COLLECTION OPTIMAL

MATHÉMATIQUES

MÉTHODES SAVOIR-FAIRE ET ASTUCES

Steeve SARFATI Matthias FEGYVERES

CLASSES PRÉPARATOIRES AU HAUT ENSEIGNEMENT COMMERCIAL

Bréal

CLASSES PRÉPARATOIRES AU HAUT ENSEIGNEMENT COMMERCIAL

COLLECTION OPTIMAL

MATHÉMATIQUES

MÉTHODES SAVOIR-FAIRE ET ASTUCES

par

Steeve SARFATI
Matthias FEGYVERES
H.E.C., enseignants à ***OPTIMAL PREPA***

Avec la collaboration d'Hervé MULLER
agrégé de mathématiques, professeur en classes préparatoires

Bréal
1, rue de Rome 93561 Rosny Cedex

"Impose ta chance, sers ton bonheur et va vers ton risque.
A te regarder, ils s'habitueront."

René Char

ISBN : 2 84291 762 6

Dépôt légal : juillet 1997
ISBN : 2 85394 831 5

Avant-Propos

(à lire absolument pour une utilisation optimale de cet ouvrage)

Contrairement à de nombreuses idées reçues, la réussite en mathématiques aux concours commerciaux n'est pas réservée aux intelligences "supérieures" ou aux esprits doués. **Elle est avant tout affaire de méthode et le fruit d'une préparation ciblée et efficace, en un mot optimale.**

En effet, la réussite dans l'épreuve reine des concours commerciaux repose à la fois sur la connaissance et la maîtrise :
- de toutes les définitions, théorèmes et propriétés du cours, et ce jusque dans leurs moindres détails,
- de l'ensemble des questions techniques qui forment le corps des sujets de concours (étude de suites, de fonctions, somme de combinatoires...),
- des grandes méthodes mathématiques classiques en prépa HEC,
- des grandes questions classiques (études des polynômes de Lagrange, produit de Cauchy, itération de la formule de Pascal...) qui apparaissent très souvent dans les sujets de concours,
- d'un très grand nombre d'astuces qui permettent de résoudre la quasi-totalité des questions posées à l'écrit comme à l'oral,

sans oublier le "background" mathématique, fruit de la connaissance des sujets les plus classiques qui retombent périodiquement aux concours.

De plus, **la rigueur mathématique** (c'est-à-dire la logique du raisonnement et la bonne utilisation des différents outils mathématiques), ainsi que la qualité de **la rédaction des copies** entrent pour une part importante (voire même très importante) dans l'appréciation des correcteurs.

C'est pourquoi, l'objectif de **"Méthodes, savoir-faire et astuces"** est de vous apporter la synthèse la plus parfaite possible des connaissances nécessaires à posséder ainsi que l'ensemble des savoir-faire indispensables en vue des concours.

En effet, chaque chapitre comprend :
- une fiche de cours, substantifique moelle des connaissances exigées par le programme et qui regroupe la totalité des théorèmes, définitions et propriétés que doivent connaître les préparationnaires,
- un grand nombre d'exercices techniques afin de vous permettre de vous entraîner efficacement,
- l'ensemble des grands exercices classiques récurrents aux concours qui doivent être parfaitement maîtrisés, ainsi que :
- toutes les méthodes et astuces nécessaires à votre réussite,

le tout parfaitement rédigé et avec la plus grande rigueur mathématique afin de vous donner le maximum d'atouts pour l'écrit comme pour l'oral.

Le lecteur notera ainsi qu'un certain nombre de propriétés telles la formule de Vandermonde, la stricte positivité de l'intégrale ou "si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ" ne font pas partie *stricto sensu* du cours. C'est pourquoi, ces propriétés ont été traitées en exercice. De façon générale, **les fiches de cours situées au début de chaque chapitre suivent à la lettre le programme officiel,** l'ensemble des "additifs" classiques étant traités en exercice et devront, dans la quasi-totalité des cas, être redémontrés aux concours.

Cet ouvrage, fruit de notre longue expérience des mathématiques en prépa HEC, d'abord en tant que préparationnaires, puis en tant qu'enseignants à ***OPTIMAL PREPA***, est donc la **synthèse de tous les éléments nécessaires à votre réussite aux concours** dans le plus grand souci de respecter à la lettre le programme officiel et d'être le plus exhaustif possible dans les types d'exercices proposés ainsi que dans les méthodes et astuces qui vous sont fournies.

Des étudiants les plus faibles à qui ce livre permettra une parfaite maîtrise du cours et des outils de base, aux étudiants les plus forts qui y trouveront l'ensemble des points les plus techniques ou les plus délicats du programme ainsi que les astuces de résolution les plus fines, **cet ouvrage doit vous apporter à tous les clefs du succès en mathématiques.**

Pour une bonne utilisation de cet ouvrage, nous avons indiqué pour chaque chapitre, chaque point du cours et chaque exercice, à quel public il s'adressait :
- **S❶** : voie scientifique, première année, **S❷** : voie scientifique, deuxième année,
- **E❶** : voie économique, première année, **E❷** : voie économique, deuxième année.

De plus, les différents exercices sont classés en trois catégories :
- ■ : ce sont les exercices techniques, plus ou moins basiques, visant à vous donner une parfaite maîtrise du cours,
- ★ : ce sont les exercices incontournables pour tout préparationnaire digne de ce nom : on y retrouve l'ensemble des propriétés et théorèmes hors-programme ainsi que les exercices les plus classiques qui apparaissent très souvent dans les sujets de concours et qu'il convient de savoir redémontrer ou de maîtriser parfaitement,
- ● : ce sont des exercices relativement classiques qu'il faut avoir vus au moins une fois dans sa vie (de préparationnaire) mais qui peuvent être mis de côté lors d'une première lecture si le temps vous manque.

Afin de vous guider au mieux et de **vous apporter toute notre expérience** tout au long de cet ouvrage, nous avons jalonné les exercices d'un grand nombre d'astuces destinées à vous faciliter la vie :

☞ Ceci est une astuce.

Dans les grandes occasions, nous vous avons également proposé des encadrés méthodologiques dont la lecture, parfois (voire même souvent) ardue, se doit néanmoins d'être des plus attentives :

<u>**Ceci est un encadré méthodologique**</u>

Enfin, lorsque certaines questions utilisent des démonstrations vues dans d'autres exercices, nous vous y avons renvoyé en procédant comme suit : d'abord le n° du chapitre (en gras) lorsque celui-ci est différent du chapitre en cours, puis le n° de l'exercice et enfin, le cas échéant, le n° de la question. Ainsi,
- "cf. exercice **12**.14.1" renvoie à la question 1 de l'exercice 14 du chapitre 12, alors que :
- "cf. exercice 1.1a" renvoie à la question 1a de l'exercice 1 du chapitre en cours.

En revanche, lorsqu'une question d'un exercice utilise la solution d'une question précédente (du même exercice), le n° de la question est indiqué en gras. Ainsi, "cf. **2b**" renvoie à la question 2b de l'exercice en cours.

Avant de vous laisser suer sang et eau, voici quelques conseils ou recommandations sur lesquels nous ne saurions trop insister :
- connaître par cœur les fiches de cours,
- maîtriser parfaitement les exercices techniques et être capable de reproduire (presqu'à la virgule près) les exercices marqués de l'★,
- apprendre (presque par cœur) la rédaction type de chaque question standard tout en vous inspirant de la rédaction employée en règle générale dans cet ouvrage pour bâtir vos copies de concours,
- mais aussi vous entraîner sur des sujets-type afin de mettre en pratique l'ensemble des connaissances que vous aurez acquises grâce à cet ouvrage (à ce sujet, nous ne saurions trop vous conseiller de travailler également sur "Les Plus Grands Classiques des Concours", complément idéal du "Méthodes, Savoir-Faire et Astuces" et qui regroupe la centaine de sujets les plus classiques qui apparaissent chaque année aux concours).

En espérant que vous parviendrez à tirer le meilleur de cet ouvrage puis le meilleur de vous-même aux concours grâce à celui-ci, en espérant également que vous prendrez autant de plaisir à la lecture de vos notes de maths aux concours que nous de temps, mais aussi de plaisir (si, si...) à l'écriture de ce livre,

Bon travail et bonne chance.
Les auteurs.

Sommaire

Préliminaires

Fiche de cours

I. Notions de logique SO EO

▪ ***Proposition :*** Enoncé vrai ou faux.

▪ ***Connecteurs :***
– et, ou logique (l'un ou l'autre ou les deux), ou exclusif (l'un ou l'autre à l'exclusion des deux), non,
– $\Rightarrow$: implication, $\Leftrightarrow$: équivalence.

▪ ***Quantificateurs :***
– universel : $\forall$, quel que soit,
– existentiel : $\exists$, il existe.

II. Ensembles SO EO

▪ ***Appartenance.*** Soit E un ensemble. On dit que x appartient à E, et on note $x \in E$, si x est élément de E. Si x n'appartient pas à E, on note $x \notin E$.

▪ ***Inclusion.*** Soient E et F deux ensembles. F est inclus dans E, et on note $F \subset E$, si tout élément de F est également élément de E. On dit alors que F est un sous-ensemble ou une partie de E. Si F n'est pas inclus dans E, on note $F \not\subset E$.

▪ ***Ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E.*** Soit E un ensemble. L'ensemble des parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$. Par convention, on a : $\varnothing \in \mathcal{P}(E)$.

▪ ***Union.*** Soient A et B deux ensembles. Leur réunion, notée $A \cup B$, est définie par : $A \cup B = \{x,\ x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
Soient I une partie de $\mathbb{N}$ et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles. Leur réunion, notée $\bigcup_{i \in I} A_i$, est définie par :
$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x,\ \exists i \in I,\ x \in A_i\}$; c'est l'ensemble des éléments appartenant à l'un au moins des $(A_i)_{i \in I}$.

▪ ***Intersection.*** Soient A et B deux ensembles. Leur intersection, notée $A \cap B$, est définie par : $A \cap B = \{x,\ x \in A \text{ et } x \in B\}$. On dit que A et B sont disjoints si $A \cap B = \varnothing$.

Soient I une partie de $\mathbb{N}$ et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles. Leur intersection, notée $\bigcap_{i \in I} A_i$, est définie par : $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x,\ \forall i \in I,\ x \in A_i\}$. On dit que les ensembles $(A_i)_{i \in I}$ sont deux à deux disjoints si $\forall (i, j) \in I^2,\ i \neq j,\ A_i \cap A_j = \varnothing$.

▪ ***Partition.*** Soient Ω un ensemble, I une partie de $\mathbb{N}$ et $\{A_i,\ i \in I\}$ un ensemble de parties de Ω. On dit que $\{A_i,\ i \in I\}$ forme une partition de Ω si :
– $\forall i \in I,\ A_i \neq \varnothing$,
– $\forall (i, j) \in I^2,\ i \neq j,\ A_i \cap A_j = \varnothing$,
– $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$.

▪ ***Complémentaire.*** Soient E un ensemble et A une partie de E. Le complémentaire de A dans E, noté $\complement_E A$ ou $\overline{A}$ est défini par : $\complement_E A = \{x \in E,\ x \notin A\}$.

▪ ***Lois de Morgan.***
– $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, et plus généralement, si I est une partie de $\mathbb{N}$: $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$,
– $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, et plus généralement, si I est une partie de $\mathbb{N}$: $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$.

▪ ***Différence.*** Soient E et F deux ensembles. Si $F \subset E$, l'ensemble E privé de F, noté $E \setminus F$, est défini par : $E \setminus F = \{x \in E, x \notin F\} = E \cap \bar{F}$.

▪ ***Produit cartésien.*** Soient E et F deux ensembles. Le produit cartésien de E par F, noté $E \times F$, est défini par : $E \times F = \{(x, y), x \in E, y \in F\}$.

III. Applications SO EO

1. Définition

Soient E et F deux ensembles. f est une application de E dans F si à tout élément x de E, f associe un et un seul élément y de F que l'on note f(x). On dit que $y = f(x)$ est l'image de x par f, x un antécédent de y par f, E l'ensemble de départ de f, F l'ensemble d'arrivée de f et on note : $f : \left| \begin{array}{l} E \to F \\ x \mapsto f(x) = y \end{array} \right.$.

2. Image directe, image réciproque

▪ ***Image directe.*** Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F et A une partie de E. On appelle image ou image directe de A par f, l'ensemble noté f(A) défini par : $f(A) = \{y \in F, \exists x \in A, y = f(x)\}$.

▪ ***Image réciproque.*** Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F et B une partie de F. On appelle image réciproque de B par f, l'ensemble noté $f^{-1}(B)$ défini par : $f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$.

3. Composée de deux applications

Soient E, F et G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G. L'application de E dans G qui à tout élément x de E associe un élément et un seul $g(f(x))$ de G (f associe à x une image et une seule f(x) dans F et g associe à f(x) une image et une seule $g(f(x))$ dans G) est la composée des applications f et g. On la note : $g \circ f$.

4. Restriction et prolongement d'une application

▪ ***Restriction.*** Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F et A une partie de E. On appelle restriction de f à A l'application de A dans F notée $f_{/A}$ définie par : $\forall x \in A, f_{/A}(x) = f(x)$.

▪ ***Prolongement.*** Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F et G un ensemble contenant E. On appelle prolongement de f à G toute application g de G dans F telle que $g_{/E} = f$.

5. Applications injectives, surjectives, bijectives

Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F.

▪ ***Injection.*** f est (une application) injective (ou une injection) si $\forall (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, c'est-à-dire si tout élément de F admet au plus un antécédent par f dans E.

▪ ***Surjection.*** f est (une application) surjective (ou une surjection) si $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$, c'est-à-dire si tout élément de F admet au moins un antécédent par f dans E.

▪ ***Bijection.*** f est (une application) bijective (ou une bijection) si f est injective et surjective, c'est-à-dire si $\forall y \in F, \exists ! x \in E, y = f(x)$, i.e. si tout élément de F admet exactement un antécédent par f dans E ; on note alors f^{-1} l'application de F dans E qui à tout élément de F associe son unique antécédent par f dans E.

6. Stabilité

Soient E un ensemble, f une application sur E et A une partie de E. On dit que A est stable par f si $f(A) \subset A$.

IV. Fonctions caractéristiques SO

■ ***Définition.*** Soient E un ensemble et A une partie de E. On appelle fonction caractéristique de A, l'application φ_A de E dans {0, 1}, notée parfois 1_A définie par : $\begin{cases} \forall x \in A, \varphi_A(x) = 1 \\ \forall x \in E \setminus A, \varphi_A(x) = 0 \end{cases}$.

■ ***Opérations sur les parties et sur leurs fonctions caractéristiques.*** Soient E un ensemble, A et B deux parties de E. On a :

– $\varphi_A = \varphi_B \Leftrightarrow A = B$,

– $\varphi_{C_E A} = 1 - \varphi_A$,

– $\varphi_{A \cap B} = \varphi_A \varphi_B$,

– $\varphi_{A \cup B} = \varphi_A + \varphi_B - \varphi_A \varphi_B$,

– $\varphi_{A \setminus B} = \varphi_A - \varphi_A \varphi_B$.

V. Raisonnement par récurrence SO EO

1. Récurrences faibles

■ ***Récurrence sur un terme.*** Soit P une propriété à démontrer sur $[n_0, +\infty[$ (resp. sur N) :
– On démontre la propriété P au rang n_0 (resp. 0),
– Soit $n \in [n_0, +\infty[$ (resp. $n \in N$), on suppose la propriété P vraie au rang n et on la montre au rang n + 1,
– Ainsi, la propriété P est vérifiée pour tout $n \in [n_0, +\infty[$ (resp. $n \in N$).

■ ***Récurrence sur plusieurs termes.*** Soient P une propriété à démontrer à partir d'un rang $n_0 \in N$ et p un entier naturel non nul :
– On démontre la propriété P aux rangs $n_0, n_0 + 1, \dots, n_0 + p$,
– Soit $n \in [n_0, +\infty[$, on suppose la propriété P vraie aux rangs $n, n + 1, \dots, n + p$ et on la montre au rang $n + p + 1$,
– Ainsi, la propriété P est vérifiée pour tout $n \in [n_0, +\infty[$.

2. Récurrence forte

Soit P une propriété à démontrer sur $[n_0, +\infty[$:
– On démontre la propriété P au rang n_0,
– Soit $n \in [n_0, +\infty[$, on suppose la propriété P vraie du rang n_0 au rang n et on la montre au rang n + 1,
– Ainsi, la propriété P est vérifiée pour tout $n \in [n_0, +\infty[$.

3. Récurrence descendante

Soient $n_0 \in N$ et P une propriété à démontrer sur $]-\infty, n_0]$:
– On démontre la propriété P au rang n_0,
– Soit $n \in]-\infty, n_0]$, on suppose la propriété P vraie au rang n et on la montre au rang n - 1,
– Ainsi, la propriété P est vérifiée pour tout $n \in]-\infty, n_0]$.

4. Montée finie, descente finie

■ ***Montée finie.*** Soient $(n_0, n_1) \in N^2$, $n_0 < n_1$ et P une propriété à démontrer sur $[n_0, n_1]$:
– On démontre la propriété P au rang n_0,
– Soit $n \in [n_0, n_1 - 1]$, on suppose la propriété P vraie au rang n et on la montre au rang n + 1,
– Ainsi, la propriété P est vérifiée pour tout $n \in [n_0, n_1]$.

■ ***Descente finie.*** Soient $(n_0, n_1) \in N^2$, $n_0 < n_1$ et P une propriété à démontrer sur $[n_0, n_1]$:
– On démontre la propriété P au rang n_1,
– Soit $n \in [n_0 + 1, n_1]$, on suppose la propriété P vraie au rang n et on la montre au rang n - 1,
– Ainsi, la propriété P est vérifiée pour tout $n \in [n_0, n_1]$.

VI. Sommations finies SO EO

■ ***Notations.*** Soient n un entier naturel et $(a_i)_{0 \le i \le n}$ une suite de réels. La somme $a_0 + a_1 + ... + a_n$ est également notée : $\sum_{i=0}^{n} a_i$ ou $\sum_{0 \le i \le n} a_i$ ou $\sum_{i \in [0,n]} a_i$.

■ ***Double sommation.*** Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $(a_i)_{1 \le i \le n}$ et $(b_j)_{1 \le j \le p}$ deux suites de réels. On a : $\sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} a_i b_j = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_i b_j\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right)$.

■ ***Changement de variable.*** Soient I et J deux parties (finies) de $\mathbb{N}$ et f une bijection de I vers J. Le changement de variable j = f(i) nous permet d'écrire : $\sum_{i \in I} a_{f(i)} = \sum_{j \in J} a_j$.

■ ***Valeur de $\sum_{k=0}^{n} k^p$ ($p \in [1, 3]$).*** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

– $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

– $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

– $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

VII. Numération SO

■ ***Numération en base a ($a \in [2, +\infty[$).*** Soit n un entier naturel. Il existe une unique décomposition de la forme $n = \sum_{i=0}^{p} \alpha_{p-i} a^i$ où $\forall i \in [0, p]$, $\alpha_{p-i} \in [0, a-1]$. L'écriture de n en base a est alors : $\overline{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}^{a}$. En base a, l'écriture de n est uniquement composée des chiffres 0, 1, 2, ..., a - 1.

■ ***Cas particuliers.***

• En base 10, l'écriture de n est composée des chiffres de 0 à 9. Si $n = \sum_{i=0}^{p} \alpha_{p-i} 10^i$, alors n s'écrit : $\overline{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}^{10}$, ou, par convention, en omettant de surligner ces chiffres.

• En base 2, l'écriture de n est composée uniquement des chiffres 0 et 1.

• En base a > 10, l'écriture de n est composée des chiffres de 0 à 9, suivis des lettres A, B... (jusqu'à B en base 12, F en base 16 ou hexadécimale).

■ ***Numération binaire.*** Pour exprimer un nombre n connu sous sa forme décimale (base 10) en binaire (base 2), on effectue la division euclidienne de n par 2, puis du quotient ainsi obtenu par 2, et ainsi de suite jusqu'à obtenir 1. On note $r_1, r_2, \dots, r_p$ les restes successifs de ces divisions. n s'écrit alors : $\overline{1\, r_p r_{p-1} r_{p-2} \dots r_1}^{2}$.

Exercices clefs, méthodes et astuces

SO EO

1. Détermination d'un nombre de termes

1) Soient $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels, n et p deux entiers naturels tels que $n \geq p$. Combien y a-t-il de termes dans la somme $\sum_{k=p}^{n} u_k$?

2) Soient $n\in\mathbb{Z}$ et $p\in\mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il de facteurs dans le produit $n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)$?

1) Il y a $n - p + 1$ termes dans la somme $\sum_{k=p}^{n} u_k$.

2) Il y a $\big(n - (n-p+1) + 1\big)$ facteurs, soit p facteurs dans le produit $n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)$.

☞ Le nombre de termes dans une somme ou de facteurs dans un produit est le rang du terme de rang le plus élevé moins le rang du terme de rang le moins élevé, plus 1 (si, bien évidemment, les rangs des termes ou des facteurs se suivent de 1 en 1).

☞ **De l'influence du nombre de poteaux sur le nombre d'intervalles.** Soit $(x_k)_{1\leq k\leq p}$ p réels distincts rangés par ordre croissant. Ils délimitent i intervalles avec :
– $i = p - 1$ si l'on ne considère que les intervalles du type $[x_k, x_{k+1}]$,
– $i = p + 1$ si l'on considère en plus les intervalles $]-\infty, x_1[$ et $]x_p, +\infty[$.

SO EO

2. Sommations

1) **a)** Calculer, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n} (k+1)^2$.

b) Calculer, à l'aide d'un changement de variable, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\sum_{k=0}^{n-1} (n-k+1)^3$.

2) **a)** Calculer, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$.

b) Calculer, pour tout $n\in[2, +\infty[$: $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+2}{k}\right)$.

3) Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Calculer $\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{p} i^3 \ln k\right)$.

4) Soient n et p deux entiers naturels non nuls et $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ une suite de réels positifs. Inverser les sommes suivantes (on admettra que cela est possible dans les questions **d** et **e**) :

a) $\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{p} u_{i,j}\right)$.

b) $\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i} u_{i,j}\right)$.

c) $\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=i}^{p} u_{i,j}\right)$ (avec $n \geq p$).

d) $\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{i} u_{i,j}\right)$.

e) $\sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{+\infty} u_{i,j}\right)$.

1) a) En effectuant le changement de variable $k' = k + 1$, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}(k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n+1} k^2$, soit, en reconnaissant la somme des carrés des n + 1 premiers entiers naturels non nuls :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}(k+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}}$$

b) En effectuant maintenant le changement de variable $k' = n - k + 1$, on peut écrire :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n-1}(n-k+1)^3 = \sum_{k=2}^{n+1} k^3$ soit :

$= \left(\sum_{k=1}^{n+1} k^3\right) - 1$ soit encore, en reconnaissant la somme des cubes des n + 1 premiers entiers naturels non nuls :

$= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 - 1$ et donc, après simplifications :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n-1}(n-k+1)^3 = \frac{n(n+3)(n^2+3n+4)}{4}}$$

☞ Lorsque l'on effectue un changement de variable linéaire ($k' = k + \alpha$ ou $k' = \alpha - k$) dans la somme $\sum_{k=p}^{n} u_{k+\alpha}$ ou $\sum_{k=p}^{n} u_{\alpha-k}$, on suit le modèle :

– changement de variable $k' = k + \alpha$: la borne inférieure de la somme devient $p + \alpha$ et la borne supérieure $n + \alpha$: $\sum_{k=p}^{n} u_{k+\alpha} = \sum_{k=p+\alpha}^{n+\alpha} u_k$.

– changement de variable $k' = \alpha - k$: les bornes s'inversent, la borne inférieure de la somme devient alors $\alpha - n$ et la borne supérieure $\alpha - p$: $\sum_{k=p}^{n} u_{\alpha-k} = \sum_{k=\alpha-n}^{\alpha-p} u_k$.

2) a) On a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}$ soit, en effectuant le changement de variable $k' = k + 1$ dans la deuxième somme :

$= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}$ soit encore, les termes s'éliminant deux à deux pour $k = 2$ à $k = n$ (lorsque $n \geq 2$) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}}$$

b) On a :

$\forall n \in [2, +\infty[,\ \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k+2}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\ln(k+2) - \ln k\right)$ soit :

$\forall n \in [2, +\infty[,\ \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+2}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+2) - \sum_{k=1}^{n} \ln k$ soit encore, en effectuant le changement de variable $k' = k + 2$ dans la première somme :

$= \sum_{k=3}^{n+2} \ln k - \sum_{k=1}^{n} \ln k$ et donc, les termes s'éliminant deux à deux pour $k = 3$ à $k = n$ (lorsque $n \geq 3$) :

$= \ln(n+2) + \ln(n+1) - \ln 2 - \ln 1$ soit enfin :

$$\boxed{\forall n \in [2, +\infty[,\ \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+2}{k}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)}$$

☞ Pour calculer certaines sommes, une méthode classique consiste à présenter les sommations de telle sorte que les termes s'éliminent presque tous deux à deux (méthode dite des "dominos"). Ainsi, pour toute suite réelle $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$, on peut écrire : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0$.

3) On a :

$\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{p} i^3 \ln k\right) = \sum_{k=1}^{n} \left[\ln k \left(\sum_{i=1}^{p} i^3\right)\right]$ soit, la somme sur i ne dépendant pas de k :

$= \left(\sum_{i=1}^{p} i^3\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \ln k\right)$ soit enfin, à l'aide des propriétés de la fonction ln et en reconnaissant la somme des cubes des p premiers entiers naturels non nuls :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{p} i^3 \ln k\right) = \left[\frac{p(p+1)}{2}\right]^2 \ln(n!)}$$

☞ Utilisation de la double sommation dans le cadre présenté dans le cours : i et k ne dépendent pas l'un de l'autre et le terme sous le signe $\sum$ est le produit d'un terme en i et d'un terme en k.

4) a) Comme i et j sont indépendants, on peut écrire :

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{p} u_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{p} \left(\sum_{i=0}^{n} u_{i,j}\right)}$$

b) Comme lorsque i décrit $[0, n]$, j décrit $[0, i]$, j décrit donc $[0, n]$, et lorsque j décrit $[0, n]$, i décrit $[j, n]$ $(0 \leq j \leq i \leq n)$. On en déduit alors :

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{i} u_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=j}^{n} u_{i,j}\right)}$$

c) Comme lorsque i décrit $[0, n]$, j décrit $[i, p]$ (où $p \leq n$), j décrit donc $[0, p]$, et lorsque j décrit $[0, p]$, i décrit $[0, j]$ $(0 \leq i \leq j \leq p \leq n)$. La somme ne comprenant aucun terme tel que $i > p$, on en déduit alors :

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=i}^{p} u_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{p} \left(\sum_{i=0}^{j} u_{i,j}\right)}$$

d) Comme lorsque i décrit $\mathbb{N}$, j décrit $[0, i]$, j décrit donc $\mathbb{N}$, et lorsque j décrit $\mathbb{N}$, i décrit $[j, +\infty[$ $(0 \leq j \leq i)$. On en déduit alors :

$$\boxed{\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{i} u_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=j}^{+\infty} u_{i,j}\right)}$$

e) Comme lorsque i décrit $[\![0, n-1]\!]$, j décrit $[\![i+1, +\infty[\![$, j décrit donc $\mathbb{N}^*$, et lorsque j décrit $\mathbb{N}^*$, i décrit $[\![0, n-1]\!] \cap [\![0, j-1]\!]$, soit : $[\![0, \min(n-1, j-1)]\!]$ $(0 \le i \le n-1$ et $i+1 \le j$, i.e. : $i \le j-1)$.

On en déduit alors : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{+\infty} u_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{\min(n-1,j-1)} u_{i,j}\right)$, soit, en scindant la première somme en deux suivant que $\min(n-1, j-1)$ est égal à $n-1$ ou $j-1$:

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{+\infty} u_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j-1} u_{i,j}\right) + \sum_{j=n+1}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} u_{i,j}\right)}$$

☞ Attention aux inversions de sommes lorsque le terme sous les signes $\sum$ dépend à la fois de i et de j :
- il n'y a pas de réelle difficulté lorsque i et j ne dépendent pas l'un de l'autre (cf. **a**),
- lorsque i et j dépendent l'un de l'autre, pour inverser les sommes, il faut tout d'abord déterminer l'ensemble le plus large possible décrit par j, puis, lorsque j décrit cet ensemble, l'ensemble décrit alors par i (cf. **b** à **e**) ; il arrive même parfois que l'ensemble décrit par i dépende de l'intervalle sur lequel se trouve j (cf. **e**).

☞ Théoriquement, afin de respecter *stricto sensu* le programme, on ne peut inverser des sommes comportant un ou plusieurs symboles ∞. Néanmoins, lorsque ces sommes existent (convergent) et que tous leurs termes sont positifs, on est en droit de les inverser suivant la méthode exposée ci-dessus sans avoir à donner de plus amples justifications sauf si l'énoncé vous le demande.

SO EO

■ 3. Démonstrations par récurrence

1) Montrer par récurrence que :

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, C_{2n}^n \ge \dfrac{4^n}{2\sqrt{n}}$.

2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 7$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 7u_{n+1} - 10u_n$. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 5^n$.

1) **a)** Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

• Au rang n = 1, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2}$. La propriété est donc bien vérifiée au rang n = 1.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$. On a alors, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Par conséquent, si la propriété est vérifiée au rang n, elle est également vérifiée au rang n + 1.

• Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}}$$

b) Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ C_{2n}^n \geq \dfrac{4^n}{2\sqrt{n}}$.

• Au rang n = 1, on a : $C_2^1 = 2 = \dfrac{4}{2\sqrt{1}}$. La propriété est donc bien vérifiée au rang n = 1.

• Soit $n\in\mathbb{N}^*$, supposons que $C_{2n}^n \geq \dfrac{4^n}{2\sqrt{n}}$. On a alors :

– $C_{2n+2}^{n+1} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\,C_{2n}^n = \dfrac{2(2n+1)}{n+1}\,C_{2n}^n$, et :

– $\dfrac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}} = 4\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\left(\dfrac{4^n}{2\sqrt{n}}\right)$.

Montrons maintenant que : $\dfrac{2(2n+1)}{n+1}\,C_{2n}^n \geq 4\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\left(\dfrac{4^n}{2\sqrt{n}}\right)$. On a :

$$\left(\frac{\frac{2(2n+1)}{n+1}}{4\sqrt{\frac{n}{n+1}}}\right)^2 = \left(\frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}\right)^2 = \frac{4n^2+4n+1}{4n(n+1)} = \frac{4n^2+4n+1}{4n^2+4n},\ \text{d'où :}\ \left(\frac{\frac{2(2n+1)}{n+1}}{4\sqrt{\frac{n}{n+1}}}\right)^2 \geq 1,\ \text{i.e. :}$$

$\dfrac{2(2n+1)}{n+1} \geq 4\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\ (\geq 0)$.

Comme par hypothèse, on a : $C_{2n}^n \geq \dfrac{4^n}{2\sqrt{n}}\ (\geq 0)$, on en déduit alors en multipliant membre à membre ces deux dernières inégalités : $\dfrac{2(2n+1)}{n+1}\,C_{2n}^n \geq 4\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\left(\dfrac{4^n}{2\sqrt{n}}\right)$, et donc : $C_{2n+2}^{n+1} \geq \dfrac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}}$.

Par conséquent, si la propriété est vérifiée au rang n, elle est également vérifiée au rang n + 1.

• Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ C_{2n}^n \geq \frac{4^n}{2\sqrt{n}}}$$

NB : Le lecteur attentif aura sans doute remarqué que pour pouvoir utiliser l'hypothèse de récurrence, on a dû exprimer C_{2n+2}^{n+1} en fonction de C_{2n}^n (et $\dfrac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}}$ en fonction de $\dfrac{4^n}{2\sqrt{n}}$).

2) Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = 2^n + 5^n$:

• Aux rangs n = 0 et n = 1, on a : $u_0 = 2 = 2^0 + 5^0$ et $u_1 = 7 = 2^1 + 5^1$. La propriété est donc bien vérifiée aux rangs n = 0 et n = 1.

• Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $u_n = 2^n + 5^n$ et $u_{n+1} = 2^{n+1} + 5^{n+1}$. On a alors :

$u_{n+2} = 7(2^{n+1} + 5^{n+1}) - 10(2^n + 5^n) = 2^{n+2} + 5^{n+2}$.

Par conséquent, si la propriété est vérifiée aux rangs n et n + 1, elle est également vérifiée au rang n + 2.

• Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = 2^n + 5^n}$$

☞ Attention à la rédaction dans les raisonnements par récurrence, notamment lors de la deuxième étape de la récurrence : "Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons..."

SO EO

★ 4. Formule d'inversion de Pascal

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels tels que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ f_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k g_k.$$

Montrer par récurrence (1), puis de façon matricielle (2) que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ g_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f_k.$$

NB : La résolution du 2 nécessite la connaissance du cours : 2. Espaces vectoriels, applications linéaires et calcul matriciel.

1) Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N},\ g_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f_k$.

• Au rang $n = 0$, d'après la définition de f_0, on a : $f_0 = C_0^0 g_0 = g_0$. On a donc bien : $g_0 = (-1)^{0-0} C_0^0 f_0$.

• Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $\forall k\in[0, n]$, $g_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} C_k^i f_i$. D'après la définition de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut alors écrire :

$f_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k g_k$ soit :

$= \sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^k g_k + g_{n+1}$ soit encore, d'après l'hypothèse de récurrence :

$= \sum_{k=0}^{n} \left[C_{n+1}^k \left(\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} C_k^i f_i \right) \right] + g_{n+1}$ et en inversant les sommes ($0 \le i \le k \le n$) :

$= \sum_{i=0}^{n} \left[\left(\sum_{k=i}^{n} (-1)^{k-i} C_{n+1}^k C_k^i f_i \right) \right] + g_{n+1}$ et comme $\forall i\in[0, n]$, $\forall k\in[i, n]$, $C_{n+1}^k C_k^i = C_{n+1}^i C_{n-i+1}^{k-i}$ (cf. exercice **12.8**) :

$= \sum_{i=0}^{n} \left[C_{n+1}^i f_i \left(\sum_{k=i}^{n} (-1)^{k-i} C_{n-i+1}^{k-i} \right) \right] + g_{n+1}$ et donc, en effectuant le changement de variable $k' = k - i$ dans la seconde somme :

$= \sum_{i=0}^{n} \left[C_{n+1}^i f_i \left(\sum_{k=0}^{n-i} (-1)^{k} C_{n-i+1}^{k} \right) \right] + g_{n+1}$.

Or, d'après la formule du binôme de Newton, on sait que : $\forall i\in[0, n]$, $\sum_{k=0}^{n-i+1} (-1)^k C_{n-i+1}^k = (1-1)^{n-i+1} = 0$. On en déduit alors : $\forall i\in[0, n]$, $\sum_{k=0}^{n-i} (-1)^k C_{n-i+1}^k = -(-1)^{n-i+1} C_{n-i+1}^{n-i+1} = -(-1)^{n-i+1}$, et donc :

$f_{n+1} = -\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i+1} C_{n+1}^i f_i + g_{n+1}$ d'où :

$g_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i+1} C_{n+1}^i f_i + f_{n+1}$ et donc, le terme f_{n+1} intégrant la somme pour $i = n + 1$:

$= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^{(n+1)-i} C_{n+1}^i f_i$.

• Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ g_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f_k}$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons P_n la matrice telle que : $\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = P_n \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$ ①. On a alors clairement, d'après la définition des suites $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et avec les conventions usuelles sur les $\left(C_n^k\right)_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_n = \left(C_i^j\right)_{\substack{0 \le i \le n \\ 0 \le j \le n}} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & 0 & \\ 1 & 2 & 1 & & & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ 1 & & & & & 1 & \\ C_n^0 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \dots & \dots & C_n^n \end{pmatrix}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice P_n étant triangulaire inférieure avec tous ses coefficients diagonaux non nuls, elle est inversible. En multipliant alors la relation ① à gauche par P_n^{-1} ($n \in \mathbb{N}$), on en déduit alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} = P_n^{-1} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \text{ ②.}$$

Or, d'après la formule du binôme de Newton, on peut écrire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall j \in [0, n]$, $(1 + X)^j = \sum_{i=0}^{j} C_j^i X^i$, ce qui s'écrit encore, en reconnaissant P_n ($n \in \mathbb{N}$) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1+X \\ (1+X)^2 \\ \vdots \\ (1+X)^n \end{pmatrix} = P_n \begin{pmatrix} 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix}$, et donc, en multipliant cette relation à gauche par P_n^{-1} ($n \in \mathbb{N}$) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix} = P_n^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+X \\ (1+X)^2 \\ \vdots \\ (1+X)^n \end{pmatrix}$.

Or, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall i \in [0, n]$, $X^i = \left((1 + X) - 1\right)^i$ soit, en développant à l'aide de la formule du binôme de Newton :

$= \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} C_i^j (1 + X)^j$ et en ajoutant les termes pour lesquels $i < j \le n$ (termes nuls avec les conventions usuelles) :

$= \sum_{j=0}^{n} (-1)^{i-j} C_i^j (1 + X)^j$.

On en déduit alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n^{-1} = \left((-1)^{i-j} C_i^j\right)_{\substack{0 \le i \le n \\ 0 \le j \le n}}$. On peut désormais conclure, en explicitant la dernière ligne de la relation matricielle ② (ligne pour laquelle $i = n$) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $g_n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} C_n^j f_j$, i.e. :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ g_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f_k}$$

☞ Se souvenir de la formule d'inversion de Pascal (démonstrations à connaître) : Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k g_k$, alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $g_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f_k$.

Cette formule apparaît dans de nombreux problèmes de dénombrements.

SO EO

■ 5. Propriétés des polynômes de degré 2

1) Montrer que :

$$\forall p \in [0, 1],\ 0 \leq p(1-p) \leq \frac{1}{4}.$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système :

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ ab = 1 \end{cases}$$

1) Comme $\forall p \in [0, 1],\ 0 \leq 1 - p \leq 1$, on a : $\forall p \in [0, 1],\ p(1-p) \geq 0$. Or, $p(1-p) = -p^2 + p$ est un polynôme de degré 2 en p, de coefficient dominant strictement négatif.

Il admet donc un maximum sur $\mathbb{R}$ qu'il atteint en $-\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$ ($\in [0, 1]$) et ce maximum vaut : $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$. On a donc également : $\forall p \in [0, 1],\ p(1-p) \leq \frac{1}{4}$, d'où la conclusion :

$$\boxed{\forall p \in [0, 1],\ 0 \leq p(1-p) \leq \frac{1}{4}}$$

☞ Se souvenir qu'un polynôme de degré 2 de la forme $aX^2 + bX + c$ (avec $a \neq 0$) admet un extremum sur $\mathbb{R}$ en $-\frac{b}{2a}$. Cet extremum est un maximum si $a < 0$ et un minimum si $a > 0$.

2) D'après le cours, on sait que les racines du polynôme $X^2 - sX + p$ ont pour somme s et pour produit p. Les solutions du système $\begin{cases} a + b = 3 \\ ab = 1 \end{cases}$ sont donc les racines du polynôme $X^2 - 3X + 1$.

Or $X^2 - 3X + 1$ est un polynôme de degré 2, de discriminant $\Delta = 9 - 4 = 5$ et de racines $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. On en déduit alors :

$$\boxed{\text{Le système } \begin{cases} a + b = 3 \\ ab = 1 \end{cases} \text{ admet pour solutions : } a = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \text{ et } b = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } a = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ et } b = \frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

☞ Se souvenir que s et p sont respectivement les somme et produit des racines du polynôme $X^2 - sX + p$, et de façon plus générale, que les racines du polynôme $aX^2 + bX + c$ (avec $a \neq 0$) ont pour somme $-\frac{b}{a}$ et pour produit $\frac{c}{a}$.

☞ Pour déterminer les réels α et β tels que : $\begin{cases} \alpha\beta = p \\ \alpha + \beta = s \end{cases}$, il faut considérer le polynôme $X^2 - sX + p$ dont α et β sont les racines.

SO E❷

■ 6. Détermination de la valeur approchée d'une limite

Dans cet exercice, on suppose que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left| e^{-2} - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{2^k}{k!} \right| \leq \frac{2^n}{n!} \quad \text{(cf. exercice 9.1.2a).}$$

1) Déterminer, à l'aide de cet encadrement, une valeur approchée de e^{-2} à 10^{-5} près.

2) Déterminer maintenant une valeur approchée avec "cinq chiffres après la virgule" de e^{-2} à 10^{-5} près.

1) D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{2^k}{k!}$ constitue une valeur approchée de e^{-2} à $\frac{2^n}{n!}$ près. Or, $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{2^k}{k!}$ constitue une valeur approchée à 10^{-5} près de e^{-2} si et seulement si : $\left| e^{-2} - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{2^k}{k!} \right| \leq 10^{-5}$.

Une condition suffisante pour que $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{2^k}{k!}$ constitue une valeur approchée à 10^{-5} près de e^{-2} est donc : $\frac{2^n}{n!} \leq 10^{-5}$, soit, après calculs : $n \geq 12$. Or, à l'aide de la calculatrice, on obtient : $\sum_{k=0}^{11} (-1)^k \frac{2^k}{k!} \approx 0,135\,327\,881\,998$ à 10^{-12} près.

On en déduit alors, en négligeant les erreurs d'arrondis de la calculatrice :

$$\boxed{\text{Une valeur approchée à } 10^{-5} \text{ près de } e^{-2} \text{ est : } 0,135\,327\,881\,998}$$

☞ Lorsque l'on recherche une valeur approchée à ε près de la limite ℓ d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il faut, à l'aide d'un encadrement du type $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| < \eta_n$ où $\lim_{n\to+\infty} \eta_n = 0$, déterminer le premier entier n_0 tel que $\eta_{n_0} \leq \varepsilon$. En négligeant les erreurs d'arrondis de la calculatrice, on peut alors écrire que u_{n_0} constitue une valeur approchée de ℓ à ε près.

2) Déterminer une valeur approchée avec "cinq chiffres après la virgule" de e^{-2} à 10^{-5} près revient à déterminer une valeur approchée de e^{-2} à $5\cdot10^{-6}$ près et à arrondir ensuite cette valeur à la cinquième décimale la plus proche.

En effet, arrondir un nombre à la cinquième décimale la plus proche revient à perdre une précision, c'est-à-dire commettre une nouvelle erreur d'au plus $5\cdot10^{-6}$. Pour obtenir une valeur approchée finale à 10^{-5} près, il est donc nécessaire de ne commettre qu'une erreur d'au plus $5\cdot10^{-6}$ lors du calcul de la valeur approchée.

Or, une condition suffisante pour que $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{2^k}{k!}$ constitue une valeur approchée à $5\cdot10^{-6}$ près de e^{-2} est : $\frac{2^n}{n!} \leq 5\cdot10^{-6}$, soit, après calculs : $n \geq 13$. De plus, à l'aide de la calculatrice, on obtient :

$\sum_{k=0}^{12} (-1)^k \frac{2^k}{k!} \approx 0,135\,336\,433\,118$ à 10^{-12} près.

On en déduit alors, en négligeant à nouveau les erreurs d'arrondis de la calculatrice :

$$\boxed{\text{Une valeur approchée à } 10^{-5} \text{ près avec "cinq chiffres après la virgule" de } e^{-2} \text{ est donc : } 0,135\,34}$$

☞ Lors de la recherche d'une valeur approchée d'une limite ℓ, lorsque l'on en possède une valeur approchée à 10^{-n} près, il est impossible de conclure que ce nombre arrondi à la $n^{\text{ème}}$ décimale la plus proche constitue également une valeur approchée de ℓ à 10^{-n} près.
Pour obtenir une valeur approchée d'un nombre ℓ à 10^{-n} près arrondi à la $n^{\text{ème}}$ décimale, il est nécessaire de calculer une valeur approchée de ℓ à $5\cdot10^{-(n+1)}$ près avant d'arrondir ce nombre à la $n^{\text{ème}}$ décimale la plus proche.

50

■ 7. Numération

1) *Numération binaire*

a) Ecrire en binaire les nombres 1611 et 5887.

b) Ecrire en système décimal les nombres binaires : 1101110 et 1000101010100101.

2) *Autres systèmes de numération*

a) Ecrire les nombres 1611 et 5887 en base 8.

b) Ecrire les nombres 110 et 35493 en système héxadécimal (base 16).

3) Soient n un entier naturel non nul et b un entier naturel supérieur ou égal à 2. Déterminer en fonction de n et b le nombre de chiffres nécessaires à l'écriture de n dans la base b.

1) a) ▪ En écrivant dans la colonne de gauche du tableau suivant 1611 et ses quotients successifs dans la division euclidienne par 2 et dans la colonne de droite les restes de ces mêmes divisions, on détermine la décomposition de 1611 en binaire :

1611	1
805	1
402	0
201	1
100	0
50	0
25	1
12	0
6	0
3	1
1	

On en déduit l'écriture de 1611 en binaire : 11001001011.

▪ En procédant de même pour 5887 :

5887	1
2943	1
1471	1
735	1
367	1
183	1
91	1
45	1
22	0
11	1
5	1
2	0
1	

On en déduit l'écriture de 5887 en binaire : 1011011111111.

☞ Pour déterminer l'écriture en binaire d'un entier écrit sous forme décimale, il faut déterminer les restes successifs de la division euclidienne de cet entier par 2. Son écriture en binaire est alors constituée d'un "1" suivi de l'ensemble des restes successifs en partant du dernier pour remonter jusqu'au premier.

b) ▪ En numération décimale, le nombre binaire 1101110 représente : $2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^5 + 2^6$, c'est-à-dire : $2 + 4 + 8 + 32 + 64$, soit : 110.

▪ De même, le nombre binaire 1000101010100101 représente : $2^0 + 2^2 + 2^5 + 2^7 + 2^9 + 2^{11} + 2^{15}$ en numération décimale, c'est-à-dire : $1 + 4 + 32 + 128 + 512 + 2048 + 32768$, soit : 35493.

☞ Pour déterminer l'écriture décimale d'un entier n écrit dans une autre base b ($b \geq 2$) : $\overline{a_p a_{p-1} \ldots a_0}^b$, il faut revenir à la définition de l'écriture en base b d'un entier : $n = \sum_{k=0}^{p} a_k b^k$.

2) a) ▪ On a vu au **1a** que 1611 s'écrit 11001001011 en binaire. En regroupant ces chiffres trois à trois en partant du dernier et en traduisant en base 8 chacun des triplets obtenus, on obtient l'écriture de 1611 en base 8 : 3113.

▪ De même, 5887 s'écrivant 1011011111111 en binaire, on obtient son écriture en base 8 : 13377.

b) ▪ 110 s'écrivant en binaire 1101110 (cf. **1b**), en regroupant ces chiffres quatre à quatre en partant du dernier et en traduisant en base 16 chacun des quadruplets obtenus, on obtient l'écriture de 110 en base 16 : 6E.

▪ De même, 35493 s'écrivant 1000101010100101 en binaire, en système héxadécimal, il s'écrit : 8AA5.

☞ Pour déterminer l'écriture en base 8 ($= 2^3$) d'un entier quelconque, il faut regrouper trois à trois les chiffres de son écriture binaire en partant du dernier, puis traduire chaque triplet en un chiffre de base 8.
Pour écrire un chiffre en base 16 ($= 2^4$), on procède à la même opération, mais en regroupant cette fois-ci les chiffres de l'écriture binaire quatre à quatre et en traduisant chacun des quadruplets obtenus.

3) ▫ Par définition de l'écriture en base b, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, b^p est le premier entier qui s'écrive à l'aide de p + 1 chiffres en base b. On en déduit alors que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, tous les entiers de $[\![b^p, b^{p+1} - 1]\!]$ s'écrivent à l'aide de p + 1 chiffres en base b.

Or, on a :

$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![b^p, b^{p+1} - 1]\!], b^p \leq k < b^{p+1}$ soit, en composant par la fonction ln (strictement croissante) :

$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![b^p, b^{p+1} - 1]\!], p \ln b \leq \ln k < (p + 1) \ln b$ soit encore, en divisant cette relation par $\ln b > 0$ ($b \geq 2$) :

$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![b^p, b^{p+1} - 1]\!], p \leq \dfrac{\ln k}{\ln b} < p + 1$ et donc :

$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![b^p, b^{p+1} - 1]\!], E\left[\dfrac{\ln k}{\ln b}\right] = p.$

Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, tout entier $k \in [\![b^p, b^{p+1} - 1]\!]$, c'est-à-dire tout entier k supérieur ou égal à b s'écrit en base b à l'aide de $E\left[\dfrac{\ln k}{\ln b}\right] + 1$ chiffres.

▫ De plus, tout entier naturel non nul k inférieur strictement à b s'écrit en base b à l'aide d'un seul chiffre. Comme on a en outre : $\forall k \in [\![1, b - 1]\!], E\left[\dfrac{\ln k}{\ln b}\right] + 1 = 1$, le cas p = 0 rejoint le cas général et on en déduit alors :

$\forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![b^p, b^{p+1} - 1]\!], E\left[\dfrac{\ln k}{\ln b}\right] = p$, d'où la conclusion :

$$\boxed{\text{Le nombre de chiffres nécessaires à l'écriture de n dans la base b est } E\left[\frac{\ln n}{\ln b}\right] + 1}$$

☞ Se souvenir que le nombre de chiffres nécessaires à l'écriture d'un entier naturel non nul n en base b ($b \geq 2$) est : $E\left[\dfrac{\ln n}{\ln b}\right] + 1$.

Nombres Complexes Polynômes

Fiche de cours

A) Nombres complexes

I. Propriétés fondamentales de $\mathbb{C}$ SO

■ Tout complexe z ($z \in \mathbb{C}$) s'écrit de manière unique $z = a + ib$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $i^2 = -1$, et on note :

– $\mathcal{Re}(z) = a$, la partie réelle de z,

– $\mathcal{Im}(z) = b$, la partie imaginaire de z,

– $\bar{z} = a - ib$, le conjugué de z,

– $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, le module de z.

■ ***Propriétés.*** Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a :

• $\bar{\bar{z}} = z$, $z\bar{z} = |z|^2$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ $(z \neq 0)$, $|\bar{z}| = |z|$,

• $z = \bar{z}$ si et seulement si $z \in \mathbb{R}$ (i.e. $\mathcal{Im}(z) = 0$), $z = -\bar{z}$ si et seulement si z est imaginaire pur (i.e. $\mathcal{Re}(z) = 0$),

• $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$, $\overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z'}$,

• $\mathcal{Re}(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$, $\mathcal{Im}(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$,

• $|zz'| = |z|\,|z'|$, $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

II. Exponentielle complexe, argument d'un complexe SO

1. Exponentielle complexe

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on appelle exponentielle complexe, et on note $e^{i\theta}$ le nombre $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

■ ***Propriétés.***

• $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $|e^{i\theta}| = 1$,

• $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

■ ***Formules de Moivre :*** $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n$, soit :

• $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\cos(n\theta) = \mathcal{Re}\left(e^{in\theta}\right) = \mathcal{Re}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^n\right)$,

• $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sin(n\theta) = \mathcal{Im}\left(e^{in\theta}\right) = \mathcal{Im}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^n\right)$.

■ ***Formules d'Euler.***

• $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$,

• $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

2. Argument d'un complexe non nul

▪ Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et r son module ($r = |z|$). On appelle Argument de z l'unique réel $\theta_0 \in]-\pi, \pi]$ tel que $z = re^{i\theta_0}$, et on note : $\theta_0 = \text{Arg}(z)$.

Si $\theta_0 = \text{Arg}(z)$, alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\theta_0 + 2k\pi$ est un argument de z, que l'on note arg(z).

▪ Soit $z \in \mathbb{C}^*$, de module r et d'argument θ. On note : $z = [r, \theta]$.

▪ Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Si $z = a + ib = [r, \theta]$, alors : $\begin{cases} r = \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\theta = \frac{a}{r} \\ \sin\theta = \frac{b}{r} \end{cases}$.

III. Racines $n^{\text{èmes}}$ d'un complexe non nul SO

Soit n un entier naturel non nul.

▪ ***Racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.***

• 1 admet n racines $n^{\text{èmes}}$ dans ℂ. Ce sont les éléments de l'ensemble : $\left\{e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$.

• Si z est racine de l'unité, $\bar{z}$ l'est aussi.

• La somme des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité est nulle : $\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 0$.

▪ ***Racines $n^{\text{èmes}}$ d'un complexe non nul.***

• Tout complexe non nul z admet n racines $n^{\text{èmes}}$ dans ℂ, qui sont obtenues en faisant le produit de l'une quelconque d'entre elles par les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.

• Si $z = [r, \theta] = re^{i\theta}$, ses racines $n^{\text{èmes}}$ dans ℂ sont les éléments de l'ensemble : $\left\{\sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$.

IV. Equations du second degré à coefficients complexes SO

Soit à résoudre l'équation ① : $az^2 + bz + c = 0$ ($(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$). On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ et δ l'une des racines carrées de Δ (cf. **A.III**). Les racines de l'équation sont alors : $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$.

Cas particulier où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

• Si $\Delta > 0$, alors l'équation ① admet deux racines réelles distinctes : $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$,

• Si $\Delta = 0$, alors l'équation ① admet une racine réelle double : $-\frac{b}{2a}$,

• Si $\Delta < 0$, alors l'équation ① admet deux racines complexes conjuguées : $\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

B) Polynômes

I. Polynômes à coefficients dans 𝕂 (𝕂 = ℝ ou ℂ) SO

▪ Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de 𝕂 telle que : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, a_n = 0$.

• On appelle polynôme à coefficients dans 𝕂, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses coefficients, et on note : $P = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n$.

• On appelle fonction polynôme de 𝕂 dans 𝕂, l'application $x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$.

▪ L'ensemble des polynômes à coefficients dans 𝕂 est noté 𝕂[X].

■ ***Unicité des coefficients.*** Deux polynômes sont égaux si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux. Ainsi, si $P = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n$ et $Q = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n X^n$, P et Q sont égaux si et seulement si : $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n = b_n$.

■ ***Degré d'un polynôme.***

• Soit $P = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, a_n est le coefficient de degré n de P.

• Si $P \neq 0$, le degré de P (noté deg(P) ou d°P) est le plus grand des entiers n tels que $a_n \neq 0$ (a_n est alors le coefficient dominant de P).

• Si $P = 0$ (i.e. si tous les coefficients de P sont nuls), on pose, par convention : $\deg(P) = -\infty$.

• Soit $(P, Q)\in(\mathbb{K}[X])^2$ avec $P \neq 0$ et $Q \neq 0$. On a :

 – $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$ (si $\deg(P) \neq \deg(Q)$, alors $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$),

 – $\deg(\lambda P) = \deg(P)$ ($\lambda \neq 0$),

 – $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

• Soit $n\in\mathbb{N}$. L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n est noté $\mathbb{K}_n[X]$.

II. Division suivant les puissances décroissantes dans $\mathbb{K}[X]$ 50

■ Soit $(A, B)\in(\mathbb{K}[X])^2$, $B \neq 0$. On a : $\exists!(Q, R)\in(\mathbb{K}[X])^2$, $\deg(R) < \deg(B)$, $A = BQ + R$ où Q est le quotient et R le reste de la division suivant les puissances décroissantes (division euclidienne) de A par B.

■ On dit que B divise A si et seulement si le reste de la division suivant les puissances décroissantes de A par B est nul, c'est-à-dire si et seulement si : $\exists Q\in\mathbb{K}[X],\ A = BQ$.

III. Racines d'un polynôme 50

■ Soient $P\in\mathbb{K}[X]$ et $\lambda\in\mathbb{K}$. λ est racine de P si $P(\lambda) = 0$, c'est-à-dire si $(X - \lambda)$ divise P.

■ Soient $P\in\mathbb{K}[X]$, $\lambda\in\mathbb{K}$ et $k\in\mathbb{N}^*$. λ est racine d'ordre de multiplicité k de P si $(X - \lambda)^k$ divise P et $(X - \lambda)^{k+1}$ ne le divise pas.

■ Soient $P\in\mathbb{K}[X]$, $\lambda\in\mathbb{K}$ et $k\in\mathbb{N}^*$. λ est racine d'ordre de multiplicité k de P si et seulement si :
$\forall i\in[\![0, k - 1]\!],\ P^{(i)}(\lambda) = 0$ et $P^{(k)}(\lambda) \neq 0$.

■ Soit $P\in\mathbb{K}[X]$. Si $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ sont n racines distinctes de P ($n\in\mathbb{N}^*$) d'ordres de multiplicité respectifs $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$, alors $\prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ divise P et $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \leq \deg(P)$.

IV. Théorème de D'Alembert. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$ 50

1. Théorème de D'Alembert. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

■ ***Théorème de D'Alembert.*** Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

■ Tout polynôme P de degré n ($n\in\mathbb{N}$) a exactement n racines dans $\mathbb{C}$ (en tenant compte des ordres de multiplicité des racines).

■ Soient $P\in\mathbb{C}[X]$, $(\lambda_i)_{1\leq i\leq p}$ les p racines de P ($p\in\mathbb{N}^*$) d'ordres de multiplicité respectifs $(\alpha_i)_{1\leq i\leq p}$ et α ($\alpha\in\mathbb{C}$) le coefficient dominant de P. On peut alors écrire la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ de P : $P = \alpha\prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$.

2. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

■ Soient $P \in \mathbb{R}[X]$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Si λ est racine d'ordre de multiplicité k de P alors $\overline{\lambda}$ est également racine d'ordre de multiplicité k de P.

■ Soient $P \in \mathbb{R}[X]$, $(\lambda_i)_{1 \le i \le n}$ les n racines réelles de P ($n \in \mathbb{N}^*$) d'ordres de multiplicité respectifs $(\alpha_i)_{1 \le i \le n}$, $(\mu_i, \overline{\mu_i})_{1 \le i \le m}$ les 2m racines complexes ($m \in \mathbb{N}^*$) de P d'ordres de multiplicité respectifs $(\beta_i)_{1 \le i \le m}$ et α ($\alpha \in \mathbb{C}$) le coefficient dominant de P.

En notant, pour tout $i \in [1, m]$, $s_i = \mu_i + \overline{\mu_i}$ et $p_i = \mu_i \overline{\mu_i}$. On peut alors écrire la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ de P :

$$P = \alpha\left[\prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}\right]\left[\prod_{i=1}^{m}(X^2 - s_i X + p_i)^{\beta_i}\right].$$

Exercices clefs, méthodes et astuces

SO

★ 1. Cinq propriétés indispensables

1) a) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Montrer que si P admet au moins n + 1 racines dans $\mathbb{C}$ (en tenant compte des ordres de multiplicité des racines), alors P = 0.

b) Soient $n \in \mathbb{N}$, P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Montrer que si $\forall x \in I$, $P(x) = 0$, alors P = 0.

2) a) Soient $n \in \mathbb{N}$, $(P, Q) \in (\mathbb{C}_n[X])^2$. Montrer que s'il existe n + 1 valeurs distinctes $(x_k)_{1 \le k \le n+1}$ de $\mathbb{C}$ telles que $\forall k \in [1, n+1]$, $P(x_k) = Q(x_k)$, alors P = Q.

b) Soient $n \in \mathbb{N}$, P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Montrer que si $\forall x \in I$, $P(x) = Q(x)$, alors P = Q.

3) a) Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que PQ = 0. Montrer que P = 0 ou Q = 0.

b) Soient P et Q deux fonctions polynômes à coefficients réels et I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point tels que $\forall x \in I$, $P(x)Q(x) = 0$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 0$ ou $\forall x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = 0$.

4) Soient P, Q et R trois polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que PQ = RQ et $Q \neq 0$. Montrer que P = R.

5) Montrer que tout polynôme périodique de $\mathbb{R}[X]$ est élément de $\mathbb{R}_0[X]$, i.e. un polynôme constant.

1) a) Supposons $P \neq 0$ et soit alors $p \in \mathbb{N}$ le degré de P. Comme $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a : $p \le n$. Or, d'après le cours, tout polynôme de degré p admet exactement p racines dans $\mathbb{C}$ (en tenant compte des ordres de multiplicité des racines).

Comme d'après l'énoncé, P admet au moins n + 1 racines dans $\mathbb{C}$, on en déduit alors que $p \ge n + 1$. On aboutit ainsi à une contradiction et on peut alors conclure :

> Si $P \in \mathbb{C}_n[X]$ ($n \in \mathbb{N}$) et si P admet au moins n + 1 racines dans $\mathbb{C}$ (en tenant compte des ordres de multiplicité des racines), alors P = 0.

b) Comme I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, si $\forall x \in I$, $P(x) = 0$, P admet une infinité de racines dans $\mathbb{R}$, donc dans $\mathbb{C}$. Comme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ (car $\mathbb{R}_n[X] \subset \mathbb{C}_n[X]$), d'après la question précédente, on en déduit alors :

> Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ ($n \in \mathbb{N}$) et si $\forall x \in I$, $P(x) = 0$ (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point), alors P = 0.

2) a) S'il existe n + 1 valeurs distinctes $(x_k)_{1\leq k\leq n+1}$ de $\mathbb{C}$ telles que $\forall k\in[1, n+1]$, $P(x_k) = Q(x_k)$, on a alors : $\forall k\in[1, n+1]$, $(P - Q)(x_k) = 0$. Or, comme $(P, Q)\in(\mathbb{C}_n[X])^2$, on a : $(P - Q)\in\mathbb{C}_n[X]$. D'après le **1a**, on en déduit alors que $P - Q = 0$, et donc que $P = Q$, d'où la conclusion :

Si $(P, Q)\in(\mathbb{C}_n[X])^2$ ($n\in\mathbb{N}$) et s'il existe n + 1 valeurs distinctes $(x_k)_{1\leq k\leq n+1}$ de $\mathbb{C}$ telles que $\forall k\in[1, n+1]$, $P(x_k) = Q(x_k)$, alors $P = Q$.

b) Comme I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, si $\forall x\in I$, $P(x) = Q(x)$, on a : $\forall x\in I$, $(P - Q)(x) = 0$. Or, comme $(P, Q)\in(\mathbb{R}_n[X])^2$, on a : $(P - Q)\in\mathbb{R}_n[X]$. D'après le **1b**, on en déduit alors : $P - Q = 0$, d'où la conclusion :

Si $(P, Q)\in(\mathbb{R}_n[X])^2$ ($n\in\mathbb{N}$) et si $\forall x\in I$, $P(x) = Q(x)$ (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point), alors $P = Q$.

☞ **Attention !!! *Ces propriétés ne font pas partie du cours.*** Elles n'en sont pas moins essentielles.
En résumé : si un polynôme de $\mathbb{C}_n[X]$ ($n\in\mathbb{N}$) admet plus de n racines (car s'annule par exemple sur un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et admet ainsi une infinité de racines), c'est le polynôme nul.
Ou bien encore : si deux polynômes de $\mathbb{C}_n[X]$ ($n\in\mathbb{N}$) coïncident en un nombre de points strictement supérieur à n (car sont égaux par exemple sur un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point), ils sont égaux (démonstrations à connaître).

3) a) Supposons $P \neq 0$ et $Q \neq 0$. Soient alors p ($p\in\mathbb{N}$) le degré de P et q ($q\in\mathbb{N}$) le degré de Q. On peut alors écrire : $\deg(PQ) = p + q$, et donc : $PQ \neq 0$. On aboutit ainsi à une contradiction et on peut alors conclure :

$$\boxed{\text{Si } PQ = 0, \text{ alors } P = 0 \text{ ou } Q = 0}$$

☞ **Attention !!!** Ecrire que $P \neq 0$ ne signifie pas que P ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, mais que P n'est pas le polynôme nul, c'est-à-dire n'est pas identiquement nul sur $\mathbb{R}$.

b) Si $\forall x\in I$, $P(x)Q(x) = 0$, on peut écrire : $\forall x\in I$, $(PQ)(x) = 0$, soit (cf. **1b**) : $PQ = 0$, et donc (cf. question précédente) : $P = 0$ ou $Q = 0$, d'où la conclusion :

Si $\forall x\in I$, $P(x)Q(x) = 0$ (où I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point), alors : $\forall x\in\mathbb{R}$, $P(x) = 0$ ou $\forall x\in\mathbb{R}$, $Q(x) = 0$.

☞ Se souvenir que si le produit de deux polynômes (ou de deux fonctions polynômes) P et Q est nul (ou s'annule sur un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point), alors $P = 0$ ou $Q = 0$ (démonstrations à connaître).

4) Comme $PQ = RQ$, on peut écrire : $(P - R)Q = 0$, et donc (cf. **3a**) : $P - R = 0$ ou $Q = 0$. Comme $Q \neq 0$ (cf. énoncé), on en déduit alors : $P - R = 0$, i.e. : $P = R$, d'où la conclusion :

$$\boxed{\text{Si } PQ = RQ \text{ et } Q \neq 0, \text{ alors } P = R}$$

☞ Même si le programme officiel indique que l'"on pourra confondre polynôme et fonction polynôme sous un même vocable", il faut néanmoins faire attention à deux points :
– lorsque l'on procède à la division d'une fonction polynôme P par une fonction polynôme Q sur I, il faut s'assurer que $\forall x\in I$, $Q(x) \neq 0$; en revanche, lorsque l'on simplifie une égalité du type $PQ = RQ$ par un polynôme Q, il suffit de s'assurer que Q n'est pas le polynôme nul,
– lorsque l'on écrit une fonction polynôme P, on doit toujours faire précéder l'écriture de P(x) d'un quantificateur, x pouvant alors prendre toutes les valeurs de $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{C}$) ; en revanche, lorsque l'on écrit un polynôme P, les écritures P et P(X) sont indifférentes et ne doivent pas être précédées de quantificateur, X étant une "indéterminée" (on doit donc éviter d'écrire par exemple que "X = 1", mais expliquer plutôt que l'on prend le polynôme en 1).

5) ☐ Soient P un polynôme périodique de $\mathbb{R}[X]$, n son degré ($n \in \mathbb{N}$) et T ($T \in \mathbb{R}_+^*$) sa période. On peut alors écrire :

$\forall x \in \mathbb{R}, P(x+T) = P(x)$ d'où :

$\forall k \in \mathbb{N}, P(kT) = P\big((k-1)T\big)$ et donc, par une récurrence immédiate :

$\forall k \in \mathbb{N}, P(kT) = P(0)$ i.e. :

$\forall k \in \mathbb{N}, P(kT) - P(0) = 0$ soit encore, en posant $Q = P - P(0)$:

$\forall k \in \mathbb{N}, Q(kT) = 0.$

Ainsi, Q admet une infinité de racines dans $\mathbb{R}$, donc dans $\mathbb{C}$. Comme $Q \in \mathbb{C}_n[X]$ (car $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}_n[X] \subset \mathbb{C}_n[X]$), d'après le **1a**, on en déduit alors que $Q = 0$, et donc que $P = P(0)$, i.e. : $P \in \mathbb{R}_0[X]$. On peut désormais conclure :

$\boxed{\text{Tout polynôme périodique de } \mathbb{R}[X] \text{ est élément de } \mathbb{R}_0[X] \text{, c'est-à-dire constant}}$

☞ Se souvenir que tout polynôme périodique de $\mathbb{R}[X]$ est élément de $\mathbb{R}_0[X]$, c'est-à-dire constant (démonstration à connaître).

50

■ 2. Reste de la division suivant les puissances décroissantes de deux polynômes

Soit n un entier naturel non nul.

1) Déterminer le reste de la division suivant les puissances décroissantes de X^n par $(X-1)(X-2)$.

2) Déterminer le reste de la division suivant les puissances décroissantes de X^n par $(X-1)^2(X-2)$.

3) Soit θ un nombre réel. Déterminer le reste de la division suivant les puissances décroissantes de $(X\sin\theta + \cos\theta)^n$ par X^2+1.

1) Comme $\deg\big((X-1)(X-2)\big) = 2$, en notant Q_n le quotient et R_n le reste de la division suivant les puissances décroissantes de X^n par $(X-1)(X-2)$, on peut écrire que : $X^n = (X-1)(X-2)Q_n(X) + R_n(X)$ avec $\deg\big(R_n(X)\big) \leq 1$. On en déduit alors que : $\exists!(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2, R_n(X) = a_nX + b_n$, et donc que :

$\exists!(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2, X^n = (X-1)(X-2)Q_n(X) + a_nX + b_n.$

En écrivant cette relation en 1 et en 2, on peut alors écrire que a_n et b_n sont solutions du système : $\begin{cases} a_n + b_n = 1 \\ 2a_n + b_n = 2^n \end{cases}$, donc que : $\begin{cases} a_n = 2^n - 1 \\ b_n = 2 - 2^n \end{cases}$, d'où la conclusion :

$\boxed{\text{Le reste de la division suivant les puissances décroissantes de } X^n \text{ par } (X-1)(X-2) \text{ est : } (2^n-1)X + (2-2^n)}$

☞ Pour déterminer le reste de la division suivant les puissances décroissantes d'un polynôme A par un polynôme B de degré $n \geq 1$ qui ne possède que des racines simples, il faut écrire que :

$\exists!(Q, R) \in \big(\mathbb{R}[X]\big)^2, \deg(R) \leq n-1, A = BQ + R$, et donc que :

$\exists! Q \in \mathbb{R}[X], \exists!(\lambda_k)_{0 \leq k \leq n-1} \in \mathbb{R}^n, A = BQ + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k X^k.$

En écrivant cette relation pour les différentes racines de B, on en déduit un système de n équations linéaires à n inconnues dont les $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ sont les solutions.
En résolvant ce système, on trouve ainsi le reste de la division suivant les puissances décroissantes de A par B.

2) Comme $\deg\left((X-1)^2(X-2)\right)=3$, en notant Q_n le quotient et R_n le reste de la division suivant les puissances décroissantes de X^n par $(X-1)^2(X-2)$, on peut écrire que : $X^n=(X-1)^2(X-2)Q_n(X)+R_n(X)$ avec $\deg\left(R_n(X)\right)\leq 2$. On en déduit alors que : $\exists!(a_n,b_n,c_n)\in\mathbb{R}^3,\ R_n(X)=a_nX^2+b_nX+c_n$, et donc que :

$\exists!(a_n,b_n,c_n)\in\mathbb{R}^3,\ X^n=(X-1)^2(X-2)Q_n(X)+a_nX^2+b_nX+c_n$ ①.

En écrivant cette relation en 1 et en 2, on en déduit alors que a_n, b_n et c_n sont solutions du système : $\begin{cases}a_n+b_n+c_n=1\\4a_n+2b_n+c_n=2^n\end{cases}$. De plus, en dérivant la relation ①, on peut également écrire :

$nX^{n-1}=2(X-1)(X-2)Q_n(X)+(X-1)^2Q_n(X)+(X-1)^2(X-2)Q_n'(X)+2a_nX+b_n$.

En écrivant alors cette relation en 1, on en déduit que a_n, b_n et c_n sont également solutions de l'équation : $2a_n+b_n=n$, et donc que a_n, b_n et c_n sont solutions du système :

$$\begin{cases}a_n+b_n+c_n=1\\4a_n+2b_n+c_n=2^n\\2a_n+b_n=n\end{cases}\qquad \text{soit } (L_1\leftarrow L_2-L_1-L_3,\ L_2\leftarrow 2L_1-2L_2+3L_3,\ L_3\leftarrow L_2-2L_3) :$$

$$\begin{cases}a_n=2^n-n-1\\b_n=3n+2-2^{n+1}\\c_n=2^n-2n\end{cases}.$$

On peut alors conclure :

Le reste de la division suivant les puissances décroissantes de X^n par $(X-1)^2(X-2)$ est : $(2^n-n-1)X^2+(3n+2-2^{n+1})X+(2^n-2n)$.

☞ Pour déterminer le reste de la division suivant les puissances décroissantes d'un polynôme A par un polynôme B de degré $n\geq 1$ qui possède des racines multiples, en notant p l'ordre maximal de multiplicités des racines de B, il faut écrire que :

$\exists!(Q,R)\in\left(\mathbb{R}[X]\right)^2,\ \deg(R)\leq n-1,\ A=BQ+R$, et donc que :

$\exists!Q\in\mathbb{R}[X],\ \exists!(\lambda_k)_{0\leq k\leq n-1}\in\mathbb{R}^n,\ A=BQ+\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_kX^k$.

En écrivant cette relation pour les différentes racines de B, puis, pour tout $i\in[1,p-1]$, en écrivant la dérivée $i^{\text{ème}}$ de cette relation pour chacune des racines d'ordre de multiplicité au moins $i+1$ de B, on en déduit à nouveau un système de n équations linéaires à n inconnues dont les $(\lambda_k)_{0\leq k\leq n-1}$ sont les solutions.

En résolvant ce système, on trouve à nouveau le reste de la division suivant les puissances décroissantes de A par B.

3) Comme $\deg(X^2+1)=2$, en notant Q_n le quotient et R_n le reste de la division suivant les puissances décroissantes de $(X\sin\theta+\cos\theta)^n$ par X^2+1, on peut écrire que : $(X\sin\theta+\cos\theta)^n=(X^2+1)Q_n(X)+R_n(X)$ avec $\deg\left(R_n(X)\right)\leq 1$. On en déduit alors que : $\exists!(a_n,b_n)\in\mathbb{R}^2,\ R_n(X)=a_nX+b_n$, et donc que :

$\exists!(a_n,b_n)\in\mathbb{R}^2,\ (X\sin\theta+\cos\theta)^n=(X^2+1)Q_n(X)+a_nX+b_n$.

En écrivant cette relation en i et en -i, on en déduit, à l'aide des formules de Moivre, que a_n et b_n sont solutions du système : $\begin{cases}a_ni+b_n=e^{in\theta}\\-a_ni+b_n=e^{-in\theta}\end{cases}$, et donc, à l'aide des formules d'Euler, que : $\begin{cases}a_n=\sin n\theta\\b_n=\cos n\theta\end{cases}$.

On peut désormais conclure :

Le reste de la division suivant les puissances décroissantes de $(X\sin\theta+\cos\theta)^n$ par X^2+1 est : $\sin n\theta\cdot X+\cos n\theta$.

NB : L'équation $a_ni+b_n=e^{in\theta}$ aurait pu suffire à déterminer a_n et b_n en remarquant que $a_n=\mathcal{Im}\left(e^{in\theta}\right)$ et $b_n=\mathcal{Re}\left(e^{in\theta}\right)$, a_n et b_n étant deux réels.

SO

3. Divisibilité de deux polynômes

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et θ un élément de $[0, \pi]$. On pose :

$$A = X^n \sin\theta - X \sin n\theta + \sin\big((n-1)\theta\big) \text{ et } B = X^2 - 2X\cos\theta + 1.$$

Montrer que A est divisible par B.

Trois cas se présentent : $\theta = 0$, $\theta = \pi$ et $\theta \in]0, \pi[$.

❑ Si $\theta = 0$, on a : $A = 0$ et $B = (X-1)^2$. Le polynôme nul étant divisible par tout polynôme non nul, A est bien divisible par B.

❑ Si $\theta = \pi$, on a : $A = 0$ et $B = (X+1)^2$. Le polynôme nul étant divisible par tout polynôme non nul, A est bien à nouveau divisible par B.

❑ Si $\theta \in]0, \pi[$, l'équation $x^2 - 2x\cos\theta + 1 = 0$, de discriminant : $\Delta = 4(\cos^2\theta - 1) = -4\sin^2\theta = (2i\sin\theta)^2$ admet pour racines $x_1 = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ et $x_2 = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$. B admet donc deux racines simples : $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.

Or, on a :

$A(e^{i\theta}) = e^{in\theta}\sin\theta - e^{i\theta}\sin n\theta + \sin\big((n-1)\theta\big)$ soit, comme $e^{in\theta} = \cos n\theta + i\sin n\theta$:

$= (\cos n\theta + i\sin n\theta)\sin\theta - (\cos\theta + i\sin\theta)\sin n\theta + \sin\big((n-1)\theta\big)$ et en développant cette expression :

$= (\sin\theta\cos n\theta - \sin n\theta\cos\theta) + \sin\big((n-1)\theta\big)$ soit encore, d'après les formules classiques de trigonométrie :

$= \sin(\theta - n\theta) + \sin\big((n-1)\theta\big)$ et comme $\sin(\theta - n\theta) = \sin\big(-(n-1)\theta\big) = -\sin\big((n-1)\theta\big)$:

$= 0$.

$e^{i\theta}$ est donc racine de A. Or, A étant un polynôme à coefficients réels, ses racines complexes sont conjuguées deux à deux. Comme $e^{i\theta}$ est racine de A, on déduit alors que $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ est également racine de A.

Toutes les racines de B sont donc également racines de A (avec au moins le même ordre de multiplicité, en l'occurence 1). A est donc à nouveau divisible par B.

❑ On peut maintenant conclure, dans tous les cas de figure :

$$\boxed{\text{A est divisible par B}}$$

☞ Pour montrer qu'un polynôme A est divisible par un polynôme B, il suffit de montrer que toutes les racines de B sont racines de A avec au moins le même ordre de multiplicité.

SO

4. Décomposition dans ℝ[X] et dans ℂ[X]

1) Décomposer dans ℝ[X] puis dans ℂ[X] le polynôme :

$$P = X^6 - 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 3X - 2.$$

2) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Décomposer dans ℂ[X], puis dans ℝ[X] les polynômes suivants :

a) $X^{2n} - 1$,

b) $X^{2n+1} - 1$.

1) ▪ -1, 1 et 2 sont racines évidentes de P. De plus, on obtient, par dérivation : $P' = 6X^5 - 15X^4 + 8X^3 - 2X + 3$. On remarque alors que 1 est racine de P', mais que -1 et 2 ne le sont pas. En dérivant alors P', on obtient : $P'' = 30X^4 - 60X^3 + 24X^2 - 2$, polynôme dont 1 n'est pas racine.

Ainsi, -1 et 2 sont racines simples et 1 est racine double de P. On peut alors écrire :
$\exists Q \in \mathbb{R}_2[X]$, $P = (X-1)^2(X+1)(X-2)\,Q$.

Or, en effectuant la division suivant les puissances décroissantes de P par $(X-1)^2(X+1)(X-2)$, on obtient : $Q = X^2 + 1$.

Q n'admettant aucune racine réelle, on en déduit alors la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ de P :

$$\boxed{P = (X-1)^2(X+1)(X-2)(X^2+1)}$$

☞ Pour déterminer la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ (seuls les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ admettent une décomposition dans $\mathbb{R}[X]$), il faut déterminer l'ensemble de ses racines (avec leurs ordres de multiplicité), puis (si toutes les racines de P ne sont pas réelles) :

– pour chaque racine complexe non réelle λ de P, trouver son conjugué $\overline{\lambda}$ (qui est également racine de P) et écrire : $(X-\lambda)(X-\overline{\lambda}) = X^2 - (\lambda+\overline{\lambda})X + \lambda\overline{\lambda}$, ce dernier polynôme ayant tous ses coefficients réels par construction, ou bien :

– effectuer la division suivant les puissances décroissantes de P par $\prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ (où les $(\lambda_i)_{1\le i\le n}$ sont les racines réelles de P d'ordres de multiplicité respectifs $(\alpha_i)_{1\le i\le n}$) en écrivant le polynôme Q obtenu comme produit de polynômes de degré 2, la décomposition de P dans $\mathbb{R}[X]$ étant alors : $P = Q\prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$.

▪ Comme $X^2 + 1 = (X-i)(X+i)$, on peut maintenant écrire la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ de P :

$$\boxed{P = (X-1)^2(X+1)(X-2)(X-i)(X+i)}$$

☞ Pour déterminer la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ d'un polynôme P à racines complexes dont on connaît déjà la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$, il faut, pour chaque polynôme Q_i de degré 2 de ladite décomposition, déterminer ses racines complexes conjuguées λ_i et $\overline{\lambda_i}$ et substituer à chaque polynôme Q_i le produit $(X-\lambda_i)(X-\overline{\lambda_i})$ dans la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ de P.

2) a) ▪ D'après le cours, le polynôme $X^{2n}-1$ admet 2n racines qui sont les éléments de l'ensemble $\left\{e^{i\frac{2k\pi}{2n}}, k\in[\![0, 2n-1]\!]\right\}$, i.e. les éléments de l'ensemble : $\left\{e^{i\frac{k\pi}{n}}, k\in[\![0, 2n-1]\!]\right\}$. On peut maintenant écrire :

$$X^{2n} - 1 = \prod_{k=0}^{2n-1}\left(X - e^{i\frac{k\pi}{n}}\right).$$

Or, les valeurs réelles de l'ensemble $\left\{e^{i\frac{k\pi}{n}}, k\in[\![0, 2n-1]\!]\right\}$ sont obtenues pour $k = 0$ ($e^{i\frac{0\pi}{n}} = 1$) et pour $k = n$ ($e^{i\frac{n\pi}{n}} = -1$). En distinguant dans le produit précédent les facteurs en $k = 0$ et en $k = n$, on en déduit la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ de $X^{2n}-1$:

$$\boxed{X^{2n} - 1 = (X-1)(X+1)\prod_{\substack{k=1\\k\ne n}}^{2n-1}\left(X - e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)}$$

☞ Noter que : $e^{i0} = 1 = e^{2i\pi}$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$.

▪ En scindant le produit en deux dans l'expression précédente (les facteurs en $k = 1$ à $k = n-1$ d'une part et les facteurs en $k = n+1$ à $k = 2n-1$ d'autre part), on peut alors écrire :

$$X^{2n} - 1 = (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X - e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)\prod_{k=n+1}^{2n-1}\left(X - e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)$$ soit, en effectuant le changement de variable $k' = 2n - k$ dans le second produit :

$$= (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X - e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X - e^{i\frac{(2n-k)\pi}{n}}\right)$$ i.e. :

$$X^{2n}-1=(X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X-e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)\left(X-e^{i\frac{(2n-k)\pi}{n}}\right)$$ et comme $\forall k\in[1,n-1]$, $e^{i\frac{(2n-k)\pi}{n}}=e^{i2\pi}e^{-i\frac{k\pi}{n}}=e^{-i\frac{k\pi}{n}}$:

$$=(X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X-e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)\left(X-e^{-i\frac{k\pi}{n}}\right)$$ soit encore :

$$=(X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{n-1}\left[X^2-\left(e^{i\frac{k\pi}{n}}+e^{-i\frac{k\pi}{n}}\right)X+e^{i\frac{k\pi}{n}}e^{-i\frac{k\pi}{n}}\right].$$

Or, on a :

– $\forall k\in[1,n-1]$, $e^{i\frac{k\pi}{n}}+e^{-i\frac{k\pi}{n}}=2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ (d'après les formules d'Euler), et :

– $\forall k\in[1,n-1]$, $e^{i\frac{k\pi}{n}}e^{-i\frac{k\pi}{n}}=e^0=1$.

On en déduit alors la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ de $X^{2n}-1$:

$$\boxed{X^{2n}-1=(X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2-2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)X+1\right)}$$

☞ Pour obtenir la décomposition d'un polynôme P à coefficients réels dans $\mathbb{R}[X]$ à partir de sa décomposition dans $\mathbb{C}[X]$, il faut, dans le cas général, scinder le produit des facteurs de degré 1 en deux, puis effectuer dans l'un des deux produits le changement de variable $k'=n-k$ (où $\deg(P)=n$) afin de retrouver dans un unique produit des facteurs éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ de la forme :
$(X-\lambda_i)(X-\overline{\lambda_i})=X^2-2\mathcal{Re}(\lambda_i)+\left|\lambda_i\right|^2$ (λ_i et $\overline{\lambda_i}$ étant deux racines complexes conjuguées de P).

b) ▪ De même, d'après le cours, le polynôme $X^{2n+1}-1$ admet $2n+1$ racines qui sont les éléments de l'ensemble $\left\{e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}}, k\in[0,2n]\right\}$. On peut maintenant écrire : $X^{2n+1}-1=\prod_{k=0}^{2n}\left(X-e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}}\right)$.

Or, l'unique valeur réelle de l'ensemble $\left\{e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}}, k\in[0,2n]\right\}$ est obtenue pour $k=0$ ($e^{i\frac{0\pi}{2n+1}}=1$). En distinguant dans le produit précédent le facteur en $k=0$, on en déduit la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ de $X^{2n+1}-1$:

$$\boxed{X^{2n+1}-1=(X-1)\prod_{k=1}^{2n}\left(X-e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}}\right)}$$

▪ En scindant le produit en deux dans l'expression précédente (les facteurs en $k=1$ à $k=n$ d'une part et les facteurs en $k=n+1$ à $k=2n$ d'autre part), on peut alors écrire :

$$X^{2n+1}-1=(X-1)\prod_{k=1}^{n}\left(X-e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}}\right)\prod_{k=n+1}^{2n}\left(X-e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}}\right)$$ soit, en effectuant le changement de variable $k'=2n-k+1$ dans le second produit :

$$=(X-1)\prod_{k=1}^{n}\left(X-e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(X-e^{i\frac{2(2n-k+1)\pi}{2n+1}}\right)$$ i.e. :

$$=(X-1)\prod_{k=1}^{n}\left(X-e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}}\right)\left(X-e^{i\frac{2(2n+1-k)\pi}{2n+1}}\right)$$ et comme $\forall k\in[1,n]$, $e^{i\frac{2(2n+1-k)\pi}{2n+1}}=e^{i2\pi}e^{-i\frac{2k\pi}{2n+1}}=e^{-i\frac{2k\pi}{2n+1}}$:

$$=(X-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X-e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}}\right)\left(X-e^{-i\frac{2k\pi}{2n+1}}\right)$$ soit encore :

$$=(X-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left[X^2-\left(e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}}+e^{-i\frac{2k\pi}{2n+1}}\right)X+e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}}e^{-i\frac{2k\pi}{2n+1}}\right].$$

Or, on a :

– $\forall k \in [1, n-1]$, $e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}} + e^{-i\frac{2k\pi}{2n+1}} = 2\cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right)$ (d'après les formules d'Euler), et :

– $\forall k \in [1, n-1]$, $e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}} e^{-i\frac{2k\pi}{2n+1}} = e^0 = 1$.

On en déduit alors la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ de $X^{2n+1} - 1$:

$$\boxed{X^{2n+1} - 1 = (X-1)\prod_{k=1}^{n}\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right)X + 1\right)}$$

☞ Se souvenir que les racines complexes d'un polynôme à coefficients réels sont conjuguées deux à deux.

☞ Noter que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

– $e^{i\frac{k\pi}{n}}$ et $e^{i\frac{(2n-k)\pi}{n}} = e^{-i\frac{k\pi}{n}}$ sont conjugués,

– $e^{i\frac{k\pi}{n}}$ et $e^{i\frac{(n+k)\pi}{n}} = -e^{i\frac{k\pi}{n}}$ sont opposés.

De façon plus générale, pour tous réels α et β :

– $e^{i\alpha}$ et $e^{i\beta}$ sont conjugués si et seulement si $\alpha + \beta = 0 \ [2\pi]$,

– $e^{i\alpha}$ et $e^{i\beta}$ sont opposés si et seulement si $\alpha = \beta \ [\pi]$,

☞ La somme de deux nombres complexes conjugués $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$) est $2\cos\theta$.
Le produit de deux nombres complexes conjugués $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$) est 1.

SO

● 5. Formule de Taylor pour les polynômes

Soient n un entier naturel et P un élément de $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k.$$

NB : La résolution de cet exercice nécessite la connaissance du cours : **2**. Espaces vectoriels, applications linéaires et calcul matriciel ou du cours : **9**. Formules de Taylor. Développements limités.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la famille $\left((X-\alpha)^k\right)_{0\le k\le n}$ étant une famille de n + 1 polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ graduée en degrés, elle forme une famille libre et maximale de $\mathbb{R}_n[X]$, donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (cf. exercice **2**.8.2). On en déduit alors :

$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \exists! (a_k)_{0\le k\le n} \in \mathbb{R}^{n+1},\ P = \sum_{k=0}^{n} a_k (X-\alpha)^k$ soit, en dérivant i fois cette relation ($i \in [0, n]$) :

$\forall i \in [0, n],\ P^{(i)} = \sum_{k=i}^{n} a_k \frac{k!}{(k-i)!}(X-\alpha)^{k-i}$ soit encore, en prenant cette relation en α (il ne subsiste que le terme en k = i, tous les autres termes s'annulant) :

$\forall i \in [0, n],\ P^{(i)}(\alpha) = i!\, a_i$ i.e. :

$\forall k \in [0, n],\ a_k = \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}$.

On peut maintenant conclure :

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R},\ P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k}$$

NB : Il est également possible de démontrer la formule de Taylor pour les polynômes en appliquant à la fonction polynôme P la formule de Taylor avec reste intégral (cf. chapitre **9**) à l'ordre n, le reste intégral étant alors nul.

☞ Se souvenir de la formule de Taylor pour les polynômes (démonstrations à connaître).

50

★ 6. Calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, les expressions de $S_n(x)$ et $T_n(x)$.

i) Première méthode

On a :

– $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, $\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} (e^{ix})^k$ soit, en remarquant la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{ix} \neq 1$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$) :

$$= \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}$$

soit encore, en mettant en facteur au numérateur et au dénominateur les "exponentielles moitiés" :

$$= \frac{e^{i\frac{(n+1)x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}} \frac{e^{-i\frac{(n+1)x}{2}} - e^{i\frac{(n+1)x}{2}}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}}$$

i.e. :

$$= e^{i\frac{nx}{2}} \frac{\dfrac{e^{i\frac{(n+1)x}{2}} - e^{-i\frac{(n+1)x}{2}}}{2i}}{\dfrac{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}}{2i}}$$

soit enfin, d'après les formules d'Euler :

$$= e^{i\frac{nx}{2}} \frac{\sin\left[\frac{(n+1)x}{2}\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

et :

– $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, $\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} e^{i0}$ soit :

$$= n + 1.$$

☞ Se souvenir de la méthode de calcul de $\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$. Après avoir reconnu (lorsque $x \notin \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$) la somme des termes d'une suite géométrique de raison différente de 1, on met en facteur les "exponentielles moitiés" et on reconnaît ensuite un quotient de sin à l'aide des formules d'Euler.

▪ Or, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(kx) = \mathcal{Re}(e^{ikx})$. On en déduit alors :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ soit :

$$= \sum_{k=0}^{n} \mathcal{Re}(e^{ikx})$$

soit encore, l'opérateur partie réelle étant linéaire :

$$= \mathcal{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right)$$

D'après ce qui précède, on peut alors écrire :

$$\forall n\in \mathbb{N},\ \forall x\in \mathbb{R}\setminus\{2k\pi,\ k\in \mathbb{Z}\},\ S_n(x) = \mathcal{R}e\left(e^{i\frac{nx}{2}}\,\frac{\sin\left[\frac{(n+1)x}{2}\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right) \qquad \text{i.e. :}$$

$$\forall n\in \mathbb{N},\ \forall x\in \mathbb{R}\setminus\{2k\pi,\ k\in \mathbb{Z}\},\ S_n(x) = \frac{\sin\left[\frac{(n+1)x}{2}\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\,\mathcal{R}e\left(e^{i\frac{nx}{2}}\right) \qquad \text{et donc :}$$

$$= \frac{\sin\left[\frac{(n+1)x}{2}\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cos\left(\frac{nx}{2}\right).$$

Or, à l'aide des formules classiques de trigonométrie, on peut écrire :

$$\forall n\in \mathbb{N},\ \forall x\in \mathbb{R}\setminus\{2k\pi,\ k\in \mathbb{Z}\},\ \sin\left[\frac{(n+1)x}{2}\right]\cos\left(\frac{nx}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\sin\left[\frac{(2n+1)x}{2}\right]+\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right] \qquad \text{et donc :}$$

$$\forall n\in \mathbb{N},\ \forall x\in \mathbb{R}\setminus\{2k\pi,\ k\in \mathbb{Z}\},\ S_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left[\frac{(2n+1)x}{2}\right]}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

De même, on a : $\forall n\in \mathbb{N},\ \forall x\in \{2k\pi,\ k\in \mathbb{Z}\},\ S_n(x) = \mathcal{R}e(n+1) = n+1$. On peut désormais conclure :

$$\boxed{\forall n\in \mathbb{N},\ \begin{cases} \forall x\in \mathbb{R}\setminus\{2k\pi,\ k\in \mathbb{Z}\},\ S_n(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sin\left[\frac{(2n+1)x}{2}\right]}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ \forall x\in \{2k\pi,\ k\in \mathbb{Z}\},\ S_n(x) = n+1 \end{cases}}$$

- De même, on a : $\forall n\in \mathbb{N},\ \forall x\in \mathbb{R},\ \sin(kx) = \mathcal{I}m(e^{ikx})$. On en déduit alors :

$$\forall n\in \mathbb{N},\ \forall x\in \mathbb{R},\ T_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\sin(kx) \qquad \text{soit :}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\mathcal{I}m(e^{ikx}) \qquad \text{soit encore, l'opérateur partie imaginaire étant linéaire :}$$

$$= \mathcal{I}m\left(\sum_{k=0}^{n}e^{ikx}\right).$$

D'après ce qui précède, on peut alors écrire :

$$\forall n\in \mathbb{N},\ \forall x\in \mathbb{R}\setminus\{2k\pi,\ k\in \mathbb{Z}\},\ T_n(x) = \mathcal{I}m\left(e^{i\frac{nx}{2}}\,\frac{\sin\left[\frac{(n+1)x}{2}\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right) \qquad \text{i.e. :}$$

$$= \frac{\sin\left[\frac{(n+1)x}{2}\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\,\mathcal{I}m\left(e^{i\frac{nx}{2}}\right) \qquad \text{et donc :}$$

$$= \frac{\sin\left[\frac{(n+1)x}{2}\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\sin\left(\frac{nx}{2}\right).$$

Or, à l'aide des formules classiques de trigonométrie, on peut écrire :

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, \sin\left[\frac{(n+1)x}{2}\right]\sin\left(\frac{nx}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left[\frac{(2n+1)x}{2}\right]\right]$ d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, T_n(x) = \frac{1}{2}\operatorname{cotan}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\cos\left[\frac{(2n+1)x}{2}\right]}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

De même, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, T_n(x) = \mathcal{Im}(n+1) = 0$. On peut désormais conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, T_n(x) = \frac{1}{2}\operatorname{cotan}\left(\frac{x}{2}\right) - \dfrac{\cos\left[\frac{(2n+1)x}{2}\right]}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ \forall x \in \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, T_n(x) = 0 \end{cases}}$$

__ii) Deuxième méthode__

Voici une deuxième méthode de calcul de $S_n(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, mais qui suppose que l'on connaisse la forme du résultat (ou que l'on soit guidé par l'énoncé), cette méthode étant encore valable pour le calcul de $T_n(x)$, toujours pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$:

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(kx)$ soit, d'après les formules classiques de trigonométrie :

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\sin\left[\frac{(2k+1)x}{2}\right] + \sin\left[\frac{(1-2k)x}{2}\right]\right)$$

et comme $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin x$:

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\sin\left[\frac{(2k+1)x}{2}\right] - \sin\left[\frac{(2k-1)x}{2}\right]\right)$$

soit encore, les termes s'éliminant deux à deux :

$= \sin\left[\frac{(2n+1)x}{2}\right] - \sin\left(-\frac{x}{2}\right)$ et comme $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin x$:

$= \sin\left[\frac{(2n+1)x}{2}\right] + \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ soit enfin, en divisant par $2\sin\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, S_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left[\frac{(2n+1)x}{2}\right]}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

☞ Noter les deux méthodes employées pour le calcul de $\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$:

– celle qui utilise les exponentielles complexes : $\cos(kx) = \mathcal{Re}(e^{ikx})$, $\sin(kx) = \mathcal{Im}(e^{ikx})$ et le calcul de $\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$,

– celle qui utilise la multiplication par $2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

Une troisième méthode est encore possible : la démonstration par récurrence, mais elle nécessite la connaissance du résultat a priori.

SO

★ 7. Linéarisation de $\cos^n x$ et $\sin^n x$

Soit x un nombre réel. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de $\cos^n x$ et de $\sin^n x$ en fonction des $(\cos(kx))_{1 \leq k \leq n}$ et des $(\sin(kx))_{1 \leq k \leq n}$ en discutant suivant les valeurs de n.

■ A l'aide des formules d'Euler, on peut écrire :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \cos^n x = \left(\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^n$ soit, en développant cette expression à l'aide de la formule du binôme :

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{i(n-k)x} e^{-ikx}}{2}$$ soit encore :

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{i(n-2k)x}}{2}$$

• Si n est pair (n = 2p), on peut alors écrire :

$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \cos^{2p} x = \dfrac{1}{2^{2p-1}} \dfrac{\sum_{k=0}^{2p} C_{2p}^k e^{2i(p-k)x}}{2}$ soit, en scindant la somme en trois (les termes pour lesquels $k \leq p-1$, $k = p$ et $k \geq p+1$) :

$$= \frac{1}{2^{2p-1}} \frac{\sum_{k=0}^{p-1} C_{2p}^k e^{2i(p-k)x} + C_{2p}^p + \sum_{k=p+1}^{2p} C_{2p}^k e^{2i(p-k)x}}{2}$$ soit encore, en effectuant le changement de variable $k' = 2p - k$ dans la deuxième somme :

$$= \frac{1}{2^{2p-1}} \frac{\sum_{k=0}^{p-1} C_{2p}^k e^{2i(p-k)x} + C_{2p}^p + \sum_{k=0}^{p-1} C_{2p}^{2p-k} e^{2i(k-p)x}}{2}$$ et comme $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [0, p-1],\ C_{2p}^{2p-k} = C_{2p}^k$, en regroupant les termes de la première et de la deuxième somme :

$$= \frac{1}{2^{2p-1}} \left[\frac{\sum_{k=0}^{p-1} C_{2p}^k \left[e^{2i(p-k)x} + e^{-2i(p-k)x}\right]}{2} + \frac{C_{2p}^p}{2}\right]$$ et en reconnaissant pour tout $k \in [0, p-1]$, $\cos(2(p-k)x)$ (formules d'Euler) :

$$= \frac{1}{2^{2p-1}} \sum_{k=0}^{p-1} C_{2p}^k \cos(2(p-k)x) + \frac{C_{2p}^p}{2^{2p}}.$$

• De même, si n est impair (n = 2p + 1), on peut écrire :

$\forall p \in \mathbb{N},\ \cos^{2p+1} x = \dfrac{1}{2^{2p}} \dfrac{\sum_{k=0}^{2p+1} C_{2p+1}^k e^{i(2p+1-2k)x}}{2}$ soit, en scindant la somme en deux :

$$= \frac{1}{2^{2p}} \frac{\sum_{k=0}^{p} C_{2p+1}^k e^{i(2p+1-2k)x} + \sum_{k=p+1}^{2p+1} C_{2p+1}^k e^{i(2p+1-2k)x}}{2}$$ soit encore, en effectuant le changement de variable $k' = 2p - k + 1$ dans la deuxième somme :

$$= \frac{1}{2^{2p}} \frac{\sum_{k=0}^{p} C_{2p+1}^k e^{i(2p+1-2k)x} + \sum_{k=0}^{p} C_{2p+1}^{2p+1-k} e^{i(2k-2p-1)x}}{2}$$ et comme $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall k \in [0, p],\ C_{2p+1}^{2p+1-k} = C_{2p+1}^k$, en regroupant les termes des deux sommes :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \cos^{2p+1}x = \frac{1}{2^{2p}}\left[\frac{\sum_{k=0}^{p} C_{2p+1}^{k}\left[e^{i(2p+1-2k)x} + e^{-i(2p+1-2k)x}\right]}{2}\right]$$ soit enfin, en reconnaissant pour tout $k \in [0, p]$, $\cos\big((2p+1-2k)x\big)$ (formules d'Euler) :

$$= \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{p} C_{2p+1}^{k} \cos\big((2p+1-2k)x\big).$$

On peut maintenant conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \begin{cases} n \text{ pair}, \cos^n x = \dfrac{1}{2^{n-1}} \displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} C_n^k \cos\big((n-2k)x\big) + \dfrac{C_n^{n/2}}{2^n} \\ n \text{ impair}, \cos^n x = \dfrac{1}{2^{n-1}} \displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} C_n^k \cos\big((n-2k)x\big) \end{cases}}$$

■ De même, toujours à l'aide des formules d'Euler, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sin^n x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^n$$ soit, en développant cette expression à l'aide de la formule du binôme :

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k e^{i(n-k)x} e^{-ikx}}{2\, i^n}$$ soit encore :

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k e^{i(n-2k)x}}{2\, i^n}$$

• Si n est pair ($n = 2p$), comme $i^2 = -1$, on a : $i^n = (-1)^p$ et on peut alors écrire :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \sin^{2p} x = \frac{1}{2^{2p-1}} \frac{\sum_{k=0}^{2p} (-1)^k C_{2p}^k e^{2i(p-k)x}}{2(-1)^p}$$ soit, en scindant la somme en trois (les termes pour lesquels $k \le p-1$, $k = p$ et $k \ge p+1$) :

$$= \frac{(-1)^p}{2^{2p-1}} \frac{\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k C_{2p}^k e^{2i(p-k)x} + (-1)^p C_{2p}^p + \sum_{k=p+1}^{2p} (-1)^k C_{2p}^k e^{2i(p-k)x}}{2}$$ soit encore, en effectuant le changement de variable $k' = 2p - k$ dans la deuxième somme :

$$= \frac{(-1)^p}{2^{2p-1}} \frac{\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k C_{2p}^k e^{2i(p-k)x} + (-1)^p C_{2p}^p + \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{2p-k} C_{2p}^{2p-k} e^{2i(k-p)x}}{2}$$

et comme $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [0, p-1], \begin{cases} (-1)^{2p-k} = (-1)^k \\ C_{2p}^{2p-k} = C_{2p}^k \end{cases}$,

en regroupant les termes de la première et de la deuxième somme :

$$= \frac{(-1)^p}{2^{2p-1}} \left[\frac{\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k C_{2p}^k \left[e^{2i(p-k)x} + e^{-2i(p-k)x}\right]}{2} + \frac{(-1)^p C_{2p}^p}{2}\right]$$ et en reconnaissant pour tout $k \in [0, p-1]$, $\cos\big(2(p-k)x\big)$ (formules d'Euler) :

$$= \frac{(-1)^p}{2^{2p-1}} \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k C_{2p}^k \cos\big(2(p-k)x\big) + \frac{C_{2p}^p}{2^{2p}}.$$

• De même, si n est impair (n = 2p + 1), on a : $i^n = (-1)^p\, i$, et donc :

$$\forall p\in\mathbb{N},\ \sin^{2p+1}x = \frac{1}{2^{2p}}\ \frac{\sum\limits_{k=0}^{2p+1}(-1)^k C_{2p+1}^k e^{i(2p+1-2k)x}}{2i\,(-1)^p}$$ soit, en scindant la somme en deux :

$$= \frac{(-1)^p}{2^{2p}}\ \frac{\sum\limits_{k=0}^{p}(-1)^k C_{2p+1}^k e^{i(2p+1-2k)x} + \sum\limits_{k=p+1}^{2p+1}(-1)^k C_{2p+1}^k e^{i(2p+1-2k)x}}{2i}$$ soit encore, en effectuant le changement de variable k' = 2p - k + 1 dans la deuxième somme :

$$= \frac{(-1)^p}{2^{2p}}\ \frac{\sum\limits_{k=0}^{p}(-1)^k C_{2p+1}^k e^{i(2p+1-2k)x} + \sum\limits_{k=0}^{p}(-1)^{2p+1-k} C_{2p+1}^{2p+1-k} e^{i(2k-2p-1)x}}{2i}$$

et comme $\forall p\in\mathbb{N},\ \forall k\in[0,p],\ \begin{cases}(-1)^{2p+1-k} = -(-1)^k\\ C_{2p+1}^{2p+1-k} = C_{2p+1}^k\end{cases}$,

en regroupant les termes des deux sommes :

$$= \frac{(-1)^p}{2^{2p}}\left[\frac{\sum\limits_{k=0}^{p}(-1)^k C_{2p+1}^k \left[e^{i(2p+1-2k)x} - e^{-i(2p+1-2k)x}\right]}{2i}\right]$$ et en reconnaissant pour tout $k\in[0,p]$, $\sin\big((2p+1-2k)x\big)$ (formules d'Euler) :

$$= \frac{(-1)^p}{2^{2p}}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k C_{2p+1}^k \sin\big((2p+1-2k)x\big).$$

On peut maintenant conclure :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \begin{cases}n \text{ pair, } \sin^n x = \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}}\sum\limits_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}(-1)^k C_n^k \cos\big((n-2k)x\big) + \dfrac{C_n^{n/2}}{2^n}\\[2ex] n \text{ impair, } \sin^n x = \dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}}\sum\limits_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^k C_n^k \sin\big((n-2k)x\big)\end{cases}}$$

☞ Il est important de bien savoir **linéariser** (transformer des puissances de fonctions trigonométriques de x en fonctions trigonométriques de fonctions linéaires de x), à l'aide des **formules d'Euler**, des expressions du type $\cos^n x$, $\sin^n x$ ou $\cos^p x \sin^q x$ et de s'entraîner sur des exemples simples.

SO

8. Délinéarisation de cos(nx) et sin(nx)

Soit x un nombre réel. Déterminer pour tout entier naturel n non nul, les expressions de cos(nx) et de sin(nx) en fonction des $(\cos^k x)_{0\le k\le n}$ et des $(\sin^k x)_{0\le k\le n}$, en distinguant éventuellement les cas suivant les valeurs de n.

• On a :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \cos(nx) = \mathcal{Re}(e^{inx})$$ soit :

$$= \mathcal{Re}\big((\cos x + i\sin x)^n\big)$$ et en développant cette expression à l'aide de la formule du binôme :

$$= \mathcal{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} i^k C_n^k \cos^{n-k}x \sin^k x\right)$$ et comme, pour tout entier k impair, i^k est imaginaire pur et pour tout entier k pair, i^k est réel :

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \cos(nx) = \sum_{k=0}^{E(n/2)} i^{2k} C_n^{2k} \cos^{n-2k}x \sin^{2k}x$ soit encore, comme $\forall k\in\mathbb{N},\ i^{2k} = (-1)^k$:

$= \sum_{k=0}^{E(n/2)} (-1)^k C_n^{2k} \cos^{n-2k}x \sin^{2k}x$ et donc, comme $\forall k\in\mathbb{N},\ \sin^{2k}x = (1-\cos^2 x)^k$:

$= \sum_{k=0}^{E(n/2)} (-1)^k C_n^{2k} \cos^{n-2k}x (1-\cos^2 x)^k$ soit, en développant cette expression à l'aide de la formule du binôme :

$= \sum_{k=0}^{E(n/2)} \left[(-1)^k C_n^{2k} \cos^{n-2k}x \left(\sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j \cos^{2j}x\right)\right]$ soit encore, en effectuant le changement de variable $j' = k - j$:

$= \sum_{k=0}^{E(n/2)} \left[(-1)^k C_n^{2k} \cos^{n-2k}x \left(\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} C_k^{k-j} \cos^{2k-2j}x\right)\right]$ et comme $\forall k\in\mathbb{N},\ \forall j\in\mathbb{N},\ \begin{cases}(-1)^{2k-j} = (-1)^j \\ C_k^{k-j} = C_k^j\end{cases}$:

$= \sum_{k=0}^{E(n/2)} C_n^{2k} \left(\sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j \cos^{n-2j}x\right)$ soit enfin, en inversant les sommes :

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \cos(nx) = \sum_{j=0}^{E(n/2)} (-1)^j \cos^{n-2j}x \left(\sum_{k=j}^{E(n/2)} C_k^j C_n^{2k}\right)$ d'où la conclusion :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \cos(nx) = \sum_{k=0}^{E(n/2)} (-1)^k \cos^{n-2k}x \left(\sum_{i=k}^{E(n/2)} C_n^{2i} C_i^k\right)}$$

- De même, on a :

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sin(nx) = \mathcal{Im}(e^{inx})$ soit :

$= \mathcal{Im}\left((\cos x + i\sin x)^n\right)$ et en développant cette expression à l'aide de la formule du binôme :

$= \mathcal{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} i^k C_n^k \cos^{n-k}x \sin^k x\right)$.

