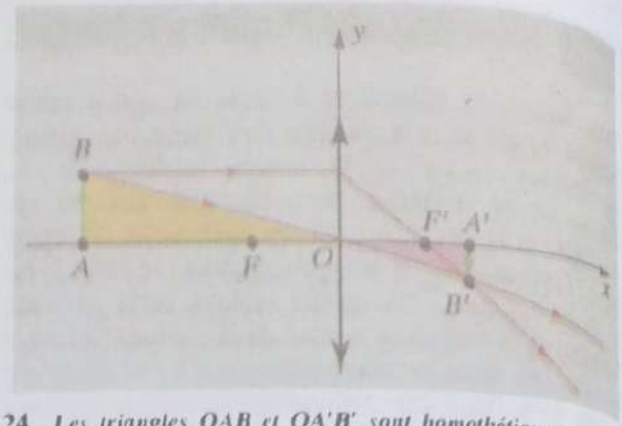
- Si $\begin{cases} \overline{OA} > 0 : \text{l'objet est virtuel;} \\ \overline{OA} < 0 : \text{l'objet est réel.} \end{cases}$
- Si $\begin{cases} \overline{OA'} > 0 : \text{l'image est réelle;} \\ \overline{OA'} < 0 : \text{l'image est virtuelle.} \end{cases}$

16.4.2 formule de grandissement

On appelle **grandissement** le rapport $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$, et nous avons (*fig.* 24) : $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$.

Cette formule permet de définir la taille et le sens de l'image (droite ou renversée) :

- si $\gamma < 0$, l'image est renversée par rapport à l'objet;
- si $\gamma > 0$, l'image est droite par rapport à l'objet.



24. *Les triangles OAB et $OA'B'$ sont homothétiques :*
$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}.$$
Les projections se font sur les axes (Oy) et (Ox).

APPLICATION 1

Une loupe simple (fig. 25), assimilable à une lentille mince convergente, a une distance focale de 10 cm. Elle est placée à 8 cm d'une feuille comportant des caractères d'imprimerie de 2 mm de hauteur.

Déterminer la position, la nature et la grandeur de l'image.

Pour construire l'image, employons la méthode exposée au paragraphe 16.3.4. La construction graphique nous permet de constater que l'image est virtuelle, agrandie et droite (*fig.* 25). Précisons ces caractéristiques par le calcul.

Le centimètre est pris comme unité. Le point A est devant la lentille, soit $\overline{OA} = -8$ cm (objet réel); F' est derrière la lentille, soit $\overline{OF'} = 10$ cm.

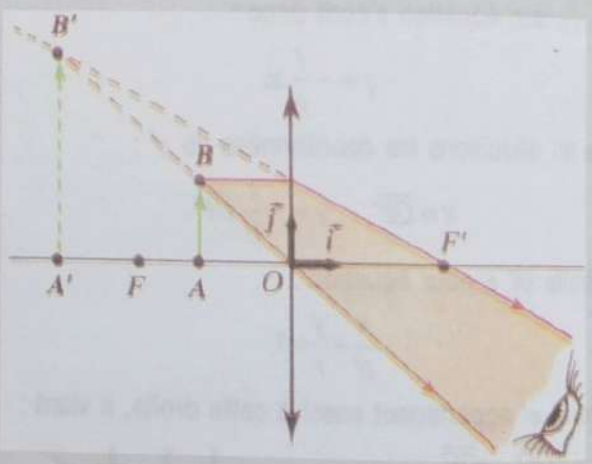
La relation de conjugaison donne :
$$\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OF'}} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{10},$$
soit
$$\overline{OA'} = -40 \text{ cm}.$$

L'image est en avant de la lentille, à 40 cm de O; l'image est bien virtuelle.

Calculons le grandissement :
$$\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{-40}{-8} = 5.$$

Le grandissement est positif : l'image n'est pas renversée; elle est droite, cinq fois plus grande que l'objet. Les caractères d'imprimerie auront une image de $2 \times 5 = 10$ mm de hauteur.

L'image virtuelle d'un caractère d'imprimerie se comporte, pour l'œil qui l'observe derrière la loupe, comme un objet (réel) de 10 mm de hauteur situé à 40 cm devant la lentille.



25. *Principe de la loupe.*

Si l'observateur place son œil contre la lentille, il voit cette image sous un angle α égal à $\dfrac{10}{400} = 0{,}025$ rad.

Si l'observateur regarde directement à l'œil nu (sans loupe), il verra un caractère sous l'angle α_0 tel que $\alpha_0 = 2/D$, où D est la distance de l'œil à la feuille de papier, exprimée en mm. L'observateur a intérêt à diminuer D, mais D ne peut devenir inférieure à 0,2 m environ, car, pour des distances aussi faibles, l'œil ne permet plus une lecture nette : 0,2 m est la distance minimale de vision distincte. Aussi l'angle α_0 vaut-il au plus $\dfrac{2}{200} = 0{,}01$ rad. Dans le cas présent, la loupe permet donc de lire les caractères sous un angle 2,5 fois plus grand que dans les meilleures conditions d'observation directe à l'œil nu.

Scanné avec CamScanner

APPLICATION 2

L'objectif d'un appareil de projection de diapositives peut être assimilé à une lentille mince convergente ayant une distance focale de 10 cm. *Un écran est placé à* 4 m *de cette lentille.*

1/ Comment doit-on placer la diapositive pour obtenir une image nette sur l'écran?

2/ La diapositive a pour dimensions 24 mm × 36 mm. *Quelle sont les dimensions de l'image sur l'écran?*

1/ Les positions de l'image et de l'objet sont liées par la relation de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{OA}}=\frac{1}{\overline{OA'}}-\frac{1}{\overline{OF'}}.$$

L'image est réelle puisqu'on l'observe sur un écran et le foyer image est situé derrière la lentille (convergente), soit :

$\overline{OA'}=400$ cm et $\overline{OF'}=10$ cm;

d'où : $$\frac{1}{\overline{OA}}=\frac{1}{400}-\frac{1}{10},$$

soit : $\overline{OA}\approx -10{,}26$ cm (objet réel).

L'objet (la diapositive) doit être placé devant la lentille, à 10,26 cm de O, donc tout près du foyer objet F.

2/ Calculons le grandissement :

$$\gamma=\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}=\frac{400}{-10{,}26}\approx -39.$$

γ étant négatif, l'image est renversée par rapport à l'objet. C'est pourquoi la diapositive est placée à l'envers dans l'appareil de projection, afin d'obtenir sur l'écran une image dans le bon sens, de dimensions :

— hauteur : $24\times 39=936$ mm $\approx 0{,}94$ m;

— largeur : $36\times 39=1\,404$ mm $\approx 1{,}40$ m.

16.5 vergence d'une lentille mince

16.5.1 définition

La **vergence** d'une lentille mince, notée C, est l'inverse de sa distance focale image :

$$C=\frac{1}{\overline{OF'}}.$$

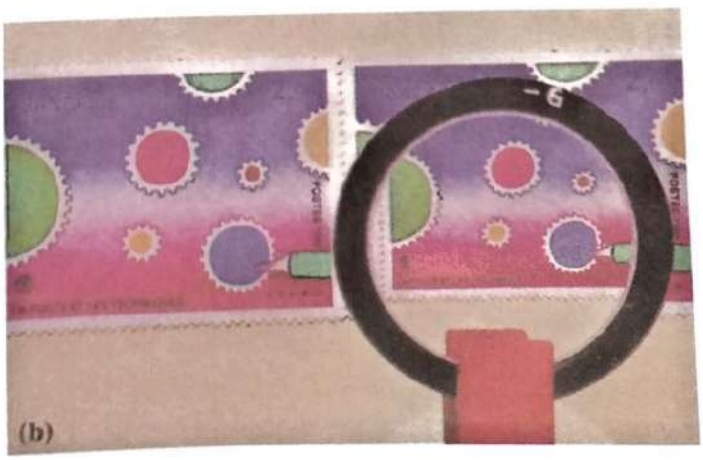
L'unité de vergence est la **dioptrie** (symbole δ), la distance focale étant exprimée en mètres.

La vergence est *une grandeur algébrique :*

- les lentilles convergentes ($\overline{OF'}>0$) ont une vergence positive (*fig.* 26 a);
- les lentilles divergentes ($\overline{OF'}<0$) ont une vergence négative (*fig.* 26 b).

Remarque : Une grande vergence en valeur absolue correspond à des lentilles de faibles distances focales, donc fortement convergentes ou divergentes.





26 a. *La lentille est convergente (+8 δ) : l'image est plus grande que l'objet.*

b. *La lentille est divergente (−6 δ) : l'image est plus petite que l'objet.*

Scanné avec CamScanner

16.5.2 vergence d'un système de lentilles minces accolées

Considérons le cas simple de deux lentilles convergentes suffisamment minces pour que, si on les place l'une contre l'autre, leurs centres optiques soient quasiment confondus (point O).
La lentille L_1, utilisée seule, donne une image A_1 de A telle que (*fig.* 27 a) :

$$\frac{1}{\overline{OA_1}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'_1}} = C_1. \qquad (1)$$

Accolons L_2 à L_1. L'image A_1 donnée par L_1 devient un objet virtuel pour la lentille L_2, qui donne l'image définitive A' telle que (*fig.* 27 b) :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA_1}} = \frac{1}{\overline{OF'_2}} = C_2. \qquad (2)$$

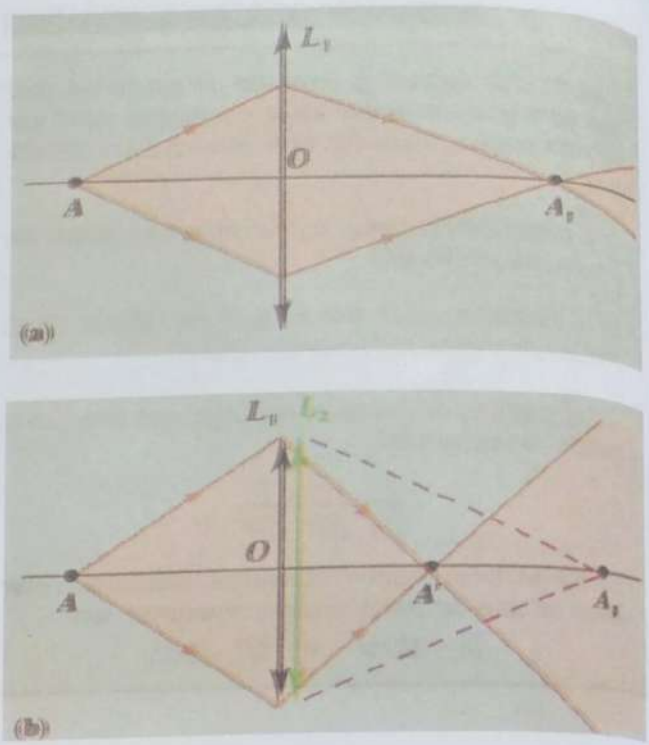
Ajoutons (1) et (2); il vient :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = C_1 + C_2.$$

Nous retrouvons la formule de conjugaison relative à une lentille unique de vergence $C = C_1 + C_2$.

• Un système de deux lentilles minces accolées, de vergences respectives C_1 et C_2, équivaut à une lentille unique de même centre optique O et de distance focale $\overline{OF'}$ telle que :

$$\frac{1}{\overline{OF'}} = C, \quad \text{avec} \quad C = C_1 + C_2.$$



27.

APPLICATION 3

On réalise quatre associations de deux lentilles minces accolées, définies par le tableau ci-dessous :

Association	1	2	3	4
Lentille L_1	5 δ	5 δ	−2 δ	4 δ
Lentille L_2	−3 δ	−6 δ	−3 δ	2 δ

Déterminer dans chaque cas la vergence de l'association ainsi que la distance focale image de la lentille équivalente.

Appliquons la formule $C = C_1 + C_2$: il vient :

• association 1 : $C = 2\ \delta$, lentille convergente de deux dioptries,

$$\overline{OF'} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \text{ m};$$

• association 2 : $C = -1\ \delta$, lentille divergente de une dioptrie,

$$\overline{OF'} = \frac{1}{-1} = -1 \text{ m};$$

• association 3 : $C = -5\ \delta$, lentille divergente de 5 dioptries,

$$\overline{OF'} = \frac{1}{5} = -0{,}2 \text{ m};$$

• association 4 : $C = 6\ \delta$, lentille convergente de 6 dioptries,

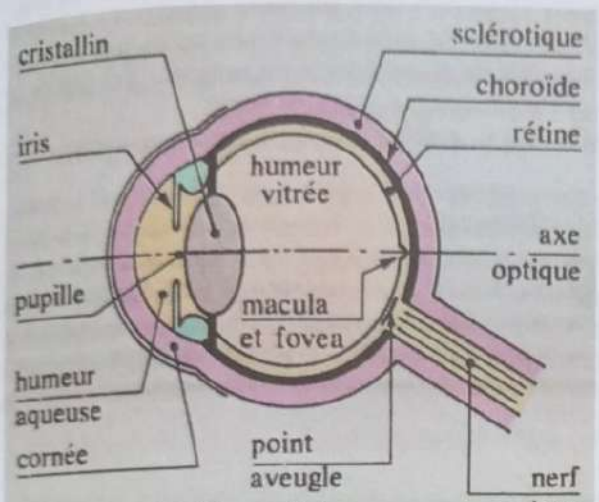
$$\overline{OF'} = \frac{1}{6} = 0.17 \text{ m}.$$

Scanné avec CamScanner

DOCUMENT

Les lunettes de vue

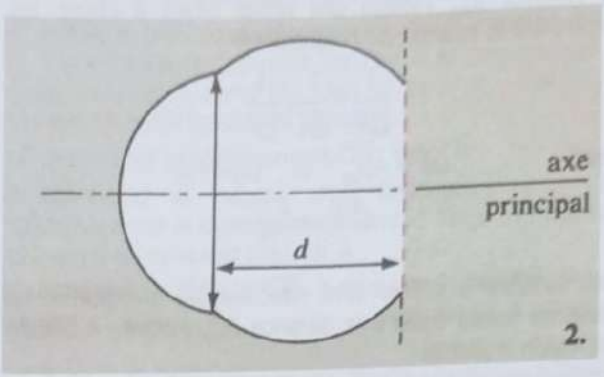
La figure 1 représente une coupe de l'œil. Les éléments principaux sont : le *cristallin* qui joue le rôle de lentille convergente et la *rétine* où se forment les images (transmises au cerveau par le nerf optique).



indice du cristallin : ≈ 1,4
indice de l'humeur vitrée : 1,33
indice de l'humeur aqueuse : ≈ 1,33

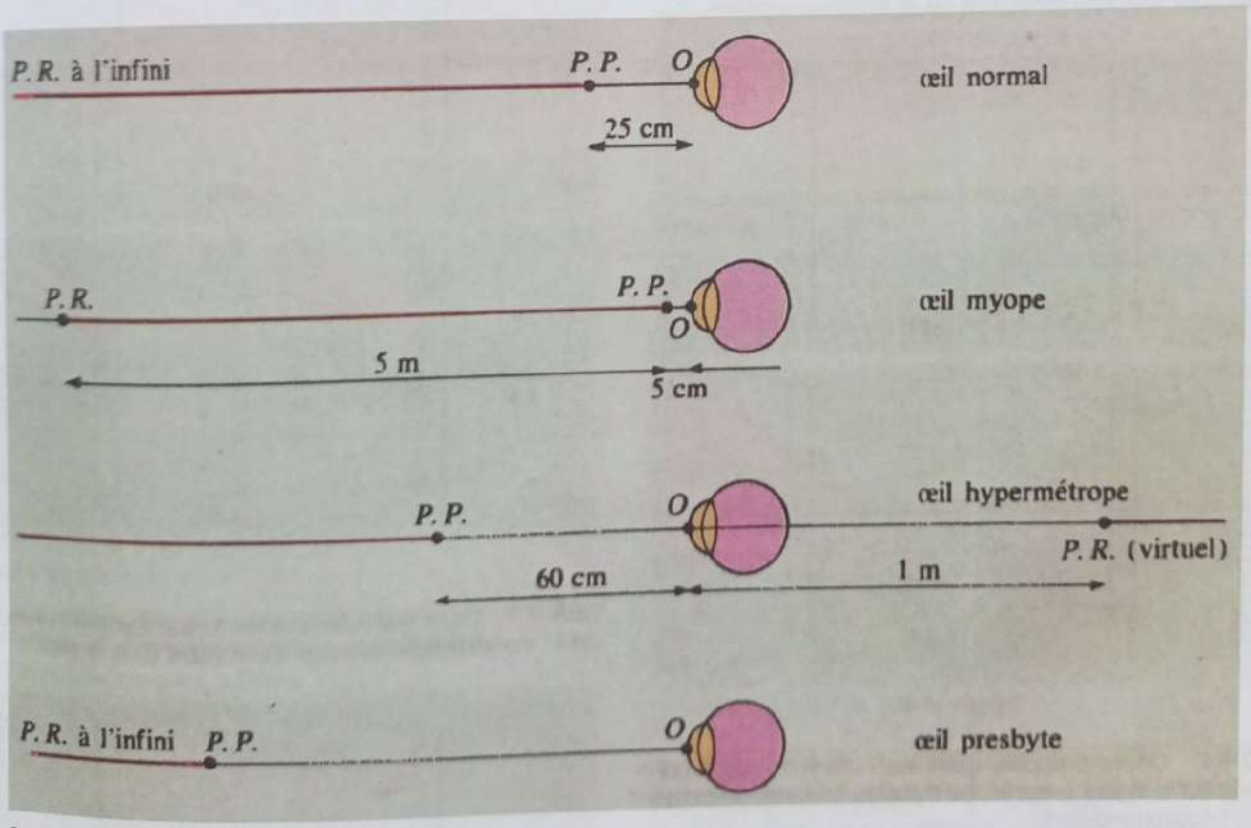
1.

Pour l'œil normal (ou *emmétrope*) au repos, l'image d'un objet situé à l'infini (en réalité quelques centaines de mètres ou quelques kilomètres) se forme sur la rétine. Lorsque l'objet se rapproche, les muscles augmentent la courbure du cristallin de telle sorte que l'image se forme toujours sur la rétine : l'œil *accommode* (*fig.* 2). Le cristallin est donc une lentille à distance focale variable, tout comme un « zoom ».



2.

Mais si l'objet est très près (moins d'une dizaine de centimètres), l'œil ne peut plus accommoder; l'image se forme en arrière de la rétine : l'objet est vu flou. Un œil normal voit donc nettement des objets situés entre « l'infini » et une distance minimale de vision distincte, égale à 20 cm environ. Examinons quelques défauts de la vision qui peuvent être corrigés par des lunettes de vue (*fig.* 3) :



3. ***Les principaux défauts de la vision.***
— P.P. : punctum proximum, limite de la distance minimale de vision distincte.
— P.R. : punctum remotum, limite de la distance maximale de vision distincte.
Au-delà de ces deux limites, l'œil n'accommode plus; les objets seront flous.

Scanné avec CamScanner

• La **myopie** correspond à un œil qui ne permet pas de voir les objets éloignés. Un myope ne distingue correctement les objets qu'en deçà d'une distance maximale D_m (de quelques mètres à quelques centimètres). L'œil est trop convergent. En revanche, l'œil myope voit nettement plus près qu'un œil normal, à 5 cm par exemple.
Pour corriger ce défaut, le myope doit porter des lunettes dont les verres sont des lentilles divergentes qui ramènent à la distance D_m l'image des objets situés à l'infini. En appliquant la relation de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}},$$

avec : $\overline{OA'} = -D_m$ et $\overline{OA} = -\infty$,

il vient : $\overline{OF'} = -D_m$.

Les lentilles à utiliser sont effectivement divergentes, de distance focale égale à la distance D_m, distance maximale de vision distincte.

Par exemple, si $D_m = 2$ m, la vergence des verres utilisés pour corriger ce défaut de myopie sera égale à :

$$\frac{1}{\overline{OF'}} = -\frac{1}{D_m} = -0{,}5\ \delta.$$

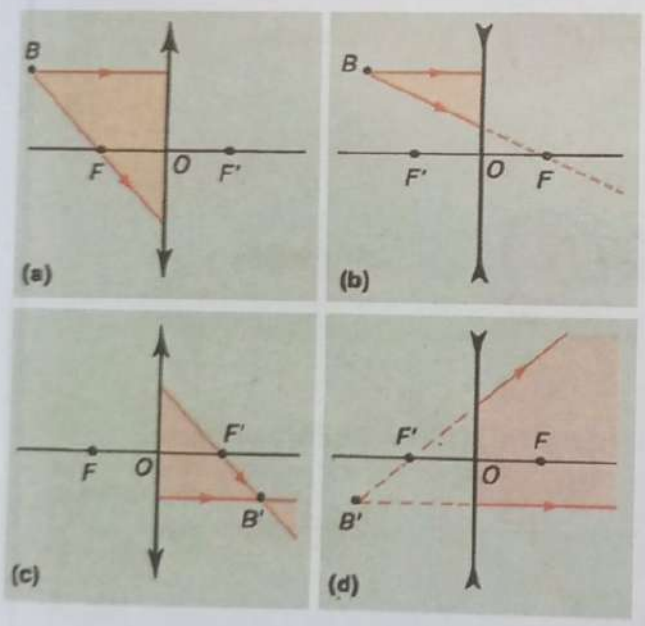
• L'**hypermétropie** est l'anomalie inverse de la myopie. Elle est plus rare et généralement moins prononcée que la myopie. Un œil hypermétrope accommode pour voir un objet situé à l'infini : il n'est pas assez convergent. Le principal inconvénient de cette anomalie tient au fait que la distance minimale de vision distincte est nettement plus grande que pour un œil normal (quelques mètres).
On corrige ce défaut à l'aide de lentilles convergentes.

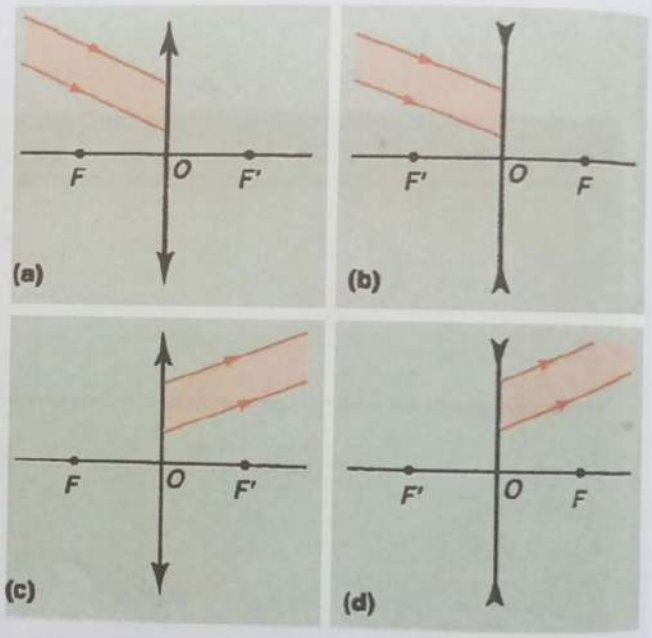
• La presbytie est due à une fatigue des muscles d'accommodation ou à un manque de souplesse du cristallin. Cette anomalie apparaît avec l'âge. L'œil accommode mal, il ne peut voir les objets rapprochés, et sa distance minimale de vision distincte augmente. On corrige ce manque de convergence du cristallin, en utilisant des verres convergents.

EXERCICES

L'essentiel du cours

16.1 A Tracer, dans les différents cas représentés sur la figure, le faisceau émergent ou le faisceau incident.





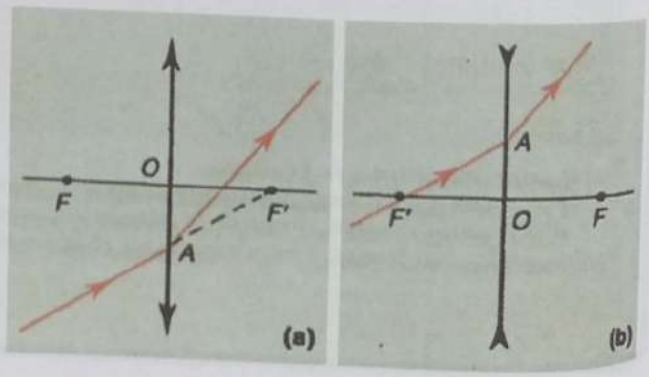
16.2 A On se propose, dans les différents cas représentés sur la figure ci-après, de tracer le faisceau émergent ou le faisceau incident.

1/ Tracer le rayon lumineux du faisceau émergent ou du faisceau incident passant par le centre optique.

2/ En déduire les positions des foyers secondaires objet ou image.

3/ Tracer alors le faisceau émergent ou le faisceau incident.

16.3 A Dans les deux cas de figure, justifier et retrouver la construction du rayon émergeant de la lentille.



Scanné avec CamScanner

EXERCICES

Vrai ou faux ?

16.4 On répondra en considérant le cas d'une lentille convergente, puis celui d'une lentille divergente.

- Le foyer objet F et le foyer image F' sont virtuels.
- Les foyers objet et image sont deux points conjugués symétriques par rapport au centre optique.
- La vergence C est un nombre positif.
- Les positions A et A' de deux points conjugués sont reliées par la relation :

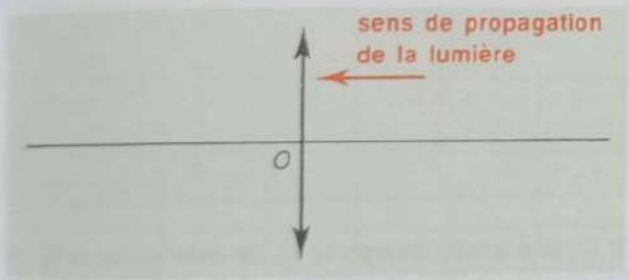
$$\frac{1}{\overline{OA}} - C = \frac{1}{\overline{OA'}}$$

- Un rayon lumineux parallèle à l'axe donne un rayon dont le support passe par F.
- Un rayon lumineux incident dont le support passe par F émerge parallèlement à l'axe optique.
- Un faisceau parallèle incident donne une image ponctuelle située dans le plan focal image.
- La lentille peut donner d'un objet réel une image virtuelle.
- La lentille peut donner d'un objet réel une image réelle.
- La lentille peut donner d'un objet virtuel une image virtuelle.
- La lentille peut donner d'un objet virtuel une image réelle.
- Le grandissement γ est négatif lorsque l'objet et l'image sont l'un et l'autre réels, ou l'un et l'autre virtuels.

Exercices de base

16.5 AB 1/ Rappeler la définition de la vergence d'une lentille mince.

2/ Une lentille mince a une vergence de + 5 dioptries.



a/ Quelle est sa distance focale ? Cette lentille est-elle convergente ou divergente ?

b/ La lumière se propage de la droite vers la gauche. Placer les foyers principaux objet et image (figure).

c/ On retourne la lentille face pour face. Quelles sont les nouvelles positions des foyers ?

3/ Une lentille mince a une vergence de - 8 dioptries. Répondre aux mêmes questions que ci-dessus.

4/ On accole ces deux lentilles.

a/ Rappeler la loi sur la vergence pour deux lentilles accolées.

b/ Répondre à nouveau aux mêmes questions.

Lentille convergente

16.6 Une lentille *convergente*, de centre optique O, a une distance focale de 5 cm et un diamètre de 6 cm. On place un objet réel AB, de 2 cm de longueur, perpendiculairement à l'axe de la lentille, à 12 cm de celle-ci. Le point A est situé sur l'axe optique. La lumière se propage de gauche à droite.

1/ B4 Placer sur un schéma à l'échelle unité les points F, F', A et B.

2/ B3 En précisant les conventions employées, calculer $\overline{OF}$, $\overline{OF'}$ et $\overline{OA}$.

3/ AB4 On se propose de déterminer l'image $A'B'$.

a/ Tracer la marche d'un rayon issu de B, parallèle à l'axe.

b/ Tracer le rayon lumineux issu de B et passant par O.

c/ En déduire le point B', puis le point A'. Caractériser l'image obtenue (nature et sens).

d/ Déterminer graphiquement $\overline{OA'}$ et $\overline{A'B'}$.

4/ AB4 Tracer la marche d'un faisceau issu de B et s'appuyant sur le contour de la lentille. Reprendre la question avec un faisceau issu de A.

5/ A Retrouver $\overline{OA'}$ et $\overline{A'B'}$ à l'aide des formules de conjugaison.

16.7 AB On considère la lentille de l'exercice précédent.

1/ Le même objet est situé maintenant à 8 cm devant la lentille. Répondre aux mêmes questions.

2/ Le même objet est placé à 3 cm devant la lentille. Répondre aux mêmes questions. Indiquer la différence avec les cas précédents.

Lentille divergente

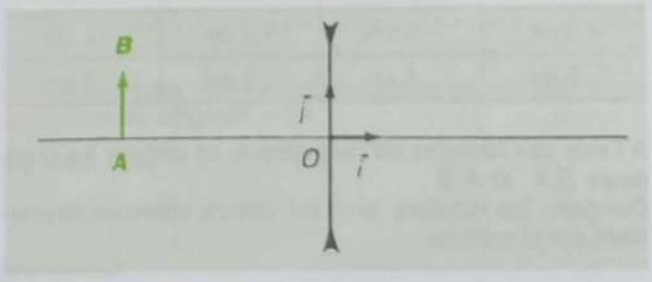
16.8 Soit une lentille *divergente*, de 50 cm de distance focale et de 20 cm de diamètre. On place à 25 cm devant la lentille un objet lumineux AB de 5 cm de hauteur, perpendiculairement à l'axe optique, le point A étant sur cet axe. La lumière se propage de gauche à droite.

1/ B4 Faire un schéma à l'échelle 1/10, où l'on placera les points F, F', A, B et O (centre optique).

2/ AB Tracer la marche de deux rayons lumineux issus de B, l'un parallèle à l'axe optique, l'autre pasant par le centre optique.

3/ A Donner la position et les caractéristiques de l'image $A'B'$ de AB.

4/ C Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



Le tableau ci-dessous comporte deux valeurs pour chaque grandeur ; choisir la bonne valeur.

$\overline{OF}$	$\overline{OF'}$	$\overline{OA}$	$\overline{AB}$
+ 50 cm	+ 50 cm	+ 25 cm	+ 5 cm
- 50 cm	- 50 cm	- 25 cm	- 5 cm

A l'aide des formules de conjugaison, calculer les grandeurs $\overline{OA'}$ et $\overline{A'B'}$. Comparer les résultats avec les valeurs obtenues directement sur le schéma.

5/ C1 Tracer la marche d'un faisceau lumineux issu de B et s'appuyant sur le contour de la lentille.

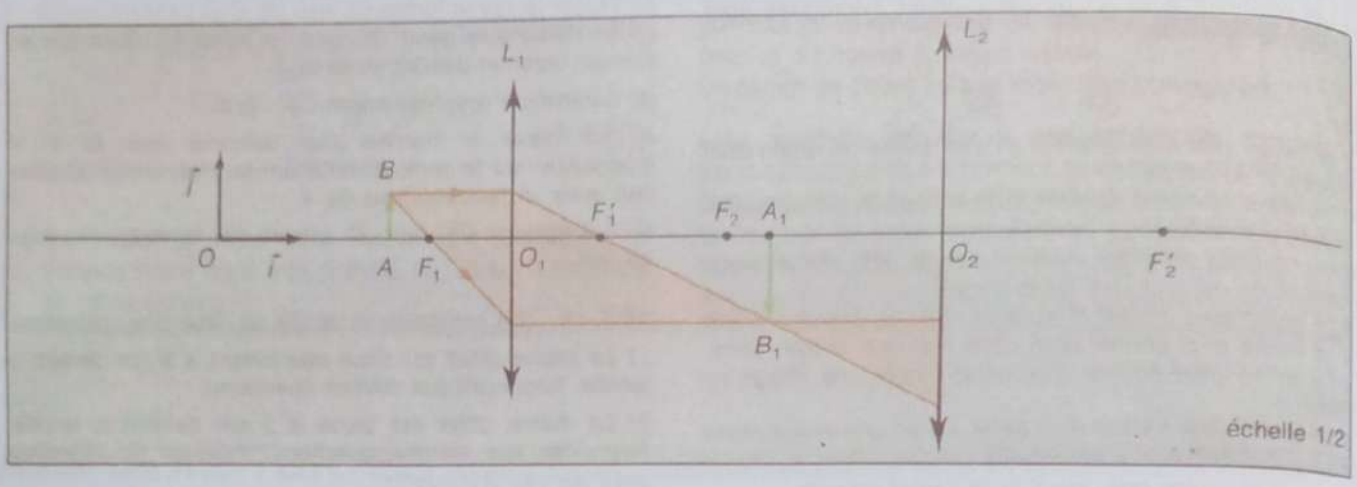
Scanné avec CamScanner

EXERCICES

Système optique constitué par deux lentilles minces

16.9 Un système optique est constitué par deux lentilles convergentes minces L_1 et L_2, de même axe, de distances focales respectives 2 cm et 5 cm. La distance O_1O_2 entre les deux lentilles est égale à 10 cm.

On place à 3 cm devant la lentille L_1 un objet lumineux AB de 1 cm de hauteur, perpendiculairement à l'axe optique, le point A étant sur cet axe.



1/a/ B4 Faire un schéma du dispositif à l'échelle unité.
b/ A Justifier la détermination de l'image A_1B_1 donnée par la lentille L_1.
c/ AB3 Déterminer graphiquement les grandeurs $\overline{O_1A_1}$ et $\overline{A_1B_1}$. Retrouver les résultats par le calcul.

2/ AC2 L'image A_1B_1 est un objet réel pour la lentille L_2. On cherche son image $A'B'$ donnée par cette lentille.

a/ Pourquoi peut-on qualifier A_1B_1 d'objet réel pour L_2 ?
b/ Tracer deux rayons particuliers issus de B_1 qui permettent de construire B' et d'en déduire A'.
c/ L'image obtenue est-elle réelle ou virtuelle ? droite ou renversée par rapport à AB ? plus petite ou plus grande ?
d/ Compléter le tracé du faisceau émergent issu de B.

3/ C1 Le tableau ci-dessous comporte deux valeurs pour chaque grandeur ; choisir la bonne valeur.

$\overline{O_2F_2}$	$\overline{O_2F_2'}$	$\overline{O_2A_1}$	$\overline{A_1B_1}$
+ 5 cm	+ 5 cm	+ 4 cm	+ 2 cm
− 5 cm	− 5 cm	− 4 cm	− 2 cm

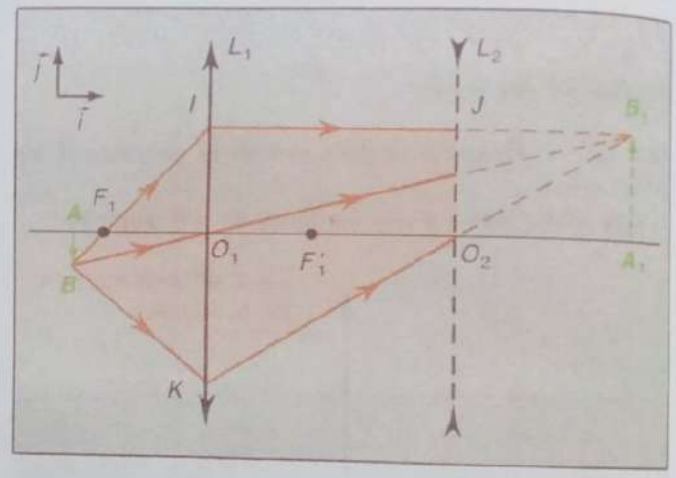
A l'aide des formules de conjugaison, en déduire les grandeurs $\overline{O_2A'}$ et $\overline{A'B'}$.
Comparer les résultats avec les valeurs obtenues directement sur le schéma.

Association de deux lentilles de natures différentes

16.10 C1 Une lentille *convergente* L_1, de distance focale 15 cm, donne d'un objet lumineux AB, perpendiculaire à l'axe optique et situé à 20 cm en avant de la lentille, une image réelle A_1B_1. Le point A est sur cet axe et $\overline{AB} = -5$ cm.

1/a/ B4 Faire un schéma du dispositif à l'échelle 1/5. Justifier la détermination de l'image A_1B_1.

b/ Calculer la grandeur $\overline{O_1A_1}$ et le rapport $\dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}$.



2/ C2 Une lentille *divergente* L_2, de distance focale 50 cm, est placée derrière la lentille L_1, à la distance 35 cm, les axes optiques étant confondus (figure ci-dessus). On cherche l'image finale $A'B'$.

a/ Pourquoi peut-on qualifier A_1B_1 d'objet virtuel pour L_2 ?
b/ Le rayon IJ est parallèle à l'axe optique. Tracer le rayon correspondant émergeant de L_2.
c/ Le rayon KO_2 passe par le centre optique O_2. Tracer le rayon correspondant émergeant de L_2.
En déduire la position de l'image B' de B_1, puis celle de l'image A' de A_1.
d/ Retrouver par le calcul la position de A' et la grandeur de l'image $A'B'$.
e/ Représenter un faisceau lumineux issu de B et traversant successivement les deux lentilles.

Banc d'essais

16.11 AC2 Une lentille convergente de distance focale 2 cm donne d'un objet AB, de 1 cm de hauteur et perpendiculaire à l'axe, une image $A'B'$, les points A et A' étant sur cet axe.

Scanné avec CamScanner

EXERCICES

En utilisant des constructions graphiques à l'échelle, compléter le tableau ci-après :

$\overline{OA}$	– 6 cm	– 4 cm	– 3 cm	– 2 cm	– 1 cm	2 cm
nature de l'objet						
position de l'image						
nature de l'image						
sens de l'image						
grandeur de l'image						

↳ ex. 16.6.

16.12 AB3 Retrouver les valeurs numériques de l'exercice précédent à l'aide des formules de conjugaison.

↳ ex. 16.6, 16.7.

16.13 AC Une lentille divergente de distance focale – 2 cm donne d'un objet AB, de 1 cm de hauteur et perpendiculaire à l'axe, une image $A'B'$, les points A et A' étant sur cet axe.
En utilisant des constructions graphiques à l'échelle, compléter le tableau ci-après :

$\overline{OA}$	– 4 cm	1 cm	2 cm	3 cm	4 cm
nature de l'objet					
position de l'image					
nature de l'image					
sens de l'image					
grandeur de l'image					

↳ ex. 16.7, 16.8.

16.14 B Retrouver les valeurs numériques de l'exercice précédent à l'aide des formules de conjugaison.

↳ ex. 16.7, 16.8.

16.15 AB On place une bougie allumée à 1 m d'une lentille convergente de 50 cm de distance focale. Déterminer la position de l'image et son grandissement. Construire cette image, puis tracer la marche d'un faisceau lumineux émanant de la pointe de la flamme.

16.16 AB On place une bougie allumée à 40 cm d'une lentille divergente de 20 cm de distance focale. Déterminer la position de l'image. Construire cette image, puis tracer la marche d'un faisceau lumineux émanant de la pointe de la flamme.

16.17 AB On place un objet réel à 18 cm d'une lentille mince de 12 cm de distance focale. Déterminer la nature et la position de l'image. Si l'objet a 2 cm de hauteur, quelle est la grandeur de l'image? On distinguera le cas d'une lentille convergente et celui d'une lentille divergente.

16.18 AB En avant d'une lentille convergente de 20 cm de distance focale, on place, à 10 cm de son centre optique, un objet AB, perpendiculaire à l'axe, de 2 mm de hauteur. Le point A est sur l'axe de la lentille.

1/ Constuire l'image $A'B'$. Donner les caractéristiques de cette image.

2/ Déterminer la position, la taille et la nature de l'image à l'aide des formules de conjugaison.

16.19 AB Reprendre l'exercice précédent avec une lentille divergente de distance focale – 20 cm.

16.20 AB Une lentille convergente de 20 cm de distance focale donne d'un objet réel une image quatre fois plus grande.

1/ L'image est réelle. Quelles sont les positions de l'objet et de l'image? L'image est-elle renversée?

2/ Mêmes questions lorsque l'image est virtuelle.

16.21 AB Une lentille divergente de 15 cm de distance focale donne d'un objet virtuel une image cinq fois plus grande.
Déterminer les positions de l'objet et de l'image pour $\gamma = +5$ et $\gamma = -5$. Préciser la nature de l'image.

↳ ex. 16.6, 16.8.

16.22 AB Un système optique donne d'un objet une image réelle A_1B_1 sur un écran. On interpose sur le trajet des rayons lumineux, à 1 m de l'écran, une lentille mince convergente L, de vergence 9 δ, et on enlève l'écran.

1/ L'image A_1B_1 est-elle un objet réel ou virtuel pour la lentille L? Construire l'image $A'B'$ donnée par cette lentille. Préciser la nature et le sens de l'image.

2/ Retrouver par le calcul les caractéristiques de l'image. Si l'image est réelle, où doit-on placer l'écran pour que cette image soit nette?

3/ Reprendre les mêmes questions pour une lentille mince divergente de vergence – 9 δ.

↳ ex. 16.6, 16.8.

Œil normal

16.23 A Dans un œil normal, la rétine est à 16,7 mm du centre optique du cristallin. L'œil normal permet de voir nettement les objets situés à l'infini.

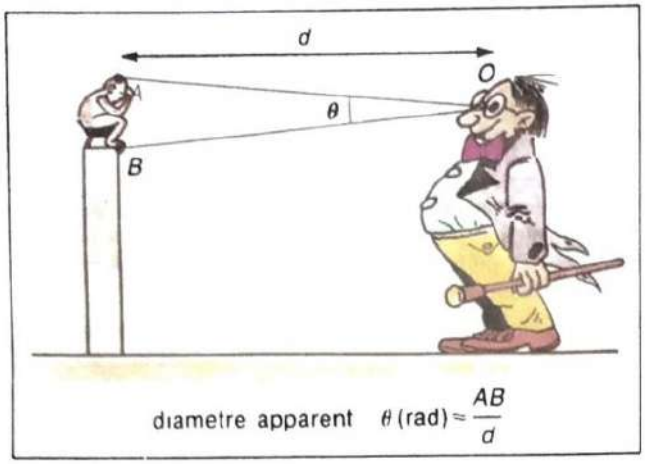
1/ Calculer la vergence de l'œil au repos, considéré comme une lentille mince.

2/ Calculer sa vergence lorsqu'il observe à la distance minimale de vision distincte, soit 25 cm. On admettra que la distance du centre optique à la rétine ne varie pas, mais que la distance focale varie.

3/ On appelle *diamètre apparent* d'un objet étendu, observé d'un point O, l'angle θ sous lequel cet objet est vu depuis ce point (figure, page suivante).

Scanné avec CamScanner

EXERCICES



diamètre apparent $\theta\,(\text{rad}) \approx \dfrac{AB}{d}$

On appelle *pouvoir séparateur* de l'œil le plus petit diamètre apparent θ_0 sous lequel deux points A et B paraissent distincts. (Pour $\theta < \theta_0$, les points A et B paraissent donc confondus et l'objet AB semble ponctuel.)

a/ Les cônes qui tapissent la rétine ont un diamètre voisin de 4 µm. Pour que la rétine puisse séparer les images de deux points, il faut que celles-ci impressionnent deux cellules séparées par au moins une cellule intermédiaire. Calculer le pouvoir séparateur de l'œil, en radians, puis en minutes. Calculer la distance minimale entre deux points A et B séparés par l'œil, situés à 25 cm de la rétine.

b/ L'œil permet-il de distinguer les phares d'une voiture située à 5 km ? La distance entre les phares vaut 1,2 m.

↳ **ex. 16.11.**

Corrections de certains défauts de l'œil

16.24 C2 1/ La distance maximale de vision distincte pour un myope est de 1,25 m. Quelle est la vergence des verres qu'il doit porter afin qu'il puisse voir sans accommoder un objet à l'infini ?

2/ Un œil complètement presbyte ne voit nettement que des objets situés à 1 m. Calculer les vergences des lentilles (verres à double foyer) qui lui permettent :

a/ de voir nettement des objets très éloignés ;
b/ de lire un journal à 25 cm de l'œil.

3/ Un œil hypermétrope n'est pas assez convergent. Par exemple, sa distance minimale de vision distincte est de 60 cm au lieu de 25 cm. Par ailleurs, s'il observe à l'infini sans accommoder, l'image se forme derrière la rétine, par exemple à 18 mm derrière le centre optique du cristallin, alors que la rétine est à 16,7 mm de celui-ci.

a/ Quelle est la vergence de la lentille correctrice qui permet à cet œil de regarder à l'infini sans accommoder ?
b/ Quelle est la distance minimale de vision distincte corrigée par le verre précédent ?

↳ **doc.**

Loupe

16.25 Une loupe est une lentille convergente.

1/ A Une loupe a une vergence de 20 δ. Calculer sa distance focale. Placer sur un schéma à l'échelle 1/2 les foyers F et F', la lumière se propageant de gauche à droite.

2/ BC2 On place un objet AB de 1 cm de haut à 4 cm du centre optique. Le point A est sur l'axe optique et AB est perpendiculaire à cet axe.

a/ Construire l'image $A'B'$ de AB.
b/ Déterminer graphiquement la position et la grandeur de l'image.
c/ Peut-on recueillir cette image sur un écran ?
d/ Retrouver les grandeurs $\overline{OA'}$ et $\overline{A'B'}$ à l'aide des formules de conjugaison.

3/ BC2 *a/* Un œil placé en F' observe cette image sous l'angle θ'. Calculer θ' en radians.
b/ Sous quel angle θ l'œil, placé à 25 cm de AB, verrait-il cet objet sans la loupe ?
c/ Calculer le grossissement $G = \theta'/\theta$ de la loupe.
d/ L'œil ne peut plus séparer deux points si l'angle sous lequel il les voit est inférieur à $5 \cdot 10^{-4}$ rad. Calculer la distance minimale entre deux points A et B que la loupe peut séparer dans les conditions du *a/*.

Microscope

16.26 Un microscope est un instrument qui comprend deux systèmes convergents, qu'on supposera réduits chacun à une lentille mince : l'objectif L_1, de centre optique O_1, devant lequel est situé l'objet, et l'oculaire L_2, de centre optique O_2, placé devant l'œil de l'observateur. Les distances focales sont très différentes, de l'ordre du millimètre pour l'objectif, du centimètre pour l'oculaire. Les deux systèmes ont le même axe optique.

1/ C2 Pour comprendre le principe de l'appareil, faire un schéma en prenant :

$$\overline{O_1O_2} = 9\text{ cm}, \quad f_1' = 1{,}5\text{ cm}, \quad f_2' = 4\text{ cm},$$
$$\overline{AO_1} = 2\text{ cm}, \quad AB = 0{,}5\text{ cm}.$$

Construire l'image de AB donnée par le microscope. Quel est l'intérêt de l'appareil ?

2/ B3 En réalité, un microscope est tel que, par exemple :

$$\overline{O_1O_2} = 12\text{ cm}, \quad f_1' = 2\text{ mm}, \quad f_2' = 2\text{ cm}.$$

Un objet AB de longueur 1 µm est placé perpendiculairement à l'axe principal, à 2,04 mm devant L_1. Calculer la position et la taille de l'image.

3/ A L'observateur met son œil au foyer image de l'oculaire. Déterminer le diamètre apparent de l'image (c'est-à-dire l'angle θ' sous lequel elle est observée).

4/ AC Calculer le diamètre apparent θ de l'objet AB lorsqu'on l'observe à l'œil nu, à la distance de 25 cm. Calculer le grossissement $G = \theta'/\theta$ du microscope (rapport du diamètre apparent de l'image au diamètre apparent de l'objet).

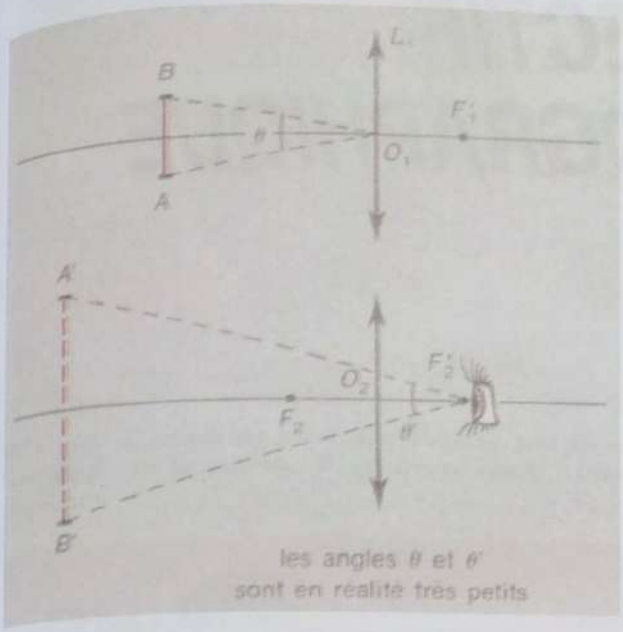
↳ **ex. 16.9, 16.11.**

Lunette astronomique

16.27 AC2 On assimile une lunette astronomique à un système de deux lentilles minces convergentes de même axe optique. La première lentille, L_1 (objectif), donne d'un objet éloigné AB une image intermédiaire A_1B_1. La seconde lentille, L_2 (oculaire), joue le rôle de loupe ; elle donne de A_1B_1 une image virtuelle $A'B'$. On prend comme distances focales $f_1' = 20$ cm et $f_2' = 2$ cm. La distance O_1O_2 des centres optiques est réglable.

Scanné avec CamScanner

EXERCICES



1/ *Étude de l'objectif seul.* Soit un objet AB placé devant L_1. Le diamètre apparent de l'objet est θ (figure).

a/ Lorsque l'objet est très éloigné, où se trouve pratiquement l'image A_1B_1 ?
b/ Déterminer la dimension de l'image.

Application numérique : $\theta = 2°$.

2/*a/* Étude de l'oculaire seul. Où doit-on placer un objet par rapport à la lentille L_2 pour observer à travers celle-ci une image virtuelle ?
b/ Quelle doit être la position de l'objet pour que l'image soit à l'infini ? Calculer l'angle θ' sous lequel on voit l'image, l'œil étant placé au foyer F'_2.

3/ *Étude du système complet.* L'observateur regarde la Lune à travers l'instrument, l'image définitive étant située elle aussi à l'infini.

a/ Faire un schéma du dispositif.
b/ Vérifier que $O_1O_2 = f'_1 - f'_2$.
c/ Exprimer le grossissement $G = \theta' / \theta$ de la lunette en fonction de f'_1 et de f'_2.
d/ Le diamètre apparent de la Lune est d'environ 30 '. Calculer le diamètre apparent de son image dans cette lentille réglée comme il a été dit.
e/ Représenter la marche d'un faisceau lumineux parallèle incliné d'un angle $\theta/2$ par rapport à l'axe optique et couvrant toute la lentille L_1.

↳ **ex. 16.9, 16.11.**

Lunette de Galilée

16.28 Une lunette de Galilée est constituée de deux lentilles de même axe optique. La première lentille L_1, de vergence + 4 δ, donne d'un objet AB une image réelle A_1B_1. Cette dernière constitue un objet virtuel pour une lentille L_2 de vergence − 20 δ.

1/ C2 Sachant qu'une lunette de Galilée donne d'un objet éloigné une image virtuelle droite, montrer que le foyer image de L_1 doit se trouver après le foyer objet de L_2.
Faire un schéma de principe de la lunette de Galilée.

2/ AB Une personne utilise cette lunette pour observer un objet AB de hauteur 5 cm situé à 20 m du centre optique O_1 de L_1. Elle règle la distance O_1O_2 de sorte que l'image $A'B'$ soit à 25 cm de son œil, placé au foyer objet F_2 de la lentille L_2.

a/ Calculer la distance O_1O_2.

b/ Calculer le grandissement et le grossissement de la lunette. Lequel de ces nombres met en évidence l'intérêt de la lunette ?

↳ **ex. 16.10, 16.11.**

Téléobjectif

16.29 AC L'axe principal d'une lentille mince L_1 de vergence 2 δ est dirigé vers le centre du Soleil. On dispose un écran E à 125 cm de L_1 et une lentille mince divergente L_2 entre L_1 et E, à 25 cm de L_1. Les axes principaux des deux lentilles coïncident.

1/ Faire un schéma du dispositif.

2/ Déterminer la distance focale de L_2 pour qu'il se forme une image du Soleil sur l'écran.

3/ Le diamètre apparent du Soleil est d'environ 0,01 rad. Calculer le diamètre (en cm) de cette image.

4/ Représenter la marche d'un faisceau lumineux parallèle, incliné d'un angle β par rapport à l'axe optique et couvrant toute la lentille L_1.

↳ **ex. 16.9, 16.11.**

Détermination de la distance focale d'une lentille convergente

16.30 A2 1/ Donner une méthode simple pour déterminer rapidement une valeur approchée de la distance focale d'une lentille mince convergente.

2/ Pour améliorer la précison, on réalise plusieurs séries de mesures. A cet effet, on dispose d'un banc d'optique sur lequel on place un objet lumineux AB, la lentille et un écran.

a/ B4 Faire un schéma du dispositif.

b/ A Dans quelle région du banc d'optique doit-on placer l'objet pour observer une image réelle sur l'écran ?

c/ AB3 On mesure (en cm) la distance objet-lentille $|p|$ et la distance lentille-écran p'. On obtient le tableau suivant :

$\lvert p\rvert$	180	120	100	70	50	40	30	20
p'	20	21	22	24	28	33	45	180

On porte les points $\left(\frac{1}{|p|}, \frac{1}{p'}\right)$ dans un repère orthonormal.
Vérifier que ces points sont sensiblement alignés.
d/ Montrer que la droite ainsi obtenue permet de déterminer la distance focale.

↳ **ex. 16.6.**

Scanné avec CamScanner

17 L'OBJECTIF PHOTOGRAPHIQUE

17.1 description

Un objectif photographique comprend :

- un **groupe de lentilles** (*fig.* 2), qui donne d'un objet une image réelle, renversée, dans le plan du film photographique (*photo* 3);
- un **diaphragme**, qui règle l'ouverture du faisceau lumineux et la quantité de lumière entrant dans l'appareil;
- un *obturateur* situé derrière l'objectif, qui permet de choisir la durée d'exposition de l'image sur le film; il règle ainsi la quantité de lumière qui impressionnera la pellicule.



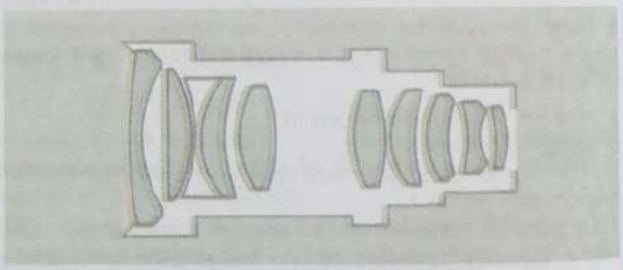
1.

17.1.1 le groupe de lentilles

Une simple lentille convergente sert d'objectif dans les appareils bon marché. Lorsqu'elle est diaphragmée, de façon à se trouver dans les conditions de Gauss, elle donne d'un objet une image relativement nette. Cette image se forme sur le film photographique, tout près du plan focal image.

La plupart des objectifs sont constituées par des associations de lentilles différentes (*fig.* 2), taillées dans des verres d'une grande homogénéité, aux indices bien déterminés. Cette association permet de corriger les nombreux défauts (aberrations, achromatisme) que présente toute lentille (*cf. chap.* 16). Nous assimilerons ce groupe de lentilles à une lentille unique.

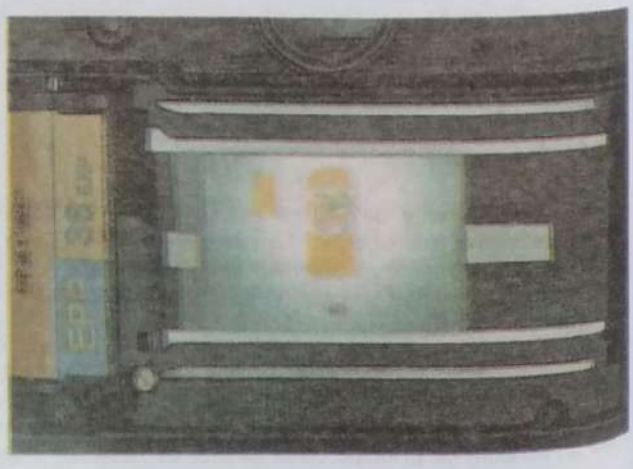
Une caractéristique importante de l'objectif est sa **distance focale** f(*).



2. *Un objectif est constitué de plusieurs lentilles: leur association permet d'améliorer la qualité de l'image.*

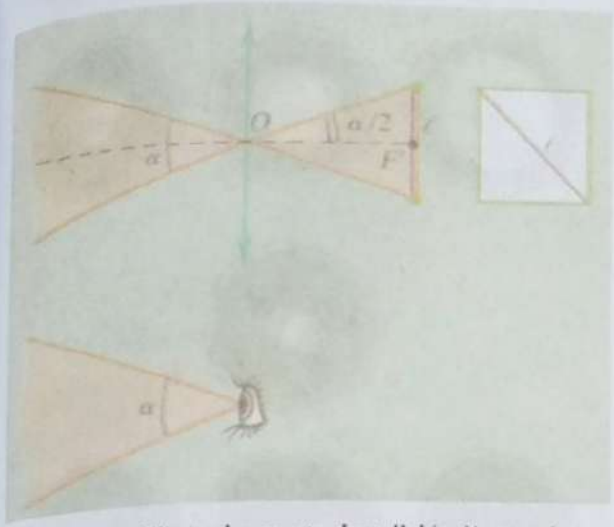
(*) En toute rigueur, la distance focale indiquée par le constructeur est la distance focale image $\overline{OF'}$. Les objectifs étant toujours convergents, on notera :

$$\overline{OF'} = |\overline{OF}| = f, \text{ avec } f > 0.$$



3. *Appareil ouvert montrant une image réelle et renversée.*

Scanné avec CamScanner



4. L'angle α délimite les points dont l'objectif peut former une image sur la pellicule. Il est encore appelé « champ angulaire ».



5 a. *Objectif de* 24 mm (∅ = 5,6; *d* = 7 m).



5 b. *Objectif de* 50 mm (∅ = 5,6; *d* = 7 m).



5 c. *Objectif de* 135 mm (∅ = 5,6; *d* = 7 m).

5 a, b et c. *L'objectif le plus court (24 mm) a pris la vue la plus large et a fourni la plus petite image des personnages; le plus long (135 mm) a donné la vue la plus étroite et la plus agrandie. Mais la perspective n'est pas altérée : les proportions relatives des personnages et du paysage qui les entoure ne changent pas.*

Pour un format photographique donné, la distance focale normale correspond à un angle de champ α voisin de celui sous lequel l'œil (mobile dans son orbite) voit son environnement, soit 50° environ (*fig.* 4).
Si ℓ est la diagonale du film (par exemple pour un film 24 × 36 :

$$\ell = \sqrt{24^2 + 36^2} \approx 43 \text{ mm},$$

la figure 4 montre que :

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\ell}{2OF'}$$

soit : $\dfrac{\ell}{OF'} = 0{,}93$ pour $\alpha = 50°$.

Pour un format 24 × 36, la valeur de la distance focale $f = OF'$ est 46 mm. Dans le commerce, on a adopté $f = 50$ mm.

- Un objectif est dit *grand angulaire* lorsque l'angle de champ atteint 70° et plus. Sa distance focale est plus courte que la distance focale normale; par exemple 28 mm pour le format 24 × 36.
- Un *téléobjectif* a une distance focale beaucoup plus grande que la normale (par exemple 200 mm). Le champ angulaire est réduit mais l'image obtenue est plus grande qu'avec la focale normale.
- Un *zoom* est un objectif à focale variable (par exemple de 35 mm à 70 mm), qui permet un réglage très rapide et évite d'avoir à changer d'objectif.



6. *Zoom.*

Scanné avec CamScanner

17.1.2 le diaphragme

C'est un écran métallique percé d'un trou. Un dispositif à iris permet de faire varier le diamètre du trou (*fig.* 7). Le rôle essentiel du diaphragme est de contrôler la quantité de lumière qui impressionnera le film. En outre, il limite l'inclinaison des rayons lumineux sur l'axe optique (conditions de Gauss), mais cela n'a d'intérêt que pour les objectifs de qualité médiocre.
On définit ainsi le **nombre d'ouverture** N :

$$N = \frac{f}{D},$$

f étant la distance focale de l'objectif et D le diamètre de l'iris. La grandeur $\frac{1}{N}$ est appelé *ouverture relative.*

Le nombre N est d'autant plus petit que le diaphragme est largement ouvert. Quand N est élevé, l'iris est presque fermé.
Les diaphragmes sont construits de telle façon que N ne peut varier de façon continue. Les valeurs possibles sont gravées sur le boîtier (*fig.* 7 et *photos* 8 et 20)

1,9. 2,8. 4. 5,6. 8. 11. 16. 22.

Le passage d'un de ces nombres d'ouverture au nombre immédiatement supérieur correspond sensiblement à la division par 2 de l'aire (voir *application* 1).

17.1.3 l'obturateur

Ce dispositif laisse pénétrer la lumière dans l'appareil pendant une durée déterminée, appelée **temps d'ouverture,** ou **temps de pose.** Cette durée varie couramment de plusieurs secondes à $\frac{1}{2000}$ seconde. On parle aussi de *vitesse d'obturation.*

Il existe deux grands types d'obturateurs :

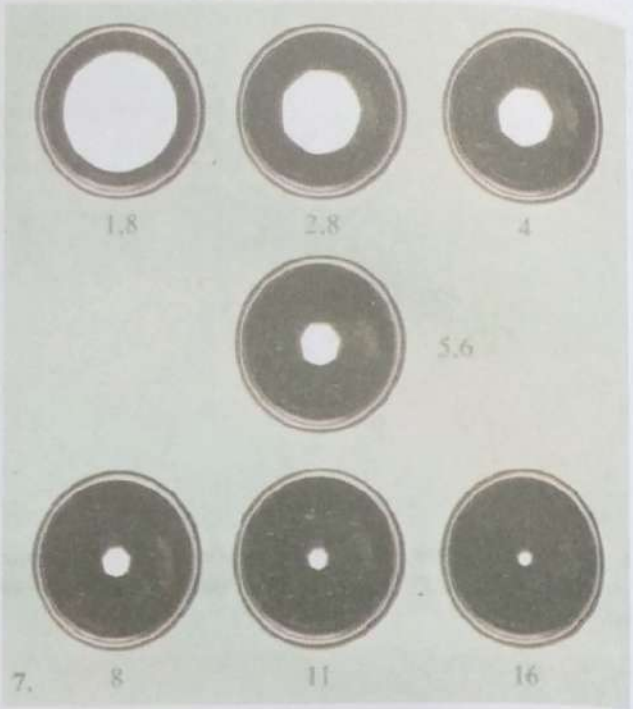
— *à lamelles:* l'obturateur, monté au voisinage du diaphragme, est formé par des lamelles qui se ferment sous l'action d'un ressort;

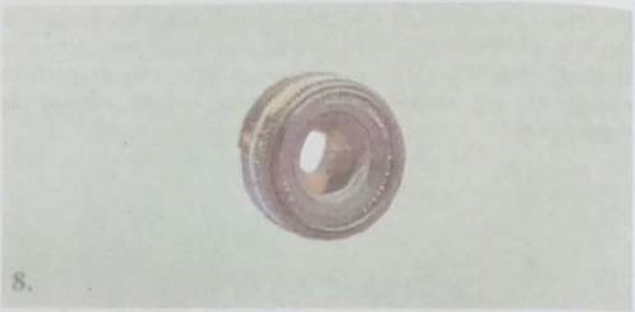
— *à rideau:* utilisé dans les appareils à objectifs interchangeables, un tel obturateur est constitué par une fente de largeur réglable se déplaçant devant le film à une vitesse élevée constante.

17.2 utilisation de l'appareil photographique

17.2.1 la mise au point

La mise au point consiste à régler l'objectif de façon que l'image d'un objet se forme dans le plan de la pellicule. (Quand un objet se rapproche de l'objectif, l'image s'éloigne.) A cette fin, on avance ou on recule l'objectif par rapport au film à l'aide d'un système de bagues coulissantes.





APPLICATION 1

Pour un objectif de 50 mm, *compléter le tableau suivant, où N est le nombre d'ouverture, D le diamètre de l'iris et S son aire :*

N	1,9	2,8	4	5,6	8	11	16	22
D (mm)								
S (mm^2)								

Conclure.

Nous avons $D = \frac{f}{N}$ et $S = \frac{\pi D^2}{4}$; d'où :

N	1,9	2,8	4	5,6	8	11	16	22
D (mm)	26,3	17,9	12,5	8,9	6,3	4,5	3,1	2,3
S (mm^2)	544	250	123	63	31	16	7,7	4

Nous remarquons que lorsqu'on passe d'un nombre d'ouverture donné au nombre immédiatement supérieur, l'aire accessible à la lumière est sensiblement divisé par 2.

Scanné avec CamScanner

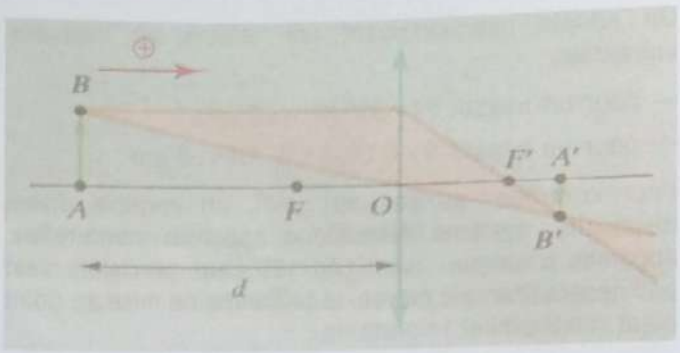
En général, l'image se forme très près du plan focal image de l'objectif. En effet (*fig.* 9), la distance $d = |\overline{OA}|$ qui sépare l'objet et l'objectif est très grande par rapport à la distance focale f (quelques centimètres). Si on assimile l'objectif à une lentille mince convergente, la formule de conjugaison donne la position du point image A' :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}},$$

ou encore : $$\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{f} + \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d};$$

or $d \gg f$; d'où : $$\overline{OA'} \approx f.$$

Le déplacement de l'objectif, par rapport au film, à effectuer lors d'une mise au point est donc très faible (voir aussi *application* 2).



9. *A et A' sont deux points conjugués :*

$$d = -\overline{OA}; \qquad f' = \overline{OF'};$$

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}} \textit{ (formule de conjugaison).}$$

17.2.2 tolérance de mise au point

L'image a une netteté absolue lorsqu'elle se forme exactement dans le plan du film. Mais l'œil et le film étant des récepteurs imparfaits, on peut se contenter d'une netteté apparente.

Soient A et A' deux points conjugués (*fig.* 10). Si le plan du film ne passe pas par A', le faisceau convergent issu de A et pénétrant dans l'objectif donne une tache circulaire de diamètre KH. Si KH est inférieur à la dimension du grain du film ou si KH ne peut être séparé par l'œil, la tache apparaîtra comme un point : il y a alors **netteté apparente.**

Tolérance de mise au point due aux imperfections de la pellicule photographique

Si on néglige le pouvoir séparateur de l'œil, il y a netteté apparente dès que les dimensions de la tache image KH (*fig.* 10) correspondent à celles des macrocristaux (ou grains) de l'émulsion du film photographique. Les films rapides ont des gros grains : leur dimension peut atteindre 100 µm. Les films lents (voir § 17.2.6.) ont des grains plus fins : 20 µm.

Tolérance de mise au point due aux imperfections de l'œil

L'œil ne peut séparer deux points dont l'écart angulaire est inférieur à une certaine limite ε, appelée *acuité visuelle*. Habituellement, ε est de l'ordre de 3 minutes d'arc, ou 10^{-3} rad.

Pour que l'œil puisse séparer deux points B et C, il faut que la distance BC soit supérieure au produit $d\varepsilon$ (*fig.* 11, page suivante), d désignant la distance d'observation. Ainsi, l'imperfection de l'œil est le seul facteur de netteté apparente si la taille des grains est inférieure à $d\varepsilon$.

APPLICATION 2

Un objectif permet la mise au point pour des objets situés entre l'infini et 1 m. Sa distance focale est égale à 50 mm. Entre quelles valeurs limites la distance objectif-film varie-t-elle?

- Le point objet A est situé à l'infini; son image A' se forme au foyer tel que :

$$OA' = f = 50 \text{ mm}.$$

- Le point A est maintenant à 1 m; la position de A' est donnée par :

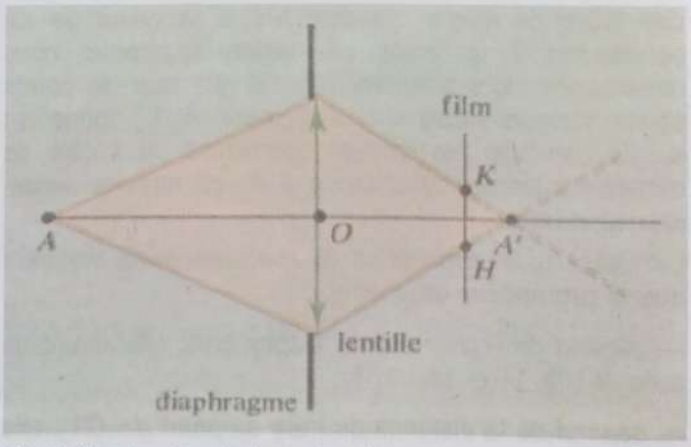
$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f},$$

soit : $$\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{-1000} + \frac{1}{50};$$

d'où : $$\overline{OA'} = 52{,}6 \text{ mm}.$$

- Le déplacement maximal de l'objectif est donc de :

$$52{,}6 - 50 = 2{,}6 \text{ mm}.$$



10. *KH : diamètre de la tache « image » de A.*

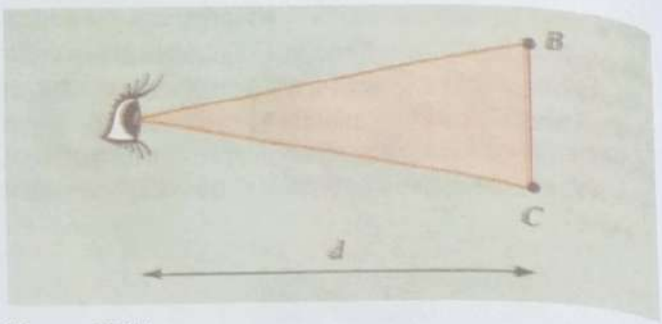
Scanné avec CamScanner

On adopte habituellement les valeurs de tolérance suivantes :

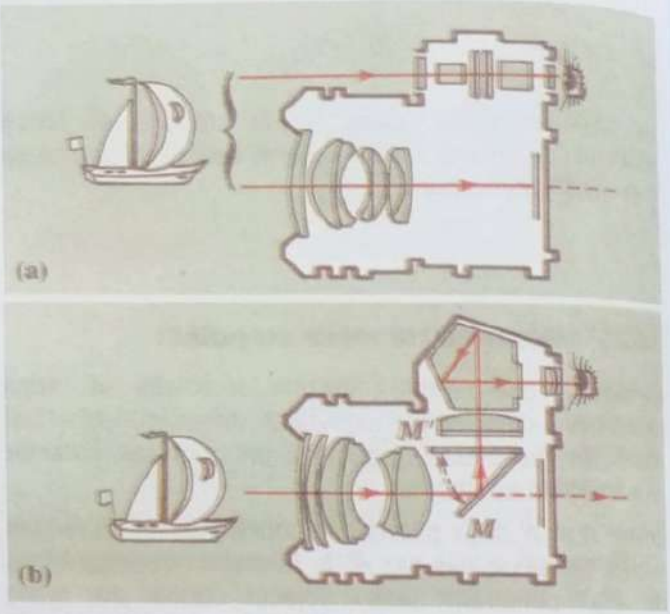
— pour un négatif 24 × 36, $KH \leqslant 20\ \mu m$;

— pour un négatif 6 × 6 ou 9 × 9, $KH \leqslant 50\ \mu m$.

Pour contrôler la mise au point, on emploie divers dispositifs : système télématique, appareils mono-reflex, appareils à simple viseur (*fig.* 12). Leur précision n'est pas nécessairement élevée, la tolérance de mise au point étant relativement importante.



11. $\varepsilon = BC/d$.



12 a. *Dans les appareils à viseur « à niveau d'œil », la lumière provenant du sujet atteint l'œil de l'opérateur à travers le viseur, mais elle parvient au film par un autre chemin, à travers l'objectif (schéma en coupe, au centre). La différence entre ces deux points de vue donne l'erreur dite « de parallaxe ».*

b. *La clé du fonctionnement du reflex mono-objectif est un miroir (M). La lumière qui arrive à travers l'objectif est réfléchie par ce miroir sur un verre dépoli. De là, les rayons lumineux traversent un prisme pentagonal qui renverse l'image, la remettant dans son vrai sens, et rétablit l'emplacement de la droite et de la gauche. Au moment où la vue est prise, le miroir se relève momentanément en position (M'), ce qui laisse passer la lumière qui va frapper le film. La visée à travers l'objectif donne une image parfaitement identique à celle qu'on retrouvera sur le film.*

17.2.3 profondeur de champ

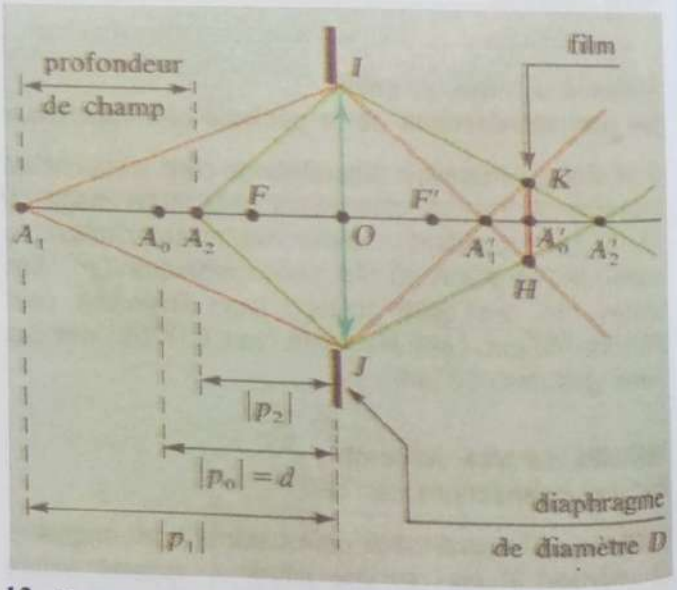
L'objectif étant assimilé à une lentille mince convergente accolée à un diaphragme, la pellicule est placée dans le plan de front passant par A'_0, point situé sur l'axe optique voisin du foyer image F' (*fig.* 13). Deux points objets A_1 et A_2 situés de part et d'autre de A_0, point conjugué de A'_0, ont pour images les points A'_1 et A'_2 situés de part et d'autre de A'_0 et également très proches de F'.

Supposons que les faisceaux lumineux issus des points A_1 et A_2 et traversant la lentille donnent sur la pellicule une tache de même diamètre KH. Si la valeur de KH correspond à la limite de netteté apparente, nous remarquons alors aisément (*fig.* 13) que tous les points objets compris situés sur le segment $[A_1A_2]$ donneront sur la pellicule des images conformes au critère de netteté apparente. La distance A_1A_2 est appelée **profondeur de champ.**

Le calcul (voir *application* 3) et l'expérience montrent que la profondeur de champ :

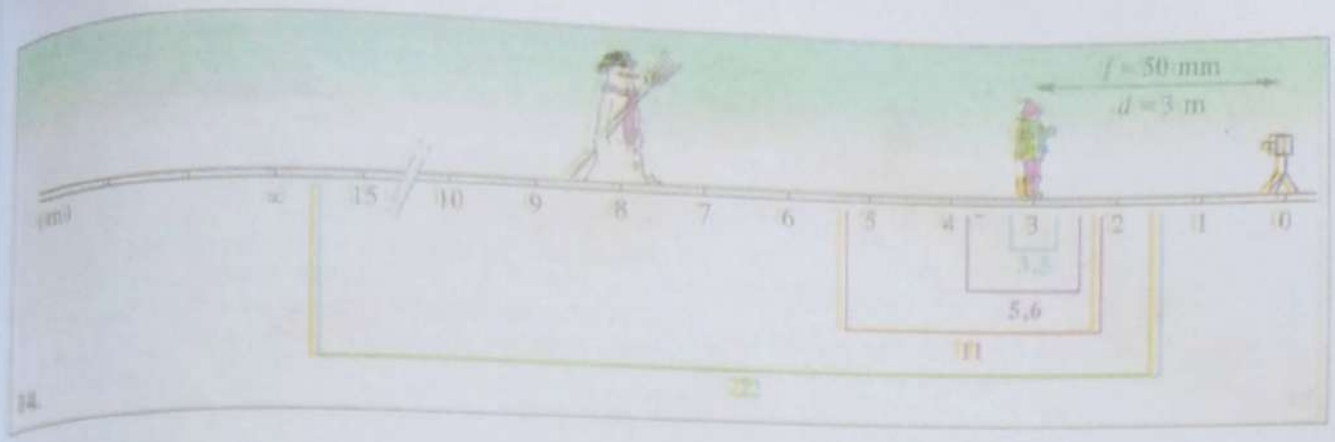
— dépend de l'ouverture du diaphragme; elle augmente avec N (*fig.* 14 et *photo* 15);

— dépend de la distance de mise au point $d = OA_0$; elle augmente avec d (*fig.* 16 et *photo* 17);

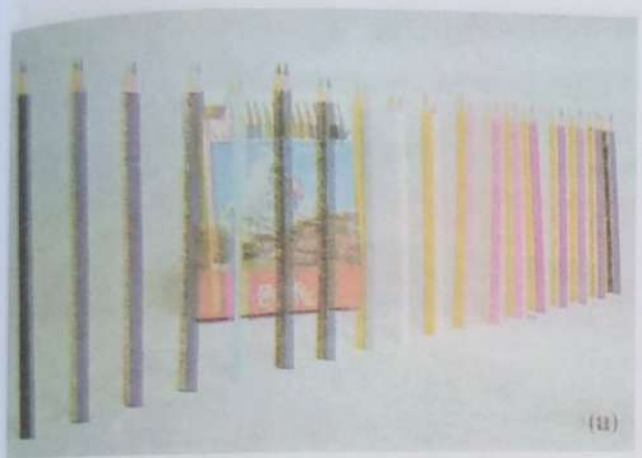


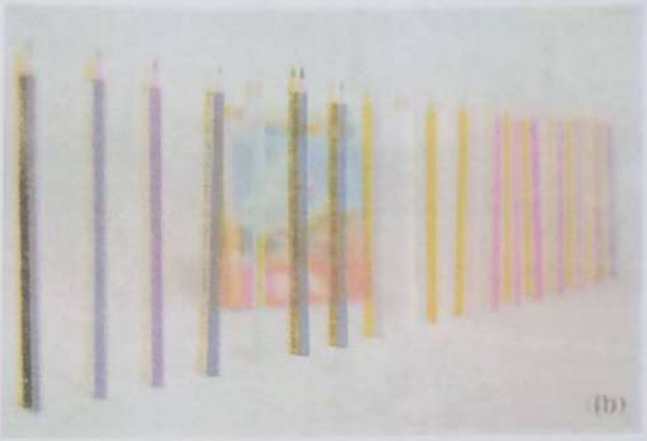
13. *Pour que la figure soit la plus claire possible, nous avons placé A_0 très proche de F.*
Pour un objectif photographique, les points A'_1, A'_0, A'_2 sont très proches de F'. Il y a netteté apparente pour tous les points dont la distance $|p|$ est comprise entre $|p_2|$ et $|p_1|$.
Distance de mise au point : d; KH représente la limite de netteté apparente.

Scanné avec CamScanner

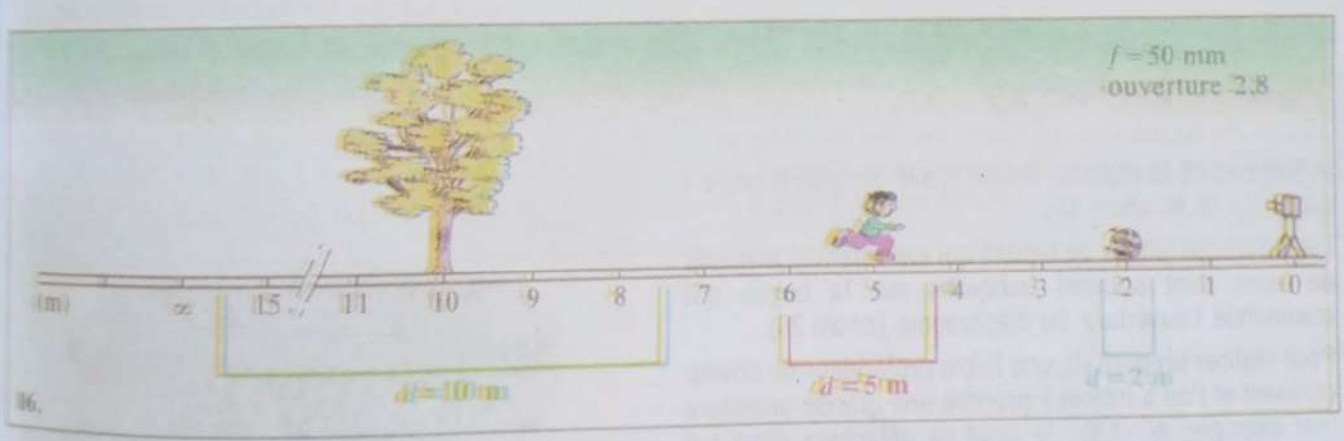


14.





15. *Avec un nombre d'ouverture f/22* (a), *les crayons et la boîte sont nets; avec f/1,9* (b), *les crayons sur lesquels on a fait le point sont nets, la boîte est floue; l'impression de flou met en valeur les crayons.*



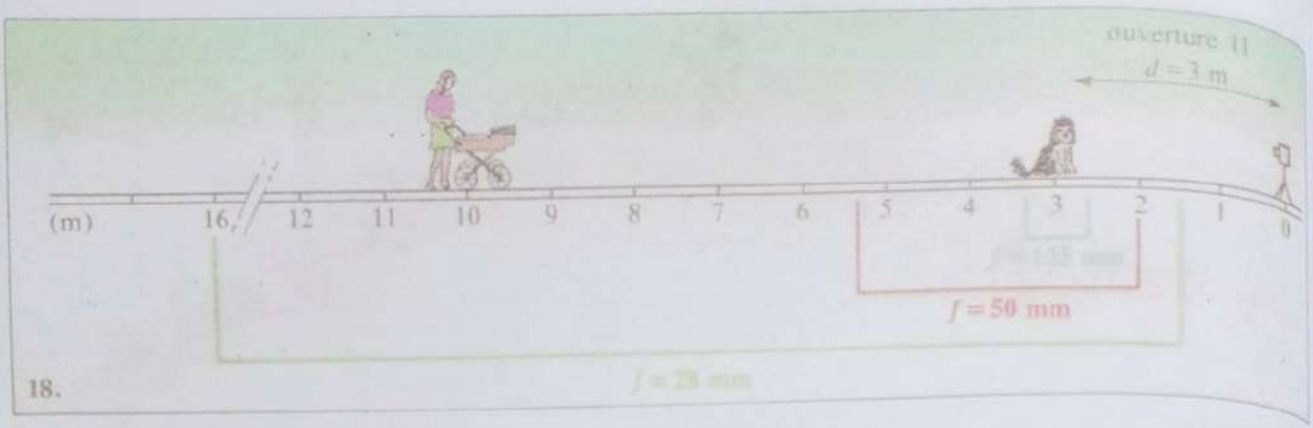
16.



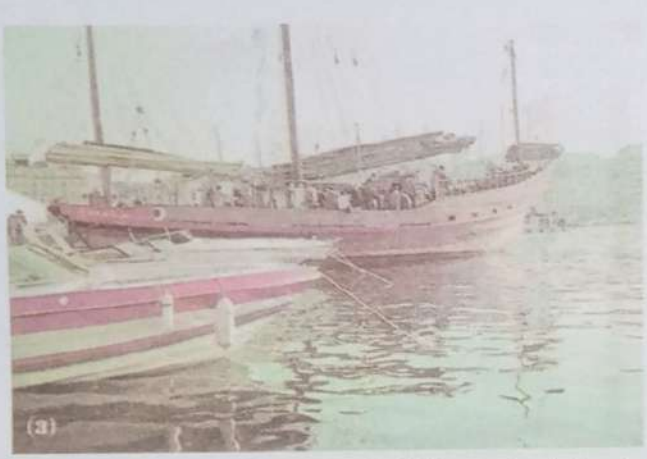


17. *Ces deux photos, prises avec un même diaphragme et avec un même objectif, montrent que la profondeur de champ dépend de la distance du sujet :* (a) $d = 5$ m; (b) $d = 1$ m.

Scanné avec CamScanner



18.





19. *Photos prises avec deux objectifs différents, depuis le même emplacement et avec le même diaphragme. Si on utilise un objectif ayant une grande distance focale, l'arrière est flou.* **(a)** $f = 35$ mm; **(b)** $f = 160$ mm.

— dépend de la distance focale f; elle diminue lorsque f croît (*fig.* 18 et *photo* 19).

Les distances limites de netteté qui encadrent la distance de visée sont souvent indiquées sur la bague qui commande l'ouverture du diaphragme (*photo* 20).

Pour réaliser un portrait, une faible profondeur de champ convient et l'on a intérêt à prendre une grande ouverture (par exemple, $N = 1{,}9$) : le sujet se détachera alors sur un fond flou. En revanche, la photographie d'un paysage requiert une grande profondeur de champ et il est nécessaire de diaphragmer (par exemple, $N = 16$).



20. *On lit, d'après la verticale des traits correspondant à l'ouverture du diaphragme, la profondeur de champ approximative.*

17.2.4 choix de la vitesse d'obturation

La vitesse d'obturation joue un rôle important lorsque le sujet bouge, car elle permet de contrôler le mouvement. Une grande vitesse d'obturation (temps de pose égale à 1/500 s ou 1/1 000 s) fige le sujet : on ne peut distinguer s'il est en mouvement ou non.

Une faible vitesse d'obturation, au contraire, sera utilisée si on désire faire apparaître ou accentuer « le bougé », le flou suggérant le mouvement.

Quoi qu'il en soit, une prise de vue « à la main » (sans pied) exige un temps de pose inférieur ou égal à 1/60 s.

Scanné avec CamScanner

APPLICATION 3

On se propose de déterminer la profondeur de champ d'un objectif assimilé à une lentille mince convergente de distance focale f, pour une distance de mise au point d et un iris de diamètre D. La valeur du diamètre de la tache sur la pellicule doit être inférieur à a. On admettra que le diaphragme est placé contre la lentille et que la distance de mise au point $d = OA_0$ est très grande devant f.

La marche des rayons lumineux est tracée sur la figure 13 où (A_0, A'_0), (A_1, A'_1) et (A_2, A'_2) sont des couples de points conjugués.

1/ Calculer $A'_1A'_0$ et $A'_0A'_2$ en fonction de a et N (nombre d'ouverture).

2/ Calculer les distances OA_1 et OA_2 en fonction de d, a, N et f.

3/ Calculer la profondeur de champ pour $N = 1,9$ puis $N = 16$, en prenant : $f = 50$ mm; $a = 30$ µm; $d = 3$ m. Conclure.

4/ Que se passe-t-il si le plan de la pellicule est tel que $d = \frac{f^2}{aN}$?

1/ la distance d étant très grande devant f, les points A'_0, A'_1 et A'_2 sont voisins de F'; en première approximation, nous pouvons admettre que :

$$OA'_0 \approx OA'_1 \approx OA'_2 \approx f.$$

D'après le théorème de Thalès nous pouvons écrire :

$$\frac{A'_1A'_0}{KH} = \frac{A'_1O}{IJ}, \quad \text{soit} \quad \frac{A'_1A'_0}{a} \approx \frac{f}{D} = N;$$

d'où : $$A'_1A'_0 \approx aN.$$

De même, nous démontrons que $A'_0A'_2 \approx aN$.

2/ Appliquons la formule de conjugaison aux couples de points (A_0, A'_0) et (A_1, A'_1); il vient :

$$\frac{1}{p'_0} - \frac{1}{p_0} = \frac{1}{f} \quad \text{et} \quad \frac{1}{p'_1} - \frac{1}{p_1} = \frac{1}{f},$$

avec $\overline{OA_1} = p_1$, $\overline{OA'_1} = p'_1$ et $\overline{OF'} = f$.

En éliminant f entre ces 2 équations, nous obtenons :

$$\frac{1}{p_1} = \frac{1}{p_0} + \frac{p'_0 - p'_1}{p'_0 p'_1};$$

or : $p'_1 \approx p'_0 \approx f$ et $p'_0 - p'_1 = A'_1A'_0 = aN$;

$$\frac{1}{p_1} = \frac{1}{p_0} + \frac{aN}{f^2}.$$

Cette équation nous donne la distance $OA_1 = -p_1$ pour une distance de mise au point donnée, $d = -p_0$:

$$\frac{1}{OA_1} = \frac{1}{d} - \frac{aN}{f^2}.$$

De même, nous pouvons montrer que la distance OA_2 est donnée par :

$$\frac{1}{OA_2} = \frac{1}{d} + \frac{aN}{f^2}.$$

3/ Nous trouvons :

— pour $N = 1,9$: $OA_1 = 3,2$ m et $OA_2 = 2,8$ m; la profondeur de champ est de l'ordre de 40 cm;

— pour $N = 16$: $OA_1 = 7,1$ m et $OA_2 = 1,9$ m; la profondeur de champ est de l'ordre de 5,2 m.

Nous constatons donc que la profondeur de champ augmente avec N.

4/ Si $d = \frac{f^2}{aN}$, alors $\frac{1}{OA_1} = 0$: le point A_1 est rejeté à l'infini.

Nous avons alors :

$$\frac{1}{OA_2} = \frac{2aN}{f^2} = \frac{2}{d}, \quad \text{soit} \quad OA_2 = \frac{d}{2}.$$

Pour $N = 16$, soit $d = 52$ m, il vient $OA_2 = 2,6$ m; la profondeur de champ est comprise entre 2,6 m et l'infini. Ce résultat est mis à profit dans les appareils bon marché ne possédant pas de dispositif de mise au point.



21 a. *Temps de pose :* **1/15 s.**



21 b. *Temps de pose :* **1/500 s.**

Scanné avec CamScanner

17.2.5 contrôle de la lumière

Pour être correctement impressionnée, la pellicule doit recevoir une certaine quantité E de lumière. Celle-ci est proportionnelle à l'aire S de l'iris du diaphragme et au temps de pose τ : $E = kS\tau$.

où k est une constante. Avec $S = \frac{\pi D^2}{4}$ et $N = \frac{f}{D}$, il vient :

$$E = \frac{k\pi f^2 \tau}{4N^2} = \frac{k' f^2 \tau}{N^2}.$$

Ainsi, la pellicule recevra la même quantité de lumière pour deux réglages différents (N, τ) et (N', τ') si :

$$\frac{\tau}{N^2} = \frac{\tau'}{N'^2}.$$

C'est le cas, par exemple, pour les deux réglages :

(11, 1/250 s) et (16, 1/125 s).

Pour une même quantité de lumière acceptable (quantité qui dépend du film choisi), *le temps de pose est multiplié par 2 quand on passe d'un nombre d'ouverture donné au nombre immédiatement supérieur.*

Il semblerait donc que, pour une même quantité de lumière, on puisse choisir entre un grand nombre de réglages possibles. En fait, cela est faux. Nous avons vu que profondeur de champ et ouverture N sont liées. Or N dépend étroitement du temps de pose. Nous ne pouvons donc pas choisir arbitrairement chacune de ces grandeurs : si nous désirons une profondeur de champ bien déterminée, alors l'ouverture et le temps de pose nous sont imposés.

Actuellement, les appareils automatiques permettent de donner la priorité :

- soit à la « vitesse », le choix du temps de pose imposant une ouverture et une profondeur de champ;
- soit à l'ouverture, le choix de N imposant un temps de pose et une profondeur de champ.

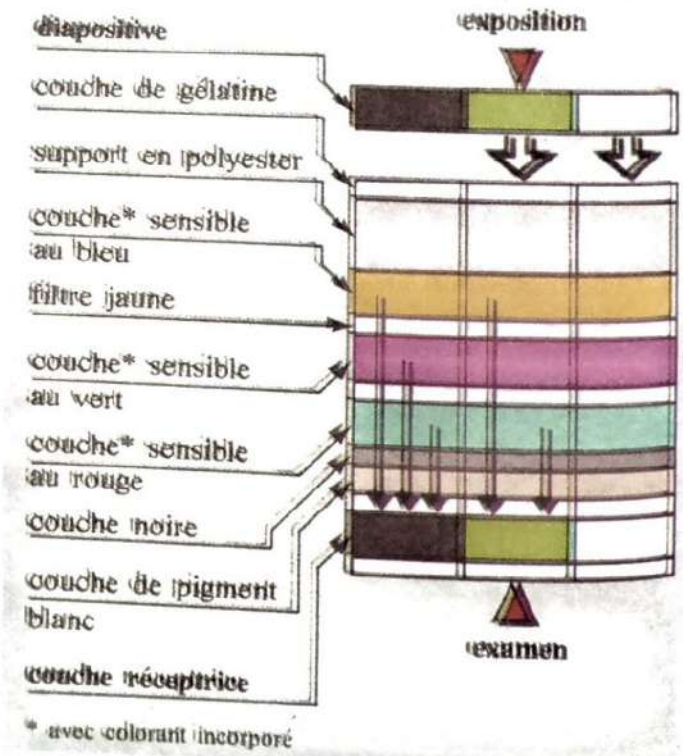
Mais ces diverses grandeurs dépendent également du choix du film.

17.2.6 les films

On élabore les pellicules photographiques « noir et blanc » en déposant sur un film de polyester une suspension de macrocristaux d'halogénures d'argent dans la gélatine. Dans les films « couleurs », on ajoute des substances organiques qui permettent de créer les trois couleurs de la synthèse *trichromie* au moment du développement (*fig.* 22).

Au contact de la lumière, une réaction photochimique se produit dans les macrocristaux les plus éclairés; une partie des ions argent subit alors une une réduction et donne des atomes d'argent, lesquels jouent le rôle de « germes » qui apparaîtront lors du développement. L'image ainsi formée est invisible : elle constitue l'*image latente*.

Le développement a pour but de transformer l'image latente en une image visible (à l'aide d'un *révélateur* chimique) puis de la fixer (à l'aide d'un *fixateur* chimique).



22. *Structure des couches de l'Agfachrome-Speed.*

ASA	25	50	100	200	400	800
DIN	15	18	21	24	27	30
ISO	25/15	50/18	100/21	200/24	400/27	800/30

23. Correspondances entre les trois échelles de sensibilités **ASA**, **DIN** *et* **ISO**. *La sensibilité du film est multipliée par 2 lorsqu'on passe d'une colonne à la suivante; pour un même nombre d'ouverture, le temps de pose est à diviser par 2.*

Une pellicule est caractérisée par :

• son format: 24 × 36, par exemple, signifie : hauteur 24 mm et largeur 36 mm, pour une photographie;

• sa sensibilité. Le temps de pose ou l'ouverture seront d'autant plus réduits que le film est plus sensible(*). Les deux échelles de sensibilité, ASA et DIN sont aujourd'hui remplacées par l'échelle ISO. Les correspondances entre les trois échelles font l'objet du tableau 23.

On trouvait, il y a peu de temps encore, deux qualités de films, mais l'une a quasiment disparu : le film *orthochromatique*, qui n'est pas sensible aux longueurs d'onde les plus élevées du spectre visible; ce film, qui peut être développé en lumière rouge orangée, ne se trouve quasiment plus dans le commerce. Seul demeure le film *panchromatique* (« Pan »), sensible à toute longueur du spectre visible; son développement nécessite une obscurité totale.

Quelle pellicule choisir? Ce choix dépend de l'usage auquel on destine le film. Les films de faible rapidité (25 ISO par exemple) assurent un excellent contraste, une grande finesse du grain (et donc des agrandissements très importants), un excellent rendu des couleurs, mais il exigent beaucoup de lumière. Les films de rapidité moyenne (100 à 400 ISO) donnent aussi d'excellents clichés. Les films ultra-sensibles (1 000 ISO et plus) sont irremplaçables lorsqu'on opère dans des lieux peu éclairés, mais l'importance du grain réduit les possibilités d'agrandissement.

(*) On peut retenir la formule :

$$\frac{[\mathrm{ISO}].\tau}{N^2} = \text{constante}.$$

17.3 conclusion

Les possibilités d'un objectif photographique dépendent essentiellement de son ouverture relative $\frac{1}{N}$. L'énergie reçue par la pellicule étant proportionnelle à $\frac{1}{N^2}$, une grande ouverture relative ne requiert que des temps de pose très faibles et permet d'opérer dans des lieux peu éclairés, sans recourir au flash. Toutefois la diminution de N :

— exige des dispositifs de correction de l'objectif coûteux, car à $N = 1.2$, par exemple, tous les rayons sont loin d'être paraxiaux;

— pose des problèmes de mise au point et rend nécessaire l'utilisation d'un télémètre ou d'une visée réflexe;

— entraîne une faible profondeur de champ (qui peut cependant être mise à profit pour obtenir des effets artistiques).

Ainsi, on notera la plus petite valeur du nombre d'ouverture N pour se faire rapidement une idée, non seulement des qualités de l'objectif, mais encore de l'ensemble de l'appareil.

Scanné avec CamScanner

EXERCICES

L'essentiel du cours

17.1 A Donner les rôles du diaphragme et de l'obturateur dans un appareil photographique.

17.2 A Que représente le nombre d'ouverture N?

17.3 A Choisir la bonne réponse :
- La profondeur de champ *augmente/diminue* si le nombre d'ouverture N augmente.
- La profondeur de champ *augmente/diminue* si la distance de mise au point augmente.
- La profondeur de champ *augmente/diminue* si la distance focale augmente.

Exercices de base

17.4 AB Un objectif assimilable à une lentille mince convergente permet la mise au point des objets situés entre l'infini et 80 cm. Sa distance focale est égale à 28 mm. Entre quelles limites la distance entre l'objectif et le film varie-t-elle ?

17.5 AB Un objectif assimilable à une lentille mince convergente, de distance focale 105 mm, est réglé sur un objet situé à 15 m, puis sur un objet situé à 100 m. Calculer dans chaque cas la distance de la lentille à l'image, et la comparer à la distance focale.

17.6 AB Un objectif de 50 mm, assimilable à une lentille mince convergente, est réglé sur un objet situé à la distance $d = 3$ m.

1/ Calculer le grandissement à cette distance.

2/ La pellicule est un film 24 × 36. Le personnage photographié mesure 1,80 m. Le photographe doit-il prendre la photo en hauteur ou en largeur ?

17.7 A 1/ Calculer l'angle de champ pour des objectifs de distances focales 28 mm, 50 mm et 105 mm. La pellicule est un film 24 × 36.

2/ Quel est l'objectif qu'on appelle « grand angle » ?

3/ Une lentille mince pourrait-elle servir d'objectif grand angle ?

17.8 AB3 On considère deux objectifs, de distances focales respectives de 28 mm et 105 mm. Compléter le tableau suivant, puis conclure.

