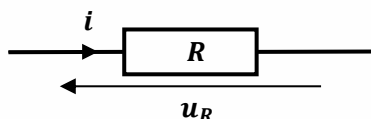


1 Conducteur ohmique

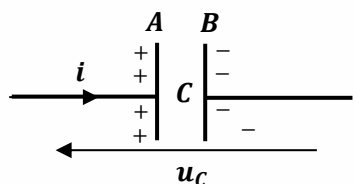


➤ Loi d'ohm :

$$u_R = R \cdot i$$

(V) (Ω) (A)

2 Le condensateur



charge du condensateur en coulomb (C)

$$q_A = -q_B = q$$

La capacité en Farad (F)

$$\begin{aligned} 1\text{mF} &= 10^{-3}\text{F} \\ 1\mu\text{F} &= 10^{-6}\text{F} \\ 1\text{nF} &= 10^{-9}\text{F} \end{aligned}$$

La tension aux bornes du condensateur en (V)

$$u_C = \frac{q}{C}$$

Relation entre la charge q et l'intensité du courant i

$$i = \frac{dq}{dt}$$

❖ Remarque

Cas du courant continu :

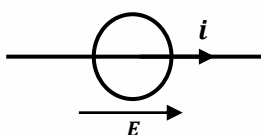
$$I = \frac{q}{t}$$

Relation entre la tension u_C et l'intensité du courant i

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(C \cdot u_C) \longrightarrow i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$$

3 Types de générateurs

❖ Générateur idéal de tension



➤ Il délivre une tension **constante**

❖ Générateur idéal de courant

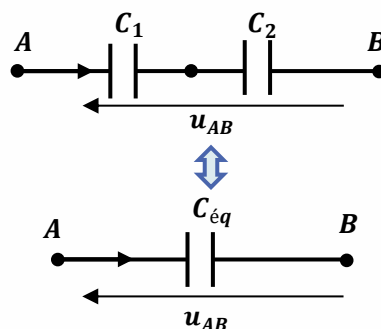


➤ Il délivre un courant d'intensité **constante**

$$\begin{aligned} I_0 &= cst \\ I_0 &= \frac{q}{t} \end{aligned}$$

3 Association des condensateurs

❖ Association en série



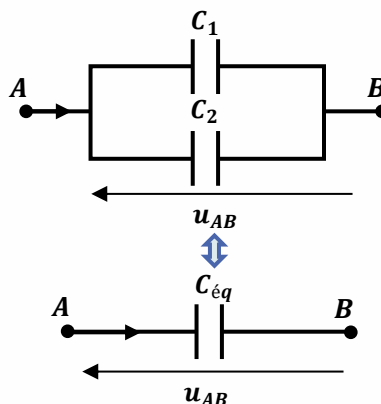
$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$C_{eq} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

✓ Intérêt du montage

➡ Diminuer la capacité

❖ Association en parallèle



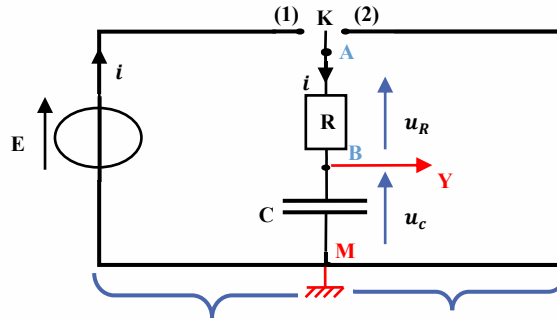
$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

✓ Intérêt du montage

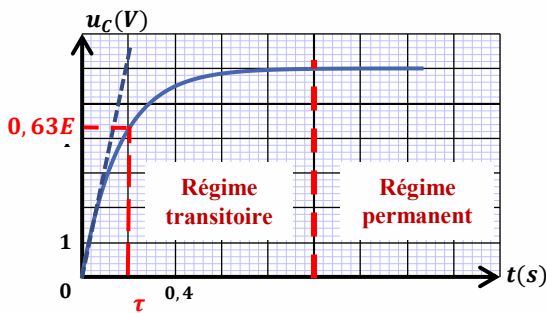
➡ Augmenter la capacité

5 Le dipôle RC

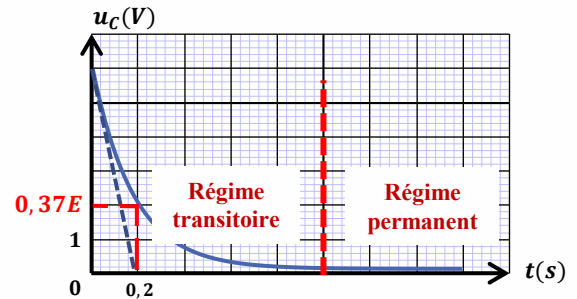
- Le dipôle **RC** est constitué d'un conducteur ohmique de résistance **R** et d'un condensateur de capacité **C** montés en série.



Circuit de charge



Circuit de décharge



On distingue entre deux régimes :

- ☐ **Régime transitoire** : pendant lequel la tension **u_C** croît (ou décroît) et on l'obtient lorsque **t < 5τ**
 - ☐ **Régime permanent** : pendant lequel la tension **u_C** reste constante et a pour valeur **E** (ou **0**) et on l'obtient lorsque **t ≥ 5τ**
- La durée de charge ou décharge du condensateur augmente lorsque la valeur de **R** ou **C** augmente.

La constante du temps τ

$$\tau = R \cdot C$$

➤ Comment déterminer τ graphiquement

Cas de charge	Cas de décharge
Méthode 1 : τ est l'abscisse de l'intersection entre la tangente de la courbe à t = 0 et l'asymptote u_C = E	Méthode 1 : τ est l'abscisse de l'intersection entre la tangente de la courbe à t = 0 et l'axe des abscisses.
Méthode 2 : pendant la charge on a : $u_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ A t = τ on a : u_C(t) = 0,63 × E , τ est l'abscisse qui correspond à l'ordonnée 0,63 × E	Méthode 2 : pendant la charge on a : $u_C(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ A t = τ on a : u_C(t) = 0,37 × E , τ est l'abscisse qui correspond à l'ordonnée 0,37 × E

➤ La dimension de la constante du temps

$$\tau = R \cdot C$$

✓ D'après la loi d'Ohm : $U = R \cdot i \Rightarrow R = \frac{U}{i}$ La dimension de **R** s'écrit : $[R] = \frac{[U]}{[I]}$ (I)

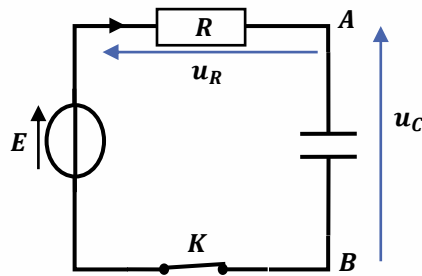
✓ À partir de la relation : $i = C \cdot \frac{dU_C}{dt} \Rightarrow C = \frac{i \cdot dt}{dU_C}$ La dimension de **C** s'écrit : $[C] = \frac{[I] \cdot [T]}{[U]}$ (II)

✓ D'après (I) et (II), la dimension de **τ** est :

$$[\tau] = [R] \cdot [C] = \frac{[U]}{[I]} \cdot \frac{[I] \cdot [T]}{[U]} = [T]$$

Donc **τ** a la dimension d'un temps, son unité est la **seconde (s)**

6 Charge d'un condensateur



a) Équations différentielles

Vérifier par « u_C »	Vérifier par « q »
D'après la loi d'additivité des tensions : $u_R + u_C = E$ D'après la loi d'Ohm : $u_R = R \cdot i$ Et on a : $i = \frac{dq}{dt}$ et $q = C \cdot u_C$ d'où : $i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$ Donc : $u_R = RC \cdot \frac{du_C}{dt}$ on remplace dans (*) : $RC \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = E$ On pose $\tau = RC$: l'équation devient : $\tau \cdot \frac{du_C(t)}{dt} + u_C = E$	D'après la loi d'additivité des tensions : $u_R + u_C = E$ On a : $q = C \cdot u_C$ donc $u_C = \frac{q}{C}$ et on a : $u_R = R \cdot i = R \frac{dq}{dt}$ On remplace dans (*) : $(R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E) \times C$ $RC \frac{dq}{dt} + q = CE$
Vérifier par « i »	Vérifier par « u_R »
D'après la loi d'additivité des tensions : $u_R + u_C = E$ $\frac{d}{dt} u_C + \frac{d}{dt} u_R = 0$ On dérive l'expression $E = cst$ Et on a $i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$ Alors $\frac{i}{C} = \frac{du_C}{dt}$ $\frac{i}{C} + \frac{d}{dt} (R \cdot i) = 0$ $C \times (\frac{i}{C} + R \frac{d}{dt} i) = 0$ $RC \frac{di}{dt} + i = 0$	D'après la loi d'additivité des tensions : $u_R + u_C = E$ On dérive l'expression $E = cst$ $\frac{d}{dt} u_C + \frac{d}{dt} u_R = 0$ $i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$ $\frac{i}{C} + \frac{d}{dt} u_R = 0$ $i = \frac{u_R}{R}$ $\frac{u_R}{RC} + \frac{d}{dt} u_R = 0$ $RC \times (\frac{u_R}{RC} + \frac{d}{dt} u_R) = 0$ $RC \frac{du_R}{dt} + u_R = 0$

b) La solution de l'équation différentielle et les courbes

Étapes à suivre pour déterminer les constantes d'une solution d'équation différentielle :

On admet que la solution de l'équation différentielle $RC \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = E$ s'écrit sous la forme : $u_C(t) = A(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

Avec A et τ des constantes à déterminer en fonction des paramètres du circuit.