• Si n est pair ($n = 2p$), on peut alors écrire :

$\forall p\in\mathbb{N}^*,\ \sin(2px) = \mathcal{Im}\left(\sum_{k=0}^{2p} i^k C_{2p}^k \cos^{2p-k}x \sin^k x\right)$ et comme, pour tout entier k pair, i^k est réel et pour tout entier k impair, i^k est imaginaire pur avec $\forall k\in\mathbb{N},\ i^{2k+1} = (-1)^k i$:

$= \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k C_{2p}^{2k+1} \cos^{2p-(2k+1)}x \sin^{2k+1}x$ i.e. :

$= \sin x \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k C_{2p}^{2k+1} \cos^{2p-2k-1}x \sin^{2k}x$ et donc, comme $\forall k\in\mathbb{N},\ \sin^{2k}x = (1-\cos^2 x)^k$:

$= \sin x \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k C_{2p}^{2k+1} \cos^{2p-2k-1}x (1-\cos^2 x)^k$ soit, en développant cette expression à l'aide de la formule du binôme :

$= \sin x \sum_{k=0}^{p-1} \left[(-1)^k C_{2p}^{2k+1} \cos^{2p-2k-1}x \left(\sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j \cos^{2j}x\right)\right]$ soit encore, en effectuant le changement de variable $j' = k - j$:

$= \sin x \sum_{k=0}^{p-1} \left[(-1)^k C_{2p}^{2k+1} \cos^{2p-2k-1}x \left(\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} C_k^{k-j} \cos^{2k-2j}x\right)\right]$

et comme $\forall k\in\mathbb{N},\ \forall j\in\mathbb{N},\ \begin{cases}(-1)^{2k-j} = (-1)^j \\ C_k^{k-j} = C_k^j\end{cases}$:

$$\forall p\in\mathbb{N}^*,\ \sin(2px) = \sin x \sum_{k=0}^{p-1}\left[C_{2p}^{2k+1}\left(\sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^j \cos^{2p-2j-1}x\right)\right]$$ et en inversant les sommes :

$$= \sin x \sum_{j=0}^{p-1}(-1)^j \cos^{2p-2j-1}x\left(\sum_{k=j}^{p-1} C_k^j C_{2p}^{2k+1}\right)$$ soit enfin :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ n \text{ pair},\ \sin(nx) = \sin x \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}(-1)^k \cos^{n-2k-1}x\left(\sum_{j=k}^{\frac{n}{2}-1} C_j^k C_n^{2j+1}\right).$$

• De même, si n est impair ($n = 2p + 1$), on peut écrire :

$$\forall p\in\mathbb{N},\ \sin\big((2p+1)x\big) = \mathcal{I}m\left(\sum_{k=0}^{2p+1} i^k C_{2p+1}^k \cos^{2p+1-k}x \sin^k x\right)$$ et comme, pour tout entier k pair, i^k est réel, et pour tout entier k impair, i^k est imaginaire pur avec $\forall k\in\mathbb{N},\ i^{2k+1} = (-1)^k i$:

$$= \sum_{k=0}^{p}(-1)^k C_{2p+1}^{2k+1} \cos^{2p+1-(2k+1)}x \sin^{2k+1}x$$ i.e. :

$$= \sum_{k=0}^{p}(-1)^k C_{2p+1}^{2k+1} \cos^{2(p-k)}x \sin^{2k+1}x$$ et donc, comme $\forall k\in\mathbb{N},\ \cos^{2k}x = (1-\sin^2 x)^k$:

$$= \sum_{k=0}^{p}(-1)^k C_{2p+1}^{2k+1}(1-\sin^2 x)^{p-k}\sin^{2k+1}x$$ soit, en développant cette expression à l'aide de la formule du binôme :

$$= \sum_{k=0}^{p}\left[(-1)^k C_{2p+1}^{2k+1}\sin^{2k+1}x\left(\sum_{j=0}^{p-k}(-1)^j C_{p-k}^j \sin^{2j}x\right)\right]$$ soit encore, en effectuant le changement de variable $j' = p - k - j$:

$$= \sum_{k=0}^{p}\left[(-1)^k C_{2p+1}^{2k+1}\sin^{2k+1}x\left(\sum_{j=0}^{p-k}(-1)^{p-k-j} C_{p-k}^{p-k-j}\sin^{2(p-k-j)}x\right)\right]$$ i.e. :

$$= \sum_{k=0}^{p}\left[C_{2p+1}^{2k+1}\left(\sum_{j=0}^{p-k}(-1)^{p-j} C_{p-k}^{p-k-j}\sin^{2p-2j+1}x\right)\right]$$ et en inversant les sommes :

$$= \sum_{j=0}^{p}(-1)^{p-j}\sin^{2p-2j+1}x\left(\sum_{k=0}^{p-j} C_{p-k}^{p-k-j} C_{2p+1}^{2k+1}\right)$$ soit enfin, en effectuant le changement de variable $j' = p - j$:

$$= \sum_{j=0}^{p}(-1)^j\sin^{2j+1}x\left(\sum_{k=0}^{j} C_{p-k}^{j-k} C_{2p+1}^{2k+1}\right)$$ et donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ n \text{ impair},\ \sin(nx) = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^k \sin^{2k+1}x\left(\sum_{j=0}^{k} C_{(n-1)/2-j}^{k-j} C_n^{2j+1}\right).$$

On peut maintenant conclure :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \begin{cases} n \text{ pair},\ \sin(nx) = \sin x \displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}(-1)^k \cos^{n-2k-1}x\left(\sum_{j=k}^{\frac{n}{2}-1} C_j^k C_n^{2j+1}\right) \\ n \text{ impair},\ \sin(nx) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^k \sin^{2k+1}x\left(\sum_{j=0}^{k} C_{(n-1)/2-j}^{k-j} C_n^{2j+1}\right) \end{cases}}$$

☞ Il est important de bien savoir **délinéariser** (transformer des fonctions trigonométriques de fonctions linéaires de x en puissances de fonctions trigonométriques de x), à l'aide des **formules de Moivre**, des expressions du type $\cos(nx)$, $\sin(nx)$ ou $\cos(px)\cdot\sin(qx)$ et de s'entraîner sur des exemples simples.

50

★ 9. Polynômes de Lagrange

Soient n un entier naturel non nul, $(x_j)_{1\leq j\leq n}$ une suite de nombres réels distincts et $(L_j)_{1\leq j\leq n}$ la suite de polynômes définis par :

$$\forall j\in[1, n],\ L_j = \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \frac{X - x_k}{x_j - x_k}.$$

1) a) Pour tout $j\in[1, n]$, expliciter le degré et les racines de L_j.

b) Pour tout $j\in[1, n]$, calculer $L_j(x_j)$.

c) En déduire que :

$$\sum_{j=1}^{n} L_j = 1.$$

2) Soient P un polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et Q le polynôme :

$$Q = \sum_{j=1}^{n} P(x_j)\,L_j.$$

a) Pour tout $k\in[1, n]$, calculer $Q(x_k)$.

b) En déduire que $P = Q$.

3) Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant les réels $(x_j)_{1\leq j\leq n}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_f\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que :

$$\forall k\in[1, n],\ P_f(x_k) = f(x_k).$$

1) a) Pour tout $j\in[1, n]$, L_j est le produit de n - 1 polynômes de degré 1 admettant respectivement $x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$ comme racines. On en déduit alors :

> Pour tout $j\in[1, n]$, L_j est un polynôme de degré n - 1 admettant les éléments de l'ensemble $\{x_k,\ k\in[1, n]\setminus\{j\}\}$ comme racines.

b) On a : $\forall j\in[1, n],\ L_j(x_j) = \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \frac{x_j - x_k}{x_j - x_k}$, et donc :

$$\boxed{\forall j\in[1, n],\ L_j(x_j) = 1}$$

☞ Les polynômes $(L_j)_{1\leq j\leq n}$ sont les polynômes de Lagrange. Ils ont pour propriété principale de s'annuler en n - 1 points donnés et de prendre la valeur 1 en un autre point donné.

c) Comme $\forall j\in[1, n],\ \begin{cases}\forall i\in[1, n]\setminus\{j\},\ L_j(x_i) = 0\\ L_j(x_j) = 1\end{cases}$ (cf. **1a** et **1b**), on peut écrire : $\forall i\in[1, n],\ \sum_{j=1}^{n} L_j(x_i) = L_i(x_i) = 1.$

Or, comme $\forall j\in[1, n],\ L_j\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on peut également écrire : $\left(\sum_{j=1}^{n} L_j\right)\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Comme on a en outre $1\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on en déduit alors (cf. exercice 1.2a) :

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} L_j = 1}$$

☞ Se souvenir que : $\sum_{j=1}^{n} L_j = 1$ (propriété classique des polynômes $(L_j)_{1\leq j\leq n}$, démonstration à connaître).

2) **a)** On a : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $Q(x_k) = \sum_{j=1}^{n} P(x_j) L_j(x_k)$. Comme pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a : $\forall j \in [\![1, n]\!] \setminus \{k\}$, $L_j(x_k) = 0$ (cf. **1a**) et $L_k(x_k) = 1$ (cf. **1b**), il ne subsiste dans cette expression que le terme en $j = k$ qui vaut $P(x_k) L_k(x_k) = P(x_k)$, et donc :

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!],\ Q(x_k) = P(x_k)}$$

b) Comme Q est combinaison linéaire des polynômes $(L_j)_{1 \leq j \leq n}$ et comme pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, L_j est un polynôme de degré $n - 1$ (cf. **1a**), on peut écrire : $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Comme P est également élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et comme $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(x_k) = Q(x_k)$ (cf. question précédente), on en déduit alors (cf. exercice 1.2a) :

$$\boxed{P = Q}$$

☞ Pour démontrer que deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}_n[X]$ ($n \in \mathbb{N}$) sont égaux, quatre méthodes sont possibles :

– on démontre que P et Q possèdent les mêmes coefficients,
– on démontre que P et Q possèdent les mêmes racines (en tenant compte des ordres de multiplicité) et le même coefficient dominant,
– on démontre que $P - Q = 0$ en établissant que $P - Q$ possède plus de n racines (cf. exercice 1.1a),
– on démontre que P et Q coïncident en plus de n points (cf. exercice 1.2a).

3) Soit A_f le polynôme défini par : $A_f = \sum_{j=1}^{n} f(x_j) L_j$. Comme A_f est combinaison linéaire des polynômes $(L_j)_{1 \leq j \leq n}$ et comme pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, L_j est un polynôme de degré $n - 1$, on peut écrire : $A_f \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

De plus, d'après les résultats du **1**, on peut également écrire : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $A_f(x_k) = f(x_k)$. Il existe donc bien au moins un polynôme $A_f \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $A_f(x_k) = f(x_k)$.

Supposons maintenant qu'il existe un autre polynôme $B_f \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $B_f(x_k) = f(x_k)$. On a alors : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $A_f(x_k) = B_f(x_k)$. Comme $A_f \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $B_f \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, d'après le **2b**, on peut alors écrire : $A_f = B_f$. On aboutit ainsi à une contradiction et on peut alors conclure :

$$\boxed{\text{Il existe un unique polynôme } P_f \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \text{ tel que : } \forall k \in [\![1, n]\!],\ P_f(x_k) = f(x_k)}$$

☞ Se souvenir qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à $n - 1$ prenant n valeurs données $(y_j)_{1 \leq j \leq n}$ en n points donnés $(x_j)_{1 \leq j \leq n}$. C'est le polynôme $P = \sum_{j=1}^{n} y_j L_j$.

☞ Le polynôme P_f est le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à f en les points $(x_j)_{1 \leq j \leq n}$. Il est défini par : $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $P_f(x_j) = f(x_j)$ et s'écrit : $P_f = \sum_{j=1}^{n} f(x_j) L_j$.

SO❷

● 10. Relation entre coefficients et racines d'un polynôme

Soient n un entier naturel non nul et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ ($(a_k)_{0\leq k\leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $a_n \neq 0$) un polynôme de degré n admettant n racines distinctes dans C, notées $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$.

1) En considérant la décomposition de P dans C[X], déterminer, pour tout $k \in [1, n]$, la valeur de :

$$\sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n} \left(\prod_{j=1}^{k} \lambda_{i_j}\right)$$

en fonction des $(a_k)_{0\leq k\leq n}$.

2) En déduire les valeurs de $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ et $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.

1) Comme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et comme P est un polynôme de degré n, a_n est le coefficient dominant de P. De plus, P étant un polynôme de degré n admettant n racines distinctes (les $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$), elles sont toutes d'ordre de multiplicité 1. On en déduit alors la décomposition de P dans C[X] : $P = a_n \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$.

En développant cette expression suivant les puissances décroissantes de X, on peut alors écrire :

$$P = a_n\left[X^n - \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)X^{n-1} + \left(\sum_{1\leq i<j\leq n}\lambda_i\lambda_j\right)X^{n-2} + \ldots + (-1)^k \sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n}\left(\prod_{j=1}^{k}\lambda_{i_j}\right)X^{n-k} + \ldots + (-1)^n\left(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\right)X^0\right].$$

Comme on a en outre $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_n X^n + \sum_{k=1}^{n} a_{n-k} X^{n-k}$, on en déduit alors, en écrivant alors de façon plus synthétique le membre de droite de la relation précédente :

$$a_n X^n + \sum_{k=1}^{n} a_{n-k} X^{n-k} = a_n\left(X^n + \sum_{k=1}^{n}\left[(-1)^k \sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n}\left(\prod_{j=1}^{k}\lambda_{i_j}\right)\right]X^{n-k}\right).$$

En identifiant enfin, pour tout $k \in [1, n]$, les coefficients de X^{n-k} dans chacun des deux membres précédents, deux polynômes étant égaux si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux, on en déduit alors :

$\forall k \in [1, n]$, $a_{n-k} = a_n (-1)^k \sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n}\left(\prod_{j=1}^{k}\lambda_{i_j}\right)$ et donc, en divisant cette relation par $a_n \neq 0$:

$$\boxed{\forall k \in [1, n], \sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n}\left(\prod_{j=1}^{k}\lambda_{i_j}\right) = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}}$$

☞ Se souvenir de cette relation entre les racines et les coefficients d'un polynôme, ainsi que de l'expression précédente de P en fonction de son coefficient dominant et de ses racines (démonstration à connaître).

2) En écrivant la relation précédente pour k = 1 et pour k = n, on en déduit alors :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{n}\lambda_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}}$$

☞ Se souvenir de ces deux relations entre la somme et le produit des racines d'un polynôme d'une part et les coefficients de ce polynôme d'autre part (à savoir redémontrer).

S❷

● 11. Calcul de quelques produits trigonométriques

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1) A l'aide de la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ de $X^n - 1$, calculer $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

2) A l'aide de la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ de $X^{2n} - 1$, calculer la valeur de $\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ et de $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

1) D'après le cours, le polynôme $X^n - 1$ admet n racines qui sont les éléments de l'ensemble $\left\{e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in [0, n-1]\right\}$.

On en déduit la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ de $X^n - 1$: $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)$, soit : $X^n - 1 = (X-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)$.

Comme on a en outre $X^n - 1 = (X-1)\sum_{k=0}^{n-1} X^k$, on peut alors écrire, par identification :

$(X-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = (X-1)\sum_{k=0}^{n-1} X^k$ soit, en simplifiant cette relation par X - 1, polynôme non nul :

$\prod_{k=1}^{n-1}\left(X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$ soit encore, en prenant cette relation en 1 :

$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = n$ et en mettant en facteur dans chacun des facteurs du produit l'"exponentielle moitié" :

$\prod_{k=1}^{n-1}\left[e^{i\frac{k\pi}{n}}\left(e^{-i\frac{k\pi}{n}} - e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)\right] = n$ soit encore, en reconnaissant $-2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ (formules d'Euler) :

$\prod_{k=1}^{n-1}\left[e^{i\frac{k\pi}{n}}\cdot(-2i)\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right] = n$ et donc, ce produit comportant n - 1 facteurs :

$(-1)^{n-1}2^{n-1}i^{n-1}\left[\prod_{k=1}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}}\right]\left[\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right] = n$ et comme $\prod_{k=1}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}} = \exp\left[i\left(\sum_{k=1}^{n-1} k\right)\frac{\pi}{n}\right] = e^{i\frac{(n-1)\pi}{2}} = \left[e^{i\frac{\pi}{2}}\right]^{n-1} = i^{n-1}$:

$(-1)^{n-1}(i^2)^{n-1}\left[\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right] = \frac{n}{2^{n-1}}$ soit enfin, comme $i^2 = -1$, et donc $(-1)^{n-1}(i^2)^{n-1} = (-1)^{2(n-1)} = 1$:

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}}$$

2) ▪ On peut écrire la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ de $X^{2n} - 1$ (cf. exercice 4.2a) :

$X^{2n} - 1 = (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)X + 1\right)$ ① soit, en prenant cette relation en i :

$i^{2n} - 1 = (i-1)(i+1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(i^2 - 2i\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right)$ soit encore, comme $i^2 = -1$:

$2\prod_{k=1}^{n-1}\left(-2i\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) = 1 - (-1)^n$ i.e. :

$(-1)^{n-1}2^{n-1}i^{n-1}\left[\prod_{k=1}^{n-1}\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right] = \frac{1-(-1)^n}{2}$ et donc, en multipliant membre à membre par $\cos\left(\frac{0\pi}{n}\right) = 1$:

$\prod_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = (-1)^{n-1}\frac{1-(-1)^n}{2^n i^{n-1}}$.

Or, si n est pair, on a : $(-1)^n = 1$, et donc : $\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 0$. De même, si n est impair, on a : $(-1)^{n-1} = 1$, $(-1)^n = -1$ et $i^{n-1} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$, d'où : $\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}}$. On peut désormais conclure :

$$\boxed{\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si n est pair} \\ \dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}} & \text{si n est impair} \end{cases}}$$

■ En effectuant la division suivant les puissances décroissantes de $X^{2n} - 1$ par $X^2 - 1$, on peut écrire :

$X^{2n} - 1 = (X^2 - 1) \sum_{k=0}^{n-1} X^{2k}$ soit, d'après la relation ① :

$(X^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)X + 1\right) = (X^2 - 1) \sum_{k=0}^{n-1} X^{2k}$ soit encore, en simplifiant cette relation par $X^2 - 1$, polynôme non nul :

$\prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)X + 1\right) = \sum_{k=0}^{n-1} X^{2k}$ et donc, en prenant cette relation en 1 :

$\prod_{k=1}^{n-1} \left(2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) = n$ i.e. :

$2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) = n$ et comme $\forall k \in \mathbb{N}$, $1 - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 2\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$:

$2^{2(n-1)} \prod_{k=1}^{n-1} \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = n$ et donc :

$\prod_{k=1}^{n-1} \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{n}{4^{n-1}}$.

Or, on a : $\forall k \in [1, n-1]$, $\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) > 0$, d'où : $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) > 0$, et donc : $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \sqrt{\prod_{k=1}^{n-1} \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}$, d'où la conclusion :

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}}$$

☞ Noter que tout réel x non nul a toujours deux racines carrées dans $\mathbb{C}$:

– si $x > 0$, ses deux racines sont : $\sqrt{x}$ et $-\sqrt{x}$; pour déterminer y tel que $y^2 = x$, il convient donc tout d'abord de déterminer le signe de y avant d'écrire que $y = \sqrt{x}$ ou $y = -\sqrt{x}$,

– si $x < 0$, ses deux racines sont : $i\sqrt{-x}$ et $-i\sqrt{-x}$.

☞ Pour déterminer un produit "trigonométrique", la méthode généralement employée consiste à effectuer la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ (ou dans $\mathbb{R}[X]$) d'un polynôme dont les racines (ou les sommes des racines complexes conjuguées) sont – ou se ramènent aisément – aux termes du produit recherché, puis à prendre cette décomposition en un point donné permettant de calculer la valeur de ce produit.

Espaces vectoriels, applications linéaires et calcul matriciel

Fiche de cours

A) Espaces vectoriels et applications linéaires

I. Espaces vectoriels   SO E0

1. Espaces vectoriels

$(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel si :

– $+$ est une loi de composition interne sur E : $\forall(x, y)\in E^2$, $(x + y)\in E$,

– $+$ est associative : $\forall(x, y, z)\in E^3$, $(x + y) + z = x + (y + z)$,

– $+$ admet un élément neutre : $\exists e\in E$, $\forall x\in E$, $x + e = e + x = x$,

– tout élément x de E admet un symétrique y pour $+$: $\forall x\in E$, $\exists y\in E$, $x + y = y + x = e$,

– $+$ est commutative : $\forall(x, y)\in E^2$, $x + y = y + x$,

– $\cdot$ est une loi de composition externe sur E de domaine $\mathbb{K}$: $\forall u\in E$, $\forall\lambda\in\mathbb{K}$, $(\lambda\cdot u)\in E$,

– $\forall(u, v)\in E^2$, $\forall(\lambda, \mu)\in\mathbb{K}^2$, $\begin{cases}\lambda\cdot(u+v) = \lambda\cdot u + \lambda\cdot v\\ (\lambda+\mu)\cdot u = \lambda\cdot u + \mu\cdot u\\ (\lambda\mu)\cdot u = \lambda\cdot(\mu\cdot u)\\ 1\cdot u = u\end{cases}$.

Exemples :

– $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$,

– $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$,

– $(\mathbb{K}_n[X], +, \cdot)$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$,

– l'ensemble des fonctions (de classe C^n, $n\in\mathbb{N}$, de classe C^∞) de I dans $\mathbb{R}$ ($I\subset\mathbb{R}$) est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$,

– l'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

2. Sous-espaces vectoriels

Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F\subset E$. F est un sous espace-vectoriel de E si :

– $F \neq \varnothing$,

– F est stable pour $+$: $\forall(u, v)\in F^2$, $(u + v)\in F$,

– F est stable pour $\cdot$: $\forall(\lambda, u)\in\mathbb{K}\times F$, $(\lambda\cdot u)\in F$.

3. Applications linéaires

■ Soient $(E, +, \cdot)$ et $(F, +, \cdot)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et φ une application de E dans F. φ est une application linéaire de E dans F (un morphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de E dans F), et on note $\varphi\in\mathcal{L}(E, F)$ si :

– $\forall(u, v)\in E^2$, $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$,

– $\forall(\lambda, u)\in\mathbb{K}\times E$, $\varphi(\lambda\cdot u) = \lambda\cdot\varphi(u)$.

■ Soient (E, +, ·) et (F, +, ·) deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si φ est une application linéaire de E dans F, alors :
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (u_i)_{1\le i\le n} \in E^n, \forall (\lambda_i)_{1\le i\le n} \in \mathbb{K}^n, \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(u_i)$.

■ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

4. Noyau et Image

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, φ une application linéaire de E dans F.

■ ***Noyau.*** On appelle noyau de φ et on le note $\mathrm{Ker}\varphi$, l'ensemble $\mathrm{Ker}\varphi = \{x \in E, \varphi(x) = 0\}$.
• $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est un sous-espace vectoriel de E,
• φ est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}\varphi = \{0_E\}$.

■ ***Image.*** On appelle image de φ et on le note $\mathrm{Im}\varphi$, l'ensemble $\mathrm{Im}\varphi = \varphi(E) = \{y \in F, \exists x \in E, y = \varphi(x)\}$.
• $\mathrm{Im}\,\varphi$ est un sous-espace vectoriel de F,
• φ est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}\varphi = F$.

5. Composée de deux applications linéaires

Soient E, F et G trois espaces vectoriels, φ une application linéaire de E dans F ($\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$) et ψ une application linéaire de F dans G ($\psi \in \mathcal{L}(F, G)$). $\psi \circ \varphi$ est une application linéaire de E dans G ($(\psi \circ \varphi) \in \mathcal{L}(E, G)$).

II. Structures d'ensembles d'applications linéaires   SO EO

■ Soient E et F deux espaces vectoriels.
– f est un morphisme de E dans F si f est une application linéaire de E dans F,
– f est un isomorphisme de E dans F si f est une application linéaire bijective de E dans F,
– f est un endomorphisme de E si f est une application linéaire de E dans E,
– f est un automorphisme de E si f est une application linéaire bijective de E dans E,

On note :
– $\mathcal{L}(E, F)$, l'ensemble des applications linéaires (morphismes) de E dans F,
– $\mathcal{L}(E)$, l'ensemble des endomorphismes de E,
– GL(E), l'ensemble des automorphismes de E.

■ $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ et $(\mathcal{L}(E), +, \cdot)$ sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

III. Combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs   SO EO

■ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(u_i)_{1\le i\le n}$ une famille de vecteurs de E et $u \in E$. On dit que u est combinaison linéaire des vecteurs $(u_i)_{1\le i\le n}$ si $\exists (\lambda_i)_{1\le i\le n} \in \mathbb{K}^n$, $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$.

■ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_i)_{1\le i\le n}$ une famille de vecteurs de E. L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $(u_i)_{1\le i\le n}$ est un sous-espace vectoriel de E. C'est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $(u_i)_{1\le i\le n}$, noté $\mathcal{V}ect\left((u_i)_{1\le i\le n}\right)$.

IV. Familles libres, familles génératrices, bases   SO EO

■ ***Familles libres.*** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(u_i)_{1\le i\le n}$ une famille finie de vecteurs de E et $(\lambda_i)_{1\le i\le n}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$. La famille $(u_i)_{1\le i\le n}$ est une famille libre de E si :
$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i = 0$.

Dans le cas contraire, on dit qu'elle est liée.

■ ***Familles génératrices.*** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(u_i)_{1 \le i \le n}$ une famille finie de vecteurs de E. La famille $(u_i)_{1 \le i \le n}$ est une famille génératrice de E si : $\forall u \in E, \exists (\lambda_i)_{1 \le i \le n} \in \mathbb{K}^n,\ u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$.

■ ***Bases.*** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(u_i)_{1 \le i \le n}$ une famille finie de vecteurs de E. La famille $(u_i)_{1 \le i \le n}$ est une base de E si $(u_i)_{1 \le i \le n}$ est une famille libre et génératrice de E, c'est-à-dire si :
$\forall u \in E, \exists ! (\lambda_i)_{1 \le i \le n} \in \mathbb{K}^n,\ u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$.

V. Espace vectoriel $\mathbb{K}^n$, base canonique de $\mathbb{K}^n$ **SO EO**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in [1, n]$, on note e_i le vecteur à n composantes : $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (1 est placé en $i^{\text{ème}}$ position). La famille $(e_i)_{1 \le i \le n}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Tout vecteur $u = (\lambda_i)_{1 \le i \le n}$ dans la base $(e_i)_{1 \le i \le n}$ s'écrit alors : $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.

B) Calcul matriciel

I. Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ **SO EO**

1. Définitions

■ Soient n et p deux entiers naturels non nuls. On appelle matrice à n lignes et p colonnes ou matrice (n, p) à coefficients dans $\mathbb{K}$, toute application A de $[1, n] \times [1, p]$ dans $\mathbb{K}$. On note :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \text{ ou } A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}.$$

■ Les $(a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ sont les coefficients de A. Pour tout $i \in [1, n]$, les $(a_{i,j})_{1 \le j \le p}$ sont les coefficients de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A et pour tout $j \in [1, p]$, les $(a_{i,j})_{1 \le i \le n}$ sont les coefficients de la $j^{\text{ème}}$ colonne de A.

■ Soient n et p deux entiers naturels non nuls. L'ensemble des matrices (n, p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

■ ***Matrices particulières.*** Pour tous entiers naturels non nuls n et p, on définit :
- les matrices colonnes : matrices (n, 1),
- les matrices lignes : matrices (1, p),
- les matrices carrées (d'ordre n) : matrices (n, n),
- les matrices triangulaires supérieures : matrices (n, n) telles que $\forall (i, j) \in [1, n]^2,\ i > j,\ a_{i,j} = 0$,
- les matrices triangulaires inférieures : matrices (n, n) telles que $\forall (i, j) \in [1, n]^2,\ i < j,\ a_{i,j} = 0$,
- les matrices diagonales : matrices (n, n) telles que $\forall (i, j) \in [1, n]^2,\ i \ne j,\ a_{i,j} = 0$,
- les matrices symétriques : matrices (n, n) telles que $\forall (i, j) \in [1, n]^2,\ a_{i,j} = a_{j,i}$,
- les matrices antisymétriques : matrices (n, n) telles que $\forall (i, j) \in [1, n]^2,\ a_{i,j} = -a_{j,i}$,
- la matrice identité (ou unité) d'ordre n (notée I_n ou I) : matrice (n, n) telle que $\forall (i, j) \in [1, n]^2,\ \begin{cases} i \ne j,\ a_{i,j} = 0 \\ i = j,\ a_{i,j} = 1 \end{cases}$.

■ Soit n un entier naturel non nul. L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(K)$

■ Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $\mathcal{B}$ une base de K^p et $\mathcal{B}'$ une base de K^n. $(\mathcal{M}_{n,p}(K), +, \cdot)$ est un K-espace vectoriel et l'application $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} : \left| \begin{array}{l} \mathcal{L}(K^p, K^n) \to \mathcal{M}_{n,p}(K) \\ \varphi \mapsto M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

■ ***Matrice représentant une famille de vecteurs de K^n.*** Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $(u_i)_{1\le i\le p}$ une famille de p vecteurs de K^n et $(e_i)_{1\le i\le n}$ une base de K^n.

La matrice représentant la famille $(u_i)_{1\le i\le p}$ dans la base $(e_i)_{1\le i\le n}$ est la matrice (n, p) dont les coefficients de la $j^{\text{ème}}$ colonne ($j \in [\![1, p]\!]$) sont les coordonnées de u_j dans cette base.

■ ***Matrice colonne.*** Soit n un entier naturel non nul, $x \in K^n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. La matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ représente le vecteur x dans la base canonique de K^n.

■ ***Matrice représentant une application linéaire de K^p dans K^n.*** Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $(e_i)_{1\le i\le p}$ une base de K^p, $(f_i)_{1\le i\le n}$ une base de K^n et $\varphi \in \mathcal{L}(K^p, K^n)$.

La matrice représentative de φ de la base $(e_i)_{1\le i\le p}$ dans la base $(f_i)_{1\le i\le n}$ est la matrice (n, p) représentant les vecteurs $(\varphi(e_i))_{1\le i\le p}$ dans la base $(f_i)_{1\le i\le n}$, c'est-à-dire dont les coefficients de la $j^{\text{ème}}$ colonne ($j \in [\![1, p]\!]$) sont les coordonnées de $\varphi(e_j)$ dans la base $(f_i)_{1\le i\le n}$.

■ ***Matrice ligne.*** Soit p un entier naturel non nul. La matrice ligne $X \in \mathcal{M}_{1,p}(K)$, $X = (x_1\ x_2\ ...\ x_p)$ est la matrice de la forme linéaire φ de K^p définie par : $\forall u \in K^p$, $u = (u_1, u_2, ..., u_p)$, $\varphi(u) = \sum_{i=1}^{p} x_i u_i$.

II. Opérations sur les matrices SO EO

■ ***Somme de deux matrices.*** Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $(A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(K))^2$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$. La somme des matrices A et B est la matrice $C \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, $C = A + B$ définie par : $C = (c_{i,j})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$ où : $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$.

Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $(\varphi, \psi) \in (\mathcal{L}(K^p, K^n))^2$ de matrices représentatives respectives $(A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(K))^2$ dans des bases données de K^p et K^n. $\varphi + \psi$ a pour matrice représentative A + B dans ces mêmes bases.

■ ***Produit d'une matrice par un scalaire.*** Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$ et $\lambda \in K$. Le produit de la matrice A par le scalaire λ est la matrice $C \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, $C = \lambda A$ définie par : $C = (c_{i,j})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$ où : $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, $c_{i,j} = \lambda a_{i,j}$.

Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $\varphi \in \mathcal{L}(K^p, K^n)$ de matrice représentative $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ dans des bases données de K^p et K^n et $\lambda \in K$. $\lambda\varphi$ a pour matrice représentative λA dans ces mêmes bases.

■ ***Produit de deux matrices.*** Soient n, m et p trois entiers naturels non nuls, $A \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}}$ et $B \in \mathcal{M}_{m,p}(K)$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le p}}$. Le produit des matrices A et B est la matrice $C \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, $C = AB$ définie par : $C = (c_{i,j})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$ où : $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} b_{k,j}$.

Soient n, m et p trois entiers naturels non nuls, $\varphi \in \mathcal{L}(K^m, K^n)$ et $\psi \in \mathcal{L}(K^p, K^m)$ de matrices représentatives respectives $A \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{m,p}(K)$ dans des bases données de K^p, K^m et K^n. $\varphi \circ \psi$ a pour matrice représentative AB dans ces mêmes bases de K^p et K^n.

■ ***Transposée d'une matrice.*** Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$.
La transposée de la matrice A est la matrice $C \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $C = {}^tA$ définie par : $C = (c_{i,j})_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le n}}$ où :
$\forall (i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, n]\!]$, $c_{i,j} = a_{j,i}$.

Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $(A, B) \in \left(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\right)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a : ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$ et ${}^t(\lambda A) = \lambda\,{}^tA$.

Soient n, p et q trois entiers naturels non nuls, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On a : ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

III. Ensembles $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $GL_n(\mathbb{K})$ SO EO

1. Espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

■ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{K}^n$. $\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et l'application $M_{\mathcal{B}} : \left|\begin{array}{l}\mathcal{L}(\mathbb{K}^n) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\\ \varphi \mapsto M_{\mathcal{B}}(\varphi)\end{array}\right.$ est un isomorphisme.

■ ***Formule du binôme.*** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\right)^2$ deux matrices telles que $AB = BA$ (on dit alors qu'elles commutent). On a : $\forall p \in \mathbb{N}$, $(A + B)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k A^k B^{p-k}$.

■ ***Sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*** Soit n un entier naturel non nul. L'ensemble des matrices (n, n) triangulaires supérieures, triangulaires inférieures, diagonales et symétriques forment des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Ensemble $GL_n(\mathbb{K})$

■ Soient n un entier naturel non nul et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est inversible si $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AB = BA = I_n$. Lorsque A est inversible, B est appelée inverse de A et on note $B = A^{-1}$.

■ Soit n un entier naturel non nul. L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $GL_n(\mathbb{K})$.

■ Soient n un entier naturel non nul et $(A, B) \in \left(GL_n(\mathbb{K})\right)^2$:
– A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$,
– ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$,
– AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

■ Soient n un entier naturel non nul, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ de matrice représentative A dans des bases données. A est inversible :
– si et seulement si φ est bijective,
– si et seulement si les vecteurs colonnes (ou lignes) de A forment une base de $\mathbb{K}^n$,
– si et seulement si ${}^tA$ est inversible.

IV. Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice SO EO

■ Soient n et p deux entiers naturels non nuls et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes de A sont :
– l'échange de deux lignes ou de deux colonnes : $L_i \leftrightarrow L_j$ ou $C_i \leftrightarrow C_j$,
– la multiplication d'une ligne ou d'une colonne par un scalaire α non nul : $L_i \leftarrow \alpha L_i$ ou $C_i \leftarrow \alpha C_i$,
– l'addition d'un multiple d'une ligne ou d'une colonne à une autre : $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ ou $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$.

■ ***Interprétation en terme de produits matriciels des opérations élémentaires.*** Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$:

– $L_i \leftrightarrow L_j$ (resp. $C_i \leftrightarrow C_j$) revient à multiplier A par M à gauche (resp. à droite) où : $M = \begin{array}{c} \quad\quad\quad i\ \ j \\ \quad\quad\quad \downarrow\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \leftarrow j \\ \\ \end{array}$

– $L_i \leftarrow \alpha L_i$ (resp. $C_i \leftarrow \alpha C_i$) revient à multiplier A par M à gauche (resp. à droite) où : $M = \begin{array}{c} \quad i \\ \quad \downarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \alpha & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \end{array}$

– $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ (resp. $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$) revient à multiplier A par M à gauche (resp. à droite) où :

$$M = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & \alpha & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ j \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

C) Systèmes de Cramer. Méthode du pivot de Gauss

I. Systèmes d'équations linéaires SO EO

■ Soient n et p deux entiers naturels non nuls et (S) le système de n équations à p inconnues dans $\mathbb{K}$:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

où les inconnues du système sont les $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$, les coefficients du système sont les $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et les $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$, éléments de $\mathbb{K}$.

Les solutions du système sont les $(\xi_i)_{1 \leq i \leq p} \in \mathbb{K}^p$ vérifiant (S).

■ Le système (S) est homogène si $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $b_i = 0$. Le système (S) est incompatible (impossible) s'il n'a aucune solution. Le système (S) est indéterminé s'il a plusieurs solutions. Deux systèmes sont équivalents s'ils ont les mêmes solutions.

II. Opérations élémentaires sur les lignes SO EO

■ Les opérations élémentaires sur les lignes d'un système sont :

– l'échange de deux lignes : $L_i \leftrightarrow L_j$.
– la multiplication d'une ligne par un scalaire α non nul : $L_i \leftarrow \alpha L_i$.
– l'addition d'un multiple d'une ligne à une autre : $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$.

■ Une opération élémentaire sur les lignes transforme un système en un système équivalent.

III. Méthode du pivot de Gauss SO EO

Elle consiste à utiliser les opérations élémentaires sur les lignes afin de transformer un système quelconque en un système échelonné (c'est-à-dire tel que pour tout $i\in[2, n]$, les coefficients de $x_1, x_2 \dots, x_{i-1}$ sur L_i soient nuls et tel que si les coefficients de $x_1, x_2, \dots, x_{j-1}$, $j\in[i+1, p]$, sur L_i, $i\in[1, n]$, sont nuls, alors les coefficients de $x_1, x_2, \dots, x_j$ sur L_{i+1} sont nuls également) équivalent.

Soit à résoudre le système (S) :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}.$$

• Si $a_{1,1} \neq 0$ ($a_{1,1}$ est appelé pivot), on effectue, pour tout $i\in[2, n]$, les opérations $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}L_1$. Le système (S) est alors transformé en un système équivalent $\begin{cases} L_1 \\ (S') \end{cases}$ où (S') est un système de $n - 1$ équations à $p - 1$ inconnues : $x_2, x_3, \dots, x_p$. On applique ensuite la méthode à (S').

• Si $a_{1,1} = 0$, deux cas se présentent :

– si $\exists j\in[2, n]$, $a_{j,1} \neq 0$, on effectue alors la transformation $L_i \leftrightarrow L_j$ et on se ramène alors au cas précédent,

– sinon, on considère le système (S') : $\begin{cases} a_{1,k}x_k + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,k}x_k + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,k}x_k + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$,

où k est le premier entier tel que $\exists j\in[1, n]$, $a_{j,k} \neq 0$ et on applique la méthode à (S').

On aboutit alors, en itérant la méthode jusqu'à ce que le système résiduel (S') soit au plus un système d'une équation à une inconnue, à un système échelonné.

IV. Interprétation d'un système SO EO

Soient n et p deux entiers naturels non nuls et (S) le système de n équations à p inconnues dans $\mathbb{K}$:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}.$$

• ***Interprétation fonctionnelle* (SO).** Soient $b = (b_i)_{1\leq i\leq n}$ et f l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ définie par : $\forall x\in \mathbb{K}^p$, $x = (x_i)_{1\leq i\leq p}$, $f(x) = \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}x_j\right)_{1\leq i\leq n}$. Résoudre (S) revient à résoudre l'équation $f(x) = b$, c'est-à-dire à trouver le(s) vecteur(s) $x\in \mathbb{K}^p$ tel(s) que $f(x) = b$.

• ***Interprétation matricielle.*** Soient $B = (b_i)_{1\leq i\leq n}$ et $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$. Résoudre (S) revient à résoudre l'équation $AX = B$, c'est-à-dire à trouver le(s) vecteur(s) $X\in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ tel(s) que $AX = B$.

V. Systèmes de Cramer SO EO

■ Le système $AX = B$ est un système de Cramer :

– si et seulement s'il admet une solution unique,

– si et seulement si A est inversible,

– si et seulement s'il existe une suite de transformations élémentaires sur les lignes de A qui mène à une matrice triangulaire dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls.

■ Soit A une matrice diagonale ou triangulaire. A est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

VI. Application aux matrices inversibles SO EO

■ ***Caractérisation des matrices inversibles.*** Soient n un entier naturel non nul et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est inversible :
– si et seulement si le système $AX = 0$ admet $X = 0$ pour unique solution,
– si et seulement si les vecteurs colonnes (ou lignes) de A forment une famille libre de $\mathbb{K}^n$,
– si et seulement si $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AB = I_n$ ou $BA = I_n$.

■ ***Calcul de l'inverse.*** Soient n un entier naturel non nul et $A \in GL_n(\mathbb{K})$. En posant $A = I_n A$, on effectue une suite de transformations élémentaires sur les lignes de A (et de I_n) qui mènent à I_n (et à A^{-1}) et on obtient alors : $I_n = A^{-1}A$.

D) Espaces vectoriels de dimension finie

I. Bases et dimension SO EO

1. Espaces vectoriels de dimension finie. Théorème de la dimension

■ ***Espaces vectoriels de dimension finie.*** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que E est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.

■ ***Existence de bases.*** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel distinct de $\{0\}$ admettant une famille génératrice finie $\mathcal{S}$. Il existe alors une base de E constituée de vecteurs de $\mathcal{S}$.

■ ***Isomorphisme avec $\mathbb{K}^n$.*** Soient n un entier naturel non nul et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel possédant une base à n éléments. E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

■ ***Théorème de la dimension.*** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel distinct de $\{0\}$ admettant une famille génératrice finie. Toutes les bases de E ont alors même cardinal : la dimension de E, notée $\dim E$ (par convention, on a : $\dim\{0\} = 0$).

2. Caractérisation d'une famille de vecteurs. Théorème de la base incomplète

■ ***Caractérisation d'une famille de vecteurs de E.*** Soient n et p deux entiers naturels non nuls, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $(u_i)_{1\le i\le p}$ une famille de p vecteurs de E.

– si la famille $(u_i)_{1\le i\le p}$ est une famille libre de E, alors $p \le n$. Dans ces conditions, la famille $(u_i)_{1\le i\le p}$ est une base de E si et seulement si $p = n$,
– si la famille $(u_i)_{1\le i\le p}$ est une famille génératrice de E, alors $p \ge n$. Dans ces conditions, la famille $(u_i)_{1\le i\le p}$ est une base de E si et seulement si $p = n$.

■ ***Théorème de la base incomplète.*** Soient n et p deux entiers naturels non nuls tels que $p < n$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n admettant une base $\mathcal{B}$ et $(u_i)_{1\le i\le p}$ une famille libre de p vecteurs de E. La famille $(u_i)_{1\le i\le p}$ peut être complétée en une base de E par $n - p$ vecteurs de $\mathcal{B}$.

3. Dimension d'un sous-espace vectoriel

■ Soient n un entier naturel non nul, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace vectoriel de E. F est de dimension finie, inférieure ou égale à n.

■ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Si $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.

II. Matrices et vecteurs. Matrices et applications linéaires SO EO

■ ***Matrice représentant une famille de vecteurs.*** Soient n et p deux entiers naturels non nuls, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (avec $\dim E = n$), $(e_i)_{1\le i\le n}$ une base de E et $(u_i)_{1\le i\le p}$ une famille de p vecteurs de E.

La matrice représentant la famille $(u_i)_{1\le i\le p}$ dans la base $(e_i)_{1\le i\le n}$ est la matrice (n, p) dont les coefficients de la $j^{\text{ème}}$ colonne ($j\in[\![1, p]\!]$) sont les coordonnées de u_j dans $(f_i)_{1\le i\le n}$.

■ ***Matrice représentant une application linéaire.*** Soient n et p deux entiers naturels non nuls, E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n, $(e_i)_{1\le i\le p}$ une base de E, $(f_i)_{1\le i\le n}$ une base de F et $\varphi\in \mathcal{L}(E, F)$.

La matrice représentative de φ dans les bases $(e_i)_{1\le i\le p}$ et $(f_i)_{1\le i\le n}$ est la matrice représentant la famille de vecteurs $(\varphi(e_i))_{1\le i\le p}$ dans la base $(f_i)_{1\le i\le n}$.

III. Sous-espaces vectoriels supplémentaires SO

■ ***Définition.*** Soient n un entier naturel non nul, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. F et G sont supplémentaires dans E si :

– $\forall u\in E,\ \exists!(v, w)\in F\times G,\ u = v + w$, ou si :

– $\begin{cases}\forall u\in E,\ \exists(v, w)\in F\times G,\ u = v+w\\ F\cap G = \{0\}\end{cases}$

■ ***Caractérisation de sous-espaces supplémentaires.*** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si :

$\begin{cases}\dim F + \dim G = \dim E\\ F\cap G = \{0\}\end{cases}$

■ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. F a au moins un supplémentaire G dans E et $\dim F + \dim G = \dim E$.

■ Soient n et p deux entiers naturels non nuls tels que $p < n$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $(e_i)_{1\le i\le n}$ une base de E. Les espaces vectoriels $\mathcal{V}ect\big((e_i)_{1\le i\le p}\big)$ et $\mathcal{V}ect\big((e_i)_{p+1\le i\le n}\big)$ sont supplémentaires dans E.

Réciproquement, si F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E, en juxtaposant une base de F à une base de G, on obtient une base de E.

IV. Projecteurs SO

■ ***Définition.*** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. On a : $\forall u\in E,\ \exists!(u_1, u_2)\in(F_1, F_2),\ u = u_1 + u_2$. L'application $p : \left|\begin{array}{l}E \to E\\ u\mapsto u_1\end{array}\right.$ est un endomorphisme de E, appelé projecteur (ou projection) sur F_1 parallèlement à F_2 ou projecteur sur F_1 de direction F_2.

Propriétés :

– $\operatorname{Ker} p = F_2$,

– $\operatorname{Im} p = F_1$,

– $\operatorname{Ker}(p - id) = F_1$,

– $p\circ p = p$.

■ ***Caractérisation d'un projecteur.*** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p\in\mathcal{L}(E)$. p est un projecteur si et seulement si $p\circ p = p$.

V. Sommes, sommes directes S Ø

▪ ***Somme.*** Soient p un entier naturel non nul, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{1\le i\le p}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. La somme des sous-espaces vectoriels $(F_i)_{1\le i\le p}$ est :

$$F_1+F_2+\ldots+F_p=\sum_{i=1}^{p}F_i=\left\{\sum_{i=1}^{p}u_i,\ (u_i)_{1\le i\le p}\in F_1\times F_2\times\ldots\times F_p\right\}.$$

$(F_1+F_2+\ldots+F_p)$ est alors un espace vectoriel.

▪ ***Somme directe.*** Soient p un entier naturel non nul, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{1\le i\le p}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Les sous-espaces vectoriels $(F_i)_{1\le i\le p}$ sont en somme directe (et leur somme est alors notée $F_1\oplus F_2\oplus\ldots\oplus F_p$) si :

– $\forall u\in\left(\sum_{i=1}^{p}F_i\right),\ \exists!(u_i)_{1\le i\le p}\in(F_1\times F_2\times\ldots\times F_p),\ u=\sum_{i=1}^{p}u_i$, ou si :

– $\forall(u_i)_{1\le i\le p}\in(F_1\times F_2\times\ldots\times F_p),\ \left(\sum_{i=1}^{p}u_i=0\Rightarrow\forall i\in[\![1,p]\!],\ u_i=0\right)$.

$(F_1\oplus F_2\oplus\ldots\oplus F_p)$ est alors un espace vectoriel.

▪ ***Caractérisation de deux espaces vectoriels en somme directe.*** Soient F et G deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. F et G sont en somme directe si et seulement si $F\cap G=\{0\}$.

▪ ***Dimension d'une somme directe.*** Soient p un entier naturel non nul, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{1\le i\le p}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Si les espaces vectoriels $(F_i)_{1\le i\le p}$ sont en somme directe, alors : $\dim(F_1\oplus F_2\oplus\ldots\oplus F_p)=\sum_{i=1}^{p}\dim(F_i)$.

▪ Soient n et p deux entiers naturels non nuls tels que $p\le n$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(e_i)_{1\le i\le n}$ une base de E, $(F_i)_{1\le i\le p}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E et $(J_i)_{1\le i\le p}$ une partition de $[\![1,n]\!]$ telle que : $\forall i\in[\![1,p]\!],\ F_i=\mathcal{V}ect\left((e_k)_{k\in J_i}\right)$. Les espaces vectoriels $(F_i)_{1\le i\le p}$ sont en somme directe et leur somme est égale à E. On note alors : $E=F_1\oplus F_2\oplus\ldots\oplus F_p$.

Réciproquement, si les espaces vectoriels $(F_i)_{1\le i\le p}$ sont en somme directe, en juxtaposant les bases des $(F_i)_{1\le i\le p}$, on obtient une base de $F_1\oplus F_2\oplus\ldots\oplus F_p$.

▪ ***Caractérisation matricielle des endomorphismes de E stabilisant les sous-espaces $(F_i)_{1\le i\le p}$.*** Soient p un entier naturel non nul, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(F_i)_{1\le i\le p}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E tels que $F_1\oplus F_2\oplus\ldots\oplus F_p=E$ et $f\in\mathcal{L}(E)$. Pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, F_i est stable par f (i.e. $\forall i\in[\![1,p]\!],\ f(F_i)\subset F_i$) si et seulement si, dans une base de E formée par juxtaposition des bases des sous-espaces vectoriels $(F_i)_{1\le i\le p}$, la matrice de f est de la forme :

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\boxed{A_1} & & 0 & \\ & \boxed{A_2} & & 0\\ 0 & & \ddots & \\ & 0 & & \boxed{A_p}\end{pmatrix}.\\ \underbrace{\quad}_{\dim F_1}\ \underbrace{\quad}_{\dim F_2}\ \ \ \underbrace{\quad}_{\dim F_p}\end{array}$$

VI. Image et formule du rang S O E Ø

▪ ***Image.*** Soient $n\in\mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $(e_i)_{1\le i\le n}$ une base de E et $\varphi\in\mathcal{L}(E,F)$. On a : $\operatorname{Im}\varphi=\mathcal{V}ect\left(\left(\varphi(e_i)\right)_{1\le i\le n}\right)$.

▪ ***Formule du rang.*** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\varphi\in\mathcal{L}(E,F)$. On a : $\dim(\operatorname{Im}\varphi)+\dim(\operatorname{Ker}\varphi)=\dim E$.

VII. Caractérisation des isomorphismes SO EO

■ Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension finie et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. φ est bijective (i.e. un isomorphisme) si et seulement si φ est injective ou surjective.

■ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension n, $(e_i)_{1\le i\le n}$ une base de E et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. φ est bijective si et seulement si la famille $\left(\varphi(e_i)\right)_{1\le i\le n}$ forme une base de F.

VIII. Rang d'une application linéaire, rang d'une matrice SO

1. Rang d'une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle rang de φ, la dimension de $\operatorname{Im}\varphi$, et on note : $\operatorname{rg}\varphi = \dim(\operatorname{Im}\varphi)$.

2. Rang d'une matrice

■ Soient n et p deux entiers naturels non nuls, E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives n et p, $(e_i)_{1\le i\le n}$ une base de E, $(f_i)_{1\le i\le p}$ une base de F, $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et A la matrice représentative de φ dans les bases $(e_i)_{1\le i\le n}$ et $(f_i)_{1\le i\le p}$. On appelle rang de A, le rang de φ, et on note : $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\varphi$.

■ Soient n et p deux entiers naturels non nuls et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Toute matrice obtenue à partir de A par une suite de transformations élémentaires sur les lignes et colonnes de A a le même rang que A.

■ Soient n et p deux entiers naturels non nuls et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a : $\operatorname{rg}({}^tA) = \operatorname{rg} A$.

Exercices clefs, méthodes et astuces

SO EO

■ 1. Méthode du pivot de Gauss : résolution de systèmes d'équations, inversion de matrices. Polynômes annulateurs d'une matrice

1) Résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2) Montrer que les matrices suivantes sont inversibles et calculer leur inverse :

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3) Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix}$.

a) Calculer M^2 et M^3. En déduire que : $M^3 + 2M^2 - M - 2I = 0$.

b) Montrer que M est inversible et calculer son inverse.

La méthode du pivot de Gauss

Pour résoudre un système d'équations linéaires ou pour inverser une matrice, il faut employer la méthode du pivot de Gauss. En voici une présentation qui la rendra mécanique et facile à utiliser **dans les cas non triviaux.**

I. Résolution d'un système d'équations linéaires

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ($n \in \mathbb{N}^*$). On cherche à résoudre le système $AX = B$. A chaque étape, lorsque l'on est en présence du système résiduel ($(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $a_{i,j} \neq 0$) :

$$\begin{pmatrix} a_{i,j} & a_{i,j+1} & a_{i,j+2} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,j} & \boxed{a_{i+1,j+1}} & a_{i+1,j+2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,j} & a_{n,j+1} & a_{n,j+2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j \\ x_{j+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_i \\ b_{i+1} \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

il faut laisser inchangée la première ligne, écrire une colonne de 0 sous le pivot $a_{i,j}$, puis, remplacer tout terme encadré $(a_{p,q})_{\substack{i+1 \leq p \leq n \\ j+1 \leq q \leq n}}$ ou $(b_p)_{i+1 \leq p \leq n}$ (c'est-à-dire situé en-dessous et à droite du pivot) :

– $a_{p,q}$ ($p \in [\![i+1, n]\!]$, $q \in [\![j+1, n]\!]$) par $a_{i,j}a_{p,q} - a_{p,j}a_{i,q}$, et :

– b_p ($p \in [\![i+1, n]\!]$) par $a_{i,j}b_p - a_{p,j}b_i$.

Pour calculer aisément chacun de ces produits, il suffit de visualiser les produits en croix :

$$\begin{pmatrix} a_{i,j} & \cdots & a_{i,q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p,j} & \cdots & a_{p,q} \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} b_i \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}.$$

Ces transformations reviennent à effectuer, pour chaque pivot (non nul) $a_{i,j}$ ($(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$) et pour tout $p \in [\![i+1, n]\!]$, l'opération $L_p \leftarrow a_{i,j}L_p - a_{p,j}L_i$ (ce qui revient à effectuer l'opération élémentaire $L_p \leftarrow L_p - \frac{a_{p,j}}{a_{i,j}} L_i$).

On obtient ainsi un nouveau système résiduel (avec une équation en moins) auquel on applique la même méthode.

Si l'utilisation de cette méthode peut paraître assez difficile au début, avec un peu de pratique des produits en croix, la résolution de systèmes d'équations linéaires devient très vite un automatisme.

Exemple : Soit à résoudre le système $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ①.

On a ($L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, $L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1$) :

① $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -8 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ soit ($L_3 \leftarrow -3L_3 - L_2$, $L_4 \leftarrow -3L_4 + 7L_2$) :

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 10 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ soit encore ($L_4 \leftarrow -L_4 - 10L_3$) :

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \\ 57 \end{pmatrix}$.

En notant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, on obtient alors, par substitution : $t = \frac{19}{6}$, $z = -\frac{1}{3}$, $y = \frac{7}{3}$ et $x = \frac{1}{6}$, soit :

$$X = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 14 \\ -2 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

Remarque : Noter également que pour tout entier k supérieur ou égal à 2, les lignes auxquelles on applique le $k^{\text{ème}}$ pivot sont toujours divisibles par le $(k-1)^{\text{ème}}$ pivot. La connaissance de cette propriété évite parfois d'avoir à résoudre des systèmes où les coefficients deviennent vite très grands. Ainsi, dans ce dernier exemple, la dernière ligne du dernier système était divisible par -3 (ou par 3).

II. Calcul de l'inverse d'une matrice

Pour inverser une matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ ($n \in \mathbb{N}^*$), il faut écrire $A = IA$, puis procéder comme précédemment en effectuant les transformations sur les matrices A (la première) et I. Ainsi, lorsque le pivot (non nul) est $a_{i,j}$ ($(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$) et que l'on est en présence des matrices résiduelles :

$$\begin{pmatrix} a_{i,j} & a_{i,j+1} & a_{i,j+2} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & a_{i+1,j+2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,j} & a_{n,j+1} & a_{n,j+2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \alpha_{i,1} & \cdots & \alpha_{i,n} \\ \alpha_{i+1,1} & \cdots & \alpha_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix},$$

on remplace chacun des termes situés en-dessous et à droite du pivot :

– $a_{p,q}$ ($p \in [\![i+1, n]\!]$, $q \in [\![j+1, n]\!]$) par $a_{i,j}a_{p,q} - a_{p,j}a_{i,q}$, et :

– $\alpha_{p,q}$ ($p \in [\![1, n]\!]$, $q \in [\![1, n]\!]$) par $a_{i,j}\alpha_{p,q} - a_{p,j}\alpha_{i,q}$.

On transforme ainsi les matrices A et I de telle sorte que la matrice résultant des transformations sur A soit triangulaire supérieure et on est alors en présence d'une relation du type :

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & b_{2,2} & \vdots \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \cdots & \beta_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{n,1} & \cdots & \beta_{n,n} \end{pmatrix} A.$$

Comme il existe une suite de transformations élémentaires sur les lignes de A qui mène à une matrice triangulaire dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls, on peut alors écrire que A est inversible et on procède alors à nouveau à la méthode du pivot, mais cette fois-ci en sens inverse avec $b_{n,n}$ comme premier pivot. Lorsque, pour $i \in [\![2, n]\!]$, on est ainsi en présence d'une équation du type :

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots \\ & \ddots & \\ & c_{2,2} & \\ & & \ddots \end{matrix}} & \begin{matrix} c_{1,i} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} & 0 \\ 0 & c_{i,i} & \\ & & \ddots \\ & & c_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \gamma_{1,1} & \cdots & \gamma_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{i-1,1} & \cdots & \gamma_{i-1,n} \end{matrix}} \\ \begin{matrix} \gamma_{i,1} & \cdots & \gamma_{i,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n,1} & \cdots & \gamma_{n,n} \end{matrix} \end{pmatrix} A$$

où $c_{i,i}$ est le pivot (avec initialement $i = n$), il faut laisser inchangée la $i^{\text{ème}}$ ligne, écrire une colonne de 0 au-dessus du pivot $c_{i,i}$, puis remplacer chacun des termes encadrés $(c_{p,q})_{\substack{1 \leq p \leq i-1 \\ 1 \leq q \leq i-1}}$ et $(\gamma_{p,q})_{\substack{1 \leq p \leq i-1 \\ 1 \leq q \leq n}}$ (c'est-à-dire situés au-dessus du pivot) :

– $c_{p,q}$ ($p \in [\![1, i-1]\!]$, $q \in [\![1, i-1]\!]$) par $c_{i,i}c_{p,q} - c_{p,i}c_{i,q} = c_{i,i}c_{p,q}$ (car $c_{i,q} = 0$), et :

– $\gamma_{p,q}$ ($p \in [\![1, i-1]\!]$, $q \in [\![1, n]\!]$) par $c_{i,i}\gamma_{p,q} - c_{p,i}\gamma_{i,q}$.

les produits en croix pouvant se visualiser ainsi :

$$\begin{pmatrix} c_{p,q} & \cdots & c_{p,l} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{l,q} & \cdots & c_{l,l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{p,q} \\ \vdots \\ \gamma_{l,q} \end{pmatrix} A.$$

Exemple : Soit à inverser $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. On a :

$$A = IA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A$$

soit $(L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1,\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1)$:

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A$$

soit encore $(L_3 \leftarrow -3L_3 - L_2,\ L_4 \leftarrow -3L_4 + 7L_2)$:

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 10 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & 0 \\ -5 & 7 & 0 & -3 \end{pmatrix} A$$

i.e. $(L_4 \leftarrow -\frac{1}{3} L_4 - \frac{10}{3} L_3)$:

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & 10 & 1 \end{pmatrix} A$$

d'où $(L_1 \leftarrow 6L_1 + L_4,\ L_2 \leftarrow 6L_2 - 2L_4,\ L_3 \leftarrow 6L_3 + 2L_4)$:

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 12 & 12 & 0 \\ 0 & -18 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 1 & 10 & 1 \\ -22 & 4 & -20 & -2 \\ 4 & -4 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 10 & 1 \end{pmatrix} A$$

soit encore $(L_1 \leftarrow -L_1 - 2L_3,\ L_2 \leftarrow -L_2 + 2L_3)$:

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 & -12 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 & 7 & -14 & -5 \\ 30 & -12 & 24 & 6 \\ 4 & -4 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 10 & 1 \end{pmatrix} A$$

et donc $(L_1 \leftarrow -3L_1 - 2L_2)$:

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -6 & 3 \\ 30 & -12 & 24 & 6 \\ 4 & -4 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 10 & 1 \end{pmatrix} A$$

soit enfin $(L_1 \leftarrow \frac{1}{3} L_1,\ L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2,\ L_3 \leftarrow -L_3)$:

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 1 \\ 10 & -4 & 8 & 2 \\ -4 & 4 & -2 & -2 \\ 5 & 1 & 10 & 1 \end{pmatrix} A$$

d'où la conclusion :

$$\Leftrightarrow A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 1 \\ 10 & -4 & 8 & 2 \\ -4 & 4 & -2 & -2 \\ 5 & 1 & 10 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) a) En effectuant les transformations $L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

soit $(L_3 \leftarrow \frac{3}{2} L_3 + \frac{1}{2} L_2)$:

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

et donc, en procédant par substitution :

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

d'où la conclusion :

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}}$$

b) De même, en effectuant les transformations $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -6 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

soit ($L_3 \leftarrow -6L_3 - 2L_2$) :

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -6 & 8 \\ 0 & 0 & -22 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -22 \end{pmatrix}$$

et donc, en procédant par substitution :

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'où la conclusion :

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

2) a) On a :

$$A = IA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A$$

d'où ($L_2 \leftarrow 3L_2 + L_1$) :

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A$$

soit encore ($L_3 \leftarrow -5L_3 + L_2$) :

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} A \ ①.$$

Comme il existe une suite de transformations élémentaires sur les lignes de A qui mène à une matrice triangulaire supérieure dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls, on peut écrire que A est inversible et, en effectuant les transformations $L_1 \leftarrow 8L_1 - L_3$ et $L_2 \leftarrow 4L_2 + L_3$, on en déduit alors :

$$① \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 24 & 8 & 0 \\ 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 5 \\ 5 & 15 & -5 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} A$$

d'où ($L_1 \leftarrow 5L_1 - L_2$) :

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 120 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & -30 & 30 \\ 5 & 15 & -5 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} A$$

soit enfin ($L_1 \leftarrow \frac{1}{15} L_1$, $L_2 \leftarrow \frac{1}{5} L_2$, $L_3 \leftarrow -L_3$) :

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix} A$$

i.e. :

$$\Leftrightarrow A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

d'où la conclusion :

$$\boxed{\text{A est inversible d'inverse } A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}}$$

b) De même, on a :

$$B = IB \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} B$$

d'où ($L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$) :

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} B$$

soit encore ($L_3 \leftarrow 3L_2 - 3L_3$) :

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} B \ ①.$$

Comme il existe une suite de transformations élémentaires sur les lignes de B qui mène à une matrice triangulaire supérieure dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls, on peut écrire que B est inversible et, en effectuant les transformations $L_1 \leftarrow -12L_1 - 2L_3$ et $L_2 \leftarrow -4L_2 + L_3$, on en déduit alors :

$$① \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -12 & 12 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 6 & -6 \\ 5 & -7 & 3 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} B$$ d'où ($L_1 \leftarrow L_1 + L_2$) :

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 5 & -7 & 3 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} B$$ et donc :

$$\Leftrightarrow B^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -5 & 7 & -3 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$ d'où la conclusion :

$$\boxed{\text{B est inversible d'inverse } B^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -5 & 7 & -3 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}}$$

3) **a)** On a : $M^2 = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} -15 & 14 & 14 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, et donc :

$$\boxed{M^3 + 2M^2 - M - 2I = 0}$$

b) On en déduit alors : $M(M^2 + 2M - I) = 2I$, et donc : $M\left(\frac{1}{2}(M^2 + 2M - I)\right) = I$. M est donc inversible d'inverse $\frac{1}{2}(M^2 + 2M - I)$, et donc, après calculs :

$$\boxed{\text{M est inversible d'inverse } M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -4 & 10 & 8 \\ 5 & -13 & -11 \end{pmatrix}}$$

☞ Soient M une matrice carrée et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme tel que $a_0 \neq 0$. Si $P(M) = 0$ (P est alors appelé polynôme annulateur de M), on peut alors écrire que : $M\left(-\frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{n} a_k M^{k-1}\right) = I$ et donc que M est inversible d'inverse $-\frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{n} a_k M^{k-1}$.

50

■ 2. Rang d'une matrice, d'une famille de vecteurs

1) Déterminer le rang des matrices suivantes :

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

c) $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2) Soient (u_1, u_2, u_3, u_4) la famille de vecteurs de $\mathbf{R}^4$ définie par :

$$\begin{cases} u_1 = (1, 0, 1, 2) \\ u_2 = (2, -2, 3, 1) \\ u_3 = (0, 2, -1, 3) \\ u_4 = (-2, 4, -4, 2) \end{cases}$$

et $E = \mathcal{V}ect(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

Déterminer une base de E. La compléter pour obtenir une base de $\mathbf{R}^4$.

1) a) En effectuant les transformations $L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_1$, on peut écrire :

$$\text{rg } A = \text{rg}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$ soit, en effectuant la transformation $L_3 \leftarrow 5L_3 - 7L_2$:

$$= \text{rg}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -36 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs colonnes de cette dernière matrice formant clairement une famille libre, on en déduit alors que $\text{rg}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -36 \end{pmatrix} = 3$, et donc que :

$$\boxed{\text{rg } A = 3}$$

☞ Dans la pratique, pour déterminer le rang d'une matrice A, il faut effectuer une suite de transformations élémentaires sur les lignes (ou colonnes) de A afin d'aboutir à :

– une matrice triangulaire supérieure du type $\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,r} & \dots & a_{1,n} \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & a_{r,r} & \dots & a_{r,n} \\ & 0 & & & \\ & & & 0 & \end{pmatrix}$ avec $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $a_{i,i} \neq 0$ ou :

– une matrice triangulaire inférieure du type $\begin{pmatrix} a_{1,1} & & & \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ a_{r,1} & \dots & a_{r,r} & \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,r} & \end{pmatrix}$ avec $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $a_{i,i} \neq 0$.

Dans les deux cas de figure, on a alors : rg A = r.

b) En effectuant la transformation $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$, on peut écrire :

$$\text{rg } B = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$ soit, en effectuant la transformation $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$:

$$= \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les deux premiers vecteurs lignes de cette dernière matrice formant clairement une famille libre et le troisième étant nul, on en déduit alors que $\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$, et donc que :

$$\boxed{\text{rg } B = 2}$$

c) En effectuant les transformations $L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow 3L_3 - 4L_1$ et $L_4 \leftarrow 3L_4 - 2L_1$, on peut écrire :

$$\text{rg } C = \text{rg}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$ soit, en effectuant les transformations $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4 + L_2$:

$$= \text{rg}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les deux premiers vecteurs lignes de cette dernière matrice formant clairement une famille libre et les deux derniers étant nuls, on en déduit alors que $\text{rg}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$, et donc que :

$$\boxed{\text{rg } C = 2}$$

2) ▪ Soit M la matrice représentant la famille (u_1, u_2, u_3, u_4), $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. En effectuant les transformations $C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1$ et $C_4 \leftarrow C_4 + 2C_1$, on peut écrire :

$$\text{rg } M = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$ soit, en effectuant les transformations $C_3 \leftarrow C_3 + C_2$ et $C_4 \leftarrow C_4 + 2C_2$:

$$= \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les deux premiers vecteurs colonnes de cette dernière matrice formant clairement une famille libre et les deux derniers étant nuls, on en déduit alors que $\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$, donc que $\text{rg}\, M = 2$, i.e. : $\dim E = 2$, d'où la conclusion :

$$\boxed{\text{En posant } \begin{cases} v_1 = (1, 0, 1, 2) \\ v_2 = (0, -2, 1, -3) \end{cases}, \text{ on peut écrire que la famille } (v_1, v_2) \text{ forme une base de } E}$$

☞ La dimension d'un espace E engendré par une famille de vecteurs $(u_i)_{1 \le i \le p}$ est le rang de la matrice M représentant cette famille de vecteurs.

En effectuant une suite de transformations élémentaires **exclusivement sur les colonnes de M** (ou une suite de transformations élémentaires **exclusivement sur les lignes de ^{t}M**), on peut déterminer une base de E en juxtaposant les vecteurs colonnes non nuls de la matrice obtenue suite aux transformations sur M (ou en juxtaposant les vecteurs lignes non nuls de la matrice obtenue suite aux transformations sur ^tM).

Ces transformations élémentaires ne peuvent s'effectuer que sur les colonnes de M ou sur les lignes de ^tM (jamais le contraire) car les vecteurs formant une base E doivent être uniquement combinaisons linéaires des vecteurs $(u_i)_{1 \le i \le p}$.

▪ Comme la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure avec tous ses coefficients diagonaux non nuls, on peut écrire qu'elle est inversible, donc :

$$\boxed{\text{En posant } \begin{cases} v_1 = (1, 0, 1, 2) \\ v_2 = (0, -2, 1, -3) \\ e_3 = (0, 0, 1, 0) \\ e_4 = (0, 0, 0, 1) \end{cases}, \text{ on peut écrire que la famille } (v_1, v_2, e_3, e_4) \text{ forme une base de } \mathbb{R}^4}$$

☞ Pour compléter en une base de $\mathbb{R}^n$ une famille de vecteurs formant une base d'un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^n$ et obtenu par la méthode précédente, il suffit de juxtaposer les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ tels que la matrice représentant l'ensemble de ces vecteurs (dans l'ordre adéquat) soit une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont non nuls.

SO E❷

■ 3. Etude d'une application de $\mathbb{R}^n$

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ telle que:

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f\big((x, y, z)\big) = (2x - y, z - y, 2x + 3z).$$

1) f est-il un endomorphisme ?

2) Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice représentative M de f dans $\mathcal{B}$.

3) f est-il un automorphisme ? Si oui, déterminer la matrice représentative de f^{-1} dans $\mathcal{B}$.

1) ❑ On a :

$$\forall (\lambda, u, v) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3)^2, \begin{cases} u = (x, y, z) \\ v = (x', y', z') \end{cases}, f(\lambda u + v) = f\big((\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')\big) \quad \text{soit :}$$

$$= \big(2(\lambda x + x') - (\lambda y + y'), (\lambda z + z') - (\lambda y + y'), 2(\lambda x + x') + 3(\lambda z + z')\big)$$

$$= \lambda(2x - y, z - y, 2x + 3z) + (2x' - y', z' - y', 2x' + 3z') \quad \text{et donc :}$$

$$= \lambda f(u) + f(v).$$

f est donc une application linéaire.

☞ Pour montrer que f est une application linéaire de E, il faut et il suffit de montrer que : $\forall (\lambda, u, v) \in \mathbb{R} \times E^2,\ f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$, en veillant à bien détailler toutes les étapes.

En cas de difficulté, on peut montrer que : $\forall (\lambda, u, v) \in \mathbb{R} \times E^2,\ \lambda f(u) + f(v) = f(\lambda u + v)$.

❑ Soit maintenant $u \in \mathbb{R}^3$, $u = (x, y, z)$. D'après la définition de f, on a clairement : $f(u) = (2x - y, z - y, 2x + 3z)$, d'où : $f(u) \in \mathbb{R}^3$.

f est donc une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

☞ Pour montrer que f est une application de E dans E, on écrit : "soit $u \in E$" et on montre que $f(u) \in E$.

❑ f étant une application de linéaire $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, on peut désormais conclure :

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^3}$$

☞ Pour montrer qu'une application f est un endomorphisme de E, il faut montrer successivement que f est une application linéaire, puis que f est une application de E dans E.

2) On a :

– $f\big((1, 0, 0)\big) = (2, 0, 2)$,

– $f\big((0, 1, 0)\big) = (-1, -1, 0)$ et :

– $f\big((0, 0, 1)\big) = (0, 1, 3)$.

La matrice représentative M de f dans $\mathcal{B}$ est donc :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

Soient E et F deux espaces vectoriels, $(e_i)_{1\le i\le n}$ une base de E et $(f_j)_{1\le j\le p}$ une base de F. Pour écrire la matrice M associée à une application linéaire $\varphi\in\mathcal{L}(E, F)$ dans les bases $(e_i)_{1\le i\le n}$ et $(f_j)_{1\le j\le p}$, il faut disposer, pour tout $i\in[1, n]$, dans la $i^{ème}$ colonne de M les coordonnées de $\varphi(e_i)$ dans la base $(f_j)_{1\le j\le p}$.

Si $\forall i\in[1, n]$, $\varphi(e_i) = \sum_{j=1}^{p}\alpha_{j,i} f_j$, M est alors la matrice :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & & \varphi(e_n) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_p \end{array} & \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{p,1} & \alpha_{p,2} & \cdots & \alpha_{p,n} \end{pmatrix} \end{array}$$

3) ▪ On a :

$$M = IM \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M \qquad \text{soit } (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} M \qquad \text{et donc } (L_3 \leftarrow L_2 + L_3) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} M \ ①.$$

Comme il existe une suite de transformations élémentaires sur les lignes de M qui mène à une matrice triangulaire supérieure dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls, on peut maintenant écrire que M est inversible, et donc que f est bijectif.

f étant en outre un endomorphisme de E, on peut désormais conclure :

$$\boxed{\text{f est un automorphisme de E}}$$

Applications linéaires bijectives et matrices inversibles

Soient E et F deux espaces vectoriels, $\varphi\in\mathcal{L}(E, F)$ et A la matrice représentative de φ dans des bases de E et F (lorsque E et F sont de dimension finie). Pour montrer que φ est bijectif ou que A est une matrice inversible, plusieurs méthodes sont possibles :

1) On s'intéresse à l'application φ :

– si E et F sont de **même dimension finie**, il suffit de montrer que φ est injective – en montrant que $\operatorname{Ker}\varphi = \{0_E\}$ (cf. exercice 4.1b) – ou, mais c'est beaucoup plus difficile, surjective – en montrant que $\operatorname{Im}\varphi = F$.

– si E et F sont de dimension inconnue ou infinie, il faut montrer que φ est injective et surjective (à l'aide du noyau et de l'image de φ) ou directement bijective en revenant à la définition, i.e. : $\forall y\in F, \exists! x\in E, \varphi(x) = y$ (cf. exercice 11).

– on montre que l'image d'une base de E par φ forme une base de F.

Remarque : Si E et F sont de dimension finie avec $\dim E \neq \dim F$, φ ne peut être bijective.

2) On s'intéresse à la matrice A représentative de φ dans une base donnée. Si A est une matrice carrée d'ordre n ($n\in\mathbb{N}^*$), pour montrer que A est inversible :

– on montre qu'il existe une suite de transformations élémentaires sur les lignes (ou colonnes) de A qui mène à une matrice triangulaire dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls (cf. exercice 4.1c),

– on montre que les vecteurs colonnes ou lignes de A forment une famille libre (ou, mais c'est beaucoup plus difficile, une famille génératrice) de $\mathbb{K}^n$,

– on montre que $\exists B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AB = I_n$ ou $\exists B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $BA = I_n$.

– on montre que le système $AX = 0$ admet pour unique solution $X = 0$,

– on montre que $\mathrm{rg}\, A = n$,

– on montre que ${}^tA$ est inversible,

– on montre 0 n'est pas valeur propre de A (cf. exercice **3**.4.1).

Remarque : Si A n'est pas une matrice carrée, la notion d'inversibilité n'a pas de sens pour A (!!!).

• De plus, on a ($L_1 \leftarrow 4L_1$, $L_2 \leftarrow 4L_2 - L_3$) :

$$① \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} M \qquad \text{soit } (L_1 \leftarrow L_1 - L_2) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} M \qquad \text{et donc } (L_2 \leftarrow -2L_2,\ L_3 \leftarrow 2L_3) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2 & -6 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} M.$$

M est donc inversible d'inverse $M^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2 & -6 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. La matrice représentative de f^{-1} dans $\mathcal{B}$ est donc :

$$\boxed{M^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2 & -6 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}}$$

S❶ E❷

■ 4. Etude d'applications de $\mathbb{R}[X]$

1) Soit f l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ qui à tout polynôme P associe le polynôme :

$$Q = P(X) + (X - 1)P'(X).$$

a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

b) f est-elle bijective ?

c) Ecrire la matrice M représentative de f de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $(1, 2X, 3X^2)$. Retrouver le **b**.

2) Soit φ l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ qui à tout polynôme P associe le polynôme :

$$Q = 2P(X) + (2 - 3X)P'(X) + (2X^2 - X + 1)P''(X).$$

a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

b) Ecrire la matrice représentative de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

c) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\,\varphi$ et une base de $\mathrm{Im}\,\varphi$.

1) a) ❍ On a :

$$\forall(\lambda, P, Q) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_2[X])^2,\ f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(X) + (X - 1)(\lambda P + Q)'(X) \qquad \text{soit :}$$

$$= \lambda P(X) + Q(X) + (X - 1)\big(\lambda P'(X) + Q'(X)\big) \qquad \text{soit encore :}$$

$$= \lambda\big(P(X) + (X - 1)P'(X)\big) + \big(Q(X) + (X - 1)Q'(X)\big) \qquad \text{et donc :}$$

$$= \lambda f(P) + f(Q).$$

f est donc une application linéaire.

❑ Soit maintenant $P \in \mathbb{R}_2[X]$. On peut alors écrire : $P' \in \mathbb{R}_1[X]$, d'où : $(X-1)P'(X) \in \mathbb{R}_2[X]$, et donc : $\big(P(X) + (X-1)P'(X)\big) \in \mathbb{R}_2[X]$, i.e. : $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.

f est donc une application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.

❑ On peut maintenant conclure :

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_2[X]}$$

b) On a : $\operatorname{Ker} f = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ f(P) = 0\}$. Soit maintenant $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $P = a_2X^2 + a_1X + a_0$. On a alors :

$$f(P) = (a_2X^2 + a_1X + a_0) + (X-1)(2a_2X + a_1) \qquad \text{i.e. :}$$
$$= 3a_2X^2 + 2(a_1 - a_2)X + (a_0 - a_1).$$

Un polynôme étant nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, on en déduit alors :

$$f(P) = 0 \iff \begin{cases} 3a_2 = 0 \\ 2(a_1 - a_2) = 0 \\ a_0 - a_1 = 0 \end{cases} \qquad \text{soit :}$$

$$\iff a_0 = a_1 = a_2 = 0 \qquad \text{i.e. :}$$

$$\iff P = 0 \qquad \text{d'où :}$$

$\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

f est donc injective. f étant en outre une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$, donc sur des espaces vectoriels de même dimension finie, on peut maintenant conclure :

$$\boxed{f \text{ est bijective}}$$

☞ Pour déterminer le noyau d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$, il faut écrire la définition de Ker f : $\operatorname{Ker} f = \{u \in E,\ f(u) = 0\}$, puis résoudre l'équation $f(u) = 0$ et ce, en raisonnant par équivalence ou par implications.

☞ Pour montrer qu'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective (resp. surjective), il faut presque toujours montrer que $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ (resp. $\operatorname{Im} f = F$).

☞ Se souvenir que si f est une application linéaire sur des espaces vectoriels de même dimension finie, f est bijective si et seulement si f est injective ou surjective (l'injectivité étant presque toujours la propriété la plus facile à démontrer).

c) ■ On a :

– $f(1) = 1$,

– $f(X) = 2X - 1$,

– $f(X^2) = 3X^2 - 2X$.

On en déduit alors la matrice représentative de f de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $(1, 2X, 3X^2)$:

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

■ M étant une matrice triangulaire supérieure dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls, on en déduit alors que M est inversible et donc que :

$$\boxed{f \text{ est bijective}}$$

2) a) ❏ On a :

$\forall(\lambda, P, Q)\in \mathbb{R}\times(\mathbb{R}_3[X])^2$, $\varphi(\lambda P + Q) = 2(\lambda P + Q)(X) + (2 - 3X)(\lambda P + Q)'(X) + (2X^2 - X + 1)(\lambda P + Q)''(X)$ soit :

$$= 2\lambda P(X) + 2Q(X) + (2 - 3X)\big(\lambda P'(X) + Q'(X)\big) + (2X^2 - X + 1)\big(\lambda P''(X) + Q''(X)\big)$$

soit encore :

$$= \lambda\big(2P(X) + (2 - 3X)P'(X) + (2X^2 - X + 1)P''(X)\big) + \big(2Q(X) + (2 - 3X)Q'(X) + (2X^2 - X + 1)Q''(X)\big)$$

et donc :

$$= \lambda\varphi(P) + \varphi(Q).$$

φ est donc une application linéaire.

❏ Soit maintenant $P\in \mathbb{R}_3[X]$. On peut alors écrire : $P'\in \mathbb{R}_2[X]$ et $P''\in \mathbb{R}_1[X]$, d'où : $(2 - 3X)P'(X)\in \mathbb{R}_3[X]$ et $(2X^2 - X + 1)P''(X)\in \mathbb{R}_3[X]$, et donc : $\big(2P(X) + (2 - 3X)P'(X) + (2X^2 - X + 1)P''(X)\big)\in \mathbb{R}_3[X]$, i.e. : $\varphi(P)\in \mathbb{R}_3[X]$.

φ est donc une application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.

❏ On peut maintenant conclure :

$$\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_3[X]}$$

b) On obtient, après calculs :

- $\varphi(1) = 2$,
- $\varphi(X) = 2 - X$,
- $\varphi(X^2) = 2X + 2$.
- $\varphi(X^3) = 5X^3 + 6X$.

On en déduit alors la matrice représentative de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$:

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}$$

c) ▪ On a : $\text{Ker}\,\varphi = \{P\in \mathbb{R}_3[X],\ \varphi(P) = 0\}$. Soit maintenant $P\in \mathbb{R}_3[X]$, $P = \sum_{k=0}^{3} a_k X^k$. φ étant une application linéaire, on en déduit alors :

$\varphi(P) = \sum_{k=0}^{3} a_k\,\varphi(X^k)$ soit, d'après les résultats de la question précédente :

$= 2a_0 + (2 - X)a_1 + 2(X + 1)a_2 + (5X^3 + 6X)a_3$ i.e. :

$= 2(a_0 + a_1 + a_2) + (6a_3 + 2a_2 - a_1)X + 5a_3X^3.$

Un polynôme étant nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, on en déduit alors :

$$\varphi(P) = 0 \iff \begin{cases} 2(a_0 + a_1 + a_2) = 0 \\ 6a_3 + 2a_2 - a_1 = 0 \\ 5a_3 = 0 \end{cases} \quad \text{soit :}$$

$$\iff \begin{cases} a_3 = 0 \\ a_1 = 2a_2 \\ a_0 = -3a_2 \end{cases} \quad \text{d'où :}$$

$$\iff P\in \{\alpha X^2 + 2\alpha X - 3\alpha,\ \alpha\in \mathbb{R}\} \quad \text{i.e. :}$$

$$\iff P\in \mathcal{V}ect(X^2 + 2X - 3) \quad \text{d'où la conclusion :}$$

$$\boxed{\text{Une base de Ker}\,\varphi \text{ est } (X^2 + 2X - 3)}$$

■ On a également :

$\mathrm{Im}\,\varphi = \mathcal{V}ect\big(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2), \varphi(X^3)\big)$ soit, d'après les résultats de la question précédente :

$= \mathcal{V}ect\big(2, 2 - X, 2(X+1), 5X^3 + 6X\big)$ soit encore, comme $2 - X = \frac{3}{2}\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot 2(X+1)$:

$= \mathcal{V}ect\big(2, 2(X+1), 5X^3 + 6X\big)$ et comme $2(X+1) - 2 = 2X$ et $(5X^3 + 6X) - 3\cdot 2X = 5X^3$:

$= \mathcal{V}ect(2, 2X, 5X^3)$ i.e. :

$= \mathcal{V}ect(1, X, X^3)$.

Comme la famille $(1, X, X^3)$ est libre, on peut désormais conclure :

$$\boxed{\text{Une base de } \mathrm{Im}\,\varphi \text{ est } (1, X, X^3)}$$

☞ Soient E et F deux espaces vectoriels, $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(e_i)_{1\le i\le n}$ une base de E. Pour déterminer Im φ, il faut le plus souvent écrire : $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathcal{V}ect\Big(\big(\varphi(e_i)\big)_{1\le i\le n}\Big)$ puis éliminer les vecteurs liés afin d'aboutir à une famille libre.
On peut également effectuer des transformations élémentaires sur les colonnes de la matrice M représentative de φ (cf. exercice 2.2).

S❶ E❷

■ 5. Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels

1) Soit n un entier naturel non nul. Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on note :

$$F_\lambda = \{P \in \mathbf{R}_n[X],\ P(\lambda) = 0\}.$$

a) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, F_λ est un **R**-espace vectoriel. En déterminer une base. Quelle est sa dimension ?

b) (S❶) Soient $p \in [\![1, n]\!]$ et $(\lambda_i)_{1\le i\le p}$ p réels deux à deux distincts. Montrer que $\left(\bigcap_{i=1}^{p} F_{\lambda_i}\right)$ est un **R**-espace vectoriel. En déterminer une base et sa dimension.

2) Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On note :

$$E = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}),\ \exists (a, b, c) \in \mathbf{R}^3,\ M = aA + bB + cC\}.$$

Montrer que E est un **R**-espace vectoriel dont on déterminera une base et la dimension.

1) a) ❑ Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. On a :

– $F_\lambda \subset \mathbf{R}_n[X]$ (par définition de F_λ),

– $0_{\mathbf{R}_n[X]}(\lambda) = 0$, d'où : $0_{\mathbf{R}_n[X]} \in F_\lambda$, et donc : $F_\lambda \neq \varnothing$,

– $\forall (\alpha, P, Q) \in \mathbf{R}\times F_\lambda^2,\ (\alpha P + Q) \in \mathbf{R}_n[X]$ et :

$\forall (\alpha, P, Q) \in \mathbf{R}\times F_\lambda^2,\ (\alpha P + Q)(\lambda) = \alpha P(\lambda) + Q(\lambda)$ soit :

$= 0$ et donc :

$\forall (\alpha, P, Q) \in \mathbf{R}\times F_\lambda^2,\ (\alpha P + Q) \in F_\lambda$.

Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, F_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_n[X]$, donc un **R**-espace vectoriel.

❑ Soient maintenant $\lambda \in \mathbf{R}$ et $P \in F_\lambda$. Par définition de F_λ, on peut écrire que $P \in \mathbf{R}_n[X]$ et que $P(\lambda) = 0$, donc que P est divisible par $(X - \lambda)$, i.e. :

$\exists Q\in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ P = (X-\lambda)Q$ soit :

$\exists (a_k)_{0\le k\le n-1}\in \mathbb{R}^n,\ P = (X-\lambda)\left[\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k\right]$ i.e. :

$$= \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k (X-\lambda).$$

La famille $\left(X^k(X-\lambda)\right)_{0\le k\le n-1}$ est donc génératrice de F_λ. Comme elle forme en outre une famille libre (car graduée en degrés, cf. exercice 8.2), c'est donc une base de F_λ. Enfin, comme elle est constituée de n vecteurs, on peut maintenant conclure :

$\boxed{\text{Pour tout } \lambda\in \mathbb{R},\ F_\lambda \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel de dimension } n \text{ dont une base est } \left(X^k(X-\lambda)\right)_{0\le k\le n-1}}$

☞ Deux méthodes existent pour montrer que F est un espace vectoriel :
– soit on remarque que F est une sous-partie d'un espace vectoriel E connu (c'est le cas le plus courant) et on démontre alors que F est un sous-espace vectoriel de E, donc un espace vectoriel,
– soit on revient à la définition.

☞ Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E, il faut et il suffit de montrer que :
– $F\subset E$,
– $0_E\in F$ (donc $F\neq\varnothing$),
– $\forall(\lambda, u, v)\in \mathbb{K}\times F^2,\ (\lambda u + v)\in F$.

☞ Les espaces vectoriels classiques à connaître sont les suivants (E et F désignent ici des espaces vectoriels, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) :
– $\mathbb{K}^n$ ($n\in\mathbb{N}^*$), $\mathbb{K}_n[X]$ ($n\in\mathbb{N}^*$), $\mathbb{K}[X]$,
– l'ensemble des fonctions (de classe C^n, $n\in\mathbb{N}$, de classe C^∞) de I dans $\mathbb{R}$ ($I\subset\mathbb{R}$),
– l'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{K}$,
– $\mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{L}(E)$,
– $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($(n, p)\in(\mathbb{N}^*)^2$),
– l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, triangulaires inférieures, diagonales, symétriques et antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($n\in\mathbb{N}^*$).

Attention !!! $GL(E)$ et $GL_n(\mathbb{K})$ ($n\in\mathbb{N}^*$) ne sont pas des espaces vectoriels.

☞ Noter qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (ou espace vectoriel sur $\mathbb{K}$) est un espace vectoriel dont les scalaires sont pris dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Remarquer également que pour tout $n\in\mathbb{N}$:
– $\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2n,
– $\mathbb{C}_n[X]$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n + 1 et un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2(n + 1).

b) $\left(\bigcap_{i=1}^{p} F_{\lambda_i}\right)$ étant l'intersection de p $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, on peut écrire que $\left(\bigcap_{i=1}^{p} F_{\lambda_i}\right)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

☞ Se souvenir que l'intersection et la somme d'espaces vectoriels sont des espaces vectoriels, que le noyau et l'image d'une application linéaire sont également des espaces vectoriels.

Soit alors $P\in\left(\bigcap_{i=1}^{p} F_{\lambda_i}\right)$. Par définition de F_{λ_i} ($i\in[\![1, p]\!]$), on peut écrire que $P\in\mathbb{R}_n[X]$ et que $\forall i\in[\![1, p]\!],\ P(\lambda_i) = 0$, donc que P est divisible par $\prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)$, i.e. :

$\exists Q\in \mathbb{R}_{n-p}[X],\ P = \left[\prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)\right]Q$ soit :

$\exists (a_k)_{0\leq k\leq n-p}\in \mathbb{R}^{n-p+1},\ P = \left[\prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)\right]\left[\sum_{k=0}^{n-p} a_k X^k\right]$ i.e. :

$$= \sum_{k=0}^{n-p} a_k\left[X^k\left(\prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)\right)\right].$$

La famille $\left(X^k\left(\prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)\right)\right)_{0\leq k\leq n-p}$ est donc génératrice de $\left(\bigcap_{i=1}^{p} F_{\lambda_i}\right)$. Comme elle forme en outre une famille libre (car graduée en degrés, cf. exercice 8.2), c'est donc une base de $\left(\bigcap_{i=1}^{p} F_{\lambda_i}\right)$. Enfin, comme elle est constituée de n - p + 1 vecteurs, on peut maintenant conclure :

$\boxed{\left(\bigcap_{i=1}^{p} F_{\lambda_i}\right) \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel de dimension } n-p+1 \text{ dont une base est } \left(X^k\left(\prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)\right)\right)_{0\leq k\leq n-p}}$

2) Comme A, B et C sont trois éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et comme E = $\mathcal{Vect}$(A, B, C), E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont (A, B, C) est une famille génératrice.

Ces trois matrices formant une famille libre (évident à partir de la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$), on peut maintenant écrire que la famille (A, B, C) forme une base de E, d'où la conclusion :

$\boxed{\text{E est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel de dimension 3 dont une base est (A, B, C)}}$

SO EO

■ 6. Familles libres de $\mathbb{R}[X]$ et de $\mathbb{R}^n$

1) Montrer que la famille $(1, X(X-1), X^2(X+1), X(X-1)^2)$ est libre.

2) Montrer que la famille $((0, 1, 2), (2, 1, 3), (2, 1, 1))$ est libre.

1) Soit $(\lambda_i)_{1\leq i\leq 4}\in \mathbb{R}^4$. On a :

$\lambda_1\cdot 1 + \lambda_2 X(X-1) + \lambda_3 X^2(X+1) + \lambda_4 X(X-1)^2 = 0 \Rightarrow (\lambda_3+\lambda_4)X^3 + (\lambda_2+\lambda_3-2\lambda_4)X^2 + (\lambda_4-\lambda_2)X + \lambda_1 = 0$

et donc, un polynôme étant nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls :

$$\Rightarrow \begin{cases}\lambda_1 = 0\\ \lambda_4-\lambda_2 = 0\\ \lambda_2+\lambda_3-2\lambda_4 = 0\\ \lambda_3+\lambda_4 = 0\end{cases} \quad \text{i.e. :}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\lambda_1 = 0\\ \lambda_2 = \lambda_4\\ \lambda_3 = \lambda_4\\ \lambda_3 = -\lambda_4\end{cases} \quad \text{et donc :}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

On peut désormais conclure :

$\boxed{\text{La famille } (1, X(X-1), X^2(X+1), X(X-1)^2) \text{ est libre}}$

2) Soit $(\lambda_i)_{1\le i\le 3} \in \mathbf{R}^3$. On a :

$\lambda_1(0, 1, 2) + \lambda_2(2, 1, 3) + \lambda_3(2, 1, 1) = 0 \Rightarrow (2\lambda_2 + 2\lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3) = 0$ ce qui s'écrit encore :

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{soit } (L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1) :$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{soit encore } (L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2) :$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = 0 \ ①.$$

La matrice précédente étant une matrice triangulaire supérieure dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls, elle est inversible. On en déduit alors que le système ① est de Cramer, et donc que :

① $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ i.e. :

$\lambda_1(0, 1, 2) + \lambda_2(2, 1, 3) + \lambda_3(2, 1, 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$

On peut maintenant conclure :

$$\boxed{\text{La famille } ((0, 1, 2), (2, 1, 3), (2, 1, 1)) \text{ est libre}}$$

NB : On aurait également pu démontrer (en voie scientifique) que le rang de la matrice représentant ces trois vecteurs est égal à 3, c'est-à-dire au nombre de vecteurs de cette famille, et donc que la famille est libre.

☞ Soient $E = \mathbf{R}^n$ ou $E = \mathbf{R}_{n-1}[X]$ (ou $E = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$) et $(e_i)_{1\le i\le n}$ une base de E. Pour montrer que la famille $(u_i)_{1\le i\le p}$ est libre (avec $\forall i \in [1, p]$, $u_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} e_j$), on écrit : "Soient $(\lambda_i)_{1\le i\le p} \in \mathbf{R}^p$", puis :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} e_j \right) = 0 \qquad \text{soit, en inversant les sommes :}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \left[\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \alpha_{i,j} \right) e_j \right] = 0 \qquad \text{et donc, la famille } (e_j)_{1\le j\le n} \text{ formant une famille libre de E :}$$

$$\Rightarrow \forall j \in [1, n], \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \alpha_{i,j} = 0.$$

On montre ensuite que le système $\left(\forall j \in [1, n], \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \alpha_{i,j} = 0 \right)$ admet pour solution unique $(\lambda_i)_{1\le i\le p}$ le p-uplet $(0)_{1\le i\le p}$. On peut alors conclure que la famille $(u_i)_{1\le i\le p}$ est libre.

☞ Pour montrer la liberté d'une famille de p vecteurs, une deuxième méthode est possible (en voie scientifique) : prouver que le rang de la matrice représentant ces p vecteurs est égal à p.

SO❷

7. Familles libres de fonctions

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(x \mapsto e^{kx})_{1 \leq k \leq n}$ est libre.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(x \mapsto \sin kx)_{1 \leq k \leq n}$ est libre.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(x \mapsto x^k \ln^{n-k} x)_{0 \leq k \leq n}$ est libre.

4) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite de réels deux à deux distincts, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_k)_{1 \leq k \leq n}$ la suite de fonctions définies sur I par :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \forall x \in I,\ f_k(x) = \left|x - \alpha_k\right|.$$

A quelles conditions la famille $(f_k)_{1 \leq k \leq n}$ est-elle libre ?

1) i) Première méthode : démonstration par récurrence.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(x \mapsto e^{kx})_{1 \leq k \leq n}$ est libre.

• Au rang $n = 1$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \neq 0$, on a : $\exists x \in \mathbb{R},\ \lambda e^x = 0 \Rightarrow \lambda = 0$. La famille $(x \mapsto e^x)$ est donc libre.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que la famille $(x \mapsto e^{kx})_{1 \leq k \leq n}$ soit libre. Soient alors $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Les fonctions $(x \mapsto e^{kx})_{1 \leq k \leq n+1}$ étant dérivables sur $\mathbb{R}$, par dérivation, on peut alors écrire :

$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k e^{kx} = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=1}^{n+1} k\lambda_k e^{kx} = 0$ d'où, en multipliant la première relation par $n + 1$ et en lui soustrayant la seconde :

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (n+1)\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k e^{kx} - \sum_{k=1}^{n+1} k\lambda_k e^{kx} = 0$ i.e. :

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=1}^{n+1} (n-k+1)\lambda_k e^{kx} = 0$ soit encore, le terme en $k = n + 1$ étant nul :

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=1}^{n} (n-k+1)\lambda_k e^{kx} = 0$ et donc, la famille $(x \mapsto e^{kx})_{1 \leq k \leq n}$ étant libre, d'après l'hypothèse de récurrence :

$\Rightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ (n-k+1)\lambda_k = 0$ et comme $\forall k \in [\![1, n]\!],\ n - k + 1 \neq 0$:

$\Rightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ \lambda_k = 0$ et comme $\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k e^{kx} = 0$:

$\Rightarrow \begin{cases} \forall k \in [\![1, n]\!],\ \lambda_k = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_{n+1} e^{(n+1)x} = 0 \end{cases}$ soit enfin, en posant $x = 0$ dans la deuxième équation :

$\Rightarrow \begin{cases} \forall k \in [\![1, n]\!],\ \lambda_k = 0 \\ \lambda_{n+1} = 0 \end{cases}$ i.e. :

$\Rightarrow \forall k \in [\![1, n+1]\!],\ \lambda_k = 0.$

La famille $(x \mapsto e^{kx})_{1 \leq k \leq n+1}$ est donc libre.

• Ainsi,

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ la famille } (x \mapsto e^{kx})_{1 \leq k \leq n} \text{ est libre}}$$

ii) Deuxième méthode : démonstration à l'aide de polynômes.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda_k)_{1\le k\le n} \in \mathbb{R}^n$ et $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k$. On a :

$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e^{kx} = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, P(e^x) = 0$ et comme $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$:

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^*, P(x) = 0$ et donc, comme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et P s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$ (cf. exercice 1.1.1b) :

$\Rightarrow P = 0$ soit enfin, un polynôme étant nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls :

$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e^{kx} = 0 \Rightarrow \forall k \in [1, n], \lambda_k = 0$ d'où la conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ la famille } \left(x \mapsto e^{kx}\right)_{1\le k\le n} \text{ est libre}}$$

2) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $\left(x \mapsto \sin kx\right)_{1\le k\le n}$ est libre.

• Au rang $n = 1$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme $\exists x \in \mathbb{R}, \sin x \neq 0$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda \sin x = 0 \Rightarrow \lambda = 0$. La famille $\left(x \mapsto \sin x\right)$ est donc libre.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que la famille $\left(x \mapsto \sin kx\right)_{1\le k\le n}$ soit libre. Soient alors $(\lambda_k)_{1\le k\le n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Les fonctions $\left(x \mapsto \sin kx\right)_{1\le k\le n+1}$ étant deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, on peut alors écrire :

$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \sin kx = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, -\sum_{k=1}^{n+1} k^2 \lambda_k \sin kx = 0$ d'où, en multipliant la première relation par $(n+1)^2$ et en lui soustrayant la seconde :

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (n+1)^2 \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \sin kx - \sum_{k=1}^{n+1} k^2 \lambda_k \sin kx = 0$ i.e. :

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{n+1} \left((n+1)^2 - k^2\right) \lambda_k \sin kx = 0$ soit encore, le terme en $k = n+1$ étant nul :

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{n} \left((n+1)^2 - k^2\right) \lambda_k \sin kx = 0$ et donc, la famille $\left(x \mapsto \sin kx\right)_{1\le k\le n}$ étant libre d'après l'hypothèse de récurrence :

$\Rightarrow \forall k \in [1, n], \left((n+1)^2 - k^2\right) \lambda_k = 0$ et comme $\forall k \in [1, n], (n+1)^2 - k^2 \neq 0$:

$\Rightarrow \forall k \in [1, n], \lambda_k = 0$ et comme $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \sin kx = 0$:

$\Rightarrow \begin{cases} \forall k \in [1, n], \lambda_k = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}, \lambda_{n+1} \sin\left((n+1)x\right) = 0 \end{cases}$ soit enfin, en posant $x = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$ dans la deuxième équation :

$\Rightarrow \begin{cases} \forall k \in [1, n], \lambda_k = 0 \\ \lambda_{n+1} = 0 \end{cases}$ i.e. :

$\Rightarrow \forall k \in [1, n+1], \lambda_k = 0.$

La famille $\left(x \mapsto \sin kx\right)_{1\le k\le n+1}$ est donc libre.

• Ainsi,

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ la famille } \left(x \mapsto \sin kx\right)_{1\le k\le n} \text{ est libre}}$$

3) Soient $n \in \mathbb{N}$, $(\lambda_k)_{0 \le k \le n} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Supposons que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k \ln^{n-k} x = 0$. Montrons alors par descente finie que $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $\lambda_i = 0$.

• Au rang $i = n$, comme $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k \ln^{n-k} x = 0$, en divisant cette relation par $x^n \neq 0$, on peut alors écrire :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^{k-n} \ln^{n-k} x = 0$ soit :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{n-k} = 0$ (•).

Comme $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^j = 0$ (croissances comparées), en faisant tendre x vers $+\infty$, par passage à la limite dans la relation précédente, on peut alors écrire (il ne subsiste plus que le terme en $k = n$) : $\lambda_n = 0$.

• Soit $i \in [\![1, n]\!]$, supposons que $\forall k \in [\![i, n]\!]$, $\lambda_k = 0$. Comme $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k \ln^{n-k} x = 0$ et comme $\forall k \in [\![i, n]\!]$, $\lambda_k = 0$, on peut écrire :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\sum_{k=0}^{i-1} \lambda_k x^k \ln^{n-k} x = 0$ et en divisant cette relation par $x^{i-1} \ln^{n-i+1} x \neq 0$ ($x \in]1, +\infty[$) :

$\forall x \in]1, +\infty[$, $\sum_{k=0}^{i-1} \lambda_k x^{k-i+1} \ln^{i-k-1} x = 0$ soit :

$\forall x \in]1, +\infty[$, $\sum_{k=0}^{i-1} \lambda_k \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{i-k-1} = 0$.

Comme $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^j = 0$ (croissances comparées), en faisant tendre x vers $+\infty$, par passage à la limite dans la relation précédente, on peut alors écrire (il ne subsiste plus que le terme en $k = i - 1$) : $\lambda_{i-1} = 0$.

On a donc bien : $\forall k \in [\![i-1, n]\!]$, $\lambda_k = 0$.

• Ainsi, on a bien : $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $\lambda_i = 0$.

On peut maintenant conclure que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k \ln^{n-k} x = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![0, n]\!]$, $\lambda_k = 0$, et donc que :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ la famille } (x \mapsto x^k \ln^{n-k} x)_{0 \le k \le n} \text{ est libre}}$$

NB : On pouvait également se ramener à la deuxième méthode du 1 à partir de la relation (•) en posant $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^{n-k}$.

4) Soit $\mathring{I}$ l'intervalle I privé de ses extrémités. Deux cas se présentent.

❍ Supposons que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_k \in \mathring{I}$. Soient alors $(\lambda_k)_{1 \le k \le n} \in \mathbb{R}^n$. On peut écrire :

$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k = 0 \Rightarrow \forall x \in I$, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(x) = 0$ soit :

$\Rightarrow \forall x \in I$, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k |x - \alpha_k| = 0$ ①.

Or, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la fonction $x \mapsto |x - \alpha_k|$ est dérivable sur tout intervalle de $I \setminus \{\alpha_k\}$, ainsi qu'à gauche (de nombre dérivé -1) et à droite (de nombre dérivé 1) en α_k. On en déduit alors que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la fonction $x \mapsto \lambda_k |x - \alpha_k|$ est dérivable à gauche (de nombre dérivé $-\lambda_k$) et à droite (de nombre dérivé λ_k) en α_k et donc, dérivable en α_k si et seulement si $\lambda_k = -\lambda_k$, i.e. : $\lambda_k = 0$, donc dérivable sur I si et seulement si $\lambda_k = 0$. La fonction $x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left|x-\alpha_k\right|$ est donc dérivable sur I si et seulement si $\forall k \in [1, n]$, $\lambda_k = 0$.

Or, la fonction nulle est dérivable sur I. Deux fonctions égales ayant même domaine de dérivabilité, on en déduit alors que : ① $\Rightarrow$ $\forall k \in [1, n]$, $\lambda_k = 0$.

Ainsi, si $\forall k \in [1, n]$, $\alpha_k \in \mathring{I}$, la famille $(f_k)_{1 \le k \le n}$ est libre.

❑ Supposons maintenant que $\exists k \in [1, n]$, $\alpha_k \notin \mathring{I}$. Soient alors $(\lambda_k)_{1 \le k \le n} \in \mathbb{R}^n$ et (A, B) la partition de $[1, n]$ telle que $\forall k \in A$, $\alpha_k \in \mathring{I}$ et $\forall k \in B$, $\alpha_k \notin \mathring{I}$. On peut écrire :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k = 0 \Rightarrow \forall x \in I, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(x) = 0 \qquad \text{soit :}$$

$$\Rightarrow \forall x \in I, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left|x-\alpha_k\right| = 0 \quad ②.$$

Or, pour tout $k \in B$, $\alpha_k \notin \mathring{I}$ et la fonction $x \mapsto \left|x-\alpha_k\right|$ est donc dérivable sur I. De plus, pour tout $k \in A$, $\alpha_k \in \mathring{I}$ et la fonction $x \mapsto \left|x-\alpha_k\right|$ est donc dérivable sur tout intervalle de $I \setminus \{\alpha_k\}$, ainsi qu'à gauche (de nombre dérivé -1) et à droite (de nombre dérivé 1) en α_k. On en déduit alors que pour tout $k \in A$, la fonction $x \mapsto \lambda_k \left|x-\alpha_k\right|$ est dérivable à gauche (de nombre dérivé $-\lambda_k$) et à droite (de nombre dérivé λ_k) en α_k et donc, dérivable en α_k si et seulement si $\lambda_k = -\lambda_k$, i.e. : $\lambda_k = 0$, donc dérivable sur I si et seulement si $\lambda_k = 0$. La fonction $x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left|x-\alpha_k\right|$ est donc dérivable sur I si et seulement si $\forall k \in A$, $\lambda_k = 0$.

Or, la fonction nulle est dérivable sur I. Deux fonctions égales ayant même domaine de dérivabilité, on en déduit alors que : ② $\Rightarrow$ $\forall k \in A$, $\lambda_k = 0$, donc que :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k = 0 \Rightarrow \begin{cases} \forall k \in A, \lambda_k = 0 \\ \forall x \in I, \sum_{k \in B} \lambda_k \left|x-\alpha_k\right| = 0 \end{cases} \quad ③.$$

Notons alors $B_1 = \{k \in [1, n], \alpha_k \le \inf(\mathring{I})\}$ et $B_2 = \{k \in [1, n], \alpha_k \ge \sup(\mathring{I})\}$ (on a : $B = B_1 \cup B_2$). Comme $\forall k \in B_1$, $\forall x \in I$, $x - \alpha_k \ge 0$ et $\forall k \in B_2$, $\forall x \in I$, $x - \alpha_k \le 0$, on peut alors écrire :

$$\forall x \in I, \sum_{k \in B} \lambda_k \left|x-\alpha_k\right| = \sum_{k \in B_1} \lambda_k (x-\alpha_k) + \sum_{k \in B_2} \lambda_k (\alpha_k - x) \qquad \text{soit :}$$

$$= \left(\sum_{k \in B_1} \lambda_k - \sum_{k \in B_2} \lambda_k\right) x + \left(\sum_{k \in B_2} \lambda_k \alpha_k - \sum_{k \in B_1} \lambda_k \alpha_k\right).$$

Or, une fonction polynôme est nulle sur un intervalle non réduit à un point si et seulement si c'est la fonction nulle (cf. exercice 1.1.1b), c'est-à-dire si et seulement si tous ses coefficients sont nuls. On en déduit alors :

$$\forall x \in I, \sum_{k \in B} \lambda_k \left|x-\alpha_k\right| = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum_{k \in B_1} \lambda_k - \sum_{k \in B_2} \lambda_k = 0 \\ \sum_{k \in B_2} \lambda_k \alpha_k - \sum_{k \in B_1} \lambda_k \alpha_k = 0 \end{cases} \quad ④.$$

Distinguons alors les cas suivant le cardinal de B (le cas Card(B) = 0 ayant déjà été traité lorsque $\forall k \in [1, n]$, $\alpha_k \in \mathring{I}$) :

– si Card(B) = 1, en notant i l'unique élément de B, on peut alors écrire que le système ④ est un système de deux équations à une inconnue : $\begin{cases} \lambda_i = 0 \\ -\alpha_i \lambda_i = 0 \end{cases}$ qui admet pour solution unique $\lambda_i = 0$, et donc :

$\forall x \in I, \sum_{k\in B} \lambda_k \left| x-\alpha_k \right| = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$ soit, d'après ③ (on est dans l'hypothèse où $B = \{i\}$ et $A = [1, n] \setminus \{i\}$) :

$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k = 0 \Rightarrow \forall k \in [1, n], \lambda_k = 0.$

– si Card(B) = 2, en notant i et j les deux éléments de B, on peut alors écrire que ④ représente un système de deux équations à deux inconnues : $\begin{cases} \lambda_i - \lambda_j = 0 \\ -\alpha_i\lambda_i + \alpha_j\lambda_j = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} \lambda_i + \lambda_j = 0 \\ \alpha_i\lambda_i + \alpha_j\lambda_j = 0 \end{cases}$ (selon que $\text{Card}(B_1) = \text{Card}(B_2) = 1$ ou non), soit : $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\alpha_i & \alpha_j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_i \\ \lambda_j \end{pmatrix} = 0$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_i & \alpha_j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_i \\ \lambda_j \end{pmatrix} = 0.$

Comme les $(\alpha_k)_{1\le k\le n}$ sont des réels deux à deux distincts, on a : $\alpha_i \neq \alpha_j$. Les vecteurs colonnes de la matrice représentant les coefficients du système précédent (quel que soit le cas de figure) forment donc une famille libre. Cette matrice est donc inversible et le système précédent (quel que soit le cas de figure) est donc un système de Cramer. On en déduit alors que le système ④ admet pour unique solution $(\lambda_i, \lambda_j) = (0, 0)$, et donc :

$\forall x \in I, \sum_{k\in B} \lambda_k \left| x-\alpha_k \right| = 0 \Rightarrow \lambda_i = \lambda_j = 0$ soit, d'après ③ (on est dans l'hypothèse où $B = \{i, j\}$ et $A = [1, n] \setminus \{i, j\}$) :

$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k = 0 \Rightarrow \forall k \in [1, n], \lambda_k = 0.$

– si Card(B) ≥ 3, en notant p le cardinal de B, on peut alors écrire que ④ représente un système homogène de deux équations à p inconnues qui admet ainsi une infinité de solutions, et donc :

$\exists (\lambda_k)_{1\le k\le n} \in \mathbb{R}^n, \exists k \in [1, n], \lambda_k \neq 0, \forall x \in I, \sum_{k\in B} \lambda_k \left| x-\alpha_k \right| = 0$ soit, d'après ③ :

$\exists (\lambda_k)_{1\le k\le n} \in \mathbb{R}^n, \exists k \in [1, n], \lambda_k \neq 0, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k = 0.$

On peut maintenant écrire que la famille $(f_k)_{1\le k\le n}$ est libre si et seulement si Card(B) ≤ 2, et donc :

$\boxed{\text{La famille } (f_k)_{1\le k\le n} \text{ est libre si et seulement si deux au plus des } (\alpha_k)_{1\le k\le n} \text{ n'appartiennent pas à } \mathring{I}}$

☞ Retenir les quatre méthodes traditionnelles qui permettent de démontrer la liberté d'une famille de fonctions $(f_k)_{1\le k\le n}$ (les deux premières utilisant le plus souvent une récurrence, une montée ou une descente finie) :

– la dérivation (lorsque f_k' ou f_k'' s'écrit de façon simple en fonction de f_k),

– l'écriture de $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k$ pour certaines valeurs particulières de x (éventuellement ±∞) en divisant à chaque étape cette expression par des quantités non nulles (afin qu'il ne subsiste plus qu'un terme dans la somme),

– l'utilisation de polynômes (pour toute famille du type $(f^k)_{1\le k\le n}$),

– la comparaison des domaines de continuité, de dérivabilité... de la fonction $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k$ et de la fonction nulle.

SO EO

★ 8. Bases de $\mathbb{R}_n[X]$

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $(F_i)_{0 \le i \le n}$ la famille de polynômes définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 1 \\ \forall i \in [1, n], F_i = \prod_{k=1}^{i} (X - k + 1) = X(X-1)\dots(X - i + 1) \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(F_i)_{0 \le i \le n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Plus généralement, soit $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de polynômes telle que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \deg(P_i) = i.$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(P_i)_{0 \le i \le n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

3) Soient n un entier naturel, a et b deux réels distincts. Prouver que la famille $\left((X - a)^i (X - b)^{n-i}\right)_{0 \le i \le n}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4) (SO) Soient n un entier naturel non nul, $(x_k)_{1 \le k \le n}$ une suite de nombre réels distincts et $(L_j)_{1 \le j \le n}$ la suite de polynômes définis par :

$$\forall j \in [1, n], L_j = \prod_{\substack{k=1 \\ k \ne j}}^{n} \frac{X - x_k}{x_j - x_k}.$$

Montrer que la famille $(L_j)_{1 \le j \le n}$ forme une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

1) ❑ Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(F_i)_{0 \le i \le n}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$.