N	4	5,6	8	11	16
aire de l'iris pour $f = 28$ mm					
aire de l'iris pour $f = 105$ mm					

17.9 A Un appareil semi-automatique affiche un temps de pose de $\frac{1}{500}$ s pour un nombre d'ouverture $N = 8$. Déterminer le temps de pose qu'il affiche si on règle le diaphragme sur $N = 11$, puis sur $N = 5,6$.

17.10 A Un appareil semi-automatique dans lequel on a placé une pellicule de sensibilité 25 ISO indique un temps de pose $\tau = \frac{1}{30}$ s avec un nombre d'ouverture $N = 2,8$.

1/ Le photographe ne possède pas de pied. Peut-il prendre convenablement la photo ? Pourquoi ?

2/ L'appareil est caractérisé par les valeurs suivantes du nombre d'ouverture : 2,8 ; 4 ; 5,6 ; 8 ; 11 ; 16 ; 22.
Le temps de pose peut prendre les valeurs suivantes :

$$\frac{1}{250}\text{ s} ; \quad \frac{1}{125}\text{ s} ; \quad \frac{1}{60}\text{ s} ; \quad \frac{1}{30}\text{ s}.$$

Le photographe a le choix entre les sensibilités 50, 100, 200, 400 et 800 ISO. Déterminer la sensibilité qu'il doit choisir dans les deux cas suivants :

a/ $N = 4$ et $\tau = \frac{1}{125}$ s ; *b/* $N = 5,6$ et $\tau = \frac{1}{250}$ s.

Banc d'essais

17.11 Un appareil photographique a pour objectif une lentille mince convergente L, de vergence + 10 dioptries.

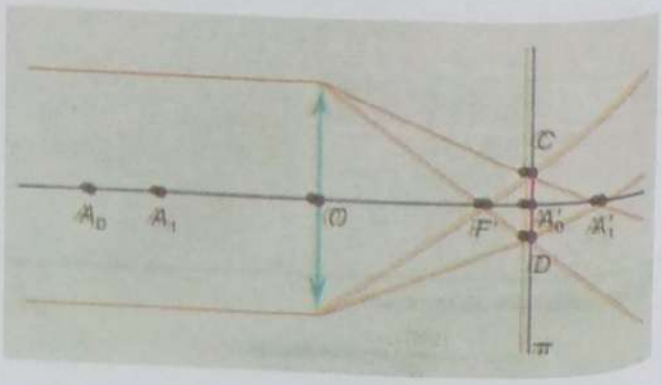
1/ A A quelle distance de l'objectif doit se trouver la pellicule si on veut photographier des objets très éloignés ?

2/ A De combien et dans quel sens faut-il déplacer la pellicule si, après avoir mis au point sur l'infini, on désire photographier un objet placé à 4,10 m de l'objectif ?

3/ C Par construction, la pellicule ne peut pas s'éloigner de plus de 0,5 cm du foyer image F'.

a/ Calculer la distance minimale à laquelle doit se trouver un objet si on exige une mise au point parfaite.
b/ Reprendre le calcul si on tolère une mise au point telle que le faisceau lumineux issu d'un point de l'objet et situé sur l'axe de l'objectif forme sur la pellicule une tache de diamètre inférieur à 0,1 mm. Le diamètre du diaphragme placé devant l'objectif est égal à 1 cm.
Que devient cette distance minimale si on diminue le diamètre du diaphragme ?

17.12 Avec un objectif assimilable à une lentille mince convergente de distance focale f et de diamètre D, on veut que la profondeur de champ soit comprise entre un point A_1 et l'infini (figure). Le plan Π du film est placé à l'intersection des rayons passant par F' et de ceux passant par l'image A_1' de A_1. Le plan Π coupe l'axe optique en A_0', image d'un point A_0 de l'axe optique. Le diamètre admissible de la tache est $CD = a$.



Scanné avec CamScanner

1/ B En appliquant le théorème de Thalès et en posant $OA'_0 \approx f$, montrer que $F'A'_0 \approx Na$.

2/ AB On appelle distance hyperfocale et on note ℓ la distance OA_0. Déduire de la question précédente que :

$$\ell \approx \frac{f'^2}{Na}.$$

3/ B Montrer que $OA_1 \approx \ell/2$.

4/ C La distance hyperfocale ℓ sert de base dans la mise au point des appareils simples. En effet, on pourra photographier nettement tous les objets situés entre $\frac{\ell}{2}$ et l'infini. Calculer cette distance pour $f = 50$ mm, $N = 11$ et $a = 30$ µm.

17.13 L'objectif d'un appareil photographique est assimilable à une lentille mince convergente de distance focale $f = 54$ mm.

1/ A L'appareil est mis au point sur un objet à l'infini. Où doit se trouver la pellicule ?

2/ C Sans modifier la mise au point, on accole à l'objectif une lentille mince. Un objet situé à 2 m du système optique donne une image nette sur la pellicule. Quelle est la vergence de cette lentille ?

3/ C On supprime cette dernière lentille. L'objectif est limité par un diaphragme dont le diamètre d'ouverture est $D = \frac{f'}{4,5}$.

L'appareil est mis au point sur l'infini. Sans faire varier la distance de l'objectif à la pellicule, on photographie un point lumineux placé sur l'axe de l'objectif à une distance p de celui-ci. Le cône des rayons émergeant de la lentille donne une tache lumineuse de diamètre $a = 0,1$ mm. Calculer p.

17.14 L'objectif d'un appareil photographique est assimilable à une lentille mince convergente de 9,5 dioptries. Un dispositif permet la mise au point des objets dont la distance est comprise entre 1,50 m et l'infini.

1/ A On se propose de photographier une statue ayant une hauteur de 4,50 m et on souhaite obtenir une image de 30 mm. Calculer les distances objet-objectif et objectif-pellicule.

2/ C On photographie un cycliste roulant à la vitesse de 36 km.h^{-1} et passant perpendiculairement à l'axe de l'objectif, à une distance de 20 m. On admet que l'image est acceptable si, pendant la durée de la pose, l'image d'un point a subi un déplacement inférieur à 0,1 mm. Quelle doit être la durée maximale du temps de pose ?

Un temps de pose de $\frac{1}{250}$ s convient-il ?

a/ A Si l'on photographiait un immeuble de 20 m de hauteur situé à 2 km, quelle serait la hauteur de l'image sur la pellicule ?

b/ C Pour photographier l'immeuble dans de meilleures conditions, on place à 7 cm en arrière de l'objectif une lentille divergente de 4 cm de distance focale. Où doit-on placer la pellicule pour réaliser la mise au point ? Calculer la hauteur de l'image obtenue. Quel est l'intérêt de ce dispositif ?

17.15 A l'aide d'un objectif de distance focale 50 mm on photographie une tour éloignée, vue sous l'angle $\alpha = 5°$.

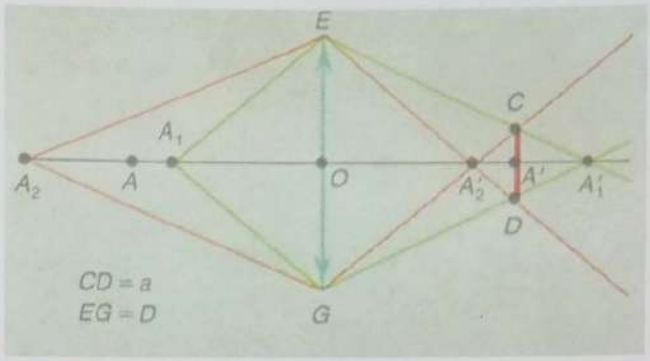
1/ Calculer la grandeur de l'image de la tour dans le plan du film.

2/ On transforme cet objectif en téléobjectif en lui associant une lentille mince divergente de distance focale - 20 mm, située à 3,5 cm en arrière de la première lentille.

a/ Déterminer la position de l'image.

b/ Calculer la grandeur de l'image de la tour.

17.16 On photographie un objet situé à la distance OA de l'objectif d'un appareil de distance focale f. Soient A_1 et A_2 les points de l'axe optique limitant la profondeur de champ, N le nombre d'ouverture et a le diamètre maximal admissible de la tache sur la pellicule.



1/ Soient A', A'_1 et A'_2 les points conjugués respectifs de A, A_1 et A_2 (figure). Montrer que :

$$|A'A'_1| \approx |A'A'_2| \approx aN.$$

2/ En posant $OA' \approx f$ et en utilisant les formules de conjugaison, montrer avec les approximations nécessaires ($aN \ll f$) que :

$$\frac{1}{\overline{OA_1}} \approx \frac{1}{\overline{OA}} - \frac{Na}{f^2}$$

et :

$$\frac{1}{\overline{OA_2}} \approx \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{Na}{f^2}.$$

3/ En déduire la profondeur de champ avec $f = 35$ mm et $a = 30$ µm, dans les cas suivants :

a/ pour $OA = 1$ m et $N = 2,8$ puis $N = 5,6$;

b/ pour $OA = 5$ m et $N = 2,8$ puis $N = 5,6$.

4/ En déduire les influences de la distance de mise au point et du nombre d'ouverture sur la profondeur de champ.

17.17 On se propose de photographier un endroit très sombre sans flash, mais avec un pied. L'appareil, semi-automatique, réglé sur le diaphragme 2,8 et la sensibilité 3 200 ISO, indique une vitesse d'obturation de $\frac{1}{30}$ s. Le film utilisé ayant une sensibilité de 100 ISO, calculer le temps de pose nécessaire avec le même diaphragme 2,8, puis avec le diaphragme 4.

Scanné avec CamScanner

18 DÉCOMPOSITION DE LA LUMIÈRE SPECTRES



1. *Arc-en-ciel sur les chutes du Niagara (États-Unis).*

La photographie 1 montre un arc-en-ciel qui résulte de la décomposition, par les gouttelettes de pluie, de la lumière blanche du Soleil. Le premier cercle, le plus petit, est violet; le plus grand, rouge. On passe du violet au rouge de façon continue par le bleu, le vert, le jaune et l'orangé. Cette décomposition — on dit aussi dispersion — peut aussi être réalisée à l'aide d'un prisme.

18.1 dispersion de la lumière blanche par un prisme

18.1.1 analyse de la lumière à l'aide d'un prisme

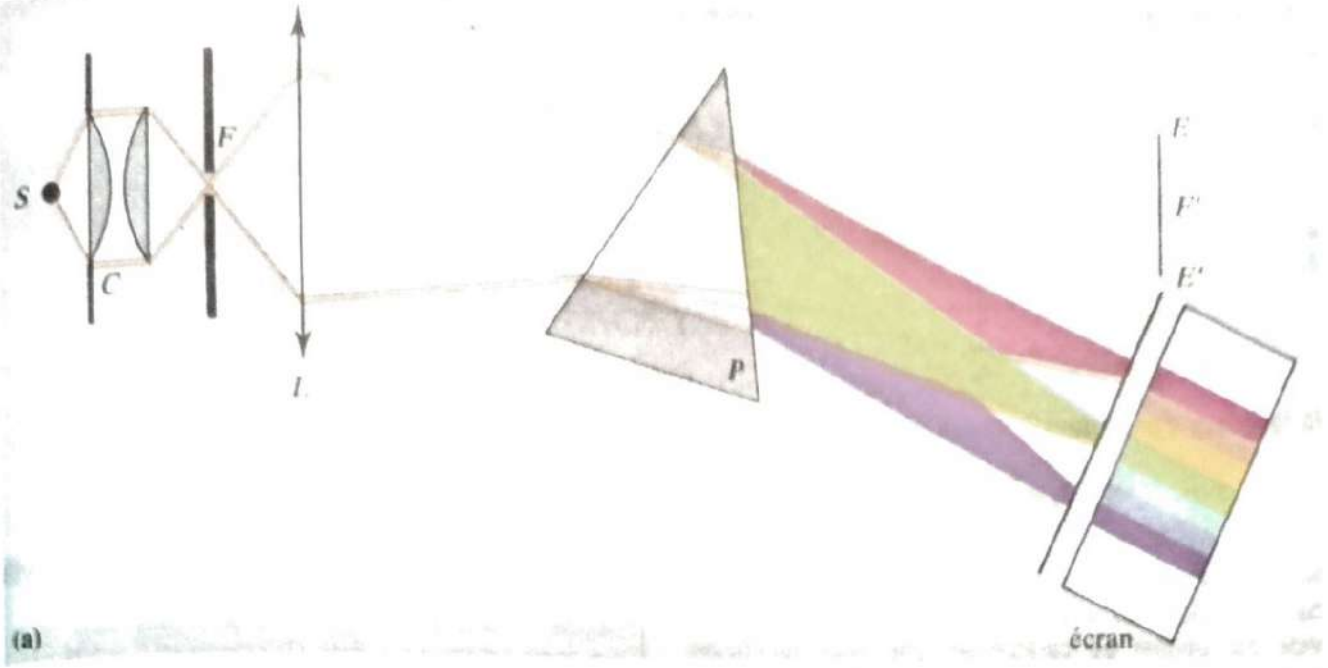
Réalisons la décomposition de la lumière par un prisme de verre (*fig.* 2a). Une fente *F* est éclairée par une source de lumière blanche.

La lentille *L* en donne une image blanche *F'* projetée sur l'écran *E*. L'interposition du prisme *P*, d'arête parallèle à la fente *F*, dévie les rayons lumineux. Nous observons sur l'écran *E* une plage colorée, continue comportant dans l'ordre les couleurs principales : *violet, indigo, bleu, vert, jaune, orange, rouge.* Cette plage colorée, image de la fente *F*, constitue le **spectre de la lumière blanche** issue de la fente *F* (*fig.* 2b).

Les radiations violettes et bleues sont plus déviées que les jaunes, lesquelles le sont plus que les rouges; la déviation provoquée par le prisme de verre *dépend donc de la couleur et augmente avec la fréquence des radiations.*

Plaçons devant la fente *F* différents filtres colorés : l'image *F'* de la fente se réduit alors à une bande colorée de même couleur que le filtre. Obtenue par un filtre de qualité, la bande colorée, très étroite, est appelée **raie**; la lumière transmise par un tel filtre peut être considérée comme monochromatique.

Scanné avec CamScanner





2. *Dispersion de la lumière par un prisme,*

a. *S : source. C : condenseur; le faisceau issu de S converge sur la fente F. F : fente fine, parallèle à l'arête du prisme. L : lentille. P : prisme. E' : écran sur lequel les images colorées de F à travers la lentille et le prisme apparaissent nettement.*

b. *Photographie de l'écran d'observation.*

Remplaçons la source de lumière blanche par un laser émettant une lumière rouge. Le spectre se réduit à une fine raie rouge. Cette lumière, monochromatique, ne peut être décomposée par le prisme de verre.

Choisissons maintenant comme source lumineuse une lampe à vapeur de sodium. Ce type de lampe est utilisé pour éclairer certaines portions d'autoroutes, des tunnels, etc. Elle donne une lumière jaune. Avec un tel éclairage, les couleurs des objets s'estompent, à l'exception du jaune qui ressort. Observons le spectre de cette lumière sur l'écran. Il se réduit essentiellement à une raie jaune. La lumière émise est monochromatique.

Recommençons la même expérience avec une lampe à vapeur de mercure, qui émet une lumière bleutée. Nous observons sur l'écran des raies dont les plus lumineuses sont le jaune, le bleu, l'indigo et le vert (*photo* 3).

• L'ensemble obtenu à l'aide d'un prisme des diverses images colorées d'une fente éclairée par une source constitue le spectre de la lumière émise par cette source.

La séparation des radiations monochromatiques constitue le phénomène appelé décomposition de la lumière.

La lumière blanche a un *spectre continu* (*photo* 4); la lumière émise par une lampe à vapeur de mercure a un spectre discontinu, appelé *spectre de raies.*



3. *Spectre de raies du mercure.*



4. *Spectre continu de la lumière émise par un corps porté à haute température.*

18.1.2 longueur d'onde et indice

Rappelons quelques résultats de la classe de Première.

La lumière est une onde électromagnétique. Toutes les ondes électromagnétiques se propagent dans le vide à la même célérité $c = 3.10^8$ m.s^{-1}.

Dans le vide, la longueur d'onde λ d'une onde monochromatique est liée à sa fréquence ν par la relation :

$$\lambda = \frac{c}{\nu}.$$

Scanné avec CamScanner

Dans le vide, les longueurs d'onde des ondes lumineuses sont comprises entre 400 nm (violet) et 750 nm (rouge). Dans une matière transparente k, une onde monochromatique de fréquence ν a une célérité c_k inférieure à la célérité c dans le vide. Pour un tel milieu et pour une onde de fréquence ν, on définit :

- l'indice N_k du milieu par rapport au vide, ou *indice absolu*, par la relation :

$$N_k = \frac{c}{c_k},$$

la longueur d'onde dans le milieu étant égale à :

$$\lambda_k = \frac{c_k}{\nu} = \frac{\lambda}{N_k}.$$

Notons que la longueur d'onde dépend du milieu; c'est donc la fréquence ν ou la longueur d'onde λ dans le vide qui permet de caractériser une onde lumineuse monochromatique;

- l'*indice relatif* $n_{2/1}$ d'un milieu (2) par rapport à un milieu (1), par la relation :

$$n_{2/1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{c_1}{c_2}.$$

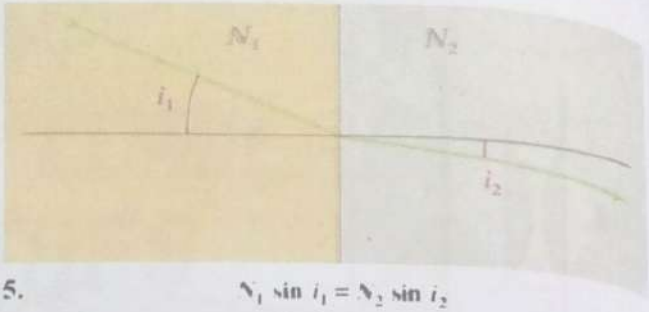
Les mesures de l'*angle d'incidence* i_1 et de l'*angle de réfraction* i_2 permettent de déterminer l'indice relatif, à l'aide de la relation (*fig.* 5) :

$$\sin i_1 = n_{2/1} \sin i_2,$$

qui s'écrit encore :

$$N_1 \sin i_1 = N_2 \sin i_2.$$

Rappelons enfin que l'indice relatif d'une substance par rapport à l'air est quasiment confondu avec son indice absolu, car pour l'air $N \approx 1$.



5. $N_1 \sin i_1 = N_2 \sin i_2$
$\sin i_1 = n_{2/1} \sin i_2$.

APPLICATION 1

Calculer l'intervalle de longueur d'onde associé, dans l'eau, aux ondes lumineuses visibles. On prendra $N_{eau} = 1{,}33$ pour toutes les radiations du spectre visible.

Dans l'eau, la célérité des ondes lumineuses est :

$$c_1 = \frac{c}{1{,}33};$$

d'où la longueur d'onde dans ce milieu pour la radiation de fréquence ν :

$$\lambda_1 = \frac{c_1}{\nu} = \frac{1}{1{,}33}\frac{c}{\nu} = \frac{\lambda}{1{,}33},$$

où λ est la longueur d'onde dans le vide.

La lumière blanche est la juxtaposition d'une infinité d'ondes lumineuses dont les longueurs d'onde dans le vide s'échelonnent de 400 nm à 750 nm; d'où, dans l'eau :

$$\frac{400}{1{,}33} < \lambda_1 < \frac{750}{1{,}33},$$

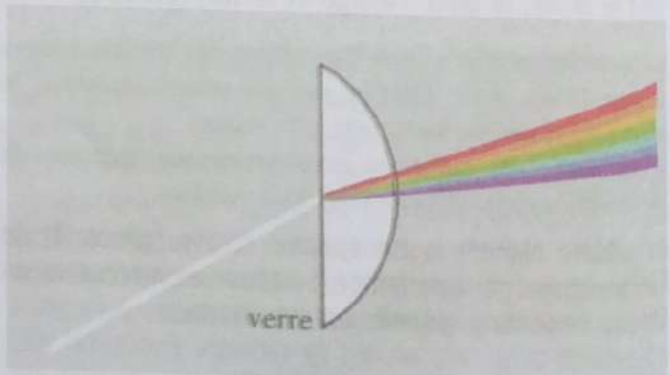
soit : $300 \text{ nm} < \lambda_1 < 565 \text{ nm}$.

18.1.3 notion de dispersion interprétation de l'expérience de dispersion

Lorsqu'un rayon de lumière blanche arrive sur un disque de verre, nous constatons que le rayon réfracté est irisé (*fig.* 6). Les diverses radiations colorées qui constituent le faisceau incident se séparent lors de la réfraction : elles ne se réfractent pas de la même façon. Pour une même valeur de l'angle d'incidence i, l'angle de réfraction r dépend de la couleur de la radiation, donc de sa fréquence.

D'une manière générale, un indice absolu dépend donc non seulement de la nature du milieu de propagation mais aussi de la fréquence de l'onde lumineuse considérée.

- **Un milieu est dit dispersif si son indice dépend de la fréquence de l'onde qui se propage dans ce milieu.**



6. *La radiation violette est plus déviée que la radiation rouge: l'indice du milieu pour la radiation violette est supérieur à celui de la radiation rouge.*

Scanné avec CamScanner

Les milieux transparents, à l'exception du vide, sont plus ou moins dispersifs.

La figure 7 représente la séparation d'un rayon bleu et d'un rayon rouge après une réfraction air/verre; la déviation d_B d'un rayon bleu est supérieure à la déviation d_R d'un rayon rouge, tandis que l'angle de réfraction r_B est inférieur à l'angle de réfraction r_R, soit

$$d_B > d_R$$

et

$$r_B < r_R ;$$

puisque :

$$\sin i = N_B \sin r_B = N_R \sin r_R .$$

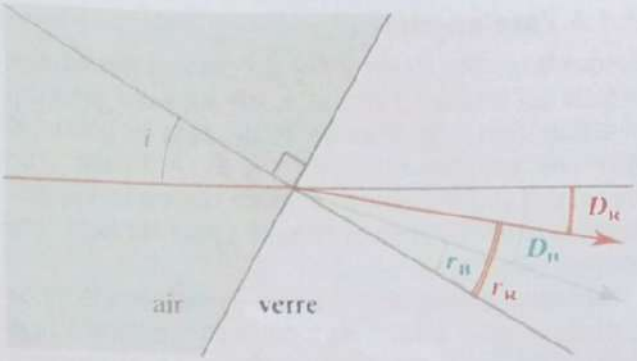
nous avons donc : $N_B > N_R$.

L'indice N_B pour une radiation bleue (fréquence ν_B) est supérieur à l'indice N_R pour une radiation rouge (fréquence ν_R); d'où :

$$N_B > N_R ,$$

avec

$$\nu_B > \nu_R .$$



7. *La déviation augmente avec la fréquence :*

$d_B > d_R$ *avec* $\nu_B > \nu_R$.

L'indice augmente avec la fréquence :

$n_B > n_R$.

• L'indice absolu d'un milieu transparent dispersif augmente en général avec la fréquence des radiations.

Donnons, à titre d'exemple, les valeurs d'indices correspondant à trois radiations différentes, et ce, pour deux types de verre couramment utilisés en optique *(crown* et *flint)* :

Radiation	rouge	jaune	bleu
λ (nm) (vide)	656,3	589,3	486,1
N_{crown}	1,504	1,507	1,521
N_{flint}	1,612	1,621	1,671

Nous pouvons maintenant interpréter l'expérience de décomposition de la lumière par le prisme de la figure 2, réalisé à l'aide d'un verre dispersif. Le rayon incident, quand il atteint la première face du prisme (dioptre plan), subit le phénomène de réfraction et donne naissance à un faisceau, les différentes radiations ne se réfractant pas identiquement. Le phénomène se reproduit sur la seconde face du prisme, et on obtient à la sortie un large faisceau constitué de plages de différentes couleurs.

• La décomposition d'une lumière polychromatique par un prisme est due au phénomène de dispersion.

Remarque : Les aberrations chromatiques, défauts des lentilles que nous avons définis au chapitre 16, sont dues à la variation de l'indice de la lentille avec la fréquence des radiations. En associant des lentilles réalisées avec des verres de pouvoirs dispersifs différents, on peut diminuer ces défauts : on obtient ainsi des lentilles *achromatiques*.

APPLICATION 2

Deux radiations ont pour longueurs d'onde dans le vide $\lambda_R = 656{,}3$ nm *(rouge) et* $\lambda_B = 486{,}1$ nm *(bleu). Pour ces radiations, l'indice d'un verre (flint) vaut respectivement* $N_R = 1{,}612$ *et* $N_B = 1{,}671$.

1/ Calculer la fréquence correspondant à chacune de ces radiations.

2/ Calculer, pour chaque radiation, la célérité c' dans le verre considéré ainsi que la longueur d'onde λ' *correspondante.*

1/ La fréquence caractérise la radiation et ne dépend pas du milieu de propagation. Nous obtenons pour le bleu :

$$\nu_B = \frac{c}{\lambda_B} = \frac{3.10^8}{486{,}1.10^{-9}}$$

$$= 6{,}17.10^{14} \text{ Hz}.$$

Nous trouvons de même $\nu_R = \frac{c}{\lambda_R} = 4{,}57.10^{14}$ Hz.

2/ La célérité dépend de l'indice du milieu considéré :

- $c'_R = \frac{c}{N_R}$, soit $1{,}86.10^8$ m.s^{-1} pour le rouge;
- $c'_B = \frac{c}{N_B}$, soit $1{,}79.10^8$ m.s^{-1} pour le bleu.

La longueur d'onde dans le milieu dépend de la fréquence d'une part, de la célérité, c'est-à-dire du milieu, d'autre part. Nous obtenons pour le rouge :

$$\nu_R = \frac{c}{\lambda_R} = \frac{c'_R}{\lambda'_R},$$

soit : $$\lambda'_R = \frac{c'_R}{c}\lambda_R = \frac{\lambda_R}{n_R} = \frac{656{,}3}{1{,}612} = 407{,}1 \text{ nm}$$

Nous trouvons de même $\lambda'_B = 290{,}9$ nm.

Scanné avec CamScanner

18.1.4 l'arc-en-ciel

Lorsque la lumière solaire arrive sur chacune des gouttes de pluie qui tombent d'un nuage, elle subit une première réfraction, puis une réflexion totale dans la goutte et enfin une seconde réfraction (*fig.* 8). A l'instar d'un prisme, une goutte d'eau se comporte comme un système dispersif, la déviation étant maximale pour les radiations violettes.

L'observateur qui contemple un arc-en-ciel verra le rouge au-dessus du bleu, les couleurs intermédiaires s'intercalent entre ces deux extrêmes. Le phénomène peut être observé lorsqu'on dirige obliquement vers le haut un jet d'eau pulvérisé en fines gouttelettes.

18.2 réseau de diffraction

18.2.1 utilisation d'un réseau de diffraction

La spectroscopie est l'étude des diverses radiations émises par une source, transmises, absorbées, réfléchies ou diffusées par la matière. La lumière complexe qu'on désire analyser est envoyée sur des appareils, appelés **spectroscopes,** qui décomposent une lumière complexe. Des appareils sont construits avec des prismes; mais leurs performances sont limitées par la qualité optique du système, la dispersion insuffisante, le domaine du spectre exploré relativement étroit. Aussi utilise-t-on très souvent, à la place du prisme, des **réseaux de diffraction.** Ces réseaux sont des surfaces optiquement travaillées sur lesquelles sont gravés des traits parallèles, équidistants et extrêmement serrés. Le réseau le plus simple est constitué par une surface plane sur laquelle ont été tracés, par un procédé d'une haute technologie, des traits transparents, très fins et parallèles entre eux.

APPLICATION 3

Un rayon de lumière blanche atteint un dioptre plan air-verre sous une incidence de 30°. Calculer l'angle α que fait, dans le verre, le rayon bleu ($\lambda_B = 486{,}1$ nm) avec le rayon rouge ($\lambda_R = 656{,}3$ nm), ceci pour un verre en flint puis un verre en crown.

La variation d'indice étant faible, l'angle α sera petit. Appliquons la relation $\sin r \approx \dfrac{\sin i}{N}$ pour chaque type de radiation et pour chaque verre utilisé.

- Pour le flint, nous avons :

$$i = 30°, \quad \lambda_R = 656{,}3 \text{ nm}, \quad N_R = 1{,}612;$$

d'où : $\sin r_R = \dfrac{\sin 30}{1{,}612}$ soit $r_R = 18{,}07°$.

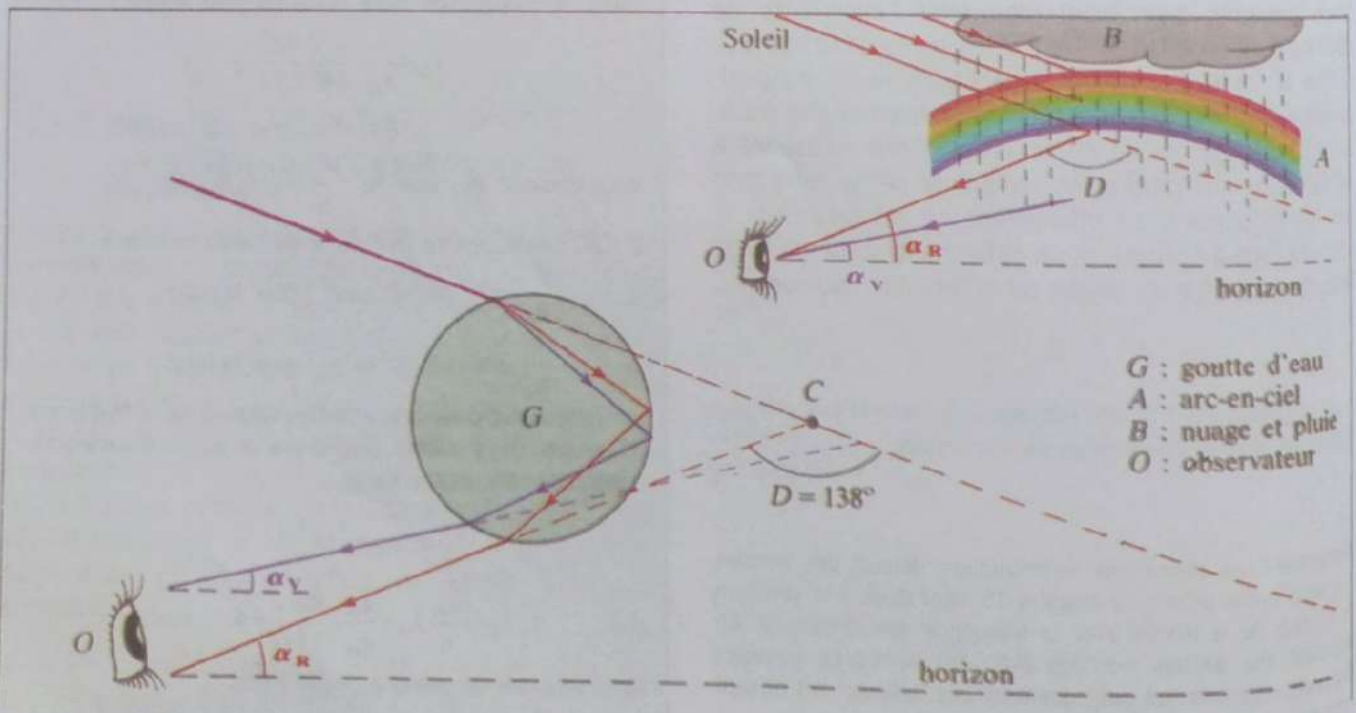
Nous trouvons de même $r_B = 17{,}41°$.

Finalement : $\alpha = r_R - r_B = 0{,}66° = 40'$.

- Pour le crown, nous obtenons de même $r_B = 19{,}19°$ et $r_B = 19{,}42°$, soit :

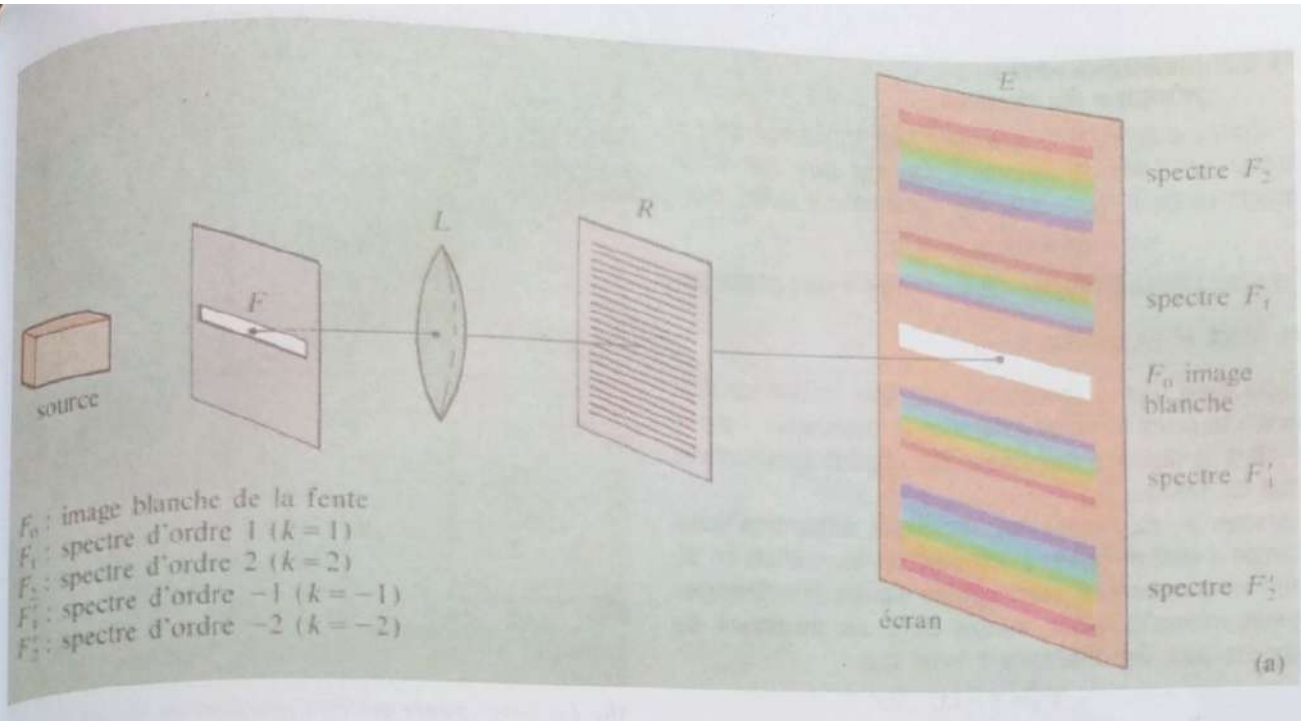
$$\alpha = r_R - r_B = 0{,}23° = 14'.$$

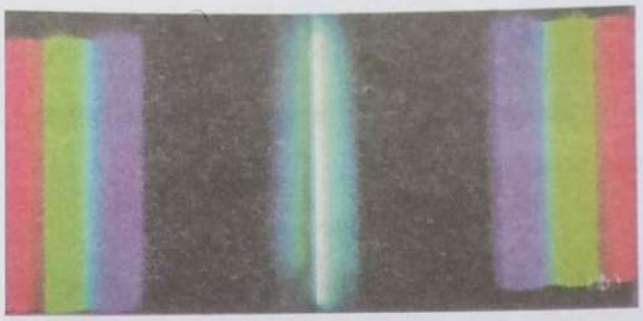
Nous retrouvons là le fait que le flint est plus dispersif que le crown.



8. *Principe de l'arc-en-ciel. Le rayon lumineux subit, en général, une seule réflexion à l'intérieur d'une goutte de pluie. On peut montrer, compte tenu de l'indice de réfraction de l'eau, que l'intensité du faisceau émergent est maximale lorsque l'angle D vaut environ* 138°.

Scanné avec CamScanner





9. Diffraction de la lumière par un réseau.

a. F : fente source placée au voisinage du foyer de la lentille L; cette fente est parallèle aux fentes du réseau R.

b. De part et d'autre de l'image F_0 de la fente F, on obtient des images colorées dues à la diffraction.

La distance ℓ entre deux « fentes » consécutives est appelée **pas** du réseau. Les réseaux utilisés en laboratoire possèdent très souvent plus de 500 traits par millimètre. Dans l'expérience schématisée par la figure 9a, interposons un réseau plan entre la lentille et l'écran. L'interposition du réseau ne modifie pas la position de l'image blanche F_0 qui reste dans le prolongement des rayons incidents. En revanche, nous observons plusieurs spectres de part et d'autre de cette image centrale, symétriques deux à deux par rapport à celle-ci (*fig.* 9b). Dans chaque spectre, les radiations violettes sont moins déviées que les jaunes, lesquelles le sont moins que les rouges, *contrairement à ce que nous observions avec un prisme de verre.*

• Un réseau permet de décomposer une lumière polychromatique.
Les déviations provoquées par le réseau augmentent avec la longueur d'onde des radiations (elles diminuent quand la fréquence augmente).

Le nombre de spectres est limité; il dépend du nombre de traits par unité de longueur. Le paragraphe suivant va nous permettre d'interpréter ces résultats dans un cas particulier très simple.

Scanné avec CamScanner

18.2.2 problème résolu : principe du réseau

1/ *On considère un réseau plan (fig. 10) comportant n fentes par unité de longueur. Montrer que l'on a un maximum de lumière pour des directions θ telles que :*

$$\sin\theta = kn\lambda, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Tous les rayons diffractés sous un angle θ vont converger au point M tel que $\tan\theta = \frac{x}{f}$.

Entre deux rayons consécutifs de même inclinaison θ, il existe toujours la même différence de marche $\delta = \ell \sin\theta$, ℓ étant la distance qui sépare deux fentes consécutives (pas du réseau).

Lorsque $\delta = k\lambda$, toutes les radiations diffractées sous l'angle θ sont en phase et vont ajouter leurs effets en M, où l'on observera un maximum de lumière (interférences constructives(*)). Nous aurons donc un maximum de lumière pour les directions θ telles que :

$$\ell \sin\theta = k\lambda.$$

soit

$$\sin\theta = k\frac{1}{\ell}\lambda.$$

$\frac{1}{\ell}$ représente le nombre de fentes par unité de longueur. que nous notons n. D'où

$$\sin\theta = kn\lambda. \qquad (1)$$

308 L'expérience et la théorie montrent que seuls les maximums sont visibles; si les rayons s'écartent de la valeur de θ définie en (1), les radiations se détruisent quasiment.

2/ Qu'observe-t-on en lumière polychromatique?

Pour un nombre k donné, $\sin\theta$ (et donc l'angle θ) est fonction croissante de λ. Comme nous l'a montré l'expérience, la déviation d'un rayon lumineux augmente avec la longueur d'onde de la radiation. La lumière polychromatique est donc décomposée et nous obtenons un spectre, appelé **spectre d'ordre k**.

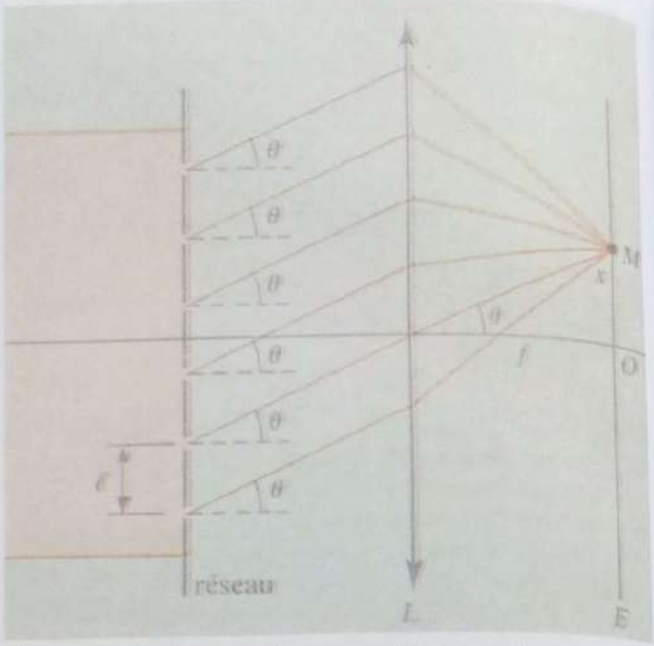
L'énergie lumineuse est répartie dans plusieurs spectres, les plus intenses étant ceux d'ordre faible ($k = \pm 1$ ou ± 2). Le nombre de spectres est limité, car :

$$-1 < \sin\theta < 1.$$

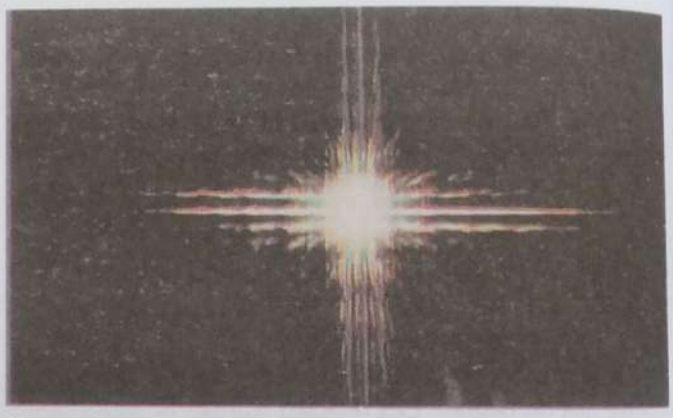
Remarquons que lorsque $k = 0$, la relation (1) est vérifiée, quelle que soit λ, pour $\theta = 0$. En lumière blanche, nous observons donc une image blanche de la source S, qu'encadrent les spectres des différents ordres.

En conclusion, les phénomènes de diffraction et d'interférences, caractéristiques des ondes, permettent d'expliquer la décomposition d'une lumière polychromatique par un réseau.

(*) Voir *Physique* 1ères S et E, § 23.2.



10. *Les ondes planes qui vont interférer en M sont issues de sources cohérentes en phase. Le déphasage entre deux ondes consécutives est égal à :* $\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{2\pi\ell}{\lambda}\sin\theta$.



11. *Diffraction de la lumière par un voilage.*

APPLICATION 4

Un réseau comporte 100 traits par millimètre et la lentille a une distance focale $f = 80$ cm. Calculer la largeur du spectre d'ordre 2 observé pour des radiations comprises entre $\lambda_V = 0{,}4$ µm et $\lambda_R = 0{,}75$ µm, le réseau étant éclairé sous incidence normale.

Calculons, pour le vert, l'angle de diffraction correspondant à un maximum de lumière dans le spectre d'ordre 2. Avec :

$$\sin\theta_V = kn\lambda_V = 2 \times 100 \times 10^3 \times 0{,}4.10^{-6} = 0{,}08,$$

il vient :

$$\theta_V = 4{,}59°.$$

Pour le rouge, nous obtenons de même :

$$\theta_R = 8{,}63°.$$

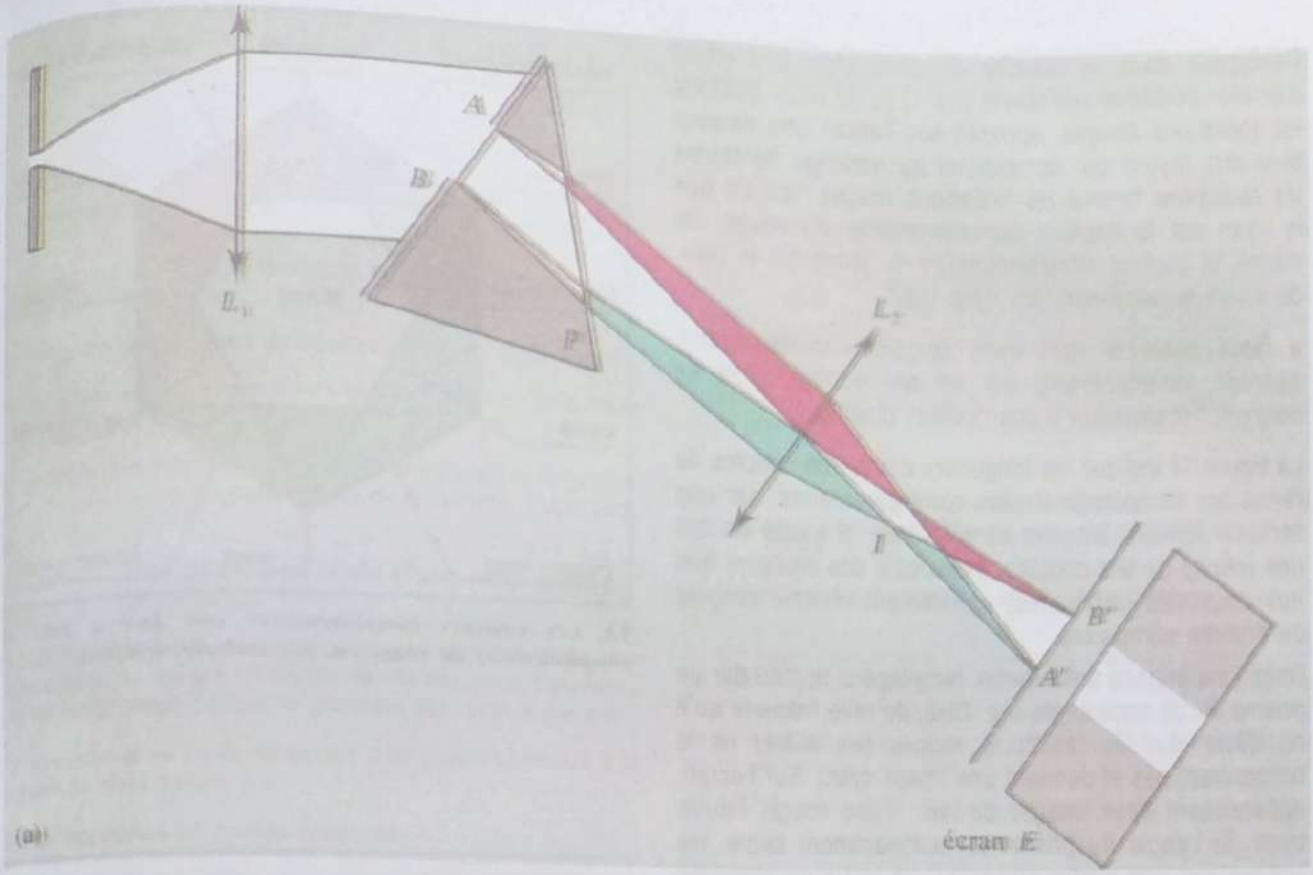
Calculons les positions respectives de ces maximums sur l'écran :

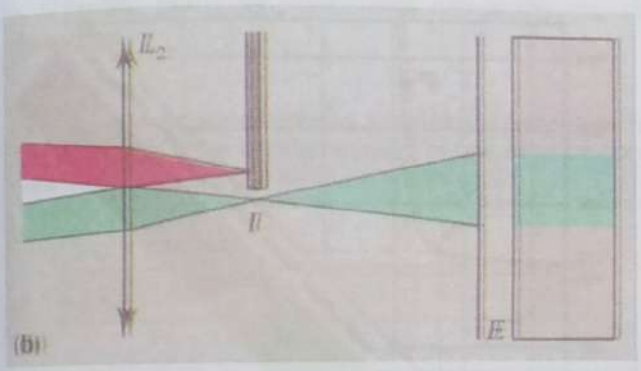
$$x_V = f\tan\theta_V = 80 \times 0{,}08 = 6{,}4 \text{ cm},$$

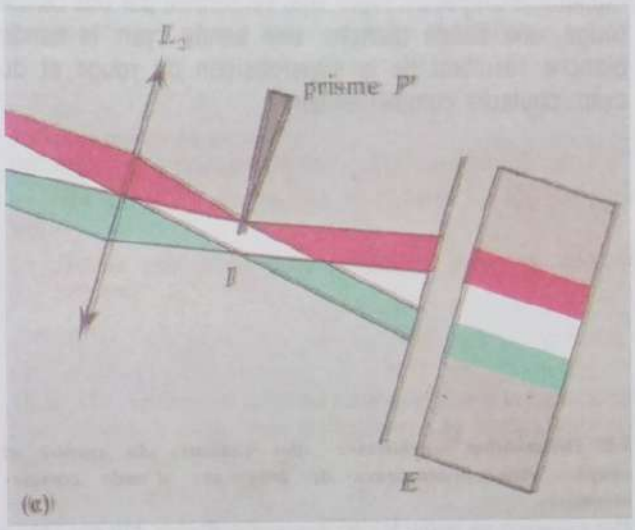
$$x_R = f\tan\theta_R = 80 \times 0{,}15 = 12 \text{ cm}.$$

La largeur du spectre est donc de $12 - 6{,}4 = 5{,}6$ cm.

Scanné avec CamScanner







12. *Pour simplifier, nous ne représentons à la sortie du prisme P que deux radiations parmi toutes celles qui composent la lumière blanche incidente.*

a. *Toutes les radiations se recomposent pour donner du blanc.*

b. *Toutes les radiations, moins le rouge, donnent le vert-bleu (cyan).*

c. *Le vert-bleu (cyan) et le rouge donnent le blanc.*

18.3 synthèse de la lumière blanche; couleurs complémentaires

Peut-on reconstituer la lumière blanche en rassemblant les couleurs qu'ont, par exemple, séparées en prisme? Considérons le montage de la figure 12. *AB* est une ouverture rectangulaire. Son image *A'B'* sur un écran *E*, obtenue grâce à une lentille L_2, est blanche. La lentille permet donc de reconstituer la lumière blanche. Les radiations lumineuses obtenues par dispersion redonnent la lumière initiale lorsqu'on les superpose. C'est une raison supplémentaire de penser, comme Newton, qu'elles pré-existent mélangées dans la lumière blanche et que la dispersion ne fait que les séparer.

Une feuille de papier tenant lieu d'écran et que nous déplaçons entre *E* et L_2 nous permet de constater que la lumière initiale n'est reconstituée que sur *E*. En particulier, au voisinage du point *I*, point de convergence du faisceau, nous retrouvons le spectre.

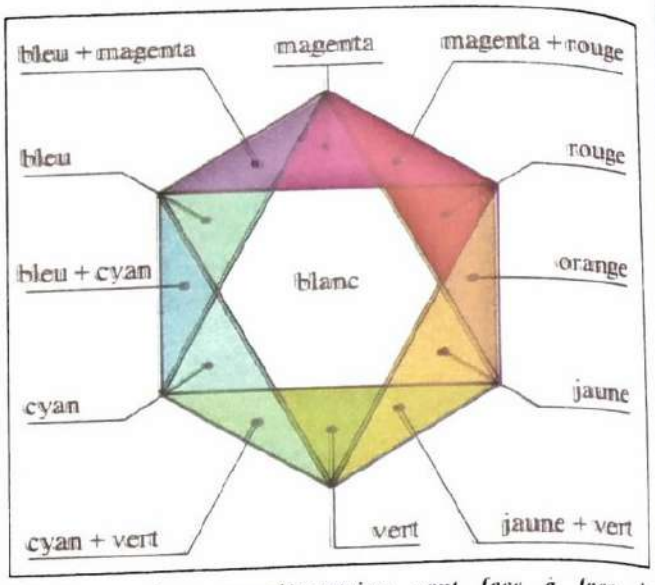
Scanné avec CamScanner

Déplaçons dans le spectre un petit clou permettant d'arrêter certaines radiations (*fig.* 12 b). Si nous arrêtons les radiations rouges, apparaît sur l'écran une couleur bleu-vert *(cyan)* qui correspond au mélange de toutes les radiations hormis les radiations rouges : on dit que le cyan est la couleur *complémentaire* du rouge. De même, la couleur complémentaire du jaune est le bleu, du violet le jaune-vert, etc. (*fig.* 13).

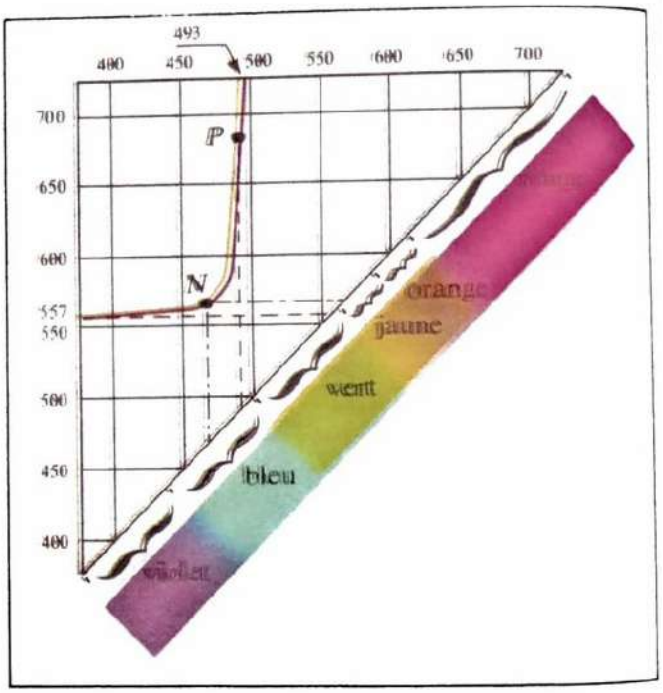
• Deux couleurs sont dites complémentaires quand, agissant simultanément sur un œil normal, elles lui donnent l'impression d'une couleur blanche.

La figure 14 indique les longueurs d'onde de couples de radiations monochromatiques complémentaires, par une certaine lumière blanche de référence. Il existe en fait une infinité de tels couples, associés à des couleurs que nos coutumes (arbitraires) considèrent comme simples ou comme complexes.

Dans l'expérience précédente, remplaçons le clou par un prisme P' de petit angle (*fig.* 12 c), de telle manière qu'il ne dévie que les radiations rouges (les autres ne le rencontrent pas et donnent une image cyan). Sur l'écran, apparaissent deux images de AB : l'une rouge, l'autre cyan. Si l'angle du prisme est suffisamment faible, les images ont une partie commune, et la figure observée rappelle le drapeau italien : elle est formée par une bande rouge, une bande blanche, une bande cyan, la bande blanche résultant de la superposition du rouge et du cyan, couleurs complémentaires.



13. *Les couleurs complémentaires sont face à face (le complémentaire du rouge est, par exemple, le cyan).*



14. *Délimitation « arbitraire » des couleurs du spectre et couples monochromatiques de longueurs d'onde complémentaires.*
Par exemple, au point **N** *: les longueurs d'onde* **470 nm** *(bleu) et* **575 nm** *(jaune) sont complémentaires. Les longueurs d'onde* **500 nm** *(bleu-vert, mieux nommé cyan) et* **680 nm** *(rouge) sont complémentaires.*

Scanné avec CamScanner

EXERCICES

L'essentiel du cours

18.1 A 1/ Donner la définition du spectre de la lumière émise par une source.

2/ Citer les divers types de spectres que l'on peut obtenir.

3/ Nommer les deux grandeurs qui caractérisent une onde lumineuse monochromatique dans le vide.

4/ Donner (en nm) les deux valeurs limites approximatives des longueurs d'onde dans le vide de la lumière visible (violet et rouge).

5/ Définir l'indice absolu d'un milieu et son indice relatif par rapport à un autre milieu.

6/ Lorsqu'une onde monochromatique pénètre dans une succession de milieux différents, quelle est, de la fréquence ou de la longueur d'onde, la grandeur qui reste invariante ?

7/ Énoncer la loi de la réfraction d'un rayon lumineux à la traversée d'un dioptre plan.

8/ Qu'apppelle-t-on « milieu dispersif » ?

9/ Citer deux systèmes qui permettent la décomposition de la lumière. Sur quels phénomènes ces deux systèmes reposent-ils ?

18.2 A On donne différentes longueurs d'onde dans le vide (en nm) de raies caractéristiques et une série de couleurs. Associer à chaque raie une couleur.

480	656	410	589	450	546

rouge	bleu	indigo	jaune	vert	violet

18.3 A Éclairé en lumière blanche, un corps nous apparaît d'une certaine couleur s'il absorbe les radiations correspondant à la couleur complémentaire.

1/ Une solution de permanganate de potassium absorbe des radiations jaune-vert. Quelle est sa couleur ? Une solution de dichromate de potassium est orangée. Quelles radiations colorées absorbe-t-elle *a priori* ?

2/ Qu'absorbe un corps blanc ? un corps noir ?

3/ Une robe, en lumière blanche, paraît rouge ; une autre paraît verte. Décrire leurs aspects lorsqu'elles sont observées en lumière monochromatique rouge, ou verte, ou jaune.

Exercices de base

18.4 AB3 Dans le tableau ci-après, on donne les longueurs d'onde dans le vide de trois radiations monochromatiques et les indices correspondants pour deux types de verre différents.

couleur	rouge	jaune	bleu
λ (nm)	656,3	589,3	486,1
N crown	1,504	1,507	1,521
N flint	1,612	1,621	1,671

1/ Calculer les fréquences des radiations du tableau ci-dessus. Dépendent-elles de l'indice du milieu ? (On prendra $c = 2,998 \cdot 10^8$ m . s $^{-1}$.)

2/ Calculer les célérités de l'onde rouge dans le crown et le flint.

3/ Un rayon de lumière blanche arrive sur un dioptre plan air-verre, sous l'incidence de 60°. On prendra l'indice de l'air égal à l'unité. Calculer l'angle que fait le rayon bleu avec le rayon rouge pour un verre en flint, puis pour un verre en crown. Faire une figure.

4/ Le flint est-il plus dispersif que le crown ?

18.5 B3 L'indice d'un corps varie approximativement en fonction de la longueur d'onde λ selon la relation :

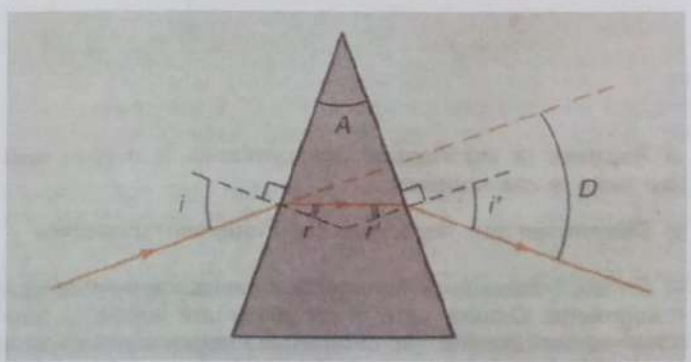
$$n = a + \frac{b}{\lambda^2},$$

où λ est exprimée en nm.
Calculer a et b pour un certain cristal caractérisé par :
$n = 1,77$ si $\lambda = 750$ nm (rouge), $n = 1,84$ si $\lambda = 400$ nm (violet).
En déduire son indice pour la lumière jaune du sodium ($\lambda = 589$ nm).

18.6 AB3 Lorsqu'un pinceau lumineux atteint la face plane d'un prisme, il subit deux réfractions. Les angles vérifient les relations suivantes :

$$\sin i = n \sin r \qquad \sin i' = n \sin r'$$
$$A = r + r' \qquad D = i + i' - A$$

où D est la déviation du pinceau lumineux, n, l'indice de réfraction du verre, A, l'angle au sommet du prisme.



1/ Justifier les deux premières relations.

2/ On utilise le prisme de telle façon que $i = i'$.

a/ Montrer que, dans ces conditions, $A = 2r$ et $D = 2i - A$.

Scanné avec CamScanner

EXERCICES

b/ Montrer que l'indice du prisme est donné par :

$$n = \frac{\sin\frac{D+A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}.$$

Application numérique : $A = 60°$, $D = 39°$. Calculer n.

c/ On fait arriver une lumière jaune émise par une lampe au sodium. L'indice est $n = 1{,}751$. Pour $A = 60°$, calculer i et D.

3/ On fait arriver sous l'incidence précédente un rayon lumineux émis par une lampe à hydrogène. Les indices pour les radiations rouge et violette valent respectivement 1,742 et 1,769. Calculer l'angle que font les rayons correspondant à ces deux radiations à la sortie du prisme.

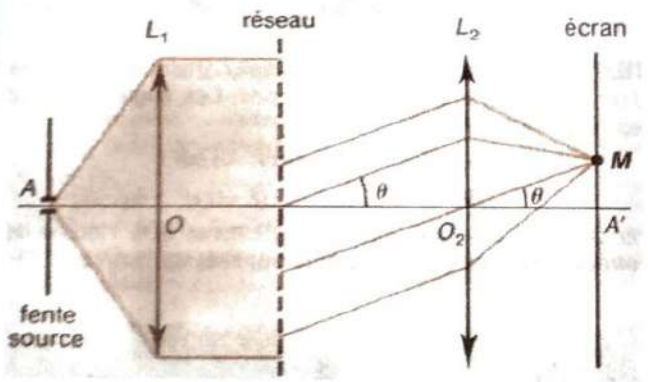
18.7 AB3 Un réseau plan comporte 300 traits par mm. Il est éclairé en lumière monochromatique par un faisceau parallèle issu d'une fente source fine A. La longueur d'onde de la radiation est $\lambda = 546{,}1$ nm.

1/ Où doit-on placer la fente source A par rapport à la lentille L_1 pour obtenir un faisceau parallèle à la sortie de cette lentille ?

2/ En l'absence de réseau, où doit-on placer l'écran pour obtenir une image nette de la fente source ?

3/ Les angles θ pour lesquels on obtient une interférence constructive (c'est-à-dire un maximum en un point M de l'écran) sont donnés par la relation :

$$\sin\theta = k n\lambda.$$



a/ Rappeler la signification des symboles k, n et λ, avec leur unité le cas échéant.

b/ Déterminer tous les angles théoriquement possibles.

4/ En fait, l'intensité de l'image diminue rapidement lorsque θ augmente. D'autre part, si on utilise une lentille L_2 pour observer sur un écran les différentes images colorées de la fente, il faut respecter les conditions de Gauss. On se limitera donc à des angles inférieurs à 20°.

La distance focale de la lentille L_2 est égale à 45 cm. Déterminer les positions des images colorées sur l'écran. (On pourra poser $d = A'M$ et $\tan\theta \approx \theta$.)

18.8 B3C On reprend le dispositif de l'exercice précédent. Cette fois, la fente est éclairée par des lampes différentes.

1/ On utilise une lampe à vapeur de mercure. La lumière émise est la superposition de cinq raies principales.

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
577	546	492	436	405

(nm)

On admet que l'image de la fente source est un trait fin. Déterminer les positions des différentes images colorées de la fente pour les spectres d'ordres 1 et 2 dans le plan focal image de la lentille L_2 (figure 18.7).
Représenter sur un schéma ce qu'on obtient sur l'écran.

2/ On utilise maintenant une lampe à incandescence et à filament de tungstène, qui émet de la lumière blanche présentant un spectre continu, entre 400 nm et 750 nm.
Déterminer les positions sur l'écran des limites des spectres d'ordres 1 et 2. La lentille est-elle utilisée dans les conditions de Gauss ?
Représenter sur un schéma ce qu'on obtient sur l'écran.

18.9 B3C On reprend toujours le dispositif de l'exercice 18.7, mais le réseau comporte 600 traits par mm. On utilise encore une lampe à filament de tungstène, de spectre continu entre 400 nm et 750 nm.

1/ On considère le spectre d'ordre 1.

a/ Calculer les valeurs limites des angles correspondant aux radiations violette et rouge.

b/ Montrer que la lentille L_2 n'est pas utilisée dans de bonnes conditions.

c/ On dispose cette lentille de façon que son foyer principal image coïncide avec l'image colorée jaune de la fente correspondant à $\lambda = 577$ nm. Déterminer les positions, dans le plan focal de cette lentille, des images violette et rouge. En déduire la largeur du spectre d'ordre 1.

2/ On supprime la lentille L_2 et on place un écran très éloigné. Montrer que les spectres d'ordres 2 et 3 se chevauchent. Peut-on obtenir complètement ce dernier spectre ?

Banc d'essais

18.10 AB3 Une lampe à vapeur de sodium émet un rayonnement de fréquence $\nu = 5{,}093 \cdot 10^{14}$ Hz. Dans l'air, la couleur de ce rayonnement est jaune.

1/ Quelle est la longueur d'onde dans l'air ? (On prendra l'indice de l'air égal à 1 et $c = 3 \cdot 10^8$ m . s $^{-1}$.)

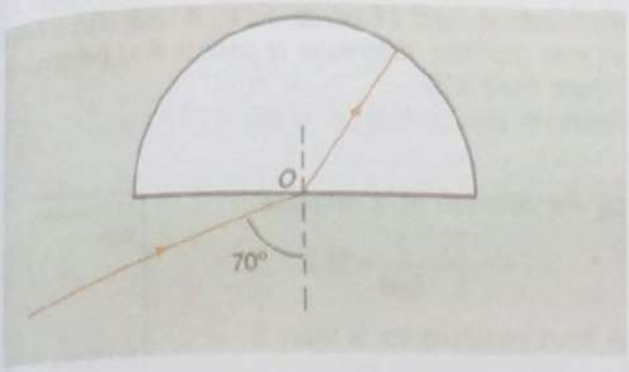
2/ Quel est l'aspect du drapeau français lorsqu'il est éclairé par une telle lampe ?

3/ Le rayonnement pénètre dans l'eau, d'indice $N = 1{,}33$. Quelle est la longueur d'onde dans ce milieu ?
Quelle est la couleur du rayonnement émis par la lampe au sodium lorsqu'il se propage dans l'eau ?

↳ ex. 18.3, 18.4.

Scanné avec CamScanner

18.11 B3C Une cuve hémicylindrique de rayon 30 cm peut contenir un liquide transparent ; l'épaisseur des parois est négligeable. Un pinceau incident de lumière blanche pénètre dans la cuve par le centre O de la face plane transparente ; l'angle d'incidence vaut 70°. La paroi hémicylindrique est translucide.



1/ La cuve contient de l'eau, dont l'indice vaut 1,344 pour le violet extrême et 1,330 pour le rouge extrême. Quelle est la longueur du spectre observé sur la surface translucide ?

2/ Même question pour du sulfure de carbone, dont l'indice vaut 1,700 pour le violet et 1,618 pour le rouge.
Quel est le liquide le plus dispersif ?

↳ **ex. 18.4.**

18.12 AB3 Un réseau est utilisé en incidence normale. Dans le spectre d'ordre 2, la radiation de longueur d'onde 500 nm est déviée d'un angle $\theta = 30°$. Combien ce réseau comporte-t-il de traits par mm ? Quelle est la distance entre deux traits ?

↳ **ex. 18.7.**

18.13 AB3 Un réseau, éclairé sous l'incidence normale, comporte 125 traits par mm. On observe, dans le plan focal d'une lentille convergente de 1 m de distance focale, le spectre d'ordre 2 donné par une lampe à vapeur de mercure (voir ex. 18.7). Quelle est la distance qui sépare les raies de longueurs d'onde 656,3 nm et 410,2 nm ?

↳ **ex. 18.8.**

18.14 La lumière monochromatique émise par un laser a une longueur d'onde 620 nm. Un faisceau parallèle de cette lumière éclaire un réseau sous incidence normale. La lumière sortant du réseau est captée par une lentille convergente de distance focale 1,50 m et dont l'axe principal est confondu avec l'axe du faisceau incident.

1/ C Qu'observe-t-on sur l'écran ?

2/ AB3 La distance qui sépare les spectres d'ordres 2 et −2 vaut 15,4 cm. Calculer le pas du réseau.

↳ **ex. 18.9.**

18.15 Pour former le spectre de la lumière blanche, on utilise un réseau par transmission fonctionnant sous incidence normale et comportant 2 500 traits par cm. On considère les radiations lumineuses violette, jaune et rouge, de longueurs d'onde respectives 450 nm, 600 nm et 700 nm.

1/ A Donner un schéma du montage utilisé.

2/ AB3 Déterminer les directions, repérées à partir de la normale au réseau, dans lesquelles on observe une intensité lumineuse maximale pour ces trois couleurs dans le spectre d'ordre 1, puis dans le spectre d'ordre 2.

3/ On obtient le spectre en plaçant derrière le réseau une lentille de distance focale $f' = 1$ m. La direction de l'axe optique de cette lentille est celle de la lumière jaune diffractée par le réseau dans le spectre d'ordre 1. On place une plaque photographique dans le plan focal de la lentille, perpendiculairement à son axe optique.

a/ C Faire le schéma du montage.

b/ B3C Calculer la distance séparant les raies rouge et violette sur la plaque, dans le spectre d'ordre 1.

↳ **ex. 18.7, 18.8, 18.9.**

18.16 B3 La distance focale d'une lentille mince biconvexe est reliée aux rayons de courbure R_1 et R_2 des deux faces et à l'indice n du verre par la relation :

$$\frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Une lentille en crown a comme rayons de courbure $R_1 = 40$ cm et $R_2 = 20$ cm. L'indice dépend de la longueur d'onde (voir tableau de l'ex. 18.4).

1/ Calculer la distance focale moyenne de cette lentille pour la longueur d'onde intermédiaire 589,3 nm du spectre.

2/ Calculer la distance entre le foyer rouge et le foyer bleu. (Cette distance caractérise l'aberration chromatique longitudinale.)

3/ Reprendre les questions précédentes avec le verre en flint. Comparer les résultats.

Achromatisme d'une lentille

18.17 La vergence d'une lentille est donnée par la relation :

$$C = (n-1)A,$$

où n est l'indice du verre et A, une constante dépendant uniquement de la lentille (voir ex. 18.16).

1/ AB1B3 Pour une lentille donnée, en crown, la vergence en lumière jaune est 2,10 δ. Calculer sa vergence en lumière bleue et en lumière rouge (on consultera le tableau de l'ex. 18.4).
Montrer que les radiations constituant un faisceau de lumière blanche incident, parallèle à l'axe principal, ne convergent pas au même point (aberration chromatique). Faire un schéma. Calculer la distance qui sépare les foyers extrêmes.

2/ B3C Pour corriger partiellement ce défaut, on accole une lentille convergente en crown et une lentille divergente en flint. On veut réaliser ainsi un système de vergence 2,10 δ pour les radiations bleue et rouge. Calculer la valeur de la constante A pour chacune des deux lentilles. En déduire la vergence du système pour la radiation jaune.

Scanné avec CamScanner

LES LENTILLES

Conseils de résolution

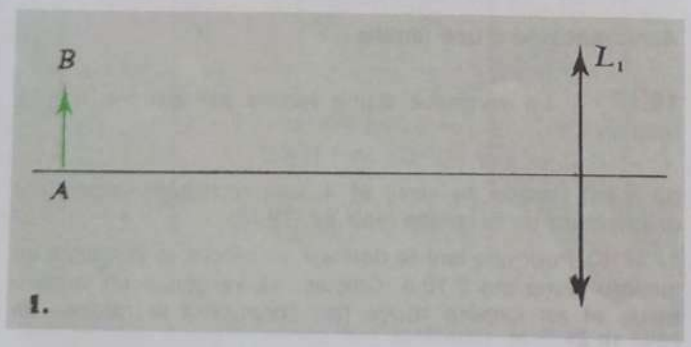
- Dans un exercice d'optique géométrique, il est nécessaire de faire un schéma très soigné et, si possible, à l'échelle.
- Pour tracer la marche des rayons lumineux, utiliser le centre optique et les foyers. Attention : pour une lentille divergente, le foyer image se trouve avant le foyer objet !
- Lors de la construction d'une image, si les rayons émergents divergent, l'image se trouve devant la lentille, dans le prolongement de ces rayons : elle est virtuelle.
- Deux lentilles accolées se comportent comme une lentille unique de vergence :

$$C = C_1 + C_2.$$

- Dans le cas d'une association de deux lentilles non accolées, on cherche d'abord l'image A_1B_1 de l'objet AB à travers la première lentille L_1. Cette première image joue ensuite le rôle d'objet pour la seconde lentille L_2. L'image finale est donc l'image de A_1B_1 à travers L_2. Ainsi, il suffit d'utiliser deux fois la formule de conjugaison (l'origine étant en O_1, puis en O_2).
- Un objectif photographique sera toujours assimilé à une lentille mince convergente. L'image finale se trouve toujours près du foyer image : cette remarque permet de simplifier des calculs.

Problème résolu 1

1/ A l'aide d'une lentille mince convergente L_1 de distance focale $f'_1 = 4$ cm, on obtient l'image A_1B_1 d'un objet AB de 1 cm de hauteur placé à 6 cm de cette lentille (figure 1).



1.

a/ Quelle est la vergence de cette lentille ?
b/ A l'aide d'un schéma en vraie grandeur, déterminer la position et la grandeur de l'image A_1B_1.
c/ Retrouver par le calcul la position de l'image et le grandissement γ.

2/ Reprendre les questions précédentes, la lentille ayant été remplacée par une lentille divergente L_2 de distance focale $f'_2 = -5$ cm.

3/ On considère l'association des deux lentilles précédentes.
a/ Quelle est la vergence de l'association des deux lentilles accolées ?
b/ En réalité, L_2 est placée 3 cm derrière L_1, l'objet AB étant toujours placé à 6 cm devant L_1. A l'aide d'un schéma en vraie grandeur, déterminer la position et la grandeur de l'image finale $A'B'$.
Retrouver ces résultats par le calcul.

1a/ Par définition de la vergence :

$$C = \frac{1}{f'_1} = \frac{1}{0{,}04} = 25\ \delta.$$

A1 1 Définition Unité

b/ Nous mesurons sur la figure 2 :

$\overline{O_1A_1} = 12$ cm, $\overline{A_1B_1} = -2$ cm.

B4 1 Schéma clair et précis
A2.2 Savoir-faire

d'où : $\gamma = -2$.

B3 1 Résultat correct

c/ La relation de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{\overline{O_1F'_1}}$$

A1 1 Lois de conjugaison

s'écrit encore :

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}} = \frac{1}{\overline{O_1A}} + \frac{1}{\overline{O_1F'_1}} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{4},$$

d'où : $\overline{O_1A_1} = 12$ cm.

B3 1 Calcul exact

Le grossissement γ s'en déduit :

$$\gamma = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} = \frac{12}{-6} = -2.$$

2a/ Nous obtenons cette fois :

$$C = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{0{,}05} = -20\ \delta.$$

A1 1 Unité et signe corrects

b/ Nous mesurons sur la figure 3 :

$\overline{O_1A_1} = -2{,}7$ cm, $\overline{A_1B_1} = 0{,}45$ cm.

B4 1 Qualité du schéma.
A2.2 Savoir-faire

d'où : $\gamma = 0{,}45$.

c/ Utilisons la relation de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}} = \frac{1}{\overline{O_1A}} + \frac{1}{\overline{O_1F'_1}} = -\frac{1}{6} - \frac{1}{5},$$

A2.1 Savoir-faire

d'où : $\overline{O_1A_1} = -2{,}7$ cm.

Le grossissement γ s'en déduit :

$$\gamma = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} = \frac{-2{,}7}{-6} = 0{,}45.$$

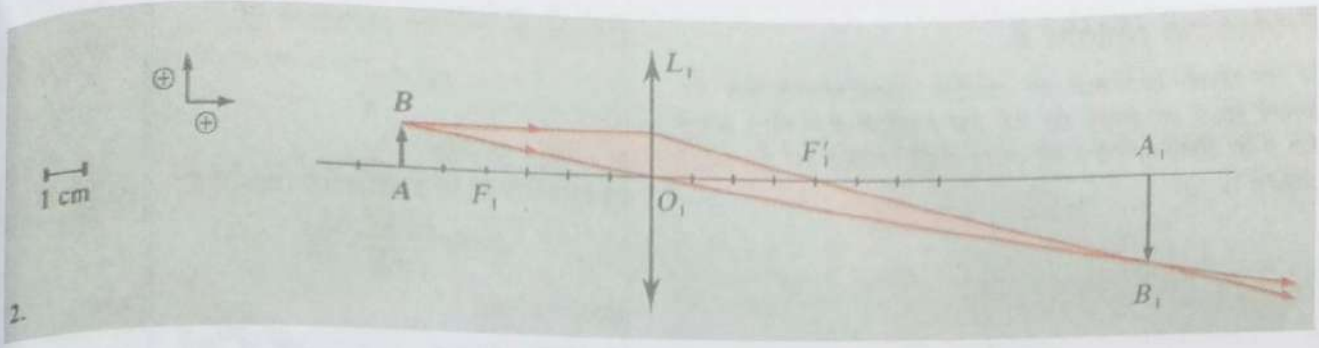
B3 1 Calcul correct

3a/ La vergence de l'ensemble des lentilles accolées est la somme des vergences de ces lentilles :

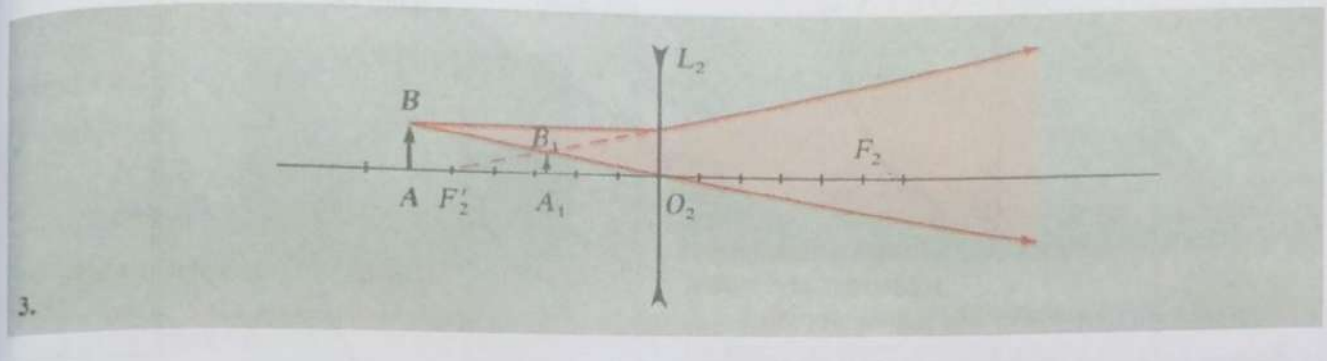
$$C = C_1 + C_2 = 25 - 20 = 5\ \delta.$$

A1 1 Loi d'association Résultat correct

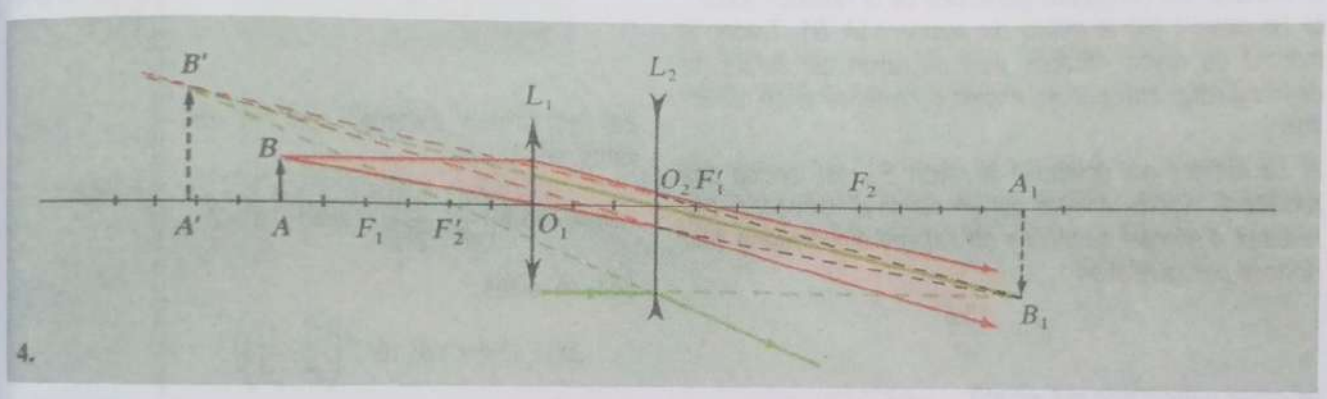
Scanné avec CamScanner



2.



3.



4.

L'association équivaut donc à une lentille unique de vergence 5 dioptries.

b/ La construction de l'image A_1B_1 de AB à travers L_1 a été effectuée lors de la question 1. Dans le cas présent, les rayons qui forment cette image sont arrêtés par L_2 et l'image A_1B_1 joue le rôle d'objet virtuel pour L_2. L'image $A'B'$ de A_1B_1 à travers L_2 (construite à l'aide des rayons tracés en vert) est virtuelle (figure 4).

On mesure sur la figure :

$$\overline{O_2A'} = -11{,}2 \text{ cm.}$$

$$\overline{A'B'} = 2{,}5 \text{ cm.}$$

d'où : $\gamma = 2{,}5$.

Retrouvons ces résultats par le calcul. Nous savons que :

$$O_1A_1 = 12 \text{ cm.}$$

donc : $\overline{O_2A_1} = 12 - 3 = 9$ cm.

B2 1 Explication de la démarche
C1 1 Méthode de calcul en utilisant les données précédentes et résultat

B4 2 Qualité du schéma

B3 2 Calcul final exact

La relation de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{\overline{O_2F_2}}$$

s'écrit encore :

$$\frac{1}{\overline{O_2A'}} = \frac{1}{\overline{O_2A_1}} + \frac{1}{\overline{O_2F_2}}.$$

Numériquement :

$$\frac{1}{\overline{O_2A'}} = \frac{1}{9} - \frac{1}{5};$$

d'où : $\overline{O_2A'} = -11{,}25$ cm.

Le grossissement γ est le produit des grossissements de chacune des lentilles :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} \cdot \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}$$

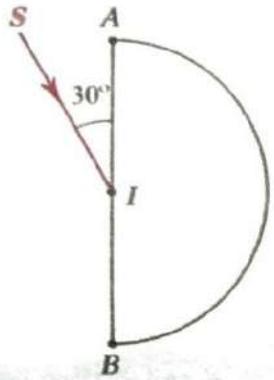
$$\gamma = \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}} \cdot \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} = -\frac{-11{,}25}{9} \times \frac{12}{-6}.$$

On retrouve effectivement : $\gamma = 2{,}5$.

Scanné avec CamScanner

Problème résolu 2

1/ *Un rayon lumineux de lumière monochromatique S.I. arrive sous un angle de 30° par rapport à la face plane AB d'un demi-cylindre de verre dont l'indice est* $n = 1{,}731$ (*figure* 1).



1.

a/ *Énoncer les lois de Descartes relatives à la réfraction.*
b/ *Indiquer les conditions générales de la réflexion totale.*
c/ *Le point I est le milieu du segment [A, B]. Tracer la marche du rayon réfracté, puis du rayon qui sortira du demi-cylindre. Indiquer les angles d'incidence et de réfraction.*

2/ *La lumière qui compose le rayon S.I. est formée des radiations visibles émises par un atome d'hydrogène. Les niveaux d'énergie quantifiés de l'atome d'hydrogène sont donnés par la relation :*

$$\mathcal{E}_n = -\frac{13{,}6}{n^2}$$

(*n entier naturel non nul, en* eV).

a/ *Établir la relation littérale donnant la longueur d'onde des radiations émises lorsque des atomes d'hydrogène excités passent d'un état d'énergie caractérisé par* $n > 2$ *au niveau d'énergie* $n = 2$.
b/ *Calculer les longueurs d'onde visibles ; donner les couleurs associées à la plus grande et à la plus petite de ces longueurs d'onde.*
c/ *Les indices du verre correspondant à la plus grande et à la plus petite longueur d'onde sont respectivement* 1,690 *et* 1,750. *Quelle est la radiation la plus déviée ? Quel est l'angle formé par les deux rayons émergents extrêmes ?*
d/ *Indiquer d'autres dispositifs permettant d'obtenir le spectre d'une lumière.*

1a/ Le rayon réfracté est dans le plan d'incidence et :

$$\sin i = n \sin r.$$

A1.2 Énonce de la loi
B2.1 Mots employés

b/ La réflexion peut être totale si la lumière tombe sur un milieu plus réfringent que le premier. Soit n l'indice relatif du second milieu par rapport au premier ; la condition demandée est :

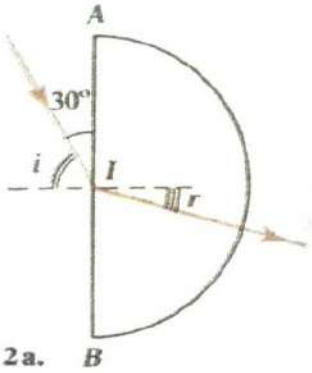
$$\sin i > \frac{1}{n}.$$

A1.1 Condition de réflexion totale.

c/ $i = 90 - 30 = 60°$.
La seconde loi de la réfraction conduit à :

$$\sin r = \frac{\sin 60°}{1{,}732} = 0{,}5.$$

Donc : $r = 30°$.
Le rayon réfracté, arrivant sur la face circulaire sous une incidence nulle, n'est pas dévié ; d'où la figure 2a :



2a.

2a/ Les niveaux d'énergie sont les suivants, en eV :

$$\Delta\mathcal{E}_n = -13{,}6\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2^2}\right), \quad \text{avec} \quad n > 2.$$

Soit, en joules :

$$\Delta\mathcal{E}_n = 13{,}6 \times 1{,}6 \,.\, 10^{-19}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$= 2{,}176 \,.\, 10^{-18}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right).$$

La relation $\Delta\mathcal{E}_n = \dfrac{hc}{\lambda}$ conduit alors à :

$$\lambda = \frac{hc}{2{,}176 \,.\, 10^{-18}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right)}.$$

b/ Remplaçons h et c par leurs valeurs numériques :

$$\lambda = \frac{9{,}127 \,.\, 10^{-8}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}}.$$

D'où le tableau :

n	3	4	5	6	7
λ (nm)	657	487	435	411	398

La valeur $n = 7$ correspond à $\lambda < 400$ nm, en dehors du spectre visible.

B2.2 Énonce à l'aide de mots bien choisis
A2.1 Savoir-faire théorique
B3.1 Calcul
A2.3 Savoir-faire en ce qui concerne l'expression littérale de $\Delta\mathcal{E}_n$
B3.1 Calcul de λ
B3.3 Calcul correct

Les couleurs associées à 657 nm et 411 nm sont respectivement le rouge et le violet.

C1.1 Connaissance de la couleur, connaissance du spectre visible.

c/ Dans le cas de la radiation violette :

$$\sin r_V = \frac{\sin i}{n} = \frac{0{,}866}{1{,}750} \approx 0{,}495$$

B4.1 Support du dessin.

d'où : $r_V = 29{,}66°$.

De même, dans le cas de la radiation rouge :

B3.1 Calcul exact

$$\sin r_V = \frac{0{,}866}{1{,}690} \approx 0{,}512$$

d'où : $r_R = 30{,}83°$.

On en déduit que :

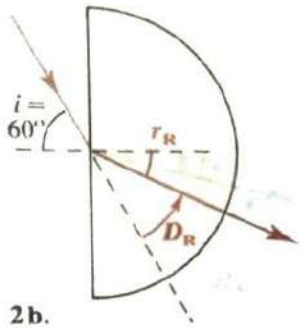
$$D_V = 90 - r_V = 60{,}34°$$

$$D_R = 90 - r_R = 59{,}17°.$$

Les radiations violettes sont les plus déviées. L'angle entre les deux rayons émergents extrêmes est :

A2.1 Savoir-faire théorique.

$$D_V - D_R = 1.17°.$$



2b.

d/ On peut utiliser un prisme ou un réseau pour obtenir le spectre d'une lumière polychromatique.
(S'il reste du temps, on donnera le schéma d'un spectromètre à prisme ou à réseau.)

A2.2 Savoir-faire expérimental

Scanné avec CamScanner

UN PEU D'HISTOIRE



427 av. J.-C.
Démocrite considère l'être comme un tout formé d'une infinité d'atomes.



1896
Becquerel découvre la radioactivité en observant l'émission de rayonnements par des sels d'uranium.



1898
Pierre et Marie Curie isolent, à partir de l'uranium, deux éléments radioactifs : le polonium et le radium.



1900
Planck postule que les échanges d'énergie entre la matière et les ondes électromagnétiques sont quantifiés.



1903
Rutherford explique la nature de la radioactivité: il établit avec Soddy la théorie des réactions nucléaires.



La découverte de la radioactivité

La radioactivité fut découverte en 1896 par Becquerel, qui travaillait sur le rayonnement X, que Röntgen avait découvert par hasard. Becquerel, suivant une suggestion de Poincaré, cherchait à savoir si les corps fluorescents émettaient un rayonnement capable d'impressionner une plaque photographique à travers un papier noir. Il fit ses expériences avec du sel d'uranium qu'il exposa au soleil pour le rendre fluorescent; mais un jour, par manque de soleil, il laissa par hasard, au voisinage d'une plaque photographique, des composés d'uranium; il constata que la plaque était impressionnée. Il supposa alors, après diverses expériences, qu'il s'agissait d'une propriété spécifique de l'uranium et de ses composés; c'était donc une propriété atomique. Il admit que l'uranium émettait des rayonnements particuliers et les appela rayons uraniques. La radioactivité était découverte. Dès lors, un vaste domaine d'investigation s'offrait à l'exploration des physiciens; deux nouvelles voies de recherches s'ouvraient : le rayonnement X émis par le tube de Crookes et les rayons uraniques. Ce fut l'œuvre de deux groupes de savants : le premier comprenait Thomson et Rutherford, le second, Becquerel, P. et M. Curie.

Si les expériences de Becquerel restaient qualitatives, Marie Curie quant à elle entreprit des mesures quantitatives en se référant à l'ionisation que produisent dans l'air ces rayonnements; elle put ainsi montrer, en même temps que Schmidt en Allemagne, que le thorium émettait lui aussi des rayonnements. Dès 1898, avec son mari Pierre, elle annonçait la présence d'un nouvel élément, le polonium ($Z = 84$), puis ensuite, avec Bémont, l'existence du radium. C'est alors qu'elle proposa le nom de *radioactivité* au phénomène découvert par Becquerel. De nombreuses expériences furent entreprises pour découvrir les lois de cette radioactivité; on caractérisa très vite les rayonnements α (Rutherford en 1899), β et γ. Mais il fallut attendre 1934 pour qu'Irène et Frédéric Joliot-Curie mettent en évidence la radioactivité artificielle et un nouveau mode de désintégration, l'émission β^+.

A partir de 1934, Fermi (1901-1954) créa un très grand nombre d'isotopes radioactifs et développa, en 1936, la théorie du neutrino, particule dont l'existence avait été postulée par Pauli dès 1931. Il participa au projet *Manhattan* de la première pile atomique qui diverga en 1942 à Chicago.

Scanné avec CamScanner



1905
Einstein associe les photons aux quanta de Planck, élabore la théorie de la relativité et énonce la formule d'équivalence de la masse et de l'énergie.



1913
Bohr perfectionne le modèle planétaire de l'atome et donne une interprétation du spectre de l'hydrogène en postulant que l'énergie de l'atome est quantifiée.



1930-1932
Bothe (ci-dessus) en Allemagne, Chadwick en Grande-Bretagne, I. et F. Joliot-Curie en France, conduisent des expériences qui amènent à la découverte du neutron.



1932
Chadwick découvre le neutron.





1934
Irène et Frédéric Joliot-Curie découvrent la radioactivité artificielle.



1938
Hahn et Strassmann formulent la théorie de la fission de l'uranium.



1939
Halban, F. Joliot et Kowarski démontrent que la fission de l'uranium peut constituer une réaction en chaîne et déposent un brevet sur la production d'énergie nucléaire.



1942
Fermi fait diverger la première pile « atomique » à Chicago.

Scanné avec CamScanner

19 SPECTROSCOPIE. NIVEAUX D'ÉNERGIE DANS LES ATOMES

La spectroscopie, dont l'objet est l'étude et l'interprétation des spectres, constitue une branche très importante de la physique. Elle a permis des progrès considérables dans la connaissance de l'infiniment petit (structure de l'atome) et de l'infiniment grand (les astres et les étoiles).

19.1 étude expérimentale

19.1.1 spectres continus d'émission

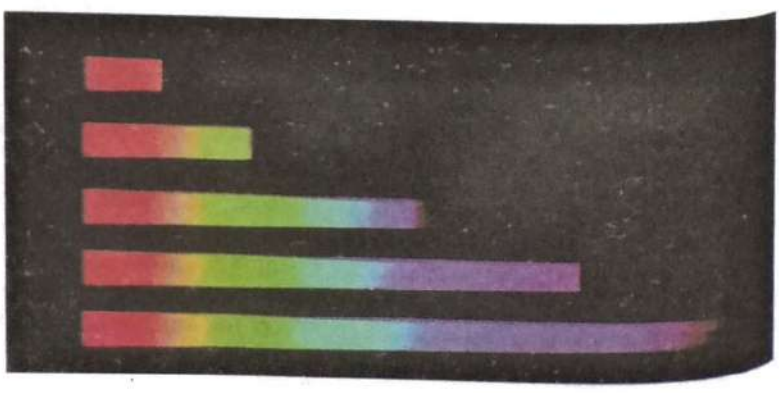
La lumière émise par tout solide ou liquide porté à l'incandescence (filament d'une lampe, charbons d'un arc électrique, etc.) est une lumière complexe formée d'une infinité de raies spectrales juxtaposées, dont les longueurs d'onde sont extrêmement voisines : son spectre est *continu*.

Élevons la température d'un corps, par exemple celle du filament de la lampe d'un projecteur de diapositives, en augmentant progressivement la tension d'alimentation. A l'œil nu, nous constatons qu'il présente les couleurs successives suivantes :

— à 500 °C, rouge naissant;
— à 700 °C, rouge sombre;
— à 1 100 °C, orangé;
— à 1 300 °C, blanc;
— à 1 400 °C, blanc éblouissant.

A l'aide d'un spectroscope analysons la lumière produite : le spectre continu est d'abord rouge, puis il évolue progressivement vers le violet et augmente d'intensité à mesure que la température croît (*photo* 1).
Le Soleil et les étoiles donnent un spectre continu qui dépend essentiellement de leur température de surface (voir *paragraphe* 19.6).

• **Un gaz à pression élevée, un liquide ou un solide, quand ils sont chauffés, émettent un rayonnement continu.**



1. ***Spectres d'émission successifs d'un corps porté à des températures croissantes. On assiste à la naissance progressive des couleurs : rouge, jaune, vert, bleu, violet; parallèlement, l'intensité lumineuse du spectre augmente.***

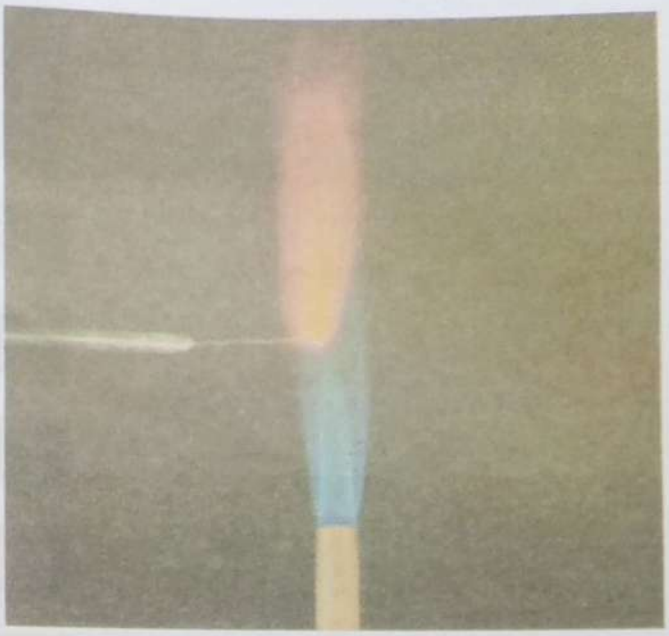
Scanné avec CamScanner

19.1.2 spectres de raies d'émission

Trempons un fil de platine dans une solution saline d'un métal alcalin appartenant à la première colonne de la classification périodique des éléments, puis introduisons-le dans la flamme d'un bec Bunsen; la flamme prend une couleur caractéristique : jaune pour le sodium (*photo* 2), rouge pourpre pour le potassium, rouge pour le lithium. C'est un moyen simple pour caractériser certains cations en solution.

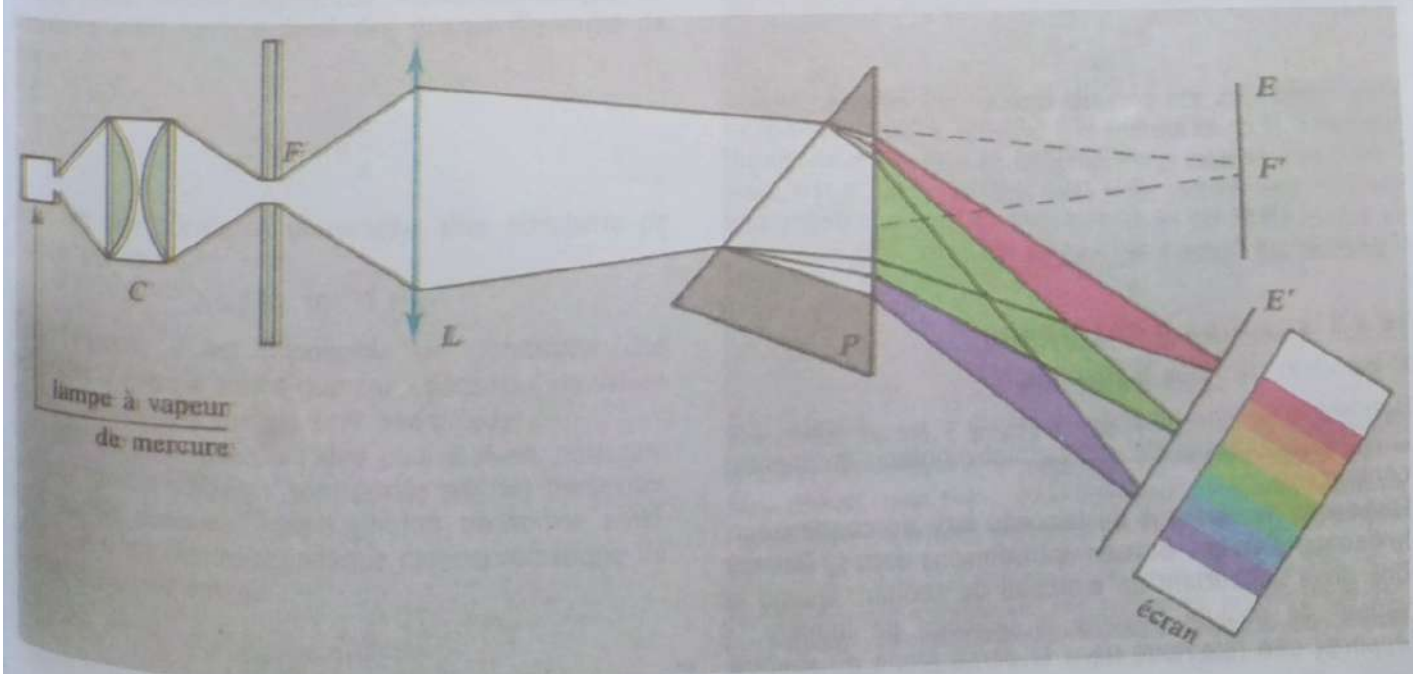
Observons le spectre de la lumière émise : nous remarquons des **raies** intenses (jaune pour le sodium, rouge pourpre pour le potassium, etc.) se détachant sur un fond de spectre continu correspondant à celui de la flamme du bec Bunsen.

Dans l'expérience de la figure 3, nous analysons le spectre d'une lampe à vapeur de mercure : il est constitué par une série de raies colorées brillantes, fines et plus ou moins intenses, se détachant sur fond noir (*photo* 4 b). Les principales raies ont pour longueur d'onde : 577 nm (jaune); 546 nm (vert); 492 nm (bleu); 436 nm (indigo); 405 nm (violet).