1^{ère} étape : (dériver)

On dérive l'expression : $u_C(t) = A - Ae^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \frac{du_C(t)}{dt} = 0 - \left(-\frac{A}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = +\frac{A}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

2^{ème} étape : (remplacer)

On remplace $u_C(t)$ et $\frac{du_C(t)}{dt}$ par leurs expressions dans l'équation différentielle :

$$RC \cdot \left(\frac{A}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + A - A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = E \Rightarrow RC \cdot \frac{A}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + A - A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = E$$

3^{ème} étape : (factoriser)

$$A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \left(1 - \frac{RC}{\tau}\right) + A = E \Rightarrow A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \left(1 - \frac{RC}{\tau}\right) + A - E = 0$$

Cette équation est vérifiée si :

$$\left(1 - \frac{RC}{\tau}\right) = 0$$

D'où :

$$A = E$$

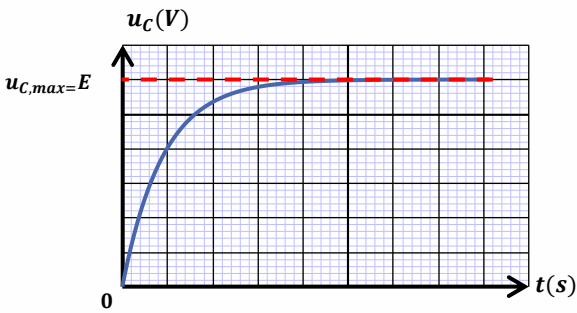
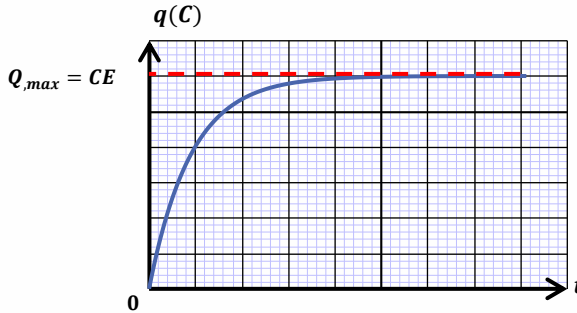
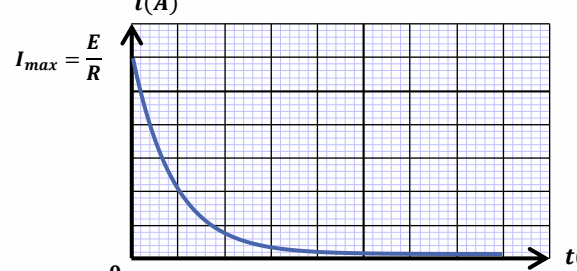
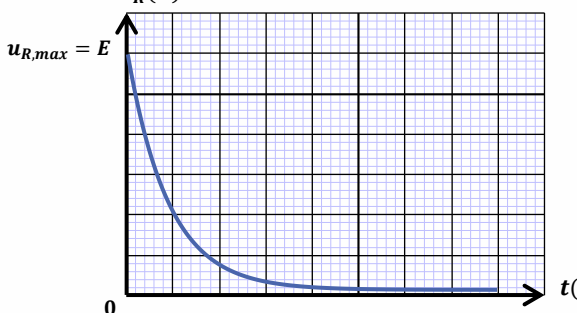
Et :

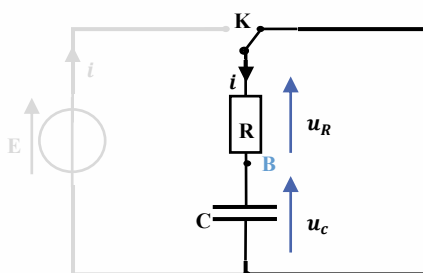
$$\tau = RC$$

$$A - E = 0$$

➤ D'où l'expression de la tension $u_C(t)$ est:

$$u_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

Vérifier par « u_C »	Vérifier par « q »
$u_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$ $u_C(0) = 0$ $u_C(\infty) = E$ 	$q(t) = CE(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$ $q(0) = 0$ $q(\infty) = CE$ 
Vérifier par « i »	Vérifier par « u_R »
On a : $i = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{du_C}{dt} = CE \left(\frac{1}{RC} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}\right)$ $i(t) = C \cdot \frac{E}{R \cdot C} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$ $i(t) = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$ $i(0) = \frac{E}{R}$ $i(\infty) = 0$ $I_{max} = \frac{E}{R}$ 	On a : $u_R = R \cdot i = R \cdot \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$ $u_R(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$ $u_R(0) = E$ $u_R(\infty) = 0$ 



a) Équations différentielles

Vérifier par « u_C »	Vérifier par « q »
D'après la loi d'additivité des tensions : $u_R + u_C = 0 \quad (*)$ D'après la loi d'Ohm : $u_R = R \cdot i$ Et on a : $i = \frac{dq}{dt}$ et $q = C \cdot u_C$ d'où : $i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$ Donc : $u_R = RC \cdot \frac{du_C}{dt}$ on remplace dans (*) : $RC \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$ On pose $\tau = RC$: l'équation devient : $\tau \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$	D'après la loi d'additivité des tensions : $u_R + u_C = 0 \quad (*)$ On a : $q = C \cdot u_C$ donc $u_C = \frac{q}{C}$ et on a : $u_R = R \cdot i = R \frac{dq}{dt}$ On remplace dans (*) : $RC \frac{dq}{dt} + q = 0$
Vérifier par « i »	Vérifier par « u_R »
D'après la loi d'additivité des tensions : $u_R + u_C = 0$ On dérive l'expression $E = cst$ $\frac{d}{dt} u_C + \frac{d}{dt} u_R = 0$ Et on a $i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$ Alors $\frac{i}{C} = \frac{du_C}{dt}$ $\frac{i}{C} + \frac{d}{dt} (R \cdot i) = 0$ $C \times \left(\frac{i}{C} + R \frac{d}{dt} i \right) = 0$ $RC \frac{di}{dt} + i = 0$	D'après la loi d'additivité des tensions : $u_R + u_C = 0$ On dérive l'expression $E = cst$ $\frac{d}{dt} u_C + \frac{d}{dt} u_R = 0$ $i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$ $\frac{i}{C} + \frac{d}{dt} u_R = 0$ $i = \frac{u_R}{R}$ $\frac{u_R}{RC} + \frac{d}{dt} u_R = 0$ $RC \times \left(\frac{u_R}{RC} + \frac{d}{dt} u_R \right) = 0$ $RC \frac{du_R}{dt} + u_R = 0$

b) La solution de l'équation différentielle et les courbes

Étapes à suivre pour déterminer les constantes d'une solution d'équation différentielle :

On admet que la solution de l'équation différentielle $RC \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$ s'écrit sous la forme : $u_C(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

Avec A et τ des constantes à déterminer en fonction des paramètres du circuit.

1^{ère} étape : (dériver)

On dérive l'expression : $u_C(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \frac{du_C(t)}{dt} = \left(-\frac{A}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

2^{ème} étape : (remplacer)

On remplace $u_C(t)$ et $\frac{du_C(t)}{dt}$ par leurs expressions dans l'équation différentielle :

$$RC \cdot \left(-\frac{A}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\right) - A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$$

3^{ème} étape : (factoriser)

$$A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \left(1 - \frac{RC}{\tau}\right) + A = 0$$

Cette équation est vérifiée si :

$$\left(1 - \frac{RC}{\tau}\right) = 0$$

D'où :

$$A = 0$$

Et :

$$\tau = RC$$

$$A = 0$$

➤ D'où l'expression de la tension $u_C(t)$ est :

$$u_C(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Vérifier par « u_C »	Vérifier par « q »
$u_C(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$ $u_C(0) = E$ $u_C(\infty) = 0$	$q(t) = CE \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$ $q(0) = CE$ $q(\infty) = 0$
Vérifier par « i »	Vérifier par « u_R »
On a : $i = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{du_C}{dt} = -CE \frac{1}{RC} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$ $i(t) = -C \cdot \frac{E}{R \cdot C} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$ $i(t) = -\frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$	On a : $u_R = R \cdot i = -R \cdot \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$ $u_R(t) = -E \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$ $i(0) = -E$ $i(\infty) = 0$

Démonstration de l'expression de l'énergie

La puissance électrique fournie par le générateur au condensateur :

$$P = u_C \times i$$

Puisque $i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$ donc : Primitive

$$f \cdot f' \rightarrow \frac{1}{2} f^2$$

$$P = u_C \times C \cdot \frac{du_C}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C \cdot u_C^2 \right)$$

D'autre part la puissance électrique peut s'écrire :

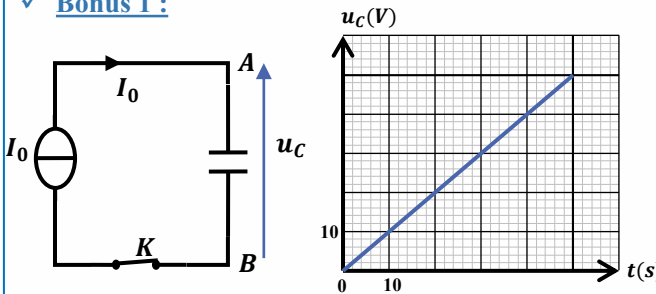
$$P = \frac{dE_e}{dt}$$

L'énergie emmagasinée dans le condensateur est :

$$E_e = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2$$

$$E_e(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{q(t)^2}{C}$$

$$E_e(t) = \frac{1}{2} \cdot q \cdot u_C$$

✓ Bonus 1 :❖ L'expression de « u_C »

➤ On a : $q = C \cdot u_C$, alors $u_C = \frac{q}{C}$

Puisque l'intensité de courant I_0 est constante donc :

$$\longrightarrow q = I_0 \times t \longrightarrow u_C = \frac{I_0}{C} \times t$$

❖ Calculer la capacité de condensateur

➤ La courbe est une fonction linéaire d'équation :

$$u_C = K \times t$$

K : coefficient directeur

➤ Par analogie $K = \frac{I_0}{C}$ $C = \frac{I_0}{K}$

➤ On a $K = \frac{\Delta u_C}{\Delta t} = \frac{50-0}{50-0} = 1 \text{ V} \cdot \text{s}^{-1}$