• Au rang n = 0, la famille (F_0) n'étant composée que d'un seul vecteur non nul, elle est libre.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $(F_i)_{0 \le i \le n}$ soit une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$. Soient alors $(\lambda_i)_{0 \le i \le n+1} \in \mathbb{R}^{n+2}$. Comme pour tout $i \in [0, n+1]$, F_i est un polynôme de degré i, on a : $\left(\sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i F_i\right) \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ et le coefficient du terme de degré n + 1 de $\sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i F_i$ est celui de $\lambda_{n+1} F_{n+1}$, soit λ_{n+1}. Or, un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, et en particulier le coefficient de son terme de degré n + 1. On peut alors écrire :

$$\sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i F_i = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_{n+1} = 0 \\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i F_i = 0 \end{cases}.$$

Or, comme la famille $(F_i)_{0 \le i \le n}$ est libre (d'après l'hypothèse de récurrence), on peut écrire :

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i F_i = 0 \Rightarrow \forall i \in [0, n], \lambda_i = 0$$ et donc, d'après ce qui précède :

$$\sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i F_i = 0 \Rightarrow \forall i \in [0, n+1], \lambda_i = 0.$$

La famille $(F_i)_{0 \le i \le n+1}$ est donc libre.

• Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(F_i)_{0 \le i \le n}$ est une famille libre.

❑ Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall i \in [0, n]$, $F_i \in \mathbb{R}_n[X]$, on peut maintenant écrire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(F_i)_{0 \le i \le n}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme la famille $(F_i)_{0 \le i \le n}$ est composée de n + 1 vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$ et comme $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$, c'est une famille libre et maximale de $\mathbb{R}_n[X]$, et donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$. On peut désormais conclure :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ la famille } (F_i)_{0 \le i \le n} \text{ forme une base de } \mathbb{R}_n[X]}$$

☞ Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Pour montrer qu'une famille $(u_i)_{1 \le i \le n}$ est une base de E, on montre généralement que la famille $(u_i)_{1 \le i \le n}$ est une famille libre et maximale de E (ou, mais c'est beaucoup plus difficile, que $(u_i)_{1 \le i \le n}$ est une famille génératrice et minimale de E, ou bien encore libre et génératrice de E).

2) ❑ De même, montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(P_i)_{0 \le i \le n}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$.

• Au rang n = 0, la famille (P_0) n'étant composée que d'un seul vecteur non nul, elle est libre.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $(P_i)_{0 \le i \le n}$ soit une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$. Soient alors $(\lambda_i)_{0 \le i \le n+1} \in \mathbb{R}^{n+2}$. Comme $\forall i \in \mathbb{N}$, $\deg(P_i) = i$, on peut écrire : $\left(\sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i P_i\right) \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$. De plus, comme $\forall i \in \mathbb{N}$, $\deg(P_i) = i$, on peut également écrire que le coefficient du terme de degré n + 1 de $\sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i P_i$ est celui de $\lambda_{n+1} P_{n+1}$, c'est-à-dire le produit de λ_{n+1} et du coefficient $\alpha_{n+1,n+1}$ (non nul) de X^{n+1} dans P_{n+1}, soit $\alpha_{n+1,n+1}\lambda_{n+1}$. Or, un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, et en particulier le coefficient de son terme de degré n + 1. On peut alors écrire :

$$\sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i P_i = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{n+1,n+1}\lambda_{n+1} = 0 \\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i = 0 \end{cases}$$

et donc, comme $\alpha_{n+1,n+1} \neq 0$:

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_{n+1} = 0 \\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i = 0 \end{cases}.$$

Or, comme la famille $(P_i)_{0 \le i \le n}$ est libre (d'après l'hypothèse de récurrence), on peut écrire :

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i = 0 \Rightarrow \forall i \in [0, n], \lambda_i = 0$$

et donc, d'après ce qui précède :

$$\sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i P_i = 0 \Rightarrow \forall i \in [0, n+1], \lambda_i = 0.$$

La famille $(P_i)_{0 \le i \le n+1}$ est donc libre.

• Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(P_i)_{0 \le i \le n}$ est une famille libre.

☞ Se souvenir que **toute famille graduée en degrés de R[X]**, c'est-à-dire dont les degrés sont échelonnés, **forme une famille libre de R[X]** (démonstration à connaître).

❑ Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall i \in [0, n]$, $P_i \in \mathbb{R}_n[X]$, on peut maintenant écrire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(P_i)_{0 \le i \le n}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme la famille $(P_i)_{0 \le i \le n}$ est composée de n + 1 vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$ et comme $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$, c'est une famille libre et maximale de $\mathbb{R}_n[X]$, et donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$. On peut désormais conclure :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ la famille } (P_i)_{0 \le i \le n} \text{ forme une base de } \mathbb{R}_n[X]}$$

☞ Se souvenir que toute famille $(P_i)_{0 \le i \le n}$ ($n \in \mathbb{N}$) telle que $\forall i \in \mathbb{N}$, $\deg(P_i) = i$, est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (et en particulier la famille $(F_i)_{0 \le i \le n}$ des polynômes factoriels couramment utilisée, cf. **1**).

3) ❑ Soient $(\lambda_i)_{0\le i\le n} \in \mathbf{R}^{n+1}$. Supposons que $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i (X-a)^i (X-b)^{n-i} = 0$. Montrons alors par montée finie que : $\forall k \in [0, n]$, $\lambda_k = 0$.

• Au rang k = 0, comme $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i (X-a)^i (X-b)^{n-i} = 0$, en écrivant cette relation en a (il ne subsiste que le terme en i = 0), on obtient :

$\lambda_0 (a-b)^n = 0$ soit, comme $a \neq b$:

$\lambda_0 = 0$.

• Soit $k \in [0, n-1]$, supposons que $\forall i \in [0, k]$, $\lambda_i = 0$. Comme $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i (X-a)^i (X-b)^{n-i} = 0$ et comme $\forall i \in [0, k]$, $\lambda_i = 0$, on peut écrire :

$\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i (X-a)^i (X-b)^{n-i} = 0$ i.e. :

$(X-a)^{k+1} \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i (X-a)^{i-k-1} (X-b)^{n-i} = 0$ soit encore, en simplifiant cette relation par $(X-a)^{k+1} \neq 0$:

$\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i (X-a)^{i-k-1} (X-b)^{n-i} = 0$ et en prenant cette relation en a (il ne subsiste que le facteur en i = k + 1) :

$\lambda_{k+1} (a-b)^{n-k-1} = 0$ soit enfin, en divisant cette relation par $(a-b)^{n-k-1} \neq 0$ $(a \neq b)$:

$\lambda_{k+1} = 0$ et donc, comme d'après l'hypothèse de récurrence, on a en outre $\forall i \in [0, k]$, $\lambda_i = 0$:

$\forall i \in [0, k+1]$, $\lambda_i = 0$.

• Ainsi, on a bien : $\forall k \in [0, n]$, $\lambda_k = 0$.

On peut désormais conclure que : $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i (X-a)^i (X-b)^{n-i} = 0 \Rightarrow \forall i \in [0, n]$, $\lambda_i = 0$, et donc que la famille $\left((X-a)^i (X-b)^{n-i}\right)_{0\le i\le n}$ est libre.

❑ Comme $\forall i \in [0, n]$, $(X-a)^i (X-b)^{n-i} \in \mathbf{R}_n[X]$, on peut maintenant écrire que la famille $\left((X-a)^i (X-b)^{n-i}\right)_{0\le i\le n}$ est une famille libre de $\mathbf{R}_n[X]$. Comme la famille $\left((X-a)^i (X-b)^{n-i}\right)_{0\le i\le n}$ est composée de n + 1 vecteurs de $\mathbf{R}_n[X]$ et comme $\dim\left(\mathbf{R}_n[X]\right) = n + 1$, c'est une famille libre et maximale de $\mathbf{R}_n[X]$, et donc une base de $\mathbf{R}_n[X]$. On peut désormais conclure :

$$\boxed{\text{La famille } \left((X-a)^i (X-b)^{n-i}\right)_{0\le i\le n} \text{ forme une base de } \mathbf{R}_n[X]}$$

☞ Se souvenir que pour tout $n \in \mathbf{N}$, la famille $\left((X-a)^i (X-b)^{n-i}\right)_{0\le i\le n}$ forme une base de $\mathbf{R}_n[X]$ (démonstration à connaître).

4) ❑ Soient $(\lambda_j)_{1\le j\le n} \in \mathbf{R}^n$. On a :

$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j L_j = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbf{R}, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j L_j(x) = 0$ soit, en prenant cette relation en x_k $(k \in [1, n])$:

$\Rightarrow \forall k \in [1, n], \sum_{j=1}^{n} \lambda_j L_j(x_k) = 0$ et comme $\forall k \in [1, n]$, $\forall j \in [1, n]$, $j \neq k$, $L_j(x_k) = 0$ (cf. exercice 1.9.1a) :

$\Rightarrow \forall k \in [1, n], \lambda_k L_k(x_k) = 0$ et comme $\forall k \in [1, n]$, $L_k(x_k) = 1$ (cf. exercice 1.9.1b) :

$\Rightarrow \forall k \in [1, n], \lambda_k = 0$.

La famille $(L_j)_{1\le j\le n}$ est donc une famille libre.

□ Comme $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $L_j \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$ (cf. exercice 1.9.1a), on peut maintenant écrire que la famille $(L_j)_{1 \le j \le n}$ est une famille libre de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$. Comme la famille $(L_j)_{1 \le j \le n}$ est composée de n vecteurs de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ et comme $\dim(\mathbf{R}_{n-1}[X]) = n$, c'est une famille libre et maximale de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$, et donc une base de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$. On peut désormais conclure :

$$\boxed{\text{La famille } (L_j)_{1 \le j \le n} \text{ forme une base de } \mathbf{R}_{n-1}[X]}$$

☞ Se souvenir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(L_j)_{1 \le j \le n}$ des polynômes de Lagrange (cf. exercice 1.9) forme une base de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ (démonstration à connaître).

SO EO

● 9. Trace d'une matrice

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$, on définit l'application trace, notée tr par :

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

1) Montrer que tr est une forme linéaire. Est-elle bijective ?

2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$.

a) Montrer que tr AB = tr BA. En déduire que l'équation AB - BA = I n'admet pas de solution.

b) On suppose que $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$, $A = PBP^{-1}$. Comparer tr A et tr B, puis, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{tr} A^k$ et $\operatorname{tr} B^k$.

3) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, une matrice diagonalisable. Montrer que la somme de ses valeurs propres (en comptant les ordres de multiplicités) est égale à tr A.

NB : La résolution du 3 nécessite la connaissance du cours : 3. Diagonalisation.

1) ■ D'après la définition de l'application tr, on peut écrire :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (\lambda, A, B) \in \mathbb{K} \times (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$, $\operatorname{tr}(\lambda A + B) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{i,i} + b_{i,i})$ soit :

$$= \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} \quad \text{et donc :}$$

$$= \lambda \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B.$$

tr est donc une application linéaire.

De plus, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$, $\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\right) \in \mathbb{K}$. tr est donc une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}$, d'où la conclusion :

$$\boxed{\text{tr est une forme linéaire}}$$

■ Deux cas se présentent :

– si n = 1, comme $\operatorname{Ker} \operatorname{tr} = \{A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K}), \operatorname{tr} A = 0\}$ et comme $\operatorname{tr} A = 0 \Leftrightarrow A = 0$ (car n = 1), on peut alors écrire : $\operatorname{Ker} \operatorname{tr} = \{0\}$; tr est donc une application injective de $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}$, donc sur des espaces vectoriels de même dimension finie ; tr est donc bijective,

– si $n \ge 2$, soit alors $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$. On a clairement $A \neq 0$ et $\operatorname{tr} A = 0$, d'où $A \in \operatorname{Ker} \operatorname{tr}$, et donc : $\operatorname{Ker} \operatorname{tr} \neq \{0\}$; tr n'est donc pas injective, donc pas bijective.

On peut désormais conclure :

$$\boxed{\text{L'application tr est bijective si et seulement si } n = 1}$$

2) a) ▪ Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$, $C = AB = (c_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$ et $D = BA = (d_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$. On a :

– $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$, d'où :

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} C &= \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} && \text{soit :}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i}\right). \end{aligned}$$

– $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ d_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k} a_{k,j}$, d'où :

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} D &= \sum_{i=1}^{n} d_{i,i} && \text{soit :}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{i,k} a_{k,i}\right) && \text{et en inversant les deux sommes :}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{i,k} a_{k,i}\right) && \text{i.e. :}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k,i} b_{i,k}\right) && \text{soit enfin, en intervertissant le nom des variables de sommation :}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i}\right). \end{aligned}$$

On peut maintenant écrire : $\operatorname{tr} C = \operatorname{tr} D$, et donc :

$$\boxed{\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA}$$

▪ Comme tr est une application linéaire, on a : $\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr} AB - \operatorname{tr} BA$, et donc d'après ce qui précède : $\operatorname{tr}(AB - BA) = 0$.

Supposons maintenant qu'il existe deux matrices A et B telles que $AB - BA = I$. On peut alors écrire : $\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr} I$, soit, comme $\operatorname{tr} I = n$: $\operatorname{tr}(AB - BA) = n$, ce qui est impossible.

On peut désormais conclure :

$$\boxed{\text{L'équation } AB - BA = I \text{ n'admet pas de solution}}$$

b) ▪ Comme $A = PBP^{-1}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} A &= \operatorname{tr}(PBP^{-1}) && \text{soit :}\\ &= \operatorname{tr}\big((PB)P^{-1}\big) && \text{soit encore, d'après la question précédente :}\\ &= \operatorname{tr}\big(P^{-1}(PB)\big) && \text{i.e. :}\\ &= \operatorname{tr}(P^{-1}PB) && \text{et donc :} \end{aligned}$$

$$\boxed{\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B}$$

▪ Comme $P^{-1}P = I$, à l'aide d'une récurrence immédiate, on démontre que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ A^k = PB^kP^{-1}$. D'après ce qui précède, on en déduit alors :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \operatorname{tr} A^k = \operatorname{tr} B^k}$$

3) Comme $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est une matrice diagonalisable, en notant D une matrice diagonale semblable à A, on peut écrire : $\exists P \in GL_n(K),\ A = PDP^{-1}$. D'après la question précédente, on en déduit alors : $\mathrm{tr}\, D = \mathrm{tr}\, A$.

Or, D étant la matrice diagonale semblable à A, les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de A (chacune d'entre elles étant répétée autant de fois que son ordre de multiplicité). On en déduit alors que tr D, somme des coefficients diagonaux de D, est également la somme des valeurs propres de A (en comptant les ordres de multiplicités), d'où la conclusion :

$$\boxed{\text{La somme des valeurs propres de A (en comptant les ordres de multiplicités) est égale à tr A}}$$

☞ Se souvenir que :

– l'application qui à toute matrice associe sa trace (c'est-à-dire la somme de ses coefficients diagonaux) est une forme linéaire,

– deux matrices semblables (i.e. telles que $\exists P \in GL_n(K),\ A = PBP^{-1}$) ont même trace, et en particulier :

– **la somme des valeurs propres d'une matrice diagonalisable** (en tenant compte des ordres de multiplicité) **est égale à sa trace.**

SO E❷

● 10. Deux propositions classiques

Soient E un K-espace vectoriel, u et v deux endomorphismes de E.

1) Montrer que :

$$\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, u^2 \iff \mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Ker}\, u = \{0\}.$$

2) Montrer que :

$$u \circ v = 0 \iff \mathrm{Im}\, v \subset \mathrm{Ker}\, u.$$

1) ❑ Supposons $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, u^2$. Soit $x \in (\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Ker}\, u)$. Comme $x \in \mathrm{Im}\, u$, on peut alors écrire :

$\exists y \in E,\ u(y) = x$	soit, en composant par u :
$u^2(y) = u(x)$	soit encore, comme $x \in \mathrm{Ker}\, u$:
$u^2(y) = 0$	i.e. :
$y \in \mathrm{Ker}\, u^2$	et comme $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, u^2$:
$y \in \mathrm{Ker}\, u$	i.e. :
$u(y) = 0$	soit enfin, comme $u(y) = x$:
$x = 0.$	

On peut maintenant écrire : $(\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Ker}\, u) \subset \{0\}$. Or, $(\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Ker}\, u)$ est l'intersection de deux espaces vectoriels, donc un espace vectoriel. On en déduit alors que $0 \in (\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Ker}\, u)$, donc que : $\{0\} \subset (\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Ker}\, u)$, et donc que : $\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Ker}\, u = \{0\}$, d'où la conclusion :

$\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, u^2 \Rightarrow \mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Ker}\, u = \{0\}$.

☞ Pour montrer que $F \cap G = \{0\}$ (où F et G sont deux espaces vectoriels), on écrit : "soit $x \in (F \cap G)$" et on démontre que $x = 0$. On en déduit alors que $F \cap G \subset \{0\}$. Or, F et G étant deux espaces vectoriels, $F \cap G$ est un espace vectoriel et on a alors : $\{0\} \subset F \cap G$, d'où : $F \cap G = \{0\}$.

☞ Se souvenir que $x \in \mathrm{Im}\, \varphi \iff \exists y \in E,\ \varphi(y) = x$.

❑ Supposons maintenant $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u = \{0\}$.

Soit $x \in \operatorname{Ker} u$. On a alors : $u(x) = 0$, d'où : $u^2(x) = 0$, et donc : $x \in \operatorname{Ker} u^2$. On en déduit alors : $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^2$.

De même, soit $x \in \operatorname{Ker} u^2$. On a alors : $u^2(x) = 0$, i.e. : $u\big(u(x)\big) = 0$, et donc : $u(x) \in \operatorname{Ker} u$. Comme on a également $u(x) \in \operatorname{Im} u$, on en déduit alors : $u(x) \in \big(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u\big)$. Comme $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u = \{0\}$, on peut donc écrire : $u(x) = 0$, soit : $x \in \operatorname{Ker} u$. On en déduit alors : $\operatorname{Ker} u^2 \subset \operatorname{Ker} u$.

On peut maintenant écrire : $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u = \{0\} \Rightarrow \operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$.

☞ Se souvenir que $(u \circ v)(x) = 0 \Leftrightarrow v(x) \in \operatorname{Ker} u$.

❑ On peut désormais conclure :

$$\boxed{\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2 \Leftrightarrow \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u = \{0\}}$$

2) ❑ Supposons $u \circ v = 0$ et soit $x \in \operatorname{Im} v$. On peut alors écrire : $\exists y \in E,\ v(y) = x$, d'où : $(u \circ v)(y) = u(x)$, et donc, comme $u \circ v = 0$: $u(x) = 0$, i.e. : $x \in \operatorname{Ker} u$.

On peut maintenant écrire :
$u \circ v = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u$.

❑ Supposons maintenant $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u$. On a : $\forall x \in E,\ v(x) \in \operatorname{Im} v$. Comme $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u$, on en déduit alors : $\forall x \in E,\ v(x) \in \operatorname{Ker} u$, i.e. : $\forall x \in E,\ (u \circ v)(x) = 0$, i.e. : $u \circ v = 0$.

On peut maintenant écrire :
$\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u \Rightarrow u \circ v = 0$.

❑ On peut désormais conclure :

$$\boxed{u \circ v = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u}$$

☞ Pour montrer une équivalence $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$, il faut :
- supposer $\mathcal{A}$ et montrer $\mathcal{B}$, puis :
- supposer $\mathcal{B}$ et montrer $\mathcal{A}$ (ou supposer **non** $\mathcal{A}$ et montrer **non** $\mathcal{B}$).

☞ Pour montrer que $F \subset G$, il faut écrire : "soit $x \in F$", puis, en utilisant les propriétés de F (et, éventuellement le proposition que l'on vient de supposer), démontrer que $x \in G$.

☞ Pour montrer que deux espaces vectoriels F et G sont égaux, il faut montrer que $F \subset G$, puis que $G \subset F$ (ou bien, lorsque F et G sont de dimension finie : $F \subset G$ et $\dim F = \dim G$).

S❷ E❷

● 11. Etude d'un espace vectoriel de suites récurrentes

Soient S l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n,$$

et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite élément de S telle que : $w_0 = 0$, $w_1 = 1$, $w_2 = 2$.

1) Déterminer les racines α, β et γ de l'équation $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$.

2) **a)** Montrer que S est un espace vectoriel, puis que les suites $(\alpha^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\beta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\gamma^n)_{n \in \mathbb{N}}$ forment une famille libre de S.

b) Soit f l'application qui à tout élément u de S associe $f(u) = (u_0, u_1, u_2)$. Montrer que f est un isomorphisme de S dans $\mathbb{R}^3$.

c) En déduire dim S, puis une base de S.

3) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de w_n en fonction de n.

1) ▪ On a : $\forall x\in \mathbb{R}$, $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)(x-2)(x+1)$. On en déduit alors :

$$\boxed{\text{Les racines de l'équation } x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \text{ sont les réels } \alpha = 1,\ \beta = 2 \text{ et } \gamma = -1}$$

2) a) ▪ Soit $\mathcal{S}$ l'espace vectoriel des suites réelles. On a :

– $S \subset \mathcal{S}$ (par définition de S),

– $0 = 2\cdot 0 + 0 - 2\cdot 0$, d'où : $0_{\mathcal{S}} \in S$, et donc : $S \neq \varnothing$,

– $\forall(\lambda, u, v)\in \mathbb{R}\times S^2$, $\forall n\in \mathbb{N}$, $(\lambda u + v)_{n+3} = \lambda u_{n+3} + v_{n+3}$ soit, comme $(u, v)\in S^2$:

$= \lambda(2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n) + (2v_{n+2} + v_{n+1} - 2v_n)$ et donc :

$= 2(\lambda u_{n+2} + v_{n+2}) + (\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) - 2(\lambda u_n + v_n)$ i.e. :

$= 2(\lambda u + v)_{n+2} + (\lambda u + v)_{n+1} - 2(\lambda u + v)_n$ d'où :

$\forall(\lambda, u, v)\in \mathbb{R}\times S^2$, $(\lambda u + v)\in S$.

Ainsi, S est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$, et donc :

$$\boxed{S \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel}}$$

▪ ▫ Comme α, β et γ sont racines de l'équation $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$, on a :

– $\forall n\in \mathbb{N}$, $\alpha^{n+3} - 2\alpha^{n+2} - \alpha^{n+1} + 2\alpha^n = \alpha^n(\alpha^3 - 2\alpha^2 - \alpha + 2) = 0$, d'où : $\forall n\in \mathbb{N}$, $\alpha^{n+3} = 2\alpha^{n+2} + \alpha^{n+1} - 2\alpha^n$, et donc : $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}\in S$,

– $\forall n\in \mathbb{N}$, $\beta^{n+3} - 2\beta^{n+2} - \beta^{n+1} + 2\beta^n = \beta^n(\beta^3 - 2\beta^2 - \beta + 2) = 0$, d'où : $\forall n\in \mathbb{N}$, $\beta^{n+3} = 2\beta^{n+2} + \beta^{n+1} - 2\beta^n$, et donc : $(\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}\in S$,

– $\forall n\in \mathbb{N}$, $\gamma^{n+3} - 2\gamma^{n+2} - \gamma^{n+1} + 2\gamma^n = \gamma^n(\gamma^3 - 2\gamma^2 - \gamma + 2) = 0$, d'où : $\forall n\in \mathbb{N}$, $\gamma^{n+3} = 2\gamma^{n+2} + \gamma^{n+1} - 2\gamma^n$, et donc : $(\gamma^n)_{n\in\mathbb{N}}\in S$.

▫ Soient maintenant λ, μ et ν trois réels tels que : $\forall n\in \mathbb{N}$, $\lambda\cdot\alpha^n + \mu\cdot\beta^n + \nu\cdot\gamma^n = 0$, c'est-à-dire tels que : $\forall n\in \mathbb{N}$, $\lambda\cdot 1^n + \mu\cdot 2^n + \nu\cdot(-1)^n = 0$.

En écrivant cette relation pour n = 0, n = 1 et n = 2, on en déduit alors :

$$\begin{cases}\lambda\cdot 1^0 + \mu\cdot 2^0 + \nu\cdot(-1)^0 = 0\\ \lambda\cdot 1^1 + \mu\cdot 2^1 + \nu\cdot(-1)^1 = 0\\ \lambda\cdot 1^2 + \mu\cdot 2^2 + \nu\cdot(-1)^2 = 0\end{cases}$$ c'est-à-dire :

$$\begin{cases}\lambda + \mu + \nu = 0\\ \lambda + 2\mu - \nu = 0\\ \lambda + 4\mu + \nu = 0\end{cases}$$ et donc $\left(L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_2 - \frac{1}{2}L_3,\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_1 + \frac{1}{3}L_3,\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_1 - \frac{1}{2}L_2 + \frac{1}{6}L_3\right)$:

$$\begin{cases}\lambda = 0\\ \mu = 0\\ \nu = 0\end{cases}.$$

Comme $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont trois suites éléments de S, on peut maintenant conclure :

$$\boxed{\text{La famille } \left((\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}, (\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}, (\gamma^n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \text{ forme une famille libre de S}}$$

b) ▫ D'après la définition de f, on peut écrire :

$\forall\lambda\in \mathbb{R}$, $\forall(u, v)\in S^2$, $f(\lambda u + v) = (\lambda u_0 + v_0, \lambda u_1 + v_1, \lambda u_2 + v_2)$ soit :

$= \lambda(u_0, u_1, u_2) + (v_0, v_1, v_2)$ et donc :

$= \lambda f(u) + f(v)$.

f est donc bien une application linéaire de S dans $\mathbb{R}^3$.

❍ Soient $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$. Montrons par récurrence qu'il existe une unique suite u élément de S telle que $f(u) = (a_0, a_1, a_2)$, i.e. qu'il existe une unique suite u vérifiant : $\begin{cases} u_0 = a_0 \\ u_1 = a_1 \\ u_2 = a_2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$ ①, ce qui revient encore à montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme général u_n d'une suite u définie par ① est déterminé de manière unique.

• Aux rangs n = 0, n = 1 et n = 2, u_0, u_1 et u_2 sont bien déterminés de manière unique.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que u_n, u_{n+1} et u_{n+2} soient déterminés de manière unique. Comme $u \in S$, on a : $u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$. u_{n+3} est donc également déterminé de manière unique.

• Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est déterminé de manière unique.

On en déduit alors qu'il existe une unique suite u vérifiant ①. On peut maintenant écrire que $\forall (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$, $\exists ! u \in S$, $f(u) = (a_0, a_1, a_2)$, donc que f réalise une bijection de S sur $\mathbb{R}^3$, d'où la conclusion :

$$\boxed{f \text{ est un isomorphisme de } S \text{ dans } \mathbb{R}^3}$$

c) ■ On peut maintenant écrire que S et $\mathbb{R}^3$ sont isomorphes, soit, comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$:

$$\boxed{\dim S = 3}$$

☞ Se souvenir que s'il existe un isomorphisme entre deux espaces vectoriels E et F et que l'un des deux est de dimension finie, l'autre est également de dimension finie et on a alors : dim E = dim F.

■ On a vu au **2a** que la famille $\left((\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}, (\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}, (\gamma^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ forme une famille libre de S. Comme elle composée de trois vecteurs et comme dim(S) = 3, c'est une famille libre et maximale de S, et donc une base de S. On peut désormais conclure :

$$\boxed{\text{La famille } \left((\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}, (\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}, (\gamma^n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \text{ forme une base de } S}$$

3) Comme la famille $\left((\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}, (\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}, (\gamma^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ forme une base de S, on peut alors écrire :
$\exists (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \lambda \cdot 1^n + \mu \cdot 2^n + \nu \cdot (-1)^n$.

Or, on sait que : $w_0 = 0$, $w_1 = 1$ et $w_2 = 2$. λ, μ et ν sont donc solutions du système :

$$\begin{cases} \lambda \cdot 1^0 + \mu \cdot 2^0 + \nu \cdot (-1)^0 = 0 \\ \lambda \cdot 1^1 + \mu \cdot 2^1 + \nu \cdot (-1)^1 = 1 \\ \lambda \cdot 1^2 + \mu \cdot 2^2 + \nu \cdot (-1)^2 = 2 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire :}$$

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 0 \\ \lambda + 2\mu - \nu = 1 \\ \lambda + 4\mu + \nu = 2 \end{cases} \quad \text{et donc } \left(L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2} L_2 - \frac{1}{2} L_3,\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{3} L_1 + \frac{1}{3} L_3,\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3} L_1 - \frac{1}{2} L_2 + \frac{1}{6} L_3\right) :$$

$$\begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2} \\ \mu = \frac{2}{3} \\ \nu = -\frac{1}{6} \end{cases}.$$

On peut désormais conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \frac{2^{n+1}}{3} + \frac{(-1)^{n+1}}{6} - \frac{1}{2}}$$

SO

12. Matrices de Vandermonde

Soient n un entier naturel non nul et $\omega_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1) Calculer, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, la valeur de $S_n(p) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{kp}$.

2) Soit $A_n = (a_{i,j})_{(i,j)\in[1,n]^2}$, la matrice définie par :

$$\forall (i, j) \in [1, n]^2,\ a_{i,j} = \omega_n^{(i-1)(j-1)}$$

et $\overline{A_n} = (\overline{a_{i,j}})_{(i,j)\in[1,n]^2}$ (A_n est appelée matrice de Vandermonde de ω_n).

a) Déterminer le produit $A_n \overline{A_n}$.

b) En déduire que A_n est inversible et déterminer son inverse.

1) On a :

$$\forall p \in \mathbb{Z},\ S_n(p) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{kp} \quad \text{soit :}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ikp\pi}{n}} \quad \text{soit encore :}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2ip\pi}{n}}\right)^k.$$

Comme $e^{\frac{2ip\pi}{n}} = 1 \Leftrightarrow p \in \{rn, r \in \mathbb{Z}\}$, on peut alors écrire :

– $\forall p \in \mathbb{Z} \setminus \{rn, r \in \mathbb{Z}\},\ S_n(p) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2ip\pi}{n}}\right)^k$ soit, en reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{\frac{2ip\pi}{n}} \neq 1$:

$$= \frac{1 - e^{\frac{2ipn\pi}{n}}}{1 - e^{\frac{2ip\pi}{n}}} \quad \text{et comme } \forall p \in \mathbb{Z},\ e^{\frac{2ipn\pi}{n}} = e^{2ip\pi} = 1 :$$

$$= 0 \quad \text{et :}$$

– $\forall p \in \{rn, r \in \mathbb{Z}\},\ S_n(p) = \sum_{k=0}^{n-1} 1^k$ et donc :

$$= n.$$

On peut désormais conclure :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{Z} \setminus \{rn, r \in \mathbb{Z}\},\ S_n(p) = 0 \ \text{ et } \ \forall p \in \{rn, r \in \mathbb{Z}\},\ S_n(p) = n}$$

2) a) On a :

$$\forall (x, y) \in [1, n]^2,\ \overline{a_{x,y}} = \overline{\omega_n^{(x-1)(y-1)}} \quad \text{soit :}$$

$$= \overline{e^{\frac{2i\pi(x-1)(y-1)}{n}}} \quad \text{i.e. :}$$

$$= e^{\frac{-2i\pi(x-1)(y-1)}{n}} \quad \text{et donc :}$$

$$= \omega_n^{-(x-1)(y-1)}.$$

Posons alors $B_n = A_n\overline{A_n} = (b_{i,j})_{(i,j)\in[1,n]^2}$. On peut maintenant écrire :

$\forall (i,j)\in[1,n]^2,\ b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\,\overline{a_{k,j}}$ soit, d'après ce qui précède :

$= \sum_{k=1}^{n} \omega_n^{(i-1)(k-1)}\,\omega_n^{-(k-1)(j-1)}$ i.e. :

$= \sum_{k=1}^{n} \omega_n^{(k-1)(i-j)}$ et en effectuant le changement de variable k' = k - 1 :

$\forall (i,j)\in[1,n]^2,\ b_{i,j} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{k(i-j)}$ soit enfin, en reconnaissant $S_n(i-j)$:

$= S_n(i-j)$.

Or, on a : $\forall (i,j)\in[1,n]^2,\ |i-j| \leq n-1$. On en déduit alors :

$\forall (i,j)\in[1,n]^2,\ (i-j)\in\{rn,\ r\in\mathbb{Z}\} \Leftrightarrow i-j=0$ i.e. :

$\Leftrightarrow i=j$.

Les résultats du **1b** nous permettent alors d'écrire :

– $\forall (i,j)\in[1,n]^2,\ i\neq j,\ b_{i,j}=0$, et :

– $\forall i\in[1,n],\ b_{i,i} = S_n(0)$ soit :

$= n$.

En notant I_n la matrice identité d'ordre n, on peut désormais conclure :

$$\boxed{A_n\overline{A_n} = n\,I_n}$$

b) On peut maintenant écrire : $A_n\left(\frac{1}{n}\overline{A_n}\right) = I_n$, d'où la conclusion :

$$\boxed{A_n \text{ est inversible d'inverse } \frac{1}{n}\overline{A_n}}$$

☞ Se souvenir de la matrice de Vandermonde et de la méthode utilisée pour déterminer son inverse (exercice classique).

Diagonalisation

Fiche de cours

I. Changement de bases, matrice de passage SO E®

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ et $\mathcal{B}' = (e_i')_{1\leq i\leq n}$ deux bases de E.

■ ***Matrice de passage.*** La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice représentant la famille $(e_i')_{1\leq i\leq n}$ dans la base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$.

■ ***Formule de changement de bases pour les coordonnées d'un vecteur.*** Soient $u \in E$, P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, X la matrice représentant u dans $\mathcal{B}$ et X' la matrice représentant u dans $\mathcal{B}'$. On a alors : $X = PX'$.

■ ***Formule de changement de bases pour la matrice associée à un endomorphisme.*** Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, A la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}$, B la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$ et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On a : $B = P^{-1}AP$.

■ ***Formule de changement de bases pour la matrice associée à une application linéaire.*** Soient n et p deux entiers naturels non nuls, E un espace vectoriel de dimension n, F un espace vectoriel de dimension p, $\mathcal{B}_0 = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ et $\mathcal{B}_0' = (e_i')_{1\leq i\leq n}$ deux bases de E, $\mathcal{B}_1 = (f_i)_{1\leq i\leq p}$ et $\mathcal{B}_1' = (f_i')_{1\leq i\leq p}$ deux bases de F, $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, A la matrice représentative de φ de la base $\mathcal{B}_0$ dans la base $\mathcal{B}_1$, B la matrice représentative de φ de la base $\mathcal{B}_0'$ dans la base $\mathcal{B}_1'$, P la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}_0'$ et Q la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_1'$. On a alors : $B = Q^{-1}AP$.

II. Matrices semblables SO

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$.

■ A et B sont semblables si $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}),\ B = P^{-1}AP$.

■ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. A et B sont semblables si et seulement si A et B représentent le même endomorphisme de E (dans des bases différentes).

III. Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme SO E®

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

■ ***Valeur propre.*** Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. λ est valeur propre de f si $\exists u \in E \setminus \{0\},\ f(u) = \lambda u$.

■ ***Vecteur propre.*** Soit $u \in E \setminus \{0\}$. u est vecteur propre de f si $\exists \lambda \in \mathbb{K},\ f(u) = \lambda u$. u est alors un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

■ ***Sous-espace propre.*** Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f. On appelle sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ, le sous-espace vectoriel E_λ de E engendré par les vecteurs propres associés à λ et on a :
$E_\lambda = \{u \in E,\ f(u) = \lambda u\} = \mathrm{Ker}(f - \lambda\mathrm{id})$.

■ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Toute famille constituée de vecteurs propres de f associés à des valeurs propres distinctes de f est libre. f admet donc au plus n valeurs propres distinctes.

IV. Polynôme annulateur d'un endomorphisme **S●**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

■ P est un polynôme annulateur de f si $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

■ Si P est un polynôme annulateur de f, alors les seules valeurs propres possibles de f sont les racines de P.

V. Endomorphismes diagonalisables **S● E●**

■ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. f est diagonalisable s'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de f, c'est-à-dire s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

■ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Si f admet n valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable.

■ **(S●)** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $f \in \mathcal{L}(E)$, $p \in [\![1, n]\!]$ et $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq p}$ les p valeurs propres distinctes de f. Les sous-espaces propres $(E_{\lambda_i})_{1 \leq i \leq p}$ associés aux valeurs propres $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq p}$ de f sont en somme directe. f est alors diagonalisable si et seulement si :
– $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p} = E$, ou si et seulement si :
– la somme des dimensions des sous-espaces propres $(E_{\lambda_i})_{1 \leq i \leq p}$ de f est égale à n.

VI. Réduction des matrices carrées **S● E●**

1. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres

Soient n un entier naturel non nul et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

■ ***Valeur propre.*** Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. λ est valeur propre de A si $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$, $AX = \lambda X$.

■ ***Vecteur propre.*** Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$. X est vecteur propre de A si $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $AX = \lambda X$. X est alors un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

■ ***Sous-espace propre.*** Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de A. On appelle sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ, le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ engendré par les vecteurs propres de A associés à λ.

2. Matrices diagonalisables

■ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est diagonalisable s'il existe une matrice diagonale semblable à A, c'est-à-dire s'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

■ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et f l'endomorphisme de E dont A est la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$. A est diagonalisable si et seulement si f est diagonalisable.

3. Diagonalisation d'une matrice carrée

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Marche à suivre pour diagonaliser A :

• recherche des valeurs propres de A : λ est valeur propre de A si $\exists X \neq 0$, $(A - \lambda I)X = 0$,

• recherche des vecteurs propres de A (pour chacune des valeurs propres λ de A) : ce sont les vecteurs $X \neq 0$ tels que $(A - \lambda I)X = 0$,

• A est alors diagonalisable si elle admet n valeurs propres distinctes ou si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à n,

• si A est diagonalisable et si les $(\lambda_i)_{1\leq i\leq p}$ ($p\in[\![1, n]\!]$) sont ses valeurs propres, alors :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && \lambda_1 &&&&&& \\ &&& \lambda_2 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& \lambda_2 &&& \\ &&&&&& \ddots && \\ &&&&&&& \lambda_p & \\ &&&&&&&& \ddots \\ &&&&&&&&& \lambda_p \end{pmatrix} \text{ est une matrice diagonale semblable à A,}$$

$$\underbrace{\qquad}_{\dim E_{\lambda_1}} \; \underbrace{\qquad}_{\dim E_{\lambda_2}} \; \cdots \; \underbrace{\qquad}_{\dim E_{\lambda_p}}$$

• écriture de la matrice P dont les colonnes sont les vecteurs propres de A (associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ dans le même ordre), puis calcul de P^{-1}.

• on a alors : $D = P^{-1}AP$ ou $A = PDP^{-1}$.

4. Interprétation matricielle

Soient $n\in\mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel de dimension n, f un endomorphisme diagonalisable de E, $(\lambda_i)_{1\leq i\leq p}$ ses p valeurs propres ($p\in[\![1, n]\!]$) de sous-espaces propres associés respectifs $(E_{\lambda_i})_{1\leq i\leq p}$. La matrice représentative de f dans la base $(E_{\lambda_i})_{1\leq i\leq p}$ est :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && \lambda_1 &&&&&& \\ &&& \lambda_2 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& \lambda_2 &&& \\ &&&&&& \ddots && \\ &&&&&&& \lambda_p & \\ &&&&&&&& \ddots \\ &&&&&&&&& \lambda_p \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\qquad}_{\dim E_{\lambda_1}} \; \underbrace{\qquad}_{\dim E_{\lambda_2}} \; \cdots \; \underbrace{\qquad}_{\dim E_{\lambda_p}}$$

5. Matrices symétriques (E❷)

Toute matrice symétrique à coefficients réels est diagonalisable.

Exercices clefs, méthodes et astuces

S❶ E❷

1. Changement de bases

1) Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbf{R}^3$ et f l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soit également $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ la famille de vecteurs de $\mathbf{R}^3$ définie par :

$$\begin{cases} e_1' = e_2 + e_3 \\ e_2' = e_1 + e_3 \\ e_3' = e_1 + e_2 \end{cases}.$$

a) Montrer que $\mathcal{B}'$ forme une nouvelle base de $\mathbf{R}^3$ et déterminer la matrice P de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

b) En déduire la matrice N représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$.

2) Soient $\mathcal{B}_0=(1, X, X^2)$, $\mathcal{B}_1 = (1, X, X(X-1))$ et $\mathcal{B}_2 = \big((X+1)^2, (X-1)(X+1), (X-1)^2\big)$, trois bases de $\mathbf{R}_2[X]$. On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbf{R}_2[X]$ dont la matrice représentative dans $\mathcal{B}_1$ est :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer les matrices de passage P de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_0$, et Q de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$.

b) En déduire la matrice N représentative de f de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}_2$.

1) a) ■ Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{R}^3$. On a :

$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i e_i' = 0 \Rightarrow \lambda_1(e_2+e_3) + \lambda_2(e_1+e_3) + \lambda_3(e_1+e_2) = 0$ i.e. :

$\Rightarrow (\lambda_2+\lambda_3)e_1 + (\lambda_1+\lambda_3)e_2 + (\lambda_1+\lambda_2)e_3 = 0$ soit, la famille (e_1, e_2, e_3) étant libre :

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_2+\lambda_3=0 \\ \lambda_1+\lambda_3=0 \\ \lambda_1+\lambda_2=0 \end{cases}$ et donc, en procédant par substitution :

$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0.$

On en déduit alors que la famille $\mathcal{B}'$ est une famille libre de $\mathbf{R}^3$. Comme elle est composée de trois vecteurs de $\mathbf{R}^3$ et comme $\dim(\mathbf{R}^3) = 3$, c'est une famille libre et maximale de $\mathbf{R}^3$, et donc une base de $\mathbf{R}^3$. On peut désormais conclure :

$$\boxed{\mathcal{B}' \text{ forme une base de } \mathbf{R}^3}$$

■ La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice représentant les vecteurs (e_1', e_2', e_3') en fonction des vecteurs (e_1, e_2, e_3). D'après l'énoncé, on en déduit alors la matrice P de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$:

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 0&1&1 \\ 1&0&1 \\ 1&1&0 \end{pmatrix}}$$

b) ■ Comme P est une matrice de passage, P est inversible et on a :

$P = IP \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0&1&1 \\ 1&0&1 \\ 1&1&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} P$ soit, en permutant les lignes :

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1&1&0 \\ 0&1&1 \\ 1&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 1&0&0 \\ 0&1&0 \end{pmatrix} P$ soit encore $(L_3 \leftarrow L_3 - L_1)$:

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1&1&0 \\ 0&1&1 \\ 0&-1&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 1&0&0 \\ 0&1&-1 \end{pmatrix} P$ i.e. $(L_3 \leftarrow L_3 + L_2)$:

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1&1&0 \\ 0&1&1 \\ 0&0&2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 1&0&0 \\ 1&1&-1 \end{pmatrix} P$ soit encore $(L_2 \leftarrow 2L_2 - L_3)$:

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1&1&0 \\ 0&2&0 \\ 0&0&2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 1&-1&1 \\ 1&1&-1 \end{pmatrix} P$ et donc $(L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2)$:

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2&0&0 \\ 0&2&0 \\ 0&0&2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1&1&1 \\ 1&-1&1 \\ 1&1&-1 \end{pmatrix} P$ soit enfin :

$\Leftrightarrow P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1&1&1 \\ 1&-1&1 \\ 1&1&-1 \end{pmatrix}.$

□ N étant la matrice représentative de f dans $\mathcal{B}'$, M la matrice représentative de f dans $\mathcal{B}$ et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, on en déduit alors que : $N = P^{-1}MP$, et donc, après calculs :

$$\boxed{N = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 1 & -4 & 5 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}}$$

2) **a)** ▪ La matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_0$ est la matrice représentant les vecteurs de $\mathcal{B}_0$ en fonction des vecteurs de $\mathcal{B}_1$. Comme $X^2 = X(X-1) + X$, on en déduit alors la matrice de passage P de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_0$:

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

▪ De même, la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ est la matrice représentant les vecteurs de $\mathcal{B}_2$ en fonction des vecteurs de $\mathcal{B}_1$.

Or, on a :

– $(X+1)^2 = X^2 + 2X + 1 = X(X-1) + 3X + 1$,

– $(X-1)(X+1) = X^2 - 1 = X(X-1) + X - 1$,

– $(X-1)^2 = X^2 - 2X + 1 = X(X-1) - X + 1$.

On en déduit alors la matrice de passage Q de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$:

$$\boxed{Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

b) □ Comme Q est une matrice de passage, Q est inversible et on a :

$$Q = IQ \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q \qquad \text{soit } (L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1) :$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q \qquad \text{soit encore } (L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2) :$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} Q \qquad \text{i.e. } (L_1 \leftarrow 4L_1 - L_3,\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3) :$$

$$\iff \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} Q \qquad \text{et donc } (L_1 \leftarrow L_1 + L_2) :$$

$$\iff \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} Q \qquad \text{soit enfin :}$$

$$\iff Q^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

□ N étant la matrice représentative de f de la base $\mathcal{B}_0$ dans la base $\mathcal{B}_2$, M la matrice représentative de f dans $\mathcal{B}_1$, P la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_0$ et Q la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$, on en déduit alors que : $N = Q^{-1}MP$, et donc, après calculs :

$$\boxed{N = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 6 & -2 & -6 \\ 0 & 8 & 5 \end{pmatrix}}$$

☞ Soit f un endomorphisme. Si A est la matrice représentative de f de $\mathcal{B}_0$ dans $\mathcal{B}_1$, B sa matrice représentative de $\mathcal{B}_0'$ dans $\mathcal{B}_1'$, P la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}_0'$ et Q la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_1'$, on a alors : $B = Q^{-1}AP$, ce qui se visualise ainsi (schéma dans le sens inverse des aiguilles d'une montre) :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}_0 \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P"'] & \mathcal{B}_1 \arrow[d, "Q"] \\
\mathcal{B}_0' \arrow[r, "B"'] & \mathcal{B}_1'
\end{tikzcd}$$

SO E❷

■ 2. Valeurs propres, vecteurs propres, matrices diagonalisables

Soient les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } A_4 = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 7 \\ -1 & 6 & 9 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer pour chacune d'entre elles ses valeurs propres et ses sous-espaces propres. Sont-elles diagonalisables ?

Exprimer alors chacune des matrices diagonalisables en fonction d'une matrice diagonale qui lui est semblable.

Diagonalisation d'une matrice carrée

▪ Lors de la diagonalisation d'une matrice carrée d'ordre n, il faut tout d'abord écrire : "λ est valeur propre de A si et seulement si $\exists X \neq 0,\ (A - \lambda I)X = 0$". On résout ensuite le système $(A - \lambda I)X = 0$. Pour cela, il faut échanger au préalable la première ligne avec une ligne dont le coefficient situé dans la première colonne est non nul (la meilleure méthode consiste le plus souvent à échanger les lignes 1 et n, mais aussi les lignes 2 et n - 1, 3 et n - 2...).

On applique ensuite la méthode du pivot de Gauss afin d'obtenir un système (S) dont la matrice des coefficients est triangulaire supérieure, les valeurs propres étant alors les valeurs de λ qui annulent au moins un coefficient diagonal de cette matrice (en fait, ce sont le plus souvent les racines du polynôme de degré inférieur ou égal à n qui se trouve en bas à droite de cette matrice).

Si au cours de cette réduction, on rencontre un pivot nul ou un pivot exprimé en fonction de λ et susceptible d'être nul, alors soit on intervertit les lignes (s'il existe un autre pivot qui ne s'annule pas), soit on discute suivant les valeurs de λ.

▪ Dans la pratique, pour déterminer les valeurs propres (λ_i) d'une matrice A, il faut discuter le système précédent (S) suivant les valeurs (λ_i) de λ annulant au moins un coefficient diagonal de la matrice des coefficients.

Lorsque l'on substitue une valeur λ_i à λ dans (S), on obtient en effet une matrice triangulaire supérieure dont un coefficient diagonal (au moins) est nul. Le système (S) n'est donc pas de Cramer. On peut donc écrire que : $\exists X \neq 0,\ (A - \lambda_i I)X = 0$, et donc que λ_i est valeur propre de A.

Si A admet n valeurs propres distinctes, on peut déjà conclure que A est diagonalisable.

▪ Pour déterminer enfin le sous-espace propre associé à chacune des valeurs propres (λ_i), il faut poser $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans (S). On est alors en présence d'un système de p équations indépendantes à n inconnues (avec $p < n$). Il faut alors donner une valeur arbitraire à n - p inconnues auxiliaires $x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-p}}$ et en déduire la valeur des p autres inconnues : on détermine ainsi le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i, de dimension n - p.

Si la somme des dimensions des sous-espaces propres de A est égale à n, A est diagonalisable.

■ Si A est diagonalisable, on peut alors déterminer des matrices P et D telles que $A = PDP^{-1}$: D est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A (en tenant compte des ordres de multiplicité) et P est une matrice dont les colonnes sont constituées de vecteurs propres de A, chaque colonne de P représentant un vecteur propre de A associé à la valeur propre de A située sur la même colonne de D (étant entendu que les différents vecteurs propres de A associés à une même valeur propre λ_i, lorsque $\dim(E_{\lambda_i}) \geq 2$, représentés dans P doivent former une base du sous-espace propre associé à cette valeur propre).

1) ■ λ est valeur propre de A_1 si et seulement si $\exists X \neq 0, (A_1 - \lambda I)X = 0$. Or, on a :

$$(A_1 - \lambda I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 & -4 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} X = 0 \qquad \text{soit } (L_1 \leftrightarrow L_3) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1-\lambda \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ 3-\lambda & 4 & -4 \end{pmatrix} X = 0 \qquad \text{soit encore } (L_2 \leftarrow L_1 - L_2,\ L_3 \leftarrow -2L_3 - (3-\lambda)L_1) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda+1 & -1-\lambda \\ 0 & -8 & -\lambda^2+4\lambda+5 \end{pmatrix} X = 0 \qquad \text{i.e. } (L_2 \leftrightarrow L_3) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & -8 & -\lambda^2+4\lambda+5 \\ 0 & \lambda+1 & -1-\lambda \end{pmatrix} X = 0 \qquad \text{et donc } (L_3 \leftarrow -8L_3 - (\lambda+1)L_2) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & -8 & -\lambda^2+4\lambda+5 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)(\lambda^2-4\lambda+3) \end{pmatrix} X = 0 \ ①.$$

NB : Remarquer que l'on utilise ici la méthode du pivot comme elle a été présentée à l'exercice **2.1**.

λ est donc valeur propre de A_1 si et seulement s'il existe un vecteur $X \neq 0$ solution du système précédent, c'est-à-dire si ce système n'est pas un système de Cramer, i.e. si la matrice carrée précédente n'est pas inversible, soit encore, puisqu'elle est triangulaire supérieure : si l'un de ses coefficients diagonaux est nul. Ainsi, λ est valeur propre de A_1 si et seulement si $\lambda \in \{-1, 1, 3\}$. On peut alors écrire :

– si $\lambda = -1$, ① devient alors : $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0$, soit, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: $\begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$.

-1 est donc valeur propre de A_1 de sous-espace propre associé $\mathcal{V}ect((1, 0, 1))$,

– si $\lambda = 1$, ① devient alors : $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0$, soit, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: $\begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$.

1 est donc valeur propre de A_1 de sous-espace propre associé $\mathcal{V}ect((0, 1, 1))$,

– si $\lambda = 3$, ① devient alors : $\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0$, soit, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: $\begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases}$.

3 est donc valeur propre de A_1 de sous-espace propre associé $\mathcal{V}ect((-1, 1, 1))$,

Comme $A_1 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et comme elle admet trois valeurs propres distinctes, on peut alors conclure :

$$\boxed{A_1 \text{ est diagonalisable}}$$

■ D'après les résultats précédents, en posant : $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on peut écrire : $A_1 = PDP^{-1}$.

Calculons alors P^{-1}. On a :

$$P = IP \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P \qquad \text{soit } (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} P \qquad \text{soit encore } (L_3 \leftarrow L_3 - L_2) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} P \qquad \text{i.e. } (L_1 \leftarrow L_1 + L_3,\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} P \qquad \text{et donc :}$$

$$\Leftrightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $A_1 = PDP^{-1}$, on peut désormais conclure :

$$\boxed{A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

2) ▪ λ est valeur propre de A_2 si et seulement si $\exists X \neq 0,\ (A_2 - \lambda I)X = 0$. Or, on a :

$$(A_2 - \lambda I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} X = 0 \qquad \text{soit } (L_1 \leftrightarrow L_3) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -\lambda \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1-\lambda & 1 & -2 \end{pmatrix} X = 0 \qquad \text{soit encore } (L_2 \leftarrow L_1 - L_2,\ L_3 \leftarrow -L_3 - (1-\lambda)L_1) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -\lambda \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda-2 & -\lambda^2+\lambda+2 \end{pmatrix} X = 0 \quad ①.$$

❏ Si $\lambda \neq 1$, ① devient $(L_3 \leftarrow (\lambda-1)L_3 - (\lambda-2)L_2)$: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -\lambda \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1)(2-\lambda) \end{pmatrix} X = 0$ ②.

λ ($\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$) est donc valeur propre de A_2 si et seulement s'il existe un vecteur $X \neq 0$ solution du système précédent, c'est-à-dire si ce système n'est pas un système de Cramer, i.e. si la matrice carrée précédente n'est pas inversible, soit encore, puisqu'elle est triangulaire supérieure : si l'un de ses coefficients diagonaux est nul. Ainsi, λ ($\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$) est valeur propre de A_2 si et seulement si $\lambda \in \{0, 2\}$. On peut alors écrire :

– si $\lambda = 0$, ② devient alors : $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0$, soit, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: $\begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$.

0 est donc valeur propre de A_2 de sous-espace propre associé $\mathcal{V}ect\big((1, 1, 1)\big)$,

– si $\lambda = 2$, ② devient alors : $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0$, soit, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: $\begin{cases} -x + y - 2z = 0 \\ y = z \end{cases}$, soit encore : $\begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases}$.

2 est donc valeur propre de A_2 de sous-espace propre associé $\mathcal{V}ect\big((-1, 1, 1)\big)$.

❏ Si $\lambda = 1$, ① devient alors : $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} X = 0$, soit, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: $\begin{cases} -x + y - z = 0 \\ y = 2z \end{cases}$, soit encore : $\begin{cases} x = z \\ y = 2z \end{cases}$.

1 est donc valeur propre de A_2 de sous-espace propre associé $\mathcal{V}ect\big((1, 2, 1)\big)$.

➲ Comme $A_2 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et comme A_2 admet trois valeurs propres distinctes, on peut alors conclure :

$$\boxed{A_2 \text{ est diagonalisable}}$$

■ D'après les résultats précédents, en posant $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on peut écrire : $A_2 = PDP^{-1}$.

Calculons alors P^{-1}. On a :

$$P = IP \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P \qquad \text{soit } (L_2 \leftarrow L_2 - L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} P \qquad \text{soit encore } (L_1 \leftarrow 2L_1 + L_3,\ L_2 \leftarrow 2L_2 - 2L_3) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} P \qquad \text{i.e. } (L_1 \leftarrow L_1 - L_2) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} P \qquad \text{et donc :}$$

$$\Leftrightarrow P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $A_2 = PDP^{-1}$, on peut désormais conclure :

$$\boxed{A_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

3) ■ λ est valeur propre de A_3 si et seulement si $\exists X \neq 0$, $(A_3 - \lambda I)X = 0$. Or, on a :

$$(A_3 - \lambda I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & -2 \\ 2 & -\lambda & -2 \\ 2 & -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} X = 0 \qquad \text{soit } (L_1 \leftrightarrow L_3) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1-\lambda \\ 2 & -\lambda & -2 \\ 3-\lambda & -1 & -2 \end{pmatrix} X = 0 \qquad \text{soit encore } (L_2 \leftarrow L_1 - L_2,\ L_3 \leftarrow 2L_3 - (3-\lambda)L_1) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1-\lambda \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & -(\lambda-1)^2 \end{pmatrix} X = 0 \qquad \text{et donc } (L_3 \leftarrow L_2 + L_3) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1-\lambda \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(\lambda-1) \end{pmatrix} X = 0 \ ①.$$

λ est donc valeur propre de A_3 si et seulement s'il existe un vecteur $X \neq 0$ solution du système précédent, c'est-à-dire si ce système n'est pas un système de Cramer, i.e. si la matrice carrée précédente n'est pas inversible, soit encore, puisqu'elle est triangulaire supérieure : si l'un de ses coefficients diagonaux est nul. Ainsi, λ est valeur propre de A_3 si et seulement si $\lambda \in \{0, 1\}$. On peut alors écrire :

– si $\lambda = 0$, ① devient alors : $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0$, soit, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: $\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ y = z \end{cases}$, soit encore : $\begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$.

0 est donc valeur propre de A_3 de sous-espace propre associé $\mathcal{V}ect\big((1, 1, 1)\big)$.

– si $\lambda = 1$, ① devient alors : $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0$, soit, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: $2x - y - 2z = 0$.

1 est donc valeur propre de A_3 de sous-espace propre associé $\mathcal{V}ect\big((1, 0, 1), (0, 2, -1)\big)$.

NB : Remarquer que 1 est valeur propre double de A_3.

☞ Le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ d'équation : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$ (où $\exists i \in [\![1, n]\!], \alpha_i \neq 0$) est de dimension $n - 1$.

Pour déterminer le $j^{\text{ème}}$ vecteur ($j \in [\![1, n-1]\!]$) d'une base de cet espace, il existe une méthode simple : il faut poser $x_j = a$ (où $a \in \mathbb{R}^*$) et $\forall i \in [\![1, n-1]\!] \setminus \{j\}$, $x_i = 0$. On détermine alors la $n^{\text{ème}}$ composante x_n de ce vecteur à l'aide de l'équation précédente.

Par exemple, une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$: $2x + y - 3z + 2t = 0$ est :
$\big((1, 0, 0, -1), (0, 2, 0, -1), (0, 0, 2, 3)\big)$.

☞ De façon plus générale, le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ défini par le système de p équations indépendantes ($p \in [\![1, n-1]\!]$) : $\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} x_i = 0\right)_{1 \leq j \leq p}$ est de dimension $n - p$.

Pour déterminer le $j^{\text{ème}}$ vecteur ($j \in [\![1, n-p]\!]$) d'une base de cet espace, il faut poser $x_j = a$ (où $a \in \mathbb{R}^*$) et $\forall i \in [\![1, n-p]\!] \setminus \{j\}$, $x_i = 0$. On détermine alors les $(n-p+1)^{\text{ème}}$, $(n-p+2)^{\text{ème}}$, ... , $n^{\text{ème}}$ composantes de ce vecteur à l'aide des équations précédentes.

Comme $A_3 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et comme la somme des dimensions des sous-espaces propres associés aux valeurs propres de A_3 est égale à 3, on en déduit alors :

$$\boxed{A_3 \text{ est diagonalisable}}$$

☞ Pour justifier qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable, on doit écrire :

– soit qu'elle admet n valeurs propres distinctes (si tel est le cas),

– soit que la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est n.

■ D'après les résultats précédents, en posant $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, on peut écrire : $A_3 = PDP^{-1}$.

Calculons alors P^{-1}. On a :

$$P = IP \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P \qquad \text{soit } (L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} P \qquad \text{soit encore } (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} P \qquad \text{i.e. } (L_1 \leftarrow -L_1 - L_2) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} P \qquad \text{et donc :}$$

$$\Leftrightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comme $A_3 = PDP^{-1}$, on peut désormais conclure :

$$\boxed{A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

☞ Noter que si une matrice est diagonalisable, la somme de ses valeurs propres (en comptant leur ordre de multiplicité) est égale à la somme de ses coefficients diagonaux (ce que l'on appelle sa trace, cf. exercice **2**.9). Méthode de vérification parfois utile.

4) ▪ λ est valeur propre de A_4 si et seulement si $\exists X \neq 0$, $(A_4 - \lambda I)X = 0$. Or, on a :

$$(A_4 - \lambda I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2-\lambda & 5 & 7 \\ -1 & 6-\lambda & 9 \\ 0 & -2 & -3-\lambda \end{pmatrix} X = 0 \qquad \text{soit, en permutant les lignes :}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 6-\lambda & 9 \\ 0 & -2 & -3-\lambda \\ -2-\lambda & 5 & 7 \end{pmatrix} X = 0 \qquad \text{soit encore } (L_3 \leftarrow -L_3 + (\lambda+2)L_1) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 6-\lambda & 9 \\ 0 & -2 & -3-\lambda \\ 0 & -\lambda^2+4\lambda+7 & 9\lambda+11 \end{pmatrix} X = 0 \qquad \text{i.e. } (L_3 \leftarrow -2L_3 - (-\lambda^2+4\lambda+7)L_2) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 6-\lambda & 9 \\ 0 & -2 & -3-\lambda \\ 0 & 0 & -(\lambda-1)^2(\lambda+1) \end{pmatrix} X = 0 \text{ ①.}$$

λ est donc valeur propre de A_4 si et seulement s'il existe un vecteur $X \neq 0$ solution du système précédent, c'est-à-dire si ce système n'est pas un système de Cramer, i.e. si la matrice carrée précédente n'est pas inversible, soit encore, puisqu'elle est triangulaire supérieure : si l'un de ses coefficients diagonaux est nul. Ainsi, λ est valeur propre de A_4 si et seulement si $\lambda \in \{-1, 1\}$. On peut alors écrire :

– si $\lambda = -1$, ① devient alors : $\begin{pmatrix} -1 & 7 & 9 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0$, soit, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: $\begin{cases} -x+7y+9z=0 \\ y=-z \end{cases}$, soit encore : $\begin{cases} x=2z \\ y=-z \end{cases}$.

-1 est donc valeur propre de A_4 de sous-espace propre associé $\mathcal{V}ect((2, -1, 1))$.

– si $\lambda = 1$, ① devient alors : $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 9 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0$, soit, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: $\begin{cases} -x+5y+9z=0 \\ y=-2z \end{cases}$, soit encore : $\begin{cases} x=-z \\ y=-2z \end{cases}$.

1 est donc valeur propre de A_4 de sous-espace propre associé $\mathcal{V}ect((1, 2, -1))$.

Comme $A_4 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et comme la somme des dimensions des sous-espaces propres associés aux valeurs propres de A_4 est égale à 2, on peut désormais conclure :

$$\boxed{A_4 \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

☞ Noter la rédaction employée dans cet exercice. A savoir reproduire.

SO EO

● 3. Matrices non diagonalisables : trigonalisation

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et A sa matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$: $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 7 \\ -1 & 6 & 9 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. D'après l'exercice précédent, on sait que A n'est pas diagonalisable.

Déterminer alors trois vecteurs (e_1, e_2, e_3) formant une base de $\mathbb{R}^3$ et tels que :

$$\begin{cases} f(e_1) = e_1 \\ f(e_2) = -e_2 \\ f(e_3) = e_1 - e_2 + e_3 \end{cases}.$$

En déduire une matrice triangulaire semblable à A.

▪ D'après les résultats de l'exercice précédent, en posant : $e_1 = (1, 2, -1)$ et $e_2 = (2, -1, 1)$, on a bien : $f(e_1) = e_1$ et $f(e_2) = -e_2$ (e_1 et e_2 étant des vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres 1 et -1).

Soit alors e_3 le vecteur $e_3 = (x, y, z)$. On a :

$$f(e_3) = e_1 - e_2 + e_3 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 5y + 7z = -1 + x \\ -x + 6y + 9z = 3 + y \\ -2y - 3z = -2 + z \end{cases} \quad \text{soit :}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 5 & 7 \\ -1 & 5 & 9 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{soit encore } \left(L_2 \leftarrow \frac{3}{10}L_2 - \frac{1}{10}L_1\right) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et donc } (L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{i.e. :}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 5y + 7z = -1 \\ y + 2z = 1 \end{cases} \quad \text{soit enfin, en substituant } 1 - 2z \text{ à } y \text{ dans la première équation :}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - z \\ y = 1 - 2z \end{cases}.$$

En posant par exemple $z = 1$, on trouve : $x = 1$ et $y = -1$, c'est-à-dire : $e_3 = (1, -1, 1)$. On a donc bien déterminé un vecteur e_3 tel que : $f(e_3) = e_1 - e_2 + e_3$.

Soit maintenant $(\lambda_i)_{1 \le i \le 3} \in \mathbf{R}^3$. On peut écrire :

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \lambda_1(1, 2, -1) + \lambda_2(2, -1, 1) + \lambda_3(1, -1, 1) = 0 \quad \text{soit :}$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3, 2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3, -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = 0 \quad \text{soit encore :}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{i.e. } (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, L_3 \leftarrow L_3 + L_1) :$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{et donc } (L_3 \leftarrow -5L_3 - 3L_2) :$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = 0 \ ①.$$

La matrice précédente étant une matrice triangulaire supérieure dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls, elle est inversible. On en déduit alors que le système ① est de Cramer, et donc que :

$$① \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \quad \text{i.e. :}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

La famille (e_1, e_2, e_3) est donc libre. Comme elle est composée de trois vecteurs de $\mathbf{R}^3$ et comme $\dim(\mathbf{R}^3) = 3$, c'est une famille libre et maximale de $\mathbf{R}^3$, et donc une base de $\mathbf{R}^3$. On peut désormais conclure :

> En posant $e_1 = (1, 2, -1)$, $e_2 = (2, -1, 1)$ et $e_3 = (1, -1, 1)$, on a bien déterminé trois vecteurs de $\mathbf{R}^3$ formant une base de $\mathbf{R}^3$ et tels que : $\begin{cases} f(e_1) = e_1 \\ f(e_2) = -e_2 \\ f(e_3) = e_1 - e_2 + e_3 \end{cases}$.

■ Soit T la matrice représentative de f dans la base (e_1, e_2, e_3). D'après ce qui précède, on peut écrire : $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base (e_1, e_2, e_3), on peut également écrire : $T = P^{-1}AP$. Les matrices A et T sont donc semblables, d'où la conclusion :

$$\boxed{\text{La matrice } T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ est une matrice triangulaire semblable à } A}$$

☞ Toute matrice carrée non diagonalisable est semblable à une matrice triangulaire non diagonale (méthode de recherche de la matrice triangulaire, appelée trigonalisation, à savoir reproduire).

SO EO

★ 4. Six propriétés indispensables

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1) Montrer que λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I$ n'est pas inversible.

2) On suppose que A admet une unique valeur propre λ. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $A = \lambda I$.

3) Montrer que si λ est valeur propre de A et si X est un vecteur propre associé à λ, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, λ^k est valeur propre de A^k et X est un vecteur propre associé à λ^k.

4) On suppose que $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que si λ est valeur propre de A et si X est un vecteur propre associé à λ, alors $\frac{1}{\lambda}$ est valeur propre de A^{-1} et X est un vecteur propre associé à $\frac{1}{\lambda}$.

5) Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer M^2 et M^3. Vérifier que $M^3 - 2M^2 - M + 2I = 0$.

b) En déduire que les valeurs propres de M sont dans $\{-1, 1, 2\}$.

6) Montrer que les valeurs propres de toute matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux.

1) λ est valeur propre de A si et seulement si $\exists X \neq 0, (A - \lambda I)X = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $(A - \lambda I)X = 0$ n'est pas un système de Cramer, et donc si et seulement si $A - \lambda I$ n'est pas inversible. On peut alors conclure :

$$\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } A \text{ si et seulement si } A - \lambda I \text{ n'est pas inversible}}$$

☞ Se souvenir que λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I$ n'est pas inversible (démonstration à connaître), et en particulier que **0 est valeur propre de A si et seulement si A n'est pas inversible** (attention, cette propriété ne fait pas partie du cours !!!).

2) Si A est diagonalisable, comme elle admet pour unique valeur propre λ, elle est alors semblable à la matrice λI, ce qui signifie qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que : $A = P(\lambda I)P^{-1}$, soit : $A = \lambda PP^{-1}$, i.e. : $A = \lambda I$. Réciproquement, si $A = \lambda I$, A est diagonale, donc diagonalisable.

On peut désormais conclure :

$$\boxed{\text{Si } A \text{ admet une unique valeur propre } \lambda, A \text{ est diagonalisable si et seulement si } A = \lambda I}$$

☞ Se souvenir que si A admet une unique valeur propre λ, A est diagonalisable si et seulement si $A = \lambda I$ (démonstration à connaître).

3) Soient λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé à λ. Montrons alors par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, λ^k est valeur propre de A^k et X est un vecteur propre associé à λ^k.

• Au rang k = 1, comme λ est valeur propre de A et X est un vecteur propre associé à λ, la propriété est bien vérifiée au rang k = 1.

• Soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons que λ^k soit valeur propre de A^k et X un vecteur propre associé à λ^k. On peut alors écrire : $A^kX = \lambda^kX$, d'où : $A^{k+1}X = A(\lambda^kX) = \lambda^kAX$. Comme λ est valeur propre de A et X un vecteur propre associé à λ, c'est-à-dire comme $AX = \lambda X$, on en déduit alors que : $A^{k+1}X = \lambda^{k+1}X$, et donc que λ^{k+1} est valeur propre de A^{k+1} et X un vecteur propre associé à λ^{k+1}.

• Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, λ^k est valeur propre de A^k et X est un vecteur propre associé à λ^k.

Comme $IX = X$, $\lambda^0 = 1$ est valeur propre de $A^0 = I$ et X est un vecteur propre associé à λ^0. Le cas k = 0 rejoint donc le cas général. On en déduit alors que pour tout $k \in \mathbb{N}$, λ^k est valeur propre de A^k et X est un vecteur propre associé à λ^k, d'où la conclusion :

> Si λ est valeur propre de A et si X est un vecteur propre associé à λ, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, λ^k est valeur propre de A^k et X est un vecteur propre associé à λ^k.

☞ Se souvenir que si λ est valeur propre de A (resp. f) et si X (resp. u) est un vecteur propre associé à λ, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, λ^k est valeur propre de A^k (resp. f^k) et X (resp. u) est un vecteur propre associé à λ^k. Démonstration à connaître, cette propriété ne faisant pas partie du cours.

☞ Plus généralement, pour tout polynôme P, si λ est valeur propre de A (resp. f) et si X (resp. u) est un vecteur propre associé à λ, alors $P(\lambda)$ est valeur propre de P(A) (resp. P(f)) et X (resp. u) est un vecteur propre associé à $P(\lambda)$.

4) Comme $A \in GL_n(\mathbb{R})$, d'après le 1, on peut écrire que 0 n'est pas valeur propre de A. Soient alors λ ($\lambda \in \mathbb{R}^*$) une valeur propre de A et X un vecteur propre associé à λ. On peut alors écrire :

$AX = \lambda X$ soit, en multipliant cette relation à gauche par A^{-1} :

$X = A^{-1}(\lambda X)$ i.e. :

$\lambda(A^{-1}X) = X$ et donc, en divisant cette relation par $\lambda \neq 0$:

$A^{-1}X = \dfrac{1}{\lambda}X$.

On en déduit alors que $\dfrac{1}{\lambda}$ est valeur propre de A^{-1} et X est un vecteur propre associé à $\dfrac{1}{\lambda}$, d'où la conclusion :

> Si λ est valeur propre de A et si X est un vecteur propre associé à λ, alors $\dfrac{1}{\lambda}$ est valeur propre de A^{-1} et X est un vecteur propre associé à $\dfrac{1}{\lambda}$.

☞ Se souvenir que si A est inversible (resp. f bijectif) et si λ est valeur propre de A (resp. f) et X (resp. u) un vecteur propre associé à λ, alors $\dfrac{1}{\lambda}$ est valeur propre de A^{-1} (resp. f^{-1}) et X (resp. u) un vecteur propre associé à $\dfrac{1}{\lambda}$.

5) **a)** ▪ On obtient, après calculs :

$$\boxed{M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -3 & -2 & 3 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } M^3 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -7 \\ -7 & -6 & 7 \\ -9 & -9 & 8 \end{pmatrix}}$$

▪ On vérifie alors que l'on a bien :

$$\boxed{M^3 - 2M^2 - M + 2I = 0}$$

b) Soient λ une valeur propre de M et $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé à λ. D'après le **3**, on peut écrire que λ^2 est valeur propre de M^2 où $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur propre associé à λ^2 et que λ^3 est valeur propre de M^3 où $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est également un vecteur propre associé à λ^3.

On peut maintenant écrire :

$(M^3 - 2M^2 - M + 2I)X = M^3X - 2M^2X - MX + 2X$ soit, d'après ce qui précède :

$= \lambda^3X - 2\lambda^2X - \lambda X + 2X$ i.e. :

$= (\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2)X.$

Or, on sait que : $M^3 - 2M^2 - M + 2I = 0$. On en déduit alors que : $(M^3 - 2M^2 - M + 2I)X = 0$, et donc, d'après la relation précédente, que : $(\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2)X = 0$.

De plus, comme X est un vecteur propre de M, on a : $X \neq 0$. On en déduit alors que : $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$, soit, comme -1, 1 et 2 sont les solutions de cette équation que : $\lambda \in \{-1, 1, 2\}$, d'où la conclusion :

$\boxed{\text{Les valeurs propres de M sont dans } \{-1, 1, 2\}}$

☞ Se souvenir que s'il existe un polynôme P tel que $P(A) = 0$ (resp. $P(f) = 0$) – P est alors un polynôme annulateur de A (resp. f) –, alors toutes les valeurs propres de A (resp. f) sont racines de l'équation $P(\lambda) = 0$ (à savoir reproduire, cette propriété ne figurant au programme qu'en deuxième année, voie scientifique).

Attention !!! La réciproque est fausse : si P est un polynôme annulateur de A et si $P(\lambda) = 0$, λ n'est pas nécessairement valeur propre de A.

6) Soit $M = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & \dots & \dots \\ & a_2 & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$ une matrice triangulaire supérieure. D'après **1**, λ est valeur propre de M si et seulement si $M - \lambda I = \begin{pmatrix} a_1-\lambda & \dots & \dots & \dots \\ & a_2-\lambda & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_n-\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Or, cette matrice est triangulaire. Elle est donc non inversible si et seulement si l'un (au moins) de ses coefficients diagonaux est nul, c'est-à-dire si et seulement si : $\exists i \in [\![1, n]\!], \lambda = a_i$.

Ainsi, λ est valeur propre de M si et seulement si λ est égal à l'un des coefficients diagonaux de M. En procédant de même pour une matrice triangulaire inférieure, on peut alors conclure :

$\boxed{\text{Les valeurs propres de toute matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux}}$

☞ Se souvenir que **les valeurs propres de toute matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux** (démonstration à connaître, cette propriété ne faisant pas partie du cours).

SO EO

★ 5. Puissance $n^{\text{ème}}$ d'une matrice

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que : $A^2 - 3A + 2I = 0$.

b) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division suivant les puissances décroissantes de X^n par $X^2 - 3X + 2$.

c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de A^n en fonction de A et I, puis en fonction de n.

3) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Diagonaliser A.

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de A^n en fonction de n.

4) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe deux suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \alpha_n I + \beta_n J.$$

b) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation linéaire de récurrence d'ordre 2 que l'on précisera. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de A^n en fonction de n.

1) Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. D'après la définition de A, on peut écrire : $A = I + 2J$. Comme $IJ = JI = J$, la formule du binôme de Newton nous permet alors d'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k J^k I^{n-k} \qquad \text{soit encore :}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k J^k.$$

☞ Se souvenir que pour utiliser la formule du binôme de Newton avec des matrices A et B, il ne faut pas oublier de préciser que celles-ci sont commutantes (i.e. que $AB = BA$). On remarquera que toutes les matrices sont commutantes avec la matrice identité.

Or, on a : $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = 0$. Par une récurrence immédiate, on en déduit alors que : $\forall k \in [3, +\infty[,\ J^k = 0$, et donc, d'après la relation précédente (prise pour $n \geq 2$), en éliminant les termes nuls de la somme :

$$\forall n \in [2, +\infty[,\ A^n = C_n^0 2^0 J^0 + C_n^1 2^1 J^1 + C_n^2 2^2 J^2 \qquad \text{i.e. :}$$

$$= I + 2nJ + 2n(n-1)J^2.$$

Les cas $n = 0$ et $n = 1$ rejoignant le cas général ($A^0 = I$ et $A^1 = I + 2J$), on en déduit alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = I + 2nJ + 2n(n-1)J^2$, et donc, d'après les expressions de I, J et J^2 :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n+1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

☞ Une matrice J telle que $\exists p \in \mathbb{N}^*,\ J^p = 0$ est dite nilpotente. On peut alors écrire : $\forall k \in [p, +\infty[,\ J^k = 0$.

2) **a)** On a : $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, d'où, après calculs :

$$\boxed{A^2 - 3A + 2I = 0}$$

b) Comme $\deg(X^2 - 3X + 2) = 2$, en notant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, Q_n le quotient et R_n le reste de la division suivant les puissances décroissantes de X^n par $X^2 - 3X + 2$, on peut écrire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X^n = (X^2 - 3X + 2)\,Q_n(X) + R_n(X)$ avec $\deg\big(R_n(X)\big) \leq 1$. On en déduit alors que : $\exists!(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$, $R_n(X) = a_n X + b_n$, et donc que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists!(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$, $X^n = (X^2 - 3X + 2)\,Q_n(X) + a_n X + b_n$.

En écrivant cette relation en 1 et en 2, on en déduit alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n sont solutions du système : $\begin{cases} a_n + b_n = 1 \\ 2a_n + b_n = 2^n \end{cases}$, et donc que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_n = 2^n - 1 \\ b_n = 2 - 2^n \end{cases}$. On peut alors conclure :

> Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division suivant les puissances décroissantes de X^n par $(X^2 - 3X + 2)$ est : $(2^n - 1)X + (2 - 2^n)$.

c) On peut maintenant écrire :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists Q_n \in \mathbb{R}[X]$, $X^n = (X^2 - 3X + 2)\,Q_n(X) + (2^n - 1)X + (2 - 2^n)$ d'où :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists Q_n \in \mathbb{R}[X]$, $A^n = (A^2 - 3A + 2I)\,Q_n(A) + (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I$ et donc, comme $A^2 - 3A + 2I = 0$:

$\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I$ soit enfin, après calculs :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 2^n - 1 & 1 - 2^n \\ 1 - 2^n & 2^n & 1 - 2^n \\ 2^n - 1 & 1 - 2^n & 2^n \end{pmatrix}$$ d'où la conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 2^n - 1 & 1 - 2^n \\ 1 - 2^n & 2^n & 1 - 2^n \\ 2^n - 1 & 1 - 2^n & 2^n \end{pmatrix}}$$

3) a) ▪ λ est valeur propre de A si et seulement si $\exists X \neq 0$, $(A - \lambda I)X = 0$. Or, on a :

$$(A - \lambda I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 6 \\ -1 & -\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} X = 0$$ soit $(L_1 \leftrightarrow L_3)$:

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2-\lambda \\ -1 & -\lambda & 2 \\ 1-\lambda & 2 & 6 \end{pmatrix} X = 0$$ soit encore $(L_2 \leftarrow L_1 + L_2,\ L_3 \leftarrow L_3 - (1-\lambda)L_1)$:

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 4-\lambda \\ 0 & 2\lambda & -(\lambda-4)(\lambda+1) \end{pmatrix} X = 0 \quad ①.$$

Si $\lambda \neq 2$, ① devient $(L_3 \leftarrow (2-\lambda)L_3 - 2\lambda L_2)$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 4-\lambda \\ 0 & 0 & (\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-4) \end{pmatrix} X = 0$ ②. λ $(\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{2\})$ est donc valeur propre de A si et seulement s'il existe un vecteur $X \neq 0$ solution du système précédent, c'est-à-dire si ce système n'est pas un système de Cramer, i.e. si la matrice carrée précédente n'est pas inversible, soit encore, puisqu'elle est triangulaire supérieure : si l'un de ses coefficients diagonaux est nul. Ainsi, λ $(\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{2\})$ est valeur propre de A si et seulement si $\lambda \in \{-2, 1, 4\}$. On peut alors écrire :

– si $\lambda = -2$, ② devient alors : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0$, soit, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: $\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ 2y + 3z = 0 \end{cases}$, soit encore : $\begin{cases} x = -z \\ 2y = -3z \end{cases}$.

-2 est donc valeur propre de A de sous-espace propre associé $\mathcal{V}ect\big((2, 3, -2)\big)$.

– si $\lambda = 1$, ② devient alors : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0$, soit, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$, soit encore : $\begin{cases} x = 5z \\ y = -3z \end{cases}$.

1 est donc valeur propre de A de sous-espace propre associé $\mathcal{V}ect\big((5, -3, 1)\big)$.

– si $\lambda = 4$, ② devient alors : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0$, soit, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: $\begin{cases} x = 2z \\ y = 0 \end{cases}$.

4 est donc valeur propre de A de sous-espace propre associé $\mathcal{V}ect\big((2, 0, 1)\big)$.

Comme $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et comme A admet trois valeurs propres distinctes, on en déduit alors que A est diagonalisable.

■ D'après les résultats précédents, en posant $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on peut écrire : $A = PDP^{-1}$.

Calculons alors P^{-1}. On a :

$P = IP \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P$ soit $(L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1,\ L_3 \leftarrow 2L_3 + 2L_1)$:

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & -21 & -6 \\ 0 & 12 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} P$ soit encore $(L_3 \leftarrow \frac{7}{2} L_3 + 2L_2)$:

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & -21 & -6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} P$ i.e. $(L_1 \leftarrow 9L_1 - 2L_3,\ L_2 \leftarrow \frac{3}{7} L_2 + \frac{2}{7} L_3)$:

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 18 & 45 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -8 & -14 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} P$ soit enfin $(L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 + \frac{5}{2} L_2)$:

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} P$ et donc :

$\Leftrightarrow P^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

Comme $A = PDP^{-1}$, on peut désormais conclure :

$$\boxed{A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}}$$

b) Comme $A = PDP^{-1}$, à l'aide d'une récurrence immédiate, on peut écrire : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$, et donc :

$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$, soit, après calculs :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 + 2^{2n+1} + (-1)^n 2^{n+1} & 2^{2n+3} + (-1)^n 2^{n+1} - 10 & 7 \cdot 2^{2n+1} + (-1)^{n+1} 2^{n+2} - 10 \\ 3(-1)^n 2^n - 3 & 3(-1)^n 2^n + 6 & 3(-1)^{n+1} 2^{n+1} + 6 \\ 2^{2n} + (-1)^{n+1} 2^{n+1} + 1 & 2^{2n+2} + (-1)^{n+1} 2^{n+1} - 2 & 7 \cdot 2^{2n} + (-1)^n 2^{n+2} - 2 \end{pmatrix}}$$

(Y en a-t-il un qui a fait le calcul ???)

☞ Si $D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & d_p \end{pmatrix}$, alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} d_1^n & & 0 \\ & d_2^n & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & d_p^n \end{pmatrix}$ (démonstration immédiate).

☞ Se souvenir que si A et D sont semblables, i.e. si $\exists P \in GL_p(\mathbb{K})$, $A = PDP^{-1}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $A^n = PD^nP^{-1}$ (la démonstration de cette relation par récurrence étant immédiate, il est inutile de redémontrer ce résultat).

Puissance $n^{ème}$ d'une matrice

En dehors de quelques matrices particulières (cf. exercices 6 et 7) et lorsque l'énoncé ne précise pas la marche à suivre (pour un exemple de marche à suivre, cf. **4**), il existe trois méthodes généralement employées pour calculer la puissance $n^{ème}$ ($n \in \mathbb{N}$) d'une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$:

– si A est une matrice triangulaire ne comportant que des a ($a \in \mathbb{K}$) sur la diagonale, on écrit $A = aI + J$ où J est une matrice nilpotente et on applique la formule du binôme (cf. **1**) ; d'autres matrices triangulaires peuvent également faire l'objet de telles décompositions qui seraient alors suggérées par l'énoncé,

– si A est une matrice dont on peut déterminer de façon relativement simple un polynôme annulateur P, c'est-à-dire un polynôme P tel que $P(A) = 0$, on effectue la division suivant les puissances décroissantes de X^n par P et on trouve : $X^n = P(X)Q(X) + R(X)$, d'où on déduit : $A^n = P(A)Q(A) + R(A)$, et donc, comme $P(A) = 0$: $A^n = R(A)$ (cf. **2**),

– si A est diagonalisable, alors : $\exists P \in GL_p(\mathbb{K})$, $A^n = PD^nP^{-1}$, d'où : $A^n = PD^nP^{-1}$ (cf. **3**), cette méthode n'étant à employer qu'après s'être assuré qu'aucune des deux précédentes ne peut être utilisée.

4) **a)** ▪ Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists (\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2, A^n = \alpha_n I + \beta_n J$.

• Au rang $n = 0$, on a clairement, d'après la définition de A : $A^0 = I$. En posant $\alpha_0 = 1$ et $\beta_0 = 0$, la propriété est donc bien vérifiée au rang $n = 0$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $\exists (\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2, A^n = \alpha_n I + \beta_n J$. On a alors :

$A^{n+1} = (\alpha_n I + \beta_n J)A$ soit, comme $A = I - J$:

$= (\alpha_n I + \beta_n J)(I - J)$ i.e. :

$= \alpha_n I + (\beta_n - \alpha_n)J - \beta_n J^2$ soit encore, comme $J^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2I + J$:

$= \alpha_n I + (\beta_n - \alpha_n)J - \beta_n(2I + J)$ i.e. :

$= (\alpha_n - 2\beta_n)I - \alpha_n J$ et donc, en posant $\alpha_{n+1} = \alpha_n - 2\beta_n$ et $\beta_{n+1} = -\alpha_n$:

$= \alpha_{n+1} I + \beta_{n+1} J$ soit enfin :

$\exists (\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}) \in \mathbb{R}^2, A^{n+1} = \alpha_{n+1} I + \beta_{n+1} J$.

• Ainsi, en posant $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} \alpha_{n+1} = \alpha_n - 2\beta_n \\ \beta_{n+1} = -\alpha_n \end{cases}$, on peut alors écrire :

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists (\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2, A^n = \alpha_n I + \beta_n J$.

On peut désormais conclure :

$\boxed{\text{Il existe bien deux suites } (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ telles que } \forall n \in \mathbb{N}, A^n = \alpha_n I + \beta_n J}$

b) ▪ Comme $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} \alpha_{n+1} = \alpha_n - 2\beta_n \\ \beta_{n+1} = -\alpha_n \end{cases}$, on peut écrire : $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_{n+2} = \alpha_{n+1} - 2\beta_{n+1}$, et donc, en substituant $-\alpha_n$ à β_{n+1} : $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_{n+2} = \alpha_{n+1} + 2\alpha_n$, d'où la conclusion :

$\boxed{\text{La suite } (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ vérifie la relation linéaire de récurrence d'ordre 2 : } \forall n \in \mathbb{N}, \alpha_{n+2} - \alpha_{n+1} - 2\alpha_n = 0}$

▪ L'équation caractéristique de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $x^2 - x - 2 = 0$, admet pour racines -1 et 2. D'après le cours, on peut alors écrire que : $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = \lambda \cdot (-1)^n + \mu \cdot 2^n$.

Or, comme $A^0 = I$ et $A^1 = A = I - J$, on a : $\alpha_0 = 1$ et $\alpha_1 = 1$. λ et μ sont donc solutions du système :

$\begin{cases} \lambda \cdot (-1)^0 + \mu \cdot 2^0 = 1 \\ \lambda \cdot (-1)^1 + \mu \cdot 2^1 = 1 \end{cases}$ c'est-à-dire :

$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ -\lambda + 2\mu = 1 \end{cases}$ et donc ($L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2$, $L_2 \leftarrow L_1 + L_2$) :

$\begin{cases} 3\lambda = 1 \\ 3\mu = 2 \end{cases}$ i.e. :

$\begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{3} \\ \mu = \dfrac{2}{3} \end{cases}$.

On en déduit alors que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = \dfrac{(-1)^n}{3} + \dfrac{2^{n+1}}{3}$. Comme on a en outre $\forall n \in \mathbb{N}$, $\beta_{n+1} = -\alpha_n$, on peut maintenant écrire :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\beta_n = -\alpha_{n-1}$ soit, d'après ce qui précède :

$= \dfrac{(-1)^n}{3} - \dfrac{2^n}{3}$ et donc, le cas n = 0 rejoignant le cas général ($\beta_0 = 0 = \dfrac{(-1)^0}{3} - \dfrac{2^0}{3}$) :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\beta_n = \dfrac{(-1)^n}{3} - \dfrac{2^n}{3}$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = \alpha_n I + \beta_n J$, on peut désormais conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^{n+1} + (-1)^n & (-1)^n - 2^n & (-1)^n - 2^n \\ (-1)^n - 2^n & 2^{n+1} + (-1)^n & (-1)^n - 2^n \\ (-1)^n - 2^n & (-1)^n - 2^n & 2^{n+1} + (-1)^n \end{pmatrix}}$$

☞ Il est assez fréquent de déterminer la puissance $n^{\text{ème}}$ d'une matrice en déterminant comme précédemment les suites $(a_{i,j})$, où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{i,j}(n)$ est le coefficient (i, j) de A^n.

S❶ E❷

● 6. Quelques matrices particulières

Dans tout l'exercice, on désigne par n un entier naturel non nul.

1) Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$

a) Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, J^k.

b) Déterminer les valeurs propres de J. J est-elle diagonalisable ?

2) Soit $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $L = (1)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$.

a) Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, L^k.

b) En déduire les valeurs propres possibles de L.

c) Montrer que L est diagonalisable.

3) Soient x et y deux réels et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ où :

$$\begin{cases} \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i \neq j,\ a_{i,j} = x \\ \forall i \in [\![1, n]\!],\ a_{i,i} = y \end{cases}$$

a) Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, A^k en fonction de I et de L (cf. **2**).

b) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A. A est-elle diagonalisable ?

4) (S●) Soient n un entier supérieur ou égal à 3, a, b et c trois réels et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} b & c & & & 0 \\ a & b & c & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a & b & c \\ 0 & & & a & b \end{pmatrix}$.

a) Montrer que λ est valeur propre de A et que $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $(X \neq 0)$ est un vecteur propre associé à λ si et seulement si la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = u_{n+1} = 0 \\ \forall k \in [1, n],\ u_k = x_k \\ \forall k \in \mathbb{N},\ cu_{n+k+2} = (\lambda - b)u_{n+k+1} - au_{n+k} \end{cases}$ vérifie la relation :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ cu_{k+1} + (b - \lambda)u_k + au_{k-1} = 0.$$

b) On suppose dans cette question que $ac = 0$. A quelle condition A est-elle diagonalisable ?

c) On suppose maintenant que $ac > 0$. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A (on pourra considérer une valeur propre λ de A telle que $(b - \lambda)^2 - 4ac < 0$ et montrer qu'alors $\exists \theta \in]0, \pi[,\ \lambda = b + 2\sqrt{ac}\cos\theta$). En déduire que A est diagonalisable.

d) On suppose enfin que $ac < 0$. A est-elle diagonalisable ?

1) a) Soient $(e_i)_{1\le i\le n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont J est la matrice représentative dans $(e_i)_{1\le i\le n}$. D'après l'expression de J, on peut écrire : $\begin{cases} g(e_1) = 0 \\ \forall i \in [2, n],\ g(e_i) = e_{i-1} \end{cases}$, soit, en itérant k fois $(k \in \mathbb{N}^*)$ cette relation :

– $\forall k \in [1, n-1],\ \forall i \in [1, n],\ k < i,\ g^k(e_i) = e_{i-k}$,

– $\forall k \in [1, n-1],\ \forall i \in [1, n],\ k \ge i,\ g^k(e_i) = g^{k-i}\left(g(g^{i-1}(e_i))\right)$ soit, comme $\forall i \in [1, n],\ g^{i-1}(e_i) = e_1$ et $g(e_1) = 0$:

$= g^{k-i}(0)$ i.e. :

$= 0$ et :

– $\forall k \in [n, +\infty[,\ \forall i \in [1, n],\ g^k(e_i) = g^{k-i}\left(g^i(e_i)\right)$ et donc, comme $\forall i \in [1, n],\ g^i(e_i) = 0$:

$= 0.$

On en déduit alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la matrice J^k représentative de g^k dans la base $(e_i)_{1\le i\le n}$:

$$\boxed{\forall k \in [1, n-1],\ J^k = \left.\begin{pmatrix} 0 & & 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & & 0 & 1 & \\ & & \ddots & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & & 0\ \ 1 \\ 0 & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\0\\0\end{matrix}}\right\} n-k \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}}\right\} k \end{matrix}\right. \quad \text{et } \forall k \in [n, +\infty[,\ J^k = 0}$$

b) Comme J est une matrice triangulaire dont tous les coefficients diagonaux sont nuls, on peut écrire (cf. exercice 4.6) que 0 est l'unique valeur propre de J. On en déduit alors (cf. exercice 4.2) que J est diagonalisable si et seulement si J est la matrice nulle. Comme $J \neq 0$, J n'est donc pas diagonalisable. Ainsi,

$$\boxed{\text{0 est l'unique valeur propre de J et J n'est pas diagonalisable}}$$

☞ La matrice J est appelée matrice de Jordan.

☞ Noter que 0 est l'unique valeur propre de toute matrice nilpotente, c'est-à-dire de toute matrice J telle que $\exists p \in \mathbb{N},\ J^p = 0$.

2) **a)** On a clairement : $L^2 = nL$. Montrons alors par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, L^k = n^{k-1} L$.

• Au rang $k = 1$, on a bien : $L^1 = L = n^{1-1} L$. La propriété est donc bien vérifiée au rang $k = 1$.

• Soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons que $L^k = n^{k-1} L$. On a alors :

$L^{k+1} = LL^k$ soit, d'après l'hypothèse de récurrence :

$= L(n^{k-1} L)$ soit encore :

$= n^{k-1} L^2$ et donc, comme $L^2 = nL$:

$= n^k L$.

• Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, L^k = n^{k-1} L}$$

b) Comme $L^2 = nL$, on peut écrire : $L^2 - nL = 0$, i.e. : $L(L - nI) = 0$. Le polynôme $P = X(X - n)$ est donc un polynôme annulateur de L. D'après le cours (**S❸**) ou en procédant comme à l'exercice 4.5 (**S❶**, **E❶** et **E❸**), on peut alors conclure :

$$\boxed{\text{0 et n sont les deux seules valeurs propres possibles de L}}$$

c) 0 est valeur propre de L et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $(X \neq 0)$ est un vecteur propre associé à 0 si et seulement si $LX = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$. 0 est donc valeur propre de L de sous-espace propre associé : $\mathcal{Vect}\big((1, 0, \ldots, 0, 0, -1), (0, 1, 0, \ldots, 0, 0, -1), (0, 0, 1, 0, \ldots, 0, -1), \ldots, (0, 0, \ldots, 0, 1, -1)\big)$, espace de dimension $n - 1$.

De même, n est valeur propre de L et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ $(Y \neq 0)$ est un vecteur propre associé à n si et seulement si $LY = nY$, c'est-à-dire si et seulement si $\forall j \in [1, n], \sum_{i=1}^{n} y_i = n y_j$, soit : $y_1 = y_2 = \ldots = y_n$. n est donc valeur propre de L de sous-espace propre associé : $\mathcal{Vect}\big((1, 1, \ldots, 1)\big)$, espace de dimension 1.

Comme $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et comme la somme des dimensions des sous-espaces propres associés aux valeurs propres de L est égale à n, on peut désormais conclure :

$$\boxed{\text{L est diagonalisable}}$$

3) **a)** D'après la définition de A, on peut écrire : $A = (y - x)I + xL$. Comme $IL = LI = L$, la formule du binôme de Newton nous permet alors d'écrire :

$\forall k \in \mathbb{N}^*, A^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i x^i (y - x)^{k-i} L^i I^{k-i}$ soit :

$= \sum_{i=0}^{k} C_k^i x^i (y - x)^{k-i} L^i$ soit encore, comme $L^0 = I$ et $\forall i \in \mathbb{N}^*, L^i = n^{i-1} L$:

$= (y - x)^k I + \left(\sum_{i=1}^{k} C_k^i x^i (y - x)^{k-i} n^{i-1}\right) L$ i.e. :

$= (y - x)^k I + \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{k} C_k^i (nx)^i (y - x)^{k-i} - \frac{(y - x)^k}{n}\right) L$ et donc, d'après la formule du binôme de Newton :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, A^k = (y - x)^k I + \frac{\big((n - 1)x + y\big)^k - (y - x)^k}{n} L}$$

b) ▪ On a : $A = (y-x)I + xL$. Comme, d'après le **2c**, 0 et n sont les deux valeurs propres de L de sous-espaces propres associés respectifs $\mathcal{V}ect\big((1, 0, 0, \dots, 0, -1), (0, 1, 0, \dots, 0, -1), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1, -1)\big)$ et $\mathcal{V}ect\big((1, 1, \dots, 1)\big)$, en notant, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, X_i le vecteur-colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls à l'exception du $i^{\text{ème}}$ égal à 1 et du $n^{\text{ème}}$ égal à -1, et X_n le vecteur-colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1, on peut écrire :

– $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $AX_i = \big((y-x)I + xL\big)X_i$ soit :

$= (y-x)X_i + xLX_i$ et comme pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, X_i est vecteur propre de L de valeur propre associée 0 :

$= (y-x)X_i$,

– $AX_n = \big((y-x)I + xL\big)X_n$ soit encore :

$= (y-x)X_n + xLX_n$ et comme X_n est vecteur propre de L de valeur propre associée n :

$= \big((n-1)x + y\big)X_n$.

Or, d'après le **2c**, L étant diagonalisable, la famille $(X_i)_{1 \le i \le n}$ forme une base de vecteurs propres de L. Comme d'après ce qui précède, les vecteurs $(X_i)_{1 \le i \le n}$ sont également propres pour A, on peut désormais conclure :

$(y-x)$ et $\big((n-1)x + y\big)$ sont les valeurs propres de A de sous-espaces propres associés respectifs $\mathcal{V}ect\big((1, 0, \dots, 0, -1), (0, 1, 0, \dots, 0, -1), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1, -1)\big)$ et $\mathcal{V}ect\big((1, 1, \dots, 1)\big)$.

☞ Se souvenir que si A est une matrice telle que $A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i$ (resp. f un endomorphisme tel que $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$) et si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, λ_i est valeur propre de A_i (resp. f_i) et X (resp. u) un vecteur propre associé à λ_i, alors : $AX = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i\right)X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (A_i X) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i X = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i\right)X$ et donc : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i$ est valeur propre de A et X (resp. u) est un vecteur propre associé à $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i$.

▪ Comme $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et comme la somme des dimensions des sous-espaces propres associés aux valeurs propres de A est égale à n, on en déduit alors :

A est diagonalisable

4) a) λ est valeur propre de A et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $(X \neq 0)$ est un vecteur propre associé à λ si et seulement si $(A - \lambda I)X = 0$. Or, on a :

$$(A - \lambda I)X = 0 \iff \begin{pmatrix} b-\lambda & c & & & 0 \\ a & b-\lambda & c & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & a & b-\lambda & c \\ & & & a & b-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \quad \text{soit :}$$

$$\iff \begin{cases} (b-\lambda)x_1 + cx_2 = 0 \\ \forall i \in [\![2, n-1]\!],\ ax_{i-1} + (b-\lambda)x_i + cx_{i+1} = 0 \\ ax_{n-1} + (b-\lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

soit encore, d'après la définition de la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$:

$$\iff \begin{cases} au_0 + (b-\lambda)u_1 + cu_2 = 0 \\ \forall k \in [\![2, n-1]\!],\ au_{k-1} + (b-\lambda)u_k + cu_{k+1} = 0 \\ au_{n-1} + (b-\lambda)u_n + cu_{n+1} = 0 \\ \forall k \in [\![n+1, +\infty[\![,\ cu_{k+1} = (\lambda - b)u_k - au_{k-1} \end{cases}$$

et donc, en regroupant les trois premières égalités :

$$(A - \lambda I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in [\![1, n]\!], cu_{k+1} + (b - \lambda)u_k + au_{k-1} = 0 \\ \forall k \in [n+1, +\infty[, cu_{k+1} + (b - \lambda)u_k + au_{k-1} = 0 \end{cases} \quad \text{soit enfin :}$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}^*, cu_{k+1} + (b - \lambda)u_k + au_{k-1} = 0.$$

On peut désormais conclure :

λ est valeur propre de A et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $(X \neq 0)$ est un vecteur propre associé à λ si et seulement si la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = u_{n+1} = 0 \\ \forall k \in [\![1, n]\!], u_k = x_k \\ \forall k \in \mathbb{N}, cu_{n+k+2} = (\lambda - b)u_{n+k+1} - au_{n+k} \end{cases}$ vérifie la relation : $\forall k \in \mathbb{N}^*, cu_{k+1} + (b - \lambda)u_k + au_{k-1} = 0.$

☞ Noter qu'il arrive parfois d'avoir à rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en résolvant un système de n équations à n inconnues $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ (étant entendu qu'au moins une équation du système précédent doit alors être linéairement dépendante des autres).

b) Si ac = 0, on peut alors écrire que a = 0 ou c = 0. A est donc une matrice triangulaire dont l'unique coefficient diagonal est b. On peut alors écrire (cf. exercice 4.6) que b est l'unique valeur propre de A. On en déduit alors (cf. exercice 4.2) que A est diagonalisable si et seulement si A = bI, c'est-à-dire si et seulement si a = c = 0, d'où la conclusion :

$\boxed{\text{Lorsque } ac = 0, \text{ A est diagonalisable si et seulement si } a = c = 0}$

c) Notons tout d'abord que comme ac > 0, on a clairement : $a \neq 0$, $c \neq 0$, $\frac{a}{c} > 0$ et $\frac{c}{a} > 0$.

› Soit alors λ une valeur propre de A telle que $(b - \lambda)^2 - 4ac < 0$, c'est-à-dire telle que $(b - \lambda)^2 < 4ac$, i.e. : $-2\sqrt{ac} < b - \lambda < 2\sqrt{ac}$, soit : $-2\sqrt{ac} < \lambda - b < 2\sqrt{ac}$, et donc, en divisant cette relation par $2\sqrt{ac} > 0$, telle que : $-1 < \frac{\lambda - b}{2\sqrt{ac}} < 1$.

Comme la fonction cos réalise une bijection de $]0, \pi[$ sur $]-1, 1[$, on peut alors écrire : $\forall x \in]-1, 1[, \exists! \theta \in]0, \pi[, x = \cos\theta$.

Comme $-1 < \frac{\lambda - b}{2\sqrt{ac}} < 1$, on en déduit alors : $\exists! \theta \in]0, \pi[, \frac{\lambda - b}{2\sqrt{ac}} = \cos\theta$, et donc : $\exists! \theta \in]0, \pi[, \lambda = b + 2\sqrt{ac}\cos\theta$.

› Or, d'après le **4a**, pour tout $\theta \in]0, \pi[$, $\lambda = b + 2\sqrt{ac}\cos\theta$ est valeur propre de A et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $(X \neq 0)$ est un vecteur propre associé à λ si et seulement si la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = u_{n+1} = 0 \\ \forall k \in [\![1, n]\!], u_k = x_k \\ \forall k \in \mathbb{N}, cu_{n+k+2} = (\lambda - b)u_{n+k+1} - au_{n+k} \end{cases}$$

vérifie la relation : $\forall k \in \mathbb{N}^*, cu_{k+1} + (b - \lambda)u_k + au_{k-1} = 0$, laquelle s'écrit encore : $\forall k \in \mathbb{N}^*, cu_{k+1} - 2\sqrt{ac}\cos\theta \cdot u_k + au_{k-1} = 0.$

Soient alors $\theta\in]0, \pi[$ et $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $cu_{k+1} - 2\sqrt{ac}\cos\theta\cdot u_k + au_{k-1} = 0$ et $u_0 = u_{n+1} = 0$. L'équation caractéristique de cette suite linéaire récurrente d'ordre 2 : $cx^2 - 2\sqrt{ac}\cos\theta\cdot x + a = 0$ admettant pour discriminant $\Delta = 4ac(\cos^2\theta - 1) = \left(2i\sqrt{ac}\sin\theta\right)^2$ et pour racines $\sqrt{\frac{a}{c}}\,e^{i\theta}$ et $\sqrt{\frac{a}{c}}\,e^{-i\theta}$, d'après le cours, on peut écrire que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation : $\exists(\alpha, \beta)\in\mathbb{R}^2$, $\forall k\in\mathbb{N}$, $u_k = \left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{k}{2}}(\alpha\cos k\theta + \beta\sin k\theta)$.

Or, on sait que $u_0 = u_{n+1} = 0$. α et β sont donc solutions du système :

$$\begin{cases}\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{0}{2}}(\alpha\cos 0\theta + \beta\sin 0\theta) = 0\\ \left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{n+1}{2}}\left(\alpha\cos\left[(n+1)\theta\right] + \beta\sin\left[(n+1)\theta\right]\right) = 0\end{cases}$$

soit, comme $a \neq 0$:

$$\begin{cases}\alpha\cos 0\theta + \beta\sin 0\theta = 0\\ \alpha\cos\left[(n+1)\theta\right] + \beta\sin\left[(n+1)\theta\right] = 0\end{cases}$$

et donc, comme $\cos 0\theta = 1$ et $\sin 0\theta = 0$:

$$\begin{cases}\alpha = 0\\ \beta\sin\left((n+1)\theta\right) = 0\end{cases}$$

i.e. :

Or, on a :

$$\sin\left((n+1)\theta\right) = 0 \iff (n+1)\theta \equiv 0\ [\pi]$$

soit :

$$\iff \theta \equiv 0\left[\frac{\pi}{n+1}\right].$$

On peut alors distinguer les cas :

– si $\theta\notin\left\{\frac{p\pi}{n+1}, p\in[\![1, n]\!]\right\}$, l'équation $\sin\left((n+1)\theta\right) = 0$ n'est pas vérifiée et on a alors : $\alpha = \beta = 0$, d'où : $\forall k\in\mathbb{N}$, $u_k = 0$,

– si $\theta\in\left\{\frac{p\pi}{n+1}, p\in[\![1, n]\!]\right\}$, l'équation $\sin\left((n+1)\theta\right) = 0$ est vérifiée et on peut alors écrire : $\exists\beta\in\mathbb{R}$, $\forall k\in\mathbb{N}$, $u_k = \beta\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{k}{2}}\sin k\theta$.

↳ D'après ce qui précède, on en déduit alors, en distinguant à nouveau les cas :

– si $\theta\notin\left\{\frac{p\pi}{n+1}, p\in[\![1, n]\!]\right\}$, la seule suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation : $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $cu_{k+1} - 2\sqrt{ac}\cos\theta\cdot u_k + au_{k-1} = 0$ et $u_0 = u_{n+1} = 0$ est la suite nulle ; $b + 2\sqrt{ac}\cos\theta$ ne peut donc être valeur propre de A (en effet, si elle l'était, d'après le **4a**, son seul vecteur propre associé possible serait le vecteur nul, ce qui est impossible),

– si $\theta\in\left\{\frac{p\pi}{n+1}, p\in[\![1, n]\!]\right\}$, les suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation : $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $cu_{k+1} - 2\sqrt{ac}\cos\theta\cdot u_k + au_{k-1} = 0$ et $u_0 = u_{n+1} = 0$ sont les suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que : $\exists\beta\in\mathbb{R}$, $\forall k\in\mathbb{N}$, $u_k = \beta\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{k}{2}}\sin k\theta$ et en particulier (avec $\beta = 1$) la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall k\in\mathbb{N}$, $v_k = \left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{k}{2}}\sin k\theta$; d'après le **4a**, pour tout $p\in[\![1, n]\!]$, $\lambda_p = b + 2\sqrt{ac}\cos\left(\frac{p\pi}{n+1}\right)$ est donc valeur propre de A et $X = \begin{pmatrix}\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{p\pi}{n+1}\right)\\ \left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{2}{2}}\sin\left(\frac{2p\pi}{n+1}\right)\\ \vdots\\ \left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{n}{2}}\sin\left(\frac{np\pi}{n+1}\right)\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à λ_p.

Comme $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A admet au plus n valeurs propres distinctes. Or, comme la fonction cos réalise une bijection de $]0, \pi[$ sur $]-1, 1[$ et comme $\forall p \in [\![1, n]\!]$, $\left(\frac{p\pi}{n+1}\right) \in]0, \pi[$, on vient donc de déterminer n valeurs propres distinctes, soit toutes les valeurs propres de A.

Enfin, comme $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et comme A admet exactement n valeurs propres distinctes, les sous-espaces propres associés à chacune des valeurs propres de A sont de dimension 1. D'après les résultats précédents, on peut désormais conclure :

$$\boxed{\text{Pour tout } p \in [\![1, n]\!],\ b + 2\sqrt{ac}\cos\left(\frac{p\pi}{n+1}\right) \text{ est valeur propre de A de sous-espace propre associé } \mathcal{V}ect\left(\left(\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{k}{2}} \sin\left(\frac{kp\pi}{n+1}\right)\right)_{1 \le k \le n}\right)}$$

■ Comme $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et comme A admet exactement n valeurs propres distinctes, on en déduit alors :

$$\boxed{\text{Lorsque } ac > 0, \text{ A est diagonalisable}}$$

d) ❑ D'après le **4a**, on peut écrire que λ ($\lambda \in \mathbb{R}$) est valeur propre de A et que $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ($X \neq 0$) est un vecteur propre associé à λ si et seulement si la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = u_{n+1} = 0 \\ \forall k \in [\![1, n]\!], u_k = x_k \\ \forall k \in \mathbb{N}, cu_{n+k+2} = (\lambda - b)u_{n+k+1} - au_{n+k} \end{cases}$ vérifie la relation : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $cu_{k+1} + (b - \lambda)u_k + au_{k-1} = 0$.

Soit alors $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $cu_{k+1} + (b - \lambda)u_k + au_{k-1} = 0$ et $u_0 = u_{n+1} = 0$. L'équation caractéristique de cette suite linéaire récurrente d'ordre 2 : $cx^2 + (b - \lambda)x + a = 0$, admettant pour discriminant $\Delta = (b - \lambda)^2 - 4ac$ (on a $\Delta > 0$ car $ac < 0$) et pour racines $\frac{\lambda - b - \sqrt{\Delta}}{2c}$ et $\frac{\lambda - b + \sqrt{\Delta}}{2c}$, d'après le cours, on peut écrire que la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation : $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k = \alpha\left(\frac{\lambda - b + \sqrt{\Delta}}{2c}\right)^k + \beta\left(\frac{\lambda - b - \sqrt{\Delta}}{2c}\right)^k$.