2. *Un fil de platine, soudé sur une tige de verre, a été chauffé jusqu'à ce qu'aucune coloration ne persiste. Une fois trempé dans une solution de chlorure de sodium, on le place au sommet du cône bleu de la flamme d'un bec Bunsen : la flamme prend une coloration jaune orange, caractéristique de l'élément sodium.*

▼ 3. *Analyse de la lumière emise par une lampe à vapeur de mercure.*



Scanné avec CamScanner

4. *Spectres d'émission :*

a. *de l'hydrogène:*

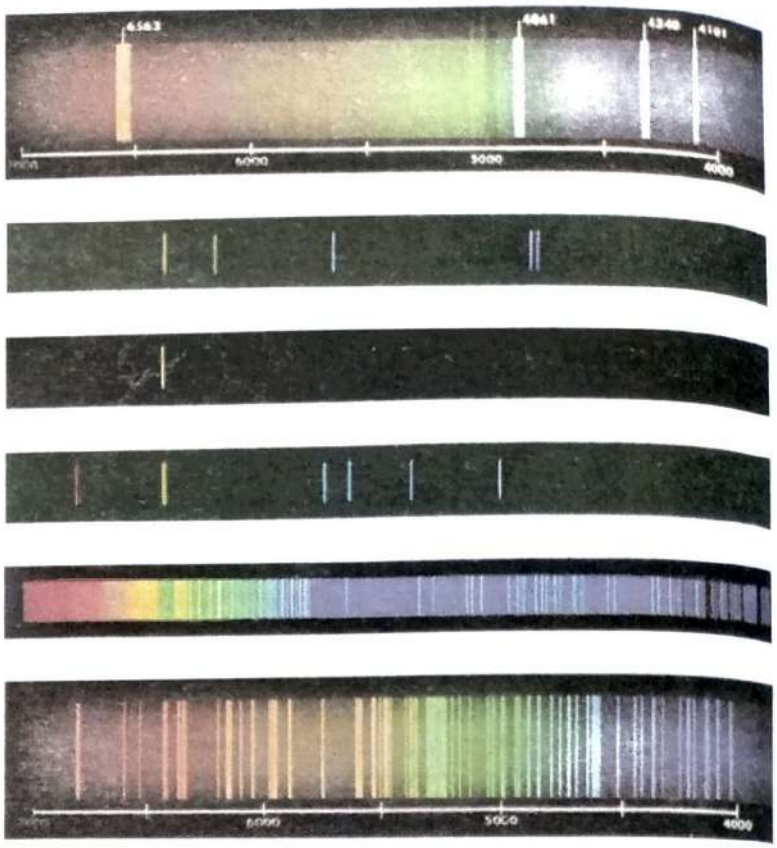
b. *du mercure:*

c. *du sodium:*

d. *de l'hélium:*

e. *du fer;*

f. *de l'uranium 238.*



Une lampe à vapeur de sodium donne un spectre comportant une raie très intense, de longueur d'onde 589 nm (*photo* 4 c).

De même, l'analyse du spectre d'une lampe à hydrogène donne des raies dont les quatre principales sont (*photo* 4 a) :

H_α, 656 nm (rouge); H_β, 486 nm (bleu)

H_γ, 434 nm (indigo); H_δ, 410 nm (violet).

• Le spectre d'un gaz à haute température et à basse pression présente des raies; le gaz émet un rayonnement uniquement pour certaines fréquences bien spécifiques, caractéristiques des atomes émetteurs.

monochromatique. Elle présente toujours une certaine « largeur spectrale », et on lui attribue une longueur d'onde moyenne.

D'autre part, certains spectrographes ne sont pas suffisamment dispersifs pour séparer deux raies voisines. Ainsi, la raie jaune du sodium est en fait un doublet dont les longueurs d'onde sont respectivement égales à 589,0 nm et 589,6 nm.

19.1.3 spectres d'absorption

1. Spectres de raies d'absorption

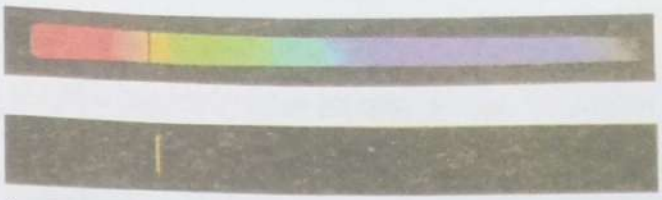
Reprenons le montage de la figure 3 en utilisant une lampe à incandescence, qui permet d'obtenir un spectre continu.

Disposons, au-dessous du faisceau issu du condenseur, la flamme d'un bec Bunsen. Introduisons dans la flamme une grille supportant un morceau de sodium. Quand la vapeur de sodium traverse le faisceau de lumière, *il apparaît une raie noire dans la partie jaune du spectre.*

Scanné avec CamScanner

Une radiation jaune a donc été absorbée. Nous observons un **spectre d'absorption** qui comporte une seule raie d'absorption (noire) (*photo* 5). *La longueur d'onde de la raie absorbée est précisément égale à celle de la raie d'émission* (*photo* 4). Nous reviendrons plus en détail sur cette expérience dans le paragraphe 19.5.

• **Un gaz, à basse pression et à température moyenne, s'il est situé entre l'observateur et une source de rayonnement continu, absorbe certaines radiations, produisant ainsi dans le spectre des raies d'absorption. Ce gaz absorbe les mêmes radiations qu'il serait capable d'émettre s'il était très chaud. Ce phénomène porte le nom de renversement des raies.**



5. *Spectres d'absorption (en haut) et d'émission (en bas) du sodium.*

2. Spectres de bandes d'absorption

Dans le montage de la figure 9 du chapitre 18, interposons une cuve à eau sur le trajet de la lumière blanche émise par la lampe du rétroprojecteur. La dispersion de la lumière est assurée par un réseau placé contre l'objectif. Versons dans la cuve une solution de chlorophylle obtenue en broyant des feuilles d'épinard dans de l'alcool. Le spectre présente de *larges bandes sombres* dans le rouge, le bleu et le violet (*photo* 6). Ce que nous observons est le **spectre d'absorption** d'une solution de chlorophylle.

Le spectre d'absorption est caractéristique de la substance traversée par la lumière. Les solutions donnent, en général, des spectres de bandes tandis que les gaz présentent fréquemment des spectres de raies.



6. *Spectre d'absorption d'une solution de chlorophylle.*

19.2 interprétation des spectres

19.2.1 le photon

En 1900, Max Planck fut conduit à postuler la **quantification** de l'énergie transportée par les ondes lumineuses, ou plus généralement par les ondes électromagnétiques. D'après cette théorie, l'énergie électromagnétique ne peut s'échanger que par « paquets », ou **quanta**, d'énergie. A une onde électromagnétique monochromatique de fréquence ν on associe ainsi des quanta d'énergie de valeur :

$$\mathcal{E} = h\nu = h\frac{c}{\lambda},$$

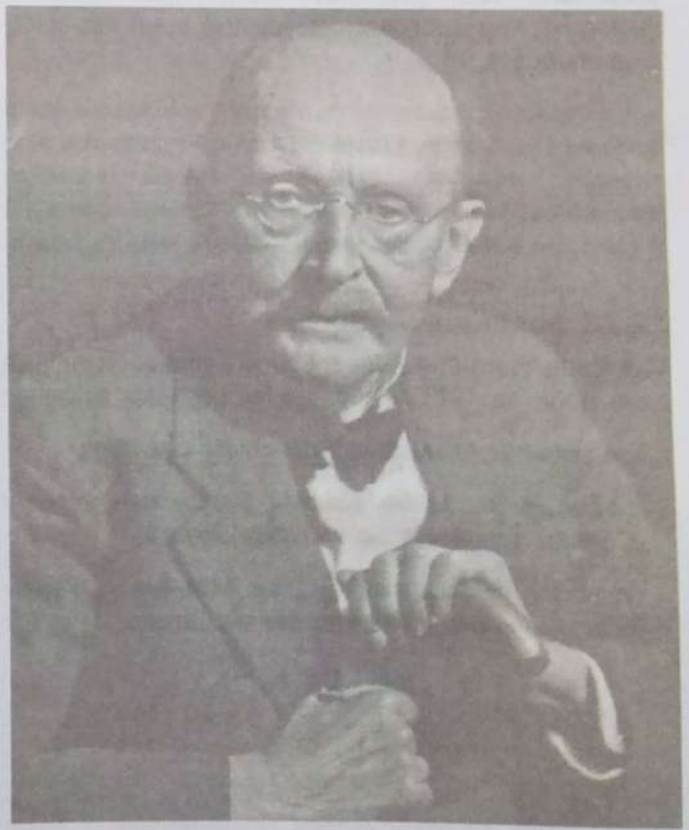
où h est une constante universelle, dite *constante de Planck*, qui vaut :

$$h = 6{,}63.10^{-34}\ \text{J.s.}$$

Selon Planck, il est impossible de considérer des échanges d'énergie autres que par « paquets » de valeur $h\nu$; les variations d'énergie sont *quantifiées*.

En 1905, Einstein poussa l'idée plus loin en postulant que ces quanta d'énergie sont portés par des particules qu'il appela **photons**. Chaque photon transporte ainsi, pour une onde électromagnétique monochromatique de fréquence ν, une énergie :

$$\mathcal{E} = h\nu = h\frac{c}{\lambda}.$$



Max Planck (1858-1947). *Pour expliquer l'échec de la théorie classique du rayonnement thermique, ce physicien allemand fut conduit à proposer, en* 1900, *que les échanges d'énergie entre la matière et les ondes électromagnétiques ne peuvent se faire que de manière discontinue, par grains, ou quanta d'énergie. Ce postulat constitue véritablement la base du développement de la physique moderne. Prix Nobel en* 1918.

Scanné avec CamScanner

Les photons ont une vitesse de propagation dans le vide égale à :

$$c = 300\,000 \text{ km.s}^{-1}.$$

Cela conduit à leur attribuer une masse nulle (voir *chap.* 20).

19.2.2 émission ou absorption d'énergie par un atome

L'émission (ou l'absorption) d'un rayonnement monochromatique de longueur d'onde λ par un atome correspond à celle d'un photon d'énergie égale à $h\frac{c}{\lambda}$.

Autrement dit, *l'émission ou l'absorption d'énergie sous forme de rayonnement par un atome est quantifiée.*

Les variations d'énergie correspondant aux spectres, dans le domaine du visible ou proche du visible (UV ou IR), sont de l'ordre de l'électronvolt (eV): par exemple, pour $\lambda = 500$ nm :

$$\mathcal{E} = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = 2.5 \text{ eV}.$$

Ces variations sont du même ordre de grandeur que les variations d'énergie accompagnant les réactions chimiques, et nous savons que celles-ci n'affectent que les électrons périphériques des atomes.

Par ailleurs, aux atomes des éléments d'une même colonne du tableau de classification périodique et présentant des structures électroniques externes analogues, correspondent des spectres ayant des analogies marquées.

- **L'émission ou l'absorption de photons, dont l'énergie est de quelques électronvolts, s'accompagne d'une modification de la structure électronique *externe* de l'atome (transitions électroniques) et d'une variation de l'énergie potentielle d'interaction des électrons externes avec le reste de l'atome.**

19.2.3 postulats de Bohr

Une étude approfondie des spectres d'émission conduisit Niels Bohr, en 1913, à énoncer les postulats suivants :

- **Les variations d'énergie de l'atome sont quantifiées.**
- **L'atome ne peut exister que dans certains états d'énergie bien définis, caractérisés par un *niveau d'énergie*.**
- **Un photon de fréquence $\nu_{n,p}$ est émis lorsque l'atome effectue une transition entre deux niveaux d'énergie $\mathcal{E}_n$ et $\mathcal{E}_p$:**

$$h\nu_{n,p} = \mathcal{E}_n - \mathcal{E}_p \quad (\mathcal{E}_n > \mathcal{E}_p).$$

APPLICATION 1

Dans le vide, la puissance d'un faisceau lumineux de lumière jaune de longueur d'onde $\lambda = 589$ nm est $\mathcal{P} = 1$ mW. Calculer le nombre de photons traversant, chaque seconde, une section du faisceau.

Chaque seconde le faisceau transporte une énergie de $1 \text{ mJ} = 10^{-3}$ J.

L'énergie d'un photon est :

$$\mathcal{E} = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

$$= \frac{6.62.10^{-34} \times 3.10^{8}}{589.10^{-9}} = 3.37.10^{-19} \text{ J}.$$

Le nombre de photons recherché est donc :

$$n = \frac{10^{-3}}{3.37.10^{-19}} = 3.10^{15}.$$



Niels Bohr (1885-1962). *Ce physicien danois perfectionna, en 1913, le modèle planétaire proposé par Rutherford et donna une interprétation du spectre de l'hydrogène en postulant que l'énergie de l'atome était quantifiée. Il participa ensuite activement au développement de la mécanique quantique et de la physique nucléaire. Son influence reste très grande, notamment en ce qui concerne les interprétations philosophiques des nouveaux concepts introduits par la mécanique quantique. Prix Nobel en* 1922.

Scanné avec CamScanner

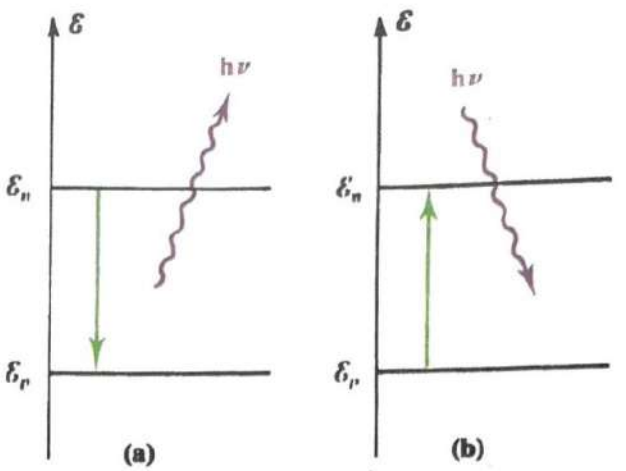
Ainsi, l'*émission d'un photon* d'énergie $h\nu_{n,p}$ se produit lorsque l'atome, passant d'un niveau d'énergie supérieur à un niveau d'énergie inférieur ($\mathcal{E}_n > \mathcal{E}_p$), perd de l'énergie sous forme de rayonnement (*fig.* 7 a).

Au contraire, l'*absorption d'un photon* d'énergie $h\nu_{n,p}$ correspond pour l'atome au passage d'un niveau d'énergie inférieur $\mathcal{E}_p$ à un niveau supérieur $\mathcal{E}_n$ (*fig.* 7 b).

Il est par ailleurs impossible qu'un photon d'énergie $h\nu$ supérieure à $\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_p$ cède une partie de son énergie et reparte avec l'excédent. Ne sont absorbés que les photons dont l'énergie *correspond exactement à une transition possible* entre deux niveaux d'énergie de l'atome.

La discontinuité du spectre de raies atomiques traduit donc l'existence de niveaux d'énergie dans l'atome et la quantification de l'énergie émise ou absorbée par un atome.

Remarque : Certaines transitions ont des probabilités extrêmement faibles; on ne les voit jamais se produire habituellement. On dit qu'elles sont « interdites ».



7 a. *L'atome passe d'un niveau d'énergie $\mathcal{E}_n$ à un niveau inférieur $\mathcal{E}_p$; il y a émission d'un photon d'énergie :*

$$\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_p = h\nu.$$

b. *L'atome absorbe un photon d'énergie* $h\nu$ *et passe d'un niveau $\mathcal{E}_p$ à un niveau supérieur $\mathcal{E}_n$ tel que :*

$$\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_p = h\nu.$$

APPLICATION 2

En 1908, Ritz montra que, pour un même spectre, la fréquence d'une raie pouvait être obtenue par différence entre les fréquences de deux autres raies. Par exemple, pour l'atome d'hydrogène, on a trouvé les fréquences :

$$\nu_1 = 0{,}457.10^{15}\ \text{Hz},$$

$$\nu_2 = 2{,}468.10^{15}\ \text{Hz},$$

$$\nu_3 = 2{,}925.10^{15}\ \text{Hz},$$

soit : $\nu_3 - \nu_2 = 0{,}457.10^{15}\ \text{Hz} = \nu_1$.

Les postulats de Bohr permettent-ils d'expliquer cette propriété?

Appliquons les postulats de Bohr. Une transition d'un niveau $\mathcal{E}_n$ vers un niveau $\mathcal{E}_p$ inférieur s'accompagne de l'émission d'un photon $h\nu_1$:

$$\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_p = h\nu_1.$$

De même, pour l'émission d'un photon de fréquence ν_2 :

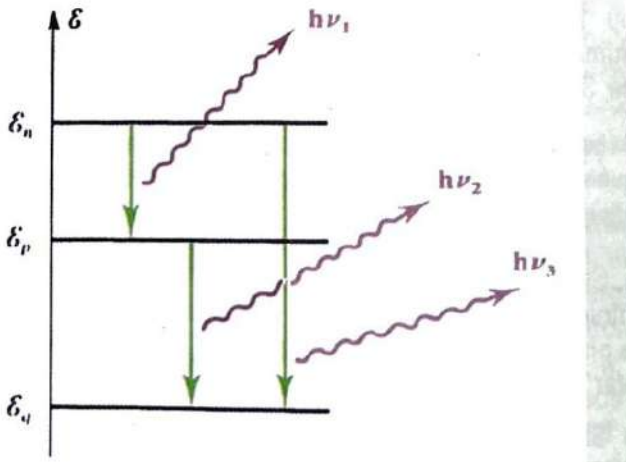
$$\mathcal{E}_p - \mathcal{E}_q = h\nu_2.$$

Dans le cas d'une transition directe de $\mathcal{E}_n$ vers $\mathcal{E}_q$, nous observons l'émission d'un photon de fréquence ν_3 :

$$\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_q = h\nu_3.$$

Par différence, nous obtenons :

$$\nu_1 = \nu_3 - \nu_2.$$



Ce résultat, découvert expérimentalement par Ritz et appelé parfois *principe de combinaison*, est de fait une preuve expérimentale de l'existence de niveaux d'énergie atomiques quantifiés. L'observation de spectres discontinus ne pouvait *seule* permettre de conclure à l'existence de niveaux d'énergie ayant des valeurs déterminées. Les postulats émis par Bohr ont permis d'expliquer simplement les résultats de Ritz.

Scanné avec CamScanner

19.3 application à l'atome d'hydrogène

19.3.1 énergie de l'atome d'hydrogène

L'atome d'hydrogène est l'atome le plus simple. Il possède un seul électron en mouvement autour du noyau, constitué par un seul proton. L'énergie attribuée à l'atome englobe :

— l'*énergie potentielle* $\mathcal{E}_p$ d'interaction électrostatique électron-noyau;
— l'*énergie cinétique* $\mathcal{E}_c$ de l'électron dans son mouvement autour du noyau.

Le système électron-noyau a ainsi une énergie totale :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_p + \mathcal{E}_c .$$

Par convention, l'énergie potentielle de l'atome ionisé est choisie nulle, l'électron se trouvant alors à une distance r infiniment grande du noyau : $\mathcal{E}_{p_\infty} = 0$.

Pour ioniser l'atome ($\mathcal{E}_{p_\infty} = 0$), c'est-à-dire séparer l'électron du noyau sans lui communiquer de vitesse ($\mathcal{E}_c = 0$), il faut fournir un travail W positif. Ce travail s'ajoute à l'énergie $\mathcal{E}$ que possédait l'atome, pour donner l'énergie $\mathcal{E}_\infty$ de l'atome ionisé :

$$\mathcal{E} + W = \mathcal{E}_\infty = \mathcal{E}_{p_\infty} + \mathcal{E}_c = 0;$$

d'où, avec $W > 0$: $\mathcal{E} < 0$.

Si on adopte par convention $\mathcal{E}_{p_\infty} = 0$, l'énergie $\mathcal{E}$ de l'atome est négative.

L'étude des spectres d'émission de l'atome d'hydrogène a permis de trouver les valeurs possibles de l'énergie $\mathcal{E}$, soit, en eV :

$$\mathcal{E}_n = -\frac{13{,}6}{n^2},$$

où n, appelé *nombre quantique principal*, définit le numéro de la couche occupée par l'électron (voir cours de Seconde).

• Les valeurs de l'énergie de l'atome d'hydrogène sont quantifiées (discrètes); elles dépendent du nombre quantique principal n.

• Si $n = 1$, $\mathcal{E}_1 = -13{,}6$ eV : c'est le niveau d'énergie minimal, ou *niveau fondamental* correspondant à l'état le plus stable de l'atome d'hydrogène; aussi l'appelle-t-on *état stationnaire fondamental*.

• Si $n > 1$, $-13{,}6 \text{ eV} < \mathcal{E}_n < 0$: l'atome est dans l'un des *états excités*. L'énergie d'un atome excité est supérieure à celle de l'atome dans l'état fondamental.

• Si n est infini, $\mathcal{E}_\infty = 0$: l'atome est dans l'*état ionisé;* conformément à la convention adoptée, l'énergie de l'atome ionisé est nulle (à r correspond $n \longrightarrow \infty$).

Remarque : On notera qu'à mesure que n augmente, les valeurs possibles de l'énergie sont de plus en plus resserrées.

Dans l'état fondamental, l'électron est, en moyenne, plus proche du noyau que dans les états excités.

Un atome excité a tendance à revenir dans son état fondamental : il le fait par des transitions électroniques qui s'accompagnent d'une émission de photons. Ce retour à l'état fondamental peut se faire par étapes. Ainsi, une transition depuis un état excité $\mathcal{E}_n$ vers un état $\mathcal{E}_p$ ($\mathcal{E}_p < \mathcal{E}_n$) s'accompagne de l'émission d'un photon d'énergie :

$$h\nu_{n,p} = \mathcal{E}_n - \mathcal{E}_p = -13{,}6\left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right],$$

avec $p < n$. Cette valeur (en eV) représente aussi l'énergie qu'il faut fournir à l'atome pour l'exciter du niveau $\mathcal{E}_p$ au niveau supérieur $\mathcal{E}_n$.

Énergie d'ionisation

Considérons un atome d'hydrogène se trouvant dans son état fondamental; son énergie est $\mathcal{E}_1 = -13{,}6$ eV. Pour passer à l'état ionisé sans communiquer de vitesse à l'électron, il faut que l'atome atteigne le niveau d'énergie zéro (électron au repos infiniment éloigné du noyau); il faut donc lui fournir l'énergie $-\mathcal{E}_1 = 13{,}6$ eV. Cette énergie, notée $\mathcal{E}_i$, est appelée **énergie d'ionisation**.

19.3.2 séries de raies d'émission

L'ensemble des raies qui constituent le spectre d'émission de l'atome d'hydrogène peut être classé en séries, une **série** correspondant aux transitions qui aboutissent au même niveau d'énergie.
Historiquement, la première série, découverte par Balmer (1885), comporte les raies des transitions aboutissant au niveau d'énergie $\mathcal{E}_2$ ($p = 2$), soit :

$$h\nu = -13{,}6\left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{4}\right], \quad \text{avec } n > 2.$$

Cette série comporte en particulier les raies visibles :

H_α (656,3 nm), pour $n = 3$;
H_β (486,1 nm), pour $n = 4$;
H_γ (434 nm), pour $n = 5$;
H_δ (410,2 nm), pour $n = 6$.

Pour les grandes valeurs de n, les raies se resserrent et leurs intensités s'atténuent. Pour n infini, on obtient $\lambda = 364$ nm : c'est la longueur d'onde limite de la série de Balmer.

D'autres séries de raies ont été découvertes :

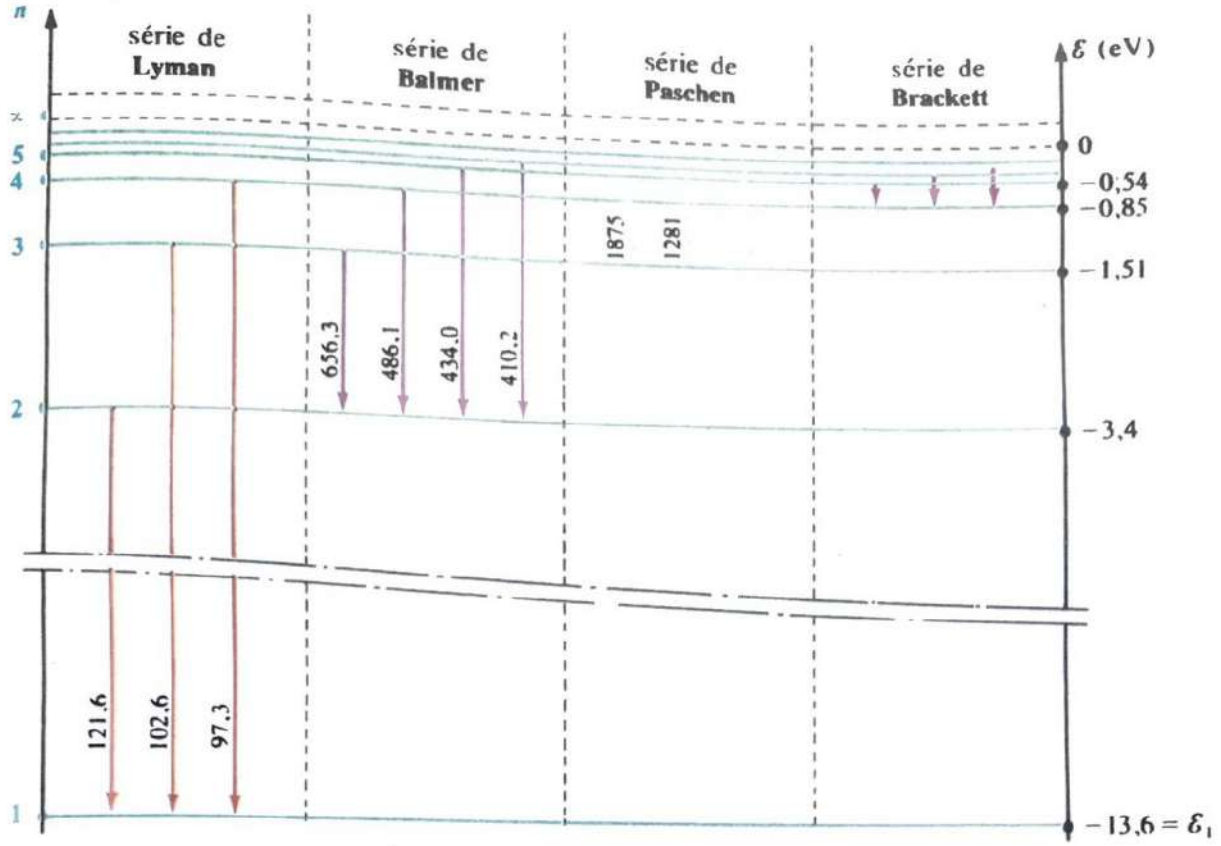
— série ultraviolette de Lyman (1906) : retour à l'état fondamental $\mathcal{E}_1$;
— série infrarouge de Paschen (1909) : retour vers $\mathcal{E}_3$;
— série infrarouge de Brackett (1922) : retour vers $\mathcal{E}_4$;
— série infrarouge de Pfund (1924) : retour vers $\mathcal{E}_5$.

L'étude de ces séries de raies a permis à Balmer puis à Rydberg de montrer que la longueur d'onde des radiations émises obéissait à la relation empirique :

$$\frac{1}{\lambda_{n,p}} = R_H\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

où p et n sont des nombres entiers ($n > p$) et R_H, la *constante de Rydberg* ($R_H = 1{,}096\,776 . 10^7 \text{ m}^{-1}$).

Scanné avec CamScanner



8. Diagramme d'énergie (simplifié) de l'atome d'hydrogène (longueurs d'onde en nanomètres).

La longueur d'onde des radiations fut ensuite reliée à l'énergie du photon :

$$h\nu_{n,p} = h\frac{c}{\lambda_{n,p}} = hcR_H\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{n^2}\right).$$

Le calcul donne $hcR_H = 13{,}6$ eV et, comme le veulent les postulats de Bohr, on obtient bien, en eV :

$$\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_p = h\nu_{n,p} = -13{,}6\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{p^2}\right).$$

19.3.3 diagramme d'énergie

Nous pouvons schématiser par un diagramme les différents niveaux quantifiés d'énergie de l'atome d'hydrogène (*fig.* 8).

Les valeurs discrètes (c'est-à-dire dont la succession est discontinue) des niveaux stationnaires d'énergie sont indiquées sur l'axe de droite et correspondent aux différentes valeurs de n précisées sur l'axe de gauche. Les flèches verticales indiquent les transitions électroniques possibles et les longueurs d'onde (en nm) des radiations émises. Nous voyons que les raies de la série de Lyman correspondent à des transitions aboutissant au niveau fondamental $\mathcal{E}_1$ ($p=1$), celles de la série de Balmer au niveau $\mathcal{E}_2$ ($p=2$), etc.

19.4 spectres lumineux et niveaux d'énergie des atomes

Les spectres lumineux des autres atomes sont beaucoup plus complexes que celui de l'hydrogène; les raies caractéristiques de l'élément sont plus nombreuses.

Pour un atome donné et pour rendre compte de toutes les raies observées, on essaie de construire un système de niveaux d'énergie tel que toute raie spectrale observée corresponde à une transition entre deux niveaux d'énergie.

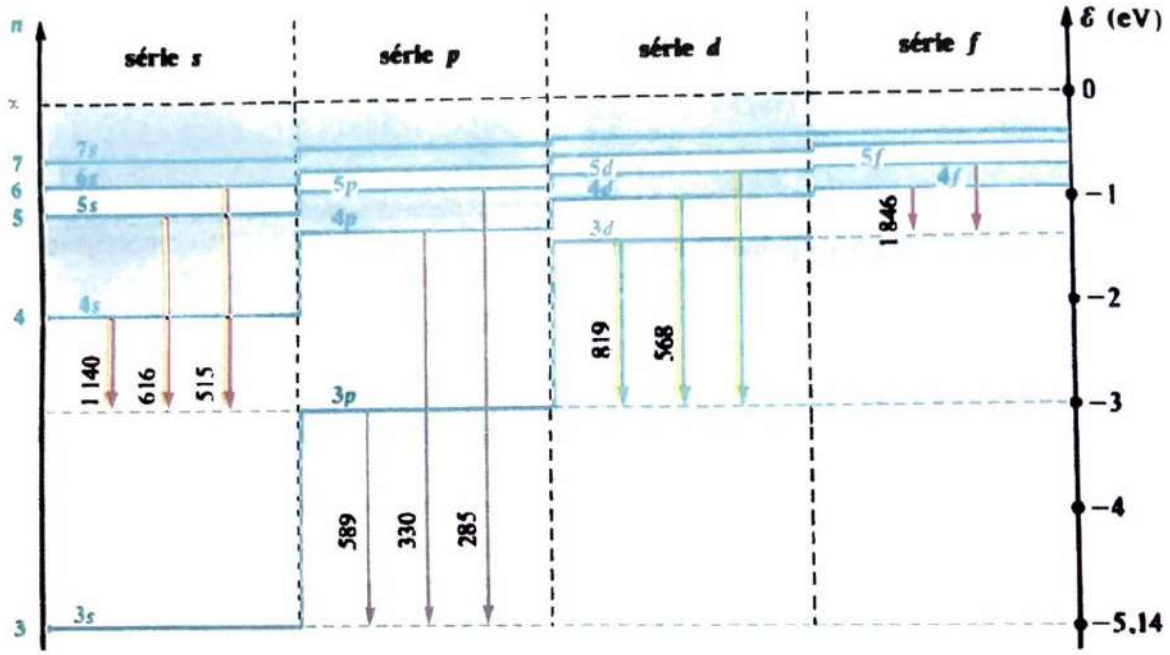
On a représenté sur les diagrammes 9 et 10 les niveaux d'énergie de l'atome de sodium et de l'atome de lithium, établis à partir de leurs spectres. Ces niveaux d'énergie, beaucoup plus complexes que ceux de l'atome d'hydrogène, sont caractérisés par des lettres (s, p, d, f) représentant des *nombres quantiques*. Les spectres optiques font intervenir les électrons externes. L'état de ces électrons ne peut pas être décrit par un seul nombre quantique n; il faut en introduire d'autres, qu'il est hors de notre propos d'étudier ici.

L'étude du spectre nous permet de préciser plus finement les niveaux d'énergie. Par exemple, pour le sodium, la radiation jaune correspondant à la transition $3p \longrightarrow 3s$ est constituée en fait de deux raies (un doublet) de longueurs d'onde voisines : 589 nm et 589,6 nm (raie D du sodium). On peut en conclure que le niveau $3p$ est dédoublé, la différence d'énergie correspondante étant égale à $\Delta(h\nu) = 0{,}003$ eV.

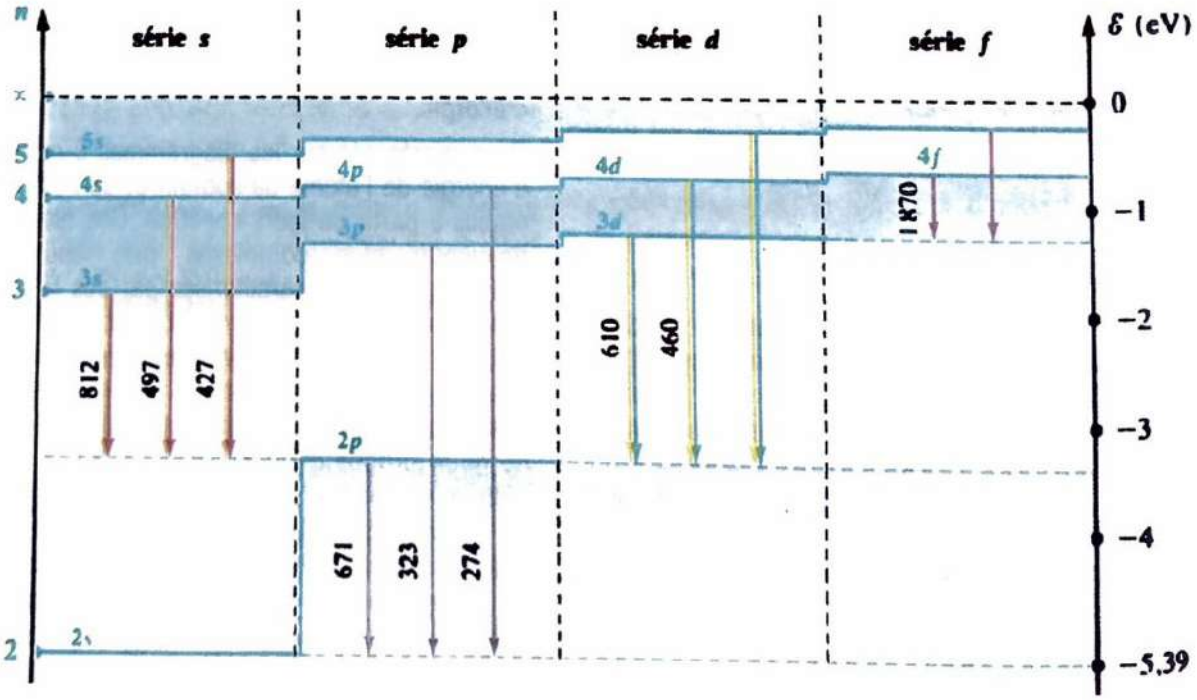
Scanné avec CamScanner

D'autre part, certaines raies ne sont jamais observées, par exemple la raie correspondant à la transition $4s \longrightarrow 3s$. Cette transition est interdite; les nombres quantiques de deux niveaux doivent satisfaire à certaines conditions pour qu'une transition soit possible entre ces niveaux.

Lorsqu'on fait passer l'atome de sodium de son état fondamental $3s$ à son état excité $5s$, cet atome pourra *se désexciter par étapes* : par exemple, en émettant un photon de longueur d'onde 616 nm correspondant à la transition $5s \longrightarrow 3p$, puis un autre photon de longueur d'onde 589 nm correspondant à la transition $3p \longrightarrow 3s$. Enfin, nous constatons que l'énergie d'ionisation de l'atome de sodium est de 5,14 eV, apport d'énergie nécessaire à la transition de l'état fondamental à l'état ionisé; nous avons là l'énergie de première ionisation, qui correspond au départ de l'électron le plus externe de l'atome de sodium.

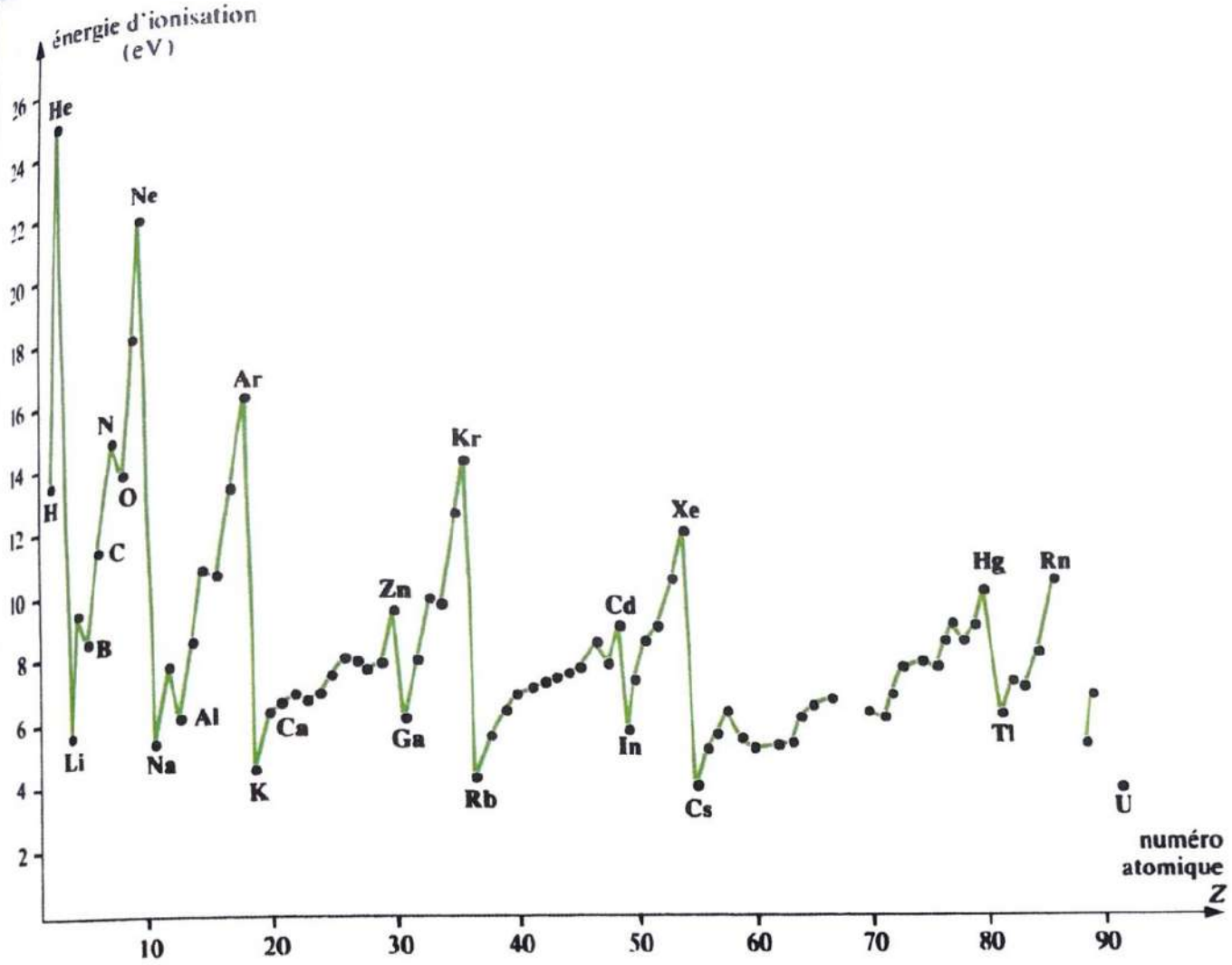


9. ***Diagramme d'énergie (simplifié) de l'atome de sodium.***



10. ***Diagramme d'énergie (simplifié) de l'atome de lithium.***

Scanné avec CamScanner



11. *Énergie de première ionisation des différents éléments chimiques en fonction de leurs nombres de charges Z.*

Le diagramme d'énergie, construit à partir des spectres lumineux, est un puissant outil d'investigation pour mieux connaître la structure des atomes et leurs propriétés chimiques. Ainsi, les énergies de première ionisation sont en relation étroite avec les propriétés chimiques des éléments. Sur la figure 11, on a porté l'énergie d'ionisation en fonction du *nombre de charges Z* (encore appelé *numéro atomique*) de l'élément. Il est frappant de constater une périodicité comparable à celle qui s'observe dans les propriétés chimiques des éléments. Dans toute colonne ou famille du tableau périodique, l'énergie diminue à mesure que les nombres de charges augmentent. Le caractère métallique se manifeste pour les éléments ayant une faible énergie d'ionisation.

Signalons encore que les spectres des différents ions d'un même atome sont différents entre eux mais, également, très différents du spectre de cet atome. Ainsi l'atome d'hélium He, l'ion He^+ et l'ion He^{2+} ont des spectres totalement différents. Le spectre de l'ion He^+ présente des raies analogues à celui de l'atome d'hydrogène, lequel possède, comme lui, un seul électron.

APPLICATION 3

L'énergie de première ionisation (énergie nécessaire pour arracher le premier électron) de l'atome d'hélium est égale à 24,6 eV.

1/ Quelle est l'énergie du niveau fondamental (on prendra comme référence le niveau d'énergie de première ionisation)?

2/ Un atome d'hélium se trouve dans un état excité d'énergie −21,4 eV. Quelle est la longueur d'onde de la radiation émise lors de la désexcitation de l'atome qui revient à son niveau fondamental?

1/ L'énergie du niveau fondamental est :

$$\mathcal{E}_1 = -24{,}6 \text{ eV}.$$

2/ Si $\mathcal{E}$ est l'énergie du niveau excité, l'atome va émettre, en se désexcitant, une radiation de fréquence ν telle que :

$$h\nu = \mathcal{E} - \mathcal{E}_1 = 24{,}6 - 21{,}4 = 3{,}2 \text{ eV};$$

d'où :
$$h\frac{c}{\lambda} = 3{,}2 \times 1{,}6.10^{-19} \text{ J},$$

soit :
$$\lambda = 387{,}9 \text{ nm} \quad \text{(radiation UV)}.$$

Scanné avec CamScanner

19.5 mécanisme d'absorption

Lorsqu'un photon de fréquence ν arrive, par exemple, dans un gaz ou une vapeur à l'état atomique, sous faible pression, que se passe-t-il? Supposons, pour simplifier, que les atomes sont tous dans leur état fondamental.

Premier cas : *l'énergie du photon est inférieure à l'énergie d'ionisation de l'atome* (*fig.* 12).

- Si la fréquence du photon correspond exactement à une transition possible entre le niveau fondamental et un niveau excité, autrement dit si l'énergie correspond exactement à une raie d'émission de l'atome, le photon peut être absorbé.
- Si l'énergie du photon ne correspond pas à une transition électronique possible, le photon n'est pas absorbé mais simplement diffusé, c'est-à-dire renvoyé avec la même énergie dans une direction *a priori* quelconque.

Nous sommes maintenant en mesure d'expliquer l'expérience du renversement de la raie *D* du sodium, présentée au paragraphe 19.1.3.

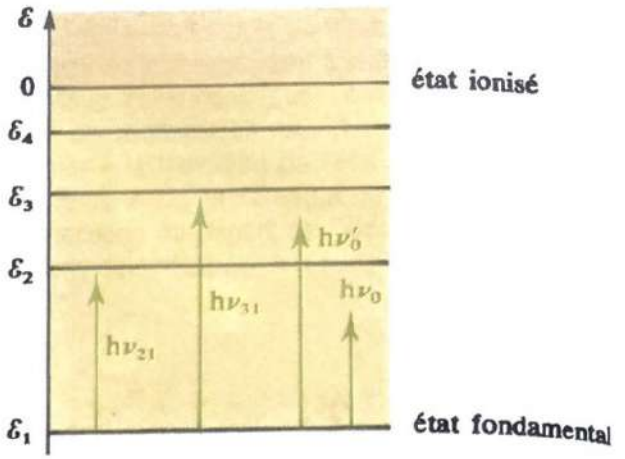
La source lumineuse, dont le spectre est continu, éclaire la vapeur de sodium dans une direction Δ. Les photons du spectre continu qui correspondent exactement à l'énergie de la raie *D* sont absorbés par la vapeur de sodium et excitent les atomes. Ces derniers, en se désexcitant, réémettent à la fréquence de la raie *D*; on pourrait alors ne pas comprendre pourquoi la raie *D* est éteinte. Il faut considérer que la lumière est réémise dans toutes les directions, et, comme nous observons dans la seule direction Δ, nous ne recueillons qu'une intensité lumineuse négligeable; nous percevons une raie sombre dans le spectre (*fig.* 13).

Second cas : *l'énergie du photon est supérieure à l'énergie d'ionisation.*

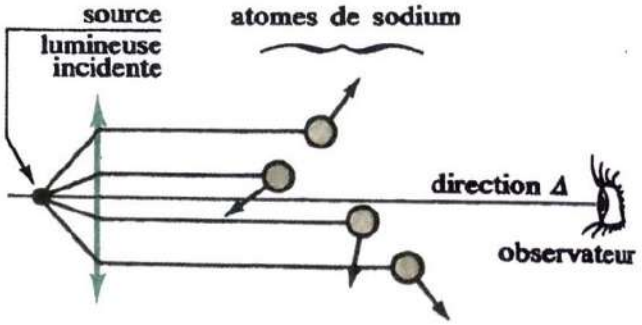
Le photon peut alors être absorbé, une partie de son énergie permettant l'ionisation de l'atome, le reste étant transféré sous forme d'énergie cinétique à l'électron éjecté. Ainsi, les photons d'énergie supérieure à 13,6 eV peuvent être absorbés par des atomes d'hydrogène.

Que se passe-t-il si l'atome est déjà excité? Prenons l'exemple d'un atome d'hydrogène dans l'état excité $\mathcal{E}_2 = -3{,}4$ eV. Pour ioniser cet atome il suffit de 3,4 eV (au lieu de 13,6 eV dans le cas d'un atome non excité). Envisageons un photon d'énergie 3,8 eV. Celui-ci va pouvoir être absorbé; l'atome excité sera ionisé, un électron étant éjecté avec une énergie cinétique de $3{,}8 - 3{,}4 = 0{,}4$ eV (*fig.* 14).

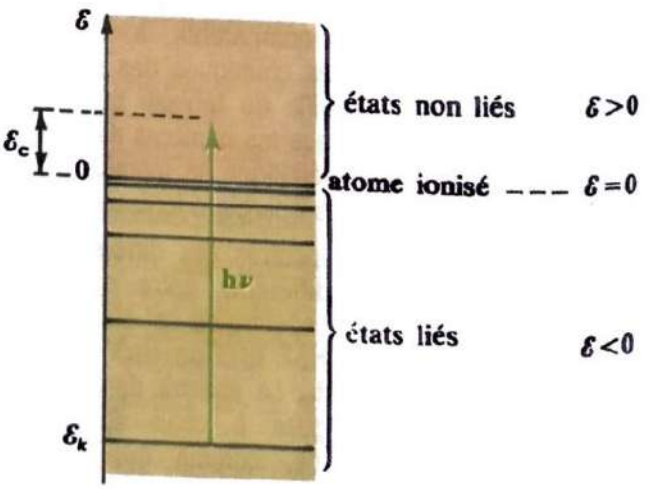
Ce phénomène constitue l'une des raisons pour lesquelles on obtient des spectres d'absorption continus.



12. *Les photons d'énergie $h\nu_{21} = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$ ou $h\nu_{31} = \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_1$ sont absorbés par l'atome; celui-ci, initialement dans son état fondamental $\mathcal{E}_1$, passe dans l'état excité $\mathcal{E}_2$ ou $\mathcal{E}_3$. En revanche, les photons d'énergie $h\nu_0$ et $h\nu'_0$, qui ne correspondent à aucune transition électronique, ne sont pas absorbés.*



13. *Absorption de la lumière par des atomes de sodium. La réémission de la raie D se fait dans des directions aléatoires, indépendantes de Δ.*



14. *Un atome, initialement dans un état $\mathcal{E}_k$ (état fondamental ou excité), absorbe un photon d'énergie $h\nu > |\mathcal{E}_k|$. Il est alors ionisé, un électron étant éjecté avec une énergie cinétique $\mathcal{E}_c$, telle que :*

$$\mathcal{E}_c = h\nu - |\mathcal{E}_k|.$$

Scanné avec CamScanner

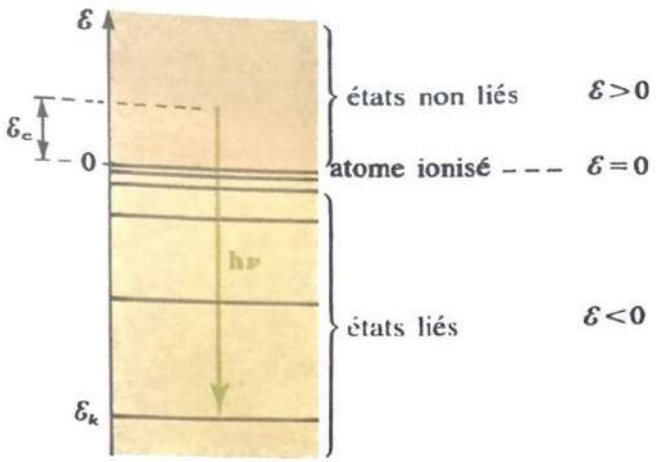
Remarque : Inversement, un atome ionisé peut capter un électron libre, d'énergie cinétique $\mathcal{E}_c$. L'atome se désexcite alors aussitôt vers un niveau d'énergie $\mathcal{E}_k$, par exemple. La diminution d'énergie du système ion-électron est (*fig.* 15) :

$$\mathcal{E}_c + |\mathcal{E}_k|,$$

car $\mathcal{E}_k < 0$. A cette variation correspond l'émission d'un photon de fréquence ν telle que :

$$h\nu = \mathcal{E}_c + |\mathcal{E}_k|.$$

L'énergie cinétique pouvant être quelconque, la longueur d'onde émise varie de façon continue. C'est l'une des raisons pour lesquelles on obtient des spectres d'émission continus.



15. ***Lorsqu'un atome ionisé absorbe un électron d'énergie cinétique $\mathcal{E}_c$, il se désexcite en émettant un photon de fréquence ν telle que :***

$$h\nu = \mathcal{E}_c + |\mathcal{E}_k|.$$

$\mathcal{E}_c$ étant quelconque, ν est quelconque.

APPLICATION 4

On considère des atomes d'hydrogène dans l'état fondamental $\mathcal{E}_1 = -13{,}6$ eV.

1/ On envoie sur ces atomes différents photons, d'énergies respectives :

δ (eV)	1,9	3,4	3,9	10,2	11,0	14,0

Quels sont les photons susceptibles d'être absorbés?

2/ On suppose maintenant que les atomes sont dans l'état correspondant à $\mathcal{E}_2 = -3{,}4$ eV. On envoie les mêmes photons; quels sont les photons susceptibles d'être absorbés?

1/ Les photons d'énergies respectives 1,9 eV, 3,4 eV et 3,9 eV ne sont pas absorbés car ces énergies sont inférieures à la première transition possible :

$$\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = (-3{,}4) - (-13{,}6) = 10{,}2 \text{ eV}.$$

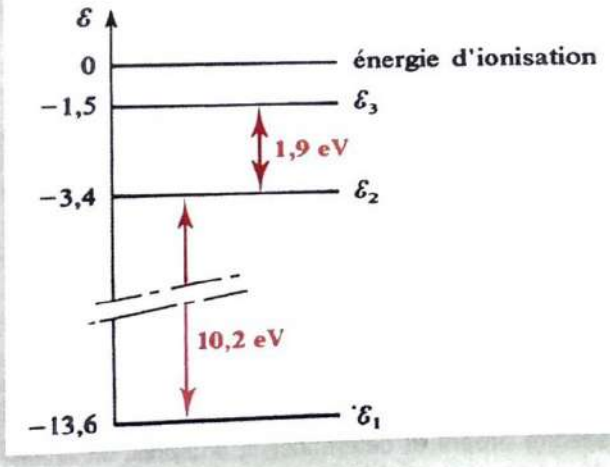
Le photon d'énergie 10,2 eV est susceptible d'être absorbé; l'atome d'hydrogène passe alors au niveau excité $\mathcal{E}_2$, et pourra réémettre cette fréquence.

Le photon d'énergie 11 eV n'est pas absorbé, car il ne correspond à aucune transition.

Enfin, le photon d'énergie 14 eV peut être totalement absorbé, 13,6 eV servant à l'ionisation et 0,4 eV étant communiqué sous forme d'énergie cinétique à l'électron éjecté.

2/ Le photon d'énergie 1,9 eV est absorbé, car il correspond à la transition :

$$\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_2 = (-1{,}5) - (-3{,}4) = 1{,}9 \text{ eV}.$$



Le photon d'énergie 3,4 eV peut être absorbé, car son énergie est égale à l'énergie d'ionisation de l'atome excité. L'énergie cinétique de l'électron éjecté sera nulle.

Tous les autres photons sont susceptibles d'être absorbés, car ils possèdent des énergies supérieures à 3,4 eV. Les électrons éjectés le seront avec des énergies cinétiques plus ou moins importantes.

Scanné avec CamScanner



16. *C'est par une analyse spectrale minutieuse que les astrophysiciens ont pu déterminer la température de surface du Soleil (qui est de l'ordre de 5600 K).*

19.6 application à l'astrophysique

Lorsqu'un corps vaporisé est formé de différents éléments chimiques, son spectre est complexe puisqu'il présente des raies caractéristiques de chacun de ses éléments. On peut cependant identifier chacun d'eux par son spectre propre et déterminer la composition chimique du corps, une raie étant d'autant plus intense que l'élément chimique qu'elle caractérise est prépondérant. C'est en astrophysique que les succès de la spectrométrie sont les plus marquants. Les astres n'émettent vers nous qu'un tout petit peu de lumière (hormis le Soleil!), et c'est à partir des informations que recèle cette lumière que l'astrophysicien doit tirer le maximum de renseignements (distances, masses, vitesses, structures, etc.).

1. Le spectre continu des étoiles dépend essentiellement de leurs températures. La longueur d'onde λ_m qui correspond au maximum de l'intensité rayonnée est d'autant plus courte que la température est plus élevée.

On peut classer les étoiles selon leur température de surface :

— étoiles dites froides, quasiment invisibles : 1000 °C;
— étoiles rouges : 2500 °C;
— étoiles jaunes tel le Soleil (*photo* 16) : 6000 °C environ;
— étoiles blanches telle Sirius : 10000 °C;
— étoiles bleues : 25000 °C à 30000 °C.

Le Soleil émet l'intensité maximale dans le vert (couleur à laquelle l'œil est le plus sensible), mais l'intensité émise dans le spectre visible est suffisante pour qu'il paraisse blanc à l'observateur lorsqu'il est haut dans le ciel.

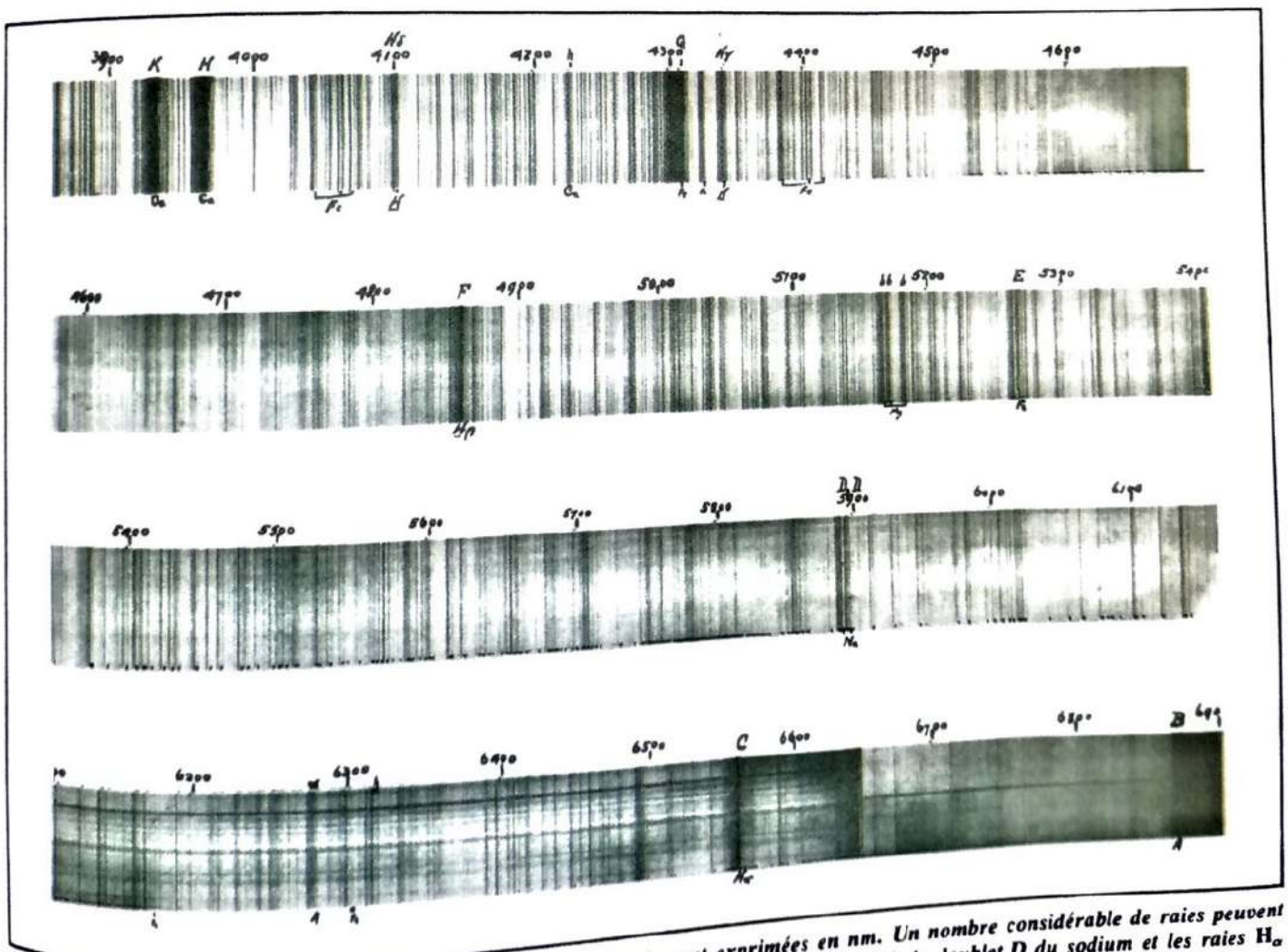
2. Les raies présentes dans le spectre des étoiles dépendent de leur composition chimique, mais aussi des conditions d'ordre physique, température et pression notamment. Qu'il s'agisse d'étoiles ou de nébuleuses gazeuses, l'élément dominant est l'hydrogène : il semble représenter 80 % de la matière de l'Univers.

Scanné avec CamScanner

Le spectre du Soleil, par exemple, est continu mais strié de nombreuses raies sombres correspondant au phénomène d'absorption (*photo* 17). L'ensemble de ces raies constitue le spectre de Fraunhofer(*). Le rayonnement continu provient d'une couche superficielle, très chaude, du Soleil : la *photosphère*. Ce rayonnement subit une absorption sélective par les éléments chimiques présents dans la *chromosphère*, enveloppe de gaz à très faible pression qui entoure le Soleil. L'étude du spectre de Fraunhofer permet donc de connaître la composition de la couronne solaire.

Notons que l'absence du spectre d'absorption caractéristique d'un élément ne prouve pas que ce dernier soit absent; il est en effet nécessaire que les transitions correspondantes puissent se produirent. Ainsi, la présence d'une raie d'absorption à partir d'un niveau excité (raie d'absorption de Balmer, par exemple) suppose que dans l'atmosphère de l'étoile étudiée des atomes soient précisément dans ce niveau excité, ce qui n'est pas forcément le cas.

(*) Joseph von Fraunhofer (1787-1826), physicien allemand, fit des découvertes importantes en optique (diffraction de la lumière en particulier) et en astrophysique. Sur sa tombe figure l'inscription *Approximavit sidera* (« il rapprocha les étoiles »).

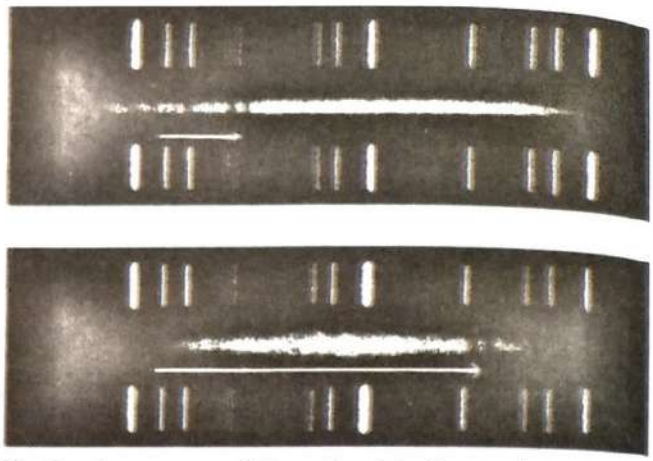


17. Spectre d'absorption du Soleil (partiel). Les longueurs d'onde sont exprimées en nm. Un nombre considérable de raies peuvent être identifiées. On remarquera en particulier les raies intenses K et H du calcium ionisé, le doublet D du sodium et les raies H_α et H_β de la série de Balmer.

3. L'étude spectrale fournit aussi d'importantes informations sur le mouvement des étoiles. Lorsqu'une source de signaux périodiques s'éloigne d'un observateur, la fréquence des signaux reçus paraît plus petite; il en résulte une augmentation de la longueur d'onde. Le phénomène inverse se produit si la source se rapproche. Il est possible, par exemple, d'observer la variation apparente de la fréquence d'un sifflet de locomotive lorsqu'elle passe devant nous à grande vitesse. Le son, aigu quand le train s'approche, devient plus grave lorsque le train s'éloigne. Cela est également vrai pour la lumière, onde périodique : c'est l'**effet Doppler-Fizeau**.

En conséquence, dans le spectre d'une étoile, les raies visibles se déplacent vers le rouge si l'étoile s'éloigne de nous, et vers le bleu si l'étoile se rapproche. Une mesure de cette variation de la longueur d'onde permet de connaître la vitesse relative de l'étoile par rapport à la Terre. On a pu ainsi montrer que le Soleil tourne sur lui-même en 24 jours dans sa région équatoriale. Les vitesses des étoiles et des galaxies s'échelonnent entre quelques kilomètres par seconde et quelques milliers de kilomètres par seconde (*photo* 18).

La mise en évidence (neuf fois sur dix) de l'éloignement continu des galaxies et la découverte d'un rayonnement(*) quasiment uniforme dans tout le ciel (longueur d'onde de 7,35 cm) semblent confirmer l'hypothèse de l'abbé Lemaître selon laquelle l'Univers serait en expansion.



18. *Ces deux spectres d'absorption (placés entre deux spectres de raies d'émission qui servent de référence) illustrent le déplacement des raies dû à la vitesse d'éloignement des étoiles par rapport à la Terre. La flèche indique le décalage des raies H et K du calcium ionisé par rapport aux spectres de référence. En haut : spectre dans la Grande Ourse. Situé à* 10^9 *a.ℓ. de la Terre, cet objet (galaxie) s'en éloigne à la vitesse de* 15 000 km.s^{-1}.
En bas : spectre dans l'Hydre. Situé à 3,96.10^9 *a.ℓ. de la Terre, l'objet (galaxie) s'en éloigne à la vitesse de* 61 000 km.s^{-1}.

19.7 conclusion

La notion de niveau d'énergie est générale en microphysique; elle ne se limite pas aux électrons de l'atome. Ainsi, les noyaux des atomes sont aussi caractérisés par des niveaux d'énergie, mis en évidence lors des phénomènes radioactifs (voir *chap.* 23). Les photons émis sont alors très énergétiques (quelques millions d'électronvolts).

Dans la matière, les atomes sont associés pour former des molécules animées de mouvements de vibration et de rotation. A ces mouvements correspondent également des variations d'énergie quantifiées. Les photons émis ou absorbés ont alors une très faible énergie, les longueurs d'onde correspondantes étant de l'ordre du centimètre (ondes hertziennes) :

$$\lambda = 10^{-2}\ \text{m}, \quad \text{soit} \quad \mathcal{E} = h\frac{c}{\lambda} \approx 10^{-4}\ \text{eV}.$$

En définitive, à chaque raie émise par un atome, une molécule, un noyau d'atome, sera associée une fréquence $\nu_{i,j}$ telle que :

$$h\nu_{i,j} = |\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_j|,$$

où $\mathcal{E}_i$ et $\mathcal{E}_j$ sont des niveaux d'énergie des systèmes considérés.

(*) La découverte de ce rayonnement (appelé *rayonnement fossile* car il fut émis avant même que les galaxies aient commencé à briller) valut à Arno Penzias et Robert Wilson le prix Nobel de Physique en 1978

Scanné avec CamScanner

longueur d'onde	fréquence et dénomination		utilisations principales
	<30 Hz		
>10 000 km	300 Hz	ondes à fréquences industrielles et acoustiques pour téléphonie	téléphonie par courants porteurs, transmissions sous-marines
1 000 km	3 kHz		
100 km		ondes V.L.F. (très basse fréquence)	chauffage à induction, radionavigation
	30 kHz		
10 km		ondes kilométriques, L.F. (basse fréquence)	radiodiffusion (ondes longues), radionavigation
	300 kHz		
1 km		ondes hectométriques, M.F. (moyenne fréquence)	radiodiffusion (ondes moyennes), modulation d'amplitude
	3 MHz		
100 m		ondes décamétriques, H.F. (haute fréquence)	radiodiffusion (ondes courtes), modulation de fréquence
	30 MHz		
10 m		ondes métriques, V.H.F. (très haute fréquence)	radiodiffusion, télévision, modulation de fréquence
	300 MHz		
1 m			
10 cm	3 GHz	ondes décimétriques, U.H.F.	télévision, systèmes radar (bande L)
1 cm	30 GHz	micro-ondes : ondes centimétriques S.H.F.	systèmes radar (bandes S, C, X, K), maser
1 mm	300 GHz	ondes millimétriques E.H.F.	maser
100 µm	3000 GHz		
		rayonnement infrarouge	chauffage, laser, photographie infrarouge
10 µm	3.10^{13} Hz		
1 µm	3.10^{14} Hz		
		rayonnement visible	analyse chimique, photographie, synthèse chlorophyllienne
100 nm	3.10^{15} Hz		
		rayonnement ultraviolet	analyse chimique, photographie ultraviolette
10 nm	3.10^{16} Hz		
1 nm	3.10^{17} Hz		
0,1 nm	3.10^{18} Hz	rayons X	radioscopie (médicale et industrielle), radiothérapie, contrôle des matériaux, des surfaces
0,01 nm	3.10^{19} Hz		
0,001 nm	3.10^{20} Hz		
		rayons γ	radiothérapie, gammascopie, applications mettant en jeu les isotopes radioactifs
0,001 nm	3.10^{21} Hz		
0,0001 nm	3.10^{22} Hz		
		rayons γ cosmiques	recherches expérimentales
0,00001 nm	3.10^{23} Hz		

Caractéristiques des ondes associées aux photons et utilisées dans la pratique.

Scanné avec CamScanner

EXERCICES

L'essentiel du cours

19.1 A Compléter les phrases suivantes :
Une lumière de longueur d'onde λ, de célérité dans le vide c = ... km . s^{-1}, a une fréquence $\nu = \frac{c}{...}$; on peut lui associer une particule appelée ..., de masse m=..., de quantité de mouvement $\|\vec{p}\|$ = ..., d'énergie $\mathcal{E}$ = ... Le nombre h = 6,62 . 10^{-34} J . s est appelé constante de ... La vitesse de cette particule dans le vide est égale à ... ; elle est indépendante de sa fréquence ν.

19.2 A Voici sept propositions :

1. La quantité de mouvement d'un photon est $\vec{p} = h\nu\vec{u}$.
2. L'énergie d'un photon de quantité de mouvement p est $\mathcal{E} = pc$.
3. Un atome dans son état fondamental peut émettre un photon.
4. Un atome dans son état fondamental peut absorber n'importe quel photon d'énergie inférieure à son énergie d'ionisation.
5. Lors de la désexcitation d'un atome, les photons émis ont tous des énergies quantifiées.
6. Lorsqu'un atome ionisé capte un électron, le photon émis peut avoir une énergie quelconque.
7. Un atome peut capter des photons d'énergie non quantifiée, pourvu que cette énergie soit supérieure à son énergie d'ionisation.

Cocher la ou les cases correspondant à une bonne réponse :

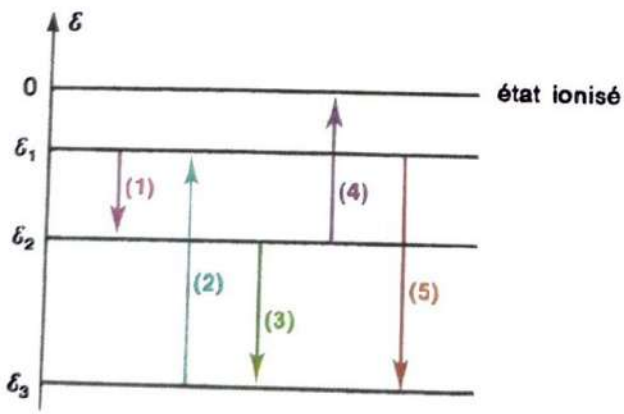
[a] Sont fausses les propositions 1, 6 et 7.

[b] Sont fausses les propositions 3 et 4.

[c] Seules sont vraies les propositions 2, 5, 6 et 7.

[d] Sont vraies les propositions 4, 5 et 6.

19.3 A La figure représente différents niveaux d'énergie d'un atome.

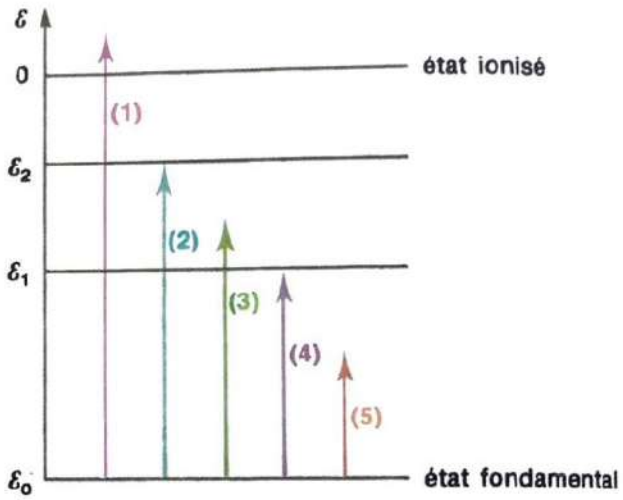


1/ Quelle est l'énergie du niveau fondamental ? Quel est son signe ?

2/ Donner les énergies des niveaux correspondant à des états excités de l'atome. Ces énergies sont-elles supérieures ou inférieures à celle de l'état fondamental ?

3/ Les flèches représentent soit l'émission soit l'absorption d'un photon. Attribuer à chaque flèche le mécanisme correspondant. Donner les fréquences correspondantes en fonction des $\mathcal{E}_k$ et de h.

19.4 A La figure représente, par des flèches de longueur proportionnelle à leur énergie, des photons arrivant sur des atomes d'une certaine substance. Ces atomes sont dans leur état fondamental. Quels sont les photons absorbés ? Préciser alors l'état de l'atome après absorption.



Exercices de base

Dans tous les exercices, on prendra : h = 6,62 . 10^{-34} J . s ; c = 3 . 10^8 m . s^{-1} ; e = 1,6 . 10^{-19} C.

19.5 AB3 1/ Un photon a pour longueur d'onde dans le vide λ = 656,30 nm. Calculer sa fréquence en Hz, son énergie en J puis en eV.

2/ Un photon a une énergie de 2,55 eV. Calculer son énergie en J, puis sa fréquence en Hz. En déduire sa longueur d'onde dans le vide en nm. Est-il visible ?

3/ Un photon a une fréquence de 6,91 · 10^{14} Hz. Calculer sa longueur d'onde en nm et son énergie en eV.

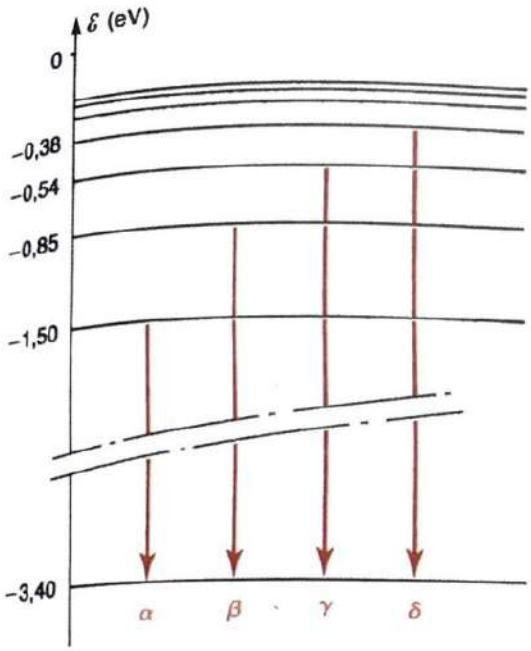
4/ De façon générale, montrer que la longueur d'onde λ du rayonnement émis et l'énergie du photon correspondant sont liées par la relation : $\lambda = \frac{1\,241}{\mathcal{E}}$,
lorsque λ est en nm et $\mathcal{E}$ en eV.

19.6 AB3 Les radiations émises par une lampe à hydrogène sont issues des atomes qui passent d'un niveau d'énergie $\mathcal{E}_p$ à un niveau d'énergie $\mathcal{E}_n$ tel que $\mathcal{E}_p > \mathcal{E}_n$. La figure ci-après représente des transitions correspondant à de la lumière visible.

1/ La raie β correspond à l'émission d'un photon d'énergie 2,55 eV.
Comment peut-on retrouver cette valeur à partir du diagramme d'énergie ?
Calculer la longueur d'onde de cette raie.
La couleur de cette raie est-elle bleue ou rouge ?

Scanné avec CamScanner

2/ Calculer les longueurs d'onde des trois autres raies α, γ et δ.



3/ La raie limite correspondant à cette série provient de la désexcitation du niveau d'énergie 0 au niveau – 3,4 eV. Quelle est sa longueur d'onde ? Cette raie est-elle visible (spectre visible : 400 nm $< \lambda <$ 700 nm) ?

19.7 AB3 Les différents niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sont donnés par la relation :

$$\mathcal{E} = -\frac{13,6}{n^2},$$

où $\mathcal{E}$ est en eV et où n est un nombre entier naturel non nul.

1/ Faire le schéma classique du diagramme de ces niveaux d'énergie en utilisant l'échelle : 1 cm pour 1 eV (on ne représentera que les six premiers niveaux).

2/ Déterminer l'énergie minimale, en eV et en J, qu'il faut fournir à un atome d'hydrogène pour l'ioniser :

a/ lorsqu'il est dans son état fondamental ($n = 1$) ;
b/ lorsqu'il est sur le premier niveau d'énergie excité ($n = 2$).

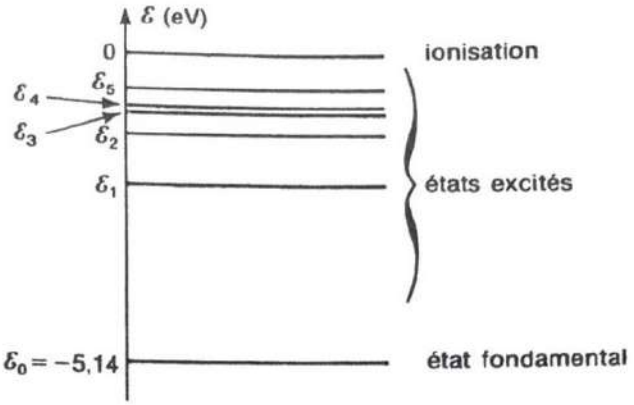
3/ L'atome est excité sur le niveau 6. Montrer qu'en se désexcitant vers le niveau fondamental il peut émettre un grand nombre de raies. Déterminer la raie de plus grande énergie, par conséquent de plus courte longueur d'onde. Calculer cette longueur d'onde λ_1 en nm. (On admettra que toutes les transitions sont possibles.)

4/ Représenter par des flèches, sur le diagramme précédent, les transitions correspondant aux différentes raies d'émission de la série de Balmer (retour de l'électron au niveau $n = 2$). En déduire les deux longueurs d'onde limites λ_1 et λ_2 de la série de Balmer.

5/ Un ion H^+ absorbe un électron d'énergie cinétique 1 eV. L'atome formé se désexcite aussitôt vers l'état fondamental. Quelle est la longueur d'onde de la radiation émise ?

19.8 L'analyse du spectre d'émission d'une lampe à vapeur de sodium révèle la présence de raies de longueurs d'onde bien définies.

1/ AB3 La figure représente le diagramme simplifié des niveaux d'énergie de l'atome de sodium.



A partir du tableau donnant la longueur d'onde de la raie émise lors d'une transition entre deux niveaux d'énergie, calculer l'énergie des différents états excités.

niveau excité	4	5	1	3	2
niveau de désexcitation	0	1	0	1	1
longueur d'onde en nm de la raie émise	330,3	568,8	589,3	819,5	1 138,2

On donnera $\mathcal{E}_k$ en eV avec deux chiffres significatifs après la virgule. (On pourra utiliser le résultat de l'exercice 19.5, question 4.)

2/ A Un atome de sodium dans son état fondamental reçoit un photon de longueur d'onde $\lambda = 589,3$ nm. Est-il absorbé ? Quel est le niveau de l'énergie de l'atome de sodium ?

3/ A Un photon d'énergie 3,00 eV arrive sur un atome de sodium au repos, dans l'état fondamental. Est-il absorbé ? Pourquoi ?

4/ A Un photon d'énergie 6,14 eV arrive sur un atome de sodium à l'état fondamental. L'atome est-il ionisé ? Si oui, quelle est l'énergie cinétique de l'électron éjecté ?

5/ A Montrer que si un atome est excité dans son premier niveau $\mathcal{E}_1$, il suffit d'un photon d'énergie supérieure à 3,03 eV pour l'ioniser.

Banc d'essais

19.9 AB3 La raie jaune très intense émise par une lampe au sodium est en fait constituée de deux raies, de longueurs d'onde $\lambda_1 = 589,0$ nm et $\lambda_2 = 589,6$ nm. Elles correspondent à une désexcitation de l'atome de sodium, à partir de deux niveaux d'énergie très proches, vers l'état fondamental. Calculer la différence d'énergie entre les deux niveaux, en eV.

↳ **ex. 19.5.**

Scanné avec CamScanner

EXERCICES

Principe de combinaison de Ritz

19.10 AC Le spectre d'émission de l'atome d'hydrogène comporte les radiations de longueurs d'onde :

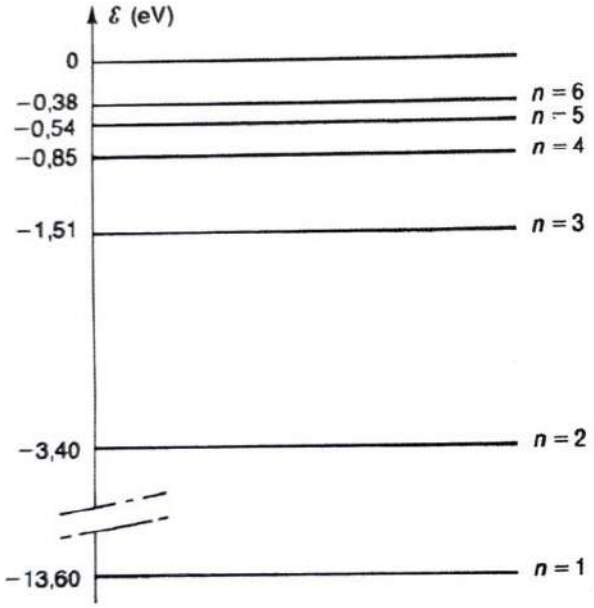
$\lambda_1 = 1\,875$ nm ; $\lambda_2 = 656{,}3$ nm ; $\lambda_3 = 486{,}1$ nm ;
$\lambda_4 = 121{,}6$ nm ; $\lambda_5 = 102{,}6$ nm.

1/ A quels domaines (UV, visible, IR, etc.) du spectre électromagnétique ces radiations appartiennent-elles ?

2/ Montrer que certaines des fréquences correspondantes se déduisent des autres par soustraction.

Spectre de l'atome d'hydrogène

19.11 Dans le spectre d'émission de l'atome d'hydrogène on trouve les trois raies suivantes, caractérisées par leurs longueurs d'onde : $\lambda_1 = 434{,}1$ nm ; $\lambda_2 = 486{,}1$ nm ; $\lambda_3 = 656{,}3$ nm. (Voir le diagramme des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène ci-dessous.)



1/ A *a/* Justifier la discontinuité du spectre d'émission.
b/ A partir du diagramme, illustrer les termes : état fondamental, état excité, énergie d'ionisation.

2/ *a/* AB3 Rappeler la relation entre l'énergie d'un photon et la longueur d'onde associée.
b/ AB3 Calculer, en eV, les énergies de photons de longueurs d'onde λ_1, λ_2, λ_3.
c/ C Montrer que les trois raies étudiées correspondent à des transitions qui ramènent l'atome d'hydrogène excité au même état.

↳ **ex. 19.6, 19.7.**

Série de Balmer pour l'atome d'hydrogène

19.12 Les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sont donnés par la relation :

$$\mathcal{E}_n = -\frac{13{,}6}{n^2},$$

où $\mathcal{E}$ est en eV et où n est un nombre entier naturel non nul.

1/ Quelle est l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène ?

2/ Établir l'expression littérale de la fréquence des radiations émises lorsque cet atome passe d'un état excité tel que $n > 2$ à l'état $n = 2$ (radiations de la série de Balmer).

3/ L'analyse du spectre d'émission de l'atome d'hydrogène révèle la présence de radiations de longueurs d'onde 656 nm (H_α) ; 486 nm (H_β) ; 434 nm (H_γ) ; 410 nm (H_δ).

a/ B3 Déterminer à quelles transitions correspondent ces radiations de la série de Balmer.
b/ B3 Tracer le diagramme représentant les transitions entre les différents niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène pour ces quatre raies. Sur l'axe des énergies, 2 cm correspondront à 1 eV.
c/ AB3 Entre quelles valeurs extrêmes les longueurs d'onde des radiations de cette série sont-elles situées ?

4/ A Un photon d'énergie 7 eV arrive sur un atome d'hydrogène. Que se passe-t-il :
a/ si l'atome est dans l'état fondamental ?
b/ si l'atome est dans l'état excité ($n = 2$) ?

↳ **ex. 19.6, 19.7.**

Série de Lyman pour l'atome d'hydrogène

19.13 Les différents niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sont donnés par la relation :

$$\mathcal{E}_n = -\frac{13{,}6}{n^2},$$

où $\mathcal{E}$ est en eV et où n est un nombre entier naturel non nul.

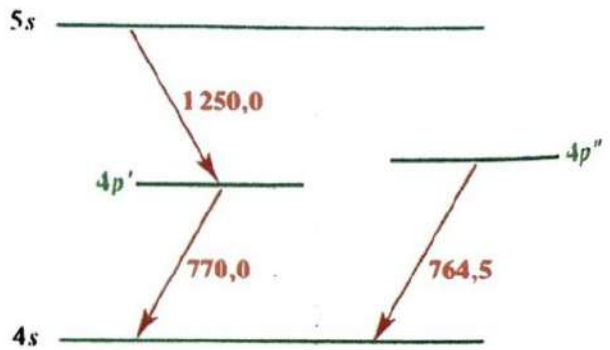
1/ La série de Lyman comprend les radiations émises par l'atome d'hydrogène excité ($n \geqslant 2$) lorsqu'il revient à son état fondamental ($n = 1$). Parmi toutes les raies d'émission de l'hydrogène, l'analyse spectroscopique permet de déceler des radiations $\lambda_1 = 121{,}6$ nm ; $\lambda_2 = 102{,}6$ nm ; $\lambda_3 = 97{,}3$ nm. Ces radiations appartiennent-elles à la série de Lyman ? A quelles transitions correspondent-elles ?

2/ Calculer, en nm, l'écart $\Delta\lambda$ entre la plus grande et la plus petite longueur d'onde de la série de Lyman.

3/ Un électron d'énergie cinétique 2 eV est capté par un ion H^+ supposé au repos. L'atome formé se désexcite aussitôt vers l'état $\mathcal{E}_1$. Calculer la longueur d'onde de la radiation émise. Du fait de la conservation de la quantité de mouvement, l'atome formé possède une vitesse (effet de recul). Y a-t-il lieu de tenir compte de l'énergie cinétique correspondante ? On montrera qu'on peut négliger la quantité de mouvement du photon émis.

Spectre de l'atome de potassium

19.14 AB3 La figure représente les premiers niveaux d'énergie 4*s*, 4*p'*, 4*p''* et 5*s* de l'atome de potassium.



Scanné avec CamScanner

Le niveau $4p$ est dédoublé ($4p'$ et $4p''$).

1/ Les transitions $4p \rightarrow 4s$ donnent un doublet correspondant à deux raies très voisines de longueurs d'onde $\lambda' = 770{,}0$ nm et $\lambda'' = 764{,}5$ nm. Calculer, en eV, la différence d'énergie séparant les niveaux $4p'$ et $4p''$.

2/ La transition $5s \rightarrow 4p'$ correspond à une radiation de longueur d'onde $\lambda_1 = 1\,250$ nm. Calculer la longueur d'onde de la raie émise lors de la transition $5s \rightarrow 4p''$.

3/ L'énergie d'ionisation de l'atome de potassium dans son état fondamental $4s$ vaut 4,34 eV. Quelle est l'énergie nécessaire pour ioniser l'atome excité dans l'état $5s$?

↳ ex. 19.5, 19.8.

Absorption

19.15 L'énergie de première ionisation d'un atome de mercure est égale à 10,40 eV ; le premier niveau d'énergie est situé à 4,89 eV au-dessus du niveau fondamental.

1/ AB3 Dans une enceinte, on introduit de la vapeur de mercure. Lorsqu'on éclaire cette vapeur par une radiation de longueur d'onde λ, il peut y avoir absorption de la raie (dite de résonance) correspondant au passage du niveau fondamental au premier niveau excité. Calculer la longueur d'onde λ de la raie absorbée.

2/ A Des photons d'énergie 12,00 eV traversent cette vapeur de mercure. Expliquer le phénomène qui se produit.

↳ ex. 19.4, 19.8.

19.16 La grande nébuleuse d'Orion comporte quatre étoiles très chaudes rayonnant de la lumière ultraviolette de longueur d'onde inférieure à 91,2 nm, au sein d'un grand « nuage » de gaz interstellaire constitué en majorité d'atomes d'hydrogène. Le diagramme de l'exercice 19.11 présente quelques-uns des niveaux d'énergie possibles pour l'atome d'hydrogène.

1/ A A quoi correspond le niveau d'énergie $\mathcal{E} = 0$ eV ?

2/ C Quel est le comportement d'un atome d'hydrogène pris à l'état fondamental lorsqu'il reçoit une radiation de longueur d'onde $\lambda = 91{,}2$ nm ?

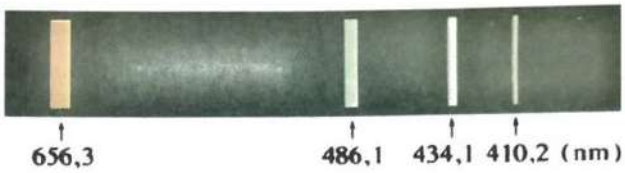
3/ C Un atome d'hydrogène qui reçoit une radiation de longueur d'onde $\lambda' = 110$ nm peut-il être excité ? Pourquoi ?

4/ AB3 Lorsque le gaz interstellaire de la nébuleuse d'Orion est ionisé, les électrons se recombinent avec les protons pour former des atomes d'hydrogène dans un état excité. Un atome d'hydrogène excité se désexcite ensuite progressivement en émettant une succession de photons.
Quelle est la longueur d'onde de la radiation émise lorsque cet atome d'hydrogène passe de l'état excité $n = 3$ à l'état excité $n = 2$? Cette radiation est-elle visible ?

↳ ex. 19.4, 19.7.

Atome hydrogénoïde

19.17 La figure représente le spectre d'émission de l'atome d'hydrogène dans le domaine visible.



1/ AB3 L'ion hélium He^+ possède un électron ; il émet après excitation des radiations d'énergies $\mathcal{E}_1 = 1{,}89$ eV ; $\mathcal{E}_2 = 2{,}55$ eV ; $\mathcal{E}_3 = 2{,}86$ eV ; $\mathcal{E}_4 = 3{,}03$ eV. Calculer les longueurs d'onde correspondantes.

2/ C Comparer le spectre de cet ion à celui de l'atome d'hydrogène. Interpréter le résultat.

↳ ex. 19.5.

19.18 On appelle *atomes ionisés hydrogénoïdes* des noyaux entourés d'un seul électron. Les niveaux d'énergie de ces atomes sont donnés par la relation :

$$\mathcal{E}_n = -\frac{\mathcal{E}_1}{n^2},$$

où n est un nombre entier naturel non nul.

1/ A Que représente $\mathcal{E}_1$?

2/ A Les ions He^+ et Li^{2+} sont-ils des atomes hydrogénoïdes ?

3/ C Les énergies d'ionisation de He^+ et Li^{2+} sont respectivement 54,4 eV et 122 eV. Trouver une relation simple entre leur numéro atomique Z, leur énergie d'ionisation et celle de l'atome d'hydrogène (laquelle est égale à 13,6 eV).

4/ CB3 Calculer les valeurs des trois premiers niveaux d'énergie de ces atomes. Les comparer à celles correspondantes pour l'atome d'hydrogène.
Pourquoi peut-on dire que l'électron devient de plus en plus lié à mesure que Z augmente ?

19.19 *Vrai ou faux ?*

1/ C L'énergie de l'atome d'hydrogène au niveau $n = 3$ est $-2{,}42 \cdot 10^{-19}$ J.

2/ C L'atome d'hydrogène peut avoir une énergie égale à $-2{,}8$ eV.

3/ A Le spectre d'émission de l'atome d'hydrogène est continu.

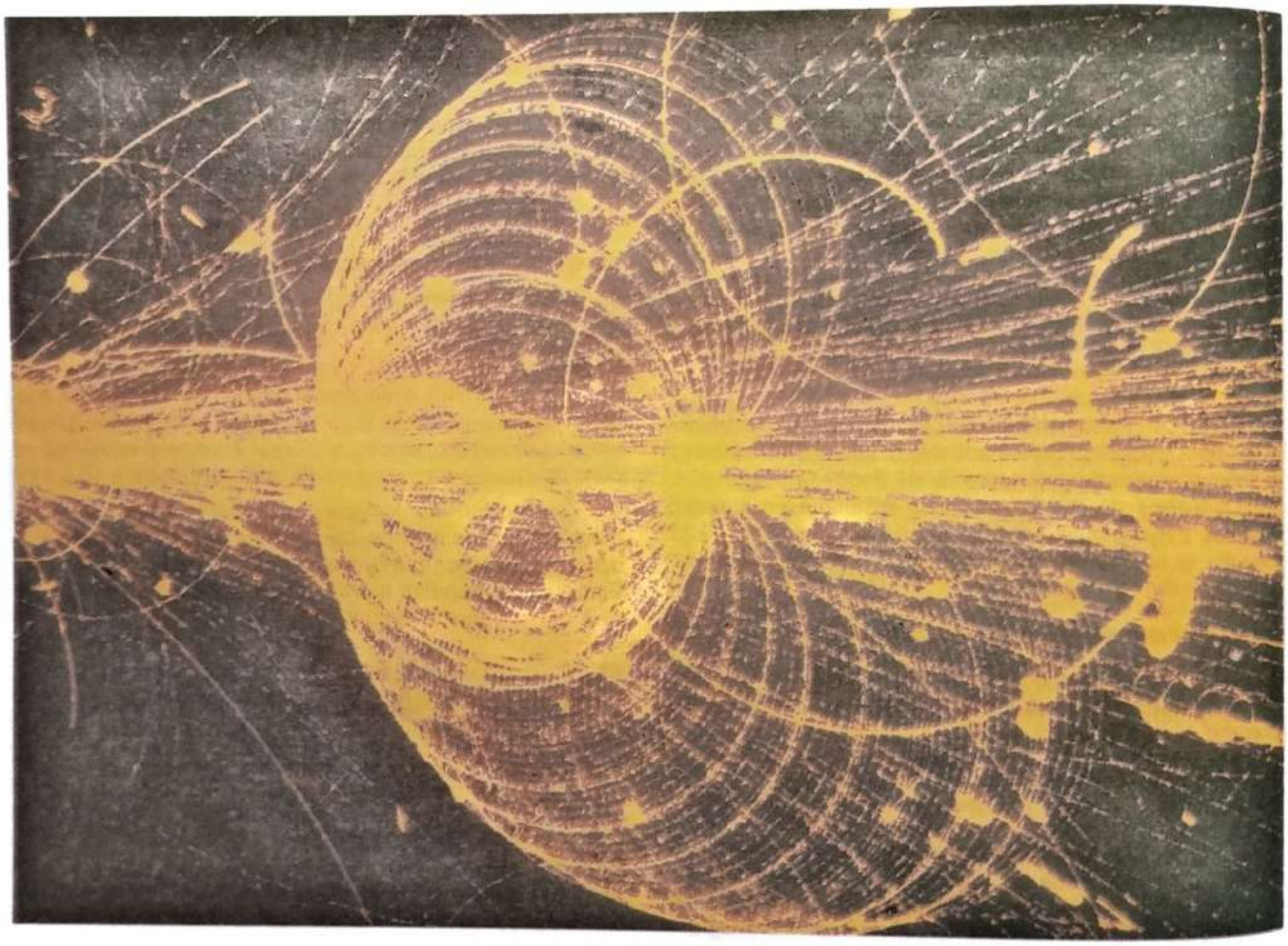
4/ A Le niveau d'énergie 0 eV correspond à l'atome d'hydrogène dans son état non excité (état fondamental).

5/ C L'atome d'hydrogène peut émettre la radiation de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 103$ nm en passant du niveau d'énergie $n=3$ au niveau d'énergie $n=1$.

6/ C On peut exciter l'atome d'hydrogène grâce à une radiation de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 103$ nm.

Scanné avec CamScanner

20 PARTICULES DE GRANDE ÉNERGIE



Traces de particules chargées dans une chambre à bulles (les particules neutres ne laissent pas de trace). Les trajectoires des particules sont courbées. En particulier, les particules de faible masse (électrons), freinées par le liquide de la chambre, décrivent des spirales.

20.1 particules élémentaires

20.1.1 Introduction

Nous nous proposons d'étudier des notions de dynamique relativiste en montrant d'abord que la dynamique classique, ou dynamique de Newton, est mise en défaut lorsqu'on veut l'appliquer aux particules de grande vitesse. Il est au préalable nécessaire de citer quelques-unes des **particules** dites **élémentaires** et de les classer d'après leur *nature* et les *interactions* qu'elles créent ou subissent.

Scanné avec CamScanner

En décrivant la constitution de l'atome, nous avons admis l'existence de deux types de particules : les **électrons** et les **nucléons**. Ces derniers, qui constituent les noyaux atomiques, sont de deux espèces : les **protons** et les **neutrons**.

Les électrons ont été découverts avec les rayons cathodiques; leurs caractéristiques furent déterminées, en 1897, par J. Perrin, R.-A. Millikan et J.-J. Thomson. En 1910, E. Rutherford mettait en évidence les protons et J. Chadwick, en 1932, identifiait les neutrons.

Depuis, les physiciens, ont été conduits à explorer un *domaine subnucléaire*, tant pour découvrir de nouvelles particules que pour essayer de comprendre les interactions qui s'exercent entre les nucléons à l'intérieur d'un noyau. Ce domaine a des dimensions qui se situent au voisinage de 10^{-15} m [unité de longueur appelée **fermi** (symbole : **fm**)]. Pour l'explorer, on bombarde la matière avec des corpuscules qui acquièrent, dans des accélérateurs de particules, des énergies atteignant des mégaélectronvolts (MeV) ou même des gigaélectronvolts (GeV); rappelons que l'électronvolt vaut $1{,}6.10^{-19}$ joule. Plus d'une centaine de particules ont été ainsi découvertes, et on peut alors se poser la question suivante : *qu'est-ce qu'une particule?*

Le physicien ne répondra pas de façon précise à cette interrogation; pour lui, une particule est un système ayant une masse (qui peut être nulle), une charge électrique (qui peut être nulle) et d'autres propriétés caractéristiques telles que le spin, le charme, la couleur...

Le nombre de particules connues à ce jour est grand; nous aurons l'occasion d'en rencontrer seulement quelques-unes. Par exemple, citons le **positon**, ou **électron positif**. Il a la même masse que l'électron, mais une charge opposée. C'est le premier exemple d'**antiparticule** qui a été rencontré. Ainsi, à chaque particule, correspond une antiparticule : par exemple, au proton, noté p, correspond un antiproton $\bar{p}$ de même masse, mais de charge opposée à celle du proton.

Dans l'étude des émissions radioactives, nous verrons la nécessité d'introduire une particule de masse nulle, de charge nulle et se propageant à la vitesse de la lumière : le **neutrino** ν, et son antiparticule, l'**antineutrino** $\bar{\nu}$.

Enfin, il nous faut mentionner une particule très différente des précédentes, liée aux ondes électromagnétiques, particule de quantification d'énergie intervenant dans les échanges d'énergie entre les radiations et la matière (*cf. chap.* 19) : le **photon**. Nous consacrerons un chapitre à cet aspect de la lumière. Notons que le photon est à lui-même son antiparticule.

20.1.2 interactions entre particules

Nous avons déjà étudié certaines interactions entre particules : l'interaction gravitationnelle et l'interaction électrostatique. L'intensité de chacune de ces deux interactions est inversement proportionnelle au carré de la distance qui sépare les particules (loi en $1/r^2$) et leur portée est théoriquement infinie. Elles sont en fait relativement intenses à courte distance, mais diminuent considérablement quand celle-ci augmente.

L'interaction gravitationnelle est considérablement plus faible que l'interaction électrostatique : entre deux protons, par exemple, le rapport des intensités est de l'ordre de 10^{36}! En fait, dans la matière (globalement neutre), les interactions entre charges de même signe sont plus ou moins compensées par les interactions entre charges de signes contraires. Cela explique, en particulier, la portée limitée des forces électrostatiques dans la matière. Au contraire, les forces gravitationnelles, toujours attractives, sont cumulatives et, bien que très faibles, peuvent prendre des valeurs considérables sur des systèmes de grande masse, tels que les astres par exemple.

Outre l'interaction gravitationnelle et l'interaction électromagnétique, les physiciens distinguent deux autres interactions entre particules : l'*interaction forte* et l'*interaction faible*. Sans détailler, signalons simplement que l'interaction forte permet d'expliquer la cohésion des noyaux, due à l'attraction entre nucléons. Elle est caractérisée par un rayon d'action très petit et décroît exponentiellement avec la distance; elle est quasiment nulle à une distance supérieure à quelques fermis. L'interaction faible est environ 10^{-7} fois moins intense que la forte.