➤ Donc : $C = \frac{I_0}{K} = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{1} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ F}$

$$C = 1 \text{ mF}$$

✓ Bonus 2 :

Déterminer l'instant où l'énergie emmagasinée dans le condensateur diminue de 75%

Diminue de 75% , c-à-d 25% de l'énergie restant de l'énergie initiale

$$E_e = 25\% \times E_e(0)$$

$$\frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C(t)^2 = 0,25 \times \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C(0)^2$$

➤ Avec $u_C(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$

➤ Et $u_C(0) = E$

$$\frac{1}{2} \cdot C \cdot E^2 \cdot e^{-2 \cdot \frac{t}{RC}} = 0,25 \times \frac{1}{2} \cdot C \cdot E^2$$

$$-2 \cdot \frac{t}{RC} = \ln(0,25)$$

$$t = -\frac{RC}{2} \cdot \ln(0,25)$$

✓ Bonus 3 :

L'énergie emmagasinée dans le condensateur dans le régime permanent

➤ On a : $u_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$

➤ En régime permanent : $t \rightarrow \infty$

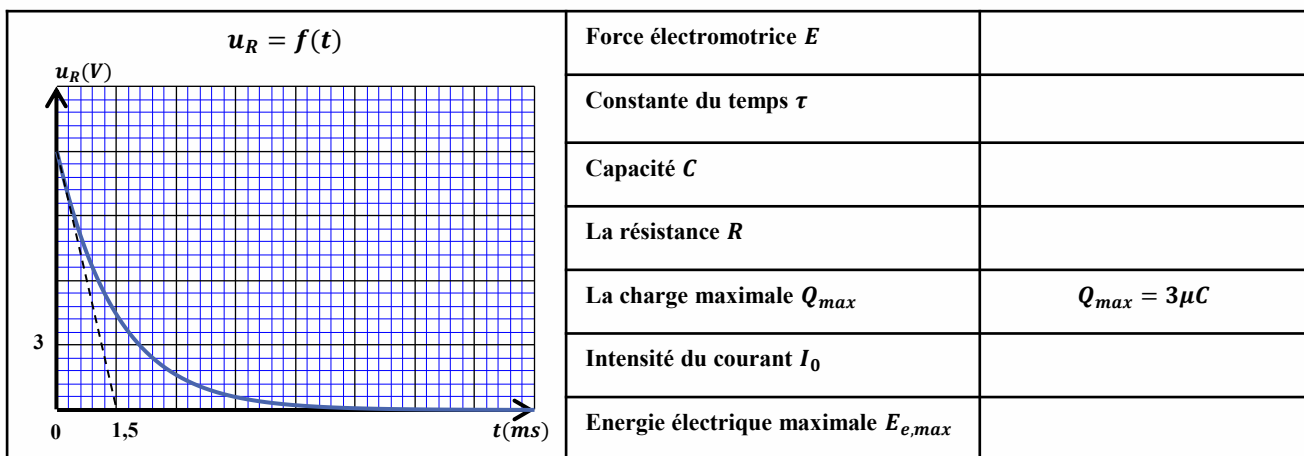
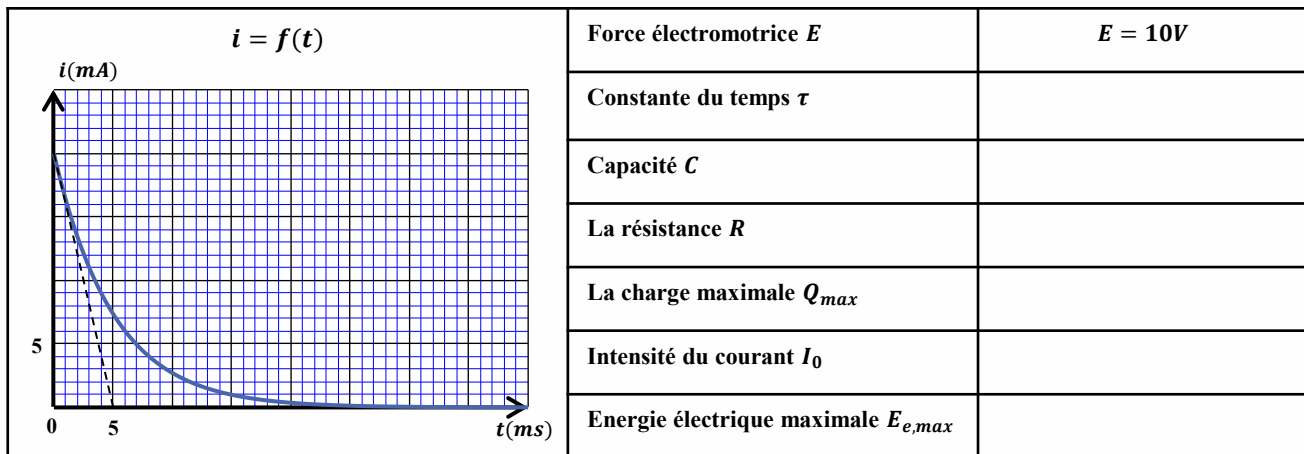
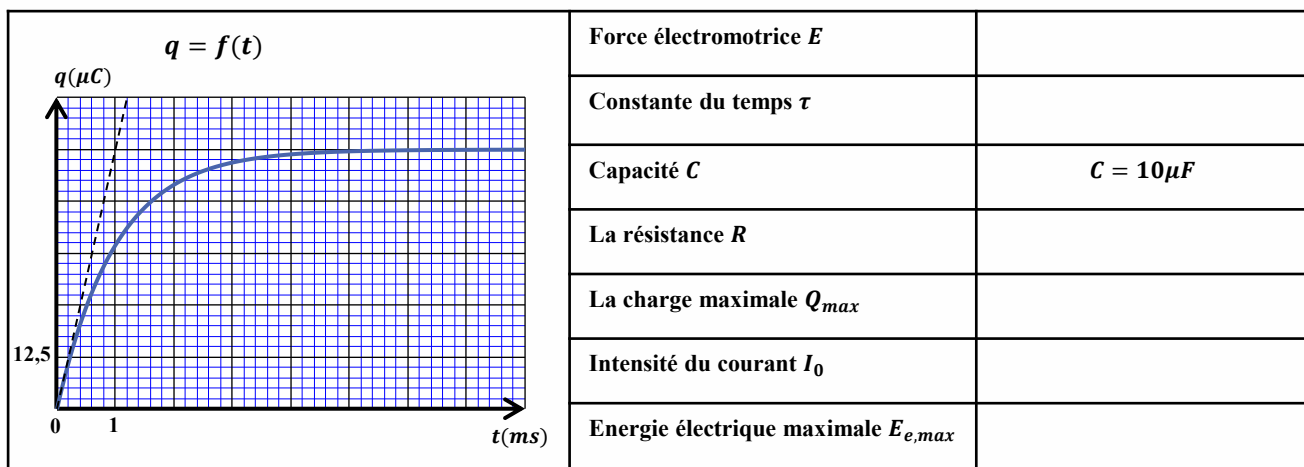
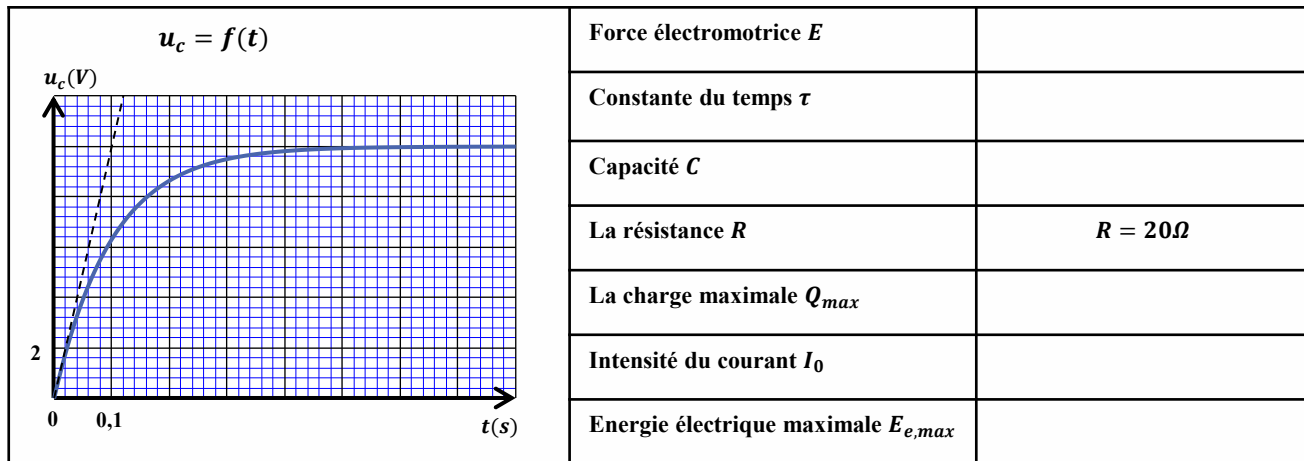
$$u_C(\infty) = E(1 - e^{-\infty})$$