Or, on sait que $u_0 = u_{n+1} = 0$. α et β sont donc solutions du système :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha\left(\frac{\lambda - b + \sqrt{\Delta}}{2c}\right)^{n+1} + \beta\left(\frac{\lambda - b - \sqrt{\Delta}}{2c}\right)^{n+1} = 0 \end{cases}$$ soit ($L_2 \leftarrow (2c)^{n+1} L_2$ avec $c \neq 0$ car $ac < 0$) :

$$\begin{cases} \beta = -\alpha \\ \alpha\left[(\lambda - b + \sqrt{\Delta})^{n+1} - (\lambda - b - \sqrt{\Delta})^{n+1}\right] = 0 \end{cases} \quad ①.$$

On peut alors distinguer les cas :

• Si $\lambda \neq b$, comme $\sqrt{\Delta} \neq 0$, on a : $(\lambda - b + \sqrt{\Delta})^{n+1} - (\lambda - b - \sqrt{\Delta})^{n+1} \neq 0$. ① devient alors : $\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$, i.e. : $\alpha = \beta = 0$, d'où : $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k = 0$,

• Si $\lambda = b$, on a : $(\lambda - b + \sqrt{\Delta})^{n+1} - (\lambda - b - \sqrt{\Delta})^{n+1} = (1 - (-1)^{n+1})\sqrt{\Delta}$, et donc :

– si n est pair : $(\lambda - b + \sqrt{\Delta})^{n+1} - (\lambda - b - \sqrt{\Delta})^{n+1} = 2\sqrt{\Delta}$, et comme $\sqrt{\Delta} \neq 0$, ① devient alors : $\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$, i.e. : $\alpha = \beta = 0$, et on a donc à nouveau : $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k = 0$,

– si n est impair : $(\lambda - b + \sqrt{\Delta})^{n+1} - (\lambda - b - \sqrt{\Delta})^{n+1} = 0$ et ① devient alors : $\beta = -\alpha$, et donc :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{N},\ u_k = \alpha\left[\left(\frac{\lambda - b + \sqrt{\Delta}}{2c}\right)^k - \left(\frac{\lambda - b - \sqrt{\Delta}}{2c}\right)^k\right] \quad \text{et comme } \lambda = b \text{ avec } \Delta = -4ac :$$

$$= \alpha\left(1 - (-1)^k\right)\left(\frac{\sqrt{-ac}}{c}\right)^k.$$

□ D'après ce qui précède, on en déduit alors, en distinguant à nouveau les cas :

• Si $\lambda \neq b$, la seule suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ cu_{k+1} + (b - \lambda)u_k + au_{k-1} = 0$ et $u_0 = u_{n+1} = 0$ est la suite nulle ; λ ne peut donc être valeur propre de A (en effet, si elle l'était, d'après le **4a**, son seul vecteur propre associé possible serait le vecteur nul, ce qui est impossible),

• Si $\lambda = b$ et si n est pair, la seule suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ cu_{k+1} + (b - \lambda)u_k + au_{k-1} = 0$ et $u_0 = u_{n+1} = 0$ est à nouveau la suite nulle et λ ne peut donc être valeur propre de A,

• Si $\lambda = b$ et si n est impair, les suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ cu_{k+1} + (b - \lambda)u_k + au_{k-1} = 0$ et $u_0 = u_{n+1} = 0$ sont les suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que : $\exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{N},\ u_k = \alpha\left(1 - (-1)^k\right)\left(\frac{\sqrt{-ac}}{c}\right)^k$, et en particulier (avec $\alpha = 1$) la suite $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall k \in \mathbb{N},\ w_k = \left(1 - (-1)^k\right)\left(\frac{\sqrt{-ac}}{c}\right)^k$; d'après le **4a**, b est donc valeur propre de A de sous-espace propre associé $\mathcal{V}ect\left(\left(\left(1 - (-1)^k\right)\left(\frac{\sqrt{-ac}}{c}\right)^k\right)_{1\leq k\leq n}\right)$.

On peut désormais écrire :

– si n est pair, A n'admet aucune valeur propre réelle et n'est donc pas diagonalisable,

– si n est impair, b est l'unique valeur propre réelle de A et son sous-espace propre associé est de dimension 1 ; comme $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geq 3$, A n'est pas diagonalisable.

On peut enfin conclure :

$$\boxed{\text{Lorsque } ac < 0,\ A \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

☞ Noter que la matrice A, dont l'apparition est relativement courante aux concours, est une matrice dite tridiagonale (seuls ses coefficients du type $a_{i,i-1}$, $a_{i,i}$ et $a_{i,i+1}$ sont non nuls).

☞ Se souvenir des puissances $n^{\text{ème}}$ et des méthodes de diagonalisation des différentes matrices traitées dans cet exercice. Elles apparaissent très souvent dans les sujets de concours.

S❷

● 7. Matrices de permutation circulaire (ou circulantes)

Dans tout le problème, on désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et par $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

1) a) Soient g un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ et $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sa matrice représentative dans la base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & \text{\Large 0} & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & \text{\Large 0} & & 0 & 1 & \\ & & & & 0 & 1 \\ 1 & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de J.

b) Déterminer, pour tout $k \in [1, n-1]$ et pour tout $i \in [1, n]$, $g^k(e_i)$. En déduire, pour tout $k \in [1, n-1]$, J^k.

2) Soient $(a_i)_{1\leq i\leq n-1}$ n - 1 nombres complexes et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & & & & a_{n-2} \\ a_{n-2} & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & a_2 \\ a_2 & & & & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

a) Exprimer A en fonction des $(J^k)_{0\leq k\leq n-1}$.

b) En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de A et montrer que A est diagonalisable.

1) a) λ est valeur propre de J et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $(X \neq 0)$ est un vecteur propre associé à λ si et seulement si $(J - \lambda I)X = 0$. Or, on a :

$$(J-\lambda I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & & & & \\ & -\lambda & 1 & & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & & -\lambda & 1 & \\ & & & & -\lambda & 1 \\ 1 & & & & & -\lambda \end{pmatrix} X = 0$$ soit :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall i \in [1, n-1], -\lambda x_i + x_{i+1} = 0 \\ x_1 - \lambda x_n = 0 \end{cases}$$ i.e. :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall i \in [1, n-1], x_{i+1} = \lambda x_i \\ x_1 = \lambda x_n \end{cases}$$ d'où, en itérant la première relation pour i = n - 1 :

$$\Rightarrow \begin{cases} x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ x_1 = \lambda x_n \end{cases}$$ et donc :

$$\Rightarrow x_1 = \lambda^n x_1.$$

Soit maintenant λ une valeur propre de J et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $(X \neq 0)$ un vecteur propre associé à λ. Comme $X \neq 0$, on peut écrire : $\exists i \in [1, n], x_i \neq 0$.

Supposons alors $x_1 = 0$. D'après ce qui précède, on peut écrire que : $\forall i \in [1, n-1], x_{i+1} = \lambda x_i$, soit : $\forall i \in [1, n], x_i = \lambda^{i-1} x_1$, et donc, comme $x_1 = 0$: $\forall i \in [1, n], x_i = 0$, ce qui est impossible. On en déduit alors que $x_1 \neq 0$, et donc, en effectuant une division par $x_1 \neq 0$:

$x_1 = \lambda^n x_1 \Rightarrow \lambda^n = 1$ soit, d'après le cours :

$$\Rightarrow \lambda \in \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in [0, n-1] \right\}$$ et donc, d'après ce qui précède :

$$\exists X \neq 0, (J - \lambda I)X = 0 \Rightarrow \lambda \in \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in [0, n-1] \right\}.$$

Les seules valeurs propres possibles de J sont donc les éléments de l'ensemble $\left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in [0, n-1] \right\}$. En posant, pour tout $k \in [0, n-1]$, $\lambda_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, on peut alors écrire que pour tout $k \in [0, n-1]$, λ_k est valeur propre de J et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $(X \neq 0)$ est un vecteur propre associé à λ si et seulement si $\begin{cases} \forall i \in [1, n-1],\ x_{i+1} = \lambda_k x_i \\ x_1 = \lambda_k x_n \end{cases}$,

soit : $\begin{cases} \forall i \in [1, n],\ x_i = \lambda_k^{i-1} x_1 \\ x_1 = \lambda_k x_n \end{cases}$, c'est-à-dire, comme $\lambda_k^n = 1$, si et seulement si : $\forall i \in [1, n],\ x_i = \lambda_k^{i-1} x_1$.

On peut désormais conclure :

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in [0, n-1],\ \lambda_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \text{ est valeur propre de J de sous-espace propre associé } \mathcal{V}ect\left((\lambda_k^{i-1})_{1 \le i \le n}\right)}$$

b) ▪ D'après l'expression de J, on peut écrire : $\begin{cases} g(e_1) = e_n \\ \forall i \in [2, n],\ g(e_i) = e_{i-1} \end{cases}$, soit, en itérant k fois ($k \in [1, n-1]$) cette relation :

– $\forall k \in [1, n-1],\ \forall i \in [1, n],\ k < i,\ g^k(e_i) = e_{i-k}$, et :

– $\forall k \in [1, n-1],\ \forall i \in [1, n],\ k \geq i,\ g^k(e_i) = g^{k-i}\left(g\left(g^{i-1}(e_i)\right)\right)$ soit, comme $\forall i \in [1, n],\ g^{i-1}(e_i) = e_1$ et $g(e_1) = e_n$:

$= g^{k-i}(e_n)$ et donc, d'après la relation précédente :

$= e_{n-k+i}$ d'où la conclusion :

$$\boxed{\forall k \in [1, n-1],\ \forall i \in [1, n],\ \begin{cases} i \leq k,\ g^k(e_i) = e_{n-k+i} \\ i > k,\ g^k(e_i) = e_{i-k} \end{cases}}$$

▪ On en déduit alors :

$$\boxed{\forall k \in [1, n-1],\ J^k = \begin{pmatrix} 0 & & 1 & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & 0 & & 1 \\ 1 & & & 0 & \\ & \ddots & & & \ddots \\ & & 1 & & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}}\right\} n-k \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}}\right\} k \end{matrix}}$$

2) a) D'après l'expression précédente des $(J^k)_{1 \le k \le n-1}$, on a clairement : $A = a_0 I + \sum_{k=1}^{n-1} a_k J^k$, et donc, comme $I = J^0$:

$$\boxed{A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k}$$

b) ▪ D'après le **1a**, on peut écrire que pour tout $j \in [0, n-1]$, $\lambda_j = e^{i\frac{2j\pi}{n}}$ est valeur propre de J et $X_j = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_j \\ \lambda_j^2 \\ \vdots \\ \lambda_j^{n-1} \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à λ_j. On peut alors écrire (cf. exercice 4.3) que pour tout $j \in [0, n-1]$ et pour tout $k \in [0, n-1]$, λ_j^k est valeur propre de J^k et X_j est un vecteur propre associé à λ_j^k, i.e. :

$\forall j \in [0, n-1],\ \forall k \in [0, n-1],\ J^k X_j = \lambda_j^k X_j$ soit, en multipliant cette relation par a_k :

$\forall j \in [0, n-1],\ \forall k \in [0, n-1],\ a_k J^k X_j = a_k \lambda_j^k X_j$ soit encore, en sommant pour $k = 0$ à $k = n-1$:

$\forall j \in [0, n-1],\ \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k\right) X_j = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda_j^k\right) X_j$ et donc, en reconnaissant A :

$\forall j \in [0, n-1],\ AX_j = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda_j^k\right) X_j$.

On peut désormais conclure :

$$\boxed{\text{Pour tout } j\in[0, n-1],\ \sum_{k=0}^{n-1} a_k\lambda_j^k \text{ est valeur propre de A et } X_j \text{ est un vecteur propre de A de valeur propre associée } \sum_{k=0}^{n-1} a_k\lambda_j^k.}$$

NB : Attention, les valeurs propres de A ne sont pas ici nécessairement toutes distinctes.

❏ Comme $J\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et comme J admet n valeurs propres distinctes (les $(\lambda_j)_{0\le j\le n-1}$ sont les n racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité et sont donc distinctes), J est diagonalisable. On en déduit alors que ses sous-espaces propres sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, i.e. : $\mathcal{V}ect(X_1)\oplus\mathcal{V}ect(X_2)\oplus\ldots\oplus\mathcal{V}ect(X_n)=\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. La famille $(X_j)_{1\le j\le n}$ forme donc une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Comme elle est constituée de vecteurs propres de A, on peut désormais conclure :

$\boxed{\text{A est diagonalisable}}$

SO EO

★ 8. Matrices stochastiques

Soient p un entier naturel non nul et $A\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On dit que $A=(a_{i,j})_{\substack{1\le i\le p\\1\le j\le p}}$ est stochastique si :

$$\begin{cases}\forall(i,j)\in[1,p]^2,\ a_{i,j}\in[0,1]\\ \forall j\in[1,p],\ \sum_{i=1}^{p} a_{i,j}=1\end{cases}$$

On note alors E_p l'ensemble des vecteurs $(x_i)_{1\le i\le p}\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tels que : $\begin{cases}\forall i\in[1,p],\ x_i\in[0,1]\\ \sum_{i=1}^{p} x_i=1\end{cases}$ et dans tout l'exercice, on désigne par $M=(m_{i,j})_{\substack{1\le i\le p\\1\le j\le p}}$ une matrice stochastique de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

1) **a)** Montrer que le produit de M par un vecteur de E_p est un vecteur de E_p.

b) Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, M^n est stochastique.

c) Soit $A\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients positifs ou nuls et $V\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $V=(1)_{1\le i\le n}$. Montrer que A est stochastique si et seulement si ${}^tAV=V$. En déduire à nouveau que le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique.

2) **a)** Montrer que 1 est valeur propre de M.

b) Montrer que si λ est valeur propre de M, alors $|\lambda|\le 1$ (on pourra considérer un vecteur propre $X=(x_i)_{1\le i\le p}$ associé à la valeur propre λ et écrire les relations qui en découlent). Montrer également que si λ est valeur propre de ${}^tM$, alors $|\lambda|\le 1$.

c) Soit λ une valeur propre de M différente de 1 et $X=(x_i)_{1\le i\le p}$ un vecteur propre associé à λ. Déterminer une relation entre les $(x_i)_{1\le i\le p}$.

1) **a)** Soient $X=(x_i)_{1\le i\le p}$ un vecteur de E_p et $(y_i)_{1\le i\le p}$ les coefficients de $Y=MX$. On peut écrire :

$\forall i\in[1,p],\ y_i=\sum_{j=1}^{p} m_{i,j}x_j.$

Or, comme M est une matrice stochastique, on peut écrire :

$\forall(i,j)\in[1,p]^2,\ 0\le m_{i,j}\le 1$ soit, en multipliant cette relation par $x_j\ge 0$ (X appartenant à E_p) :

$\forall(i,j)\in[1,p]^2,\ 0\le m_{i,j}x_j\le x_j$ soit encore, en sommant ces relations pour $j=1$ à $j=p$:

$\forall i\in[1,p],\ 0\le\sum\limits_{j=1}^{p} m_{i,j}x_j\le\sum\limits_{j=1}^{p} x_j$ et donc, comme $\sum\limits_{j=1}^{p} x_j=1$ (car $X\in E_p$), en reconnaissant y_i pour tout $i\in[1,p]$:

$\forall i\in[1,p],\ 0\le y_i\le 1.$

De plus, comme $\forall i\in[1,p],\ y_i=\sum\limits_{j=1}^{p} m_{i,j}x_j$, on peut écrire :

$\sum\limits_{i=1}^{p} y_i=\sum\limits_{i=1}^{p}\left(\sum\limits_{j=1}^{p} m_{i,j}x_j\right)$ soit, en inversant les sommes :

$=\sum\limits_{j=1}^{p}\left(\sum\limits_{i=1}^{p} m_{i,j}x_j\right)$ i.e. :

$=\sum\limits_{j=1}^{p}\left[x_j\left(\sum\limits_{i=1}^{p} m_{i,j}\right)\right]$ et comme M est une matrice stochastique, i.e. comme $\forall j\in[1,p],\ \sum\limits_{i=1}^{p} m_{i,j}=1$:

$=\sum\limits_{j=1}^{p} x_j$ soit enfin, comme $\sum\limits_{j=1}^{p} x_j=1$ (car $X\in E_p$) :

$=1.$

Comme $\begin{cases}\forall i\in[1,p],\ y_i\in[0,1]\\ \sum\limits_{i=1}^{p} y_i=1\end{cases}$, on en déduit alors que $Y\in E_p$, et donc que :

$$\boxed{\text{Le produit de M par un vecteur de } E_p \text{ appartient à } E_p}$$

b) Soient $A=(a_{i,j})_{\substack{1\le i\le p\\1\le j\le p}}$ et $B=(b_{i,j})_{\substack{1\le i\le p\\1\le j\le p}}$ deux matrices stochastiques de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $(c_{i,j})_{\substack{1\le i\le p\\1\le j\le p}}$ les coefficients de $C=AB$. On peut alors écrire : $\forall(i,j)\in[1,p]^2,\ c_{i,j}=\sum\limits_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}$.

Or, comme A est stochastique, on a :

$\forall(i,k)\in[1,p]^2,\ 0\le a_{i,k}\le 1$ soit, en multipliant cette relation par $b_{k,j}\ge 0$ ($j\in[1,p]$, B étant stochastique) :

$\forall(i,j,k)\in[1,p]^3,\ 0\le a_{i,k}b_{k,j}\le b_{k,j}$ soit encore, en sommant ces relations pour $k=1$ à $k=p$:

$\forall(i,j)\in[1,p]^2,\ 0\le\sum\limits_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}\le\sum\limits_{k=1}^{p} b_{k,j}$ et donc, comme $\forall j\in[1,p],\ \sum\limits_{k=1}^{p} b_{k,j}=1$ (B étant stochastique) et en reconnaissant $c_{i,j}$:

$\forall(i,j)\in[1,p]^2,\ 0\le c_{i,j}\le 1.$

De plus, comme $\forall(i,j)\in[1,p]^2,\ c_{i,j}=\sum\limits_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}$, on a :

$\forall j\in[1,p],\ \sum\limits_{i=1}^{p} c_{i,j}=\sum\limits_{i=1}^{p}\left(\sum\limits_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}\right)$ soit, en inversant les sommes :

$=\sum\limits_{k=1}^{p}\left(\sum\limits_{i=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}\right)$ i.e. :

$=\sum\limits_{k=1}^{p}\left[b_{k,j}\left(\sum\limits_{i=1}^{p} a_{i,k}\right)\right]$ et comme $\forall k\in[1,p],\ \sum\limits_{i=1}^{p} a_{i,k}=1$ (A étant stochastique) :

$=\sum\limits_{k=1}^{p} b_{k,j}$ soit enfin, comme $\forall j\in[1,p],\ \sum\limits_{k=1}^{p} b_{k,j}=1$ (B étant stochastique) :

$=1.$

Comme $\begin{cases} \forall (i,j)\in[\![1,p]\!]^2,\ c_{i,j}\in[0,1] \\ \forall j\in[\![1,p]\!],\ \sum\limits_{i=1}^{p} c_{i,j}=1 \end{cases}$, on en déduit alors que C = AB est une matrice stochastique, d'où la conclusion :

$$\boxed{\text{Le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique}}$$

NB : On aurait également pu remarquer que pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, la $i^{\text{ème}}$ colonne de C est le produit de A par la $i^{\text{ème}}$ colonne de B. Or, comme B est une matrice stochastique, chacune de ses colonnes est élément de E_p. D'après le **1a**, on peut alors écrire que chacune des colonnes de C est élément de E_p, et donc que C est une matrice stochastique.

▪ Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, M^n est stochastique.

• Pour n = 0, $M^0 = I$ est clairement stochastique (tous ses coefficients sont positifs ou nuls et la somme des coefficients de chacune de ses colonnes est égale à 1). La propriété est donc bien vérifiée au rang n = 0.

• Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que M^n soit une matrice stochastique. On a : $M^{n+1} = MM^n$. M et M^n étant deux matrices stochastiques, d'après la question précédente, on en déduit alors que M^{n+1} est stochastique.

• Ainsi,

$$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\ M^n \text{ est une matrice stochastique}}$$

c) ▪ Soient $(a_{i,j})_{\substack{1\le i\le p\\1\le j\le p}}$ les coefficients de A. Comme, d'après l'énoncé, on a : $\forall (i,j)\in[\![1,p]\!]^2$, $a_{i,j}\ge 0$, A est stochastique si et seulement si $\forall j\in[\![1,p]\!]$, $\sum\limits_{i=1}^{p} a_{i,j}=1$ (et on a alors nécessairement $\forall (i,j)\in[\![1,p]\!]^2$, $a_{i,j}\le 1$), ce qui s'écrit encore : $\forall i\in[\![1,p]\!]$, $\sum\limits_{j=1}^{p} a_{j,i}\times 1 = 1$, soit, matriciellement : ${}^tAV = V$.

On peut désormais conclure :

$$\boxed{\text{A est stochastique si et seulement si } {}^tAV = V}$$

▪ Soient $A=(a_{i,j})_{\substack{1\le i\le p\\1\le j\le p}}$ et $B=(b_{i,j})_{\substack{1\le i\le p\\1\le j\le p}}$ deux matrices stochastiques de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On a alors :

${}^t(AB)V = ({}^tB\,{}^tA)V$ i.e. :

$= {}^tB({}^tAV)$ soit, comme A est stochastique, i.e. comme ${}^tAV = V$:

${}^t(AB)V = {}^tBV$ soit, comme B est stochastique, i.e. comme ${}^tBV = V$:

$= V$.

D'après la question précédente, on peut désormais conclure :

$$\boxed{\text{Le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique}}$$

☞ Se souvenir que le produit de deux matrices stochastiques est stochastique et que toute puissance positive d'une matrice stochastique est stochastique (méthodes de démonstration à connaître).

2) a) 1 est valeur propre de M si et seulement si $\exists X\ne 0$, $(M-I)X=0$. Notons alors $(n_{i,j})_{\substack{1\le i\le p\\1\le j\le p}}$ les coefficients de $N = M - I$.

Comme M est une matrice stochastique, c'est-à-dire comme $\forall j\in[\![1,p]\!]$, $\sum\limits_{i=1}^{p} m_{i,j}=1$ et comme $N = M - I$, i.e. comme $\forall j\in[\![1,p]\!]$, $\begin{cases} \forall i\in[\![1,p]\!],\ i\ne j,\ n_{i,j}=m_{i,j} \\ n_{j,j}=m_{j,j}-1 \end{cases}$, on peut écrire : $\forall j\in[\![1,p]\!]$, $\sum\limits_{i=1}^{p} n_{i,j} = \sum\limits_{i=1}^{p} m_{i,j} - 1 = 0$.

i) Première méthode

Soient $(L_i)_{1\le i\le p}$ les vecteurs lignes de M - I. On peut écrire : $\forall i\in[1,p]$, $L_i=(n_{i,j})_{1\le j\le p}$, d'où : $\sum_{i=1}^{p}L_i=\left(\sum_{i=1}^{p}n_{i,j}\right)_{1\le j\le p}$, et donc, comme $\forall j\in[1,p]$, $\sum_{i=1}^{p}n_{i,j}=0$, on a alors : $\sum_{i=1}^{p}L_i=0$.

La famille $(L_i)_{1\le i\le p}$ est donc liée. On en déduit alors que la matrice M - I n'est pas inversible, et donc (cf. exercice 4.1), que 1 est valeur propre de M.

ii) Deuxième méthode

Comme $M-I=(n_{i,j})_{\substack{1\le i\le p\\1\le j\le p}}$, on a : ${}^t(M-I)=(n_{j,i})_{\substack{1\le i\le p\\1\le j\le p}}$. De plus, comme $\forall j\in[1,p]$, $\sum_{i=1}^{p}n_{i,j}=0$, on peut écrire : $\forall i\in[1,p]$, $\sum_{j=1}^{p}n_{j,i}=0$. On en déduit alors :

$${}^t(M-I)V=\left(\sum_{j=1}^{p}n_{j,i}\times 1\right)_{1\le i\le p}$$ soit :

$$=\left(\sum_{j=1}^{p}n_{j,i}\right)_{1\le i\le p}$$ et donc, d'après ce qui précède :

$$=0.$$

On peut maintenant écrire que : $\exists X\neq 0$, ${}^t(M-I)X=0$, donc que le système ${}^t(M-I)X=0$ n'est pas de Cramer, donc que la matrice ${}^t(M-I)$ n'est pas inversible, i.e. que la matrice M - I n'est pas inversible, ce qui s'écrit encore : $\exists X\neq 0$, $(M-I)X=0$, d'où la conclusion :

$$\boxed{1 \text{ est valeur propre de M}}$$

☞ Se souvenir que si la somme des coefficients de chacune des lignes ou la somme des coefficients de chacune des colonnes d'une matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est nulle, alors A n'est pas inversible. Deux méthodes de démonstration :

– si la somme des coefficients de chacune des colonnes est nulle, alors les vecteurs lignes $(L_i)_{1\le i\le n}$ sont tels que $\sum_{i=1}^{n}L_i=0$, et sont donc liés : A n'est donc pas inversible (même démonstration si la somme des coefficients de chacune des lignes est nulle en intervertissant le rôle des lignes et des colonnes),

– en posant $V=(1)_{1\le i\le n}$, si la somme des coefficients de chacune des lignes de A est nulle, alors $AV=0$. Le système $AX=0$ n'est donc pas de Cramer et A n'est pas inversible (même démonstration si la somme des coefficients de chacune des colonnes est nulle avec cette fois : ${}^tAV=0$).

b) ■ Soit λ une valeur propre de M et $X=(x_i)_{1\le i\le p}$ un vecteur propre de M associé à λ. On peut alors écrire :

$MX=\lambda X$ soit :

$\forall i\in[1,p]$, $\sum_{j=1}^{p}m_{i,j}x_j=\lambda x_i$ d'où, en passant aux modules (ou aux valeurs absolues pour les E❷) :

$\forall i\in[1,p]$, $\left|\sum_{j=1}^{p}m_{i,j}x_j\right|=|\lambda|\,|x_i|$ et donc, le module (ou la valeur absolue) d'une somme étant inférieur ou égal à la somme des modules (ou des valeurs absolues) :

$\forall i\in[1,p]$, $|\lambda|\,|x_i|\le\sum_{j=1}^{p}m_{i,j}|x_j|$ soit encore, en sommant pour i = 1 à i = p :

$|\lambda|\sum_{i=1}^{p}|x_i|\le\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{p}m_{i,j}|x_j|\right)$ et donc, en inversant les sommes :

$\left|\lambda\right| \sum_{i=1}^{p} \left|x_i\right| \leq \sum_{j=1}^{p} \left[\left|x_j\right| \left(\sum_{i=1}^{p} m_{i,j}\right)\right]$ soit enfin, comme $\forall j \in [1, p]$, $\sum_{i=1}^{p} m_{i,j} = 1$ (M étant stochastique) :

$\left|\lambda\right| \sum_{i=1}^{p} \left|x_i\right| \leq \sum_{j=1}^{p} \left|x_j\right|$.

Or, comme X est un vecteur propre de M, on a : $X \neq 0$. On en déduit alors que $\exists i \in [1, p]$, $x_i \neq 0$, donc que $\exists i \in [1, p]$, $\left|x_i\right| > 0$, et donc, comme $\forall i \in [1, p]$, $\left|x_i\right| \geq 0$: $\sum_{i=1}^{p} \left|x_i\right| > 0$. En divisant l'inégalité précédente par $\sum_{i=1}^{p} \left|x_i\right| > 0$, on en déduit alors : $\left|\lambda\right| \leq 1$, d'où la conclusion :

$$\boxed{\text{Si } \lambda \text{ est valeur propre de M, alors } \left|\lambda\right| \leq 1}$$

■ Soit maintenant λ une valeur propre de ${}^tM$ et $X = (x_i)_{1 \leq i \leq p}$ un vecteur propre de ${}^tM$ associé à λ. On peut alors écrire, en procédant comme précédemment :

${}^tMX = \lambda X$ soit, comme ${}^tM = (m_{j,i})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}}$:

$\forall i \in [1, p]$, $\sum_{j=1}^{p} m_{j,i} x_j = \lambda x_i$ d'où, en passant aux modules (ou aux valeurs absolues pour les **E❷**) :

$\forall i \in [1, p]$, $\left|\sum_{j=1}^{p} m_{j,i} x_j\right| = \left|\lambda\right| \left|x_i\right|$ et donc, le module (ou la valeur absolue) d'une somme étant inférieur ou égal à la somme des modules (ou des valeurs absolues) :

$\forall i \in [1, p]$, $\left|\lambda\right| \left|x_i\right| \leq \sum_{j=1}^{p} m_{j,i} \left|x_j\right|$.

Soit maintenant k l'entier (ou un des entiers) de $[1, p]$ tel que $\left|x_k\right| = \sup_{j \in [1,p]} \left|x_j\right|$. Comme $\forall j \in [1, p]$, $\left|x_j\right| \leq \left|x_k\right|$, d'après la relation précédente, on en déduit alors :

$\forall i \in [1, p]$, $\left|\lambda\right| \left|x_i\right| \leq \sum_{j=1}^{p} m_{j,i} \left|x_k\right|$ i.e. :

$\forall i \in [1, p]$, $\left|\lambda\right| \left|x_i\right| \leq \left|x_k\right| \sum_{j=1}^{p} m_{j,i}$ soit, en prenant cette relation pour $i = k$:

$\left|\lambda\right| \left|x_k\right| \leq \left|x_k\right| \sum_{j=1}^{p} m_{j,k}$ soit enfin, comme $\sum_{j=1}^{p} m_{j,k} = 1$ (M étant stochastique) :

$\left|\lambda\right| \left|x_k\right| \leq \left|x_k\right|$.

Or, comme X est un vecteur propre de M, on a : $X \neq 0$. On en déduit alors que $\exists i \in [1, p]$, $x_i \neq 0$, donc que $\exists i \in [1, p]$, $\left|x_i\right| > 0$, et donc, comme $\left|x_k\right| = \sup_{i \in [1,p]} \left|x_i\right|$: $\left|x_k\right| > 0$. En divisant l'inégalité précédente par $\left|x_k\right| > 0$, on en déduit alors : $\left|\lambda\right| \leq 1$, d'où la conclusion :

$$\boxed{\text{Si } \lambda \text{ est valeur propre de } {}^tM\text{, alors } \left|\lambda\right| \leq 1}$$

☞ Se souvenir de la méthode employée pour montrer que $\left|\lambda\right| \leq 1$: écriture de la relation obtenue à chaque ligne, passage au module (ou à la valeur absolue) et sommation sur les lignes (ou introduction de $\left|x_k\right| = \sup_{i \in [1,p]} \left|x_i\right|$ et écriture de la relation en $i = k$ si c'est la somme des coefficients de chaque ligne et non la somme des coefficients de chaque colonne qui est égale à 1).

c) Comme λ est une valeur propre de M et $X = (x_i)_{1\le i\le p}$ un vecteur propre de M associé à λ, on a :

$MX = \lambda X$ soit :

$\forall i \in [1, p], \sum_{j=1}^{p} m_{i,j} x_j = \lambda x_i$ soit encore, en sommant pour i = 1 à i = p :

$\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{p} m_{i,j} x_j\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda x_i$ et en inversant les sommes :

$\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{p} m_{i,j} x_j\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda x_i$ i.e. :

$\sum_{j=1}^{p}\left[x_j\left(\sum_{i=1}^{p} m_{i,j}\right)\right] = \lambda \sum_{i=1}^{p} x_i$ et comme $\forall j \in [1, p], \sum_{i=1}^{p} m_{i,j} = 1$ (M étant stochastique) :

$\sum_{j=1}^{p} x_j = \lambda \sum_{i=1}^{p} x_i$ i.e. :

$(\lambda - 1) \sum_{i=1}^{p} x_i = 0$ soit enfin, comme $\lambda \neq 1$:

$\sum_{i=1}^{p} x_i = 0.$

On peut désormais conclure :

> Si λ est une valeur propre de M différente de 1 et $X = (x_i)_{1\le i\le p}$ un vecteur propre de M associé à cette valeur propre, alors : $\sum_{i=1}^{p} x_i = 0.$

☞ Se souvenir que toute matrice stochastique admet 1 pour valeur propre, que toutes ses valeurs propres sont de module (ou de valeur absolue) inférieur ou égal 1, et que pour toute valeur propre différente de 1, la somme des coordonnées de tout vecteur propre associé à cette valeur propre est nulle (idées de démonstrations à garder en mémoire).

NB : On vient de traiter ici des matrices stochastiques en colonne (i.e. telles que la somme des coefficients de chacune des colonnes de la matrice soit égale à 1). Les matrices stochastiques en ligne possèdent bien entendu les mêmes propriétés, lesquelles se démontrent de la même façon (à l'exception de la question **1c** où il convient de remplacer ${}^tA$ par A, et de la question **2b** où l'on substitue M à ${}^tM$ et ${}^tM$ à M). On retrouve très souvent ces matrices en probabilités (cf. exercice **15.10**).

Algèbre bilinéaire

Fiche de cours

I. Produits scalaires SO

1. Produit scalaire

Soit E un espace vectoriel sur R. φ est un produit scalaire (ou produit scalaire euclidien) sur E si φ est une application de E^2 dans R telle que :

– $\forall (u, u', v) \in E^3$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \varphi(\lambda u + u', v) = \lambda\varphi(u, v) + \varphi(u', v) \\ \varphi(v, \lambda u + u') = \lambda\varphi(v, u) + \varphi(v, u') \end{cases}$ (φ est dite bilinéaire),

– $\forall (u, v) \in E^2$, $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$ (φ est dite symétrique),

– $\forall u \in E$, $\varphi(u, u) \geq 0$ (φ est dite positive),

– $\forall u \in E$, $\varphi(u, u) = 0 \Rightarrow u = 0$ (φ est dite définie).

On dit que φ est une forme bilinéaire symétrique, définie et positive, et on note :
$\varphi(u, v) = <u, v> = <u \mid v> = (u \mid v) = u \cdot v$.

Propriétés :

– $\forall u \in E$, $<u, 0> = <0, u> = 0$,

– $\forall (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\forall \left((u_i)_{1\leq i\leq p}, (v_i)_{1\leq i\leq q}\right) \in E^{p+q}$, $\forall \left((\lambda_i)_{1\leq i\leq p}, (\mu_i)_{1\leq i\leq q}\right) \in \mathbb{R}^{p+q}$, $<\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i, \sum_{j=1}^{q} \mu_j v_j> = \sum_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq q}} \lambda_i \mu_j <u_i, v_j>$.

2. Norme euclidienne sur un espace vectoriel réel

■ ***Norme euclidienne.*** Soient E un espace vectoriel sur R et φ un produit scalaire sur E. On appelle norme euclidienne associée au produit scalaire φ l'application N définie sur E par : $\forall u \in E$, $N(u) = \sqrt{\varphi(u, u)}$, et on note : $N(u) = \|u\|$.

■ Soit $u \in E$. u est dit normé ou unitaire si $\|u\| = 1$.

Propriétés :

– $\forall u \in E$, $\|u\| \geq 0$,

– $\forall u \in E$, $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$,

– $\forall u \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$,

– $\forall (u, v) \in E^2$, $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2<u, v> + \|v\|^2$,

– $\forall (u, v) \in E^2$, $<u, v> = \frac{1}{2}\left[\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right]$,

– si $u \neq 0$, alors $\frac{1}{\|u\|} u$ est un vecteur normé.

■ ***Exemples usuels :***

• Soit $E = \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). L'application φ de E^2 dans R définie par : $\forall (x, y) \in E^2$, $\begin{cases} x = (x_i)_{1\leq i\leq n} \\ y = (y_i)_{1\leq i\leq n} \end{cases}$, $\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ est appelée produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. La norme euclidienne associée à φ est l'application N définie sur E par : $\forall x \in E$, $x = (x_i)_{1\leq i\leq n}$, $N(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

• Soit $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ($n \in \mathbb{N}^*$). L'application φ de E^2 dans $\mathbb{R}$ définie par :

$\forall (X, Y) \in E^2$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $\varphi(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^tXY$ est appelée produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

La norme euclidienne associée à φ est l'application N définie sur E par : $\forall X \in E$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $N(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

• Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ (noté $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$). L'application φ de E^2 dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall (f, g) \in E^2$, $\varphi(f, g) = \int_a^b f(t)\,g(t)\,dt$ est un produit scalaire sur E et la norme euclidienne associée à φ est l'application N définie sur E par : $\forall f \in E$, $N(f) = \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,dt}$.

3. Inégalité de Cauchy-Schwarz

▪ ***Inégalité de Cauchy-Schwarz.*** Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire. On a : $\forall (u, v) \in E^2$, $|<u, v>| \leq \|u\|\,\|v\|$.

▪ Soit $(u, v) \in E^2$. On a : $|<u, v>| = \|u\|\,\|v\|$ si et seulement si la famille (u, v) est liée.

Conséquences :

– $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (inégalité triangulaire),

– $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (x_i, y_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^{2n}$, $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$,

– $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $\forall (f, g) \in \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})^2$, $\left(\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t)\,dt\right)\left(\int_a^b g^2(t)\,dt\right)$.

II. Orthogonalité 50

1. Vecteurs orthogonaux, sous-espaces orthogonaux

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et d'une norme associée.

▪ ***Vecteurs orthogonaux.*** Soit $(u, v) \in E^2$. u et v sont dits orthogonaux si $<u, v> = 0$ et on note : $u \perp v$.

▪ ***Théorème de Pythagore.*** Soit $(u, v) \in E^2$. u et v sont orthogonaux si et seulement si : $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

▪ ***Sous-espaces orthogonaux.*** Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. F et G sont orthogonaux si : $\forall (u, v) \in F \times G$, $u \perp v$. On note alors : $F \perp G$.

▪ Soient p et q deux entiers naturels non nuls, F et G deux sous-espaces vectoriels de E, $F = \mathcal{V}ect\left((u_i)_{1\leq i\leq p}\right)$, $G = \mathcal{V}ect\left((v_j)_{1\leq j\leq q}\right)$. F et G sont orthogonaux si et seulement si $\forall (i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, q]\!]$, $u_i \perp v_j$.

▪ Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux de E, alors : $F \cap G = \{0\}$.

2. Familles orthogonales, familles orthonormales, bases orthogonales

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et $\mathcal{U} = (u_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de vecteurs de E.

▪ ***Famille orthogonale.*** $\mathcal{U}$ est une famille orthogonale de E si $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $i \neq j$, $u_i \perp u_j$.

▪ ***Famille orthonormale.*** $\mathcal{U}$ est une famille orthonormale de E si $\mathcal{U}$ est une famille orthogonale de E telle que $\forall i \in [1, n]$, $\|u_i\| = 1$, c'est-à-dire si : $\forall (i, j) \in [1, n]^2$, $i \neq j$, $<u_i, u_j> = 0$ et $\forall i \in [1, n]$, $<u_i, u_i> = 1$.

▪ Toute famille finie orthogonale de vecteurs non nuls, ainsi que toute famille finie orthonormale est libre.

III. Espaces euclidiens SØ

1. Procédé d'orthonormalisation de Schmidt

Soient E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $(e_i)_{1 \le i \le n}$ une famille libre de E. La famille $(u_i)_{1 \le i \le n}$ définie par :

$$u_1 = \frac{1}{\|e_1\|} e_1 \quad \text{et} \quad \forall i \in [2, n],\ u_i = \frac{1}{\left\| e_i - \sum_{j=1}^{i-1} <e_i, u_j> u_j \right\|} \left(e_i - \sum_{j=1}^{i-1} <e_i, u_j> u_j \right)$$

est une famille orthonormale de E telle que : $\forall p \in [1, n]$, $\mathcal{V}ect\left((u_i)_{1 \le i \le p}\right) = \mathcal{V}ect\left((e_i)_{1 \le i \le p}\right)$.

On dit que la famille $(u_i)_{1 \le i \le n}$ est déduite de la famille $(e_i)_{1 \le i \le n}$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

2. Espaces euclidiens

▪ ***Espaces euclidiens.*** Un espace euclidien est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie et muni d'un produit scalaire. On le note (E, < >) ou E.

▪ ***Bases orthogonales.*** Soit E un espace euclidien. $\mathcal{B}$ est une base orthogonale de E si $\mathcal{B}$ est une base et une famille orthogonale de E.

▪ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un espace euclidien de dimension n. $\mathcal{B}$ est une base orthogonale de E si et seulement si $\mathcal{B}$ est une famille orthogonale de n vecteurs non nuls de E.

▪ ***Bases orthonormales.*** Soit E un espace euclidien. $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E si $\mathcal{B}$ est une base et une famille orthonormale de E.

Exemple : la base canonique de $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire canonique.

▪ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un espace euclidien de dimension n, $(e_i)_{1 \le i \le n}$ une base orthonormale de E et x le vecteur de E de coordonnées $(x_i)_{1 \le i \le n}$ dans cette base : $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. On a : $\forall i \in [1, n]$, $x_i = <x, e_i>$, d'où : $x = \sum_{i=1}^{n} <x, e_i> e_i$.

▪ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un espace euclidien de dimension n. $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E si et seulement si $\mathcal{B}$ est une famille orthonormale de n vecteurs de E.

▪ Tout espace euclidien possède une base orthonormale.

▪ Soit E un espace euclidien et $(e_i)_{1 \le i \le n}$ une base de E. La famille $(u_i)_{1 \le i \le n}$ déduite de la famille $(e_i)_{1 \le i \le n}$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt est une base orthonormale de E.

▪ ***Complétion des bases orthonormales.*** Soit E un espace euclidien. Toute famille orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormale de E.

3. Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel

▪ ***Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel.*** Soient E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. On appelle orthogonal de F, l'ensemble noté $F^\perp$ défini par :

$F^\perp = \{u \in E,\ \forall v \in F,\ u \perp v\}$.

$F^\perp$ est alors un sous-espace vectoriel de E et $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.

■ Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $F = \mathcal{Vect}\left((f_i)_{1 \le i \le p}\right)$. On a : $u \in F^{\perp}$ si et seulement si $\forall i \in [1, p]$, $u \perp f_i$.

■ Soient E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. F et $F^{\perp}$ sont deux sous-espaces supplémentaires de E, i.e. : $F \oplus F^{\perp} = E$. $F^{\perp}$ est appelé le supplémentaire orthogonal de F dans E et on a : $\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E$.

■ Soient E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. La juxtaposition d'une base orthonormale de F et d'une base orthonormale de $F^{\perp}$ forme une base orthonormale de E.

IV. Problème des moindres carrés 5●

1. Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel

■ ***Projection orthogonale.*** Soient E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. On appelle projection orthogonale sur F et on note p_F la projection sur F de direction $F^{\perp}$.

■ Soient E un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E et p_F la projection orthogonale sur F. On a :

$$\forall x \in E,\ y = p_F(x) \iff \begin{cases} y \in F \\ (x - y) \in F^{\perp} \end{cases}.$$

■ ***Meilleure approximation.*** Soient E un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E et p_F la projection orthogonale sur F. On a : $\forall x \in E,\ y = p_F(x) \iff \begin{cases} y \in F \\ \forall z \in F,\ \|x - y\| \le \|x - z\| \end{cases}$.

La quantité $\|x - z\|$ $(z \in F)$ est donc minimale pour $z = y = p_F(x)$. On dit alors que $p_F(x)$ est la meilleure approximation de x dans F.

2. Problèmes des moindres carrés

■ ***Problème des moindres carrés.*** Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{rg} A = p$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Il existe une unique matrice $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ rendant minimal $\|AX - B\|$; c'est l'unique solution de l'équation $({}^tAA)X = {}^tAB$.

■ ***Ajustement affine d'une série statistique à deux variables, droite de régression.*** Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $(x_i, y_i)_{1 \le i \le n}$ une série statistique à deux variables. Pour déterminer la droite d'équation $y = ax + b$ ($(a, b) \in \mathbb{R}^2$) qui approche au mieux au sens des moindres carrés la série statistique $(x_i, y_i)_{1 \le i \le n}$, il faut minimiser la quantité $\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$.

En posant $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et en considérant l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, on peut écrire : $\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 = \|AX - B\|^2$. Minimiser $\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$ revient donc à déterminer $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $({}^tAA)X = {}^tAB$. Après calculs de ${}^tAA$ et ${}^tAB$, on résout ainsi un système de deux équations à deux inconnues, et l'on obtient, après calculs, en posant $x = (x_i)_{1 \le i \le n}$ et $y = (y_i)_{1 \le i \le n}$: $\begin{cases} a = \dfrac{\operatorname{cov}(x, y)}{V(x)} \\ b = E(y) - aE(x) \end{cases}$.

V. Diagonalisation des matrices symétriques 5●

1. Endomorphismes symétriques, matrices symétriques réelles

■ ***Endomorphismes symétriques.*** Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme de E. On dit que f est symétrique si $\forall (u, v) \in E^2$, $\langle f(u), v \rangle = \langle u, f(v) \rangle$.

▪ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un espace euclidien de dimension n, $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E et f un endomorphisme de E. f est symétrique si et seulement si $\forall(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $<f(e_i), e_j> = <e_i, f(e_j)>$.

▪ Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme de E. f est un endomorphisme symétrique de E si et seulement si la matrice représentative de f dans une base orthonormale de E est symétrique (réelle).

2. Diagonalisation d'un endomorphisme symétrique, d'une matrice symétrique réelle

▪ ***Valeurs propres.*** Un endomorphisme symétrique (resp. une matrice symétrique réelle) admet au moins une valeur propre réelle et toutes ses valeurs propres sont réelles.

▪ ***Vecteurs propres d'un endomorphisme symétrique.*** Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme symétrique de E. Les vecteurs propres de f associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux deux à deux, donc les sous-espaces propres de f sont orthogonaux deux à deux.

▪ ***Vecteurs propres d'une matrice symétrique réelle.*** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les vecteurs propres de A associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

▪ ***Diagonalisation d'un endomorphisme symétrique.*** Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme symétrique de E. Il existe une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres de f. f est donc diagonalisable.

Ainsi, tout endomorphisme symétrique est diagonalisable.

▪ ***Diagonalisation d'une matrice symétrique réelle.*** Soit n un entier naturel non nul. Toute matrice symétrique réelle A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable et il existe une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

▪ Soit E un espace euclidien. La matrice de passage P d'une base orthonormale de E dans une autre base orthonormale de E vérifie $P\,{}^tP = {}^tP\,P = I$. P est donc inversible et on a : $P^{-1} = {}^tP$.

▪ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{B}$ une base orthonormale (pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$) de vecteurs propres de A, P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathcal{B}$ et D la matrice diagonale représentative de l'endomorphisme associé à A dans $\mathcal{B}$. On a : $A = P\,D\,{}^tP$.

Exercices clefs, méthodes et astuces

S❷

1. Produits scalaires, normes euclidiennes

1) a) Soient $E = \mathbb{R}^2$ et φ l'application définie sur E^2 par :

$$\forall(x, y) \in E^2, \begin{cases} x = (x_1, x_2) \\ y = (y_1, y_2) \end{cases}, \varphi(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2 x_2 y_2.$$

Montrer que φ est un produit scalaire sur E dont on déterminera la norme euclidienne associée.

b) Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ et φ l'application définie sur E^2 par :

$$\forall(P, Q) \in E^2, \varphi(P, Q) = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0).$$

Montrer que φ est un produit scalaire sur E dont on déterminera la norme euclidienne associée.

2) Soient E l'ensemble des fonctions de [0, 1] dans **R**, de classe C^1 sur leur ensemble de définition et N l'application définie sur E par :

$$\forall f \in E,\ N(f) = \left(f^2(0) + \int_0^1 f'^2(t)\,dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Montrer que N est une norme euclidienne sur E et déterminer le produit scalaire auquel elle est associée.

1) a) ▪ φ est une application de E^2 dans **R** et on a :

$$- \forall (x, y) \in E^2, \begin{cases} x = (x_1, x_2) \\ y = (y_1, y_2) \end{cases}, \varphi(x, y) = x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_2 \quad \text{soit :}$$

$$= y_1x_1 + y_1x_2 + y_2x_1 + 2y_2x_2 \quad \text{et donc, en reconnaissant } \varphi(y, x) \text{ :}$$

$$= \varphi(y, x),$$

$$- \forall (x, y, z) \in E^3, \begin{cases} x = (x_1, x_2) \\ y = (y_1, y_2) \\ z = (z_1, z_2) \end{cases}, \forall \lambda \in \mathbf{R},\ \varphi(\lambda x + y, z) = \varphi\big((\lambda x_1 + y_1, \lambda x_2 + y_2), (z_1, z_2)\big) \quad \text{soit, par définition de } \varphi \text{ :}$$

$$= (\lambda x_1 + y_1)z_1 + (\lambda x_2 + y_2)z_1 + (\lambda x_1 + y_1)z_2 + 2(\lambda x_2 + y_2)z_2 \quad \text{i.e. :}$$

$$= \lambda(x_1z_1 + x_2z_1 + x_1z_2 + 2x_2z_2) + (y_1z_1 + y_2z_1 + y_1z_2 + 2y_2z_2)$$

et donc, en reconnaissant $\varphi(x, z)$ et $\varphi(y, z)$:

$$= \lambda\varphi(x, z) + \varphi(y, z),$$

$$- \forall x \in E,\ x = (x_1, x_2),\ \varphi(x, x) = x_1^2 + x_2x_1 + x_1x_2 + 2x_2^2 \quad \text{soit :}$$

$$= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 \quad \text{i.e. :}$$

$$= (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 \quad \text{et donc, comme } (x_1 + x_2)^2 \geq 0 \text{ et } x_2^2 \geq 0 \text{ :}$$

$$\geq 0.$$

– Soit $x \in E$, $x = (x_1, x_2)$. D'après le calcul précédent, on peut écrire :

$$\varphi(x, x) = 0 \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 = 0 \quad \text{soit, comme } (x_1 + x_2)^2 \geq 0 \text{ et } x_2^2 \geq 0 \text{ :}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x_1 + x_2)^2 = 0 \\ x_2^2 = 0 \end{cases} \quad \text{i.e. :}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{et donc :}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = 0 \quad \text{i.e. :}$$

$$\Rightarrow x = 0.$$

On peut désormais conclure :

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur E}}$$

☞ Pour montrer qu'une application φ est un produit scalaire sur E, il suffit de montrer **dans l'ordre** que :

– φ est une application de E^2 dans **R**,

– $\forall (u, v) \in E^2$, $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$,

– $\forall (u, u', v) \in E^3$, $\forall \lambda \in \mathbf{R}$, $\varphi(\lambda u + u', v) = \lambda\varphi(u, v) + \varphi(u', v)$,

– $\forall u \in E$, $\varphi(u, u) \geq 0$, et :

– $\forall u \in E$, $\varphi(u, u) = 0 \Rightarrow u = 0$ (en écrivant "soit $u \in E$" puis en montrant que $\varphi(u, u) = 0 \Rightarrow u = 0$ à l'aide de l'expression de $\varphi(u, u)$ trouvée précédemment).

■ On peut maintenant écrire : $\forall x \in E$, $x = (x_1, x_2)$, $\|x\| = \sqrt{\varphi(x, x)}$, d'où la conclusion d'après les calculs précédents :

> La norme euclidienne N de E associée à φ est l'application définie sur E par :
> $\forall x \in E$, $x = (x_1, x_2)$, $N(x_1, x_2) = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + x_2^2}$.

☞ La norme euclidienne associée à un produit scalaire φ sur E est l'application N définie sur E par : $\forall u \in E$, $N(u) = \sqrt{\varphi(u, u)}$.

b) ■ φ est une application de E^2 dans **R** et on a :

– $\forall (P, Q) \in E^2$, $\varphi(P, Q) = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0)$ soit :

$= Q(0)P(0) + Q'(0)P'(0) + Q''(0)P''(0)$ et donc, en reconnaissant $\varphi(Q, P)$:

$= \varphi(Q, P)$.

– $\forall (P_1, P_2, Q) \in E^3$, $\forall \lambda \in \mathbf{R}$, $\varphi(\lambda P_1 + P_2, Q) = (\lambda P_1 + P_2)(0)Q(0) + (\lambda P_1 + P_2)'(0)Q'(0) + (\lambda P_1 + P_2)''(0)Q''(0)$ soit :

$= \lambda P_1(0)Q(0) + P_2(0)Q(0) + \lambda P_1'(0)Q'(0) + P_2'(0)Q'(0) + \lambda P_1''(0)Q''(0) + P_2''(0)Q''(0)$ et donc :

$= \lambda\big(P_1(0)Q(0) + P_1'(0)Q'(0) + P_1''(0)Q''(0)\big) + \big(P_2(0)Q(0) + P_2'(0)Q'(0) + P_2''(0)Q''(0)\big)$

soit enfin, en reconnaissant $\varphi(P_1, Q)$ et $\varphi(P_2, Q)$:

$= \lambda\varphi(P_1, Q) + \varphi(P_2, Q)$.

– $\forall P \in E$, $\varphi(P, P) = (P(0))^2 + (P'(0))^2 + (P''(0))^2$ soit, comme $(P(0))^2 \geq 0$, $(P'(0))^2 \geq 0$ et $(P''(0))^2 \geq 0$:

≥ 0,

– Soit $P \in E$. D'après le calcul précédent, on peut écrire :

$\varphi(P, P) = 0 \Rightarrow (P(0))^2 + (P'(0))^2 + (P''(0))^2 = 0$ soit, comme $(P(0))^2 \geq 0$, $(P'(0))^2 \geq 0$ et $(P''(0))^2 \geq 0$:

$$\Rightarrow \begin{cases} (P(0))^2 = 0 \\ (P'(0))^2 = 0 \\ (P''(0))^2 = 0 \end{cases}$$ i.e. :

$$\Rightarrow \begin{cases} P(0) = 0 \\ P'(0) = 0 \\ P''(0) = 0 \end{cases}$$ et donc, comme $P \in \mathbf{R}_2[X]$ et comme 0 est racine d'ordre au moins 3 de P :

$\Rightarrow P = 0$.

On peut désormais conclure :

> φ est un produit scalaire sur E

■ On peut maintenant écrire : $\forall P \in E$, $\|P\| = \sqrt{\varphi(P, P)}$, d'où la conclusion d'après les calculs précédents :

> La norme euclidienne N de E associée à φ est l'application définie sur E par :
> $\forall P \in E$, $N(P) = \sqrt{(P(0))^2 + (P'(0))^2 + (P''(0))^2}$.

2) Soit φ l'application définie sur E^2 par : $\forall (f, g) \in E^2$, $\varphi(f, g) = \frac{1}{2}\left(N^2(f+g) - N^2(f) - N^2(g)\right)$. On a :

$$\forall (f, g) \in E^2,\ \varphi(f, g) = \frac{1}{2}\left((f+g)^2(0) + \int_0^1 (f'+g')^2(t)\,dt - f^2(0) - \int_0^1 f'^2(t)\,dt - g^2(0) - \int_0^1 g'^2(t)\,dt\right)$$ soit, après calculs :

$$= \frac{1}{2}\left(2(fg)(0) + \int_0^1 2(f'g')(t)\,dt\right)$$ et donc :

$$= (fg)(0) + \int_0^1 (f'g')(t)\,dt$$ i.e. :

$$= f(0)\,g(0) + \int_0^1 f'(t)\,g'(t)\,dt.$$

φ est donc une application de E^2 dans $\mathbb{R}$ et on a :

– $\forall (f, g) \in E^2$, $\varphi(f, g) = f(0)\,g(0) + \int_0^1 f'(t)\,g'(t)\,dt$ soit :

$$= g(0)\,f(0) + \int_0^1 g'(t)\,f'(t)\,dt$$ et donc, en reconnaissant $\varphi(g, f)$:

$$= \varphi(g, f).$$

– $\forall (f_1, f_2, g) \in E^3$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda f_1 + f_2, g) = (\lambda f_1 + f_2)(0)\,g(0) + \int_0^1 (\lambda f_1' + f_2')(t)\,g'(t)\,dt$ soit :

$$= \lambda f_1(0)\,g(0) + f_2(0)\,g(0) + \lambda \int_0^1 f_1'(t)\,g'(t)\,dt + \int_0^1 f_2'(t)\,g'(t)\,dt$$ et donc :

$$= \lambda\left(f_1(0)\,g(0) + \int_0^1 f_1'(t)\,g'(t)\,dt\right) + \left(f_2(0)\,g(0) + \int_0^1 f_2'(t)\,g'(t)\,dt\right)$$

soit enfin, en reconnaissant $\varphi(f_1, g)$ et $\varphi(f_2, g)$:

$$= \lambda\varphi(f_1, g) + \varphi(f_2, g).$$

– $\forall f \in E$, $\varphi(f, f) = f^2(0) + \int_0^1 f'^2(t)\,dt.$

Or, pour tout $f \in E$, on peut écrire que f est de classe C^1 sur $[0, 1]$, donc que f' et donc f'^2 sont continues sur $[0, 1]$. Comme $\forall t \in [0, 1]$, $f'^2(t) \geq 0$, on en déduit alors, par positivité de l'intégrale : $\int_0^1 f'^2(t)\,dt \geq 0$. Comme on a en outre $f^2(0) \geq 0$, on peut maintenant écrire :

$\forall f \in E$, $\varphi(f, f) \geq 0$.

– Soit $f \in E$. D'après le calcul précédent, on peut écrire :

$\varphi(f, f) = 0 \Rightarrow f^2(0) + \int_0^1 f'^2(t)\,dt = 0$ soit, comme $f^2(0) \geq 0$ et $\int_0^1 f'^2(t)\,dt \geq 0$:

$$\Rightarrow \begin{cases} f^2(0) = 0 \\ \int_0^1 f'^2(t)\,dt = 0 \end{cases}$$ et donc, comme f'^2 est continue et positive sur $[0, 1]$ (cf. exercice **8.1**.1a) :

$$\Rightarrow \begin{cases} f^2(0) = 0 \\ \forall t \in [0, 1],\ f'^2(t) = 0 \end{cases}$$ i.e. :

$$\Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall t \in [0, 1],\ f'(t) = 0 \end{cases}$$ soit enfin, f' étant nulle sur $[0, 1]$, donc f constante, égale à $f(0) = 0$ sur $[0, 1]$:

$$\Rightarrow \forall t \in [0, 1],\ f(t) = 0$$ i.e. :

$$\Rightarrow f = 0.$$

On en déduit alors que φ est un produit scalaire sur E et donc que l'application $f \mapsto \sqrt{\varphi(f, f)}$ est une norme euclidienne sur E. Or, on a : $\forall f \in E,\ \sqrt{\varphi(f,f)} = \left(f^2(0) + \int_0^1 f'^2(t)\,dt\right)^{\frac{1}{2}} = N(f)$. On peut désormais conclure :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{N est une norme euclidienne sur E et l'application } \varphi \text{ définie sur } E^2 \text{ par :}\\ \forall (f,g) \in E^2,\ \varphi(f,g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt \text{ est son produit scalaire associé.}\end{array}}$$

☞ Pour montrer qu'une application N est une norme euclidienne sur E, il faut définir sur E^2 l'application $\varphi : (x, y) \mapsto \frac{1}{2}\left(N^2(x + y) - N^2(x) - N^2(y)\right)$ et montrer que φ est un produit scalaire sur E.

Comme $\forall x \in E,\ N(x) = \sqrt{\varphi(x, x)}$, on en déduit alors que N est une norme euclidienne sur E de produit scalaire associé φ.

S❷

■ 2. Inégalité de Cauchy-Schwarz

1) A l'aide du produit scalaire φ défini à l'exercice 1.1a, montrer que :

$$\forall (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4,\ (x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_2)^2 \le (x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2)\,(y_1^2 + 2y_1y_2 + 2y_2^2).$$

2) **a)** Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \le \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}.$$

b) Montrer également que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_k)_{1\le k\le n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n,\ \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right)\sum_{k=1}^{n} x_k \ge n^2.$$

1) En posant $E = \mathbb{R}^2$ et en considérant le produit scalaire φ défini à l'exercice 1.1a, l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous permet d'écrire :

$\forall (x, y) \in E^2,\ |\varphi(x, y)| \le \|x\|\,\|y\|$ soit, en élevant cette relation au carré, les termes en présence étant tous positifs :

$\forall (x, y) \in E^2,\ \varphi^2(x, y) \le \|x\|^2\,\|y\|^2$ soit encore, d'après la définition de φ et l'expression de sa norme associée (cf. exercice 1.1a) :

$\forall (x, y) \in E^2,\ \begin{cases} x = (x_1, x_2) \\ y = (y_1, y_2) \end{cases},\ (x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_2)^2 \le (x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2)\,(y_1^2 + 2y_1y_2 + 2y_2^2)$ i.e. :

$$\boxed{\forall (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4,\ (x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_2)^2 \le (x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2)\,(y_1^2 + 2y_1y_2 + 2y_2^2)}$$

2) **a)** En considérant le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut écrire :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_k, y_k)_{1\le k\le n} \in \mathbb{R}^{2n},\ \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)$ soit, en posant $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [1, n],\ \begin{cases} x_k = k \\ y_k = \sqrt{k} \end{cases}$:

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k}\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)$ i.e. :

$\le \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,\frac{n(n+1)}{2}$ soit encore :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k}\right)^2 \leq \frac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{12}$ et donc, en composant par la fonction racine (croissante sur $\mathbb{R}^+$), tous les termes en présence étant positifs :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}}$$

b) En considérant à nouveau le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut écrire :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (y_k, z_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{R}^{2n}, \left(\sum_{k=1}^{n} y_k z_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} z_k^2\right)$ soit, en posant $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [1, n], \begin{cases} y_k = \frac{1}{\sqrt{x_k}} \\ z_k = \sqrt{x_k} \end{cases}$ $((x_k)_{1\leq k\leq n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n)$:

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_k)_{1\leq k\leq n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n, \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$ et donc, comme $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} 1 = n$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_k)_{1\leq k\leq n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n, \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right)\sum_{k=1}^{n} x_k \geq n^2}$$

☞ Pour démontrer une inégalité à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il faut tout d'abord déterminer le produit scalaire à utiliser (le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ ou sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit scalaire sur l'ensemble des fonctions continues sur [a, b] ou tout autre produit scalaire défini par l'énoncé), puis appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à ce produit scalaire.

S❷

■ 3. Familles orthogonales, sous-espaces vectoriels orthogonaux, bases orthogonales, bases orthonormales

1) a) Indiquer si les vecteurs suivants sont orthogonaux pour le produit scalaire défini sur $\mathbb{R}^2$ à l'exercice 1.1a :

– (1, 1) et (1, 0),

– (1, -1) et (1, 0).

b) De même, indiquer si les vecteurs ou les espaces vectoriels suivants sont orthogonaux pour le produit scalaire défini sur $\mathbb{R}_2[X]$ à l'exercice 1.1b :

– $1 + X$ et $2 + X + 3X^2$,

– X^2 et $3 + 2X$,

– $\mathcal{V}ect(1 + X, 3 + 2X)$ et $\mathcal{V}ect(2X^2)$.

2) a) Montrer que pour le produit scalaire défini à l'exercice 1.1b, la famille $(3 + 2X, X^2)$ forme une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$.

b) A l'aide du **1a**, montrer que pour le produit scalaire défini à l'exercice 1.1a, la famille $((1, -1), (1, 0))$ forme une base orthogonale de $\mathbb{R}^2$, puis qu'elle forme une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$.

c) Montrer que pour le produit scalaire défini à l'exercice 1.1a, la famille $((2, -1), (0, 2))$ forme une base orthogonale de $\mathbb{R}^2$. En déduire une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$ pour ce même produit scalaire.

d) Montrer que pour le produit scalaire défini à l'exercice 1.1b, la famille $\left(1, X, \frac{X^2}{2}\right)$ forme une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$.

1) a) ▪ On a :

$< (1, 1), (1, 0) > = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 0$ soit :

$= 2.$

$\boxed{\text{Les vecteurs } (1, 1) \text{ et } (1, 0) \text{ ne sont pas orthogonaux}}$

▪ On a :

$< (1, -1), (1, 0) > = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 0$ soit :

$= 0.$

$\boxed{\text{Les vecteurs } (1, -1) \text{ et } (1, 0) \text{ sont orthogonaux}}$

b) ▪ On a :

$< 1+X, 2+X+3X^2 > = (1+X)(0)\,(2+X+3X^2)(0) + (1+X)'(0)\,(2+X+3X^2)'(0) + (1+X)''(0)\,(2+X+3X^2)''(0)$ soit :

$= 1 \cdot 2 + 1 \cdot (6X+1)(0) + 0 \cdot 6$ soit encore :

$= 3.$

$\boxed{\text{Les vecteurs } 1+X \text{ et } 2+X+3X^2 \text{ ne sont pas orthogonaux}}$

▪ De même, on a :

$< X^2, 3+2X > = (X^2)(0)\,(3+2X)(0) + (X^2)'(0)\,(3+2X)'(0) + (X^2)''(0)\,(3+2X)''(0)$ soit :

$= 0 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 0$ soit encore :

$= 0.$

$\boxed{\text{Les vecteurs } X^2 \text{ et } 3+2X \text{ sont orthogonaux}}$

▪ On a :

– $< 1+X, 2X^2 > = (1+X)(0)\,(2X^2)(0) + (1+X)'(0)\,(2X^2)'(0) + (1+X)''(0)\,(2X^2)''(0)$ soit :

$= 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 4$ soit encore :

$= 0$ et :

– $< 3+2X, 2X^2 > = 2 < X^2, 3+2X >$ et d'après ce qui précède :

$= 0.$

On peut désormais conclure :

$\boxed{\mathcal{V}ect(1+X, 3+2X) \perp \mathcal{V}ect(2X^2)}$

☞ Pour montrer que deux espaces vectoriels sont orthogonaux, il faut montrer que tous les vecteurs d'une famille génératrice (ou d'une base) du premier sont orthogonaux à tous les vecteurs d'une famille génératrice (ou d'une base) du second.

2) a) D'après les résultats du **1b**, on peut écrire que : $X^2 \perp 3 + 2X$. La famille $(3 + 2X, X^2)$ est donc une famille orthogonale de vecteurs non nuls de $\mathbf{R}_2[X]$, d'où la conclusion :

$\boxed{\text{La famille } (3+2X, X^2) \text{ forme une famille libre de } \mathbf{R}_2[X]}$

☞ Se souvenir que toute famille orthogonale de vecteurs non nuls (ainsi que toute famille orthonormale) de **E** forme une famille libre de **E**.

b) ▪ Pour le produit scalaire défini à l'exercice 1.1a, d'après les résultats du **1a**, on peut écrire que : $(1, -1) \perp (1, 0)$. La famille $\big((1, -1), (1, 0)\big)$ est donc une famille orthogonale de $\mathbf{R}^2$ de deux vecteurs non nuls de $\mathbf{R}^2$. Comme $\dim(\mathbf{R}^2) = 2$, on peut alors conclure :

$\boxed{\text{La famille } \big((1, -1), (1, 0)\big) \text{ forme une base orthogonale de } \mathbf{R}^2}$

☞ Pour montrer qu'une famille de n vecteurs forme une base (orthogonale) de E (avec dim E = n), il suffit de montrer qu'elle forme une famille orthogonale de vecteurs non nuls (ou une famille orthonormale) de E.

■ De plus, d'après les résultats du 1.1a, on peut écrire :

$- \|(1,-1)\| = \sqrt{1^2+2\cdot 1\cdot(-1)+2\cdot(-1)^2}$ d'où :

$= 1$ et :

$- \|(1,0)\| = \sqrt{1^2+2\cdot 1\cdot 0+2\cdot 0^2}$ d'où :

$= 1.$

Comme la famille $((1,-1),(1,0))$ forme une base orthogonale de $\mathbf{R}^2$ et comme $\|(1,-1)\| = 1$ et $\|(1,0)\| = 1$, on peut désormais conclure :

$$\boxed{\text{La famille } ((1,-1),(1,0)) \text{ forme une base orthonormale de } \mathbf{R}^2}$$

c) ■ On a :

$< (2,-1),(0,2) > = 2\cdot 0 - 1\cdot 0 + 2\cdot 2 + 2\cdot(-1)\cdot 2$ soit :

$= 0.$

On en déduit alors que $(2,-1) \perp (0,2)$. La famille $((2,-1),(0,2))$ est donc une famille orthogonale de vecteurs non nuls de $\mathbf{R}^2$. Comme $\dim(\mathbf{R}^2) = 2$, on peut alors conclure :

$$\boxed{\text{La famille } ((2,-1),(0,2)) \text{ forme une base orthogonale de } \mathbf{R}^2}$$

■ On a :

$- \|(2,-1)\| = \sqrt{2^2+2\cdot 2\cdot(-1)+2\cdot(-1)^2}$ d'où :

$= \sqrt{2}$ et :

$- \|(0,2)\| = \sqrt{0^2+2\cdot 0\cdot 2+2\cdot 2^2}$ d'où :

$= 2\sqrt{2}.$

Comme la famille $((2,-1),(0,2))$ forme une base orthogonale de $\mathbf{R}^2$, la famille $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(2,-1), \frac{1}{2\sqrt{2}}(0,2)\right)$ forme également une base orthogonale de $\mathbf{R}^2$. Or, d'après ce qui précède, on a en outre : $\left\|\frac{1}{\sqrt{2}}(2,-1)\right\| = 1$ et $\left\|\frac{1}{2\sqrt{2}}(0,2)\right\| = 1$. On peut désormais conclure :

$$\boxed{\text{La famille } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(2,-1), \frac{1}{2\sqrt{2}}(0,2)\right) \text{ forme une base orthonormale de } \mathbf{R}^2}$$

☞ Se souvenir que si la famille $(u_i)_{1\le i\le n}$ forme une famille orthogonale de E, la famille $(\lambda_i u_i)_{1\le i\le n}$ $((\lambda_i)_{1\le i\le n} \in \mathbf{R}^n)$ forme également une famille orthogonale de E. De même, si la famille $(u_i)_{1\le i\le n}$ forme une base orthogonale de E, la famille $(\lambda_i u_i)_{1\le i\le n}$ $((\lambda_i)_{1\le i\le n} \in (\mathbf{R}^*)^n)$ forme également une base orthogonale de E.

☞ Pour obtenir une famille orthonormale $(v_i)_{1\le i\le n}$ à partir d'une famille orthogonale de n vecteurs non nuls $(u_i)_{1\le i\le n}$ ou pour obtenir une base orthonormale $(v_i)_{1\le i\le n}$ à partir d'une base orthogonale de n vecteurs non nuls $(u_i)_{1\le i\le n}$, il suffit de poser : $\forall i \in [1, n]$, $v_i = \frac{1}{\|u_i\|} u_i$.

d) Pour le produit scalaire défini à l'exercice 1.1b, on peut écrire :

$- <1, X> = (1)(0)\,(X)(0) + (1)'(0)\,(X)'(0) + (1)''(0)\,(X)''(0)$ soit :

$= 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0$ soit encore :

$= 0,$

$- <1, \frac{X^2}{2}> = (1)(0)\left(\frac{X^2}{2}\right)(0) + (1)'(0)\left(\frac{X^2}{2}\right)'(0) + (1)''(0)\left(\frac{X^2}{2}\right)''(0)$ soit :

$= 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 1$ soit encore :

$= 0$ et :

$- <X, \frac{X^2}{2}> = (X)(0)\left(\frac{X^2}{2}\right)(0) + (X)'(0)\left(\frac{X^2}{2}\right)'(0) + (X)''(0)\left(\frac{X^2}{2}\right)''(0)$ soit :

$= 0\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1$ soit encore :

$= 0.$

La famille $\left(1, X, \frac{X^2}{2}\right)$ forme donc une famille orthogonale de $\mathbf{R}_2[X]$. De plus, on a :

$- \|1\| = \sqrt{<1, 1>}$ soit :

$= \sqrt{(1)(0)\,(1)(0) + (1)'(0)\,(1)'(0) + (1)''(0)\,(1)''(0)}$ soit encore :

$= \sqrt{1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0}$ et donc :

$= 1,$

$- \|X\| = \sqrt{<X, X>}$ soit :

$= \sqrt{(X)(0)\,(X)(0) + (X)'(0)\,(X)'(0) + (X)''(0)\,(X)''(0)}$ soit encore :

$= \sqrt{0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0}$ et donc :

$= 1,$ et :

$- \left\|\frac{X^2}{2}\right\| = \sqrt{<\frac{X^2}{2}, \frac{X^2}{2}>}$ soit :

$= \sqrt{\left(\frac{X^2}{2}\right)(0)\left(\frac{X^2}{2}\right)(0) + \left(\frac{X^2}{2}\right)'(0)\left(\frac{X^2}{2}\right)'(0) + \left(\frac{X^2}{2}\right)''(0)\left(\frac{X^2}{2}\right)''(0)}$ soit encore :

$= \sqrt{0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1}$ et donc :

$= 1.$

On en déduit alors que la famille $\left(1, X, \frac{X^2}{2}\right)$ forme une famille orthonormale de $\mathbf{R}_2[X]$. Comme elle est formée de trois vecteurs de $\mathbf{R}_2[X]$ et comme $\dim\left(\mathbf{R}_2[X]\right) = 3$, on peut désormais conclure :

La famille $\left(1, X, \frac{X^2}{2}\right)$ forme une base orthonormale de $\mathbf{R}_2[X]$ pour le produit scalaire défini à l'exercice 1.1b

☞ Se souvenir qu'une famille orthonormale de n vecteurs (ainsi qu'une famille orthonormale de n vecteurs non nuls) dans un espace euclidien de dimension n forme une base de cet espace.

S❷

4. Procédé d'orthonormalisation de Schmidt

1) Soient $E = \mathbb{R}^3$ et φ le produit scalaire défini sur E^2 par :

$$\forall(x, y)\in E^2, \begin{cases} x = (x_1, x_2, x_3) \\ y = (y_1, y_2, y_3) \end{cases}, \varphi(x, y) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2).$$

Déterminer une base orthonormale de E muni de ce produit scalaire.

2) Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ et φ le produit scalaire défini sur E^2 par :

$$\forall(P, Q)\in E^2, \varphi(P, Q) = P(1)Q(1) + P(0)Q(0) + P(-1)Q(-1)$$

Déterminer une base orthonormale (P_0, P_1, P_2) de E muni de ce produit scalaire telle que :

$$\forall i\in [0, 2], \deg(P_i) = i.$$

1) Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. D'après le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, on peut écrire que la famille $(u_i)_{1\le i\le 3}$ définie par : $u_1 = \frac{1}{\|e_1\|} e_1$ et $\forall i\in \{2, 3\}$, $u_i = \frac{1}{\left\| e_i - \sum_{j=1}^{i-1} < e_i, u_j > u_j \right\|}\left(e_i - \sum_{j=1}^{i-1} < e_i, u_j > u_j\right)$ forme une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

□ Or, après calculs, on obtient :

$\|e_1\| = \sqrt{2}$ et donc :

$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e_1$ soit :

$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right).$

□ De plus, comme $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e_1$, on peut écrire :

$< e_2, u_1 > = \frac{1}{\sqrt{2}} < e_1, e_2 >$ soit, comme $< e_1, e_2 > = -\frac{1}{2}$:

$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ et donc :

$e_2 - < e_2, u_1 > u_1 = e_2 + \frac{1}{2\sqrt{2}} u_1$ soit, comme $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e_1$:

$= \frac{1}{4} e_1 + e_2$ i.e. :

$= \left(\frac{1}{4}, 1, 0\right).$

On en déduit alors :

$\|e_2 - < e_2, u_1 > u_1\| = \sqrt{2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 2\cdot 1^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}$ soit :

$= \sqrt{\frac{15}{8}}$ et donc :

$= \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}$ d'où :

$$u_2 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}}\,(e_2 - \langle e_2, u_1\rangle\, u_1)$$ i.e. :

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}}\left(\frac{1}{4}, 1, 0\right)$$ soit enfin :

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}}, 0\right).$$

❑ Enfin, comme $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,e_1$, on peut également écrire :

$$\langle e_3, u_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle e_1, e_3\rangle$$ soit, comme $\langle e_1, e_3\rangle = -\frac{1}{2}$:

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$ et comme $u_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}\,e_1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}}\,e_2$:

$$\langle e_3, u_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{30}}\langle e_1, e_3\rangle + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}}\langle e_1, e_2\rangle$$ d'où, comme $\langle e_1, e_3\rangle = \langle e_1, e_2\rangle = -\frac{1}{2}$:

$$= -\frac{5}{2\sqrt{30}}$$ d'où :

$$e_3 - \sum_{j=1}^{2}\langle e_3, u_j\rangle\, u_j = e_3 - \langle e_3, u_1\rangle\, u_1 - \langle e_3, u_2\rangle\, u_2$$ soit :

$$= e_3 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\,u_1 + \frac{5}{2\sqrt{30}}\,u_2$$ et comme $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,e_1$ et $u_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}\,e_1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}}\,e_2$:

$$= \frac{1}{3}\,e_1 + \frac{1}{3}\,e_2 + e_3$$ i.e. :

$$= \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right).$$

On en déduit alors :

$$\left\| e_3 - \sum_{j=1}^{2}\langle e_3, u_j\rangle\, u_j \right\| = \sqrt{2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{9} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right)}$$ soit :

$$= \sqrt{\frac{2}{3}}$$ d'où :

$$u_3 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\left(e_3 - \sum_{j=1}^{2}\langle e_3, u_j\rangle\, u_j\right)$$ i.e. :

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right).$$ soit enfin :

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right).$$

❑ On peut désormais conclure :

La famille (u_1, u_2, u_3) où $\begin{cases} u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right) \\ u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}}, 0\right) \\ u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$ forme une base orthonormale de E muni du produit scalaire φ

2) Comme la famille $(1, X, X^2)$ forme la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$, d'après le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, on peut écrire que la famille $(P_i)_{0\le i\le 2}$ définie par :

$P_0 = \frac{1}{\|1\|}\,1$ et $\forall i\in\{1, 2\}$, $P_i = \frac{1}{\left\|X_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} < X_i, P_j > P_j\right\|}\left(X_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} < X_i, P_j > P_j\right)$ forme une base orthonormale de $\mathbf{R}_2[X]$.

❑ Or, on a :

$\|1\| = \sqrt{1+1+1}$ soit :

$= \sqrt{3}$ et donc :

$P_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

❑ De plus, comme $P_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, on peut écrire :

$< X, P_0 > = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1, X >$ soit, comme $< 1, X > = 1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 1\cdot(-1) = 0$:

$= 0.$ et donc :

$X - < X, P_0 > P_0 = X.$

On en déduit alors :

$\|X - < X, P_0 > P_0\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}$ soit :

$= \sqrt{2}$ d'où :

$P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - < X, P_0 > P_0)$ i.e. :

$= \frac{1}{\sqrt{2}}X.$

❑ Enfin, comme $P_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, on peut également écrire :

$< X^2, P_0 > = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1, X^2 >$ soit, comme $< 1, X^2 > = 1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 1\cdot(-1)^2 = 2$:

$= \frac{2}{\sqrt{3}}$ et comme $P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}X$:

$< X^2, P_1 > = \frac{1}{\sqrt{2}} < X, X^2 >$ soit, comme $< X, X^2 > = 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + (-1)\cdot(-1)^2 = 0$:

$= 0$ d'où :

$X^2 - \sum\limits_{j=0}^{1} < X^2, P_j > P_j = X^2 - < X^2, P_0 > P_0 - < X^2, P_1 > P_1$ soit :

$= X^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}P_0$ et comme $P_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$:

$= X^2 - \frac{2}{3}.$

On en déduit alors :

$\left\|X^2 - \sum\limits_{j=0}^{1} < X^2, P_j > P_j\right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}$ soit :

$= \sqrt{\frac{2}{3}}$ et donc :

$$P_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(X^2 - \sum_{j=0}^{1} <X^2, P_j> P_j\right)$$ i.e. :

$$= \sqrt{\frac{3}{2}}\left(X^2 - \frac{2}{3}\right)$$ soit enfin :

$$= \sqrt{\frac{3}{2}}X^2 - \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

❏ On peut désormais conclure :

> La famille $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}X, \sqrt{\frac{3}{2}}X^2 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ forme une base orthonormale de E muni du produit scalaire φ telle que $\forall i \in [0, 2]$, $\deg(P_i) = i$.

☞ Pour déterminer une base orthonormale d'un espace euclidien E, il suffit d'appliquer à une base quelconque $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E (pour $\mathbb{R}^n$ et pour $\mathbb{R}_n[X]$, on utilise généralement la base canonique de E), le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

Néanmoins, si on dispose déjà d'une famille orthogonale de n vecteurs de E (avec $\dim E = n$), pour obtenir une base orthonormale de E, il suffit de normer chacun des vecteurs de E.

S❷

5. Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel

1) Déterminer dans chacun des deux cas suivants le supplémentaire orthogonal de F dans E muni de son produit scalaire canonique :

a) $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \mathcal{Vect}\big((1, 2, 3, 4), (0, 1, 0, 1)\big)$.

b) $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x - y + z = 0\}$.

2) Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire vu à l'exercice 1.1b. Déterminer le supplémentaire orthogonal de $F = \mathcal{Vect}(1 + X, X^2)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.

3) Soient n un entier naturel non nul et φ le produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$\forall (A, B) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)^2,\ \varphi(A, B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$$

où tr est l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$, $\mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$ (cf. exercice **2**.9).

Soit alors $F = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exists (\lambda_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n, M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}\right\}$. Déterminer son supplémentaire orthogonal dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) a) Soient $u \in E$, $u = (x, y, z, t)$. On a :

$$u \in F^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} <u, (1, 2, 3, 4)> = 0 \\ <u, (0, 1, 0, 1)> = 0 \end{cases}$$ soit :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 0 \\ y + t = 0 \end{cases}$$ soit encore :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3z - 2t \\ y = -t \end{cases}$$ et donc :

$u \in F^{\perp} \Leftrightarrow u \in \mathcal{Vect}((-3, 0, 1, 0), (-2, -1, 0, 1))$ d'où la conclusion :

$$\boxed{F^{\perp} = \mathcal{Vect}((-3, 0, 1, 0), (-2, -1, 0, 1))}$$

☞ Pour déterminer le supplémentaire orthogonal $F^{\perp}$ de F dans E, il suffit de déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $u \in F^{\perp}$ en écrivant que $u \in F^{\perp}$ si et seulement si u est orthogonal à chacun des vecteurs d'une base de F. En décomposant alors u en fonction de ses coordonnées dans une base de E, on obtient un système d'équations linéaires dont les solutions permettent de déterminer $F^{\perp}$.

b) Soient $u \in E$. D'après la définition de F, on peut écrire : $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^n, \langle (x, y, z), (2, -1, 1) \rangle = 0\}$. On en déduit alors : $u \in F \Leftrightarrow \langle u, (2, -1, 1) \rangle = 0$. En posant $G = \mathcal{Vect}((2, -1, 1))$, on peut maintenant écrire que : $u \in F \Leftrightarrow u \in G^{\perp}$, donc que : $F = G^{\perp}$, i.e. : $F^{\perp} = G$, d'où la conclusion :

$$\boxed{F^{\perp} = \mathcal{Vect}((2, -1, 1))}$$

☞ Se souvenir que : $\left\{(x_k)_{1 \le k \le n} \in \mathbb{R}^n, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0\right\} = \{u \in \mathbb{R}^n, u \perp (\alpha_k)_{1 \le k \le n}\} = \mathcal{Vect}((\alpha_k)_{1 \le k \le n})^{\perp}$.

2) Soit $P \in E$, $P = aX^2 + bX + c$. On peut écrire :

$P \in F^{\perp} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle P, 1 + X \rangle = 0 \\ \langle P, X^2 \rangle = 0 \end{cases}$ soit :

$\Leftrightarrow \begin{cases} c + b = 0 \\ 4a = 0 \end{cases}$ soit encore :

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -c \end{cases}$ et donc :

$\Leftrightarrow P \in \mathcal{Vect}(X - 1)$ d'où la conclusion :

$$\boxed{F^{\perp} = \mathcal{Vect}(X - 1)}$$

3) La famille $(M_i)_{1 \le i \le n}$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, M_i soit la matrice dont tous les coefficients sont nuls à l'exception de celui situé sur sa $i^{\text{ème}}$ ligne et sa $i^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1 forme clairement une base de F. Soit alors $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$. On a :

$A \in F^{\perp} \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], A \perp M_i$ soit :

$\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \langle A, M_i \rangle = 0$ soit encore :

$\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \langle M_i, A \rangle = 0$ i.e. :

$\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \mathrm{tr}({}^tM_iA) = 0$ et donc, comme pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, M_i est symétrique :

$\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \mathrm{tr}(M_iA) = 0$.

Or, on a : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $M_iA = \begin{pmatrix} & 0 & \\ a_{i,1} & a_{i,2} \dots & a_{i,n} \\ & 0 & \end{pmatrix}$ (pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, les $(a_{i,j})_{1 \le j \le n}$ sont situés sur la $i^{\text{ème}}$ ligne de M_iA). On en déduit alors : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{tr}(M_iA) = a_{i,i}$, et donc :

$A \in F^{\perp} \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], a_{i,i} = 0$.

On peut désormais conclure :

$$\boxed{F^{\perp} = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}, \forall i \in [\![1, n]\!], a_{i,i} = 0\right\}}$$

S❷

6. Projections orthogonales

1) On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique. Déterminer le projeté orthogonal v de u = (1, 1, 0) sur l'espace vectoriel $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\}$.

2) a) On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique. Déterminer la matrice M représentative de la projection orthogonale p_F de $\mathbb{R}^3$ sur $F = \mathcal{V}ect((1, 1, 1))$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

b) On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire défini à l'exercice 1.1b. Déterminer la matrice N représentative de la projection orthogonale p_G de $\mathbb{R}_2[X]$ sur $G = \mathcal{V}ect(X, X^2 - 1)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, ainsi que la matrice N' représentative de p_G dans la base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ vue à l'exercice 3.2d.

Projeté orthogonal

Pour déterminer le projeté orthogonal $v = p_F(u)$ d'un vecteur $u \in E$ sur un sous-espace vectoriel F de E, il suffit d'utiliser le fait que $F \oplus F^\perp = E$ en écrivant que $\begin{cases} v \in F \\ (u - v) \in F^\perp \end{cases}$, et donc, en notant $(u_i)_{1 \le i \le p}$ une base de F, que : $\begin{cases} \exists (\alpha_i)_{1 \le i \le p} \in \mathbb{R}^p, v = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i \\ \forall i \in [1, p], (u - v) \perp u_i \end{cases}$.

On résout ensuite le système de p équations à p inconnues $(\alpha_i)_{1 \le i \le p}$: $\forall i \in [1, p]$, $< u - v, u_i > = 0$, et ce en substituant dans chacun de ces produits scalaires $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i$ à v.

1) On a :

$$v = p_F(u) \Leftrightarrow \begin{cases} v \in F \\ (u - v) \in F^\perp \end{cases}$$ soit, comme $F = \mathcal{V}ect((-1, 1, 0), (1, 0, 1))$:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v \in F \\ (u - v) \perp (-1, 1, 0) \\ (u - v) \perp (1, 0, 1) \end{cases}$$ soit encore, en notant α et β les coordonnées de v dans la base $((-1, 1, 0), (1, 0, 1))$ de F :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = (\beta - \alpha, \alpha, \beta) \\ <(1 + \alpha - \beta, 1 - \alpha, -\beta), (-1, 1, 0)> = 0 \\ <(1 + \alpha - \beta, 1 - \alpha, -\beta), (1, 0, 1)> = 0 \end{cases}$$ i.e. :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = (\beta - \alpha, \alpha, \beta) \\ -2\alpha + \beta = 0 \\ \alpha - 2\beta = -1 \end{cases}$$ et donc :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = (\beta - \alpha, \alpha, \beta) \\ \alpha = \frac{1}{3} \\ \beta = \frac{2}{3} \end{cases}$$ d'où la conclusion :

$$\boxed{v = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)}$$

2) **a)** Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$. On peut écrire :

$$v_1 = p_F(e_1) \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 \in F \\ (e_1 - v_1) \in F^\perp \end{cases}$$ soit, comme $F = \mathcal{Vect}\big((1, 1, 1)\big)$:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 \in F \\ (e_1 - v_1) \perp (1, 1, 1) \end{cases}$$ soit encore, en notant α la coordonnée de v_1 dans la base $\big((1, 1, 1)\big)$ de F :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = (\alpha, \alpha, \alpha) \\ < (1 - \alpha, -\alpha, -\alpha), (1, 1, 1) > = 0 \end{cases}$$ i.e. :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = (\alpha, \alpha, \alpha) \\ 1 - 3\alpha = 0 \end{cases}$$ et donc :

$$\Leftrightarrow v_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

De même, on démontre que $v_2 = p_F(e_2) \Leftrightarrow v_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ et que $v_3 = p_F(e_3) \Leftrightarrow v_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. On en déduit alors la matrice M représentative de la projection orthogonale p_F de $\mathbf{R}^3$ sur $F = \mathcal{Vect}\big((1, 1, 1)\big)$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$:

$$\boxed{M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

☞ Se souvenir que la matrice représentative d'une projection orthogonale dans une base est tout simplement la matrice représentative des projetés orthogonaux des vecteurs de cette base.

b) ▪ ⊃ On a :

$$P_1 = p_G(1) \Leftrightarrow \begin{cases} P_1 \in G \\ (1 - P_1) \in G^\perp \end{cases}$$ soit, comme $G = \mathcal{Vect}(X, X^2 - 1)$:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P_1 \in G \\ (1 - P_1) \perp X \\ (1 - P_1) \perp X^2 - 1 \end{cases}$$ soit encore, en notant α et β les coordonnées de P_1 dans la base $(X, X^2 - 1)$ de G :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P_1 = \alpha X + \beta(X^2 - 1) \\ < 1 - P_1, X > = 0 \\ < 1 - P_1, X^2 - 1 > = 0 \end{cases}$$ i.e. :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P_1 = \beta X^2 + \alpha X - \beta \\ < -\beta X^2 - \alpha X + (1 + \beta), X > = 0 \\ < -\beta X^2 - \alpha X + (1 + \beta), X^2 - 1 > = 0 \end{cases}$$ et donc, après calculs :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P_1 = \beta X^2 + \alpha X - \beta \\ -\alpha = 0 \\ -(1 + \beta) - 4\beta = 0 \end{cases}$$ et donc :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P_1 = \beta X^2 + \alpha X - \beta \\ \alpha = 0 \\ \beta = -\frac{1}{5} \end{cases}$$ soit enfin :

$$\Leftrightarrow P_1 = -\frac{1}{5}X^2 + \frac{1}{5}.$$

❏ De même, on a :

$$P_2 = p_G(X) \Leftrightarrow \begin{cases} P_2 \in G \\ (X - P_2) \in G^{\perp} \end{cases} \quad \text{soit, comme } G = \mathcal{Vect}(X, X^2 - 1) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P_2 \in G \\ (X - P_2) \perp X \\ (X - P_2) \perp X^2 - 1 \end{cases} \quad \text{soit encore, en notant } \alpha \text{ et } \beta \text{ les coordonnées de } P_2 \text{ dans la base } (X, X^2 - 1) \text{ de } G :$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P_2 = \alpha X + \beta(X^2 - 1) \\ < X - P_2, X > = 0 \\ < X - P_2, X^2 - 1 > = 0 \end{cases} \quad \text{i.e. :}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P_2 = \beta X^2 + \alpha X - \beta \\ < -\beta X^2 + (1 - \alpha)X + \beta, X > = 0 \\ < -\beta X^2 + (1 - \alpha)X + \beta, X^2 - 1 > = 0 \end{cases} \quad \text{soit encore, après calculs :}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P_2 = \beta X^2 + \alpha X - \beta \\ 1 - \alpha = 0 \\ -\beta - 4\beta = 0 \end{cases} \quad \text{et donc :}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P_2 = \beta X^2 + \alpha X - \beta \\ \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{cases} \quad \text{soit enfin :}$$

$$\Leftrightarrow P_2 = X.$$

❏ Enfin, on a :

$$P_3 = p_G(X^2) \Leftrightarrow \begin{cases} P_3 \in G \\ (X^2 - P_3) \in G^{\perp} \end{cases} \quad \text{soit, comme } G = \mathcal{Vect}(X, X^2 - 1) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P_2 \in G \\ (X - P_2) \perp X \\ (X - P_2) \perp X^2 - 1 \end{cases} \quad \text{soit encore, en notant } \alpha \text{ et } \beta \text{ les coordonnées de } P_3 \text{ dans la base } (X, X^2 - 1) \text{ de } G :$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P_3 = \alpha X + \beta(X^2 - 1) \\ < X^2 - P_3, X > = 0 \\ < X^2 - P_3, X^2 - 1 > = 0 \end{cases} \quad \text{i.e. :}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P_3 = \beta X^2 + \alpha X - \beta \\ < (1 - \beta)X^2 - \alpha X + \beta, X > = 0 \\ < (1 - \beta)X^2 - \alpha X + \beta, X^2 - 1 > = 0 \end{cases} \quad \text{soit encore, après calculs :}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P_3 = \beta X^2 + \alpha X - \beta \\ -\alpha = 0 \\ -\beta + 4(1 - \beta) = 0 \end{cases} \quad \text{et donc :}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P_3 = \beta X^2 + \alpha X - \beta \\ \alpha = 0 \\ \beta = \frac{4}{5} \end{cases} \quad \text{soit enfin :}$$

$$\Leftrightarrow P_3 = \frac{4}{5}X^2 - \frac{4}{5}.$$

↳ On peut maintenant écrire : $p_G(1) = -\frac{1}{5}X^2 + \frac{1}{5}$, $p_G(X) = X$ et $p_G(X^2) = \frac{4}{5}X^2 - \frac{4}{5}$. On en déduit alors la matrice N représentative de la projection orthogonale p_G de $\mathbf{R}_2[X]$ sur $G = \mathcal{Vect}(X, X^2 - 1)$ dans la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$:

$$\boxed{N = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

■ On peut maintenant écrire, d'après les résultats précédents :

– $p_G(1) = \frac{1}{5} - \frac{2}{5} \cdot \frac{X^2}{2}$,

– $p_G(X) = X$,

– $p_G\left(\frac{X^2}{2}\right) = -\frac{2}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{X^2}{2}$.

On en déduit alors la matrice N' représentative de p_G de $\mathbf{R}_2[X]$ sur $G = \mathcal{Vect}(X, X^2 - 1)$ dans $\left(1, X, \frac{X^2}{2}\right)$:

$$\boxed{N' = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

☞ Se souvenir que la matrice représentative d'une projection orthogonale dans une base orthonormale est symétrique.

S❷

■ 7. Détermination de minima, méthode des moindres carrés

1) a) Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^3$ par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ f(x, y, z) = (x - y)^2 + (x + 2z - 1)^2 + (y - z + 2)^2.$$

Déterminer son minimum sur $\mathbf{R}^3$.

b) Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, \pi]$ muni du produit scalaire φ défini par :

$$\forall (f, g) \in E^2,\ \varphi(f, g) = \int_0^{\pi} f(t)g(t)\,dt.$$

Déterminer $\min\limits_{(x, y) \in \mathbf{R}^2} \int_0^{\pi} (x \sin t + y \cos t - t)^2\,dt.$

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x, y) = (x + y - 2)^2 + (2x + y - 1)^2 + (2x + y - 3)^2 + (3x + y - 2)^2.$$

A l'aide de la méthode des moindres carrés, déterminer le minimum de f sur $\mathbf{R}^2$.

Détermination d'un minimum

Pour déterminer le minimum d'une expression sur E dépendant de paramètres $(x_i)_{1 \le i \le n}$, il faut choisir un produit scalaire permettant d'écrire cette expression sous la forme d'une norme $\|v - u\|$ (où u et v sont deux vecteurs de E tels que seul u dépende des paramètres $(x_i)_{1 \le i \le n}$), puis déterminer le sous-espace vectoriel F de E auquel appartient u.

L'expression précédente est alors minimale pour $u = p_F(v)$, que l'on détermine, et on peut alors calculer ce minimum en prenant l'expression en $u = p_F(v)$.

1) a) En munissant $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique, on peut écrire :

$\forall(x, y, z)\in\mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = \|(x - y, x + 2z - 1, y - z + 2)\|^2$ soit :

$= \|x(1, 1, 0) + y(-1, 0, 1) + z(0, 2, -1) - (0, 1, -2)\|^2$ soit encore, en posant $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (-1, 0, 1)$, $u_3 = (0, 2, -1)$ et $v = (0, 1, -2)$:

$= \|xu_1 + yu_2 + zu_3 - v\|^2$ et donc, en posant $u = xu_1 + yu_2 + zu_3$:

$= \|v - u\|^2$.

Or, comme $\forall u\in\mathbb{R}^3$, $\|v - u\| \geq 0$, on peut écrire que $\|v - u\|$ est minimale si et seulement si $\|v - u\|^2$ est minimale. En notant $F = \mathcal{V}ect(u_1, u_2, u_3)$, on en déduit alors que $f(x, y, z)$ $((x, y, z)\in\mathbb{R}^3)$ atteint son minimum lorsque $u = p_F(v)$ (où $u = xu_1 + yu_2 + zu_3$) et on a :

$$u = p_F(v) \Leftrightarrow \begin{cases} u\in F \\ (v - u)\in F^\perp \end{cases}$$ soit, comme $F = \mathcal{V}ect(u_1, u_2, u_3)$:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u\in F \\ (v - u) \perp u_1 \\ (v - u) \perp u_2 \\ (v - u) \perp u_3 \end{cases}$$ et en posant $u = xu_1 + yu_2 + zu_3$:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = xu_1 + yu_2 + zu_3 \\ < v - u, (1, 1, 0) > = 0 \\ < v - u, (-1, 0, 1) > = 0 \\ < v - u, (0, 2, -1) > = 0 \end{cases}$$ soit encore, comme $v - u = (y - x, 1 - x - 2z, -2 - y + z)$:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = xu_1 + yu_2 + zu_3 \\ (y - x) + (1 - x - 2z) = 0 \\ (x - y) + (-2 - y + z) = 0 \\ 2(1 - x - 2z) - (-2 - y + z) = 0 \end{cases}$$ et donc :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = xu_1 + yu_2 + zu_3 \\ -2x + y - 2z = -1 \\ x - 2y + z = 2 \\ -2x + y - 5z = -4 \end{cases}$$ soit encore, en réduisant le sous-système constitué des trois dernières équations ($L_2 \leftarrow -2L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$) :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = xu_1 + yu_2 + zu_3 \\ -2x + y - 2z = -1 \\ 3y = -3 \\ -3z = -3 \end{cases}$$ soit enfin :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = xu_1 + yu_2 + zu_3 \\ x = -1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$ d'où la conclusion :

$\Leftrightarrow u = -u_1 - u_2 + u_3$.

$\|v - u\|$ est donc minimale lorsque $u = -u_1 - u_2 + u_3$. On peut maintenant écrire que f atteint son minimum en $(-1, -1, 1)$. Comme $f\big((-1, -1, 1)\big) = 0$, on peut désormais conclure :

$$\boxed{\min_{\mathbb{R}^3} f = 0}$$

b) En posant $f_1 = \sin$, $f_2 = \cos$ et $g = \mathrm{id}_{[0, \pi]}$, on peut écrire :

$\forall(x, y)\in\mathbb{R}^2,\ \int_0^\pi (x\sin t + y\cos t - t)^2\,dt = \|xf_1 + yf_2 - g\|^2$ soit, en posant $f = xf_1 + yf_2$:

$= \|g - f\|^2$.

Or, comme $\forall f \in E^2$, $\|g - f\| \geq 0$, on peut écrire que $\|g - f\|$ est minimale si et seulement si $\|g - f\|^2$ est minimale. En notant $F = \mathcal{V}ect(f_1, f_2)$, on en déduit alors que $\int_0^\pi (x\sin t + y\cos t - t)^2\,dt$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$) atteint son minimum lorsque $f = p_F(g)$ (où $f = xf_1 + yf_2$) et on a :

$$f = p_F(g) \iff \begin{cases} f \in F \\ (g - f) \in F^\perp \end{cases}$$ soit, comme $F = \mathcal{V}ect(f_1, f_2)$:

$$\iff \begin{cases} f \in F \\ (g - f) \perp f_1 \\ (g - f) \perp f_2 \end{cases}$$ et en posant $f = xf_1 + yf_2$:

$$\iff \begin{cases} f = xf_1 + yf_2 \\ <g - f, f_1> = 0 \\ <g - f, f_2> = 0 \end{cases}$$ i.e. :

$$\iff \begin{cases} f = xf_1 + yf_2 \\ <g, f_1> - x<f_1, f_1> - y<f_2, f_1> = 0 \\ <g, f_2> - x<f_1, f_2> - y<f_2, f_2> = 0 \end{cases}.$$

Or, on a :

– $<g, f_1> = \int_0^\pi t\sin t\,dt$. Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto -\cos t$ étant de classe C^1 sur $[0, \pi]$, à l'aide d'une intégration par parties (on intègre $t \mapsto \sin t$ en $t \mapsto -\cos t$ et on dérive $t \mapsto t$), on peut alors écrire :

$$\int_0^\pi t\sin t\,dt = \left[-t\cos t\right]_0^\pi + \int_0^\pi \cos t\,dt$$ soit :

$$= \pi + \left[\sin t\right]_0^\pi$$ et donc :

$<g, f_1> = \pi$.

– $<g, f_2> = \int_0^\pi t\cos t\,dt$. Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \sin t$ étant de classe C^1 sur $[0, \pi]$, à l'aide d'une intégration par parties (on intègre $t \mapsto \cos t$ en $t \mapsto \sin t$ et on dérive $t \mapsto t$), on peut également écrire :

$$\int_0^\pi t\cos t\,dt = \left[t\sin t\right]_0^\pi - \int_0^\pi \sin t\,dt$$ soit :

$$= 0 - \left[-\cos t\right]_0^\pi$$ et donc :

$<g, f_2> = -2$.

– $<f_1, f_1> = \int_0^\pi \sin^2 t\,dt$ soit :

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi (1 - \cos 2t)\,dt$$ i.e. :

$$= \frac{1}{2}\left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^\pi$$ soit enfin :

$$= \frac{\pi}{2}.$$

– $<f_1, f_2> = \int_0^\pi \sin t\cos t\,dt$ soit :

$$= \frac{1}{2}\left[\sin^2 t\right]_0^\pi$$ et donc :

$$= 0$$ et :

$$- <f_2, f_2> = \int_0^\pi \cos^2 t \, dt$$ soit :

$$= \int_0^\pi (1 - \sin^2 t) \, dt$$ i.e. :

$$= \pi - \int_0^\pi \sin^2 t \, dt$$ et donc, d'après ce qui précède :

$$= \frac{\pi}{2}.$$

On en déduit alors :

$$f = p_F(g) \iff \begin{cases} f = x f_1 + y f_2 \\ \pi - x \frac{\pi}{2} = 0 \\ -2 - y \frac{\pi}{2} = 0 \end{cases}$$ soit :

$$\iff \begin{cases} f = x f_1 + y f_2 \\ x = 2 \\ y = -\frac{4}{\pi} \end{cases}$$

$\|f - g\|$ est donc minimale lorsque $f = 2 f_1 - \frac{4}{\pi} f_2$. On en déduit alors que $\int_0^\pi (x \sin t + y \cos t - t)^2 \, dt$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$) atteint son minimum pour $x = 2$ et $y = -\frac{4}{\pi}$ et on a :

$$\int_0^\pi \left(2 \sin t - \frac{4}{\pi} \cos t - t\right)^2 dt = \left\|2 f_1 - \frac{4}{\pi} f_2 - g\right\|^2$$ i.e. :

$$= <2 f_1 - \frac{4}{\pi} f_2 - g, 2 f_1 - \frac{4}{\pi} f_2 - g>$$ soit encore :

$$= 4 <f_1, f_1> + \frac{16}{\pi^2} <f_2, f_2> + \int_0^\pi t^2 \, dt - \frac{16}{\pi} <f_1, f_2> + \frac{8}{\pi} <f_2, g> - 4 <f_1, g>$$ et donc :

$$= 2\pi + \frac{8}{\pi} + \frac{\pi^3}{3} - 0 - \frac{16}{\pi} - 4\pi$$ soit enfin :

$$= \frac{\pi^3}{3} - 2\pi - \frac{8}{\pi}.$$

On peut désormais conclure :

$$\boxed{\min_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} \int_0^\pi (x \sin t + y \cos t - t)^2 \, dt = \frac{\pi^3}{3} - 2\pi - \frac{8}{\pi}}$$

2) ◌ En considérant le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^4$, on peut écrire, d'après la définition de f :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \|(x + y - 2, 2x + y - 1, 2x + y - 3, 3x + y - 2)\|^2$ soit :

$$= \|(x + y, 2x + y, 2x + y, 3x + y) - (2, 1, 3, 2)\|^2.$$

En posant $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, on en déduit alors :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $f(x, y) = \|AX - B\|^2$.

Or, comme $\forall X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$, $\|AX - B\| \geq 0$, on peut écrire que $\|AX - B\|$ est minimale si et seulement si $\|AX - B\|^2$ est minimale, donc que $f(x, y)$ ($(x, y) \in \mathbf{R}^2$) atteint son minimum lorsque $\|AX - B\|$ (où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$) est minimale.

☞ Pour déterminer, à l'aide de la méthode des moindres carrés, le minimum sur $\mathbf{R}^n$ d'une fonction f telle que : $\exists \left((\alpha_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq n}}, (\beta_i)_{1\leq i\leq p}\right) \in \mathbf{R}^{(n+1)p}$, $\forall (x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbf{R}^n$, $f\left((x_i)_{1\leq i\leq n}\right) = \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} x_j - \beta_i\right)^2$, il faut poser $A = (\alpha_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq n}}$, $B = (\beta_i)_{1\leq i\leq p}$ et on peut alors écrire : $\forall (x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbf{R}^n$, $f\left((x_i)_{1\leq i\leq n}\right) = \|AX - B\|^2$.

Comme $\forall X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$, $\|AX - B\| \geq 0$, on en déduit alors que $\|AX - B\|$ est minimale si et seulement si $\|AX - B\|^2$ est minimale, donc que $f\left((x_i)_{1\leq i\leq n}\right)$ ($(x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbf{R}^n$) atteint son minimum lorsque $\|AX - B\|$ (où $X = (x_i)_{1\leq i\leq n}$) est minimale.

En vérifiant alors que $\operatorname{rg} A = p$ et en utilisant la méthode des moindres carrés, on en déduit alors le minimum de f sur $\mathbf{R}^n$.

❑ Les vecteurs (1, 1, 1, 1) et (1, 2, 2, 3) formant une famille libre de $\mathbf{R}^4$, on peut écrire : $\operatorname{rg} A = 2$. On en déduit alors que l'unique matrice X_0 rendant minimale $\|AX - B\|$ est l'unique solution de l'équation $({}^tAA)X = {}^tAB$.

Or, on a :

– ${}^tAA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$, et :

– ${}^tAB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix}$, d'où :

$({}^tAA)X = {}^tAB \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 18 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}X = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix}$ soit ($L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2$) :

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 18 & 8 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}X = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc :

$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

☞ Pour déterminer le minimum d'une expression du type $\|AX - B\|$ (lorsque $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ et $\operatorname{rg} A = p$), il faut se ramener au cours : ce minimum est atteint lorsque X est solution de $({}^tAA)X = {}^tAB$.

$\|AX - B\|$ est donc minimale lorsque $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. On peut maintenant écrire que f atteint son minimum en (0, 2). Comme f(0, 2) = 2, on peut désormais conclure :

$$\boxed{\min_{\mathbf{R}^2} f = 2}$$

SO

■ 8. Matrices symétriques : diagonalisation

Déterminer pour chacune des matrices M suivantes, une base orthonormale de vecteurs propres (pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ ou de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$). En déduire dans chacun des cas une matrice D diagonale et une matrice P inversible telle que : $M = PD{}^tP$.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Diagonalisation de matrices symétriques réelles

Pour diagonaliser une matrice symétrique réelle M et en déterminer une base orthonormale de vecteurs propres, on détermine ses valeurs propres et ses sous-espaces propres par la méthode traditionnelle (le dernier sous-espace propre de M pouvant être également déterminé comme le supplémentaire orthogonal de la somme des autres sous-espaces propres, donc orthogonal à chacun de ces sous-espaces propres).

Pour déterminer une base orthonormale de vecteurs propres de M, pour chaque sous-espace propre E_λ :

– si $\dim(E_\lambda) = 1$: $E_\lambda = \mathcal{V}ect(u_\lambda)$, il suffit normer de u_λ.

– si $\dim(E_\lambda) \geq 2$: $E_\lambda = \mathcal{V}ect\left((u_{\lambda,i})_{1\leq i\leq p}\right)$, il faut appliquer le procédé d'orthonormalisation de Schmidt aux vecteurs $(u_{\lambda,i})_{1\leq i\leq p}$.

Les matrices D et P telles que $M = PD{}^tP$ sont alors respectivement la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de M et la matrice représentant une base orthonormale de vecteurs propres de M.

1) λ est valeur propre de A si et seulement si $\exists X \neq 0$, $(A - \lambda I)X = 0$. Or, on a :

$$(A - \lambda I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} X = 0 \qquad \text{soit } (L_1 \leftrightarrow L_2) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1-\lambda \\ 1-\lambda & 1 \end{pmatrix} X = 0 \qquad \text{i.e. } (L_2 \leftarrow L_2 - (1-\lambda)L_1) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1-\lambda \\ 0 & 2-\lambda^2 \end{pmatrix} X = 0 \ ①.$$

λ est donc valeur propre de A si et seulement s'il existe un vecteur $X \neq 0$ solution du système précédent, c'est-à-dire si ce système n'est pas un système de Cramer, i.e. si la matrice carrée précédente n'est pas inversible, soit encore, puisqu'elle est triangulaire supérieure : si l'un de ses coefficients diagonaux est nul. Ainsi, λ est valeur propre de A si et seulement si $\lambda \in \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$. On peut alors écrire :

– si $\lambda = \sqrt{2}$, ① devient : $\begin{pmatrix} 1 & -1-\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0$, soit en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$: $x = (1+\sqrt{2})y$.

$\sqrt{2}$ est donc valeur propre de A de sous-espace propre associé $\mathcal{V}ect\left((1+\sqrt{2}, 1)\right)$, et :

– si $\lambda = -\sqrt{2}$, ① devient : $\begin{pmatrix} 1 & -1+\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0$, soit en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$: $x = (1-\sqrt{2})y$.

$-\sqrt{2}$ est donc valeur propre de A de sous-espace propre associé $\mathcal{V}ect\left((1-\sqrt{2}, 1)\right)$.