En résumé, si nous voulons classer par ordre décroissant les interactions citées, nous obtiendrons, pour la même distance (de l'ordre du fermi) : l'interaction forte, l'interaction électromagnétique (mille fois plus faible), l'interaction faible et l'interaction gravitationnelle.

Il est possible de classer les particules d'après les interactions qu'elles exercent ou subissent. Ainsi, on distingue :

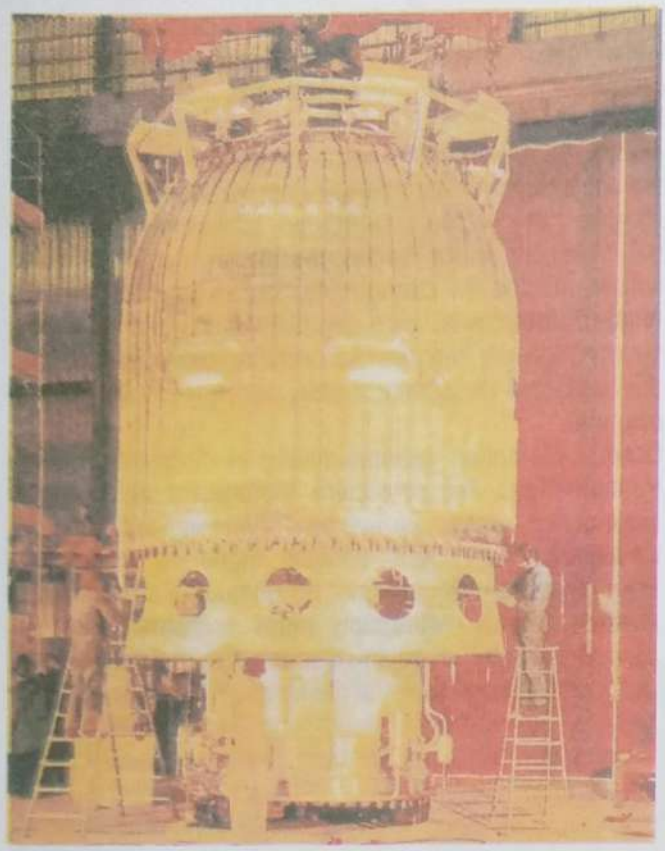
- les **hadrons**, comprenant en particulier les nucléons et des particules appelées mésons, qui présentent des interactions fortes;
- les **leptons** qui ne présentent pas d'interactions fortes; il en est ainsi pour l'électron, le positon, le neutrino, ...

Remarque : Parmi toutes ces particules, certaines sont stables : le photon, le neutrino, le proton, l'électron. Le neutron, en dehors du noyau d'un atome, n'est pas stable; il se désintègre en donnant un proton, un électron et un antineutrino.

20.2 détection des particules

Par temps clair, nous avons tous observé les traces des avions se déplaçant dans la haute atmosphère. Une telle trace permet de détecter la trajectoire de l'avion à peine visible à l'œil nu. C'est par un procédé analogue que l'on a pu étudier les trajectoires des particules électrisées qui, comme les gaz d'échappement des réacteurs, provoquent la condensation de fines gouttelettes d'eau (ou de fins cristaux de glace à haute altitude) en traversant une atmosphère contenant de la vapeur d'eau placée dans des conditions favorables. Cette première étude a été réalisée dans une enceinte, ou chambre, imaginée par C.T.R. Wilson, physicien écossais.

Scanné avec CamScanner



1. *Grande chambre à bulles européenne (B. E. B. C.). Cette chambre a 3,7 m de diamètre et renferme 35 000 ℓ d'hydrogène liquide à la température de −254 °C. Ce cliché, pris lors du montage de la chambre, permet de distinguer, en bas, le cylindre qui renferme le piston de compression et de détente du liquide et, au centre, les fenêtres en métal par lesquelles les faisceaux de particules pénètrent. L'observation des interactions entre particules dans l'hydrogène liquide se fait à l'aide de quatre caméras disposées au sommet du dôme.*



2. *Collision d'un kaon négatif d'énergie 10 GeV contre un proton dans une chambre à bulles à hydrogène liquide. On remarquera que les trajectoires des différentes particules détectées peuvent avoir des courbures de sens opposés, lesquels sont fonction du signe des charges.*

En 1952, un physicien américain, D.-A. Glaser, imagina un autre procédé, qui détrôna rapidement le premier : la **chambre à bulles**. Une chambre à bulles contient un liquide (de l'hydrogène liquide ou du propane liquide ou du fréon) proche de son état d'ébullition (*photo* 1).

Par une détente brusque, on amène le liquide dans les conditions d'ébullition, mais celle-ci n'est pas immédiate : elle se produit 100 ms environ après la détente. Si, pendant ce temps, le liquide est traversé par un faisceau de particules *chargées*, celles-ci créent des petites bulles de vapeur tout le long de leurs trajets. Ces traces sont photographiées par des caméras qui permettent de reconstituer les trajectoires dans l'espace.

La chambre est placée dans un champ magnétique qui incurve ces trajectoires; le sens de la courbure donne le signe de la charge de la particule et la mesure du rayon de courbure permet de déterminer le vecteur quantité de mouvement $\vec{p}$ (*photo* 2).

Les particules neutres ne provoquent pas d'ionisation, donc pas de bulles; elles ne laissent aucune trace sur les clichés. Elles peuvent cependant être identifiées soit par les produits de leur désintégration, soit par application des lois de conservation.

D'autres procédés de détection (chambre à étincelles, à fils, etc.) ont actuellement un grand développement.

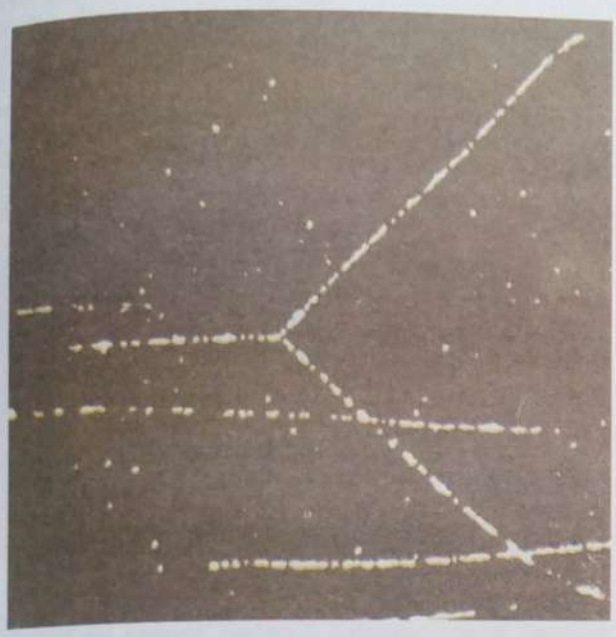


3. *Chambre à bulles Gargamelle du C.E.R.N. Le corps de la chambre pèse 25 t; il a la forme d'un cylindre horizontal de 4,8 m de longueur, 1,88 m de diamètre intérieur et 12 000 ℓ de capacité. Le corps peut contenir 6 t de propane pur à 60 °C ou 18 t de fréon à 30 °C ou des mélanges des deux. La décompression, synchronisée avec l'arrivée des particules, est effectuée en quelques dizaines de nanosecondes, de 22 bars ou 25 bars à 9 ou 10 bars, selon le liquide utilisé. Le champ magnétique de 2 T est créé dans le centre par un électro-aimant de 900 t; la puissance électrique nécessaire est de 6 MW avec des courants d'intensité 10 000 A.*

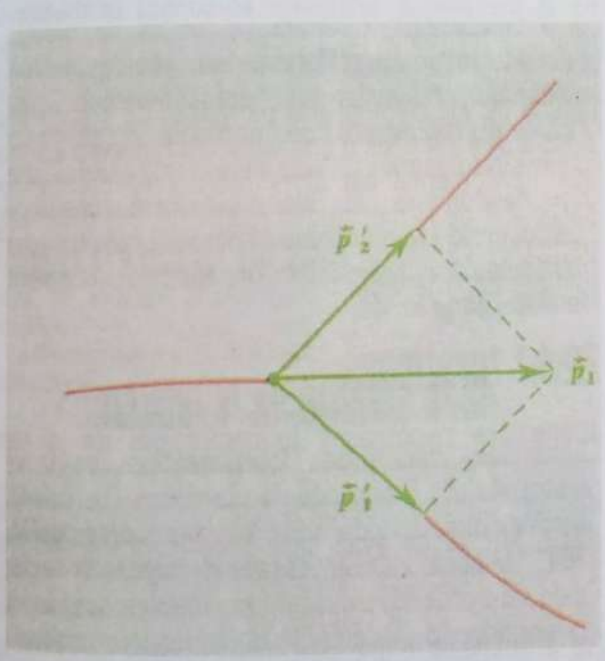
Scanné avec CamScanner

fiche expérimentale

I. CHOC ÉLASTIQUE DE PARTICULES EN MÉCANIQUE NEWTONIENNE ET EN MÉCANIQUE RELATIVISTE



4 b.



4 a.

Recherchons les prévisions newtonniennes lors du choc entre un proton de vitesse $\vec{v}_1$, donc de quantité de mouvement $\vec{p}_1 = m\vec{v}_1$, et un proton au repos.

- Conservation de la quantité de mouvement :

$$\vec{p}_1 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2. \qquad (1)$$

- Conservation de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2} mv_1^2 = \frac{1}{2} mv_1'^2 + \frac{1}{2} mv_2'^2,$$

soit :
$$\frac{p_1^2}{2m} = \frac{p_1'^2}{2m} + \frac{p_2'^2}{2m};$$

d'où :
$$p_1^2 = p_1'^2 + p_2'^2. \qquad (2)$$

Élevons la relation (1) au carré :

$$p_1^2 = p_2'^2 + p_2'^2 + 2\vec{p}'_1 \cdot \vec{p}'_2. \qquad (3)$$

Comparons (2) et (3); il vient :

$$\vec{p}'_1 \cdot \vec{p}'_2 = 0,$$

soit :
$$\vec{p}'_1 \perp \vec{p}'_2 \quad \text{ou} \quad \vec{p}'_1 = \vec{0}.$$

A l'issue d'un choc élastique entre particules identiques dont l'une est initialement au repos, la mécanique newtonienne prévoit donc que les trajectoires forment un angle droit ou que les particules échangent leurs quantités de mouvement (cas du carreau à la pétanque).

Sur le cliché 4 a, la vitesse v_1 du proton incident est relativement faible (150 km.s $^{-1}$ seulement!) et le résultat est conforme aux prévisions de la mécanique newtonienne : $\vec{p}'_1 \perp \vec{p}'_2$.

Sur le cliché 4 b, la vitesse v_1 est très élevée (270 000 km.s $^{-1}$) et le résultat n'est plus conforme aux prévisions newtoniennes : l'angle formé par les trajectoires est nettement inférieur à 90°. Notons bien que le plan des clichés est parallèle au plan d'évolution des particules; l'angle formé par les trajectoires n'est donc pas ici modifié par un effet de perspective.

Scanné avec CamScanner

20.3 Insuffisance de la mécanique newtonienne

20.3.1 chocs de particules

Nous pouvons réaliser de nombreuses expériences de chocs en envoyant des protons lancés à très grande vitesse sur les atomes de l'hydrogène liquide d'une chambre à bulles. Ces protons interagissent ainsi avec les protons, qu'on peut supposer initialement au repos, qui constituent les noyaux des atomes d'hydrogène.
L'étude des clichés correspondants permet de distinguer deux types de chocs : les **chocs élastiques** et les **chocs inélastiques**.

• Nous dirons que deux particules subissent un *choc élastique lorsqu'elles ne changent pas de nature lors de la collision.*
Ainsi, le choc entre deux protons est élastique si les particules issues de la collision sont deux protons :

$$p + p \longrightarrow p + p.$$

• *Les chocs inélastiques provoquent, au contraire, la production ou à la disparition de particules,* par exemple :

$$p + p \longrightarrow p + \pi^+ + n.$$

Intéressons-nous au choc élastique d'un proton percutant un proton au repos. La mécanique newtonienne prévoit (voir *fiche expérimentale* I, *photos* 4a et 4b) que les trajectoires des protons forment un angle droit après le choc.
L'expérience confirme-t-elle cette prévision?
Sur la photo 4a, le proton incident possède une vitesse de l'ordre de 150 $km.s^{-1}$. Après le choc, les trajectoires des protons sont bien perpendiculaires.
Sur la photo 4b, le proton incident possède une vitesse de l'ordre de 270000 $km.s^{-1}$; l'angle formé par les trajectoires est manifestement inférieur à 90°.

• **La mécanique newtonienne ne s'applique pas aux mouvements des particules animées d'une très grande vitesse proche de celle de la lumière.**

20.3.2 expérience de Bertozzi

Réalisée aux U.S.A. en 1964, cette expérience avait pour but de mettre en évidence la relation entre la vitesse et l'énergie cinétique des particules de haute énergie.
Le dispositif expérimental (voir fiche *expérimentale* II) comporte un canon à électrons. Les électrons sont accélérés par une tension U réglable et projetés dans un long tube vide d'air. Durant leur trajet rectiligne, deux détecteurs permettent une mesure directe de leur vitesse v. Les électrons sont ensuite reçus par un bloc métallique dont ils provoquent l'échauffement, leur énergie cinétique $\mathcal{E}_c$ se transformant en chaleur. La mesure de la quantité de chaleur produite permet de calculer cette énergie cinétique (principe de conservation de l'énergie) et montre que celle-ci est bien égale à l'énergie eU fournie par l'accélérateur :

$$\mathcal{E}_c = eU.$$

En revanche, la mesure directe de v et la valeur obtenue à partir de l'expression newtonienne de l'énergie cinétique divergent d'autant plus que l'énergie communiquée aux électrons est élevée :

$$v \neq \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_c}{m}} = \sqrt{\frac{2eU}{m}};$$

d'où :

$$\mathcal{E}_c \neq \frac{1}{2} mv^2.$$

La relation newtonienne $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} mv^2$ *n'est pas adaptée aux particules de grande énergie.*

Par ailleurs, l'expression $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$ ne prévoit aucune limite pour la vitesse v des électrons quand on augmente la tension accélératrice U. Cela est démenti par l'expérience : la vitesse v ne peut dépasser une valeur limite $c = 3.10^8$ $m.s^{-1}$ (300000 $km.s^{-1}$), qui est la célérité de la lumière dans le vide.

20.4 mécanique relativiste

En 1905, bien avant que soit réuni l'actuel faisceau de preuves expérimentales, Einstein énonça les hypothèses de la mécanique relativiste et conçut la théorie de la relativité restreinte (restreinte aux repères galiléens). La mécanique relativiste est particulièrement adaptée à l'étude du mouvement des particules de grande énergie, c'est-à-dire animées d'une vitesse très élevée. La mécanique newtonienne est alors considérée comme un cas particulier de la mécanique relativiste, cas limite pour les particules de vitesse faible par rapport à la célérité de la lumière dans le vide.

20.4.1 invariance de la célérité de la lumière

L'une des hypothèses fondamentales de la relativité restreinte est *l'invariance de la vitesse, ou célérité, de la lumière dans le vide dans tous les repères galiléens.* En 1881, Michelson avait essayé de mettre en évidence, à l'aide de procédés utilisant les interférences lumineuses, la variation de la célérité de la lumière lorsque celle-ci se propageait, d'une part, dans le sens de la translation de la Terre sur son orbite autour du Soleil, d'autre part dans une direction perpendiculaire. La précision des mesures faites par Michelson dépassait le dix-millionième et aurait dû permettre de déceler une variation de la célérité de la lumière de l'ordre de 30 $km.s^{-1}$ (vitesse moyenne de translation de la Terre sur son orbite) par rapport à la célérité de la lumière, qui est de l'ordre de 3.10^5 $km.s^{-1}$, soit une variation de un dix-millième. Or l'expérience de Michelson fut toujours négative. Toutes les tentatives d'explication faites entre 1881 et 1905 échouèrent, et Einstein eut l'audace d'énoncer le postulat suivant :

Scanné avec CamScanner

fiche expérimentale

II. EXPERIENCE DE BERTOZZI

La formule $\mathcal{E}_c = 1/2\ mv^2$ donnant l'énergie cinétique d'une particule n'est plus valable lorsque la vitesse v de la particule n'est plus négligeable devant la vitesse limite c. Le dispositif expérimental comporte un accélérateur de particules A dont on peut faire varier la tension accélératrice U. Le canon ainsi constitué émet des « bouffées » d'électrons.

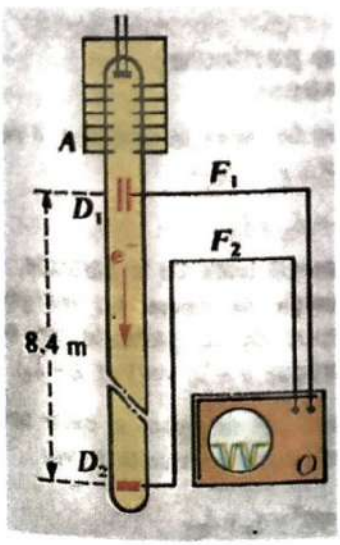
Le passage des électrons est détecté en D_1, puis en D_2. Les câbles de transit F_1 et F_2, identiques, communiquent des signaux à l'oscillographe. La vitesse de balayage étant connue, on déduit le *temps de vol* θ des électrons en mesurant la distance entre les deux pics.

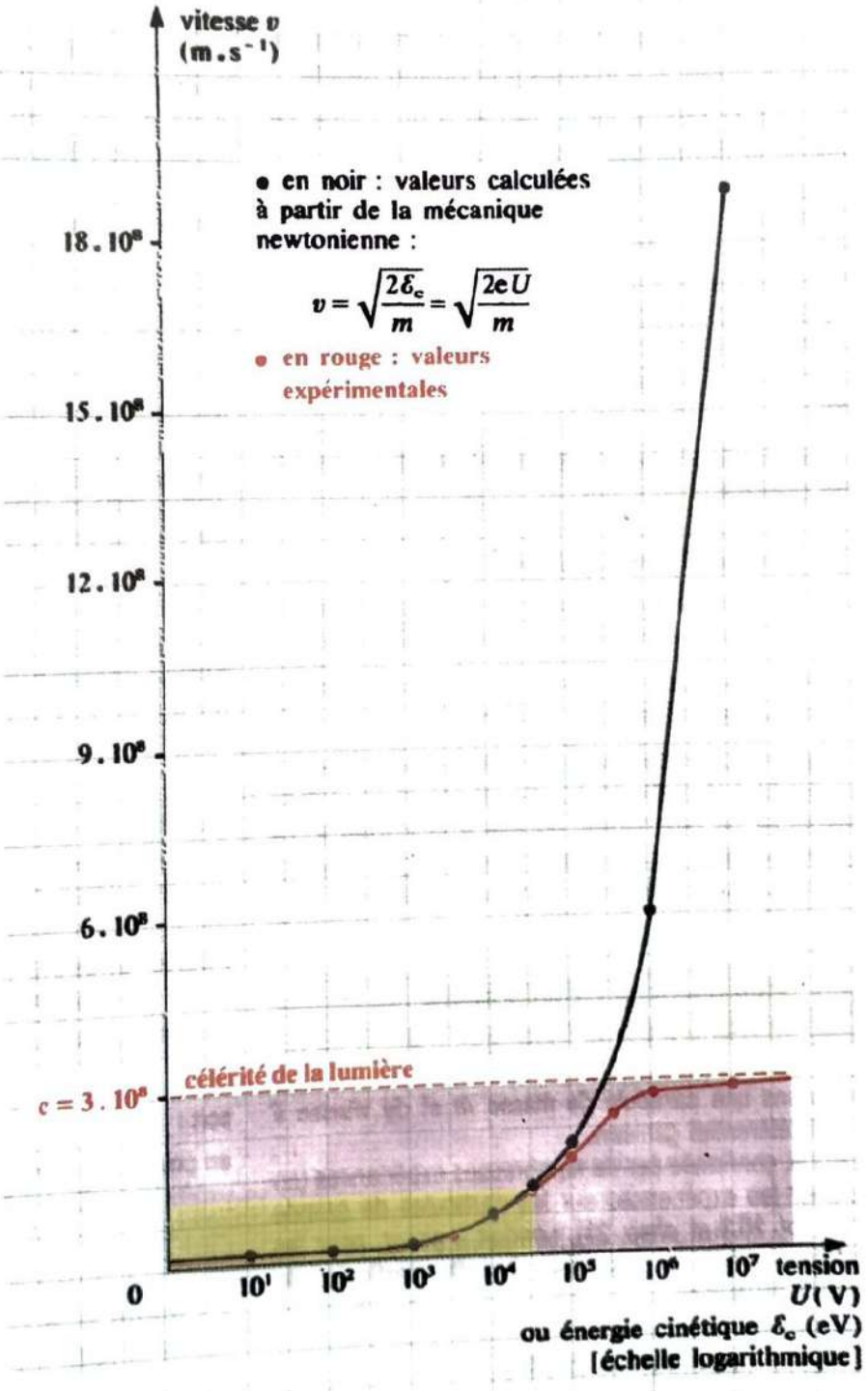
La vitesse est donnée par :

$$v = D_1D_2/\theta = 8{,}4\ \text{m}/\theta.$$

Le détecteur D_2 est constitué par une plaque d'aluminium de masse et de chaleur massique connues. Des thermocouples mesurent sa température. De l'élévation de température provoquée par le choc des électrons, on déduit l'énergie cinétique transformée en chaleur. La plaque D_2 constitue l'une des armatures d'un condensateur dont la charge varie quand il reçoit des électrons. On en déduit le nombre d'électrons recueillis. On vérifie que $\mathcal{E}_c = eU$, comme en mécanique newtonienne.

U(V)	10^2	10^3	10^4	5.10^4	10^5	5.10^5	10^6	10^7
$v = \sqrt{\frac{2e.U}{m}}$	0,06	0,19	0,6	1,34	1,9	4,24	6	19
v expérimentale ($\times 10^8$)	0,06	0,19	0,59	1,25	1,66	2,60	2,83	2,998





Scanné avec CamScanner

• La célérité de la lumière dans le vide est la même dans tous les repères galiléens; c'est une constante universelle. Elle ne dépend pas de la vitesse de la source de lumière.

Des mesures récentes ont donné :

$$c = 2{,}997\,924\,58 . 10^8 \text{ m.s}^{-1}.$$

Nous adopterons couramment :

$$c = 3 . 10^8 \text{ m.s}^{-1}.$$

Ce postulat étant contraire à la loi de composition des vitesses de la cinématique galiléenne, Einstein dut créer une nouvelle cinématique *(la cinématique relativiste)* que nous ne pouvons développer ici. Nous en retiendrons cependant une conséquence importante que confirme, par exemple, l'expérience de Bertozzi :

• La célérité de la lumière dans le vide apparaît comme une vitesse limite impossible à atteindre pour un objet matériel.

D'autre part, la célérité de la lumière dans le vide est déduite de la théorie des ondes électromagnétiques de Maxwell, qui elle-même découle des lois de l'électromagnétisme, par la relation $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$. Nous devons donc admettre que les lois de l'électromagnétisme sont, comme toutes les lois de la physique, indépendantes du choix du repère galiléen dans lequel on les applique. Le postulat de base sur lequel repose la théorie de la relativité est donc le suivant :

• Toutes les lois physiques ont même forme dans tous les repères galiléens.

20.4.2 masse d'une particule

Nous admettrons comme l'un des postulats fondamentaux de la mécanique relativiste l'invariance de la masse :

• La masse d'une particule isolée est un scalaire invariant dans tout changement de repère galiléen.

Cela signifie que cette masse a la même valeur dans le référentiel lié à la particule, où elle est immobile, et dans le référentiel du laboratoire, où elle a la vitesse $\vec{v}$. La masse ne varie pas quand la vitesse change, même si cette vitesse est voisine de la vitesse de la lumière.

20.5 grandeurs relativistes associées à une particule

Considérons une particule de masse m et de vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel galiléen.
La théorie, confirmée par de nombreuses expériences (en particulier les expériences sur les particules de grande énergie, *cf.* 20.3 et *chap.* 21), conduit à poser, pour les grandeurs cinétiques associées à cette particule, de nouvelles définitions.

20.5.1 les coefficients β et γ

Dans les expressions relativistes apparaissent deux coefficients, notés respectivement β et γ.

1. Le coefficient β est égal au rapport entre la vitesse v de la particule et la célérité c de la lumière dans le vide :

$$\beta = \frac{v}{c}.$$

Remarquons qu'il est naturel de faire intervenir la célérité c, limite que ne peut pas dépasser la vitesse d'une particule. β est donc toujours inférieur à 1 et ne dépend pas des unités de vitesse. Nous dirons que ce coefficient est *sans dimension*.

2. Le coefficient γ est défini par :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ce coefficient, également sans dimension, est *toujours supérieur ou égal à* 1. Remarquons que γ tend vers 1 lorsque $\beta \ll 1$, c'est-à-dire lorsque $v \ll c$ (cas limite de la mécanique newtonienne).

20.5.2 quantité de mouvement

L'expression relativiste de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

(en norme, $p = \gamma m v$).

Remarque : Cette expression est en accord avec la définition de la quantité de mouvement par la mécanique newtonienne; en effet, lorsque $v \ll c$, γ tend vers 1, et $\vec{p} = m\vec{v}$ (voir paragraphe 20.7).

20.5.3 énergie cinétique

L'expérience de Bertozzi montre que l'expression classique de l'énergie cinétique n'est plus valable pour des particules de grande vitesse. L'expression relativiste est :

$$\mathcal{E}_c = (\gamma - 1) mc^2.$$

Nous verrons (paragraphe 20.7) que cette expression est en accord avec la définition newtonienne de l'énergie cinétique lorsque γ tend vers 1.

20.5.4 énergie d'une particule, énergie de masse

Transformons l'expression de l'énergie cinétique; il vient :

$$\gamma mc^2 = \mathcal{E}_c + mc^2,$$

soit :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_0,$$

en posant : $\mathcal{E} = \gamma mc^2 =$ **énergie totale** de la particule,
$\mathcal{E}_0 = mc^2 =$ **énergie de masse**, ou énergie de repos de la particule (en effet, lorsque $v = 0$, $\gamma = 1$ et $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$).

• L'énergie totale d'une particule de masse m est la somme de son énergie cinétique et de son énergie de masse :

$$\mathcal{E} = \gamma mc^2 = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_0,$$

avec $\mathcal{E}_c = (\gamma - 1) mc^2$ et $\mathcal{E}_0 = mc^2$.

Scanné avec CamScanner

La relation :

$$\mathcal{E}_0 = mc^2$$

exprime le principe d'équivalence masse-énergie proposé par Einstein.

20.5.5 quelques relations remarquables

Rappelons les formules relativistes des principales grandeurs associées à une particule de grande vitesse :

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}, \quad (1) \qquad \mathcal{E}_c = (\gamma - 1)\, mc^2, \quad (3)$$

$$\mathcal{E} = \gamma mc^2, \quad (2) \qquad \mathcal{E}_0 = mc^2. \quad (4)$$

A partir des relations (1) et (2), nous obtenons, en norme :

$$p = \frac{\mathcal{E}}{c^2} v, \quad \text{ou encore} \quad pc = \mathcal{E}\frac{v}{c},$$

soit :

$$\beta = \frac{pc}{\mathcal{E}}. \qquad (5)$$

La relation (2) s'écrit :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\mathcal{E}_0,$$

soit, d'après (5) :

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_0}{\left[1-\left(\frac{pc}{\mathcal{E}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Élevons au carré cette dernière expression :

$$\mathcal{E}^2\left[1-\left(\frac{pc}{\mathcal{E}}\right)^2\right] = \mathcal{E}_0^2,$$

soit :

$$\mathcal{E}^2 - (pc)^2 = \mathcal{E}_0^2, \qquad (6)$$

ou encore :

$$\mathcal{E}^2 - (pc)^2 = m^2c^4.$$

m et c étant des invariants, c'est-à-dire des quantités dont la valeur ne dépend pas du référentiel galiléen choisi, il résulte de la relation (6) que la quantité $\mathcal{E}^2 - (pc)^2$ associée à une particule *est un invariant relativiste.*

20.5.6 Interprétation géométrique : le triangle relativiste

Un triangle rectangle (*fig.* 5) permet de mémoriser facilement les formules relativistes à l'aide des associations suivantes :

$$OA \longleftrightarrow \mathcal{E}_0 = mc^2, \quad AP \longleftrightarrow pc,$$

$$OP \longleftrightarrow \mathcal{E} = \gamma mc^2.$$

Le théorème de Pythagore donne en effet :

$$\mathcal{E}^2 = \mathcal{E}_0^2 + p^2c^2.$$

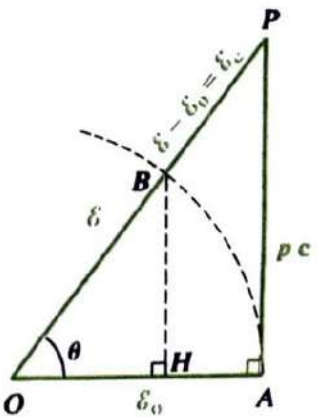
Soit B tel que $OA = OB$; il vient alors :

$$BP \longleftrightarrow \mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_c.$$

Enfin :

$$\cos\theta = \frac{OA}{OP} = \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}} = \frac{mc^2}{\gamma mc^2} = \frac{1}{\gamma},$$

$$\sin\theta = \frac{AP}{OP} = \frac{pc}{\mathcal{E}} = \frac{\gamma mvc}{\gamma mc^2} = \frac{v}{c} = \beta.$$



5.

20.6 unités particulières

L'utilisation du système international d'unités est peu commode : masses très petites des particules, vitesses très grandes, etc. Aussi allons-nous utiliser, pour les différentes grandeurs relativistes, des unités particulières. Ce sont :

- *la célérité de la lumière* c *comme unité de vitesse.* Le coefficient $\beta = v/c$ permet d'exprimer « en c » la vitesse de la particule;
- *le* MeV (*ou le* GeV) *comme unité d'énergie.* Rappelons que 1 MeV $= 1{,}6.10^{-13}$ J;
- *le* $\text{MeV}.c^{-2}$ *comme unité de masse.* En effet, la masse d'une particule peut s'exprimer à l'aide de la relation $m = \mathcal{E}_0/c^2$;
- *le* $\text{MeV}.c^{-1}$ *comme unité de quantité de mouvement.*

20.7 domaines respectifs d'application de la mécanique newtonienne et de la mécanique relativiste

Nous avons déjà noté à propos de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique que les formules relativistes permettaient de retrouver les formules utilisées en mécanique newtonienne, lorsque la vitesse v de la particule est très petite devant la célérité c de la lumière dans le vide ($\beta \ll 1$). Précisons les écarts de p et de $\mathcal{E}_c$ avec les valeurs limites de la mécanique newtonienne.

1. Quantité de mouvement

Notons $p_N = mv$ la norme de la quantité de mouvement newtonienne; nous avons : $p = \gamma mv = \gamma p_N$.

L'écart relatif s'écrit donc : $\dfrac{p - p_N}{p_N} = \gamma - 1$.

Or on peut démontrer, lorsque $\beta \ll 1$, que cette relation conduit à (*) :

$$\frac{p - p_N}{p_N} \approx \frac{1}{2}\beta^2;$$

l'écart relatif entre p et p_N est donc très faible lorsque $\beta \ll 1$.

(*) Cette démonstration utilise l'identité mathématique

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \ldots + k(n)\beta^{2n} + \ldots,$$

où $k(n)$ est un facteur inférieur à 1, qui ne dépend que de l'entier n. Si β est inférieur à 1, les termes de ce *développement* deviennent négligeables à partir d'un certain rang, et ce d'autant plus que β est petit. Par exemple, si on néglige tous les termes au-delà du rang 2, il vient :

$$\gamma \approx 1 + \frac{1}{2}\beta^2, \quad \text{soit} \quad \gamma - 1 \approx \frac{1}{2}\beta^2.$$

APPLICATION 1

L'unité de masse atomique (u) *est définie comme étant égale au douzième de la masse d'un atome de carbone* 12 (*voir* chap. 22).
Calculer sa valeur en $\text{MeV}.c^{-2}$.

On prendra :

$$N_A = 6{,}022\,098.10^{23}, \quad c = 2{,}997\,92.10^8 \text{ m.s}^{-1},$$
$$e = 1{,}602\,19.10^{-19} \text{ C}.$$

Exprimons tout d'abord l'unité de masse atomique en kg; il vient :

$$1 \text{ u} = \frac{12}{12 \times 6{,}022\,098.10^{23}} \text{ g} = 1{,}660\,55.10^{-27} \text{ kg}.$$

Calculons l'énergie de masse correspondante en J, puis en MeV :

$$\mathcal{E}_0 = mc^2 = 1{,}660\,55.10^{-27} \times (2{,}997\,92.10^8)^2 = 1{,}492\,42.10^{-10} \text{ J};$$

d'où : $\mathcal{E}_0 = \dfrac{1{,}492\,42.10^{-10}}{1{,}602\,19.10^{-19}} \approx 931{,}5.10^6 \text{ eV},$

soit : $\mathcal{E}_0 \approx 931{,}5 \text{ MeV}.$

Or : $m = \dfrac{\mathcal{E}_0}{c^2};$

d'où : $1 \text{ u} = 931{,}5 \text{ MeV}.c^{-2}.$

Notons que la masse du proton et celle du neutron sont très voisines de l'unité de masse atomique :

$$m_n = 939{,}6 \text{ MeV}.c^{-2}, \quad m_p = 938{,}3 \text{ MeV}.c^{-2}.$$

APPLICATION 2

Calculer la vitesse d'un proton d'énergie 1 500 MeV ***de deux manières différentes, sachant que l'énergie de masse d'un proton vaut*** 938 MeV.

Calculons γ à partir de la relation :

$$\mathcal{E} = \gamma mc^2 = \gamma \mathcal{E}_0,$$

soit : $\gamma = \dfrac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0} = \dfrac{1\,500}{938} = 1{,}6.$

Or : $\gamma = \dfrac{1}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \gamma^2 = \dfrac{1}{1-\beta^2}, \quad \beta^2 = 1 - \dfrac{1}{\gamma^2};$

d'où : $\beta = \left[1 - \dfrac{1}{(1{,}6)^2}\right]^{\frac{1}{2}} = 0{,}78,$

et : $v = 0{,}78c \approx 2{,}34.10^8 \text{ m.s}^{-1}.$

Nous pouvons également obtenir directement β à partir de la relation :

$$\beta = \frac{pc}{\mathcal{E}},$$

sachant que $(pc)^2 = \mathcal{E}^2 - \mathcal{E}_0^2$, soit :

$$\beta = \frac{\sqrt{\mathcal{E}^2 - \mathcal{E}_0^2}}{\mathcal{E}} = \frac{\sqrt{(1\,500)^2 - (938)^2}}{1\,500} = 0{,}78.$$

Scanné avec CamScanner

APPLICATION 3

Calculer la vitesse d'un électron de quantité de mouvement $p = 2\ \text{MeV}.c^{-1}$, sachant que la masse d'un électron vaut $0{,}5\ \text{MeV}.c^{-2}$.

Calculons directement β à partir des relations :

$$\beta = \frac{pc}{\mathcal{E}} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}^2 = (pc)^2 + \mathcal{E}_0^2.$$

Avec : $pc = 2\ \text{MeV}$ et $\mathcal{E}_0 = 0{,}5\ \text{MeV}$,

il vient alors : $\beta = \dfrac{2}{\sqrt{2^2 + 0{,}5^2}} = 0{,}97$,

soit : $v = 0{,}97c = 2{,}91.10^8\ \text{m.s}^{-1}$.

Nous pouvons également obtenir β par le calcul suivant :

$$p = m\gamma v,$$

ou encore : $pc = mc^2\gamma\dfrac{v}{c} = \mathcal{E}_0\gamma\beta$;

d'où : $\gamma\beta = \dfrac{pc}{\mathcal{E}_0} = \dfrac{2}{0{,}5} = 4.$

Or : $\gamma^2 = \dfrac{1}{1-\beta^2}$,

soit : $1 + \beta^2\gamma^2 = \gamma^2$;

d'où : $\gamma^2 = 17$,

et : $\beta = \sqrt{1 - \dfrac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{\dfrac{16}{17}} = 0{,}97.$

2. Énergie cinétique

Notons $\mathcal{E}_{c_N} = \dfrac{1}{2}mv^2$ l'énergie cinétique newtonienne; nous avons :

$$\mathcal{E}_{c_N} = \frac{1}{2}mc^2\beta^2 = \frac{1}{2}\mathcal{E}_0\beta^2.$$

Avec $\mathcal{E}_c = (\gamma - 1)mc^2 = (\gamma - 1)\mathcal{E}_0$, on peut démontrer, lorsque $\beta \ll 1$, que (*) :

$$\frac{\mathcal{E}_c - \mathcal{E}_{c_N}}{\mathcal{E}_{c_N}} \approx \frac{3}{4}\beta^2;$$

l'écart relatif entre $\mathcal{E}_c$ et $\mathcal{E}_{c_N}$ est donc très faible lorsque $\beta \ll 1$.

20.7.2 comment reconnaître si une particule est relativiste?

Quels critères faut-il utiliser pour savoir si nous devons traiter les grandeurs cinétiques associées à une particule dans le cadre de la relativité ou dans celui de la mécanique classique? Il est bien évident que cela dépendra de la précision avec laquelle on désire exprimer les résultats. Choisissons, par exemple, de définir la limite entre les domaines classique et relativiste par un écart relatif maximal de 10 %, et déterminons le coefficient γ correspondant.

1. Pour la quantité de mouvement, il vient :

$$\frac{p - p_N}{p_N} = \gamma - 1 = 0{,}1,$$

soit : $\gamma = 1{,}1.$

2. De même pour l'énergie cinétique :

$$\frac{\mathcal{E}_c - \mathcal{E}_{c_N}}{\mathcal{E}_{c_N}} = \frac{3}{4}\beta^2 = \frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) = 0{,}1,$$

soit : $\gamma = 1{,}07 \approx 1{,}1.$

Nous pouvons donc énoncer :

- Pour une précision de l'ordre de 10 % sur les grandeurs cinétiques, les formules relativistes s'imposent si $\gamma \geq 1{,}1$.

Adoptons $\gamma = 1{,}1$ comme limite entre les domaines classique et relativiste. La valeur correspondante de β est :

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \approx 0{,}42.$$

Nous obtenons alors :

$$\frac{pc}{\mathcal{E}_0} = \frac{\gamma mvc}{mc^2} = \gamma\beta \approx 0{,}5.$$

Si $pc > 0{,}5\mathcal{E}_0$, la particule doit donc être considérée comme relativiste.

Enfin, faisons le rapport $\mathcal{E}_c/\mathcal{E}_0$; il vient :

$$\frac{\mathcal{E}_c}{\mathcal{E}_0} = \frac{(\gamma - 1)mc^2}{mc^2} = \gamma - 1 = 0{,}1.$$

Si $\mathcal{E}_c > 0{,}1\mathcal{E}_0$, la particule doit donc être considérée comme relativiste.

Remarque : Si des particules « légères » (électrons, protons, antiprotons, ...) peuvent facilement acquérir des énergies suffisantes pour être relativistes, il est en revanche difficile, voire impossible, de rendre relativistes des particules « lourdes » (noyaux d'hélium, ions lourds, ...) avec les accélérateurs de particules actuels.

20.8 particules ultra-relativistes

Il s'agit de particules dont la vitesse est très voisine de celle de la lumière : $\beta \approx 1$ et γ grand.
Dans ce cas, l'énergie de masse $\mathcal{E}_0 = mc^2$ est négligeable devant l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c$, l'énergie totale $\mathcal{E}$ ou encore le produit pc :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_0 \approx \mathcal{E}_c$$

et : $$\mathcal{E} = \frac{pc}{\beta} \approx pc.$$

Scanné avec CamScanner

Si nous voulons définir une limite entre les domaines relativiste et ultra-relativiste, nous pouvons la choisir de telle sorte que :

$$\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0} > 10 \quad \text{ou} \quad \frac{pc}{\mathcal{E}_0} > 10 \quad \text{ou} \quad \frac{\mathcal{E}_c}{\mathcal{E}_0} > 10.$$

Nous pouvons aisément vérifier que ces relations sont toutes satisfaites pour $\gamma > 10$, ce qui correspond à $\beta \geq 0{,}995$.

- **Si $\gamma > 10$, la particule est ultra-relativiste, et $\mathcal{E} \approx \mathcal{E}_c \approx pc$.**

En résumé :

γ	1	1,1	10	∞
domaine	non relativiste	relativiste	ultra-relativiste	

APPLICATION 4

Calculer la quantité de mouvement, l'énergie totale et la vitesse d'un proton d'énergie cinétique 200 GeV.

On prendra : $m_p = 938{,}3 \text{ MeV}.c^{-2}$.

Calculons γ :

$$\frac{\mathcal{E}_c}{\mathcal{E}_0} = \frac{m(\gamma-1)c^2}{mc^2} = \gamma - 1;$$

or :
$$\frac{\mathcal{E}_c}{\mathcal{E}_0} = \frac{200.10^3}{938{,}3} = 213;$$

d'où $\gamma = 214$. Ainsi, la particule étant ultra-relativiste :

$$p \approx 200 \text{ GeV}.c^{-1} \quad \text{et} \quad \mathcal{E} \approx 200 \text{ GeV}.$$

D'autre part :
$$\beta = \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= 0{,}999\,989;$$

d'où :
$$v \approx c.$$

APPLICATION 5

Dans un accélérateur de particules, on peut produire des protons d'une énergie cinétique de 30 MeV, de 300 MeV ou de 30 GeV.

1/ Pour une précision d'environ 10 % ces protons sont-ils relativistes? On prendra $m_p = 938 \text{ MeV}.c^{-2}$.

2/ Déterminer l'énergie totale, les coefficients γ et β et la quantité pc.

3/ Construire dans chaque cas le triangle rectangle relativiste.

1/ Pour une précision d'environ 10 %, un proton est relativiste si :

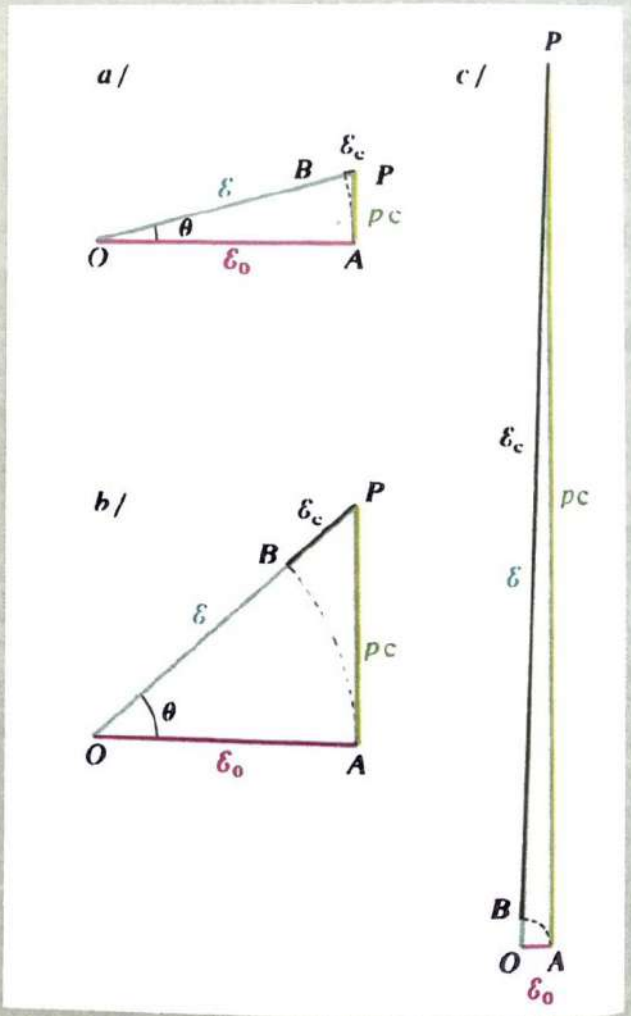
$$\mathcal{E}_c > 0{,}1\mathcal{E}_0 \approx 93{,}8 \text{ MeV}.$$

Un proton tel que $\mathcal{E}_c = 30$ MeV n'est pas relativiste, les autres protons le sont.
Un proton tel que $\mathcal{E}_c = 30\,000$ MeV peut être considéré comme ultra-relativiste.

2/ Les résultats sont donnés dans le tableau ci-après :

$\mathcal{E}_c$ (MeV)	30	300	30 000
$\mathcal{E} = \mathcal{E}_c + mc^2$	968	1 238	30 938
$\gamma = \dfrac{\mathcal{E}}{mc^2}$	1,032	1,320	32,983
$\beta = \left(1 - \dfrac{1}{\gamma^2}\right)^{\frac{1}{2}}$	0,247	0,653	0,999 5
$pc = mc^2\gamma\beta$ (MeV)	239	808	30 924

3/ Voir figure ci-contre.



a. *Particule non relativiste :* $\mathcal{E}_c \ll \mathcal{E} \approx \mathcal{E}_0$.

b. *Particule relativiste :* $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_c$ *et* p_c *sont du même ordre de grandeur.*

c. *Particule ultra-relativiste :* $\mathcal{E}_0 \ll \mathcal{E} \approx \mathcal{E}_c \approx p_c$.

Scanné avec CamScanner

EXERCICES

L'essentiel du cours

20.1 A Dans chacun des cas, trouver les formules ou les propositions exactes :

a/ $\vec{v} = \frac{c}{\mathcal{E}}\vec{p}$; $\frac{1}{c}\vec{v} = \frac{c}{\mathcal{E}}\vec{p}$; $\vec{v} = \frac{1}{\mathcal{E}}\vec{p}$.

b/ $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m\gamma v^2$; $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}(\gamma - 1)mc^2$; $\mathcal{E}_c = (\gamma - 1)mc^2$.

c/ $\mathcal{E}^2 + p^2c^2 = \mathcal{E}_0^2$; $\mathcal{E}^2 - p^2c^2 = \mathcal{E}_0^2$; $\mathcal{E}^2 + \mathcal{E}_0^2 = p^2c^2$.

d/ Une masse s'exprime en MeV . c^2; en MeV; en MeV . c^{-2}.

e/ Une quantité de mouvement s'exprime en MeV . c; en MeV . c^{-1}; en c . MeV^{-1}.

20.2 A Avec une précision de l'ordre de 10 %, une particule peut être considérée comme relativiste si :

a/ $\gamma \geqslant 1{,}1$;
b/ $\mathcal{E}_C \geqslant 0{,}1\mathcal{E}_0$;
c/ $1{,}1\mathcal{E}_0 \leqslant pc$;
d/ $\mathcal{E} \geqslant 1{,}1\mathcal{E}_0$;
e/ $1{,}1\mathcal{E}_0 \leqslant \mathcal{E}_c$;
f/ $\beta \geqslant 0{,}5$.

Toutes ces propositions sont-elles vraies ?

Exercices de base

Pour tous les exercices, on prendra, sauf indication contraire : $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C ; $m_e = 0{,}5$ MeV . c^{-2} ; $m_p = 938$ MeV . c^{-2} ; $m_n = 939$ MeV . c^{-2} ; $c = 3 \cdot 10^8$ m . s^{-1}.

20.3 A Un électron de masse $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg est animé d'une vitesse $v = 1{,}6 \cdot 10^8$ m . s^{-1}.

1/ Calculer les coefficients β et γ. Cet électron est-il relativiste ?

2/ Calculer avec les unités S.I. sa quantité de mouvement, son énergie totale et son énergie cinétique.

20.4 A Un proton possède une vitesse égale à 280 000 km . s^{-1}.

1/ Calculer les coefficients β et γ. Ce proton est-il relativiste ?

2/ Calculer sa quantité de mouvement (en MeV . c^{-1}), son énergie totale (en MeV) et son énergie cinétique (en MeV).

20.5 A Un antiproton, de masse 938 MeV . c^{-2}, a une quantité de mouvement de 1 170 MeV . c^{-1}.

1/ Est-il relativiste ?

2/ Calculer en MeV son énergie totale et son énergie cinétique.

3/ Quelle est sa vitesse ?

20.6 A Un neutron possède une énergie cinétique de 560 MeV.

1/ Est-il relativiste ?

2/ Calculer en MeV . c^{-1} sa quantité de mouvement.

3/ Quelle est sa vitesse ?

20.7 A Un électron possède une énergie totale de 1 MeV.

1/ Est-il relativiste ?

2/ Calculer son énergie cinétique et sa quantité de mouvement.

3/ Quelle est sa vitesse ?

4/ On admet que la variation de l'énergie cinétique d'une particule relativiste est encore donnée par :

$$\mathcal{E}_{c_2} - \mathcal{E}_{c_1} = q(V_1 - V_2).$$

Sous quelle tension l'électron, initialement au repos, a-t-il été accéléré ?

20.8 A A la sortie d'un synchrotron, des protons possèdent une énergie cinétique de 5 GeV.

1/ Déterminer leur vitesse et leur quantité de mouvement :

a/ en appliquant les formules de la mécanique classique ;
b/ en appliquant les formules de la mécanique relativiste.

2/ Conclure.

20.9 A Compléter le tableau ci-après et indiquer si les particules considérées sont classiques ou relativistes, en prenant comme limite $\gamma = 1{,}1$.

particule	e^-	π^+	p	n	π^0	τ
masse (MeV . c^{-2})	0,5	140	938	939	135	3747
p (MeV . c^{-1})	1,0				300	
$\mathcal{E}$ (MeV)			1 000			
$\mathcal{E}_c$ (MeV)		8		2 000		5

20.10 C Dans un accélérateur de particules, on peut produire des protons d'énergie cinétique égale à 30 MeV, 300 MeV et 3 GeV. Après avoir déterminé dans chaque cas les grandeurs $\mathcal{E}$ et pc de ces protons, dessiner les triangles relativistes correspondants.

Banc d'essais

20.11 AB3 Un proton a une vitesse de 0,7 c. Trouver la vitesse d'un méson π^0 ayant :

a/ la même énergie cinétique ;
b/ la même quantité de mouvement.

Donnée : $m_{\pi^0} = 135$ MeV . c^{-2}.

↳ **ex. 20.1, 20.3.**

Scanné avec CamScanner

EXERCICES

20.12 AB3 1/ Calculer la vitesse et la quantité de mouvement d'un proton dont l'énergie cinétique est le double de son énergie de masse.

2/ Même question pour un électron.

↳ ex. 20.6, 20.7.

20.13 AB3 Déterminer la vitesse pour laquelle la quantité de mouvement d'un deuton est égale à $m_d c$.

Donnée : $m_d = 1\,875{,}6$ MeV . c^{-2}.

20.14 AB3 Un proton a une vitesse de 0,9 c.

1/ Déterminer la vitesse d'un méson π^0 ayant la même quantité de mouvement.

2/ Déterminer la vitesse d'une particule α ayant la même quantité de mouvement.

3/ Conclure.

Données : $m_{\pi^0} = 140$ MeV . c^{-2}; $m_\alpha = 3\,827$ MeV . c^{-2}.

↳ ex. 20.5.

20.15 AB3 Dans une chambre à bulles, on a mesuré la quantité de mouvement de divers groupes de protons :

$p_1 = 600$ MeV . c^{-1}; $p_2 = 20$ MeV . c^{-1}; $p_3 = 25$ GeV . c^{-1}.

1/ Caractériser chaque groupe de protons (particules non relativites, relativistes ou ultrarelativistes). On prendra pour limites $\gamma = 1{,}1$ et $\gamma = 10$.

2/ Calculer les énergies cinétiques correspondantes.

↳ ex. 20.9, 20.10.

20.16 AB3 Dans un bêtatron (accélérateur d'électrons), on a produit des électrons d'énergie cinétique :

$$\mathcal{E}_{c_1} = 10 \text{ keV}; \quad \mathcal{E}_{c_2} = 1 \text{ MeV}; \quad \mathcal{E}_{c_3} = 40 \text{ MeV}.$$

1/ Caractériser chaque groupe d'électrons (particules non relativites, relativistes ou ultrarelativistes).

2/ Calculer les quantités de mouvement correspondantes.

↳ ex. 20.9, 20.10.

20.17 B3C Calculer l'énergie nécessaire pour accélérer un proton, du repos à 0,4 c; de 0,4 c à 0,8 c; de 0,8 c à 0,95 c; de 0,95 c à 0,99 c. Conclure.

20.18 B3C Des électrons sont accélérés pratiquement à partir du repos sous une tension $U = 600$ kV.

1/ Quelle serait la vitesse de ces électrons en mécanique classique ? Conclure.

2/ Quelle est leur vitesse si on applique les lois de la mécanique relativiste ?

↳ ex. 20.7, 20.9.

20.19 B3C 1/ Déterminer la vitesse maximale d'une particule de masse m pour que sa quantité de mouvement puisse s'écrire $p = mv$ avec une marge d'erreur de 1 %.

2/ C1 Calculer l'écart relatif correspondant $\dfrac{\mathcal{E}_c - \mathcal{E}_{cN}}{\mathcal{E}_{cN}}$.

3/ B3 Calculer (en MeV) l'énergie cinétique d'un proton et celle d'un méson π^+ se déplaçant à cette vitesse.

Données : $m_{\pi^+} = 140$ MeV . c^{-2}; $m_p = 938$ MeV . c^{-2};

$$(1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{4}\beta^4.$$

20.20 B3 Soit une particule d'énergie au repos :

$$\mathcal{E}_0 = mc^2.$$

1/ Tracer dans un même système d'axes les graphes des fonctions :

a/ $\beta \mapsto \dfrac{1}{\mathcal{E}_0} pc$, où p est la quantité de mouvement relativiste ;

b/ $\beta \mapsto \dfrac{1}{\mathcal{E}_0} p'c$, où p' est la quantité de mouvement newtonienne.

2/ Tracer dans un même système d'axes les graphes des fonctions :

a/ $\beta \mapsto \mathcal{E}_c$, où $\mathcal{E}_c$ est l'énergie cinétique relativiste ;

b/ $\beta \mapsto \dfrac{\mathcal{E}'_c}{\mathcal{E}_0}$, où $\mathcal{E}'_c$ est l'énergie cinétique classique.

3/ Conclure en comparant la limite classique et la limite relativiste.

20.21 B3C 1/ Déterminer la vitesse maximale d'une particule de masse m dont l'énergie cinétique peut s'écrire $\mathcal{E}_c = \dfrac{1}{2} mv^2$ avec une erreur ne dépassant pas 1 %.

2/ Calculer alors $\dfrac{p - p_N}{p_N}$, avec $p_N = mv$.

3/ Calculer les quantités de mouvement d'un électron et d'une particule α se déplaçant à cette vitesse.

Donnée : $m_\alpha = 3\,727$ MeV . c^{-2}.

20.22 A 1/ Rappeler l'expression relativiste de l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c$ d'une particule. Dans le cas où $v \ll c$, retrouver à partir de $\mathcal{E}_c$ l'expression de l'énergie cinétique en mécanique classique.

2/ B3C On peut considérer une particule comme relativiste si :

$$\frac{\mathcal{E}_c}{\mathcal{E}_0} \geqslant \frac{1}{100}.$$

Déterminer l'ordre de grandeur de la tension accélératrice qui permet de rendre un électron relativiste. Quelle est alors sa vitesse ?

Un électron peut-il facilement devenir relativiste ?

Donnée : $\mathcal{E}_0 = 0{,}5$ MeV.

3/ B3C Un accélérateur fournit des protons d'énergie cinétique 700 MeV. Calculer la quantité de mouvement d'un proton.

Donnée : $\mathcal{E}_0 = 938$ MeV.

20.23 Un proton, de vitesse $\vec{v}$, rencontre un proton au repos. La collision est élastique. Les deux protons sont éjectés avec de nouvelles vitesses $\vec{v}'_1$ et $\vec{v}'_2$.

1/ AC2B3 On applique les lois de la mécanique newtonienne à ce choc élastique : conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique.

Scanné avec CamScanner

2/ Montrer que les vecteurs $\vec{v}_1'$ et $\vec{v}_2'$ sont orthogonaux. Exprimer en fonction de v les vitesses v_1' et v_2' dans le cas où les protons sont éjectés symétriquement par rapport à la direction suivie par le proton incident.
Application numérique : l'énergie cinétique du proton incident est 5 MeV et $m_p = 938$ MeV . c $^{-2}$.

3/ **B3** Refaire l'application numérique avec une énergie cinétique de 30 GeV. Conclure.

20.24 Des neutrons sont éjectés lors d'une désintégration nucléaire avec une énergie cinétique de 1 MeV.

1/ **AB3** Ces neutrons sont-ils relativistes? Calculer leur vitesse.

Donnée : m_n 939 MeV . c $^{-2}$.

2/ **C2** Un tel neutron rencontre un atome d'hydrogène. On admet que la masse de l'atome d'hydrogène est sensiblement égale à celle du neutron. A l'aide des lois de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique en mécanique newtonienne, montrer que le neutron peut soit transférer son énergie cinétique à l'atome d'hydrogène, soit être éjecté dans une direction orthogonale à la direction suivie par l'atome d'hydrogène après le choc.

3/ **B3C2** On appelle *neutron thermique* un neutron de faible énergie cinétique correspondant à l'énergie moyenne d'agitation thermique à la température absolue T :

$$\mathcal{E}_c = \frac{3}{2} kT, \text{ avec } k = 1{,}38 . 10^{-23} \text{ J . K}^{-1}.$$

Calculer les températures correspondant à des neutrons d'énergie cinétique de 0,1 MeV et de 1 MeV.

Scanné avec CamScanner

21 PARTICULES DE GRANDE ÉNERGIE, VÉRIFICATIONS EXPÉRIMENTALES

21.1 généralités

C'est essentiellement au cours de séances de travaux pratiques que nous vérifierons la validité des expressions admises en mécanique relativiste pour la quantité de mouvement, l'énergie cinétique et l'énergie totale :

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v};$$
$$\mathcal{E}_c = (\gamma - 1) mc^2;$$
$$\mathcal{E} = \gamma mc^2 = \mathcal{E}_c + mc^2;$$
$$\mathcal{E} = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}.$$

Ces vérifications se feront à l'aide de clichés effectués dans une chambre à bulles et représentant le choc de deux protons dont l'un est au repos. Les événements étudiés ont été sélectionnés de telle sorte que les trajectoires soient coplanaires et situées dans un plan parallèle au plan du film photographique.

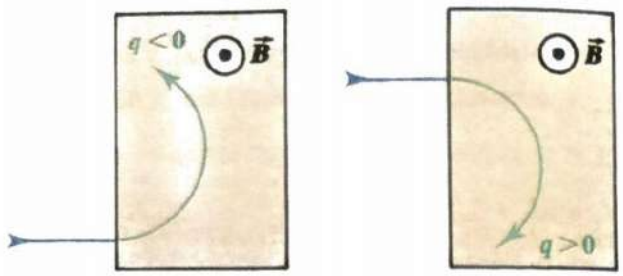
Les trajectoires des particules chargées sont courbées sous l'action d'un champ magnétique normal au plan de la trajectoire. Nous avons vu que dans un champ magnétique $\vec{B}$, la mesure de la vitesse d'une particule de charge q reste constante (mouvement uniforme). La puissance $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$ de la force de Lorentz $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ est nulle, $\vec{F}$ étant orthogonale à $\vec{v}$; l'énergie cinétique de la particule reste constante. En mécanique relativiste, cette propriété subsiste.

• Lorsqu'une particule chargée est soumise à l'action d'un champ magnétique, son énergie cinétique $\mathcal{E}_c = (\gamma - 1) mc^2$ reste constante.

Il s'ensuit que le facteur $\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$ reste constant, égal à sa valeur initiale. Le mouvement de la particule est donc analogue au mouvement classique : si le vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$ est orthogonal à $\vec{B}$, le mouvement est circulaire, de rayon R.

En particulier, reste valable la relation (*cf. chap.* 7) :

$$\|\vec{p}\| = |q| R \|\vec{B}\|, \quad \text{avec} \quad \|\vec{p}\| = \gamma m \|\vec{v}\|,$$



1. *Le sens de la courbure de la trajectoire d'une particule en mouvement dans un champ magnétique est fonction du signe de la charge de la particule.*

que nous notons :

$$p = |q| RB.$$

La seule différence consiste à remplacer m par la constante γm.

Après avoir mesuré R et B, nous pouvons calculer p, connaissant la charge $|q| = ne$, multiple entier de la charge élémentaire.

En fait, il est plus pratique de calculer le produit pc, homogène à une énergie :

$$pc = n(\text{ec}) RB$$
$$= n(1{,}6.10^{-19} \times 3.10^8) RB. \qquad \text{(S.I.)}$$

Si nous voulons exprimer pc en MeV, nous devons diviser le second membre de la relation par $1{,}6.10^{-13}$; il vient :

$$pc = 300 nR B.$$
$$\text{MeV} \quad \text{m T}$$

Par ailleurs, notons que le sens de la courbure est lié au signe de la charge (*fig.* 1).

Scanné avec CamScanner

21.2 lois de conservation

Pour ces vérifications expérimentales, nous utiliserons les lois de conservation suivantes :

1. ***Conservation de la charge électrique***

• La somme algébrique des charges des particules incidentes est égale à la somme algébrique des charges des particules issues du choc.

Signalons que la conservation de la charge est une loi générale de la physique.

2. ***Conservation de la quantité de mouvement***

• La somme vectorielle des quantités de mouvement des particules incidentes est égale à la somme vectorielle des quantités de mouvement des particules issues du choc.

3. ***Conservation de l'énergie totale***

• La somme des énergies totales des particules incidentes est égale à la somme des énergies totales des particules issues du choc.

21.3 premier exemple : choc élastique

Par définition, *dans un choc élastique, la nature des particules est conservée.*

Envisageons le choc élastique de la figure 2 :

proton (1) + proton (2) ⟶ proton (3) + proton (4).

Le proton (2) est au repos.

Le proton (1) a une quantité de mouvement égale à 2072 MeV.c^{-1} et sa masse est de 938 MeV.c^{-2}.

Les mesures des rayons de courbure donnent respectivement pour les protons (1), (3) et (4) :

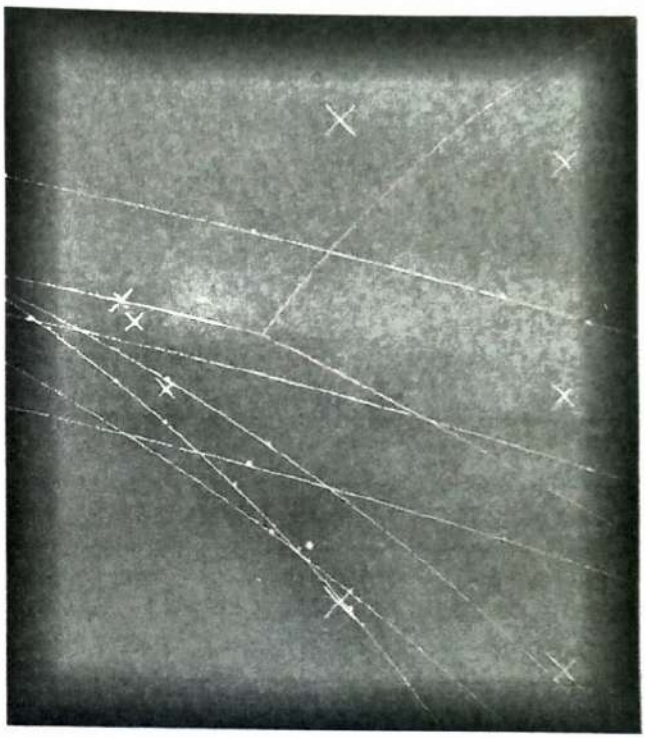
$$R_1 = 400 \text{ cm},$$
$$R_3 = 85 \text{ cm},$$
$$R_4 = 380 \text{ cm}.$$

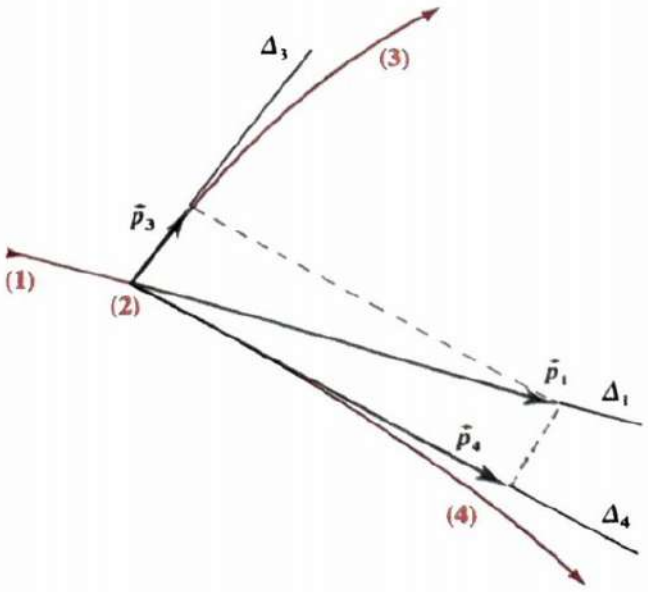
Nous pouvons déterminer immédiatement les normes des vecteurs quantité de mouvement des protons (3) et (4). En effet, nous avons :

$$p_1 = eR_1B,$$
$$p_3 = eR_3B,$$
$$p_4 = eR_4B;$$

d'où :
$$p_3 = p_1 \frac{R_3}{R_1} = 440 \text{ MeV.c}^{-1}$$

et :
$$p_4 = p_1 \frac{R_4}{R_1} = 1968 \text{ MeV.c}^{-1}.$$





2. *Choc élastique d'un proton (1) sur un proton au repos (2), avec production de deux protons (3 et 4).* ▶

1. Conservation de la quantité de mouvement

Les directions des différents vecteurs quantité de mouvement sont obtenues en traçant les tangentes Δ_1, Δ_3, Δ_4 aux différentes trajectoires, à l'intersection des traces des particules (*fig.* 2). Portons, sur chaque tangente, des vecteurs de longueur proportionnelle aux normes des vecteurs quantité de mouvement de chaque particule. Nous vérifions ainsi que :

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4 .$$

Au cours de ce choc, il y a donc conservation de la quantité de mouvement.

Sur d'autres clichés, l'incertitude sur la mesure des rayons de courbure, le freinage des particules dans le liquide de la chambre à bulles, etc. peuvent expliquer de faibles écarts entre $\vec{p}_1$ et la somme vectorielle $\vec{p}_3 + \vec{p}_4$.

2. Conservation de l'énergie totale

Nous pouvons calculer l'énergie totale par :

$$\mathcal{E} = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}.$$

Par exemple :

$$\mathcal{E}_1 = \sqrt{938^2 + 2\,072^2} = 2\,274 \text{ MeV}.$$

proton	1	2	3	4
m (MeV.c^{-2})	938	938	938	938
p (MeV.c^{-1})	2072	0	440	1968
$\mathcal{E}$ (MeV)	2274	938	1036	2180

Vérifions s'il y a conservation de l'énergie totale. A cette fin, calculons :

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = 2\,274 + 938 = 3\,212 \text{ MeV},$$
$$\mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4 = 1\,036 + 2\,180 = 3\,216 \text{ MeV}.$$

Nous avons bien, avec une excellente précision (écart de 4 MeV sur 3212 MeV) :

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4 .$$

Les formules relativistes permettent donc de vérifier que l'énergie totale du système isolé de particules se conserve.

3. Énergie de masse et énergie cinétique relativiste

Exprimons la conservation de l'énergie totale :

$$(\mathcal{E}_1 - mc^2) + (\mathcal{E}_2 - mc^2) = (\mathcal{E}_3 - mc^2) + (\mathcal{E}_4 - mc^2),$$

soit :

$$\mathcal{E}_{c_1} + \mathcal{E}_{c_2} = \mathcal{E}_{c_3} + \mathcal{E}_{c_4} .$$

• Dans le cas particulier d'un *choc élastique* entre particules de grandes énergies, il y a conservation de l'énergie de masse *et* de l'énergie cinétique relativiste.

4. Énergie cinétique newtonienne

Qu'en est-il de l'énergie cinétique newtonienne d'expression :

$$\mathcal{E}_{c_N} = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{p^2}{2m} ?$$

proton	1	2	3	4
$\mathcal{E}_{c_N}$ (MeV)	2288	0	103	2064

Calculons :

$$\mathcal{E}_{c_{1N}} + \mathcal{E}_{c_{2N}} = 2\,288 \text{ MeV},$$
$$\mathcal{E}_{c_{3N}} + \mathcal{E}_{c_{4N}} = 103 + 2\,064 = 2\,167 \text{ MeV}.$$

Nous trouvons une différence de :

$$2\,288 - 2\,167 = 121 \text{ MeV};$$

celle-ci est de l'ordre de grandeur de l'énergie cinétique d'une des particules. *L'expression newtonienne de l'énergie cinétique ne rend donc pas compte de la conservation de l'énergie cinétique dans un choc élastique.*

En conclusion, l'étude de ce premier exemple montre que :

• Seules les formules relativistes sont bien adaptées aux lois de conservation régissant les événements qui se produisent entre des particules de grande énergie.

21.4 deuxième exemple : choc inélastique avec disparition de masse

Dans un choc inélastique, certaines particules (voire toutes les particules) résultant du choc diffèrent des particules incidentes.

La photo 3 représente le choc d'un antiproton $\bar{p}$ sur un proton immobile. La masse de ces deux particules est 938 MeV.c^{-2}.

1. Conservation de la charge électrique

Les particules créées sont des particules qui ont des charges de signes opposés (rayons de courbure de sens contraires). Nous pouvons même affirmer que la charge de la particule (3) a le même signe que celle de l'antiproton incident (charge $-e$) puisque les deux trajectoires ont même sens de courbure.
La loi de conservation de la charge s'écrit :

$$q_3 + q_4 = q_1 + q_2 = 0.$$

Scanné avec CamScanner

2. Conservation de la quantité de mouvement

La détermination des rayons de courbure permet de calculer les quantités de mouvement de chaque particule; on trouve :

$p_1 = 1787$ MeV.c^{-1} (antiproton incident),

$p_3 = 1390$ MeV.c^{-1},

$p_4 = 1588$ MeV.c^{-1}.

Nous pouvons vérifier la conservation de la quantité de mouvement en portant sur les tangentes aux trajectoires, avant et après le choc, des vecteurs proportionnels aux vecteurs $\vec{p}$ (*fig.* 4). On a bien :

$$\vec{p}_1 \approx \vec{p}_3 + \vec{p}_4.$$

3. Conservation de l'énergie totale

Mais quelles sont ces particules (3) et (4)? Nous savons déjà que la charge totale de celles-ci doit être nulle puisqu'il y a conservation de la charge.
D'autres lois de conservation permettent d'envisager plusieurs possibilités parmi lesquelles les deux suivantes :

• *Première hypothèse*
Choc élastique :

$$\bar{p}(1) + p(2) \longrightarrow \bar{p}(3) + p(4).$$

Calculons l'énergie totale de chaque particule par :

$$\mathcal{E} = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}.$$

particule	$\bar{p}(1)$	$p(2)$	$\bar{p}(3)$	$p(4)$
p (MeV.c^{-1})	1787	0	1390	1588
m (MeV.c^{-2})	938	938	938	938
$\mathcal{E}$ (MeV)	2018	938	1677	1844

Il vient alors :

$$\Delta\mathcal{E} = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) - (\mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4) = -565 \text{ MeV}.$$

Cette hypothèse ne vérifie pas la loi de conservation de l'énergie. Nous ne pouvons pas la retenir.

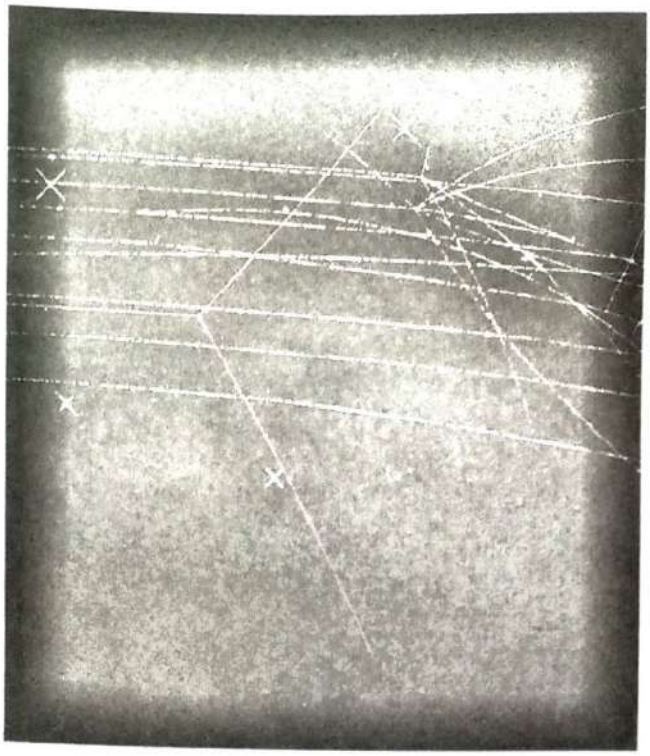
• *Seconde hypothèse*
Choc inélastique avec production d'un méson π^+ (ou pion) et d'un méson π^- de même masse, égale à 140 MeV.c^{-2} :

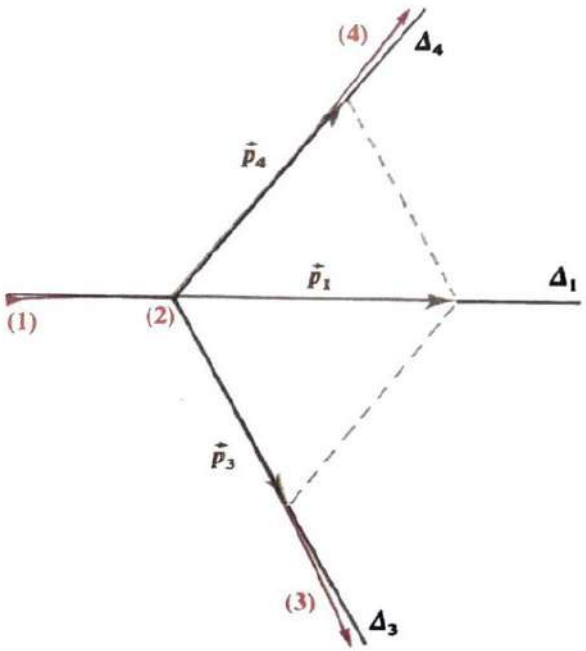
$$\bar{p}(1) + p(2) \longmapsto \pi^-(3) + \pi^+(4).$$

particule	$\bar{p}(1)$	$p(2)$	$\pi^-(3)$	$\pi^+(4)$
p (MeV.c^{-1})	1787	0	1390	1588
m (MeV.c^{-2})	938	938	140	140
$\mathcal{E}$ (MeV)	2018	938	1397	1594

Il vient alors :

$$\Delta\mathcal{E} = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) - (\mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4) = -35 \text{ MeV}.$$





échelle : 1 cm ⟷ 500 MeV.c^{-1}

3. ***Choc inélastique d'un antiproton*** **(1)** ***sur un proton au repos*** **(2),** ***avec production de deux mésons*** **(3** ***et*** **4).**

Cette hypothèse est plus conforme à la vérification de la conservation de l'énergie totale : $\Delta\mathcal{E}$ est petit devant les énergies mises en jeu. En outre, il faut tenir compte des erreurs dans la détermination des rayons de courbure.

4. Énergie de masse et énergie cinétique

Remarquons qu'une partie importante de la masse a disparu. En effet, à partir d'une énergie de masse de 1876 MeV ($2m_pc^2$), nous obtenons seulement 280 MeV ($2m_\pi c^2$) d'énergie de masse. Qu'est devenue cette masse? L'énergie cinétique de l'antiproton incident, égale à :

$$\mathcal{E}_1 - m_p c^2 = 2018 - 938 = 1080 \text{ MeV},$$

est insuffisante pour communiquer des énergies cinétiques de $1397 - 140 = 1257$ MeV au méson π^- et de $1594 - 140 = 1454$ MeV au méson π^+. On peut donc considérer que *cette disparition de masse correspond à une augmentation d'énergie cinétique.* Calculons :

$$\mathcal{E}_{c_1} + \mathcal{E}_{c_2} = 1080 + 0 = 1080 \text{ MeV},$$

$$\mathcal{E}_{c_3} + \mathcal{E}_{c_4} = 1257 + 1454 = 2711 \text{ MeV};$$

d'où : $\Delta\mathcal{E}_c = 1631$ MeV,

alors que : $\Delta mc^2 = 1596$ MeV.

La différence de 35 MeV est faible; elle peut être imputée aux erreurs de détermination de p, donc de $\mathcal{E}$:

$$|\Delta\mathcal{E}_c| \approx |\Delta m|\, c^2.$$

En conclusion :

• Lors d'un choc inélastique avec disparition de masse entre particules de grande énergie, il y a conservation de l'énergie totale : l'énergie de masse perdue se retrouve sous forme d'énergie cinétique (ou éventuellement d'énergie emportée par des particules de masse nulle : photon, neutrino, ...).



échelle : 1 cm ⟷ 500 MeV.c $^{-1}$

21.5 troisième exemple : choc inélastique avec création de masse

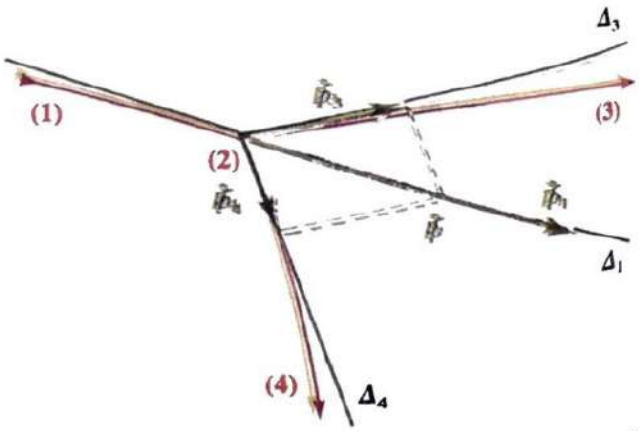
La photo 4 représente le choc d'un proton, de quantité de mouvement 2026 MeV.c^{-1}, sur un proton immobile.

1. Conservation de la charge

Les deux particules chargées produites (3 et 4) sont chargées positivement car le sens de courbure de leurs trajectoires est le même que celui du proton incident. La conservation de la charge implique que la somme des deux charges est égale à 2e :

$$q_1 + q_2 = 2e = q_3 + q_4.$$

Les deux particules portent donc obligatoirement la charge +e.



4. *Choc inélastique d'un proton* (1) *sur un proton au repos* (2), *avec production d'un proton* (3), *d'un méson* (4) *et d'un neutron (qui ne laisse pas de trace dans la chambre à bulles).*

Scanné avec CamScanner

2. Conservation de la quantité de mouvement

La mesure des rayons de courbure permet de calculer la norme des vecteurs quantité de mouvement :

$$p_1 = 2026 \text{ MeV.c}^{-1},$$
$$p_3 = 942 \text{ MeV.c}^{-1},$$
$$p_4 = 332 \text{ MeV.c}^{-1}.$$

La représentation graphique des vecteurs quantité de mouvement (*fig.* 4) nous permet de constater que, si $\vec{p}_4 + \vec{p}_3 = \vec{p}$ a bien la direction de la particule incidente ($\vec{p}_1$), la conservation n'est pas respectée. On peut alors supposer qu'est apparue une troisième particule, neutre (elle ne laisse pas de trace dans la chambre à bulles), dont la quantité de mouvement serait :

$$\vec{p}_5 = \vec{p}_1 - (\vec{p}_3 + \vec{p}_4) = \vec{p}_1 - \vec{p}.$$

Dans le cas particulier de la photo 4, la particule neutre (5) serait ainsi projetée dans la direction de la particule incidente; cette même direction n'est le fait que du hasard et n'obéit pas à une loi générale.
Graphiquement, on détermine $\vec{p}_5$. Compte tenu de l'échelle, on trouve :

$$p_5 \approx 850 \text{ MeV.c}^{-1}.$$

Quelle est cette particule? Certaines lois de conservation d'autres grandeurs caractéristiques des particules (spin, étrangeté, etc., que nous n'expliciterons pas dans ce cours) permettent d'émettre certaines hypothèses. Le principe de conservation de l'énergie totale nous permet de les vérifier.

3. Conservation de l'énergie totale

• *Première hypothèse*
(3) et (4) sont deux protons ($m_p = 938 \text{ MeV.c}^{-2}$),
(5) est un méson neutre π^0 ($m_{\pi^0} = 135 \text{ MeV.c}^{-2}$) :

$$p + p \longrightarrow p + p + \pi^0.$$

Calculons l'énergie totale de chaque particule par :

$$\mathcal{E} = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}.$$

particule	$p(1)$	$p(2)$	$p(3)$	$p(4)$	$\pi^0(5)$
m (MeV.c^{-2})	938	938	938	938	135
p (MeV.c^{-1})	2026	0	942	532	850
$\mathcal{E}$ (MeV)	2233	938	1329	1078	861

Vérifions s'il y a conservation de l'énergie :

$$\Delta\mathcal{E} = (2233 + 938) + (1329 + 1078 + 861) = -97 \text{ MeV}.$$

L'écart est trop important pour que l'hypothèse étudiée soit retenue.

• *Seconde hypothèse*
(3) est un proton,
(4) un méson π^+ ($m_{\pi^+} = 140 \text{ MeV.c}^{-2}$),
(5) un neutron ($m_n = 939 \text{ MeV.c}^{-2}$) :

$$p + p \longrightarrow p + \pi^+ + n.$$



Albert Einstein (Ulm 1879 - Princeton 1955) est sans conteste l'un des plus grands esprits scientifiques de tous les temps. En 1905, il publia deux mémoires qui devaient révolutionner la science : la théorie du phénomène photo-électrique et l'hypothèse des photons; la théorie de la Relativité restreinte, celle-ci bouleversant les conceptions sur l'espace et le temps et établissant l'équivalence de la masse et de l'énergie. En 1916, il publia la théorie de la Relativité généralisée, puis un essai de théorie du champ unitaire. Prix Nobel 1921.

particule	$p(1)$	$p(2)$	$p(3)$	$\pi^+(4)$	$n(5)$
m (MeV.c^{-2})	938	938	938	140	939
p (MeV.c^{-1})	2026	0	942	532	850
$\mathcal{E}$ (MeV)	2233	938	1329	550	1266

Vérifions s'il y a conservation de l'énergie totale :

$$\Delta\mathcal{E} = (2233 + 938) - (1329 + 550 + 1266) = 26 \text{ MeV}.$$

Nous pouvons dire que, compte tenu des incertitudes sur la détermination des rayons de courbure et de p_5, la conservation de l'énergie totale est vérifiée. Cette hypothèse est donc très probable.

4. Énergie de masse et énergie cinétique

Remarquons que l'énergie de masse a augmenté de 1876 MeV à 2017 MeV :

$$\Delta m = 141 \text{ MeV.c}^{-2}.$$

L'énergie cinétique incidente vaut 1295 MeV.
L'énergie cinétique des particules résultantes vaut :

$$391 + 410 + 327 = 1128 \text{ MeV}.$$

D'où : $\Delta\mathcal{E}_c = -167$ MeV.

Scanné avec CamScanner

Nous retrouvons la différence de 26 MeV qui est imputable aux erreurs d'expérimentation :

$$|\Delta \mathcal{E}_c| \approx |\Delta m| c^2.$$

En conclusion :

- **Lors d'un choc inélastique avec création de masse entre particules de grande énergie, il y a conservation de l'énergie totale; l'énergie cinétique perdue se retrouve sous forme d'énergie de masse.**

21.6 équivalence masse-énergie

L'étude des chocs inélastiques nous a montré que de la matière peut disparaître au profit de l'énergie cinétique. De même, de l'énergie cinétique peut se matérialiser par apparition de matière sous forme de particules nouvelles. Cette équivalence masse-énergie a été postulée par Einstein.

Pour une transformation au cours de laquelle il y a *perte de masse* ($\Delta m < 0$), l'énergie cinétique des particules augmente ($\Delta \mathcal{E}_c > 0$). Si la transformation a lieu au sein de la matière (comme c'est le cas, par exemple, dans un réacteur nucléaire), cette énergie excédentaire est finalement transmise, par chocs successifs, à l'extérieur sous forme de chaleur et perdue par le système. On attribue à cette énergie libérée $\Delta \mathcal{E}$ (transformation *exoénergétique*) une mesure algébrique négative. Inversement, si $\Delta m > 0$, $\Delta \mathcal{E}$ est positive (transformation *endoénergétique*).

Nous pouvons ainsi écrire la célèbre *relation d'équivalence masse-énergie*, ou *relation d'Einstein* :

$$\Delta \mathcal{E} = \Delta m c^2.$$

21.7 conclusions

On peut considérer que l'étude de ces différents chocs entre particules est une vérification de la validité des formules de la mécanique relativiste mais aussi des lois de conservation. Rappelons les lois fondamentales pour toute interaction entre particules :

— conservation de la charge électrique;
— conservation de la quantité de mouvement;
— conservation de l'énergie totale.

- Lors d'*interactions élastiques*, l'énergie de masse et l'énergie cinétique se conservent. Les particules ne sont pas altérées par le choc et gardent leurs masses respectives.

- Lors d'*interactions inélastiques*, de nouvelles particules apparaissent. Il n'y a plus dans ce cas conservation de la masse, ni, par conséquent, de l'énergie cinétique; seule l'énergie totale, somme de l'énergie de masse et de l'énergie cinétique, se conserve. Une création de masse entraîne une perte d'énergie cinétique; à l'inverse, une disparition de masse entraîne un gain d'énergie cinétique.

APPLICATION 1

L'explosion d'une bombe à hydrogène de 20 Mt libère la même énergie que celle de 20 Mt de trinitrotoluène (TNT). Quelle est la perte de masse correspondante, sachant que 1 t de TNT libère $4{,}18.10^9$ J.

Calculons l'énergie apparue :

$$\Delta \mathcal{E} = 20.10^6 \times 4{,}18.10^9 = 8{,}36.10^{16} \text{ J}.$$

Cette énergie doit correspondre à une perte de masse telle que :

$$\Delta m = \frac{\Delta \mathcal{E}}{c^2} = \frac{8{,}36.10^{16}}{9.10^{16}},$$

soit

$$\Delta m = 0{,}93 \text{ kg}.$$

Cette masse de 0,93 kg correspond globalement à la masse d'une partie des constituants de la bombe; elle s'est transformée en énergie cinétique communiquée à toutes les particules formées.

APPLICATION 2

La réaction chimique :

$$H_2 + \frac{1}{2} O_2 \longrightarrow H_2O \text{ (gaz)}$$

libère environ 242 kJ par mole d'eau formée. Peut-on conclure qu'il y a conservation de la masse?

Si on admet la loi de conservation de l'énergie, l'énergie calorifique libérée correspond à l'accroissement des énergies cinétiques microscopiques des particules formées au cours de la réaction.

L'augmentaion globale de l'énergie cinétique correspond à une perte de masse égale à :

$$\Delta m = \frac{242.10^3}{9.10^{16}} = 2{,}7.10^{-12} \text{ kg}.$$

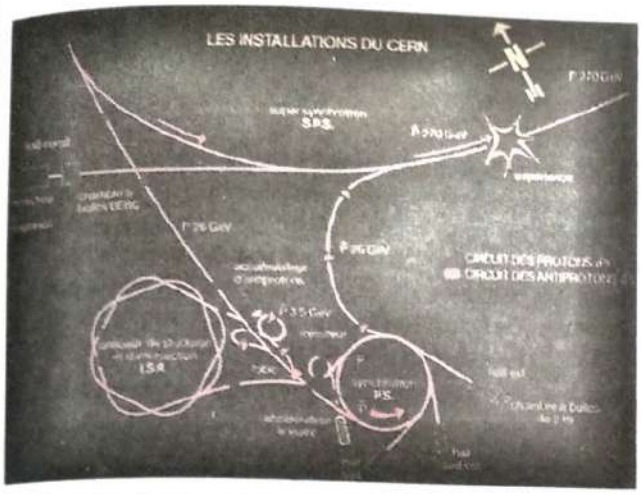
soit une variation relative de la masse des constituants pour une mole d'eau formée (18 g) :

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{2{,}7.10^{-12}}{18.10^{-3}} = 1{,}5.10^{-10}.$$

Expérimentalement, une telle variation relative de la masse passe inaperçue avec la précision actuelle des mesures. Comme Lavoisier, nous pouvons conclure que, lors d'une réaction chimique, il y a conservation de la masse.

Scanné avec CamScanner

Les installations du CERN



1. *Le* C.E.R.N., *situé près de Genève, est un grand laboratoire commun à la plupart des pays d'Europe occidentale. Ce cliché indique la position relative des diverses installations de ce Centre Européen de Recherche Nucléaire.*

Le synchrotron à protons (P.S.)

Le Centre Européen pour la Recherche Nucléaire (CERN) est un grand laboratoire situé près de Genève. Il est le résultat de la collaboration entre la plupart des pays d'Europe occidentale.

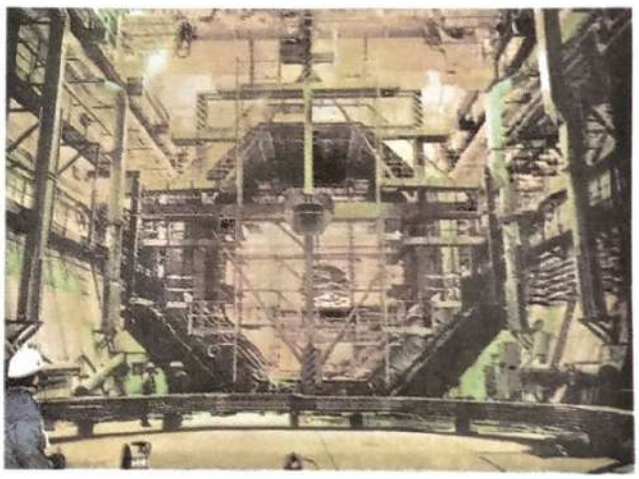
Si l'on suit le parcours des protons à travers les accélérateurs et les détecteurs (*fig.* 1), on constate que ces protons sont d'abord accélérés par un générateur électrostatique de 500 keV, puis par un accélérateur linéaire qui leur communique une énergie de 50 MeV, enfin par un injecteur qui porte leur énergie à 800 MeV. Cet injecteur est un accélérateur circulaire de 50 m de diamètre, comprenant quatre anneaux superposés qui sont remplis les uns après les autres par l'accélérateur linéaire et vidés dans le synchrotron à protons. Les protons entrent ensuite dans le synchrotron à protons (P.S.). Le P.S. est un anneau de 200 m de diamètre. Toutes les deux secondes, 20 paquets de protons, totalisant quelques 10^{13} particules, y sont injectées. Les protons accomplissent alors un demi-million de tours; leur énergie atteint 28 GeV et leur vitesse est 0,999 4 fois celle de la lumière. Ils sont maintenus sur orbite dans l'anneau par un champ magnétique d'intensité croissante de 0,01 à 1,4 T que produisent 100 aimants et sont accélérés par 10 cavités haute fréquence. Les protons circulent dans une chambre annulaire dans laquelle on maintient un vide de 10^{-5} Pa.

En fin d'accélération, les protons peuvent être soit extraits de l'anneau, soit dirigés sur des cibles disposées dans la chambre annulaire elle-même. En frappant ces cibles, ils créent des particules secondaires de toute nature. Les faisceaux de particules secondaires sont triés et guidés par des champs électrostatiques et magnétiques vers des détecteurs disposés dans les halls d'expérimentation.

Le P.S. sert aussi d'injecteur pour les anneaux de stockage et d'intersection (I.S.R.). Ces I.S.R. sont deux anneaux entrelacés de 300 m de diamètre. Des aimants semblables à ceux du P.S. guident et focalisent les protons qui circulent dans les chambres à vide, lesquelles se coupent en huit points. On peut ainsi faire des collisions presque frontales proton-proton dans les régions d'intersection. Les I.S.R. équivalent à un accélérateur classique de 2 TeV mais avec un taux d'interaction beaucoup plus faible. Néanmoins, avec des courants de protons de 10 ampères on peut réaliser 10^5 interactions par seconde.

Le supersynchrotron à protons de 400 GeV (S.P.S.)

Le P.S. sert également d'injecteur au grand accélérateur : le supersynchrotron à protons (S.P.S.). Le S.P.S. a plus de 2 km de diamètre et les faisceaux secondaires 3 km de long. C'est une machine souterraine située de l'autre côté de la route Genève-Saint-Genis, par rapport au site original du C.E.R.N. Le domaine est à cheval sur la frontière franco-suisse, comportant 412 ha en France et 68 ha en Suisse, mais une très faible partie de cette grande superficie est occupée par des bâtiments et, sur sa quasi-totalité, les activités agricoles et sylvicoles peuvent se poursuivre comme par le passé, tandis que la machine fonctionne dans son tunnel circulaire de 4 m de section à 50 m au-dessous du niveau du sol.



2. *Caverne souterraine d'une partie du* L.E.P. *avec, à l'arrière, les échafaudages d'une bobine. Le* L.E.P., *au* C.E.R.N., *permet de réaliser des collisions électrons-positons.*

Les protons suivent des trajectoires circulaires à l'intérieur d'un tube en acier inoxydable en forme d'ellipse aplatie ayant environ 100 mm de large et 50 mm de haut. Entre les 744 aimants de courbure de 6,26 m de long qui guident le faisceau, sont placés 216 aimants de focalisation qui contractent le faisceau alternativement dans les plans horizontal et vertical. D'autres aimants spéciaux assurent des fonctions de correction et de commande. Le cycle d'accélération dure 10 s. En fin d'accélération, les protons ont une énergie de 400 GeV. Comme dans le P.S., ils sont extraits progressivement de l'anneau pour être dirigés vers les faisceaux secondaires et les détecteurs.

Scanné avec CamScanner

La puissance de crête consommée par les aimants est de 135 MW, ce qui correspond à la puissance totale fournie par une centrale importante. La consommation moyenne ne représente qu'environ le quart de cette valeur, car la puissance emmagasinée dans les aimants excités peut être partiellement récupérée. Le système d'alimentation statique est couplé directement à une ligne aérienne de 380 kV provenant de la centrale électrique de Génissiat. De cette manière, les fortes impulsions de puissance peuvent effectuer des allers et retours entre le réseau et le S.P.S. sans aucune gêne pour les autres consommateurs de la région. Le système de refroidissement des aimants utilise de l'eau stockée dans de grands réservoirs installés sur le site et pompée dans le lac Léman; lorsque la machine fonctionne, le débit est d'environ 100 $\ell.s^{-1}$.

A tout cela s'est ajouté, en 1981, pour le complexe P.S.-S.P.S., le mode de fonctionnement en collisionneur proton-antiproton (*fig.* 1) :

1. Les protons sont partiellement accélérés dans le P.S., puis extraits et envoyés sur une cible. Là, ils produisent toutes les particules possibles, en particulier des antiprotons (de 3,5 GeV) que l'on sélectionne et envoie dans un anneau où ils s'accumulent à chaque cycle.

2. Lorsqu'ils sont en nombre suffisant, on renvoie ces antiprotons dans le P.S. à l'instant où tournent des protons de 3,5 GeV. Protons et antiprotons sont alors accélérés en même temps par le P.S. (évidemment les antiprotons tournent en sens inverse à cause de leur charge électrique négative). La section de la chambre annulaire est suffisante pour que les deux faisceaux de particules se croisent sans se rencontrer.

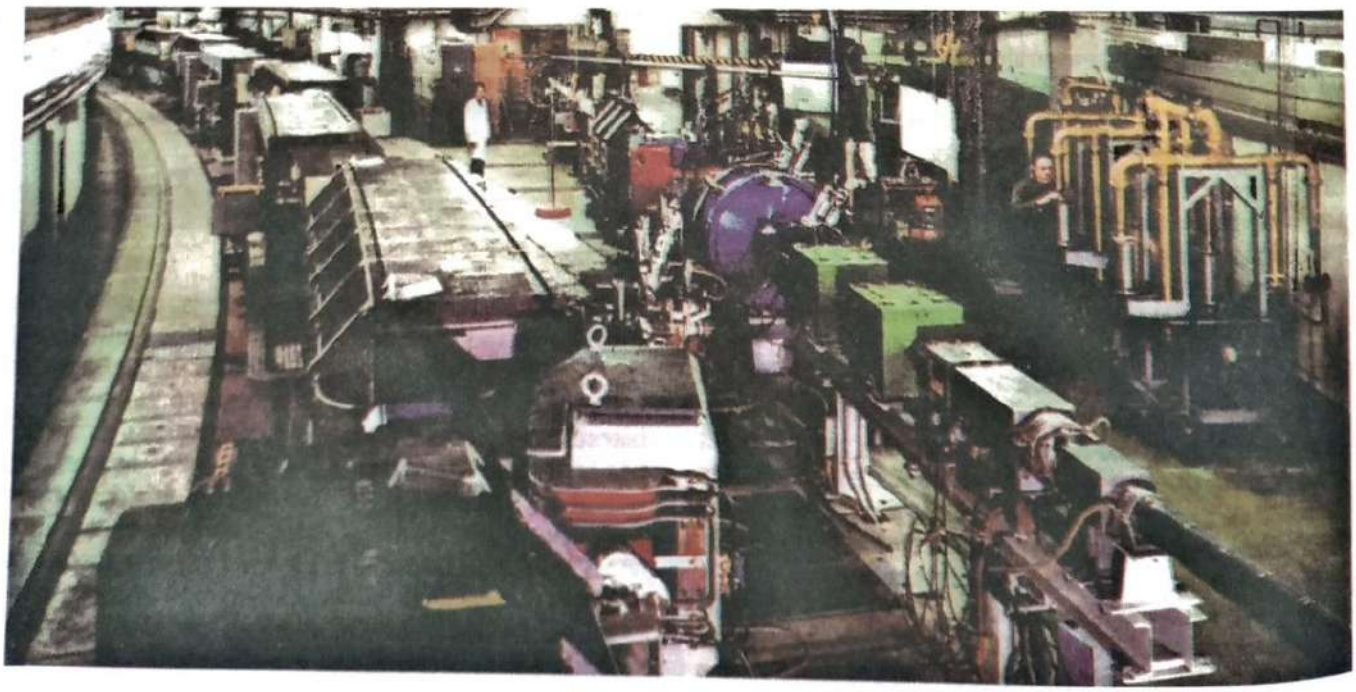
3. Quand leur énergie atteint 26 GeV, protons et antiprotons sont envoyés dans le S.P.S. (en sens inverse) et de nouveau coaccélérés, jusqu'à 270 GeV. En fin d'accélération, on fait se rencontrer les faisceaux en quatre endroits dans la chambre annulaire du S.P.S. Il se produit des collisions frontales (du type de celle des I.S.R.) mais à une énergie de 270 + 270 GeV, la plus élevée jamais réalisée.

Actuellement, deux zones de collision sont équipées de détecteurs, gigantesques, essentiellement pour rechercher la particule responsable de l'interaction faible.
Évidemment, ce mode de fonctionnement est incompatible avec le mode de fonctionnement normal du S.P.S., fournisseur de protons de 400 GeV; aussi le temps de S.P.S. est-il approximativement partagé entre ces deux modes : deux mois l'un, deux mois l'autre.