$$u_C(\infty) = E(1 - 0)$$

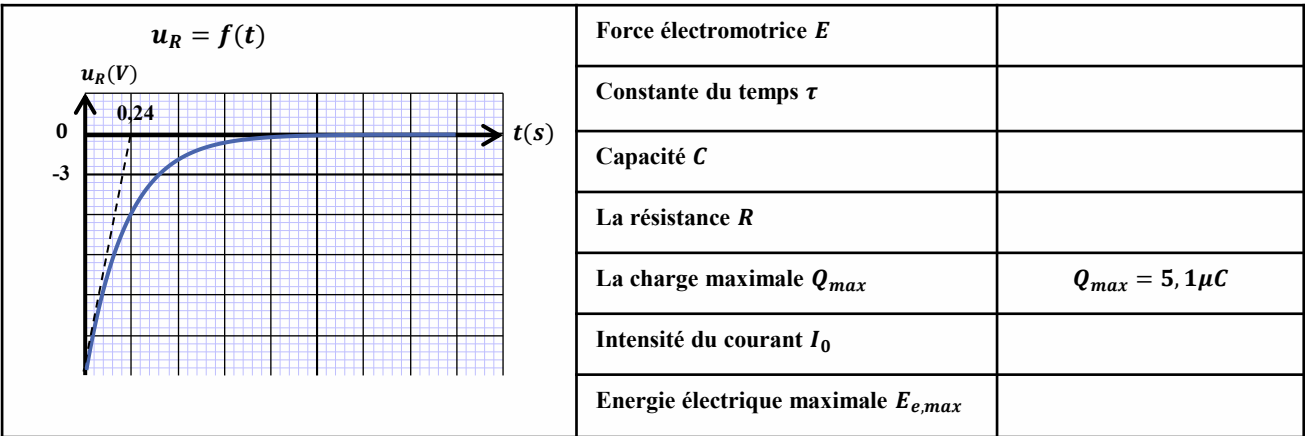
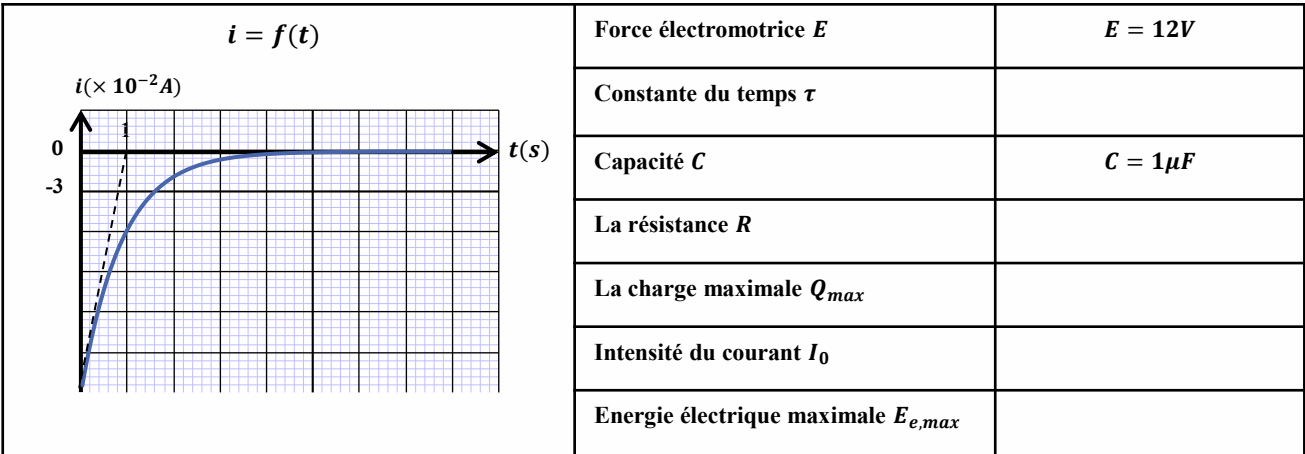
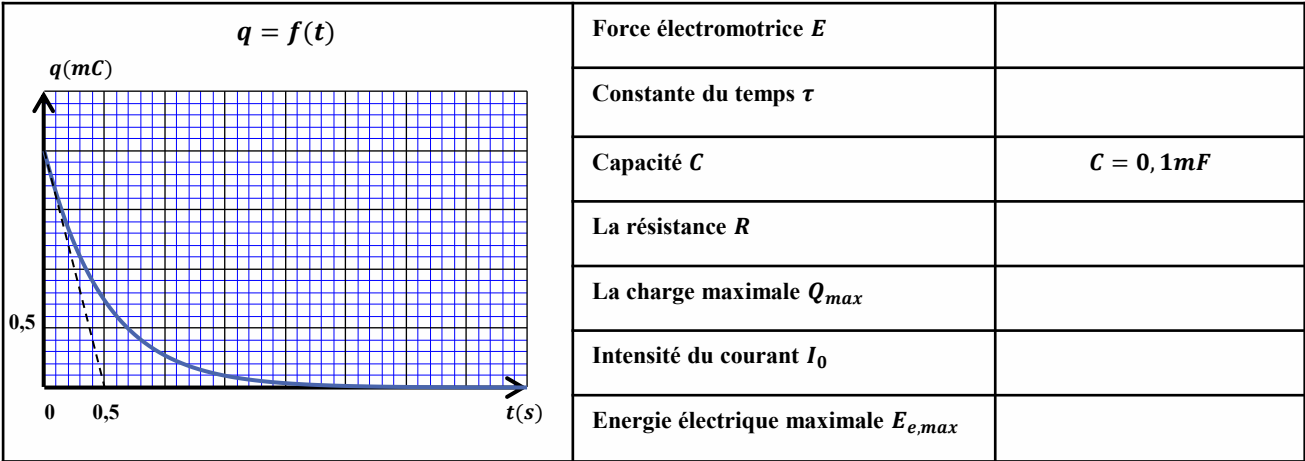
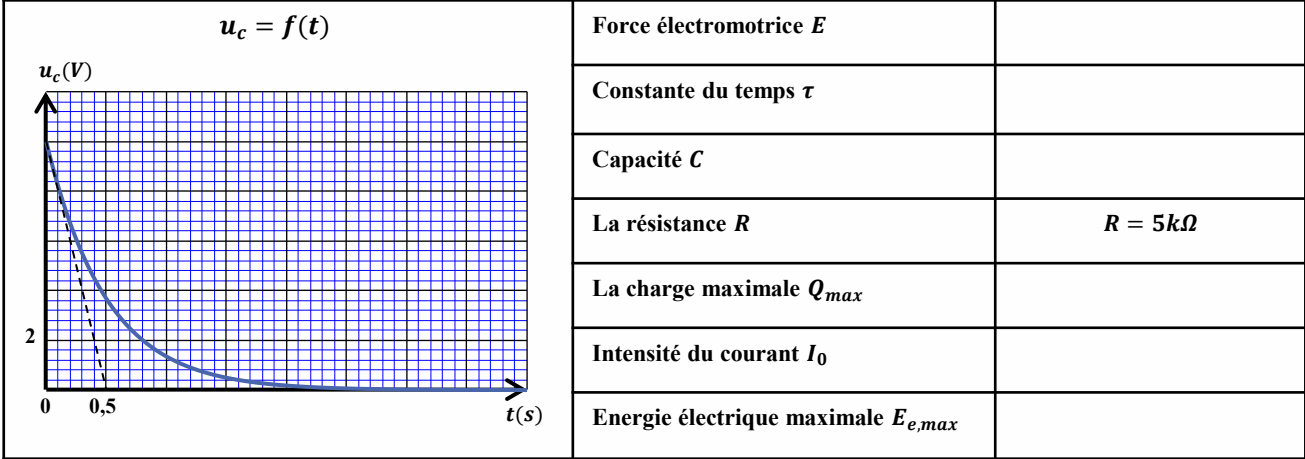
$$u_C(\infty) = E$$

$$E_e = \frac{1}{2} \cdot C \cdot E^2$$

Application complète sur les courbes de charge d'un condensateur

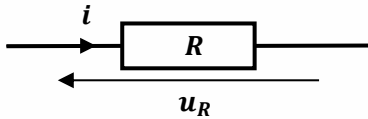


Application complète sur les courbes de décharge d'un condensateur



Dipôle RL

1 Conducteur ohmique

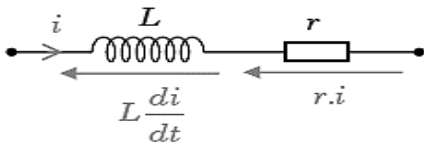
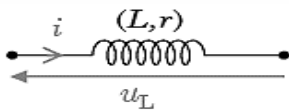


➤ Loi d'ohm :

$$u_R = R \cdot i$$

(V) (Ω) (A)

2 La bobine



$$u_L = r \cdot i + L \frac{di}{dt}$$

- u_L : s'exprime en volt (V).
- r : la résistance interne en Ohm (Ω)

❖ Remarque

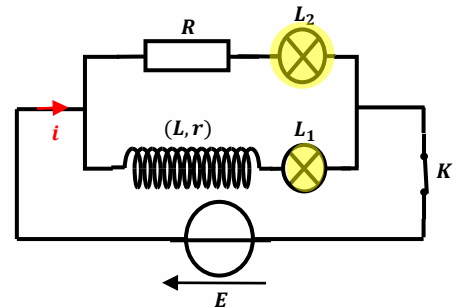
- Si $i = \text{cst}$, $\Rightarrow \frac{di}{dt} = 0$ $u_L = r \cdot i$

La bobine se comporte comme un conducteur ohmique

- Si $r = 0$, $u_L = L \frac{di}{dt}$

La bobine se comporte comme idéal

3 Influence d'une bobine dans un circuit électrique

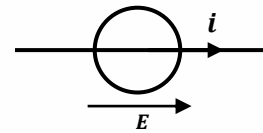


- ❑ Lorsque l'interrupteur K est fermé, la lampe L_1 brille après la lampe L_2 .
- ❑ Lorsque l'interrupteur K est ouvert, lampe L_1 s'éteint après lampe L_2 .