Posons $u_1 = (1+\sqrt{2}, 1)$ et $u_2 = (1-\sqrt{2}, 1)$. Comme A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on peut écrire que $u_1 \perp u_2$. De plus, on a :

$$\|u_1\| = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2 + 1^2} \qquad \text{soit :}$$

$$= \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \qquad \text{et :}$$

$$\|u_2\| = \sqrt{(1-\sqrt{2})^2 + 1^2} \qquad \text{soit :}$$

$$= \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}.$$

On peut désormais conclure :

> La famille $\left(\dfrac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\begin{pmatrix}1+\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\begin{pmatrix}1-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}\right)$ forme une base orthonormale de vecteurs propres de A et en posant $D = \begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0\\0 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix}\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & \dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & \dfrac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\end{pmatrix}$, on peut écrire : $A = PD{}^tP$.

2) λ est valeur propre de B si et seulement si $\exists X \neq 0$, $(B - \lambda I)X = 0$. Or, on a :

$$(B-\lambda I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2-\lambda & 0 & 1\\0 & 2-\lambda & -1\\1 & -1 & 1-\lambda\end{pmatrix}X = 0 \qquad \text{soit } (L_1 \leftrightarrow L_3) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & -1 & 1-\lambda\\0 & 2-\lambda & -1\\2-\lambda & 0 & 1\end{pmatrix}X = 0 \qquad \text{soit encore } (L_3 \leftarrow L_3 - (2-\lambda)L_1) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & -1 & 1-\lambda\\0 & 2-\lambda & -1\\0 & 2-\lambda & 1-(1-\lambda)(2-\lambda)\end{pmatrix}X = 0 \qquad \text{i.e. } (L_3 \leftarrow L_3 - L_2) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & -1 & 1-\lambda\\0 & 2-\lambda & -1\\0 & 0 & \lambda(\lambda-3)\end{pmatrix}X = 0 \text{ ①.}$$

λ est donc valeur propre de B si et seulement s'il existe un vecteur $X \neq 0$ solution du système précédent, c'est-à-dire si ce système n'est pas un système de Cramer, i.e. si la matrice carrée précédente n'est pas inversible, soit encore, puisqu'elle est triangulaire supérieure : si l'un de ses coefficients diagonaux est nul. Ainsi, λ est valeur propre de B si et seulement si $\lambda \in \{0, 2, 3\}$. On peut alors écrire :

– si $\lambda = 0$, ① devient : $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\0 & 2 & -1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}X = 0$, soit en posant $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$: $\begin{cases}x - y + z = 0\\2y - z = 0\end{cases}$, i.e. : $\begin{cases}x = -y\\z = 2y\end{cases}$.

0 est donc valeur propre de B de sous-espace propre associé $E_0 = \mathcal{Vect}((-1, 1, 2))$,

– si $\lambda = 2$, ① devient : $\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\0 & 0 & -1\\0 & 0 & -2\end{pmatrix}X = 0$, soit en posant $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$: $\begin{cases}x = y\\z = 0\end{cases}$.

2 est donc valeur propre de B de sous-espace propre associé $E_2 = \mathcal{Vect}((1, 1, 0))$, et :

– comme B est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, le sous-espace propre E_3 associé valeur propre 3 de B est tel que $E_3 \perp E_0$ et $E_3 \perp E_2$. Soit alors $u \in \mathbb{R}^3$, $u = (x, y, z)$. On a :

$$u \in E_3 \Leftrightarrow \begin{cases}\langle u, (-1, 1, 2)\rangle = 0\\ \langle u, (1, 1, 0)\rangle = 0\end{cases} \qquad \text{d'où :}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-x + y + 2z = 0\\x + y = 0\end{cases} \qquad \text{et donc :}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y = -x\\z = x\end{cases}.$$

3 est donc valeur propre de B de sous-espace propre associé $E_3 = \mathcal{Vect}((1, -1, 1))$.

Posons $u_0 = (-1, 1, 2)$, $u_2 = (1, 1, 0)$ et $u_3 = (1, -1, 1)$. Comme B est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on peut écrire que les vecteurs u_0, u_2 et u_3 sont orthogonaux deux à deux. De plus, on a :

$\|u_0\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2}$ soit :

$= \sqrt{6}$,

$\|u_2\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}$ soit :

$= \sqrt{2}$ et :

$\|u_3\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}$ soit :

$= \sqrt{3}$.

On peut désormais conclure :

> La famille $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$ forme une base orthonormale de vecteurs propres de B et en posant $D = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$, on peut écrire : $B = PD^tP$.

3) λ est valeur propre de C si et seulement si $\exists X \neq 0$, $(C - \lambda I)X = 0$. Or, on a :

$$(C - \lambda I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-\lambda & 1 & 1\\ 1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{pmatrix}X = 0 \qquad \text{soit } (L_1 \leftrightarrow L_3) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & -\lambda\\ 1 & -\lambda & 1\\ -\lambda & 1 & 1\end{pmatrix}X = 0 \qquad \text{soit encore } (L_2 \leftarrow L_2 - L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_1) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & -\lambda\\ 0 & -\lambda - 1 & 1 + \lambda\\ 0 & 1 + \lambda & 1 - \lambda^2\end{pmatrix}X = 0 \qquad \text{i.e. } (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & -\lambda\\ 0 & -\lambda - 1 & 1 + \lambda\\ 0 & 0 & 2 + \lambda - \lambda^2\end{pmatrix}X = 0 \qquad \text{soit enfin :}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & -\lambda\\ 0 & -\lambda - 1 & 1 + \lambda\\ 0 & 0 & (\lambda - 2)(\lambda + 1)\end{pmatrix}X = 0 \ ①.$$

λ est donc valeur propre de C si et seulement s'il existe un vecteur $X \neq 0$ solution du système précédent, c'est-à-dire si ce système n'est pas un système de Cramer, i.e. si la matrice carrée précédente n'est pas inversible, soit encore, puisqu'elle est triangulaire supérieure : si l'un de ses coefficients diagonaux est nul. Ainsi, λ est valeur propre de C si et seulement si $\lambda \in \{-1, 2\}$. On peut alors écrire :

– si $\lambda = -1$, ① devient : $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}X = 0$, soit en posant $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$: $x + y + z = 0$.

-1 est donc valeur propre de C de sous-espace propre associé $E_{-1} = \mathcal{V}ect\big((-1, 0, 1), (-1, 1, 0)\big)$.

– comme C est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, le sous-espace propre E_2 associé valeur propre 2 de C est tel que $E_2 \perp E_{-1}$. Soit alors $u \in \mathbb{R}^3$, $u = (x, y, z)$. On a :

$$u \in E_2 \iff \begin{cases} \langle u, (-1, 0, 1) \rangle = 0 \\ \langle u, (-1, 1, 0) \rangle = 0 \end{cases}$$ d'où :

$$\iff \begin{cases} -x + z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$ et donc :

$$\iff \begin{cases} y = x \\ z = x \end{cases}.$$

2 est donc valeur propre de C de sous-espace propre associé $E_2 = \mathcal{V}ect\big((1, 1, 1)\big)$.

□ Posons $u_1 = (-1, 0, 1)$, $u_2 = (-1, 1, 0)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$. D'après le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, on peut écrire que la famille $(v_i)_{1 \le i \le 2}$ définie par : $v_1 = \dfrac{1}{\|u_1\|} u_1$ et $v_2 = \dfrac{1}{\|u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1\|} (u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1)$ forme une base orthonormale de E_{-1}.

De plus, comme $E_2 \perp E_{-1}$, on peut écrire : $u_3 \perp v_1$ et $u_3 \perp v_2$. En posant $v_3 = \dfrac{1}{\|u_3\|} u_3$, on en déduit alors que la famille $(v_i)_{1 \le i \le 3}$ forme une base orthonormale de vecteurs propres de C. Or, on a :

– $\|u_1\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2}$ soit :

$= \sqrt{2}$ d'où :

$v_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} u_1$ i.e. :

$= \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et, comme $v_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} u_1$:

– $\langle u_2, v_1 \rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \langle u_1, u_2 \rangle$ soit, comme $\langle u_1, u_2 \rangle = (-1)^2 = 1$:

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et donc :

$u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1 = u_2 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} v_1$ soit, comme $v_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} u_1$:

$= u_2 - \dfrac{1}{2} u_1$ i.e. :

$= \left(-\dfrac{1}{2}, 1, -\dfrac{1}{2}\right)$ d'où :

$\|u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1\| = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2}$ soit :

$= \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ et donc :

$v_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} (u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1)$ i.e. :

$= \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \left(-\dfrac{1}{2}, 1, -\dfrac{1}{2}\right)$ soit enfin :

$= \left(-\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$ et :

$- \|u_3\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2}$ soit :

$= \sqrt{3}$ d'où :

$v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} u_3$ i.e. :

$= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

On peut désormais conclure :

> La famille $\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$ forme une base orthonormale de vecteurs propres de C et en posant $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, on peut écrire : $C = PD{}^tP$.

S❷

● 9. Matrices orthogonales

1) Montrer que les matrices suivantes sont inversibles et déterminer leur inverse :

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $(\theta \in \mathbf{R})$.

b) $B = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -2 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.

2) Soient $\mathfrak{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathfrak{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ deux bases orthonormales de $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire canonique avec :

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1),\ e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0) \text{ et } e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2),$$

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1),\ f_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1) \text{ et } f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1).$$

Déterminer la matrice de passage P de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{B}'$ et calculer P^{-1}.

1) a) Soient $u_1 = (-1, 0, 0)$, $u_2 = (0, \cos\theta, \sin\theta)$ et $u_3 = (0, -\sin\theta, \cos\theta)$. En considérant l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on peut alors écrire :

$- <u_1, u_2> = <u_1, u_3> = <u_2, u_3> = 0$, et :

$- \|u_1\| = \|u_2\| = \|u_3\| = 1$.

La famille (u_1, u_2, u_3) forme donc une famille orthonormale de $\mathbf{R}^3$. Comme elle est composée de trois vecteurs et comme $\dim(\mathbf{R}^3) = 3$, elle forme une base orthonormale de $\mathbf{R}^3$. A est donc la matrice de passage d'une base orthonormale de $\mathbf{R}^3$ (sa base canonique) à une autre base orthonormale de $\mathbf{R}^3$ (la base (u_1, u_2, u_3)).

On peut désormais conclure :

$$\boxed{\text{A est inversible, d'inverse } A^{-1} = {}^tA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}$$

b) Soient $v_1 = (\sqrt{3}, 0, -\sqrt{3})$, $v_2 = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ et $v_3 = (1, -2, 1)$. En considérant à nouveau l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on peut écrire :

– $<v_1, v_2> = <v_1, v_3> = <v_2, v_3> = 0$, et :

– $\|v_1\| = \|v_2\| = \|v_3\| = 6$.

La famille $\left(\frac{1}{\sqrt{6}} v_1, \frac{1}{\sqrt{6}} v_2, \frac{1}{\sqrt{6}} v_3\right)$ forme donc une famille orthonormale de $\mathbb{R}^3$. Comme elle est composée de trois vecteurs et comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, elle forme une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$. $\left(\frac{1}{\sqrt{6}} B\right)$ est donc la matrice de passage d'une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ (sa base canonique) à une autre base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ (la base $\left(\frac{1}{\sqrt{6}} v_1, \frac{1}{\sqrt{6}} v_2, \frac{1}{\sqrt{6}} v_3\right)$).

La matrice $\left(\frac{1}{\sqrt{6}} B\right)$ est donc inversible d'inverse ${}^t\left(\frac{1}{\sqrt{6}} B\right)$ et on peut alors écrire :

$\left(\frac{1}{\sqrt{6}} B\right)^{-1} = {}^t\left(\frac{1}{\sqrt{6}} B\right)$ soit :

$\sqrt{6}\, B^{-1} = \frac{1}{\sqrt{6}}\, {}^tB$ i.e. :

$B^{-1} = \frac{1}{6}\, {}^tB$ d'où la conclusion :

$$\boxed{\text{B est inversible, d'inverse } B^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$$

☞ Se souvenir que la matrice de passage P d'une base orthonormale d'un espace euclidien E dans une autre base orthonormale de E est inversible d'inverse $P^{-1} = {}^tP$ (cf. cours). Une telle matrice est dite orthogonale.

☞ Pour montrer qu'une matrice P est orthogonale, il faut déterminer un produit scalaire pour lequel les vecteurs colonnes de cette matrice forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ (à un coefficient multiplicateur α près). P est alors inversible d'inverse $P^{-1} = \alpha^2\, {}^tP$.

2) $\mathcal{B}$ étant une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$, on peut écrire : $\forall j \in [1, 3]$, $f_j = \sum_{i=1}^{3} <f_j, e_i> e_i$. Or, on a :

– $<f_1, e_1> = \frac{1}{3}$, $<f_1, e_2> = 0$ et $<f_1, e_3> = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,

– $<f_2, e_1> = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $<f_2, e_2> = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $<f_2, e_3> = -\frac{1}{6}$, et :

– $<f_3, e_1> = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $<f_3, e_2> = \frac{1}{2}$ et $<f_3, e_3> = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

On en déduit alors que :

– $f_1 = \frac{1}{3} e_1 + \frac{2\sqrt{2}}{3} e_3$,

– $f_2 = \frac{\sqrt{2}}{3} e_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} e_2 - \frac{1}{6} e_3$, et :

– $f_3 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} e_1 + \frac{1}{2} e_2 - \frac{1}{2\sqrt{3}} e_3$.

☞ Se souvenir que les coordonnées d'un vecteur x dans une base orthonormale $(e_i)_{1 \le i \le n}$ sont les $(< x, e_i >)_{1 \le i \le n}$, i.e. : $x = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i$.

La matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice représentant les vecteurs (f_1, f_2, f_3) dans la base $\mathcal{B}$. On en déduit alors que : $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}$. P étant la matrice de passage d'une base orthonormale de $\mathbf{R}^3$ à une autre base orthonormale de $\mathbf{R}^3$, P est inversible d'inverse ${}^tP$ et on peut alors conclure :

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}}$$

Suites

Fiche de cours

I. Généralités SO EO

■ Soit I un intervalle de $\mathbb{N}$. On appelle suite d'éléments de $\mathbb{K}$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), l'application u : $\left| \begin{array}{l} I \to \mathbb{K} \\ n \mapsto u_n = u(n) \end{array} \right.$, notée $(u_n)_{n\in I}$ ou (u_n) ou u.

■ Soit $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ une suite réelle,
– u est majorée si : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$: M est alors un majorant de cette suite,
– u est minorée si : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$: m est alors un minorant de cette suite,
– u est bornée si u est à la fois majorée et minorée.

■ Soit $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ une suite réelle,
– u est croissante (resp. strictement croissante) si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$ (resp. si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$),
– u est décroissante (resp. strictement décroissante) si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$ (resp. si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$),
– u est monotone (resp. strictement monotone) si u est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante),
– u est constante si : $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha$ (ou encore si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n$),
– u est stationnaire si : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n = u_{n_0}$ (ou encore si : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_{n+1} = u_n$).

II. Convergence et divergence d'une suite SO EO

1. Définitions

■ Soit u une suite réelle. u est une suite convergente si : $\exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \left| u_n - \ell \right| < \varepsilon$.
ℓ est alors l'unique limite de u et on note : $\ell = \lim u$ ou $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ (on dit que u converge ou tend vers ℓ).

■ Toute suite convergente est bornée.

■ Soient u une suite convergente de limite ℓ ($\ell \in \mathbb{R}$), a et b deux réels tels que $a < \ell < b$. On a alors :
$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, a \leq u_n \leq b$.

■ ***Extension au cas des suites complexes* (SO).** Soit u une suite complexe. u est une suite convergente si : $\exists \ell \in \mathbb{C}, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \left| u_n - \ell \right| < \varepsilon$.

■ Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente (une suite divergente tend vers $\pm\infty$ ou n'a pas de limite).

■ ***Limites infinies.*** Soit u une suite réelle,
– u tend vers $+\infty$ si : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n > A$,
– u tend vers $-\infty$ si : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n < A$.

2. Théorèmes de convergence

■ ***Convergence de suites monotones.*** Toute suite croissante et majorée ou décroissante et minorée converge.

■ Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, u une suite d'éléments de I qui tend vers une limite α ($\alpha \in \mathbb{R}$ ou $\alpha = \pm\infty$) et f une fonction définie sur I, admettant une limite ℓ ($\ell \in \mathbb{R}$ ou $\ell = \pm\infty$) en α. La suite $\left(f(u_n)\right)_{n\in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ.

■ Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I telle que $f(I) \subset I$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in I$ et par la relation de récurrence : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge de limite ℓ ($\ell \in I$ ou ℓ est une borne de I) et si f est continue en ℓ, alors ℓ est solution de l'équation $x = f(x)$ et vérifie ainsi la relation $\ell = f(\ell)$.

■ ***Théorème de prolongement des inégalités.*** Soient u et v deux suites réelles telles que : $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ u_n \leq v_n$.

• Si u et v sont convergentes, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

• Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

• Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

■ ***Existence d'une limite par encadrement (dit "théorème de l'encadrement").*** Soient u, v et w trois suites réelles telles que u et w soient convergentes de limite ℓ ($\ell \in \mathbb{R}$). Si $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ u_n \leq v_n \leq w_n$, alors v converge de limite ℓ.

3. Suites adjacentes

■ Soient u et v deux suites réelles. u et v sont adjacentes si l'une est croissante (à partir d'un certain rang), l'autre décroissante (à partir d'un certain rang) et si $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

■ Deux suites adjacentes convergent et admettent la même limite.

III. Comparaison de suites SO EO

1. Suite négligeable devant une autre

■ Soient u et v deux suites réelles. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et on note : $u_n = o(v_n)$, s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente de limite nulle telle que : $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ u_n = \varepsilon_n v_n$.

■ Si $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ v_n \neq 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.

Propriétés : Si $u_n = o(v_n)$ et si $w_n = o(t_n)$, alors :

– $u_n w_n = o(v_n t_n)$,

– $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ u_n^{\,p} = o(v_n^{\,p})$,

– si $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \begin{cases} w_n \neq 0 \\ t_n \neq 0 \end{cases}$, alors : $\dfrac{u_n}{t_n} = o\left(\dfrac{v_n}{w_n}\right)$.

Exemples usuels :

• Si $\alpha < \beta$, $n^\alpha = o(n^\beta)$.

• Si $\alpha > 0$ (et $\beta \in \mathbb{R}$), $(\ln n)^\beta = o(n^\alpha)$.

• Si $a > 1$ (et $\alpha \in \mathbb{R}$), $n^\alpha = o(a^n)$.

• Si $|a| < |b|$, $a^n = o(b^n)$.

2. Suites équivalentes

■ Soient u et v deux suites réelles. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes, et on note : $u_n \sim v_n$, s'il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente de limite 1 telle que : $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ u_n = h_n v_n$.

■ Si $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ v_n \neq 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.

■ Si $u_n \sim v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ($\ell \in \mathbb{R}$ ou $\ell = \pm\infty$), alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$: deux suites équivalentes ont même limite (sous réserve d'existence).

■ Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ($\ell \in \mathbb{R}^*$), alors $u_n \sim \ell$.

Propriétés :

• Si $u_n \sim v_n$ et si $w_n \sim t_n$, alors :

– $u_n w_n \sim v_n t_n$,

– $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $u_n^p \sim v_n^p$,

– si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $\begin{cases} w_n \neq 0 \\ t_n \neq 0 \end{cases}$, alors : $\dfrac{u_n}{w_n} \sim \dfrac{v_n}{t_n}$.

• Si $v_n = o(u_n)$, alors : $u_n + v_n \sim u_n$.

Exemples usuels : Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$, on a :

• $\sin(u_n) \sim u_n$,

• $\cos(u_n) - 1 \sim -\dfrac{u_n^2}{2}$,

• $\tan(u_n) \sim u_n$,

• $\ln(1 + u_n) \sim u_n$,

• $e^{u_n} - 1 \sim u_n$,

• $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$ $(\alpha \in \mathbb{R})$,

• Si $P = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k$ (avec $a_p \neq 0$), alors : $P(n) \sim a_p n^p$.

3. Suite dominée par une autre (SO)

■ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et on note : $u_n = O(v_n)$, s'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée telle que : $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $u_n = \alpha_n v_n$.

■ Si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $v_n \neq 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq n_0}$ est bornée.

IV. Suites usuelles SO EO

1. Suites arithmétiques

u est une suite arithmétique si : $\exists r \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$. On a alors :

– $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2$, $u_n = u_p + (n - p)r$,

– $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$,

– $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = (n + 1)\left(\dfrac{u_0 + u_n}{2}\right) = (n + 1)u_0 + \dfrac{n(n + 1)}{2} r$.

2. Suites géométriques

u est une suite géométrique si : $\exists q \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q u_n$. On a alors :

– $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2$, $p \leq n$, $u_n = q^{n-p} u_p$,

– $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = q^n u_0$,

– $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \begin{cases} (n + 1)u_0 & \text{si } q = 1 \\ u_0\left(\dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right) & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$

Si $q \neq 1$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

3. Suites arithmético-géométriques

u est une suite arithmético-géométrique si : $\exists(a, b)\in \mathbb{R}^2$, $\forall n\in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$ ($a \neq 1$ et $b \neq 0$). En posant $c = ac + b$ (i.e. : $c = \frac{b}{1-a}$), on a alors :

– $\forall(n, p)\in \mathbb{N}^2$, $p \leq n$, $u_n = (u_p - c)a^{n-p} + c$,

– $\forall n\in \mathbb{N}$, $u_n = (u_0 - c)a^n + c$.

4. Suites vérifiant une relation linéaire de récurrence d'ordre 2

Soient a et b deux éléments de $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ la suite définie par u_0, u_1 et par la relation de récurrence : $\forall n\in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. Son équation caractéristique est : $x^2 - ax - b = 0$ ①.

• Si u est une suite réelle :

– Si ① admet deux racines réelles distinctes x_1 et x_2, alors : $\exists(\lambda, \mu)\in \mathbb{R}^2$, $\forall n\in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n$.

– Si ① admet une racine double x_0, alors : $\exists(\lambda, \mu)\in \mathbb{R}^2$, $\forall n\in \mathbb{N}$, $u_n = (\lambda + \mu n)x_0^n$.

– **(S0)** Si ① admet deux racines complexes conjuguées $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$, alors :
$\exists(\lambda, \mu)\in \mathbb{R}^2$, $\forall n\in \mathbb{N}$, $u_n = \big(\lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta)\big)r^n$.

• **(S0)** Si u est une suite complexe :

– Si ① admet deux racines distinctes x_1 et x_2, alors : $\exists(\lambda, \mu)\in \mathbb{C}^2$, $\forall n\in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n$.

– Si ① admet une racine double x_0, alors : $\exists(\lambda, \mu)\in \mathbb{C}^2$, $\forall n\in \mathbb{N}$, $u_n = (\lambda + \mu n)x_0^n$.

Exercices clefs, méthodes et astuces

S0 E0

1. Calcul de limites

1) Après en avoir déterminé un équivalent, calculer la limite de la suite $\left(\frac{6n^3 + 3n^2 + 4n + 1}{2n^3 - 5n^2 + 3}\right)_{n\in \mathbb{N}}$.

2) Déterminer la limite de la suite $\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)_{n\in \mathbb{N}}$.

3) Soit $x\in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $\left(\frac{x^n}{n!}\right)_{n\in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

4) Soient a et b deux réels strictement positifs. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{bn}$.

5) Soit $\alpha\in \mathbb{R}$ et $x\in]0, 1[$. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha x^n = 0.$$

6) Soient a et b deux réels positifs tels que $a > b$. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n\in \mathbb{N},\ u_n = \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n}.$$

7) Soient a et b deux réels non nuls. Déterminer la limite de la suite (u_n) dont le terme général est défini par :

$$u_n = \frac{\ln\left(\cos\left(\frac{a}{n}\right)\right)}{\ln\left(\cos\left(\frac{b}{n}\right)\right)}.$$

8) a) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

1) Une suite définie par un polynôme étant équivalente à son monôme de plus haut degré, on peut écrire :

$6n^3 + 3n^2 + 4n + 1 \sim 6n^3$ et $2n^3 - 5n^2 + 3 \sim 2n^3$, et donc : $\dfrac{6n^3 + 3n^2 + 4n + 1}{2n^3 - 5n^2 + 3} \sim \dfrac{6n^3}{2n^3}$, i.e. :

$\dfrac{6n^3 + 3n^2 + 4n + 1}{2n^3 - 5n^2 + 3} \sim 3$.

Deux suites équivalentes ayant même limite (sous réserve d'existence), on en déduit alors :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{6n^3 + 3n^2 + 4n + 1}{2n^3 - 5n^2 + 3} = 3}$$

2) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \quad \text{soit :}$$

$$= \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \quad \text{i.e. :}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right) = +\infty$, on peut alors écrire : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$, et donc :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0}$$

☞ Pour déterminer la limite d'une suite dont le terme général est défini comme la différence de deux racines carrées, il faut généralement multiplier et diviser celui-ci par la "quantité conjuguée" de cette différence.

3) ❑ Si $x = 0$, la suite $\left(\dfrac{x^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge clairement vers 0.

❑ Si $x \in \mathbb{R}^*$, soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{x^n}{n!}$. Comme $x \neq 0$, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 0$ et on peut alors écrire : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{x}{n+1}$. Or, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x}{n+1} = 0$. D'après la définition de la limite d'une suite, on en déduit alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \left|\frac{x}{n+1}\right| \leq \varepsilon \quad \text{soit :}$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq \varepsilon \quad \text{i.e. :}$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ |u_{n+1}| \leq \varepsilon |u_n|.$$

Soit alors $q \in]0, 1[$. En posant $\varepsilon = q$ et en itérant la relation précédente, on peut alors écrire :

$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ 0 \leq |u_n| \leq q^{n-n_0} |u_{n_0}|$.

Or, comme $q \in]0, 1[$, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^{n-n_0} = 0$, et donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^{n-n_0} |u_{n_0}| = 0$. La suite $\left(|u_n|\right)_{n \geq n_0}$ est donc encadrée par la suite nulle et par une suite qui tend vers 0, d'où (théorème de l'encadrement) : $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n| = 0$, et donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

On peut maintenant conclure :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0}$$

NB : On remarque que l'on a ainsi : $\forall x\in \mathbb{R}$, $x^n = o(n!)$.

☞ **Résultat important.** Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$, soit : $x^n = o(n!)$ (démonstration à connaître).

Il existe également une autre démonstration de ce résultat, plus rapide, mais utilisant des notions sur les séries : comme, pour tout $x\in\mathbb{R}$, la série de terme général $\frac{x^n}{n!}$ converge, son terme général tend vers 0, i.e. : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

☞ Si une suite (u_n) est définie comme un produit de termes, pour montrer qu'elle converge vers 0, il faut parfois s'intéresser au quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Si $\exists q\in]0,1[$, $\exists n_0\in\mathbb{N}$, $\forall n\geq n_0$, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq q$, on peut écrire : $\exists n_0\in\mathbb{N}$, $\forall n\geq n_0$, $|u_n| \leq q^{n-n_0}|u_{n_0}|$ et on en déduit alors que u converge vers 0.

☞ De même, si une suite (u_n) est une suite positive et si $\exists q\in]1,+\infty[$, $\exists n_0\in\mathbb{N}$, $\forall n\geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}\geq q$, alors : $\exists n_0\in\mathbb{N}$, $\forall n\geq n_0$, $u_n \geq q^{n-n_0}u_{n_0}$ et on en déduit alors que u tend vers $+\infty$.

4) On a : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\left(1+\frac{a}{n}\right)^{bn} = \exp\left[bn\cdot\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)\right]$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a}{n} = 0$, d'après le cours, on peut écrire : $\ln\left(1+\frac{a}{n}\right) \sim \frac{a}{n}$, d'où : $bn\cdot\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)\sim ab$.

Deux suites équivalentes ayant même limite (sous réserve d'existence), on en déduit alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} bn\cdot\ln\left(1+\frac{a}{n}\right) = ab$.

Comme $\lim\limits_{x\to ab} e^x = e^{ab}$, on peut alors écrire : $\lim\limits_{n\to+\infty}\exp\left[bn\cdot\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)\right] = e^{ab}$, et donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{bn} = e^{ab}}$$

☞ Pour étudier une suite (u_n), strictement positive à partir d'un certain rang et dont la variable est à la fois en puissance et dans le terme mis en puissance, il faut étudier la suite $(\ln u_n)$, puis se ramener à la suite initiale à l'aide de la fonction exponentielle.

☞ Lorsque l'on cherche la limite ℓ ($\ell\in\mathbb{R}$ ou $\ell = \pm\infty$) d'une suite du type $(f(u_n))$, après avoir montré que (u_n) tend vers α ($\alpha\in\mathbb{R}$ ou $\alpha = \pm\infty$), **il ne faut jamais oublier d'écrire** que f tend vers ℓ en α.

☞ En plus des quatre méthodes de calcul de limites d'une suite vues en Terminale (utilisation de la définition, opérations algébriques sur les limites, quantités conjuguées, lien avec des limites classiques), d'autres méthodes sont possibles en prépa :
– l'utilisation des équivalents et des négligeabilités qui permettent de se ramener à des expressions simples facilitant les calculs,
– l'utilisation des développements limités.

5) On a :

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $n^\alpha x^n = \exp\left(\ln(n^\alpha x^n)\right)$ soit :

$= \exp(\alpha\ln n + n\ln x)$ soit encore :

$= \exp\left[n\left(\ln x + \alpha\frac{\ln n}{n}\right)\right]$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\ln x+\alpha\dfrac{\ln n}{n}\right)=\ln x$ et comme $\ln x\neq 0$ (car $x\in]0,1[$), on peut alors écrire, lorsque n tend vers $+\infty$: $\left(\ln x+\alpha\dfrac{\ln n}{n}\right)\sim\ln x$, et donc : $n\left(\ln x+\alpha\dfrac{\ln n}{n}\right)\sim n\ln x$.

Or, comme $x\in]0,1[$, on a : $\ln x<0$, d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln x=-\infty$, et donc, deux suites équivalentes ayant même limite (sous réserve d'existence) : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[n\left(\ln x+\alpha\dfrac{\ln n}{n}\right)\right]=-\infty$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$, on peut alors écrire : $\lim\limits_{n\to+\infty}\exp\left[n\left(\ln x+\alpha\dfrac{\ln n}{n}\right)\right]=0$, et donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n^\alpha x^n=0}$$

NB : Une autre méthode était possible pour calculer cette limite : utiliser la négligeabilité classique $n^\alpha=o(a^n)$ (lorsque $a>1$ et $\alpha\in\mathbb{R}$) en substituant $\dfrac{1}{x}$ à a (on a $x\in]0,1[$) et on obtient alors immédiatement le résultat recherché. Néanmoins, il arrive assez souvent que la démonstration demandée aux candidats aux concours soit celle exposée ci-dessus.

☞ Se souvenir que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha x^n=0$ (démonstrations à connaître).

6) Comme $b<a$, on peut écrire : $b^n=o(a^n)$, d'où : $a^n+b^n\sim a^n$ et $a^{n+1}+b^{n+1}\sim a^{n+1}$. On en déduit alors, d'après la définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $u_n\sim\dfrac{a^{n+1}}{a^n}$, i.e. : $u_n\sim a$.

Deux suites équivalentes ayant même limite (sous réserve d'existence), on peut alors conclure :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n=a}$$

7) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{b}{n}=0$ et comme $-\dfrac{\pi}{4}<0<\dfrac{\pi}{4}$, d'après le cours, on peut écrire que :

$\exists n_0\in\mathbb{N}^*,\ \forall n\geq n_0,\ \begin{cases}-\dfrac{\pi}{4}\leq\dfrac{a}{n}\leq\dfrac{\pi}{4}\\ -\dfrac{\pi}{4}\leq\dfrac{b}{n}\leq\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$ soit, comme $-\dfrac{\pi}{4}<-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}>\dfrac{\pi}{4}$:

$\exists n_0\in\mathbb{N}^*,\ \forall n\geq n_0,\ \begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{a}{n}<\dfrac{\pi}{2}\\ -\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{b}{n}<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ soit encore, comme $\cos\left(\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\right)=]0,1[$:

$\exists n_0\in\mathbb{N}^*,\ \forall n\geq n_0,\ \begin{cases}0<\cos\left(\dfrac{a}{n}\right)<1\\ 0<\cos\left(\dfrac{b}{n}\right)<1\end{cases}$ et donc, comme $\ln(]0,1[)=\mathbb{R}_-^*$:

$\exists n_0\in\mathbb{N}^*,\ \forall n\geq n_0,\ \begin{cases}\ln\left(\cos\left(\dfrac{a}{n}\right)\right)<0\\ \ln\left(\cos\left(\dfrac{b}{n}\right)\right)<0\end{cases}$.

On peut maintenant écrire : $\exists n_0\in\mathbb{N}^*,\ \forall n\geq n_0,\ u_n>0$. Or, d'après la définition de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$, on a :

$\forall n\geq n_0,\ u_n=\dfrac{\ln\left[1+\left(\cos\left(\frac{a}{n}\right)-1\right)\right]}{\ln\left[1+\left(\cos\left(\frac{b}{n}\right)-1\right)\right]}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{b}{n}=0$ et comme $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-1)=0$, on en déduit alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos\left(\dfrac{a}{n}\right)-1=\lim\limits_{n\to+\infty}\cos\left(\dfrac{b}{n}\right)-1=0$, soit, à l'aide des équivalents classiques :

– $\ln\left[1+\left(\cos\left(\frac{a}{n}\right)-1\right)\right] \sim \cos\left(\frac{a}{n}\right)-1$, et :

– $\ln\left[1+\left(\cos\left(\frac{b}{n}\right)-1\right)\right] \sim \cos\left(\frac{b}{n}\right)-1$.

On peut maintenant écrire : $u_n \sim \dfrac{\cos\left(\frac{a}{n}\right)-1}{\cos\left(\frac{b}{n}\right)-1}$. De plus, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b}{n} = 0$, on a, toujours à l'aide des équivalents classiques :

– $\cos\left(\frac{a}{n}\right)-1 \sim -\frac{a^2}{2n^2}$, et :

– $\cos\left(\frac{b}{n}\right)-1 \sim -\frac{b^2}{2n^2}$.

On en déduit alors : $u_n \sim \dfrac{-\frac{a^2}{2n^2}}{-\frac{b^2}{2n^2}}$, soit : $u_n \sim \frac{a^2}{b^2}$, et donc, deux suites équivalentes ayant même limite (sous réserve d'existence) :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{a^2}{b^2}}$$

☞ Lorsque l'on étudie une suite, il faut toujours s'assurer de l'existence de tous ses termes (au moins à partir d'un certain rang).

☞ Les seules opérations possibles sur les équivalents sont la multiplication, la division et la mise à une puissance entière. L'addition, la soustraction et la composition d'équivalents sont interdits.
Dans ces cas de figure (comme ici), il faut chercher à se ramener astucieusement à des équivalents classiques (sans, bien évidemment, effectuer de composition d'équivalents).

8) a) ❏ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall x\in\mathbb{R}^+$, $f(x) = \ln(1+x) - x$. f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et on a :
$\forall x\in\mathbb{R}^+$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = -\dfrac{x}{1+x}$.

On en déduit alors : $\forall x\in\mathbb{R}^+$, $f'(x) \le 0$. f est donc décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et on peut alors écrire :

$\forall x\in\mathbb{R}^+$, $f(x) \le f(0)$ soit, comme $f(0) = 0$:

$\forall x\in\mathbb{R}^+$, $f(x) \le 0$ et donc :

$\forall x\in\mathbb{R}^+$, $\ln(1+x) \le x$.

❏ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall x\in\mathbb{R}^+$, $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$. g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et on a :
$\forall x\in\mathbb{R}^+$, $g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 + x = \dfrac{x^2}{1+x}$.

On en déduit alors : $\forall x\in\mathbb{R}^+$, $g'(x) \ge 0$. g est donc croissante sur $\mathbb{R}^+$ et on peut alors écrire :

$\forall x\in\mathbb{R}^+$, $g(x) \ge g(0)$ soit, comme $g(0) = 0$:

$\forall x\in\mathbb{R}^+$, $g(x) \ge 0$ et donc :

$\forall x\in\mathbb{R}^+$, $\ln(1+x) \ge x - \frac{x^2}{2}$.

❏ On peut maintenant conclure :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^+,\ x - \frac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x}$$

b) Comme $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall k\in[1, n]$, $\left(\frac{k}{n^2}\right)\in\mathbb{R}^+$, en substituant $\frac{k}{n^2}$ ($n\in\mathbb{N}^*$, $k\in[1, n]$) à x dans la relation précédente, on peut alors écrire :

$\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall k\in[1, n], \frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \leq \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}$ soit, en sommant pour k = 1 à k = n, et en reconnaissant les sommes des n premiers entiers naturels non nuls et de leurs carrés :

$\forall n\in\mathbb{N}^*, \frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4} \leq \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{n(n+1)}{2n^2}$ et donc :

$\forall n\in\mathbb{N}^*, \frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq \ln\left[\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right] \leq \frac{n+1}{2n}$.

Or, on a : $\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} = 0$. La suite $\left(\ln\left[\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right]\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc encadrée par deux suites qui convergent vers $\frac{1}{2}$. On en déduit alors (théorème de l'encadrement) : $\lim_{n\to+\infty}\ln\left[\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right] = \frac{1}{2}$.

Comme $\lim_{x\to\frac{1}{2}} e^x = e^{\frac{1}{2}}$, on peut alors écrire : $\lim_{n\to+\infty}\exp\left(\ln\left[\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right]\right) = e^{\frac{1}{2}}$, et donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right) = e^{\frac{1}{2}}}$$

☞ Pour déterminer la limite d'une suite définie comme un produit de termes strictement positifs $\left(\prod u_k\right)$, il faut le plus souvent étudier au préalable la suite $\left(\ln\left(\prod u_k\right)\right) = \left(\sum \ln u_k\right)$, puis se ramener à la suite initiale à l'aide de la fonction exponentielle.

SO EO

■ 2. Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre

1) (SO EO) Soient $\ell\in\mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, convergente de limite ℓ.

a) Soient a et b deux réels tels que $a < \ell < b$. Montrer que :

$$\exists n_0\in\mathbb{N}, \forall n \geq n_0, a < u_n < b.$$

b) Soit α un réel tel que $\ell \neq \alpha$. Montrer que :

$$\exists n_0\in\mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \neq \alpha.$$

2) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, convergente de limite ℓ ($\ell\in\mathbb{R}$) et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que :

$$\exists n_0\in\mathbb{N}, \forall n \geq n_0, v_n = u_n.$$

Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

3) a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante telle que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n \leq 1 + \frac{1}{n}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer un majorant de sa limite.

b) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante telle que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, 1 - \frac{1}{n} < v_n < 2 + \frac{1}{n+1}$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer un encadrement de sa limite.

c) Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite telle que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, w_n \geq \ln n$. Déterminer la nature et la limite éventuelle de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4) a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n+1}\leq u_n\leq\frac{1}{n}.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

b) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ |v_n|\leq\frac{1}{n}.$$

Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

1) a) Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de limite ℓ, d'après la définition de la limite d'une suite, on peut écrire :

$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_1\in\mathbb{N},\ \forall n\geq n_1,\ |u_n-\ell|<\varepsilon$ soit :

$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_1\in\mathbb{N},\ \forall n\geq n_1,\ \ell-\varepsilon<u_n<\ell+\varepsilon$ ①.

En posant $\varepsilon=\ell-a$ dans la relation ① ($\varepsilon>0$ car $\ell\in]a,b[$), on peut alors écrire :

$\exists n_2\in\mathbb{N},\ \forall n\geq n_2,\ u_n>a$ ②.

De même, en posant $\varepsilon=b-\ell$ dans la relation ① ($\varepsilon>0$ car $\ell\in]a,b[$), on peut également écrire :

$\exists n_3\in\mathbb{N},\ \forall n\geq n_3,\ u_n<b$ ③.

En posant $n_0=\max(n_2,n_3)$, les relations ② et ③ nous permettent désormais de conclure :

$$\boxed{\exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geq n_0,\ a<u_n<b}$$

☞ Se souvenir que si (u_n) est une suite convergente de limite ℓ ($\ell\in\mathbb{R}$), a et b deux réels tels que $a<\ell<b$, alors : $\exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geq n_0,\ a<u_n<b$ (démonstration à connaître, seule la propriété avec des inégalités larges faisant partie du cours).

b) Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de limite ℓ, d'après la définition de la limite d'une suite, on peut écrire :

$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geq n_0,\ |u_n-\ell|<\varepsilon$ soit :

$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geq n_0,\ \ell-\varepsilon<u_n<\ell+\varepsilon$ soit encore, en posant $\varepsilon=|\ell-\alpha|$ ($\varepsilon>0$ car $\ell\neq\alpha$) :

$\exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geq n_0,\ \ell-|\ell-\alpha|<u_n<\ell+|\ell-\alpha|$.

Deux cas se présentent alors :

– si $\ell>\alpha$, on a alors : $\ell-|\ell-\alpha|=\alpha$, d'où : $\exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geq n_0,\ u_n>\alpha$, et :

– si $\ell<\alpha$, on a alors : $\ell+|\ell-\alpha|=\alpha$, d'où : $\exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geq n_0,\ u_n<\alpha$.

Dans tous les cas de figure, on peut désormais conclure :

$$\boxed{\exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geq n_0,\ u_n\neq\alpha}$$

☞ Se souvenir que si une suite (u_n) converge vers $\ell\neq\alpha$, à partir d'un certain rang, son terme général est différent de α (démonstration à connaître).

2) Comme $\exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geq n_0,\ v_n=u_n$ et comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge de limite ℓ, par passage à la limite on peut écrire : $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$, et donc :

$$\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge de limite } \ell}$$

3) a) Comme $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 1+\frac{1}{n}\leq 2$, on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n\leq 2$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée par 2 ; elle est donc convergente.

Comme $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$, le théorème de prolongement des inégalités appliqué à l'inégalité de l'énoncé nous permet alors d'écrire que : $\lim_{n\to+\infty} u_n \le 1$, d'où la conclusion :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge et un majorant de sa limite est } 1}$$

☞ Noter qu'un majorant (ou un minorant) d'une suite (ou d'une fonction) doit être fixe (i.e. indépendant de la variable n ou x).

b) Comme $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 1-\frac{1}{n}\ge 0$, on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_n \ge 0$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée par 0 ; elle est donc convergente.

Le théorème de prolongement des inégalités appliqué à la partie gauche de l'inégalité de l'énoncé nous permet alors d'écrire que : $\lim_{n\to+\infty} v_n \ge 1$.

De même, le théorème de prolongement des inégalités appliqué à la partie droite de l'inégalité de l'énoncé nous permet également d'écrire que : $\lim_{n\to+\infty} v_n \le 2$.

On peut maintenant conclure :

$$\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge et sa limite } \ell \text{ vérifie : } 1\le \ell \le 2}$$

☞ Avant d'utiliser le théorème de prolongement des inégalités (dans le cas de suites dont les limites sont finies), il faut toujours s'assurer au préalable de la convergence des deux suites auxquelles on va appliquer le théorème.

c) Comme $\lim_{n\to+\infty} \ln n = +\infty$, le théorème de prolongement des inégalités appliqué à l'inégalité de l'énoncé nous permet d'écrire :

$$\boxed{\text{La suite } (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge et } \lim_{n\to+\infty} w_n = +\infty}$$

4) a) Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est encadrée par deux suites qui convergent vers 0. On en déduit alors (théorème de l'encadrement) :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0}$$

b) Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, la suite $\left(|v_n|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est encadrée par la suite nulle et par une suite qui tend vers 0. On en déduit alors (théorème de l'encadrement) que la suite $\left(|v_n|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, et donc que :

$$\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0}$$

☞ Il existe plusieurs types de "passages à la limite" :

• dans le cas de l'égalité de deux suites (à partir d'un certain rang), si l'une converge (resp. tend vers $\pm\infty$), l'autre converge (resp. tend vers $\pm\infty$) et possède la même limite (cf. **2**),

• dans le cas d'une inégalité, on se ramène au théorème de prolongement des inégalités en n'oubliant pas de prouver auparavant la convergence des deux suites (cf. **3a**) ou la divergence de l'une d'entre elles (cf. **3c**),

• dans le cas d'une double inégalité :

– si les deux suites "encadrantes" ne possèdent pas la même limite, après avoir montré la convergence de chacune des suites en présence, on applique deux fois le théorème de prolongement des inégalités et on obtient alors un encadrement de la limite de cette suite (cf. **3b**),

– si les deux suites "encadrantes" convergent et possèdent la même limite, on utilise le théorème de l'encadrement et on détermine ainsi la valeur de la limite de la suite "médiane", ce qui prouve *de facto* sa convergence (cf. **4**).

☞ **Attention !!! Le théorème de prolongement des inégalités et le théorème de l'encadrement transforment des inégalités strictes en inégalités larges.**

SO EO

★ 3. Deux propriétés "évidentes"

Soit u une suite croissante.

1) Montrer que si u converge vers ℓ, alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ell$.

2) Montrer que si u diverge, alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

1) Soit u une suite croissante qui converge vers ℓ. Raisonnons par l'absurde en supposant que : $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $u_{n_0} > \ell$ ①.

Comme u est une suite croissante, on peut écrire que $\forall n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n_0}$. u étant une suite convergente de limite ℓ, le théorème de prolongement des inégalités nous permet alors d'écrire : $\ell \geq u_{n_0}$.

On aboutit ainsi à une contradiction : $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\ell \geq u_{n_0} > \ell$; la proposition ① n'est donc pas vérifiée et on peut alors conclure :

$$\boxed{\text{Si u est une suite croissante qui converge vers } \ell \text{, alors : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \ell}$$

2) Soit u une suite croissante et divergente. Comme u est une suite croissante, d'après le cours, on sait que si elle est majorée, alors elle converge. Comme u est une suite divergente, on en déduit alors (contraposée de la proposition précédente) qu'elle n'est pas majorée, ce qui s'écrit encore : $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $u_{n_0} > A$ ①. Or, u étant également une suite croissante, on peut également écrire : $\forall n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n_0}$ ②.

D'après les propositions ① et ②, on en déduit alors que : $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $u_n > A$, et donc, d'après les définitions sur les limites infinies des suites, que u tend vers $+\infty$. On peut désormais conclure :

$$\boxed{\text{Si u est une suite croissante qui diverge, alors : } \lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$$

☞ Se souvenir que :
- si u est une suite croissante qui converge vers ℓ, alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ell$ (et si u est une suite décroissante qui converge vers ℓ, alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \ell$),
- si u est une suite croissante et divergente, alors elle tend vers $+\infty$ (et si u est une suite décroissante et divergente, alors elle tend vers $-\infty$).

Ces propriétés, évidentes intuitivement, ne font néanmoins pas partie du cours. Il faut donc savoir les redémontrer.

SO E❷

★ 4. Suites extraites

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

1) Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer que si pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, la suite $(u_{pn+k})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

2) Montrer que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors, pour tout entier p supérieur ou égal à 2, et pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, la suite $(u_{pn+k})_{n \in \mathbb{N}}$ converge également vers ℓ.

3) Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante et s'il existe un entier p supérieur ou égal à 2 et un entier $k \in [\![0, p-1]\!]$ tels que $(u_{pn+k})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

1) Si pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, la suite $(u_{pn+k})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ, d'après la définition de la limite d'une suite, on peut alors écrire :

$\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0(k, \varepsilon) \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0(k, \varepsilon)$, $|u_{pn+k} - \ell| < \varepsilon$ soit, en posant pour tout $\varepsilon > 0$,

$n_0(\varepsilon) = \max\big(n_0(k, \varepsilon)\big)_{0 \leq k \leq p-1}$:

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0(\varepsilon), \forall k \in [0, p-1], |u_{pn+k} - \ell| < \varepsilon$ et comme $\bigcup_{n=n_0(\varepsilon)}^{+\infty} [pn, pn + (p-1)] = [pn_0(\varepsilon), +\infty[$,

en posant pour tout $\varepsilon > 0$, $n_1(\varepsilon) = pn_0(\varepsilon)$:

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1(\varepsilon), |u_n - \ell| < \varepsilon$ d'où la conclusion :

Si pour tout $k \in [0, p-1]$, la suite $(u_{pn+k})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ

2) Soient p un entier supérieur ou égal à 2 et $k \in [0, p-1]$. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, on peut alors écrire :

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| < \varepsilon$ soit, en posant $n_1 = \left[\frac{n_0 - k}{p}\right] + 1$

(on a alors $n_1 > \frac{n_0 - k}{p}$, et donc : $pn_1 + k > n_0$) :

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, |u_{pn+k} - \ell| < \varepsilon$ ce qui s'écrit encore, d'après la définition de la limite d'une suite :

$\lim_{n\to+\infty} u_{pn+k} = \ell$ d'où la conclusion :

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors pour tout entier p supérieur ou égal à 2 et pour tout $k \in [0, p-1]$, la suite $(u_{pn+k})_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers ℓ.

3) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante. Supposons qu'il existe un entier p supérieur ou égal à 2 et un entier $k \in [0, p-1]$ tels que $(u_{pn+k})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. On peut alors écrire :

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_{pn+k} - \ell| < \varepsilon$ ce qui s'écrit encore :

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \ell - \varepsilon < u_{pn+k} < \ell + \varepsilon$ ①.

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, on peut également écrire :

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in [pn + k, p(n+1) + k], u_{pn+k} \leq u_i \leq u_{p(n+1)+k}$.

Or, d'après la relation ①, on a : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \begin{cases} \ell - \varepsilon < u_{pn+k} \\ u_{p(n+1)+k} < \ell + \varepsilon \end{cases}$. On en déduit alors :

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall i \in [pn + k, p(n+1) + k], \ell - \varepsilon < u_i < \ell + \varepsilon$

soit, comme $\bigcup_{n=n_0}^{+\infty} [pn + k, p(n+1) + k] = [pn_0 + k, +\infty[$:

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall i \geq pn_0 + k, \ell - \varepsilon < u_i < \ell + \varepsilon$ ce qui s'écrit encore, en posant $n_1 = pn_0 + k$:

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$ i.e. :

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, |u_n - \ell| < \varepsilon$ d'où la conclusion :

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et s'il existe un entier p supérieur ou égal à 2 et un entier $k \in [0, p-1]$ tels que $(u_{pn+k})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

☞ Retenir ces trois propriétés (à savoir redémontrer) concernant les suites extraites :

– si un ensemble de suites extraites d'une suite u (tel qu'à partir d'un certain rang chacun des termes de u appartienne à au moins l'une des suites extraites) converge vers ℓ, alors u converge également vers ℓ (par exemple, si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ, alors u converge vers ℓ),

– si une suite converge vers ℓ, alors toutes ses suites extraites convergent vers ℓ (par exemple, si u converge vers ℓ, alors les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ) ; pour montrer qu'une suite diverge, il suffit donc de montrer que l'une de ses suites extraites diverge ou que deux de ses suites extraites n'admettent pas la même limite,

– si une suite est monotone et si une de ses suites extraites converge vers ℓ, alors elle converge vers ℓ.

SO EO

★ 5. "Composition" d'équivalents

1) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites équivalentes. Montrer que :

$$|u_n| \sim |v_n|.$$

2) a) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites équivalentes et positives à partir d'un certain rang. Soit également α un réel strictement positif. Montrer que :

$$u_n^\alpha \sim v_n^\alpha.$$

b) Montrer que :

$$\sqrt{n+1} \sim \sqrt{n}.$$

3) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites équivalentes telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$. Montrer que :

$$e^{u_n} \sim e^{v_n}.$$

4) (SO) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites strictement positives, équivalentes et de limite commune $\ell \neq 1$. Montrer que :

$$\ln(u_n) \sim \ln(v_n).$$

1) Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant équivalentes, on peut écrire qu'il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergente de limite 1 telle que : $\exists n_0\in\mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $u_n = h_n v_n$. On en déduit alors : $\forall n \geq n_0$, $|u_n| = |h_n|\,|v_n|$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = 1$ et comme $\lim\limits_{x\to 1} |x| = 1$, on peut écrire : $\lim\limits_{n\to+\infty} |h_n| = 1$. Ainsi, il existe bien une suite $(h_n')_{n\geq n_0} = (|h_n|)_{n\geq n_0}$ convergente de limite 1 telle que : $\forall n \geq n_0$, $|u_n| = h_n'|v_n|$, d'où la conclusion :

$$\boxed{|u_n| \sim |v_n|}$$

2) a) De même, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant équivalentes, on peut écrire qu'il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergente de limite 1 telle que : $\exists n_0\in\mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $u_n = h_n v_n$. Comme $\exists n_1\in\mathbb{N}$, $\forall n \geq n_1$, $\begin{cases} u_n \geq 0 \\ v_n \geq 0 \end{cases}$, en posant $n_2 = \max(n_0, n_1)$, on peut alors écrire que $\forall n \geq n_2$, $h_n \geq 0$ et on en déduit alors, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ étant définie sur $\mathbb{R}^+$: $\forall n \geq n_2$, $u_n^\alpha = h_n^\alpha v_n^\alpha$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = 1$ et comme $\lim\limits_{x\to 1} x^\alpha = 1$, on peut écrire : $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n^\alpha = 1$. Ainsi, il existe bien une suite $(h_n')_{n\geq n_2} = (h_n^\alpha)_{n\geq n_2}$ convergente de limite 1 telle que : $\forall n \geq n_2$, $u_n^\alpha = h_n' v_n^\alpha$, d'où la conclusion :

$$\boxed{u_n^\alpha \sim v_n^\alpha}$$

b) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$. Comme $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x} = 1$, on peut alors écrire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{n+1}{n}} = 1$, soit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = 1$, ce qui s'écrit encore :

$$\boxed{\sqrt{n+1} \sim \sqrt{n}}$$

☞ Dans la pratique, pour élever à une puissance non entière α un équivalent du type $u_n \sim v_n$ (ici $n + 1 \sim n$) où (u_n) et (v_n) sont deux suites strictement positives à partir d'un certain rang, il faut montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$. Comme $\lim\limits_{x\to 1} x^\alpha = 1$, on en déduit alors que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n^\alpha}{v_n^\alpha} = 1$, et donc que : $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$ (ici $\sqrt{n+1} \sim \sqrt{n}$).

Rappelons que d'après le cours, on peut élever un équivalent à une puissance entière sans qu'il y ait besoin de donner de plus amples justifications.

3) Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ e^{v_n} \neq 0$. On peut alors écrire : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{e^{u_n}}{e^{v_n}} = e^{(u_n - v_n)}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$ et comme $\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$, on en déduit alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{(u_n - v_n)} = 1$, et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{u_n}}{e^{v_n}} = 1$, i.e :

$$\boxed{e^{u_n} \sim e^{v_n}}$$

4) ❏ Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant équivalentes, on peut écrire qu'il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergente de limite 1, telle que : $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ u_n = h_n v_n$.

Or, comme $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$, on a : $\forall n \geq n_0,\ h_n v_n > 0$, et donc, comme $\forall n \geq n_0,\ v_n > 0$: $\forall n \in \mathbb{N},\ h_n > 0$. La fonction ln étant définie sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut alors écrire :

$\forall n \geq n_0,\ \ln(u_n) = \ln(h_n v_n)$ soit :

$\forall n \geq n_0,\ \ln(u_n) = \ln(h_n) + \ln(v_n)$ ①.

❏ Comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge de limite $\ell \neq 1$, on peut alors écrire (cf. exercice 2.1b) :

$\exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_1,\ v_n \neq 1$ et donc, ln réalisant une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$:

$\exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_1,\ \ln(v_n) \neq 0$.

En posant $n_2 = \max(n_0, n_1)$ et en divisant alors la relation ① par $\ln(v_n) \neq 0$ $(n \geq n_2)$, on en déduit alors :

$\forall n \geq n_2,\ \dfrac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} = 1 + \dfrac{\ln(h_n)}{\ln(v_n)}$ ②.

❏ Or, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = 1$. Comme $\lim\limits_{x\to 1} \ln x = 0$, on en déduit alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(h_n) = 0$. De plus, comme $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n > 0$ et comme la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge de limite ℓ, le théorème de prolongement des inégalités nous permet d'écrire : $\ell \geq 0$. Deux cas se présentent alors :

– si $\ell > 0$, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$ et comme $\lim\limits_{x\to \ell} \ln x = \ln \ell$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(v_n) = \ln \ell$; comme $\ell \neq 1$, on en déduit alors : $\ln \ell \neq 0$, et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(h_n)}{\ln(v_n)} = 0$,

– si $\ell = 0$, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et comme $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, on a alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(v_n) = -\infty$, et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(h_n)}{\ln(v_n)} = 0$.

Par passage à la limite dans la relation ②, on peut maintenant écrire, dans tous les cas de figure : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} = 1$, et donc :

$$\boxed{\ln(u_n) \sim \ln(v_n)}$$

☞ La composition d'équivalents, interdite dans le cas général, est néanmoins possible dans certains cas particuliers (qu'il faut alors redémontrer) : le passage à la valeur absolue, à une puissance réelle strictement positive, à l'exponentielle (lorsque la limite de la différence des deux suites est nulle) et enfin au logarithme (lorsque les deux suites sont strictement positives et de limite commune différente de 1).

SO EO

★ 6. Equivalent de $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

1) Montrer, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}.$$

2) En déduire un équivalent de $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

1) La fonction $f : x \mapsto \ln x$ étant continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, elle est continue sur $[k, k+1]$ et dérivable sur $]k, k+1[$.

De plus, on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{1}{x}$. La fonction inverse étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut alors écrire :

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in]k, k+1[$, $\frac{1}{k+1} \leq f'(x) \leq \frac{1}{k}$.

L'inégalité des accroissements finis appliquée à f sur $[k, k+1]$ ($k \in \mathbb{N}^*$) nous permet alors d'écrire :

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{\ln(k+1) - \ln k}{(k+1) - k} \leq \frac{1}{k}$, et donc :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}}$$

2) ❑ En retenant la partie gauche de l'encadrement précédent, on en déduit alors :

$\forall k \in [2, +\infty[$, $\frac{1}{k} \leq \ln k - \ln(k-1)$ soit, en sommant pour $k = 2$ à $k = n$ ($n \in [2, +\infty[$) :

$\forall n \in [2, +\infty[$, $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n} \left(\ln k - \ln(k-1)\right)$ soit encore, les termes s'éliminant deux à deux dans la deuxième somme :

$\forall n \in [2, +\infty[$, $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln n - \ln 1$ et en ajoutant $\frac{1}{1} = 1$ membre à membre :

$\forall n \in [2, +\infty[$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n$ ①.

❑ De même, en retenant la partie droite de l'encadrement du **1**, on peut écrire :

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$ soit, en sommant pour $k = 1$ à $k = n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} \left(\ln(k+1) - \ln k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ soit encore, les termes s'éliminant deux à deux dans la première somme :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) - \ln 1 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ i.e. :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ ②.

☞ Lorsque l'on dispose d'un encadrement du terme général d'une suite (v_n) par deux termes consécutifs d'une suite (u_n) et que l'on cherche un encadrement de $\sum_{k=0}^{n} u_k$ ou $\sum_{k=1}^{n} u_k$ (situation très classique, notamment lors de recherches d'équivalents), il faut sommer une partie de l'encadrement pour k allant de 0 (ou 1) à n, puis l'autre pour k allant de 0 (ou 1) à n - 1 (ou n + 1) avant de regrouper les deux inégalités obtenues.

❑ En regroupant les inégalités ① et ②, on en déduit alors :

$\forall n \in [2, +\infty[$, $\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n$ soit, en divisant par $\ln n > 0$ ($n \in [2, +\infty[$) :

$\forall n \in [2, +\infty[$, $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln n} \leq \frac{1 + \ln n}{\ln n}$ soit encore :

$\forall n \in [2, +\infty[$, $\frac{\ln\left[n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]}{\ln n} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln n} \leq \frac{1 + \ln n}{\ln n}$ et donc :

$$\forall n \in [2, +\infty[,\ \frac{\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{\ln n} \quad \text{i.e. :}$$

$$\forall n \in [2, +\infty[,\ 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{\ln n}.$$

☞ Se souvenir (décompositions utiles lors de recherches de limites ou d'équivalents) que :
- $\ln(n+1) = \ln\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$,
- $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, et :
- $\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$.

Or, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$. La suite $\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln n}\right)_{n\geq 2}$ est donc encadrée par deux suites qui convergent vers 1, d'où (théorème de l'encadrement) : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln n} = 1$, et donc :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n}$$

☞ Lorsque l'on dispose d'un encadrement du terme général d'une suite (u_n) : $\forall n \geq n_0,\ a_n \leq u_n \leq b_n$, et que l'on cherche à montrer que : $u_n \sim h_n$, on écrit (lorsque h est une suite strictement positive) : $\forall n \geq n_0,\ \frac{a_n}{h_n} \leq \frac{u_n}{h_n} \leq \frac{b_n}{h_n}$, on montre alors que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{h_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b_n}{h_n} = 1$, et on en déduit, à l'aide du théorème de l'encadrement que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{h_n} = 1$, c'est-à-dire : $u_n \sim h_n$.

☞ Se souvenir que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$ (résultat très important, démonstration à connaître). On démontre de la même façon que : $\ln(n!) \sim n \ln n$, et que : $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} \sim \ln(\ln n)$.

SO EO

★ 7. Suites définies par la relation $u_n = f(n)$. Suites adjacentes

1) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \begin{cases} u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \\ v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \end{cases}.$$

a) Montrer, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}.$$

b) Etudier le sens de variation des suites u et v et montrer qu'elles sont adjacentes. En déduire qu'elles convergent vers la même limite.

2) Soit a un entier naturel et f une fonction continue, positive et décroissante sur $[a, +\infty[$ telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Soient alors $(u_n)_{n \geq a}$ et $(v_n)_{n \geq a}$ les suites définies par :

$$\forall n \in [a, +\infty[, \quad \begin{cases} u_n = \sum_{k=a}^{n} f(k) - \int_a^n f(t)\,dt \\ v_n = \sum_{k=a}^{n} f(k) - \int_a^{n+1} f(t)\,dt \end{cases}.$$

a) Montrer, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que :

$$\forall k \in [a, +\infty[, \; f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq f(k).$$

b) Etudier le sens de variation des suites u et v et montrer qu'elles sont adjacentes. En déduire qu'elles convergent vers la même limite.

1) a) cf. exercice 6.1.

b) ▪ On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; u_{n+1} - u_n = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right) \quad \text{soit :}$$

$$= \ln n - \ln(n+1) + \frac{1}{n+1} \qquad \text{et comme } \forall n \in \mathbb{N}^*, \; \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \text{ (cf. 1a) :}$$

$$\leq 0 \qquad \text{d'où la conclusion :}$$

$$\boxed{\text{La suite u est décroissante}}$$

▪ De même, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; v_{n+1} - v_n = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+2)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right) \quad \text{soit :}$$

$$= \ln(n+1) - \ln(n+2) + \frac{1}{n+1} \qquad \text{et comme } \forall n \in \mathbb{N}^*, \; \ln(n+1) - \ln(n+2) \geq -\frac{1}{n+1} \text{ (cf. 1a) :}$$

$$\geq 0 \qquad \text{d'où la conclusion :}$$

$$\boxed{\text{La suite v est croissante}}$$

▪ De plus, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; u_n - v_n = \ln(n+1) - \ln n \qquad \text{i.e. :}$$

$$= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Comme $\lim_{n \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$, on peut écrire : $\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$. Comme u est décroissante, v croissante et comme $\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$, on en déduit alors :

$$\boxed{\text{Les suites u et v sont adjacentes}}$$

▪ Comme u et v sont adjacentes, on peut désormais conclure :

$$\boxed{\text{Les suites u et v convergent vers la même limite}}$$

☞ Ne pas oublier que deux suites sont adjacentes si elles vérifient les trois conditions suivantes : l'une est croissante (à partir d'un certain rang), l'autre décroissante (idem) et la limite de la différence est nulle. On en déduit **alors** que les deux suites sont convergentes et admettent la même limite.

☞ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ est une suite très courante. Sa limite est la constante d'Euler γ (gamma) que l'on retrouve très souvent en analyse et qui vaut approximativement : 0,577 215 665.

☞ Il y a d'autres constantes dont il peut s'avérer utile de connaître une valeur approchée :
– $\pi \approx$ 3,14 15 92 65 35 89 79 32 38 (46 26 43 38 32 79 50...),
– $e \approx$ 2,718 28 18 28,
– $e^{-1} \approx$ 0,36 78 79,
– $\ln 2 \approx$ 0,69 31 47.

2) a) Soit F la fonction définie sur $[a, +\infty[$ par : $\forall x\in[a, +\infty[$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. f étant une fonction continue sur $[a, +\infty[$, on peut écrire que F est continue et dérivable sur $[a, +\infty[$, donc, pour tout $k\in[a, +\infty[$, continue sur $[k, k+1]$ et dérivable sur $]k, k+1[$.

De plus, on a : $\forall x\in[a, +\infty[$, $F'(x) = f(x)$. f étant décroissante sur $[a, +\infty[$, on peut alors écrire : $\forall k\in[a, +\infty[$, $\forall x\in]k, k+1[$, $f(k+1) \le F'(x) \le f(k)$.

Pour tout $k\in[a, +\infty[$, l'inégalité des accroissements finis appliquée à F sur $[k, k+1]$ nous permet alors d'écrire : $\forall k\in[a, +\infty[$, $f(k+1) \le \frac{F(k+1) - F(k)}{(k+1) - k} \le f(k)$, d'où la conclusion :

$$\boxed{\forall k\in[a, +\infty[,\ f(k+1) \le \int_k^{k+1} f(t)\,dt \le f(k)}$$

NB : Cette double inégalité aurait également pu être obtenue par intégration sur $[k, k+1]$ ($k\in[a, +\infty[$) de la relation : $\forall k\in[a, +\infty[$, $\forall x\in[k, k+1]$, $f(k+1) \le f(x) \le f(k)$, les sujets de concours privilégiant néanmoins l'inégalité des accroissements finis pour la résolution de ce type de question.

b) ▪ D'après la définition de la suite $(u_n)_{n\ge a}$, on peut écrire : $\forall n\in[a, +\infty[$, $u_{n+1} - u_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t)\,dt$. Or, d'après le résultat de la question précédente, on a : $\forall n\in[a, +\infty[$, $f(n+1) \le \int_n^{n+1} f(t)\,dt$. On en déduit alors : $\forall n\in[a, +\infty[$, $u_{n+1} - u_n \le 0$.

De même, d'après la définition de la suite $(v_n)_{n\ge a}$, on peut écrire : $\forall n\in[a, +\infty[$, $v_{n+1} - v_n = f(n+1) - \int_{n+1}^{n+2} f(t)\,dt$. Or, toujours d'après le résultat de la question précédente, on a : $\forall n\in[a, +\infty[$, $\int_{n+1}^{n+2} f(t)\,dt \le f(n+1)$. On en déduit alors : $\forall n\in[a, +\infty[$, $v_{n+1} - v_n \ge 0$.

On peut maintenant conclure :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\ge a} \text{ est décroissante et la suite } (v_n)_{n\ge a} \text{ est croissante}}$$

☞ Pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n), on procède généralement comme suit :
– si le terme général de la suite est défini comme une somme, on cherche le signe de $u_{n+1} - u_n$,
– si le terme général de la suite est défini comme un produit et si la suite est de signe constant et son terme général ne s'annule pas (à partir d'un certain rang), on compare $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

▪ D'après la définition des suites $(u_n)_{n\ge a}$ et $(v_n)_{n\ge a}$, on a : $\forall n\in[a, +\infty[$, $u_n - v_n = \int_n^{n+1} f(t)\,dt$. Or, on a vu au 1a que : $\forall n\in[a, +\infty[$, $f(n+1) \le \int_n^{n+1} f(t)\,dt \le f(n)$. Comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, on en déduit alors : $\lim_{n\to+\infty} f(n) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} f(n+1) = 0$.

La suite $\left(\int_n^{n+1} f(t)\,dt\right)_{n\geq a}$ étant encadrée par deux suites convergentes de limite nulle, on en déduit alors (théorème de l'encadrement) : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_n^{n+1} f(t)\,dt = 0$.

On peut maintenant écrire que la suite $(u_n)_{n\geq a}$ est décroissante, que la suite $(v_n)_{n\geq a}$ est croissante et que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$, d'où la conclusion :

$$\boxed{\text{Les suites } u \text{ et } v \text{ sont adjacentes}}$$

■ Deux suites adjacentes étant convergentes, on peut désormais conclure :

$$\boxed{\text{Les suites } u \text{ et } v \text{ convergent vers la même limite}}$$

☞ Pour étudier une suite (u_n) définie par une relation du type $u_n = f(n)$ et construite sur le modèle précédent, il faut :

– déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$ (et donc le sens de variation de u), à l'aide de l'inégalité des accroissements finis (ou d'une intégration),
– montrer que (u_n) converge en introduisant (si elle n'est pas proposée par l'énoncé) une suite adjacente à la première (en jouant sur le rang du terme retranché à la somme).

Une fois démontré que les deux suites sont adjacentes, on en déduit alors que (u_n) converge.

☞ On démontre ainsi que les $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\geq 2}$ définies par : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ et par : $\forall n\in[\![2, +\infty[\![,\ y_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} - \ln(\ln n)$ convergent.

SO EO

★ 8. Suites définies par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$. Généralités

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que $f(I) \subset I$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in I$ et par la relation : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\in I$.

2) a) Montrer que si f est croissante sur I, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone (on précisera à quelle condition u est croissante ou décroissante).

b) Montrer que si f est décroissante sur I, alors les suites $(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens de variations contraires.

1) Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\in I$.

• Au rang n = 0, on a : $u_0\in I$.

• Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons $u_n\in I$. Comme $f(I) \subset I$, on en déduit alors que $f(u_n)\in I$, et donc que $u_{n+1}\in I$.

• Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\in I}$$

☞ Pour montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, le terme général u_n d'une suite récurrente appartient à un intervalle donné, il faut toujours procéder par récurrence.

2) a) Supposons f croissante sur I. Montrons alors par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, c'est-à-dire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$ est de signe constant (i.e. de même signe que $u_1 - u_0$).

• Au rang $n = 0$, $u_1 - u_0$ est bien de même signe que $u_1 - u_0$ (!!!).

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_{n+1} - u_n$ soit de même signe que $u_1 - u_0$. Deux cas se présentent alors :

– si $u_1 \leq u_0$, d'après l'hypothèse de récurrence, on a : $u_{n+1} \leq u_n$, soit, en composant par f (fonction croissante sur I avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$) : $f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$, i.e. : $u_{n+2} \leq u_{n+1}$,

– si $u_1 \geq u_0$, d'après l'hypothèse de récurrence, on a : $u_{n+1} \geq u_n$, soit, en composant par f (fonction croissante sur I avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$) : $f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$, i.e. : $u_{n+2} \geq u_{n+1}$,

Dans les deux cas de figure, $u_{n+2} - u_{n+1}$ est de même signe que $u_1 - u_0$.

• Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$ est bien de signe constant (i.e. de même signe que $u_1 - u_0$), d'où la conclusion :

> Si f est croissante sur I, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone (si $u_1 \leq u_0$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante ; si $u_1 \geq u_0$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante).

b) Supposons maintenant f décroissante sur I. Montrons alors par récurrence que les suites $(u_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ sont monotones et de sens de variation contraires, c'est-à-dire que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_{2p+2} - u_{2p}$ et $u_{2p+3} - u_{2p+1}$ sont de signes constants et contraires (i.e. de mêmes signes respectivement que $u_2 - u_0$ et $u_3 - u_1$).

• Au rang $p = 0$, deux cas se présentent :

– si $u_2 \leq u_0$, en composant par f (fonction décroissante sur I), on obtient : $f(u_2) \geq f(u_0)$, i.e. : $u_3 \geq u_1$,

– si $u_2 \geq u_0$, en composant par f (fonction décroissante sur I), on obtient : $f(u_2) \leq f(u_0)$, i.e. : $u_3 \leq u_1$,

Dans les deux cas de figure, $u_2 - u_0$ et $u_3 - u_1$ sont de signes contraires et de mêmes signes respectivement que $u_2 - u_0$ et $u_3 - u_1$ (!!!).

• Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons que $u_{2p+2} - u_{2p}$ et $u_{2p+3} - u_{2p+1}$ soient de signes contraires et de mêmes signes respectivement que $u_2 - u_0$ et $u_3 - u_1$. Deux cas se présentent à nouveau :

– si $u_2 \leq u_0$ et $u_3 \geq u_1$, d'après l'hypothèse de récurrence, on a : $u_{2p+2} \leq u_{2p}$ et $u_{2p+3} \geq u_{2p+1}$, soit, comme f est décroissante sur I, en composant par $f \circ f$ (fonction croissante sur I, cf. exercice 7.6.1) : $(f \circ f)(u_{2p+2}) \leq (f \circ f)(u_{2p})$ et $(f \circ f)(u_{2p+3}) \geq (f \circ f)(u_{2p+1})$, i.e. : $u_{2p+4} \leq u_{2p+2}$ et $u_{2p+5} \geq u_{2p+3}$,

– si $u_2 \geq u_0$ et $u_3 \leq u_1$, d'après l'hypothèse de récurrence, on a : $u_{2p+2} \geq u_{2p}$ et $u_{2p+3} \leq u_{2p+1}$, soit, en composant par $f \circ f$ (fonction croissante sur I) : $(f \circ f)(u_{2p+2}) \geq (f \circ f)(u_{2p})$ et $(f \circ f)(u_{2p+3}) \leq (f \circ f)(u_{2p+1})$, i.e. : $u_{2p+4} \geq u_{2p+2}$ et $u_{2p+5} \leq u_{2p+3}$.

Dans les deux cas de figure, $u_{2p+4} - u_{2p+2}$ et $u_{2p+5} - u_{2p+3}$ sont de signes contraires et de mêmes signes respectivement que $u_2 - u_0$ et $u_3 - u_1$.

• Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_{2p+2} - u_{2p}$ et $u_{2p+3} - u_{2p+1}$ sont de signes constants et contraires (i.e. de mêmes signes respectivement que $u_2 - u_0$ et $u_3 - u_1$), d'où la conclusion :

> Si f est décroissante sur I, alors les suites $(u_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ sont monotones et de sens de variations contraires.

☞ Pour toute suite (u_n) définie par son premier terme (élément d'un intervalle I) et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction définie sur I et à valeurs dans I, se souvenir (démonstrations à connaître) que :

– si f est croissante sur I, alors (u_n) est monotone,

– si f est décroissante sur I, alors les suites (u_{2p}) et (u_{2p+1}) sont monotones et de sens de variations contraires.

SO EO

9. Suites définies par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples

Etudier les suites $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

1) $t_0 \in \mathbb{R}^-$ et : $\forall n\in\mathbb{N}$, $t_{n+1} = t_n^3 + 3t_n - 3$.

2) $u_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

3) $v_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n - v_n^2$.

4) $w_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n\in\mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n^2 - 2w_n + 2$.

1) ❑ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 3x - 3$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a : $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 3$.

On en déduit alors : $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x) \geq 0$. f est donc croissante sur $\mathbb{R}$ et on peut maintenant écrire :

$\forall x\in\mathbb{R}^-$, $f(x) \leq f(0)$ soit, comme $f(0) = -3$:

$\forall x\in\mathbb{R}^-$, $f(x) \leq -3$ et donc :

$f(\mathbb{R}^-) \subset \mathbb{R}^-$.

Comme $t_0 \in \mathbb{R}^-$, à l'aide d'une récurrence immédiate (cf. exercice 8.1), on en déduit alors : $\forall n\in\mathbb{N}$, $t_n \in \mathbb{R}^-$.

❑ De plus, on a : $\forall n\in\mathbb{N}$, $t_{n+1} - t_n = t_n^3 + 2t_n - 3$. Soit alors g la fonction définie par : $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x) = x^3 + 2x - 3$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a : $\forall x\in\mathbb{R}$, $g'(x) = 3x^2 + 2$.

On en déduit alors : $\forall x\in\mathbb{R}$, $g'(x) \geq 0$. g est donc croissante sur $\mathbb{R}$ et on peut maintenant écrire :

$\forall x\in\mathbb{R}^-$, $g(x) \leq g(0)$ soit, comme $g(0) = -3$:

$\forall x\in\mathbb{R}^-$, $g(x) \leq -3$ et donc :

$\forall x\in\mathbb{R}^-$, $g(x) \leq 0$.

Or, on a vu que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $t_n \in \mathbb{R}^-$. On en déduit alors : $\forall n\in\mathbb{N}$, $g(t_n) \leq 0$, et donc : $\forall n\in\mathbb{N}$, $t_n^3 + 2t_n - 3 \leq 0$, soit : $\forall n\in\mathbb{N}$, $t_{n+1} - t_n \leq 0$. La suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

❑ Supposons que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente. Soit alors ℓ sa limite. Comme $\forall n\in\mathbb{N}$, $t_n \leq 0$ (cf. supra), le théorème de prolongement des inégalités nous permet d'écrire : $\ell \leq 0$.

Comme $\forall n\in\mathbb{N}$, $t_{n+1} = f(t_n)$ et comme f est continue sur $\mathbb{R}^-$, on peut alors écrire que ℓ ($\ell \leq 0$) est solution de l'équation $x = f(x)$, i.e. : $x^3 + 2x - 3 = 0$. Or, on a : $x^3 + 2x - 3 = (x - 1)(x^2 + x + 3)$. Comme $\forall x\in\mathbb{R}$, $x^2 + x + 3 > 0$ (fonction polynôme de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif et dont le coefficient dominant est positif), on en déduit alors que l'unique solution de l'équation $x^3 + 2x - 3 = 0$ est 1. La seule limite possible pour $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc 1.

Comme $\ell \leq 0$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger vers 1. On en déduit alors que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Comme $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (cf. supra), on peut maintenant conclure (cf. exercice 3.2) que : $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = -\infty$.

❑ Ainsi,

$$\boxed{\text{La suite } (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante et } \lim_{n\to+\infty} t_n = -\infty}$$

☞ Pour déterminer la limite ℓ (éventuelle) d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme u_0 et par la relation : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, il faut généralement déterminer un intervalle I tel que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n \in I$, en déduire (à l'aide du théorème de prolongement des inégalités) un intervalle J tel que $\ell \in J$. En évoquant alors la continuité de f sur J, on détermine l'ensemble des limites possibles pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: c'est l'ensemble des solutions de l'équation $x = f(x)$ qui sont éléments de J, les autres solutions de cette équation devant être éliminées.

2) ❑ Soient f la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \sin x$ et g la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $g(x) = \sin x - x$. g est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et on a : $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $g'(x) = \cos x - 1$. On peut alors dresser les tableaux de variations de f et g :

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
f	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1
g'		$-$	0	$-$	
g	$\frac{\pi}{2} - 1$	$\searrow$	0	$\searrow$	$1 - \frac{\pi}{2}$

f étant continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, à l'aide du tableau de variations de f, on en déduit alors que : $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[\right) \subset \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, $\sin 0 = 0$ et $\sin\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right]\right) \subset \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. De plus, d'après les variations de g, on peut écrire : $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, $x \leq \sin x$ et $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \leq x$.

❑ On peut maintenant différencier les cas suivant les valeurs de u_0 :

– si $u_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, comme $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[\right) \subset \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, par une récurrence immédiate (cf. exercice 8.1), on peut écrire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[$. Comme $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, $x \leq \sin x$, on en déduit alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \sin(u_n)$, soit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante. Comme elle majorée (par 0), elle converge. De plus, comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $-\frac{\pi}{2} \leq u_n < 0$, le théorème de prolongement des inégalités appliqué deux fois à cette double inégalité nous permet d'écrire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge de limite $\ell \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$.

– si $u_0 = 0$, par une récurrence immédiate, on peut écrire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc la suite constante égale à 0,

– si $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, comme $\sin\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right]\right) \subset \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, par une nouvelle récurrence immédiate, on peut écrire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Comme $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \leq x$, on en déduit alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sin(u_n) \leq u_n$, soit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante. Comme elle est en outre minorée (par 0), elle converge. De plus, comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \frac{\pi}{2}$, le théorème de prolongement des inégalités appliqué deux fois à cette double inégalité nous permet d'écrire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge de limite $\ell \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

❑ Dans tous les cas de figure, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente de limite $\ell \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ et comme f est continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on peut alors écrire que ℓ ($\ell \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$) est solution de l'équation $x = f(x)$, soit : $g(x) = 0$. Or, d'après le tableau de variations de g, comme g est une fonction continue et strictement décroissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, g réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\left]1 - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - 1\right[$. Or, $0 \in \left]1 - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - 1\right[$.

On en déduit alors : $\exists ! x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $g(x) = 0$, et donc, comme $g(0) = 0$, que l'équation $g(x) = 0$ admet pour unique solution 0. Ainsi, 0 est l'unique limite possible de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

❏ On peut désormais conclure :

> Si $u_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers 0 ; si $u_0 = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 0 ; et si $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge également vers 0.

☞ Pour étudier une suite (u_n) définie par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$:

- il faut déterminer à l'aide d'une récurrence à quel ensemble I appartiennent les termes de la suite (éventuellement à partir d'un certain rang),
- le sens de variation de (u_n) est donné par l'étude de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$,
- si f est continue sur I, les limites finies éventuelles de (u_n) sont les racines de l'équation $x = f(x)$; en fonction du sens de variation de (u_n) (donné par l'étude de g) et de l'intervalle considéré pour les termes de la suite, on peut conclure alors sur la limite éventuelle de la suite (u_n).

S'il faut distinguer des cas en fonction de la valeur de u_0 pour discuter du sens de variation et de la limite éventuelle de (u_n), les bornes des intervalles à considérer sont les antécédents par f des racines de g.

3) ❏ D'après la définition de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut écrire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = -v_n^2$, d'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n \leq 0$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

Soit maintenant f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x - x^2$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 - 2x$. On peut alors dresser le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Supposons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et notons alors ℓ sa limite. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(v_n)$ et comme f est continue sur $\mathbb{R}$, ℓ ($\ell \in \mathbb{R}$) est solution de l'équation $x = f(x)$, i.e. : $x^2 = 0$. Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, sa seule limite possible est donc 0.

❏ Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(v_n)$, on peut maintenant différencier les cas suivant les valeurs de v_0 :

– si $v_0 \in \mathbb{R}_-^*$, comme $f(\mathbb{R}_-^*) = \mathbb{R}_-^*$, on démontre par une récurrence immédiate (cf. exercice 8.1) que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \in \mathbb{R}_-^*$. Or, comme $v_0 < 0$ et comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante de seule limite (finie) possible 0, on en déduit alors que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Comme elle est en outre décroissante, on en déduit alors (cf. exercice 3.2) que : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$,

– si $v_0 = 0$, on démontre par une récurrence immédiate que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 0$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc la suite constante égale à 0,

– si $v_0 \in]0, 1[$, comme $f(]0, 1[) \subset]0, 1[$, on démontre par une récurrence immédiate que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \in]0, 1[$. Comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par 0), elle est donc convergente. Sa seule limite (finie) possible étant 0, on en déduit alors qu'elle converge vers 0,

– si $v_0 = 1$, on démontre par une récurrence immédiate que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 0$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc stationnaire et égale à 0 à partir du rang 1.

– si $v_0 \in]1, +\infty[$, comme $f(]1, +\infty[) \subset \mathbb{R}_-^*$ et $f(\mathbb{R}_-^*) \subset \mathbb{R}_-^*$, on démontre par une récurrence immédiate que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \in \mathbb{R}_-^*$. Or, comme $v_1 < 0$ et comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante de seule limite (finie) possible 0, on en déduit alors que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Comme elle est en outre décroissante, on en déduit alors (cf. exercice 3.2) que : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

↪ On peut maintenant conclure :

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et :
– si $v_0 \in \mathbb{R}_-^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$,
– si $v_0 = 0$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 0,
– si $v_0 \in]0, 1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$,
– si $v_0 = 1$, à partir du rang 1, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire et égale à 0,
– si $v_0 \in]1, +\infty[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

4) ↪ D'après la définition de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} - w_n = w_n^2 - 3w_n + 2$. Soit alors f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 2$, et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 3x + 2$. f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2(x - 1)$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2x - 3$.

On en déduit alors les tableaux de variations de f et g :

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
f	$+\infty$	↘	2	↘	1	↗		↗	2	↗	$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
g	$+\infty$	↘		↘	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0	↗	$+\infty$

Supposons que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et notons alors ℓ sa limite. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = f(w_n)$ et comme f est continue sur $\mathbb{R}$, ℓ ($\ell \in \mathbb{R}$) est alors solution de l'équation $x = f(x)$, soit : $g(x) = 0$. Or, comme g est continue et strictement monotone sur $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$, g réalise une bijection de $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right]$ sur $\left[-\frac{1}{4}, +\infty\right[$ et de $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$ sur $\left[-\frac{1}{4}, +\infty\right[$. Or, $0 \in \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right[$. On en déduit alors : $\exists ! x \in \left]-\infty, \frac{3}{2}\right]$, $g(x) = 0$ et $\exists ! x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$, $g(x) = 0$. Comme $g(1) = g(2) = 0$, on en déduit alors que l'équation $g(x) = 0$ admet pour uniques solutions 1 et 2. Ainsi, si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, ses seules limites possibles sont 1 et 2.

↪ Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = f(w_n)$ et comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} - w_n = g(w_n)$, on peut maintenant différencier les cas suivant les valeurs de w_0 :

– si $w_0 \in \mathbb{R}_-^*$, comme $f(\mathbb{R}_-^*) =]2, +\infty[$ et comme $f(]2, +\infty[) =]2, +\infty[$, on démontre par une récurrence immédiate (cf. exercice 8.1) que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n \in]2, +\infty[$. Or, comme $g(]2, +\infty[) = \mathbb{R}_+^*$, on peut écrire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_{n+1} - w_n > 0$. La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc croissante et minorée par 2, de seules limites (finies) possibles 1 et 2. On en déduit alors que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Comme elle est en outre croissante, on en déduit alors (cf. exercice 3.2) que : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$,

– si $w_0 = 0$, comme $f(0) = 2$ et $f(2) = 2$, on démontre par une récurrence immédiate que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = 2$. La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc stationnaire et égale à 2 à partir du rang 1,

– si $w_0 \in]0, 1[$, comme $f(]0, 1[) \subset]1, 2[$ et comme $f(]1, 2[) \subset]1, 2[$, on démontre par une récurrence immédiate que que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n \in]1, 2[$. Or, comme $g(]1, 2[) \subset \mathbb{R}_-^*$, on peut écrire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_{n+1} - w_n < 0$. La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante et minorée (par 1). Elle est donc convergente. Ses seules limites (finies) possibles étant 1 et 2, comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n \in]1, 2[$, on en déduit alors qu'elle converge vers 1,

– si $w_0 = 1$, comme $f(1) = 1$, on démontre par une récurrence immédiate que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = 1$. La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc la suite constante égale à 1,

– si $w_0 \in]1, 2[$, comme $f(]1, 2[) \subset]1, 2[$, on démontre par une récurrence immédiate que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n \in]1, 2[$. Or, comme $g(]1, 2[) \subset \mathbb{R}_-^*$, on peut écrire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} - w_n < 0$. La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée (par 1). Elle est donc convergente. Ses seules limites (finies) possibles étant 1 et 2, comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n \in]1, 2[$, on en déduit alors qu'elle converge vers 1,

– si $w_0 = 2$, comme $f(2) = 2$, on démontre par une récurrence immédiate que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = 2$. La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc la suite constante égale à 2,

– si $w_0 \in]2, +\infty[$, comme $f(]2, +\infty[) =]2, +\infty[$, on démontre par une récurrence immédiate que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n \in]2, +\infty[$. Or, comme $g(]2, +\infty[) = \mathbb{R}_+^*$, on peut écrire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} - w_n > 0$. La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et minorée par 2, de seules limites (finies) possibles 1 et 2. On en déduit alors que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Comme elle est en outre croissante, on en déduit alors (cf. exercice 3.2) que : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$.

On peut désormais conclure :

– si $w_0 \in \mathbb{R}_-^*$, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$,
– si $w_0 = 0$, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire et égale à 2 à partir du rang 1,
– si $w_0 \in]0, 1[$, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$,
– si $w_0 = 1$, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 1,
– si $w_0 \in]1, 2[$, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$,
– si $w_0 = 2$, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 2,
– si $w_0 \in]2, +\infty[$, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$.

SO EO

10. Suites définies comme solution d'une équation

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - e.$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. En déduire qu'il existe une unique suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x_n) = 0$.

2) En considérant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(x_n)$, déterminer le sens de variation de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3) En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, puis, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

NB : La résolution du 3 nécessite la connaissance du cours : 6. Séries.

1) ■ Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, f_n est continue et dérivable (en tant que fonction polynôme) sur $\mathbb{R}^+$ et on a :

$\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in\mathbb{R}^+, f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$.

On en déduit alors : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in\mathbb{R}^+, f_n'(x) > 0$, et donc :

$$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N}^*,\ f_n \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}^+}$$

■ Comme pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ avec $\forall n\in\mathbb{N}^*, \begin{cases} f_n(0) = 1 - e \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty \end{cases}$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, f_n définit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $]1-e, +\infty[$. Or, $0\in]1-e, +\infty[$. On en déduit alors :

$\forall n\in\mathbb{N}^*, \exists! x_n\in\mathbb{R}_+^*, f_n(x_n) = 0$.

On peut maintenant conclure :

$$\boxed{\text{Il existe une unique suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ définie par : } \forall n\in\mathbb{N}^*, f_n(x_n) = 0}$$

2) Comme $\forall n\in\mathbb{N}^*, f_n(x_n) = 0$, on peut écrire : $\forall n\in\mathbb{N}^*, f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$, et donc :

$$\begin{aligned} \forall n\in\mathbb{N}^*, f_{n+1}(x_n) - f_{n+1}(x_{n+1}) &= f_{n+1}(x_n) && \text{soit, d'après la définition de } f_{n+1}\ (n\in\mathbb{N}^*) : \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{{x_n}^k}{k!} - e && \text{soit encore, comme } \forall n\in\mathbb{N}^*, f_n(x_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{{x_n}^k}{k!} - e = 0 : \\ &= \frac{{x_n}^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Comme $\forall n\in\mathbb{N}^*, x_n\in\mathbb{R}_+^*$ (cf. question précédente), on en déduit alors : $\forall n\in\mathbb{N}^*, f_{n+1}(x_n) - f_{n+1}(x_{n+1}) > 0$, i.e. : $\forall n\in\mathbb{N}^*, f_{n+1}(x_n) > f_{n+1}(x_{n+1})$.

Or, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, f_n réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ sur $[1-e, +\infty[$ (cf. question précédente). On en déduit alors, en composant la relation précédente par ${f_{n+1}}^{-1}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$, fonction strictement croissante sur $[1-e, +\infty[$: $\forall n\in\mathbb{N}^*, x_n > x_{n+1}$, et donc :

$$\boxed{\text{La suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est strictement décroissante}}$$

☞ Pour étudier le sens de variation d'une suite (x_n) dont le terme général x_n est solution de l'équation $f_n(x) = 0$, il faut généralement comparer $f_{n+1}(x_{n+1})$ et $f_{n+1}(x_n)$. Grâce à la définition de f_{n+1} et en remarquant que f_{n+1} réalise une bijection strictement monotone, on en déduit alors le sens de variation de la suite (x_n).

3) ■ Comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante (cf. question précédente) et comme $\forall n\in\mathbb{N}^*, x_n\in\mathbb{R}_+^*$ (cf. 1), on peut écrire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0, et donc :

$$\boxed{\text{La suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente}}$$

■ ɔ Soit maintenant ℓ la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Comme pour tout $x\in\mathbb{R}$, la série de terme général $\frac{x^k}{k!}$ est convergente de somme e^x, on peut écrire que pour tout $x\in\mathbb{R}$, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est également convergente de limite e^x, et donc que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite e. Comme $\forall k\in\mathbb{N}, \frac{1}{k!} \geq 0$, elle est en outre croissante. On en déduit alors (cf. exercice 3.1) :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq e$ i.e. :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - e \leq 0$ et donc, en reconnaissant $f_n(1)$ et $f_n(x_n) = 0$:

$\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(1) \leq f_n(x_n)$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ sur $[1 - e, +\infty[$ (cf. **1**). On en déduit alors, en composant la relation précédente par f_n^{-1} ($n \in \mathbb{N}^*$), fonction strictement croissante sur $[1 - e, +\infty[$: $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \geq 1$. Comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, on peut maintenant écrire d'après le théorème de prolongement des inégalités : $\ell \geq 1$.

❑ Supposons maintenant que $\ell > 1$. Comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante (cf. **2**) et converge vers ℓ, on peut écrire (cf. exercice 3.1) :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 < \ell \leq x_n$ soit, en élevant cette relation à la puissance k (croissante) et en la divisant par k! ($k \in \mathbb{N}$) :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}, \frac{\ell^k}{k!} \leq \frac{x_n{}^k}{k!}$ soit encore, en sommant pour k = 0 à k = n :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} \frac{\ell^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{x_n{}^k}{k!}$ et donc, en reconnaissant $f_n(x_n) + e = e$ dans dans le membre de droite :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} \frac{\ell^k}{k!} \leq e$ ①.

Or, comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de terme général $\frac{x^k}{k!}$ est convergente de somme e^x, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\ell^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge de limite e^ℓ. Le théorème de prolongement des inégalités appliqué à ① nous permet alors d'écrire que : $e^\ell \leq e$, soit, en composant par la fonction ln (strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$) : $\ell \leq 1$. Comme $\ell > 1$, on aboutit ainsi à une contradiction. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne peut donc converger vers une limite $\ell > 1$.

❑ Comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $\ell \geq 1$ (cf. supra) mais ne peut converger vers une limite $\ell > 1$, on peut désormais conclure :

$$\boxed{\text{La suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } 1}$$

☞ Pour montrer qu'une suite (x_n) dont le terme général x_n est solution de l'équation $f_n(x) = 0$ converge vers une limite ℓ donnée, il faut généralement effectuer un raisonnement par l'absurde.

SO EØ

● 11. Suites "croisées"

1) Soient u et v les suites définies par leur premier terme u_0 et v_0 et par les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}(3u_n + v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) \end{cases}.$$

Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n en fonction de u_0, v_0 et n.

2) Soient a et b les suites définies par : $a_0 = 0$, $b_0 = -1$ et par les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = 8a_n - 3b_n \\ b_{n+1} = 18a_n - 7b_n \end{cases}.$$

Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n en fonction de n.

NB : La résolution du **2** nécessite la connaissance du cours : **3.** Diagonalisation.

1) D'après la définition des suites u et v, on peut écrire : $\forall n\in\mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1}+v_{n+1}=u_n+v_n \\ u_{n+1}-v_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n-v_n) \end{cases}$. On en déduit alors que la suite u + v est constante et que la suite u - v est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, ce qui nous permet d'écrire :

$\forall n\in\mathbb{N}, \begin{cases} u_n+v_n=u_0+v_0 \\ u_n-v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n(u_0-v_0) \end{cases}$ d'où ($L_1 \leftarrow \frac{1}{2}(L_1+L_2)$, $L_2 \leftarrow \frac{1}{2}(L_1-L_2)$) :

$\forall n\in\mathbb{N}, \begin{cases} u_n=\frac{1}{2}\left[u_0+v_0+\left(\frac{1}{2}\right)^n(u_0-v_0)\right] \\ v_n=\frac{1}{2}\left[u_0+v_0-\left(\frac{1}{2}\right)^n(u_0-v_0)\right] \end{cases}$ soit enfin :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, \begin{cases} u_n=\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]u_0+\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]v_0 \\ v_n=\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]u_0+\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]v_0 \end{cases}}$$

2) ❑ Les relations entre les termes généraux des suites a et b s'écrivent matriciellement :
$\forall n\in\mathbb{N}, \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 18 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

Notons M la matrice $M=\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 18 & -7 \end{pmatrix}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, U_n le vecteur-colonne $U_n=\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. On peut alors écrire :

$\forall n\in\mathbb{N}, U_{n+1}=MU_n$ d'où, par une récurrence immédiate :

$\forall n\in\mathbb{N}, U_n=M^nU_0$ (avec $U_0=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$).

❑ λ est valeur propre de M si et seulement si $\exists X\neq 0, (M-\lambda I)X=0$. Or, on a :

$(M-\lambda I)X=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8-\lambda & -3 \\ 18 & -7-\lambda \end{pmatrix}X=0$ d'où ($L_1 \leftrightarrow L_2$, puis : $L_2' \leftarrow 18L_2'-(8-\lambda)L_1'$) :

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 18 & -7-\lambda \\ 0 & -\lambda^2+\lambda+2 \end{pmatrix}X=0$ ①.

λ est donc valeur propre de M si et seulement s'il existe un vecteur $X\neq 0$ solution du système précédent, c'est-à-dire si ce système n'est pas un système de Cramer, i.e. si la matrice carrée précédente n'est pas inversible, soit encore, puisqu'elle est triangulaire supérieure : si l'un de ses coefficients diagonaux est nul. Ainsi, λ est valeur propre de M si et seulement si $-\lambda^2+\lambda+2=0$, i.e. : $\lambda\in\{-1, 2\}$. On peut alors écrire :

– si $\lambda=-1$, ① devient : $\begin{pmatrix} 18 & -6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}X=0$, soit, en posant $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$: $3x-y=0$.
-1 est donc valeur propre de M de sous-espace propre associé $\mathcal{V}ect((1, 3))$.

– si $\lambda=2$, ① devient : $\begin{pmatrix} 18 & -9 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}X=0$, soit, en posant $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$: $2x-y=0$.
2 est donc valeur propre de M de sous-espace propre associé $\mathcal{V}ect((1, 2))$.

❑ Comme $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et comme elle admet deux valeurs propres distinctes, M est diagonalisable. D'après les résultats précédents, en posant : $D=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, on peut écrire : $M=PDP^{-1}$, d'où, par une récurrence immédiate : $\forall n\in\mathbb{N}, M^n=PD^nP^{-1}$. Calculons alors P^{-1}. On a :

$P=IP \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P$ soit ($L_2 \leftarrow L_2-3L_1$) :

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}P$ d'où ($L_1 \leftarrow -L_1-L_2$) :

$P = IP \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} P$ et donc :

$\Leftrightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = PD^nP^{-1}$, on peut alors écrire : $\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, et donc, après calculs :

$\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = \begin{pmatrix} 3\cdot 2^n + 2(-1)^{n+1} & (-1)^n - 2^n \\ 3\cdot 2^{n+1} + 6(-1)^{n+1} & 3(-1)^n - 2^{n+1} \end{pmatrix}$ d'où, comme $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = M^n U_0$:

$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \begin{pmatrix} 3\cdot 2^n + 2(-1)^{n+1} & (-1)^n - 2^n \\ 3\cdot 2^{n+1} + 6(-1)^{n+1} & 3(-1)^n - 2^{n+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ soit :

$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \begin{pmatrix} 2^n + (-1)^{n+1} \\ 2^{n+1} + 3(-1)^{n+1} \end{pmatrix}$ ce qui s'écrit encore :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} a_n = 2^n + (-1)^{n+1} \\ b_n = 2^{n+1} + 3(-1)^{n+1} \end{cases}}$$

☞ Pour étudier des suites (u_n) et (v_n) définies par des relations du type $\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n \\ v_{n+1} = cu_n + dv_n \end{cases}$:

– soit il existe une symétrie entre les deux relations et on l'exploite (la plus courante étant $a = d$ et $b = c$; on montre alors que $u + v$ est une suite constante et $u - v$ une suite géométrique) ;

– soit il n'existe aucune symétrie entre les deux relations et on écrit alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ (où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$) ; en calculant A^n, on en déduit alors une expression de u_n et v_n en fonction de u_0 et v_0 : $\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.

S0 E0

■ 12. Suites linéaires récurrentes d'ordre 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n.

L'équation caractéristique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $x^2 - 3x + 2 = 0$, de discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$, admet pour racines $\frac{3-1}{2} = 1$ et $\frac{3+1}{2} = 2$. D'après le cours, on peut alors écrire que : $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda\cdot 1^n + \mu\cdot 2^n$.

Or, on sait que : $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$. λ et μ sont donc solutions du système :

$\begin{cases} \lambda\cdot 1^0 + \mu\cdot 2^0 = 0 \\ \lambda\cdot 1^1 + \mu\cdot 2^1 = 1 \end{cases}$ c'est-à-dire :

$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda + 2\mu = 1 \end{cases}$ et donc ($L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$) :

$\begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = 1 \end{cases}$.

On peut désormais conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n - 1}$$

☞ Pour déterminer l'expression en fonction de n du terme général u_n d'une suite linéaire récurrente d'ordre 2 dont on connaît les valeurs u_p et u_q aux rangs p et q (généralement 0 et 1, mais pas nécessairement), il faut :

– étudier les solutions de l'équation caractéristique de la suite et se ramener au cours afin de déterminer l'expression de u_n en fonction de n et des paramètres λ et μ :
$\exists(\lambda, \mu)\in\mathbb{R}^2, \forall n\in\mathbb{N}, u_n = f(\lambda, \mu, n)$,

– puis déterminer les valeurs de λ et μ en résolvant le système d'équations : $\begin{cases} f(\lambda,\mu,p) = u_p \\ f(\lambda,\mu,q) = u_q \end{cases}$

S❷ E❷

● 13. Suites linéaires récurrentes d'ordre 3 (et plus...)

Soient S l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n \quad (\bullet),$$

et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite élément de S telle que : $w_0 = 0$, $w_1 = 1$, $w_2 = 2$.

1) a) Déterminer les racines α, β et γ de l'équation $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$.

b) Déterminer l'ensemble des suites géométriques de premier terme égal à 1 vérifiant la relation ($\bullet$).

c) Montrer que le système :

$$\begin{cases} x + y + z = w_0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = w_1 \\ \alpha^2 x + \beta^2 y + \gamma^2 z = w_2 \end{cases}$$

admet une solution unique (x, y, z) que l'on précisera.

d) En déduire à l'aide d'un raisonnement par récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'expression de w_n en fonction de n.

2) En exprimant matriciellement la relation de récurrence vérifiée par $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, déterminer à nouveau, pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'expression de w_n en fonction de n.

NB : La résolution du 2 nécessite la connaissance du cours : 3. Diagonalisation.

1) a) ■ On a : $\forall x\in\mathbb{R},\ x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)(x-2)(x+1)$. On en déduit alors :

$$\boxed{\text{Les racines de l'équation } x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \text{ sont les réels } \alpha = 1,\ \beta = 2 \text{ et } \gamma = -1}$$

☞ Pour déterminer les racines d'une équation polynomiale de degré supérieur ou égal à 3, il faut tout d'abord déterminer la (ou les) racine(s) évidente(s) de l'équation, puis (éventuellement) déterminer les racines du polynôme de degré 2 résiduel.

b) Soient $q\in\mathbb{R}$ et $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme égal à 1 vérifiant la relation ($\bullet$). On peut écrire :

$\forall n\in\mathbb{N},\ q^{n+3} - 2q^{n+2} - q^{n+1} + 2q^n = 0$ soit, en factorisant cette expression par q^n :

$\forall n\in\mathbb{N},\ q^n(q^3 - 2q^2 - q + 2) = 0$ i.e. :

$\left|\begin{array}{l} \forall n\in\mathbb{N},\ q^n = 0 \\ q^3 - 2q^2 - q + 2 = 0 \end{array}\right.$ et comme $\nexists q\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N}, q^n = 0$:

ou

$q^3 - 2q^2 - q + 2 = 0$ soit encore, d'après la question précédente :

$$\begin{array}{|l} q = 1 \\ q = 2 \\ q = -1 \end{array}.$$
ou

Les suites $(1^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant clairement la relation (*) (1, 2 et -1 sont solutions de l'équation $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$), on peut alors conclure :

L'ensemble des suites géométriques de premier terme égal à 1 vérifiant la relation (*) est : $\left\{(1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (2^n)_{n\in\mathbb{N}}, \left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\}$.

c) Comme $\alpha = 1$, $\beta = 2$ et $\gamma = -1$ et $w_0 = 0$, $w_1 = 1$ et $w_2 = 2$, x, y et z sont solutions du système :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y - z = 1 \\ x + 4y + z = 2 \end{cases}$$
soit $\left(L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_2 - \frac{1}{2}L_3,\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_1 + \frac{1}{3}L_3,\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_1 - \frac{1}{2}L_2 + \frac{1}{6}L_3\right)$:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{2}{3} \\ z = -\dfrac{1}{6} \end{cases}.$$

On peut désormais conclure :

Le système $\begin{cases} x + y + z = w_0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = w_1 \\ \alpha^2 x + \beta^2 y + \gamma^2 z = w_2 \end{cases}$ admet pour solution unique le triplet $\left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{6}\right)$

d) Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N},\ w_n = \alpha^n x + \beta^n y + \gamma^n z$, soit : $\forall n\in\mathbb{N},\ w_n = \frac{2^{n+1}}{3} + \frac{(-1)^{n+1}}{6} - \frac{1}{2}$.

• Aux rangs n = 0, n = 1 et n = 2, on a bien :

$w_0 = 0 = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2}$.

$w_1 = 1 = \frac{4}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2}$, et :

$w_2 = 2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2}$.

• Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $\begin{cases} w_n = \dfrac{2^{n+1}}{3} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{6} - \dfrac{1}{2} \\ w_{n+1} = \dfrac{2^{n+2}}{3} + \dfrac{(-1)^n}{6} - \dfrac{1}{2} \\ w_{n+2} = \dfrac{2^{n+3}}{3} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{6} - \dfrac{1}{2} \end{cases}$. On a alors :

$w_{n+3} = 2w_{n+2} + w_{n+1} - 2w_n$ soit, après calculs, d'après l'hypothèse de récurrence :

$= \frac{2^{n+4}}{3} + \frac{(-1)^n}{6} - \frac{1}{2}$ i.e. :

$= \frac{2^{n+4}}{3} + \frac{(-1)^{n+4}}{6} - \frac{1}{2}$.

• Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ w_n = \frac{2^{n+1}}{3} + \frac{(-1)^{n+1}}{6} - \frac{1}{2}}$$

☞ Pour étudier une suite (u_n) vérifiant une relation de récurrence d'ordre p (où p est un entier supérieur ou égal à 3), une première méthode (qui ne fait pas partie du cours) consiste à :

– déterminer les racines $(\alpha_i)_{1\le i\le p}$ de l'équation caractéristique de cette suite, puis si ces racines sont distinctes :

– montrer que les suites $\left((\alpha_i^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{1\le i\le p}$ sont les seules suites géométriques de premier terme égal à 1 vérifiant la relation de récurrence précédente,

– résoudre le système $\left(u_j = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \alpha_i^j\right)_{0\le j\le p-1}$, et enfin :

– montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \alpha_i^n$.

☞ Pour étudier une suite (u_n) vérifiant une relation de récurrence d'ordre p (où p est un entier supérieur ou égal à 3), en notant S l'espace vectoriel des suites vérifiant cette relation de récurrence, une deuxième méthode, proche de la première (et qui ne fait toujours pas partie du cours) consiste à (cf. exercice **2.11**) :

– déterminer les racines $(\alpha_i)_{1\le i\le p}$ de l'équation caractéristique de cette suite, puis si ces racines sont distinctes :

– montrer que la famille $\left((\alpha_i^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{1\le i\le p}$ forme une base de S (on montre que cette famille forme une famille libre de S, puis qu'il existe un isomorphisme de S sur $\mathbb{R}^p$), d'où :

$\exists(\lambda_i)_{1\le i\le p}\in\mathbb{R}^p,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \alpha_i^n$, et enfin :

– en utilisant les conditions initiales que vérifie u, résoudre le système qui en découle pour déterminer les $(\lambda_i)_{1\le i\le p}$.

2) ⊃ Comme $w\in S$, on a : $\forall n\in\mathbb{N},\ w_{n+3} = 2w_{n+2} + w_{n+1} - 2w_n$. On peut alors écrire matriciellement :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \begin{pmatrix} w_{n+3} \\ w_{n+2} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{n+2} \\ w_{n+1} \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Notons alors M la matrice : $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, W_n le vecteur-colonne : $W_n = \begin{pmatrix} w_{n+2} \\ w_{n+1} \\ w_n \end{pmatrix}$. On peut alors écrire :

$\forall n\in\mathbb{N},\ W_{n+1} = MW_n$ d'où, par une récurrence immédiate :

$\forall n\in\mathbb{N},\ W_n = M^n W_0$ (avec $W_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$).

⊃ λ est valeur propre de M si et seulement si $\exists X \neq 0,\ (M - \lambda I)X = 0$. Or, on a :

$$(M-\lambda I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} X = 0$$

d'où ($L_1 \leftrightarrow L_2$, puis : $L_2' \leftarrow L_2' - (2-\lambda)L_1'$) :

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda^2+2\lambda+1 & -2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} X = 0$$

soit ($L_2 \leftrightarrow L_3$, puis : $L_3' \leftarrow L_3' - (-\lambda^2+2\lambda+1)L_2$) :

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-2 \end{pmatrix} X = 0$$

i.e. :

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & -(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2) \end{pmatrix} X = 0 \ ①.$$

λ est donc valeur propre de M si et seulement s'il existe un vecteur $X \neq 0$ solution du système précédent, c'est-à-dire si ce système n'est pas un système de Cramer, i.e. si la matrice carrée précédente n'est pas inversible, soit encore, puisqu'elle est triangulaire supérieure : si l'un de ses coefficients diagonaux est nul. Ainsi, λ est valeur propre de M si et seulement si : $\lambda \in \{-1, 1, 2\}$. On peut alors écrire :

– si $\lambda = -1$, ① devient : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0$, soit, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: $\begin{cases} x = -y \\ y = -z \end{cases}$.

-1 est donc valeur propre de M de sous-espace propre associé $\mathcal{V}ect\big((1, -1, 1)\big)$.

– si $\lambda = 1$, ① devient : $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0$, soit, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: $\begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$.

1 est donc valeur propre de M de sous-espace propre associé $\mathcal{V}ect\big((1, 1, 1)\big)$.

– si $\lambda = 2$, ① devient : $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0$, soit, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: $\begin{cases} x = 2y \\ y = 2z \end{cases}$.

2 est donc valeur propre de M de sous-espace propre associé $\mathcal{V}ect\big((4, 2, 1)\big)$.