3. ***Électroaimant dipolaire destiné à un collecteur d'antiprotons. Remarquer la taille des câbles conducteurs qui doivent transporter des courants très intenses.***

4. ***Ligne d'injection du synchroton à protons*** **P.S.** ***Cette machine de*** **25 GeV** ***sert d'injecteur aux grands accélérateurs du*** **C.E.R.N.**



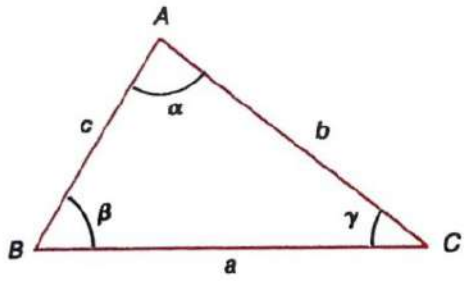
Scanné avec CamScanner

Pour tous les exercices, on prendra :

masse d'un proton : 938 MeV . c^{-2} ;
masse d'un neutron : 939 MeV . c^{-2} ;
masse d'un antiproton : 938 MeV . c^{-2}.

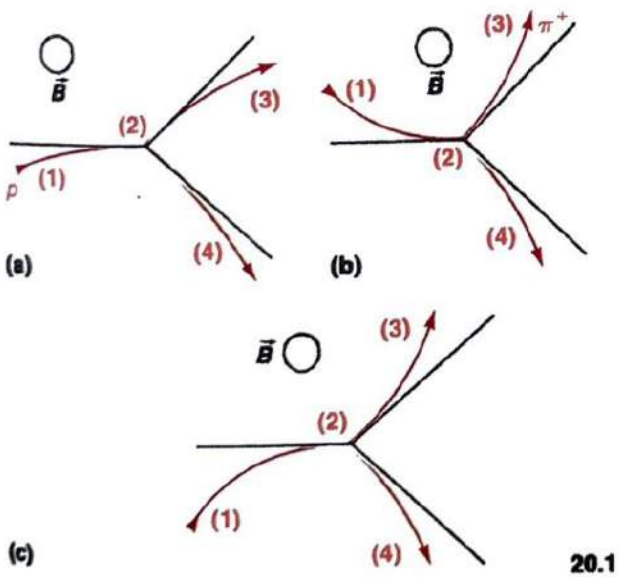
Rappel : Dans un triangle *ABC* quelconque :

- $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$,
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.



L'essentiel du cours

21.1 A La figure présente trois clichés de chambre à bulles.



20.1

1/ Déterminer le signe des charges et le sens du champ $\vec{B}$ orthogonal au plan des trajectoires.

2/ On considère la relation $p = |q| RB$. Préciser la signification des différents paramètres, et rappeler les noms des unités S.I. correspondantes.

3/ Énoncer les lois qui régissent les chocs entre particules.

21.2 A Indiquer parmi les chocs suivants ceux qui peuvent être effectivement observés ; préciser s'ils sont élastiques ou inélastiques :

a/ $\bar{p} + p \rightarrow p + \pi^+ + \pi^0$;
b/ $\bar{p} + n \rightarrow p + \pi^- + \pi^0$;
c/ $p + p \rightarrow p + \bar{p}$;
d/ $p + p \rightarrow p + p$;
e/ $p + p \rightarrow p + \pi^+ + n$;
f/ $p + p \rightarrow {}^2_1H^+ + \pi^+$;
g/ $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$.

21.3 A Parmi les particules suivantes, indiquer celles qui ne laissent pas de trace dans une chambre à bulles : proton (p), antiproton ($\bar{p}$), méson (π^+), neutron (n), électron (e^-), méson (π^0), deuton (d ou ${}^2_1H^+$).

Exercices de base

21.4 A Au cours d'un choc, on mesure les rayons de courbure des trajectoires de certaines particules.

1/ Compléter le tableau ci-après.

2/ Déterminer la valeur du champ magnétique.

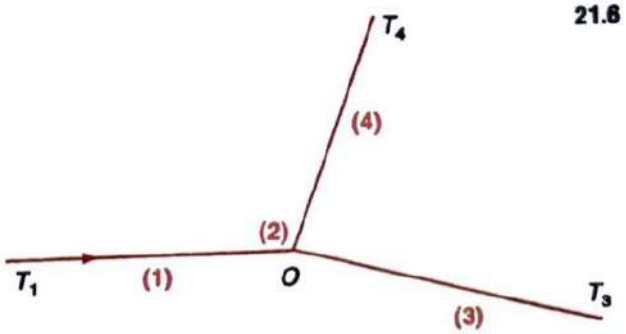
particule	proton	méson π^+	antiproton
R (cm)	400	185	105
masse (MeV . c^{-2})	938	140	938
p (MeV . c^{-1})	1 944		
$\mathcal{E}$ (MeV)			

21.5 A Un électron ($\mathcal{E}_0 = 0{,}5$ MeV) initialement au repos est accéléré par une tension de 100 000 V.

1/ Déterminer, en eV, l'énergie cinétique acquise par l'électron après cette accélération. Calculer son énergie totale $\mathcal{E}$. Doit-on considérer l'électron comme relativiste ? Calculer sa vitesse.

2/ L'électron ainsi accéléré pénètre dans un champ magnétique $\vec{B}$ perpendiculaire au vecteur vitesse $\vec{v}$. Il y décrit un cercle de rayon $R = 19{,}5$ cm. Déterminer l'intensité B du champ magnétique.

21.6 B Au cours du choc d'une particule (1) sur une particule (2) au repos en O, on a observé deux particules (3) et (4), éjectées dans deux directions OT_3 et OT_4. Il n'y a pas d'autre particule.



21.6

1/ Représenter le vecteur $\vec{p}_1$ sachant que sa norme est égale à 2 072 MeV . c^{-1}. (Échelle : 1 cm pour 400 MeV . c^{-1}.)

2/ Déterminer graphiquement les mesures p_3 et p_4 des quantités de mouvement.

21.7 AB La figure (*cf.* page suivante) représente les tangentes aux trajectoires avant et après le choc d'une particule (1) sur une particule (2), immobile, située en O.

Données : $p_1 = 2\,100$ MeV . c^{-1} ; $p_3 = 1\,530$ MeV . c^{-1} ; $p_4 = 1\,090$ MeV . c^{-1}

1/ Représenter les vecteurs $\vec{p}_1$, $\vec{p}_3$ et $\vec{p}_4$. (Échelle : 1 cm pour 500 MeV . c^{-1}.)

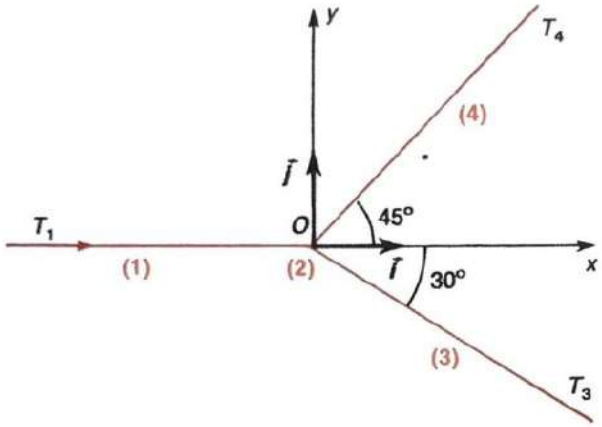
Scanné avec CamScanner

EXERCICES

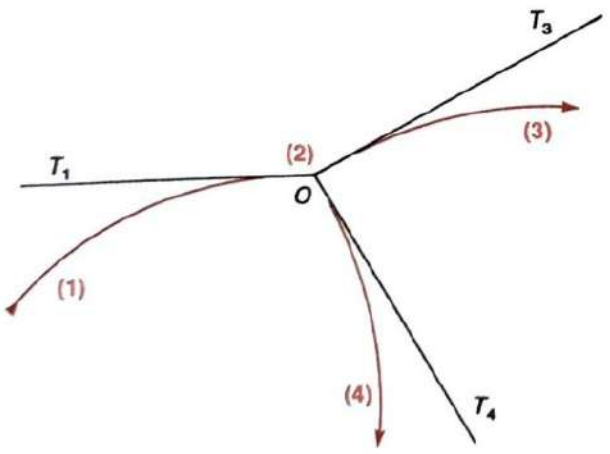
2/ Vérifier à l'aide d'une règle et d'un compas que :

$$\vec{p}_3 \quad \vec{p}_1 + \vec{p}_4.$$

3/ On choisit un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, où l'axe des abscisses a pour direction celle OT_1 de la particule incidente. Déterminer les coordonnées (p_x, p_y) pour chaque particule. Projeter l'égalité vectorielle précédente sur les deux axes et vérifier la conservation de la quantité de mouvement.



21.8 AB La figure représente les traces laissées par des particules avant et après le choc d'un proton (1) sur un proton (2) immobile en O.



1/ Les deux particules ayant laissé ici leur trace après le choc ont même charge que le proton. Expliquer pourquoi.

2/ Calculer p_3 et p_4 sachant que :

$$p_1 = 1\,972 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-1},$$

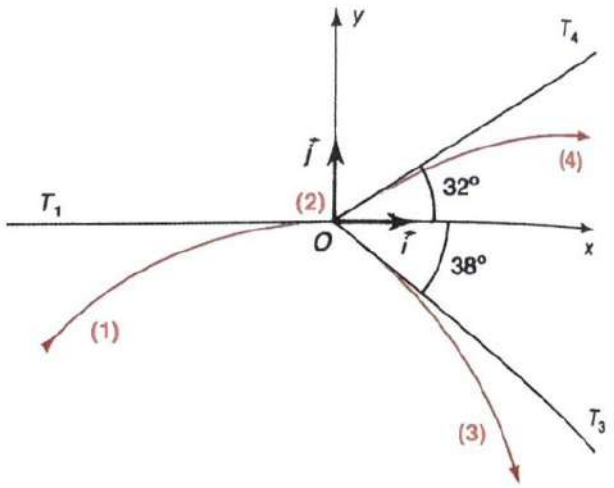
$R_1 = 400$ cm, $R_3 = 185$ cm et $R_4 = 105$ cm.

Représenter les vecteurs p_1, p_3 et $\vec{p}_4$.

3/ Déterminer graphiquement la quantité de mouvement de la particule (5) « invisible », supposée unique. Pourquoi ne laisse-t-elle pas de trace ?

21.9 AB La figure représente les tangentes aux traces laissées par des particules lors d'un choc d'une particule (1) sur une particule (2) au repos. Les particules (3) et (4) sont éjectées dans les directions OT_3 et OT_4. Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal.

Données : $p_1 = 2\,090$ MeV . c $^{-1}$; $p_3 = 778$ MeV . c^{-1} ; $p_4 = 778$ MeV . c^{-1}.



1/ Montrer que la conservation de la quantité de mouvement du système formé par les deux protons initiaux implique l'existence après le choc d'une autre particule, (5), qui n'a pas laissé de trace dans la chambre à bulles.

2/ Déterminer les coordonnées $p_5(x)$ et $p_5(y)$ puis la norme p_5 de la quantité de mouvement $\vec{p}_5$ de cette particule. Calculer l'angle $(\widehat{\vec{i}, \vec{p}_5})$.

21.10 A Dans une chambre à bulles, on a photographié le choc d'un proton (1) sur un proton (2) au repos. Trois particules ont été produites, dont une est neutre. On a déterminé les quantités de mouvement de ces trois particules. On envisage trois hypothèses. En écrivant un bilan énergétique, déterminer la situation la plus probable.

particule	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	
p (MeV . c^{-1})	2060	0	798	560	1 020	
énergie totale	$\mathcal{E}_1$	$\mathcal{E}_2$	$\mathcal{E}_3$	$\mathcal{E}_4$	$\mathcal{E}_5$	$\Delta\mathcal{E}$
1re hypothèse $p + p \rightarrow p + p + \pi^0$						
2e hypothèse $p + p \rightarrow p + \pi^- + n$						
3e hypothèse $p + p \rightarrow \pi^+ + p + n$						

Données : $m_{\pi^-} = 139$ MeV . c $^{-2}$; $m_{\pi^0} = 135$ MeV . c $^{-2}$

21.11 C Un proton (1), de quantité de mouvement initiale $p_1 = 1\,980$ MeV . c^{-1}, heurte un proton immobile (2). Après le choc, on observe deux particules (3) et (4), de quantités de mouvement $p_3 = 552$ MeV . c^{-1} et $p_4 = 1\,742$ MeV . c^{-1}.

1/ Énoncer les propriétés distinctives des chocs élastiques et des chocs inélastiques en mécanique relativiste.

Scanné avec CamScanner

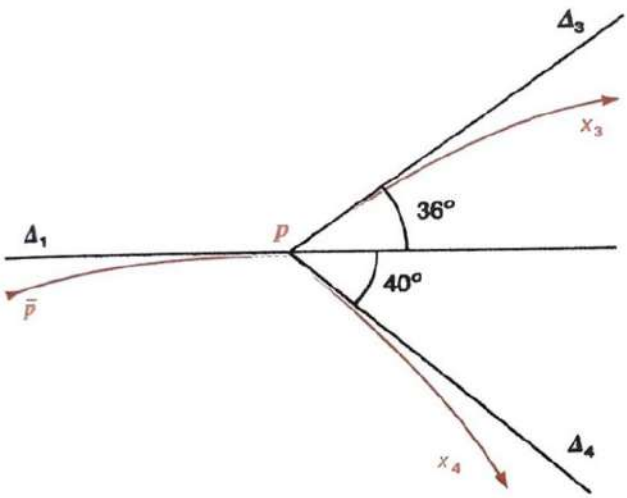
2/ Déterminer l'énergie du système.

3/ La particule (4) est un deuton (masse du deuton : 1876 MeV . c^{-2} ; charge : +e).

a/ Déterminer la charge de la particule (3).
b/ En appliquant la loi de conservation de l'énergie, déterminer la masse de la particule (3).

4/ Calculer la variation d'énergie cinétique au cours du choc. Conclure.

21.12 BC Un antiproton heurte un proton au repos (figure).



1/ La quantité de mouvement du proton incident est de 2046 MeV . c^{-1}. Calculer l'énergie totale et la vitesse de cette particule.

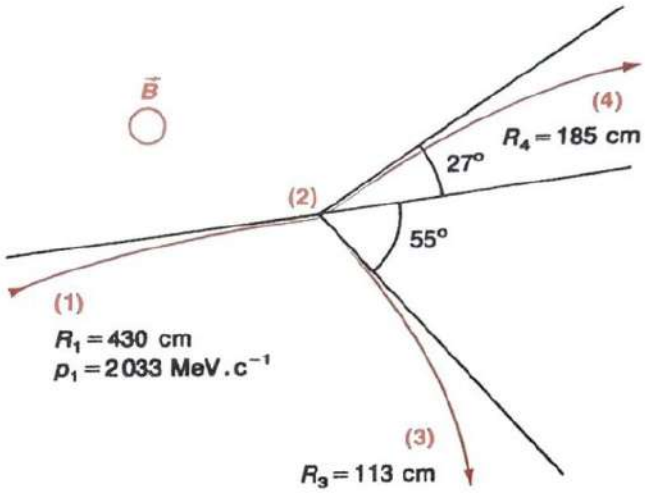
2/ Les mesures des rayons de courbure donnent 460 cm pour l'antiproton incident, 300 cm et 280 cm pour les particules éjectées. Calculer les quantités de mouvement de ces particules.

3/ Reproduire le schéma. Vérifier graphiquement, aux erreurs de tracé près, la conservation de la quantité de mouvement.

4/ Le choc est élastique.

a/ Préciser les natures des particules (3) et (4).
b/ Montrer que la loi de conservation de l'énergie cinétique du système n'est pas vérifiée en mécanique newtonienne.
c/ En appliquant maintenant les formules relativistes, vérifier qu'il y a conservation de l'énergie totale et de l'énergie cinétique au cours du choc.

21.13 BC Grâce à l'enregistrement obtenu dans une chambre à bulles où règne un champ magnétique uniforme de vecteur $\vec{B}$, on étudie le choc inélastique d'un proton (1) sur un proton immobile (2). La figure représente les trajectoires de la particule incidente et des particules chargées résultant du choc, ainsi que leurs tangentes au point d'impact. Les valeurs des rayons de courbure et des angles entre les tangentes sont données sur cette figure.



1/*a*/ Le vecteur $\vec{B}$ étant perpendiculaire au plan de la figure, indiquer son sens sur le schéma.

b/ Déterminer les signes des charges des particules enregistrées après le choc.
Dans la suite de l'exercice, on reportera les résultats numériques dans le tableau ci-après.

c/ Calculer les quantités de mouvement p_3 et p_4 des particules (3) et (4).

d/ Une particule (5) est apparue lors du choc. Calculer sa quantité de mouvement p_5.
(Dans le cas d'une résolution graphique, on prendra pour échelle : 1 cm pour 200 MeV . c^{-1}.)

2/ En considérant les différentes hypothèses possibles sur la nature des particules émises après le choc, compléter le tableau en calculant les énergies totales de ces particules. Pour chaque hypothèse, calculer :

$$\Delta\mathcal{E} = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) - (\mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4 + \mathcal{E}_5).$$

En déduire l'hypothèse la plus probable.

Données : $p_1 = 2033$ MeV . c^{-1} ; $m_p = 938$ MeV . c^{-2} ; $m_n = 939$ MeV . c^{-2} ; $m_{\pi^0} = 135$ MeV . c^{-2} ; $m_{\pi^+} = 139$ MeV . c^{-2}.

particule	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	
R (cm)	430		113	185		
p (MeV . c^{-1})	2033	0				
énergie totale	$\mathcal{E}_1$	$\mathcal{E}_2$	$\mathcal{E}_3$	$\mathcal{E}_4$	$\mathcal{E}_5$	$\Delta\mathcal{E}$
1re hypothèse $p + p \rightarrow p + p + \pi^0$						
2e hypothèse $p + p \rightarrow p + \pi^- + n$						
3e hypothèse $p + p \rightarrow \pi^+ + p + n$						

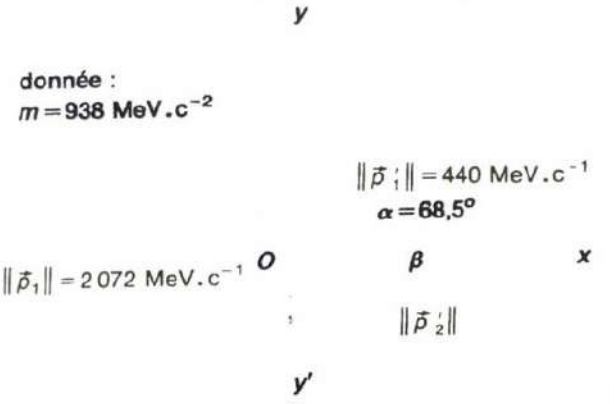
Scanné avec CamScanner

EXERCICES

Banc d'essais

Chocs élastiques

21.14 C On étudie le choc d'un proton (1) de quantité de mouvement $\vec{p}_1$ sur un second proton immobile (2). Après le choc, leurs quantités de mouvement sont respectivement $\vec{p}'_1$ et $\vec{p}'_2$. Il n'y a pas formation de particule. La figure donne les directions des tangentes aux trajectoires au point d'impact O.



donnée :
$m = 938$ MeV.c^{-2}

1/ On étudie le choc en mécanique classique.

a/ Donner pour chaque particule les expressions de son vecteur quantité de mouvement $\vec{p}$ et de son énergie cinétique $\mathcal{E}_c$.
b/ Exprimer $\mathcal{E}_c$ en fonction de $\|\vec{p}\|$.
c/ Déterminer les caractéristiques de la quantité de mouvement $\vec{p}'_2$ (norme et direction) après le choc.
d/ Calculer l'énergie cinétique totale avant et après le choc. Conclure.

2/ On étudie le choc en mécanique relativiste.

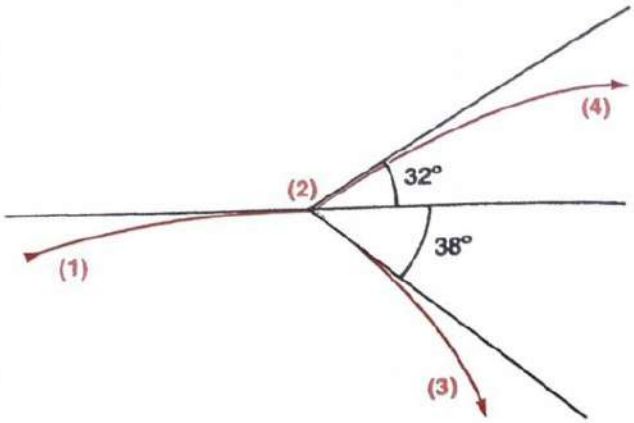
a/ Donner pour chaque particule les expressions de son vecteur quantité de mouvement $\vec{p}$, de son énergie totale $\mathcal{E}$ et de son énergie cinétique $\mathcal{E}_c$.
b/ Vérifier que $\mathcal{E}^2 = (pc)^2 + (mc^2)$.
c/ Quelles sont les grandeurs qui se conservent lors de ce choc ?
On donne $p'_2 = 1960$ MeV.c^{-1}. Examiner si l'énergie totale du système formé par les deux protons se conserve.

↳ ex. 21.7, 21.10, 21.11.

Chocs inélastiques

21.15 C Dans une chambre à bulles, un proton (1) de quantité de mouvement $\vec{p}_1$ heurte un autre proton immobile (2). La chambre à bulles est placée dans un champ magnétique uniforme, orthogonal au plan du cliché, d'intensité $B = 1{,}62$ T. La figure donne les allures des trajectoires circulaires des particules chargées et leurs tangentes au point d'impact. Les rayons de courbure des trajectoires sont : $R_1 = 430$ cm, $R_3 = 160$ cm, $R_4 = 230$ cm.

1/*a/* Calculer la quantité de mouvement p_1 (en MeV.c^{-1}) du proton incident.
b/ Calculer les quantités de mouvement des particules (3) et (4).



2/ Montrer qu'il apparaît une autre particule (5) en calculant sa quantité de mouvement p_5 (les angles sont indiqués sur la figure).

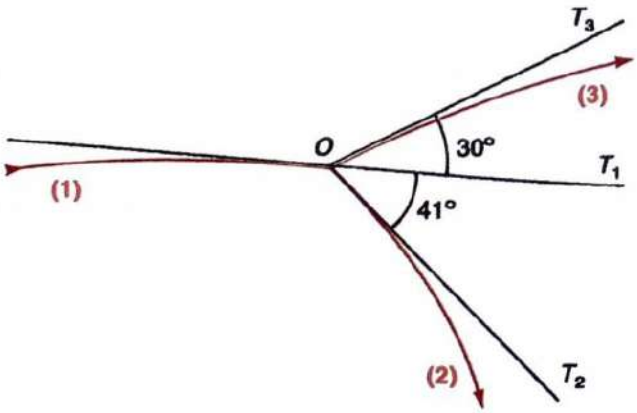
3/ Pour interpréter ce choc, on envisage trois hypothèses :

$$p + p \rightarrow p + \pi^+ + n \quad (1)$$
$$p + p \rightarrow \pi^+ + p + n \quad (2)$$
$$p + p \rightarrow p + p + \pi^0. \quad (3)$$

Déterminer celle qui est la plus vraisemblable.
Données : $m_{\pi^0} = 135$ MeV.c^{-2} ; $m_{\pi^+} = 140$ MeV.c^{-2}.

↳ ex. 21.13.

21.16 BC On considère un cliché de chambre à bulles correspondant au choc d'un proton en mouvement sur un proton au repos. Toutes les trajectoires sont dans le plan de la figure et leur courbure est due à l'action d'un champ magnétique uniforme perpendiculaire à ce plan.



Les directions des tangentes aux trajectoires visibles ont été tracées à partir du point de choc : OT_1 pour le proton incident, OT_3 pour la particule (3) et OT_4 pour la particule (4).
La quantité de mouvement du proton incident a pour mesure $p_1 = 2085$ MeV.c^{-1}. Les rayons de courbure des trajectoires des particules observées sont $R_1 = 430$ cm, $R_3 = 160$ cm, $R_4 = 230$ cm.

Scanné avec CamScanner

1/ Déterminer les intensités p_3 et p_4 des vecteurs quantités de mouvement des particules (3) et (4).

2/ On considère un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, où $\vec{i}$ est le vecteur unitaire de OT_1. Montrer que la conservation de la quantité de mouvement du système formé par les deux protons initiaux implique l'existence, après le choc, d'une autre particule qui n'a pas laissé de trace dans la chambre à bulles.
Déterminer les coordonnées $p_5(x)$ et $p_5(y)$ de cette particule, ainsi que la direction de sa trajectoire, repérée par l'angle $(\widehat{\vec{OT}_1, \vec{p}_5})$.

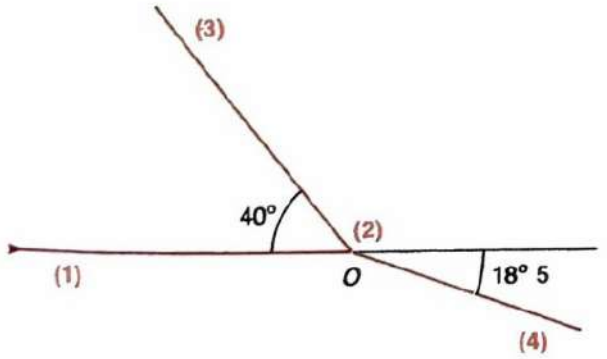
3/ Parmi les hypothèses émises concernant cette particule, on suppose qu'il s'agit d'un pion π^0 et que les deux protons ont conservé leur identité après le choc.
a/ Rappeler les différentes lois de conservation qui doivent être vérifiées dans un tel événement.
b/ Montrer que cette hypothèse satisfait à toutes les lois.

↳ ex. 21.8, 21.13.

21.17 C Un antiproton $\bar{p}(1)$ heurte un proton (2) au repos. La figure représente les tangentes aux trajectoires au moment du choc.

Données :

particule	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
nature	$\bar{p}$	p	π^+	K	K^0
masse (MeV . c^{-2})	938	938	140	494	498
p (MeV . c^{-1})	1 700	0	500	1 100	v_5

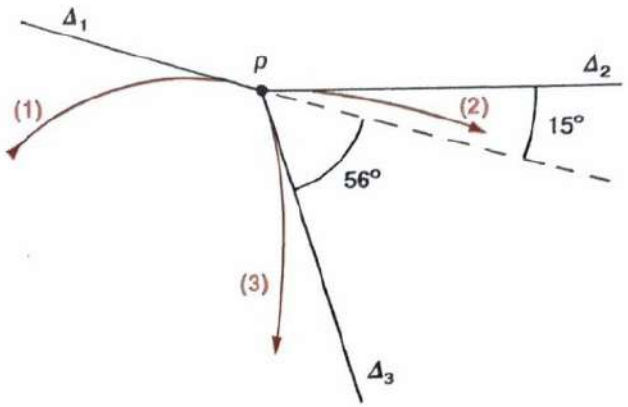


1/ Pourquoi faut-il fait intervenir l'existence d'une particule neutre K^0 ?

2/ Montrer, graphiquement et par un calcul trigonométrique, que la quantité de mouvement de K^0 est sensiblement colinéaire à $\vec{p}_1$ et de norme $p_5 \approx 1\,040$ MeV . c^{-1}.

↳ ex. 21.3, 21.8, 21.9.

21.18 C Dans une chambre à bulles, un proton en mouvement heurte un proton au repos. La chambre à bulles est placée dans un champ magnétique uniforme, de vecteur $\vec{B}$ orthogonal au plan du cliché. La trajectoire 1 est relative au proton incident ; les trajectoires 3 et 4, aux particules après interaction. La figure représente les tangentes Δ_1, Δ_3 et Δ_4 aux trajectoires au moment du choc.



1/ Préciser, en le justifiant, le sens du vecteur champ magnétique et les signes des charges portées par les particules après interaction.

2/ La quantité de mouvement du proton incident est $p_1 = 1\,977$ MeV . c^{-1}.
La mesure des rayons de courbure des trajectoires donne :

$$R_1 = 4{,}30 \text{ m}, \quad R_3 = 3{,}78 \text{ m} \quad \text{et} \quad R_4 = 1{,}18 \text{ m}.$$

La quantité de mouvement est-elle conservée au cours de l'interaction, si l'on considère uniquement les particules des trajectoires 1, 3 et 4 ? Conclure.

3/ Pour interpréter ce choc, on envisage six hypothèses : (d est un deuton de charge + e).

$$p + p \rightarrow p + p \quad (1)$$
$$p + p \rightarrow p + p + \pi^0 \quad (2)$$
$$p + p \rightarrow p + p + n \quad (3)$$
$$p + p \rightarrow p + \pi^+ \quad (4)$$
$$p + p \rightarrow d + \pi^+ \quad (5)$$
$$p + p \rightarrow \pi^+ + d. \quad (6)$$

Données : $m_d = 1\,876$ MeV . c^{-2} ;
$m_{\pi^+} = 140$ MeV . c^{-2} ;
$m_{\pi^0} = 135$ MeV . c^{-2}.

En utilisant la conservation de l'énergie, déterminer quelle est l'interaction la plus probable.

Désintégration

$$m_{\pi^+} = m_{\pi^-} = 140 \text{ MeV} . \text{c}^{-2}$$
$$M_{K^+} = 493{,}71 \text{ MeV} . \text{c}^{-2}.$$

21.19 C Un méson K^+ au repos peut se désintégrer en donnant trois pions π chargés et de même masse.

1/ Les trois pions sont produits avec la même énergie. Calculer cette énergie. Déterminer les angles entre les directions des pions. Calculer leur vitesse d'éjection.

2/ Un des pions reste au repos. Quelles sont les énergies des deux autres ? Calculer leur vitesse d'éjection.

Scanné avec CamScanner

PARTICULES RELATIVISTES

Conseils de résolution

La connaissance de la quantité de mouvement d'une particule permet de déterminer son énergie totale, son énergie cinétique et sa vitesse, grâce aux relations :

$$\mathcal{E}^2 = p^2c^2 + m^2c^4, \quad \mathcal{E}_c = \mathcal{E} - mc^2, \quad \beta = \frac{pc}{\mathcal{E}}.$$

La connaissance de l'énergie permet de déterminer les grandeurs précédentes, grâce aux mêmes relations.

N. B. : Si les données utilisent le MeV (pour $\mathcal{E}$ ou pour $\mathcal{E}_c$) ou le MeV . c^{-1} (pour p), ne jamais revenir aux unités du système international (J, kg, etc.), mais le MeV . c^{-2} pour les masses (ainsi, le produit mc^2 est en MeV), le MeV . c^{-1} pour les quantités de mouvement (le produit pc est alors en MeV).

Chocs de particules

Au cours d'un choc, sont conservées :
— la charge électrique totale du système ;
— la quantité de mouvement totale (ne pas oublier que c'est une grandeur vectorielle) ;
— l'énergie totale (ne pas oublier qu'une particule au repos possède une énergie, à savoir son énergie de masse mc^2).

Sur un cliché, la quantité de mouvement p_1 de la particule incidente est toujours donnée. Les rayons de courbure R_i des trajectoires sont mesurés avec des abaques. Il est recommandé de :

1/ Calculer les quantités de mouvement p_i des particules issues du choc à l'aide de la relation :

$$p_i = R_i \frac{p_1}{R_1}.$$

2/ Calculer l'énergie de chaque particule à l'aide de la relation :

$$\mathcal{E}^2 = p^2c^2 + m^2c^4.$$

3/ Vérifier s'il y a conservation de la quantité de mouvement. Si la quantité de mouvement n'est pas conservée, il se crée une particule neutre dont la quantité de mouvement satisfait au principe de conservation. Différentes hypothèses peuvent alors être avancées : la bonne hypothèse est celle qui conserve l'énergie totale.

Problème résolu 1

Choc élastique

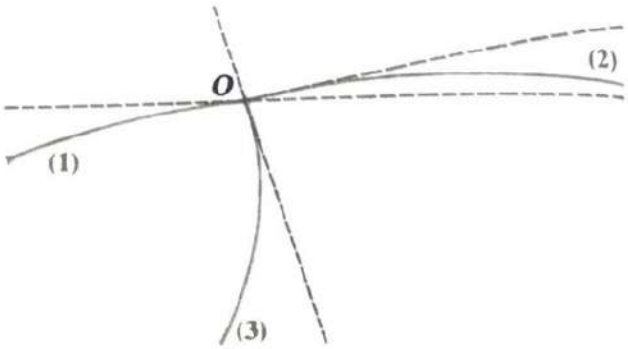
Dans une chambre à bulles, on étudie le choc d'un proton 1 sur un proton 0 au repos. On numérote 2 et 3 les protons issus de l'interaction. L'étude de la photographie a permis de tracer la figure ci-après ; celle-ci représente les traces des particules et donne la disposition des tangentes au point d'impact.

Les rayons de courbures mesurés sur la figure valent respectivement :

$R_1 = 4{,}30$ m, $R_2 = 4{,}10$ m et $R_3 = 0{,}85$ m.

La quantité de mouvement du proton incident est :

$p_1 = 2\,026$ MeV . c^{-1}.



1/ *Sachant que le vecteur champ magnétique est orthogonal au plan de la trajectoire, déterminer son sens.*

2a/ *Rappeler la relation entre la quantité de mouvement p, la charge q, la norme de $\vec{B}$ et le rayon de courbure R lors du mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique.*

b/ *En déduire la norme de $\vec{B}$.*

1/ La charge du proton est positive. La force qui s'exerce sur le proton est :

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}.$$

Le trièdre $(\vec{v}, \vec{B}, \vec{F})$ est direct.
L'accélération étant dirigée vers la concavité de la trajectoire, il en est de même pour la force. Il en résulte que le vecteur $\vec{B}$ est dirigé de l'arrière vers l'avant du plan de la trajectoire.

2a/ Rappelons que : $p = qRB$.

b/ Par suite :

$$B = \frac{p}{Rq}.$$

Or :

$p = 2\,026$ MeV . c^{-1}

$= 1{,}08 \cdot 10^{-18}$ kg . m . s^{-1}.

Finalement : $B = 1{,}6$ T.

3a/ Le rayon de courbure étant proportionnel à la quantité de mouvement :

$$\frac{p_1}{R_1} = \frac{p_2}{R_2} = \frac{p_3}{R_3}.$$

A2.1 Savoir-faire théorique.

B2.1 Connaissance du français ; expression écrite.

A1.1 Formule.

B3.2 Calculs.

A1.1 Unités.

Scanné avec CamScanner

Il en découle que :

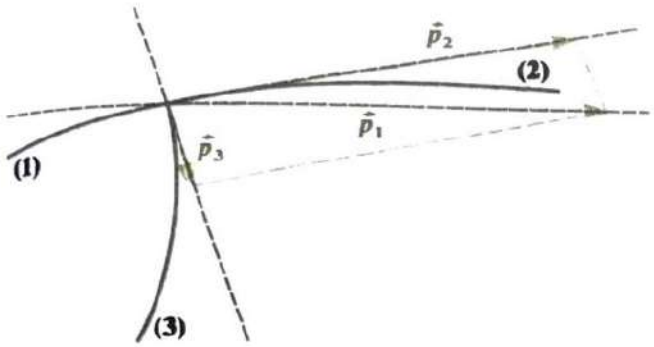
$$p_2 = p_1 \frac{R_2}{R_1} = 1\,932 \text{ MeV} \cdot c^{-1}$$

$$p_3 = p_1 \frac{R_3}{R_1} = 400 \text{ MeV} \cdot c^{-1}.$$

B3.1 Calculs.

b/ Les vecteurs sont tracés sur la figure ci-après, à l'échelle 1 cm pour 400 MeV . c^{-1}.

B4.3 Étude graphique.



c/ On vérifie la conservation du vecteur quantité de mouvement :

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}_3.$$

C1.1 Démarche scientifique.
B3.1 Outil mathématique.

4a/ Pour chaque particule, on utilise les relations :

$$\mathcal{E}^2 = (pc)^2 + m^2c^4 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_c = \mathcal{E} - mc^2.$$

A1.1 Formules.

On obtient ainsi le tableau ci-après :

B3.2 Calculs.

	(1)	(2)	(3)
p (en MeV . c^{-1})	2026	1932	400
$\mathcal{E}$ (en MeV)	2233	2148	1020
$\mathcal{E}_c$ (en MeV)	1295	1210	82

b/ Nous pouvons vérifier la loi de conservation de l'énergie totale, y compris l'énergie de masse du proton au repos avant le choc :

C1.3 Savoir-faire théorique.

Énergie avant le choc :

$$2233 + 938 = 3172 \text{ MeV}.$$

B2.1 Expression écrite.

Énergie après le choc :

C1.3 Savoir-faire.

$$2148 + 1020 = 3168 \text{ MeV}.$$

Compte tenu de la précision des mesures, nous avons vérifié la conservation de l'énergie totale (écart de 3 MeV sur 3170 MeV).

B2.1 Expression écrite.

On vérifie aussi la conservation de l'énergie cinétique :

$$1295 \approx 1210 + 82.$$

La conservation de l'énergie cinétique est due au fait que le choc est élastique.

Problème résolu 2

Annihilation de particules

Un antiproton est freiné dans une chambre à bulles ; il rencontre avec une vitesse négligeable un proton au repos en A. Le proton et l'antiproton s'annihilent. On observe la création d'au moins deux pions π^+ et π^- dont les traces respectives C_1 et C_2 ont pour rayons de courbure en A :

$$R_1 = 1{,}04 \text{ m} \quad \text{et} \quad R_2 = 1{,}61 \text{ m}.$$

L'angle entre les tangentes en A à C_1 et C_2 est $\theta = 50°$. Les traces C_1 et C_2 sont situées dans un même plan orthogonal au vecteur champ magnétique $\vec{B}$ qui règne dans la chambre à bulles.

1/ Calculer les quantités de mouvement (en MeV . c^{-1}*) des pions π^+ et π^- sachant que $B = 1{,}20$ T.*

2/ Montrer que, lors de l'annihilation, il se crée une troisième particule (neutre). Calculer ou déterminer graphiquement la quantité de mouvement $\vec{p}_3$ et l'énergie totale $\mathcal{E}_3$ (en MeV*) de cette troisième particule.*

3/ A l'aide du tableau ci-après (masses en MeV . c^{-2}*), formuler l'hypothèse la plus vraisemblable sur la nature de la troisième particule.*

nom	*proton*	*anti-proton*	*neutron*	*méson* π^+	*méson* π^-	*méson* π^0
masse	938	938	939	139	139	135

4/ Calculer la vitesse v_3 de la troisième particule. Cette particule est-elle relativiste ?

1/ On calcule pc (en MeV) en utilisant la relation :

$$pc = 300\,RB.$$

A1.2 Formules et unités.

On trouve pour π^+ ($R_1 = 1{,}04$ m et $B = 1{,}20$ T) :

$$p_1 c = 374{,}4 \text{ MeV},$$

soit : $p_1 = 374{,}4$ MeV . c^{-1} ;

et pour π^- ($R_2 = 1{,}61$ m) :

$$p_2 = 579{,}64 \text{ MeV} \cdot c^{-1}.$$

B3.2 Calculs numériques.

2/ La quantité de mouvement totale initiale est nulle. Or :

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 \neq \vec{0}.$$

C2.4 Organiser les étapes de la résolution.

Il y a donc création d'une particule neutre P_3 n'ayant pas laissé de trace et telle que :

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = \vec{0},$$

soit :

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = -\vec{p}_3.$$

Scanné avec CamScanner

Sur la figure ci-après on a tracé la somme $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ à l'échelle :

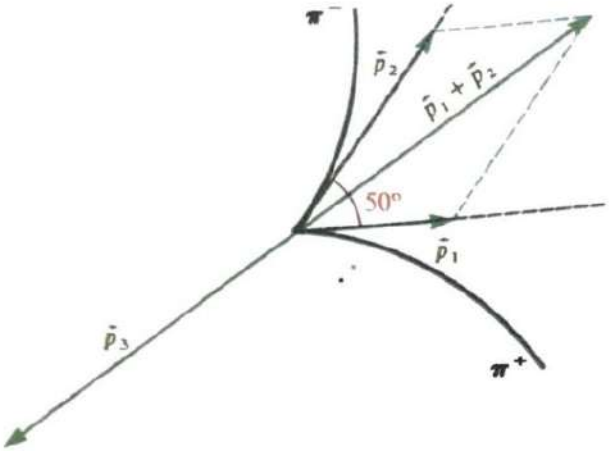
1 cm pour 200 MeV . c^{-1}.

On mesure 4,35 cm pour le vecteur somme. Par suite :

$$\|\vec{p}_1 + \vec{p}_2\| = \|\vec{p}_3\| = 4{,}35 \cdot 200 = 870 \text{ MeV} \cdot c^{-1}.$$

A2.2 Savoir-faire expérimental et théorique.

B4.2 Dessin.



Si l'on désire des mesures plus précises, il est recommandé de prendre 1 cm pour 100 MeV . c^{-1}.

On s'intéresse alors à la conservation de l'énergie. L'énergie initiale du système est l'énergie de masse du proton et de l'anti-proton :

$$\mathcal{E} = 2mc^2 = 1\,876 \text{ MeV}.$$

On calcule $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ en utilisant la relation :

$$\mathcal{E} = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}.$$

Il vient :

$$\mathcal{E}_1 = 399 \text{ MeV}, \quad \mathcal{E}_2 = 596 \text{ MeV}.$$

Or : $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3$; d'où :

$$\mathcal{E}_3 = 881 \text{ MeV}.$$

B2.1 Utilisation du français.

B3.2 Calculs.

3/ La masse approximative de P_3 est donnée par la relation :

$$\mathcal{E}^2 = p^2c^2 + m^2c^4,$$

d'où :

$$m_3c^2 = \sqrt{\mathcal{E}_3^2 - p_3^2c^2} \approx 139 \text{ MeV}.$$

La particule P_3 est un méson.

La loi de conservation de la charge électrique va nous permettre de choisir entre π^+, π^- et π^0.

$$p + \bar{p} \rightarrow \pi^+ + \pi^- + P_3.$$

La charge initiale du système est nulle. La particule P_3 n'est pas chargée ; c'est donc un méson π^0.

C1.2 Organiser les étapes de la résolution.

B3.1 Calcul.

4/ L'énergie totale est égale à environ quatre fois l'énergie de masse : la particule est certainement relativiste.

Calculons la vitesse de la particule par l'intermédiaire du rapport :

$$\beta = \frac{p_3 c}{\mathcal{E}_3} = 0{,}988.$$

On en déduit que :

$$v = 0{,}988c = 2{,}98 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

A2.1 Savoir-faire théorique.

B3.1 Calculs.

Problème résolu 3

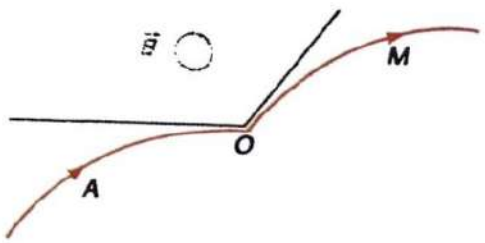
Un accélérateur de particules du C.E.R.N. a permis la mise en évidence du boson Z, nouvelle particule de grande masse, à durée de vie très courte ($\mathcal{E}_0 = 9 \cdot 10^4$ MeV, charge nulle). Elle peut se former lors du choc, en un point O, d'un électron A et d'un positon A' ($\mathcal{E}_0 = 0{,}5$ MeV) de quantités de mouvement de directions opposées et de normes égales.

1/ Calculer la valeur de p_A pour que Z puisse se former. Calculer le rapport de l'énergie totale de A à son énergie de masse.

2/ Déterminer la charge électrique de Z, sachant que c'est la seule particule existant immédiatement après le choc.

3/ Le boson Z se décompose au point O en deux muons M et M', de même masse, 105 MeV . c^{-2}.
Calculer leur quantité de mouvement et leur énergie.

4/ On étudie le mouvement des particules dans une enceinte où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}$. La figure représente les arcs de cercle, trajectoires de A et de M, et les tangentes en O à ces trajectoires, supposées contenues dans un même plan perpendiculaire à $\vec{B}$.
Quel est le sens de $\vec{B}$? Quelle est la charge portée par chaque muon M et M' ? La valeur absolue de la charge de M est e.
Que peut-on dire des rayons de courbure des trajectoires de A, A', M et M' ?



1/ Au cours du choc, il y a conservation de la quantité de mouvement :

$$\vec{p}_A + \vec{p}_{A'} = \vec{p}_Z.$$

Or, l'électron et le positon ayant des quantités de mouvement opposées, la quantité de mouvement $\vec{p}_Z$ du boson est

C1b.4 Étapes du raisonnement :
2 pts : application de la conservation de la quantité de mouvement ;
2 pts : application de la conservation de l'énergie.

Scanné avec CamScanner

nulle. Il y a également conservation de l'énergie :

$$\mathcal{E}_{e^-} + \mathcal{E}_{e^+} = \mathcal{E}_Z.$$

Positon et électron ont même énergie ; l'énergie du boson est égale à son énergie au repos $\mathcal{E}_0$; donc :

$$2\sqrt{p_A^2c^2 + m^2c^4} = \mathcal{E}_0$$

$$p_A c = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_0^2}{4} - m^2c^4}.$$

A. N. : $p_A = 45\,000$ MeV . c^{-1} ;
$\mathcal{E}_N/mc^2 = 90\,000$; les particules sont ultra relativistes. Si p_A est inférieure à cette valeur, le boson ne peut pas se former.

B3.3 2 pts pour les résultats numériques. 1 pt pour les deux remarques (ultra-relativiste et p_A insuffisant).

2/ Au cours du choc, il y a conservation de la charge. Positon et électron ont des charges opposées ; le boson est donc une particule neutre.

A1.1

3/ Au cours de la désintégration, il y a conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie :

$$\vec{0} = \vec{p}_M + \vec{p}_{M'}.$$

C2.4 Savoir-faire théorique devant une situation inconnue.

Les muons sont émis dans deux directions opposées ; les normes de leur quantité de mouvement sont égales et, par conséquent, ils ont la même énergie.

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_M + \mathcal{E}_{M'}.$$

$$\mathcal{E}_M = \mathcal{E}_{M'} = \frac{\mathcal{E}_0}{2} = 45\,000 \text{ MeV}.$$

$$p_M c = \sqrt{\mathcal{E}_M^2 - m^2c^4} = Dp_{M'}$$

$$p_M = 44\,999{,}88 \approx 45\,000 \text{ MeV} . c^{-1}.$$

B3.2 Application numérique.

4/ Le champ $\vec{B}$ est dirigé de l'avant vers l'arrière de la figure. La force ($\vec{F} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$) qui s'exerce sur l'électron doit être dirigée vers l'intérieur du cercle décrit par la particule.
La charge portée par M est négative ($-e$) ; la charge portée par M' est $+e$.
Le rayon de courbure R est lié à la quantité de mouvement par la relation :

$$p = |q| RB.$$

A1.3 2 pts : Savoir-faire théorique. 1 pt : charges de M et M'.

Les particules A, A', M et M' ayant la même charge en valeur absolue, la même quantité de mouvement en norme, décriront des trajectoires ayant le même rayon de courbure.

C1.3 1 pt : énoncé de la formule permettant la justification de la proposition ; 2 pts : les trajectoires ont même rayon de courbure.

Scanné avec CamScanner

22 NOYAUX ATOMIQUES

22.1 quelques définitions

22.1.1 nucléons

Le noyau d'un atome est constitué de particules appelées **nucléons**. Les nucléons sont de deux sortes :

- les **protons**, découverts en 1910 par E. Rutherford et portant une charge élémentaire +e;
- les **neutrons**, découverts en 1932 par J. Chadwick et électriquement neutres.

Le nombre de protons que contient un noyau est appelé **nombre de charges**, ou **numéro atomique**; il est noté Z.

Le nombre total de nucléons (protons + neutrons) est appelé **nombre de masse**; il est noté A.

22.1.2 éléments chimiques

A l'ensemble des atomes caractérisés par un même nombre de charges Z correspond un **élément chimique**. Tous les atomes d'un même élément chimique ont le même cortège électronique, formé de Z électrons, et des propriétés chimiques identiques.

A chaque élément, donc à chaque valeur de Z, on fait correspondre un **symbole** :

— élément hydrogène, $Z = 1$, symbole : H;
— élément uranium, $Z = 92$, symbole : U, etc.

Il existe 90 éléments naturels et, actuellement, 19 éléments artificiels.



Ernest Rutherford (1871-1937). *Ce physicien et chimiste britannique expliqua, en* 1903, *la nature de la radioactivité. En* 1909, *il démontra que les particules* α *sont des atomes d'hélium deux fois ionisés. Enfin, en* 1911, *il mit en évidence l'existence même du noyau atomique et proposa un modèle pour l'atome, modèle qui sera perfectionné par Bohr. Prix Nobel de chimie* 1908. ▶

Scanné avec CamScanner

22.1.3 nucléides

En physique nucléaire, l'ensemble des noyaux qui possèdent le même nombre de protons et le même nombre de neutrons est appelé un **nucléide**. Un nucléide X est donc parfaitement défini par :

— un nombre de charges Z,
— un nombre de masse A.

On le note : $^{A}_{Z}X$.

Par exemple :

$^{12}_{6}C$: 6 protons, 12 nucléons (soit 6 neutrons);

$^{238}_{92}U$: 92 protons, 238 nucléons (soit 146 neutrons).

Le nombre des nucléides connus actuellement est de l'ordre de 1 500, parmi lesquels 350 environ sont naturels.

22.1.4 isotopes

On a constaté qu'à un même élément chimique pouvaient correspondre plusieurs nucléides. Ceux-ci possèdent le même nombre de charges Z, mais différent entre eux par leur nombre de masse A (ils ne possèdent donc pas le même nombre de neutrons) et sont appelés **isotopes**(*). Autrement dit, les nucléides $^{A}_{Z}X$ et $^{A'}_{Z}X$ sont des nucléides isotopes. Les atomes correspondants sont également appelés isotopes.

Le premier cas d'isotopie a été découvert par F.W. Aston, qui mit en évidence les isotopes $^{20}_{10}Ne$ et $^{22}_{10}Ne$ du néon. Aux 90 éléments naturels, correspondent 350 nucléides naturels environ, soit en moyenne plus de 3 isotopes par élément. Il s'agit bien d'une moyenne, car le phosphore, par exemple, n'a pas d'isotope naturel, alors que l'étain en possède 10. Les éléments naturels sont ainsi, dans leur grande majorité, constitués d'un mélange d'isotopes.

On définit l'*abondance naturelle* comme étant le pourcentage en masse de chacun des isotopes dans le mélange naturel d'un élément. Ce pourcentage est quasiment constant. Citons à titre documentaire quelques exemples.

- L'hydrogène naturel contient trois isotopes :
  $^{1}_{1}H$ (99,985 %), $^{2}_{1}H$ (0,015 %), $^{3}_{1}H$ (traces).

$^{2}_{1}H$ est le deutérium, dont l'association avec l'oxygène conduit à l'eau lourde utilisée dans les réacteurs nucléaires; $^{3}_{1}H$ est le tritium.

- L'oxygène naturel contient trois isotopes :
  $^{16}_{8}O$ (99,76 %), $^{17}_{8}O$ (0,04 %), $^{18}_{8}O$ (0,2 %).
- Le chlore naturel contient deux isotopes :
  $^{35}_{17}Cl$ (75,4 %), $^{37}_{17}Cl$ (24,6 %).
- Le carbone contient trois isotopes :
  $^{12}_{6}C$ (98,89 %), $^{13}_{6}C$ (1,11 %), $^{14}_{6}C$ (traces).

Signalons enfin qu'à la plupart des éléments correspondent aussi des isotopes artificiels, instables (voir 22.3).

(*) En grec : « emplacement identique » (dans la classification périodique des éléments).

22.2 grandeurs du noyau

22.2.1 dimensions

L'existence des noyaux atomiques et leurs dimensions ont été mises en évidence pour la première fois par Sir E. Rutherford, qui, en 1911, bombarda des feuilles d'or très minces avec des particules α (noyaux d'hélium, voir *chap.* 23) animées d'une grande vitesse (voir *document*).

La charge positive de l'atome est concentrée dans le noyau qui peut être assimilé à une sphère de rayon R de l'ordre de quelques fermis (1 fm = 10^{-15} m).

Toutes les expériences montrent que le volume du noyau $\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$ est proportionnel au nombre A de nucléons. Le rayon R est donc proportionnel à $A^{\frac{1}{3}}$; il suit la loi :

$$R = R_0 A^{\frac{1}{3}},$$

avec $R_0 = 1{,}2$ fm. Cette relation est valable pour l'ensemble de la classification périodique (sauf pour le deutéron, noyau du deutérium).

22.2.2 masse

Le noyau représente quasiment toute la masse de l'atome, la masse des électrons étant le plus souvent considérée comme négligeable par rapport à la masse totale.

Il est nécessaire de définir une unité de masse mieux adaptée que le kilogramme afin de pouvoir comparer la masse des noyaux : c'est l'unité de masse atomique.

- **L'unité de masse atomique, symbole u, est par convention le douzième de la masse de l'atome isotope 12 du carbone.**

Notons que cette masse inclut la masse des électrons. Or, par définition de la mole, une mole d'atomes de carbone 12 a une masse de 0,012 kg et contient $N_A = 6{,}022098.10^{23}$ atomes de carbone (constante d'Avogadro); d'où :

$$1\ u = \frac{12.10^{-3}}{12 N_A}\ kg,$$

soit : $\mathbf{1\ u = 1{,}66055.10^{-27}\ kg}$,

ou encore : $1\ g = 6{,}022.10^{23}$ u.

Il est aussi commode d'exprimer les masses en $MeV.c^{-2}$. A partir des valeurs de la charge élémentaire e et de la célérité de la lumière, on peut calculer l'équivalent de l'unité de masse atomique en utilisant la relation $\mathcal{E} = mc^2$, et l'on obtient :

$$\mathbf{1\ u = 931{,}502\ MeV.c^{-2}}.$$

Nous retiendrons :

$$1\ u \approx 931{,}5\ MeV.c^{-2}.$$

Scanné avec CamScanner

Les valeurs des masses du proton, du neutron et de l'électron sont alors les suivantes :

particule	masse en u	masse en kg	masse en MeV.c^{-2}
proton	1,007 276 47	$1{,}672\,65.10^{-27}$	938,280
neutron	1,008 665	$1{,}674\,96.10^{-27}$	939,573
électron	0,000 548 6	$9{,}109\,53.10^{-31}$	0,511 003

Remarque : On peut se demander quelle est la masse volumique d'un noyau. Prenons le noyau de l'atome d'hydrogène, qui est un proton; si nous admettons que sa masse est contenue dans une sphère de rayon 10^{-15} m, nous trouvons une masse volumique égale à 25.10^{12} g.cm^{-3}, c'est-à-dire 25 millions de tonnes par cm^3! Cette valeur dépasse notre imagination; elle est prodigieusement élevée par rapport aux masses volumiques des solides les plus denses (19,05 g.cm^{-3} pour l'uranium). Elle laisse présager des différences de comportement entre le système nucléaire et les systèmes condensés qui nous entourent.

Les astronomes ont pu montrer que l'on retrouvait ces masses volumiques énormes dans certaines étoiles dont on a toute raison de penser qu'elles sont formées de matière nucléaire à un certain stade d'évolution. Ainsi, les *étoiles à neutrons* (ou *pulsars*) sont des étoiles dont le rayon n'excède pas quelques dizaines de kilomètres et dont la masse volumique a le même ordre de grandeur que celle d'un noyau. Ces objets stellaires très condensés sont l'ultime résidu de l'évolution de certaines étoiles après que celles-ci ont explosé, se transformant en *supernovae*.

APPLICATION 1

1/ Calculer le rayon d'un noyau de l'élément cuivre, de nombre de masse 63.

2/ Quelle est la masse volumique de ce noyau dont la masse vaut environ 63 u?

3/ Calculer la charge électrique par unité de volume dans un noyau de l'élément cuivre.

1/ Appliquons la formule semi-empirique $R = R_0 A^{\frac{1}{3}}$; il vient :

$$R = 1{,}2 \times 63^{\frac{1}{3}} = 4{,}8 \text{ fm},$$

soit : $0{,}48.10^{-14}$ m.

2/ La masse volumique est égale à :

$$\mu = \frac{\text{masse}}{\text{volume}} = \frac{63 \times 1{,}66.10^{-27}}{\frac{4}{3}\pi \times (0{,}48.10^{-14})^3},$$

soit : $\mu = 2{,}26.10^{17}$ kg.m^{-3}.

Cette masse volumique est prodigieusement grande devant la masse volumique du cuivre :

$$8{,}9.10^3 \text{ kg.m}^{-3}.$$

3/ Ce noyau contient $Z = 29$ charges positives élémentaires; la quantité de charge par unité de volume est donc égale à :

$$\rho = \frac{Ze}{V} = \frac{29 \times 1{,}6.10^{-19}}{\frac{4}{3}\pi \times (0{,}48.10^{-14})^3},$$

soit : $\rho \approx 10^{26}$ C.m^{-3}.

C'est une densité de charge énorme.

22.3 stabilité des noyaux

22.3.1 domaine de stabilité

Les répulsions électrostatiques entre les protons présents dans le noyau devraient conduire à son explosion. Pour expliquer la stabilité du noyau, on admet qu'il existe entre les nucléons, une **interaction forte**, attractive et de très courte portée, qui l'emporte à courte distance (de l'ordre des dimensions du noyau) sur l'interaction électrostatique.

Cette cohésion nucléaire n'exclut pas l'existence de nucléides instables qui se désintègrent spontanément. De tels nucléides sont dits **radioactifs**.

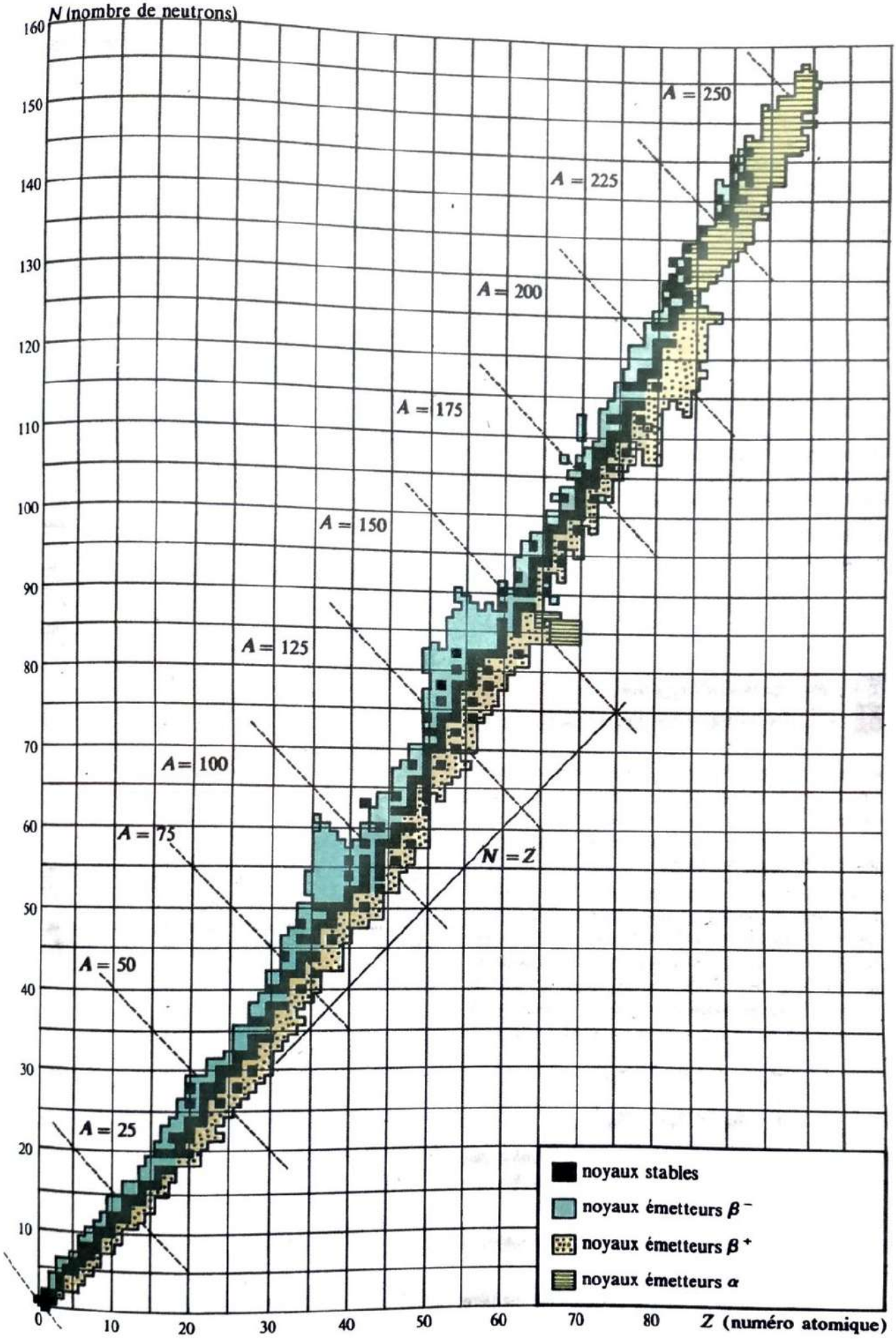
Sur les 350 nucléides naturels, une soixantaine sont instables. Tous les nucléides artificiels sont radioactifs.

La figure 1 a été obtenue en représentant un nucléide par un point, son nombre de neutrons N étant porté en ordonnée et son numéro atomique Z en abscisse.

Nous constatons que pour $Z < 20$, les nucléides stables (figurés en noir) se situent au voisinage de la droite $N = Z$. C'est le cas, par exemple de : $^4_2$He, $^{12}_6$C, $^{16}_8$O, $^{20}_{10}$Ne, $^{24}_{12}$Mg; ils correspondent tous à Z pair. Pour les nucléides de Z impair, cela est moins bien vérifié.

Le nombre de neutrons augmente ensuite plus vite que Z; les points se répartissent au-dessus de la droite $N = Z$. On peut cependant définir un *domaine de stabilité*.

Scanné avec CamScanner



1. *Chaque nucléide* ${}^{A}_{Z}X$ *est représenté par un point, son numéro atomique Z étant porté en abscisse et son nombre de neutrons* $N = A - Z$*, en ordonnée. Le nuage obtenu permet notamment de définir un domaine de stabilité (en noir).*

Scanné avec CamScanner

22.3.2 les nucléides instables

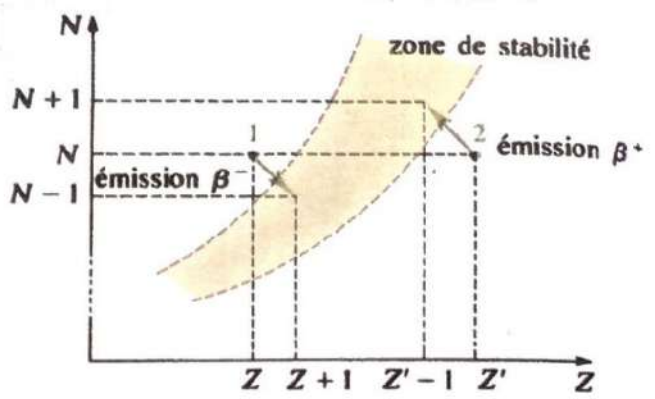
Nous envisagerons trois cas.

1. Un nucléide situé *au-dessus du domaine de stabilité* possède trop de neutrons par rapport au nombre de protons. Il se transmute spontanément, par transformation d'un neutron en un proton avec émission d'un électron : c'est la **radioactivité** β^-. Le nouveau nucléide formé se rapproche ainsi de la zone de stabilité (*fig.* 2).

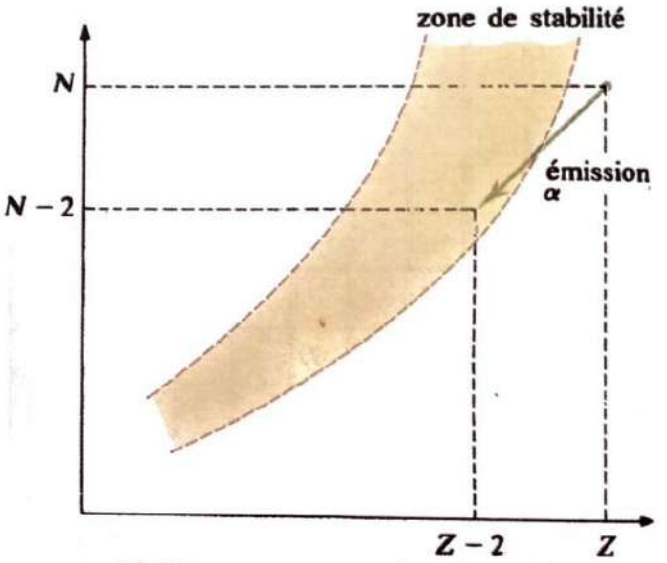
2. Un nucléide situé au-dessous du domaine de stabilité possède relativement trop de protons. Il se transmute spontanément, par transformation d'un proton en un neutron avec émission d'un positon (particule de même masse qu'un électron mais de charge élémentaire positive) : c'est la **radioactivité** β^+. Le nouveau nucléide formé se rapproche ainsi de la zone de stabilité.

3. Certains nucléides, trop massifs, sont instables. Ils se désintègrent spontanément, en émettant un noyau d'hélium $^4_2$He : c'est la **radioactivité** α (*fig.* 3).

Nous reviendrons au chapitre suivant sur le phénomène de la radioactivité.



2. *L'émission β^- ramène les noyaux de la région* **1** *vers la zone de stabilité.*
L'émission β^+ ramène les noyaux de la région **2** *vers la zone de stabilité.*



3. *L'émission α ramène les noyaux vers la zone de stabilité. On l'observe essentiellement avec des noyaux lourds.*

22.4 énergie de liaison et stabilité des noyaux

Définissons l'énergie de liaison dans le cas particulier d'un noyau de deutérium, ou deutéron. Ce noyau, le plus simple après celui de l'hydrogène, n'est formé que d'un neutron et d'un proton retenus ensemble par les forces nucléaires. Ce noyau est stable.

Partant d'un noyau de deutérium (masse m_d) au repos, nous nous proposons de calculer l'énergie qu'il faut lui apporter pour séparer le neutron (masse m_n) du proton (masse m_p), ces deux particules étant supposées au repos dans l'état final. Cette énergie, notée $\mathcal{E}_\ell$, est par définition l'**énergie de liaison** du deutéron. D'après la loi de conservation de l'énergie, nous pouvons écrire :

$$m_d c^2 + \mathcal{E}_\ell = m_n c^2 + m_p c^2,$$

soit :

$$\mathcal{E}_\ell = m_n c^2 + m_p c^2 - m_d c^2.$$

L'énergie de liaison est donc égale à *la somme des énergies de masse des constituants diminuée de l'énergie de masse du noyau.*

Le calcul de l'énergie de liaison d'un noyau de deutérium fait l'objet de l'application 2.

Nous constatons que $\mathcal{E}_\ell$ se définit de la même manière que l'énergie d'ionisation d'un atome (énergie que l'on doit fournir à un atome pris au repos pour séparer un électron du reste de l'atome, les particules finales se trouvant elles aussi au repos).

Scanné avec CamScanner

APPLICATION 2

1/ Calculer l'énergie de liaison du deutéron en MeV.
On donne : $m_d = 2{,}013\,554$ u,
$m_n = 1{,}008\,665$ u,
$m_p = 1{,}007\,277$ u,
$1\ \text{u} = 931{,}5\ \text{MeV}.c^{-2}$.

2/ On forme un deutéron au repos à partir d'un neutron et d'un proton séparés au repos. Calculer la variation de masse de l'ensemble des particules et l'énergie libérée par cette transformation.

1/ Nous avons :

$$\mathcal{E}_\ell = (m_n + m_p)c^2 - m_d c^2.$$

Or : $(m_n + m_p) - m_d = 0{,}002\,39$ u;

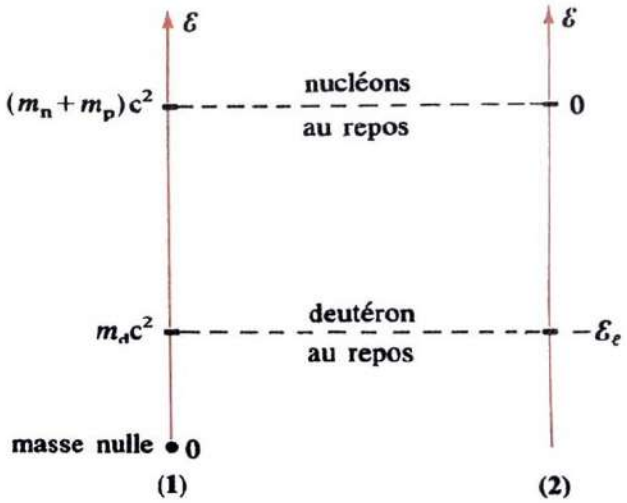
d'où : $\mathcal{E}_\ell = 0{,}002\,39 \times 931{,}5 \approx 2{,}2$ MeV.

2/ La variation de masse lors de la formation du deutéron est :

$$\Delta m = m_d - (m_n + m_p) \approx -0{,}024 \text{ u}.$$

Il y a diminution de masse, ou *défaut de masse*. L'énergie totale se conservant, cela correspond à une énergie libérée de 2,2 MeV.

Remarque : Lorsque nous avons défini l'énergie au repos d'une particule ($\mathcal{E}_0 = mc^2$), le niveau zéro de l'énergie correspondait à une masse nulle (*fig.* 4, échelle 1). Avec cette référence, l'énergie du deutéron est $m_d c^2$. L'énergie étant définie à une constante additive près, il n'est pas interdit de choisir une autre origine. Comme en physique atomique (*cf. chap.* 19), convenons de faire correspondre au niveau zéro l'énergie des constituants séparés (neutron et proton) et au repos; l'énergie du deutéron est alors $-\mathcal{E}_\ell$ (*fig.* 4, échelle 2).



4. ***L'énergie $\mathcal{E}$ étant définie à une constante additive près, les valeurs obtenues dépendent du niveau zéro de référence choisie.***

- ***A gauche, le niveau zéro de l'énergie correspond à une masse nulle : l'énergie du deutéron au repos est $m_d c^2$.***
- ***A droite, le niveau zéro correspond aux nucléons séparés et au repos : l'énergie du deutéron au repos est alors $-\mathcal{E}_\ell$.***

Plus généralement :

- L'énergie de liaison d'un noyau au repos est l'énergie qu'il faut fournir pour séparer les nucléons qui le constituent, ceux-ci se trouvant au repos dans l'état final.
- L'énergie de liaison d'un noyau est égale à la somme des énergies de masse des nucléons qui le constituent diminuée de son énergie de masse.

Ainsi, pour le nucléide ${}^A_Z\text{X}$:

$$\mathcal{E}_\ell = (Zm_p + (A-Z)m_n - m)c^2 > 0,$$

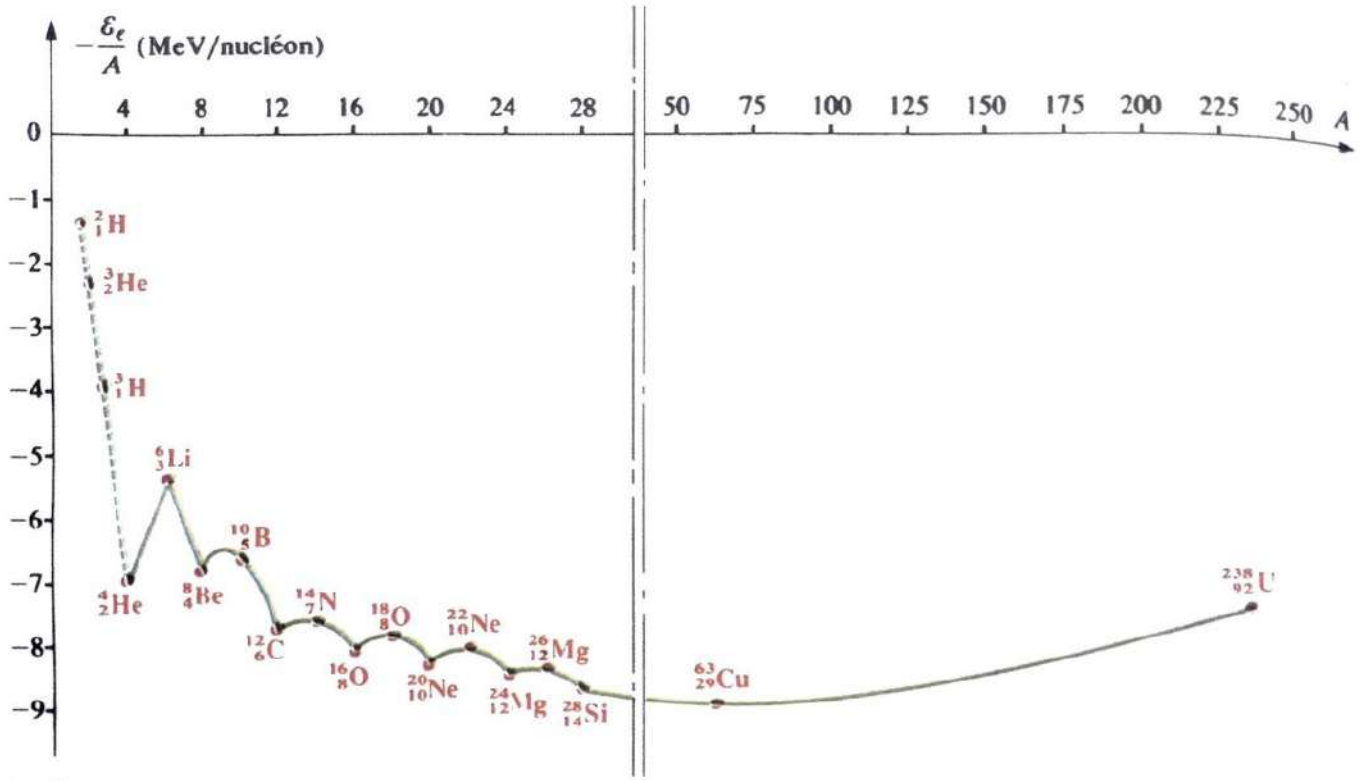
avec : m_p = masse du proton; m_n = masse du neutron;
m = masse du nucléide.

Cette énergie, positive, correspond aussi à l'énergie libérée lors de la formation d'un noyau au repos à partir des nucléons initialement au repos et séparés.

Une énergie de liaison est généralement exprimée en MeV et son calcul est facilité si on exprime les masses en $\text{MeV}.c^{-2}$.

Plus un noyau est lourd, plus son énergie de liaison est grande. Mais cela n'implique pas qu'il soit plus stable. Ainsi l'énergie de liaison de l'uranium 238 est 1 802 MeV et celle du fer 56, 492 MeV, alors que le fer 56 est plus stable que l'uranium 238.

Scanné avec CamScanner



5. *Énergie moyenne par nucléon en fonction du nombre de masse A des nucléides. La courbe est détaillée pour A < 30 (à gauche). Le niveau zéro de l'énergie correspond, ici, aux nucléons séparés et au repos. Les minimums de la courbe correspondent aux nucléides les plus stables.*

Pour juger de la stabilité d'un nucléide, il faut considérer l'énergie de liaison *par nucléon*, soit :

$$\frac{\mathcal{E}_\ell}{A} = (Zm_p + (A-Z)\,m_n - m)\,\frac{c^2}{A}.$$

Ainsi : pour $^{238}_{92}U$, $\mathcal{E}_\ell/A = 7{,}57$ MeV/nucléon;
pour $^{56}_{26}Fe$, $\mathcal{E}_\ell/A = 8{,}79$ MeV/nucléon.

• Un nucléide est d'autant plus stable que son énergie de liaison par nucléon est grande.

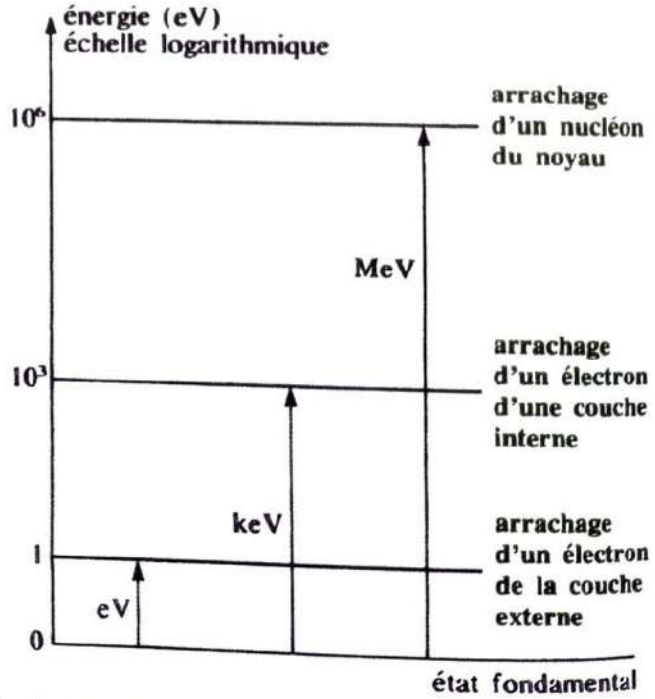
La figure 5 donne les valeurs moyennes de $-\mathcal{E}_\ell/A$ en fonction de A. Sur cette figure, le niveau zéro de l'énergie correspond aux nucléons séparés et au repos. A un minimum de la courbe correspond une stabilité maximale.

• Pour $50 < A < 75$, la courbe présente un minimum très aplati qui correspond aux nucléides les plus stables (les énergies de liaison par nucléons sont les plus élevées, égales en moyenne à 8,7 MeV).

• Pour $A > 100$, la courbe croît lentement lorsque A augmente : les nucléides correspondants (nucléides lourds) sont progressivement moins stables.

• Pour $A < 30$, la courbe croît plus nettement lorsque A diminue (nucléides légers).

Il faut, en moyenne, 8 MeV pour arracher un nucléon d'un noyau. Comparativement, il suffit de quelques eV pour arracher un électron de la couche externe d'un atome et de quelques keV pour arracher un électron des couches profondes (*fig.* 6).



6. *Échelle d'énergie comparative d'un atome.*

Scanné avec CamScanner

22.5 production d'énergie à partir des réactions nucléaires

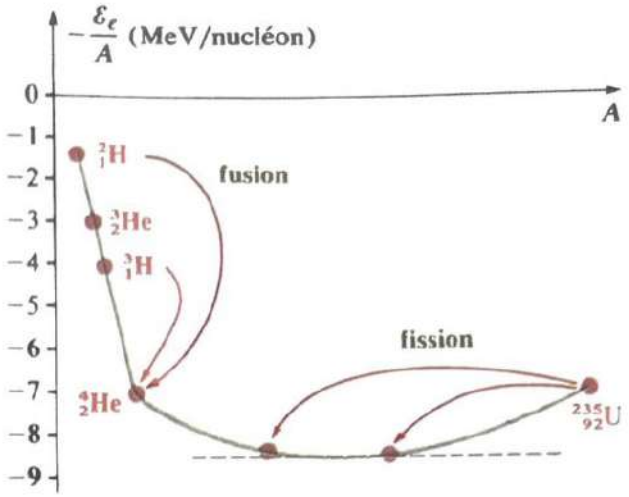
Si un noyau ou un système de noyaux se transforme dans le sens d'une diminution de sa masse, donc dans le sens d'une augmentation de l'énergie de liaison, il y a production d'énergie. Il existe deux modes possibles permettant d'extraire de l'énergie des noyaux (*fig.* 7).

22.5.1 fission

Un noyau très lourd, bombardé par un projectile convenable (neutron, par exemple), peut être brisé en deux noyaux plus légers et plus stables. En même temps sont émis plusieurs neutrons capables à leur tour de provoquer de nouvelles fissions. Ce mécanisme intervient dans les centrales nucléaires et les bombes *A*.
A côté de cette fission induite, il existe une fission spontanée, où un noyau très lourd se désintègre spontanément en produisant deux noyaux plus légers et un ou plusieurs neutrons (*application* 3).

22.5.2 fusion

Deux nucléides légers, de faible énergie de liaison, peuvent donner un nucléide plus lourd et possédant une plus grande énergie de liaison (*application* 4). C'est la fusion nucléaire (principe de la bombe H, émission d'énergie par le Soleil).



7. *Ce graphique montre le principe de libération d'énergie par :*

- *fission : un noyau très lourd se fragmente pour donner deux noyaux plus stables;*
- *fusion : deux noyaux légers s'agglutinent pour former un noyau plus stable.*

Dans les deux cas, il y a globalement diminution de masse.

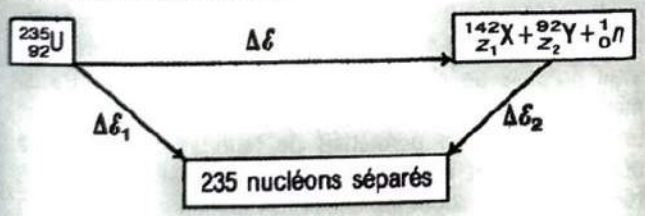
APPLICATION 3

Calculer l'énergie libérée par la fission d'un noyau d'uranium 235 selon la réaction :

$$^{235}_{92}U \longrightarrow {}^{142}_{Z_1}X + {}^{92}_{Z_2}Y + {}^{1}_{0}n.$$

Les énergies de liaison par nucléon sont de 8,45 MeV pour le noyau X, 8,8 MeV pour le noyau Y et 7,7 MeV pour le noyau d'uranium.

Utilisons le schéma suivant :



correspondant à : $\Delta\mathcal{E} = \Delta\mathcal{E}_1 + \Delta\mathcal{E}_2$,

avec : $\Delta\mathcal{E}_1 = +\mathcal{E}_\ell(U) = +235 \times 7{,}7 = +1\,809{,}5$ MeV,

$\Delta\mathcal{E}_2 = -(\mathcal{E}_\ell(X) + \mathcal{E}_\ell(Y))$

$= -(142 \times 8{,}45 + 92 \times 8{,}8) = -2\,009{,}5$ MeV;

d'où : $\Delta\mathcal{E} = 1\,809{,}5 - 2\,009{,}5 = -200$ MeV.

La réaction est exoénergétique ($\Delta\mathcal{E} < 0$) : elle libère une énergie de 200 MeV par noyau d'uranium.
Ainsi, un gramme d'uranium 235, qui contient environ $2{,}56.10^{21}$ atomes et dont tous subiraient la fission, pourrait libérer $5{,}1.10^{23}$ MeV, soit $8{,}2.10^{10}$ J (autant que la combustion de 2 t de pétrole, de pouvoir calorifique 42 000 J.g^{-1}).

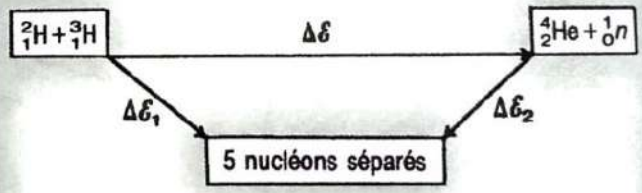
APPLICATION 4

Calculer l'énergie libérée au cours de la fusion nucléaire suivante :

$$^{2}_{1}H + {}^{3}_{1}H \longrightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{1}_{0}n.$$

Les énergies de liaison par nucléon sont de 1,11 MeV pour le deutérium (^2_1H), 2,83 MeV pour le tritium (^3_1H) et 7,07 MeV pour l'hélium (^4_2He).

Utilisons le schéma suivant :



correspondant à : $\Delta\mathcal{E} = \Delta\mathcal{E}_1 + \Delta\mathcal{E}_2$,

avec : $\Delta\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_\ell(^2_1H) + \mathcal{E}_\ell(^3_1H)$

$= 2 \times 1{,}11 + 3 \times 2{,}83 = +10{,}71$ MeV,

$\Delta\mathcal{E}_2 = -\mathcal{E}_\ell(^4_2He)$

$= -4 \times 7{,}07 = -28{,}28$ MeV;

d'où : $\Delta\mathcal{E} = +10{,}71 - 28{,}28 = -17{,}57$ MeV.

Cette réaction est exoénergétique ($\Delta\mathcal{E} < 0$). Elle libère donc une quantité d'énergie égale à 17,6 MeV lors de la formation d'un noyau d'hélium 4. Calculons l'énergie libérée lors de la formation d'un gramme d'hélium (1 mole d'hélium ≈ 4 g) :

$$|\Delta\mathcal{E}| = \frac{17{,}6 \times 1{,}6.10^{-13} \times 6{,}02.10^{23}}{4} \approx 4{,}2.10^{11}\ \text{J}.$$

Cette énergie est considérable.

Scanné avec CamScanner

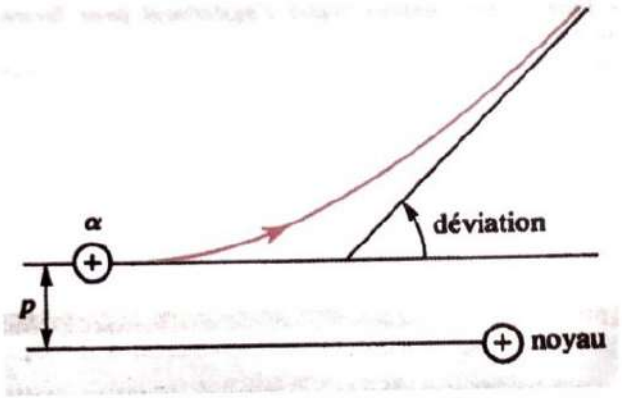
DOCUMENT

1. Expérience de Rutherford

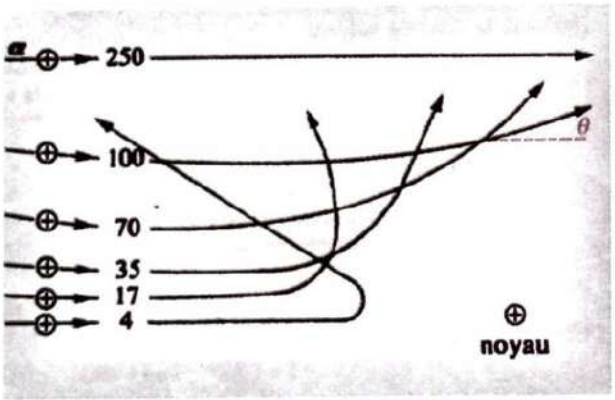
En bombardant des feuilles d'or très minces avec des particules α (émises par la désintégration radioactive du radium) animées d'une grande vitesse (15000 km.s^{-1}), Rutherford constata que certaines de ces particules subissaient des déviations importantes. Cette expérience lui suggéra le modèle suivant pour l'atome :

— la charge positive est concentrée dans le noyau, aux très petites dimensions;
— la matière est lacunaire : les électrons sont très éloignés du noyau.

Les particules α, qui subissent une répulsion électrostatique de la part du noyau, sont déviées selon la trajectoire de la figure 1. Plus le paramètre d'impact est petit plus la déviation est importante (*fig.* 2).



1. *Trajectoire d'une particule α (He^{2+}) soumise à la force électrostatique répulsive d'un noyau. La distance p est le paramètre d'impact.*



2. *Trajectoires de particules α pour différentes valeurs du paramètre d'impact p, exprimées en fermis :*

$$1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}.$$

Plus p est petit plus la déviation est grande.

L'expérience consistait à dénombrer les particules α subissant une déviation donnée. L'expérience était parfaitement conforme à la théorie de Rutherford pour des déviations inférieures à une certaine limite (de l'ordre de 100 degrés). Au-delà, le nombre de particules détectées était nettement plus faible que celui prévu théoriquement, car la plupart étaient captées par le noyau.

L'étude de la trajectoire limite permit à Rutherford de déterminer un ordre de grandeur du rayon du noyau, supposé sphérique; il obtint une valeur de 10^{-12} cm.

Cette expérience eut une portée considérable, car elle battait en brèche le modèle atomique de Thomson (1902), selon lequel le noyau remplissait la totalité de l'atome sphérique, les électrons étant distribués à l'intérieur.

Par ailleurs, les travaux de Rutherford inauguraient le moyen d'investigation actuellement privilégié en physique nucléaire, à savoir l'envoi sur des cibles diverses de particules de nature et d'énergie très variées. L'étude des produits d'une collision permet d'obtenir des informations sur la nature des constituants de la cible et sur les forces d'interaction qui les lient.

2. Les cinq millisecondes de l'élément 109

« L'événement s'est produit à 16 h 10, le 29 août 1982. Nous avons alors attrapé un poisson très rare. Il était le seul dans notre filet. » Cet heureux pêcheur est le professeur Peter Armbruster, physicien allemand. Le produit de sa pêche? L'élément chimique le plus lourd jamais synthétisé : le numéro 109. On peut maintenant le ranger sagement dans le tableau de Mendeleïev, le tableau où s'alignent tous les éléments : les naturels et les synthétisés. Il est le dernier de la famille..

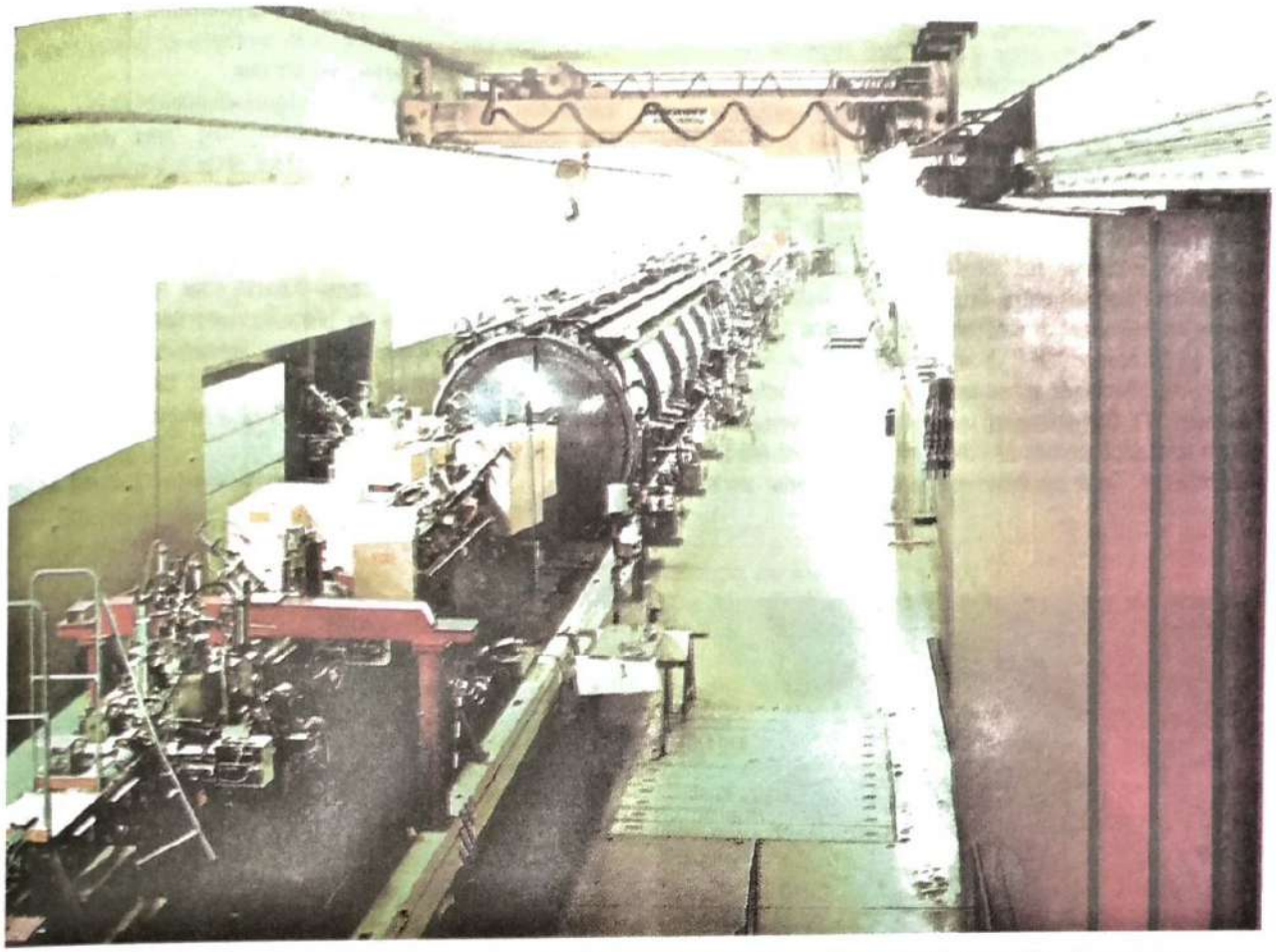
C'est en bombardant, pendant plus de quinze jours, des atomes de bismuth avec des atomes de fer ionisés, à une énergie assez basse, qu'une équipe de physiciens de Darmstadt a réussi à amener à l'existence l'élément 109. Cet atome lourd, qui n'a vécu que quelques millisecondes, a été précédé, un an et demi auparavant, par la synthèse de l'élément 107.

En 1940, le plus lourd de tous les éléments chimiques connus était l'uranium. Avec son numéro atomique de $Z = 92$, il arrivait en queue de liste des éléments naturels. A cette époque, la célèbre table périodique des éléments mise sur pieds par Mendeleïev était encore incomplète. On se souvient que c'est en 1869 que le grand chimiste de Saint-Pétersbourg avait proposé de classer tous les éléments, par ordre de masse atomique croissant, sur des colonnes horizontales. Cet arrangement génial permettait de réunir dans une même colonne verticale des éléments de masses atomiques différentes mais de propriétés chimiques analogues.

Cette classification avait aussi une grande puissance de pronostic : lorsque Mendeleïev, en construisant son tableau, ne connaissait pas le corps dont la place était spécifiée par le procédé de classification, il laissait cette case en blanc, sûr de pouvoir y loger un jour l'élément inconnu. C'est ainsi que en 1875, le gallium et le germanium furent découverts. Ils trouvèrent spontanément leur place dans le tableau, qui est en quelque sorte l'alphabet chimique de notre univers.

Au tout début des années 40, le tableau périodique n'était pas complet. Quelques cases restaient vides. Il faudra attendre 1947, et la découverte de l'astate, pour qu'il soit parachevé. En revanche, en 1940, les savants étaient

Scanné avec CamScanner



3. *Cet accélérateur d'ions lourds, d'une longueur de* 112 m, *a permis de synthétiser l'élément* 109. *Il permet de porter à* 20 MeV *l'énergie des ions lourds.*

persuadés qu'aucun atome de numéro atomique supérieur à l'uranium 92 ne pouvait exister dans la nature. Le tableau s'arrêtait donc à la case 92, et, s'il n'était pas complet, il était néanmoins clos. L'alphabet des éléments allait de l'hydrogène à l'uranium.

Très vite, les méthodes de synthèse apportées par la chimie nucléaire allaient faire voler en éclats cette frontière. L'ultime élément du tableau de Mendeleïev tient son nom de la lointaine planète de notre système solaire. Avec la maîtrise des moyens de transmutation, avec le pouvoir de transformer un noyau atomique en un autre, différent du premier, la série inédite des transuraniens apparut. Le premier de ceux-ci, découvert par Mc Millan et Seaborg, fut légitimement baptisé neptunium ($Z=93$), puisque Neptune gravite encore plus loin qu'Uranus autour du Soleil.

En 1941, Seaborg, Wahl et Kennedy, de l'équipe de Berkeley, en bombardant de l'uranium avec un flux de neutrons, découvrent un second transuranien : l'isotope 238 de l'élément 94. Le plutonium était né. La synthèse de cet isotope 238, qui, aujourd'hui, sert de source d'énergie aux stimulateurs cardiaques, inaugure sans conteste les débuts d'une ère nouvelle pour l'humanité. Le plutonium est, maintenant, produit par tonnes, et l'on sait qu'un autre isotope de cet élément, le 239, est utilisé dans la fabrication des bombes thermonucléaires.

En 1944, c'est au tour de l'américium (95) d'être synthétisé; suivi la même année du curium (96). Puis le berkelium (97) et le californium (98) sont obtenus en 1950. En 1952, l'einsteinium (99) et le fermium (100), du nom du grand savant italien, doivent être rajoutés à la liste des transuraniens. Le fermium, qui est l'isotope le plus lourd jamais créé par un flux de neutrons, a une période de stabilité de quatre-vingts jours.

Les physiciens qui travaillaient sur ces transuraniens se sont ensuite rendu compte qu'il devenait de plus en plus difficile d'obtenir une synthèse nouvelle par simple bombardement de flux de neutrons.

C'est une technique toute autre, celle des accélérateurs de particules, qui a permis de franchir le cap du fermium dans la course pour les éléments au-delà de l'uranium. Les accélérateurs peuvent fournir des faisceaux de projectiles très divers, des ions carbone ou oxygène par exemple. Ces ions sont des atomes dont on a soustrait des électrons périphériques. Les physiciens n'ont plus cherché alors à faire pénétrer uniquement des neutrons dans les noyaux cibles. Ils ont utilisé des noyaux complets. En précipitant noyaux contre noyaux, ils ont pu obtenir par fusion ce que l'on appelle un noyau composé et, par voie de conséquence, le noyau d'un élément nouveau.

Scanné avec CamScanner

Cette technique a permis aux physiciens de poursuivre la création des transuraniens. Les principes de Mendeleïev étaient, bien sûr, toujours bons, mais il fallait maintenant agrandir son tableau pour y loger ces éléments artificiels. Entre 1955 et 1958, le mendelevium (101) et le nobelium (102) sont synthétisés. Ce dernier, par exemple, est amené à l'existence par bombardement de curium 244 avec des ions carbone. Puis l'élément 103, celui qui porte le nom de l'inventeur du cyclotron, le lawrencium, était découvert en 1960. Durant la décennie suivante, et jusqu'au début des années 70, la course aux transuraniens a pris des allures de conflit idéologique entre Russes et Américains, chaque équipe revendiquant la paternité des numéros 104 et 105.

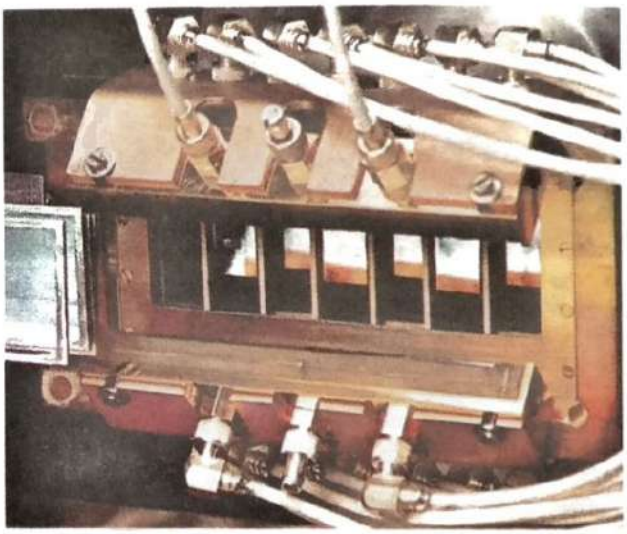
C'est le 25 février 1981, à minuit passé, que le filet des physiciens allemands a ramassé son premier poisson rare, l'élément 107. Ces poissons, vaudrait-il mieux dire, puisqu'en fait ce sont sept atomes de l'élément 107 qui ont été amenés à l'existence. Cette synthèse est venue couronner les efforts des dix scientifiques de la G.S.I. de Darmstadt, l'un des douze plus grands instituts de recherche de la R.F.A. L'équipe d'Unilac et l'équipe des professeurs P. Armbruster et G. Mũzenberg ont réussi cette synthèse en bombardant du bismuth avec des atomes de chrome.