La bobine retarde (résiste) l'établissement ou l'annulation du courant qui la traverse,

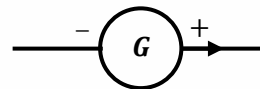
4 Types de générateurs

❖ Générateur idéal de tension

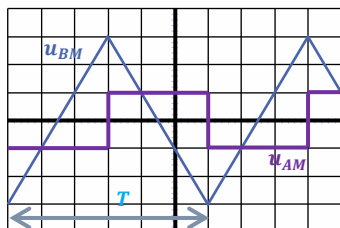
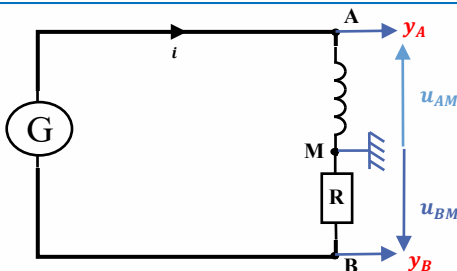


➤ Il délivre une tension **constante**

❖ Générateur basse fréquence



➤ Il délivre une tension alternative sinusoïdale, triangulaire ou de forme carrée



❖ Déterminer la relation entre les tensions $u_{AM}(t)$ et $u_{BM}(t)$

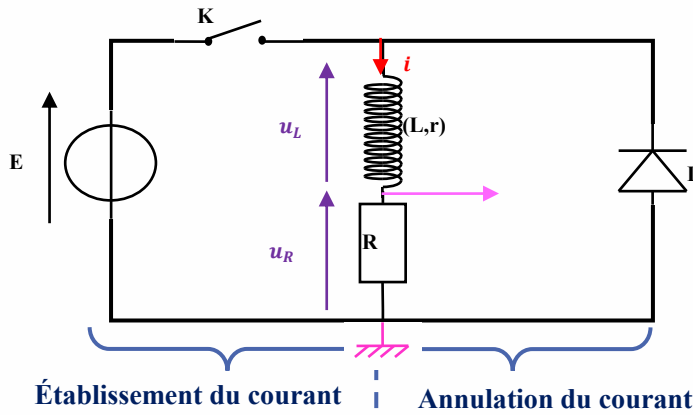
- On a : $u_{AM} = u_L = L \frac{di}{dt}$
et $u_{BM} = -u_R = -R \cdot i$
- Alors : $u_{AM} = L \frac{d}{dt} \left(-\frac{u_{BM}}{R} \right)$

$$u_{AM} = -\frac{L}{R} \frac{d}{dt} u_{BM}$$

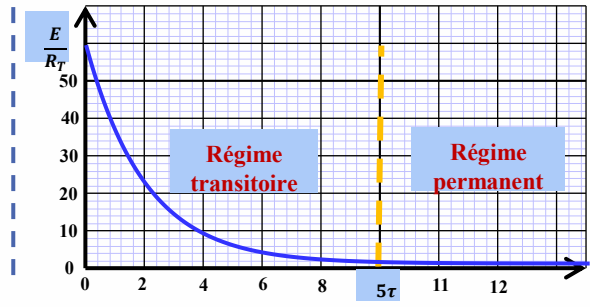
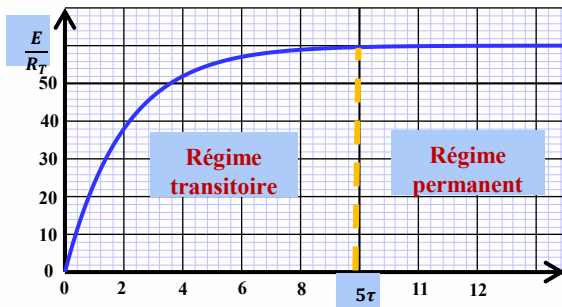
❖ Calculer la valeur de l'inductance L

$$L = -\frac{R \cdot u_{AM}}{\frac{d}{dt} u_{BM}}$$

- La sensibilité verticale à l'entrée Y_A : $0,4 \text{ V/div}$
- La sensibilité verticale à l'entrée Y_B : 2 V/div
- La sensibilité horizontale : 1 ms/div ; $R = 10^3 \Omega$
- On prend la demi-période :
 $\frac{d}{dt} u_{BM} = \frac{-3 \times 2 - 3 \times 2}{0 - 3 \times 10^{-3}} = 4000$
 $u_{AM} = -1 \times 0,4 = -0,4 \text{ V}$
 $L = -\frac{R \cdot u_{AM}}{\frac{d}{dt} u_{BM}} = -\frac{10^3 \times (-0,4)}{4000}$
 $L = 0,1 \text{ H}$



La diode ne laisse passer le courant que dans un seul sens
Son intérêt est d'éviter l'apparition des étincelles à cause de la surtension



La constante du temps τ :

$$\tau = \frac{L}{R_T}$$

On distingue entre eux régimes :

- **Régime transitoire** : pendant lequel l'intensité du courant $i(t)$ croît (ou décroît) et on l'obtient lorsque $t < 5\tau$
- **Régime permanent** : pendant lequel l'intensité du courant $i(t)$ reste constante et a pour valeur $\frac{E}{R_T}$ (ou 0) et on l'obtient lorsque $t \geq 5\tau$

La durée de l'établissement ou l'annulation du courant augmente lorsque la valeur de L augmente ou la valeur de R diminue .

➤ Comment déterminer τ graphiquement

Cas de charge	Cas de décharge
Méthode 1 : τ est l'abscisse de l'intersection entre la tangente de la courbe à $t = 0$ et l'asymptote $i = I_{max}$.	Méthode 1 : τ est l'abscisse de l'intersection entre la tangente de la courbe à $t = 0$ et l'axe des abscisses.
Méthode 2 : Pendant l'établissement du courant on a : $i(t) = I_p \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ À $t = \tau$ on a : $i(\tau) = I_p \cdot (1 - e^{-1}) = 0,63 \cdot I_p$; donc τ est l'abscisse qui correspond à l'ordonnée $0,63 \cdot I_p$	Méthode 2 : pendant d'annulation du courant on a : $i(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ À $t = \tau$ on a : $i(\tau) = I_0 \cdot e^{-1} = 0,37 \cdot I_0$ donc τ est l'abscisse qui correspond à l'ordonnée $0,37 \cdot I_0$

➤ La dimension de la constante du temps

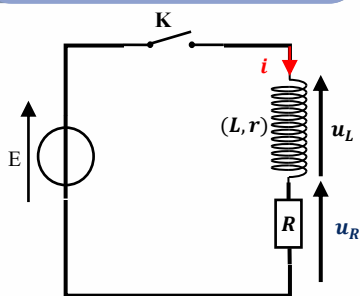
On a pour un conducteur Ohmique : $u = R \cdot i$ donc $[R] = \frac{[U]}{[I]}$

Pour une bobine on a : $u = L \cdot \frac{di}{dt}$ donc $[L] = \frac{[U] \cdot [T]}{[I]}$

D'où :

$$[\tau] = \frac{[L]}{[R]} = \left(\frac{[U] \cdot [T]}{[I]} \right) \times \left(\frac{[I]}{[U]} \right) = T$$

Donc : La grandeur τ a une dimension de temps son unité dans SI est la seconde (s)



a) Équations différentielles

❖ Vérifier par « i »

D'après la loi d'additivité des tensions :

$$u_L + u_R = E \quad (*)$$

$$L \frac{di}{dt} + r \cdot i + R \cdot i = E$$

$$L \frac{di}{dt} + (r + R) \cdot i = E \quad \text{Factoriser par } i$$

$$L \frac{di}{dt} + R_T \cdot i = E$$

diviser par R_T

$$\text{On pose } \tau = \frac{L}{R_T} \quad \frac{L}{R_T} \cdot \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R_T}$$

$$\tau \cdot \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R_T}$$

❖ Vérifier par « u_R »

D'après la loi d'additivité des tensions :

$$u_L + u_R = E$$

$$L \frac{di}{dt} + r \cdot i + R \cdot i = E$$

$$L \frac{di}{dt} + (r + R) \cdot i = E$$

$$L \frac{di}{dt} + R_T \cdot i = E$$

$$\frac{L}{R_T} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{u_R}{R} \right) + \frac{u_R}{R} = \frac{E}{R_T} \quad \text{On remplace } i \text{ par } \frac{u_R}{R}$$

$$\frac{L}{R_T} \cdot \frac{1}{R} \frac{du_R}{dt} + \frac{u_R}{R} = \frac{E}{R_T}$$

$$\frac{L}{R_T} \cdot \frac{du_R}{dt} + u_R = \frac{E \cdot R}{R_T}$$

$$\text{On pose } \tau = \frac{L}{R_T}$$

$$\tau \cdot \frac{du_R}{dt} + u_R = \frac{E \cdot R}{R_T}$$

❖ Vérifier par « u_L » bonus

Il existe plusieurs méthodes pour la déterminer

D'après la loi d'additivité des tensions :

$$u_L + u_R = E$$

Mêmes étapes que précédent

$$\frac{L}{R_T} \cdot \frac{du_R}{dt} + u_R = \frac{E \cdot R}{R_T}$$

$$u_R = E - u_L \quad \rightarrow \quad \frac{du_R}{dt} = -\frac{du_L}{dt}$$

$$-\frac{L}{R_T} \cdot \frac{du_L}{dt} + (E - u_L) = \frac{E \cdot R}{R_T}$$

$$\frac{L}{R_T} \cdot \frac{du_L}{dt} - (E - u_L) = -\frac{E \cdot R}{R_T}$$

$$\frac{L}{R_T} \cdot \frac{du_L}{dt} + u_L = -\frac{E \cdot R}{R_T} + E$$

$$\frac{L}{R_T} \cdot \frac{du_L}{dt} + u_L = \frac{-E \cdot R + rE + RE}{R + r}$$

$$\frac{L}{R_T} \cdot \frac{du_L}{dt} + u_L = \frac{r \cdot E}{R_T}$$

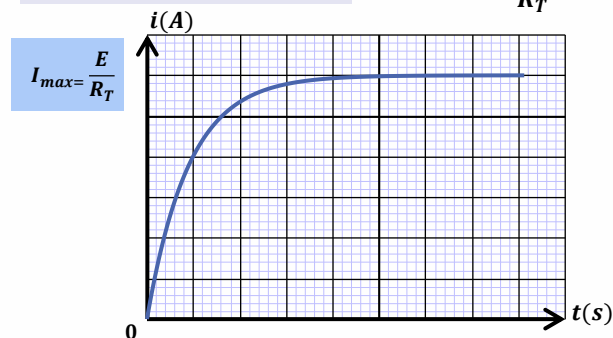
b) La solution de l'équation différentielle et les courbes