❑ Comme $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et comme elle admet trois valeurs propres distinctes, M est diagonalisable. D'après les résultats précédents, en posant : $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on peut écrire : $M = PDP^{-1}$, d'où, par une récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$. Calculons alors P^{-1}. On a :

$$P = IP \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P \qquad \text{soit } (L_2 \leftarrow L_2 + L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} P \qquad \text{soit encore } (L_1 \leftarrow 3L_1 + 4L_3,\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} P \qquad \text{i.e. } (L_1 \leftarrow 2L_1 - 3L_2) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} P \qquad \text{et donc :}$$

$$\Leftrightarrow P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$, on peut alors écrire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, et donc, après calculs :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2^{n+3} - 3 + (-1)^n & 3 + 3(-1)^{n+1} & -2^{n+3} + 6 + 2(-1)^n \\ 2^{n+2} - 3 + (-1)^{n+1} & 3 + 3(-1)^n & -2^{n+2} + 6 + 2(-1)^{n+1} \\ 2^{n+1} - 3 + (-1)^n & 3 + 3(-1)^{n+1} & -2^{n+1} + 6 + 2(-1)^n \end{pmatrix} \qquad \text{d'où, comme } \forall n \in \mathbb{N},\ W_n = M^nW_0 :$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ W_n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2^{n+3} - 3 + (-1)^n & 3 + 3(-1)^{n+1} & -2^{n+3} + 6 + 2(-1)^n \\ 2^{n+2} - 3 + (-1)^{n+1} & 3 + 3(-1)^n & -2^{n+2} + 6 + 2(-1)^{n+1} \\ 2^{n+1} - 3 + (-1)^n & 3 + 3(-1)^{n+1} & -2^{n+1} + 6 + 2(-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{soit :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ W_n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2^{n+4} - 3 + (-1)^{n+1} \\ 2^{n+3} - 3 + (-1)^n \\ 2^{n+2} - 3 + (-1)^{n+1} \end{pmatrix} \qquad \text{et donc, d'après la définition de } W_n :$$

$\forall n\in \mathbb{N},\ w_n = \frac{1}{6}\left(2^{n+2} - 3 + (-1)^{n+1}\right)$ i.e. :

$$\boxed{\forall n\in \mathbb{N},\ w_n = \frac{2^{n+1}}{3} + \frac{(-1)^{n+1}}{6} - \frac{1}{2}}$$

☞ Pour étudier une suite (u_n) vérifiant une relation de récurrence d'ordre p ($p \geq 3$) – on peut alors écrire qu'il existe une suite de réels $(a_i)_{1\leq i\leq p}$ telle que : $\forall n\in \mathbb{N},\ u_{n+p} = a_1 u_{n+p-1} + a_2 u_{n+p-2} + \ldots + a_p u_n$ –, une troisième méthode consiste à écrire la matrice A telle que :

$$\forall n\in \mathbb{N},\ \begin{pmatrix} u_{n+p} \\ \vdots \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n+p-1} \\ \vdots \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} \text{ où } A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{p-1} & a_p \\ 1 & & & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & 1 & \end{pmatrix}.$$

En calculant A^n, on obtient : $\forall n\in \mathbb{N},\ \begin{pmatrix} u_{n+p-1} \\ \vdots \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_{p-1} \\ \vdots \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$. On en déduit alors, pour tout $n\in \mathbb{N}$, une expression de u_n en fonction de $u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}$.

SO EO

★ 14. Théorème de Césaro

Soit $(u_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle.

1) On note $(v_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n\in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} u_k}{n}.$$

a) Montrer que si $(u_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ ($\ell\in \mathbb{R}$), alors $(v_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$ converge également vers ℓ.

b) Montrer, à l'aide d'un contre-exemple, que la réciproque est fausse.

2) (SO) Soit $(\alpha_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = +\infty$. On note alors $(w_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n\in \mathbb{N}^*,\ w_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}.$$

a) Montrer que si $(u_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ ($\ell\in \mathbb{R}$), alors $(w_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$ converge également vers ℓ.

b) Montrer également que si $(u_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$, alors $(w_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$ tend également vers $+\infty$.

1) a) D'après la définition de la suite $(v_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$, on peut écrire :

$$\forall n\in \mathbb{N}^*,\ v_n - \ell = \frac{\sum_{k=1}^{n} u_k}{n} - \ell \quad \text{soit :}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n} u_k - n\ell}{n} \quad \text{d'où :}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n} (u_k - \ell)}{n} \quad \text{et donc :}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|v_n - \ell\right| = \dfrac{\left|\sum\limits_{k=1}^{n}(u_k - \ell)\right|}{n}$ soit, en scindant la somme en deux (pour $n \geq p$, $p \in [2, +\infty[$) :

$\forall p \in [2, +\infty[, \forall n \geq p, \left|v_n - \ell\right| = \dfrac{\left|\sum\limits_{k=1}^{p-1}(u_k - \ell) + \sum\limits_{k=p}^{n}(u_k - \ell)\right|}{n}$ et donc, la valeur absolue d'une somme étant inférieure ou égale à la somme des valeurs absolues :

$$\leq \frac{\left|\sum\limits_{k=1}^{p-1}(u_k - \ell)\right|}{n} + \frac{\sum\limits_{k=p}^{n}\left|u_k - \ell\right|}{n}.$$

Or, comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ, on peut écrire : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geq n_0, \left|u_k - \ell\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, la somme $\sum\limits_{k=n_0}^{n}\left|u_k - \ell\right|$ comprenant $n - n_0 + 1$ termes, on en déduit alors, en écrivant la majoration précédente de $\left|v_n - \ell\right|$ pour $n \geq n_0$ (on pose ainsi $p = n_0$) :

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in [2, +\infty[, \forall n \geq n_0, \left|v_n - \ell\right| \leq \dfrac{\left|\sum\limits_{k=1}^{n_0-1}(u_k - \ell)\right|}{n} + \dfrac{n - n_0 + 1}{n} \cdot \dfrac{\varepsilon}{2}$ et comme $\forall n \geq n_0, \dfrac{n - n_0 + 1}{n} \leq 1$:

$$\leq \frac{\left|\sum\limits_{k=1}^{n_0-1}(u_k - \ell)\right|}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \quad ①.$$

Or, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\left|\sum\limits_{k=1}^{n_0-1}(u_k - \ell)\right|}{n} = 0$, ce qui s'écrit encore, d'après la définition de la limite d'une suite :

$\forall \varepsilon' > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, \dfrac{\left|\sum\limits_{k=1}^{n_0-1}(u_k - \ell)\right|}{n} < \varepsilon'$.

En posant maintenant $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ et $n_2 = \max(n_0, n_1)$, on en déduit alors, d'après la relation ① :

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2, \left|v_n - \ell\right| < \varepsilon$.

On peut désormais conclure, d'après la définition de la limite d'une suite :

$$\boxed{\text{Si } (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge vers } \ell \ (\ell \in \mathbb{R}), \text{ alors } (v_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge également vers } \ell}$$

☞ Pour montrer qu'une suite (v_n) converge vers ℓ, il faut parfois s'intéresser à la suite $(v_n - \ell)$ soit en revenant comme ici à la définition de la limite d'une suite, soit en démontrant, à l'aide des méthodes usuelles (limites classiques, comparaisons de suites...), que la suite $(v_n - \ell)$ converge vers 0.

b) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = (-1)^n$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} u_k}{n}$.

On peut alors écrire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k}{n}$, et donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} n \text{ pair}, v_n = 0 \\ n \text{ impair}, v_n = -\dfrac{1}{n} \end{cases}$.

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc convergente de limite nulle. Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est divergente (elle n'admet pas de limite), on peut alors conclure :

$$\boxed{\text{La réciproque est fausse}}$$

☞ **Théorème de Césaro.** Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ ($\ell\in\mathbb{R}$), alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} u_k}{n}$ converge également vers ℓ (démonstration à connaître). La réciproque est fausse (contre-exemple à retenir).

2) a) D'après la définition de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on peut écrire :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ w_n - \ell = \frac{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k u_k}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k} - \ell$$

soit :

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k u_k - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k \ell}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}$$

d'où :

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k (u_k - \ell)}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}$$

et donc, comme $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}\alpha_k > 0$ (la suite $(\alpha_k)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant une suite de réels strictement positifs) :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ |w_n - \ell| = \frac{\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k (u_k - \ell)\right|}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}$$

soit, en scindant la somme en deux (pour $n \geq p$, $p\in[2, +\infty[$) :

$$\forall p\in[2, +\infty[,\ \forall n \geq p,\ |w_n - \ell| = \frac{\left|\sum_{k=1}^{p-1}\alpha_k (u_k - \ell) + \sum_{k=p}^{n}\alpha_k (u_k - \ell)\right|}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}$$

et donc, la valeur absolue d'une somme étant inférieure ou égale à la somme des valeurs absolues :

$$\leq \frac{\left|\sum_{k=1}^{p-1}\alpha_k (u_k - \ell)\right|}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k} + \frac{\sum_{k=p}^{n}\alpha_k |u_k - \ell|}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}.$$

Or, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ, on peut écrire : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall k \geq n_0,\ |u_k - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. On en déduit alors, en écrivant la majoration précédente de $|w_n - \ell|$ pour $n \geq n_0$ (on pose ainsi $p = n_0$) :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0\in[2, +\infty[,\ \forall n \geq n_0,\ |w_n - \ell| \leq \frac{\left|\sum_{k=1}^{n_0-1}\alpha_k (u_k - \ell)\right|}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k} + \frac{\sum_{k=n_0}^{n}\alpha_k}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}\cdot\frac{\varepsilon}{2}$$

et comme $\dfrac{\sum_{k=n_0}^{n}\alpha_k}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k} \leq 1$ (la suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ étant une suite de réels strictement positifs) :

$$\leq \frac{\left|\sum_{k=1}^{n_0-1}\alpha_k (u_k - \ell)\right|}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k} + \frac{\varepsilon}{2} \quad ②.$$

Or, comme $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = +\infty$, on a : $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\left|\sum_{k=1}^{n_0-1} \alpha_k(u_k-\ell)\right|}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} = 0$, ce qui s'écrit encore, d'après la définition de la limite d'une suite : $\forall\varepsilon' > 0,\ \exists n_1\in\mathbb{N},\ \forall n \geq n_1,\ \dfrac{\left|\sum_{k=1}^{n_0-1} \alpha_k(u_k-\ell)\right|}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} < \varepsilon'$.

En posant maintenant $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $n_2 = \max(n_0, n_1)$, on en déduit alors, d'après la relation ② :

$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_2\in\mathbb{N},\ \forall n \geq n_2,\ \left|w_n - \ell\right| < \varepsilon$.

On peut désormais conclure, d'après la définition de la limite d'une suite :

$$\boxed{\text{Si } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } \ell\ (\ell\in\mathbb{R}), \text{ alors } (w_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge également vers } \ell}$$

☞ **Première généralisation du théorème de Césaro.** Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ ($\ell\in\mathbb{R}$), alors la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ w_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}$ (où $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels strictement positifs telle que : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = +\infty$) converge également vers ℓ (démonstration à connaître).

b) D'après la définition de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on peut écrire :

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ w_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}$ soit, en scindant la somme en deux (pour $n \geq p$, $p\in[2, +\infty[$) :

$$\forall p\in[2, +\infty[,\ \forall n \geq p,\ w_n = \frac{\sum_{k=1}^{p-1} \alpha_k u_k}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} + \frac{\sum_{k=p}^{n} \alpha_k u_k}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}.$$

Or, comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, on peut écrire : $\forall A\in\mathbb{R},\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall k \geq n_0,\ u_k > 2A$, et on en déduit alors, en minorant w_n pour $n \geq n_0$ (on pose ainsi $p = n_0$) :

$$\forall A\in\mathbb{R},\ \exists n_0\in[2, +\infty[,\ \forall n \geq n_0,\ w_n > \frac{\sum_{k=1}^{n_0-1} \alpha_k u_k}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} + \frac{\sum_{k=n_0}^{n} \alpha_k}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}\,2A$$

et comme $\forall n \geq n_0,\ \sum_{k=n_0}^{n} \alpha_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k - \sum_{k=1}^{n_0-1} \alpha_k$:

$$> \frac{\sum_{k=1}^{n_0-1} \alpha_k u_k}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} + 2A\left(1 - \frac{\sum_{k=1}^{n_0-1} \alpha_k}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}\right) ③.$$

Or, comme $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = +\infty$, on a : $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sum_{k=1}^{n_0-1} \alpha_k u_k}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} = 0$, ce qui s'écrit encore, d'après la définition de la limite d'une suite :

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, \left| \dfrac{\sum_{k=1}^{n_0-1} \alpha_k u_k}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} \right| < \varepsilon$ et donc, en posant $\varepsilon = \dfrac{B}{2}$ $(B \in \mathbb{R}_+^*)$:

$\forall B \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, \left| \dfrac{\sum_{k=1}^{n_0-1} \alpha_k u_k}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} \right| < \dfrac{B}{2}$ i.e. :

$\forall B \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, \dfrac{\sum_{k=1}^{n_0-1} \alpha_k u_k}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} > -\dfrac{B}{2}$ ④.

De même, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = +\infty$, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sum_{k=1}^{n_0-1} \alpha_k}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} = 0$, ce qui s'écrit encore, d'après la définition de la limite d'une suite :

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2, \left| \dfrac{\sum_{k=1}^{n_0-1} \alpha_k}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} \right| < \varepsilon$ et donc, en posant $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$:

$\exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2, \left| \dfrac{\sum_{k=1}^{n_0-1} \alpha_k}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} \right| < \dfrac{1}{4}$ i.e. :

$\exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2, -\dfrac{\sum_{k=1}^{n_0-1} \alpha_k}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} > -\dfrac{1}{4}$ ⑤.

En posant maintenant $B = A$ et $n_3 = \max(n_0, n_1, n_2)$, on en déduit alors, à l'aide des relations ③, ④ et ⑤ :

$\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_3 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_3, w_n > -\dfrac{A}{2} + 2A\left(1 - \dfrac{1}{4}\right)$ i.e. :

$\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_3 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_3, w_n > A$ d'où la conclusion, d'après les définitions des limites infinies des suites :

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), alors $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend également vers $+\infty$ (resp. $-\infty$)

☞ **Deuxième généralisation du théorème de Césaro.** Si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), alors la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}$ (où $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de réels strictement positifs telle que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = +\infty$) tend également vers $+\infty$ (resp. $-\infty$). Démonstration à connaître.

Séries

Fiche de cours

I. Définition de la convergence SO EO

■ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que la série de terme général u_n converge de somme ℓ ($\ell\in\mathbb{R}$) si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (suite des sommes partielles) définie par : $\forall n\in\mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ converge vers ℓ et on note alors : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \ell$. Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, on dit que la série de terme général u_n diverge.

■ Si la série de terme général u_n converge, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

II. Comparaison des séries à termes positifs SO EO

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites positives.

– Si $\exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ u_n \leq v_n$, alors :

- si la série de terme général v_n converge, alors la série de terme général u_n converge également,
- si la série de terme général u_n diverge, alors la série de terme général v_n diverge également.

– Si $u_n \sim v_n$, alors les séries de terme général u_n et v_n sont de même nature.

III. Séries absolument convergentes SO EO

■ On dit que la série de terme général u_n est absolument convergente si la série de terme général $|u_n|$ converge.

■ Toute série absolument convergente est convergente.

IV. Séries de référence SO EO

■ Soit $q\in\mathbb{R}$. La série de terme général q^n est convergente si et seulement si $|q| < 1$ et on a alors :

$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ (série géométrique).

■ Soit $q\in\mathbb{R}$. La série de terme général nq^n est convergente si et seulement si $|q| < 1$ et on a alors :

$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$.

■ Soit $q\in\mathbb{R}$. La série de terme général n^2q^n est convergente si et seulement si $|q| < 1$ et on a alors :

$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$.

■ Soit $x\in\mathbb{R}$. La série de terme général $\frac{x^n}{n!}$ est convergente et on a alors : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ (série exponentielle).

■ Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. La série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$ (série de Riemann).

Exercices clefs, méthodes et astuces

Méthodes d'étude de la nature d'une série

■ Pour étudier la nature de la série de terme général u_n, on doit procéder de la façon suivante :

• On étudie tout d'abord la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: si celle-ci ne converge pas vers 0, la série de terme général u_n diverge ; si elle converge vers 0, on ne peut rien conclure,

• En notant $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n, si pour tout $n\in\mathbb{N}$, S_n s'exprime de façon simple en fonction de n, on étudie la nature de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$: par définition, la série de terme général u_n est de même nature que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (cf. exercice 1),

• Si on reconnait la somme de séries de référence, on s'y ramène alors (cf. exercice 2),

• Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive (à partir d'un certain rang), on utilise les règles de comparaison des séries à termes positifs (cf. exercice 3) ; on compare, au voisinage de $+\infty$, u_n à $\frac{1}{n^\alpha}$ (et beaucoup plus rarement au terme général des autres séries de référence : q^n, nq^n, n^2q^n ou $\frac{x^n}{n!}$) :

– si $\exists n_0\in\mathbb{N}, \forall n\geq n_0, u_n\leq\frac{1}{n^\alpha}$ (ou si $u_n\sim\frac{1}{n^\alpha}$) avec $\alpha>1$, alors la série de terme général u_n converge,

– si $\exists n_0\in\mathbb{N}, \forall n\geq n_0, \frac{1}{n}\leq u_n$ (ou si $u_n\sim\frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha\leq 1$), alors la série de terme général u_n diverge.

• Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négative (à partir d'un certain rang), on se ramène au point précédent, en étudiant la série de terme général $-u_n$,

• Enfin, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas de signe constant, à moins d'être guidé par l'énoncé, on ne peut plus étudier que la série de terme général $|u_n|$: si elle converge, alors la série de terme général u_n converge (cf. exercice 3.4) ; si elle diverge, on ne peut rien conclure.

En dehors des séries géométrique (et de ses deux premières "dérivées"), exponentielle et des séries de Riemann, il existe une autre famille de séries de référence, hors-programme, mais qu'il convient de connaître également : les séries de Bertrand (cf. exercice 10).

De plus, il existe d'autres méthodes pour l'étude des séries que celles évoquées précédemment, mais elles sont hors-programme et seront donc toujours (ou presque) proposées par l'énoncé : la règle de D'Alembert (cf. exercice 12), l'utilisation d'une transformation d'Abel (cf. exercice 13), le groupement de termes (cf. exercice 14), l'utilisation du théorème des séries alternées (cf. exercice 15) et le produit de Cauchy (cf. exercice 16).

■ Attention, avant de linéariser une somme infinie, il faut toujours s'assurer de la convergence de toutes les séries mises en jeu.

SO EO

1. Séries étudiées à l'aide de la suite des sommes partielles

1) a) Montrer que :

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \frac{1}{4k^2-1}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right].$$

b) En déduire que la série de terme général $\frac{1}{4n^2-1}$ ($n\geq 0$) est convergente et calculer sa somme.

2) Montrer que la série de terme général $\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ ($n\geq 2$) est convergente et calculer sa somme.

1) a) On a :

$\forall k \in \mathbb{N},\ \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right] = \frac{1}{2}\,\frac{(2k+1)-(2k-1)}{(2k+1)(2k-1)}$ soit, après simplifications :

$= \frac{1}{2}\,\frac{2}{4k^2-1}$ et donc :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right]}$$

b) On en déduit alors, en sommant la relation précédente pour $k = 0$ à $k = n$ ($n \in \mathbb{N}$) :

$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$ soit, les termes s'éliminant deux à deux :

$= \frac{1}{2}\left(-1 - \frac{1}{2n+1}\right).$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$, on en déduit alors, par passage à la limite dans la relation précédente que : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = -\frac{1}{2}$, et donc que :

$$\boxed{\text{La série de terme général } \frac{1}{4n^2-1}\ (n \geq 0) \text{ converge de somme } -\frac{1}{2}}$$

☞ Il ne faut pas écrire : "la série $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$", mais : "la série de terme général u_k". En effet, $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ ne représente que la somme de la série de terme général u_k lorsque celle-ci converge.

2) On a :

$\forall k \in [2, +\infty[,\ \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)$ soit :

$= \ln\left(\frac{(k+1)(k-1)}{k \cdot k}\right)$ et donc :

$= \big(\ln(k+1) - \ln k\big) + \big(\ln(k-1) - \ln k\big).$

En sommant cette relation pour $k = 2$ à $k = n$ ($n \in [2, +\infty[$), on en déduit alors :

$\forall n \in [2, +\infty[,\ \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n}\big(\ln(k+1) - \ln k\big) + \sum_{k=2}^{n}\big(\ln(k-1) - \ln k\big)$ soit, les termes s'éliminant deux à deux dans chacune des deux sommes :

$= \big(\ln(n+1) - \ln 2\big) + \big(\ln 1 - \ln n\big)$ et donc :

$= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln 2.$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ et comme $\lim_{x\to 1} \ln x = \ln 1 = 0$, on peut écrire : $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 0$, et donc : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = -\ln 2.$

On peut désormais conclure :

$$\boxed{\text{La série de terme général } \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\ (n \geq 2) \text{ converge de somme } -\ln 2}$$

☞ Se souvenir que dans toute série, on peut voir une suite... C'est ainsi qu'en déterminant la nature et la limite éventuelle de la suite des sommes partielles attachée à une série, on peut déterminer la nature et la somme éventuelle de cette série.

SO EO

2. Séries étudiées à l'aide des exemples usuels

1) Montrer que la série de terme général $\frac{n^2+1}{3^n}$ $(n \geq 0)$ est convergente et calculer sa somme.

2) Montrer que la série de terme général $\frac{n+2^n}{n!}$ $(n \geq 0)$ est convergente et calculer sa somme.

1) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{n^2+1}{3^n} = \big(n(n-1)+n+1\big)\left(\frac{1}{3}\right)^n \qquad \text{soit :}$$

$$= \frac{1}{9}n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + \frac{1}{3}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Or, d'après le cours, on sait que la série de terme général $n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$ $(n \geq 0)$ converge de somme $\frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} = \frac{27}{4}$, que la série de terme général $n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ $(n \geq 0)$ converge de somme $\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{9}{4}$ et que la série de terme général $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ $(n \geq 0)$ converge de somme $\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.

On en déduit alors que la série de terme général $\frac{n^2+1}{3^n}$ $(n \geq 0)$ converge de somme $\frac{1}{9}\cdot\frac{27}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4} + \frac{3}{2} = 3$, soit :

$$\boxed{\text{La série de terme général } \frac{n^2+1}{3^n}\ (n \geq 0) \text{ converge de somme } 3}$$

☞ Se souvenir que $n^2 = n(n-1)+n$. Décomposition utile avec les séries géométrique ou exponentielle.

☞ Se souvenir que : $\left(\frac{1}{q}\right)^k = \frac{1}{q}\left(\frac{1}{q}\right)^{k-1} = \frac{1}{q^2}\left(\frac{1}{q}\right)^{k-2}$. Décomposition utile avec des séries géométriques.

2) On a :

$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{k+2^k}{k!} = \frac{1}{(k-1)!} + \frac{2^k}{k!}$ soit, en sommant cette relation pour $k = 1$ à $k = n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$:

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{k+2^k}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k!}$ soit encore, en effectuant le changement de variable $k' = k-1$ dans la première somme du second membre :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{k+2^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k!}$ et en ajoutant $1 = \frac{0+2^0}{0!} = \frac{2^0}{0!}$ membre à membre :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} \frac{k+2^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}.$$

Or, d'après le cours, on sait que les séries de terme général $\frac{1}{k!}$ $(k \geq 0)$ et $\frac{2^k}{k!}$ $(k \geq 0)$ convergent de sommes respectives e et e^2 (séries exponentielles). On en déduit alors que les suites $\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont convergentes de limites respectives e et e^2, et donc que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{k+2^k}{k!}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge de limite $e + e^2$. On peut désormais conclure :

$$\boxed{\text{La série de terme général } \frac{n+2^n}{n!}\ (n \geq 0) \text{ converge de somme } e + e^2}$$

SO EO

3. Utilisation des règles de comparaison

Etudier la nature des séries de terme général :

1) $\dfrac{\ln n}{n^3}$,

2) $(-1)^n n e^{-n}$,

3) $\dfrac{n+e^{-n}}{(n+1)^2}$,

4) $\dfrac{(-1)^n \cos n}{n\sqrt{n}}$,

5) $\dfrac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1}$,

6) $\dfrac{a^2(-1)^n \sin\left(\dfrac{n\pi}{12}\right)}{(a-n\sqrt{n})\ln^2 n}$ $(a\in\mathbb{R})$.

1) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$ (croissances comparées) et $0 < 1$, on peut écrire :

$\exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \dfrac{\ln n}{n} \leq 1$ soit, en divisant cette relation par $n^2 > 0$ $(n\in\mathbb{N}^*)$:

$\exists n_0\in\mathbb{N}^*,\ \forall n \geq n_0,\ \dfrac{\ln n}{n^3} \leq \dfrac{1}{n^2}$.

Comme $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \begin{cases}\dfrac{\ln n}{n^3} \geq 0\\ \dfrac{1}{n^2} \geq 0\end{cases}$ et comme la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann), les règles de comparaison des séries à termes positifs nous permettent alors d'écrire que :

$$\boxed{\text{La série de terme général } \frac{\ln n}{n^3} \text{ converge}}$$

☞ Lors de l'utilisation des règles de comparaison, il faut impérativement préciser :

– la comparaison effectuée : $u_n \sim v_n$ ou $\exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ u_n \leq v_n$,

– la positivité des éléments mis en jeu : $\forall n \geq n_1,\ \begin{cases}u_n \geq 0\\ v_n \geq 0\end{cases}$, et :

– la nature de la série de référence.

2) On a : $\forall n\in\mathbb{N},\ \left|(-1)^n n e^{-n}\right| = n e^{-n}$. Or, on sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 e^{-n} = 0$ (croissances comparées). Comme $0 < 1$, on en déduit alors que :

$\exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ n^3 e^{-n} \leq 1$ soit, en divisant cette relation par $n^2 > 0$ $(n\in\mathbb{N}^*)$:

$\exists n_0\in\mathbb{N}^*,\ \forall n \geq n_0,\ n e^{-n} \leq \dfrac{1}{n^2}$.

Comme $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \begin{cases}n e^{-n} \geq 0\\ \dfrac{1}{n^2} \geq 0\end{cases}$ et comme la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge (séries de Riemann), les règles de comparaison des séries à termes positifs nous permettent alors d'écrire que la série de terme général $n e^{-n}$ converge, donc que la série de terme général $\left|(-1)^n n e^{-n}\right|$ converge, donc que la série de terme général $(-1)^n n e^{-n}$ converge absolument, et donc que :

$$\boxed{\text{La série de terme général } (-1)^n n e^{-n} \text{ converge}}$$

3) Comme $n + 1 \sim n$, on peut écrire : $(n+1)^2 \sim n^2$. De plus, comme $e^{-n} = o(n)$, on peut également écrire : $n + e^{-n} \sim n$. On en déduit alors : $\dfrac{n+e^{-n}}{(n+1)^2} \sim \dfrac{1}{n}$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} \dfrac{n+e^{-n}}{(n+1)^2} \geq 0 \\ \dfrac{1}{n} \geq 0 \end{cases}$ et comme la série de terme général $\dfrac{1}{n}$ diverge (série de Riemann), les règles de comparaison des séries à termes positifs nous permettent alors d'écrire que :

$$\boxed{\text{La série de terme général } \dfrac{n+e^{-n}}{(n+1)^2} \text{ diverge}}$$

4) On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\dfrac{(-1)^n \cos n}{n\sqrt{n}}\right| \leq \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} \left|\dfrac{(-1)^n \cos n}{n\sqrt{n}}\right| \geq 0 \\ \dfrac{1}{n\sqrt{n}} \geq 0 \end{cases}$ et comme la série de terme général $\dfrac{1}{n\sqrt{n}} = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge (série de Riemann), les règles de comparaison des séries à termes positifs nous permettent alors d'écrire que la série de terme général $\left|\dfrac{(-1)^n \cos n}{n\sqrt{n}}\right|$ converge, donc que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n \cos n}{n\sqrt{n}}$ converge absolument, et donc que :

$$\boxed{\text{La série de terme général } \dfrac{(-1)^n \cos n}{n\sqrt{n}} \text{ converge}}$$

5) On a, au voisinage de $+\infty$: $\dfrac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1} \sim \dfrac{\ln n}{n\sqrt{n}}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n^{\frac{1}{4}}} = 0$ (croissances comparées), on peut écrire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^{\frac{5}{4}}\ln n}{n\sqrt{n}} = 0$. Comme $0 < 1$, on en déduit alors :

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $\dfrac{n^{\frac{5}{4}}\ln n}{n\sqrt{n}} \leq 1$ soit, en divisant cette relation par $n^{\frac{5}{4}} > 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$) :

$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \geq n_0$, $\dfrac{\ln n}{n\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} \dfrac{\ln n}{n\sqrt{n}} \geq 0 \\ \dfrac{1}{n^{\frac{5}{4}}} \geq 0 \end{cases}$ et comme la série de terme général $\dfrac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$ converge (série de Riemann), les règles de comparaison des séries à termes positifs nous permettent alors successivement d'écrire que les séries de terme général $\dfrac{\ln n}{n\sqrt{n}}$ et $\dfrac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1}$ convergent, d'où la conclusion :

$$\boxed{\text{La série de terme général } \dfrac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1} \text{ converge}}$$

6) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sqrt{n} = +\infty$, d'après les définitions des limites infinies des suites, on peut écrire :

$\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $n\sqrt{n} > A$ soit, en posant $A = a$:

$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ n\sqrt{n} > a$ et donc :

$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ a - n\sqrt{n} \neq 0.$

On en déduit alors :

$$\exists n_0 \in [2, +\infty[,\ \forall n \geq n_0,\ 0 \leq \left| \frac{a^2 (-1)^n \sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{(a - n\sqrt{n}) \ln^2 n} \right| \leq \frac{a^2}{\left|a - n\sqrt{n}\right| \ln^2 n}.$$

De plus, comme $\left|a - n\sqrt{n}\right| = n\sqrt{n}$, on a : $\dfrac{a^2}{\left|a - n\sqrt{n}\right| \ln^2 n} = \dfrac{a^2}{n\sqrt{n} \ln^2 n}$. Enfin, comme $\forall n \in [3, +\infty[,\ \ln n \geq 1$, on a également : $\forall n \in [3, +\infty[,\ \dfrac{1}{\ln^2 n} \leq 1$, et donc : $\forall n \in [3, +\infty[,\ \dfrac{a^2}{n\sqrt{n} \ln^2 n} \leq \dfrac{a^2}{n\sqrt{n}}$.

Comme, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, on a : $\dfrac{a^2}{n\sqrt{n}} \geq 0$, $\dfrac{a^2}{n\sqrt{n} \ln^2 n} \geq 0$, $\dfrac{a^2}{\left|a - n\sqrt{n}\right| \ln^2 n} \geq 0$ et $\left| \dfrac{a^2 (-1)^n \sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{(a - n\sqrt{n}) \ln^2 n} \right| \geq 0$ et comme la série de terme général $\dfrac{a^2}{n\sqrt{n}}$ converge (car la série de terme général $\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ converge, série de Riemann), les règles de comparaison des séries à termes positifs nous permettent alors successivement d'écrire que les séries de terme général $\dfrac{a^2}{n\sqrt{n} \ln^2 n}$, $\dfrac{a^2}{\left|a - n\sqrt{n}\right| \ln^2 n}$ et $\left| \dfrac{a^2 (-1)^n \sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{(a - n\sqrt{n}) \ln^2 n} \right|$ convergent, donc que la série de terme général $\dfrac{a^2 (-1)^n \sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{(a - n\sqrt{n}) \ln^2 n}$ converge absolument, et donc que :

$$\boxed{\text{La série de terme général } \frac{a^2 (-1)^n \sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{(a - n\sqrt{n}) \ln^2 n} \text{ converge}}$$

☞ Noter que l'on peut avoir à employer les différentes règles de comparaison de façon successive (et même passer par des séries absolument convergentes) pour étudier la nature d'une série.

SO EO

★ 4. Convergence du reste, positivité et croissance des séries

1) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels telle que la série de terme général u_n soit convergente. Montrer que la suite $\left(\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k = 0$.

2) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que la série de terme général u_n converge. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \geq 0.$$

3) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de réels telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$ et telles que les séries de terme général u_n et v_n convergent. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k.$$

1) Soit S la somme de la série de terme général u_n ($n \geq 0$). Comme la série de terme général u_n ($n \geq 0$) converge de somme S, on peut écrire que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. Or, on a :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ S - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k \qquad \text{soit :}$$

$$= \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = S$, on a : $\lim_{n\to+\infty}\left[S - \sum_{k=0}^{n} u_k\right] = 0$. Par passage à la limite dans la relation précédente, on peut alors conclure :

$$\boxed{\text{La suite } \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = 0}$$

☞ Se souvenir que le reste d'une série convergente tend vers 0 (hors-programme, démonstration à connaître).

2) Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs, on peut écrire :

$\forall k\in\mathbb{N},\ u_k \geq 0$ soit, en sommant cette relation pour $k = n + 1$ ($n\in\mathbb{N}$) à $k = p$ ($p\in[n + 1, +\infty[$) :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall p\in[n + 1, +\infty[,\ \sum_{k=n+1}^{p} u_k \geq 0.$$

Or, comme la série de terme général u_k converge, on peut écrire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, la suite $\left(\sum_{k=n+1}^{p} u_k\right)_{p\geq n+1}$ converge. En faisant tendre p vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, le théorème de prolongement des inégalités nous permet alors de conclure :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \geq 0}$$

☞ Se souvenir que si la série de terme général positif u_n converge, alors :
$\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \geq 0$ (hors-programme, démonstration à connaître).

2) D'après l'énoncé, on peut écrire :

$\forall k\in\mathbb{N},\ u_k \leq v_k$ soit, en sommant cette relation pour $k = n + 1$ ($n\in\mathbb{N}$) à $k = p$ ($p\in[n + 1, +\infty[$) :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall p\in[n + 1, +\infty[,\ \sum_{k=n+1}^{p} u_k \leq \sum_{k=n+1}^{p} v_k.$$

Or, comme les séries de terme général u_k et v_k convergent, on peut écrire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, les suites $\left(\sum_{k=n+1}^{p} u_k\right)_{p\geq n+1}$ et $\left(\sum_{k=n+1}^{p} v_k\right)_{p\geq n+1}$ convergent. En faisant tendre p vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, le théorème de prolongement des inégalités nous permet alors de conclure :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k}$$

☞ Se souvenir que si les séries de terme général u_n et v_n convergent et si $\forall k\in\mathbb{N},\ u_k \leq v_k$, alors :
$\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ (hors-programme, démonstration à connaître).

SO EO

● 5. Les séries de terme général $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)\dots(k+p)}$ $(p \in \mathbb{N}^*)$

Soit p un entier naturel non nul. En remarquant que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{k(k+1)(k+2)\dots(k+p-1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)\dots(k+p)} = \frac{p}{k(k+1)(k+2)\dots(k+p)},$$

montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)\dots(k+p)}$ $(k \geq 1)$ converge et calculer sa somme.

En réduisant l'expression au même dénominateur, on peut écrire :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{k(k+1)(k+2)\dots(k+p-1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)\dots(k+p)} = \frac{(k+p)-k}{k(k+1)(k+2)\dots(k+p)} \quad \text{et donc :}$$

$$= \frac{p}{k(k+1)(k+2)\dots(k+p)}.$$

On en déduit alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{k(k+1)(k+2)\dots(k+p)} = \frac{1}{p}\left[\frac{1}{k(k+1)(k+2)\dots(k+p-1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)\dots(k+p)}\right].$$

En sommant cette relation pour $k = 1$ à $k = n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, on peut alors écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)\dots(k+p)} = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)(k+2)\dots(k+p-1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)\dots(k+p)}\right)$$

soit, les termes de la somme s'éliminant deux à deux :

$$= \frac{1}{p}\left[\frac{1}{p!} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)}\right].$$

Or, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)} = 0$. On en déduit alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)\dots(k+p)} = \frac{1}{p \cdot p!}$, d'où la conclusion :

$$\boxed{\text{La série de terme général } \frac{1}{k(k+1)(k+2)\dots(k+p)} \ (k \geq 1) \text{ converge de somme } \frac{1}{p \cdot p!} \ (p \in \mathbb{N}^*)}$$

☞ Se souvenir que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la série de terme général $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)\dots(k+p)}$ $(k \geq 1)$ converge de somme $\dfrac{1}{p \cdot p!}$ (démonstration à connaître), les cas particuliers $p = 1$ et $p = 2$ étant relativement fréquents.

SO E❷

● 6. Les séries de terme général $\dfrac{P(n)}{n!}$ $(P \in \mathbb{R}[X])$

Soit $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par :

$$\begin{cases} S_0 = 1 \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, S_k = X(X-1)\dots(X-k+1) \end{cases}.$$

1) Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \ \forall P \in \mathbb{R}_p[X], \ \exists!(a_k)_{0 \leq k \leq p} \in \mathbb{R}^{p+1}, \ P = \sum_{k=0}^{p} a_k S_k.$$

2) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que la série de terme général $\dfrac{P(n)}{n!}$ $(n \geq 0)$ converge et déterminer sa somme en fonction des $(a_k)_{0 \leq k \leq p}$.

NB : La résolution de cet exercice nécessite la connaissance du cours : **2. Espaces vectoriels, applications linéaires et calcul matriciel.**

1) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la famille $(S_k)_{0 \le k \le p}$ étant une famille de $p + 1$ polynômes de $\mathbb{R}_p[X]$ graduée en degrés, elle forme une famille libre et maximale de $\mathbb{R}_p[X]$, donc une base de $\mathbb{R}_p[X]$ (cf. exercice **2**.8.2). On en déduit alors :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ \forall P \in \mathbb{R}_p[X],\ \exists!(a_k)_{0 \le k \le p} \in \mathbb{R}^{p+1},\ P = \sum_{k=0}^{p} a_k S_k}$$

2) Deux cas se présentent :

• Si $P = 0$, alors la série de terme général $\frac{P(n)}{n!} = 0$ est clairement convergente de somme 0,

• Si $P \neq 0$, alors $\exists p \in \mathbb{N}$, $\deg(P) = p$. On peut alors écrire : $\exists!(a_k)_{0 \le k \le p} \in \mathbb{R}^{p+1}$, $P = \sum_{k=0}^{p} a_k S_k$. On en déduit alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{P(n)}{n!} = \sum_{k=0}^{p} a_k \frac{S_k(n)}{n!}$, avec, d'après la définition de la famille $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$:

– $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_0(n) = 1$, et :

– si $p \ge 1$: $\forall k \in [1, p]$, $\begin{cases} \forall n \in [0, k-1],\ \frac{S_k(n)}{n!} = 0 \\ \forall n \in [k, +\infty[,\ \frac{S_k(n)}{n!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n!} = \frac{1}{(n-k)!} \end{cases}$

Or, comme la série de terme général $\frac{1}{n!}$ $(n \ge 0)$ converge de somme e, on peut écrire : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$. Pour tout $k \in [0, p]$, en effectuant le changement de variable $n' = n + k$, on en déduit alors que : $\forall k \in [0, p]$, $\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{(n-k)!} = e$, donc que pour tout $k \in [0, p]$, la série de terme général $\frac{1}{(n-k)!}$ $(n \ge k)$ converge de somme e, et donc que pour tout $k \in [0, p]$, la série de terme général $\frac{S_k(n)}{n!}$ $(n \ge 0)$ converge de somme e.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{P(n)}{n!} = \sum_{k=0}^{p} a_k \frac{S_k(n)}{n!}$ et comme pour tout $k \in [0, p]$, la série de terme général $\frac{S_k(n)}{n!}$ $(n \ge 0)$ converge de somme e, la série de terme général $\frac{P(n)}{n!}$ est une somme finie de séries convergentes et on peut alors conclure :

$$\boxed{\text{La série de terme général } \frac{P(n)}{n!}\ (n \ge 0) \text{ converge de somme } e\sum_{k=0}^{p} a_k}$$

☞ Se souvenir que pour tout $P \in \mathbb{R}_p[X]$ $(p \in \mathbb{N})$, la série de terme général $\frac{P(n)}{n!}$ $(n \ge 0)$ converge de somme $e\sum_{k=0}^{p} a_k$ où les $(a_k)_{0 \le k \le p}$ sont les coordonnées de P dans la base des polynômes factoriels $(S_k)_{0 \le k \le p}$.

SO EO

● 7. Séries étudiées à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange. Exemple de la série harmonique alternée

1) Montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ (série harmonique alternée) n'est pas absolument convergente.

2) Montrer, à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2 \right| \le \frac{1}{n+1}.$$

3) En déduire que la série de terme général $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ $(n \geq 1)$ converge et préciser sa somme.

NB : La résolution de cet exercice nécessite la connaissance du cours : 9. Formules de Taylor. Développements limités.

1) On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \frac{1}{n}$. Comme la série de terme général $\frac{1}{n}$ (série harmonique) diverge, on peut écrire que la série de terme général $\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right|$ est divergente, et donc que :

$$\boxed{\text{La série de terme général } \frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{ n'est pas absolument convergente}}$$

2) La fonction ln étant de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, elle est de classe C^{n+1} sur $[1, 2]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à l'ordre n à la fonction ln entre 1 et 2 nous permet alors d'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\ln 2 - \ln 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln^{(k)} 1}{k!}\right| \leq \frac{(2-1)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[1,2]}\left|\ln^{(n+1)}\right|.$$

Or, on a : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \ln^{(k)} t = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{t^k}$ (cf. exercice 7.7.2), d'où : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ln^{(k)} 1 = (-1)^{k-1} (k-1)!$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\left|\ln^{(n+1)}\right| : t \mapsto \frac{n!}{t^{n+1}}$ étant positive et décroissante sur $[1, 2]$, on a également : $\sup_{[1,2]}\left|\ln^{(n+1)}\right| = \left|\ln^{(n+1)} 1\right| = n!$.

On en déduit alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| \leq \frac{1}{n+1}$, et donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2\right| \leq \frac{1}{n+1}}$$

3) Comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, la suite $\left(\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2\right|\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est encadrée par la suite nulle et par une suite qui tend vers 0, d'où (théorème de l'encadrement) : $\lim_{n \to +\infty} \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2\right| = 0$, soit : $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$. On peut désormais conclure :

$$\boxed{\text{La série de terme général } \frac{(-1)^{n-1}}{n} \ (n \geq 1) \text{ converge de somme } \ln 2}$$

☞ Se souvenir que la série harmonique alternée est convergente, mais pas absolument convergente. On dit qu'elle est **semi-convergente.**

☞ Se souvenir de la méthode d'utilisation de l'inégalité de Taylor-Lagrange pour prouver la convergence d'une série et en déterminer la somme.

SO EO

● 8. Les séries de terme général $\frac{(-1)^n}{an+b}$ $(a \in \mathbb{R}_+^*, b \in [1, +\infty[)$

Soient a un réel strictement positif et b un réel supérieur ou égal à 1.

1) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, 1], \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{ak+b-1} = \frac{t^{b-1}}{1+t^a} + (-1)^n \frac{t^{(n+1)a+b-1}}{1+t^a}.$$

2) Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{(n+1)a+b-1}}{1+t^a}\,dt = 0.$$

En déduire que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{an+b}$ ($n \geq 0$) converge et préciser sa somme.

__Application__ : Montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge et que : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

1) On a :

$\forall n\in \mathbb{N}, \forall t\in[0, 1], \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{ak+b-1} = t^{b-1} \sum_{k=0}^{n} (-t^a)^k$ soit, en reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique de raison $-t^a \neq 1$ ($t\in[0, 1]$) :

$= t^{b-1} \frac{1-(-t^a)^{n+1}}{1+t^a}$ soit encore :

$= \frac{t^{b-1}}{1+t^a} - (-1)^{n+1} \frac{t^{(n+1)a+b-1}}{1+t^a}$ d'où la conclusion :

$$\boxed{\forall n\in \mathbb{N}, \forall t\in[0, 1], \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{ak+b-1} = \frac{t^{b-1}}{1+t^a} + (-1)^n \frac{t^{(n+1)a+b-1}}{1+t^a}}$$

☞ Il faut apprendre à reconnaître (et à écrire) la **somme des termes d'une suite géométrique de raison différente de 1** (question extrêmement classique).

2) ▪ Comme $\forall t\in[0, 1], 1+t^a \geq 1$, on peut écrire :

$\forall t\in[0, 1], 0 \leq \frac{1}{1+t^a} \leq 1$ soit, en multipliant cette relation par $t^{(n+1)a+b-1} \geq 0$ ($t\in[0, 1], n\in \mathbb{N}$) :

$\forall n\in \mathbb{N}, \forall t\in[0, 1], 0 \leq \frac{t^{(n+1)a+b-1}}{1+t^a} \leq t^{(n+1)a+b-1}$ soit encore, en intégrant cette relation sur $[0, 1]$, les fonctions en présence étant continues sur cet intervalle :

$\forall n\in \mathbb{N}, 0 \leq \int_0^1 \frac{t^{(n+1)a+b-1}}{1+t^a}\,dt \leq \int_0^1 t^{(n+1)a+b-1}\,dt$ et comme $\forall k\in \mathbb{N}, \int_0^1 t^k\,dt = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{k+1}$:

$\forall n\in \mathbb{N}, 0 \leq \int_0^1 \frac{t^{(n+1)a+b-1}}{1+t^a}\,dt \leq \frac{1}{(n+1)a+b}$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)a+b} = 0$, la suite $\left(\int_0^1 \frac{t^{(n+1)a+b-1}}{1+t^a}\,dt\right)_{n\in \mathbb{N}}$ est encadrée par la suite nulle et par une suite qui tend vers 0. On en déduit alors (théorème de l'encadrement) :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{(n+1)a+b-1}}{1+t^a}\,dt = 0}$$

▪ On a vu au 1 que : $\forall n\in \mathbb{N}, \forall t\in[0, 1], \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{ak+b-1} = \frac{t^{b-1}}{1+t^a} + (-1)^n \frac{t^{(n+1)a+b-1}}{1+t^a}$. En intégrant cette relation sur $[0, 1]$, les fonctions en présence étant continues sur cet intervalle, on en déduit alors, par linéarité de l'intégrale :

$\forall n\in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\int_0^1 t^{ak+b-1}\,dt\right) = \int_0^1 \frac{t^{b-1}}{1+t^a}\,dt + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{(n+1)a+b-1}}{1+t^a}\,dt$ soit :

$\forall n\in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{ak+b} = \int_0^1 \frac{t^{b-1}}{1+t^a}\,dt + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{(n+1)a+b-1}}{1+t^a}\,dt.$

La suite $\left(\int_0^1 \frac{t^{(n+1)a+b-1}}{1+t^a}\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente de limite nulle et la suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{(n+1)a+b-1}}{1+t^a}\,dt = 0$ (d'après le cours, le produit d'une suite bornée par une suite qui tend vers 0 est une suite qui tend vers 0). Par passage à la limite dans la relation précédente, on en déduit alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{ak+b} = \int_0^1 \frac{t^{b-1}}{1+t^a}\,dt$, ce qui nous permet de conclure :

> La série de terme général $\frac{(-1)^n}{an+b}$ $(n \geq 0)$ converge de somme $\int_0^1 \frac{t^{b-1}}{1+t^a}\,dt$

☞ Se souvenir que pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $b\in[1, +\infty[$, la série de terme général $\frac{(-1)^n}{an+b}$ $(n \geq 0)$ converge de somme $\int_0^1 \frac{t^{b-1}}{1+t^a}\,dt$.

☞ Noter la méthode employée dans cet exercice (méthode que l'on retrouve également avec les intégrales impropres) : on utilise la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique, on intègre cette relation sur un intervalle convenable, on démontre que le "reste" tend vers 0 (le plus souvent par encadrement de la fonction sous le signe intégral) et on en déduit alors que la série étudiée converge vers une somme que l'on peut déterminer.

Application : En posant $a = 2$ et $b = 1$, d'après les résultats précédents, on peut écrire que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge de somme $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \text{Arctan}\,1 = \frac{\pi}{4}$, et donc que :

> La série de terme général $\frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge et : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

SO EO

9. Les séries de terme général $\frac{k!}{(k-r)!}\,q^{k-r}$ $(r\in\mathbb{N}^*)$

Soient r un entier naturel non nul et $q\in]0, 1[$.

1) Pour tout $p\in\mathbb{N}$, on désigne par $(S_n(p))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ S_n(p) = \sum_{k=0}^{n} C_{k+p}^{p}\, q^k.$$

Montrer que :

$$\forall p\in\mathbb{N}^*,\ \forall n\in\mathbb{N},\ (1-q)\,S_n(p) = S_n(p-1) - C_{n+p}^{p}\, q^{n+1}.$$

2) Montrer alors que la suite $(S_n(r))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $S_r = \frac{1}{(1-q)^{r+1}}$.

3) En déduire que la série de terme général $k(k-1)(k-2)\dots(k-r+1)q^{k-r} = \frac{k!}{(k-r)!}\,q^{k-r}$ $(k \geq r)$ converge et en déterminer la somme.

1) On a :

$\forall p\in\mathbb{N}^*, \forall n\in\mathbb{N}, (1-q)S_n(p) = (1-q)\sum_{k=0}^{n} C_{k+p}^{p} q^k$ soit :

$= \sum_{k=0}^{n} C_{k+p}^{p} q^k - \sum_{k=0}^{n} C_{k+p}^{p} q^{k+1}$ soit encore, d'après la formule de Pascal, comme $\forall p\in\mathbb{N}^*, \forall k\in\mathbb{N}, C_{k+p}^{p} = C_{k+p-1}^{p-1} + C_{k+p-1}^{p}$:

$= \sum_{k=0}^{n} C_{k+p-1}^{p-1} q^k + \sum_{k=0}^{n} C_{k+p-1}^{p} q^k - \sum_{k=0}^{n} C_{k+p}^{p} q^{k+1}$.

Or, on a : $\forall p\in\mathbb{N}^*, \forall n\in\mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} C_{k+p-1}^{p-1} q^k = S_n(p-1)$ et $\forall p\in\mathbb{N}, C_{p-1}^{p} = 0$. On en déduit alors :

$\forall p\in\mathbb{N}^*, \forall n\in\mathbb{N}^*, (1-q)S_n(p) = S_n(p-1) + \sum_{k=1}^{n} C_{k+p-1}^{p} q^k - \sum_{k=0}^{n} C_{k+p}^{p} q^{k+1}$ et en effectuant le changement de variable $k' = k-1$ dans la première somme :

$= S_n(p-1) + \sum_{k=0}^{n-1} C_{k+p}^{p} q^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} C_{k+p}^{p} q^{k+1}$ soit encore, les termes des deux sommes s'éliminant deux à deux pour $k = 0$ à $k = n-1$:

$= S_n(p-1) - C_{n+p}^{p} q^{n+1}$.

Pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, le cas $n = 0$ rejoignant le cas général ($(1-q)\cdot 1 = 1-q$), on peut désormais conclure :

$$\boxed{\forall p\in\mathbb{N}^*, \forall n\in\mathbb{N}, (1-q)S_n(p) = S_n(p-1) - C_{n+p}^{p} q^{n+1}} \quad ①$$

2) Comme $q\in]0, 1[$, on peut écrire (cf. exercice **12**.10.2) : $\forall p\in\mathbb{N}^*, \lim_{n\to+\infty} C_n^p q^n = 0$, ce qui s'écrit encore : $\forall p\in\mathbb{N}^*, \lim_{n\to+\infty} C_{n+p}^{p} q^{n+p} = 0$, et donc, en divisant cette relation par $q^{p-1} \neq 0$ $(q \neq 0)$: $\forall p\in\mathbb{N}^*, \lim_{n\to+\infty} C_{n+p}^{p} q^{n+1} = 0$.

Montrons alors par récurrence que pour tout $p\in\mathbb{N}$, la suite $(S_n(p))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $S_p = \frac{1}{(1-q)^{p+1}}$.

• Au rang $p = 0$, comme la série de terme général q^k converge de somme $\frac{1}{1-q}$ (car $q\in]0, 1[$), la suite $(S_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n\in\mathbb{N}, S_n(0) = \sum_{k=0}^{n} q^k$ converge de limite $S_0 = \frac{1}{1-q}$.

• Soit $p\in\mathbb{N}^*$, supposons que la suite $(S_n(p-1))_{n\in\mathbb{N}}$ converge de limite $S_{p-1} = \frac{1}{(1-q)^p}$. Par passage à la limite dans la relation ①, on peut alors écrire que la suite $(S_n(p))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite S_p vérifie : $(1-q)S_p = S_{p-1}$. On en déduit alors : $S_p = \frac{1}{(1-q)^{p+1}}$.

• Ainsi, pour tout $p\in\mathbb{N}$, la suite $(S_n(p))_{n\in\mathbb{N}}$ converge de limite $S_p = \frac{1}{(1-q)^{p+1}}$.

En posant $p = r$, on peut maintenant conclure :

$$\boxed{\text{La suite } (S_n(r))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } S_r = \frac{1}{(1-q)^{r+1}}}$$

3) On a :

$\forall n\in\mathbb{N}, S_n(r) = \sum_{k=0}^{n} C_{k+r}^{r} q^k$ soit :

$= \frac{1}{r!}\sum_{k=0}^{n} \frac{(k+r)!}{k!} q^k$ et en effectuant le changement de variable $k' = k+r$:

$= \frac{1}{r!}\sum_{k=r}^{n+r} \frac{k!}{(k-r)!} q^{k-r}$.

Or, d'après la question précédente, la suite $(S_n(r))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $S_r = \frac{1}{(1-q)^{r+1}}$. On en déduit alors que la suite $\left(\sum_{k=r}^{n+r} \frac{k!}{(k-r)!} q^{k-r}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge de limite $\frac{r!}{(1-q)^{r+1}}$, et donc que :

$$\boxed{\text{La série de terme général } k(k-1)(k-2)\dots(k-r+1)q^{k-r} = \frac{k!}{(k-r)!} q^{k-r}\ (k \geq r) \text{ converge de somme } \frac{r!}{(1-q)^{r+1}}}$$

☞ On a vu dans le cours que si $q\in\,]0, 1[$, les séries de terme général q^k, kq^{k-1} et $k(k-1)q^{k-2}$ convergent. On vient de généraliser ce résultat : si $q\in\,]0,1[$, pour tout $r\in\mathbb{N}^*$, la série de terme général $k(k-1)(k-2)\dots(k-r+1)q^{k-r} = \frac{k!}{(k-r)!} q^{k-r}$ $(k \geq r)$ converge de somme $\frac{r!}{(1-q)^{r+1}}$.

S❷ E❷

● 10. Séries de Bertrand

Soient α et β deux réels. Etudier la nature de la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ (on pourra distinguer les cas $\alpha < 1$, $\alpha = 1$ et $\alpha > 1$).

NB : La résolution du cas $\alpha = 1$ nécessite la connaissance du cours : 10. Intégrales impropres.

Trois cas se présentent : $\alpha < 1$, $\alpha = 1$ et $\alpha > 1$.

❏ *Le cas $\alpha < 1$*

Comme $\alpha < 1$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha-1}\ln^\beta n = 0$ (croissances comparées). Comme $0 < 1$, on en déduit alors :

$\exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ n^{\alpha-1}\ln^\beta n \leq 1$ soit, en divisant cette relation par $n^\alpha\ln^\beta n > 0$ ($n\in[2, +\infty[$) :

$\exists n_0\in[2, +\infty[,\ \forall n \geq n_0,\ \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$.

Comme $\forall n\in[2, +\infty[,\ \begin{cases} \frac{1}{n} \geq 0 \\ \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} \geq 0 \end{cases}$ et comme la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge, les règles de comparaison des séries à termes positifs nous permettent alors d'écrire que la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ diverge.

❏ *Le cas $\alpha = 1$*

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t\ln^\beta t}$ étant continue, positive et décroissante sur $]1, +\infty[$ si $\beta \geq 0$ et sur $[e^{-\beta}, +\infty[$ si $\beta < 0$, on peut écrire que la série de terme général $\frac{1}{n\ln^\beta n}$ est de même nature que $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t\ln^\beta t}$.

Or, on sait (cf. exercice **10.**10) que l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t\ln^\beta t}$ converge si et seulement si $\beta > 1$. On en déduit alors que la série de terme général $\frac{1}{n\ln^\beta n}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

❏ *Le cas $\alpha > 1$*

Soit γ un réel tel que $1 < \gamma < \alpha$ (si $\beta > 0$, on peut également choisir $\gamma = \alpha$). On peut écrire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^\gamma}{n^\alpha \ln^\beta n} = 0$ (croissances comparées). Comme $0 < 1$, on en déduit alors :

$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \dfrac{n^\gamma}{n^\alpha \ln^\beta n} \leq 1$ soit, en divisant cette relation par $n^\gamma > 0$ ($n \in [2, +\infty[$) :

$\exists n_0 \in [2, +\infty[, \forall n \geq n_0, \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} \leq \dfrac{1}{n^\gamma}$.

Comme $\forall n \in [2, +\infty[, \begin{cases} \dfrac{1}{n^\gamma} \geq 0 \\ \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} \geq 0 \end{cases}$ et comme la série de terme général $\dfrac{1}{n^\gamma}$ converge (car $\gamma > 1$, série de Riemann), les règles de comparaison des séries à termes positifs nous permettent alors d'écrire que la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ converge.

› On peut maintenant conclure :

$$\boxed{\text{La série de terme général } \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1 \text{ ou } \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1}$$

☞ **Très important :** *Se souvenir que la série de terme général* $\dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$ *ou* $\alpha = 1$ *et* $\beta > 1$ *(démonstration à connaître).*

S0 E0

● 11. Théorème de Pringsheim

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite positive et décroissante telle que la série de terme général u_n converge et $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

1) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} (U_{2n} - U_n)$.

2) a) Montrer alors que : $\lim_{n \to +\infty} 2n u_{2n} = \lim_{n \to +\infty} (2n+1) u_{2n+1} = 0$.

b) En déduire que : $\lim_{n \to +\infty} n u_n = 0$. Conclure.

1) Soit U la somme de la série de terme général u_n. Comme la série de terme général u_n converge, la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge de limite U et on peut alors écrire (cf. exercice 5.4.2) : $\lim_{n \to +\infty} U_{2n} = \lim_{n \to +\infty} U_n = U$.

On en déduit alors :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} (U_{2n} - U_n) = 0}$$

2) a) › On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_{2n} - U_n = \sum_{k=1}^{2n} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{2n} u_k$. Or, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant positive et décroissante, on peut écrire :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [n+1, 2n], 0 \leq u_{2n} \leq u_k$ soit, en sommant pour $k = n+1$ à $2n$:

$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \sum_{k=n+1}^{2n} u_{2n} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} u_k$ soit encore, en reconnaissant $U_{2n} - U_n$ et la somme $\sum_{k=n+1}^{2n} u_{2n}$ comportant n termes égaux :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq n u_{2n} \leq U_{2n} - U_n$.

Comme $\lim_{n \to +\infty} (U_{2n} - U_n) = 0$, la suite $(n u_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc encadrée par la suite nulle et par une suite qui tend vers 0. On en déduit alors (théorème de l'encadrement) : $\lim_{n \to +\infty} n u_{2n} = 0$, et donc : $\lim_{n \to +\infty} 2n u_{2n} = 0$.

❑ De plus, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant positive et décroissante, on a :

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0 \le u_{2n+1} \le u_{2n}$ d'où :

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0 \le 2n\,u_{2n+1} \le 2n\,u_{2n}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n\,u_{2n} = 0$, la suite $(2n\,u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc encadrée par la suite nulle et par une suite qui tend vers 0. On en déduit alors (théorème de l'encadrement) : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n\,u_{2n+1} = 0$. De plus, la série de terme général u_n étant convergente, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, d'où (cf. exercice 5.4.2) : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0$. On en déduit alors, par addition des limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n+1)\,u_{2n+1} = 0$, d'où la conclusion :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} 2n\,u_{2n} = \lim_{n\to+\infty} (2n+1)\,u_{2n+1} = 0}$$

b) ▪ Les suites $(2n\,u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\big((2n+1)\,u_{2n+1}\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant toutes deux convergentes de limite nulle, on peut maintenant conclure (cf. exercice 5.4.1) :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n\,u_n = 0}$$

▪ On peut désormais conclure (théorème de Pringsheim) :

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite positive et décroissante telle que la série de terme général u_n converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,u_n = 0$.

☞ Se souvenir du théorème de Pringsheim : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite positive et décroissante telle que la série de terme général u_n converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,u_n = 0$ (démonstration à connaître). Eviter ainsi l'ineptie classique : "Comme la série de terme général u_n converge, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,u_n = 0$".

S0 E0

● 12. Règles de D'Alembert

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive.

1) Montrer que si : $\exists q\in]0,1[,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n \ge n_0,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \le q$, alors la série de terme général u_n converge.

2) Montrer que si : $\exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n \ge n_0,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \ge 1$, alors la série de terme général u_n diverge.

__Application__ : Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{n!}{n^n}$.

1) Supposons que $\exists q\in]0,1[,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n \ge n_0,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \le q$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement positive, on peut alors écrire :

$\forall k \ge n_0,\ 0 < u_{k+1} \le q\,u_k$ soit, en multipliant ces relations membre à membre pour $k = n_0$ à $k = n-1$ $(n > n_0)$ et en divisant la relation obtenue par $u_{n_0+1}u_{n_0+2}\cdots u_{n-1} > 0$:

$\forall n > n_0,\ 0 < u_n \le q^{n-n_0}\,u_{n_0}$ i.e. :

$\forall n > n_0,\ 0 < u_n \le q^n\,\dfrac{u_{n_0}}{q^{n_0}}$.

Comme $q\in]0,1[$, on peut écrire que la série de terme général q^n converge, donc que la série de terme général $q^n\,\dfrac{u_{n_0}}{q^{n_0}}$ converge également. Les règles de comparaison des séries à termes positifs nous permettent alors d'écrire que la série de terme général u_n converge, d'où la conclusion :

$$\boxed{\text{Si } \exists q\in]0,1[,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n \ge n_0,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \le q, \text{ alors la série de terme général } u_n \text{ converge}}$$

2) Supposons que $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement positive, on peut écrire :

$\forall n \geq n_0, u_{n+1} \geq u_n > 0$ d'où :

$\forall n \geq n_0, u_{n+1} \geq u_{n_0} > 0$.

Comme $u_{n_0} > 0$, la série de terme général u_{n_0} diverge. Les règles de comparaisons des séries à termes positifs nous permettent alors d'écrire que la série de terme général u_{n+1}, i.e. la série de terme général u_n diverge, d'où la conclusion :

$$\boxed{\text{Si } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1, \text{ alors la série de terme général } u_n \text{ diverge}}$$

☞ Se souvenir des règles de D'Alembert. Elles permettent d'étudier la série de terme général u_n lorsque u_n s'écrit comme un produit et en particulier lorsque u_n contient des factorielles.

<u>**Application**</u> : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n!}{n^n}$. On peut alors écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{n!}}{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}} \quad \text{soit :}$$

$$= \frac{(n+1)}{(n+1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \quad \text{soit encore :}$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Or, on a (cf. exercice 5.1.4) : $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, d'où : $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-1}$. Comme $e^{-1} < \frac{1}{2}$, on en déduit alors : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$. D'après ce qui précède, on peut maintenant conclure :

$$\boxed{\text{La série de terme général } \frac{n!}{n^n} \text{ converge}}$$

NB : On remarque que l'on a ainsi : $\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$, et donc que : $n! = o(n^n)$.

☞ Se souvenir que : $n! = o(n^n)$ (démonstration à connaître).

S0 E2

● 13. Transformation d'Abel

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On définit alors la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

1) Soit également $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = n(v_n - v_{n+1})$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} w_k = \sum_{k=1}^{n} v_k - n v_{n+1}.$$

2) **a)** Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k v_k = \sum_{k=0}^{n} U_k(v_k - v_{k+1}) + U_n v_{n+1}.$$

b) Retrouver alors le **1**.

3) Montrer que si la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive et décroissante telle que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors la série de terme général $u_n v_n$ converge.

Application : Soient $\theta\in]0, 2\pi[$ et α un réel strictement positif. Montrer que la série de terme général $\frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$ converge.

1) D'après la définition de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut écrire :

$\forall n\in\mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} w_k = \sum_{k=0}^{n} k(v_k - v_{k+1})$ soit :

$= \sum_{k=0}^{n} kv_k - \sum_{k=0}^{n} kv_{k+1}$ d'où, comme $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $k = (k+1) - 1$:

$= \sum_{k=0}^{n} kv_k - \left[\sum_{k=0}^{n} (k+1)v_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} v_{k+1}\right]$ i.e. :

$= \left[\sum_{k=0}^{n} kv_k - \sum_{k=0}^{n} (k+1)v_{k+1}\right] + \sum_{k=0}^{n} v_{k+1}$ soit encore, en remarquant que les termes des deux premières sommes s'éliminent deux à deux :

$= 0 - (n+1)v_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} v_{k+1}$ soit enfin, en effectuant le changement de variable $k' = k+1$:

$= \sum_{k=1}^{n+1} v_k - (n+1)v_{n+1}$ et donc, en isolant le terme en $k = n+1$ de la somme :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} w_k = \sum_{k=1}^{n} v_k - nv_{n+1}}$$

2) a) D'après la définition de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut écrire :

$\forall n\in\mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} U_k(v_k - v_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n}\left[\left(\sum_{i=0}^{k} u_i\right)(v_k - v_{k+1})\right]$ i.e. :

$= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{k} u_i(v_k - v_{k+1})\right)$ soit, en inversant les sommes :

$= \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{k=i}^{n} u_i(v_k - v_{k+1})\right)$ i.e. :

$= \sum_{i=0}^{n} u_i\left(\sum_{k=i}^{n} (v_k - v_{k+1})\right)$ soit encore, les termes de la seconde somme s'éliminant deux à deux :

$= \sum_{i=0}^{n} u_i(v_i - v_{n+1})$ ce qui s'écrit encore :

$= \sum_{i=0}^{n} u_i v_i - v_{n+1}\sum_{i=0}^{n} u_i$ soit enfin, en reconnaissant U_n :

$= \sum_{k=0}^{n} u_k v_k - U_n v_{n+1}$ et donc :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k v_k = \sum_{k=0}^{n} U_k(v_k - v_{k+1}) + U_n v_{n+1}}$$

b) En posant $u_0 = 0$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n = 1$, on a : $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_n = n$ et la relation précédente devient alors :

$\forall n\in\mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} k(v_k - v_{k+1}) + nv_{n+1}$ soit, comme $\forall k\in\mathbb{N}$, $w_k = k(v_k - v_{k+1})$:

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} w_k + n v_{n+1}$ et donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} w_k = \sum_{k=1}^{n} v_k - n v_{n+1}}$$

3) Supposons la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive et décroissante telle que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

❑ Comme la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et comme $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$, on a alors : $\lim_{n\to+\infty} U_n v_{n+1} = 0$ (d'après le cours, le produit d'une suite bornée par une suite qui tend vers 0 est une suite qui tend vers 0).

❑ De plus, comme la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, on peut écrire : $\exists M \in \mathbb{R}^+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |U_n| \le M$, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} |U_k(v_k - v_{k+1})| = \sum_{k=0}^{n} |U_k|\,|v_k - v_{k+1}| \quad \text{soit :}$$
$$\le M \sum_{k=0}^{n} |v_k - v_{k+1}|.$$

Or, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante, on a : $\forall k \in \mathbb{N},\ v_k - v_{k+1} \ge 0$. On en déduit alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} |U_k(v_k - v_{k+1})| \le M \sum_{k=0}^{n} (v_k - v_{k+1}) \quad \text{soit, les termes s'éliminant deux à deux :}$$
$$\le M(v_0 - v_{n+1}) \quad \text{soit encore, comme } \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} \ge 0 :$$
$$\le M v_0.$$

Comme $\forall k \in \mathbb{N},\ |U_k(v_k - v_{k+1})| \ge 0$, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} |U_k(v_k - v_{k+1})|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Comme elle est en outre majorée (par Mv_0), elle est convergente. La série de terme général $|U_k(v_k - v_{k+1})|$ est donc convergente. On en déduit alors que la série de terme général $U_k(v_k - v_{k+1})$ est absolument convergente, donc convergente, et donc que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} U_k(v_k - v_{k+1})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

❑ Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} u_k v_k = \sum_{k=0}^{n} U_k(v_k - v_{k+1}) + U_n v_{n+1}$ et comme les suites $\left(\sum_{k=0}^{n} U_k(v_k - v_{k+1})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(U_n v_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, on en déduit alors que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et donc que la série de terme général $u_n v_n$ converge, d'où la conclusion :

> Si la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive et décroissante telle que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors la série de terme général $u_n v_n$ converge.

☞ Se souvenir de la méthode de transformation d'Abel (celle du **2a** et son cas particulier du **1**). Elle permet d'étudier la série de terme général $u_n v_n$ lorsqu'on ne peut étudier que la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

<u>**Application**</u> : Comme $\theta \in]0, 2\pi[$, d'après les résultats de l'exercice **1.6**, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \frac{\sin\left[(n+1)\frac{\theta}{2}\right]\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad \text{d'où, comme } \forall x \in \mathbb{R},\ -1 \le \sin x \le 1 :$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ -\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \le \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) \le \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

La suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée. De plus, comme $\alpha > 0$, en définissant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} v_0 = 1 \\ \forall n\in\mathbb{N}^*, v_n = \dfrac{1}{n^\alpha} \end{cases}$, on peut écrire que cette suite est positive, décroissante et de limite nulle. D'après le **3**, en posant également $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = \sin(n\theta)$, on peut alors conclure :

$$\boxed{\text{La série de terme général } \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha} \text{ converge}}$$

S❷

● 14. Groupement de termes

Soient p un entier naturel supérieur ou égal à 2, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ v_n = \sum_{k=pn}^{pn+(p-1)} u_k.$$

1) Montrer que si la série de terme général u_n converge, alors la série de terme général v_n est également convergente de même somme.

2) Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, les séries de terme général u_n et v_n sont de même nature.

3) Montrer que si la série de terme général v_n converge et si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors la série de terme général u_n est convergente de même somme.

Application : Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Notons tout d'abord $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

1) Supposons que la série de terme général u_n converge de somme S. La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors vers S. On en déduit alors (cf. exercice 5.4.2) que la suite $\left(U_{pn+(p-1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers S.

Or, on a : $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n = \sum_{k=pn}^{pn+(p-1)} u_k$. Comme $\forall n\in\mathbb{N}$, $\bigcup_{k=0}^{n} [\![pk, pk + (p-1)]\!] = [\![0, pn + (p-1)]\!]$ et comme cette union est disjointe, on en déduit alors : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=pk}^{pk+(p-1)} u_i\right) = \sum_{k=0}^{pn+(p-1)} u_k = U_{pn+(p-1)}$. Comme la suite $\left(U_{pn+(p-1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers S, on peut alors écrire que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers S, et donc que la série de terme général v_n converge également de somme S.

On peut désormais conclure :

> Si la série de terme général u_n converge, alors la série de terme général v_n est également convergente de même somme.

2) Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit positive. On a alors : $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n = u_{n+1}$, d'où : $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n \geq 0$. La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

Or, si la série de terme général u_n converge de somme S, d'après la question précédente, la série de terme général v_n converge également de somme S.

Réciproquement, si la série de terme général v_n converge de somme S, alors la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers S, et comme $\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} v_k = U_{pn+(p-1)}$ (cf. supra), la suite $\left(U_{pn+(p-1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers S. Comme la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on en déduit alors (cf. exercice 5.4.3) qu'elle converge vers S, donc que la série de terme général u_n converge de somme S.

Ainsi, la série de terme général u_n converge si et seulement si la série de terme général v_n converge. On en déduit alors que la série de terme général u_n diverge si et seulement si la série de terme général v_n diverge (si $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$, alors (non $\mathcal{A}$) $\Leftrightarrow$ (non $\mathcal{B}$)), et on peut alors conclure :

$$\boxed{\text{Si la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est positive, les séries de terme général } u_n \text{ et } v_n \text{ sont de même nature}}$$

3) Supposons que la série de terme général v_n converge de somme S et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

⟹ Notons alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, q_n le quotient de la division euclidienne de $n - (p - 1)$ par p. On peut alors écrire : $\forall n\in\mathbb{N}, \exists! r_n\in[\![0, p - 1]\!], n - (p - 1) = pq_n + r_n$, i.e. : $\forall n\in\mathbb{N}, \exists! r_n\in[\![0, p - 1]\!], n = pq_n + (p - 1) + r_n$, et donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

– si $r_n = 0$, alors : $U_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$ soit, comme $\forall n\in\mathbb{N}$, $r_n = 0$, $n = pq_n + (p - 1)$:

$= \sum_{i=0}^{pq_n+(p-1)} u_i$ d'où, en reconnaissant $U_{pq_n+(p-1)}$:

$= U_{pq_n+(p-1)}$ et :

– si $r_n\in[\![1, p - 1]\!]$, alors : $U_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$ soit, comme $r_n \geq 1$ et $n = pq_n + (p - 1) + r_n$, en scindant la somme en deux :

$= \sum_{i=0}^{pq_n+(p-1)} u_i + \sum_{i=p(q_n+1)}^{pq_n+(p-1)+r_n} u_i$ i.e. :

$= U_{pq_n+(p-1)} + \sum_{i=p(q_n+1)}^{pq_n+(p-1)+r_n} u_i$.

Par convention, en posant pour tout $n\in\mathbb{N}$, lorsque $r_n = 0$: $\sum_{i=p(q_n+1)}^{pq_n+(p-1)+r_n} u_i = 0$ (lorsque $r_n = 0$, on a : $pq_n + (p - 1) + r_n < p(q_n + 1)$), on peut maintenant écrire : $\forall n\in\mathbb{N},\ U_n = U_{pq_n+(p-1)} + \sum_{i=p(q_n+1)}^{pq_n+(p-1)+r_n} u_i$.

⟹ Comme la série de terme général v_n converge de somme S, on peut alors écrire (cf. question précédente) que la suite $\left(U_{pn+(p-1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également de limite S, ce qui s'écrit encore, d'après la définition de la limite d'une suite : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0\in\mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \left|U_{pn+(p-1)} - S\right| < \varepsilon$ ①.

Or, comme, pour tout $n\in\mathbb{N}$, q_n est le quotient de la division euclidienne de $n - (p - 1)$ par p, on peut écrire : $\forall n\in\mathbb{N},\ q_n = \left[\dfrac{n - (p-1)}{p}\right]$, et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = +\infty$, ce qui s'écrit encore, d'après les définitions des limites infinies des suites : $\forall A\in\mathbb{R}, \exists n_1\in\mathbb{N}, \forall n \geq n_1, q_n \geq A$, soit, en posant $A = n_0$: $\exists n_1\in\mathbb{N}, \forall n \geq n_1, q_n \geq n_0$.

Comme $\forall n\in\mathbb{N}$, $q_n\in\mathbb{N}$ et comme $\forall n \geq n_1$, $q_n \geq n_0$, on peut alors écrire, d'après ① :

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1\in\mathbb{N}, \forall n \geq n_1, \left|U_{pq_n+(p-1)} - S\right| < \varepsilon$ et donc, d'après la définition de la limite d'une suite :

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_{pq_n+(p-1)} = S$.

❑ Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, on peut écrire, d'après la définition de la limite d'une suite :

$\forall\varepsilon > 0, \exists n_2\in\mathbb{N}, \forall i \geq n_2, |u_i| \leq \varepsilon$.

Or, on sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = +\infty$. On en déduit alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} p(q_n + 1) = +\infty$, et donc, d'après d'après les définitions des limites infinies des suites : $\forall A\in\mathbb{R}, \exists n_3\in\mathbb{N}, \forall n \geq n_3, p(q_n + 1) \geq A$, soit en posant $A = n_2$:

$\exists n_3\in\mathbb{N}, \forall n \geq n_3, p(q_n + 1) \geq n_2$.

On en déduit alors :

$\forall\varepsilon > 0, \exists n_3\in\mathbb{N}, \forall n \geq n_3, \forall i \geq p(q_n + 1), |u_i| \leq \varepsilon$ soit, en sommant pour $i = p(q_n + 1)$ à $i = pq_n + (p - 1) + r_n$ (somme de r_n termes égaux, le cas $r_n = 0$ rejoignant le cas général) :

$\forall\varepsilon > 0, \exists n_3\in\mathbb{N}, \forall n \geq n_3, \sum\limits_{i=p(q_n+1)}^{pq_n+(p-1)+r_n} |u_i| \leq r_n\varepsilon$ et comme $\forall n\in\mathbb{N}, r_n \leq p - 1$:

$\forall\varepsilon > 0, \exists n_3\in\mathbb{N}, \forall n \geq n_3, \sum\limits_{i=p(q_n+1)}^{pq_n+(p-1)+r_n} |u_i| \leq (p - 1)\varepsilon$ soit encore, la valeur absolue d'une somme étant inférieure ou égale à la somme des valeurs absolues :

$\forall\varepsilon > 0, \exists n_3\in\mathbb{N}, \forall n \geq n_3, \left|\sum\limits_{i=p(q_n+1)}^{pq_n+(p-1)+r_n} u_i\right| \leq (p - 1)\varepsilon$ soit enfin, en posant $\eta = (p - 1)\varepsilon$ $(p \geq 2)$:

$\forall\eta > 0, \exists n_3\in\mathbb{N}, \forall n \geq n_3, \left|\sum\limits_{i=p(q_n+1)}^{pq_n+(p-1)+r_n} u_i\right| \leq \eta$ et donc, d'après la définition de la limite d'une suite :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=p(q_n+1)}^{pq_n+(p-1)+r_n} u_i = 0$.

❑ Comme $\forall n\in\mathbb{N}, U_n = U_{pq_n+(p-1)} + \sum\limits_{i=p(q_n+1)}^{pq_n+(p-1)+r_n} u_i$, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{pq_n+(p-1)} = S$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=p(q_n+1)}^{pq_n+(p-1)+r_n} u_i = 0$, on en déduit alors que : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = S$, donc que la série de terme général u_n converge de somme S.

On peut maintenant conclure :

> Si la série de terme général v_n converge et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors la série de terme général u_n est convergente de même somme.

☞ **Attention !!!** Les sommations infinies obéissent à des règles bien précises : si une série donnée converge, en sommant les termes dans un ordre différent, on peut aboutir soit à une série convergente de somme différente, soit à une série divergente (aussi bizarre que cela puisse paraître, les exemples abondent).
C'est pourquoi, il convient de se conformer aux règles ci-dessus exposées, seules règles licites (si on est en mesure, bien entendu, de les redémontrer).

<u>**Application**</u> : Posons, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \sum\limits_{k=2n}^{2n+1} u_k$. On peut écrire :

$\forall n\in\mathbb{N}^*, v_n = \frac{(-1)^{2n}}{\sqrt{2n}} + \frac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt{2n+1}}$ soit :

$= \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}}{\sqrt{2n+1}\,\sqrt{2n}}$ soit encore, en multipliant et en divisant cette expression par $\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n}$:

$= \frac{\left(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}\right)\left(\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n}\right)}{\sqrt{2n+1}\,\sqrt{2n}\left(\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n}\right)}$ i.e. :

$= \frac{1}{\sqrt{2n+1}\,\sqrt{2n}\left(\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n}\right)}$.

Or, on a :

$$\forall n\in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{2n+1} = \sqrt{2n}\sqrt{\frac{2n+1}{2n}} \qquad \text{i.e. :}$$

$$= \sqrt{2n}\sqrt{1+\frac{1}{2n}} \qquad \text{d'où :}$$

$$\forall n\in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{2n+1}\,\sqrt{2n}\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}\right) = \left(\sqrt{2n}\sqrt{1+\frac{1}{2n}}\right)\sqrt{2n}\left[\sqrt{2n}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{2n}}\right)\right] \qquad \text{soit encore :}$$

$$= 2\sqrt{2}\,n\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{2n}}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{2n}}\right)$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{2n}} = 1$, comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{2n}}\right) = 2$, on peut alors écrire :

$$2\sqrt{2}\,n\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{2n}}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{2n}}\right) \sim 4\sqrt{2}\,n\sqrt{n} \qquad \text{et donc :}$$

$$v_n \sim \frac{1}{4\sqrt{2}\,n\sqrt{n}}.$$

De plus, comme $\forall n\in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}\,\sqrt{2n}\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}\right)} \geq 0$, on peut écrire que $\forall n\in \mathbb{N}^*,\ v_n \geq 0$. Comme $\forall n\in \mathbb{N}^*,\ \begin{cases} v_n \geq 0 \\ \dfrac{1}{4\sqrt{2}\,n\sqrt{n}} \geq 0 \end{cases}$ et comme la série de terme général $\dfrac{1}{4\sqrt{2}\,n\sqrt{n}}$ converge (car la série de terme général $\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ converge, série de Riemann), les règles de comparaison des séries à termes positifs nous permettent d'écrire que la série de terme général v_n converge.

Comme la série de terme général v_n converge et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (produit d'une suite bornée par une suite qui tend vers 0), on peut alors conclure, d'après le **3** :

$$\boxed{\text{La série de terme général } \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ converge}}$$

S❶ E❷

● 15. Théorème des séries alternées

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante, à termes positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

1) En considérant la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n\in\mathbb{N},\ S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$, montrer que la série de terme général $(-1)^n u_n$ converge.

2) Soit $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n\in\mathbb{N},\ R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k u_k$. Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ |R_n| \leq u_{n+1}.$$

<u>**Application**</u> : Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1) On a : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ S_{2n+1} - S_{2n-1} = u_{2n} - u_{2n+1}$. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, c'est-à-dire comme $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_{2n+1} \leq u_{2n}$, on peut alors écrire : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ S_{2n+1} - S_{2n-1} \geq 0$, et donc que la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

De même, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} - S_{2n-2} = u_{2n} - u_{2n-1}$, et comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, c'est-à-dire comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} \leq u_{2n-1}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} - S_{2n-2} \leq 0$. La suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

Enfin, comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1}$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, on a également (cf. exercice **5.4.2**) : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0$, et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(S_{2n+1} - S_{2n}\right) = 0$.

Comme la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(S_{2n+1} - S_{2n}\right) = 0$, les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Elles convergent donc vers une même limite. On en déduit alors (cf. exercice **5.4.1**) que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et donc que :

$$\boxed{\text{La série de terme général } (-1)^n u_n \text{ converge}}$$

☞ **Théorème des séries alternées.** Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante, à termes positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors la série de terme général $(-1)^n u_n$ converge (démonstration à connaître).

2) La suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante de limite S et la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ croissante de limite S, on peut écrire (cf. exercice **5.3.1**) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2} \leq S_{2n}$.

Or, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $R_{2n} = \sum\limits_{k=2n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k - \sum\limits_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k = S - S_{2n}$. On en déduit alors :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ |R_{2n}| &= |S - S_{2n}| && \text{d'où :} \\ &\leq S_{2n} - S && \text{soit, d'après l'encadrement précédent :} \\ &\leq S_{2n} - S_{2n+1} && \text{et donc :} \\ &\leq u_{2n+1}. \end{aligned}$$

De même, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $R_{2n+1} = \sum\limits_{k=2n+2}^{+\infty} (-1)^k u_k = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k - \sum\limits_{k=0}^{2n+1} (-1)^k u_k = S - S_{2n+1}$. On en déduit alors :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ |R_{2n+1}| &= |S - S_{2n+1}| && \text{soit encore, en procédant comme précédemment :} \\ &\leq S_{2n+2} - S_{2n+1} && \text{et donc :} \\ &\leq u_{2n+2}. \end{aligned}$$

On peut maintenant conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |R_n| \leq u_{n+1}}$$

__Application__ : La suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant positive, décroissante et de limite nulle, d'après le **1**, on peut conclure :

$$\boxed{\text{La série de terme général } \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ converge}}$$

SO EO

★ 16. Produit de Cauchy et sommation de séries

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles à termes positifs et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}.$$

1) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} z_k \leq \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} y_k\right) \leq \sum_{k=0}^{2n} z_k.$$

2) En déduire que si les séries de terme général x_n et y_n ($n \geq 0$) sont convergentes de sommes respectives X et Y alors la série de terme général z_n ($n \geq 0$) est convergente de somme XY.

Application : Montrer, en procédant par récurrence, que pour tout $x \in [0, 1[$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la série de terme général $(n+1)(n+2)\ldots(n+p)\,x^n = \frac{(n+p)!}{n!}x^n$ ($n \geq 0$) converge de somme $\frac{p!}{(1-x)^{p+1}}$.

1) ↄ D'après la définition de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} z_k = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{k} x_i y_{k-i}\right) \quad \text{soit, en inversant les sommes :}$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{k=i}^{n} x_i y_{k-i}\right) \quad \text{d'où :}$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\left[x_i\left(\sum_{k=i}^{n} y_{k-i}\right)\right] \quad \text{et en effectuant le changement de variable } j = k - i \text{ dans la seconde somme :}$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\left[x_i\left(\sum_{j=0}^{n-i} y_j\right)\right] \ ①.$$

Or, d'après le cours, on sait que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} y_k\right) = \sum_{i=0}^{n}\left[x_i\left(\sum_{j=0}^{n} y_j\right)\right]$. On en déduit alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} y_k\right) - \sum_{k=0}^{n} z_k = \sum_{i=0}^{n}\left[x_i\left(\sum_{j=0}^{n} y_j\right)\right] - \sum_{i=0}^{n}\left[x_i\left(\sum_{j=0}^{n-i} y_j\right)\right]$$

soit, les termes en $i = 0$ s'éliminant tous et ceux pour $i \geq 1$ s'éliminant pour $j = 0$ à $j = n - i$:

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[x_i\left(\sum_{j=n-i+1}^{n} y_j\right)\right].$$

Les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant à termes positifs, on en déduit alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{i=1}^{n}\left[x_i\left(\sum_{j=n-i+1}^{n} y_j\right)\right] \geq 0$, et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} y_k\right) - \sum_{k=0}^{n} z_k \geq 0 \quad \text{i.e. :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} z_k \leq \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} y_k\right).$$

ↄ De même, en écrivant la relation ① au rang 2n ($n \in \mathbb{N}^*$), on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{2n} z_k = \sum_{i=0}^{2n}\left[x_i\left(\sum_{j=0}^{2n-i} y_j\right)\right] \quad \text{soit encore, en décomposant la somme suivant les valeurs de } i \text{ :}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\left[x_i\left(\sum_{j=0}^{2n-i} y_j\right)\right] + x_n\left(\sum_{j=0}^{n} y_j\right) + \sum_{i=n+1}^{2n}\left[x_i\left(\sum_{j=0}^{2n-i} y_j\right)\right]$$

et en redécomposant la première somme suivant les valeurs de j :

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\left[x_i\left(\sum_{j=0}^{n} y_j\right)\right] + \sum_{i=0}^{n-1}\left[x_i\left(\sum_{j=n+1}^{2n-i} y_j\right)\right] + x_n\left(\sum_{j=0}^{n} y_j\right) + \sum_{i=n+1}^{2n}\left[x_i\left(\sum_{j=0}^{2n-i} y_j\right)\right]$$

soit enfin, en regroupant le premier et le troisième terme :

$$= \sum_{i=0}^{n}\left[x_i\left(\sum_{j=0}^{n} y_j\right)\right] + \sum_{i=0}^{n-1}\left[x_i\left(\sum_{j=n+1}^{2n-i} y_j\right)\right] + \sum_{i=n+1}^{2n}\left[x_i\left(\sum_{j=0}^{2n-i} y_j\right)\right].$$

On en déduit alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{2n} z_k - \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} y_k\right) = \left(\sum_{i=0}^{n}\left[x_i\left(\sum_{j=0}^{n} y_j\right)\right] + \sum_{i=0}^{n-1}\left[x_i\left(\sum_{j=n+1}^{2n-i} y_j\right)\right] + \sum_{i=n+1}^{2n}\left[x_i\left(\sum_{j=0}^{2n-i} y_j\right)\right]\right) - \sum_{i=0}^{n}\left[x_i\left(\sum_{j=0}^{n} y_j\right)\right] \quad \text{i.e. :}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\left[x_i\left(\sum_{j=n+1}^{2n-i} y_j\right)\right] + \sum_{i=n+1}^{2n}\left[x_i\left(\sum_{j=0}^{2n-i} y_j\right)\right].$$

Les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant à termes positifs, on peut alors écrire :

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{i=0}^{n-1}\left[x_i\left(\sum_{j=n+1}^{2n-i} y_j\right)\right]+\sum_{i=n+1}^{2n}\left[x_i\left(\sum_{j=0}^{2n-i} y_j\right)\right]\geq 0$ et donc :

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{2n} z_k-\left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} y_k\right)\geq 0$ i.e. :

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} y_k\right)\leq \sum_{k=0}^{2n} z_k.$

❑ D'après ce qui précède, on peut maintenant écrire : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} z_k \leq \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} y_k\right)\leq \sum_{k=0}^{2n} z_k$. Comme $z_0 = x_0y_0$, la relation est également vérifiée pour $n = 0$, et on peut alors conclure :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} z_k \leq \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} y_k\right)\leq \sum_{k=0}^{2n} z_k} \quad ①$$

2) Supposons les séries de terme général x_k et y_k $(k\geq 0)$ convergentes de sommes respectives X et Y. On a alors : $\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} y_k\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{2n} x_k\right)\left(\sum_{k=0}^{2n} y_k\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{2n+1} x_k\right)\left(\sum_{k=0}^{2n+1} y_k\right)=XY$ (cf. exercice **5**.4.2).

❑ Or, en prenant dans la relation ① l'inégalité de droite en n et l'inégalité de gauche en 2n ($n\in\mathbb{N}$), on obtient :

$\forall n\in\mathbb{N},\ \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} y_k\right)\leq \sum_{k=0}^{2n} z_k\leq \left(\sum_{k=0}^{2n} x_k\right)\left(\sum_{k=0}^{2n} y_k\right).$

La suite $\left(\sum_{k=0}^{2n} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ étant encadrée par deux suites convergentes de limite XY, on en déduit alors (théorème de l'encadrement) : $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{2n} z_k = XY$.

❑ De même, en prenant dans la relation ① l'inégalité de gauche en 2n + 1 ($n\in\mathbb{N}$), on obtient :

$\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{2n+1} z_k\leq \left(\sum_{k=0}^{2n+1} x_k\right)\left(\sum_{k=0}^{2n+1} y_k\right).$

Or, d'après la relation ①, on a : $\forall n\in\mathbb{N},\ \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} y_k\right)\leq \sum_{k=0}^{2n} z_k$. Comme les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont à termes positifs, on peut également écrire : $\forall n\in\mathbb{N},\ z_{2n+1}\geq 0$ et on en déduit alors, en additionnant ces deux dernières inégalités membre à membre : $\forall n\in\mathbb{N},\ \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} y_k\right)\leq \sum_{k=0}^{2n+1} z_k$.

On peut maintenant écrire :

$\forall n\in\mathbb{N},\ \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} y_k\right)\leq \sum_{k=0}^{2n+1} z_k\leq \left(\sum_{k=0}^{2n+1} x_k\right)\left(\sum_{k=0}^{2n+1} y_k\right).$

La suite $\left(\sum_{k=0}^{2n+1} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ étant encadrée par deux suites convergentes de limite XY, on en déduit alors (théorème de l'encadrement) : $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{2n+1} z_k = XY$.

◦ Les suites $\left(\sum_{k=0}^{2n} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sum_{k=0}^{2n+1} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergentes de limite XY, on en déduit alors (cf. exercice **5.4.**1) que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite XY, et donc que la série de terme général z_k ($k \geq 0$) est convergente de somme XY. On peut maintenant conclure :

> Si les séries de terme général x_n et y_n ($n \geq 0$) sont convergentes de sommes respectives X et Y, alors la série de terme général z_n ($n \geq 0$) est convergente de somme XY.

☞ Se souvenir que si les séries de terme général positif x_n et y_n ($n \geq 0$) sont convergentes de sommes respectives X et Y, alors la série de terme général $z_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}$ ($n \geq 0$) est convergente de somme XY (démonstration à connaître, question extrêmement classique).

Application : Soit $x \in [0, 1[$. Montrons par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la série de terme général $(n+1)(n+2)\dots(n+p)\,x^n = \frac{(n+p)!}{n!}x^n$ ($n \geq 0$) converge de somme $\frac{p!}{(1-x)^{p+1}}$.

• Au rang $p = 1$, on sait que la série de terme général nx^{n-1} ($n \geq 1$) converge de somme $\frac{1}{(1-x)^2}$ (car $|x| < 1$), donc que : $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. En effectuant le changement de variable $n' = n - 1$, on en déduit alors que : $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$, et donc que la série de terme général $(n+1)x^n$ ($n \geq 0$) converge de somme $\frac{1}{(1-x)^2}$.

• Soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons que la série de terme général $\frac{(n+p)!}{n!}x^n$ ($n \geq 0$) converge de somme $X = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}$. On sait, d'après le cours, que la série de terme général x^n ($n \geq 0$) converge de somme $Y = \frac{1}{1-x}$ (car $|x| < 1$). Posons alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $z_n = \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{(k+p)!}{k!}x^k\right]x^{n-k}$. On peut alors écrire :

$\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = x^n \sum_{k=0}^{n}\frac{(k+p)!}{k!}$ soit, en multipliant et en divisant cette relation par p! :

$= p!\,x^n \sum_{k=0}^{n} C_{k+p}^{p}$ soit encore, par itération de la formule de Pascal (cf. exercice **12.3**) :

$= p!\,x^n C_{n+p+1}^{p+1}$ ce qui s'écrit encore :

$= \frac{1}{p+1}\,\frac{(n+p+1)!}{n!}\,x^n.$

Or, comme $\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases}\frac{(n+p)!}{n!}x^n \geq 0\\ x^n \geq 0\end{cases}$, d'après la question **2**, on peut écrire que la série de terme général $z_n = \frac{1}{p+1}\,\frac{(n+p+1)!}{n!}x^n$ ($n \geq 0$) converge de somme $XY = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}\,\frac{1}{1-x} = \frac{p!}{(1-x)^{p+2}}$, et donc que la série de terme général $\frac{(n+p+1)!}{n!}x^n$ ($n \geq 0$) converge de somme $\frac{(p+1)!}{(1-x)^{p+2}}$.

• Ainsi,

> Pour tout $x \in [0, 1[$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la série de terme général $(n+1)(n+2)\dots(n+p)\,x^n = \frac{(n+p)!}{n!}x^n$ ($n \geq 0$) converge de somme $\frac{p!}{(1-x)^{p+1}}$.

NB : On retrouve ici le résultat démontré à l'exercice 9.

SO E❷

17. Dérivation de séries

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par f_n une fonction de classe C^2 sur I telle que $|f_n''|$ soit bornée sur I et telle que, pour tout $x \in I$, les séries de terme général $f_n(x)$, $f_n'(x)$ et la série de terme général $\sup_{t \in I} |f_n''(t)|$ soient convergentes.

On désigne alors par S la fonction définie sur I par :

$$\forall x \in I,\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

1) Montrer, à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ \forall h \in \mathbb{R},\ (x+h) \in I,\ \left|f_n(x+h) - f_n(x) - h f_n'(x)\right| \leq \frac{h^2}{2} \sup_{t \in I} |f_n''(t)|.$$

2) En déduire que :

$$\forall x \in I,\ \forall h \in \mathbb{R}^*,\ (x+h) \in I,\ \left|\frac{S(x+h) - S(x)}{h} - \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)\right| \leq \frac{|h|}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{t \in I} |f_n''(t)|,$$

puis que S est dérivable sur I. Déterminer alors une expression de S'.

NB : La résolution de cet exercice nécessite la connaissance du cours : 9. Formules de Taylor. Développements limités.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n étant de classe C^2 sur I, pour tout $x \in I$ et pour tout $h \in \mathbb{R}$ tels que $(x+h) \in I$, elle est de classe C^2 sur le segment d'extrémités x et x + h que l'on note $[x : x+h]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in I$ et pour tout $h \in \mathbb{R}$ tels que $(x+h) \in I$, l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à l'ordre 1 à la fonction f_n entre x et x + h nous permet alors d'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ \forall h \in \mathbb{R},\ (x+h) \in I,\ \left|f_n(x+h) - f_n(x) - h f_n'(x)\right| \leq \frac{|(x+h)-x|^2}{2} \sup_{t \in [x:x+h]} |f_n''(t)|.$$

Or, comme $\forall x \in I,\ \forall h \in \mathbb{R},\ (x+h) \in I,\ [x : x+h] \subset I$, on a : $\forall x \in I,\ \forall h \in \mathbb{R},\ (x+h) \in I,\ \sup_{t \in [x:x+h]} |f_n''(t)| \leq \sup_{t \in I} |f_n''(t)|$, d'où la conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ \forall h \in \mathbb{R},\ (x+h) \in I,\ \left|f_n(x+h) - f_n(x) - h f_n'(x)\right| \leq \frac{h^2}{2} \sup_{t \in I} |f_n''(t)|}$$

2) ▪ On a vu à la question précédente que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ \forall h \in \mathbb{R},\ (x+h) \in I,\ \left|f_k(x+h) - f_k(x) - h f_k'(x)\right| \leq \frac{h^2}{2} \sup_{t \in I} |f_k''(t)|.$$

En sommant cette relation pour k = 0 à k = n ($n \in \mathbb{N}$), on peut alors écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ \forall h \in \mathbb{R},\ (x+h) \in I,\ \sum_{k=0}^{n} \left|f_k(x+h) - f_k(x) - h f_k'(x)\right| \leq \frac{h^2}{2} \sum_{k=0}^{n} \sup_{t \in I} |f_k''(t)|$$

soit, la valeur absolue d'une somme étant inférieure ou égale à la somme des valeurs absolues :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ \forall h \in \mathbb{R},\ (x+h) \in I,\ \left|\sum_{k=0}^{n} \left(f_k(x+h) - f_k(x) - h f_k'(x)\right)\right| \leq \frac{h^2}{2} \sum_{k=0}^{n} \sup_{t \in I} |f_k''(t)| \quad ①.$$

Or, comme pour tout $t \in I$, la série de terme général $f_n(t)$ est convergente de somme S(t), pour tout $x \in I$ et pour tout $h \in \mathbb{R}$ tels que $(x+h) \in I$, les séries de terme général $f_n(x+h)$ et $f_n(x)$ sont convergentes de sommes respectives S(x + h) et S(x). On en déduit alors que pour tout $x \in I$ et pour tout $h \in \mathbb{R}$ tels que $(x+h) \in I$, les suites $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k(x+h)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes de limites respectives S(x + h) et S(x).

De plus, comme pour tout $x \in I$, la série de terme général $f_n'(x)$ et la série de terme général $\sup_{t \in I} |f_n''(t)|$ sont convergentes, pour tout $x \in I$, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k'(x)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \sup_{t \in I} |f_k''(t)|\right)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes de limites respectives $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{t \in I} |f_n''(t)|$.

Ainsi, pour tout $x \in I$ et pour tout $h \in \mathbb{R}$ tels que $(x+h) \in I$, la suite $\left(\left|\sum_{k=0}^{n} \left(f_k(x+h) - f_k(x) - h f_k'(x)\right)\right|\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et la suite $\left(\frac{h^2}{2} \sum_{k=0}^{n} \sup_{t \in I} |f_k''(t)|\right)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes de limites respectives $\left|S(x+h) - S(x) - h \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)\right|$ et $\frac{h^2}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{t \in I} |f_n''(t)|$.

Le théorème de prolongement des inégalités appliqué à l'inégalité ① nous permet alors d'écrire :

$\forall x \in I$, $\forall h \in \mathbb{R}$, $(x+h) \in I$, $\left|S(x+h) - S(x) - h \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)\right| \leq \frac{h^2}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{t \in I} |f_n''(t)|$ et donc, en divisant cette relation par $|h| > 0$ ($h \in \mathbb{R}^*$) :

$$\boxed{\forall x \in I,\ \forall h \in \mathbb{R}^*,\ (x+h) \in I,\ \left|\frac{S(x+h) - S(x)}{h} - \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)\right| \leq \frac{|h|}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{t \in I} |f_n''(t)|}$$

■ De plus, on a : $\lim_{h \to 0} \frac{|h|}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{t \in I} |f_n''(t)| = 0$. Pour tout $x \in I$, la fonction $h \mapsto \left|\frac{S(x+h) - S(x)}{h} - \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)\right|$ est donc encadrée par la fonction nulle et par une fonction qui tend vers 0 lorsque h tend vers 0, d'où (théorème de l'encadrement) : $\forall x \in I$, $\lim_{h \to 0} \left|\frac{S(x+h) - S(x)}{h} - \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)\right| = 0$, et donc : $\forall x \in I$, $\lim_{h \to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$. On peut alors conclure, par définition de la dérivée d'une fonction en un point :

$$\boxed{S \text{ est dérivable sur } I \text{ et } \forall x \in I,\ S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)}$$

NB : Si x est une borne de I, la fonction $h \mapsto \left|\frac{S(x+h) - S(x)}{h} - \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)\right|$ n'admet qu'une limite à droite (si x est la borne inférieure) ou à gauche (si x est la borne supérieure) en 0, S n'étant définie que sur I.

Néanmoins, S étant définie exclusivement sur I, la fonction $h \mapsto \left|\frac{S(x+h) - S(x)}{h} - \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)\right|$ n'est également définie qu'à droite en 0 (si x est la borne inférieure) ou qu'à gauche en 0 (si x est la borne supérieure). Sa limite à droite ou à gauche en 0 est donc sa limite en 0.

☞ **Attention !!!** La dérivation de sommes infinies est hors-programme : **on ne peut dériver qu'une somme finie de termes...**

Pour dériver des sommes infinies, il faut donc utiliser l'une des deux méthodes suivantes :

– si pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction simple de x, g_n telle que $\sum_{k=0}^{n} f_k(x) = g_n(x)$, alors (dérivation d'une somme finie de termes) : $\sum_{k=0}^{n} f_k'(x) = g_n'(x)$, et par passage à la limite : $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k'(x) = \lim_{n \to +\infty} g_n'(x)$ (méthode du cours pour déterminer nature et somme des séries de terme général nq^{n-1} et $n(n-1)q^{n-2}$).

– sinon, on utilise la méthode présentée dans cet exercice en utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange.

S❷ E❷

● 18. Séries et doubles limites

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que la série de terme général u_n converge et f la fonction définie sur [0, 1] par :

$$\forall t\in[0,1],\ f(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}u_kt^k.$$

1) Montrer que f est bien définie sur [0, 1].

2) a) Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall t\in[0,1],\ 0\le f(t)-u_0\le\sum_{k=1}^{n}u_kt^k+\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k.$$

b) En déduire que :

$$\lim_{t\to0}f(t)=u_0.$$

1) On a :

$\forall t\in[0,1],\ \forall k\in\mathbb{N},\ 0\le t^k\le1$ soit, en multipliant cette relation par $u_k\ge0$ ($k\in\mathbb{N}$) :

$\forall t\in[0,1],\ \forall k\in\mathbb{N},\ 0\le u_kt^k\le u_k$.

Comme la série de terme général u_k converge, les règles de comparaison des séries à termes positifs nous permettent alors d'écrire que pour tout $t\in[0,1]$, la série de terme général u_kt^k converge, et donc que :

$$\boxed{\text{f est définie sur } [0, 1]}$$

2) a) Comme pour tout $t\in[0,1]$, la série de terme général u_kt^k converge et comme $\forall k\in\mathbb{N},\ u_kt^k\ge0$ (cf. supra), on peut écrire (cf. exercice 4.2) :

$\forall t\in[0,1],\ \sum_{k=1}^{+\infty}u_kt^k\ge0$ ①.

De plus, en scindant la somme en deux, on peut écrire :

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall t\in[0,1],\ \sum_{k=1}^{+\infty}u_kt^k=\sum_{k=1}^{n}u_kt^k+\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_kt^k$ ②.

Or, comme $\forall t\in[0,1],\ \forall k\in\mathbb{N}^*,\ 0\le u_kt^k\le u_k$ (cf. supra) et comme les séries de terme général u_k (cf. énoncé) et pour tout $t\in[0,1]$, u_kt^k (cf. 1) convergent, on peut également écrire (cf. exercice 4.3) :

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall t\in[0,1],\ \sum_{k=n+1}^{+\infty}u_kt^k\le\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k$ ③.

Les relations ①, ② et ③ nous permettent alors d'écrire :

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall t\in[0,1],\ 0\le\sum_{k=1}^{+\infty}u_kt^k\le\sum_{k=1}^{n}u_kt^k+\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k$ et donc, en reconnaissant $f(t)-u_0$:

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall t\in[0,1],\ 0\le f(t)-u_0\le\sum_{k=1}^{n}u_kt^k+\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k}\quad ④$$

b) ↄ Comme $\forall n\in\mathbb{N},\ \lim_{t\to0^+}\sum_{k=1}^{n}u_kt^k=0$ (évident), on peut écrire :

$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha\in]0,1[,\ \forall t\in]0,\alpha[,\ \sum_{k=1}^{n}u_kt^k<\varepsilon$ ⑤.

De même, comme la série de terme général u_k converge, on peut écrire (cf. exercice 4.1) : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k = 0$, ce qui s'écrit encore :

$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0\in\mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k < \varepsilon$ ⑥.

❑ En sommant les relations ⑤ et ⑥, on en déduit alors :

$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0\in\mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \exists\alpha\in]0, 1[, \forall t\in]0, \alpha[, \sum\limits_{k=1}^{n} u_k t^k + \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k < 2\varepsilon$ soit, d'après la relation ④ :

$\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha\in]0, 1[, \forall t\in]0, \alpha[, 0 \leq f(t) - u_0 < 2\varepsilon$ d'où la conclusion, f n'étant définie qu'à droite en 0 :

$$\boxed{\lim_{t\to0} f(t) = u_0}$$

☞ Se souvenir que pour déterminer la limite ℓ en x_0 ($x_0\in\overline{\mathbb{R}}$) d'une fonction f définie sur un intervalle I et telle que pour tout $x\in I$, f(x) soit défini par une série, on ne peut procéder de façon directe en écrivant une formule du type : " $\lim\limits_{x\to0} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k x^k = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k\left(\lim\limits_{x\to0} x^k\right)$ ".

En effet, prendre la limite en x_0 de f revient à prendre la "double limite" lorsque x tend vers x_0 et lorsque n vend vers $+\infty$ de la suite des sommes partielles de la série définissant pour tout $x\in I$, $f(x) - \ell$. Or, le calcul de "doubles limites" est hors-programme : **on ne peut donc prendre la limite que d'une somme finie de termes.**

La méthode à utiliser pour déterminer cette limite consiste donc à effectuer, pour tout $x\in I$, une majoration de $|f(x) - \ell|$ (ou un encadrement de $f(x) - \ell$) en scindant (en n) la série définissant pour tout $x\in I$, $f(x) - \ell$ en deux sommes : la première (finie) dépendante de la variable x, la seconde (infinie) indépendante de x après avoir été majorée.

En se ramenant aux définitions et en écrivant que la première somme tend vers 0 lorsque x tend vers x_0 (donc inférieure à ε pour x suffisamment proche de x_0) et que la seconde somme tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ (donc inférieure à ε pour n suffisamment grand), puis en sommant les deux relations obtenues, on en déduit alors que pour x suffisamment proche de x_0 (et pour n suffisamment grand mais les quantificateurs fonctions de n disparaissent car $|f(x) - \ell|$ est indépendant de n), on obtient : $|f(x) - \ell| < 2\varepsilon$, d'où la conclusion.

Fonctions : limites, continuité, dérivabilité

Fiche de cours

A) Limites. Continuité

I. Limite en un point SOEO

1. Limite finie ou infinie en un point de $\mathbb{R}$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $x_0 \in I$, f une fonction définie sur I (sauf peut-être en x_0) et $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f.

▪ ***Limite finie en x_0 ($x_0 \in \mathbb{R}$).***

• f admet pour limite ℓ ($\ell \in \mathbb{R}$) en x_0 si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - x_0| < \alpha, |f(x) - \ell| < \varepsilon$.

On note : $\ell = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x_0} f$.

• f admet pour limite ℓ ($\ell \in \mathbb{R}$) à gauche en x_0 si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x_0 - \alpha < x < x_0, |f(x) - \ell| < \varepsilon$.

On note : $\ell = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x_0^-} f$.

• f admet pour limite ℓ ($\ell \in \mathbb{R}$) à droite en x_0 si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x_0 < x < x_0 + \alpha, |f(x) - \ell| < \varepsilon$.

On note : $\ell = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x_0^+} f$.

▪ f admet pour limite ℓ ($\ell \in \mathbb{R}$) en x_0 si et seulement si :

– lorsque $x_0 \in \mathcal{D}_f$, $f(x_0) = \ell$,

– lorsque f est définie à droite en x_0 (i.e. : $\exists \alpha > 0,]x_0, x_0 + \alpha[\subset \mathcal{D}_f$), $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$,

– lorsque f est définie à gauche en x_0 (i.e. : $\exists \alpha > 0,]x_0 - \alpha, x_0[\subset \mathcal{D}_f$), $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$.

▪ ***Limite infinie en x_0 ($x_0 \in \mathbb{R}$).***

• f tend vers $+\infty$ en x_0 si : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - x_0| < \alpha, f(x) > A$,

• f tend vers $-\infty$ en x_0 si : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - x_0| < \alpha, f(x) < A$.

2. Limite finie ou infinie en $\pm\infty$

Soit f une fonction définie au voisinage de $\pm\infty$.

▪ ***Limite finie en $\pm\infty$.***

• f admet pour limite ℓ ($\ell \in \mathbb{R}$) en $+\infty$ si : $\forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}_f, x > B, |f(x) - \ell| < \varepsilon$,

• f admet pour limite ℓ ($\ell \in \mathbb{R}$) en $-\infty$ si : $\forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}_f, x < B, |f(x) - \ell| < \varepsilon$.

■ ***Limite infinie en*** $\pm\infty$.

• f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ si : $\forall A\in\mathbb{R}, \exists B\in\mathbb{R}, \forall x\in\mathcal{D}_f, x > B, f(x) > A$,

• f tend vers $-\infty$ en $+\infty$ si : $\forall A\in\mathbb{R}, \exists B\in\mathbb{R}, \forall x\in\mathcal{D}_f, x > B, f(x) < A$,

• f tend vers $+\infty$ en $-\infty$ si : $\forall A\in\mathbb{R}, \exists B\in\mathbb{R}, \forall x\in\mathcal{D}_f, x < B, f(x) > A$,

• f tend vers $-\infty$ en $-\infty$ si : $\forall A\in\mathbb{R}, \exists B\in\mathbb{R}, \forall x\in\mathcal{D}_f, x < B, f(x) < A$.

■ Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0\in I$, f une fonction définie sur I et $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$ ($\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{+\infty, -\infty\}$). f tend vers ℓ en x_0 si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de I qui tend vers x_0, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ.

3. Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre

■ ***Théorème de prolongement des inégalités.*** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies sur I telles que $\forall x\in I, f(x)\leq g(x)$ et $x_0\in I$.

• Si f et g admettent une limite finie en x_0, alors : $\lim\limits_{x_0} f \leq \lim\limits_{x_0} g$.