Le 29 août 1982, cette fois, l'équipe allemande pêche encore une nouvelle espèce : l'élément 109. Très exactement, l'isotope 266 de l'élément 109. Pour cette expérience, ce sont des atomes de fer qui ont bombardé les cibles de bismuth. Pourquoi le fer? Pour les mêmes raisons arithmétiques qui président à l'élaboration des noyaux composés. Les 26 protons contenus dans l'atome de fer ajoutés aux 83 protons de l'atome de bismuth, cela fait 109. Ce noyau s'est désintégré 5 ms après sa naissance. Il s'est alors transmuté en l'isotope 262 de l'élément 107, puis, 22,3 ms plus tard, ce dernier se désintégrait à nouveau pour donner l'isotope 258 de l'élément 105.

D'après *Sciences et Avenir*, n° 430.



4. ***Intérieur de l'accélérateur de la page précédente.***



5. ***Placé dans le filtre de vitesse, ce détecteur a permis d'identifier l'élément*** **107** ***en*** **1981** ***et l'élément*** **109** ***en*** **1982.**

Scanné avec CamScanner

EXERCICES

L'essentiel du cours

22.1 A Choisir la bonne réponse.

- Le numéro atomique Z indique le nombre de *protons/neutrons* d'un noyau.
- Le nombre de masse A indique le nombre de *neutrons/nucléons*.
- Un élément chimique est caractérisé par Z/A.
- Les atomes et les ions d'un même élément *ont/n'ont pas* le même numéro atomique Z.
- Les atomes et les ions d'un même élément *ont/n'ont pas* le même nombre d'électrons.
- Un nucléide est *une espèce de noyau/un noyau*.
- Un nucléide est caractérisé *par A/par A et Z*.
- Les isotopes ont *même numéro atomique/même nombre de masse*.
- Les nucléides $^{135}_{53}X$ et $^{135}_{55}X'$ *sont/ne sont pas* des isotopes.
- L'unité de masse atomique est égale à

$$931{,}5\ \text{MeV}\,.\,c^{-2}/931{,}5\ \text{eV}\,.\,c^{-2}.$$

22.2 A Compléter le tableau ci-après :

nucléide	$^{35}_{17}$Br	$^{235}_{92}$U		
élément	Br	U	C	
nombre de nucléons	35		12	
nombre de protons	17		6	6
nombre de neutrons				8

22.3 A *Vrai* ou *faux* ?

- L'énergie assurant la stabilité d'un nucléide $^{A}_{Z}X$ correspond à la différence de masse entre les Z protons et les $A - Z$ neutrons.
- Plus un noyau est stable, plus l'énergie de liaison par nucléon est élevée.
- L'énergie de liaison par nucléon est la plus grande pour les noyaux les plus légers.
- La perte de masse par nucléon est la plus élevée, en valeur absolue, pour les atomes les plus stables.
- L'énergie moyenne de liaison par nucléon des noyaux les plus stables est de l'ordre de 8 MeV.

22.4 A Confirmer ou infirmer le raisonnement suivant : L'énergie de liaison du noyau d'uranium $^{238}_{92}$U est $\mathcal{E}_{\ell_1} = 1\,802$ MeV ; celle du noyau de fer $^{56}_{26}$Fe est $\mathcal{E}_{\ell_2} = 492$ MeV. Le noyau d'uranium est donc plus stable que le noyau de fer.

Exercices de base

Dans les exercices suivants, on prendra :

m_p *(proton)* $= 1{,}007\,276$ u $= 938{,}28$ MeV $.\ c^{-2}$;
m_n *(neutron)* $= 1{,}008\,665$ u $= 939{,}57$ MeV $.\ c^{-2}$;
m_e *(électron)* $= 0{,}000\,549$ u $= 0{,}51$ MeV $.\ c^{-2}$;
$1\ \text{u} = 1{,}660\,6 \,.\, 10^{-27}$ kg $= 931{,}50$ MeV $.\ c^{-2}$;
$N_A = 6{,}022 \,.\, 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$.

On pourra considérer que la masse M de l'atome est égale à celle du noyau (symbole : m) augmentée de la masse des électrons ; on négligera alors l'énergie de liaison électrons-noyaux.

22.5 A Évaluer le rayon d'un noyau de carbone $^{12}_{6}$C. Quels sont les noyaux dont le rayon est sensiblement le double de celui du carbone $^{12}_{6}$C ?

Données : $R = R_0 A^{1/3}$, avec $R_0 = 1{,}2$ fm.

22.6 A A partir de la relation $R = R_0 A^{1/3}$, calculer les rayons des noyaux $^{12}_{6}$C et $^{238}_{92}$U . En déduire la masse volumique moyenne de ces derniers.

Données : $M(^{12}_{6}\text{C}) = 12$ u ; $M(^{238}_{92}\text{U}) = 238{,}051$ u ; $R_0 = 1{,}2$ fm.

22.7 A Le fluor F a pour seul isotope stable le noyau noté $^{19}_{9}$F. Préciser ce que représentent les nombres intervenant dans cette notation. Quelle est la composition du noyau de cet isotope ?

Énergie de liaison

22.8 A Quelle est l'énergie de liaison par nucléon du nucléide $^{20}_{10}$Ne ? La masse de ce noyau est égale à 19,986 7 u.

22.9 A 1/ Calculer, en MeV, l'énergie de liaison par nucléon d'un noyau d'uranium 235. La masse de ce noyau est égale à 234,994 u.

2/ Indiquer, pour l'ensemble des noyaux, la forme de la courbe représentant les énergies de liaison par nucléon en fonction des nombres de masse A.

3/ Où sont, sur cette courbe, les noyaux pouvant donner lieu à des réactions de fission ou de fusion exoénergétiques ? Expliquer le principe des réactions.

22.10 A L'énergie de liaison du nucléide $^{56}_{26}$Fe est $\mathcal{E}_{\ell_1} = 492{,}24$ MeV ; celle du nucléide $^{142}_{58}$Ce est $\mathcal{E}_{\ell_2} = 1\,199{,}9$ MeV. Déterminer le nucléide le plus stable des deux.

22.11 AB3 1/ Calculer les énergies de liaison par nucléon des nucléides $^{12}_{6}$C et $^{14}_{6}$C. On tiendra compte de la masse des électrons.

Données : $M(^{12}_{6}\text{C}) = 12{,}000\,0$ u ; $M(^{14}_{6}\text{C}) = 14{,}003\,2$ u.

2/ Pourquoi le carbone 14 est-il radioactif ?

Bilan d'énergie

22.12 C2 On considère les deux réactions nucléaires suivantes :

$$^{7}_{3}\text{Li} + ^{4}_{2}\text{He} \rightarrow ^{10}_{5}\text{B} + ^{1}_{0}n,$$
$$^{7}_{3}\text{Li} + ^{4}_{2}\text{He} \rightarrow ^{11}_{5}\text{B}.$$

A l'aide de considérations énergétiques, déterminer celle de ces deux réactions qui est prévisible.

Données : $m(\text{He}) = 4{,}001\,50$ u ; $m(\text{Li}) = 7{,}014\,36$ u ; $m(^{10}\text{B}) = 10{,}010\,19$ u ; $m(^{11}\text{B}) = 11{,}006\,56$ u.

22.13 Le réacteur d'un sous-marin nucléaire fonctionne à l'aide d'uranium enrichi en isotope $^{235}_{92}$U (l'isotope $^{238}_{92}$U n'étant pas fissile).

1/ A Quelle est la structure des nucléides cités ?

Scanné avec CamScanner

2/ Les noyaux d'uranium 235 subissent différentes fissions, parmi lesquelles l'une des plus fréquentes est la suivante :

$$^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{94}_{38}Sr + ^{140}_{54}Xe + 2^{1}_{0}n.$$

a/ AB3 Calculer les énergies de liaison par nucléon des nucléides suivants : $^{235}_{92}U$, $^{94}_{38}Sr$, $^{140}_{54}Xe$.

Données : $M(^{235}_{92}U) = 234,994\,2$ u ; $M(^{94}_{38}Sr) = 93,915\,4$ u ; $M(^{140}_{54}Xe) = 139,925\,2$ u.

b/ C1 En déduire l'énergie libérée par cette réaction nucléaire.

3/ On suppose que toutes les fissions sont identiques à la précédente. Calculer la masse d'uranium consommée en 30 jours par le sous-marin, dont le réacteur fournit une puissance moyenne de 25 MW.

22.14 B3C1 On considère la réaction nucléaire de fission :

$$^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{95}_{42}Mo + ^{139}_{57}La + 2^{1}_{0}n + 7\,^{0}_{-1}e.$$

Les énergies de liaison par nucléon des nucléides sont respectivement 7,7 MeV, 8,6 MeV et 7,75 MeV.

1/ Exprimer la masse d'un nucléide en fonction de son énergie de liaison.

2/ Établir la relation entre l'énergie libérée au cours de la fission et la variation de masse du système.

3/ Calculer l'énergie cédée par cette réaction nucléaire.

Banc d'essais

22.15 B3C Une étoile de masse $M = 8 \cdot 10^{30}$ kg, soit quatre fois la masse du Soleil, est susceptible, sous l'effet des forces de gravitation, de devenir un trou noir. La vitesse pour se libérer de l'attraction gravitationnelle de l'étoile est donnée par :

$$v_L = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

En admettant que cette relation est applicable au photon, calculer le rayon et la masse volumique du trou noir. Comparer cette dernière à celle du noyau.

Donnée : $G = 6,7 \cdot 10^{-11}$ S.I. ; $c = 3 \cdot 10^{8}$ m . s^{-1}.

↳ **ex. 22.6.**

Énergie de liaison

22.16 B3 On donne les masses des atomes correspondant aux nucléides suivants :

$M(^{15}_{8}O) = 15,999\,4$ u ; $M(^{15}_{8}O) = 15,003\,0$ u ;

$M(^{15}_{7}N) = 15,000\,1$ u.

1/ Calculer, en MeV, les énergie de liaison par nucléon des trois nucléides. On tiendra compte de la masse des électrons.

2/ Quelle énergie faut-il pour extraire un proton de $^{16}_{8}O$?

3/ Quelle énergie faut-il pour extraire un neutron de $^{16}_{8}O$?

↳ **ex. 22.8, 22.9, 22.11.**

22.1 B3 La masse de l'atome de tritium $^{3}_{1}H$ est 3,016 06 u, et celle de l'atome d'hélium 3 ($^{3}_{2}He$) est 3,016 03 u. Calculer l'énergie de liaison par nucléon de chaque nucléide. La désintégration spontanée du tritium $^{3}_{1}H$ suivant la réaction nucléaire :

$$^{3}_{1}H \rightarrow ^{3}_{2}He + ^{0}_{-1}e$$

est-elle envisageable ?

↳ **ex. 22.8, 22.11, 22.13.**

22.18 B3C2 On donne les réactions nucléaires théoriques :

$$^{226}_{88}Ra \underset{2}{\overset{1}{\rightleftharpoons}} ^{222}_{86}Rn + ^{4}_{2}He.$$

L'une de ces deux réactions se produit naturellement. Déterminer laquelle, par des considérations énergétiques.

Données : $m(Ra) = 225,977\,0$ u ; $m(He) = 4,001\,5$ u ; $m(Rn) = 221,970\,2$ u.

↳ **ex. 22.12.**

22.19 B3C2 On donne les réactions théoriques :

$$^{3}_{1}H + ^{1}_{1}H \underset{2}{\overset{1}{\rightleftharpoons}} 2\,^{2}_{1}H.$$

L'une de ces réactions se produit naturellement. Déterminer laquelle, par des considérations énergétiques.

Données : $m(^{3}_{1}H) = 3,015\,50$ u ; $m(^{2}_{1}H) = 2,013\,55$ u ; $m(^{1}_{1}H) = 1,007\,276$ u.

↳ **ex. 22.12.**

22.20 C Sous l'action d'un neutron incident, d'énergie cinétique faible, le nucléide $^{235}_{92}U$ éclate en produisant deux nucléides stables, $^{91}_{40}Zr$ et $^{142}_{58}Ce$ par exemple, ainsi que des neutrons et des électrons.

1/ Écrire la réaction nucléaire. On rappellera les lois de conservation utilisées.

2/ L'énergie de liaison par nucléon est donnée par le tableau suivant :

nucléide	$^{235}_{92}U$	$^{91}_{40}Zr$	$^{142}_{58}Ce$
énergie (MeV)	7,70	8,80	8,45

a/ Rappeler la définition de l'énergie de liaison.

b/ En négligeant l'énergie cinétique du neutron incident, calculer, en MeV, l'énergie libérée lors de la fission d'un noyau $^{235}_{92}U$.

3/ Calculer l'énergie cédée par cette réaction nucléaire lorsqu'un kilogramme d'uranium 235 se désintègre.

↳ **Ex. 22.13, 22.14.**

Matérialisation

22.21 Dans certaines conditions, un photon peut se matérialiser en donnant naissance à une paire de particules : un électron et un positon.

1/ A Déterminer la charge et la masse du positon.

Scanné avec CamScanner

2/ C2 Déterminer l'énergie minimale d'un photon pour qu'il se matérialise en une paire du type précédent.

3/ B3C1 Dans quel domaine de longueur d'onde se trouvent les radiations capables de produire ce phénomène ?

Donnée : $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J . s.

Un peu de théorie

22.22 C En 1935, Weizsäcker a établi une formule semi-empirique donnant l'énergie de liaison d'un nucléide ${}^{A}_{Z}X$:

$$\mathcal{E}_\ell = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_a \frac{(A-2Z)^2}{A} + \delta a_p A^{-3/4},$$

où $\delta = 1$ si A et Z sont pairs, $\delta = -1$ si A et Z sont impairs, $\delta = 0$ si A et Z sont de parités différentes.
Les mesures de masses au moyen de spectromètre de masse à haut pouvoir de résolution, l'étude des bilans de réactions nucléaires et de la stabilité des noyaux vis-à-vis de la radioactivité β ont permis d'évaluer les coefficients (d'après Wapstra) :
$a_v = 14{,}1$ MeV, $a_s = 13$ MeV, $a_c = 0{,}595$ MeV, $a_a = 19$ MeV, $a_p = 33{,}5$ MeV.
Au cours de la radioactivité β, les noyaux conservent le même nombre de masse A ; on dit que les noyaux émetteurs et les noyaux fils sont *isobares*.

1/ Dans le cas d'une telle radioactivité, pour A donné, le noyau présentant la stabilité la plus grande correspond donc à :

$$\frac{d\mathcal{E}_\ell}{dZ} = 0.$$

Déterminer la relation qui existe alors entre Z et A.

Application numérique : $A = 40$. Déterminer Z (comme valeur entière la plus proche).

2/ Calculer $\mathcal{E}_\ell$ pour les noyaux suivants : ${}^{40}_{17}Cl$, ${}^{40}_{18}Ar$, ${}^{40}_{19}K$, ${}^{40}_{20}Ca$. Représenter graphiquement les énergies de liaison de ces noyaux en fonction de Z. Quel est le noyau le plus stable ? Comment peuvent se désintégrer les noyaux instables ?

Scanné avec CamScanner

23 RÉACTIONS NUCLÉAIRES SPONTANÉES

23.1 émissions radioactives

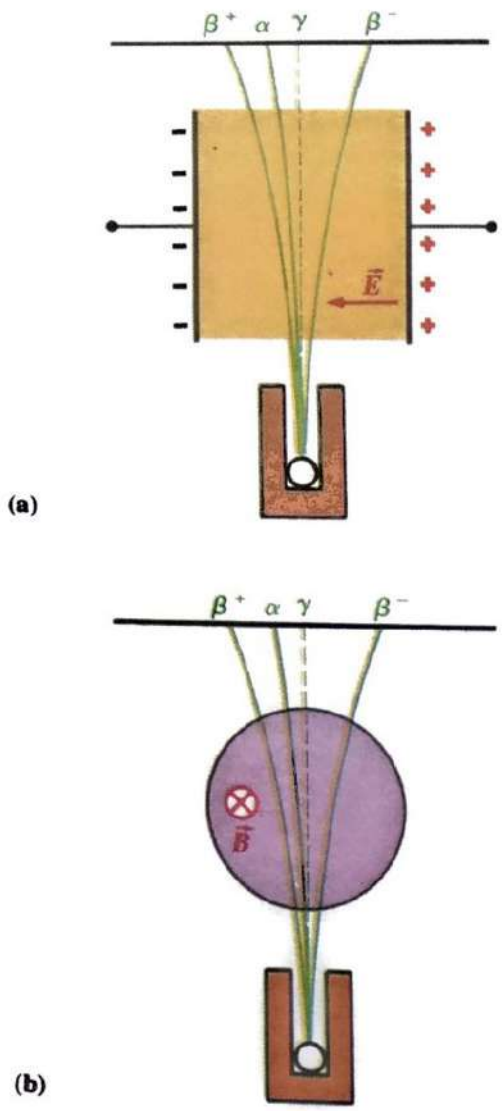
Les noyaux d'un certain nombre d'atomes, naturels ou artificiels, se décomposent spontanément, en émettant d'une part des particules et d'autre part un rayonnement électromagnétique très pénétrant, très énergétique : le **rayonnement** γ. Ce phénomène est appelé **radioactivité.**

Les particules ont été identifiées par l'étude de leur déviation dans un champ électrique $\vec{E}$ ou un champ magnétique $\vec{B}$ (*fig.* 1). Selon les noyaux émetteurs, appelés **radionucléides**, on distingue trois catégories de particules.

- Les **particules** α. Identifiées par Rutherford, en 1909, à des noyaux d'atomes d'hélium $^4_2He^{2+}$, elles sont émises avec des vitesses de l'ordre de 20 000 km.s^{-1}. Leur énergie cinétique est de quelques MeV. Elles sont facilement arrêtées : une feuille de papier suffit.
- Les **particules** β^-. Ce sont des électrons, particules que nous noterons dorénavant $^0_{-1}e$.
- Les **particules** β^+. Ce sont des positons, particules que nous noterons dorénavant ^0_1e.

Les particules β^- ou β^+ sont émises avec des vitesses très grandes, de l'ordre de 280 000 km.s^{-1} (particules relativistes), et possèdent une énergie de l'ordre du MeV. Elles peuvent traverser une feuille d'aluminium de 7 mm d'épaisseur.

Au rayonnement γ, de très courte longueur d'onde (de l'ordre de 10^{-4} nm) et donc de très haute fréquence (de l'ordre de 10^{21} Hz), sont associés des photons de très haute énergie (plusieurs MeV); ce rayonnement est capable de traverser une paroi de plomb de 20 cm d'épaisseur. C'est le plus dangereux.



1. *Séparation des rayonnements émis par un mélange de substances radioactives naturelles et artificielles :*
a. *par un champ électrique* $\vec{E}$; **b.** *par un champ magnétique* $\vec{B}$.

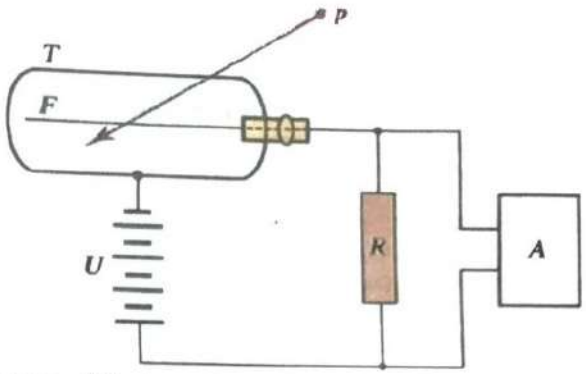
Scanné avec CamScanner

23.2 détection

Les particules α, β^- et β^+ sont chargées; il est donc possible de les détecter dans une chambre à bulles ou dans une chambre de Wilson (*photo* 4). Les photographies permettent de déterminer la vitesse, la quantité de mouvement et l'énergie cinétique de ces particules émises. En revanche, en l'absence de réaction secondaire, les rayons γ, non chargés, traversent une chambre à bulles sans laisser de trace.

Un compteur Geiger-Müller permet de détecter une particule ou un rayonnement ionisant (particules α, β, photons γ). Un tel compteur (*fig.* 2) est constitué d'une enceinte cylindrique conductrice T contenant un gaz raréfié (argon ou propane). Cette enceinte est reliée au pôle négatif d'un générateur haute tension. Une électrode axiale F est branchée au pôle positif du générateur. La tension appliquée, de l'ordre du kV, est insuffisante pour provoquer l'ionisation du gaz et le passage d'un courant par étincelles. Lorsqu'une particule chargée (ou un rayonnement ionisant) pénètre dans le détecteur, elle (ou il) provoque l'ionisation momentanée du gaz et le passage d'un courant de courte durée. La brève variation de tension engendrée par ce courant aux bornes d'un conducteur ohmique R est appliquée à l'entrée d'un amplificateur à la sortie duquel est branché un compteur d'impulsions, ou simplement un haut-parleur émettant un signal sonore pour chaque particule détectée. Un compteur Geiger-Müller permet donc de dénombrer les particules émises par une source radioactive.

Il existe d'autres types de détecteurs très performants : chambres à ionisation, compteurs à scintillation.



A : amplificateur et compteur d'impulsions
p : particule ionisante
F : fil porté au potentiel U par rapport au tube T
R : résistance

2. *Principe d'un détecteur à impulsions : compteur Geiger-Müller.*



3. *Recherche de roches radioactives à l'aide d'un compteur Geiger-Müller.*

23.3 radioactivité α

23.3.1 équation de réaction

Au cours d'une désintégration α, deux protons et deux neutrons sont expulsés du noyau père X, sous la forme d'un ion $^4_2He^{2+}$. Si on ne s'intéresse qu'aux nucléides, en faisant abstraction des différents cortèges électroniques, l'équation représentative d'une désintégration α s'écrit :

$$^A_ZX \longrightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^4_2He.$$

Le noyau fils Y correspond à l'élément situé deux cases avant celle de l'élément père dans le tableau de la classification périodique.

La radioactivité α est le fait de certains noyaux lourds ($A > 200$). Par exemple :

$$^{238}_{92}U \longrightarrow {}^{234}_{90}Th + {}^4_2He,$$
$$^{226}_{88}Ra \longrightarrow {}^{222}_{86}Rn + {}^4_2He,$$
$$^{210}_{84}Po \longrightarrow {}^{206}_{82}Pb + {}^4_2He.$$

Comme toutes les réactions nucléaires, la désintégration α obéit aux lois suivantes :

• **Conservation de la charge :** *La somme des nombres de charge des nucléides formés est égale à la somme des nombres de charge des nucléides détruits.*

• **Conservation du nombre de nucléons :** *La somme des nombres de masse des nucléides formés est égale à la somme des nombres de masse des nucléides détruits*(*).

• **Conservation de l'énergie :** *L'énergie totale du système, égale à la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie de masse, se conserve.*

L'énergie cinétique initiale est supposée nulle (noyau X au repos). Au cours de la désintégration, l'énergie de masse diminue. L'énergie de masse perdue est égale à l'énergie cinétique acquise par les particules issues de la désintégration, soit :

$$\mathcal{E}_{cY} + \mathcal{E}_{c\alpha} = (m_X - m_Y - m_\alpha)c^2 = Q.$$

La quantité Q est appelée *bilan énergétique.*

• **Conservation de la quantité de mouvement**

La désintégration du noyau père X peut être étudiée comme l'éclatement d'un solide (voir cours de Seconde). Il vient :

$$\vec{0} = \vec{p}_Y + \vec{p}_\alpha,$$

soit : $$0 = m_Y v_Y - m_\alpha v_\alpha \qquad (1)$$

avec : $$v_Y = \|\vec{v}_Y\| \quad \text{et} \quad v_\alpha = \|\vec{v}_\alpha\|.$$

Comparons les énergies cinétiques $\mathcal{E}_{c\alpha}$ de la particule α et $\mathcal{E}_{cY}$ du noyau fils Y formé (énergie cinétique de recul) :

$$\mathcal{E}_{cY} = \frac{1}{2} m_Y v_Y^2,$$

$$\mathcal{E}_{c\alpha} = \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2,$$

et, compte tenu de (1) :

$$\frac{\mathcal{E}_{cY}}{\mathcal{E}_{c\alpha}} = \frac{m_Y v_Y^2}{m_\alpha v_\alpha^2} = \frac{m_\alpha}{m_Y}.$$

L'énergie cinétique se partage en raison inverse des masses. La radioactivité α affectant les noyaux lourds :

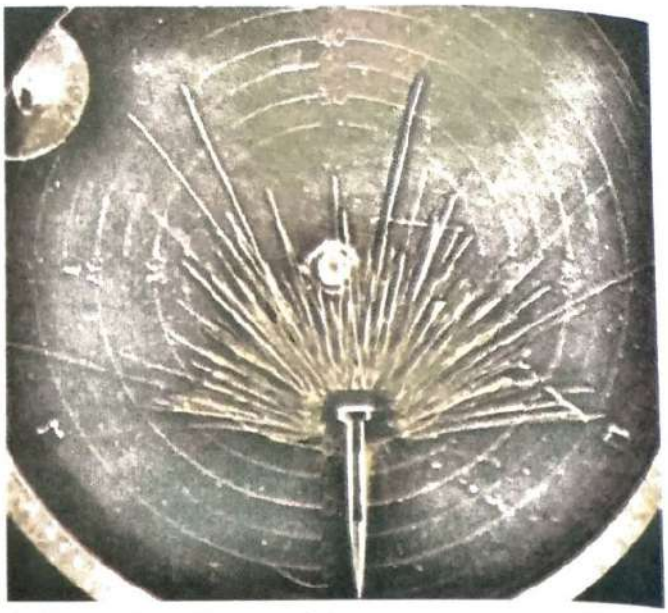
$$m_Y \gg m_\alpha \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{cY} \ll \mathcal{E}_{c\alpha};$$

l'énergie cinétique de la particule α est donc nettement supérieure à celle du noyau fils Y. Dans la pratique, on négligera $\mathcal{E}_{cY}$ devant $\mathcal{E}_{c\alpha}$.

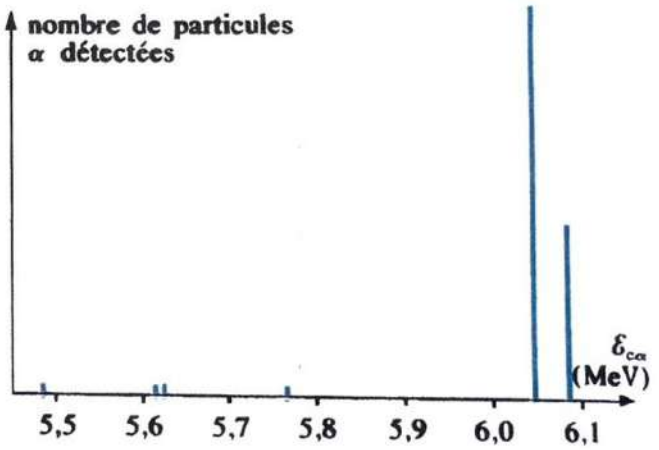
23.3.2 résultats expérimentaux; émission γ

L'expérience montre que la plupart des particules α ne possèdent pas l'énergie cinétique attendue mais une énergie cinétique moindre. Autre fait expérimental : les valeurs de l'énergie cinétique $\mathcal{E}_{c\alpha}$ des particules α émises sont quantifiées : elles prennent des valeurs bien déterminées, caractéristiques de la désintégration considérée (*fig.* 5 et *tab.* 6).

(*) Ici, un seul nucléide est détruit.



4. *Traces de particules α émises par une source radioactive, observées dans une chambre de Wilson.*



5. *Le spectre d'énergie cinétique $\mathcal{E}_{c\alpha}$ des particules α issues d'une désintégration est quantifié. Ce spectre est celui du ^{212}Bi. La hauteur des traits bleus est liée à l'abondance relative donnée dans le tableau* 6.

$\mathcal{E}_{c\alpha}$ (MeV)	$\mathcal{E}_{c\alpha} + \mathcal{E}_{cY}$ (MeV)	énergie manquante (MeV)	abondance relative
$\alpha_0 = 6{,}084$	$6{,}201 = Q$	0	27,2
$\alpha_1 = 6{,}044$	6,160	0,039	69,9
$\alpha_2 = 5{,}762$	5,873	0,328	1,6
$\alpha_3 = 5{,}620$	5,728	0,473	0,18
$\alpha_4 = 5{,}610$	5,718	0,483	1,1
$\alpha_5 = 5{,}481$	5,585	0,616	0,02

6. *Désintégration α du ^{212}Bi. L'énergie cinétique $\mathcal{E}_{c\alpha}$ des particules α émises est quantifiée. L'énergie manquante se retrouve sous forme d'énergie rayonnante (émission γ, voir fig. 7). $\mathcal{E}_{cY}$ représente l'énergie cinétique de recul du noyau fils ^{208}Tl. La désintégration α_0 correspond à la formation du noyau fils non excité (pas d'émission γ).*

Scanné avec CamScanner

L'expérience montre aussi que les désintégrations de type α sont toujours suivies d'une émission d'énergie sous forme de rayonnement γ. L'analyse du spectre d'émission de ce rayonnement montre que les valeurs de l'énergie $h\nu$ des photons γ émis sont également quantifiées et que certaines compensent exactement les défauts quantifiés de l'énergie cinétique des particules α.

L'émission γ s'explique en considérant que le noyau fils Y se trouve après désintégration dans un état excité Y*, ce noyau émettant un ou plusieurs photons γ, en retombant dans l'état fondamental. Ainsi, l'équation de la réaction se décompose en :

$$^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y^{*} + {}^{4}_{2}He,$$

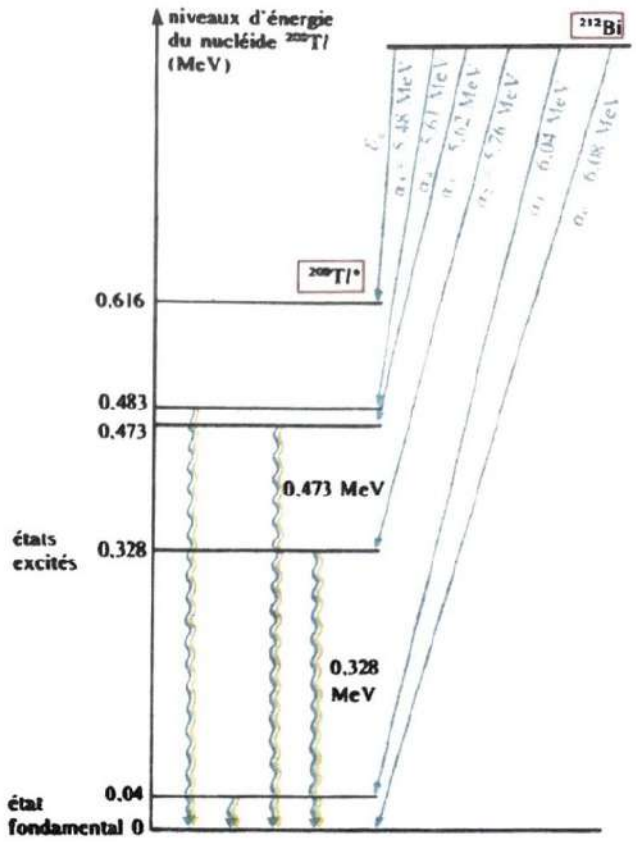
suivi de la désexcitation :

$$^{A-4}_{Z-2}Y^{*} \longrightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + \gamma.$$

La conservation de l'énergie s'écrit alors :

$$\mathcal{E}_{cY} + \mathcal{E}_{c\alpha} + \mathcal{E}_{c\gamma} = (m_X - m_Y - m_\alpha)c^2 = Q',$$

où $\mathcal{E}_\gamma$ est l'énergie émise sous forme de rayonnement γ. Cette énergie est *quantifiée*, la différence entre les niveaux énergétiques du noyau Y étant de l'ordre du MeV (*fig.* 7). Le bilan précédent montre qu'il en est de même de $\mathcal{E}_{cY} + \mathcal{E}_{c\alpha}$, donc aussi de $\mathcal{E}_{c\alpha}$, puisque le rapport $\mathcal{E}_{c\alpha}/\mathcal{E}_{cY}$ a une valeur donnée (m_Y/m_α).



7. Diagramme énergétique de la désintégration du ^{212}Bi (noyau père), au ^{208}Tl (noyau fils). L'émission de particules α, dont l'énergie est quantifiée, est suivie d'une émission γ (sauf pour la désintégration α_0, cf. tab. 6).

23.4 radioactivité β^-

23.4.1 équation de réaction

Le noyau radioactif se transforme spontanément en un noyau fils possédant un proton supplémentaire, avec émission d'un électron :

$$^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{A}_{Z+1}Y + {}^{0}_{-1}e.$$

L'élément fils Y se place dans la case qui suit celle de l'élément père X dans le tableau de la classification périodique.

Tout se passe comme si un neutron du noyau se transformait spontanément en proton et électron :

$$^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{1}_{1}p + {}^{0}_{-1}e,$$

réaction qui correspond à une perte de masse.

La radioactivité β^- s'observe généralement pour les isotopes qui renferment un excès de neutrons par rapport aux noyaux des isotopes stables. Par exemple :

$$^{210}_{83}Bi \longrightarrow {}^{210}_{84}Po + {}^{0}_{-1}e,$$
$$^{60}_{27}Co \longrightarrow {}^{60}_{28}Ni + {}^{0}_{-1}e.$$

L'émission β^-, comme l'émission α, s'accompagne en général d'une émission de rayonnement γ. En effet, là encore, la désintégration produit en général un noyau excité, le retour de ce noyau à l'état fondamental s'accompagnant de l'émission d'un ou de plusieurs photons. Ainsi, la désintégration du bismuth peut s'écrire :

$$^{210}_{83}Bi \longrightarrow {}^{210}_{84}Po^{*} + \beta^-,$$
$$^{210}_{84}Po^{*} \longrightarrow {}^{210}_{84}Po + \gamma.$$

Dans des cas assez rares, on obtient directement le noyau fils dans son état fondamental (absence d'émission γ). Par exemple, un noyau de strontium 90 donne directement un noyau fils d'yttrium 90 dans son état fondamental :

$$^{90}_{38}\mathrm{Sr} \longrightarrow {}^{90}_{39}\mathrm{Y} + \beta^-.$$

L'énergie libérée au cours d'une désintégration β^- correspond à la perte de masse de l'ensemble des particules; elle est égale à :

$$m_X c^2 - m_Y c^2 - m_e c^2 = Q.$$

Cette énergie est transférée sous forme d'énergie rayonnante (si des photons γ sont émis) et d'énergie cinétique, essentiellement à l'électron éjecté (l'énergie cinétique du noyau fils étant beaucoup plus faible).

23.4.2 résultats expérimentaux; existence des antineutrinos

Si le noyau fils est dans un état excité, on devrait trouver, comme dans le cas de l'émission α, des valeurs quantifiées (spectre discontinu) pour l'énergie cinétique des électrons émis. Or l'expérience ne confirme pas cette prévision. Le spectre des énergies cinétiques des électrons émis n'est pas discontinu, mais continu (*fig.* 8).

D'autre part, l'énergie cinétique des électrons émis est inférieure à celle que l'on peut calculer, même en tenant compte de l'émission γ.

Le bilan énergétique est donc déficitaire. Aussi le principe de conservation de l'énergie semble-t-il mis en défaut. Pauli, dans le but de maintenir ce principe fondamental, postula alors, en 1933, l'existence d'une particule neutre émise en même temps que l'électron β^-, particule inabsorbable et qui emporte l'énergie manquante. Plus de vingt ans après, l'existence de cette particule fut confirmée : il s'agit de l'**antineutrino** $\bar{\nu}$ pour l'émission β^-. Nous verrons que pour l'émission β^+ il apparaît un **neutrino** ν. Ces deux particules ont une masse extrêmement faible, indécelable à l'heure actuelle; aussi leur attribue-t-on une masse nulle. Elles sont neutres et se meuvent à la vitesse de la lumière. Leur énergie est celle qui manque au bilan de la désintégration nucléaire qui leur donne naissance.

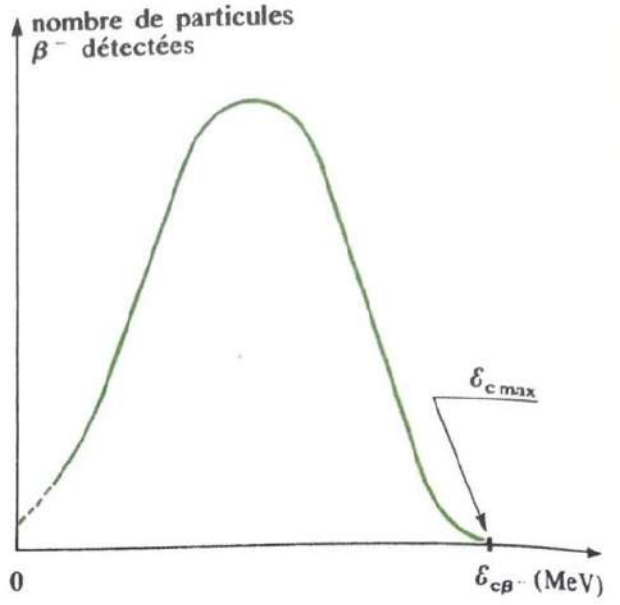
Ces particules font intervenir un type d'interaction appelée **interaction faible,** beaucoup moins intense que les interactions électriques. C'est pourquoi leur pouvoir de pénétration est extraordinaire, et il est très difficile de les mettre en évidence : on estime que leur absorption est effective pour une épaisseur de plomb de 35 années de lumière! Enfin, l'énergie de ces particules est difficilement récupérable : neutrino et antineutrino sont à l'origine d'une dissipation, d'une dégradation incontrôlable d'énergie.

En conclusion, le processus de désintégration β^- s'écrit :

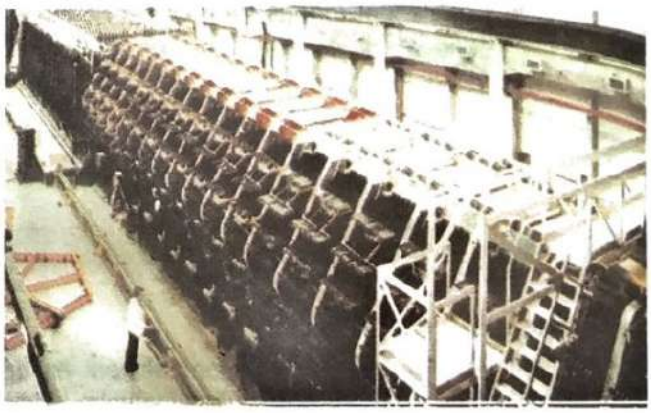
$$^{A}_{Z}\mathrm{X} \longrightarrow {}^{A}_{Z+1}\mathrm{Y}^* + {}^{0}_{-1}e + \bar{\nu},$$

suivi en général d'une désexcitation du noyau fils avec émission γ :

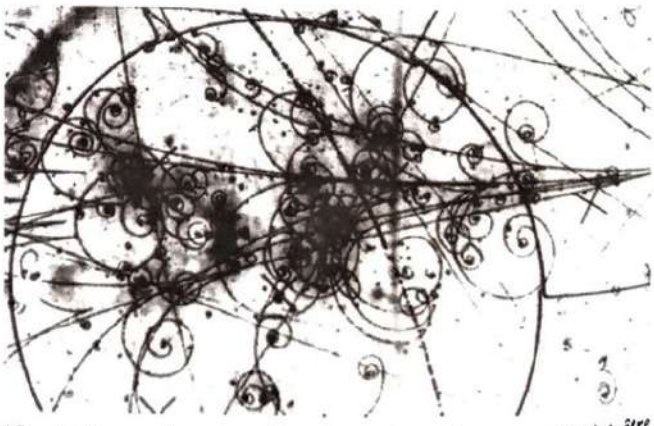
$$^{A}_{Z+1}\mathrm{Y}^* \longrightarrow {}^{A}_{Z+1}\mathrm{Y} + \gamma.$$



8. *Le spectre d'énergie cinétique $\mathcal{E}_{c\beta^-}$ des particules β^- issues d'une désintégration n'est pas quantifié.*



9. *Détecteur de neutrinos du C.E.R.N. Les neutrinos ne laissant pas de trace dans les détecteurs à ionisation, on les détecte grâce aux particules créées lors de leurs interactions. Ce détecteur, du type « sandwichs fer-scintillateur » comprend 19 modules identiques et pèse* **1 500 t.** *Les faisceaux de neutrinos détectés, issus du S.P.S. (voir document du chapitre* 21*), ont un diamètre de* **1 m** *environ.*



10. *Inobservables, neutrinos et antineutrinos ne peuvent être mis en évidence que par leurs effets. Située à proximité d'une chambre à bulles, une source radioactive β^+ ou β^- émet ces particules. Les événements qu'elles provoquent y sont détectés et interprétés; on en déduit alors leurs caractéristiques. Ici, un faisceau de neutrinos provoque une gerbe de particules (paires électron-positon).*

Scanné avec CamScanner

23.5 radioactivité β^+

Le noyau radioactif se transforme spontanément en un noyau fils possédant un proton de moins, avec émission d'un positon ${}^{0}_{1}e$, antiparticule de l'électron, et d'un neutrino ν, dont l'antineutrino $\bar{\nu}$ est l'antiparticule :

$$ {}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}_{Z-1}{}^{A}Y^{*} + {}^{0}_{1}e + \nu. $$

L'élément fils Y se place dans la case qui précède celle de l'élément père. Tout se passe comme si :

$$ {}^{1}_{1}p \longrightarrow {}^{1}_{0}n + {}^{0}_{1}e + \nu. $$

La radioactivité β^+ ne s'observe généralement qu'avec des éléments artificiels. Par exemple :

$$ {}^{13}_{7}N \longrightarrow {}^{13}_{6}C + {}^{0}_{1}e + \nu, $$

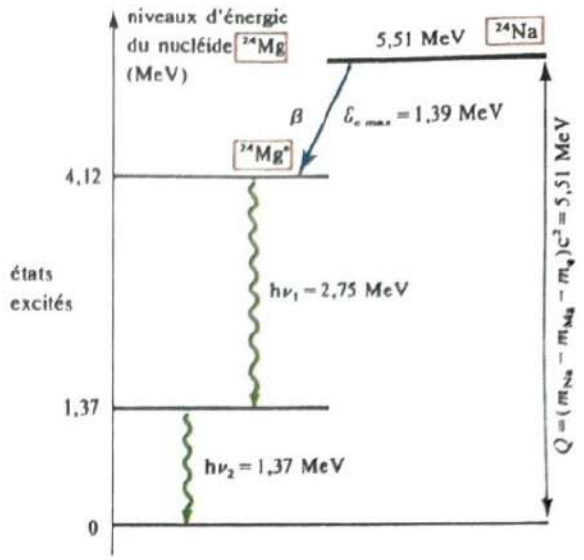
$$ {}^{19}_{10}Ne \longrightarrow {}^{19}_{9}F + {}^{0}_{1}e + \nu, $$

$$ {}^{80}_{35}Br \longrightarrow {}^{80}_{34}Se + {}^{0}_{1}e + \nu. $$

Les noyaux obtenus peuvent être excités; la désintégration s'accompagne alors d'une émission de rayonnement γ :

$$ {}_{Z-1}{}^{A}Y^{*} \longrightarrow {}_{Z-1}{}^{A}Y + \gamma. $$

Les radioactivités β^+ et β^- présentent de nombreuses analogies. Un positon β^+ possède une énergie cinétique maximale si la désintégration se fait sans excitation du noyau fils et si, en outre, le neutrino émis a une énergie négligeable, ce qui est très rare.



11. *Un exemple de radioactivité β^- :*

$$ {}^{24}_{11}Na \longrightarrow {}^{24}_{12}Mg + {}^{0}_{-1}e + \bar{\nu} + \gamma. $$

Si la désintégration produit un noyau de magnésium excité Mg^*, de niveau d'énergie 4,12 MeV, on peut observer l'émission de deux photons d'énergies $h\nu_1 = 2{,}75$ MeV et $h\nu_2 = 1{,}37$ MeV telles que $h\nu_1 + h\nu_2 = 4{,}12$ MeV.

L'électron ${}^{0}_{-1}e$ et l'antineutrino $\bar{\nu}$ se partagent l'énergie restante, à savoir $5{,}51 - 4{,}12 = 1{,}39$ MeV.

23.6 décroissance radioactive

23.6.1 aspect aléatoire

Soit un échantillon contenant des atomes radioactifs susceptibles de se désintégrer selon l'un des modes précédemment étudiés. Prenons l'exemple du césium 137, émetteur β^- :

$$ {}^{137}_{55}Cs \longrightarrow {}^{137}_{56}Ba + {}^{0}_{-1}e + \bar{\nu}. $$

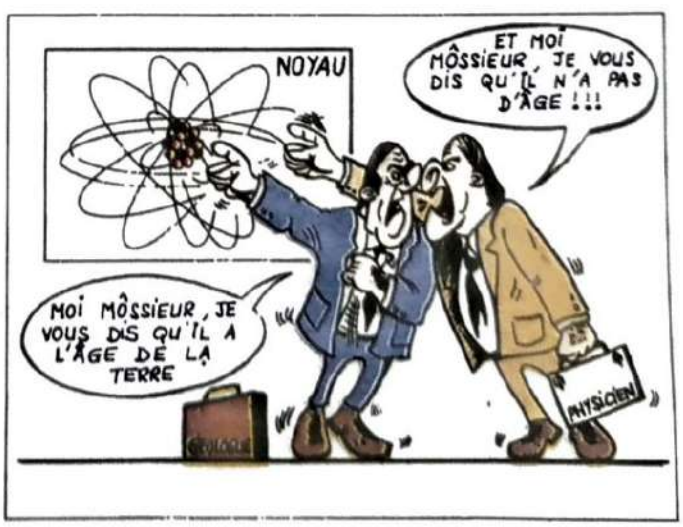
Cette désintégration est de nature probabiliste : c'est un *phénomène aléatoire;* à chaque instant, il existe une certaine probabilité pour qu'un noyau se désintègre entre les deux dates infiniment voisines t et $t+dt$. Cette probabilité est égale à λdt où λ est une **constante radioactive** *caractéristique du nucléide considéré* et indépendante du temps.

Pour traduire le fait que λ ne varie pas en fonction de l'âge des noyaux, on dit souvent, de manière imagée, que les noyaux ne « vieillissent pas » : pour les « jeunes » ou pour les « vieux », la probabilité de se désintégrer est la même.

Il est impossible de prévoir l'évolution d'un seul atome, du fait du caractère aléatoire de la désintégration. En revanche, on peut étudier l'évolution statistique de la population formée par un très grand nombre d'atomes.

23.6.2 loi de décroissance

Étudions l'ensemble des noyaux radioactifs (radionucléides) d'un échantillon. Un détecteur compte le nombre de particules émises (par exemple les



Scanné avec CamScanner

électrons) pendant une durée Δt. Nous pouvons ainsi connaître le nombre de noyaux qui se désintègrent pendant Δt. Ce nombre est aléatoire : il fluctue autour d'une valeur moyenne. Aussi ne pourrons-nous pas définir avec certitude le nombre $N(t)$ de noyaux (ou d'atomes) radioactifs existant à une date t. En revanche, nous pouvons évaluer une valeur moyenne de $N(t)$, que nous noterons $\bar{N}(t)$.

Intuitivement, nous pouvons alors admettre qu'entre les dates t et $t+\Delta t$ la variation $\Delta\bar{N}(t)$ du nombre moyen d'atomes radioactifs est proportionnelle :

— au nombre moyen d'atomes $\bar{N}(t)$ à la date t;
— à la probabilité de leur désintégration entre les dates t et $t+\Delta t$, c'est-à-dire : $\lambda\Delta t$.

Soit : $$\Delta\bar{N}(t) = -\bar{N}(t)\,\lambda\Delta t.$$

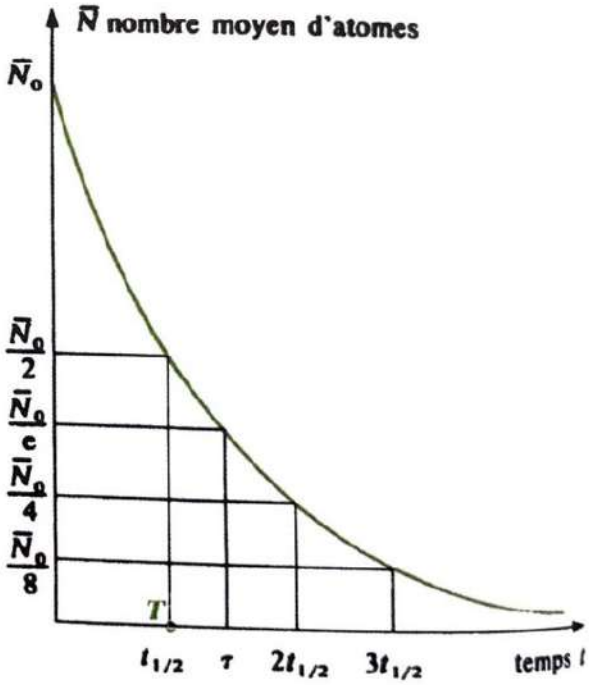
Le signe *moins* indique qu'il se produit une diminution progressive du nombre d'atomes radioactifs. L'évolution de $\bar{N}(t)$ satisfait donc à l'équation différentielle :

$$\frac{d\bar{N}(t)}{dt} + \lambda\bar{N}(t) = 0.$$

La solution de cette équation, qui satisfait aux conditions initiales, correspond à la **loi de décroissance** de $\bar{N}(t)$, à savoir :

$$\bar{N}(t) = \bar{N}_0 e^{-\lambda t},$$

où $\bar{N}_0$ est le nombre moyen d'atomes radioactifs à la date $t=0$. Le nombre d'atomes radioactifs décroît exponentiellement. La courbe représentative de $\bar{N}(t)$ en fonction du temps est tracée sur la figure 12. Quel que soit le radionucléide considéré, une durée très grande devant la période est, *a priori*, nécessaire pour que s'accomplisse totalement la désintégration d'un échantillon.



12. ***Courbe exponentielle de décroissance radioactive.***

23.6.3 période

Certains atomes radioactifs se désintègrent plus rapidement que d'autres.

• La durée T nécessaire pour qu'un échantillon contenant en moyenne $\bar{N}$ atomes radioactifs n'en contienne plus que $\bar{N}/2$ porte le nom de *période radioactive*, ou *demi-vie*.

Cette définition se traduit par :

$$\frac{\bar{N}(t+T)}{\bar{N}(t)} = \frac{1}{2} = \frac{\bar{N}_0 e^{-\lambda(t+T)}}{\bar{N}_0 e^{-\lambda t}},$$

soit : $$e^{-\lambda T} = \frac{1}{2};$$

d'où : $$\lambda T = \ln 2 = 0{,}693,$$

et : $$T = \frac{0{,}693}{\lambda}.$$

La période T, comme la constante radioactive λ, est une caractéristique du nucléide radioactif. Elle s'exprime en secondes, en jours, etc. Celle du polonium 210 est de 138 jours, tandis que celle du bismuth 210 ne dépasse pas 5 jours. La période du thorium 232 est de

Scanné avec CamScanner

$1{,}41.10^{10}$ années... alors que celle du thorium 224 ne vaut que 1,05 s. On classe habituellement les noyaux en trois catégories :

- les noyaux stables;
- les noyaux dont la période est de l'ordre de grandeur de l'âge de la Terre (5.10^9 ans) et qui, depuis leur formation, n'ont pas eu le temps de tous disparaître;
- les noyaux, de période plus courte, pour lesquels T varie de quelques années à quelques microsecondes.

Les tableaux 13 et 14 donnent la période de quelques radionucléides.

nucléide	période (ans)
^{40}K	$1{,}3.10^9$
^{50}V	5.10^{15}
^{87}Rb	5.10^{10}
^{138}La	10^{11}
^{144}Nd	3.10^{15}
^{176}Lu	$4{,}5.10^{10}$

13. *Période de quelques radionucléides naturels de l'écorce terrestre.*

23.6.4 activité

Les physiciens nucléaires s'intéressent plutôt au nombre de désintégrations par unité de temps, nombre appelé **activité** de l'échantillon et noté habituellement A.

- L'activité $A(t)$ d'une substance radioactive représente le nombre moyen de désintégrations par seconde :

$$A(t) = -\frac{d\bar{N}(t)}{dt} = \lambda \bar{N}(t).$$

L'activité est donc proportionnelle au nombre moyen d'atomes susceptibles de se désintégrer à la date t et à la constante radioactive λ du nucléide considéré. Autrement dit, pour un même nombre moyen d'atomes, l'activité d'un radionucléide de courte période est plus grande que celle d'un radionucléide de grande période. Avec $\bar{N}(t) = \bar{N}_0 e^{-\lambda t}$, il vient :

$$A(t) = \lambda \bar{N}_0 e^{-\lambda t}$$
$$= A_0 e^{-\lambda t}.$$

L'activité décroît très rapidement en début d'émission pour se stabiliser en fin d'émission (variation exponentielle). La mesure de A à différentes dates permet de tracer la courbe d'équation :

$$y = \ln A(t)$$
$$= \ln A_0 - \lambda t.$$

La mesure de la pente de cette droite donne λ (et $T = 0{,}693/\lambda$).

Remarque : Pour un échantillon composé de divers types de radionucléides, l'activité totale est égale à la somme des activités spécifiques à chaque type de radionucléides :

$$A = \Sigma \lambda_i \bar{N}_i.$$

Dans le système international, l'unité d'activité est le **becquerel** (symbole : **Bq**); elle correspond à une désintégration par seconde. On emploie encore couramment une ancienne unité, le **curie** (symbole : **Ci**), qui correspond à l'activité d'un gramme de radium :

$$\mathbf{1\ Ci = 3{,}7.10^{10}\ Bq}$$
$$\mathbf{= 3{,}7.10^{10}\ désintégrations.s^{-1}}.$$

Un corps radioactif est une véritable horloge : la mesure de l'activité d'un échantillon, de λ ou de T permettent de connaître l'âge de cet échantillon. Cette méthode est très utilisée pour dater des objets (voir exercices).

nucléide	période
^{60}Co	5,2 ans
^{90}Sr	28 ans
^{131}I	8,1 jours
^{137}Cs	30 ans
^{226}Ra	1 620 ans
^{239}Pu	24 400 ans

14. *Période de quelques radionucléides d'utilisation courante en médecine ou produits dans les centrales nucléaires.*

Scanné avec CamScanner

APPLICATION 1

On considère un échantillon de $^{137}_{55}Cs$, de période :

$$T = 30 \text{ ans.}$$

1/ Calculer la constante radioactive de cet échantillon en h^{-1}.

2/ A la date $t=0$, l'activité A_0 est égale à $3{,}7.10^5$ Bq. Calculer le nombre moyen $\bar{N}_0$ de noyaux radioactifs présents dans l'échantillon à cette date.

3/ Une mesure d'activité dure environ $\Delta t = 1$ h. Calculer le rapport $\eta = \dfrac{A(t+\Delta t)}{A(t)}$ au bout de cette heure. Peut-on considérer que l'activité reste quasiment constante au cours de la mesure? Peut-on envisager de déterminer la période de cet échantillon source en procédant à des mesures d'activité pendant une séance de travaux pratiques?

1/ La constante radioactive est liée à la période par la relation :

$$\lambda = \frac{0{,}693}{T},$$

soit : $$\lambda = \frac{0{,}693}{30 \times 365 \times 24} = 2{,}64.10^{-6} \text{ h}^{-1}.$$

2/ Nous avons : $$A(t) = -\frac{d\bar{N}}{dt} = \lambda \bar{N}(t).$$

Le nombre moyen de noyaux présents à l'instant initial est donc égal à :

$$\bar{N} = \frac{A(0)}{\lambda} = \frac{3{,}7.10^5}{7{,}325.10^{-10}} = 5{,}5.10^{14} \text{ noyaux.}$$

3/ $A(t)$ et $A(t+\Delta t)$ sont respectivement les activités au début et à la fin de la manipulation, soit :

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t} \quad \text{et} \quad A(t+\Delta t) = A_0 e^{-\lambda (t+\Delta t)};$$

d'où : $$\eta = \frac{A(t+\Delta t)}{A(t)} = e^{-\lambda \Delta t}.$$

Avec $\Delta t = 1$ h, il vient :

$$\eta = e^{-2{,}64.10^{-6}} \approx 1 - 2{,}64.10^{-6},$$

car $e^x \approx 1 + x$ si $x \ll 1$, soit :

$$\eta \approx 0{,}999\,997.$$

Nous pouvons donc considérer que l'activité de l'échantillon reste quasiment constante au cours de la manipulation. Durant une séance de travaux pratiques, la variation de l'activité n'est pas suffisante pour permettre la détermination de la période de cet échantillon.

APPLICATION 2

L'iode ^{131}I est utilisé en médecine. Sa période est de 8,1 jours. A l'instant $t=0$, l'activité d'un échantillon est égale à $2{,}2.10^5$ Bq. Calculer le nombre moyen d'atomes radioactifs présents à cet instant, puis au bout de 1 an. Conclure.

Nous avons : $$A_0 = \lambda \bar{N}_0 = \frac{0{,}693}{T} \bar{N}_0,$$

soit : $$\bar{N}_0 = \frac{2{,}2.10^5 \times 8{,}1 \times 24 \times 3600}{0{,}693} \approx 2{,}2.10^{11} \text{ atomes.}$$

D'autre part : $$\bar{N} = \bar{N}_0 e^{-\frac{0{,}693\,t}{T}},$$

soit, au bout de 1 an :

$$\bar{N} = 2{,}2.10^{11} e^{-\frac{0{,}693 \times 365}{8{,}1}} = 6.10^{-3}.$$

Ce nombre moyen n'a pas de sens, car il est inférieur à 1; il indique simplement que la substance radioactive s'est totalement désintégrée.

APPLICATION 3

Datation

Des fragments d'os et de charbon de bois d'un foyer ont été prélevés dans un site préhistorique. On mesure l'activité du carbone 14 ($^{14}_{6}C$) des résidus d'os et de charbon, afin de déterminer l'âge de ces fragments.
Le carbone 14 est produit constamment dans l'atmosphère à la suite du bombardement de l'azote $^{14}_{7}N$ par les neutrons cosmiques. Les plantes assimilent aussi bien $^{12}_{6}C$ que $^{14}_{6}C$. Les abondances respectives de ces deux isotopes sont les mêmes dans les composés carbonés de l'atmosphère (CO_2) et les êtres vivants. A la mort de ces derniers, il n'y a plus d'assimiliation: le carbone 14 radioactif se désintègre. Au bout de 5570 ans, sa quantité a diminué de moitié (demi-vie, ou période $T = 5570$ ans).

La mesure de l'activité du carbone 14 contenu dans les fragments d'os anciens donne 110 désintégrations par heure et par gramme de carbone; un fragment d'os actuel, de même masse, pris comme témoin, donne 880 désintégrations par heure et par gramme de carbone. Calculer l'âge des échantillons recueillis.

D'après l'énoncé, l'activité des fragments d'os anciens au moment de la mort de l'individu était égale à celle du fragment d'os actuel, soit 880 désintégrations par heure et par gramme. A la date t de la mesure, nous avons donc :

$$A(t) = A_0 e^{-\frac{0{,}693\,t}{T}},$$

soit : $$110 = 880\, e^{-\frac{0{,}693\,t}{5570}};$$

d'où : $$t = \frac{5570}{0{,}693} \ln \frac{880}{110} \approx 16\,700 \text{ ans.}$$

Scanné avec CamScanner

APPLICATION 4

La période de désintégration du polonium 210 est de 138 jours. Quelle masse de polonium doit-on prendre pour obtenir une activité de 1 Ci?

Le nombre moyen d'atomes nécessaires à l'instant t est :

$$\bar{N} = \frac{A}{\lambda}, \quad \text{avec } \lambda = \frac{0{,}693}{T}.$$

L'activité étant de $1\ \text{Ci} = 3{,}7.10^{10}$ Bq, nous obtenons numériquement :

$$\bar{N} = \frac{3{,}7.10^{10} \times 138 \times 24 \times 3600}{0{,}693}$$

$$= 6{,}37.10^{17} \text{ atomes.}$$

La masse d'un atome est environ égale à 210 u. La masse nécessaire est donc égale à :

$$m = \bar{N}\,\frac{210}{N_A} = \frac{6{,}37.10^{17} \times 210}{6{,}02.10^{23}} = 2{,}22.10^{-4}\ \text{g},$$

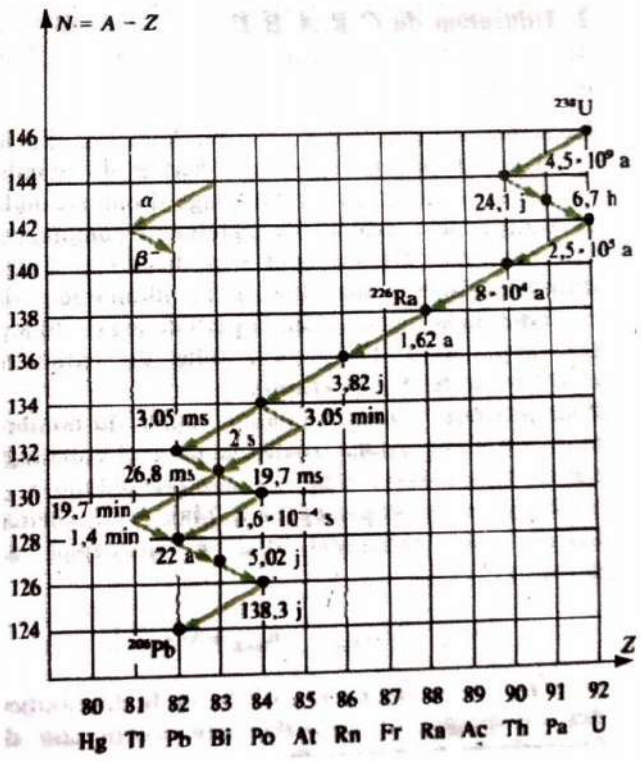
soit :

$$m = 0{,}222\ \text{mg}.$$

23.7 familles radioactives

La radioactivité entraîne la transformation d'un nucléide en un autre nucléide. Si ce dernier est lui-même radioactif, il se transforme à son tour, et ainsi de suite, jusqu'à ce que le nucléide obtenu ne soit plus radioactif mais stable. L'ensemble des nucléides issus d'un même noyau père a reçu le nom de **famille radioactive**, la filiation radioactive étant le processus de transformation. Les éléments radioactifs *naturels* ont été classés en quatre familles : famille du neptunium, famille de l'uranium-radium, famille de l'actinium, famille du thorium.

Le schéma de la figure 15 donne tous les atomes radioactifs issus de l'uranium 238 pour aboutir à l'isotope stable $^{206}_{82}Pb$. On remarquera que certains noyaux se désintègrent soit par désintégration α, soit par désintégration β^- ; on n'observe pas d'émission β^+ naturelle.



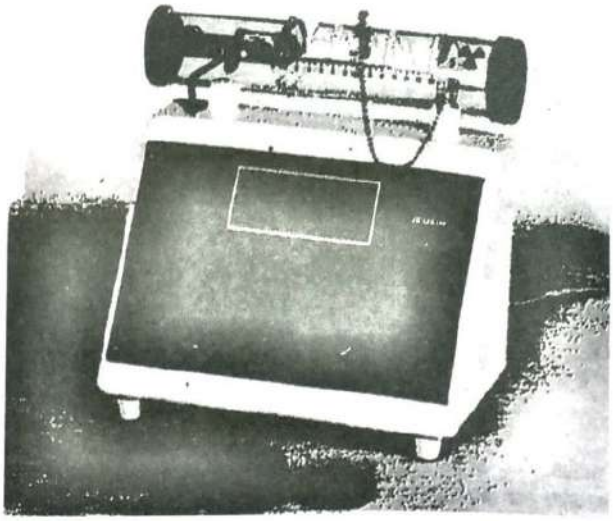
15. *Famille radioactive de l'uranium-radium.* ▶

fiche technique

UTILISATION DU COMPTEUR DE RADIATIONS BÉTA ET GAMMA (C. R. A. B. E.)

1. Description de l'appareil

L'appareil (*photo* 16), mis au point par le Commissariat à l'Énergie atomique et actuellement diffusé dans les lycées, comporte :
— une source radioactive de $^{137}_{55}Cs$, radionucléide artificiel qui émet essentiellement des rayonnements β^- et γ, dont l'activité est de 8 μCi, soit 3.10^5 Bq et la période, de 30 ans (*fig.* 17);
— un détecteur Geiger-Müller;
— un dispositif électronique d'amplification et de comptage des impulsions;
— une série d'écrans en aluminium destinés à mettre en évidence l'absorption des rayonnements β, une série d'écrans en plomb destinés à absorber les rayonnements γ. Ces écrans, de différentes épaisseurs, peuvent être intercalés entre la source et le compteur.



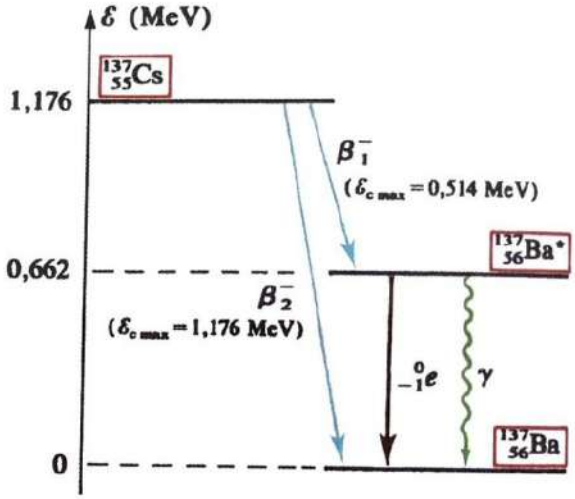
16. *Le C.R.A.B.E.*

2. Utilisation du C. R. A. B. E.
Mise en évidence du caractère aléatoire des désintégrations radioactives

La source est placée à 4,5 cm du détecteur. Entre les deux, disposons les quatre écrans de plomb. Choisissons un temps de comptage d'une seconde et réalisons une série d'une centaine de comptages. Les nombres affichés sont très dispersés. Cette dispersion n'est pas due à la diminution de l'activité de la source, dont la période est de 30 ans (*cf. application* 1), mais résulte du caractère aléatoire de la désintégration.
Pour procéder à une évaluation rapide du nombre moyen $\bar{n}$ d'impulsions, réalisons un seul comptage sur un temps assez long. Le nombre obtenu n_{exp} n'est généralement pas égal à $\bar{n}$. Mais les mathématiciens nous indiquent que $\bar{n}$ appartient au domaine (*) :

$$\left[n_{exp} - \sqrt{n_{exp}},\quad n_{exp} + \sqrt{n_{exp}}\right],$$

où $\sqrt{n_{exp}}$ représente l'*écart-type* de la distribution des comptages et constitue une évaluation de l'incertitude de mesure(**).



17. *Diagramme énergétique de la désintégration du ^{137}Cs. L'émission β^- conduit, en général, au noyau de baryum excité, lequel se désexcite soit par émission γ, soit, plus rarement, par éjection d'un électron de la couche K.*

La précision relative d'une telle mesure est :

$$\frac{\sqrt{n_{exp}}}{n_{exp}} = \frac{1}{\sqrt{n_{exp}}};$$

si nous désirons, par exemple, une précision relative de 1/100, nous devons choisir un temps de comptage tel que n_{exp} soit égal à 10 000.

3. Absorption des rayonnements β et γ par la matière

• *Présentation de l'effet d'écran*
Si un flux de particules rencontre une cible, une partie d'entre elles interagit avec les particules de la cible. L'énergie des particules incidentes diminue, et elles finissent par s'arrêter pour une certaine épaisseur.

(*) En toute rigueur, 68 % des résultats appartiennent, en moyenne à ce domaine et 95 %, au domaine $n_{exp} \pm 2\sqrt{n_{exp}}$.

(**) Les considérations statistiques élémentaires qui font l'objet de ce paragraphe n'entrent pas dans le cadre du programme et des instructions en vigueur; elles ne pourront pas donner lieu à un exercice au baccalauréat.

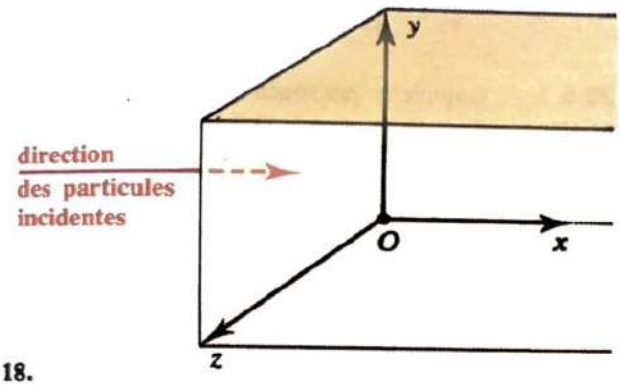
Scanné avec CamScanner

Considérons n_0 particules incidentes qui se déplacent parallèlement à l'axe Ox (*fig.* 18). Elles rencontrent une cible délimitée par le plan yOz et qui s'étend dans l'espace défini par $x > 0$.
Soit $n(x)$ le nombre de particules qui subsistent à l'abscisse x. En physique nucléaire, la loi d'absorption se traduit par la formule :

où μ est le coefficient de transmission de la substance considérée. N'oublions pas que les particules incidentes sont émises de façon aléatoire par une source radioactive. Aussi devons-nous raisonner sur des nombres moyens de particules, et écrire :

$$\bar{n}(x) = \bar{n}_0 e^{-\mu x}.$$

Nous nous proposons de tester expérimentalement ce modèle pour des écrans d'aluminium et de plomb.



18.

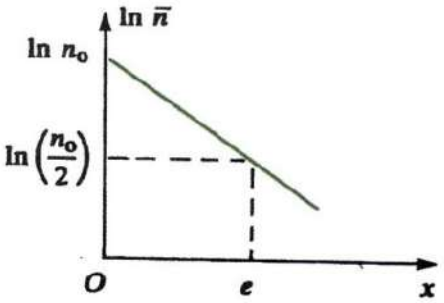
• *Réglage préliminaire*
La source est placée à 4,5 cm du détecteur. Affichons une durée de comptage telle que le nombre d'impulsions soit supérieur à 10 000 (pour obtenir une précision statistique de l'ordre de 1 %). Une durée de comptage de 50 s environ convient en général.

• *Absorption des électrons par les écrans d'aluminium*
En faisant varier l'épaisseur d'aluminium traversée, nous obtenons la courbe d'absorption de la figure 19. La courbe présente un palier, qui s'interprète de la façon suivante. Les photons γ ne sont quasiment pas absorbés par les écrans d'aluminium. Le nombre de photons γ détectés ne dépend pas de l'épaisseur des écrans d'aluminium; il correspond au palier $\bar{n}_\gamma$ lorsque tous les électrons ont été absorbés.

• *Absorption des rayons γ par les écrans de plomb*
Plaçons entre la source et le détecteur un écran d'aluminium d'une épaisseur suffisante pour absorber tous les électrons (environ 1 cm) et interposons un nombre variable d'écrans en plomb. La courbe d'absorption des rayons γ est une droite en coordonnées semi-logarithmiques. Nous pouvons déterminer graphiquement l'épaisseur e de l'écran en plomb qui absorberait la moitié des photons γ (*fig.* 20).

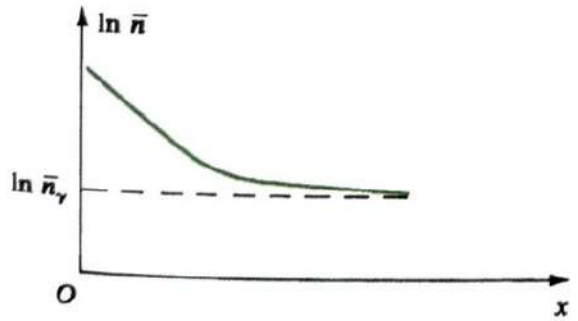
Supposons que nous désirons déterminer expérimentalement le coefficient de transmission μ du matériau. Pour cela il nous suffit de mesurer la pente de la droite $\ln \bar{n}$, car :

$$\ln \bar{n}(x) = \ln \bar{n}_0 - \mu x.$$

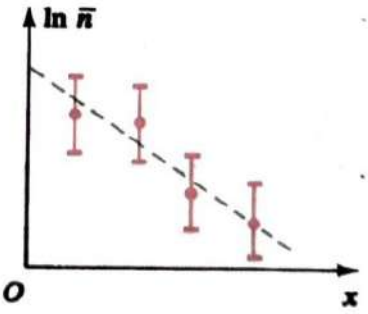


20. ***Loi d'absorption des photons γ par les écrans de plomb.***

En fait, nous n'obtenons pas des points mais des barres verticales pour chaque mesure, car $\bar{n}$ appartient au domaine $n_{exp} \pm \sqrt{n_{exp}}$ (*fig.* 21). Il nous faudrait alors opérer un traitement statistique pour choisir la droite qui s'adapte le mieux aux points expérimentaux. Cela peut se faire en utilisant une calculatrice ou un traitement informatique appropriés (il existe des logiciels à cet effet).



19. ***Loi d'absorption des électrons par les écrans d'aluminium. $\bar{n}(x)$ est le nombre moyen d'électrons qui subsistent pour une épaisseur x.***



21. ***A un comptage effectué pour une épaisseur x, on ne peut associer un point d'ordonnée $\bar{n}$ mais un segment vertical, qui a pour hauteur deux fois l'écart-type de la distribution des comptages.***

Scanné avec CamScanner

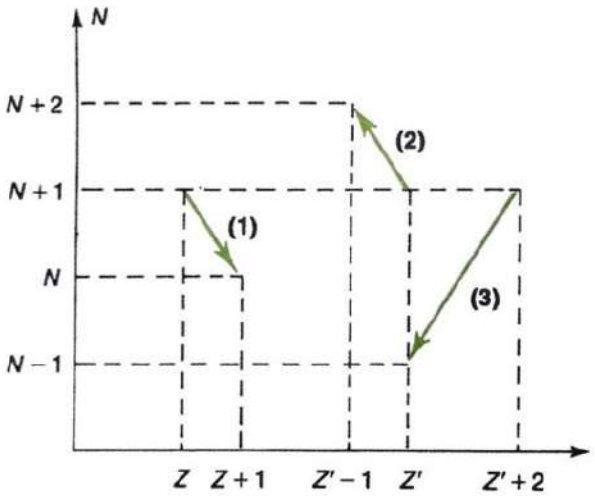
EXERCICES

L'essentiel du cours

23.1 A *Vrai* ou *faux* ?

- Dans une réaction nucléaire, le nombre de charges ne se conserve pas.
- Dans une désintégration β^-, le nombre de charges de l'atome fils augmente d'une unité.
- Dans une désintégration β^+, le nombre de masse de l'atome fils augmente d'une unité.
- La radioactivité α consiste en une émission d'un ion hélium.
- La radioactivité α se produit avec des noyaux lourds.
- L'émission de photons γ ne s'observe que dans la radioactivité α.
- La radioactivité β^+ s'observe généralement avec des nucléides artificiels.
- La radioactivité β^+ est un phénomène spontané.
- La radioactivité β^- est due à l'émission d'un électron par les couches profondes d'un atome.
- L'émission d'un rayonnement γ par un noyau A conduit à un noyau A' isotope de A.

23.2 A Indiquer sur le diagramme les trois types de radioactivité : α, β^+ et β^-.



23.3 A Choisir la bonne réponse.

- L'activité d'une substance radioactive *diminue/augmente* au cours du temps.
- Si on élève la température d'une substance radioactive, son activité *varie/ne varie pas*.
- Le becquerel est l'unité *d'activité/de la constante radioactive*.
- L'activité d'un échantillon est *proportionnelle/inversement proportionnelle* à la période de l'élément radioactif qu'il contient.
- Soit T la période d'un élément radioactif et N_0 le nombre moyen de noyaux de cet élément à l'instant $t = 0$. Au bout d'un temps $t = 3T$, le nombre moyen de noyaux restants est :

$$\overline{N}(t) = \frac{N_0}{3} \Big/ \frac{N_0}{6} \Big/ \frac{N_0}{8}.$$

23.4 A *Vrai* ou *faux* ?

- L'iode ^{127}I et l'iode radioactif ^{131}I sont des isotopes.
- Ces deux atomes n'ont pas les mêmes propriétés chimiques.
- Ces deux atomes n'ont pas les mêmes effets biologiques.

Exercices de base

Dans tous les exercices on prendra :

$m_p = 1{,}007\,276$ u ; $m_n = 1{,}008\,665$ u ;
$m_e = 0{,}000\,549$ u ; $m_\alpha = 4{,}001\,50$ u ;
$1\text{ u} = 1{,}660\,6 \cdot 10^{-27}$ kg $= 931{,}5$ MeV $\cdot c^{-2}$;
$N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ mol $^{-1}$; $c = 3 \cdot 10^8$ m $\cdot$ s^{-1} ;
$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J $\cdot$ s.

23.5 A Compléter les réactions suivantes.

1/ Noyaux émetteurs α :

$$^{210}_{84}\text{Po} \rightarrow \ldots + {}^{\ldots}_{\ldots}\text{Pb},$$
$${}^{\ldots}_{\ldots}\text{Th} \rightarrow \ldots + {}^{219}_{88}\text{Ra}.$$

2/ Noyaux émetteurs β :

$$^{14}_{6}\text{C} \rightarrow {}^{\ldots}_{\ldots}\text{B} + {}^{0}_{-1}e + \bar{\nu},$$
$${}^{\ldots}_{\ldots}\text{P} \rightarrow {}^{32}_{16}\text{S} + \ldots + \bar{\nu},$$
$${}^{56}_{\ldots}\text{Mn} \rightarrow {}^{\ldots}_{26}\ldots + {}^{\ldots}_{\ldots}\ldots + \bar{\nu}.$$

3/ Noyaux émetteurs β^+ :

$$^{12}_{7}\text{N} \rightarrow {}^{\ldots}_{\ldots}\text{C} + {}^{\ldots}_{\ldots}e + \nu,$$
$${}^{\ldots}_{\ldots}\text{Cd} \rightarrow {}^{107}_{47}\text{Ag} + {}^{\ldots}_{\ldots}\ldots + \nu.$$

23.6 Le bismuth $^{212}_{83}$Bi est radioactif α.

1/ AB1 Écrire l'équation de désintégration. (Utiliser le tableau de classification périodique pour déterminer le noyau fils.)

2/ A Les particules α éjectées devraient avoir une énergie cinétique de 9 MeV. En réalité, 70 % des particules α ont une énergie cinétique mesurée de 6 MeV. Comment interpréter cette différence ? Sous quelle forme se retrouve l'énergie manquante ?

23.7 Les noyaux de radium $^{226}_{88}$Ra se désintègrent en donnant un rayonnement α constitué de noyaux d'hélium $^{4}_{2}$He et un noyau fils Y.

1/ A Écrire l'équation de désintégration du radium en indiquant les règles utilisées et donner le nom du noyau fils Y formé. (On consultera le tableau de classification périodique.)

2/ A Calculer le défaut de masse lors de la réaction nucléaire. En déduire l'énergie libérée. Sous quelles formes apparaît-elle ?

3/ Pour un certain pourcentage de désintégrations, toute l'énergie n'apparaît pas sous forme d'énergie cinétique, et certains noyaux d'hélium ont une énergie inférieure de 0,19 MeV à celle de la majorité des noyaux.

a/ A Sous quelle forme cette énergie est-elle libérée ?
b/ AB3 Quelle est la longueur d'onde du rayonnement γ émis lors de la désexcitation du noyau fils Y ?

Données : $m_{Ra} = 225{,}977\,1$ u ; $m_{Rn} = 221{,}970\,3$ u.

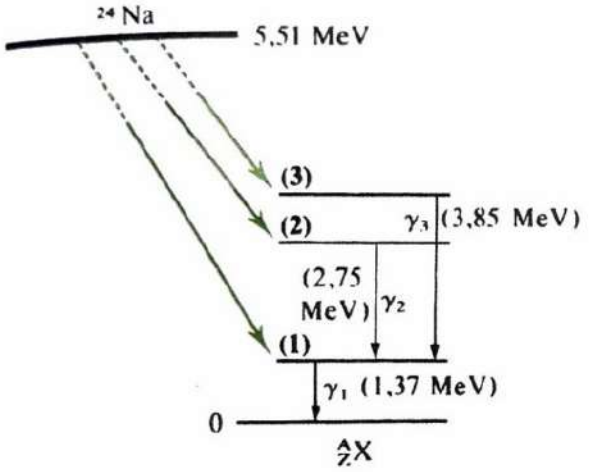
Scanné avec CamScanner

23.8 A Le titane $^{204}_{81}Ti$ se désintègre à raison de 2,6 % vers le niveau fondamental du mercure $^{204}_{80}Hg$ et de 97,4 % vers le niveau fondamental du plomb $^{204}_{82}Pb$.

1/ Donner les équations de désintégration en précisant dans chaque cas le type de radioactivité.

2/ Cette désintégration s'accompagne-t-elle d'une émission γ?

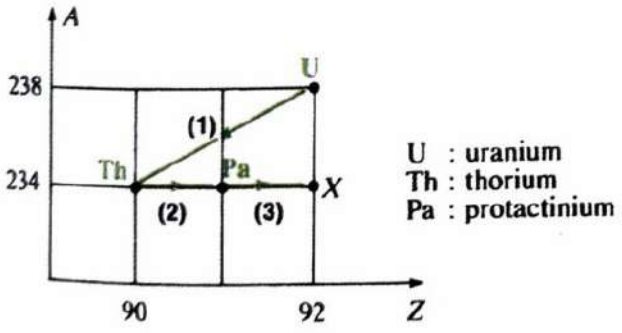
23.9 AB3 La figure représente la désintégration de ^{24}Na (émission β^-).



1/ Quel est le noyau fils $^{A}_{Z}X$? Préciser les énergies des différents niveaux excités.

2/ Calculer l'énergie cinétique maximale des électrons émis dans chaque cas.

23.10 La figure représente les premiers nucléides de la famille radioactive de l'uranium.



1/ A Écrire les équations bilans des désintégrations (1), (2) et (3). Expliciter les règles appliquées et préciser le type de radioactivité pour chaque désintégration, ainsi que le nom et le symbole du nucléide X.

2/ AB3 Dans la désintégration (1), on constate que certaines particules émises ont une énergie cinétique initiale de 4,147 MeV et les autres, une énergie de 4,195 MeV. Interpréter ces données, sachant qu'on observe simultanément l'émission d'un rayonnement γ d'énergie bien déterminée.
Calculer la longueur d'onde de ce rayonnement en négligeant l'énergie cinétique de recul des noyaux de thorium.

23.11 La loi de décroissance d'un élément radioactif est :

$$\overline{N}_0(t) = \overline{N}_0 e^{-\lambda t}.$$

1/ A Donner la signification des termes $\overline{N}(t)$, $\overline{N}_0$ et λ.

2/ Le bismuth 210 subit une désintégration β^- ; sa constante radioactive est $\lambda = 5{,}77 \cdot 10^{-4}\ s^{-1}$.

a/ AB3 Calculer la période T ou demie-vie du bismuth 210.
b/ A Définir l'activité (c'est-à-dire le nombre moyen de désintégrations par seconde) de l'échantillon à la date t en fonction de $\overline{N}(t)$ et de λ.

3/ AB3 Un échantillon contient à l'instant $t = 0$ une masse $m = 10^{-6}$ kg de bismuth 210. Déterminer l'activité de cet échantillon aux instants $t = 0$ et $t = T$.

23.12 A Le radionucléide $^{232}_{90}Th$ a une période de $13{,}9 \cdot 10^9$ ans, soit environ cinq fois l'âge de la Terre. La substance mère du $^{232}_{90}Th$ est $^{236}_{92}U$, émetteur α qui a pour période $2{,}4 \cdot 10^7$ ans, soit environ le centième de l'âge de la Terre.
Justifier par le calcul les deux affirmations suivantes :

- On trouve dans la nature l'élément $^{232}_{90}Th$.
- $^{236}_{92}U$ n'existe pas dans la nature. L'étude géophysique prouve que cet élément était l'un des isotopes naturels de l'uranium ordinaire lorsque l'Univers était très jeune.

23.13 La constante radioactive du $^{210}_{84}Po$ est :

$$\lambda = 5{,}8 \cdot 10^{-8}\ s^{-1}.$$

1/ B3 Calculer, en secondes et en jours, la période radioactive T.

2/ A On considère un échantillon contenant initialement N_0 noyaux de $^{210}_{84}Po$. Calculer combien il en reste en moyenne aux instants $\frac{T}{2}$, T, $2T$ et $3T$. Donner l'allure de la courbe de décroissance.

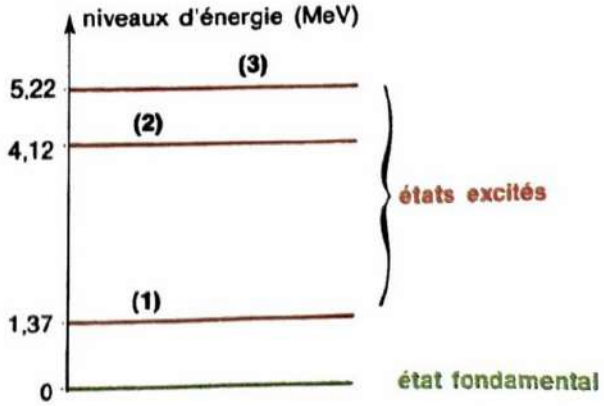
Banc d'essais

Désintégration β^-

23.14 Le nucléide $^{24}_{11}Na$ est radioactif β^- ; sa désintégration donne le nucléide $^{A}_{Z}Mg$.

1/ A Écrire l'équation de cette désintégration.

2/ AB3 Le noyau fils peut apparaître sous différents états excités correspondant au diagramme des énergies.



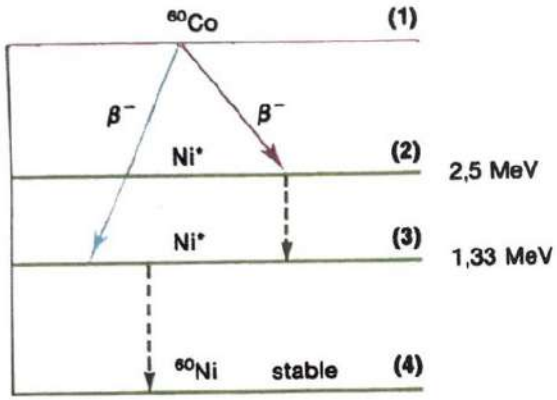
EXERCICES

Quelles sont les longueurs d'onde des photons émis lors de la désexcitation des noyaux fils d'un état excité au niveau fondamental ?

3/ C1 Comment se répartit l'énergie libérée par cette désintégration ? En particulier, l'énergie cinétique de la particule β^- est-elle quantifiée ?

↳ ex. 23.9

23.15 Le cobalt ^{60}Co utilisé en radiothérapie est un émetteur β^- dont le schéma de désintégration est le suivant :



1/ A Quels sont les types d'émission qui se produisent lors des transitions du niveau (2) au niveau (3) et du niveau (3) au niveau (4) ?

2/ AB3 Quelles sont les longueurs d'onde correspondantes ?

↳ ex. 23.9.

Désintégration α

23.16 Le noyau de bismuth $^{212}_{83}Bi$ se désintègre pour donner du thallium $^{208}_{81}Tl$.

1/ A Écrire cette réaction nucléaire en explicitant les règles appliquées.

2/ C1 Les particules α émises forment plusieurs groupes monocinétiques ; on dit qu'on observe des raies α. Ces raies se caractérisent par l'énergie cinétique des particules :

$$\mathcal{E}_{\alpha_1} = 5{,}60 \text{ MeV} ; \quad \mathcal{E}_{\alpha_2} = 5{,}62 \text{ MeV} ; \quad \mathcal{E}_{\alpha_3} = 5{,}76 \text{ MeV} ;$$

$$\mathcal{E}_{\alpha_4} = 6{,}05 \text{ MeV} ; \quad \mathcal{E}_{\alpha_5} = 6{,}09 \text{ MeV}.$$

Une émission γ accompagne également cette réaction. Le spectre des rayonnements γ est un spectre de raies dont les énergies caractéristiques sont :

$$\mathcal{E}_{\gamma_1} = 0{,}04 \text{ MeV} ; \quad \mathcal{E}_{\gamma_2} = 0{,}33 \text{ MeV} ;$$

$$\mathcal{E}_{\gamma_3} = 0{,}47 \text{ MeV} ; \quad \mathcal{E}_{\gamma_4} = 0{,}49 \text{ MeV}.$$

Expliquer pourquoi toutes les particules α émises n'ont pas la même énergie cinétique.

3/ C1 Représenter le schéma de désintégration mettant en évidence les différents niveaux d'énergie du noyau fils.

↳ ex. 23.9.

Décroissance radioactive

23.17 AB3 Un noyau d'astate $^{211}_{85}At$ se désintègre en émettant une particule α. Calculer la période de ce nucléide, sachant que $2{,}7 \cdot 10^{15}$ particules α sont émises lors de la première heure de désintégration d'une masse $m = 10^{-5}$ g d'astate $^{211}_{85}At$.

↳ ex. 23.11, 23.12, 23.13.

23.18 AB3 Un noyau radioactif a une demie-vie de 1 s.

1/ Calculer sa constante de désintégration radioactive λ.

2/ A un instant donné, un échantillon de cette substance radioactive a une activité de $11{,}1 \cdot 10^7$ désintégrations par seconde. Calculer le nombre moyen de noyaux radioactifs présents dans l'échantillon à cet instant.

↳ ex. 23.11, 23.12, 23.13.

23.19 AB3 Une substance radioactive dont la demie-vie est de 10 s émet initialement $2 \cdot 10^7$ particules α par seconde.

1/ Calculer la constante de désintégration de la substance.

2/ Quelle est l'activité de cette substance ?

3/ Initialement, combien y a-t-il en moyenne de noyaux radioactifs ?

4/ Combien restera-t-il en moyenne de noyaux radioactifs après 30 s ?

5/ Quelle sera alors l'activité de la substance ?

↳ ex. 23.11, 23.12, 23.13.

23.20 AB3 A une date origine $t = 0$, on dispose d'un échantillon contenant en moyenne $\overline{N}_0$ noyaux de $^{210}_{84}Po$ radioactif. A une date t, on détermine le nombre moyen N de noyaux non désintégrés. Les mesures donnent :

t (jours)	0	40	80	120	160	200	240
$\frac{\overline{N}}{\overline{N}_0}$	1	0,82	0,67	0,55	0,45	0,37	0,30

1/ A l'aide d'une représentation graphique, déduire de ces mesures les valeurs de la constante radioactive λ et de la période T du polonium $^{210}_{84}Po$. On portera t en abscisse (1 cm pour 20 jours) et $-\ln \frac{\overline{N}}{\overline{N}_0}$ en ordonnée (1 cm pour 0,1).

2/ Au bout de combien de temps la masse restante de $^{210}_{84}Po$ devient-elle le dixième de la masse initiale ?

↳ ex. 23.11, 23.13.

23.21 AB3 On utilise du phosphore ^{32}P comme traceur radioactif dans la détection de certaines tumeurs. Cet élément est un émetteur β de période 14,2 j. Des préparations cellulaires marquées au ^{32}P ont une activité de 1,6 mCi. Calculer la durée d'utilisation de ces préparations, sachant qu'elles sont jetées lorsque leur activité n'est plus que de 10 µCi. (On rappelle que 1 Ci = $3{,}7 \cdot 10^{10}$ Bq.)

↳ ex. 23.11, 23.23.

Scanné avec CamScanner

23.22 Une ampoule contient 0,2 cm³ de radon ^{222}Rn sous 0,1 bar et à la température de 30 °C. Ce gaz monoatomique est considéré comme parfait ; sa période est de 3,8 j.

1/ B3C1 Quelle est l'activité initiale de cette ampoule ?

2/ AB3 Que devient cette activité six mois plus tard ?

Données : constante des gaz parfaits R = 8,32 S.I. ; 1 bar = 10^5 Pa.

↳ **ex. 23.11, 23.13.**

23.23 On considère la famille radioactive dont le nucléide père est l'uranium $^{238}_{92}U$ et le nucléide final stable, le plomb $^{206}_{82}Pb$.

1/ A Le radium $^{226}_{88}Ra$ est un nucléide de cette famille qui, à la suite de désintégrations de type α ou β^-, conduit au plomb $^{206}_{82}Pb$.

a/ Donner l'équation générale de la radioactivité α. En utilisant des éléments de cette famille notés dans le tableau ci-après, écrire l'équation d'une désintégration de ce type.

$^{226}_{88}Ra$	$^{222}_{86}Rn$	$^{210}_{84}Po$	$^{206}_{82}Pb$

b/ Donner l'équation générale de la radioactivité β^-.

c/ Quels sont les nombres de désintégrations de type α et de type β^- permettant de passer du noyau $^{226}_{88}Ra$ au noyau $^{206}_{82}Pb$?

2/ On considère une masse m_0 de radon à une date choisie comme origine des temps. La période du radon est de 3,825 j.

a/ C1 Déterminer la masse de radon restant au bout de 1, 2, ..., n périodes. En déduire la masse de radon désintégrée au bout de n périodes.

b/ AB3 Calculer les durées nécessaires pour désintégrer les 4/9 et les 9/10 de la masse m_0 de radon.

↳ **ex. 23.11, 23.12, 23.13.**

23.24 Lors de la catastrophe de Tchernobyl, du césium 134 et du césium 137 ont été libérés dans l'atmosphère.

1/ A Le césium 137 est radioactif β^-. Écrire les lois de conservation intervenant dans cette réaction et l'équation bilan de désintégration, en précisant les produits formés.

2/ AB3 La période du césium 134 est $T = 2$ ans. En déduire la constante radioactive λ. Au bout de combien de temps 99 % du césium 134 libéré auront-ils disparu ?
Même question pour le césium 137, dont la période est 30 ans.

↳ **ex. 23.11, 23.12, 23.13.**

23.25 En raison de réactions nucléaires dans la très haute atmosphère, la proportion de carbone 14 dans le carbone atmosphérique est constante au cours du temps et égale à $a_0 = 10^{-12}$. Cette proportion se retrouve dans tous les organismes vivants, puisque le carbone organique provient du dioxyde de carbone atmosphérique par photosynthèse. En revanche, dans un organisme mort, il n'y a plus d'échange, et la proportion a de ^{14}C dans le carbone de cet organisme diminue par désintégration des atomes ^{14}C.

1/ B3C1 La période radioactive du carbone 14 est 5 600 ans. Soit $a(t)$ la proportion de carbone 14 restant au moment de la datation dans un organisme mort depuis un temps t. Compléter le tableau ci-après, après l'avoir recopié.

t (années)	0	2800	5600	8400
$\frac{a(t)}{a_0}$		0,71		0,35

t (années)	11200	14000	16800
$\frac{a(t)}{a_0}$		0,18	

2/ B3 Tracer sur papier millimétré la courbe représentative de $\frac{a(t)}{a_0}$ en fonction de t, pour t variant de 0 à 17 000 ans.
Échelles : en abscisse, 1 cm pour 1 000 ans ; en ordonnée, 10 cm pour 1.

3/ C1B3 Lors des dernières éruptions volcaniques en Auvergne, des forêts ont été enfouies sous les cendres. En 1950, on a pu déterminer par spectrométrie de masse la valeur de la proportion $a(t)$ de carbone 14 dans les bois fossilisés. On a obtenu les résultats suivants :

lieu du gisement	$\frac{a(t)}{a_0}$
Montcyneire	0,49
Montchal	0,44
Lassolas	0,39

Déterminer graphiquement et par le calcul les « âges » de ces éruptions.

↳ **appl. 3.**

23.26 Le potassium $^{40}_{19}K$ est radioactif ; il se désintègre pour donner de l'argon $^{40}_{18}Ar$.

1/ A Écrire l'équation de désintégration.

2/ AB3 La période de désintégration du nucléide $^{40}_{19}K$ est $T = 1{,}5 \cdot 10^9$ ans. Calculer la constante radioactive.

3/ B3C2 Pour déterminer l'âge des cailloux lunaires rapportés par les astronautes d'*Apollo XI*, on a mesuré les quantités relatives de potassium 40 (radioactif) et de son produit de décomposition, l'argon 40, qui est en général retenu par la roche. Un échantillon de 1 g contenait $82 \cdot 10^{-4}$ cm³ d'argon 40 et $1{,}66 \cdot 10^{-6}$ g de potassium 40. Les volumes de gaz sont mesurés dans les conditions normales. On rappelle que l'argon est un gaz monoatomique. Quel est l'âge de ces cailloux ?

↳ **ex. 23.11**

Exercices bilan

23.27 Le francium, de symbole Fr, a pour numéro atomique 87.

1/ A On connaît 23 isotopes du francium, de nombres de masse compris entre 203 et 226. Déterminer les nombres minimal et maximal de neutrons pour le francium.

2/ AB3 L'isotope le plus connu est $^{223}_{87}Fr$. Il possède la période radioactive la plus longue, qui est de 22 min. Sachant que la plus grande masse obtenue est 10^{-13} g, déterminer la masse restante au bout de 10 minutes, puis au bout d'un jour.

3/ AB1 La quasi-totalité des atomes de $^{223}_{87}Fr$ subissent la radioactivité β^-. Écrire l'équation de la réaction. Chercher dans le tableau de classification le nom du nucléide formé.

Scanné avec CamScanner

EXERCICES

4/ AB1 Une très faible partie des mêmes atomes (4 sur 100 000) subissent la radioactivité α. Écrire l'équation de la réaction.

5/ AB3 Le francium $^{223}_{87}Fr$ est un nucléide naturel ; on estime sa masse dans l'écorce terrestre à 25 g. Combien cela représente-t-il d'atomes ?

6/ AB3 L'analyse du rayonnement γ de $^{223}_{87}Fr$ montre l'existence de plusieurs raies, dont la plus intense correspond à une énergie de 50 keV. Calculer la longueur d'onde λ des photons correspondants.

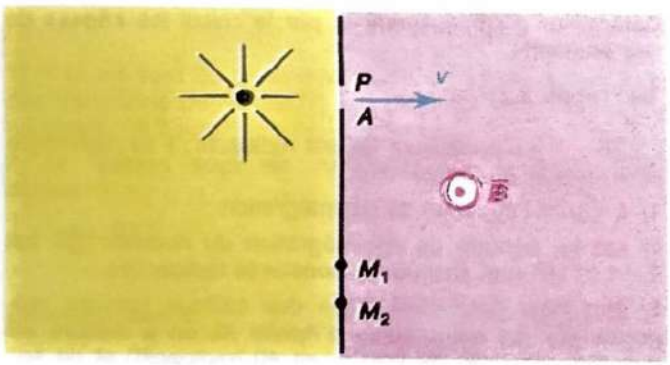
↳ **ex. 23.7, 23.13.**

23.28 Le noyau de bismuth $^{212}_{83}Bi$ se désintègre en émettant une particule α et un noyau de thallium (Tl). Les particules α émises forment deux groupes monocinétiques, caractérisés par leurs énergies cinétiques :

$$\mathcal{E}_{c_1} = 5{,}60 \text{ MeV} ; \quad \mathcal{E}_{c_2} = 5{,}62 \text{ MeV}.$$

1/ AB3 Calculer les vitesses d'émission v_1 et v_2 de ces particules.