❖ Vérifier par « i »

$$i(t) = \frac{E}{R_T} (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

$$i(0) = 0$$

$$i(\infty) = \frac{E}{R_T}$$

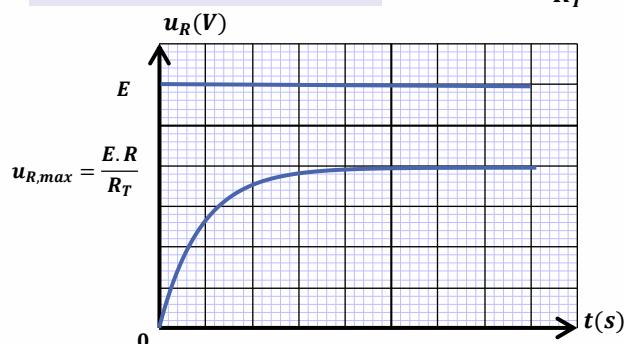


❖ Vérifier par « u_R »

$$u_R(t) = \frac{E \cdot R}{R_T} (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

$$q(0) = 0$$

$$q(\infty) = \frac{E \cdot R}{R_T}$$



❖ Vérifier par « u_L »

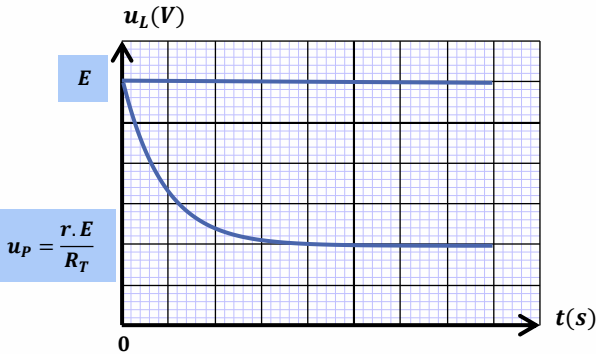
$$u_L = r \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} \Rightarrow u_L = r \cdot \frac{E}{R_T} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + L \cdot \frac{E}{R_T} \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$\Rightarrow$

$$u_L(t) = r \cdot \frac{E}{R_T} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_L(0) = E$$

$$u_L(\infty) = \frac{r \cdot E}{R_T}$$

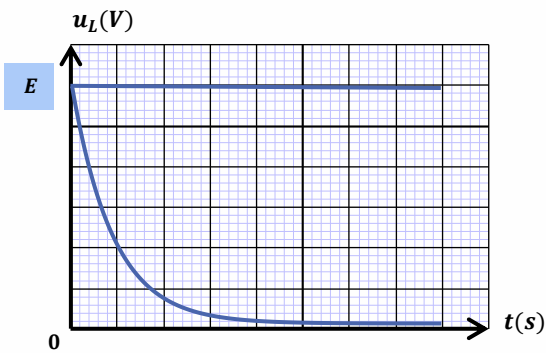


Cas d'une bobine idéal $r = 0$

$$u_L(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

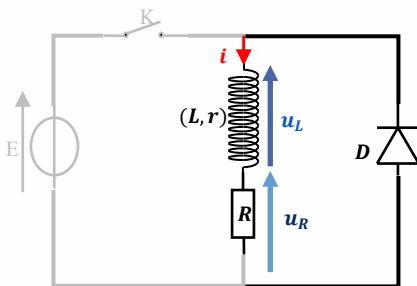
$$u_L(0) = E$$

$$u_L(\infty) = 0$$



7

Annulation du courant



a) Équations différentielles

❖ Vérifier par « i »

D'après la loi d'additivité des tensions :

$$u_L + u_R = 0$$

$$L \frac{di}{dt} + r \cdot i + R \cdot i = 0$$

$$L \frac{di}{dt} + (r + R) \cdot i = 0$$

Factoriser
par i

$$L \frac{di}{dt} + R_T \cdot i = 0$$

On pose
 $\tau = \frac{L}{R_T}$

$$\frac{L}{R_T} \cdot \frac{di}{dt} + i = 0$$

$$\tau \cdot \frac{di}{dt} + i = 0$$

❖ Vérifier par « u_R »

D'après la loi d'additivité des tensions :

$$u_L + u_R = 0$$

$$L \frac{di}{dt} + r \cdot i + R \cdot i = 0$$

$$L \frac{di}{dt} + (r + R) \cdot i = 0$$

$$L \frac{di}{dt} + R_T \cdot i = 0$$

$$\frac{L}{R_T} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{u_R}{R} \right) + \frac{u_R}{R} = 0$$

$$\frac{L}{R_T} \cdot \frac{1}{R} \frac{du_R}{dt} + \frac{u_R}{R} = 0$$

$$\frac{L}{R_T} \cdot \frac{du_R}{dt} + u_R = 0$$

On pose
 $\tau = \frac{L}{R_T}$

$$\tau \cdot \frac{du_R}{dt} + u_R = 0$$

On
remplace
 i par $\frac{u_R}{R}$

❖ Vérifier par « u_L » bonus

D'après la loi d'additivité des tensions :

$$u_L + u_R = 0$$

Mêmes
étapes que
précédent

$$\frac{L}{R_T} \cdot \frac{du_R}{dt} + u_R = 0$$

$$u_R = -u_L \Rightarrow \frac{du_R}{dt} = -\frac{du_L}{dt}$$

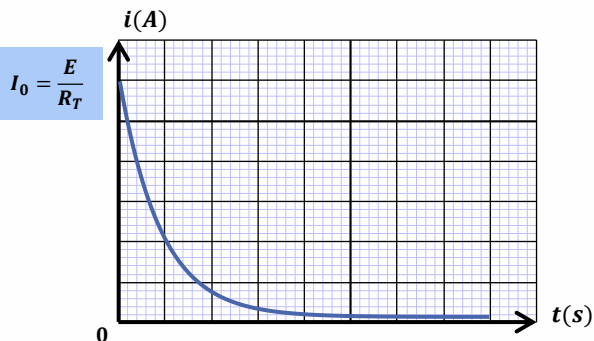
$$-\frac{L}{R_T} \cdot \frac{du_L}{dt} + (-u_L) = 0$$

$$\frac{L}{R_T} \cdot \frac{du_L}{dt} + u_L = \frac{r \cdot E}{R_T}$$

b) La solution de l'équation différentielle et les courbes

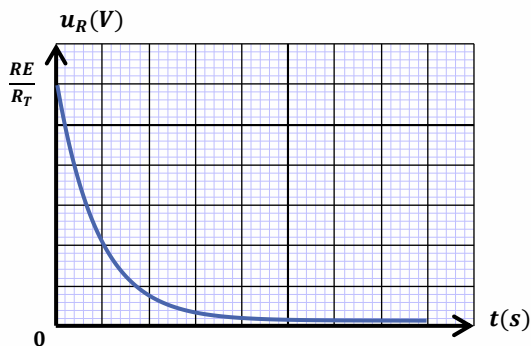
❖ Vérifier par « u_c »

$$i(t) = \frac{E}{R_T} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad i(0) = \frac{E}{R_T} \quad i(\infty) = 0$$



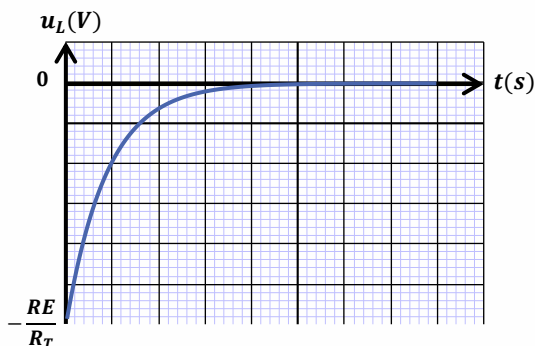
❖ Vérifier par « u_R »

$$u_R(t) = \frac{RE}{R_T} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad u_R(0) = \frac{RE}{R_T} \quad u_R(\infty) = 0$$



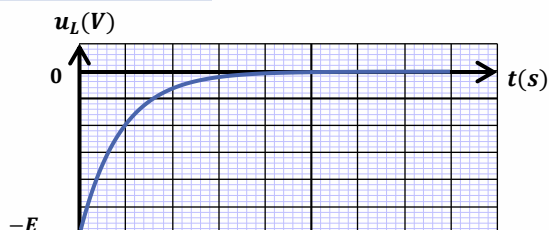
❖ Vérifier par « u_L »

$$u_L(t) = -\frac{R \cdot E}{R_T} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad u_L(0) = -\frac{RE}{R_T} \quad u_L(\infty) = 0$$



Cas d'une bobine idéal $r = 0$

$$u_L(t) = -E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad u_L(0) = -E \quad u_L(\infty) = 0$$



8 L'énergie emmagasinée dans la bobine

La puissance électrique fournie par le générateur à la bobine :

$$P = u_L \times i$$

Puisque $u_L = L \frac{di}{dt} + r \cdot i$ donc :

$$P = i \times L \cdot \frac{di}{dt} + r \cdot i^2$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L \cdot i^2 \right) + \underbrace{r \cdot i^2}_{\text{Puissance dissipée par effet joule}}$$

Puissance emmagasinée dans la bobine

Puissance dissipée par effet joule

D'autre part la puissance emmagasinée dans la bobine peut s'écrire :

$$P = \frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L \cdot i^2 \right)$$

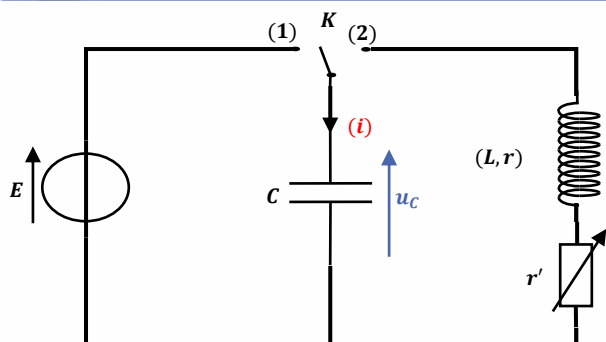
$$E_m = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2$$