• Si $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$, alors : $\lim\limits_{x_0} g = +\infty$.

• Si $\lim\limits_{x_0} g = -\infty$, alors : $\lim\limits_{x_0} f = -\infty$.

■ ***Existence d'une limite par encadrement (dit théorème "de l'encadrement").*** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0\in I$, f, g et h trois fonctions définies sur I telles que f et h admettent une même limite ℓ ($\ell\in\mathbb{R}$) en x_0. Si $\forall x\in I, f(x)\leq g(x)\leq h(x)$, alors $\lim\limits_{x_0} g = \ell$.

4. Limite d'une fonction composée

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I, g une fonction définie sur f(I) et $x_0\in I$. Si $\lim\limits_{x_0} f = \ell$ ($\ell\in\overline{\mathbb{R}}$) et si $\lim\limits_{\ell} g = \ell'$ ($\ell'\in\overline{\mathbb{R}}$), alors : $\lim\limits_{x_0} (g\circ f) = \ell'$.

II. Continuité en un point SO EO

■ ***Continuité en*** x_0 ($x_0\in\mathbb{R}$). Soit f une fonction, $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition et $x_0\in\mathcal{D}_f$.

• f est continue en x_0 si : $\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall x\in\mathcal{D}_f, |x - x_0| < \eta, |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$,

• f est continue à gauche en x_0 si : $\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall x\in\mathcal{D}_f, x_0 - \eta < x < x_0, |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$,

• f est continue à droite en x_0 si : $\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall x\in\mathcal{D}_f, x_0 < x < x_0 + \eta, |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

■ Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $x_0\in I$ et f une fonction définie sur I.

• f est continue en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x_0} f = f(x_0)$.

• f est continue à gauche en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x_0^-} f = f(x_0)$.

• f est continue à droite en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x_0^+} f = f(x_0)$.

■ Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $x_0\in I$ et f une fonction définie sur $I\setminus\{x_0\}$. f est prolongeable par continuité en x_0 si et seulement si f admet une limite finie ℓ ($\ell\in\mathbb{R}$) en x_0. Soit alors g la fonction définie par : $\begin{cases}\forall x\in I\setminus\{x_0\}, g(x) = f(x)\\ g(x_0) = \ell\end{cases}$. g s'appelle le prolongement par continuité de f en x_0.

■ Les fonctions polynômes, rationnelles, circulaires, racines, puissances, logarithmes, exponentielles sont continues en tout point de leur domaine de définition.

La somme, le produit, le quotient (si le dénominateur ne s'annule pas) de deux fonctions continues en x_0 sont continues en x_0.

Si f est continue en x_0 et si g est continue en $f(x_0)$ alors $g\circ f$ est continue en x_0.

III. Comparaison de fonctions au voisinage d'un point SO EO

1. Fonction négligeable devant une autre

■ Si f et g sont deux fonctions définies au voisinage de x_0 ($x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$), f est négligeable devant g au voisinage de x_0, et on note : $f(x) = o(g(x))$, s'il existe une fonction ε telle qu'au voisinage de x_0 : $f = \varepsilon g$ avec $\lim\limits_{x_0} \varepsilon = 0$.

■ Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0, f est négligeable devant g si et seulement si $\lim\limits_{x_0} \dfrac{f}{g} = 0$.

Propriétés : Si au voisinage de x_0 : $f(x) = o(g(x))$ et $h(x) = o(k(x))$, alors :

– $f(x)h(x) = o(g(x)k(x))$,

– $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $f^p(x) = o(g^p(x))$,

– $\dfrac{f(x)}{k(x)} = o\left(\dfrac{g(x)}{h(x)}\right)$ (si h et k ne s'annulent pas au voisinage de x_0).

Exemples usuels (au voisinage de $+\infty$) :

• Si $\alpha < \beta$, $x^\alpha = o(x^\beta)$,

• Si $\alpha > 0$ ($\beta \in \mathbb{R}$), $(\ln x)^\beta = o(x^\alpha)$,

• Si $\alpha > 0$ ($\beta \in \mathbb{R}$), $x^\beta = o(e^x)^\alpha$,

• Si $a > 1$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), $x^\alpha = o(a^x)$,

• Si $0 < |a| < |b|$, $a^x = o(b^x)$.

Exemples usuels (au voisinage de 0) :

• Si $\alpha > \beta$, $x^\alpha = o(x^\beta)$,

• Si $\alpha > 0$ ($\beta \in \mathbb{R}$), $(|\ln x|)^\beta = o(x^{-\alpha})$.

2. Fonctions équivalentes

■ Si f et g sont deux fonctions définies au voisinage de x_0 ($x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$), f et g sont équivalentes au voisinage de x_0, et on note : $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$, s'il existe une fonction h telle qu'au voisinage de x_0 : $f = hg$ avec $\lim\limits_{x_0} h = 1$.

■ Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0, f est équivalente à g si et seulement si $\lim\limits_{x_0} \dfrac{f}{g} = 1$.

■ Si $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ ($x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$) et si $\lim\limits_{x_0} f = \ell$ ($\ell \in \overline{\mathbb{R}}$), alors $\lim\limits_{x_0} g = \ell$: deux fonctions équivalentes en un point ont même limite en ce point.

Propriétés : Si $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ et si $h(x) \underset{x_0}{\sim} k(x)$, alors :

– $f(x)h(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)k(x)$,

– $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $f^p(x) \underset{x_0}{\sim} g^p(x)$,

– $\dfrac{f(x)}{h(x)} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{g(x)}{k(x)}$ (si h et k ne s'annulent pas au voisinage de x_0).

– si $f'(x_0) \neq 0$, on a : $f(x) - f(x_0) \underset{x_0}{\sim} f'(x_0)(x - x_0)$.

Exemples usuels :

• $\sin x \underset{0}{\sim} x$,

• $\cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$,

• $\tan x \underset{0}{\sim} x$,

• $\operatorname{Arcsin} x \underset{0}{\sim} x$,

• $\operatorname{Arctan} x \underset{0}{\sim} x$,

• $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ ou $\ln x \underset{1}{\sim} x-1$,

• $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$,

• $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$ $(\alpha \in \mathbb{R})$,

• Soient n et p deux entiers naturels tels que $n > p$, si $P = \sum_{k=p}^{n} a_k X^k$ (avec $a_p \neq 0$ et $a_n \neq 0$), alors : $P(x) \underset{0}{\sim} a_p x^p$ et $P(x) \underset{\pm\infty}{\sim} a_n x^n$.

B) Etude globale des fonctions

I. Fonctions paires, impaires, périodiques SO EO

• f est paire si : $\forall x \in \mathcal{D}_f, \begin{cases} (-x) \in \mathcal{D}_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$,

• f est impaire si : $\forall x \in \mathcal{D}_f, \begin{cases} (-x) \in \mathcal{D}_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$,

• f est périodique si : $\exists t \in \mathbb{R}^*, \forall x \in \mathcal{D}_f, (x+t) \in \mathcal{D}_f, f(x+t) = f(x)$; t est alors une période de f. L'unique $T \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'ensemble $\{kT, k \in \mathbb{Z}^*\}$ soit l'ensemble des périodes de f est appelé la période de f.

II. Fonctions bornées SO EO

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I.

• f est majorée sur I si : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leq M$, M est alors un majorant de f sur I,

• f est minorée sur I si : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \geq m$, m est alors un minorant de f sur I,

• f est bornée sur I si f est majorée et minorée sur I.

III. Fonctions monotones. Existence de la limite d'une fonction monotone SO EO

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I.

• f est croissante sur I si : $\forall (x_1, x_2) \in I^2, x_1 < x_2, f(x_1) \leq f(x_2)$,

• f est strictement croissante sur I si : $\forall (x_1, x_2) \in I^2, x_1 < x_2, f(x_1) < f(x_2)$,

• f est décroissante sur I si : $\forall (x_1, x_2) \in I^2, x_1 < x_2, f(x_1) \geq f(x_2)$,

• f est strictement décroissante sur I si : $\forall (x_1, x_2) \in I^2, x_1 < x_2, f(x_1) > f(x_2)$,

• f est monotone sur I si f est croissante ou décroissante sur I,

• f est strictement monotone sur I si f est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.

■ ***Existence de la limite d'une fonction monotone (dit théorème "de la limite monotone").*** Soient $(a, b) \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^2$ tels que $a < b$, f une fonction monotone sur $]a, b[$. f admet une limite (finie ou infinie) à droite en a et à gauche en b.

IV. Fonctions continues. Opérations sur les fonctions continues SO EO

■ Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. f est continue sur I si et seulement si f est continue en tout point de I.

■ Les fonctions polynômes, rationnelles, circulaires, racines, puissances, logarithmes, exponentielles sont continues sur leur domaine de définition.

■ La somme, le produit, le quotient (si le dénominateur ne s'annule pas) de deux fonctions continues sur I sont continues sur I.

Soient I et J deux intervalles de R tels que $f(I) \subset J$, f une fonction définie sur I et g une fonction définie sur J. Si f est continue sur I et g est continue sur J, alors $(g \circ f)$ est continue sur I.

V. Fonctions en escalier. Fonctions continues par morceaux SO EO

■ Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie sur [a, b]. f est dite en escalier s'il existe une suite $(x_i)_{0 \le i \le n}$ strictement croissante de points de [a, b] avec $x_0 = a$ et $x_n = b$ tels que, pour tout $i \in [0, n-1]$, f soit constante sur $]x_i, x_{i+1}[$.

■ Soient I un intervalle de R et f une fonction définie sur I. f est continue par morceaux sur I si f n'a qu'un nombre dénombrable de points de discontinuité en lesquels elle admet une limite finie à droite et à gauche.

VI. Théorème des valeurs intermédiaires SO EO

■ Soient I un intervalle de R, $(a, b) \in I^2$ et f une fonction continue sur I. Pour tout réel λ compris entre f(a) et f(b), il existe un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = \lambda$.

■ ***Cas particulier.*** Soient I un intervalle de R et f une fonction continue sur I, $(a, b) \in I^2$ tels que $a < b$. Si $f(a)\, f(b) < 0$, alors : $\exists c \in]a, b[, f(c) = 0$.

■ L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

VII. Image d'un segment par une fonction continue SO EO

■ L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

■ Toute fonction continue sur un segment est bornée sur ce segment.

■ Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur [a, b] telle que $f([a, b]) = [m, M]$ $((m, M) \in R^2)$. m est appelée borne inférieure de f sur [a, b] et on note : $m = \inf\limits_{[a,b]} f = \inf\limits_{t \in [a,b]} f(t)$. M est appelée borne supérieure de f sur [a, b] et on note : $M = \sup\limits_{[a,b]} f = \sup\limits_{t \in [a,b]} f(t)$.

VIII. Fonctions réciproques SO EO

Soient I un intervalle de R, f une fonction continue et strictement monotone sur I et $J = f(I)$. On a :

– J est un intervalle et f est une bijection de I vers J,

– f^{-1} est continue et strictement monotone sur J, de même sens de variation que f,

– la courbe représentative de f^{-1} se déduit de celle de f par symétrie par rapport à la première bissectrice.

C) Dérivation

I. Dérivation SO EO

1. Dérivée en un point

Soient I un intervalle de R, $x_0 \in I$ et f une fonction définie sur I.

■ f est dérivable en x_0 si la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie ℓ en x_0. ℓ est le nombre dérivé de f en x_0 et on note $f'(x_0) = \dfrac{df}{dx}(x_0) = Df(x_0) = \ell$.

• L'équation de la tangente à la courbe représentative de f en $(x_0, f(x_0))$ est : $y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$.

• Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.

■ f est dérivable à droite (resp. à gauche) en x_0 si la fonction $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie ℓ à droite (resp. à gauche) en x_0. ℓ est le nombre dérivé de f à droite (resp. à gauche) en x_0 et on note $f_d'(x_0) = \ell$ (resp. $f_g'(x_0) = \ell$).

• La demi-droite d'origine $(x_0, f(x_0))$ et d'équation $y = f(x_0) + (x - x_0)f_d'(x_0)$ (resp. $y = f(x_0) + (x - x_0)f_g'(x_0)$) s'appelle la demi-tangente à droite (resp. à gauche) à la courbe représentative de f en $(x_0, f(x_0))$.

• Si $\lim\limits_{x_0^\pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$, alors la (demi-)tangente (à droite ou à gauche) à la courbe représentative de f en $(x_0, f(x_0))$ est la (demi-)droite verticale passant par $(x_0, f(x_0))$.

■ La somme, le produit, le quotient (si le dénominateur ne s'annule pas) de deux fonctions dérivables en x_0 est dérivable en x_0.

Si f est dérivable en x_0 et g en $f(x_0)$, alors $(g \circ f)$ est dérivable en x_0.

Soit f une fonction continue, strictement monotone sur I. Si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$.

2. Fonction dérivée

■ Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I. Sa fonction dérivée est notée $f' = \frac{df}{dx} = Df$.

■ Si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I.

■ Les fonctions polynômes, rationnelles, racines, puissances, logarithmes, exponentielles sont dérivables sur leur domaine de définition (sauf aux bornes pour les fonctions racines et puissance α avec $0 < \alpha < 1$).

■ La somme, le produit, le quotient (si le dénominateur ne s'annule pas) de deux fonctions dérivables sur I est dérivable sur I.

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ tels que $f(I) \subset J$, f une fonction définie sur I et g une fonction définie sur J. Si f est dérivable sur I et g est dérivable sur J alors $g \circ f$ est dérivable sur I.

Soit f une fonction continue, strictement monotone sur I. Si f est dérivable sur I et si $\forall x \in I$, $f'(x) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ (et si $\exists x_0 \in I$, $f'(x_0) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en $f(x_0)$).

■ ***Opérations sur les dérivées :***

– $(f + g)' = f' + g'$,

– $(\lambda f)' = \lambda f'$,

– $(fg)' = f'g + g'f$,

– $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$,

– $\left(\prod\limits_{i=1}^{n} f_i\right)' = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(f_i' \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} f_j\right)$,

– $(f^n)' = n f^{n-1} f'$,

– $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$,

– $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

3. Fonctions de classe C^n

▪ Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. f est de classe C^1 (ou continûment dérivable) sur I si f est dérivable sur I et si f' est continue sur I.

Soit $n \in \mathbb{N}$. f est de classe C^n sur I si f est dérivable n fois sur I et si sa dérivée $n^{ème}$, notée $f^{(n)} = \dfrac{d^n f}{dx^n} = D^n f$ est continue sur I. On note $C^n(I)$, l'ensemble des fonctions de classe C^n sur I.

▪ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si f est de classe C^n sur I alors pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, f est de classe C^k sur I et $f^{(k)}$ est de classe C^{n-k} sur I.

▪ Soit $n \in \mathbb{N}$. La primitive d'une fonction de classe C^n sur un intervalle est de classe C^{n+1} sur cet intervalle.

▪ f est de classe C^∞ (ou indéfiniment dérivable) sur I si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe C^n sur I. On note $C^\infty(I)$, l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur I.

▪ Les fonctions polynômes, rationnelles, racines, puissances, logarithmes, exponentielles sont de classe C^∞ sur leur domaine de définition (sauf aux bornes pour les fonctions racines et puissance α avec $0 < \alpha < 1$).

▪ Soit $n \in \mathbb{N}$. La somme, le produit, le quotient (si le dénominateur ne s'annule pas) de deux fonctions de classe C^n sur I est de classe C^n sur I.

Soient $n \in \mathbb{N}$, I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ tels que $f(I) \subset J$, f une fonction définie sur I et g une fonction définie sur J. Si f est de classe C^n sur I et g est de classe C^n sur J alors $(g \circ f)$ est de classe C^n sur I.

▪ ***Formule de Leibniz* (50).** Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions n fois dérivables sur I. On a : $\forall x \in I,\ (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x)$.

II. Théorèmes de dérivation **50 EO**

1. Extrema locaux et sens de variation de fonctions dérivables

▪ ***Extrema locaux.*** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I et $x_0 \in I$. f admet un maximum (resp. minimum) local en x_0 si : $\exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[,\ f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).

f admet un extremum local en x_0 si f admet un maximum local ou un minimum local en x_0. f admet un extremum global (ou extremum) en x_0 si $\forall x \in I,\ f(x) \leq f(x_0)$ ou si $\forall x \in I,\ f(x) \geq f(x_0)$.

▪ ***Extrema locaux de fonctions dérivables.*** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I et $x_0 \in I$ tel que $\exists \alpha > 0,\ ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset I$. Si f est dérivable sur I et admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

▪ ***Sens de variation de fonctions dérivables.*** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\mathring{I}$ l'intervalle I privé de ses extrémités éventuelles et f une fonction continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$.

– f est croissante sur I si et seulement si $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) \geq 0$,

– f est décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) \leq 0$,

– f est constante sur I si et seulement si $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) = 0$,

– f est strictement croissante sur I si et seulement si $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) > 0$ (sauf éventuellement en un nombre dénombrable de points de I pour lesquels f' s'annule),

– f est strictement décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) < 0$ (sauf éventuellement en un nombre dénombrable de points de I pour lesquels f' s'annule).

2. Inégalité et théorème des accroissements finis. Théorème de Rolle

▪ ***Inégalité des accroissements finis.*** Soient a et b deux réels tels que $a < b$, m et M deux réels tels que $m \leq M$ et f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ telle que : $\forall t \in]a, b[,\ m \leq f'(t) \leq M$. On a alors : $m \leq \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M$, et plus généralement : $\forall (x, y) \in [a, b]^2,\ x \neq y,\ m \leq \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq M$.

■ ***Théorème des accroissements finis*** **(SO).** Soient a et b deux réels tels que $a < b$, f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. On a alors : $\exists c \in]a, b[, f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$.

■ ***Théorème de Rolle*** **(SO).** Soient a et b deux réels tels que $a < b$, f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. On a alors : $\exists c \in]a, b[, f'(c) = 0$.

3. Théorème de prolongement des fonctions de classe C^1, de classe C^p

■ ***Théorème de prolongement des fonctions de classe C^1.*** Soient a et b deux réels tels que $a < b$, f une fonction continue sur $[a, b]$, de classe C^1 sur $]a, b]$. Si f' admet une limite finie en a, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} f'(x)$. f est alors de classe C^1 sur $[a, b]$ (et *mutatis mutandi* en b si f est de classe C^1 sur $[a, b[$).

■ ***Théorème de prolongement des fonctions de classe C^p ($p \in \mathbb{N}^*$)*** **(SO).** Soient $p \in \mathbb{N}^*$, a et b deux réels tels que $a < b$, f une fonction continue sur $[a, b]$, de classe C^p sur $]a, b]$. Si pour tout $k \in [1, p]$, $f^{(k)}$ admet une limite finie en a, alors f est dérivable p fois en a et $\forall k \in [1, p]$, $f^{(k)}(a) = \lim\limits_{x \to a} f^{(k)}(x)$. f est alors de classe C^p sur $[a, b]$ (et *mutatis mutandi* en b si f est de classe C^p sur $[a, b[$).

III. Fonctions convexes SO EO

1. Définitions

■ Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. f est convexe sur I si :
$\forall (x, y) \in \mathring{I}^2$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

■ Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. f est concave sur I si $(-f)$ est convexe sur I.

2. Caractérisations des fonctions convexes de classe C^2

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de classe C^2 sur I. Si $\forall x \in \mathring{I}$, $f''(x) \geq 0$, alors f est convexe sur I et :
– sa courbe représentative est au-dessus de chacune de ses tangentes,
– sa courbe représentative est en-dessous de chacune des cordes qu'elle sous-tend.

D) Fonctions polynômes

I. Polynômes, fonctions polynômes EO

■ Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels telle que : $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $a_n = 0$. On appelle polynôme ou fonction polynôme, l'application $x \mapsto \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$.

■ ***Unicité des coefficients.*** Deux polynômes sont égaux si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux. Ainsi, si $P : x \mapsto \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ et $Q : x \mapsto \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} b_n x^n$, P et Q sont égaux si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

■ ***Degré d'un polynôme.***

• Soit $P : x \mapsto \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est le coefficient de degré n de P.

• Si $P \neq 0$, le degré de P (noté deg(P) ou d°P) est le plus grand des entiers n tels que $a_n \neq 0$ (a_n est alors le coefficient dominant de P).

• Si $P = 0$, on pose, par convention : $\deg(P) = -\infty$.

• Soient P et Q deux polynômes tels que $P \neq 0$ et $Q \neq 0$. On a :

– $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$,

– $\deg(\lambda P) = \deg(P)$ $(\lambda \neq 0)$,

– $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

II. Racines d'un polynôme EO

▪ Soient P un polynôme et $\lambda \in \mathbb{R}$. λ est racine de P si $P(\lambda) = 0$, c'est-à-dire si $(X - \lambda)$ divise P (i.e. s'il existe un polynôme Q tel que $P = (X - \lambda)Q$).

▪ Soient P un polynôme, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. λ est racine d'ordre de multiplicité k de P si $(X - \lambda)^k$ divise P et $(X - \lambda)^{k+1}$ ne le divise pas.

▪ Soient P un polynôme, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. λ est racine d'ordre de multiplicité k de P si et seulement si : $\forall i \in [0, k - 1]$, $P^{(i)}(\lambda) = 0$ et $P^{(k)}(\lambda) \neq 0$.

▪ Soit P un polynôme. Si $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont n racines distinctes de P $(n \in \mathbb{N}^*)$ d'ordre de multiplicité respectifs $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$, alors $\prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ divise P et $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leq \deg(P)$.

Exercices clefs, méthodes et astuces

SO EO

■ 1. Calcul de limites, recherche d'équivalents

1) a) Déterminer $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^x$.

b) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{\ln(1 + x)}{\ln x}\right]^{x \ln x}$.

2) a) Déterminer un équivalent en 0, puis en $+\infty$ de : $x \mapsto \frac{x^3 + 2x^2 + x + 3}{2x(x + 1)}$.

b) Déterminer un équivalent en 0, puis la limite en 0 de : $x \mapsto \frac{1 - \cos x}{\ln(1 + x) \sin x}$.

3) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

En déduire que :

$$\ln(1 + x) - x \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}.$$

1) a) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^x$. Comme $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) > 0$, on peut écrire : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(f(x)) = -x \ln x$.

Or, on a : $\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$ (croissances comparées). On en déduit alors : $\lim_{x \to 0} \ln(f(x)) = 0$. Comme $\lim_{x \to 0} e^x = 1$, on peut maintenant écrire : $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$, et donc :

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^x = 1}$$

☞ Pour étudier une fonction f définie sur un intervalle inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ dont la variable est à la fois en puissance et dans le terme mis en puissance, il faut étudier la fonction ln f, puis se ramener à la fonction initiale à l'aide de la fonction exponentielle.

☞ Lorsque l'on cherche la limite ℓ ($\ell \in \mathbb{R}$ ou $\ell = \pm\infty$) en x_0 d'une fonction $f \circ g$, après avoir montré que g tend vers α ($\alpha \in \mathbb{R}$ ou $\alpha = \pm\infty$) en x_0, **il ne faut jamais oublier d'écrire** que f tend vers ℓ en α.

b) Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par : $\forall x \in]1, +\infty[,\ f(x) = \left[\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right]^{x \ln x}$. On peut écrire :

$$\forall x \in]1, +\infty[,\ \ln\big(f(x)\big) = x \ln x \ln\left[\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right] \quad \text{soit :}$$

$$= x \ln x \ln\left[\frac{\ln\left[x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]}{\ln x}\right] \quad \text{donc :}$$

$$= x \ln x \ln\left[\frac{\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right] \quad \text{i.e. :}$$

$$= x \ln x \ln\left[1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right].$$

Or, on a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x} = 0$. Comme $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$, on en déduit alors : $\ln\left[1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right] \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}$, et donc : $\ln\big(f(x)\big) \underset{+\infty}{\sim} x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, on peut également écrire : $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$, et donc : $\ln\big(f(x)\big) \underset{+\infty}{\sim} 1$, i.e. : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\big(f(x)\big) = 1$.
Comme $\displaystyle\lim_{x\to1} e^x = e$, on peut désormais conclure : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = e$, i.e. :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right]^{x \ln x} = e}$$

2) a) ▪ Un polynôme étant équivalent en 0 à son monôme de plus bas degré, on peut écrire :
$x^3 + 2x^2 + x + 3 \underset{0}{\sim} 3$ et $2x(x+1) \underset{0}{\sim} 2x$, d'où :

$$\boxed{\frac{x^3+2x^2+x+3}{2x(x+1)} \underset{0}{\sim} \frac{3}{2x}}$$

▪ De même, un polynôme étant équivalent en $+\infty$ à son monôme de plus haut degré, on peut écrire :
$x^3 + 2x^2 + x + 3 \underset{+\infty}{\sim} x^3$ et $2x(x+1) \underset{+\infty}{\sim} 2x^2$ d'où :

$$\frac{x^3+2x^2+x+3}{2x(x+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^3}{2x^2} \quad \text{i.e. :}$$

$$\boxed{\frac{x^3+2x^2+x+3}{2x(x+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{2}}$$

☞ Se souvenir qu'un polynôme est toujours équivalent en 0 à son monôme de plus bas degré et en $\pm\infty$ à son monôme de plus haut degré.

b) Comme $1 - \cos x \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$, $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ et $\sin x \underset{0}{\sim} x$, on peut écrire : $\dfrac{1-\cos x}{\ln(1+x)\sin x} \underset{0}{\sim} \dfrac{\frac{x^2}{2}}{x^2}$, i.e. :

$$\boxed{\frac{1-\cos x}{\ln(1+x)\sin x} \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}, \text{ d'où : } \lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{\ln(1+x)\sin x} = \frac{1}{2}}$$

3) ▪ ⌟ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$. f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et :

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x$ soit :

$= \frac{x(1+x) - (1+x) + 1}{1+x}$ i.e. :

$= \frac{x^2}{1+x}$ et donc :

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) \geq 0$.

f est donc croissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme $f(0) = 0$, on en déduit alors : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) \geq 0$, et donc :

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$.

⌟ De même, soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} = f(x) - \frac{x^3}{3}$. g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et :

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $g'(x) = f'(x) - x^2$ soit :

$= \frac{x^2 - x^2(1+x)}{1+x}$ i.e. :

$= -\frac{x^3}{1+x}$ et donc :

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $g'(x) \leq 0$.

g est donc décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme $g(0) = 0$, on en déduit alors : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) \leq 0$, et donc :

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

⌟ On peut maintenant conclure :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+,\ x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}}$$

☞ Retenir que pour démontrer des inégalités de fonctions, la première méthode possible consiste à effectuer deux études de fonctions (pour les autres méthodes, cf. exercices 8.2, 8.5 et **9**.1.1).

▪ D'après ce qui précède, on peut écrire :

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $-\frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) - x \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ soit, en divisant cette relation par $-\frac{x^2}{2} < 0$ ($x \in \mathbb{R}_+^*$) :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $1 - \frac{2x}{3} \leq \frac{\ln(1+x) - x}{-\frac{x^2}{2}} \leq 1$.

La fonction $x \mapsto \frac{\ln(1+x) - x}{-\frac{x^2}{2}}$ est donc encadrée par la fonction constante égale à 1 et par une fonction qui tend vers 1 lorsque x tend vers 0. On en déduit alors (théorème de l'encadrement) : $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{-\frac{x^2}{2}} = 1$, ce qui s'écrit encore :

$$\boxed{\ln(1+x) - x \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}}$$

☞ Lorsque l'on dispose d'un encadrement de f sur un intervalle I ($x_0 \in I$) : $\forall x \in I,\ a(x) \leq f(x) \leq b(x)$, et que l'on cherche à montrer que : $f(x) \underset{x_0}{\sim} t(x)$, on écrit (lorsque t est une fonction strictement positive sur I, le signe des inégalités étant inversé lorsque t est strictement négative sur I) : $\forall x \in I,\ \dfrac{a(x)}{t(x)} \leq \dfrac{f(x)}{t(x)} \leq \dfrac{b(x)}{t(x)}$; on montre alors que : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{a(x)}{t(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{b(x)}{t(x)} = 1$, et on en déduit alors, à l'aide du théorème de l'encadrement, que : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{t(x)} = 1$, d'où : $f(x) \underset{x_0}{\sim} t(x)$.

☞ Remarquer qu'à l'issue de l'encadrement précédent, on aurait pu être tenté d'écrire : $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x - \dfrac{x^2}{2}$. Ce type d'écriture, bien que tout à fait juste, ne présente aucun intérêt car on aurait tout aussi bien écrire : $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x - e^{1000\pi}x^2$ (il suffit de vérifier, ça marche)...

Un équivalent ne doit donc toujours comporter qu'un seul terme : $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ ou $\ln(1+x) - x \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$.

SO EO

■ 2. Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre

1) (SO EO) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $x_0 \in \mathring{I}$, $\ell \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I telle que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

a) Soient a et b deux réels tels que $a < \ell < b$. Montrer que :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[,\ a < f(x) < b.$$

b) Soit α un réel tel que $\ell \neq \alpha$. Montrer que :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[,\ f(x) \neq \alpha.$$

2) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $x_0 \in I$, $\ell \in \mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies sur I telles que :

$$\forall x \in I,\ f(x) = g(x) \text{ et } \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell.$$

Montrer que g admet une limite en x_0 que l'on déterminera.

3) a) Soit f une fonction croissante, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) \leq 3 - \frac{1}{x}.$$

Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$ et déterminer un majorant de sa limite.

b) Soit f une fonction décroissante sur]0, 1] et telle que :

$$\forall x \in]0, 1],\ 1 - x < f(x) < 2 + x.$$

Montrer que f admet une limite finie en 0 et déterminer un encadrement de sa limite.

c) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) \geq \ln x.$$

Montrer que f admet une limite en $+\infty$ que l'on déterminera.

d) Soit f une fonction définie sur]1, +∞[et telle que :

$$\forall x \in]1, +\infty[,\ f(x) \geq \frac{1}{x-1}.$$

Montrer que f admet une limite en 1 que l'on déterminera.

4) a) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \frac{1}{x} \leq f(x) \leq x.$$

Montrer que f admet une limite en 1 que l'on déterminera.

b) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \left|f(x) - 1\right| < \frac{1}{x}.$$

Montrer que f admet une limite en $+\infty$ que l'on déterminera.

1) a) Comme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$, d'après le cours, on peut écrire :

$\forall \eta > 0, \exists \varepsilon_1 > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, \left|x - x_0\right| < \varepsilon_1, \left|f(x) - \ell\right| < \eta$ soit :

$\forall \eta > 0, \exists \varepsilon_1 > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x \in]x_0 - \varepsilon_1, x_0 + \varepsilon_1[, \ell - \eta < f(x) < \ell + \eta$ et comme f est définie sur un intervalle centré sur x_0 (car $x_0 \in \mathring{I}$) :

$\forall \eta > 0, \exists \varepsilon_1 > 0, \forall x \in]x_0 - \varepsilon_1, x_0 + \varepsilon_1[, \ell - \eta < f(x) < \ell + \eta$ ①.

En posant $\eta = \ell - a$ ($\eta > 0$) dans la relation ①, on peut alors écrire :

$\exists \varepsilon_2 > 0, \forall x \in]x_0 - \varepsilon_2, x_0 + \varepsilon_2[, a < f(x)$.

De même, en posant $\eta = b - \ell$ ($\eta > 0$) dans la relation ①, on peut également écrire :

$\exists \varepsilon_3 > 0, \forall x \in]x_0 - \varepsilon_3, x_0 + \varepsilon_3[, f(x) < b$.

On peut désormais conclure, en posant $\varepsilon = \min(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$:

$$\boxed{\exists \varepsilon > 0, \forall x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[, a < f(x) < b}$$

☞ Se souvenir que si une fonction f tend vers ℓ ($a < \ell < b$) en x_0, il existe alors un voisinage de x_0 sur lequel $a < f(x) < b$ (démonstration à connaître).

b) Comme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$, d'après la définition de la limite d'une fonction en un point, on peut écrire :

$\forall \eta > 0, \exists \varepsilon > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, \left|x - x_0\right| < \varepsilon, \left|f(x) - \ell\right| < \eta$ soit, comme f est définie sur un intervalle centré sur x_0 :

$\forall \eta > 0, \exists \varepsilon > 0, \forall x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[, \ell - \eta < f(x) < \ell + \eta$ soit encore, en posant $\eta = \left|\ell - \alpha\right|$ ($\eta > 0$ car $\ell \neq \alpha$) :

$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[, \ell - \left|\ell - \alpha\right| < f(x) < \ell + \left|\ell - \alpha\right|$.

Deux cas se présentent alors :

– si $\ell > \alpha$, on a alors : $\ell - \left|\ell - \alpha\right| = \alpha$, et donc : $\exists \varepsilon > 0, \forall x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[, f(x) > \alpha$, et :

– si $\ell < \alpha$, on a alors : $\ell + \left|\ell - \alpha\right| = \alpha$, et donc : $\exists \varepsilon > 0, \forall x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[, f(x) < \alpha$.

Dans tous les cas de figure, on peut désormais conclure :

$$\boxed{\exists \varepsilon > 0, \forall x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[, f(x) \neq \alpha}$$

☞ Se souvenir que si une fonction f tend vers $\ell \neq \alpha$ en x_0, il existe alors un voisinage de x_0 sur lequel $f(x) \neq \alpha$ (démonstration à connaître).

2) Comme $\forall x \in I, f(x) = g(x)$ et comme f tend vers ℓ en x_0, par passage à la limite, on peut écrire :

$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, d'où :

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell}$$

3) a) Comme f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, d'après le théorème de la limite monotone, f admet une limite (finie ou infinie) en $+\infty$.

De plus, comme elle est croissante, elle ne peut tendre vers $-\infty$ en $+\infty$ (en effet, si on avait $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, alors on aurait : $\forall A\in\mathbb{R}, \exists B\in\mathbb{R}, \forall x\in\mathbb{R}_+^*, x > B, f(x) < A$, soit, en posant $A = f(1)$: $\exists B\in\mathbb{R}^+, \forall x\in]B, +\infty[, f(x) < f(1)$, ce qui est manifestement absurde, f étant croissante sur $\mathbb{R}_+^*$).

Comme on a en outre : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*, f(x) \leq 3 - \frac{1}{x} \leq 3$, f ne peut tendre vers $+\infty$ en $+\infty$. Elle admet donc une limite finie en $+\infty$ et le théorème de prolongement des inégalités nous permet alors d'écrire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \leq 3$, d'où la conclusion :

$$\boxed{\text{f admet une limite finie en } +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) \leq 3}$$

☞ Noter que le théorème de la limite monotone ne permet **jamais** de conclure qu'une fonction admet une **limite finie** en un point, mais **seulement une limite finie ou infinie** en ce point. C'est une minoration ou une majoration qui doit permettre de montrer que cette limite est finie.

☞ Avant d'utiliser le théorème de prolongement des inégalités, il faut toujours s'assurer au préalable que les fonctions auxquelles on va appliquer le théorème admettent bien une limite.

b) Comme f est décroissante sur $]0, 1]$, d'après le théorème de la limite monotone, f admet une limite (finie ou infinie) en 0. Comme $\forall x\in]0, 1], 1 - x \leq f(x) \leq 2 + x$, on peut alors écrire que $\forall x\in]0, 1], 0 \leq f(x) \leq 3$, donc que f est bornée sur $]0, 1]$ et donc qu'elle admet une limite finie ℓ en 0.

Comme on a en outre : $\forall x\in]0, 1], 1 - x < f(x) < 2 + x$ et comme $\lim\limits_{x\to0} (1 - x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to0} (2 + x) = 2$, le théorème de prolongement des inégalités appliqué deux fois à cette double inégalité nous permet alors d'écrire que $1 \leq \ell \leq 2$, et donc que :

$$\boxed{\text{f admet une limite finie } \ell \text{ en 0 et } 1 \leq \ell \leq 2}$$

c) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, f est minorée sur $\mathbb{R}_+^*$ par une fonction qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Le théorème de prolongement des inégalités nous permet alors d'écrire :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

d) Comme $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$, f est minorée sur $]1, +\infty[$ par une fonction qui tend vers $+\infty$ en 1. Le théorème de prolongement des inégalités nous permet alors d'écrire :

$$\boxed{\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty}$$

4) a) Comme $\forall x\in\mathbb{R}_+^*, \frac{1}{x} \leq f(x) \leq x$ et $\lim\limits_{x\to1} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to1} x = 1$, f est encadrée par deux fonctions qui tendent vers 1 en 1. On en déduit alors (théorème de l'encadrement) :

$$\boxed{\lim_{x\to1} f(x) = 1}$$

b) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, la fonction $x \mapsto |f(x) - 1|$ est encadrée par la fonction nulle et par une fonction qui tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. On en déduit alors (théorème de l'encadrement) : $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x) - 1| = 0$, et donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1}$$

☞ Il existe plusieurs types de "passages à la limite" :

• dans le cas de l'égalité de deux fonctions (au voisinage d'un point), si l'une admet une limite, l'autre possède la même limite (cf. **2**),

• dans le cas d'une inégalité, on se ramène au théorème de prolongement des inégalités en n'oubliant pas de prouver auparavant que les deux fonctions admettent bien une limite finie (cf. **3a**) ou que l'une d'entre elles admet une limite infinie (cf. **3c** et **3d**),

• dans le cas d'une double inégalité :

– si les deux fonctions "encadrantes" ne possèdent pas la même limite, après avoir montré que chacune des fonctions en présence admet une limite, on applique deux fois le théorème de prolongement des inégalités et on obtient alors un encadrement de la limite de cette fonction (cf. **3b**),

– si les deux fonctions "encadrantes" possèdent la même limite, on utilise le théorème de l'encadrement et on détermine ainsi la valeur de la limite de la fonction "médiane" (cf. **4**).

☞ **Attention !!!** Le théorème de prolongement des inégalités et le théorème de l'encadrement transforment des inégalités strictes en inégalités larges.

S0 E0

★ 3. "Composition" d'équivalents

Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

1) Soient f et g deux fonctions équivalentes en x_0. Montrer que :

$$|f(x)| \underset{x_0}{\sim} |g(x)|.$$

2) Soient f et g deux fonctions équivalentes en x_0 et positives au voisinage de x_0. Soit également α un réel strictement positif. Montrer que :

$$f^{\alpha}(x) \underset{x_0}{\sim} g^{\alpha}(x).$$

3) Soient f et g deux fonctions équivalentes en x_0 telles que $\lim\limits_{x_0} (f - g) = 0$. Montrer que :

$$e^{f(x)} \underset{x_0}{\sim} e^{g(x)}.$$

4) (S0) Soient f et g deux fonctions strictement positives au voisinage de x_0, équivalentes en x_0 et de limite commune $\ell \neq 1$ en x_0. Montrer que :

$$\ln(f(x)) \underset{x_0}{\sim} \ln(g(x)).$$

1) Les fonctions f et g étant équivalentes en x_0, on peut écrire qu'il existe une fonction h de limite 1 en x_0 telle que, au voisinage de x_0 : $f(x) = h(x)g(x)$, d'où, toujours au voisinage de x_0 :
$|f(x)| = |h(x)|\,|g(x)|$.

Comme $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 1$ et comme $\lim\limits_{x \to 1} |x| = 1$, on peut écrire : $\lim\limits_{x \to x_0} |h(x)| = 1$. Ainsi, il existe bien une fonction $h' = |h|$ de limite 1 en x_0 telle que, au voisinage de x_0 : $|f(x)| = h'(x)\,|g(x)|$, d'où la conclusion :

$$\boxed{|f(x)| \underset{x_0}{\sim} |g(x)|}$$

2) De même, les fonctions f et g étant équivalentes en x_0, on peut écrire qu'il existe une fonction h de limite 1 en x_0 telle que, au voisinage de x_0 : $f(x) = h(x)g(x)$. Comme f et g sont positives au voisinage de x_0, on peut alors écrire que h est positive au voisinage de x_0. La fonction $x \mapsto x^{\alpha}$ étant définie sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit alors qu'au voisinage de x_0 : $f^{\alpha}(x) = h^{\alpha}(x)g^{\alpha}(x)$.

Comme $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = 1$ et comme $\lim\limits_{x\to 1} x^\alpha = 1$, on peut écrire : $\lim\limits_{x\to x_0} h^\alpha(x) = 1$. Ainsi, il existe bien une fonction $h' = h^\alpha$ de limite 1 en x_0 telle que, au voisinage de x_0 : $f^\alpha(x) = h'(x)\, g^\alpha(x)$, d'où la conclusion :

$$\boxed{f^\alpha(x) \underset{x_0}{\sim} g^\alpha(x)}$$

☞ Dans la pratique, lorsque l'on cherche à élever à une puissance non entière α un équivalent du type : $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ où g est une fonction positive au voisinage de x_0, il faut montrer que $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Comme $\lim\limits_{x\to 1} x^\alpha = 1$, on en déduit alors que : $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f^\alpha(x)}{g^\alpha(x)} = 1$, et donc que : $f^\alpha(x) \underset{x_0}{\sim} g^\alpha(x)$.

Rappelons que d'après le cours, on peut élever un équivalent à une puissance entière sans qu'il y ait besoin de donner de plus amples justifications.

3) Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, on a, au voisinage de x_0 : $e^{g(x)} \neq 0$. On peut alors écrire, toujours au voisinage de x_0 : $\frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = e^{(f(x)-g(x))}$. Comme $\lim\limits_{x_0} (f-g) = 0$ et comme $\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$, on en déduit alors : $\lim\limits_{x\to x_0} e^{(f(x)-g(x))} = 1$, et donc : $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = 1$, i.e :

$$\boxed{e^{f(x)} \underset{x_0}{\sim} e^{g(x)}}$$

4) ❑ Les fonctions f et g étant équivalentes en x_0, on peut écrire qu'il existe une fonction h de limite 1 en x_0 telle que, au voisinage de x_0 : $f(x) = h(x)g(x)$.

Or, comme au voisinage de x_0, $f(x) > 0$, on a, toujours au voisinage de x_0 : $h(x)g(x) > 0$, et donc, comme au voisinage de x_0, $g(x) > 0$, on a, toujours au voisinage de x_0 : $h(x) > 0$. La fonction ln étant définie sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut alors écrire, toujours au voisinage de x_0 :

$\ln\big(f(x)\big) = \ln\big(h(x)g(x)\big)$ soit :

$\ln\big(f(x)\big) = \ln\big(h(x)\big) + \ln\big(g(x)\big)$ ①.

❑ Comme g tend vers $\ell \neq 1$ en x_0, on peut alors écrire (cf. exercice 2.1b) qu'au voisinage de x_0 : $g(x) \neq 1$, et donc, comme au voisinage de x_0, $g(x) > 0$ et comme ln réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, toujours au voisinage de x_0 : $\ln\big(g(x)\big) \neq \ln 1$, i.e. : $\ln\big(g(x)\big) \neq 0$.

En divisant alors la relation ① par $\ln\big(g(x)\big) \neq 0$, on en déduit alors, toujours au voisinage de x_0 :

$\frac{\ln\big(f(x)\big)}{\ln\big(g(x)\big)} = 1 + \frac{\ln\big(h(x)\big)}{\ln\big(g(x)\big)}$ ②.

❑ Or, on a : $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = 1$. Comme $\lim\limits_{x\to 1} \ln x = 0$, on en déduit alors : $\lim\limits_{x\to x_0} \ln\big(h(x)\big) = 0$. De plus, comme, au voisinage de x_0, on a : $g(x) > 0$ et comme g admet pour limite ℓ en x_0, le théorème de prolongement des inégalités nous permet d'écrire : $\ell \geq 0$. Deux cas se présentent alors :

– si $\ell > 0$, comme $\lim\limits_{x\to \ell} \ln x = \ln \ell$, on a : $\lim\limits_{x\to x_0} \ln\big(g(x)\big) = \ln \ell$; comme $\ell \neq 1$, on a alors : $\ln \ell \neq 0$, et donc : $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\ln\big(h(x)\big)}{\ln\big(g(x)\big)} = 0$,

– si $\ell = 0$, comme $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, on a : $\lim\limits_{x\to x_0} \ln\big(g(x)\big) = -\infty$, et donc : $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\ln\big(h(x)\big)}{\ln\big(g(x)\big)} = 0$.

Par passage à la limite dans la relation ②, on peut maintenant écrire, dans tous les cas de figure : $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\ln\big(f(x)\big)}{\ln\big(g(x)\big)} = 1$, et donc :

$$\boxed{\ln\big(f(x)\big) \underset{x_0}{\sim} \ln\big(g(x)\big)}$$

☞ La composition d'équivalents, interdite dans le cas général, est néanmoins possible dans certains cas particuliers (qu'il faut alors redémontrer) : le passage à la valeur absolue, à une puissance réelle strictement positive, à l'exponentielle (lorsque la limite de la différence des deux fonctions est nulle) et enfin au logarithme (lorsque les deux fonctions sont strictement positives et de limite commune différente de 1).

SO EO

4. Etude de continuité, de dérivabilité

1) Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(1) = 3 \\ \forall x \in]1, +\infty[, f(x) = \dfrac{(x+2)(x-1)}{x \ln x}. \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $[1, +\infty[$.

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = \dfrac{x^2 e^{-x}}{1 - e^{-x}}. \end{cases}$$

a) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^+$.

b) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

1) f est continue sur $]1, +\infty[$ en tant que produit et quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues sur $]1, +\infty[$.

De plus, au voisinage de 1, on a : $\ln x \underset{1}{\sim} x - 1$. On en déduit alors : $f(x) \underset{1}{\sim} \dfrac{x+2}{x}$, et donc : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3 = f(1)$. f est donc également continue en 1. On peut désormais conclure :

$$\boxed{f \text{ est continue sur } [1, +\infty[}$$

☞ Pour montrer qu'une fonction f est continue sur un intervalle I (avec problème en x_0), il faut montrer successivement que :

– f est continue sur tout intervalle de $I \setminus \{x_0\}$ en tant que "cocktail" (somme, produit, quotient dont le dénominateur ne s'annule pas, composée...) de fonctions continues sur tout intervalle de $I \setminus \{x_0\}$, et :

– $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2) a) g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme, produit et quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, au voisinage de 0, on a : $x^2 e^{-x} \underset{0}{\sim} x^2$ et $e^{-x} - 1 \underset{0}{\sim} -x$. On en déduit alors : $g(x) \underset{0}{\sim} x$, et donc : $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0 = g(0)$. g est donc également continue en 0. On peut désormais conclure :

$$\boxed{g \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+}$$

b) g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme, produit et quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \dfrac{x e^{-x}}{1 - e^{-x}}$, soit, comme $x e^{-x} \underset{0}{\sim} x$ et $e^{-x} - 1 \underset{0}{\sim} -x$:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 1.$

g est donc également dérivable en 0 (de nombre dérivé $g'(0) = 1$). On peut désormais conclure :

$$\boxed{g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^+}$$

☞ Pour montrer qu'une fonction f est dérivable en x_0, il faut montrer que la fonction $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (rapport de Newton) admet une limite finie en x_0.

☞ Pour montrer qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle I (avec problème en x_0), il faut montrer successivement que :

– f est dérivable sur tout intervalle de $I \setminus \{x_0\}$ en tant que "cocktail" (somme, produit, quotient dont le dénominateur ne s'annule pas, composée...) de fonctions dérivables sur tout intervalle de $I \setminus \{x_0\}$, et :

– f est dérivable en x_0.

☞ Pour montrer qu'une fonction $g \circ f$ est continue (ou dérivable ou de classe C^n...) sur un intervalle I, il faut veiller à démontrer que f est continue (ou dérivable ou de classe C^n...) sur I, puis que g est continue (ou dérivable ou de classe C^n...) sur f(I).

SO EO

5. Théorème des valeurs intermédiaires & Co.

1) Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $f(x) = (4x^2 - x)\cos x - 1$. Montrer que f s'annule au moins une fois sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = 1 + x - x\ln x$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = 2 + \frac{2\ln x}{1 + x}$. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1) f est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ en tant que somme et produit de fonctions continues sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Comme $f(0) = -1$ et $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}\,(\pi^2 - \pi)}{8} - 1$ (soit $f\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$), on a : $f(0)f\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet alors d'écrire : $\exists c \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, $f(c) = 0$, et donc :

$$\boxed{f \text{ s'annule au moins une fois sur } \left]0, \frac{\pi}{4}\right[}$$

☞ Pour montrer qu'une fonction s'annule au moins une fois sur un intervalle, il faut généralement utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

2) f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme et produit de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = -\ln x$. On en déduit alors : $\begin{cases} \forall x \in]0, 1[, f'(x) > 0 \\ \forall x \in]1, +\infty[, f'(x) < 0 \end{cases}$. f est donc strictement croissante sur]0, 1] et strictement décroissante sur [1, +∞[.

Or, on a : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ et $f(1) = 2$. f étant strictement croissante sur]0, 1], on en déduit alors que : $\forall x \in]0, 1]$, $1 < f(x) \leq 2$, et donc que f ne s'annule pas sur]0, 1].

De même, comme $f(1) = 2$, comme $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et comme f est continue et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$, f réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $f(]1, +\infty[) =]-\infty, 2[$. Or, $0 \in]-\infty, 2[$. On en déduit alors :

$\exists! c \in]1, +\infty[, f(c) = 0$.

Comme f ne s'annule pas sur $]0, 1]$ et comme $\exists! c \in]1, +\infty[, f(c) = 0$, on peut désormais conclure :

$$\boxed{\text{L'équation } f(x) = 0 \text{ admet une unique solution sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

☞ Soient λ un réel et I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Pour montrer que $\exists! c \in I, f(c) = \lambda$, il faut généralement montrer que f est continue et strictement monotone sur I, donc que f réalise une bijection de I sur $f(I)$. Comme $\lambda \in f(I)$, on en déduit alors le résultat recherché (attention aux cas où il convient au préalable de découper l'intervalle I en plusieurs intervalles pour que f soit strictement monotone sur chaque intervalle puis de montrer que l'équation $f(x) = \lambda$ n'admet de solution que sur un seul de ces intervalles).

3) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = f(x) - x = 2 + \dfrac{2\ln x}{1+x} - x$. g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme, produit et quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g'(x) = \frac{\dfrac{2(x+1)}{x} - 2\ln x}{(x+1)^2} - 1 \quad \text{soit :}$$

$$= \frac{2(x+1) - 2x\ln x - x(x+1)^2}{x(x+1)^2}.$$

On en déduit alors : $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2(x+1) - 2x\ln x - x(x+1)^2 \geq 0$. Soit maintenant h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $h(x) = 2(x+1) - 2x\ln x - x(x+1)^2$. h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme et produit de fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $h'(x) = -2\ln x - (x+1)^2 - 2x(x+1)$ d'où :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $h''(x) = -\dfrac{2}{x} - 2(x+1) - 2x - 2(x+1)$ et donc :

$$= -\frac{6x^2 + 4x + 2}{x}.$$

☞ Lors l'étude d'une fonction f, si l'on est amené à étudier le signe de la dérivée f', il faut déterminer une condition nécessaire et suffisante pour laquelle $f'(x) \geq 0$ (ou $f'(x) \leq 0$).
Lorsque l'expression de f' comporte un dénominateur de signe constant, il est généralement plus aisé d'étudier le signe de la fonction auxiliaire h égale au numérateur de f'.

Comme $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $6x^2 + 4x + 2 > 0$ (fonction polynôme de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif et dont le coefficient dominant est positif), on en déduit alors que :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $h''(x) < 0$.

Les limites de h et de h' aux bornes de son ensemble de définition étant évidentes, on en déduit alors le tableau de variations de h :

x	0		α		1		$+\infty$
$h''(x)$		$-$		$-$		$-$	
h'	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-8	$\searrow$	$-\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
h	2	$\nearrow$	$h(\alpha)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

(Comme h' est continue et strictement décroissante sur $]0, 1]$ avec $\lim\limits_{x \to 0} h'(x) = +\infty$ et $h'(1) = -8$, h' réalise une bijection de $]0, 1[$ sur $h'(]0, 1[) =]-8, +\infty[$. Or, $0 \in]-8, +\infty[$. On en déduit alors : $\exists! \alpha \in]0, 1[, h'(\alpha) = 0$).

Les limites de g aux bornes de son ensemble de définition étant évidentes, on peut maintenant dresser le tableau de variations de g :

x	0		1		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

g étant continue et strictement croissante sur $]0, 1]$ avec $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$ et $g(1) = 1$, g réalise une bijection de $]0, 1[$ sur $g(]0, 1[) =]-\infty, 1[$. Or, $0 \in]-\infty, 1[$. On en déduit alors : $\exists! c_1 \in]0, 1[, g(c_1) = 0$.

g étant continue et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ et $g(1) = 1$, g réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $g(]1, +\infty[) =]-\infty, 1[$. Or, $0 \in]-\infty, 1[$. On en déduit alors : $\exists! c_2 \in]1, +\infty[, g(c_2) = 0$.

On peut maintenant écrire que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}_+^*$, et donc que :

$$\boxed{\text{L'équation } f(x) = x \text{ admet deux solutions sur } \mathbb{R}_+^*}$$

☞ Noter que pour toute fonction f, les solutions de l'équation $f(x) = x$ sont appelés les "points fixes" de f.

☞ Pour déterminer le nombre de solutions d'une équation du type $f(x) = x$, il faut appliquer la méthode de la question précédente à la fonction $g = f - id$.

SO EO

★ 6. Quelques propriétés utiles

1) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que si f et g sont deux fonctions de même monotonie respectivement sur I et $J = f(I)$, alors $g \circ f$ est croissante sur I ; et si f et g sont de monotonies différentes respectivement sur I et $J = f(I)$, alors $g \circ f$ est décroissante sur I.

2) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que si f est une fonction paire, alors f' est impaire ; et si f est impaire, alors f' est paire.

b) Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que si f est une fonction périodique de période T, alors f' est périodique de période T.

3) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que f est lipschitzienne sur I si : $\exists k \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

a) Montrer que toute fonction lipschitzienne sur I est continue sur I.

b) Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Montrer que toute fonction de classe C^1 sur $[a, b]$ est lipschitzienne sur $[a, b]$.

4) a) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et f une fonction continue sur I telle que $f \neq 0$. Montrer qu'il existe un intervalle J non réduit à un point et inclus dans I tel que : $\forall x \in J, f(x) \neq 0$.

b) Soient n un entier naturel non nul, I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ n points distincts de I et f une fonction continue sur I telle que $\forall x \in I \setminus \{x_i, i \in [\![1, n]\!]\}, f(x) = 0$. Montrer que : $\forall x \in I, f(x) = 0$.

c) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et f une fonction continue sur I telle que $\forall x \in I, f(x) \neq 0$. Montrer que : $\forall x \in I, f(x) > 0$ ou $\forall x \in I, f(x) < 0$.

1) ▪ ❏ Soient f et g deux fonctions croissantes respectivement sur I et J. On a alors :

– $\forall (x, y) \in J^2$, $x < y$, $g(x) \leq g(y)$, et :

– $\forall (x, y) \in I^2$, $x < y$, $f(x) \leq f(y)$.

Comme $J = f(I)$, on en déduit alors, en composant cette dernière relation par g :

$\forall (x, y) \in I^2$, $x < y$, $g\big(f(x)\big) \leq g\big(f(y)\big)$ i.e. :

$\forall (x, y) \in I^2$, $x < y$, $(g \circ f)(x) \leq (g \circ f)(y)$.

$g \circ f$ est donc croissante sur I.

☞ Se souvenir qu'une fonction f est croissante sur I si $\forall (x, y) \in I^2$, $x < y$, $f(x) \leq f(y)$. L'étude du signe de la dérivée (effectuée dans la grande majorité des cas) n'est à utiliser qu'en second lieu, et en tout état de cause uniquement lorsque l'on possède une expression explicite de la fonction f, laquelle doit être dérivable sur I.

❏ Soient maintenant f et g deux fonctions décroissantes respectivement sur I et J. On a alors :

– $\forall (x, y) \in J^2$, $x < y$, $g(x) \geq g(y)$, et :

– $\forall (x, y) \in I^2$, $x < y$, $f(x) \geq f(y)$.

Comme $J = f(I)$, on en déduit alors, en composant cette dernière relation par g :

$\forall (x, y) \in I^2$, $x < y$, $g\big(f(x)\big) \leq g\big(f(y)\big)$ i.e. :

$\forall (x, y) \in I^2$, $x < y$, $(g \circ f)(x) \leq (g \circ f)(y)$.

$g \circ f$ est donc croissante sur I.

On peut alors conclure :

Si f et g sont deux fonctions de même monotonie respectivement sur I et f(I), alors $g \circ f$ est croissante sur I.

▪ ❏ Soient maintenant f et g deux fonctions respectivement croissante sur I et décroissante sur J. On a alors :

– $\forall (x, y) \in J^2$, $x < y$, $g(x) \geq g(y)$, et :

– $\forall (x, y) \in I^2$, $x < y$, $f(x) \leq f(y)$.

Comme $J = f(I)$, on en déduit alors, en composant cette dernière relation par g :

$\forall (x, y) \in I^2$, $x < y$, $g\big(f(x)\big) \geq g\big(f(y)\big)$ i.e. :

$\forall (x, y) \in I^2$, $x < y$, $(g \circ f)(x) \geq (g \circ f)(y)$.

$g \circ f$ est donc décroissante sur I.

❏ Soient enfin f et g deux fonctions respectivement décroissante sur I et croissante sur J. On a alors :

– $\forall (x, y) \in J^2$, $x < y$, $g(x) \leq g(y)$, et :

– $\forall (x, y) \in I^2$, $x < y$, $f(x) \geq f(y)$.

Comme $J = f(I)$, on en déduit alors, en composant cette dernière relation par g :

$\forall (x, y) \in I^2$, $x < y$, $g\big(f(x)\big) \geq g\big(f(y)\big)$ i.e. :

$\forall (x, y) \in I^2$, $x < y$, $(g \circ f)(x) \geq (g \circ f)(y)$.

$g \circ f$ est donc décroissante sur I.

On peut alors conclure :

Si f et g sont deux fonctions de monotonies différentes respectivement sur I et f(I), alors $g \circ f$ est décroissante sur I.

☞ Se souvenir que si f et g sont de même monotonie respectivement sur I et f(I), alors $g \circ f$ est croissante sur I, que si f et g sont de monotonies différentes respectivement sur I et f(I), alors $g \circ f$ est décroissante sur I (démonstrations à connaître).

2) a) ▪ Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, f est définie sur $\mathbb{R}$. Si f est une fonction paire, on a alors :

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$ soit, en dérivant cette relation, f étant dérivable sur $\mathbb{R}$:

$\forall x\in\mathbb{R}$, $-f'(-x) = f'(x)$ i.e. :

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(-x) = -f'(x)$ d'où la conclusion :

$$\boxed{\text{Si f est paire, alors f' est impaire}}$$

▪ De même, si f est une fonction impaire, on a :

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$ soit, en dérivant cette relation, f étant dérivable sur $\mathbb{R}$:

$\forall x\in\mathbb{R}$, $-f'(-x) = -f'(x)$ i.e. :

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(-x) = f'(x)$ d'où la conclusion :

$$\boxed{\text{Si f est impaire, alors f' est paire}}$$

☞ Se souvenir que pour toute fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, si f est paire, alors f' est impaire ; si f est impaire, alors f' est paire (démonstrations à connaître).

b) Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, f est définie sur $\mathbb{R}$. Comme f est périodique de période T, on peut alors écrire :

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$ soit, en dérivant cette relation, f étant dérivable sur $\mathbb{R}$:

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x+T) = f'(x)$ d'où la conclusion :

$$\boxed{\text{Si f est périodique de période T, alors f' est également périodique de période T}}$$

☞ Se souvenir que pour toute fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, si f est périodique de période T, alors f' est également périodique de période T (démonstration à connaître).

3) a) Soit f une fonction lipschitzienne sur I. On peut écrire : $\exists k\in\mathbb{R}^{*}_{+}$, $\forall (x, y)\in I^2$, $|f(x)-f(y)| \leq k|x-y|$. On en déduit alors : $\forall x_0\in I$, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x\in I$, $|x-x_0| < \frac{\varepsilon}{k}$, $|f(x)-f(x_0)| \leq \varepsilon$, soit, d'après la définition de la continuité d'une fonction en un point : pour tout $x_0\in I$, f est continue en x_0, et donc : f est continue sur I.

On peut maintenant conclure :

$$\boxed{\text{Toute fonction lipschitzienne sur I est continue sur I}}$$

b) Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$. f' est continue sur $[a, b]$, donc bornée sur ce segment. On en déduit alors : $\exists M\in\mathbb{R}^{*}_{+}$, $\forall x\in[a, b]$, $|f'(x)| \leq M$.

☞ Se souvenir que **toute fonction continue sur un segment est bornée sur ce segment** (et atteint ses bornes), mais que toute fonction continue sur un intervalle non fermé n'est pas nécessairement bornée sur cet intervalle (un intervalle peut être ouvert, semi-ouvert ou fermé : dans ce dernier cas et seulement celui-ci, c'est un segment).

Or, f étant de classe C^1 sur $[a, b]$, on peut écrire que f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Comme $\exists M\in\mathbb{R}$, $\forall t\in[a, b]$, $|f'(t)| \leq M$, l'inégalité des accroissements finis nous permet alors d'écrire :

$\forall (x, y)\in[a, b]^2$, $x \neq y$, $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq M$ soit, en multipliant cette relation par $|x-y| > 0$ ($x \neq y$) :

$\forall (x, y)\in[a, b]^2$, $x \neq y$, $|f(x)-f(y)| \leq M|x-y|$ et donc, cette relation étant également vérifiée pour $x = y$:

$\forall (x, y)\in[a, b]^2$, $|f(x)-f(y)| \leq M|x-y|$.

On peut maintenant conclure :

$$\boxed{\text{Toute fonction de classe } C^1 \text{ sur } [a, b] \text{ est lipschitzienne sur } [a, b]}$$

☞ Se souvenir de la définition d'une fonction lipschitzienne, mais aussi que toute fonction lipschitzienne sur un intervalle I est continue sur I et que toute fonction de classe C^1 sur un segment $[a, b]$ est lipschitzienne sur ce segment (démonstrations à connaître).

4) a) Si $f \neq 0$, on a : $\exists x_0 \in I$, $f(x_0) \neq 0$. Comme f est continue sur I, on peut alors écrire :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \eta, |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ soit, en posant $\varepsilon = |f(x_0)|$:

$\exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \eta, |f(x) - f(x_0)| < |f(x_0)|$ i.e. :

$\exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \eta, f(x_0) - |f(x_0)| < f(x) < f(x_0) + |f(x_0)|$.

Deux cas se présentent alors :

– si $f(x_0) > 0$, on a alors : $f(x_0) - |f(x_0)| = 0$, et donc : $\exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \eta, f(x) > 0$.

– si $f(x_0) < 0$, on a alors : $f(x_0) + |f(x_0)| = 0$, et donc : $\exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \eta, f(x) < 0$.

On en déduit alors, dans tous les cas de figure :

$\exists \eta > 0, \forall x \in (I \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[), f(x) \neq 0$.

L'intervalle $I \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ n'étant pas réduit à un point (en effet, $x_0 \in (I \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[)$ et I n'est pas réduit à un point, donc contient un intervalle à gauche ou à droite en x_0), on peut alors conclure :

$$\boxed{\text{Il existe un intervalle J non réduit à un point et inclus dans I tel que : } \forall x \in J, f(x) \neq 0}$$

☞ Se souvenir que si f est une fonction continue, non identiquement nulle sur un intervalle I (i.e. s'il existe au moins un point de I où f ne s'annule pas), alors il existe un intervalle (non réduit à un point) inclus dans I sur lequel f ne s'annule pas (démonstration à connaître).

b) Supposons que : $\exists x_0 \in I$, $f(x_0) \neq 0$. D'après les résultats de la question précédente, on peut écrire qu'il existe un intervalle inclus dans I et non réduit à un point (donc contenant une infinité de points) sur lequel f ne s'annule pas.

Or, d'après l'énoncé, il existe un nombre fini n de points pour lesquels f ne s'annule pas (les $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$). On aboutit ainsi à une contradiction. On peut alors conclure :

$$\boxed{\forall x \in I, f(x) = 0}$$

☞ Se souvenir que si f est une fonction continue sur un intervalle I, f ne peut être nulle (ou constante) sur I privé d'un nombre fini de points en lesquels f n'est pas nulle : soit il existe un intervalle $J \subset I$ sur lequel f n'est pas nulle (cf. **4a**), soit f est identiquement nulle sur I (cf. **4b**).

c) Supposons que $\exists x_1 \in I$, $f(x_1) > 0$ et $\exists x_2 \in I$, $f(x_2) < 0$. Comme f est continue sur I et comme $f(x_1)f(x_2) < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'écrire : $\exists c \in I$, $f(c) = 0$. Or, comme $\forall x \in I$, $f(x) \neq 0$, on aboutit ainsi à une contradiction et on peut alors conclure :

$$\boxed{\forall x \in I, f(x) > 0 \text{ ou } \forall x \in I, f(x) < 0}$$

☞ Se souvenir que si f est une fonction continue qui ne s'annule pas sur un intervalle I, alors f est de signe constant sur I.

SO EO

7. Dérivations successives

Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la dérivée $n^{\text{ème}}$ des fonctions :

1) $x \mapsto x^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$),

2) $x \mapsto \ln x$,

3) $x \mapsto \frac{1}{x}$,

4) $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$,

5) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$,

6) $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^p}$ ($p \in \mathbb{N}^*$).

1) Soit $f_p : x \mapsto x^p$. f_p est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_p'(x) = p\,x^{p-1}$, d'où, en itérant cette relation :

$$\boxed{\forall n \in [\![1, p]\!],\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_p^{(n)}(x) = \frac{p!}{(p-n)!}x^{p-n} \quad \text{et} \quad \forall n \in [\![p+1, +\infty[\![,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_p^{(n)}(x) = 0}$$

2) Soit $f : x \mapsto \ln x$. f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{1}{x}$, d'où, en itérant cette relation :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}}$$

3) Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x}$. f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, et on a : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, d'où, en itérant cette relation :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = (-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}}$$

☞ Noter qu'une fonction f ne peut être continue, dérivable, de classe C^n... que sur des intervalles de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire sur des parties de $\mathbb{R}$ sans "trou" (c'est pour cela que l'on distingue ici les cas $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ lorsque l'on dit que f est de classe C^∞ : une fonction ne peut en effet être continue, dérivable, de classe C^n... sur $\mathbb{R}^*$).

En revanche, on peut écrire l'expression d'une fonction ou de sa dérivée $n^{\text{ème}}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) sur la réunion de ces intervalles (ici, $\mathbb{R}^*$).

☞ Se souvenir de la forme des dérivées $n^{\text{ème}}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) des fonctions puissance p ($p \in \mathbb{N}^*$), ln et inverse.

☞ Pour déterminer la dérivée $n^{\text{ème}}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) d'une fonction "simple", on calcule généralement f', on itère la relation obtenue et on obtient ainsi une expression pour $f^{(n)}$ que l'on conjecture alors. Lorsque cette conjecture n'est pas évidente, il faut alors la démontrer par récurrence.

4) ▪ Soit $f : x \mapsto \cos x$. f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} f'(x) = -\sin x \\ f''(x) = -\cos x \\ f^{(3)}(x) = \sin x \\ f^{(4)}(x) = \cos x \end{cases}$. A l'aide d'une récurrence immédiate, on en déduit alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} f^{(4n+1)}(x) = -\sin x \\ f^{(4n+2)}(x) = -\cos x \\ f^{(4n+3)}(x) = \sin x \\ f^{(4n+4)}(x) = \cos x \end{cases}$.

Comme $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\begin{cases} -\sin x = \cos\left(x + \dfrac{(4n+1)\pi}{2}\right) \\ -\cos x = \cos\left(x + \dfrac{(4n+2)\pi}{2}\right) \\ \sin x = \cos\left(x + \dfrac{(4n+3)\pi}{2}\right) \\ \cos x = \cos\left(x + \dfrac{(4n+4)\pi}{2}\right) \end{cases}$, on peut désormais conclure :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)}$$

■ Soit $g : x \mapsto \sin x$. g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et en raisonnant comme précédemment (ou en remarquant que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\sin x = \cos\left(x + \dfrac{(4n+3)\pi}{2}\right)$), on peut écrire :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)}$$

☞ Se souvenir de la forme générale des dérivées $n^{\text{ème}}$ ($n\in\mathbb{N}^*$) des fonctions sin et cos.

5) Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$. f est de classe C^∞ sur $]-1, +\infty[$ en tant que quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions de classe C^∞ sur $]-1, +\infty[$, et on a :

$\forall x\in]-1, +\infty[$, $f(x) = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$ soit, en dérivant cette relation :

$\forall x\in]-1, +\infty[$, $f'(x) = -\dfrac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$ et en itérant cette relation :

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in]-1, 1[$, $f^{(n)}(x) = \left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(-\dfrac{3}{2}\right)\dots\left(-\dfrac{2n-1}{2}\right)(1+x)^{-\frac{2n+1}{2}}$ soit encore :

$$= (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n\, n!}\,\frac{1}{2^n}\,(1+x)^{-n-\frac{1}{2}}$$ et donc :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in]-1, +\infty[,\ f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{C_{2n}^n}{4^n}\,\frac{n!}{(1+x)^{n+\frac{1}{2}}}}$$

6) Soit $f_p : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^p}$. f est de classe C^∞ sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ en tant que quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions de classe C^∞ sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$, et on a :

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f_p(x) = (1-x)^{-p}$ soit, en dérivant cette relation :

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f_p'(x) = p(1-x)^{-p-1}$ et en itérant cette relation :

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f_p^{(n)}(x) = p(p+1)\dots(p+n-1)\,(1-x)^{-(p+n)}$ soit encore :

$$= \frac{(n+p-1)!}{(p-1)!}\,\frac{1}{(1-x)^{n+p}}$$ et donc :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\},\ f_p^{(n)}(x) = C_{n+p-1}^{p-1}\,\frac{n!}{(1-x)^{n+p}}}$$

☞ Noter que pour parvenir à dériver des fonctions de puissances non entières de $P(x)$ (où P est un polynôme), il faut toujours penser à les écrire sous la forme $P^{\alpha}(x)$ ($\alpha \in \mathbb{R}^*$), expression dont la dérivée est $\alpha P^{\alpha-1}(x)P'(x)$.

SO EO

8. Formule de Leibniz. Inégalité et théorème des accroissements finis. Théorème de Rolle. Fonctions convexes

1) (SO) A l'aide de la formule de Leibniz, déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de la dérivée $n^{\text{ème}}$ des fonctions :

a) $f : x \mapsto e^{2x}\cos(2x)$,

b) $g_p : x \mapsto x^p \ln x$ ($p \in \mathbb{N}^*$).

2) Soit p un entier supérieur ou égal à 2. Montrer, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{(k+1)^p} \leq \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{k^{p-1}} - \frac{1}{(k+1)^{p-1}}\right) \leq \frac{1}{k^p}.$$

3) (SO) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions telle que f_0 soit de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f_{n+1}(x) = f_n(x+1) - f_n(x).$$

a) Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \exists c_k(x) \in \,]x, x+1[, \ f_{k+1}(x) = f_k'\big(c_k(x)\big).$$

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \exists \xi_n(x) \in \,]x, x+n[, \ f_n(x) = f_0^{(n)}\big(\xi_n(x)\big).$$

4) (SO) Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2, $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ n réels distincts rangés par ordre croissant et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i).$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que f' admet au moins $n-1$ racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

5) Montrer que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \ \frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x.$$

1) a) Les fonctions $f_1 : x \mapsto e^{2x}$ et $f_2 : x \mapsto \cos(2x)$ étant de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, elles sont n fois dérivables sur $\mathbb{R}$. La formule de Leibniz nous permet alors d'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f_1^{(n-k)}(x)\, f_2^{(k)}(x)$$ soit (cf. exercice 7.4) :

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \,(2^{n-k}e^{2x})\left[2^k\cos\left(2x + \frac{k\pi}{2}\right)\right]$$ i.e. :

$$= 2^n e^{2x}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos\left(2x + \frac{k\pi}{2}\right)$$ soit encore, à l'aide des formules d'Euler :

$$= 2^n e^{2x}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \,\frac{e^{i\left[2x+\frac{k\pi}{2}\right]} + e^{-i\left[2x+\frac{k\pi}{2}\right]}}{2}$$ i.e. :

$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = 2^{n-1}e^{2x}\left[e^{i2x}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^k + e^{-i2x}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)^k\right]$ et donc, d'après la formule du binôme de Newton :

$$= 2^{n-1}e^{2x}\left[e^{i2x}\left(1+e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^n + e^{-i2x}\left(1+e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)^n\right]$$ soit encore, comme $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ et $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$:

$$= 2^{n-1}e^{2x}\left(e^{i2x}(1+i)^n + e^{-i2x}(1-i)^n\right)$$ et comme $\begin{cases}1+i=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\\ 1-i=\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}\end{cases}$:

$$= 2^{\frac{3n}{2}}e^{2x}\,\frac{e^{i2x}e^{i\frac{n\pi}{4}} + e^{-i2x}e^{-i\frac{n\pi}{4}}}{2}$$ i.e. :

$$= 2^{\frac{3n}{2}}e^{2x}\,\frac{e^{i\left[2x+\frac{n\pi}{4}\right]} + e^{-i\left[2x+\frac{n\pi}{4}\right]}}{2}$$ soit enfin, d'après les formules d'Euler :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = 2^{\frac{3n}{2}}e^{2x}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{4}\right)}$$

☞ Eviter l'écriture incorrecte $(e^{2x})^{(k)}$ ou $\left(\cos(2x)\right)^{(k)}$ ou plus généralement $\left(f(x)\right)^{(k)}$. Il vaut mieux utiliser l'écriture différentielle (avec les "d" : on écrira par exemple $\dfrac{d^k e^{2x}}{dx^k}$ au lieu de $(e^{2x})^{(k)}$) ou plus simplement comme ici, nommer ces fonctions (par exemple f_1 et f_2).

En effet, $f(x)$ ne représente pas la fonction f (écrire "la fonction $f(x)$" est une ineptie) mais la valeur de la fonction f en x, c'est-à-dire un nombre réel.

b) Les fonctions $h_1 : x\mapsto x^p$ et $h_2 : x\mapsto \ln x$ étant de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, elles sont n fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ avec (cf. exercices 7.1 et 7.2) :

– $\forall k\in\mathbb{N},\ k\le p,\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ h_1^{(k)}(x) = \dfrac{p!}{(p-k)!}x^{p-k}$ et $\forall k\in\mathbb{N},\ k>p,\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ h_1^{(k)}(x) = 0$, et :

– $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ h_2^{(0)}(x) = \ln x$ et $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ h_2^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$.

La formule de Leibniz nous permet alors d'écrire : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ g_p^{(0)}(x) = x^p\ln x$, et :

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ g_p^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}C_n^k h_1^{(n-k)}(x)\,h_2^{(k)}(x)$ soit, en isolant le terme en $k=0$:

$$= h_1^{(n)}(x)\,h_2^{(0)}(x) + \sum_{k=1}^{n}C_n^k h_1^{(n-k)}(x)\,h_2^{(k)}(x).$$

On peut maintenant écrire, en distinguant les cas $n\le p$ et $n>p$:

– $\forall n\in[1,p],\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ g_p^{(n)}(x) = h_1^{(n)}(x)\,h_2^{(0)}(x) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}C_n^k h_1^{(n-k)}(x)\,h_2^{(k)}(x)$ soit :

$$= \frac{p!}{(p-n)!}x^{p-n}\ln x + \sum_{k=1}^{n}C_n^k\,\frac{p!}{(p-n+k)!}\,x^{p-n+k}\,\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$$ i.e. :

$$= \frac{p!}{(p-n)!}x^{p-n}\ln x + n!\sum_{k=1}^{n}C_p^{n-k}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^{p-n}$$ et donc :

$$= x^{p-n}\left[\frac{p!}{(p-n)!}\ln x + n!\sum_{k=1}^{n}C_p^{n-k}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right]$$ et :

– $\forall n \in [p+1, +\infty[$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g_p^{(n)}(x) = h_1^{(n)}(x)\, h_2^{(0)}(x) + \sum_{k=1}^{n} C_n^k\, h_1^{(n-k)}(x)\, h_2^{(k)}(x)$

et comme $\forall k \in [0, n-p-1]$, $h_1^{(n-k)} = 0$:

$$= \sum_{k=n-p}^{n} C_n^k \frac{p!}{(p-n+k)!} x^{p-n+k} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k} \quad \text{i.e. :}$$

$$= \frac{n!}{x^{n-p}} \sum_{k=n-p}^{n} C_p^{n-k} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

On peut désormais conclure :

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g_p^{(0)}(x) = x^p \ln x, \\ \forall n \in [1, p],\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g_p^{(n)}(x) = x^{p-n}\left[\dfrac{p!}{(p-n)!}\ln x + n! \displaystyle\sum_{k=1}^{n} C_p^{n-k} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right], \\ \forall n \in [p+1, +\infty[,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g_p^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{x^{n-p}} \displaystyle\sum_{k=n-p}^{n} C_p^{n-k} \frac{(-1)^{k-1}}{k}. \end{array}}$$

☞ Ne pas oublier que pour calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ d'un produit, il faut utiliser la formule de Leibniz. La fonction qui doit alors être dérivée k fois dans le produit devant être celle dont l'expression de la dérivée $k^{\text{ème}}$ est la plus "compliquée".

2) Soit f_p la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_p(x) = -\frac{1}{(p-1)x^{p-1}}$. f_p est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, continue sur $[k, k+1]$ et dérivable sur $]k, k+1[$.

De plus, on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_p'(x) = \frac{1}{x^p}$. f_p' étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut alors écrire :

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in]k, k+1[$, $f_p'(k+1) \leq f_p'(x) \leq f_p'(k)$ ce qui s'écrit encore :

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in]k, k+1[$, $\frac{1}{(k+1)^p} \leq f_p'(x) \leq \frac{1}{k^p}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité des accroissements finis appliquée à f_p sur $[k, k+1]$ nous permet alors d'écrire :
$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{(k+1)^p} \leq f_p(k+1) - f_p(k) \leq \frac{1}{k^p}$, i.e. :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{(k+1)^p} \leq \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{k^{p-1}} - \frac{1}{(k+1)^{p-1}}\right) \leq \frac{1}{k^p}}$$

NB : On aurait également pu choisir la fonction $f_p : x \mapsto \frac{1}{x^{p-1}}$.

☞ Avant d'utiliser l'inégalité des accroissements finis pour montrer que $m \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq M$, il faut tout d'abord déterminer a, b et f (en regardant attentivement chacun des membres de l'inégalité). Après avoir montré que f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, on calcule alors f' que l'on encadre sur $]a, b[$ puis on applique l'inégalité des accroissements finis.

3) a) Comme f_0 est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_{n+1} est définie par la relation : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{n+1}(x) = f_n(x+1) - f_n(x)$, à l'aide d'une récurrence immédiate, on démontre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k étant de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, f_k est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, le théorème des accroissements finis appliqué à f_k sur $[x, x+1]$ nous permet alors d'écrire : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists c_k(x) \in]x, x+1[$, $f_k(x+1) - f_k(x) = ((x+1) - x)\, f_k'(c_k(x))$, soit, en reconnaissant $f_{k+1}(x)$:

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \exists c_k(x) \in]x, x+1[,\ f_{k+1}(x) = f_k'(c_k(x))}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons par montée finie que : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \forall x \in \mathbb{R},\ \exists c_{n,k}(x) \in]x, x+k[,\ f_n(x) = f_{n-k}^{(k)}\big(c_{n,k}(x)\big)$.

• Au rang $k = 1$, d'après la question précédente, on peut écrire que :
$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists c_{n,1}(x) \in]x, x+1[,\ f_n(x) = f_{n-1}'\big(c_{n,1}(x)\big)$.

• Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ (si $n \geq 2$), supposons que $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists c_{n,k}(x) \in]x, x+k[,\ f_n(x) = f_{n-k}^{(k)}\big(c_{n,k}(x)\big)$. D'après la définition de la suite de fonctions $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$, on peut écrire : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_{n-k}(x) = f_{n-k-1}(x+1) - f_{n-k-1}(x)$, soit, en dérivant k fois cette relation, les fonctions en présence étant de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$:
$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{n-k}^{(k)}(x) = f_{n-k-1}^{(k)}(x+1) - f_{n-k-1}^{(k)}(x)$.

Comme pour tout $i \in \mathbb{N}$, f_i est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f_{n-k-1}^{(k)}$ est continue sur $[t, t+1]$ et dérivable sur $]t, t+1[$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, le théorème des accroissements finis appliqué à $f_{n-k-1}^{(k)}$ sur $[t, t+1]$ nous permet alors d'écrire :

$\forall t \in \mathbb{R},\ \exists c_t \in]t, t+1[,\ f_{n-k-1}^{(k)}(t+1) - f_{n-k-1}^{(k)}(t) = \big((t+1) - t\big)\, f_{n-k-1}^{(k+1)}(c_t)$ soit, en reconnaissant $f_{n-k}^{(k)}(t)$:

$\forall t \in \mathbb{R},\ \exists c_t \in]t, t+1[,\ f_{n-k}^{(k)}(t) = f_{n-k-1}^{(k+1)}(c_t)$ et en considérant cette relation en $t = c_{n,k}(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) :

$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists c_{n,k+1}(x) \in]c_{n,k}(x), c_{n,k}(x)+1[,\ f_{n-k}^{(k)}\big(c_{n,k}(x)\big) = f_{n-k-1}^{(k+1)}\big(c_{n,k+1}(x)\big)$

et comme $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = f_{n-k}^{(k)}\big(c_{n,k}(x)\big)$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ c_{n,k}(x) \in]x, x+k[$:

$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists c_{n,k+1}(x) \in]x, x+k+1[,\ f_n(x) = f_{n-k-1}^{(k+1)}\big(c_{n,k+1}(x)\big)$.

La propriété est donc bien vérifiée au rang $k+1$.

• Ainsi, on a bien : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \forall x \in \mathbb{R},\ \exists c_{n,k}(x) \in]x, x+k[,\ f_n(x) = f_{n-k}^{(k)}\big(c_{n,k}(x)\big)$.

On peut maintenant écrire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![1, n]\!],\ \forall x \in \mathbb{R},\ \exists c_{n,k}(x) \in]x, x+k[,\ f_n(x) = f_{n-k}^{(k)}\big(c_{n,k}(x)\big)$. En posant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\xi_n(x) = c_{n,n}(x)$, on peut désormais conclure, pour $k = n$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \exists \xi_n(x) \in]x, x+n[,\ f_n(x) = f_0^{(n)}\big(\xi_n(x)\big)}$$

4) f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme. On peut alors écrire que pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, f est continue sur $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ et dérivable sur $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ avec $\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ f(\alpha_i) = f(\alpha_{i+1}) = 0$.

Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, le théorème de Rolle appliqué à f sur $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ nous permet alors d'écrire :
$\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ \exists c_i \in]\alpha_i, \alpha_{i+1}[,\ f'(c_i) = 0$, d'où la conclusion :

$$\boxed{f' \text{ admet au moins } n-1 \text{ racines distinctes dans } \mathbb{R}}$$

☞ La méthode la plus classique pour montrer l'existence de racines de la dérivée ou des dérivées successives d'une fonction est l'emploi du théorème de Rolle.

☞ Se souvenir que lors de l'utilisation des trois grands théorèmes de dérivation (inégalité et théorème des accroissements finis, théorème de Rolle sur [a, b]), il faut toujours préciser au préalable que la fonction étudiée est continue sur le segment [a, b] et dérivable sur l'intervalle ouvert]a, b[.

5) La fonction sin est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, donc de classe C^2 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Or, on a : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \sin'' x = -\sin x$, d'où : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \sin'' x \leq 0$. La fonction sin est donc concave sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On en déduit alors que la courbe représentative de sin est en-dessous de chacune de ses tangentes sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Or, la tangente à la courbe représentative de sin en 0 est la droite d'équation : $y = \sin 0 + x \sin' 0 = x$.

On en déduit alors : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \sin x \leq x$.

De même, comme la fonction sin est concave sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, sa courbe représentative est au-dessus de chacune des cordes qu'elle sous-tend sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Or, la corde reliant les points $(0, \sin 0)$ et $\left(\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\pi}{2}\right)$ est la droite d'équation : $y = \sin 0 + \frac{\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0}{\frac{\pi}{2} - 0}(x - 0) = \frac{2x}{\pi}$. On en déduit alors : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$, d'où la conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x}$$

☞ Se souvenir (méthode extrêmement utile pour démontrer des inégalités de fonctions) que si f est une fonction convexe sur un intervalle I, sa courbe représentative est au-dessus de chacune de ses tangentes et en-dessous de chacune des cordes qu'elle sous-tend sur I (et inversement si f est concave).

☞ Il faut apprendre à reconnaitre des inégalités de convexité (ou de concavité) pour les fonctions usuelles (sin, cos, ln, exp...). On démontre ainsi que :

– $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x$,

– $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln x \leq x - 1$,

– $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 1 + x \leq e^x$.

S0

★ 9. Généralisations du théorème de Rolle

1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction de classe C^n, admettant $n + 1$ racines sur $]a, b[$. Démontrer que $f^{(n)}$ admet au moins une racine sur $]a, b[$.

2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction de classe C^n sur $[a, b]$ telle que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0$. Montrer que $f^{(n)}$ admet au moins n racines sur $]a, b[$.

3) (S❶) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $[\alpha, +\infty[$, dérivable sur $]\alpha, +\infty[$ et telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(\alpha)$. Montrer que f' admet au moins une racine sur $]\alpha, +\infty[$.

4) (S❷) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction de classe C^n sur $[a, +\infty[$, dérivable $n + 1$ fois sur $]a, +\infty[$ et telle que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f^{(k)}(x) = f^{(k)}(a) = 0$. Montrer que $f^{(n+1)}$ admet au moins $n + 1$ racines distinctes sur $]a, +\infty[$.

1) Soient $(x_{0,i})_{1 \leq i \leq n+1}$ les $n + 1$ racines de f rangées par ordre croissant. Montrons par montée finie que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f^{(k)}$ admet au moins $n - k + 1$ racines sur $\mathbb{R}$:

• Au rang $k = 0$, d'après l'énoncé, on peut écrire que $f^{(0)} = f$ admet au moins $n + 1$ racines sur $\mathbb{R}$.

• Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$, supposons que $f^{(k)}$ admette au moins $n - k + 1$ racines sur $\mathbb{R}$. Soient $(x_{k,i})_{1 \leq i \leq n-k+1}$ $n - k + 1$ des racines de $f^{(k)}$ rangées par ordre croissant.

f étant de classe C^n sur $\mathbb{R}$, on peut écrire que, pour tout $i \in [\![1, n-k]\!]$, $f^{(k)}$ est continue sur $[x_{k,i}, x_{k,i+1}]$, dérivable sur $]x_{k,i}, x_{k,i+1}[$ avec $f^{(k)}(x_{k,i}) = f^{(k)}(x_{k,i+1}) = 0$. Pour tout $i \in [\![1, n-k]\!]$, le théorème de Rolle appliqué à $f^{(k)}$ sur $[x_{k,i}, x_{k,i+1}]$ nous permet alors d'écrire que : $\forall i \in [\![1, n-k]\!]$, $\exists x_{k+1,i} \in]x_{k,i}, x_{k,i+1}[$, $f^{(k+1)}(x_{k+1,i}) = 0$, et donc que $f^{(k+1)}$ admet au moins $n - k = n - (k + 1) + 1$ racines sur $\mathbb{R}$.

• Ainsi, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f^{(k)}$ admet au moins $n - k + 1$ racines sur $\mathbb{R}$.

On peut maintenant conclure, pour $k = n$:

$$\boxed{f^{(n)} \text{ admet au moins une racine sur } \mathbb{R}}$$

2) Montrons par montée finie que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $f^{(k)}$ admet au moins k racines sur $]a, b[$:

• Au rang $k = 1$, f étant de classe C^n sur $[a, b]$, on peut écrire que f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Comme on a en outre $f(a) = f(b) = 0$, le théorème de Rolle appliqué à f sur $[a, b]$ nous permet alors d'écrire que : $\exists c \in]a, b[, f'(c) = 0$, et donc que f' admet au moins une racine sur $]a, b[$.

• Soit $k \in [\![1, n - 1]\!]$ (si $n \geq 2$), supposons que $f^{(k)}$ admette au moins k racines sur $]a, b[$. Soient $(x_{k,i})_{1 \leq i \leq k}$ k des racines de $f^{(k)}$ sur $]a, b[$ rangées par ordre croissant. Comme on a en outre $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0$, posons également $x_{k,0} = a$ et $x_{k,k+1} = b$.

f étant de classe C^n sur $[a, b]$, on peut écrire que, pour tout $i \in [\![0, k]\!]$, $f^{(k)}$ est continue sur $[x_{k,i}, x_{k,i+1}]$, dérivable sur $]x_{k,i}, x_{k,i+1}[$ avec $f^{(k)}(x_{k,i}) = f^{(k)}(x_{k,i+1}) = 0$. Pour tout $i \in [\![0, k]\!]$, le théorème de Rolle appliqué à $f^{(k)}$ sur $[x_{k,i}, x_{k,i+1}]$ nous permet alors d'écrire que : $\forall i \in [\![0, k]\!], \exists x_{k+1,i+1} \in]x_{k,i}, x_{k,i+1}[, f^{(k+1)}(x_{k+1,i+1}) = 0$, et donc que $f^{(k+1)}$ admet au moins $k + 1$ racines sur $]a, b[$.

• Ainsi, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $f^{(k)}$ admet au moins k racines sur $]a, b[$.

On peut maintenant conclure, pour $k = n$:

$$\boxed{f^{(n)} \text{ admet au moins } n \text{ racines sur }]a, b[}$$

3) Deux cas se présentent :

<u>i) si f est constante sur [α, +∞[</u>, alors $\forall x \in]\alpha, +\infty[, f'(x) = 0$. f' admet donc bien au moins une racine sur $]\alpha, +\infty[$.

<u>ii) si f n'est pas constante sur [α, +∞[</u>, on peut alors écrire : $\exists \beta \in]\alpha, +\infty[, f(\beta) \neq f(\alpha)$.

• Comme f est continue sur $[\alpha, +\infty[$, donc continue sur $[\alpha, \beta]$, et comme $\dfrac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$ appartient à l'intervalle ouvert d'extrémités $f(\alpha)$ et $f(\beta)$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'écrire :

$\exists c_1 \in]\alpha, \beta[, f(c_1) = \dfrac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$.

• De plus, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(\alpha)$, on peut écrire : $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in]\beta, +\infty[, x \geq A, \left|f(x) - f(\alpha)\right| < \varepsilon$, d'où :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \gamma \in]\beta, +\infty[, \forall x \in [\gamma, +\infty[, f(\alpha) - \varepsilon < f(x) < f(\alpha) + \varepsilon$.

En posant $\varepsilon = \left|\dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{2}\right|$, on peut alors écrire en distinguant les cas :

– si $f(\alpha) < f(\beta)$: $\exists \gamma \in]\beta, +\infty[, \forall x \in [\gamma, +\infty[, f(x) < f(\alpha) + \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{2}$, soit, comme $f(\alpha) < \dfrac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} < f(\beta)$:

$\exists \gamma \in]\beta, +\infty[, \forall x \in [\gamma, +\infty[, f(x) < \dfrac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} < f(\beta)$, et donc, pour $x = \gamma$: $\exists \gamma \in]\beta, +\infty[, f(\gamma) < \dfrac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} < f(\beta)$.

– si $f(\beta) < f(\alpha)$: $\exists \gamma \in]\beta, +\infty[, \forall x \in [\gamma, +\infty[, f(\alpha) - \dfrac{f(\alpha) - f(\beta)}{2} < f(x)$, soit, comme $f(\beta) < \dfrac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} < f(\alpha)$:

$\exists \gamma \in]\beta, +\infty[, \forall x \in [\gamma, +\infty[, f(\beta) < \dfrac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} < f(x)$, et donc, pour $x = \gamma$: $\exists \gamma \in]\beta, +\infty[, f(\beta) < \dfrac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} < f(\gamma)$.

Dans les deux cas de figure, comme f est continue sur $[\alpha, +\infty[$, donc continue sur $[\beta, \gamma]$ et comme $\dfrac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$ appartient à l'intervalle ouvert d'extrémités $f(\beta)$ et $f(\gamma)$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet à nouveau d'écrire : $\exists c_2 \in]\beta, \gamma[, f(c_2) = \dfrac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$.

• Ainsi, comme f est continue sur $[\alpha, +\infty[$ et dérivable sur $]\alpha, +\infty[$, donc continue sur $[c_1, c_2]$ et dérivable sur $]c_1, c_2[$ et comme $f(c_1) = f(c_2) = \dfrac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$, le théorème de Rolle appliqué à f sur $[c_1, c_2]$ nous permet alors d'écrire : $\exists c \in]c_1, c_2[, f'(c) = 0$, et donc, comme $]c_1, c_2[\subset]\alpha, +\infty[$: $\exists c \in]\alpha, +\infty[, f'(c) = 0$.

f' admet donc bien au moins une racine sur $]\alpha, +\infty[$.

On peut désormais conclure, dans tous les cas de figure :

$$\boxed{f' \text{ admet au moins une racine sur }]\alpha, +\infty[}$$

4) Montrons par montée finie que, pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, $f^{(k)}$ admet au moins k racines sur $]a, +\infty[$:

• Au rang k = 1, comme f est de classe C^n sur $[a, +\infty[$, on peut écrire que f est continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(a) = 0$. D'après les résultats de la question précédente appliqués à f sur $[a, +\infty[$, on peut alors écrire que f' admet au moins une racine sur $]a, +\infty[$.

• Soit $k \in [\![1, n]\!]$, supposons que $f^{(k)}$ admette au moins k racines sur $]a, +\infty[$. Soient alors $(x_{k,i})_{1 \le i \le k}$ k des racines de $f^{(k)}$ sur $]a, +\infty[$ rangées par ordre croissant. Comme on a en outre $f^{(k)}(a) = 0$, posons également $x_{k,0} = a$.

f étant de classe C^n sur $[a, +\infty[$ et n + 1 fois dérivable sur $]a, +\infty[$, on peut écrire que pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, $f^{(k)}$ est continue sur $[x_{k,i}, x_{k,i+1}]$, dérivable sur $]x_{k,i}, x_{k,i+1}[$ avec $f^{(k)}(x_{k,i}) = f^{(k)}(x_{k,i+1}) = 0$.

Pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, le théorème de Rolle appliqué à $f^{(k)}$ sur $[x_{k,i}, x_{k,i+1}]$ nous permet alors d'écrire que : $\forall i \in [\![0, k-1]\!], \exists x_{k+1,i+1} \in]x_{k,i}, x_{k,i+1}[, f^{(k+1)}(x_{k+1,i+1}) = 0$, et donc que $f^{(k+1)}$ admet au moins k racines distinctes sur $]a, x_{k,k}[$.

De plus, f étant de classe C^n sur $[a, +\infty[$ et n + 1 fois dérivable sur $]a, +\infty[$, $f^{(k)}$ est continue sur $[x_{k,k}, +\infty[$ et dérivable sur $]x_{k,k}, +\infty[$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f^{(k)}(x) = f^{(k)}(x_{k,k}) = 0$, d'après les résultats de la question précédente appliqués à $f^{(k)}$ sur $[x_{k,k}, +\infty[$, on peut alors écrire : $\exists x_{k+1,k+1} \in]x_{k,k}, +\infty[, f^{(k+1)}(x_{k+1,k+1}) = 0$, et donc que $f^{(k+1)}$ admet au moins k + 1 racines distinctes sur $]a, +\infty[$.

• Ainsi, pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, $f^{(k)}$ admet au moins k racines distinctes sur $]a, +\infty[$.

On peut maintenant conclure, pour k = n + 1 :

$$\boxed{f^{(n+1)} \text{ admet au moins } n+1 \text{ racines distinctes sur }]a, +\infty[}$$

☞ Se souvenir des quatre généralisations du théorème de Rolle (résultats très classiques notamment lors de l'étude des grandes familles de polynômes) et de leurs démonstrations (les deux dernières généralisations demeurant également valables lorsque l'on subsitue $-\infty$ à $+\infty$ et même étendues à $\mathbb{R}$):

– si une fonction f de classe C^n sur [a, b] admet n + 1 racines sur [a, b], alors $f^{(n)}$ admet au moins une racine sur [a, b],

– si f est une fonction de classe C^n sur [a, b] telle que $\forall k \in [\![0, n-1]\!], f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0$, alors $f^{(n)}$ admet au moins n racines sur [a, b],

– si f est une fonction continue sur $[\alpha, +\infty[$ (resp. sur $]-\infty, \alpha]$ ou sur $\mathbb{R}$), dérivable sur $]\alpha, +\infty[$ (resp. sur $]-\infty, \alpha[$ ou sur $\mathbb{R}$) et telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(\alpha)$ (resp. telle que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = f(\alpha)$ ou $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$), alors f' admet au moins une racine sur $]\alpha, +\infty[$ (resp. sur $]-\infty, \alpha[$ ou $\mathbb{R}$),

– si f est une fonction de classe C^n sur $[a, +\infty[$ (resp. sur $]-\infty, a]$ ou sur $\mathbb{R}$), dérivable n + 1 fois sur $]a, +\infty[$ (resp. sur $]-\infty, a[$ ou sur $\mathbb{R}$) et telle que $\forall k \in [\![0, n]\!], \lim\limits_{x \to +\infty} f^{(k)}(x) = f^{(k)}(a) = 0$ (resp. telle que $\forall k \in [\![0, n]\!], \lim\limits_{x \to -\infty} f^{(k)}(x) = f^{(k)}(a) = 0$ ou $\forall k \in [\![0, n]\!], \lim\limits_{x \to +\infty} f^{(k)}(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f^{(k)}(x)$), alors $f^{(n+1)}$ admet au moins n + 1 racines distinctes sur $]a, +\infty[$ (resp. sur $]-\infty, a[$ ou $\mathbb{R}$).

S❷

● 10. Théorème de prolongement

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $x_0 \in I$ et f une fonction continue sur I et dérivable en tout point de $I \setminus \{x_0\}$.

1) Montrer que si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0.

2) Montrer que si f' admet une limite infinie en x_0, alors f n'est pas dérivable en x_0.

3) En considérant les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = x \sin \frac{1}{x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} h(0) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, h(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \end{cases},$$

que peut-on dire si f' n'admet pas de limite en x_0 ?

Tout d'abord, comme f est continue sur I et dérivable en tout point de $I \setminus \{x_0\}$, pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$, on peut écrire que f est continue sur le segment d'extrémités x_0 et x et dérivable sur l'intervalle ouvert d'extrémités x_0 et x, noté $]x_0 : x[$. Le théorème des accroissements finis nous permet alors d'écrire :

$\forall x \in I \setminus \{x_0\}, \exists c_x \in]x_0 : x[, f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(c_x)$ soit, en divisant cette relation par $x - x_0 \neq 0$ ($x \in I \setminus \{x_0\}$) :

$\forall x \in I \setminus \{x_0\}, \exists c_x \in]x_0 : x[, f'(c_x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ①.

De plus, comme $\forall x \in I \setminus \{x_0\}, c_x \in]x_0 : x[$, la fonction $x \mapsto c_x$ est encadrée par la fonction constante égale à x_0 et par une fonction ($x \mapsto x$) qui tend vers x_0 lorsque x tend vers x_0. On en déduit alors (théorème de l'encadrement) : $\lim\limits_{x \to x_0} c_x = x_0$.

1) Si f' admet une limite finie ℓ en x_0, on peut écrire : $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = \ell$. Comme $\lim\limits_{x \to x_0} c_x = x_0$, on en déduit alors : $\lim\limits_{x \to x_0} f'(c_x) = \ell$. En faisant tendre x vers x_0, par passage à la limite dans la relation ①, on peut alors écrire : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$, d'où la conclusion :

$\boxed{\text{Si } f' \text{ admet une limite finie } \ell \text{ en } x_0, \text{ alors f est dérivable en } x_0 \text{ de nombre dérivé } \ell}$

☞ Se souvenir de la méthode relativement courante, qui consiste, à l'aide d'une relation du type : $\forall x \in I \setminus \{x_0\}, \exists c_x \in]x_0 : x[, f(x) = g(c_x)$, à démontrer tout d'abord à l'aide du théorème de l'encadrement que $\lim\limits_{x \to x_0} c_x = x_0$, d'où : $\lim\limits_{x \to x_0} g(c_x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, et donc, par passage à la limite dans la relation précédente : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

2) De même, si f' admet une limite infinie en x_0, on peut écrire : $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = \pm\infty$. Comme $\lim\limits_{x \to x_0} c_x = x_0$, on en déduit alors : $\lim\limits_{x \to x_0} f'(c_x) = \pm\infty$. En faisant tendre x vers x_0, par passage à la limite dans la relation ①, on peut alors écrire : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$, d'où la conclusion :

$\boxed{\text{Si } f' \text{ admet une limite infinie en } x_0, \text{ alors f n'est pas dérivable en } x_0}$

3) ▪ g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que produit et composée ($x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et sin est continue sur $\mathbb{R}_+^*$) de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, comme $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, -1 < \sin \frac{1}{x} < 1$, en multipliant cette relation par $x > 0$, on peut écrire : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, -x < g(x) < x$.

g est donc encadrée par deux fonctions qui tendent vers 0 lorsque x tend vers 0. On en déduit alors (théorème de l'encadrement) : $\lim_{x\to 0} g(x) = 0 = g(0)$. g est donc continue en 0, et donc sur $\mathbb{R}^+$.

↳ De plus, g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que produit et composée ($x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et sin est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$) de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. On peut alors écrire :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g'(x) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$.

On en déduit alors :

– $\forall n \in \mathbb{N}^*, g'\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = \sin(2n\pi) - (2n\pi)\cos(2n\pi) = -2n\pi$,

– $\forall n \in \mathbb{N}^*, g'\left(\frac{1}{(2n+1)\pi}\right) = \sin\big((2n+1)\pi\big) - \big((2n+1)\pi\big)\cos\big((2n+1)\pi\big) = (2n+1)\pi$, et donc :

$\lim_{n\to+\infty} g'\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = -\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} g'\left(\frac{1}{(2n+1)\pi}\right) = +\infty$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n\pi} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(2n+1)\pi} = 0$ et comme $\lim_{n\to+\infty} g'\left(\frac{1}{2n\pi}\right) \neq \lim_{n\to+\infty} g'\left(\frac{1}{(2n+1)\pi}\right)$, d'après le cours, on peut alors écrire que g' n'admet pas de limite en 0.

☞ Noter la méthode classique qui consiste, pour montrer qu'une fonction f n'admet pas de limite en un point x_0, à montrer (cf. exercice **5.4.2**) :
– qu'il existe une suite (u_n) qui tend vers x_0 telle que la suite $\big(f(u_n)\big)$ n'admette pas de limite, ou bien :
– qu'il existe deux suites (u_n) et (v_n) qui tendent vers x_0 telles que les suites $\big(f(u_n)\big)$ et $\big(f(v_n)\big)$ n'admettent pas la même limite (c'est celle qui est utilisée ici).

On rappelle que d'après le cours, si f est une fonction définie sur un intervalle I, f tend vers ℓ en x_0 si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de I qui tend vers x_0, la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ.

↳ De plus, comme g(0) = 0, on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \sin\frac{1}{x}$. Comme la fonction $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0 (pour une démonstration de cette proposition, il suffit de procéder comme précédemment), on peut alors écrire que la fonction $x \mapsto \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$ n'admet pas de limite en 0, et donc que g n'est pas dérivable en 0.

Ainsi g' n'admet pas de limite en 0 et g n'est pas dérivable en 0.

■ ↳ De même, comme $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h(x) = x\,g(x)$, on peut écrire que h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, comme $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ (cf. supra), en faisant tendre x vers 0, par passage à la limite, on peut également écrire : $\lim_{x\to 0} h(x) = 0 = h(0)$.

h est donc continue en 0, et donc sur $\mathbb{R}^+$.

↳ De plus, h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} = 2g(x) - \cos\frac{1}{x}$.

Comme $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ (cf. supra) et comme la fonction $x \mapsto \cos\frac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0, on peut alors écrire que h' n'admet pas de limite en 0.

↘ Or, comme $h(0) = 0$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{h(x) - h(0)}{x - 0} = g(x)$. Comme $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$ (cf. supra), on peut alors écrire que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{h(x) - h(0)}{x - 0} = 0$, et donc que h est dérivable en 0, de nombre dérivé 0.

Ainsi h' n'admet pas de limite en 0 mais h est dérivable en 0.

↘ Comme g' et h' n'admettent pas de limite en 0 et comme g n'est pas dérivable en 0 alors que h est dérivable en 0, on en déduit alors que :

$\boxed{\text{Si } f' \text{ n'admet pas de limite en } x_0 \text{, on ne peut rien conclure quant à la dérivabilité de } f \text{ en } x_0}$

☞ Se souvenir que pour toute fonction f continue sur I et dérivable en tout point de $I \setminus \{x_0\}$, si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0, si f' admet une limite infinie en x_0, alors f n'est pas dérivable en x_0, mais que si f' n'admet pas de limite en x_0, on ne peut rien conclure.

Ces propriétés ne font pas partie du cours (démonstrations à connaître).

☞ Pour montrer qu'une fonction f est dérivable en x_0, il existe donc trois méthodes :

– on montre que $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie lorsque x tend vers x_0 (à utiliser dans la quasi-totalité des cas),

– on montre que f est continue sur I, de classe C^1 sur tout intervalle de $I \setminus \{x_0\}$ et que f' admet une limite finie en x_0 (théorème de prolongement des fonctions de classe C^1, cf. exercice 11),

– on montre que f est continue sur I, dérivable en tout point de $I \setminus \{x_0\}$, puis, après avoir redémontré le théorème de prolongement dans le premier cas de figure (cf. **1**), que f' admet une limite finie en x_0.

SO EO

■ 11. Fonctions de classe C^1, de classe C^p

1) Soient λ un réel non nul et Φ la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\begin{cases} \Phi(0) = 0 \\ \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \Phi(x) = \dfrac{\cos(\lambda x) - 1}{\sin x} \end{cases}$$

Montrer que Φ est de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (on précisera la valeur de $\Phi'(0)$).

2) (SO) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ \forall x \in \mathbb{R}^*_+, f(x) = \dfrac{\sin x}{x} \end{cases}$$

Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ (on précisera les valeurs de $f'(0)$ et de $f''(0)$).

3) (SO) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}^*_+, g(x) = e^{-\frac{1}{x}} \end{cases}$$

a) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^+$.

b) Montrer que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*_+$ et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists P_n \in \mathbb{R}[X], \forall x \in \mathbb{R}^*_+, g^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}.$$

c) En déduire que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$.

NB : La résolution du 2 nécessite la connaissance du cours : 9. Formules de Taylor. Développements limités.

1) ❍ Φ est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ en tant que somme et quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

De plus, au voisinage de 0, on a : $\cos(\lambda x) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{\lambda^2 x^2}{2}$ et $\sin x \underset{0}{\sim} x$, d'où : $\Phi(x) \underset{0}{\sim} -\frac{\lambda^2 x}{2}$, et donc : $\lim\limits_{x \to 0} \Phi(x) = 0 = \Phi(0)$.

Ainsi, Φ est continue en 0, donc continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

❍ Φ est de classe C^1 sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ en tant que somme et quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions de classe C^1 sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

❍ De plus, on a :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right],\ \Phi'(x) = \frac{-\lambda \sin(\lambda x) \sin x - \cos x \left(\cos(\lambda x) - 1\right)}{\sin^2 x} \qquad \text{soit :}$$

$$= \frac{-\lambda \dfrac{\sin(\lambda x)}{x} \dfrac{\sin x}{x} - \cos x \dfrac{\cos(\lambda x) - 1}{x^2}}{\dfrac{\sin^2 x}{x^2}}.$$

Or, on a :

– $\sin x \underset{0}{\sim} x$, d'où : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(\lambda x)}{x} = \lambda$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1$,

– $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$,

– $\cos(\lambda x) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{\lambda^2 x^2}{2}$, d'où : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(\lambda x) - 1}{x^2} = -\frac{\lambda^2}{2}$.

On en déduit alors : $\lim\limits_{x \to 0} \Phi'(x) = \dfrac{-\lambda^2 + \dfrac{\lambda^2}{2}}{1} = -\dfrac{\lambda^2}{2}$.

❍ Comme Φ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, de classe C^1 sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et comme Φ' admet une limite finie en 0 ($-\frac{\lambda^2}{2}$), on peut alors conclure (théorème de prolongement des fonctions de classe C^1) :

$$\boxed{\Phi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ (avec } \Phi'(0) = -\frac{\lambda^2}{2})}$$

☞ Pour montrer qu'une fonction f est de classe C^1 sur un intervalle I (avec problème en x_0), il faut montrer successivement que :

– f est continue sur I,

– f est de classe C^1 sur tout intervalle de $I \setminus \{x_0\}$ en tant que "cocktail" (somme, produit, quotient dont le dénominateur ne s'annule pas, composée...) de fonctions de classe C^1 sur tout intervalle de $I \setminus \{x_0\}$, et :

– f' admet une limite finie en x_0.

f est alors dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$. f est donc de classe C^1 sur I.

2) ❑ f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, on a : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$. f est donc continue en 0, donc continue sur $\mathbb{R}^+$.

❑ f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.

❑ De plus, on a :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$.

Or, le développement limité de $\sin x$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 nous permet d'écrire :

$\sin x = x + x^2\varepsilon_1(x)$ (avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$).

De même, le développement limité de $\cos x$ à l'ordre 1 au voisinage de 0 nous permet d'écrire :

$\cos x = 1 + x\varepsilon_2(x)$ (avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$).

On en déduit alors :

$x\cos x - \sin x = x^2\varepsilon_3(x)$ (avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0$), d'où :

$f'(x) = \varepsilon_3(x)$, et donc :

$\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$.

❑ De même, d'après l'expression précédente de f', on peut écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f''(x) = \frac{x^2(\cos x - x\sin x - \cos x) - 2x(x\cos x - \sin x)}{x^4} \quad \text{et donc :}$$

$$= \frac{(2 - x^2)\sin x - 2x\cos x}{x^3}.$$

Or, le développement limité de $\sin x$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 nous permet d'écrire :

$\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_4(x)$ (avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_4(x) = 0$), d'où :

$(2 - x^2)\sin x = 2x - \dfrac{4x^3}{3} + x^3\varepsilon_5(x)$ (avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_5(x) = 0$).

De même, le développement limité de $\cos x$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 nous permet d'écrire :

$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_6(x)$ (avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_6(x) = 0$), d'où :

$2x\cos x = 2x - x^3 + x^3\varepsilon_7(x)$ (avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_7(x) = 0$).