2/ Pour séparer ces groupes de particules, on utilise le montage schématisé ci-dessous. Certaines particules, animées de leur vitesse v_1 ou v_2, pénètrent, perpendiculairement à une plaque P, par un trou A, dans une zone où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ orthogonal au plan de figure et d'intensité $B = 3{,}4 \cdot 10^{-1}$ T.



Calculer la distance M_1M_2 des points d'impact des deux groupes de particules.

↳ **cours chap. 7**

23.29 Le polonium 210 est radioactif α :

$$^{210}_{84}Po \rightarrow {}^{y}_{x}Pb + \alpha.$$

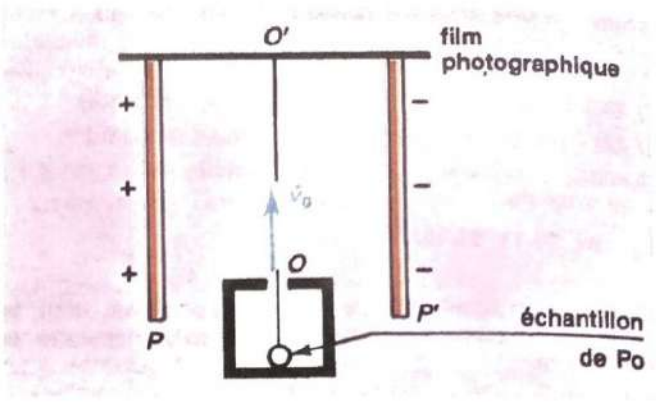
1/ A Indiquer, en les justifiant, les valeurs de x et y.

2/ B3 Pour déterminer l'énergie cinétique des particules α (non relativistes) émises, on dévie un faisceau de ces particules par un champ électrostatique uniforme (figure). Le vecteur $\vec{E}$ est orthogonal à la vitesse d'entrée $\vec{v}_0$ des particules dans le dispositif ; P et P' sont deux plaques parallèles créant le champ. La d.d.p. $V_P - V_{P'}$ est positive. Le film photographique est placé à la sortie des plaques, à 10 cm du point O.

Données : $\|\vec{E}\| = 5 \cdot 10^6$ V . m^{-1}.

Reproduire la figure ci-après en indiquant le sens de $\vec{E}$ et l'allure de la trajectoire.

Un impact est observé sur le film à $4{,}7 \cdot 10^{-3}$ m du point O'. En déduire l'énergie cinétique (en MeV) des particules α correspondantes lors de leur émission par l'échantillon radioactif.



3/ Calculer l'énergie libérée par la désintégration α étudiée.

Données : $m_{Po} = 209{,}936\,8$ u ; $m_{Pb} = 205{,}929\,5$ u.

4/ Interpréter la différence entre les résultats numériques des questions 2 et 3.

↳ **cours de mécanique, ex. 23.7.**

Analyse d'une expérience

23.30 Le nucléide vanadium $^{52}_{23}V$ est radioactif du type β^-, et sa désintégration spontanée est accompagnée de l'émission d'un photon γ d'énergie $E = 143$ MeV. Le noyau fils Cr est stable.

1/ AB3 Compléter le schéma de réaction suivant et préciser les valeurs de A et de Z.

$$^{52}_{23}V \rightarrow {}^{A}_{Z}Cr + \beta^- + \ldots + \ldots$$

Quelle est l'origine du photon ? Calculer la longueur d'onde associée.

2/ On étudie la désintégration d'un échantillon contenant des atomes de vanadium 52. Soit N_0 et N les nombres de noyaux aux instants $t_0 = 0$ et t.

a/ A Exprimer N en fonction de t et de la constante radioactive λ.

b/ B3C1 A l'aide d'un compteur, on détermine le nombre n de désintégrations pendant une durée constante $\tau = 5$ s. Les mesures sont faites toutes les minutes ; soit t la date moyenne d'une mesure. On obtient les résultats suivants :

t (s)	0	60	120	180	240	300	360
n	1586	1257	1075	873	741	584	471

t (s)	420	480	540	600	660	720	780
n	428	355	296	235	195	155	132

L'expérience fournit donc le taux de désintégration que l'on définit par $A = \frac{n}{\tau}$ (τ étant considéré comme petit).

Montrer que $A = \lambda N$ et en déduire que :

$$A = A_0 e^{-\lambda t},$$

où A_0 est la valeur de A à la date $t = 0$.

Exprimer ln A en fonction de t.

Construire la courbe représentative de ln A en fonction de t.

En déduire les valeurs de λ et de T.

↳ **ex. 23.9, 23.11.**

Scanné avec CamScanner

Analyse d'un texte

23.31 « C'est par les photons arrivant au voisinage de la Terre que nous avons pu nous faire une idée de la nature de l'Univers. Alors que les raies spectrales de la lumière visible sont dues aux transitions entre les niveaux d'énergie des électrons des atomes, les raies spectrales du rayonnement γ proviennent des transitions entre les niveaux d'énergie des noyaux des atomes.
Soit le noyau de néon 22, formé de 10 protons et de 12 neutrons. Habituellement, ce noyau se trouve dans son état fondamental, c'est-à-dire l'état de plus basse énergie ; mais il peut également occuper des états excités, d'énergie plus grande. Lorsqu'un noyau de néon 22 est dans son premier état excité, il retombe dans son état fondamental, et cette transition s'accompagne de l'émission d'un photon γ d'énergie 1,274 6 MeV. Ce rayonnement γ est la signature d'une transition nucléaire spécifique.
Cette transition peut être la conséquence de plusieurs phénomènes. Par exemple, il peut y avoir désintégration du sodium 22, radioactif, de période 1,8 an, en un état excité du néon 22. On pense qu'une telle désintégration est courante dans l'évolution d'une supernova après son explosion. Aussi les astronomes espèrent-ils pouvoir détecter un rayonnement γ de 1,274 6 MeV provenant de l'explosion d'une étoile assez proche de notre système solaire, même plusieurs mois après l'explosion. Un autre phénomène pouvant entraîner une telle émission est la capture d'un neutron par un noyau de néon 21 pour donner un noyau de néon 22 dans un état excité. »

1/ AB2 A l'aide de ce texte, retrouver l'ordre de grandeur de l'écart énergétique, en eV et en MeV :

a/ entre deux niveaux d'énergie des électrons de l'atome ;
b/ entre deux niveaux d'énergie du noyau.

2/ A Écrire les diverses équations représentant les réactions nucléaires évoquées dans ce texte.

3/ C2 Pourquoi, « même plusieurs mois après l'explosion » d'une étoile, peut-on encore espérer détecter un rayonnement γ d'énergie 1,274 6 MeV ?

↳ **ex. 23.9, 23.10.**

Le radon, principal pollueur radioactif de l'atmosphère ?

23.32 Toutes les roches contiennent de l'uranium 238 qui s'y désintègre en moyenne à raison de 0,7 à 7 atomes par minute et par gramme. A ce rythme, dans un million d'années, à peine 0,015 % de cet uranium aura disparu. Sa désintégration ne conduit pas à un noyau stable, mais à une succession de noyaux radioactifs dont la vie est moins longue ; ils ne sont présents dans la roche que lorsqu'ils sont constamment produits à partir de l'uranium 238. Leur radioactivité est donc égale à celle de l'uranium 238 ; on dit qu'ils sont en équilibre radioactif.
L'un d'eux, le radon 222, est un gaz rare, peu lié à la roche, donc capable de gagner l'air libre. Sa désintégration a pour effet de produire, dans l'atmosphère même, ses descendants sous forme métallique qui se condensent sur les poussières en suspension dans l'air pour former des aérosols radioactifs naturels.

Ce radon est la cause principale de la radioactivité atmosphérique : toutes les autres substances introduites dans l'atmosphère, quelle que soit leur origine, sont négligeables par rapport à ce flux de radon. L'activité du radon varie de 1,85 à 7,5 Bq par m^3 d'air dans les plaines continentales ; elle est de l'ordre de 0,1 à 0,2 Bq par m^3 d'air au-dessus des océans. Mais, dans les grottes, les mines ou les maisons construites avec des roches granitiques, soigneusement fermées, l'activité peut atteindre 4 000 Bq par m^3 d'air. On estime qu'entre 1950 et 1980, époque des essais atomiques dans l'atmosphère, l'activité du radon naturel a été dix mille fois plus importante que celle du strontium 90 produit lors des essais.

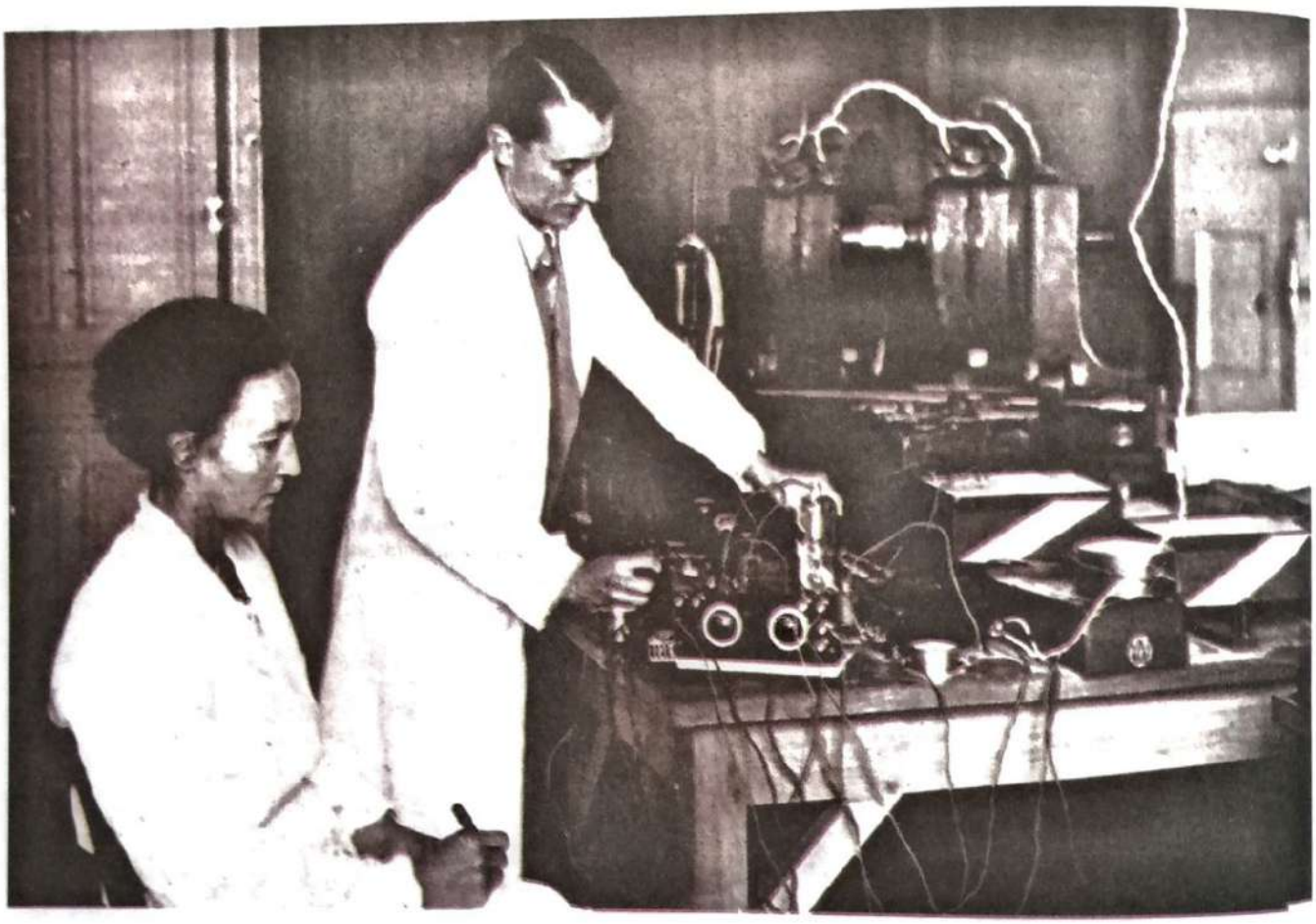
1/ B2 Pourquoi conseille-t-on dans les pays granitiques, en Bretagne par exemple, de bien aérer les maisons ?

2/ B1 En consultant le tableau de la famille radioactive de l'uranium 238, donner les descendants du radon 222 et leur mode de désintégration.

3/ B1 Citer d'autres substances ou noyaux radioactifs rejetés dans l'atmosphère lors d'incidents de centrales nucléaires.

Scanné avec CamScanner

24 RÉACTIONS NUCLÉAIRES PROVOQUÉES

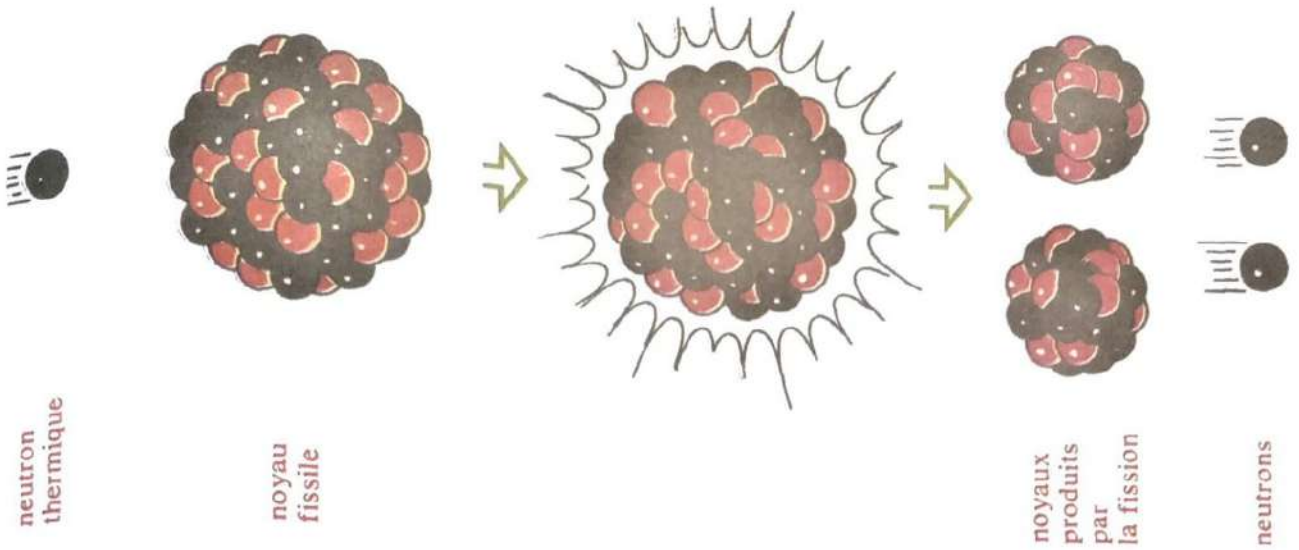


1. *Irène* (1897-1956) *et Frédéric* (1900-1958) *Joliot-Curie dans leur laboratoire. En* 1934, *ils observèrent la première annihilation d'une paire électron-positon avec production de photons et découvrirent la radioactivité artificielle. Prix Nobel de Chimie en* 1935.

24.1 introduction

Après avoir étudié les réactions nucléaires spontanées, ou naturelles, les physiciens découvrirent qu'ils pouvaient eux-mêmes bouleverser la constitution du noyau. Il leur suffisait de bombarder des noyaux (noyaux cibles) par des particules diverses. Mais si les projectiles sont chargés (protons, deutons, particules α, etc.), la répulsion électrostatique les dévie et peu de particules atteignent la cible. Le projectile de choix est donc une particule neutre : le neutron.

Scanné avec CamScanner



2. Schématisation simple de la fission (le nombre de nucléons du noyau fissile n'est pas respecté). Un noyau lourd explose sous le choc d'un neutron en deux noyaux plus légers. D'autres neutrons sont émis. La réaction peut être aussi une réaction en chaîne.

La première réaction nucléaire provoquée fut celle observée, en 1919, par Rutherford, qui bombarda une enceinte remplie d'azote avec des particules α issues d'une source de polonium 210. Le proton émis était reconnaissable, mais l'identification du noyau restait impossible.
L'interprétation en fut donnée, en 1925, par les admirables expériences de P.-M. Blackett, qui eut la ténacité d'enregistrer et d'observer, dans une chambre de Wilson, plus de 425 000 trajectoires de particules α :

$$^4_2\text{He} + ^{14}_7\text{N} \longrightarrow ^{17}_8\text{O} + ^1_1\text{H}.$$

24.2 radionucléides artificiels

Lorsqu'une particule entre en collision avec un noyau cible, l'interaction entre le noyau et la particule peut conduire à un nouveau noyau, de masse voisine.
En 1934, Irène et Frédéric Joliot-Curie découvrent la radioactivité artificielle en bombardant une feuille d'aluminium avec des particules α issues d'une source radioactive au polonium. Derrière cette feuille, deux sortes de particules sont émises : des neutrons et des positons.
Un fait est remarquable : un écran de plomb interposé entre la source de particules α et la feuille d'aluminium arrête l'émission des neutrons, mais non pas celle des positons, qui décroît exponentiellement. Ce phénomène s'interprète en admettant que le nucléide formé par la réaction nucléaire provoquée de l'aluminium est un *nucléide radioactif* qui se désintègre spontanément, avec émission de positons (^0_1e), particules non émises par les radionucléides naturels.

Nous avons ainsi les deux réactions successives :

- *réaction provoquée :* $^{27}_{13}\text{Al} + ^4_2\text{He} \longrightarrow ^1_0n + ^{30}_{15}\text{P}$;
- *réaction spontanée :* $^{30}_{15}\text{P} \longrightarrow ^{30}_{14}\text{Si} + ^0_1e + \nu$.

Le $^{30}_{15}\text{P}$ est un **radionucléide artificiel** qui se désintègre suivant le mode β^+.

Depuis, des milliers de réactions nucléaires différentes ont permis de créer de nombreux nucléides artificiels. Tous les nucléides artificiels sont radioactifs et se désintègrent suivant les modes α, β^- ou β^+.
On est ainsi parvenu à obtenir les nucléides des deux éléments qui manquaient au milieu de la classification périodique : le technétium ($Z=43$) et le prométhium ($Z=61$). On a pu produire également des atomes très lourds, de numéro atomique $Z>92$, les *transuraniens :* le neptunium ($Z=93$), le plutonium ($Z=94$), etc.
Par exemple, le plutonium 239 utilisé pour réaliser des fissions nucléaires (voir paragraphe 24.3) est un radionucléide artificiel qui s'obtient par bombardement neutronique de l'uranium 238, nucléide naturel, selon la chaîne :

- *réaction provoquée :* $^{238}_{92}\text{U} + ^1_0n \longrightarrow ^{239}_{92}\text{U}$;
- *réactions spontanées :*

$$^{239}_{92}\text{U} \longrightarrow ^{239}_{93}\text{Np} + ^0_{-1}e + \bar{\nu},$$

$$^{239}_{93}\text{Np} \longrightarrow ^{239}_{94}\text{Pu} + ^0_{-1}e + \bar{\nu}.$$

Le plutonium 239 a une radioactivité α, dont la période est 24 400 ans.

24.3 fission

24.3.1 fission de l'uranium 235

En 1938, O. Hahn et F. Strassmann observent qu'un noyau d'uranium 235 peut éclater sous l'impact d'un neutron et donner deux noyaux plus légers. Le phénomène de **fission** est découvert (*fig.* 2).
La probabilité pour qu'un neutron projectile réalise une fission du noyau ^{235}U est plus grande si la vitesse du neutron n'est pas excessive et correspond à la vitesse

Scanné avec CamScanner

moyenne d'agitation thermique. On parle alors de *neutron thermique,* dont l'énergie cinétique est de l'ordre de 0,1 électronvolt.

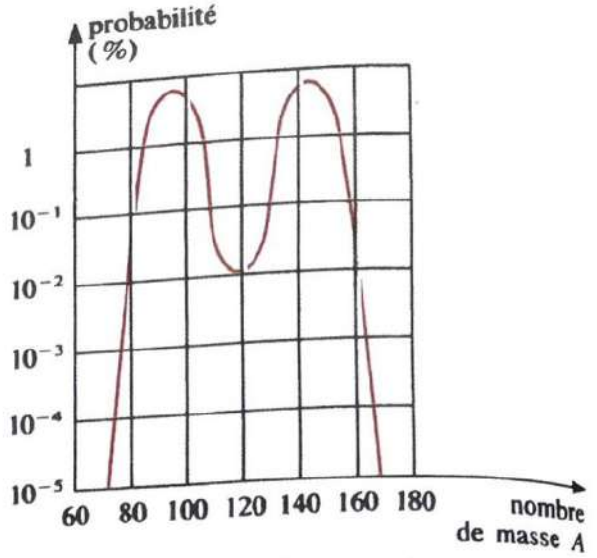
Le noyau ^{235}U absorbe un neutron et, sous l'effet des forces mises en jeu, s'étire et se rompt brutalement en deux, comme peut le faire une goutte d'un liquide. Les noyaux émis, trop riches en neutrons, sont dans un état excité et expulsent immédiatement un ou plusieurs neutrons. Par exemple :

$$^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n \longrightarrow ^{148}_{57}La + ^{85}_{35}Br + 3\,^{1}_{0}n$$

ou :
$$^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n \longrightarrow ^{140}_{54}Xe + ^{94}_{38}Sr + 2\,^{1}_{0}n.$$

Ce phénomène, observé la première fois par F. Joliot-Curie et son équipe en 1939, est primordial : il met en évidence la possibilité d'une réaction en chaîne auto-entretenue par les neutrons ainsi émis.

Il existe de très nombreuses possibilités de fission puisqu'on a pu dénombrer plus de 80 nucléides différents produits par la fission de l'uranium 235. La courbe de la figure 3 donne la probabilité de formation d'un noyau de masse atomique A lors de la fission d'uranium 235.



3. *Probabilité de formation d'un noyau de masse atomique A lors de la fission d'un atome d'uranium 235. Les noyaux de nombres de masse 96 et 140 sont les plus probables.*

24.3.2 nucléides fissiles et nucléides fertiles

Un nucléide est dit **fissile** si un neutron thermique peut provoquer la fission du noyau. Quatre nucléides fissiles sont actuellement utilisés :

$$^{235}_{92}U, \quad ^{233}_{92}U, \quad ^{239}_{94}Pu, \quad ^{241}_{94}Pu.$$

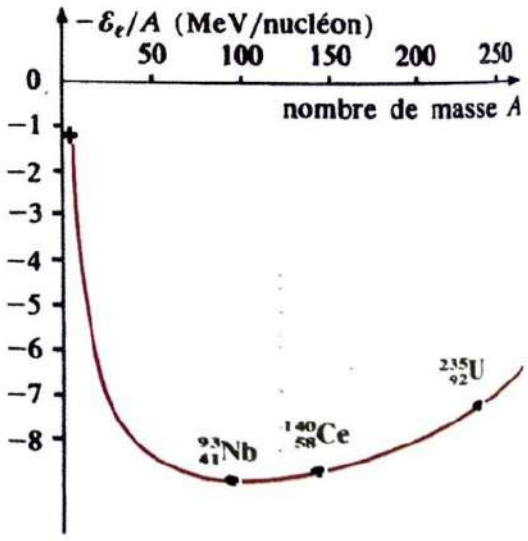
Parmi eux, l'uranium 235 est le seul nucléide naturel. L'élément uranium naturel en contient 0,71 %; le reste, 99,29 %, est de l'uranium 238 (en négligeant l'uranium 234). Les nucléides fissiles artificiels s'obtiennent par bombardement neutronique à partir de nucléides naturels relativement abondants dans la nature, par exemple l'uranium 238 ou le thorium 232. De tels nucléides naturels qui peuvent engendrer des nucléides fissiles sous l'action de neutrons sont dits **fertiles**.

24.3.2 énergie libérée par la fission

Les réactions de fission sont *très exoénergétiques,* les énergies moyennes de liaison par nucléon des noyaux formés étant supérieures à celle du noyau qui subit la fission. Un atome d'uranium 235 libère environ 200 MeV (*cf. Application* 1).

Remarque : Cette énergie est distribuée de la façon suivante :

- 90 % pour l'énergie cinétique des nucléides formés. La plus grande partie de cette énergie est évacuée sous forme de chaleur;
- 7 % pour les rayonnements γ, β^- et les neutrinos formés;
- 3 % pour l'énergie cinétique des neutrons formés. La plupart sont émis avec une énergie comprise entre 1 MeV et 2 MeV, énergie très grande devant celle d'un neutron thermique (0,1 eV). Il faut donc les ralentir, à l'aide d'un modérateur (barre de graphite, etc.). Actuellement, une nouvelle génération de réacteurs (surrégénérateurs) utilise directement les neutrons rapides (absence de modérateur, voir paragraphe 24.5).



4. $^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n \longrightarrow ^{140}_{58}Ce + ^{93}_{41}Nb + 3\,^{1}_{0}n + 7\,^{0}_{-1}e^- + 182{,}6$ MeV.

Les énergies moyennes de liaison par nucléon des nucléides obtenus par fission sont supérieures à celle de l'uranium 235. Les nucléides obtenus sont relativement plus stables; la réaction est exoénergétique.

Scanné avec CamScanner

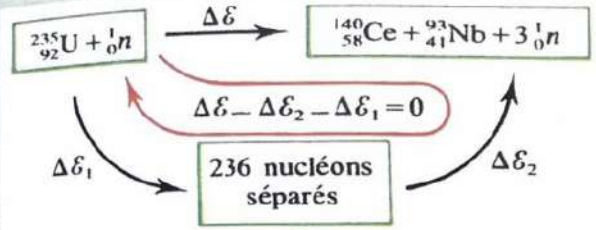
APPLICATION 1

Après plusieurs émissions β^- des noyaux formés, l'un des modes de fission de l'uranium 235 donne finalement :

$$^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n \longrightarrow ^{140}_{58}Ce + ^{93}_{41}Nb + 3\,^{1}_{0}n + 7\,^{0}_{-1}e.$$

L'énergie de liaison par nucléon est de 7,7 MeV environ pour ^{235}U, de 8,45 MeV pour ^{140}Ce et de 8,7 MeV pour ^{93}Nb. Déterminer approximativement l'énergie libérée au cours de cette réaction (fig. 3). On ne tiendra pas compte des électrons.

Utilisons le schéma suivant (on ne tient pas compte des électrons) :



auquel correspond la relation :

$$\Delta\mathcal{E} = \Delta\mathcal{E}_1 + \Delta\mathcal{E}_2.$$

Or : $\Delta\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_\ell(U) = 235 \times 7{,}7 = 1809{,}5$ MeV

et : $\Delta\mathcal{E}_2 = -\mathcal{E}_\ell(Ce) - \mathcal{E}_\ell(Nb)$

$= -140 \times 8{,}45 - 93 \times 8{,}7 = -1992{,}1$ MeV;

d'où : $\Delta\mathcal{E} = 1809{,}5 - 1992{,}1 = -182{,}6$ MeV.

La réaction est exoénergétique et produit 2 neutrons supplémentaires.

Notons que l'énergie libérée vaut environ 0,8 MeV par unité de masse atomique, soit $8 \cdot 10^{13}$ J.kg^{-1}, 2 millions de fois plus que de l'essence brûlant dans le dioxygène de l'air.

24.4 fusion

Deux nucléides au faible nombre de masse peuvent, lors d'un choc, fusionner et donner un nucléide au nombre de masse plus élevé : c'est la **fusion nucléaire**. Donnons deux exemples :

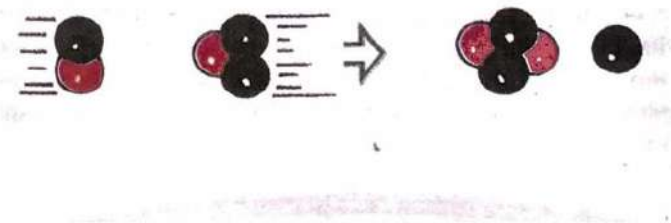
$$^{2}_{1}H + ^{2}_{1}H \longrightarrow ^{3}_{1}H + ^{1}_{1}H,$$

$$^{2}_{1} + ^{3}_{1}H \longmapsto ^{4}_{2}He + ^{1}_{0}n.$$

L'énergie moyenne de liaison par nucléon du noyau formé est supérieure à celle des noyaux qui fusionnent; en conséquence, ces réactions sont très exoénergétiques (*fig.* 6).

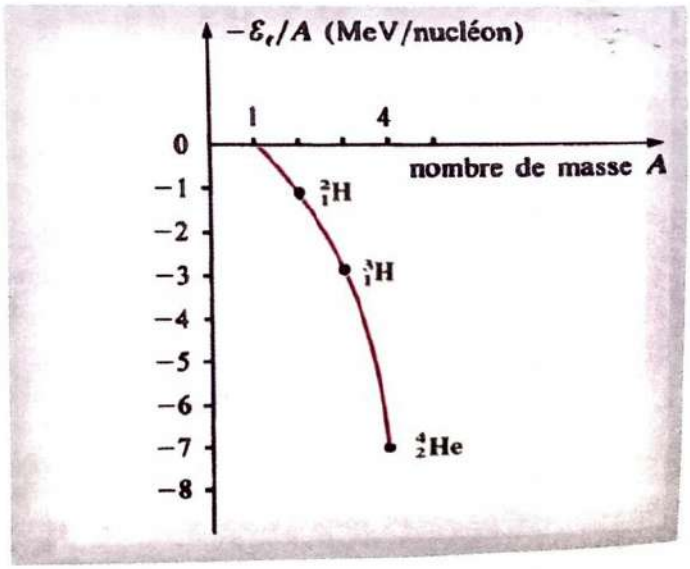
L'énergie rayonnée par le Soleil et les autres étoiles provient de réactions de fusion nucléaire. La température à l'intérieur des étoiles est telle ($T \approx 10^8$ K) que les atomes sont totalement ionisés : la matière stellaire est un *plasma* constitué de protons, d'électrons, de noyaux d'hélium, d'un peu de carbone... Ces réactions de fusion sont souvent appelées **réactions thermonucléaires** parce qu'elles nécessitent une haute température pour se produire. En effet, seules les particules animées de vitesses considérables ont une énergie cinétique suffisante pour s'approcher les unes des autres et fusionner.

Ces réactions produisent essentiellement des noyaux d'hélium ($^{4}_{2}He$) à partir de protons (voir *exercice* 21).



5. ***Schématisation simple de la fusion :***

$$^{2}_{1}H + ^{3}_{1}H \longrightarrow ^{4}_{2}He + ^{1}_{0}n.$$



6. $^{2}_{1}H + ^{3}_{1}H \longrightarrow ^{4}_{2}He + ^{1}_{0}n + 17$ MeV.

L'énergie moyenne de liaison par nucléon du nucléide formé par fusion est supérieure à celles des nucléides fusionnant. Le nucléide formé est relativement plus stable; la réaction est exoénergétique.

L'une des séries de réactions thermonucléaires rencontrées dans les étoiles est connue sous le nom de *cycle proton-proton* :

$$^1_1H + {}^1_1H \longrightarrow {}^2_1H + {}^0_1e + \nu,$$
$$^1_1H + {}^2_1H \longrightarrow {}^3_2He + \gamma,$$
$$^3_2He + {}^3_2He \longrightarrow {}^4_2He + 2\,{}^1_1H.$$

L'énergie libérée par ce cycle est d'environ 25 MeV, c'est-à-dire 6 MeV par nucléon participant à la réaction de fusion (à comparer à une réaction de fission, qui libère environ 200 MeV, soit environ 1 MeV par nucléon). Il existe d'autres cycles stellaires; l'un d'entre eux fait intervenir des noyaux de carbone.

Les réactions de fusion, à l'origine de l'énergie libérée dans les bombes H, sont difficiles à contrôler et le problème de leur utilisation en vue d'obtenir de l'énergie « domestiquée » n'est encore que très partiellement résolu.

24.5 utilisation de la fission : les réacteurs nucléaires

24.5.1 centrales classiques

Il est possible d'utiliser l'uranium 235 comme source importante d'énergie. Encore faut-il qu'une grande quantité d'uranium subisse la fission. Celle-ci est produite par une réaction en chaîne. Examinons les conditions qui permettent d'auto-entretenir la réaction en chaîne dans un réacteur nucléaire (*fig.* 7).

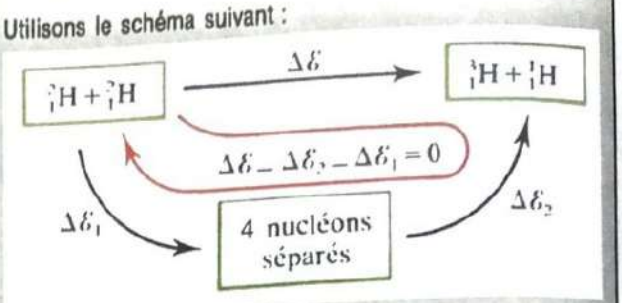
APPLICATION 2

Déterminer l'énergie libérée par la réaction de fusion suivante :

$$^2_1H + {}^2_1H \longrightarrow {}^3_1H + {}^1_1H.$$
(deutérium) (tritium)

L'énergie de liaison par nucléon est de 1,11 MeV *pour le deutérium et de* 2,83 MeV *pour le tritium.*

Utilisons le schéma suivant :



auquel correspond la relation : $\Delta\mathcal{E} = \Delta\mathcal{E}_1 + \Delta\mathcal{E}_2$.

or : $\Delta\mathcal{E}_1 = 2\mathcal{E}_\ell(^2_1H) = 2 \times 2 \times 1{,}11 = 4{,}44$ MeV

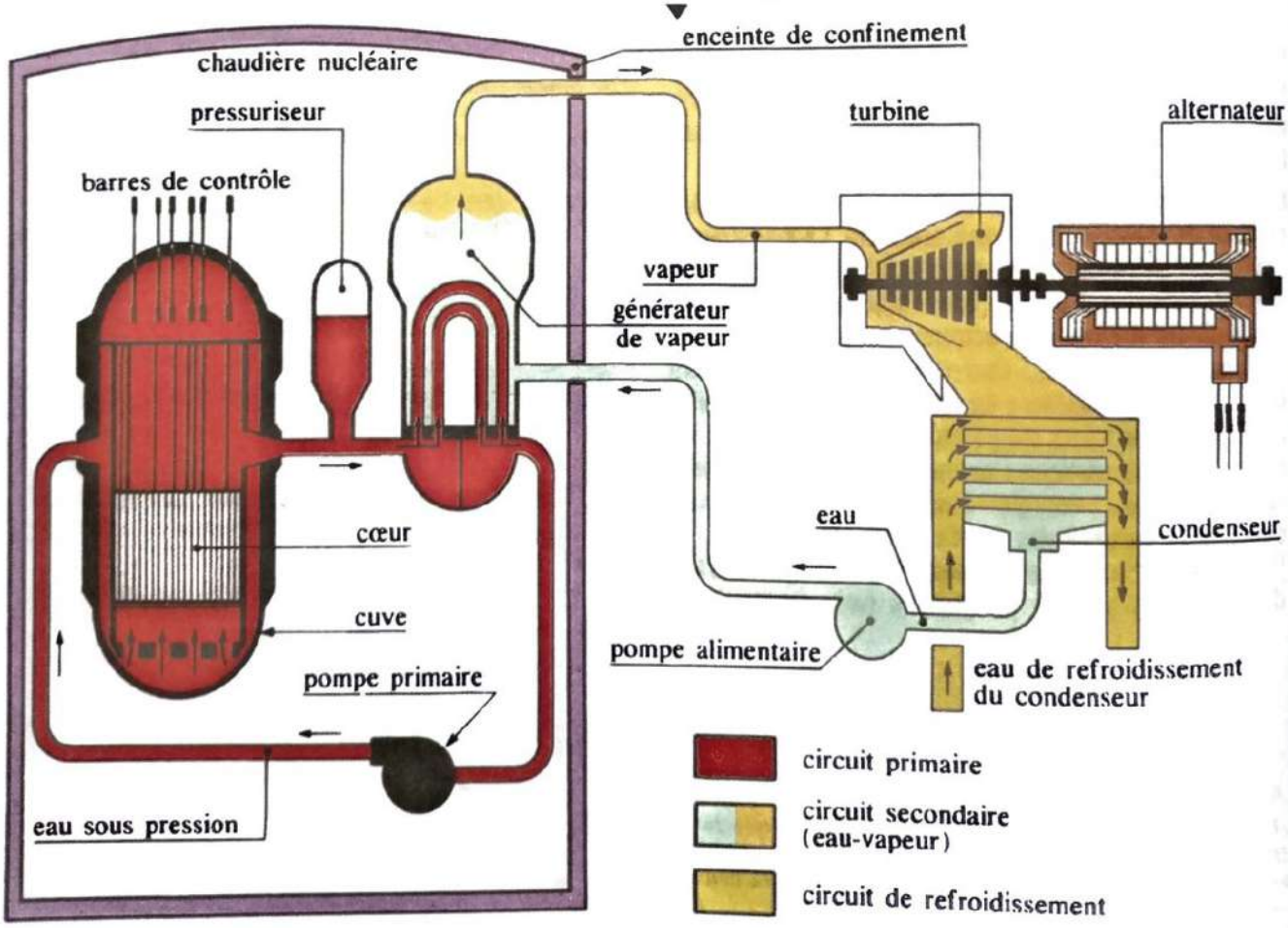
et : $\Delta\mathcal{E}_2 = -\mathcal{E}_\ell(^3_1H) = -3 \times 2{,}83 = -8{,}49$ MeV;

d'où : $\Delta\mathcal{E} = 4{,}44 - 8{,}49 = -4{,}05$ MeV.

La réaction est exoénergétique.

Notons que l'énergie libérée vaut environ 1 MeV par unité de masse atomique, soit 2,5 millions de fois plus que l'essence brûlant dans le dioxygène de l'air.

7. Schéma de principe d'une centrale nucléaire à eau sous pression (type P. W. R.).



Supposons qu'il y ait N neutrons (première génération) dans le réacteur, à un instant donné. Au bout d'un certain temps, ces neutrons auront disparu :

- N_1 auront provoqué une fission chacun;
- N_2 auront été capturés par des noyaux;
- N_3 se seront enfuis à travers la surface limitant le cœur du réacteur.

L'effectif de la génération suivante sera égale à aN_1, a désignant le nombre moyen de neutrons résultant de la fission d'un noyau ^{235}U (a est de l'ordre de 2,5). Le rapport :

$$k=\frac{aN_1}{N}=\frac{aN_1}{N_1+N_2+N_3},$$

facteur de multiplication, est une caractéristique essentielle du système.

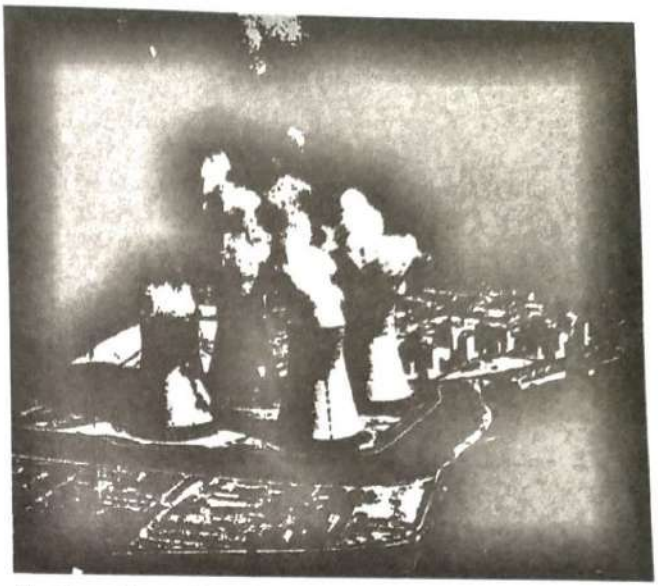
- Si $k>1$, le nombre de neutrons augmente d'une génération à la suivante; le système est *surcritique*, on dit aussi qu'il *diverge*. Cela peut conduire à une explosion, dont la bombe atomique (bombe A) est un sinistre exemple.
- Si $k<1$, la réaction en chaîne s'arrête; le système est *sous-critique*, on dit aussi qu'il *converge*.
- Si $k=1$, le système est stationnaire, ou *critique*. La réaction en chaîne est contrôlée. C'est le régime de fonctionnement d'un réacteur nucléaire.

On maintient le régime critique à l'aide d'une combinaison de plusieurs facteurs :

1/ Dans les réacteurs nucléaires classiques, on utilise de l'uranium naturel enrichi en uranium 235 (on a employé l'uranium naturel dans la filière graphite-gaz, abandonnée en 1971).

2/ Il ne faut pas que le nombre de neutrons qui fuient par la surface externe du cœur soit trop grand devant le nombre de neutrons produits à l'intérieur. Les calculs montrent que, pour une forme donnée du cœur du réacteur, le volume et la masse du système doivent dépasser certaines valeurs *(volume critique* et *masse critique)* pour que le régime critique soit atteint.
Les masses critiques, en sphères pleines, des matières fissiles sont de l'ordre de quelques kilogrammes.

3/ Au paragraphe 24.3, nous avons indiqué que la fission de ^{235}U exigeait des neutrons ralentis (neutrons thermiques). Ce ralentissement est produit par un *modérateur*. On réduit ainsi l'énergie cinétique des neutrons produits par la fission (ordre du MeV) à quelques eV du fait des collisions sur les noyaux du modérateur. Les modérateurs ont un pouvoir ralentisseur d'autant plus fort que leurs noyaux ont une masse suffisamment proche de celle des neutrons. En effet, si on lance une bille contre une boule de billard, la bille rebondit pratiquement sans perte de vitesse; en revanche, si la bille percute une bille identique, elle peut lui communiquer tout ou partie de son énergie. En outre, il ne faut pas que les noyaux du modérateur absorbent les neutrons. Les meilleurs modérateurs utilisés sont l'eau, l'eau lourde D_2O et le graphite.

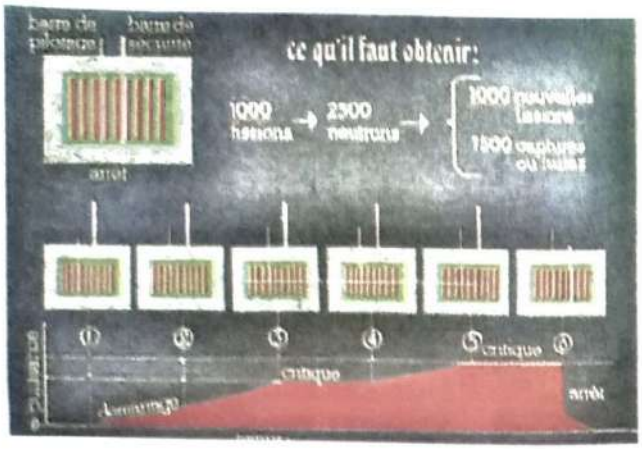


8. *Centrale nucléaire de Bugey.*

puissance thermique	2785 MW
puissance électrique	1240 MW
diamètre intérieur de la cuve	3,967 m
hauteur	12,322 m
masse d'UO_2 enrichi de 1,9 à 3,32 % environ	82,193 t
épaisseur de la cuve en acier	20 cm
température d'entrée de l'eau	286 °C
température de sortie de l'eau	323 °C
débit de l'eau	47 680 $t.h^{-1}$
tension délivrée par les groupes turbo-alternateurs (vapeur à 271 °C, sous 56 bars)	24 kV
débit de l'eau prélevée dans le Rhône	42 $m^3.s^{-1}$

9. ***Caractéristiques d'une tranche nucléaire (Bugey 3) de type P. W. R.***

Scanné avec CamScanner



10. *Schématisation du système de pilotage d'un réacteur nucléaire.*



11. *Couvercle du réacteur nucléaire de Fessenheim 1 équipé de ses mécanismes de commande des barres de contrôle.*

filière	graphite-gaz	P.W.R.(*)	B.W.R.(**)	eau lourde	H.T.R.	surrégénérateur
combustible	uranium naturel	uranium enrichi en ^{235}U	uranium enrichi en ^{235}U	uranium naturel sous forme d'oxyde de ^{239}Pu formé *in situ*	uranium enrichi et thorium	uranium et plutonium
modérateur	graphite	eau déminéralisée	eau déminéralisée	eau lourde	graphite	
caloporteur	CO_2	eau déminéralisée sous forme liquide ($p = 150$ atm)	eau déminéralisée sous forme vapeur ($p = 70$ atm)	eau lourde ou liquide organique	hélium	sodium
exemple	Bugey 1	Fessenheim 1 et 2 Bugey 3, 4, 5 (Westinghouse)	General Electric	filière canadienne CANDU	prototype	Phénix et Super-Phénix

12. (*) *Pressurized Water Reactor :* réacteur à eau pressurisée. (**) *Boiling Water Reactor :* réacteur à eau bouillante.

4/ Afin de mieux contrôler la réaction en chaîne, on introduit dans le réacteur des *barres de contrôle* constituées de matériaux très absorbants pour les neutrons tels que le bore et le cadmium. Pour faire démarrer le réacteur, on enlève ces barres. Lorsque la puissance fixée est atteinte, on rend la réaction critique en utilisant les barres de contrôle (*fig.* 10 et *photo* 11).

Remarque : Le démarrage est réalisé à l'aide d'américium, émetteur de particules α. Celles-ci réagissent sur des noyaux de béryllium : $^{9}_{4}Be + \alpha \longrightarrow {}^{1}_{0}n + {}^{12}_{6}C$.
L'américium est « l'allumette » des réacteurs.

La chaleur dégagée à l'intérieur du réacteur doit être évacuée à l'aide d'un *fluide caloporteur*. L'énergie calorifique est alors utilisée comme dans une centrale thermique classique. Les centrales en fonctionnement dans le monde font appel à plusieurs technologies, ou *filières*, caractérisées par le choix du combustible, du modérateur et du fluide caloporteur (*tab.* 12).

Scanné avec CamScanner

24.5.2 surrégénération, réacteur à neutrons rapides

Si on décide de ne pas ralentir les neutrons émis, les probabilités de fission de l'uranium 235 ou du plutonium 239 vont diminuer. Le problème est donc d'utiliser autrement ces neutrons.

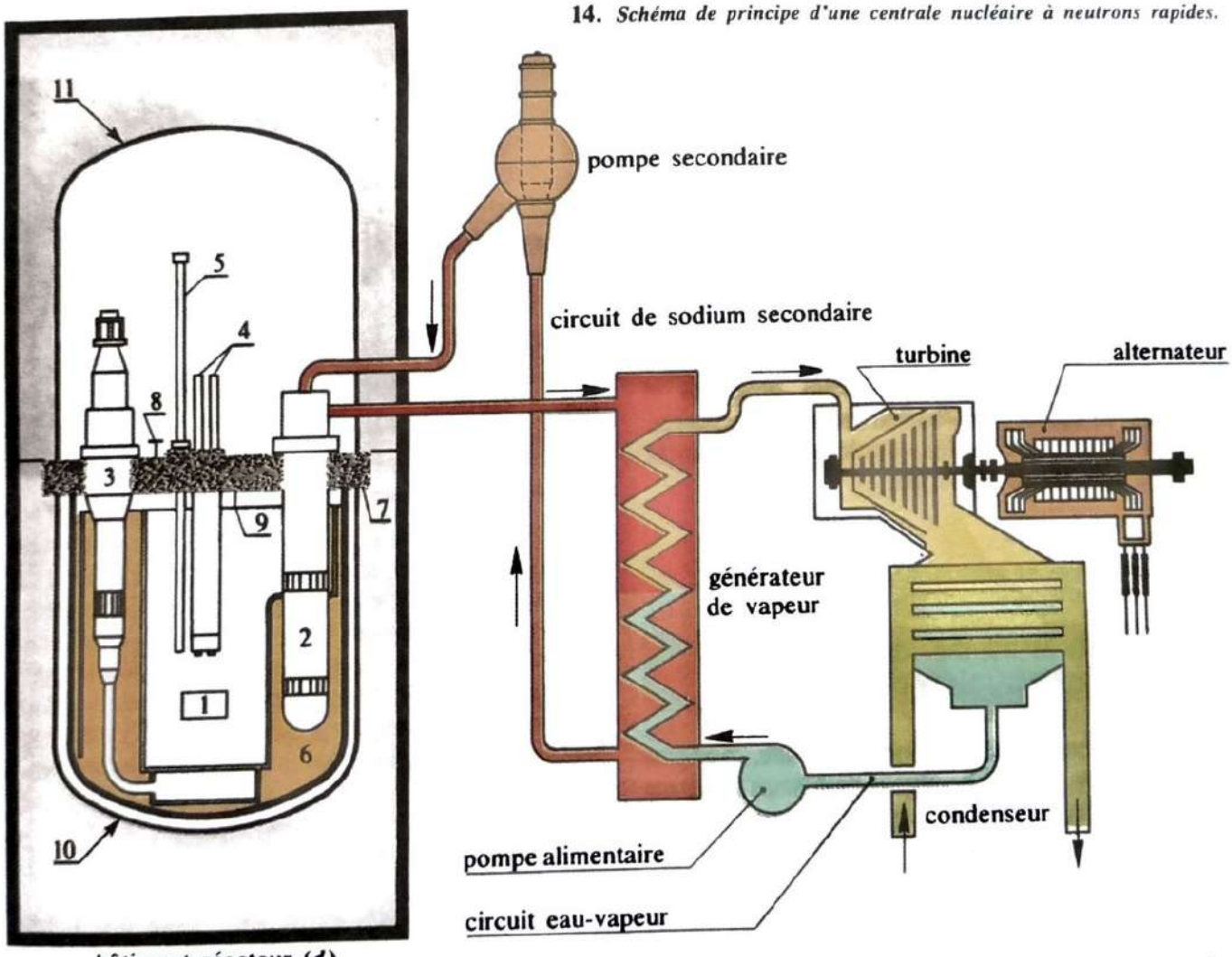
Ainsi, dans un réacteur à neutrons rapides (*fig.* 14), on dispose autour du *cœur*, constitué de matière fissile (mélange d'oxyde de plutonium 239 et d'uranium enrichi à 15 % environ), une certaine quantité de matière fertile (*photo* 13). Cette couverture peut être constituée par de l'uranium appauvri en ^{235}U, donc contenant essentiellement de l'uranium 238, qui provient des centrales nucléaires classiques.

Le cœur assure la libération d'énergie et l'entretien de la réaction en chaîne. La couverture de matière fertile



13. *Elément combustible de Phénix : dans les aiguilles sont enfermées les pastilles d'oxyde de plutonium et d'uranium.*

14. *Schéma de principe d'une centrale nucléaire à neutrons rapides.*



1 : cœur (*a*); 2 : échangeur intermédiaire; 3 : pompe primaire; 4 : barres de commande; 5 : machine de transfert; 6 : cuve principale contenant le sodium primaire (*b*); 7 : dalle; 8 : grand bouchon tournant (*b*); 9 : petit bouchon tournant (*b*); 10 : cuve de sécurité (*c*); 11 : dôme.

étagement des barrières de confinement

- **première barrière** (*a*) : constituée par les gaines du combustible, elle contient les produits de fission;
- **deuxième barrière** (*b*) : enceinte intermédiaire constituée par la cuve principale, la dalle et les bouchons tournants, elle contient le sodium primaire activé;
- **troisième barrière** (*c*) : enceinte primaire constituée par la cuve de sécurité et le dôme;
- **quatrième barrière** (*d*) : enceinte secondaire constituée par le bâtiment réacteur, elle protège notamment les installations contre les agressions externes.

Scanné avec CamScanner

arrête les neutrons rapides, qui transforment l'uranium 238 en plutonium 239 fissile. On obtient donc du réacteur non seulement de l'énergie, mais plus de combustible qu'il n'en consomme, d'où le nom de *surrégénérateur* (ou surgénérateur). De là, vient l'intérêt exceptionnel de ces réacteurs : ils permettent d'extraire d'une même masse d'uranium naturel cinquante à soixante dix fois plus d'énergie que les autres réacteurs. Comme dans tous les réacteurs, la réaction en chaîne est contrôlée par des barres absorbantes de neutrons. Mais ce type de réacteur ne comporte pas de modérateur. La construction de ces réacteurs pose, en fait, d'autres problèmes technologiques et économiques que les centrales classiques. La France a entrepris dès 1960 des études sur Rapsodie et Phénix (250 MW). Super-Phénix (1 200 MW) à Creys-Malville, après une mise en route satisfaisante, a connu des déboires techniques. Cette centrale est actuellement arrêtée.

24.5.3 conclusion

Les trois quarts de l'électricité fabriquée actuellement en France sont d'origine nucléaire.
Remède miracle ou malédiction du siècle? Nulle autre énergie ne provoque autant de controverses que l'énergie nucléaire. Cette énergie semble être l'énergie-relais indispensable pendant 20 à 30 ans pour satisfaire les besoins des pays industrialisés. Mais elle apparaît à certains comme une énergie à haut risque, bien que les constructeurs essaient de contrôler ces risques par des installations de sécurité d'un très haut degré d'élaboration. De nombreux problèmes politiques et techniques se posent : prolifération des armes nucléaires, rejets d'effluents radioactifs, stockage des déchets, accidents dans les centrales, etc.



15. *Stockage de déchets radioactifs à l'usine de la Hague.*

24.6 utilisation de la fusion thermonucléaire

Nous bénéficions déjà de l'énergie solaire, d'origine thermonucléaire. Mais de nombreux problèmes se posent pour réaliser sur Terre des fusions thermonucléaires contrôlées.

24.6.1 température critique trop élevée

Pour initier une réaction entre deux noyaux d'hydrogène chargés positivement, il faut les rapprocher à une distance inférieure à une dizaine de fermis, et donc leur communiquer une énergie cinétique d'au moins 0,15 MeV, afin de vaincre la répulsion électrostatique.
Un mélange dense de molécules destinées à fusionner est porté à très haute température. L'énergie due au choc de la seule agitation thermique peut suffire à provoquer les premières fusions; l'énergie cinétique des premières réactions entraîne une élévation de température, donc de nouvelles possibilités de fusion. La réaction en chaîne

Scanné avec CamScanner

s'amorce. Si la température s'emballe, c'est l'explosion (bombe H). Un des domaines les plus intéressants de la recherche actuelle est la production de réactions de fusion contrôlée.

Le problème est de produire des *plasmas* (états gazeux ionisés) très chauds. Évaluons la température moyenne pour obtenir une énergie de 0,15 MeV. L'énergie cinétique d'un noyau d'hydrogène présent dans un plasma où règne la température T est donnée par la formule :

$$\mathcal{E}_c \approx \frac{3}{2} kT,$$

avec $k \approx 1{,}38.10^{-23}\ J.K^{-1}$ (constante de Boltzmann); d'où :

$$T \approx \frac{2}{3} \cdot \frac{0{,}15.1{,}6.10^{-13}}{1{,}38.10^{-23}} = 1{,}16.10^{9}\ K;$$

T est de l'ordre du milliard de kelvins. Évidemment, 0,15 MeV est une énergie moyenne. Au hasard des chocs, certaines particules ont une énergie nettement supérieure. Néanmoins, la température critique est prohibitive.

Pour réaliser la fusion deutérium-tritium (D, T), la condition est moins draconienne : 50 millions de kelvins sont « seulement » nécessaires. La fusion deutérium-deutérium (D, D) s'amorce à une température de 400 millions de kelvins. Pour cette raison, il n'est pas douteux que les premiers réacteurs thermonucléaires emploieront un mélange de deutérium (^2_1H) et de tritium (^3_1H), qui peut fusionner suivant la réaction :

$$^2_1H + {}^3_1H \longrightarrow {}^4_2He + {}^1_0n \quad \text{(énergie dégagée : 17 MeV).}$$

24.6.2 nécessité du confinement

On ne peut songer utiliser un récipient matériel pour maintenir, même pendant un temps très court (de l'ordre de la milliseconde), des plasmas à des températures de l'ordre de 100 millions de kelvins et sous des pressions énormes. Un tel récipient serait volatilisé bien avant que la température limite ne soit obtenue. Il faut donc *confiner* le plasma dans l'espace prévu pour la réaction, de façon que le produit de la densité n du plasma par le temps t durant lequel il reste confiné soit supérieur à une certaine valeur :

$$nt \geqslant 100\,000.10^{9}\ cm^{-3}.s.$$

24.6.3 les deux directions de recherche

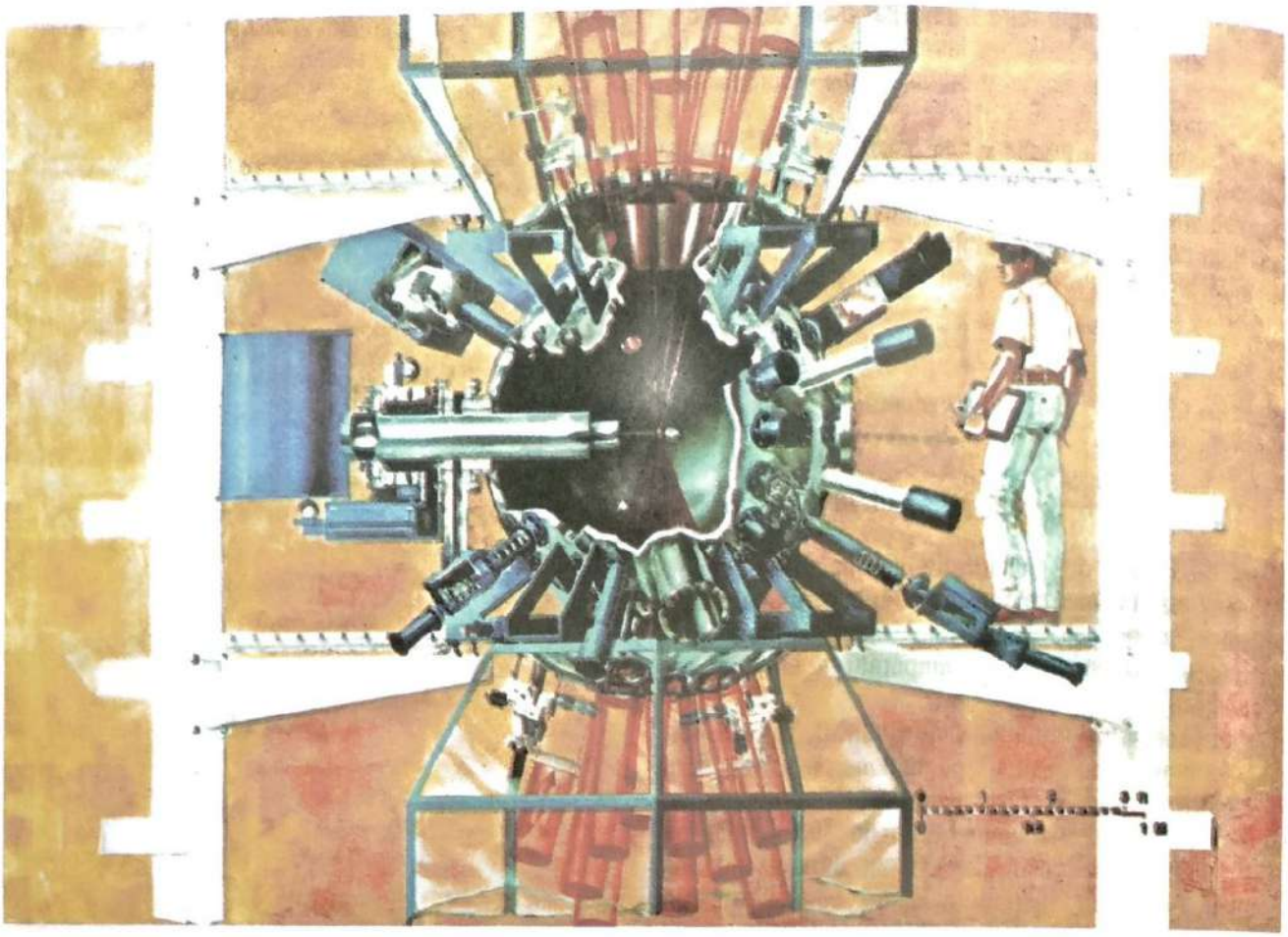
Les physiciens tentent actuellement d'amorcer la fusion nucléaire dans deux types d'appareils.

1/ *Machines à confinement magnétique* (densité n relativement faible, temps t long). Par exemple, dans les tokamaks, inventés par les Soviétiques, le plasma est confiné par un champ magnétique dont les lignes de champ constituent un tube immatériel en forme de tore. Les particules chargées s'enroulent autour des lignes de champ et restent localisées dans un petit volume de façon à avoir une grande densité. Le plasma est chauffé par induction électromagnétique.



16. ***Projet européen (J. E. T.) de fusion thermonucléaire par confinement magnétique à l'aide de champs magnétiques intenses créés par de puissants aimants, visibles sur l'éclaté.***

Scanné avec CamScanner



17. *Projet américain de Lawrence Livermore Laboratory (S. H. I. V. A.) de fusion thermonucléaire par faisceaux laser. Le plasma contenu dans la microsphère qui se trouve au centre du réacteur est porté, sous l'effet du rayonnement, à des millions de degrés.*

Le Commissariat à l'énergie atomique (C. E. A.) a construit un tokamak à Fontenay-aux-Roses. D'autres tokamaks ont été construits au Japon et aux États-Unis, mais l'Europe se place en tête des recherches, grâce au J. E. T. (Joint European Torus) construit à Culhan, en Grande-Bretagne (*fig.* 16). Une équipe de chercheurs anglais a réussi, en 1988, à produire pendant quelques secondes une température de 100 millions de degrés, soit dix fois la température du Soleil. Cette opération a nécessité un courant électrique de 7 millions d'ampères.

2/ *Machines à confinement inertiel* (densité n très forte — 10 000 fois supérieure à celle des solides —, temps t très court). Les particules (d'un mélange de deutérium et de tritium) sont échauffées et comprimées grâce à la convergence de puissants faisceaux lasers, de faisceaux d'électrons, ou d'ions; le mélange atteint alors des densités telles qu'elles puissent permettre le déclenchement de la fusion.

Dans les deux cas, la majeure partie de l'énergie produite est véhiculée par les neutrons. Ces particules cèdent leur énergie cinétique à une enceinte extérieure qui devient, de ce fait, source d'énergie thermique. A titre de comparaison, l'énergie libérée par la fusion d'un seul gramme de deutérium équivaudrait à celle de trois tonnes de charbon.

24.6.4 conclusion

La fusion thermonucléaire présente beaucoup d'avantages :

— des ressources inépuisables;
— une moindre radioactivité, limitée essentiellement aux matériaux de structure;
— pas de prolifération de matériaux stratégiques.

Mais d'énormes problèmes restent encore à résoudre pour en faire une source d'énergie domestiquée et utilisable.

24.7 dangers des radionucléides

24.7.1 absorption des particules et du rayonnement

Éjectés du noyau qui se désintègre, les particules et les photons, dont l'énergie est de l'ordre du MeV, peuvent traverser la matière inerte ou vivante. Ces projectiles entrent en collision avec les atomes ou les molécules qui constituent la matière traversée.
Au cours des chocs, la perte d'énergie cinétique provoque des ionisations ou même des réactions nucléaires.

Scanné avec CamScanner

On peut définir le *parcours moyen* d'un ensemble de particules dans une substance donnée comme la distance moyenne parcourue par ces particules avant d'être arrêtées. Ce parcours moyen dépend de la nature des particules, de leur énergie cinétique initiale et de la substance traversée.

1/ Les *particules* α sont facilement arrêtées. Le tableau 18 donne le parcours moyen de ces particules dans différents cas. On admet qu'une feuille de papier suffit à les arrêter.

2/ Légères, les *particules* β peuvent subir de nombreuses collisions successives avant d'être arrêtées; elles sont plus pénétrantes que les particules α, mais moins ionisantes. Leur parcours moyen est inversement proportionnel à la masse volumique de la substance traversée (*tab.* 19). Une feuille d'aluminium de 5 mm d'épaisseur permet d'arrêter les particules β, dont l'énergie cinétique est inférieure à 2 MeV.

3/ Les *rayons* γ sont très pénétrants. Plutôt qu'un parcours moyen, on détermine, pour un matériau donné, l'*épaisseur de demi-absorption,* c'est-à-dire l'épaisseur qui absorbe, en moyenne, la moitié des photons incidents (*tab.* 20).

4/ Les *neutrons* sont très pénétrants. Ils interagissent plus ou moins avec les noyaux selon la substance traversée, provoquant d'autres réactions nucléaires et par conséquent des ionisations en chaîne. Ils sont plus facilement arrêtés par des chocs avec des noyaux légers (noyaux d'hydrogène, par exemple) que par des chocs avec des noyaux lourds.

énergie cinétique (MeV)	parcours moyen dans l'air (cm)	parcours moyen dans les tissus cellulaires (µm)
4	2,4	24
6	4,6	45
8	7,2	70

18. *Parcours moyens des particules* α.

substance	masse volumique ($g.cm^{-3}$)	parcours moyen (cm)
air	$1{,}3.10^{-3}$	337
tissus cellulaires	2,7	0,15
aluminium	0,98	0,40

19. *Parcours moyens des particules* β *d'énergie cinétique égale à* 1 MeV.

24.7.2 effets biologiques

En traversant la matière vivante, les particules α et β et les rayonnements γ provoquent des ionisations, ou des excitations, d'atomes, susceptibles d'entraîner des réactions chimiques anormales.

Quelques heures ou même quelques années après une exposition au rayonnement, des réactions secondaires peuvent apparaître; des macromolécules fondamentales au niveau cellulaire (ARN, ADN) sont touchées. Des altérations morphologiques sont observées, notamment des effets génétiques; des cellules sont détruites ou leur processus de division altéré.

Lors de retombées radioactives, les nucléides sont absorbées par les plantes et se retrouvent ainsi dans la chaîne alimentaire. Les aliments ingérés véhiculent des radionucléides émetteurs α, β ou γ, qui peuvent alors atteindre n'importe quelle cellule de l'organisme. C'est la raison du grand émoi suscité par la catastrophe de Tchernobyl du 25 avril 1986, où des quantités importantes d'isotopes radioactifs (iode, cobalt, césium, ...) furent émises puis véhiculées par les vents sur une grande partie de l'Europe occidentale.

énergie cinétique (MeV)	plomb (cm)	béton (cm)	eau (cm)
0,5	0,18	4	12
1	0,51	4,8	13
5	18	8	20

20. *Quelques épaisseurs de demi-absorption pour les photons* γ.

Scanné avec CamScanner

irradiations naturelles (doses moyennes annuelles en µSv)		
radioéléments naturels incorporés dans organisme (^{40}K, Ra, Th, etc.)	240	
rayons cosmiques	300	1000 à 2500 m d'altitude
radioactivité du sol	460	2000 à 3000 dans les régions granitiques 2000 dans les régions où l'eau est riche en éléments radioactifs
irradiations d'origine humaine (doses moyennes annuelles en µSv)		
voyages aériens	1	écarts individuels considérables; atteint 2500 à 5000 pour les équipages des avions
montres à cadran lumineux	5	atteint 100 pour certains types de montres
divers (engrais phosphatés, télévision, combustion du charbon, etc.)	10	
voisinage d'une centrale nucléaire	20	petites variations en fonction des lieux d'habitation; atteint 40 pour toute personne vivant à proximité immédiate de la centrale
irradiations autres que médicales ou militaires	40	
radiologie médicale	1000	écarts individuels considérables selon l'âge et la fréquence des examens radiologiques

◀ **21.** *Principales sources d'irradiation en France.* (*Source U. N. E. S. C. E. A. R. — 1977 — et Académie des sciences de Washington* 1979.)

doses (Sv)	effets (dose unique)
1000	mort dans les minutes qui suivent
100	mort dans les heures qui suivent
10	mort dans les mois qui suivent
7	90 % de mortalité dans les mois qui suivent
6	troubles sanguins et digestifs graves diarrhées et vomissements risques de perforations intestinales
4 à 2,5	nausées, vomissements, vertiges dès la fin de l'irradiation modification de la formule sanguine risques mortels élevés en cas d'infection
2	10 % de mortalité dans les mois qui suivent
1,5 à 1	troubles digestifs légers épilations partielles fatigabilité persistante (plusieurs mois) augmentation significative des cas de cancers stérilité permanente chez la femme stérilité pendant 2 à 3 ans chez l'homme
à partir de 0,05	modification de la formule sanguine

▲ **22.** *Quelques conséquences sur l'organisme vivant après une irradiation.*

24.7.3 grandeurs et unités utilisées en radioprotection

1. La dose absorbée

Par définition, la **dose absorbée** est la quantité d'énergie que cède un rayonnement ionisé à l'unité de masse de matière exposée, notamment les tissus biologiques. L'effet des rayonnements dépend en premier lieu de cette dose, qui se retrouve en grande partie sous forme de chaleur.

L'unité de dose est le **gray** (symbole : **Gy**); elle correspond à une énergie absorbée de 1 joule par kilogramme. On utilise encore le **rad**, qui correspond à une énergie de 0,01 $J.kg^{-1}$:

$$1\ Gy = 100\ rad.$$

Scanné avec CamScanner

2. Équivalent de dose

Les effets biologiques des rayonnements, à dose égale, dépendent de la nature du rayonnement et de sa distribution spatiale. Pour tenir compte de cette donnée, on introduit pour chaque type de rayonnement des facteurs correctifs, ou *facteurs de qualité* E.B.R. (Efficacité Biologique Relative). On définit alors l'**équivalent de dose,** dont l'unité est le **sievert** (symbole : **Sv**) :

$$\text{équivalent-dose (Sv)} = \text{dose (Gy)} \times \text{E.B.R.}$$

Le rem, défini en utilisant le rad comme unité de dose, est encore utilisé :

$$1\ \text{Sv} = 100\ \text{rem.}$$

Si un individu a été exposé à plusieurs types de rayonnements, la dose reçue est la somme des doses partielles exprimées. On a défini certaines doses maximales admissibles, compte tenu de l'état actuel de nos connaissances; ces doses ne sont pas susceptibles de causer des troubles appréciables, mais elles sont néanmoins toujours remises en question (*tab.* 21 et 22).
Pour fixer les idées, voici quelques valeurs caractéristiques :

— dose individuelle due à la radioactivité naturelle (tellurique et cosmique) : 1 à 5 $mSv.an^{-1}$;
— limite réglementaire pour le personnel des centrales nucléaires : 50 $mSv.an^{-1}$;
— limite réglementaire pour la population : 5 $mSv.an^{-1}$;
— dose reçue lors d'une radiographie pulmonaire : 20 μSv;
— dose entraînant la mort dans les heures qui suivent : 100 Sv.



23. *Gammagraphie industrielle. Opération de contrôle de soudure afin de détecter un éventuel défaut.*

24.8 utilisation des radionucléides

Les rayonnements émis par les radionucléides naturels ou artificiels obtenus par des réactions nucléaires trouvent de multiples usages.

24.8.1 industrie

1/ La *gammagraphie* ne diffère en rien, dans son principe, de la radiographie par des rayons X : l'image (recueillie sur une plaque photographique) d'une pièce métallique soumise à un rayonnement γ révèle et décèle les défauts d'un organe. Toutes les soudures des cuves des réacteurs nucléaires sont contrôlées à l'aide de ce procédé. Ses avantages principaux sont la fiabilité et l'autonomie de la source (^{60}Co, ^{192}Ir), de dimensions réduites (*fig.* 23).

2/ La *bêtagraphie* (utilisation du rayonnement β) permet l'examen d'objets minces, le contrôle d'épaisseurs, etc.

24.8.2 médecine et biologie

1/ *Traitement des tumeurs par irradiation :* le rayonnement γ émis par un corps radioactif (le cobalt 60, par exemple) permet de détruire les cellules localisées dans la tumeur cancéreuse.



24. *Conservation d'objets d'art. Consolidés par polymérisation sous irradiation, ces objets deviennent imputrescibles.*

Scanné avec CamScanner

2/ *Traitement d'une tumeur par voie metabolique.* On prépare des molécules marquées avec un émetteur β et susceptibles d'être fixées sélectivement par les tissus pathologiques. On traite de cette façon l'hyperthyroïdie, le cancer du corps thyroïde et la maladie de Vaquez (ou polyglobulie), au moyen du phosphore radioactif.

3/ *Scintigraphie.* Les radionucléides sont utilisés comme traceurs. Ils participent au métabolisme de la même façon que les éléments naturels auxquels ils sont mélangés. Par exemple, l'iode 131 va être absorbé au même titre que l'iode naturel. On pourra donc suivre le cheminement de l'iode au cours de son assimilation et contrôler le fonctionnement de la glande thyroïde qui synthétise et sécrète les hormones iodées responsables de nombreuses actions au niveau des cellules. On peut également étudier la morphologie d'un organe rendu radioactif par fixation d'un radioélément émetteur γ ou β. Grâce à divers détecteurs, on obtient une véritable image de l'organe (*fig.* 25). La chirurgie du cerveau utilise merveilleusement ces méthodes : le phosphore radioactif se localise dans les tumeurs difficiles à distinguer du tissu sain; le chirurgien peut alors les cerner au cours de l'opération même, à l'aide de compteurs Geiger spéciaux sensibles à l'émission β.



25. *La scintigraphie est utilisée en médecine pour analyser le fonctionnement de certains organes; ici, une scintigraphie du foie.*

4/ L'*analyse chimique* utilise couramment les radioéléments. Le dosage fondé sur la radioactivité est sensible, simple et rapide. On peut ainsi doser des éléments à l'état de traces (10^{-10} mol.ℓ^{-1}), non dosables chimiquement : hormones de croissance, insuline dans le sang, etc.

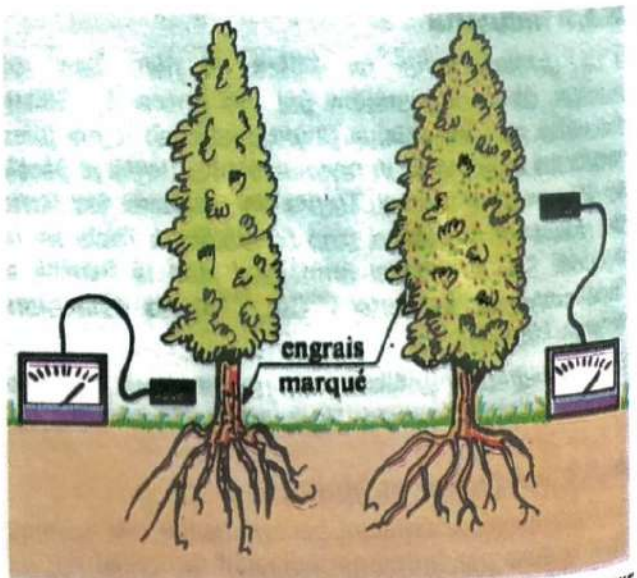
5/ *Radiostérilisation.* Des milliers d'articles (seringues, pansements, draps, prothèses, ...) sont stérilisés à l'aide de rayons γ, qui tuent les microorganismes.

24.8.3 agronomie et agroalimentaire

1/ *Modification génétique.* Une irradiation de végétaux peut provoquer des changements génétiques importants. On a ainsi obtenu des pailles de blé, d'orge et de riz mieux adaptées à la moisson mécanique et plus résistantes à la verse.

2/ *Conservation des denrées.* Une irradiation γ permet de détruire les insectes dans les denrées stockées et les microorganismes dans les œufs, la viande, etc. C'est aussi un traitement antigerminatif puissant (pommes de terre).

3/ L'*utilisation de traceurs* a permis de faire progresser les connaissances en matière d'absorption ou de transport de minéraux. Par exemple, des atomes de phosphore radioactif incorporés dans un engrais se comporteront dans une plante de la même façon que les atomes stables de phosphore. L'agronome pourra ainsi suivre à la trace l'assimilation de l'engrais par la plante (*fig.* 26) et en déduire son efficacité, la date la plus favorable pour le répandre sur le sol, etc.



26. *Étude de l'absorption d'un engrais au moyen d'un traceur radioactif.*

Scanné avec CamScanner

DOCUMENT

Irène et Frédéric Joliot-Curie

Irène Curie est née en 1897 à Paris. Préparatrice de sa mère, Marie Curie, elle entreprend, en 1918, une longue étude sur les rayons α émis par le polonium (thèse de doctorat en 1925). Mariée en 1926 à Frédéric Joliot, elle prépare de grandes quantités de radium et de polonium en vue d'obtenir des sources de rayons α intenses.

Frédéric Joliot, quant à lui, est né à Paris en 1900. Il entre à l'École de physique et de chimie de Paris et en sort ingénieur en 1925. Avec l'appui de Langevin, il entre à l'Institut du radium comme préparateur de Marie Curie. Durant la période 1927-1930, il met au point différentes techniques expérimentales en montrant des qualités remarquables d'expérimentateur. Seul ou avec Irène Curie, qu'il épouse en 1926, il publie de nombreux travaux, essentiellement sur le rayonnement émis par le polonium.

En 1931, les époux Joliot-Curie disposent de la plus forte source de rayons α existant dans le monde. Ils participent, par leurs expériences, à la découverte du neutron par Chadwick en 1932. En 1933, plusieurs découvertes s'ajoutent encore à leur actif. Ils montrent tout d'abord que le plomb soumis au rayonnement très pénétrant issu du beryllium irradié par le rayonnement α est le siège d'une émission d'*électrons positifs* et que cette émission est due au rayonnement γ et non aux neutrons.

Ils observent alors dans une chambre de Wilson la création d'une paire électron-positon à partir d'un photon γ. Le phénomène inverse, prévu par Dirac, c'est-à-dire la transformation d'un électron et d'un positon en rayon γ, avait été découvert peu après et simultanément par Frédéric Joliot-Curie et Jean Thibaud. Les premières expériences de réactions nucléaires provoquées (appelées réactions de transmutation) furent décrites et publiées dans les comptes rendus de l'Académie des sciences le 15 janvier 1934 en ces termes :

« Nous plaçons une feuille d'aluminium à 1 mm d'une source de polonium. L'aluminium étant irradié pendant 10 min environ, nous le plaçons au-dessus d'un compteur de Geiger-Müller portant un orifice fermé par un écran de 7/100 de mm d'aluminium. La feuille émet un rayonnement dont l'intensité décroît exponentiellement en fonction du temps avec une période de 3 min 15 s. On obtient un résultat analogue avec le bore et le magnésium, mais les périodes sont différentes : 14 min pour le bore et 2 min 30 s pour le magnésium. » Dans la même note sont précisées la nature de ce rayonnement et l'interprétation des résultats. Par exemple, dans le cas de l'aluminium, la réaction nucléaire s'écrit :

$$^{27}_{13}\mathrm{Al} + ^{4}_{2}\mathrm{He} \longrightarrow ^{30}_{15}\mathrm{P}^{*} + ^{1}_{0}n,$$

$$^{30}_{15}\mathrm{P}^{*} \longrightarrow ^{30}_{14}\mathrm{Si} + ^{0}_{1}e.$$

L'isotope $^{30}_{15}\mathrm{P}^{*}$, inconnu dans la nature, est radioactif.

Cette note de 1934 fournissait la preuve physique de la création de nouveaux radioéléments. Cependant, un doute subsistait chez les chimistes, qui auraient voulu analyser ces radioéléments. Ce doute fut levé dès le 5 février 1934 par une note qui décrivait la séparation chimique de nouveaux radioéléments.

A partir de 1935, année où ils recoivent le prix Nobel de Chimie, les époux Joliot-Curie ne vont plus collaborer de façon aussi étroite et vont entreprendre des travaux différents. En particulier, Frédéric Joliot-Curie va s'attacher à la construction d'accélérateurs de particules. En 1937, il est nommé professeur au Collège de France et directeur du Laboratoire de chimie nucléaire. Iréne Joliot-Curie, quant à elle, devient maître de conférence de radioactivité.

Frédéric construit un générateur de tension de 1,2 million de volts, puis met en construction un cyclotron permettant d'obtenir des rayons α de 14 MeV.

En collaboration avec Halban et Kowarski, il montre que la fission de l'uranium s'accompagne de l'émission de plusieurs neutrons rapides et, avec Perrin, il entrevoit la possibilité de réactions en chaîne. En 1940, il dépose avec ses collaborateurs cinq brevets et, à l'Académie des sciences, des plis cachetés qui renferment les principes et les données pratiques pour construire une pile atomique. La guerre et l'Occupation rendent impossible la poursuite des recherches. Après la guerre, Frédéric est nommé directeur du C.N.R.S., puis, dès 1946, participe à la création du Commissariat à l'énergie atomique. Le 15 décembre 1948, il a la joie de mettre en marche la première pile française Zoé. Irène devient directeur du laboratoire Curie et commissaire à l'énergie atomique. Elle poursuit, malgré une santé alarmante, de nombreux travaux de recherche (rayons γ, dosage du carbone dans l'acier, comparaison des étalons de radium, etc.) et une intense activité politique.

En 1950, Frédéric est révoqué de son poste à la suite d'une déclaration « explosive » faite au 13e congrès du P.C.F. Il se consacre alors à ses deux laboratoires du Collège de France et de synthèse atomique. Déjà atteint par la maladie, il réduit ses activités mais continue toutefois de nombreuses recherches et milite jusqu'à sa mort contre la fabrication des armes nucléaires et pour le maintien de la paix entre les peuples. Il n'est pas douteux que les disparitions prématurées d'Irène (le 17 mars 1956) et de Frédéric (le 14 août 1958) soient dues pour une large part à l'action nocive des rayonnements émis par les substances radioactives.

Scanné avec CamScanner

EXERCICES

L'essentiel du cours

24.1 A 1/ Définir les phénomènes de fusion et de fission nucléaires.

2/ A partir de la courbe représentant l'opposé de l'énergie de liaison par nucléon en fonction du nombre de masse, montrer que ces deux types de réactions nucléaires peuvent libérer de l'énergie.

3/ Les neutrons nécessaires pour produire des réactions nucléaires dans les centrales doivent-ils être accélérés ou freinés ?

4/ Pourquoi les nucléides ^{235}U et ^{239}Pu sont-ils dits fissiles ?

5/ Les réactions nucléaires dans les étoiles sont-elles dues à des réactions de fusion ou de fission ?

24.2 A *Choisir la bonne réponse.*

1/ Le pouvoir ionisant des particules α est *important/faible ?*

2/ Les particules α ont un pouvoir pénétrant *faible/important.*

3/ La population de Pertuis (ville située près du centre nucléaire de Cadarache) ne doit pas recevoir une irradiation globale annuelle supérieure à 50 Sv/50 mSv.

4/ Le sievert est une unité *de dose/d'équivalent de dose.*

5/ Un gray correspond à une énergie absorbée égale à $1\ J.kg^{-1}/10^{-2}\ J.kg^{-1}$.

6/ La mort immédiate survient pour une dose absorbée de l'ordre de 1000 Sv/1 Sv.

Exercices de base

Dans tous les exercices, on prendra :

$m_p = 1{,}007\,276$ u ; $m_n = 1{,}008\,665$ u ;
$m_e = 0{,}000\,549$ u ; $m_\alpha = 4{,}001\,50$ u ;
$1\ u = 931{,}5\ MeV.c^{-2}$; $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}\ J.s$.

24.3 La fission d'un noyau d'uranium 235 bombardé par un neutron fournit divers produits. Parmi les réactions possibles, on peut citer :

$$^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{A}_{54}Xe + ^{94}_{Z}Sr + 2^{1}_{0}n$$
$$^{235}_{92}Y + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{148}_{57}La + ^{A'}_{Z'}Br + 3\,^{1}_{0}n$$
$$^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{144}_{Z''}La + ^{A''}_{35}X + 4^{1}_{0}n$$

1/ A *a/* Déterminer les nombres A, Z, A', Z', A'' et Z'', en précisant les lois appliquées.
b/ En déduire la nature de X. (On consultera la classification périodique.)

2/ AB3 La fission d'un noyau d'uranium 235 se fait avec une perte de masse moyenne de 0,2 u. Évaluer, en J puis en MeV, l'énergie moyenne libérée par cette fission.

24.4 Dans une centrale nucléaire à uranium enrichi (en isotope $^{235}_{92}U$), l'une des réactions les plus fréquentes est représentée par l'équation :

$$^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{94}_{38}Sr + ^{140}_{54}Xe + 2^{1}_{0}n. \qquad (1)$$

L'isotope $^{238}_{92}U$ peut capter des neutrons pour former du plutonium, selon les équations :

$$^{238}_{92}U + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{239}_{92}U,$$
$$^{239}_{92}U \rightarrow ^{0}_{1}e + ^{239}_{93}Np,$$
$$^{239}_{93}Np \rightarrow ^{0}_{1}e + ^{239}_{94}Pu.$$

Ce plutonium donne une réaction du même type que celle qui est décrite par l'équation (1).

1/ A *a/* Quelle est la propriété des nucléides $^{239}_{92}U$ et $^{239}_{93}Np$?
b/ Le plutonium produit est-il un noyau fissile ou fertile ?
c/ D'où provient l'énergie libérée par les réactions du type (1) ?

2/ B3 Une centrale nucléaire consomme chaque année 23,2 t d'uranium enrichi. Pour obtenir 1 kg de ce « combustible » on consomme $3{,}1 \cdot 10^{10}$ J. La centrale fournit annuellement $2{,}5 \cdot 10^{16}$ J. Quel est le pourcentage de la production de la centrale nécessaire à l'obtention du combustible nucléaire qu'elle utilise ?

24.5 A 1/ L'uranium 235 est fissile, c'est-à-dire que le noyau peut être brisé par un neutron « lent » en deux nouveaux noyaux. Ces noyaux formés sont instables ; en général, ils se désintègrent par radioactivité β^-.
Dans un réacteur nucléaire à eau sous pression, une fission possible du noyau d'uranium 235 est représentée par l'équation bilan :

$$^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{x}_{40}Zr + ^{142}_{58}Ce + 3^{1}_{0}n + y\,^{0}_{-1}e.$$

a/ A Déterminer x et le nombre y d'électrons libérés par cette fission.
b/ B3 L'énergie libérée au cours de la fission est reliée à la variation de masse du système par la relation d'Einstein :

$$\mathcal{E} = (m_2 + m_3 + 3m_n + ym_e - m_u - m_n)c^2.$$

Calculer l'énergie libérée par noyau ayant subi la fission.
c/ A Une partie de cette énergie se retrouve sous forme de rayonnement γ. Quelle est la nature de ce rayonnement ? Interpréter sa formation.

2/ A Dans une centrale de type surrégénérateur, un noyau d'uranium 238 placé en couverture peut capter un neutron rapide.

a/ Écrire l'équation nucléaire correspondante.
b/ L'isotope de l'uranium ainsi formé a une radioactivité β^- et donne un noyau X. Celui-ci subit à son tour une désintégration β^- et donne un noyau Y. Déterminer X et Y. (On consultera la classification périodique.)

24.6 AB3 La réaction thermonucléaire :

$$^{2}_{1}H + ^{3}_{1}H \rightarrow ^{4}_{2}He + ^{1}_{0}n$$

est l'une des plus énergétiques. Calculer l'énergie libérée (en J) par cette réaction pour former 1 g d'hélium, sachant que les énergies moyennes de liaison par nucléon valent 1,11 MeV pour $^{2}_{1}H$, 2,83 MeV pour $^{3}_{1}H$ et 7,07 MeV pour $^{4}_{2}He$.

Équivalence masse-énergie

24.7 Le constituant principal des étoiles jeunes, et notamment du Soleil, est l'hydrogène. Lorsque le cœur de ces étoiles atteint une température de 10^7 K, les protons fusionnent. Cette fusion s'effectue selon divers processus. Le bilan de l'un d'eux est le suivant :

$$4\,^{1}_{1}H \rightarrow ^{4}_{2}He + 2x + 2\nu.$$

1/ A La particule x est-elle un électron ou un positon ? Comment s'appelle la particule ν ?

Scanné avec CamScanner

2/ AB3 Calculer l'énergie libérée par la formation d'un noyau d'hélium $^4_2$He selon ce processus, puis (en J) l'énergie libérée par une mole d'hélium formée.

3/ On suppose que toute l'énergie de fusion produite par les réactions est rayonnée par le Soleil. La puissance rayonnée, supposée constante, est de $3{,}9 \cdot 10^{26}$ W.

a/ AB3 Calculer la perte de masse subie par le Soleil en une seconde.

b/ B3 La masse du Soleil est de l'ordre de $2 \cdot 10^{30}$ kg. On évalue son âge à 4,6 milliards d'années. Quelle masse a-t-il perdue depuis qu'il rayonne ? Quelle fraction de sa masse actuelle cela représente-t-il ?

24.8 En 1934, Frédéric et Irène Joliot-Curie bombardèrent des noyaux d'aluminium $^{27}_{13}$Al par des noyaux d'hélium $^4_2$He. Ils obtinrent des noyaux de phosphore $^{30}_{15}$P et une particule x.

1/ A Déterminer la nature de la particule x, en précisant les lois appliquées. Écrire l'équation de cette réaction nucléaire.

2/ Le phosphore obtenu est radioactif ; il se désintègre en donnant des particules β^+ et du silicium.

a/ A Écrire, en la justifiant, l'équation de désintégration du noyau de phosphore.

b/ AB3 A l'aide d'un compteur de particules, on mesure le nombre moyen de désintégrations par seconde ; ce nombre est proportionnel au nombre de noyaux $^{30}_{15}$P non encore désintégrés. Déterminer la constante radioactive et la demi-vie du noyau de phosphore, sachant que le compteur affiche au bout de 500 s un nombre moyen de désintégrations par seconde dix fois moins grand qu'au début.

24.9 A On envoie des rayons γ dans une enceinte contenant 10 cm³ d'air. Un organisme vivant placé à l'intérieur de cette enceinte recevrait dans les mêmes conditions une dose de 0,835 Sv. L'E.B.R. de ces rayons γ est voisine de 0,9.
Déterminer le nombre d'ionisations enregistrées dans l'enceinte, sachant qu'une dose de 1 Gy produit dans l'air $2{,}05 \cdot 10^{11}$ ionisations par cm³.

24.10 A On irradie un organe de 1 kg à l'aide d'un rayonnement γ durant 10 séances de 10 minutes. Les doses étant cumulatives, déterminer l'énergie absorbée par l'organe, sachant que la dose absorbée est de l'ordre de 0,07 Gy . min^{-1}.

Banc d'essais

24.11 Une centrale nucléaire classique, utilisant la fission de l'uranium 235, fournit une puissance électrique moyenne de 900 MW. Le rendement de la transformation d'énergie nucléaire en énergie électrique est de 30 %.

1/ A Un atome d'uranium 235 libère environ 200 MeV, transformés entièrement en chaleur. Quelle masse d'uranium 235 faut-il pour faire fonctionner cette centrale durant une année ?

2/ B3 La combustion d'une tonne de pétrole libère une énergie de $42 \cdot 10^9$ J. Quelle masse de pétrole faudrait-il utiliser pour produire une énergie équivalente avec le même rendement ?

↳ ex. 24.3.

Réaction de fusion

24.12 A La proportion en nombre d'atomes de deutérium existant dans l'hydrogène naturel est estimée à 0,015 %. Le deutérium peut réagir selon la réaction :

$$^2_1\text{H} + ^2_1\text{H} \rightarrow ^3_1\text{H} + ^1_1\text{H}.$$

Les énergies moyennes de liaison par nucléon valent 1,11 MeV pour $^2_1$H et 2,83 MeV pour $^3_1$H. Évaluer la quantité d'énergie qui pourrait être obtenue avec le deutérium issu de la décomposition de 1 kg d'eau naturelle. Quelle masse d'essence (pouvoir calorifique $5 \cdot 10^7$ J . kg^{-1}) permettrait d'obtenir la même quantité d'énergie par combustion ?

↳ ex. 24.6, appl. 24.2.

Réaction de fission

24.13 L'américium $_{95}$Am est un émetteur α. Une particule α est susceptible de réagir sur un noyau de béryllium $^9_4$Be pour donner un noyau de carbone $^{12}_6$C et une particule x.

1/ A Écrire l'équation correspondant à cette réaction et déterminer la nature de la particule x.

2/ C2 Pourquoi le mélange américium-béryllium est-il utilisé dans les réacteurs nucléaires à fission ?

↳ cours 24.5.

Réactions de fission

24.14 Dans un réacteur nucléaire, le nucléide $^{235}_{92}$U capte un neutron lent ^1_0n et subit la réaction de fission décrite par l'équation bilan suivante :

$$^{235}_{92}\text{U} + ^1_0n \rightarrow ^{94}\text{Sr} + {}_{54}\text{Xe} + 2^1_0n.$$

1/ A Déterminer le numéro atomique du nucléide Sr et le nombre de masse du nucléide Xe.

2/ A Dans ce même réacteur, un isotope de l'uranium, le nucléide $^{238}_{92}$U, peut capter un neutron rapide et se transformer en isotope $^{239}_{92}$U selon la réaction :

$$^{238}_{92}\text{U} + ^1_0n \rightarrow ^{239}_{92}\text{U}.$$

Le nucléide ^{239}U est radioactif ; par deux désintégrations successives spontanées de type β^-, il se transforme en plutonium. Écrire les équations nucléaires des désintégrations β^- ; en déduire le numéro atomique et le nombre de masse du plutonium formé.

a/ A Un autre isotope de l'uranium, le nucléide $^{234}_{92}$U, est radioactif émetteur α. Écrire l'équation de la désintégration radioactive de ce nucléide et identifier le noyau formé.

b/ C1 L'énergie libérée par la désintégration d'un noyau d'uranium $^{234}_{92}$U est de 14,2 MeV. Sous quelle forme se retrouve-t-elle ?

c/ AB3 Certaines des particules α émises ont en réalité une énergie cinétique égale à 13,0 MeV. L'écart entre la valeur calculée (14,2 MeV) et la valeur réelle est expliqué par l'émission de radiations γ. En déduire l'énergie du photon γ émis en même temps que ces particules et calculer la longueur d'onde associée à ce photon.

↳ ex. 24.4, 23.7, 23.10.

Scanné avec CamScanner

EXERCICES

Loi d'absorption des photons γ

24.15 Un faisceau de N_0 photons traverse une substance d'épaisseur ℓ. Certaines particules sont absorbées ; il en reste un nombre N dans le faisceau tel que :

$$N = N_0 e^{-\mu \ell},$$

où μ est un coefficient d'atténuation caractéristique du matériau traversé.

1/ C2 On appelle épaisseur de demi-atténuation et on note ℓ_0 l'épaisseur au bout de laquelle 50 % des photons ont été absorbés. Exprimer ℓ_0 en fonction de μ.

2/ B3 Déterminer l'épaisseur d'un écran en plomb nécessaire pour absorber 95 % de l'intensité d'un faisceau de photons, sachant que $\ell_0 = 3$ mm.

3/ B3 Un faisceau monochromatique de photons γ traverse un écran de fer de 10 cm d'épaisseur. Le coefficient d'atténuation massique μ/ρ du fer est alors égal à $4{,}14 \cdot 10^{-3}$ cm^2 . g^{-1}. Quel est le pourcentage d'atténuation du faisceau après la traversée de l'écran ?

Donnée : $\rho = 7{,}7$ g . cm^{-3}.

Détermination du volume sanguin

24.16 La découverte de la radioactivité artificielle a permis d'associer à chaque élément un certain nombre de radio-isotopes possédant les mêmes propriétés chimiques que l'élément stable. Ces radioéléments sont souvent utilisés en médecine.

1/ A On obtient du sodium 24 en bombardant par des neutrons du sodium $^{23}_{11}$Na. Écrire la réaction de formation du sodium 24.

2/ A Le sodium 24 est radioactif par émission β^- et sa période est de 15 h. Écrire l'équation de désintégration du sodium 24.

3/*a*/ B3C1 On injecte dans le sang d'un individu 10 cm^3 d'une solution contenant initialement du sodium 24 à la concentration de 10^{-3} mol . ℓ^{-1}. Quel est le nombre de moles de sodium 24 introduites dans le sang ? Combien en restera-t-il au bout de 6 h ?

b/ B3C2 Au bout de 6 h, on prélève 10 cm^3 de sang du même individu. On trouve alors $1{,}5 \cdot 10^{-8}$ mol de sodium 24. En supposant que le sodium 24 est réparti uniformément, calculer le volume sanguin.

↳ **cours 23.6.**

Technique de la tomographie

24.17 « La tomographie par émission de positons est une technique qui permet de visualiser avec une grande netteté la concentration dans l'organisme de substances marquées par des isotopes radioactifs qui se désintègrent en émettant un positon, ou électron positif ^0_1e. Le positon émis se combine immédiatement avec un électron $^0_{-1}e$ et les deux particules s'annihilent mutuellement avec émission de deux photons γ. Ces deux photons γ, de parcours diamétralement opposés, traversent les tissus environnants et sont enregistrés à l'extérieur du sujet. Un ordinateur, relié aux détecteurs, reconstruit rapidement la répartition spatiale de la radioactivité à l'intérieur du sujet et l'image résultante apparaît sur l'écran d'un oscilloscope cathodique. Par exemple, on fait respirer au patient de l'air contenant des traces de monoxyde de carbone, marqué au carbone 11, qui se lie à l'hémoglobine pour former de la carboxy-hémoglobine ; ainsi, on peut déterminer le volume sanguin des différentes régions cérébrales. »

1/ A On produit le carbone 11 en bombardant un noyau de bore $^{10}_5$B par des protons. Écrire l'équation de la réaction.

2/ A Le carbone 11 obtenu est émetteur de positons. Écrire l'équation de la réaction nucléaire correspondante. Quel est le nom donné à ce type de radioactivité ?

3/ C2 L'atome de carbone 11 est combiné à l'oxygène pour former du monoxyde de carbone. Montrer que cette molécule est émettrice de positons.

4/ C2 Le positon émis perd la plus grande partie de son énergie cinétique après la traversée de quelques millimètres de tissu vivant. Il est alors pratiquement au repos et il devient susceptible de réagir avec un électron, considéré lui aussi au repos. Il y a annihilation des deux particules et formation de deux photons γ de haute énergie, selon l'équation :

$$^0_1e + {}^0_1e \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2.$$

a/ Comparer les directions dans lesquelles sont émis les deux photons.

b/ Calculer l'énergie et la longueur d'onde de chaque photon.

c/ Est-il possible de n'observer la formation que d'un seul photon ?

5/ AB3 Le carbone 11 a une période de 20 min. Quelle est la valeur de sa constante radioactive ? Au bout de combien de temps 90 % du carbone 11 introduit a-t-il disparu ?

↳ **cours 21.2, 23.6.**

Réactions nucléaires spontanées et provoquées

24.18 L'indium naturel contient 4,3 % de $^{113}_{49}$In et 95,7 % de $^{115}_{49}$In. On irradie un échantillon pendant plusieurs heures à l'aide de neutrons. L'échantillon, devenu radioactif, est placé dans une enceinte. Au bout d'environ un quart d'heure, on commence les mesures à l'aide d'un détecteur à scintillations et d'un ensemble de comptage. Ce dernier se fait sur une durée d'une minute toutes les dix minutes. Soit N le nombre d'impulsions lues. On obtient les résultats suivants :

t (min)	0	10	20	30	40	50	60
N	3700	3295	2900	2530	2225	1950	1720

1/ B3 Représenter graphiquement ln N en fonction de t.

2/ B3 En déduire la période radioactive de l'échantillon.

3/ C2 Écrire la réaction nucléaire provoquée par l'action d'un neutron sur chaque isotope naturel de l'indium.