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{R^2} \cdot u_R^2$$



Oscillations libres dans un circuit RLC série

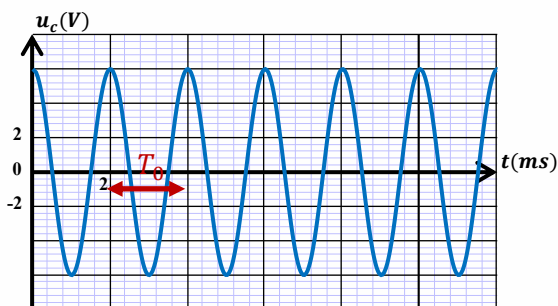
1 Décharge d'un condensateur dans une bobine



❖ Régimes d'oscillations

Régime périodique

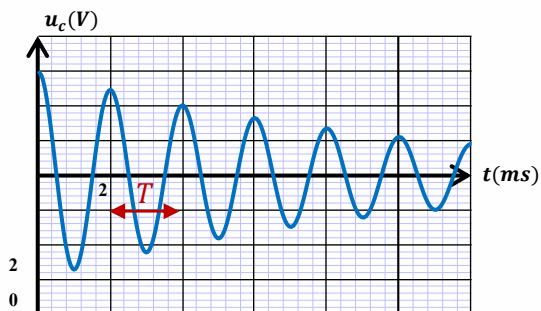
La résistance totale est nulle $R = 0$



- Les oscillations sont **libres non amorties**
- Le régime est périodique caractérisé par sa période propre T_0

Régime pseudo périodique

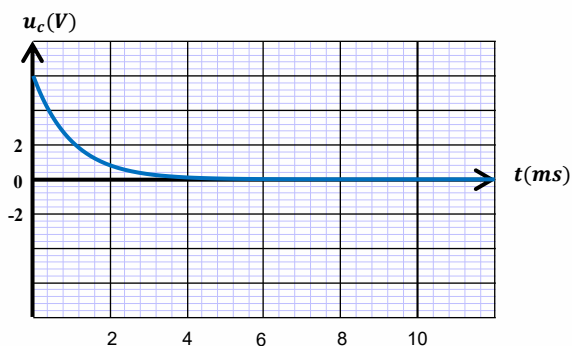
La résistance totale est faible



- L'amplitude des oscillations décroît au cours du temps.
- Les oscillations **s'amortissent** due à l'existence de la résistance.
- Le phénomène observé appelé **phénomène d'amortissement**.
- Interprétation** : dissipation d'énergie par effet Joule dans la résistance
- le régime est pseudopériodique caractérisé par sa pseudo-période T avec $T \approx T_0$.

Régime apériodique

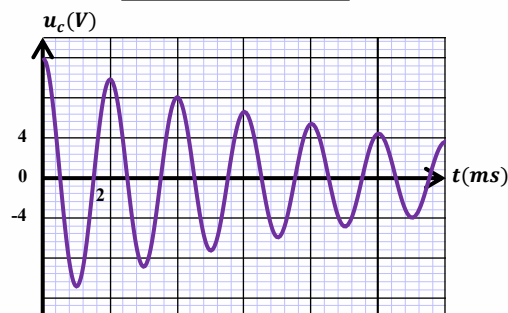
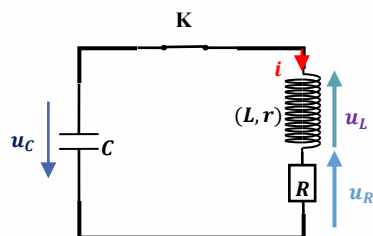
La résistance totale est très forte



- Si la résistance totale du circuit est grande les oscillations **disparaissent**, car l'**amortissement** est fort.
- Le condensateur perd sa charge sans oscillations

2 Étude d'un circuit RLC série

Après avoir chargé le condensateur, on le place dans un circuit comportant une bobine de résistance interne r et un conducteur ohmique de résistance R



❖ L'équation différentielle vérifiée par « u_c »

On applique la loi d'additivité des tensions

$$u_c + u_L + u_R = 0$$

Avec : $u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$; $u_R = R \cdot i$ et $i = C \cdot \frac{du_c}{dt}$ (*)

Donc : $u_c + L \cdot \frac{di}{dt} + r \cdot i + R \cdot i = 0$

D'où : $u_c + LC \cdot \frac{d^2u_c}{dt^2} + R_T C \cdot \frac{du_c}{dt} = 0$; avec : $R_T = R + r$

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{R_T}{L} \cdot \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot u_c = 0$$

❖ L'équation différentielle vérifiée par « q »

On a : $q = C \cdot u_C$ et $i = \frac{dq}{dt}$ d'où :

$$u_C = \frac{q}{C} \quad \text{et} \quad u_R = R \cdot \frac{dq}{dt} \quad \text{et} \quad u_L = L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} + r \cdot \frac{dq}{dt}$$

On remplace dans (*) :

$$(L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} + (R+r) \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0) \times C$$

D'où :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R_T}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0$$

❖ L'équation différentielle vérifiée par « i »

D'après la loi d'additivité des tensions

$$u_L + u_R + u_C = 0$$

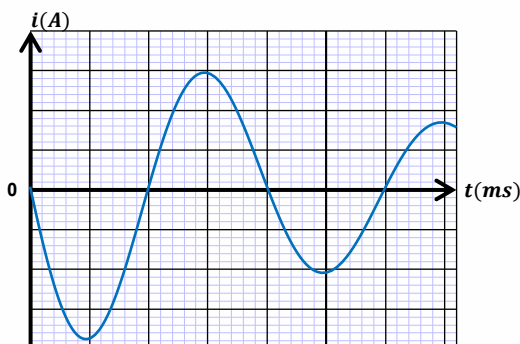
$$\frac{du_L}{dt} + \frac{du_R}{dt} + \frac{du_C}{dt} = 0$$

$$L \cdot \frac{d^2i}{dt^2} + r \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$$

$$(L \cdot \frac{d^2i}{dt^2} + r \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{i}{C}) \times C$$

$$LC \cdot \frac{d^2i}{dt^2} + (R+r)C \cdot \frac{di}{dt} + i = 0$$

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R_T}{L} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$$



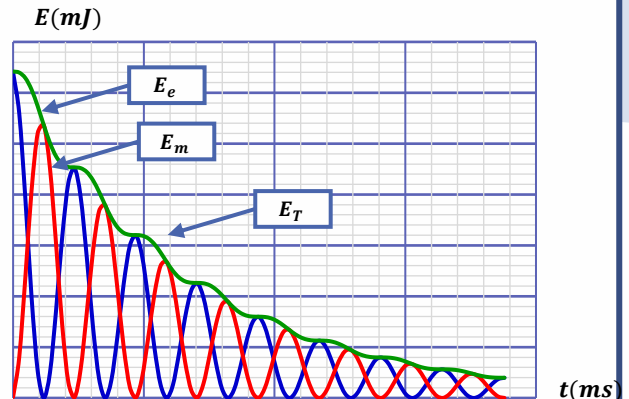
❖ Étude énergétique du circuit RLC

- Dans le circuit RLC, il y a toujours échange énergétique entre le condensateur et la bobine mais il y a dissipation d'énergie par effet Joule (transfert thermique) dans les résistances.
- Il y a donc amortissements des oscillations.
- L'énergie n'est plus constante, elle diminue au cours du temps.
- L'énergie totale emmagasinée dans un circuit RLC à chaque instant est :

$$E_T = E_e + E_m$$

$$E_T = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2 + \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2$$

$$E_T = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2$$



✓ Bonus 1 ; Démontrons que l'énergie E_T n'est pas conservative

$$\text{On a : } E_T = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2 + \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2$$

$$\text{et } i = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{du_C}{dt} \text{ Donc : } \frac{dE_T}{dt} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot 2 \cdot u_C \cdot \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{2} \cdot L \cdot 2 \cdot i \cdot \frac{di}{dt}$$

$$\text{Avec : } i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = u_C \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} + L \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} \cdot \frac{di}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = (u_C + L \cdot \frac{di}{dt}) \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = (u_C + L \cdot C \cdot \frac{d^2u_C}{dt^2}) \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt}$$

$$\text{Puisque : } u_C + LC \cdot \frac{d^2u_C}{dt^2} + R_T \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} = 0$$

$$\text{Donc : } u_C + LC \cdot \frac{d^2u_C}{dt^2} = -R_T \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} = -R_T \cdot i$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = (-R_T \cdot i) \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} = -R_T \cdot i^2$$

$$\frac{dE}{dt} \neq 0 : \text{d'où l'énergie totale n'est pas conservée}$$

La décroissance énergétique est due à la présence de la résistance R .
L'énergie totale d'un circuit RLC série décroît progressivement par effet joule.

✓ Bonus 2 ; la variation de l'énergie entre deux instants t_1 et t_2

On a :

$$\Delta E_T = E_{T(2)} + E_{T(1)}$$

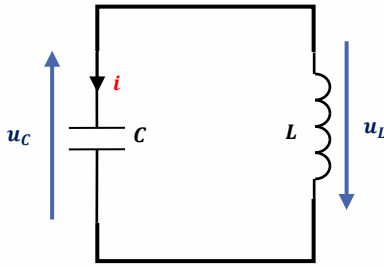
$$\Delta E_T = (E_{e(2)} + E_{m(2)}) + (E_{e(1)} + E_{m(1)})$$

$$\Delta E_T < 0$$

L'énergie dissipée par effet Joule : $E_J = |\Delta E_T|$

3 Étude d'un circuit LC idéal

Après avoir chargé le condensateur, on le place dans un circuit comportant une bobine de résistance interne négligeable ($r = 0$).



❖ L'équation différentielle vérifiée par « u_C »

D'après la loi d'additivité des tensions :

$$u_C + u_L = 0$$

$$u_C + L \cdot \frac{di}{dt} = 0$$

$$u_C + LC \cdot \frac{d^2 u_C}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} \cdot u_C = 0$$

❖ L'équation différentielle vérifiée par « q »

D'après la loi d'additivité des tensions :

$$u_L + u_C = 0$$

$$u_C = \frac{q}{C} \quad \text{et} \quad u_L = L \cdot \frac{d^2 q}{dt^2}$$

$$\left(L \cdot \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0 \right) \times C$$

$$LC \cdot \frac{d^2 q}{dt^2} + q = 0$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} \cdot q = 0$$

❖ L'équation différentielle vérifiée par « i »

D'après la loi d'additivité des tensions

$$u_L + u_C = 0$$

$$\frac{du_L}{dt} + \frac{du_C}{dt} = 0$$

$$L \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{i}{C} = 0$$

$$\left(L \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{i}{C} = 0 \right) \times C$$

$$LC \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + i = 0$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{LC} \cdot i = 0$$

❖ La solution de l'équation différentielle

La solution de l'équation différentielle s'écrit sous la forme :

L'expression de « u_C »

$$u_C(t) = U_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$$

L'expression de « q »

$$q(t) = Q_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$$

L'expression de « i »

$$i(t) = I_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$$

❑ U_m, Q_m, I_m : Amplitudes des oscillations, c'est la valeur maximale de la tension u_C , ou la charge q ou l'intensité i

❑ T_0 : est la période propre en seconde (s)

❑ φ : est la phase à l'origine, en radian (rad)

❖ Expression de période propre T_0

On dérive deux fois l'expression :

$$u_C(t) = U_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$$

On a donc :

$$\frac{du_C}{dt} = -U_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$$

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} = -U_m \cdot \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$$

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cdot u_C(t)$$

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cdot u_C(t) = 0$$

Par analogie avec l'équation différentielle

$$\Rightarrow \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{1}{LC}} \Rightarrow \frac{T_0}{2\pi} = \sqrt{LC}$$

$\Rightarrow$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

❖ La dimension de période propre T_0

On a : $u_L = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$, donc : $[L] = \frac{[U] \times [t]}{[I]}$

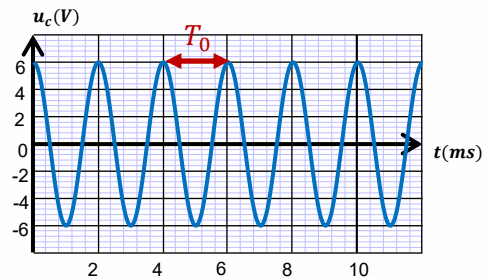
On a : $i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$, donc : $[C] = \frac{[I] \times [t]}{[U]}$

$$[T_0] = [2\pi \cdot \sqrt{LC}] = \sqrt{[L] \times [C]} = \sqrt{\frac{[U] \times T}{[I]} \times \frac{[I] \times T}{[U]}}$$

$$= \sqrt{T^2} = T$$

Donc la période propre T_0 a une dimension de temps

❖ L'expression de la tension « $u_C(t)$ »



$$U_m = 6V; T_0 = 2ms$$

Le condensateur est initialement chargé sa valeur maximale est $U_m = E$

La phase φ :

On prend en compte les conditions initiales à $t = 0$:

$$u_C(t = 0) = U_m$$

$$u_C(t = 0) = U_m \cdot \cos(\varphi)$$

$$\Rightarrow U_m = U_m \cdot \cos(\varphi) \Rightarrow \cos(\varphi) = 1 \Rightarrow \varphi = 0$$

D'où l'expression de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur s'écrit :

$$u_C(t) = E \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t\right)$$

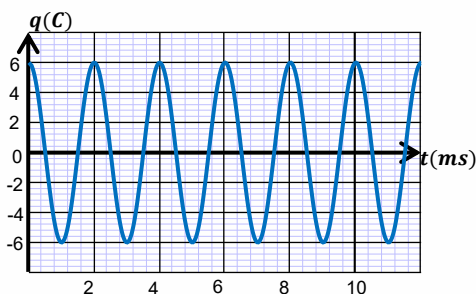
❖ L'expression de la charge « $q(t)$ »

On a : $q = C \cdot u_C$ et $u_C(t) = E \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t\right)$

D'où :

$$q(t) = CE \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t\right)$$

Avec : $Q_m = CE$, représente la charge maximale du condensateur



❖ L'expression de l'intensité du courant « $i(t)$ »

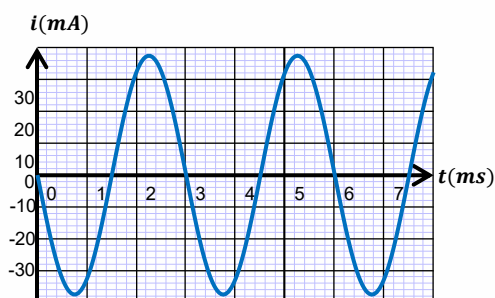
On a : $i = \frac{dq}{dt} = c \cdot \frac{du_C}{dt}$

$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$

Donc : $i = -CE \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t\right)$

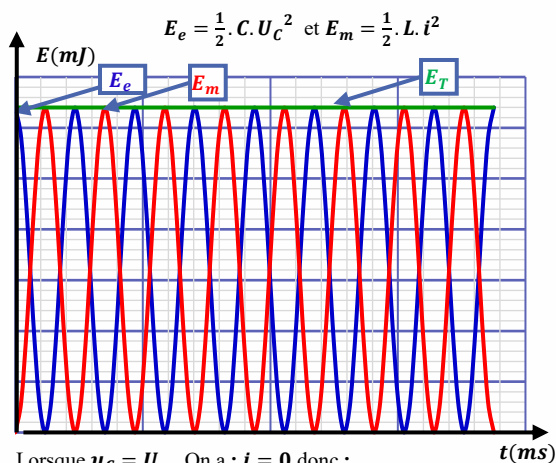
Ou bien : $i(t) = I_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$

Avec : $I_m = \frac{CE \cdot 2\pi}{T_0} = \frac{2\pi CE}{2\pi \sqrt{LC}} = E \sqrt{\frac{C}{L}}$ représente l'intensité maximale



❖ Étude énergétique du circuit LC

- ❑ L'énergie totale E_{Totale} dans circuit idéale LC **reste constante au cours du temps**, et égale à l'énergie emmagasinée initialement dans le condensateur, on dit que l'énergie **se conserve**, donc $E_T = Cte$
- ❑ Lors d'oscillations non amorties, l'énergie électrique dans le condensateur se transforme en énergie magnétique dans la bobine et vice versa. On a :



❖ Lorsque $u_C = U_m$, On a : $i = 0$ donc :

$$E_T = E_{e,\max} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_m^2$$

❖ Lorsque $u_C = 0$, On a : $i = I_m$ donc :

$$E_T = E_{m,\max} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I_m^2$$

✓ Bonus 1 ; Démontrons que l'énergie E se conserve

On a : $E_T = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2 + \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2$ et $i = \frac{dq}{dt} = c \cdot \frac{du_C}{dt}$

Donc : $\frac{dE_T}{dt} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot 2 \cdot u_C \cdot \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{2} \cdot L \cdot 2 \cdot i \cdot \frac{di}{dt}$

Avec : $i(t) = C \cdot \frac{du_C}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = u_C \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} + L \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} \cdot \frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = (u_C + L \cdot \frac{di}{dt}) \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = (u_C + L \cdot C \cdot \frac{d^2 u_C}{dt^2}) \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt}$$

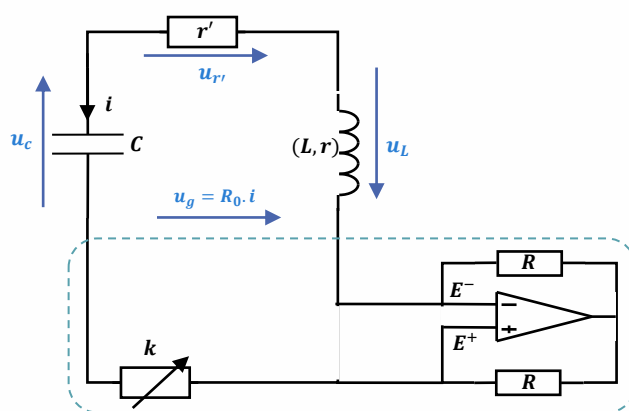
Puisque : $u_C + LC \cdot \frac{d^2 u_C}{dt^2} = 0$

Donc : $\frac{dE}{dt} = 0$

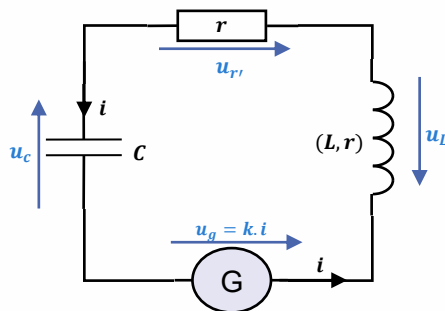
D'où l'énergie totale est constante

❖ Entretien des oscillations

Pour entretenir les oscillations dans un circuit **RLC** série, on ajoute au circuit un générateur (dispositif d'entretien) qui délivre une tension proportionnelle à l'intensité du courant ($u_g = k \cdot i$) et qui se comporte comme une résistance négative.



❖ Condition d'entretien des oscillations



On applique la loi d'additivité des tensions dans ce circuit :

On a : $u_C + u_L + u_R = u_g$

Avec : $u_L = L \cdot \frac{di}{dt} + r \cdot i$; $u_R = R \cdot i$ et $i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$

Donc : $u_C + L \cdot \frac{di}{dt} + r \cdot i + R \cdot i = k \cdot i$

D'où, l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C s'écrit :

$$u_C + LC \cdot \frac{d^2 u_C}{dt^2} + (R_T - k) \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} = 0$$

avec : $R_T = R + r$

Pour entretenir les oscillations il faut que le terme

$$(R_T - k) \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} = 0$$

Alors :

$$R_T - k = 0$$

D'où la condition des oscillations est : $R_T = k$