↳ **cours 23.6, ex. 23.30.**

Analyse de texte

24.19 « Les étoiles de la première génération, qui ne renfermaient que de l'hydrogène et de faibles quantités d'hélium, devaient être constituées d'une boule de gaz qui se contractait du fait de sa propre gravitation et dont le centre s'échauffait avec la transformation de l'énergie gravitationnelle en chaleur. L'élévation de la température accé-

Scanné avec CamScanner

lère le mouvement des particules au cœur des jeunes étoiles et entraîne des collisions plus violentes. A quelques milliers de kelvins, les électrons sont arrachés des atomes, laissant des nuées de protons (noyaux d'hydrogène) qui s'entrechoquent sans répit. A près de 10 millions de kelvins, deux protons qui se rencontrent fusionnent ; chacun est porteur d'une charge positive, mais en fusionnant ils émettent un positon, particule élémentaire à charge positive qui est l'antiparticule de l'électron, et l'un des protons se transforme en un neutron. La combinaison d'un proton et d'un neutron forme un deutéron, le noyau d'un atome d'hydrogène lourd, le deutérium. En heurtant un autre proton, le deutéron peut s'y fixer pour donner le noyau d'un atome d'hélium 3, qui est constitué de deux protons et d'un neutron. Deux de ces noyaux d'hélium 3 donnent en fusionnant un noyau d'hélium 4 composé de deux protons et de deux neutrons, et libèrent deux protons qui retournent dans la « marmite » stellaire.

Tout ce cycle a pour résultat de convertir quatre protons en un noyau d'hélium 4 et de produire de l'énergie. C'est la fusion nucléaire, le principe même de la bombe à hydrogène. »

1/*a*/ A Qu'est-ce qu'un positon ?

b/ B1 A quoi est due l'élévation de température dans le gaz constituant les étoiles de première génération ?

c/ B1C2 D'où proviennent initialement les protons qui sont mis en jeu dans les réactions nucléaires ?

2/ B1C1 Écrire et équilibrer les différentes équations nucléaires décrites dans le texte et conduisant à la formation d'hélium 4 :

a/ formation d'un deutéron ;
b/ formation d'un noyau d'hélium 3 ;
c/ formation d'un noyau d'hélium 4 ;
d/ bilan global du cycle.

3/ C2 Dans une étoile, on trouve aussi des noyaux de carbone. Ceux-ci sont utilisés comme point de départ d'une autre chaîne de réactions nucléaires. Cette chaîne de réactions s'appelle le cycle C.N.O. C'est un cycle comprenant six réactions nucléaires. Le carbone $^{12}_{6}C$ qui est utilisé comme réactif initial réapparaît à la fin du cycle quand un noyau d'hélium est formé.

a/ Compléter les bilans des six réactions nucléaires suivantes qui interviennent dans ce cycle. (On ne tiendra pas compte des neutrinos et des antineutrinos.)

$$^{12}_{6}C + \ldots \rightarrow {}^{13}_{7}N$$
$$^{13}N \rightarrow {}^{13}C + \ldots$$
$$^{13}C + \ldots \rightarrow {}^{14}N$$
$$^{14}N + \ldots \rightarrow {}^{15}_{8}O$$
$$^{15}O \rightarrow {}^{15}N + \ldots$$
$$^{15}N + {}^{1}_{1}H \rightarrow {}^{12}C + \ldots$$

b/ Montrer que le bilan global de ce cycle est identique à celui du cycle proton-proton vu à la question 2.

↳ **cours 24.4.**

Scanné avec CamScanner

RADIOACTIVITÉ

Conseils de résolution

Pour équilibrer une réaction nucléaire, respecter les lois de conservation :
— du nombre de nucléons (nombre de masse) ;
— de la charge (nombre de charge).
Au cours d'une réaction nucléaire, le défaut de masse entre le noyau père et les produits de la réaction correspond à l'énergie cinétique qui a été transférée (essentiellement) aux particules de masse très petite.
Dans certains cas, des particules de masse nulle (photons γ et neutrons) apparaissent également.
La mesure des activités A_1 et A_2 d'une substance radioactive à deux dates différentes t_1 et t_2 permet de calculer la constante λ, la période T, puis le nombre moyen de noyaux radioactifs :

$$A_1 = \lambda \overline{N}_0 e^{-\lambda t_1} \quad \text{et} \quad A_2 = \lambda \overline{N}_0 e^{-\lambda t_2}.$$

Par suite :

$$\frac{A_1}{A_2} = e^{\lambda (t_2 - t_1)},$$

ce qui équivaut à :

$$\ln \frac{A_1}{A_2} = \lambda (t_2 - t_1).$$

Réciproquement, si on connaît λ, les mesures de A_1 et A_2 permettent d'estimer la durée $t_2 - t_1$ (datation).
Ces calculs simples ne sont valables que si la substance ne contient qu'un seul nucléide radioactif.

Problème résolu 1

Loi de décroissance radioactive

Le polonium 212 se désintègre avec une période T de 200 min. Un échantillon de matière a une activité de $6{,}1 \cdot 10^8$ Bq (désintégrations par seconde) due à la présence de ce nucléide.

1/ Calculer la constante radioactive du polonium.

2/ Quel est le nombre moyen de noyaux radioactifs présents dans cet échantillon à l'instant où l'on mesure son activité ?
Quelle est la masse de polonium 212 correspondante ?
Donnée : $M(\text{Po}) \approx 212$ u.

3/ Combien restera-t-il de noyaux radioactifs après 12 heures ? après 8 jours ? Quelles seront alors les activités de l'échantillon ?

1/ La période T est reliée à la constante radioactive λ par la relation :

$$\lambda T = \ln 2 \approx 0{,}693.$$

Par suite :

$$\lambda = 3{,}46 \cdot 10^{-3} \text{ min}^{-1} = 5{,}78 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}.$$

A1.2 Connaissance de la formule, bonne utilisation de l'unité.

B3.2 Calcul numérique.

2/ La loi de désintégration radioactive donne le nombre moyen de noyaux radioactifs présents à l'instant t :

$$\overline{N} = \overline{N}_0 e^{-\lambda t}.$$

L'activité de l'échantillon est égale à :

$$A = -\frac{d\overline{N}}{dt} = \lambda \overline{N}.$$

A l'instant $t = 0$ de la mesure :

$$A_0 = \lambda \overline{N}_0,$$

soit :

$$\overline{N}_0 = \frac{A_0}{\lambda} = \frac{6{,}1 \cdot 10^8}{5{,}78 \cdot 10^{-5}} = 1{,}06 \cdot 10^{13}.$$

Donc :

$$M = \frac{212 \overline{N}_0}{6{,}02 \cdot 10^{23}} = 3{,}7 \cdot 10^{-9} \text{ g}.$$

La mesure de l'activité permet donc de doser, dans un échantillon de matière, une quantité infime d'un élément lorsque celui-ci est radioactif.

A1.3 Définition de l'activité.

A2.3 Savoir-faire théorique pour les calculs de $\overline{N}_0$ et m.

B3.3 Application numérique.

3/ A la date t, l'activité de la substance est :

$$A(t) = \lambda \overline{N}(t) = \lambda \overline{N}_0 e^{-\lambda t}.$$

Pour $t = 12$ h :

$$\overline{N} = 8{,}78 \cdot 10^{11}; \quad A = 5{,}06 \cdot 10^7 \text{ Bq}.$$

Pour $t = 8$ jours :

$$\overline{N} = 4{,}73 \cdot 10^{-5}.$$

La notion d'activité n'a plus alors de sens. Nous pouvons donc considérer qu'au bout de huit jours, il n'existe plus d'atomes radioactifs.

B3.4 Calculs numériques.

C1.2 Commentaire et interprétation du résultat.

Problème résolu 2

L'américium 241 est émetteur α. Le noyau fils correspondant est un noyau de neptunium (Np). Le noyau père est au repos dans le référentiel terrestre.

1/ Cas où le noyau de neptunium est obtenu à l'état fondamental.

a/ Écrire (en la justifiant) l'équation de désintégration d'un noyau $^{241}_{95}\text{Am}$.

b/ Calculer (en MeV . c^{-2}) le défaut de masse de la relation nucléaire. Sous quelle forme apparaît l'énergie correspondante ?

Données :
masse d'un noyau d'américium 241 : $m_1 = 241{,}004\,6$ u ;
masse d'un noyau de neptunium obtenu : $m_2 = 236{,}997\,0$ u ;
masse d'un noyau d'hélium 4 : $m_3 = 4{,}002\,5$ u.

Scanné avec CamScanner

c/ Parmi les particules produites, laquelle a la plus grande énergie cinétique ? Évaluer sa vitesse. (On justifiera la réponse.)

2/ Cas où le noyau de neptunium est obtenu dans un état excité. On observe alors l'émission d'un rayonnement γ.

a/ Justifier l'existence de ce rayonnement.
b/ L'énergie cinétique minimale des particules α émises est :

$$\mathcal{E}_{c_{\alpha\,min}} = 5{,}1 \text{ MeV}.$$

En déduire l'énergie maximale que pourrait avoir un photon γ.

1a/ Les particules α sont des noyaux d'hélium $^4_2$He. Soit Z et A le nombre de charge et le nombre de masse du noyau de neptunium. L'équation de désintégration s'écrit :

$$^{241}_{95}\text{Am} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^A_Z\text{Np} \ (+\gamma).$$

Mais, au cours d'une réaction nucléaire, il y a conservation du nombre de charge et du nombre de nucléons ; donc :

$$A + 4 = 241 \quad \text{et} \quad Z + 2 = 95.$$

Il s'ensuit que $A = 237$ et $Z = 93$.
L'équation de désintégration devient donc :

$$^{241}_{95}\text{Am} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^{237}_{93}\text{Np} \ (+\gamma).$$

A1.2 Connaissance des lois.

B2.1 Langage correct.

A2.2 Établissement de la formule.

b/ Le défaut de masse de la réaction nucléaire est égal à :

$$\Delta m = m(\text{He}) + m(\text{Np}) - m(\text{Am})$$
$$= -0{,}0051 \text{ u}.$$

D'après la relation d'Einstein, à ce défaut de masse correspond une énergie :

$$\mathcal{E} = \Delta m \, . \, c^2 = -0{,}0051 \times 931{,}5 \approx -5{,}7 \text{ MeV}.$$

Le système de particules perd de l'énergie ($\mathcal{E} < 0$). « L'extérieur » reçoit alors de l'énergie, laquelle est transférée aux noyaux produits sous forme d'énergie cinétique.

A1.1 Unité employée pour le calcul de l'énergie.

A2.2 Savoir-faire pour le calcul.

B2.1 Utilisation du français.

B3.1 Application numérique.

C1.1 Interprétation de l'énergie libérée.

c/ La plus grande partie de l'énergie cinétique est transférée au noyau d'hélium, de masse faible par rapport à celle du noyau fils. En appliquant le principe de conservation de la quantité de mouvement, on montre que :

$$\frac{\mathcal{E}_{c_\alpha}}{\mathcal{E}_c(\text{Np})} = \frac{m(\text{Np})}{m_\alpha}.$$

C1.3 Commentaire et interprétation du résultat.

2a/ Le rayonnement γ résulte de la désexcitation des noyaux de neptunium quand ils passent d'un niveau d'énergie quantifié à un autre.

A2.1

b/ L'énergie libérée ($-\mathcal{E}$) se répartit maintenant sous forme d'énergie cinétique, laquelle est transférée essentiellement à la particule α, avec apparition d'un photon γ d'énergie $\mathcal{E}_\gamma$:

$$-\mathcal{E} \approx \mathcal{E}_{c_\alpha} + \mathcal{E}_\gamma.$$

D'où : $$\mathcal{E}_\gamma \approx -\mathcal{E}_{c_\alpha} - \mathcal{E}.$$

Lorsque $\mathcal{E}_{c_\alpha}$ est maximale, l'énergie $\mathcal{E}_\gamma$ est maximale.
Numériquement, l'énergie maximale que pourrait avoir un photon γ est donc :

$$\mathcal{E}_\gamma = -5{,}1 + 5{,}7 = 0{,}6 \text{ MeV}.$$

A2.2 Savoir-faire théorique pour le calcul de l'énergie $\mathcal{E}_\gamma$.

B3.2 Application numérique.

Problème résolu 3

1/ *Sous l'action d'un neutron lent, un atome d'uranium ^{235}U subit la fission suivante :*

$$^{235}_{92}\text{U} + {}^1_0 n \rightarrow {}^{91}_{Z_1}\text{Zr} + {}^{A2}_{58}\text{Ce} + 3\,{}^1_0 n + 6\,{}^0_{-1}\text{e}.$$

a/ *Exprimer les lois de conservation. Déterminer Z_1 et A_2.*
b/ *Expliciter l'unité de masse atomique. Calculer en* MeV *l'énergie de liaison par nucléon de $^{235}_{92}$U.*

2/ *Il existe un autre isotope de l'uranium : ^{239}U, radioactif β^-.*

a/ *Par deux désintégrations spontanées successives, il donne $^{A_3}_{Z_3}$Pu. Déterminer A_3 et Z_3.*

b/ *La première désintégration a pour période $T = 25$ min. Rappeler la définition de la période radioactive ou demi-vie. Soit $\overline{N}_0$ le nombre initial de noyaux radioactifs et $\overline{N}$ le nombre de noyaux de restant au bout de* 125 min. *Calculer la proportion $\dfrac{\overline{N}}{\overline{N}_0}$ de noyaux ^{239}U restant après* 125 min.

1a/ Au cours d'une réaction nucléaire, il y a conservation du nombre de charge Z et du nombre de masse A :

$$92 + 0 = Z_1 + 58 + 3 \times 0 + 6 \times (-1),$$

d'où : $$Z_1 = 40 ;$$

et :

$$235 + 1 = 91 + A_2 + 3 \times 1 + 6 \times 0,$$

d'où : $$A_2 = 142.$$

A1.2 Connaissance des lois de conservation.

A2.2 Détermination de A et Z.

b/ L'unité de masse atomique (u) est le douzième de la masse d'un atome de carbone $^{12}_6$C :

$$1 \text{ u} = \frac{1}{12} \times \frac{12 \, . \, 10^{-3}}{6{,}022 \, . \, 10^{23}} \approx 1{,}66 \, . \, 10^{-27} \text{ kg}.$$

L'énergie de liaison d'un noyau $^A_Z X$ est :

$$\mathcal{E}_\ell = [Z \ m_p + (A - Z) m_n - m_X] c^2.$$

L'énergie de liaison par nucléon est $\dfrac{\mathcal{E}_\ell}{A}$.

A1.4 Définitions de l'unité de masse atomique et de l'énergie de liaison ; unité.

Scanné avec CamScanner

Ainsi, pour $^{235}_{92}U$:

$$\frac{\mathcal{E}_\ell}{A} = \frac{1}{235}[92 \times 1{,}007\,28 + (235 - 92) \times 1{,}008\,66 - 234{,}993\,4] \times 931{,}5$$

$$\frac{\mathcal{E}_\ell}{A} = 7{,}589\,70 \text{ MeV}.$$

B3.2 Application numérique.

2*a*/ Écrivons le bilan global :

$$^{235}_{92}U \rightarrow {}^{A_3}_{Z_3}Pu + 2\,{}^{0}_{-1}e + 2\,{}^{0}_{0}\bar{\nu}.$$

A2.3 Savoir-faire.

D'après les règles énoncées en 1*a*/ :

$$A_3 = 239, \quad 92 = Z_3 - 2,$$

d'où : $Z_3 = 94$.

b/ On appelle période radioactive la durée au bout de laquelle la moitié des noyaux initiaux se sont désintégrés.
Rappelons la loi de décroissance radioactive :

A1.2 Définition de la période.

A2.1 Savoir-faire théorique.

B3.2 Application numérique.

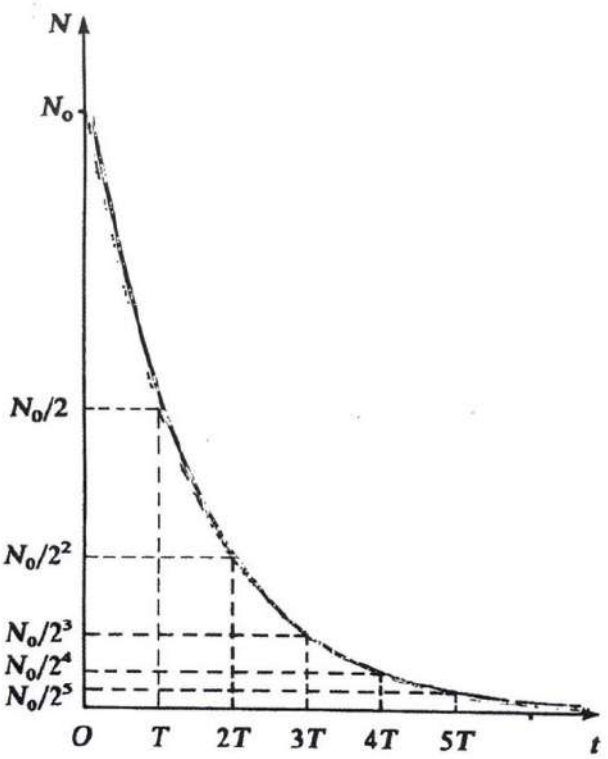
Or $t = 125$ min $= 5$ T ; d'où :

$$\overline{N} = \overline{N}_0 e^{-\frac{\ln 2}{T} \cdot 5T} = \overline{N}_0 e^{-5 \ln 2}$$

$$= \overline{N}_0 e^{-\ln 2^5} = \overline{N}_0 \frac{1}{2^5};$$

donc : $\frac{\overline{N}}{\overline{N}_0} = \frac{1}{2^5} = 0{,}031\,25.$

B4.2 Support graphique.



Scanné avec CamScanner

RÉPONSES AUX EXERCICES

1.1 à 1.3 Consultez le professeur.
1.4 1/ $x_0 = 4$ m. 2/ $\vec{v} = 5\vec{i}$.
1.5 2/ $x = 10t + 5$.
1.6 1/ $x = 2t^2 - 8t + 2$; $v = 4t - 8$. 2/ $x = -6$ m.
3/ Accéléré pour $t > 2$ s.
1.7 1/ $a = -3{,}86$ m.s^{-2}. 2/ $t = 7{,}2$ s.
1.8 1/ $\vec{v} = (2t - 4)\vec{i}$; $\vec{a} = 2\vec{i}$. 2/ $\overrightarrow{OM_0} = 3\vec{i}$;
$\vec{v}_0 = -4\vec{i}$. 3/ $\overrightarrow{OM} = (t^2 - 4t + 3)\vec{i}$.
1.9 1/ $\overrightarrow{OM} = (3t + 2)\vec{i} + 4{,}9t^2\vec{j}$. 2/ $\vec{a} = 9{,}8\vec{j}$.
3/ $\overrightarrow{OM_0} = 2\vec{i}$; $\vec{v}_0 = 3\vec{i}$. 4/ $\overrightarrow{OM} = 4{,}9t^2\vec{j} + (3t + 2)\vec{i}$.
1.10 2/ 40 Hz; $2{,}5 \cdot 10^{-2}$ s; 251,3 rad.s^{-1};
50,3 m.s^{-1}; $a_N = 12\,633$ m.s^{-2}.
1.11 1/ $\alpha = 2t^2$; $\omega = 4t$; $v = 1{,}2t$. 3/ $\beta = 45°$.
1.12 Phase 1 : $x_1 = 10t$; phase 2 : $x_2 = 200$;
phase 3 : $x_3 = -20t + 200$.
1.13 1/ $\overrightarrow{OM} = (4t + 4)\vec{i} + (8t - 2)\vec{j}$.
2/ $y = 2x - 10$.
1.14 1/ $x = d\sqrt{3}$.
1.15 1/ $v = -10t + 30$; $\vec{a} = -10\vec{i}$; $v_0 = 30$ m.s^{-1}.
2/ $t > 3$ s accéléré. 3/ $x = 55$ m.
4/ $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$.
1.16 1/ $\vec{v} = (-6t + 10)\vec{i}$.
2/ $\overrightarrow{OM} = (-3t^2 + 10t + 5)\vec{i}$.
1.17 1/ $x_4 = 525$ m.
1.18 $x = 192$ m; $t = 16$ s.
1.19 $x = 262{,}5$ m.
1.20 3/ $x = 2t$; $y = 2t^2 + 3$. 4/ $y = \frac{x^2}{2} + 3$.
1.21 $R = 2500$ m; $v^2/R = 10$ g.
1.22 1/ $\omega_2 = 30$ rad.s^{-1}. 2/ $a = 0$ (courroie).
1.23 1/ $\omega = 7{,}29 \cdot 10^{-5}$ rad.s^{-1}.
3/ $v = 463$ m.s^{-1}; $a_N = 3{,}4 \cdot 10^{-2}$ rad.s^{-2}.
1.24 $v = 3$ m.s^{-1}; $a_T = 4$ m.s^{-2}; $a_N = 90$ m.s^{-2};
$\|\vec{a}\| = 90{,}1$ m.s^{-2}.
1.25 1560 tours en 16 min.
1.26 3/ $\alpha = -4{,}2$ rad.s^{-2}; $t = 30$ s.
1.27 2/ $a_1 \approx 1{,}65$ m.s^{-2}; $a_2 \approx 0{,}65$ m.s^{-2}.
3/ $d \approx 570$ m.
1.28 1/ Non. 2/ $a = 1{,}73$ m.s^{-2}.

2.1 à 2.4 Consultez le professeur.
2.5 1/ 0,5 m.s^{-2}. 3/ 250 J.
2.6 2/ $F = 2500$ N. 3/ $3 \cdot 10^6$ J; 25 kW.
4/ 25 kW; 50 kW.
2.7 1/ $a = 0{,}4$ m.s^{-2}. 2/ $-7{,}2$ m; 2,4 m.s^{-1};
$-11{,}5$ kW.
2.8 2/ 1,7 m.s^{-2}. 3/ $\beta = \frac{a}{2}$; G en O à $t = 0$.
4/ 2,7 m.s^{-1}.
2.9 2/ 3,47 m.s^{-2}. 3/ $R_x = 31$ N; $\beta = 10°$;
$R = 176$ N.
2.10 1/ 14 s. 2/ $T_1 = 4755$ N; $T_2 = 3285$ N;
$T_3 = 1815$ N. 3/ 19,7 kW.
2.11 1/ $v = [2g\ell(1 - \cos\alpha_0)]^{1/2}$;
$a_n = 2g(1 - \cos\alpha_0)$. 2/ $T_e = mg$;
$T = T_e(3 - 2\cos\alpha_0)$.
3/ $T = mg[3\cos\alpha - 2\cos\alpha_0]$.
2.12 1/ $v^2 = v_0^2 - 2gr(1 - \cos\theta)$.
2/ $R = mv_0^2/r + mg(3\cos\theta - 2)$. 3/ $v_0 \geqslant \sqrt{5gr}$;
$v_0^2 = gr$.
2.13 1/ $h \approx 65$ m. 2/ $F_1 = 2{,}27 \cdot 10^4$ N;
$F_2 = 1{,}76 \cdot 10^4$ N; $F_3 = 1{,}45 \cdot 10^4$ N.
3/ $\mathcal{P}_1 = 63\,504t$; $\mathcal{P}_2 = 1{,}235 \cdot 10^5$ W;
$\mathcal{P}_3 = -25\,357(t - 8{,}5) + 101\,430$; $W = 1{,}14 \cdot 10^6$ J.
2.14 1/ $\ell \approx 1{,}5$ m. 2/ Réaction change d'orientation. 3/ $v = 2$ m.s^{-1}.
2.15 1/ $a = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)$. 2/ $\alpha > 8{,}5°$.
3/ $a = 1{,}46$ m.s^{-2}.
2.16 1/ $R_x = -182$ N; $R_y = 1380$ N;
$R \approx 1392$ N; inclinée $\gamma = 7{,}5°$ avec la normale au plan incliné.
2 *a*/ $R' < R$; $\gamma' > \gamma$ avec R_x = cte.
2 *b*/ $a = 1{,}16$ m.s^{-2}; $T = 1{,}27 \cdot 10^3$ N;
$\mathcal{P} = 4{,}58$ kW.
2.17 1 *b*/ $v = 3t + 0{,}6$; $a = 3$ m.s^{-2};
$v = 0{,}6$ m.s^{-1}; $t = -0{,}2$ s. 2/ $\alpha = 17{,}4°$.
3/ $f = 0{,}18$ N; $\vec{R} = 1{,}84\vec{j} - 0{,}18\vec{i}$; $\beta = 5{,}6°$ par rapport à la normale au plan incliné; $\|\vec{R}\| = 1{,}85$ N.
2.18 1 *b*/ $a_2 = 2{,}04$ m.s^{-2}. 2/ $a_x = 1{,}54$ m.s^{-2};
$f = 0{,}33$ N.
2.19 1/ $a_N = 2g(\cos\theta - \cos\theta_0)$; $a_T = g\sin\theta$.
2/ $a_N = 0$; $a_T = 7{,}07$ m.s^{-2}. $a_N = 3{,}18$ m.s^{-2};
$a_T = 5$ m.s^{-2}; $a = 5{,}9$ m.s^{-2}; $a_N = 5{,}86$ m.s^{-2};
$a_T = 0$.
3/ $T = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_0)$; $T_1 = 0{,}71$ N;
$T_2 = 1{,}18$ N; $T_3 = 1{,}59$ N.
2.20 1/ $v_0 \geqslant [g\ell(3 + 2\cos\theta_0)]^{1/2}$. 2/ $v = (g\ell)^{1/2}$.
2.21 1/ $T_1 = \frac{m\ell}{2}\left[\frac{2g}{a} + \omega^2\right]$; $T_2 = \frac{m\ell}{2}\left[\omega^2 - \frac{2g}{a}\right]$.
2/ $T_2 > 0$; $\omega > \omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{a}}$; $\omega_0 = 4{,}4$ rad.s^{-1};
ω_1 : $T_1 = 17{,}6$ N; $T_2 = 9{,}3$ N. $\omega_2 < \omega_0$: $T_2 = 0$,
$T_1 = 6{,}7$ N.
2.22 1/ 38°4. 2/ $T = 0{,}625$ N.
2.23 $\theta_1 = 48°$;
$R = mg[3\sin\theta - 2\sin\theta_0] - 2mg\frac{\ell}{r}\sin\alpha$.
2.24 1/ $R = m\omega^2 r$. 2/ $\cos\theta = \frac{g}{r\omega^2}$; $\omega > \sqrt{\frac{g}{r}}$.
3/ Non : pour $\theta \to \frac{\pi}{2}$, $\omega \to \infty$.
2.25 1/ $v^2 = 2gr\sin\theta$; $v_B = 5$ m.s^{-1}.
2/ $R = 0{,}2$ N; $f = 0{,}012$ N.
2.26 1/ $x = v_0 t\cos\beta$; $y = v_0 t\sin\beta - \frac{gt^2}{2}\sin\alpha$;
$y = -\frac{1}{2}g\frac{\sin\alpha}{v_0^2\cos^2\beta}x^2 + x\tan\beta$.
2/ $v_0 = 1{,}2$ m.s^{-1}. 3/ $\alpha \approx 31°$.
2.27 1/ $t_0 < t < t_1$, uniformément accéléré vers le haut puis retardé vers le bas pour $t_1 < t < t_2$, puis accéléré vers le bas ($t > t_2$). 2/ $a = 1$ m.s^{-2};
$\ell = 2$ m; 1,85 N.

3.1 à 3.3 Consultez le professeur.
3.4 1/ $5{,}46 \cdot 10^{-7}$ N.kg^{-1}. 2/ $5{,}46 \cdot 10^{-9}$ N.
3.5 1/ 4 N.kg^{-1}; $3{,}5 \cdot 10^{-5}$ N.kg^{-1}.
3.6 3/ $a = 8{,}1$ m.s^{-2}; $v \approx 7540$ m.s^{-1}.
4/ $T \approx 1$ h 37 min.
3.7 2/ $(R + h)^3\omega^2 = g_0R^2$. 3/ $h \approx 36\,000$ km.
3.8 3/ $M_S \approx 2 \cdot 10^{30}$ kg.
3.9 1/ $\vec{a}_S = \vec{g}$; $\vec{a}_S = \vec{a}_A = \vec{g} + \vec{F}/m \Rightarrow \vec{F} = \vec{0}$.
3.10 1/ $d_T = 0{,}9$ d. 2/ Non.
3.11 $M_T \approx 6 \cdot 10^{24}$ kg.
3.12 $T \approx 1$ h 30 min; $v = 7{,}8$ km.s^{-1}.
3.13 2/ 7750 m.s^{-1}; 1 h 30 min. 3/ 2 min.
3.14 2 *a*/ $h = 2124$ km. 2 *b*/ 6842 m.s^{-1}.
2 *c*/ 5,5 m.s^{-2}.
3.15 1/ 7600 m.s^{-1}. 3/ $m_2 v_2^2/r = m_2 GM_T/r^2 + f$.
22 N.
3.16 1/ $2{,}7 \cdot 10^{-3}$ m.s^{-2}. 2 *a*/ 1018 m.s^{-1}.
2 *b*/ $T \approx 27{,}4$ j.
3.17 2/ $M_M/M_S = 3{,}2 \cdot 10^{-7}$.
3.18 2 *a*/ $2{,}4 \cdot 10^{-14} h^2$.km^{-3}. 2 *b*/ $1{,}9 \cdot 10^{27}$ kg.
3.19 Consultez le professeur.
3.20 2/ $h_L = 1{,}6$ mm. 3/ $L = 40 \cdot 10^6$ m;
$R_T = 6370$ km; $d = 382\,200$ km; $v = 1017$ m.s^{-1}.
4/ $\alpha = 2{,}7 \cdot 10^{-6}$ rad; $AB = 1{,}36$ mm.
3.21 Consultez le professeur.

4.1 à 4.3. Consultez le professeur.
4.4 1/ $v_0 = 17{,}8$ m.s^{-1}. 2/ $\Delta t = 3{,}5$ s.
4.5 3/ $x = 3{,}81$ m; $t \approx 1{,}52$ s.
4.6 2/ $\dot{z}_C^2 = v_A^2\sin^2\alpha + 2g(z_A - z_C)$.
4/ $z_S = z_A + v_A^2\sin^2\alpha/2g$.
4.7 1/ $u_{AB} = 9078$ V. 2/ $t = 57$ ns.
4.8 1/ 10^4 V.cm^{-1}. 2/ $y_S = 3{,}5$ mm;
$v = 1{,}06 \cdot 10^7$ m.s^{-1}. 3/ $O'P \approx 18$ cm.
4.9 3/ $x = v_0(\cos\alpha)t$;
$y = \frac{-qE}{2mv_0^2}(1 + \tan^2\alpha)x^2 + x\tan\alpha$; $z = 0$.
5/ $d \geqslant v_0^2 m\sin^2\alpha/|q|E$.
4.10 $v_0 = 50$ m.s^{-1}; $h = 40$ m.
4.11 2/ $\Delta z = 4{,}9$ m. 3/ $x = 24{,}7$ m.
4.12 2/ $\alpha_1 = 20{,}4°$; $\alpha_2 = 69{,}6°$. 3 *a*/ $h_1 = 560$ m;
$h_2 = 4033$ m. 3 *b*/ $t_1 = 21{,}3$ s; $t_2 = 57{,}4$ s.
4/ 300 m.s^{-1}.
4.13 2/ $v_0 = 13{,}2$ m.s^{-1}. 3/ $h_{max} = 6{,}2$ m;
$v_x = v_0\cos\alpha = 9{,}33$ m.s^{-1}. 4/ $v = 14{,}5$ m.s^{-1};
$v_x = 9{,}33$ m.s^{-1}; $v_y = 11$ m.s^{-1}; $\beta \approx 50°$.
4.14 1 *c*/ $v_0 \approx 9{,}1$ m.s^{-1}. 1 *d*/ $t = 1{,}1$ s.
2/ $y_C = 2{,}8$ m; le panier sera marqué.
4.15 2/ $v_1 = 7{,}8$ m.s^{-1}. 3/ $h_0 \approx 3{,}7$ m.
4/ $\ell = 5{,}1$ m.
4.16 1 *b*/ $F \approx 62$ N; $F = \frac{mg(1 - \cos\alpha)}{2 + \alpha}$.
2 *b*/ $\cos\beta = 2/3$; $\beta = 48°$.
4.17 2/ $\alpha = 81{,}6°$. 3/ $y_A - y_B = 3{,}4$ m.
4/ 77,8 m. Spectateurs en sécurité.
4.18 2/ 18156 V. 3/ $\Delta t = 57$ ns.
4.19 2/ 2560 V. 3/ $\Delta t = 3{,}35$ ns.
4.20 3/ $\mathcal{E}_C = 10^4$ eV; $v(^6Li^+) = 565{,}7$ km.s^{-1};
$v(^7Li^+) = 523$ km.s^{-1}.
4.21 3/ $\lambda = \frac{\ell Le}{dmv_0^2}$.
4/ $\lambda = 6{,}86 \cdot 10^{-4}$ m.V^{-1} $= 6{,}86 \cdot 10^{-2}$ cm.V^{-1};
$y = 3{,}43$ cm.
4.22 2 *b*/ $\frac{U}{U_0} < 2\frac{d^2}{\ell^2}$. 3/ $\tan\alpha = \frac{U}{U_0}\frac{\ell}{a}$;
$s = 56$ V.cm^{-1}; $y = 1{,}8$ cm pour $U = 100$ V.
4.23 1/ $v_0 = 4{,}47 \cdot 10^5$ m.s^{-1}.
2/ $U'/U = \frac{4d\tan\alpha}{L(1 + \tan^2\alpha)}$; $U' = 606$ V.
3/ $y_S = 29$ mm; à 6 mm environ du plateau supérieur.
4.24 1/ Plan xOy vertical contenant $\vec{v}_0$ et O.
2 *a*/ Mouvement uniforme. 2 *b*/ Sur la verticale passant par A_1. 3 *a*/ Mouvement uniformément accéléré. 3 *b*/ $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_y t$; même durée pour atteindre l'altitude maximale, sur l'axe Ox, même date puisque même durée pour redescendre.
4/ $v_0^2 = v_1^2 + 2gh$; au sommet de H_2, $\vec{v}_{S2} = (\vec{v}_2 \cdot \vec{i})\vec{i}$.

Scanné avec CamScanner

5.1 Cocher *b*.
5.2 1/ Non, $x=0$ ou $\neq 0$, $v=0$ ou $\neq 0$.
2 *a*/ $v_A=0$, $v_C<0$, $v_D=0$, $v_E>0$, $v_B=0$.
2 *b*/ $v_A>0$, $v_B=0$, $v_C<0$, $v_D=0$, $v_E>0$.
2 *c*/ $v_A>0$, $v_B=0$, $v_C<0$, $v_D=0$, $v_E>0$.
3/ ω dépend de k et m. 4/ Conditions initiales différentes. 5/ *b*, *a*, *c*.
5.3 2/ $m_2<m_3<m_1$.
5.4 $a=0$: 1 et 3,4 ; $a>0$: 5 ; $a<0$: 2.
5.5 1/ 0,314 s ; 3,185 Hz ; 3 cm.
2/ $\dot{x}=3\omega\cos(\omega t+3\pi/4)$ avec $\omega=20$ rad.s^{-1} ;
$\ddot{x}=3\omega^2\cos\left(\omega t+\frac{5\pi}{4}\right)$. 3/ $(\ddot{x})_m=12$ m.s^{-2} ;
$(\dot{x})_m=0{,}6$ m.s^{-1}. 5/ $\mathcal{E}=0{,}018$ J.
5.6 5/ 1re cas : $x=2{,}5$ cm ; $-8{,}66$ cm.s^{-1}.
2e cas : $x=0$; -10 cm.s^{-1}. 3e cas : 2,5 cm ; 8,66 cm.s^{-1}.
5.7 1/ $\mathcal{E}_m=\frac{1}{2}kX_m^2=\frac{1}{2}m\omega^2X_m^2$. 2/ $V_m=\omega X_m$.
3/ $x=\pm X_m$. 4/ $\vec{F}=-m\omega^2x\vec{i}$.
5.8 $x_1=0{,}200\cos(5t)$ (en m) ;
$x_2=0{,}040\cos\left(5t+\frac{3\pi}{2}\right)$ (en m) ;
$x_3=0{,}100\cos\left(5t+\frac{\pi}{2}\right)$ (en m) ;
$x_4=0{,}215\cos(5t-0{,}380)$ (en m) ;
$x_5=0{,}224\cos(5t+3{,}605)$ (unités S. I.).
5.9 1 *b*/ $k=25$ N.m^{-1}. 2 *b*/ $\ddot{y}+\omega^2y=0$.
2 *c*/ $y=2\cos(11{,}18t)$ (en cm).
5.10 2/ $\dot{x}=-x_0\omega\sin(\omega t)+\dot{x}_0\cos(\omega t)$.
3/ $\cos\varphi=x_0/X_m$; $\sin\varphi=-\dot{x}_0/(X_m\omega)$;
$X_m^2=\dot{x}_0^2/\omega^2+x_0^2$.
5.11 1 *c*/ $k=5{,}78$ N.m^{-1}. 2 *c*/ $x=5\cos\omega t$; $\omega=5{,}38$ rad.s^{-1}.
5.12 1/ $\vec{v}=-0{,}5\vec{i}$. 3/ $\mathcal{E}_m=0{,}01875$ J ; $X_m=6{,}12$ cm. 4/ $x=-6{,}12\sin(8{,}165t)$ (en cm).
5.13 1/ $x=10\cos(36{,}5t)$ (en cm).
2/ $x=10\cos(36{,}5t+\pi)$ (en cm).
5.14 1/ $x=\frac{-4}{\pi}\sin(10\pi t)$ (en cm). 2/ $x=0$; $\dot{x}=-40$ cm.s^{-1}.
5.15 1/ $T_0=2$ s. 2/ $x=11{,}1\cos(3{,}162t-0{,}443)$ (en cm). 3/ $\mathcal{E}_m=6{,}16\cdot10^{-3}$ J.
5.16 4/ $\mathcal{E}_m=4{,}42\cdot10^{-3}$ J.
5.17 1 *a*/ $v_0=\pm0{,}271$ m.s^{-1}.
1 *b*/ $x_M=\pm2{,}959$ cm.
2/ $x=2{,}959\cos(\omega t+0{,}828)$ (en cm).
5.18 2/ $x_m=2$ cm. 3/ $k=1$ N.m^{-1}.
4/ $\mathcal{E}_c(-2)=0$; $\mathcal{E}_c(0)=2\cdot10^4$ J. 5/ $v=0{,}17$ m.s^{-1}.
5.19 1/ $v_1=3{,}162$ m.s^{-1}. 2/ $v_G=0{,}632$ m.s^{-1}.
3/ $x_m\approx4{,}5$ cm.
5.20 1/ $X_m=1$ cm ; $T=0{,}2$ s ; $X=1{,}5$ cm ; $\left(\frac{m_1}{m}\right)\approx1{,}96$. 2/ $v_0=0{,}314$ m.s^{-1} ;
$x=0{,}01\cos(10\pi t)$ (en m). 3 *a*/ $f_1=f_2$.
3 *b*/ $\mathcal{E}_{p_6}=\mathcal{E}_{p_7}$. 3 *c*/ $\mathcal{E}_{c_7}=\frac{3}{2}k$; $\mathcal{E}_{m_7}=2k$.

6.1 à 6.5 Consultez le professeur.
6.6 5 *b*/ $5\cdot10^{-3}$ T ; 53°.
6.7 *b*/ 45° à gauche. *c*/ 45° à droite.
6.8 2/ 2 000 spires/m ; 0,3 A. 3/ $7{,}54\cdot10^{-4}$ T. 4/ Le même.
6.9 2 *b*/ $1{,}15\cdot10^{-5}$ T ; $B_r=2{,}3\cdot10^{-5}$ T.
6.10 Consultez le professeur.
6.11 2/ $2{,}51\cdot10^{-2}$ T.
6.12 2 *b*/ $\alpha=57°5$.
6.13 1/ $\vec{B}_C+\vec{B}_H=\vec{0}$; 16 mA. 2 *a*/ 60°.
2 *b*/ 120°.
6.14 $\theta=45°$.
6.15 2/ 16 cm de part et d'autre du centre. 3/ N = 200.
6.16 2 *a*/ 480 et 960 spires/m.
2 *d*/ $\mu_0\approx1{,}25\cdot10^{-6}$ S.I. $\approx k$.

7.1 à 7.6 Consultez le professeur.
7.7 4/ $p=5.17\cdot10^{-20}$ kg.m.s^{-1} ; $B=0{,}27$ T ; $v=3{,}1\cdot10^7$ m.s^{-1}.
7.8 7,1 cm ; 22,4 MHz.
7.9 1/ $\theta=\pi m/(eB)$. 2/ $v_2^2=v_0^2+\frac{2eU}{m}$. 4/ $U<0$; $T=2\theta$. 5/ $\mathcal{E}_{C_{max}}=\frac{1}{2}\frac{R_D^2e^2B^2}{m}$.
7.10 2/ $v>v_C$, vers le bas ; $v<v_C$: vers le haut. 3/ 10^5 m.s^{-1}.
7.11 1 *b*/ $7{,}53\cdot10^4$ m.s^{-1} ; 1 *c*/ $v_0'=v_0\sqrt{68/x}$.
2 *b*/ $R=26{,}6$ cm ; 2 *c*/ $R'=27{,}0$ cm ; $x=70$.
7.12 Voir le cours.
7.13 2/ 5,17 cm ; $3{,}25\cdot10^{-8}$ s.
3/ $1{,}55\cdot10^7$ m.s^{-1} ; $T'=T$.
7.14 2/ $v_0=5{,}93\cdot10^6$ m.s^{-1} ; $T=2{,}86\cdot10^{-8}$ s.
7.15 1/ $3\cdot10^5$ m.s^{-1}. 2/ $v_1=6\cdot10^5$ m.s^{-1} ; $U=3\,740$ V.
7.16 1 *a*/ 10^5 m.s^{-1}. 2/ $U_2=115$ V.
7.17 1 *b*/ $v'=0{,}0926$ v ; $\mathcal{E}_c'=\mathcal{E}_c$.
2/ $R'=R\sqrt{m'/m}$.
7.18 2 *b*/ $O_1O_2=2{,}04$ cm ; ^{79}Br en O_1.
3 *c*/ 77,2 % ($^{79}Br^-$) ; 22,8 % ($^{81}Br^-$).
7.19 1/ 500 eV ; $1{,}32\cdot10^7$ m.s^{-1}. 2 *d*/ 2,9 mT.
7.20 1 *a*/ 0,2 MeV. 1 *c*/ 4,5 cm. 2 *b*/ $R_n=\sqrt{n}R_1$.
3/ Nombre de passages : $118{,}8\approx118$; tours : ≈59 ; $\mathcal{E}_c=23{,}8$ MeV.
7.21 1/ 0,117 T. 2 *a*/ 2,51 µs. 2 *b*/ $2\cdot10^5$ Hz.
3/ $5\cdot10^6$ m.s^{-1}.

8.4 2/ 0,141 N ; 0,173 N ; 0,2 N ; 0,1 N.
8.5 (0,046 N, − 0,0053 N.m) ; (0,08 N, 0,016 N.m) ; (0,04 N, − 0,004 N.m) ; (0,08 N, 0 N.m).
8.6 2/ Flux maximal égal à $-2\cdot10^{-6}$ Wb.
8.7 Consultez le professeur.
8.8 1/ $1{,}31\cdot10^{-4}$ Wb ; $-7{,}54\cdot10^{-5}$ Wb ; $-1{,}51\cdot10^{-4}$ Wb ; $1{,}51\cdot10^{-4}$ Wb ; 0.
8.9 Consultez le professeur.
8.10 2/ $\alpha=8{,}6°$.
8.11 2/ 0,022 T.
8.12 1/ Relever A et C ; $BI\ell=mg\sin\alpha$.
2/ $\tan\alpha=BI\ell/mg$.
8.13 1 *b*/ $B=mg\tan\alpha/I\ell$; $B\approx0{,}19$ T.
2/ $a=1{,}392$ m.s^{-2} ; $v=0{,}646$ m.s^{-1}.
8.14 2/ $B\approx0{,}3$ T.
8.15 2/ 0,2 T. 3/ $\vec{F}=\vec{0}$.
8.16 2/ $\Phi=0$.
8.17 1/ $9{,}4\cdot10^{-3}$ T. 2/ 0,075 g.
8.18 2/ $|\mathcal{M}|=0{,}012$ N.m.
8.19 $\theta=21{,}8°$.
8.20 $\Phi=0$; $aBvt$; Ba^2 ; $aB[b+a-vt]$; $\Phi=0$.
8.21 Consultez le professeur.
8.22 *b*/ πBa^2 ; $-\pi Ba^2\cos\alpha$; $-\pi Ba^2$; 0. *c*/ $\Phi_T=N\Phi$. *d*/ Position 1.
8.23 2/ $\Phi=\frac{\mu_0N^2\pi a^2}{\ell}>0$.
8.24 1/ (1) face S ; (2) face N ; (3) face S.
4/ Moteur universel.
8.25 5/ Oui. 6/ Non.
8.26 1/ 1,8 N. 2/ 1,02 J. 3/ 21,4 kW.
8.27 1/ Position verticale. 2/ Cas *c*. 3/ $\alpha=15°$.

9.1 à 9.5 Consultez le professeur.
9.6 $e_m\approx4$ V.
9.7 2/ De E vers D. 3/ $\Phi=\Phi_0-\ell Bvt$. 4/ $e=B\ell v$. 6/ $e=96$ mV ; $F=2{,}3\cdot10^{-3}$ N.
9.8 1/ $u_{CA}=B\ell v$. 2 *a*/ $u_{CA}=B\ell v$.
9.9 3/ $e_m=2545$ V.
9.10 1/ $\Phi=0$; $\Phi=aBvt$; $\Phi=Ba^2$; $\Phi=aB[3a-vt]$.
9.11 1/ $B_1=\mu_0ni_1$. 3/ $e_m=1{,}55$ mV ; $f=50$ Hz.
9.12 4/ $|U|=50$ mV.
9.13 $|q|=27{,}5$ mc.
9.14 1/ 157 mWb. 2/ $|e|\approx1{,}6$ V.
9.15 $|e|=6{,}28$ V ; 6,28 V ; 12,57 V ; 6,28 V ; 12,57 V.
9.16 1/ $|\Phi|=NSB|\sin\theta|$. 2/ $e_m=3{,}9$ V.
9.17 $e=\pm40$ V.
9.18 $e=-10$ V ou 0 V ; u_{AB} est égal à $+e$ ou $-e$ selon le sens de branchement.
9.19 $e=-9$ V ; 0 V ; $e=9$ V ; 0 V ; $u=\pm e$ selon le sens de branchement.
9.20 1/ $B=2{,}6\cdot10^{-3}$ I. 2/ $e=\pm0{,}325$ V.
9.21 1/ $1{,}67\cdot10^{-2}$ T. 2/ $|\Phi|=0{,}42$ mWb.
3/ $e=\pm2{,}1$ V ou $\mp4{,}2$ V.
9.22 1 *a*/ $u_{AC}=-NSB\cos\theta\frac{dB_1}{dt}$. *b*/ $U_M=1{,}5$ V ; $T=2$ ms ; $\omega=1\,000\pi$ rad.s^{-1} ; $B_1=4{,}8$ mT.
2 *c*/ $B=0{,}01$ T.
9.23 1/ $I\approx8$ A. 2 *a*/ $\Phi=25{,}1$ mWb.
2 *b*/ $e_m=11{,}8$ V.

10.1 1 *a*/ $I\approx8$ A. 1 *b*/ $L\approx0{,}03$ H.
2 *a*/ 25,13 mWb. 2 *b*/ $e=11{,}8\sin(471{,}2t)$.
10.2 1/ 382 mA. 2 *c*/ 45°. 3 *a*/ 0,94 mWb.
4/ $e_{max}=11{,}8$ mV.
10.3 1/ $B_b=6{,}28$ mT. 2/ $\|\vec{B}\|=6{,}6$ mT ; $\alpha=17{,}7°$. 3 *b*/ $e=0{,}016\cos(4\pi t)$ (en V).

11.1 et 11.2 Consultez le professeur.
11.3 1/ $u_{AB}=L\frac{di}{dt}$. 2/ $U_1=LI_0/(2T)$. $U_2=-2U_1$.
11.4 3/ 80 mH ; 120 mH.
11.5 3/ $u_{AB}=-e$. 4/ $\mathcal{E}_m=0{,}08$ J.
11.6 1/ $L=0{,}013$ H. 2 *a*/ $I=0{,}9$ A.
3 *b*/ $t_d=\tau\ln9$. $\tau=0{,}64$ ms.
11.7 2/ $u_L=e_0-u_R$. 3/ $u_{AB}=0$, $t\gg\tau$.
11.8 1/ 1 mWb. 2 *a*/ ± 0,2 V. 2 *b*/ $u_{AB}=Ri-e$.
11.9 4/ $L=25$ mH.
11.10 6,3 mH.
11.11 1 mH.
11.12 1/ 3,16 mH. 2/ $|e|=0{,}24$ V.
11.13 1/ − 0,4 V ; 0 V ; 0,8 V. 2/ $u_{AB}=Ri-e$.
11.14 1 *c*/ $R=100\ \Omega$. 3 *a*/ 30 mH.
11.15 2/ $L=0{,}5$ H. 3/ $R=10\ \Omega$.
11.16 21 H.
11.17 Consultez le professeur.
11.18 Consultez le professeur.

12.1 à 12.3 Consultez le professeur.
12.4 3/ $q_A=50$ µc ; $\mathcal{E}_e=5.10^{-4}$ J.
12.5 1/ $T=0{,}02$ s. 2/ $i=-1{,}59\sin(314t)$ (en s).
3/ 1 mF. 4/ 0,0125 J.
12.6 1/ $5\cdot10^{-4}$ J. 2 *b*/ $q=50\cdot10^{-6}\cos(4\,000t)$ (en C). 2 *c*/ $\mathcal{E}_c=5\cdot10^{-4}\cos^2(4\,000t)$ (en J) ; $\mathcal{E}_b=5\cdot10^{-3}\sin^2(4\,000t)$ (en J).
12.7 1/ $8\cdot10^{-4}$ J. 2 *a*/ $u=40\cos(3\,140t)$ (en V).
2 *b*/ 0,1 H. 2 *d*/ $\mathcal{E}_c=4\cdot10^{-4}$ J ; $\mathcal{E}_m=4\cdot10^{-4}$ J.
12.8 1 *b*/ 2 µF. 2 *b*/ $q=6\cdot10^{-6}\cos(1\,000t)$ (en C).
12.9 2,62 mH et 3,04 µH.

Scanné avec CamScanner

12.10 1/ 20 µF et 10 mH. 2/ 616,4 Hz.
12.11 1/ 6,63 pF à 66,3 pF.
2/ 0,5 MHz $< f <$ 1,6 MHz;
104,5 kHz $< f <$ 330 kHz.
12.12 1/ 1 J. 2/ 2 A. 3/ 3 J et 3,46 A.
12.13 1/ $u = 20\cos(10^4 t)$ (en V);
$q = 20 \cdot 10^{-5}\cos(10^4 t)$ (en C); $i = -2\sin(10^4 t)$ (en A);
fréquence de l'énergie 3 180 Hz.
12.14 1/ 0,02 J. 2/ 0,004 J; 6,37 mW.
12.15 $U_m = 4{,}55$ V; $Q_m = 10^{-3}$ C.
12.16 1/ 4,8 µC. 2/ 14,4 µJ. 4/ 0,51 H.
5/ 7,54 mA.
12.17 1/ 75 µs. 2/ 0,71 mF. 3/ $\delta/\delta_0 = 0{,}04$.
12.18 1/ $T = 0{,}8$ ms. 2a/ $Q_0 = 0{,}2$ µC.
2c/ $2 \cdot 10^{-7}$ J.
12.19 2a/ $U_0 = 12$ V. 2b/ $\omega_0 = 316{,}3$ rad . s^{-1}.
12.20 2/ 0,04 H. 4/ $\mathcal{E} = 0{,}05$ J.
5/ $i = -1{,}57\sin(157t)$ (en A).

13.1 1/ $V_b = 1{,}9$ V. 2/ $0 < v_E < V_b$.
3/ $V_b < v_E < V_{cc}$.
13.2 $T = 2{,}5$ ms. 2/ $\tau = 1{,}14$ ms. 3/ $\tau = RC$;
$C = 0{,}24$ µF.
13.3 1/ $\tau = RC$. 2/ $\tau = 1{,}55$ s. 3/ $R \simeq 33$ kΩ.
13.4 1/ $\tau = 15{,}5$ s. 2/ $c = 3{,}3$ µF.
13.5 1/ $e_0 = u_c + RC\dfrac{du_c}{dt}$. 2/ $B = e_0$;
$A = -B = -e_0$; $\tau = RC$. 3a/ $\tau = 1$ s.
3b/ $u_c = 3$ V pour $\tau \simeq 0{,}7$ s.
13.6 1/ $B = e_0$; $A = V_b - e_0$; $\tau = RC$.
2a/ $\tau = 1{,}55$ s. 2b/ $u_c = (V_b - e_0)e^{-t/\tau} + e_0$.

14.1 à 14.4 Consultez le professeur.
14.5 (1 000 Ω, 0°); (500 Ω; $-\pi/2$); (1 000 Ω; $\pi/2$); (1 414 Ω; $\pi/4$); (1 118 Ω; $-26{,}6°$); (500 Ω; $\pi/2$); (1 118 Ω; 26,6°); (1 208 Ω; 24,4°).
14.6 1/ 17,68 V; 0,35 A. 2/ 50 Hz. 3/ $-\pi/4$.
4/ 50 Ω. 5/ $u = 25\sin(100\pi t' + \pi/4)$ (en V).
14.7 1/ $U_{m_2} = 20$ V; $U_{m_1} = 10$ V; $f = 833{,}3$ Hz;
$T = 1{,}2$ ms. 2c/ $-60°$.
3/ $u_1 = 10\cos(5\,236t)$ (en V);
$u_2 = 20\cos(5\,236t - 0{,}33\pi)$ (en V).
14.8 Première photo (3 V; 3 V; 33°; 760 Hz); deuxième photo (1 V; 8 V; $-100°$; $f \simeq 280$ Hz); troisième photo (8 V; 3 V; $\pm\pi$; 3333 Hz).
14.9 1/ 100 Ω; $a = 7$; 0,1 H; 0,2 µF.
2a/ 5 V; 35 V. 3a/ 3,5 V; 26,3 V; 22,7 V.
3b/ $-\pi/4$. 3c/ $\varphi_1 \simeq -45°$.
14.10 1/ 166 mA; 250 mA; 184 mA.
2/ $\omega_0 = \omega_2$; $I(\omega_0) = 250$ mA.
3/ $|\omega_3 - \omega_4| = 400$ rad . s^{-1};
4/ $LC\omega^2 \pm RC\omega - 1 = 0$.
14.11 1a/ 1 580 Hz; 100 Ω. 1b/ $\Delta f \simeq 150$ Hz;
10,5; 0,1 H; 0,1 µF. 1c/ 0.
2b/ 1 580 Hz; 6,3 cm. 3b/ 0,8 cm.
14.12 1a/ 0,02 s; 50 Hz; 4 V; 2,8 V;
0,1 A; 0,07 A; $-\pi/4$. 1d/ 40 Ω; 8,3 Ω;
0,09 H. 2a/ 0; 0,09 H. 2b/ $\simeq 8{,}6$ Ω.
14.13 3/ 35 V; 87°. 4/ 292 Ω; 1,3 µF;
0,09 H; 16,5 Ω.
14.14 1/ 33 Ω. 2/ 72,3°. 3/ $-72{,}3°$.
4/ $i = 0{,}3\sqrt{2}\cos(100\pi t - 1{,}26)$ (en V).
14.15 1/ 318 Ω 2/ $-\pi/2$. 3/ $\pi/2$.
4/ $i = 0{,}31\sqrt{2}\sin 100(\pi t + \pi/2)$ (en A).
14.16 1/ $u = 12{,}7\sqrt{2}\sin(800\pi t - \pi/2)$ (en V).
2/ $u = 1{,}2\sqrt{2}\sin(800\pi t + \pi/2)$ (en V).
14.17 2/ 802 Hz.
14.18 1/ 60 Ω; 0,6 H. 2/ 72°;
$i = 0{,}5\sqrt{2}\cos\omega t$ (en A);
$u = 100\sqrt{2}\cos(\omega t + 1{,}26)$ (en V).
14.19 1/ (1) condensateur; $r = R = 50$ Ω.
2a/ 320 Ω; 50 Ω; 59 Ω. 2b/ (1) C; (2) R;
(3) L, r; 0,1 H; 10 µF. 3a/ 1 000 rad . s^{-1};
159 Hz. 3b/ 0,24 A.
14.20 1/ (1), u_{Nm}; (2) u_{PM}. 2a/ 6 ms.
2b/ (1) ≡ A; (2) ≡ B. 2c/ 40 mA. 2d/ $-60°$.
3a/ 200 Ω. 3b/ 173,2 Ω; 5,5 µF.
14.21 2a/ 20 Ω. 2b/ $L \simeq 0{,}05$ H; 4,2 µF;
$a = 5{,}3$; $\Delta f = 67$ Hz; $f_2 = 323$ Hz.
14.22 1/ 90,2 Ω; 150 Ω; 160 Ω. 2/ $-53°$.
3b/ $\varphi_B = 24°$. 3c/ $f_1 \simeq 80$ Hz; 12,5 µF;
$L = 0{,}08$ H.
14.23 1b/ 2 763 rad . s^{-1}. 1b/ 440 Hz.
2/ 54,4 V; 12°. 3a/ $L = 26{,}4$ H.
14.24 1a/ 0,5 ms; 2 000 Hz. 1b/ 6,0 V;
4,2 V; 21 mA; 14,8 mA. 1c/ $\varphi = -1{,}1$ rad;
D dipôle (R, C) ou (R, L, C).
2/ $\omega_0 = 4\,300\,\pi$ radians; $C = 48{,}6$ nF;
$L = 110$ mH.
14.25 1b/ $U = 150$ V; $W = 0{,}045$ J. 3/ 10 ms;
100 Hz; 72°. 4a/ 1,3 H. 4b/ 93 Ω.

15.1 et 15.2 Consultez le professeur.
15.3 1/ 220 V; 1,7 A. 2/ 0,3 rad. 3/ 0,955.
4/ 373 VA. 5/ 357,2 W. 6/ 5 358 kWh.
15.4 1/ 0,945. 2/ 21,8 Ω. 3/ 20,6 Ω; 22,7 mH.
15.5 2/ 80 mW; 200 Ω. 3/ 8,5 mA; 14,4 mW;
0,425. 4/ 283 Ω.
15.6 1/ 30 Ω; 1,2 W. 2a/ 0,3 W. 2b/ 0,5.
2c/ 52 Ω; 165,5 mH. 3a/ 37,5 Ω;
$\tan\varphi = \pm 0{,}75$; ± 22,5 Ω. 3b/ 108 µF et 43 µF.
3c/ 0,768 W.
15.7 2/ 0,2 W; 0,4 VA. 3/ 0,5; ± 60°.
4/ 125 Hz; 250π rad . s^{-1}. 5/ 63,2 mA; 6,32 V.
6/ 0,6 W et $-0{,}2$ W.
15.8 1/ 1 100 VA; 990 W. 2/ 91 %; 90 W.
15.9 1/ 6 600 W. 2/ 0,33 A. 3/ 0,011.
15.10 10,1 µF; 75 W.
15.11 1/ 100 W. 2/ 0,9; 440 Ω; 0,58 H.
15.12 1/ 0,3. 2/ 43,5 W; 1 044 Wh.
15.13 1/ 215,7 Ω; 1 A; 156 W. 2/ 150 W;
6 W; 0.
15.14 1/ 36 W; 72 VA; 0,5; $r = 100$ Ω;
$L = 0{,}55$ H. 2/ $C' = 18{,}4$ µF; $P_{max} = 144$ W.
15.15 1/ $f = 506$ Hz. 2/ $C_1 = 1{,}1$ µF; $C_2 = 0{,}9$ µF.
15.16 1/ 3 140 rad . s^{-1}; 40 W; 20 Ω.
2/ 3 020 rad . s^{-1}; 3 270 rad . s^{-1};
3/ 250 rad . s^{-1}; $Q = 12{,}6$. 4/ $\cos\varphi = 1$; 0,707;
0,42.
15.17 1/ 6,3 V. 2/ 1,75 A. 3/ 11 W.
15.18 1/ $I = 36{,}4$ A. 2/ $\Delta U = 72{,}7$ V. 3/ 37,3 V.
4/ 66 %. 5/ $\Delta U' = 36{,}4$ V; 16,5 %.
15.19 1/ $Z \geqslant 110$ Ω; $C \leqslant 19{,}4$ µF et $R \geqslant 54{,}3$ Ω.
2/ $P_b/P_a = 2{,}5$.
15.20 1b/ 2 828,4 rad . s^{-1}.
2/ $\omega' = 2\,000$ rad . s^{-1}; $\omega'' = 3\,460$ rad . s^{-1}.
15.21 1/ 8,48 Ω; 45°; $I_m = 2{,}83$ A.
2b/ $R = 6$ Ω.
15.22 1/ $i = -4 \cdot 10^{-3}\sin(628t)$ (en A);
$u = -6\sin(628t + 0{,}628)$ (en V). 2/ 97 mW.
3/ u en avance sur i.
15.23 2b/ 0,56. 3a/ 80 W. 3b/ 50 W.
3c/ 12,5 Ω.

16.1 à 16.4 Vous vous reportez à la fiche expérimentale.

16.5 1/ $C = 1/\overline{OF'}$. 2/ $f' = 20$ cm; convergente; foyers invariants. 3/ $f' = -12{,}5$ cm; divergente. 4/ $C = -3$ δ; $f' = -33{,}3$ cm; divergente.
16.6 2/ $\overline{OF} = -5$; $\overline{OF'} = +5$; $\overline{OA} = -12$; le cm comme unité; 3d/ $\overline{OA'} \simeq 8{,}5$; $\overline{A'B'} = -1{,}4$.
5/ $\overline{A'B'} = -1{,}4$; $\overline{OA} = 8{,}6$.
16.7 1/ $\overline{OA'} = 13{,}3$ cm; $\overline{A'B'} = -3{,}3$ cm; réelle, agrandie et renversée. 2/ $\overline{OA'} = 7{,}5$ cm; $\overline{A'B'} = 5$ cm; virtuelle, agrandie et droite.
16.8 4/ $\overline{OF} = 50$ cm; $\overline{OF'} = -50$ cm;
$\overline{OA} = -25$ cm; $\overline{AB} = 5$ cm; $\overline{OA'} = -16{,}7$ cm;
$\overline{A'B'} = 3{,}3$ cm. 5/ Le faisceau émergent passe par B'.
16.9 1c/ $\overline{O_1A_1} = 6$ cm; $\overline{A_1B_1} = -2$ cm. 2c/ Virtuelle agrandie et renversée.
3/ $\overline{O_2F_2} = -5$ cm; $\overline{O_2F_2'} = 5$ cm; $\overline{O_2A_1} = -4$ cm;
$\overline{A_1B_1} = -2$ cm; $\overline{O_2A'} = -20$ cm; $\overline{A'B'} = -10$ cm.
16.10 1b/ $\overline{O_1A} = -20$ cm; $\overline{O_1F_1'} = 15$ cm;
$\overline{O_1A_1} = 60$ cm; $\overline{A_1B_1} = 15$ cm.
2d/ $\overline{O_2F_2} = +50$ cm; $\overline{F_1'F_2'} = -30$ cm;
$\overline{O_2A_1} = +25$ cm; $\overline{A_1B_1} = +15$ cm;
$\overline{O_2A'} = +50$ cm; $\overline{A'B'} = +30$ cm.
16.11 et **16.12** Voir p. 430.
16.13 et **16.14** Voir p. 430.
16.15 Image renversée, réelle, à 1 m derrière la lentille; $\gamma = -1$.
16.16 Image droite, virtuelle à 13,3 cm devant la lentille.
16.17 Convergente : image droite, réelle, à 36 cm après la lentille; $\gamma = -2$. Divergente : image droite, virtuelle, à 7,2 cm avant la lentille; $\gamma = 0{,}4$.
16.18 $\overline{OA'} = -20$ cm; $\gamma = 2$; image virtuelle droite.
16.19 $\overline{OA'} = -6{,}67$ cm; $\gamma = 0{,}66$; image virtuelle, droite.
16.20 1/ $\gamma = -4$; image réelle; $\overline{OA'} = 100$ cm; objet réel; $\overline{OA} = -25$ cm. 2/ $\gamma = +4$; image virtuelle; $\overline{OA'} = -60$ cm; objet virtuel; $\overline{OA} = -15$ cm.
16.21 Pour $\gamma = +5$. $\overline{OA} = 12$ cm; $\overline{OA'} = 60$ cm; image réelle; pour $\gamma = -5$, $\overline{OA} = 18$ cm; $\overline{OA'} = -90$ cm; image virtuelle.
16.22 1/ A_1B_1, objet virtuel; $A'B'$ image droite et réelle. 2/ $OA_1 = 1$ m; $\overline{OA'} = 10$ cm; $\gamma = 0{,}1$. L'écran est à 10 cm de O. 3/ $\overline{OA'} = -12{,}5$ cm; $\gamma = -0{,}125$; image réduite, renversée et virtuelle; $\overline{OA_1} = 1$ m.
16.23 1/ $C = 60$ δ. 2/ $C \simeq 64$ δ.
3a/ $\theta_0 = 4{,}8 \cdot 10^{-4}$ rad; 12 mm.
3b/ $\theta = 2{,}4 \cdot 10^{-4}$ rad; θ_0 : les phares ne sont pas séparés.
16.24 1/ $C = -0{,}8$ δ. 2a/ -1 δ. 2b/ $= 3$ δ.
3a/ 4,3 δ; 3b/ 16,7 cm.
16.25 1/ $f' = 5$ cm. 2/ $\overline{OA'} = -20$ cm; $\gamma = 5$;
$A'B' = 5$ cm. 3a/ $\theta' = 0{,}2$ rad. 3b/ $\theta = 0{,}04$ rad.
3c/ $G = 5$. 3d/ $A'B' = 1{,}25 \cdot 10^{-4}$ m.
$AB = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ m.
16.26 1/ $\overline{O_1A_1} = 6$ cm; $\overline{O_2A'} = -12$ cm; $\gamma = -12$
2/ Image virtuelle renversée à 18 cm en avant de O_2; $\gamma = -500$; $A'B' = 0{,}5$ mm.
3/ $\theta' = 2{,}25 \cdot 10^{-3}$ rad. 4/ $G = 625$.
16.27 1a/ Dans le plan focal image.
1b/ $\theta = A_1B_1/f_1$; $A_1B_1 = 7$ mm. 2b/ Au foyer F_2; $\theta' = 0{,}35$ rad $\simeq 20°$. 3c/ $G = f_1'/f_2'$.
3d/ $\theta' = 5°$.
16.28 2a/ $\overline{O_1A} = -20$ m; $\overline{O_1A_1} = 25{,}3$ cm;
$\overline{O_2A'} = 20$ cm; $\overline{O_2A_1} = 6{,}67$ cm; $\overline{O_1O_2} = 18{,}6$ cm.
2b/ $\gamma = 0{,}038$; $G = 3$; le grossissement.

Scanné avec CamScanner

16.11 et 16.12

$\overline{OA}$	nature	$\overline{OA'}$	nature	sens	grandeur
- 6 cm	réelle	3 cm	réelle	renversé	0,5 cm
- 4 cm	réelle	4 cm	réelle	renversé	1 cm
- 3 cm	réelle	6 cm	réelle	renversé	6 cm
- 2 cm	réelle	∞	indéterminée	—	∞ cm
- 1 cm	réelle	- 2 cm	virtuelle	droit	2 cm
2 cm	virtuelle	1 cm	réelle	droit	0,5 cm

16.13 et 16.14

$\overline{OA}$	nature	$\overline{OA'}$	nature	sens	grandeur
- 4 cm	réelle	1,33 cm	virtuelle	droit	0,33 cm
1 cm	virtuelle	2 cm	réelle	droit	2 cm
2 cm	virtuelle	∞ cm	indéterminée	—	∞ cm
3 cm	virtuelle	- 6 cm	virtuelle	renversé	2 cm
4 cm	virtuelle	- 4 cm	virtuelle	renversé	1 cm

16.29 2/ $C_2 = -3\ \delta$; $\overline{O_2F'_2} = -33{,}3$ cm.
3/ Diamètre de l'image donnée par L_1 : $D_1 = 2f_1\theta$;
$\gamma_2 = \dfrac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}} = \dfrac{100}{25} = 4$; $D' = \gamma_2 D_1 = 4$ cm.
16.30 C = 5,56; f = 18 cm.

17.1 à 17.3 Reportez-vous au cours.
17.4 Entre 28 mm et 29 mm.
17.5 $OA' = 105{,}7$ mm; $OA' = 105{,}1$ mm. Dans les deux cas $OA' \simeq f'$.
17.6 1/ $|\gamma| = \left|\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\right| = 1{,}69 \cdot 10^{-2}$. 2/ La photographie doit être prise en hauteur.
17.7 $\tan\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{\ell}{2f'}$;
$\ell = \sqrt{36^2 + 24^2} = 43$ mm $\Rightarrow \varphi_1 = 75°$; $\varphi_2 = 46{,}5°$; $\varphi_3 = 23°$. Le « grand angle » est l'objectif de 28 mm. Une lentille mince donnerait une mauvaise image (on n'est pas dans les conditions de Gauss).
17.8 $S = \pi f^2 D^2 / 4N^2$.

N		4	5,6	8	11	16
aire de	f = 28 mm	38,5	19,6	9,6	5,1	2,4
l'iris	f = 105 mm	541	276	135	72	34

L'aire diminue environ de moitié lorsqu'on passe d'un nombre d'ouverture au nombre immédiatement supérieur.
17.9 $S\tau$ = Cte; pour $N = 11$. $\tau = \dfrac{1}{250}$ s; pour $N = 5{,}6$, $\tau = \dfrac{1}{1000}$ s.
17.10 1/ Non, il faut $\tau \leqslant 1/60$ s. 2/ $N = 4$ et $\tau = 1/125$ s : 200 ISO; $\dfrac{\tau \times (\text{ISO})}{N^2} = \text{Cte}$;
2/ 800 ISO.
17.11 1/ $f = 10$ cm. 2/ L'éloigner de 2,5 mm; $OA' = 102{,}5$ mm. 3/ et 3/ 2,1 m et 1,77 m. Cette limite diminue.
17.12 1/ $\dfrac{F'A'_0}{f} = \dfrac{a}{D}$; $F'A'_0 = aN$.
2/ $\dfrac{1}{f + aN} + \dfrac{1}{\ell} = \dfrac{1}{f} \Rightarrow \ell \simeq \dfrac{f^2}{aN}$. 3/ $A'_0A'_1 \simeq aN$;
$\dfrac{1}{f' + 2aN} + \dfrac{1}{\ell_1} = \dfrac{1}{f'}$; $\ell_1 \simeq \dfrac{f'^2}{2aN}$; $\ell_1 = \ell/2$.
4/ $\ell = 7{,}6$ cm.

17.13 1/ Au foyer image, à 54 mm de l'objectif.
2/ $C = C_1 + C_2$; $C_2 = 0{,}5\ \delta$; $f = 2$ m; lentille convergente. 3/ $\dfrac{D}{a} = \dfrac{p'}{(p' - f)} \simeq \dfrac{f}{(p' - f)}$;
$p' = f + a \times 4{,}5 = 54{,}45$ mm; $p = 6{,}5$ m.
17.14 1/ $OA = 15{,}9$ m; $OA' = 10{,}6$ m.
2/ $\Delta t < 1{,}9$ ms; $\dfrac{v_0 \Delta t}{OA} = \dfrac{0{,}1 \cdot 10^{-3}}{f}$. 3 a/ $h \simeq 1$ mm; $\overline{OA'} \simeq f$. 3 b/ 29,8 cm; 8,4 mm.
Il permet d'agrandir l'image sans se rapprocher de l'objet.
17.15 1/ 4,4 mm environ. 2 a/ Image à 6 cm derrière la lentille divergente. 2 b/ 4 fois plus grande, soit environ 17,5 mm.
17.16 1 a/ $D = \varepsilon/OA'_2 \simeq \varepsilon/f$; $\varepsilon = fa/D = fN$.
2/ $1/f - 1/\overline{OA} = 1/(f + aN) - 1/\overline{OA_1}$;
$1/\overline{OA_1} = 1/\overline{OA} - aN/f^2$; $1/\overline{OA_2} = 1/\overline{OA} + aN/f^2$;
1/ $\overline{OA_2} = 1/\overline{OA} \pm 2{,}45 \cdot 10^{-2}$ N. 3a/ $|\overline{OA}| = 1$ m : $N = 2{,}8$ ($OA_1 = 93{,}6$ cm; $OA_2 \simeq 107{,}4$ cm; $A_1A_2 \simeq 14$ cm); $N = 5{,}6$ ($OA_1 \simeq 88$ cm; $OA_2 \simeq 116$ cm; $A_1A_2 = 28$ cm). 3 b/ $|\overline{OA}| = 5$ m : $N = 2{,}8$ ($A_1A_2 \simeq 4$ m); $N = 5{,}6$ ($A_1A_2 \simeq 13$ m).
17.17 $\tau = 1$ s pour $N = 2{,}8$ et 2 s pour $N = 4$.

18.1 Recherchez les réponses dans le cours.
18.2 R(656); B(480); K(410); J(589); I(450); V(546).
18.3 1/ Bleu + magenta; bleu + cyan.
2/ Aucune radiation; toutes les radiations.
18.4 3/ $\varphi = 0{,}45°$ et 1,28°. 4/ Le flint est plus dispersif que le crown.
18.5 $a = 1{,}74$; $B = 15652$ nm^2; $n_J = 1{,}78$.
18.6 2 b/ 1,52. 3 a/ $i = 61{,}1°$; $D = 62{,}2°$.
3 b/ 3,2°.
18.7 3 b/ $\sin\theta = 0{,}1638$ k; on obtient 6 spectres de part et d'autre de l'image centrale.
4/ $d_1 \simeq f'\theta_1 = \pm 7{,}4$ cm; $d'_2 \simeq f'\theta_2 \simeq 15$ cm.
18.8 2/ 5,5 cm $< \Delta d_1 <$ 10,5 cm environ; 11 cm $< \Delta d_2 <$ 22,7 cm.
18.9 1 a/ $\theta_v = 13{,}9°$; $\theta_R = 26{,}7°$. 1 c/ $\theta_J = 20{,}2°$; largeur de 10 cm du spectre.
18.10 1/ 589 nm. 3/ 443 nm; jaune.
18.11 1/ 0,31 cm. 2/ 1,02 cm.
18.12 500 traits par mm; 2 µm.
18.13 6,2 cm environ.
18.14 2/ 24,2 µm.
18.15 3 b/ $d_1 \simeq 6{,}1$ cm; $d_2 \simeq 13{,}1$ cm.
18.16 2/ $\Delta f' = 0{,}9$ cm. 3/ $\Delta f' = 1{,}9$ cm.
18.17 1/ $C_R = 2{,}09\ \delta$; $C_B = 2{,}16\ \delta$; $d = 1{,}6$ cm.
2/ $A_1 = 6{,}41$ m^{-1}; $A_2 = 1{,}85$ m^{-1}; $C_J = 2{,}10\ \delta$.

19.1 à 19.4 Consultez le professeur.
19.5 1/ 1,89 eV. 2/ $\lambda = 487$ nm. 3/ 2,86 eV. 4/ $\lambda = 1241/\mathcal{E}$.
19.6 1/ 487 nm. 2/ 653 nm; 434 nm; 411 nm. 3/ 365 nm.
19.7 3/ 91,3 nm. 4/ 365 nm; 657 nm. 5/ 85 nm.
19.8 1/ - 1,38 eV; - 3,03 eV; - 1,50 eV; - 1,94 eV; - 0,85 eV. 2/ Oui. 3/ Non. 4/ Oui. 5/ - 3,03 eV.
19.9 0,002 eV.
19.10 2/ $\nu_1 = \nu_3 - \nu_2$; $\nu_2 = \nu_5 - \nu_4$.
19.11 1 b/ Énergie d'ionisation 13,6 eV.
2 b/ 2,86 eV; 2,55 eV; 1,89 eV.
19.12 1/ 13,6 eV. 3 c/ 656 nm; 365 nm.
4 b/ Éjection d'un électron avec une énergie de 3,6 eV.
19.13 2/ $\Delta\lambda = 30{,}3$ nm. 3/ $\lambda = 79{,}6$ nm.
19.14 1/ 0,0116 eV. 2/ 1264,8 nm. 3/ 1,74 eV.
19.15 1/ $\lambda = 225$ nm. 2/ e^- d'énergie cinétique de 1,6 eV.
19.16 2/ $\lambda = 91{,}2$ nm; ionisation. 3/ 110 nm; 11,28 eV; non. 4/ 657 nm.
19.17 1/ 656,6 nm; 486,6 nm; 434 nm; 409,6 nm. 2/ Même spectre car même structure électronique.
19.18 et 19.19 Consultez le professeur.

20.1 et 20.2 Consultez le professeur.
20.3 1/ $\beta = 0{,}53$; $\gamma = 1{,}18$.
2/ $\mathcal{E}_c = 1{,}49 \cdot 10^{-14}$ J.
20.4 1/ $\beta = 0{,}933$; $\gamma = 2{,}785$.
2/ $\mathcal{E}_c = 1674$ MeV.
20.5 2/ $\mathcal{E} = 1500$ MeV; $\mathcal{E}_c = 562$ MeV.
3/ $v = 0{,}78$ c.
20.6 2/ $p = 1168$ MeV.c^{-1}. 3/ 0,78.
20.7 2/ $p = 0{,}866$ MeV.c^{-1}. 3/ $\gamma = 2$.
4/ 0,5 MV.
20.8 1/ $p = 3{,}05$ GeV.c^{-1}. 2/ $\beta = 0{,}987$; 5,86 GeV.c^{-1}.
20.9 et 20.10 Consultez le professeur.
20.11 a/ $v = 0{,}964$ c. b/ 919 MeV.c^{-1}; $v = 0{,}992$ c.
20.12 1/ $p = 2653$ MeV.c^{-1}.
2/ $p = 1{,}41$ MeV.c^{-1}.
20.13 $\beta = 0{,}707$.
20.14 1/ $\beta = 0{,}9974$. 2/ 0,45.
20.15 2/ $\mathcal{E}_{c_1} = 175$ MeV; $\mathcal{E}_{c_2} = 0{,}2$ MeV; $\mathcal{E}_{c_3} = 24{,}1$ MeV.
20.16 2/ 0,1 MeV.c^{-1}; 1,414 MeV.c^{-1}; 40,5 MeV.c^{-1}.
20.17 85 MeV; 540 MeV; 1441 MeV; 3645 MeV.

Scanné avec CamScanner

20.18 1/ $4{,}6 \cdot 10^{8}\ m \cdot s^{-1}$. 2/ $v = 0{,}89\ c$.
20.19 1/ $\beta = 0{,}14$. 2/ 1,47 %. 3/ 9,38 MeV et 1,4 MeV.
20.20 Consultez le professeur.
20.21 1/ $\beta = 0{,}115$. 2/ 0,67 %.
3/ 0,058 $MeV \cdot c^{-1}$ et 432 $MeV \cdot c^{-1}$.
20.22 2/ $U = 5\,000$ V. 3/ 1 343 $MeV \cdot c^{-1}$.
20.23 1/ $v_1' = v_2' = 0{,}707$ V.
2/ $v = 3{,}1 \cdot 10^{7}\ m \cdot s^{-1}$; $v' = 2{,}19 \cdot 10^{7}\ m \cdot s^{-1}$.
3/ $v = 2{,}4 \cdot 10^{8}\ m \cdot s^{-1} > c$ (impossible).
20.24 1/ Non relativistes. 2/ $\vec{v}_1' \perp \vec{v}_2'$ ou $\vec{v}_1' = \vec{0}$. 3/ 773 K; $7{,}7 \cdot 10^{9}$ K !

21.1 1 *a*/ (3) et (4) > 0; 1 *b*/ (1) > 0; (4) < 0; 1 *c*/ (1) > 0; (3) < 0; (4) > 0. 2/ et 3/ Reportez-vous au cours.
21.2 *a*/ Élastique. *b*/ et *c*/ Inélastiques. *d*/ Élastique.
21.3 Neutron et méson π^0.
21.4

1 944	900	510
2 158	911	1 068

$B = 1{,}625$.
21.5 1/ $\varepsilon = 0{,}6$ MeV; $\beta = 0{,}553$. 2/ $B = 5{,}8$ mT.
21.6 2/ $p_4 = 500\ MeV \cdot c^{-1}$; $p_3 = 1\,950\ MeV \cdot c^{-1}$; $p_1 = 2\,072\ MeV \cdot c^{-1}$.
21.7 $p_{4_x} \approx 771\ MeV \cdot c^{-1}$; $p_{4_y} \approx 771\ MeV \cdot c^{-1}$; $p_{2_x} = 1\,325\ MeV \cdot c^{-1}$; $p_{3_y} = -765\ MeV \cdot c^{-1}$; conservation vérifiée.
21.8 2/ $p_1 = 1\,972\ MeV \cdot c^{-1}$; $p_3 = 912\ MeV \cdot c^{-1}$; $p_4 = 518\ MeV \cdot c^{-1}$. 3/ $p_5 = 900\ MeV \cdot c^{-1}$.
21.9 1/ $p_{3_z} = 613\ MeV \cdot c^{-1}$; $p_{2_y} = -479\ MeV \cdot c^{-1}$; $p_{4_z} = 948\ MeV \cdot c^{-1}$; $p_{4_y} = 592\ MeV \cdot c^{-1}$; $p_{1_x} = 2\,090\ MeV \cdot c^{-1}$; $p_{1_z} = 0$. 2/ $p_{5_x} = 529\ MeV \cdot c^{-1}$; $p_{5_y} = 113\ MeV \cdot c^{-1}$; $p_5 = 541\ MeV \cdot c^{-1}$; $\alpha = 12°$.
21.10 La 2e hypothèse est la plus probable; $\Delta\mathcal{E} = -7$ MeV.
21.11 2/ $\mathcal{E} = 3\,129$ MeV. 3 *a*/ + e.
3 *b*/ $\mathcal{E}_4 = 2\,560$ MeV; $\mathcal{E}_3 = 569$ MeV; $\mathcal{E}_{00} = 138$ MeV; $m = 138\ MeV \cdot c^{-2}$. 4/ $\Delta\mathcal{E}_c = -138$ MeV.
21.12 1/ $\mathcal{E}_1 = 2\,251$ MeV.
2/ $p_3 = 1\,334\ MeV \cdot c^{-1}$; $p_4 = 1\,245\ MeV \cdot c^{-1}$. 4/ (3) proton et (4) un antiproton. $\Delta\mathcal{E}_c$ (classique) = −457 MeV; en relativité $\Delta\mathcal{E}_c = -1$ MeV.
21.13 1re hypothèse; $\Delta\mathcal{E} = -13$ MeV.
21.14 1/ $p_2' = 1\,954\ MeV \cdot c^{-1}$; $p_{2_x}' = 1\,911\ MeV \cdot c^{-1}$; $p_{2_y}' = +409\ MeV \cdot c^{-1}$; $p = 12°$; $\Delta\mathcal{E}_c = -150$ MeV. 2/ $|\Delta\mathcal{E}| = 3$ MeV; conservation de l'énergie.
21.15 1/ $p_1 = 2\,090\ MeV \cdot c^{-1}$; $q_3 = q_4 = e$; $p_3 = 778\ MeV \cdot c^{-1}$; $p_4 = 1\,118\ MeV \cdot c^{-1}$. 2/ $p_5 = 541\ MeV \cdot c^{-1}$; angle de 12° vers le bas avec $\vec{p}_1$. 3/ Hypothèse (*c*) la plus vraisemblable.
21.16 $p_3 = 1\,040\ MeV \cdot c^{-1}$; $(\vec{l}, \vec{p}_3) \approx -1{,}5°$.
21.18 1/ $\vec{B}$ sortant. 2/ $p_2 = 1\,738\ MeV \cdot c^{-1}$; $p_3 = 543\ MeV \cdot c^{-1}$. 3/ Hypothèse (5).

22.1 à 22.3 Consultez le professeur.
22.4 $\mathcal{E}_{\ell_1}/A_1 < \mathcal{E}_{\ell_2}/A_2$; U moins stable que Fe.
22.5 $R = 2{,}7$ fm; $A \approx 96$.
22.6 $R_c = 2{,}7$ fm; $R_u = 7{,}4$ fm; $2{,}3 \cdot 10^{17}\ kg \cdot m^{-3}$.
22.7 9 protons et 10 neutrons.
22.8 $|\Delta m| = 0{,}172\,71$ u; $\mathcal{E}_{\ell_1} = 160{,}88$ MeV; $\mathcal{E}_\ell/A = 8{,}04$ MeV/nucléon.
22.9 1/ 7,6 MeV/nucléon.
22.10 Fe plus stable que Ce car $\mathcal{E}_{\ell_{Fe}}/A = 8{,}79$ MeV/nucléon et $\mathcal{E}_{\ell_{Ce}}/A = 8{,}45$ MeV/nucléon.
22.11 1/ 7,68 MeV/nucléon et 7,52 MeV/nucléon pour ^{14}C; ^{14}C est donc moins stable que ^{12}C.
22.12 Pour la première : $\Delta m = 0{,}003$ u; pour la seconde $\Delta m = -0{,}009$ u. La réaction exoénergétique ($\Delta m < 0$) est prévisible ($\Delta\mathcal{E} = -8{,}4$ MeV).
22.13 2 *a*/ $\mathcal{E}_{\ell_U} = 1\,783{,}3$ MeV; $\mathcal{E}_{\ell_{Sr}} = 788{,}3$ MeV; $\mathcal{E}_{\ell_{Xe}} = 1\,129{,}8$ MeV.
2 *b*/ $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\ell_U} - \mathcal{E}_{\ell_{Sr}} - \mathcal{E}_{\ell_{Xe}} = -135\ MeV = -2{,}16 \cdot 10^{-11}$ J.
3/ 1,2 kg.
22.14 1/ $m = Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n - \mathcal{E}_\ell \cdot c^{-2}$.
2/ $\Delta m = m_{Mo} + m_{La} + 2m_n + 7m_e - m_u - m_n$; $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\ell_U} - \mathcal{E}_{\ell_{Mo}} - \mathcal{E}_{\ell_{La}} + 7(m_p + m_e - m_n) \cdot c^2$.
3/ − 90,2 MeV/noyau.
22.15 $R = 12$ km; $\rho = 1{,}1 \cdot 10^{18}\ kg \cdot m^{-3}$.
22.16 1/ $^{15}_{8}O$: 7,98 MeV; $^{15}_{8}O$: 7,47 MeV; $^{15}_{7}N$: 7,70 MeV. 2/ 12,2 MeV. 3/ 15,6 MeV.
22.17 2,827 MeV/nucléon; 2,572 MeV/nucléon; non.
22.18 La première : car $\Delta\mathcal{E} < 0$, $\Delta\mathcal{E} \approx -5$ MeV.
22.19 La seconde pour laquelle $\Delta\mathcal{E} \approx -4$ MeV.
22.20 1/ $^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{91}_{40}Zn + {}^{142}_{58}Ce + 3\,{}^{1}_{0}n + 6\,{}^{0}_{-1}e$.
2 *a*/ $\mathcal{E}_\ell = [Zm_p + (A - Z)m_n - m] \cdot c^2$.
2 *b*/ $\Delta m = m_{Zn} + m_{Ce} + 3m_n + 6m_e - m_u - m_n$; $\Delta\mathcal{E} = \Delta m \cdot c^2 = \mathcal{E}_{\ell_U} - \mathcal{E}_{\ell_{Zn}} - \mathcal{E}_{\ell_{Ce}} + 6(m_p + m_e - m_n) \cdot c^2 = -195{,}9$ MeV.
3/ $\mathcal{E} \approx 8 \cdot 10^{13}$ J/kg.
22.21 1/ Masse du positon = masse de l'électron; charge : $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C. 2/ 1,02 MeV.
3/ $1{,}2 \cdot 10^{-12}$ m (rayons *X* et γ).
22.22 1/ $Z = 4a_a \cdot A \cdot (2a_c A^{2/3} + 8a_a)^{-1}$; $Z = 18$ pour $A = 40$. 2/ 344,6 MeV; 350,1 MeV; 347,3 MeV; 344,5 MeV; $^{40}_{18}Ar$ le plus stable; β^- pour Cl; β^+ pour K.

23.1 à 23.5 Consultez le professeur.
23.6 1/ $^{208}_{81}Tl$. 2/ Photon γ.
23.7 2 *a*/ 4,94 MeV ≈ $7{,}9 \cdot 10^{-13}$ J.
3 *b*/ $\lambda = 6{,}5 \cdot 10^{-3}$ nm.
23.8 2/ Non, car noyau fils à l'état fondamental.
23.9 2/ 4,14 MeV; 1,39 MeV; 0,29 MeV.
23.10 2/ $\lambda = 2{,}59 \cdot 10^{-11}$ m.
23.11 2 *a*/ $T = 20$ min. 3/ $1{,}65 \cdot 10^{15}$ Bq; $8{,}25 \cdot 10^{14}$ Bq.
23.12 Nombre de noyaux d'uranium 236 négligeable.
23.13 1/ $T = 138$ J. 2/ $0{,}7\bar{N}_0$; $\bar{N}_0/2$; $\bar{N}_0/4$; $\bar{N}_0/8$.
23.14 2/ $\lambda = 9{,}1 \cdot 10^{-4}$ nm; $\lambda_2 = 3 \cdot 10^{-4}$ nm; $\lambda_3 = 2{,}4 \cdot 10^{-4}$ nm.
23.15 2/ $\lambda_{(2/3)} = 1{,}1 \cdot 10^{-12}$ m; $\lambda_{(3/4)} = 9{,}1 \cdot 10^{-13}$ m.
23.16 Reportez-vous au cours. 3/ Quatre niveaux excités pour ^{208}Tl.
23.17 $T = 7$ h.
23.18 1/ $\lambda = 0{,}693\ s^{-1}$. 2/ $1{,}6 \cdot 10^{6}$ noyaux.
23.19 1/ $\lambda = 0{,}069\ s^{-1}$. 2/ $A = 2 \cdot 10^{7}$ Bq.
3/ $N_0 = 2{,}9 \cdot 10^{8}$. 4/ $3{,}6 \cdot 10^{7}$. 5/ $2{,}5 \cdot 10^{6}$ Bq.
23.20 1/ $T \approx 138{,}6$ jours; $\lambda \approx 5 \cdot 10^{-3}\ J^{-1}$. 2/ 460,5 J.
23.21 $\Delta t \approx 104$ jours.
23.22 1/ $A_0 = 10^{12}$ Bq. 2/ $5{,}5 \cdot 10^{-3}$ Bq.
23.23 1 *c*/ 5α; 4β. 2 *a*/ $m' = m_0(1 - 2^{-n})$.
2 *b*/ 3,25 J; 12,71 J.
23.24 2/ 1,2 MeV.
3/ 13,3 années et 199,4 années.
23.25 3/ 5 764 années; 6 634 années; 7 609 années.
23.26 2/ $4{,}6 \cdot 10^{-10}\ an^{-1}$. 3/ $t \approx 5 \cdot 10^{9}$ années.
23.27 1/ 116 et 139. 2/ $0{,}73 \cdot 10^{-13}$ g et $2 \cdot 10^{-33}$ g (ne contient plus de $^{223}_{87}Fr$).
5/ $7 \cdot 10^{22}$ atomes. 6/ $2{,}5 \cdot 10^{-11}$ m.
23.28 2/ $M_1 M_2 = 3{,}7$ mm.
23.29 1/ $y = 206$; $x = 82$. 2/ 5,32 MeV.
3/ 5,4 MeV.
23.30 2/ $T \approx 230$ s; $\lambda \approx 3 \cdot 10^{-3}$ s.
23.31 Consultez votre professeur.
23.32 Consultez votre professeur.

24.1 Reportez-vous au cours.
24.2 2/ Faible. 3/ 50 mSv. 4/ Équivalent de dose. 5/ $1\ J \cdot kg^{-1}$. 6/ 1 000 Sv.
24.3 1 *a*/ $A = 139$; $z = 38$; $A' = 85$; $z' = 35$; $A'' = 88$; $z'' = 57$. 1 *b*/ $^{88}_{35}Br$. 2/ 190 MeV environ.
24.4 1 *a*/ Même nombre de nucléons et émetteur β^-. 1 *b*/ Fissile. 1 *c*/ Défaut de masse.
2/ 2,9 %.
24.5 1 *b*/ 194,1 MeV. 2/ $^{239}_{93}Np$; $^{239}_{94}Pu$.
24.6 17,6 MeV par atome; $4{,}2 \cdot 10^{11}$ J pour 1 g
24.7 2/ $2{,}4 \cdot 10^{12}$ J. 3/ $4{,}3 \cdot 10^{9}$ kg; 0,03 %.
24.8 1/ *X* est un neutron. 2 *b*/ $T = 150$ s; $\lambda = 4{,}6 \cdot 10^{-3}\ s^{-1}$.
24.9 $2 \cdot 10^{12}$ ionisations.
24.10 7 joules.
24.11 1/ 1,15 t. 2/ $2{,}3 \cdot 10^{6}$ t.
24.12 $3{,}25 \cdot 10^{9}$ J; 65 kg. $1{,}46 \cdot 10^{10}$ J; 292,5 kg.
24.13 2/ Production de neutrons thermiques.
24.14 1/ $^{94}_{38}Sr$; $^{140}_{54}Xe$. 2/ $^{239}_{94}Pu$.
3 *c*/ $\mathcal{E}(\gamma) = 1{,}2$ MeV; $\lambda \approx 10^{-12}$ m.
24.15 2/ $\ell = 1$ mm. 3/ $\mu = 3{,}19 \cdot 10^{-2}\ cm^{-1}$; 27,3 %.
24.16 3 *a*/ $N_0 \approx 10^{-5}$ mole; $7{,}6 \cdot 10^{-8}$ mole au bout de 6 h. 3 *b*/ 5 ℓ environ.
24.17 4 *b*/ $\mathcal{E} = 0{,}51$ MeV; $\lambda = 2{,}43 \cdot 10^{-12}$ m.
5/ $\lambda = 0{,}034\,7\ mm^{-1}$; 66 min.
24.18 2/ $T \approx 54$ min.

Scanné avec CamScanner

Données (Bobine plate)
$N = 500$ sp $r = 0,1$m ; $B = 0,2$T ; $t = 0,5$s $e_{moy} = ?$

Références photographiques

Références photographiques

Photos non référencées : *Philippe Burlot*/Studio SOLUTION.

Couverture. Dominique Sarraute. **6.** GIRAUDON. **7.** ROGER-VIOLLET (en haut, à gauche). GIRAUDON (en bas à gauche). Ph. Lauros GIRAUDON (en haut, à droite). **10.** Édouard Rousseau. **14.** Alain Choisnet. **24.** SCALA Bezzuoli/Firenze Museo zoologico de « la Specola ». **32.** Alain Choisnet. **33.** Alain Ernoult. **37.** En haut : Scala Ravenna/Museo Arcivescovile. En bas, à gauche : SCALA Siena/Archivio di Stato. En bas, à droite : G. Dagli Orti/Musée Carnavalet. **44.** Collection Galaxy/Contact (Calais). **46.** 2/A. Nogues Sygma. **49.** 3/Fotokhvronika Tass. **52.** Collection Galaxy/Contact (Calais). **54.** P.P.P. (en haut). HERGÉ/CASTERMANN (en bas). **56.** Pitch. **62.** KRAFFT/EXPLORER. **82.** Alain ERNOULT. **100.** Det Kongelige/Bibliotek Copenhague. **101.** En haut, à gauche : Hachette. En haut, à droite : BOYER-VIOLLET. En bas, à gauche : Roger VIOLLET. En bas, à droite : EDIMEDIA. **102.** F. Brunel. **120.** 4/Pour la Science. **121.** En bas : Jack Finch/S.P.L. **142.** BEAUVILLAIN-LATY. **168.** ALSTHOM. **173.** 13/ALSTHOM. 14/ALSTHOM. **174.** TSCHERNIAK/TELMA. **251.** 5/SODEL/PHOTOTHÈQUE E.D.F. **268.** Hachette. **269.** De gauche à droite, puis de haut en bas : BOYER-VIOLLET ; Hachette ; Hachette. **272.** Ministère de l'Éducation Nationale/Palais de la Découverte. **302.** G. FRESTON-PIX/T.P.S. **303.** 2/ Palais de la Découverte. **308.** Palais de la Découverte. **318.** De gauche à droite, puis de haut en bas : ROGER-VIOLLET ; BOYER-VIOLLET ; HARLINGUE-VIOLLET ; Presse und Informationsamt der Bundesregierung-Bonn ; HARLINGUE-VIOLLET ; HARLINGUE-VIOLLET. **319.** De gauche à droite, puis de haut en bas : ROGER-VIOLLET ; Palais de la Découverte ; BOYER-VIOLLET ; BOYER-VIOLLET ; HARLINGUE-VIOLLET ; HARLINGUE-VIOLLET ; BOYER-VIOLLET ; C.E.A. ; BOYER-VIOLLET. **323.** En bas : Press und Informationsamt der Bundesregierung-BONN. **324.** Ministère des Universités. Palais de la Découverte. **332.** NASA. **334.** Observatoire de Hale. **340.** C.E.R.N/Science Photo Library. **342.** C.E.R.N. **343** 4*a*/A.P. French/W.W. Norton. 4*b*/Genetier. **355.** Genetier. **357.** Genetier. **358.** Genetier. **361.** 1/C.E.R.N./Éditions SACER. 2/C.E.R.N. **362.** C.E.R.N. **372.** Palais de la Découverte. **382.** GSI. **390.** C.E.R.N. **396.** Éts JEULIN. **404.** BOYER-VIOLLET. **409.** Sodel/E.D.F. **410.** E.D.F./Jeunesse. **411.** C.E.A. **412.** Morceau/Sodel-E.D.F. **413.** C.E.A. **414.** L.L.L. **417.** Ray DELVERT/Pont-à-Mousson. **418.** C.E.A.

Imprimé en France par I.M.E. - 25110 Baume-les-Dames
Dépôt légal 0114-08/92
Collection n° 50 - Edition n° 04
13/4747/5

Scanné avec CamScanner

collection EURIN-GIÉ

Physique et Chimie
seconde

Sciences physiques
premières A et B

Physique
premières S et E

Chimie
premières S et E

Physique
terminale D

Chimie
terminale D

Chimie
terminales C et E

collection LIAISONS SCIENTIFIQUES

A. Guinier
La structure de la matière

L. Gouguenheim
Méthodes de l'astrophysique

R. Daudel
Vision moléculaire du monde

M. Françon
L'optique moderne et ses développements

A. Guinier, R. Jullien
La matière à l'état solide

C. Ruhla
La physique du hasard

collection EXERCICES RÉSOLUS

Physique et Chimie
seconde

Physique et Chimie
premières S et E

Physique et Chimie
terminales C et E

IMPRIMÉ EN FRANCE
PAR B.-T. - LA FLÈCHE
13/4747/5

9 782010 147241



Scanné avec CamScanner