On en déduit alors, toujours au voisinage de 0 :

$(2 - x^2)\sin x - 2x\cos x = -\dfrac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_8(x)$ (avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_8(x) = 0$), d'où :

$f''(x) = -\dfrac{1}{3} + \varepsilon_8(x)$, et donc :

$\lim\limits_{x\to 0} f''(x) = -\dfrac{1}{3}$.

❑ Comme f est continue sur $\mathbb{R}^+$, de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et comme f' et f'' admettent une limite finie en 0, on peut alors conclure (théorème de prolongement des fonctions de classe C^p) :

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \text{ (avec } f'(0) = 0 \text{ et } f''(0) = -\tfrac{1}{3})}$$

Pour montrer qu'une fonction f est de classe C^n sur un intervalle I (avec problème en x_0), il faut montrer successivement que :

– f est continue sur I,

– f est de classe C^n sur tout intervalle de $I \setminus \{x_0\}$ en tant que "cocktail" (somme, produit, quotient dont le dénominateur ne s'annule pas, composée...) de fonctions de classe C^n sur tout intervalle de $I \setminus \{x_0\}$, et :

– pour tout $k \in [1, n]$, $f^{(k)}$ admet une limite finie en x_0.

f est alors dérivable n fois en x_0 et $\forall k \in [1, n]$, $f^{(k)}(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f^{(k)}(x)$. f est donc de classe C^n sur I.

3) a) La fonction $h : x \mapsto -\frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $h(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}_-^*$. La fonction exp étant continue sur $\mathbb{R}_-^*$, on en déduit alors que g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, on a : $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0 = g(0)$. g est donc continue en 0, d'où la conclusion :

$$\boxed{\text{g est continue sur } \mathbb{R}^+}$$

b) ▪ La fonction h étant de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $h(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}_-^*$ et la fonction exp étant de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_-^*$, on peut écrire :

$$\boxed{\text{g est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$$

▪ Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists P_n \in \mathbb{R}[X], \forall x \in \mathbb{R}_+^*, g^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$.

• Au rang n = 0, comme $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, en posant $P_0 = 1$, on peut écrire :

$\exists P_0 \in \mathbb{R}[X], \forall x \in \mathbb{R}_+^*, g^{(0)}(x) = P_0\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\exists P_n \in \mathbb{R}[X], \forall x \in \mathbb{R}_+^*, g^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$. Comme g est de classe C^∞, donc de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut alors écrire, en dérivant la relation précédente :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g^{(n+1)}(x) = \frac{1}{x^2}P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2}P_n'\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$ i.e. :

$= \frac{1}{x^2}\left[P_n\left(\frac{1}{x}\right) - P_n'\left(\frac{1}{x}\right)\right]e^{-\frac{1}{x}}$ soit, en posant $P_{n+1} = X^2(P_n - P_n')$:

$= P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$.

On en déduit alors : $\exists P_{n+1} \in \mathbb{R}[X], \forall x \in \mathbb{R}_+^*, g^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$.

• Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \exists P_n \in \mathbb{R}[X], \forall x \in \mathbb{R}_+^*, g^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}}$$

c) Comme $\forall n \in \mathbb{N}, P_n \in \mathbb{R}[X]$, on peut écrire (croissances comparées) :

$\forall n \in \mathbb{N}, \lim\limits_{u \to +\infty} P_n(u)e^{-u} = 0$ d'où, en posant $x = \frac{1}{u}$:

$\forall n \in \mathbb{N}, \lim\limits_{x \to 0^+} P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} = 0$ ce qui s'écrit encore, en reconnaissant $g^{(n)}$ (qui n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$) :

$\forall n \in \mathbb{N}, \lim\limits_{x \to 0} g^{(n)}(x) = 0$.

D'après le **3a**, g est continue sur $\mathbb{R}^+$. De plus, comme d'après le **3b**, g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, g est de classe C^n sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme on a en outre : $\forall n\in\mathbb{N},\ \lim\limits_{x\to 0} g^{(n)}(x) = 0$, on peut également écrire :

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall k\in[\![1, n]\!],\ \lim\limits_{x\to 0} g^{(k)}(x) = 0.$

On en déduit alors (théorème de prolongement des fonctions de classe C^p) que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, g est de classe C^n sur $\mathbb{R}^+$, et donc que :

$$\boxed{g \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}^+}$$

☞ Pour montrer qu'une fonction f est de classe C^∞ sur un intervalle I, il suffit de montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ (ou pour tout entier $n \geq n_0$, $n_0\in\mathbb{N}$), f est de classe C^n sur I.

S❶ E❷

● 12. Fonctions convexes, généralisation : inégalité de Jensen

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction convexe sur I.

1) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :

$$\forall p\in\mathbb{N}^*,\ \forall (x_i)_{1\le i\le p}\in I^p,\ \forall(\lambda_i)_{1\le i\le p}\in[0, 1]^p,\ \sum_{i=1}^{p}\lambda_i = 1,\ f\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{p}\lambda_i f(x_i).$$

2) En déduire que :

$$\forall p\in\mathbb{N}^*,\ \forall (x_i)_{1\le i\le p}\in I^p,\ f\left(\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}x_i\right) \le \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}f(x_i).$$

1) Montrons par récurrence que : $\forall p\in[\![2, +\infty[\![,\ \forall (x_i)_{1\le i\le p}\in I^p,\ \forall(\lambda_i)_{1\le i\le p}\in[0, 1]^p,\ \sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i = 1,\ f\left(\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i x_i\right) \le \sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i f(x_i).$

• Au rang p = 2, comme f est une fonction convexe sur I, on peut écrire :

$\forall(x_1, x_2)\in I^2,\ \forall(\lambda_1, \lambda_2)\in[0, 1]^p,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1,\ f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$

• Soit $p\in[\![2, +\infty[\![$, supposons que : $\forall k\in[\![2, p]\!],\ \forall (x_i)_{1\le i\le k}\in I^k,\ \forall(\lambda_i)_{1\le i\le k}\in[0, 1]^k,\ \sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i = 1,\ f\left(\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i x_i\right) \le \sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i f(x_i).$

Soient alors $(y_i)_{1\le i\le p+1}\in I^{p+1}$ et $(\mu_i)_{1\le i\le p+1}\in[0, 1]^{p+1}$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{p+1}\mu_i = 1$. Deux cas se présentent alors :

– si $\mu_{p+1} = 1$, comme $\sum\limits_{i=1}^{p+1}\mu_i = 1$ et comme $\forall i\in[\![1, p]\!],\ \mu_i \ge 0$, on a : $\forall i\in[\![1, p]\!],\ \mu_i = 0$, et donc :

$f(\mu_{p+1}y_{p+1}) = f(y_{p+1}) = \mu_{p+1}f(y_{p+1})$, d'où :

$f(\mu_{p+1}y_{p+1}) \le \mu_{p+1}f(y_{p+1})$, et donc, comme $\forall i\in[\![1, p]\!],\ \mu_i = 0$:

$f\left(\sum\limits_{i=1}^{p+1}\mu_i y_i\right) \le \sum\limits_{i=1}^{p+1}\mu_i f(y_i).$

– si $\mu_{p+1} \ne 1$, alors $1 - \mu_{p+1} \ne 0$. On peut alors écrire en isolant le terme en i = p + 1 :

$f\left(\sum\limits_{i=1}^{p+1}\mu_i y_i\right) = f\left((1-\mu_{p+1})\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{p}\mu_i y_i}{1-\mu_{p+1}} + \mu_{p+1}y_{p+1}\right)$ soit, comme $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{p}\mu_i y_i}{1-\mu_{p+1}}\in I$ (c'est le barycentre des points $(y_i)_{1\le i\le p}\in I^p$ affectés des coefficients respectifs $\left(\dfrac{\mu_i}{1-\mu_{p+1}}\right)_{1\le i\le p}\in[0, 1]^p$ avec $\sum\limits_{i=1}^{p}\dfrac{\mu_i}{1-\mu_{p+1}} = \dfrac{1-\mu_{p+1}}{1-\mu_{p+1}} = 1$),

d'après l'hypothèse de récurrence pour k = 2 :

$f\left(\sum_{i=1}^{p+1}\mu_i y_i\right) \leq (1-\mu_{p+1})\, f\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{p}\mu_i y_i}{1-\mu_{p+1}}\right) + \mu_{p+1} f(y_{p+1})$ et comme $\sum_{i=1}^{p}\dfrac{\mu_i}{1-\mu_{p+1}} = 1$ avec $\forall i\in[\![1, p]\!]$, $y_i \in I$,

d'après l'hypothèse de récurrence pour $k = p$:

$\leq (1-\mu_{p+1}) \sum_{i=1}^{p} \dfrac{\mu_i}{1-\mu_{p+1}} f(y_i) + \mu_{p+1} f(y_{p+1})$ i.e. :

$\leq \sum_{i=1}^{p} \mu_i f(y_i) + \mu_{p+1} f(y_{p+1})$ et donc :

$\leq \sum_{i=1}^{p+1} \mu_i f(y_i)$ d'où la conclusion :

$$\forall k\in[\![2, p+1]\!],\ \forall (x_i)_{1\leq i\leq k}\in I^k,\ \forall(\lambda_i)_{1\leq i\leq k}\in[0, 1]^k,\ \sum_{i=1}^{k}\lambda_i = 1,\ f\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k}\lambda_i f(x_i).$$

• Ainsi, on a bien : $\forall p\in[\![2, +\infty[\![,\ \forall (x_i)_{1\leq i\leq p}\in I^p,\ \forall(\lambda_i)_{1\leq i\leq p}\in[0, 1]^p,\ \sum_{i=1}^{p}\lambda_i = 1,\ f\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p}\lambda_i f(x_i)$.

Comme on a outre, pour $p = 1$: $\forall x_1\in I$, $\lambda_1 = 1$, $f(\lambda_1 x_1) = f(x_1) = \lambda_1 f(x_1)$, d'où : $\forall x_1\in I$, $\lambda_1 = 1$, $f(\lambda_1 x_1) \leq \lambda_1 f(x_1)$, la proposition est également vérifiée au rang $p = 1$. On peut désormais conclure (inégalité de Jensen) :

$$\boxed{\forall p\in\mathbb{N}^*,\ \forall (x_i)_{1\leq i\leq p}\in I^p,\ \forall(\lambda_i)_{1\leq i\leq p}\in[0, 1]^p,\ \sum_{i=1}^{p}\lambda_i = 1,\ f\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p}\lambda_i f(x_i)}$$

2) En posant, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $i\in[\![1, p]\!]$, $\lambda_i = \dfrac{1}{p}$, la proposition précédente s'écrit alors :

$$\boxed{\forall p\in\mathbb{N}^*,\ \forall (x_i)_{1\leq i\leq p}\in I^p,\ f\left(\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} x_i\right) \leq \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} f(x_i)}$$

☞ Se souvenir de la généralisation à p points ($p \geq 3$) de la définition des fonctions convexes (inégalité de Jensen) et de son cas particulier (méthodes de démonstration à connaître).

S❷

● 13. Inégalités de Hölder et de Minkowski

Soient p et q deux réels strictement supérieurs à 1 et tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1) Montrer que la fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire que :

$$\forall (a, b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\ ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

2) Soient $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs. En choisissant astucieusement a et b dans l'inégalité précédente, en déduire l'inégalité de Hölder :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_k\right) \leq \left(\sum_{k=0}^{n} {a_k}^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=0}^{n} {b_k}^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

3) En majorant judicieusement pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} a_k(a_k+b_k)^{p-1}$ et $\sum_{k=0}^{n} b_k(a_k+b_k)^{p-1}$, en déduire l'inégalité de Minkowski :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \left[\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=0}^{n} {a_k}^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=0}^{n} {b_k}^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

1) a) ▪ La fonction ln est de classe C^∞, donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'' x = -\frac{1}{x^2}$, on peut écrire que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'' x \leq 0$, et donc que :

$$\boxed{\text{La fonction ln est concave sur } \mathbb{R}_+^*}$$

▪ Comme ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ et comme $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $(a^p, b^q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on peut écrire :

$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\ln\left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q\right) \geq \frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q$ i.e. :

$\geq \ln a + \ln b$ ce qui s'écrit encore :

$\geq \ln(ab)$ et donc, en composant par la fonction exp (croissante sur $\mathbb{R}$) :

$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \geq ab$ i.e. :

$$\boxed{\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q}$$

2) Comme $\forall k \in \mathbb{N}$, $\left[\frac{a_k}{\left(\sum\limits_{k=0}^n a_k{}^p\right)^{\frac{1}{p}}}, \frac{b_k}{\left(\sum\limits_{k=0}^n b_k{}^q\right)^{\frac{1}{q}}}\right] \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, en substituant pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{a_k}{\left(\sum\limits_{k=0}^n a_k{}^p\right)^{\frac{1}{p}}}$ à a et $\frac{b_k}{\left(\sum\limits_{k=0}^n b_k{}^q\right)^{\frac{1}{q}}}$ à b dans l'inégalité précédente, on peut écrire :

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{a_k b_k}{\left(\sum\limits_{k=0}^n a_k{}^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum\limits_{k=0}^n b_k{}^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \frac{a_k{}^p}{\left(\sum\limits_{k=0}^n a_k{}^p\right)} + \frac{1}{q} \frac{b_k{}^q}{\left(\sum\limits_{k=0}^n b_k{}^q\right)}$ soit, en sommant pour $k = 0$ à $k = n$ ($n \in \mathbb{N}$) :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{\left(\sum\limits_{k=0}^n a_k{}^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum\limits_{k=0}^n b_k{}^q\right)^{\frac{1}{q}}} \sum\limits_{k=0}^n a_k b_k \leq \frac{1}{p} \sum\limits_{k=0}^n \frac{a_k{}^p}{\left(\sum\limits_{k=0}^n a_k{}^p\right)} + \frac{1}{q} \sum\limits_{k=0}^n \frac{b_k{}^q}{\left(\sum\limits_{k=0}^n b_k{}^q\right)}$ i.e. :

$\leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ et donc, comme $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

≤ 1 soit enfin, en multipliant cette inégalité membre à membre par $\left(\sum\limits_{k=0}^n a_k{}^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum\limits_{k=0}^n b_k{}^q\right)^{\frac{1}{q}} > 0$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \left(\sum_{k=0}^n a_k b_k\right) \leq \left(\sum_{k=0}^n a_k{}^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=0}^n b_k{}^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

3) En appliquant l'inégalité de Hölder de paramètres p et $\frac{p}{p-1}$ (on a bien $\frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1$) aux suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left((a_k + b_k)^{p-1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ (suites réelles et strictement positives), on peut écrire :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^n a_k (a_k + b_k)^{p-1} \leq \left(\sum\limits_{k=0}^n a_k{}^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum\limits_{k=0}^n \left((a_k + b_k)^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}$ i.e. :

$\leq \left(\sum\limits_{k=0}^n a_k{}^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum\limits_{k=0}^n (a_k + b_k)^p\right)^{\frac{p-1}{p}}$ ①.

De même, en appliquant l'inégalité de Hölder de paramètres p et $\frac{p}{p-1}$ aux suites $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left((a_k+b_k)^{p-1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ (suites réelles et strictement positives), on peut également écrire :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} b_k(a_k+b_k)^{p-1} \le \left(\sum_{k=0}^{n} b_k{}^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=0}^{n}\left((a_k+b_k)^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \quad \text{i.e. :}$$

$$\le \left(\sum_{k=0}^{n} b_k{}^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \quad ②.$$

En sommant les relations ① et ②, on en déduit alors :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)(a_k+b_k)^{p-1} \le \left[\left(\sum_{k=0}^{n} a_k{}^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=0}^{n} b_k{}^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left(\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \quad \text{i.e. :}$$

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)^p \le \left[\left(\sum_{k=0}^{n} a_k{}^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=0}^{n} b_k{}^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left(\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

soit enfin, en divisant cette relation par $\left(\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{p-1}{p}} > 0$:

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \left[\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)^p\right]^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=0}^{n} a_k{}^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=0}^{n} b_k{}^p\right)^{\frac{1}{p}}}$$

IV. Intégrale fonction de sa borne supérieure SO

Soient I un intervalle de R, a un élément de I et f une fonction continue sur I. La fonction F définie sur I par : $\forall x \in I,\ F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable sur I de dérivée f. C'est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

V. Méthodes de calcul intégral SO EO

Soient I un intervalle de R, a et b deux éléments de I.

■ ***Calcul de primitive.*** Soient f une fonction continue par morceaux sur I et F une primitive de f sur I. On a : $\int_a^b f(t)\,dt = \left[F(t)\right]_a^b = F(b) - F(a)$.

■ ***Intégration par parties.*** Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur I. On a : $\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = \left[f(t)g(t)\right]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt$.

■ ***Changement de variable.*** Soient f une fonction continue sur [a, b] et φ une fonction de classe C^1 sur un intervalle $[\alpha, \beta]$ de R tel que $\varphi([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$. En effectuant le changement de variable $u = \varphi(t)$, $du = \varphi'(t)\,dt$, on a : $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)\,du$.

Conséquences :

– si f est paire : $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$,

– si f est impaire : $\int_a^b f(t)\,dt = \int_{-a}^{-b} f(t)\,dt$ et $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$,

– si f est périodique de période T : $\int_a^b f(t)\,dt = \int_{a+T}^{b+T} f(t)\,dt$ et $\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt$.

VI. Méthodes des rectangles. Valeur moyenne d'une fonction SO EO

■ ***Méthode des rectangles.*** Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, f une fonction continue sur [a, b]. On appelle sommes de Riemann associées à f, les suites $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} s_n = \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\dfrac{b-a}{n}\right) \\ S_n = \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\dfrac{b-a}{n}\right) \end{cases}.$$

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n - s_n = \frac{b-a}{n}\left(f(b) - f(a)\right)$. De plus,

– si f est croissante : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ s_n \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq S_n$,

– si f est décroissante : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq s_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, s_n et S_n constituent des valeurs approchées de $\int_a^b f(t)\,dt$ à $\frac{b-a}{n}\left|f(b) - f(a)\right|$ près, et on a : $\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(t)\,dt$.

■ ***Valeur moyenne d'une fonction.*** Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, f une fonction continue sur [a, b]. On appelle valeur moyenne de f sur [a, b], le réel $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$.

Exercices clefs, méthodes et astuces

SO EO

★ 1. Quatre propriétés indispensables

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

1) Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$.

a) Montrer que si $\int_a^b f(t)\,dt = 0$, alors :

$$\forall t \in [a, b],\ f(t) = 0.$$

b) En déduire que si $\exists t \in [a, b],\ f(t) \neq 0$, alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt > 0.$$

2) Montrer que si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et strictement positive sur $]a, b[$, alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt > 0.$$

3) Montrer que si f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b]$ telles que : $\forall t \in]a, b[,\ f(t) < g(t)$, alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt < \int_a^b g(t)\,dt.$$

1) a) Supposons que $\int_a^b f(t)\,dt = 0$ et soit F une primitive de f (on a donc $F' = f$). Comme f est continue et positive sur $[a, b]$, F est de classe C^1 et croissante sur $[a, b]$.

Or, on a : $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = 0$, et donc : $F(a) = F(b)$. F est donc constante sur $[a, b]$. On en déduit alors, par dérivation : $\forall t \in [a, b],\ F'(t) = 0$, et donc, comme $\forall t \in [a, b],\ F'(t) = f(t)$: $\forall t \in [a, b],\ f(t) = 0$.

On peut maintenant conclure :

Si f est une fonction continue et positive sur $[a, b]$ et si $\int_a^b f(t)\,dt = 0$, alors : $\forall t \in [a, b],\ f(t) = 0$

b) Si $\exists t \in [a, b],\ f(t) \neq 0$, la contraposée de la proposition précédente nous permet d'écrire que $\int_a^b f(t)\,dt \neq 0$. Or, comme f est une fonction positive sur $[a, b]$, par positivité de l'intégrale, on peut également écrire que : $\int_a^b f(t)\,dt \geq 0$, donc que : $\int_a^b f(t)\,dt > 0$, d'où la conclusion :

Si f est une fonction continue et positive sur $[a, b]$ et si $\exists t \in [a, b],\ f(t) \neq 0$, alors : $\int_a^b f(t)\,dt > 0$

☞ Se souvenir que :

– si f est une fonction continue et positive sur $[a, b]$ et si $\int_a^b f(t)\,dt = 0$, alors : $\forall t \in [a, b],\ f(t) = 0$,

– si f est une fonction continue et positive sur $[a, b]$ et si $\exists t \in [a, b],\ f(t) \neq 0$, alors : $\int_a^b f(t)\,dt > 0$

(démonstrations à connaître).

$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} t \, dt \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt$ d'où la conclusion :

$$\boxed{\text{La suite } \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$$

☞ Avant d'intégrer une relation $\mathfrak{R}$ sur un intervalle $[a, b]$, il faut toujours vérifier que les fonctions en présence sont continues (éventuellement par morceaux) sur $[a, b]$.

NB : Si l'intervalle sur lequel on obtient la relation $\mathfrak{R}$ est ouvert en a ou en b et que les fonctions en présence sont continues sur $]a, b[$, il faut en outre vérifier que ces fonctions admettent une limite finie en a et en b.

b) On a : $\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $0 < \sin t < 1$, soit, en multipliant cette relation par $\sin^n t > 0$ ($n \in \mathbb{N}$, $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$) :

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \sin^{n+1} t < \sin^n t.$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $t \mapsto \sin^n t$ et $t \mapsto \sin^{n+1} t$ étant continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit alors (cf. exercice 1.3) : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} t \, dt < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt$, d'où la conclusion :

$$\boxed{\text{La suite } \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante}}$$

☞ Pour déterminer le sens de variation d'une suite du type $\left(\int_a^b f_n(t) \, dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$:

– si l'on veut démontrer que la suite est **monotone au sens large**, il faut tout d'abord comparer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions f_n et f_{n+1} sur $[a, b]$, puis intégrer cette relation sur $[a, b]$ (et on obtient alors la relation recherchée par croissance de l'intégrale).

– si l'on veut démontrer que la suite est **strictement monotone**, il faut tout d'abord comparer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions f_n et f_{n+1} sur $[a, b]$ (ou sur $]a, b[$ si la relation entre f_n et f_{n+1} sur $[a, b]$ n'est pas stricte), puis redémontrer la stricte croissance de l'intégrale (cf. exercice 1.3) pour obtenir enfin la relation recherchée.

2) a) On a :

$\forall t \in [0, 1], 0 \le \frac{1}{1+t^2} \le 1$ soit, en multipliant cette relation par $t^n \ge 0$ ($t \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$) :

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, 1], 0 \le \frac{t^n}{1+t^2} \le t^n$ soit encore, en intégrant cette relation sur $[0, 1]$, les fonctions en présence étant continues sur cet intervalle :

$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \le \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} \, dt \le \int_0^1 t^n \, dt$ et donc, comme $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^n \, dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 0 \le \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} \, dt \le \frac{1}{n+1}}$$

☞ Pour encadrer une intégrale, il faut toujours chercher à encadrer tout ou partie de la fonction sous le signe intégral puis intégrer la relation obtenue.

En particulier, si une partie de la fonction sous le signe intégral est monotone, on peut l'encadrer par ses valeurs aux bornes de l'intervalle considéré.

1) La fonction $t \mapsto t\,e^{-t^2}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$. En remarquant que $t \mapsto t$ est la moitié de la dérivée de $t \mapsto t^2$, on peut alors écrire :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \int^x t\,e^{-t^2}\,dt = -\frac{e^{-x^2}}{2}}$$

☞ Noter que la primitive F d'une fonction f est au moins définie sur le domaine de continuité de f.

2) La fonction $t \mapsto \dfrac{t}{1+t^2}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$. Comme $t \mapsto t$ est la moitié de la dérivée de $t \mapsto 1+t^2$, on peut alors écrire :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \int^x \frac{t}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)}$$

3) La fonction $t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{a+t^2}}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$. De plus, on a : $\forall t \in \mathbb{R},\ \dfrac{t}{\sqrt{a+t^2}} = 2t \times \dfrac{1}{2\sqrt{a+t^2}}$. La fonction $t \mapsto 2t$ étant la dérivée de $t \mapsto a+t^2$ et la fonction $t \mapsto \sqrt{u(t)}$ admettant pour dérivée la fonction $t \mapsto \dfrac{u'(t)}{2\sqrt{u(t)}}$, on peut conclure :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \int^x \frac{t}{\sqrt{a+t^2}}\,dt = \sqrt{a+x^2}}$$

☞ Pour pouvoir déterminer **directement** la primitive d'une fonction, il faut soit reconnaître la primitive d'une fonction classique (primitives de $t \mapsto t^\alpha$ avec $\alpha \neq -1$, $t \mapsto \frac{1}{t}$, $t \mapsto e^t$ par exemple), soit reconnaître une forme du type $g' \times f' \circ g$ (dont une primitive est $f \circ g$).

SO EO

4. Calcul intégral : intégration par parties

Calculer, à l'aide d'intégrations par parties, les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (t^2+t+1)\sin t\,dt$,

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t}\sin t\,dt$,

3) $\displaystyle\int_1^2 (3t^2+1)\ln t\,dt$.

1) Les fonctions $t \mapsto t^2+t+1$ et $t \mapsto -\cos t$ étant de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, à l'aide d'une intégration par parties (on intègre $t \mapsto \sin t$ en $t \mapsto -\cos t$ et on dérive $t \mapsto t^2+t+1$), on peut écrire :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (t^2+t+1)\sin t\,dt = \Big[-(t^2+t+1)\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2t+1)\cos t\,dt \qquad \text{soit :}$$

$$= 1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2t+1)\cos t\,dt.$$

Or, les fonctions $t \mapsto 2t+1$ et $t \mapsto \sin t$ étant de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, à l'aide d'une nouvelle intégration par parties (on intègre $t \mapsto \cos t$ en $t \mapsto \sin t$ et on dérive $t \mapsto 2t+1$), on peut écrire :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2t+1)\cos t\, dt = \left[(2t+1)\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, dt \qquad \text{soit :}$$

$$= (\pi+1) - 2\left[-\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \qquad \text{i.e. :}$$

$$= \pi - 1 \qquad \text{et donc :}$$

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (t^2+t+1)\sin t\, dt = \pi}$$

☞ Lorsque l'on effectue une intégration par parties, il faut toujours préciser quelles sont les fonctions de classe C^1 utilisées (ce sont les deux primitives que l'on retrouve dans le crochet) et l'intégration par parties effectuée (c'est-à-dire la fonction que l'on intègre et celle que l'on dérive).

2) Les fonctions $t \mapsto e^{2t}$ et $t \mapsto -\cos t$ étant de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, à l'aide d'une intégration par parties (on intègre $t \mapsto \sin t$ en $t \mapsto -\cos t$ et on dérive $t \mapsto e^{2t}$), on peut écrire :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t}\sin t\, dt = \left[-e^{2t}\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t}\cos t\, dt \qquad \text{soit :}$$

$$= 1 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t}\cos t\, dt \quad ①.$$

Or, les fonctions $t \mapsto e^{2t}$ et $t \mapsto \sin t$ étant de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, à l'aide d'une nouvelle intégration par parties (on intègre $t \mapsto \cos t$ en $t \mapsto \sin t$ et on dérive $t \mapsto e^{2t}$), on peut écrire :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t}\cos t\, dt = \left[e^{2t}\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t}\sin t\, dt \qquad \text{soit :}$$

$$= e^{\pi} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t}\sin t\, dt.$$

On en déduit alors, d'après la relation ① :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t}\sin t\, dt = 1 + 2e^{\pi} - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t}\sin t\, dt \qquad \text{d'où :}$$

$$5\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t}\sin t\, dt = 1 + 2e^{\pi} \qquad \text{et donc :}$$

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t}\sin t\, dt = \frac{1+2e^{\pi}}{5}}$$

3) Les fonctions $t \mapsto \ln t$ et $t \mapsto t^3 + t$ étant de classe C^1 sur $[1, 2]$, à l'aide d'une intégration par parties (on intègre $t \mapsto 3t^2 + 1$ et on dérive $t \mapsto \ln t$), on peut écrire :

Hidden page

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 u}\,\cos u\,du$$ soit, comme $\forall u \in \mathbb{R},\ 1-\sin^2 u = \cos^2 u$:

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos u|\cos u\,du$$ soit encore, comme $\forall u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], |\cos u| = \cos u$:

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\,du$$ et comme $\forall u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \cos^2 u = \frac{1}{2}(1+\cos 2u)$:

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2u)\,du$$ i.e. :

$$= \frac{1}{2}\left[u + \frac{\sin 2u}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$ et donc :

$$\boxed{\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{\pi}{4}}$$

Changement de variable : bijectif ou non bijectif ?

Il existe deux types de changement de variable :

– lorsque l'on est en présence d'une intégrale du type $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$ (on est alors dans le cadre du cours), c'est-à-dire lorsque l'on "reconnaît" le changement de variable (i.e. φ et φ') dans l'intégrale que l'on cherche à calculer (on exprime alors exclusivement u en fonction de t et du en fonction de t et dt), avant d'effectuer le changement de variable $u = \varphi(t)$, $du = \varphi'(t)\,dt$, il suffit de vérifier que φ est de classe C^1 sur $[\alpha, \beta]$ pour écrire que : $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)\,du$ (cf. **1**).

– lorsque l'on est en présence d'une intégrale du type $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$, c'est-à-dire lorsque l'on ne "reconnaît" pas dans l'intégrale le changement de variable à effectuer, mais qu'on le "devine" (on utilise l'expression de t en fonction de u et/ou l'expression de dt en fonction de u et du), et on peut être aidé en cela par l'énoncé, avant d'effectuer le changement de variable $t = \varphi(u)$, $dt = \varphi'(u)\,du$, il faut non seulement vérifier que φ est de classe C^1, mais aussi que φ est strictement monotone, donc bijective sur $\varphi^{-1}([\alpha, \beta])$; en effet, on utilise la formule du cours "à l'envers" : $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du$, d'où la nécessité que φ soit bijective sur $\varphi^{-1}([\alpha, \beta])$ (cf. **2**).

SO E❷

● 6. Primitives classiques

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour toute fonction f continue sur I, on note $x \mapsto \int^x f(t)\,dt$, la primitive de f définie sur I, de constante nulle.

1) Déterminer, à l'aide de la fonction ln, l'expression des fonctions :

a) $x \mapsto \int^x \tan t\,dt$,

b) $x \mapsto \int^x \operatorname{cotan} t\,dt$,

c) $x \mapsto \int^x \frac{dt}{\sqrt{t^2+a}}$ et $x \mapsto \int^x \frac{dt}{\sqrt{t^2-a}}$ $(a \in \mathbb{R}_+^*)$.

2) Déterminer, à l'aide d'intégrations par parties, les primitives suivantes :

a) $x \mapsto \int^x \ln t \, dt$,

b) $x \mapsto \int^x t^n \ln t \, dt \quad (n \in \mathbb{N}^*)$,

c) (SO) $x \mapsto \int^x \operatorname{Arcsin} t \, dt$,

d) (SO) $x \mapsto \int^x \operatorname{Arccos} t \, dt$,

e) (SO) $x \mapsto \int^x \operatorname{Arctan} t \, dt$.

3) Soit α un réel strictement positif. Déterminer, à l'aide d'un changement de variable, l'expression de :

$$x \mapsto \int^x \frac{dt}{t \ln^\alpha t}.$$

1) a) La fonction tan étant continue sur tout intervalle de $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, elle admet une primitive sur tout intervalle de $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Comme $\tan = \frac{\sin}{\cos} = -\frac{\cos'}{\cos} = -\left(\ln \circ |\cos|\right)'$, on en déduit alors :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}, \int^x \tan t \, dt = -\ln|\cos x|}$$

b) La fonction cotan étant continue sur tout intervalle de $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, elle admet une primitive sur tout intervalle de $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Comme $\operatorname{cotan} = \frac{\cos}{\sin} = \frac{\sin'}{\sin} = \left(\ln \circ |\sin|\right)'$, on en déduit alors :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, \int^x \operatorname{cotan} t \, dt = \ln|\sin x|}$$

c) ▪ Comme $a \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2 + a}}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une primitive sur $\mathbb{R}$. Soit alors f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = t + \sqrt{t^2 + a}$. Comme $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) > 0$ (car $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $\sqrt{t^2 + a} > |t|$), on peut écrire : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{1 + \frac{t}{\sqrt{t^2+a}}}{t + \sqrt{t^2 + a}} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + a}} = \left(\ln \circ |f|\right)'(t) = (\ln \circ f)'(t)$. On en déduit alors :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \int^x \frac{dt}{\sqrt{t^2 + a}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a}\right)}$$

▪ De même, comme $a \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2 - a}}$ est continue sur $]-\infty, -\sqrt{a}[$ et sur $]\sqrt{a}, +\infty[$. Elle admet donc une primitive sur $]-\infty, -\sqrt{a}[$ et sur $]\sqrt{a}, +\infty[$. Soit alors f la fonction définie sur $]-\infty, -\sqrt{a}[$ et sur $]\sqrt{a}, +\infty[$ par :

$\forall t \in]-\infty, -\sqrt{a}[\cup]\sqrt{a}, +\infty[$, $f(t) = t + \sqrt{t^2 - a}$.

On peut alors écrire : $\forall t \in]-\infty, -\sqrt{a}[\cup]\sqrt{a}, +\infty[, \ \dfrac{f'(t)}{f(t)} = \dfrac{1 + \dfrac{t}{\sqrt{t^2 - a}}}{t + \sqrt{t^2 - a}} = \dfrac{1}{\sqrt{t^2 - a}}$, et donc :

$\forall t \in]-\infty, -\sqrt{a}[\cup]\sqrt{a}, +\infty[, \ \dfrac{f'(t)}{f(t)} = (\ln \circ |f|)'(t)$, d'où la conclusion :

$$\boxed{\forall x \in]-\infty, -\sqrt{a}[\cup]\sqrt{a}, +\infty[, \ \int^x \frac{dt}{\sqrt{t^2 - a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a}\right|}$$

NB : Pour calculer ces deux dernières primitives, noter qu'il est fort utile de connaître le résultat a priori !!!

☞ Se souvenir que la primitive de $\dfrac{f'}{f}$ est $\ln \circ |f|$.

2) a) La fonction ln étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$, elle admet une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$. Les fonctions $t \mapsto \ln t$ et $t \mapsto t$ étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, à l'aide d'une intégration par parties (on intègre $t \mapsto 1$ et on dérive $t \mapsto \ln t$), on peut alors écrire : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \int^x 1 \times \ln t \, dt = [t \ln t]^x - \int^x dt$, soit :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \int^x \ln t \, dt = x \ln x - x}$$

☞ Se souvenir que la primitive de la fonction ln est : $x \mapsto x \ln x - x$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto t^n \ln t$ étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$, elle admet une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$. Les fonctions $t \mapsto \ln t$ et $t \mapsto \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$ étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, à l'aide d'une intégration par parties (on intègre $t \mapsto t^n$ et on dérive $t \mapsto \ln t$), on peut alors écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \int^x t^n \ln t \, dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \ln t\right]^x - \frac{1}{n+1} \int^x t^n \, dt \qquad \text{soit :}$$

$$= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \ln t\right]^x - \frac{1}{n+1} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]^x \qquad \text{et donc :}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \int^x t^n \ln t \, dt = \frac{x^{n+1} \ln x}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}}$$

c) La fonction Arcsin étant continue sur $[-1, 1]$, elle admet une primitive sur $[-1, 1]$. Les fonctions $t \mapsto \operatorname{Arcsin} t$ et $t \mapsto t$ étant de classe C^1 sur $[-1, 1]$, à l'aide d'une intégration par parties (on intègre $t \mapsto 1$ et on dérive $t \mapsto \operatorname{Arcsin} t$), on peut alors écrire :

$$\forall x \in [-1, 1], \ \int^x 1 \times \operatorname{Arcsin} t \, dt = [t \operatorname{Arcsin} t]^x - \int^x \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} \, dt \qquad \text{soit :}$$

$$= x \operatorname{Arcsin} x + \int^x \frac{-2t}{2\sqrt{1 - t^2}} \, dt \qquad \text{et en reconnaissant la dérivée de } t \mapsto \sqrt{1 - t^2} :$$

$$= x \operatorname{Arcsin} x + \left[\sqrt{1 - t^2}\right]^x \qquad \text{soit enfin :}$$

$$\boxed{\forall x \in [-1, 1], \ \int^x \operatorname{Arcsin} t \, dt = x \operatorname{Arcsin} x + \sqrt{1 - x^2}}$$

d) De même, la fonction Arccos étant continue sur $[-1, 1]$, elle admet une primitive sur $[-1, 1]$. Les fonctions $t \mapsto \operatorname{Arccos} t$ et $t \mapsto t$ étant de classe C^1 sur $[-1, 1]$, à l'aide d'une intégration par parties (on intègre $t \mapsto 1$ et on dérive $t \mapsto \operatorname{Arccos} t$), on peut alors écrire :

$\forall x \in [-1, 1], \int^x \text{Arccos}\, t\, dt = [t \,\text{Arccos}\, t]^x + \int^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt$ soit, en procédant comme à la question précédente :

$= x \,\text{Arccos}\, x - \left[\sqrt{1-t^2}\right]^x$ et donc :

$$\boxed{\forall x \in [-1, 1], \int^x \text{Arccos}\, t\, dt = x \,\text{Arccos}\, x - \sqrt{1-x^2}}$$

e) De même, la fonction Arctan étant continue sur $\mathbb{R}$, elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$. Les fonctions $t \mapsto \text{Arctan}\, t$ et $t \mapsto t$ étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, à l'aide d'une intégration par parties (on intègre $t \mapsto 1$ et on dérive $t \mapsto \text{Arctan}\, t$), on peut alors écrire :

$\forall x \in \mathbb{R}, \int^x \text{Arctan}\, t\, dt = [t \,\text{Arctan}\, t]^x - \int^x \frac{t}{1+t^2} dt$ soit :

$= x \,\text{Arctan}\, x - \frac{1}{2}\left[\ln\left|1+t^2\right|\right]^x$ et donc, comme $\forall t \in \mathbb{R}, 1+t^2 > 0$:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \int^x \text{Arctan}\, t\, dt = x \,\text{Arctan}\, x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)}$$

☞ Se souvenir que les primitives des fonctions ln, Arcsin, Arccos et Arctan s'obtiennent par intégration par parties en dérivant la fonction considérée et en intégrant $t \mapsto 1$.

3) La fonction $t \mapsto \frac{1}{t \ln^\alpha t}$ étant continue sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$, elle admet une primitive sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.
La fonction $t \mapsto \ln t$ étant de classe C^1 su $\mathbb{R}_+^*$, en effectuant le changement de variable $u = \ln t$, $du = \frac{dt}{t}$, on peut écrire : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \int^x \frac{dt}{t \ln^\alpha t} = \int^{\ln x} \frac{du}{u^\alpha}$.

Deux cas se présentent alors :

– si $\alpha = 1$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \int^{\ln x} \frac{du}{u} = \left[\ln|u|\right]^{\ln x} = \ln|\ln x|$.

– si $\alpha \neq 1$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \int^{\ln x} \frac{du}{u^\alpha} = \left[\frac{1}{(1-\alpha)u^{\alpha-1}}\right]^{\ln x} = \frac{1}{(1-\alpha)\ln^{\alpha-1} x}$.

On peut maintenant conclure :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \int^x \frac{dt}{t \ln t} = \ln|\ln x|, \text{ et pour } \alpha \neq 1 : \forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \int^x \frac{dt}{t \ln^\alpha t} = \frac{1}{(1-\alpha)\ln^{\alpha-1} x}}$$

SO EO

■ 7. Sommes de Riemann

Calculer la limite des suites suivantes :

1) $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k^4}{n^5}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$,

2) $\left(\frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$,

3) $\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{k^2+n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

1) On a : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n}\frac{k^4}{n^5}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4}{n^4}$, soit, en reconnaissant une somme de Riemann associée à $x\mapsto x^4$ sur $[0, 1]$ (fonction continue sur $[0, 1]$) : $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4}{n^5}=\int_0^1 x^4\,dx$, et donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4}{n^5}=\frac{1}{5}}$$

2) En reconnaissant une somme de Riemann associée à $x\mapsto \sin x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (fonction continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$), on peut écrire : $\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\left[-\cos u\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$, et donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)=1}$$

NB : On aurait également pu considérer la fonction $x\mapsto \sin\frac{\pi x}{2}$ sur $[0, 1]$.

3) On a : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{k^2+n^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}}$, soit, en reconnaissant une somme de Riemann associée à $x\mapsto\frac{1}{1+x^2}$ sur $[0, 1]$ (fonction continue sur $[0, 1]$) : $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{k^2+n^2}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\left[\text{Arctan}\,x\right]_0^1$, et donc, comme $\text{Arctan}\,1=\frac{\pi}{4}$ et $\text{Arctan}\,0=0$:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{k^2+n^2}=\frac{\pi}{4}}$$

☞ Lorsque l'on cherche la limite d'une suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, S_n est défini comme une somme de termes en k et en n, il faut le plus souvent chercher une fonction f continue sur $[0, 1]$ telle que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ et on peut alors écrire : $\lim_{n\to+\infty}S_n=\int_0^1 f(t)\,dt$, ou de façon plus générale chercher une fonction f continue sur $[a, b]$ telle que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, S_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ et dans ce cas, on a alors : $\lim_{n\to+\infty}S_n=\int_a^b f(t)\,dt$.

NB : Les bornes de sommation peuvent être indifféremment 1 et n ou 0 et n - 1.

SO

■ 8. Fonctions définies par une intégrale. Dérivation

Déterminer la dérivée des fonctions :

1) $x\mapsto\int_0^x\frac{e^{-t}}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$,

2) $x\mapsto\int_x^{x^2}\frac{dt}{1+t^2}$.

1) La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{1+t^2}}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, notons alors F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$. Par définition, F est la primitive de la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{1+t^2}}$ qui s'annule en 0.

On en déduit alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{1+x^2}}$, et donc :

$$\boxed{\text{La dérivée de la fonction } x \mapsto \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{1+t^2}}\,dt \text{ est la fonction } x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{1+x^2}}}$$

2) La fonction $t \mapsto \dfrac{dt}{1+t^2}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, notons alors F et Φ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{1+t^2}$ et par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$. Φ étant une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$, Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Or, d'après la relation de Chasles, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \Phi(x^2) - \Phi(x)$. F est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on peut alors écrire :

$\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = 2x\Phi'(x^2) - \Phi'(x) = \dfrac{2x}{1+x^4} - \dfrac{1}{1+x^2}$, d'où la conclusion :

$$\boxed{\text{La dérivée de la fonction } x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{1+t^2} \text{ est la fonction } x \mapsto \frac{2x}{1+x^4} - \frac{1}{1+x^2}}$$

☞ Pour déterminer la dérivée d'une fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$ (où u et v sont deux fonctions dérivables), il faut définir une fonction $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ $(a \in C^0(f))$, puis écrire que : $F = \Phi \circ v - \Phi \circ u$. Comme $\Phi' = f$, on en déduit alors : $F' = v' \times (f \circ v) - u' \times (f \circ u)$.

SO EO

9. Relations de récurrence entre intégrales du type $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,dt\right)$

1) Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^1 \left(\ln(1+t)\right)^n dt.$$

a) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n en fonction de I_{n-1}.

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de I_n.

2) Soit $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ J_n = \int_0^1 t^n e^{-t} dt.$$

Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de J_n.

1) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $t \mapsto \ln^n(1+t)$ et $t \mapsto t+1$ étant de classe C^1 sur [0, 1], à l'aide d'une intégration par parties (on intègre $t \mapsto 1$ en $t \mapsto t+1$ et on dérive $t \mapsto \ln^n(1+t)$ en $t \mapsto \dfrac{n}{1+t}\ln^{n-1}(1+t)$), on peut écrire :

2) En itérant cette relation, on en déduit alors :

$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N}^*,\ I_{p,q} = \dfrac{q(q-1)\dots 1}{(p+1)(p+2)\dots(p+q)}\, I_{p+q,0}$ ce qui s'écrit encore :

$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N}^*,\ I_{p,q} = \dfrac{p!\,q!}{(p+q)!}\, I_{p+q,0}$ et donc, comme $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N}^*,\ I_{p+q,0} = \int_0^1 t^{p+q}\,dt = \dfrac{1}{p+q+1}$:

$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N}^*,\ I_{p,q} = \dfrac{p!\,q!}{(p+q+1)!}$ soit enfin, le cas q = 0 rejoignant le cas général :

$$\boxed{\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ I_{p,q} = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}}$$

☞ Se souvenir des intégrales $\left(\int_0^1 t^p(1-t)^q\,dt\right)$ et de la méthode pour les calculer (exercice très classique avec parfois quelques légères variations).

SO EO

★ 11. Intégrales de Wallis. Equivalent de C_{2n}^n

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,dt.$$

1) a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt.$$

b) Montrer également que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

2) a) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation entre I_{n+2} et I_n.

b) En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la valeur de I_{2p} et I_{2p+1} en fonction de p.

3) a) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, puis convergente. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{n}{n+1} \le \frac{I_n}{I_{n-1}} \le 1.$$

Calculer alors la limite de la suite $\left(\dfrac{I_n}{I_{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = n I_n I_{n-1}.$$

Etudier le sens de variation de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, puis en déduire un équivalent de I_n.

c) A l'aide des résultats précédents, établir que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{4n}(n!)^4}{n\left((2n)!\right)^2} = \pi,$$

puis que :

$$C_{2n}^n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

1) a) La fonction $t \mapsto \frac{\pi}{2} - t$ étant de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, en effectuant le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$, $du = -dt$, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - u\right)du$$ et comme $\forall u \in \mathbb{R}, \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u$:

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u\,du$$ ce qui s'écrit encore :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt}$$

b) La fonction $t \mapsto \sin t$ étant de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, en effectuant le changement de variable $u = \sin t$, $du = \cos t\,dt$ (ce qui s'écrit encore comme $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}$: $dt = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$), on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,dt = \int_0^1 \frac{u^n}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$, et donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}\,dt}$$

NB : Le lecteur attentif aura sans doute remarqué que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}$ n'est pas définie en 1. L'intégrale précédente n'est donc pas une intégrale d'une fonction continue sur un segment. C'est une intégrale dite "impropre" (cf. chapitre 10).

☞ Si en effectuant un changement de variable dans une intégrale d'une fonction continue sur un segment, on aboutit à une intégrale impropre dont les bornes sont finies, le changement de variable est licite. En revanche, si l'on aboutit à une intégrale impropre dont les bornes sont infinies, il faut procéder comme à l'exercice **10**.8.2b.

☞ Noter que les intégrales $\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,dt\right)_{n \in \mathbb{N}}$ sont les intégrales de Wallis et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

2) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $t \mapsto \sin^{n+1} t$ et $t \mapsto -\cos t$ étant de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, à l'aide d'une intégration par parties (on intègre $t \mapsto \sin t$ et on dérive $t \mapsto \sin^{n+1} t$ en $t \mapsto (n+1)\cos t \cdot \sin^n t$), on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \sin^{n+1} t\,dt = \left[-\cos t \cdot \sin^{n+1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \cdot \sin^n t\,dt$$

soit, comme $\forall t \in \mathbb{R}$, $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$, par linéarité de l'intégrale :

$$= 0 + (n+1)\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} t\,dt\right]$$ ce qui s'écrit encore :

$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2})$ soit :

■ Comme $\lim\limits_{x\to\pi}\sqrt{x}=\sqrt{\pi}$, on en déduit alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}\,(2n)!}=\sqrt{\pi}$, ce qui s'écrit encore : $\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}\,(2n)!}\sim\sqrt{\pi}$.

On en déduit alors : $\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}\sim\dfrac{\sqrt{n\pi}}{4^n}$, et donc :

$$\boxed{C_{2n}^n\sim\frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}}$$

☞ Se souvenir de la méthode de démonstration de la deuxième formule de Wallis et de l'équivalent de C_{2n}^n (équivalent classique).

SO E❷

● 12. Primitives de fonctions rationnelles

1) Calculer, pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\displaystyle\int_0^x\frac{t+2}{t^2+2t+2}\,dt$.

2) a) Déterminer trois réels a, b et c tels que : $\forall t\in[0,1]$, $\dfrac{1}{1+t^3}=\dfrac{a}{t+1}+\dfrac{bt+c}{t^2-t+1}$.

b) En déduire la valeur de : $\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{1+t^3}$.

3) **(S❷)** Calculer, pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\displaystyle\int_0^x\frac{dt}{(t^2+t+1)^2}$.

<u>Primitives de fonctions rationnelles</u>

I. Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples

Soient $F=\dfrac{P}{R}$ une fraction rationnelle irréductible (P et R sont deux polynômes tels que $R\neq0$). Soient également $(\lambda_i)_{1\le i\le n}$ les racines réelles de R d'ordres de multiplicité respectifs $(\alpha_i)_{1\le i\le n}$ et $(\mu_i,\overline{\mu_i})_{1\le i\le m}$ les racines complexes de R d'ordres de multiplicité respectifs $(\beta_i)_{1\le i\le m}$. On pose, pour tout $i\in[\![1,m]\!]$, $p_i=\mu_i+\overline{\mu_i}$ et $q_i=\mu_i\overline{\mu_i}$.

La décomposition de F en éléments simples s'écrit alors :

$$F=Q+\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{\alpha_i}\frac{A_{i,j}}{(X-\lambda_i)^j}\right)+\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{\beta_i}\frac{B_{i,j}X+C_{i,j}}{(X^2+p_iX+q_i)^j}\right),$$

où Q est le quotient de la division suivant les puissances décroissantes de P par R, $(A_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le\alpha_i}}$, $(B_{i,j})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le\beta_i}}$ et $(C_{i,j})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le\beta_i}}$ des nombres réels.

NB : Aux concours, la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle vous sera toujours suggérée (trouver les réels **a**, **b** et **c** tels que..., cf. **2**).

II. Calcul de $\int^x F(t)\,dt$

Pour calculer $\int^x F(t)\,dt$, on va déterminer la primitive de Q, puis les primitives des éléments simples de première espèce : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{\alpha_i}\frac{A_{i,j}}{(X-\lambda_i)^j}\right)$ et des éléments simples de seconde espèce : $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{\beta_i}\frac{B_{i,j}X+C_{i,j}}{(X^2+p_iX+q_i)^j}\right)$.

• En posant $y = \dfrac{2x+p}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}$ et $I_j = \displaystyle\int^y \frac{dv}{(v^2+1)^j}$, deux cas se présentent alors :

– si $j = 1$: $I_1 = \displaystyle\int^y \frac{dv}{v^2+1} = \text{Arctan } y$.

– si $j \geq 2$, on exprime I_j en fonction de I_{j-1} : $I_j = \displaystyle\int^y \frac{dv}{(v^2+1)^j} = \int^y \frac{(v^2+1)-v^2}{(v^2+1)^j}dv = I_{j-1} - \frac{1}{2}\int^y \frac{2v^2}{(v^2+1)^j}dv$ et

on calcule ensuite $\displaystyle\int^y \frac{2v^2}{(v^2+1)^j}dv$ à l'aide d'une intégration par parties (on dérive $v \mapsto v$ et on intègre $v \mapsto \dfrac{2v}{(v^2+1)^j}$) :

$$\int^y v \times \frac{2v}{(v^2+1)^j}dv = \left[\frac{v}{(1-j)(v^2+1)^{j-1}}\right]^y - \frac{1}{1-j}\int^y \frac{dv}{(v^2+1)^{j-1}}$$ ce qui s'écrit encore :

$$\int^y \frac{2v^2}{(v^2+1)^j}dv = \frac{y}{(1-j)(y^2+1)^{j-1}} - \frac{1}{1-j}I_{j-1}$$ et comme $I_j = I_{j-1} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int^y \frac{2v^2}{(v^2+1)^j}dv$:

$$I_j = \left(1 + \frac{1}{2(1-j)}\right)I_{j-1} - \frac{y}{2(1-j)(y^2+1)^{j-1}}.$$

En itérant cette relation, on détermine alors une expression de I_j en fonction de $I_1 = \text{Arctan } y$.

1) On a : $\forall t \in \mathbb{R}$, $t^2 + 2t + 2 = (t+1)^2 + 1$, d'où : $\forall t \in \mathbb{R}$, $t^2 + 2t + 2 > 0$. On peut alors écrire :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{t+2}{t^2+2t+2} = \frac{1}{2}\,\frac{2t+2}{t^2+2t+2} + \frac{1}{t^2+2t+2}$$ soit, en intégrant cette relation sur le segment d'extrémités 0 et x ($x \in \mathbb{R}$), les fonctions en présence étant continues sur cet intervalle :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x \frac{t+2}{t^2+2t+2}dt = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{2t+2}{t^2+2t+2}dt + \int_0^x \frac{dt}{t^2+2t+2}$$ soit encore, en reconnaissant la dérivée de $t \mapsto \ln(t^2+2t+2)$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x \frac{t+2}{t^2+2t+2}dt = \frac{1}{2}\left[\ln(t^2+2t+2)\right]_0^x + \int_0^x \frac{dt}{t^2+2t+2}$$ i.e. :

$$= \frac{\ln(x^2+2x+2)}{2} - \frac{\ln 2}{2} + \int_0^x \frac{dt}{t^2+2t+2}.$$

Comme $\forall t \in \mathbb{R}$, $t^2 + 2t + 2 = (t+1)^2 + 1$, la fonction $t \mapsto t+1$ étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, en effectuant le changement de variable $u = t+1$, $du = dt$, on peut alors écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x \frac{dt}{t^2+2t+2} = \int_1^{x+1} \frac{du}{u^2+1}$$ soit :

$$= \left[\text{Arctan}\, u\right]_1^{x+1}$$ i.e. :

$$= \text{Arctan}(x+1) - \text{Arctan}\,1$$ et donc, comme $\text{Arctan}\,1 = \frac{\pi}{4}$:

$$= \text{Arctan}(x+1) - \frac{\pi}{4}.$$

▫ Or, on a :

$\forall t \in [0, 1], \dfrac{t-2}{t^2-t+1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{2t-1}{t^2-t+1} - \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{t^2-t+1}$ soit, en intégrant cette relation sur [0, 1], les fonctions en présence étant continues sur cet intervalle :

$$\int_0^1 \frac{t-2}{t^2-t+1}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t-1}{t^2-t+1}\,dt - \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{dt}{t^2-t+1}$$ soit encore :

$$= \frac{1}{2}\left[\ln(t^2-t+1)\right]_0^1 - \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{dt}{t^2-t+1}$$ i.e. :

$$= -\frac{3}{2}\int_0^1 \frac{dt}{t^2-t+1}.$$

Comme $\forall t \in \mathbb{R}, t^2 - t + 1 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$, la fonction $t \mapsto t - \frac{1}{2}$ étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, en effectuant le changement de variable $u = t - \frac{1}{2}$, $du = dt$, on peut écrire :

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^2-t+1} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}}$$ soit, la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{u^2+\frac{3}{4}}$ étant paire :

$$= 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}}$$ soit encore, la fonction $u \mapsto \dfrac{2u}{\sqrt{3}}$ étant de classe C^1 sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, en effectuant le changement de variable $v = \dfrac{2u}{\sqrt{3}}$, $dv = \dfrac{2\,du}{\sqrt{3}}$:

$$= \sqrt{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dv}{\frac{3}{4}(v^2+1)}$$ i.e. :

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dv}{v^2+1}$$ soit enfin :

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3}\left[\operatorname{Arctan} v\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$ et comme $\operatorname{Arctan} 0 = 0$ et $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{\pi}{6}$:

$$= \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}.$$

On peut maintenant conclure : $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^3} = \frac{\ln 2}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2}\,\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}\right)$, et donc :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{dt}{1+t^3} = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}}$$

3) Comme $\forall t \in \mathbb{R}, t^2 + t + 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$, on a : $\forall t \in \mathbb{R}, t^2 + t + 1 > 0$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2+t+1}$ est donc continue sur $\mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto t + \frac{1}{2}$ étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, en effectuant le changement de variable $u = t + \frac{1}{2}$, $du = dt$, on peut écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x \frac{dt}{(t^2+t+1)^2} = \int_{\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} \frac{du}{\left(u^2+\frac{3}{4}\right)^2}$$ soit, la fonction $u \mapsto \frac{2u}{\sqrt{3}}$ étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$,

en effectuant le changement de variable $v = \frac{2u}{\sqrt{3}}$, $dv = \frac{2\,du}{\sqrt{3}}$:

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}} \frac{dv}{\left[\frac{3}{4}(v^2+1)\right]^2}$$ et donc :

$$= \frac{8}{3\sqrt{3}} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}} \frac{dv}{(v^2+1)^2}.$$

Or, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}} \frac{dv}{(v^2+1)^2} = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}} \frac{(v^2+1)-v^2}{(v^2+1)^2}\,dv$$ soit :

$$= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}} \frac{dv}{v^2+1} - \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}} \frac{2v^2}{(v^2+1)^2}\,dv$$ soit encore :

$$= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}} \frac{dv}{v^2+1} - \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}} \left[v \times \frac{2v}{(v^2+1)^2}\right] dv.$$

Les fonctions $v \mapsto v$ et $v \mapsto -\frac{1}{v^2+1}$ étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, à l'aide d'une intégration par parties (on intègre $v \mapsto \frac{2v}{(v^2+1)^2}$ en $v \mapsto -\frac{1}{v^2+1}$ et on dérive $v \mapsto v$), on peut écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}} \left[v \times \frac{2v}{(v^2+1)^2}\right] dv = \left[-\frac{v}{v^2+1}\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}} + \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}} \frac{dv}{v^2+1}$$ soit :

$$= -\frac{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}{\frac{4x^2+4x+1}{3}+1} + \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{3}+1} + \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}} \frac{dv}{v^2+1}$$ soit enfin :

$$= -\frac{\sqrt{3}}{4}\,\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}} \frac{dv}{v^2+1}.$$

On en déduit alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}} \frac{dv}{(v^2+1)^2} = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}} \frac{dv}{v^2+1} + \frac{\sqrt{3}}{8}\,\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$ et donc, à l'aide des résultats précédents :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \int_0^x \frac{dt}{(t^2+t+1)^2} = \frac{4}{3\sqrt{3}}\left[\text{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right] + \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} - \frac{1}{3}$$

soit enfin, comme $\text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$:

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \int_0^x \frac{dt}{(t^2+t+1)^2} = \frac{4}{3\sqrt{3}}\,\text{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} - \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} - \frac{1}{3}}$$

SO EO

13. Primitives de fonctions polynômes en sin et cos

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour toute fonction f continue sur I, on note $x \mapsto \int^x f(t)\,dt$, la primitive de f définie sur I, de constante nulle. Déterminer alors l'expression des fonctions :

1) $x \mapsto \int^x \sin^5 t \cos^7 t\,dt$,

2) **(SO)** $x \mapsto \int^x \sin^2 t \cos^2 t\,dt$.

Primitives de fonctions polynômes en sin et cos

Pour calculer la primitive (ou une intégrale) d'une fonction polynôme en sin et cos : $I_{p,q}(x) = \int^x \sin^p t \cos^q t\,dt$, trois cas se présentent :

1. Si p = 1 ou q = 1, on a clairement : $I_{1,q}(x) = -\frac{\cos^{q+1}x}{q+1}$ et $I_{p,1}(x) = \frac{\sin^{p+1}x}{p+1}$.

2. Si p ou q est un entier impair supérieur ou égal à 3 :

• Si p est impair : on pose p = 2i + 1 et on a alors : $\sin^{2i+1}t = (1-\cos^2 t)^i \sin t$, d'où :

$I_{2i+1,q} = \int^x \sin t\,(1-\cos^2 t)^i \cos^q t\,dt$.

En développant $(1-\cos^2 t)^i$ à l'aide de la formule du binôme de Newton : $(1-\cos^2 t)^i = \sum_{k=0}^{i} C_i^k (-1)^k \cos^{2k} t$, on obtient : $I_{2i+1,q} = \sum_{k=0}^{i} C_i^k (-1)^k \int^x \sin t \cos^{2k+q} t\,dt$, et on se ramène au cas **1** : $I_{2i+1,q} = \sum_{k=0}^{i} C_i^k (-1)^{k+1} \frac{\cos^{2k+q+1}x}{2k+q+1}$.

• Si q est impair : on pose q = 2j + 1, et on a alors : $\cos^{2j+1}t = (1-\sin^2 t)^j \cos t$, d'où :

$I_{p,2j+1} = \int^x \cos t\,(1-\sin^2 t)^j \sin^p t\,dt$.

En développant $(1-\sin^2 t)^j$ à l'aide de la formule du binôme de Newton : $(1-\sin^2 t)^j = \sum_{k=0}^{j} C_j^k (-1)^k \sin^{2k} t$, on obtient : $I_{p,2j+1} = \sum_{k=0}^{j} C_j^k (-1)^k \int^x \cos t \sin^{2k+p} t\,dt$, et on se ramène au cas **1** : $I_{p,2j+1} = \sum_{k=0}^{j} C_j^k (-1)^k \frac{\sin^{2k+p+1}x}{2k+p+1}$.

3. (SO) Si p et q sont tous les deux pairs, on linéarise alors $\sin^p t \cos^q t$ à l'aide des formules d'Euler et on intègre la relation ainsi trouvée (bien évidemment, dans les deux cas de figure précédents, la linéarisation était également possible, mais plus longue).

1) La fonction $t \mapsto \sin^5 t \cos^7 t$ étant continue sur $\mathbb{R}$, elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$. Or, on a :

$\forall t\in\mathbb{R},\ \sin^5 t = \sin t\,(1-\cos^2 t)^2 = \sin t\,(1 - 2\cos^2 t + \cos^4 t)$.

On en déduit alors :

$$\forall x\in \mathbb{R},\ \int^x \sin^5 t\cos^7 t\,dt = \int^x \sin t\,(1-2\cos^2 t+\cos^4 t)\cos^7 t\,dt \qquad \text{soit :}$$

$$= \int^x \sin t\,(\cos^7 t - 2\cos^9 t + \cos^{11} t)\,dt \qquad \text{et donc :}$$

$$= \left[-\frac{\cos^8 t}{8} + 2\,\frac{\cos^{10} t}{10} - \frac{\cos^{12} t}{12}\right]^x \qquad \text{soit enfin :}$$

$$\boxed{\forall x\in \mathbb{R},\ \int^x \sin^5 t\cos^7 t\,dt = \cos^8 x\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}\cos^2 x - \frac{1}{12}\cos^4 x\right)}$$

2) La fonction $t\mapsto \sin^2 t\cos^2 t$ étant continue sur $\mathbb{R}$, elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$. Or, à l'aide des formules d'Euler, on peut écrire :

$$\forall t\in \mathbb{R},\ \sin^2 t\cos^2 t = \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^2\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^2 \qquad \text{soit, en développant cette expression :}$$

$$= -\frac{1}{8}\ \frac{(e^{2it}-2+e^{-2it})(e^{2it}+2+e^{-2it})}{2} \qquad \text{i.e. :}$$

$$= -\frac{1}{8}\left(\frac{e^{4it}+e^{-4it}}{2}-1\right) \qquad \text{soit encore, d'après les formules d'Euler :}$$

$$= -\frac{1}{8}(\cos 4t - 1).$$

On en déduit alors :

$$\forall x\in \mathbb{R},\ \int^x \sin^2 t\cos^2 t\,dt = -\frac{1}{8}\int^x (\cos 4t - 1)\,dt \qquad \text{soit :}$$

$$= -\frac{1}{8}\left[\frac{\sin 4t}{4} - t\right]^x \qquad \text{et donc :}$$

$$\boxed{\forall x\in \mathbb{R},\ \int^x \sin^2 t\cos^2 t\,dt = -\frac{1}{8}\left(\frac{\sin 4x}{4} - x\right)}$$

S❷

● 14. Primitives de fonctions rationnelles en sin et cos

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour toute fonction f définie sur I, on note $x\mapsto \int^x f(t)\,dt$, la primitive de f définie sur I, de constante nulle.

1) Déterminer l'expression des fonctions :

a) $x\mapsto \sin(\text{Arcsin}\,x)$, $x\mapsto \cos(\text{Arcsin}\,x)$ et $x\mapsto \tan(\text{Arcsin}\,x)$.

b) $x\mapsto \sin(\text{Arccos}\,x)$, $x\mapsto \cos(\text{Arccos}\,x)$ et $x\mapsto \tan(\text{Arccos}\,x)$.

c) $x\mapsto \sin(\text{Arctan}\,x)$, $x\mapsto \cos(\text{Arctan}\,x)$ et $x\mapsto \tan(\text{Arctan}\,x)$.

2) Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^3 t}$,

b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t}{\sin^3 t}\,dt$,

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{x^2\cos^2 t + \sin^2 t}$ $(x \in \mathbb{R}^*)$.

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+\cos t}$.

3) Déterminer maintenant l'expression des primitives suivantes :

a) $x \mapsto \displaystyle\int^x \frac{dt}{\sin t}$.

b) $x \mapsto \displaystyle\int^x \frac{dt}{\cos t}$.

Primitives de fonctions rationnelles en sin et cos : règles de Bioche

Pour calculer la primitive (ou une intégrale) d'une fonction rationnelle f en sin et cos, on procède comme suit (règles de Bioche) :

– si en substituant $-t$ à t dans $f(t)\,dt$, ce terme ne change pas, i.e. si $f(t) = -f(-t)$, on effectue le changement de variable : $u = \cos t$, $du = -\sin t\, dt$,

– si en substituant $\pi - t$ à t dans $f(t)\,dt$, ce terme ne change pas, i.e. si $f(t) = -f(\pi - t)$, on effectue le changement de variable : $u = \sin t$, $du = \cos t\, dt$,

– si en substituant $\pi + t$ à t dans $f(t)\,dt$, ce terme ne change pas, i.e. si $f(t) = f(\pi + t)$, on effectue le changement de variable : $u = \tan t$, $du = \dfrac{dt}{\cos^2 t}$,

– si aucun des trois tests ne marche, on effectue le changement de variable : $u = \tan\dfrac{t}{2}$, $du = \dfrac{dt}{2\cos^2\frac{t}{2}}$

(ce changement de variable étant en fait toujours possible, mais plus long, dans tous les cas précédents).

Lorsque l'on effectue le changement de variable de classe C^1 et bijectif $u = \operatorname{trig} t$ (trig désigne ici une des fonctions trigonométriques précédentes), il faut écrire : $u = \operatorname{trig} t$ ($t = \operatorname{Arctrig} u$), $du = g(t)\,dt$ ($dt = h(u)\,du$) où h est une fonction déterminée par la connaissance des trig(Arctrig u) ou plus simplement en dérivant Arctrig : $h = \operatorname{Arctrig}'$. On se ramène alors à la recherche d'une primitive d'une fonction rationnelle (cf. exercice 12).

1) a) ▪ D'après la définition de la fonction Arcsin, on peut écrire :

$$\boxed{\forall x \in [-1, 1],\ \sin(\operatorname{Arcsin} x) = x}$$

▪ On a : $\forall x \in [-1, 1]$, $\sin^2(\operatorname{Arcsin} x) + \cos^2(\operatorname{Arcsin} x) = 1$, d'où : $\forall x \in [-1, 1]$, $\cos^2(\operatorname{Arcsin} x) = 1 - x^2$. Comme $\operatorname{Arcsin}([-1, 1]) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x \geq 0$, on peut alors écrire :

$$\boxed{\forall x \in [-1, 1],\ \cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1 - x^2}}$$

▪ On peut maintenant écrire : $\forall x \in]-1, 1[$, $\tan(\operatorname{Arcsin} x) = \dfrac{\sin(\operatorname{Arcsin} x)}{\cos(\operatorname{Arcsin} x)}$, soit :

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[,\ \tan(\operatorname{Arcsin} x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

b) ▪ De même, d'après la définition de la fonction Arccos, on peut écrire :

$$\boxed{\forall x \in [-1, 1],\ \cos(\operatorname{Arccos} x) = x}$$

■ On a : $\forall x \in [-1, 1]$, $\sin^2(\text{Arccos}\, x) + \cos^2(\text{Arccos}\, x) = 1$, d'où : $\forall x \in [-1, 1]$, $\sin^2(\text{Arccos}\, x) = 1 - x^2$. Comme $\text{Arccos}([-1, 1]) = [0, \pi]$ et $\forall x \in [0, \pi]$, $\sin x \geq 0$, on peut alors écrire :

$$\boxed{\forall x \in [-1, 1],\ \sin(\text{Arccos}\, x) = \sqrt{1 - x^2}}$$

■ On peut maintenant écrire : $\forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, $\tan(\text{Arccos}\, x) = \dfrac{\sin(\text{Arccos}\, x)}{\cos(\text{Arccos}\, x)}$, soit :

$$\boxed{\forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\},\ \tan(\text{Arccos}\, x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}}$$

c) ■ De même, d'après la définition de la fonction Arctan, on peut écrire :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \tan(\text{Arctan}\, x) = x}$$

■ On en déduit alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \sin^2(\text{Arctan}\, x) + \cos^2(\text{Arctan}\, x) = 1 \\ \tan(\text{Arctan}\, x) = x \end{cases}$$ soit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \sin^2(\text{Arctan}\, x) + \cos^2(\text{Arctan}\, x) = 1 \\ \dfrac{\sin(\text{Arctan}\, x)}{\cos(\text{Arctan}\, x)} = x \end{cases}$$ d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \sin(\text{Arctan}\, x) = x \cos(\text{Arctan}\, x) \\ x^2 \cos^2(\text{Arctan}\, x) + \cos^2(\text{Arctan}\, x) = 1 \end{cases}$$ et comme $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + x^2 \neq 0$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \sin(\text{Arctan}\, x) = x \cos(\text{Arctan}\, x) \\ \cos^2(\text{Arctan}\, x) = \dfrac{1}{1 + x^2} \end{cases}$$ et donc, comme $\text{Arctan}(\mathbb{R}) = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos x > 0$:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(\text{Arctan}\, x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \sin(\text{Arctan}\, x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}}$$

2) a) La fonction $t \mapsto \sin t$ étant une fonction de classe C^1 et bijective sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, en effectuant le changement de variable $u = \sin t$ ($t = \text{Arcsin}\, u$), $du = \cos t\, dt$ ($dt = \dfrac{du}{\cos(\text{Arcsin}\, u)} = \dfrac{du}{\sqrt{1 - u^2}}$), on peut écrire :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^3 t} = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{(1 - u^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}$$ soit :

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{(1 - u^2)^2}$$ et donc :

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{(1 - u^2) + u^2}{(1 - u^2)^2}\, du$$ i.e. :

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{1 - u^2} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{2u^2}{(1 - u^2)^2}\, du.$$

Or, les fonctions $u \mapsto u$ et $u \mapsto \dfrac{1}{1 - u^2}$ étant de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, à l'aide d'une intégration par parties (on intègre $u \mapsto \dfrac{2u}{(1 - u^2)^2}$ en $u \mapsto \dfrac{1}{1 - u^2}$ et on dérive $u \mapsto u$), on peut écrire :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{x^2\cos^2 t + \sin^2 t} = \int_0^1 \frac{\dfrac{du}{1+u^2}}{\dfrac{x^2}{1+u^2} + \dfrac{u^2}{1+u^2}}$$ soit :

$$= \int_0^1 \frac{du}{x^2+u^2}$$ soit encore, la fonction $u \mapsto \frac{u}{x}$ étant de classe C^1 sur $[0, 1]$, en effectuant le changement de variable $v = \frac{u}{x}$, $dv = \frac{du}{x}$:

$$= \frac{1}{x}\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{dv}{1+v^2}$$ et donc :

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{x^2\cos^2 t + \sin^2 t} = \frac{1}{x}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)}$$

d) La fonction $t \mapsto \tan\frac{t}{2}$ étant une fonction de classe C^1 et bijective sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, en effectuant le changement de variable $u = \tan\frac{t}{2}$ ($t = 2\operatorname{Arctan} u$), $du = \dfrac{dt}{2\cos^2\frac{t}{2}}$ ($dt = 2\cos^2(\operatorname{Arctan} u)\, du = \dfrac{2}{1+u^2}du$), on peut écrire :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+\cos t} = \int_0^1 \frac{\dfrac{2}{1+u^2}}{1+\cos(2\operatorname{Arctan} u)}du$$ soit, à l'aide des formules trigonométriques classiques :

$$= \int_0^1 \frac{\dfrac{2}{1+u^2}}{2\cos^2(\operatorname{Arctan} u)}du$$ soit encore, comme $\forall u \in \mathbb{R}$, $\cos^2(\operatorname{Arctan} u) = \dfrac{1}{1+u^2}$:

$$= \int_0^1 du$$ et donc :

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+\cos t} = 1}$$

3) a) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sin t}$ étant continue sur tout intervalle de $\mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, elle admet une primitive sur tout intervalle de $\mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. La fonction $t \mapsto \tan\frac{t}{2}$ étant une fonction de classe C^1 et bijective sur tout intervalle de $\mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, en effectuant le changement de variable $u = \tan\frac{t}{2}$ ($t = 2\operatorname{Arctan} u$), $du = \dfrac{dt}{2\cos^2\frac{t}{2}}$ ($dt = 2\cos^2(\operatorname{Arctan} u)\, du = \dfrac{2}{1+u^2}du$), on peut écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\},\ \int^x \frac{dt}{\sin t} = \int^{\tan\frac{x}{2}} \frac{\dfrac{2}{1+u^2}}{\sin(2\operatorname{Arctan} u)}du$$ soit, à l'aide des formules trigonométriques classiques :

$$= \int^{\tan\frac{x}{2}} \frac{\dfrac{2}{1+u^2}}{2\cos(\operatorname{Arctan} u)\sin(\operatorname{Arctan} u)}du$$ soit encore, comme $\forall u \in \mathbb{R}$, $\cos(\operatorname{Arctan} u)\sin(\operatorname{Arctan} u) = \dfrac{u}{1+u^2}$:

$$= \int^{\tan\frac{x}{2}} \frac{du}{u}$$ et donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\},\ \int^x \frac{dt}{\sin t} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|}$$

b) La fonction $t \mapsto \frac{1}{\cos t}$ étant continue sur tout intervalle de $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, elle admet une primitive sur tout intervalle de $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. La fonction $t \mapsto t + \frac{\pi}{2}$ étant une fonction de classe C^1 sur tout intervalle de $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, en effectuant le changement de variable $u = t + \frac{\pi}{2}$, $du = dt$, on peut écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}, \int^x \frac{dt}{\cos t} = \int^{x+\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\cos\left(u - \frac{\pi}{2}\right)}$$

et donc, comme $\forall u \in \mathbb{R}$, $\cos\left(u - \frac{\pi}{2}\right) = \sin u$:

$$= \int^{x+\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sin u}$$

soit enfin, d'après les résultats de la question précédente :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}, \int^x \frac{dt}{\cos t} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|}$$

☞ Se souvenir de la méthode de calcul des primitives des fonctions $t \mapsto \frac{1}{\sin t}$ et $t \mapsto \frac{1}{\cos t}$.

S❶ E❷

★ 15. La formule d'intégration par parties itérée

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et n un entier naturel non nul. Soient également f et g deux fonctions de classe C^n sur $[a, b]$. Montrer que :

$$\int_a^b f^{(n)}(t)\,g(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[f^{(n-k-1)}(t)\,g^{(k)}(t)\right]_a^b + (-1)^n \int_a^b f(t)\,g^{(n)}(t)\,dt.$$

Montrons par montée finie que : $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\int_a^b f^{(n)}(t)\,g(t)\,dt = \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k \left[f^{(n-k-1)}(t)\,g^{(k)}(t)\right]_a^b + (-1)^j \int_a^b f^{(n-j)}(t)\,g^{(j)}(t)\,dt$.

• Au rang $j = 1$, les fonctions $f^{(n-1)}$ et g étant de classe C^1 sur $[a, b]$ (f et g sont de classe C^n sur $[a, b]$), à l'aide d'une intégration par parties (on intègre $f^{(n)}$ et on dérive g), on peut écrire :

$$\int_a^b f^{(n)}(t)\,g(t)\,dt = \left[f^{(n-1)}(t)\,g(t)\right]_a^b - \int_a^b f^{(n-1)}(t)\,g'(t)\,dt.$$

La propriété est donc bien vérifiée au rang $j = 1$.

• Soit $j \in [\![1, n-1]\!]$ (si $n \geq 2$), supposons $\displaystyle\int_a^b f^{(n)}(t)\,g(t)\,dt = \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k \left[f^{(n-k-1)}(t)\,g^{(k)}(t)\right]_a^b + (-1)^j \int_a^b f^{(n-j)}(t)\,g^{(j)}(t)\,dt$. Les fonctions $f^{(n-j-1)}$ et $g^{(j)}$ étant de classe C^1 sur $[a, b]$ (f et g sont de classe C^n sur $[a, b]$), à l'aide d'une intégration par parties (on intègre $f^{(n-j)}$ et on dérive $g^{(j)}$), on peut écrire :

$$\int_a^b f^{(n-j)}(t)\,g^{(j)}(t)\,dt = \left[f^{(n-j-1)}(t)\,g^{(j)}(t)\right]_a^b - \int_a^b f^{(n-j-1)}(t)\,g^{(j+1)}(t)\,dt.$$

On en déduit alors, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\int_a^b f^{(n)}(t)\,g(t)\,dt = \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k \left[f^{(n-k-1)}(t)\,g^{(k)}(t)\right]_a^b + (-1)^j \left[f^{(n-j-1)}(t)\,g^{(j)}(t)\right]_a^b - (-1)^j \int_a^b f^{(n-j-1)}(t)\,g^{(j+1)}(t)\,dt$$

soit, le deuxième crochet correspondant au terme en $k = j$ dans la somme :

En posant $A = M(b-a) + |f(a)| + |f(b)|$, on peut alors conclure :

$$\boxed{\exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \left|\int_a^b f(t)\sin(xt)\,dt\right| \le \frac{A}{x}}$$

2) La fonction $x \mapsto \left|\int_a^b f(t)\sin(xt)\,dt\right|$ étant encadrée par la fonction nulle et par une fonction qui tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, on peut alors écrire (théorème de l'encadrement) : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\int_a^b f(t)\sin(xt)\,dt\right| = 0$, et donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(xt)\,dt = 0}$$

☞ Se souvenir que si f est de classe C^1 sur [a, b], alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(xt)\,dt = \lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(xt)\,dt = 0$: théorème de Riemann-Lebesgue (démonstrations à connaître, celle avec cos étant similaire à celle avec sin).

De façon plus générale, si f est de classe C^1 sur [a, b], alors :

– si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin\big(g(x)t\big)\,dt = \lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos\big(g(x)t\big)\,dt = 0$, et :

– si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(u_n t)\,dt = \lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(u_n t)\,dt = 0$.

S❶ E❷

● 17. Théorème de la moyenne

Soient a et b deux réels tels que a < b, f une fonction continue sur [a, b] et g une fonction continue et positive sur [a, b].

1) Montrer que :

$$\exists c \in\,]a, b[,\ \int_a^b f(t)\,dt = (b-a)f(c).$$

2) a) Montrer que :

$$\exists c \in [a, b],\ \int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt.$$

b) Retrouver le **1** pour $c \in [a, b]$.

__Application__ : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par f_n la fonction définie sur [0, 1] par : $\begin{cases} f_n(0) = 0 \\ \forall t \in\,]0, 1[,\ f_n(t) = \dfrac{t^n \ln t}{1-t^2} \\ f_n(1) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

et par I_n l'intégrale $I_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

1) Soit F une primitive de f sur [a, b]. Comme f est continue sur [a, b], F est continue sur [a, b] et dérivable de dérivée f sur]a, b[. Le théorème des accroissements finis nous permet alors d'écrire :

$\exists c \in\,]a, b[,\ F(b) - F(a) = (b-a)F'(c)$ et donc, comme $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt$ et $F' = f$:

$$\boxed{\exists c \in\,]a, b[,\ \int_a^b f(t)\,dt = (b-a)f(c)}$$

2) **a)** Deux cas se présentent :

❑ Si $\forall t \in [a, b]$, $g(t) = 0$, on a alors : $\forall t \in [a, b]$, $f(t)g(t) = 0$, et donc : $\int_a^b g(t)\,dt = 0$ et $\int_a^b f(t)g(t)\,dt = 0$. On en déduit alors, les deux membres de l'égalité étant nuls : $\exists c \in [a, b]$, $\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$.

❑ Si $\exists t \in [a, b]$, $g(t) \neq 0$, comme g est une fonction continue et positive sur $[a, b]$, on peut alors écrire (cf. exercice 1.1b) : $\int_a^b g(t)\,dt > 0$.

Or, comme f est continue sur $[a, b]$, elle est bornée sur ce segment et atteint ses bornes (l'image d'un segment par une fonction continue est un segment). Soient alors m le minimum et M le maximum de f sur $[a, b]$. On peut alors écrire :

$\forall t \in [a, b]$, $m \leq f(t) \leq M$ soit, en multipliant cette relation par $g(t) \geq 0$ ($t \in [a, b]$, g étant positive sur $[a, b]$) :

$\forall t \in [a, b]$, $m\,g(t) \leq f(t)g(t) \leq M\,g(t)$ soit encore, en intégrant cette relation sur $[a, b]$, les fonctions en présence étant continues sur cet intervalle :

$m\int_a^b g(t)\,dt \leq \int_a^b f(t)g(t)\,dt \leq M\int_a^b g(t)\,dt$ et donc, en divisant cette relation par $\int_a^b g(t)\,dt > 0$:

$$m \leq \frac{\int_a^b f(t)g(t)\,dt}{\int_a^b g(t)\,dt} \leq M.$$

Comme f est continue sur $[a, b]$ et comme $\left[\dfrac{\int_a^b f(t)g(t)\,dt}{\int_a^b g(t)\,dt}\right] \in [m, M]$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet alors d'écrire : $\exists c \in [a, b]$, $f(c) = \dfrac{\int_a^b f(t)g(t)\,dt}{\int_a^b g(t)\,dt}$, et donc :

$\exists c \in [a, b]$, $\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$.

❑ On peut maintenant conclure, dans tous les cas de figure :

$$\boxed{\exists c \in [a, b],\ \int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt}$$

b) Soit g la fonction constante égale à 1 sur $[a, b]$. D'après la question précédente, on peut alors écrire :

$$\boxed{\exists c \in [a, b],\ \int_a^b f(t)\,dt = (b - a)f(c)}$$

☞ Se souvenir du théorème de la moyenne (hors-programme) et de sa démonstration.

__Application__ : Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par : $\begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall t \in]0, 1[,\ f(t) = \dfrac{t\ln t}{1 - t^2} \\ f(1) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$. f est continue sur $]0, 1[$ en tant que produit et quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues sur $]0, 1[$.

Hidden page

1) La fonction exp étant de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, pour tout $u \in \mathbb{R}$, elle est de classe C^2 sur le segment d'extrémités 0 et u, noté [0 : u]. Comme $\exp^{(2)} = \exp$, pour tout $u \in \mathbb{R}$, l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à l'ordre 2 à la fonction exp entre 0 et u nous permet alors d'écrire : $\forall u \in \mathbb{R}, \left|e^u - 1 - u\right| \leq \sup\limits_{[0:u]} |\exp| \cdot \frac{u^2}{2}$.

Or, on a :

– $\forall u \in \mathbb{R}^{+}$, $\sup\limits_{[0:u]} |\exp| = e^u = e^{|u|}$, et :

– $\forall u \in \mathbb{R}^{-}$, $\sup\limits_{[0:u]} |\exp| = e^0 = 1$, et donc, dans tous les cas de figure :

$\forall u \in \mathbb{R}$, $\sup\limits_{[0:u]} |\exp| \leq e^{|u|}$, d'où la conclusion :

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{R}, \left|e^u - 1 - u\right| \leq e^{|u|} \frac{u^2}{2}}$$

☞ Lorsque l'on utilise des intervalles entre deux points a et b pour lesquels on ne sait pas si a < b ou b < a, il faut éviter d'utiliser la notation avec des crochets (en effet, [a, b] ou]a, b[... signifient que a < b) et utiliser alors une nouvelle notation (ici [a : b]) que l'on doit expliciter.

2) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall h \in \mathbb{R}^*, |h| < \frac{x}{2}, \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^1 f(t)\left(e^{-(x+h)t} - e^{-xt}\right) dt \quad \text{soit :}$$

$$= \frac{1}{h} \int_0^1 f(t) e^{-xt}\left(e^{-ht} - 1\right) dt \quad \text{d'où :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall h \in \mathbb{R}^*, |h| < \frac{x}{2}, \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \int_0^1 t f(t) e^{-xt} dt = \frac{1}{h} \int_0^1 f(t) e^{-xt}\left(e^{-ht} - 1 + ht\right) dt$$

soit encore, en passant à la valeur absolue :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall h \in \mathbb{R}^*, |h| < \frac{x}{2}, \left|\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \int_0^1 t f(t) e^{-xt} dt\right| = \frac{1}{|h|} \left|\int_0^1 f(t) e^{-xt}\left(e^{-ht} - 1 + ht\right) dt\right|$$

et donc, la valeur absolue d'une intégrale étant inférieure ou égale à l'intégrale de la valeur absolue :

$$\leq \frac{1}{|h|} \int_0^1 \left|f(t) e^{-xt}\left(e^{-ht} - 1 + ht\right)\right| dt \quad \text{i.e. :}$$

$$\leq \frac{1}{|h|} \int_0^1 |f(t)| \left|e^{-ht} - 1 + ht\right| e^{-xt} dt.$$

Or, on a vu à la question précédente que : $\forall u \in \mathbb{R}, \left|e^u - 1 - u\right| \leq e^{|u|} \frac{u^2}{2}$. En substituant -ht ($x \in \mathbb{R}_+^*$, $h \in \mathbb{R}^*$, $|h| < \frac{x}{2}$, $t \in [0, 1]$) à u, on en déduit alors : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall h \in \mathbb{R}^*, |h| < \frac{x}{2}, \forall t \in [0, 1], \left|e^{-ht} - 1 + ht\right| \leq e^{|h|t} \frac{h^2 t^2}{2}$, et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall h \in \mathbb{R}^*, |h| < \frac{x}{2}, \left|\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \int_0^1 t f(t) e^{-xt} dt\right| \leq \frac{h^2}{2|h|} \int_0^1 t^2 |f(t)| e^{|h|t} e^{-xt} dt \quad \text{i.e. :}$$

$$\leq \frac{|h|}{2} \int_0^1 t^2 |f(t)| e^{(|h|-x)t} dt.$$

Or, on a :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall h \in \mathbb{R}^*, |h| < \frac{x}{2}, \forall t \in [0, 1], (|h| - x)t \leq -\frac{xt}{2}$ soit, en composant cette relation par la fonction exponentielle (croissante sur $\mathbb{R}$) :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall h \in \mathbb{R}^*, |h| < \frac{x}{2}, \forall t \in [0, 1], e^{(|h|-x)t} \leq e^{-\frac{xt}{2}}$ et donc, d'après ce qui précède :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall h \in \mathbb{R}^*, |h| < \frac{x}{2}, \left|\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \int_0^1 t f(t) e^{-xt} dt\right| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^1 t^2 |f(t)| e^{-\frac{xt}{2}} dt}$$

☞ Pour majorer une expression de la forme $\left|\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}+\int_a^b g(x,t)\,dt\right|$, il faut écrire, pas à pas, $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}$, puis regrouper $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}+\int_a^b g(x,t)\,dt$ sous une même intégrale : $\int_a^b k(t)\,dt$.

En utilisant le fait que la valeur absolue d'une intégrale est inférieure ou égale à l'intégrale de la valeur absolue, on en déduit alors que : $\left|\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}+\int_a^b g(x,t)\,dt\right| \leq \int_a^b |k(t)|\,dt$.

Or, à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, on détermine aisément un majorant de $|k(t)|$ sur $[a, b]$ et on obtient ainsi le majorant recherché pour $\left|\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}+\int_a^b g(x,t)\,dt\right|$.

3) On a : $\forall x\in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{|h|}{2}\int_0^1 t^2\,|f(t)|\,e^{-\frac{xt}{2}}\,dt = 0$. Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, la fonction $h\mapsto \left|\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}+\int_0^1 t\,f(t)\,e^{-xt}\,dt\right|$ est donc encadrée par la fonction nulle et par une fonction qui tend vers 0 lorsque h tend vers 0, d'où (théorème de l'encadrement) : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{h\to 0}\left|\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}+\int_0^1 t\,f(t)\,e^{-xt}\,dt\right| = 0$, et donc :

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h} = -\int_0^1 t\,f(t)\,e^{-xt}\,dt$.

On peut alors conclure :

$$\boxed{g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*, \text{ et } \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ g'(x) = -\int_0^1 t\,f(t)\,e^{-xt}\,dt}$$

☞ S'il existe une fonction ε telle que : $\forall x\in I$, $\forall h\in V(0)$, $h\neq 0$, $\left|\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}-\int_a^b g(x,t)\,dt\right|\leq\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$, alors : $\forall x\in I$, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\int_a^b g(x,t)\,dt$. F est donc dérivable sur I de dérivée $x\mapsto\int_a^b g(x,t)\,dt$.

Pour dériver une fonction de la forme $F : x\mapsto\int_a^b f(x,t)\,dt$, on cherchera donc toujours à majorer l'expression $\left|\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}-\int_a^b g(x,t)\,dt\right|$ par $\varepsilon(h)$ (donnée par l'énoncé) où $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$, avant de conclure.

☞ Remarquer que si $F : x\mapsto\int_a^b f(x,t)\,dt$ et si, pour tout $x\in\mathcal{D}_F$, $t\mapsto\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[a, b]$, alors : $\forall x\in\mathcal{D}_F$, $F'(x)=\int_a^b\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$ (pour les notations, cf. chapitre **11**).

S❷ E❷

● 19. Intégrales et doubles limites

Soient α réel strictement positif et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$.

1) Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall\varepsilon\in\,]0,1[,\ 0\le I_n\le\varepsilon+\frac{1}{(1+\varepsilon^\alpha)^n}.$$

2) En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.$$

1) ❑ Comme $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall t\in[0,1],\ \dfrac{1}{(1+t^\alpha)^n}\ge 0$, par positivité de l'intégrale, on peut écrire :

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}\ge 0$ ①.

De plus, d'après la relation de Chasles, on peut également écrire :

$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n} = \int_0^\varepsilon \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n} + \int_\varepsilon^1 \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$ ②.

❑ Or, on a :

$\forall\varepsilon\in\,]0,1[,\ \forall t\in[0,\varepsilon],\ 1+t^\alpha\ge 1$ soit, en composant cette relation par la fonction puissance -n ($n\in\mathbb{N}^*$), fonction décroissante sur $[1,+\infty[$:

$\forall\varepsilon\in\,]0,1[,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall t\in[0,\varepsilon],\ \dfrac{1}{(1+t^\alpha)^n}\le 1$ et donc, en intégrant cette relation sur $[0,\varepsilon]$, les fonctions en présence étant continues sur cet intervalle :

$\forall\varepsilon\in\,]0,1[,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_0^\varepsilon \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}\le\varepsilon$ ③.

❑ De plus, la fonction $t\mapsto 1+t^\alpha$ étant croissante sur $[0,1]$, on peut écrire :

$\forall\varepsilon\in\,]0,1[,\ \forall t\in[\varepsilon,1],\ 1+t^\alpha\ge 1+\varepsilon^\alpha$ soit, en composant cette relation par la fonction puissance -n ($n\in\mathbb{N}^*$), fonction décroissante sur $[1,+\infty[$:

$\forall\varepsilon\in\,]0,1[,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall t\in[\varepsilon,1],\ \dfrac{1}{(1+t^\alpha)^n}\le\dfrac{1}{(1+\varepsilon^\alpha)^n}$ soit encore, en intégrant cette relation sur $[\varepsilon,1]$, les fonctions en présence étant continues sur cet intervalle :

$\forall\varepsilon\in\,]0,1[,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}\le\frac{1-\varepsilon}{(1+\varepsilon^\alpha)^n}$ et donc :

$$\le\frac{1}{(1+\varepsilon^\alpha)^n}\ ④.$$

❑ A l'aide des relations ①, ②, ③ et ④, on en déduit alors :

$\forall\varepsilon\in\,]0,1[,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\le\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}\le\varepsilon+\frac{1}{(1+\varepsilon^\alpha)^n}$ et donc, en reconnaissant I_n :

$$\boxed{\forall\varepsilon\in\,]0,1[,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\le I_n\le\varepsilon+\frac{1}{(1+\varepsilon^\alpha)^n}}\ ⑤$$

Hidden page

Formules de Taylor. Développements limités

Fiche de cours

I. Formules de Taylor SO EO

■ ***Formule de Taylor avec reste intégral.*** Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction de classe C^{n+1} sur I et $(a, b) \in I^2$. On a : $f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$.

■ ***Majoration du reste, inégalité de Taylor-Lagrange.*** Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction de classe C^{n+1} sur I, $(a, b) \in I^2$ et M un majorant de $\left|f^{(n+1)}\right|$ sur le segment d'extrémités a et b. On a :
$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$.

■ ***Formule de Taylor-Young* (SO).** Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction de classe C^n sur I et $a \in I$. Il existe une fonction ε définie sur $I \setminus \{a\}$ telle que :
$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

II. Développements limités SO EO

■ Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I et $x_0 \in I$. On dit que f admet un développement limité (d.l.) à l'ordre n au voisinage de x_0 s'il existe une suite de réels $(a_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ et une fonction ε définie sur $I \setminus \{x_0\}$ tels que : $\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + (x-x_0)^n \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

• Le terme $\sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k$ s'appelle "partie régulière" du d.l., noté $\text{reg}_n(f)$.

• Le terme $(x-x_0)^n \varepsilon(x)$ s'appelle "reste" ou "terme complémentaire" du d.l.

■ Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Si f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0, alors ce développement limité est unique.

■ Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. f admet un d.l. à l'ordre 0 au voisinage de x_0 si et seulement si f a une limite finie ℓ en x_0, et on a alors : $f(x) = \ell + \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

■ Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. f admet un d.l. à l'ordre 1 au voisinage de x_0 si et seulement si f est dérivable en x_0, et on a alors : $f(x) = f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + (x-x_0)\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

■ Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Si f est une fonction de classe C^n sur I, alors f admet un d.l. à l'ordre n au voisinage de x_0 et ce d.l. est : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + (x-x_0)^n \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

■ Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I et $x_0 \in I$. Si f admet un d.l. à l'ordre n au voisinage de x_0, alors f admet un d.l. à tout ordre p inférieur ou égal à n au voisinage de x_0 et $\text{reg}_p(f) = \overline{\text{reg}_n(f)}^{\,p}$ (partie tronquée au degré p de $\text{reg}_n(f)$).

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, la fonction $t \mapsto \frac{((1+x)-t)^2}{t^3}$ est continue et positive sur $[1, 1+x]$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit alors : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\int_1^{1+x} \frac{((1+x)-t)^2}{t^3}\,dt \geq 0$, d'où : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \geq 0$, soit :

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$.

› On peut maintenant conclure :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+,\ x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x}$$

☞ Pour comparer une fonction à la partie régulière de son développement limité, la méthode la plus habile consiste à utiliser la formule de Taylor avec reste intégral, puis à déterminer le signe de l'intégrale qui donne alors le signe de la différence entre la fonction et la partie régulière de son développement limité.

☞ Noter que les encadrements précédents ne pouvaient être obtenus à l'aide de développements limités. En effet, ceux-ci décrivent des propriétés locales et ne permettent donc pas d'obtenir des résultats sur un intervalle, mais seulement "au voisinage" d'un point.

☞ Pour démontrer un encadrement d'une fonction, il faut utiliser :
– soit **la formule de Taylor avec reste intégral** (deux fois), les fonctions encadrantes étant la partie régulière d'un développement limité de la fonction centrale,
– soit **l'inégalité des accroissements finis** (cf. exercice 7.8.2), on reconnaît alors au centre de l'encadrement une fonction prise en deux points,
– soit **une inégalité de convexité** appliquée à la fonction centrale (cf. exercice 7.8.5), les fonctions encadrantes étant des fonctions polynômes de degré au plus un (équation de la tangente en un point ou d'une corde de la courbe),
– soit enfin (si aucune des méthodes précédentes n'est possible), **deux études de fonctions**.

2) a) La fonction exp étant de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, elle est de classe C^{n+1} sur $[-x, 0]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à l'ordre n à la fonction exp sur entre 0 et -x nous permet alors d'écrire :

$\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, \left| e^{-x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^k}{k!} \exp^{(k)} 0 \right| \leq \sup_{[-x,0]} \left|\exp^{(n+1)}\right| \cdot \frac{|-x|^{n+1}}{(n+1)!}$ soit, comme $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exp^{(k)} = \exp$ et $e^0 = 1$:

$\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, \left| e^{-x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^k}{k!} \right| \leq \sup_{[-x,0]} |\exp| \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

Or, la fonction $|\exp| = \exp$ étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, on peut écrire : $\sup_{[-x,0]} |\exp| = e^0 = 1$, d'où la conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, \left| e^{-x} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}$$

☞ Pour majorer une valeur absolue contenant la différence entre une fonction et la partie régulière d'un de ses développements limités, il faut généralement utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.

☞ Noter que la formule de Taylor avec reste intégral et l'inégalité de Taylor-Lagrange entre a et b peuvent s'écrire indifféremment pour a < b ou b < a.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\lim_{n \to +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ (cf. exercice 5.1.3). On en déduit alors : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\lim_{n \to +\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, la suite $\left(\left| e^{-x} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!} \right| \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc encadrée par la suite nulle et par une suite qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, d'où (théorème de l'encadrement) :

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \lim\limits_{n \to +\infty} \left| e^{-x} - \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!} \right| = 0$ ce qui s'écrit encore :

$\forall x \in \mathbb{R}^*, e^{-x} = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!}$ et donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, e^{-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!}}$$

☞ Se souvenir de cette méthode qui permet d'obtenir le **développement en série** d'une fonction (c'est-à-dire l'expression de f(x) sous forme d'une somme du type $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ où $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R}$) grâce à l'inégalité de Taylor-Lagrange.

3) On a :

$\tan' = 1 + \tan^2$ d'où :

$\tan'' = 2 \tan \tan'$ soit :

$= 2 \tan (1 + \tan^2)$ et donc :

$= 2 \tan + 2 \tan^3$ et :

$\tan^{(3)} = 2 \tan' + 6 \tan^2 \tan'$ soit :

$= 2(1 + \tan^2) + 6 \tan^2 (1 + \tan^2)$ soit enfin :

$= 2 + 8 \tan^2 + 6 \tan^4$.

La fonction tan étant de classe C^∞ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, elle est de classe C^3 au voisinage de 0. La formule de Taylor-Young appliquée à l'ordre 3 à la fonction tan au voisinage de 0 nous permet alors d'écrire :

$\tan x = \tan 0 + x \tan' 0 + \frac{x^2}{2} \tan'' 0 + \frac{x^3}{6} \tan^{(3)} 0 + x^3 \varepsilon(x)$ (avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$), soit, d'après les résultats précédents, comme $\tan 0 = 0$:

$$\boxed{\tan x = x + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x) \text{ (avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0)}$$

☞ Deux méthodes sont possibles pour calculer le développement limité d'une fonction f au voisinage d'un point :
- l'utilisation de la formule de Taylor-Young à l'aide des dérivées successives de f,
- les opérations sur les développements limités à l'aide des d.l. usuels (cf. *exercice 2*).

S❶ E❷

■ 2. Opérations sur les développements limités

1) ***Somme.*** Déterminer le d.l. au voisinage de 0 à l'ordre 3 de :

a) $x \mapsto e^x + \cos x$,

b) $x \mapsto \ln(1 + x) + \sin x$.

2) ***Produit.*** Déterminer le d.l. au voisinage de 0 à l'ordre 4 de :

a) $x \mapsto \cos x \cdot \sin x$,

b) $x \mapsto e^x \ln(1 + x)$.

3) **(S❶)** ***Composition*** . Déterminer le d.l. au voisinage de 0 à l'ordre 4 de :

a) $x \mapsto \ln(\cos x)$,

b) $x \mapsto e^{\sin x}$.

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_2(x)$ (avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$), d'où :

$e^x \ln(1+x) = x + \left(x^2 - \frac{x^2}{2}\right) + \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{3}\right) + \left(\frac{x^4}{6} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^4}{4}\right) + x^4\varepsilon_3(x)$ (avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0$), et donc :

$$\boxed{e^x \ln(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^4\varepsilon(x) \text{ (avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0)}$$

☞ Lorsque l'on cherche le d.l. d'un produit de fonctions à l'ordre p, il faut effectuer, dans le cas général, le produit des différents d.l. à l'ordre p en tronquant les termes dont le degré est strictement supérieur à p (cf. **2a**).

Cependant, lorsque l'on cherche le d.l. d'un produit $f(x)g(x)$ à l'ordre p et que la valuation (c'est-à-dire le degré du terme de plus bas degré) du d.l. de $f(x)$ (resp. $g(x)$) est k, il suffit d'effectuer le même produit de ce d.l. avec le d.l. à l'ordre p - k de $g(x)$ (resp. $f(x)$) (cf. **2b**).

3) a) Au voisinage de 0, on a :

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon_1(x)$ (avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$), et :

$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + u^4\varepsilon_2(u)$ (avec $\lim\limits_{u\to 0} \varepsilon_2(u) = 0$), d'où, en posant $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon_1(x)$

(u tend vers 0 lorsque x tend vers 0) :

$\ln(\cos x) = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + x^4\varepsilon_3(x)$ (avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0$), et donc :

$$\boxed{\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + x^4\varepsilon(x) \text{ (avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0)}$$

b) Au voisinage de 0, on a :

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon_1(x)$ (avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$), et :

$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + u^4\varepsilon_2(u)$ (avec $\lim\limits_{u\to 0} \varepsilon_2(u) = 0$), d'où, en posant $u = x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon_1(x)$

(u tend vers 0 lorsque x tend vers 0) :

$e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{2x^4}{6}\right) + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon_3(x)$ (avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0$), et donc :

$$\boxed{e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + x^4\varepsilon(x) \text{ (avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0)}$$

☞ Lorsque l'on cherche le d.l. d'une composée de fonctions $f \circ g$ à l'ordre p au voisinage de 0, il faut déterminer les d.l. à l'ordre p au voisinage de 0 de $g(x)$, puis de $f(g(0) + u)$. En posant $u = g(x) - g(0)$ (en précisant que u tend vers 0 lorsque x tend vers 0), à l'aide du d.l. de $g(x)$, par substitution dans le d.l. de $f(g(0) + u)$, et en tronquant les monômes de degré strictement supérieur à p, on obtient le résultat recherché.

4) a) Au voisinage de 0, on a :

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\varepsilon_1(x)$ (avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$), et :

$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - u^5 + u^5\varepsilon_2(u)$ (avec $\lim\limits_{u\to 0} \varepsilon_2(u) = 0$), d'où, en posant $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\varepsilon_1(x)$

(u tend vers 0 lorsque x tend vers 0) :

$\frac{1}{\cos x} = 1 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \frac{x^4}{4} + x^5\varepsilon_3(x)$ (avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0$), soit :

$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + x^5\varepsilon_3(x)$.

Hidden page

On en déduit alors, toujours au voisinage de 0 : $\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \varepsilon_5(x)$, i.e. : $h(x) = \varepsilon_5(x)$, et donc, par passage à limite : $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0 = h(0)$. h est donc également continue en 0, donc continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

NB : On pouvait également et plus simplement (comme cela est fait dans la suite de cette question pour h') réduire l'expression de h au même dénominateur, déterminer directement un équivalent du dénominateur et déterminer également un d.l., puis un équivalent du numérateur. On obtient alors un équivalent de h.

❑ h est de classe C^1 sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ en tant que somme et quotients (dont les dénominateurs ne s'annulent pas) de fonctions de classe C^1 sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

De plus, on a :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right],\ h'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} \quad \text{soit :}$$

$$= \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \quad \text{et donc :}$$

$$= \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}.$$

Or, au voisinage de 0, on a :

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^4 \varepsilon_6(x)$ (avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_6(x) = 0$), d'où :

$\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + x^4 \varepsilon_7(x)$ (avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_7(x) = 0$), et donc :

$x^2 - \sin^2 x = \frac{x^4}{3} + x^4 \varepsilon_8(x)$ (avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_8(x) = 0$).

On en déduit alors : $x^2 - \sin^2 x \underset{0}{\sim} \frac{x^4}{3}$. Comme on a en outre $\sin x \underset{0}{\sim} x$, on peut également écrire : $\sin^2 x \underset{0}{\sim} x^2$, d'où : $x^2 \sin^2 x \underset{0}{\sim} x^4$, et donc : $\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} \underset{0}{\sim} \frac{\frac{x^4}{3}}{x^4}$, i.e. : $h'(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{3}$.

On peut maintenant écrire : $\lim\limits_{x \to 0} h'(x) = \frac{1}{3}$.

❑ h étant continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, de classe C^1 sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et h' admettant une limite finie en 0, on peut maintenant conclure (théorème de prolongement des fonctions de classe C^1) :

$$\boxed{h \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]}$$

☞ Pour déterminer un équivalent d'une fonction f (définie comme un quotient) en un point x_0 lorsque son numérateur s'écrit sous forme de somme (on ne peut alors déterminer directement un équivalent de celui-ci) et lorsque son dénominateur s'écrit sous forme de produit, on peut ne déterminer qu'un seul d.l. : celui de son numérateur.
En effet, on obtient alors aisément un équivalent du numérateur et du dénominateur (car ce dernier s'écrit sous forme d'un produit), donc un équivalent de f en x_0.

3) **a)** D'après le développement limité de f au voisinage de a, on peut écrire que :

$\forall x \in I,\ f(x) - \alpha = (x-a)^n \left(\varepsilon(x) + \beta\right)$ avec $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

↘ Supposons n pair. On peut alors écrire : $\forall x \in I,\ (x - a)^n \geq 0$.

De plus, comme $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$, on peut également écrire (cf. exercice **7.2.1a**) :
$\exists \eta > 0,\ \forall x \in \left(I \cap]a - \eta, a + \eta[\right),\ \left|\varepsilon(x)\right| < \left|\beta\right|$.

Deux cas se présentent alors :

• Si $\beta > 0$, on peut alors écrire : $\exists \eta > 0,\ \forall x \in \left(I \cap]a - \eta, a + \eta[\right),\ -\beta < \varepsilon(x) < \beta$, et donc :
$\exists \eta > 0,\ \forall x \in \left(I \cap]a - \eta, a + \eta[\right),\ \varepsilon(x) + \beta > 0$.

On en déduit alors : $\exists \eta > 0,\ \forall x \in \left(I \cap]a - \eta, a + \eta[\right),\ (x - a)^n \left(\varepsilon(x) + \beta\right) \geq 0$, ce qui s'écrit encore :
$\exists \eta > 0,\ \forall x \in \left(I \cap]a - \eta, a + \eta[\right),\ f(x) - \alpha \geq 0$ i.e. :
$\exists \eta > 0,\ \forall x \in \left(I \cap]a - \eta, a + \eta[\right),\ f(x) \geq \alpha$.

Comme $f(a) = \alpha$ (d'après le développement limité de f), f possède donc un minimum local en a.

• Si $\beta < 0$, on peut alors écrire : $\exists \eta > 0,\ \forall x \in \left(I \cap]a - \eta, a + \eta[\right),\ \beta < \varepsilon(x) < -\beta$, et donc :
$\exists \eta > 0,\ \forall x \in \left(I \cap]a - \eta, a + \eta[\right),\ \varepsilon(x) + \beta < 0$.

On en déduit alors : $\exists \eta > 0,\ \forall x \in \left(I \cap]a - \eta, a + \eta[\right),\ (x - a)^n \left(\varepsilon(x) + \beta\right) \leq 0$, ce qui s'écrit encore :
$\exists \eta > 0,\ \forall x \in \left(I \cap]a - \eta, a + \eta[\right),\ f(x) - \alpha \leq 0$ i.e. :
$\exists \eta > 0,\ \forall x \in \left(I \cap]a - \eta, a + \eta[\right),\ f(x) \leq \alpha$.

Comme $f(a) = \alpha$, f possède donc un maximum local en a.

↘ Supposons maintenant n impair. On peut alors écrire : $\forall x \in I,\ x < a,\ (x - a)^n < 0$ et $\forall x \in I,\ x > a,\ (x - a)^n > 0$.
Deux cas se présentent alors :

• Si $\beta > 0$, comme $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$, on peut écrire (cf. cas précédent) :
$\exists \eta > 0,\ \forall x \in \left(I \cap]a - \eta, a + \eta[\right),\ \varepsilon(x) + \beta > 0$.

On en déduit alors :
– $\exists \eta > 0,\ \forall x \in \left(I \cap]a - \eta, a[\right),\ (x - a)^n \left(\varepsilon(x) + \beta\right) < 0$, soit : $\exists \eta > 0,\ \forall x \in \left(I \cap]a - \eta, a[\right),\ f(x) < \alpha$, et :
– $\exists \eta > 0,\ \forall x \in \left(I \cap]a, a + \eta[\right),\ (x - a)^n \left(\varepsilon(x) + \beta\right) > 0$, soit : $\exists \eta > 0,\ \forall x \in \left(I \cap]a, a + \eta[\right),\ f(x) > \alpha$.
f ne possède donc pas d'extremum local en a.

• Si $\beta < 0$, comme $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$, on peut écrire (cf. cas précédent) :
$\exists \eta > 0,\ \forall x \in \left(I \cap]a - \eta, a + \eta[\right),\ \varepsilon(x) + \beta < 0$.

On en déduit alors :
– $\exists \eta > 0,\ \forall x \in \left(I \cap]a - \eta, a[\right),\ (x - a)^n \left(\varepsilon(x) + \beta\right) > 0$, soit : $\exists \eta > 0,\ \forall x \in \left(I \cap]a - \eta, a[\right),\ f(x) > \alpha$, et :
– $\exists \eta > 0,\ \forall x \in \left(I \cap]a, a + \eta[\right),\ (x - a)^n \left(\varepsilon(x) + \beta\right) < 0$, soit : $\exists \eta > 0,\ \forall x \in \left(I \cap]a, a + \eta[\right),\ f(x) < \alpha$.
f ne possède donc pas d'extremum local en a.

↘ On peut maintenant conclure :

> Si n est pair, f possède un extremum local en a (si $\beta > 0$, cet extremum est un minimum et si $\beta < 0$, cet extremum est un maximum) et si n est impair, f ne possède pas d'extremum local en a.

☞ Retenir la méthode (et les résultats dans le cas général) pour déterminer si f admet ou non un extremum local en un point.

b) ▪ Comme g admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a, g admet également un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de a : $g(x) = \alpha + \beta(x - a) + (x - a)\eta(x)$ (avec $\lim\limits_{x \to 0} \eta(x) = 0$).

g est donc dérivable en a de nombre dérivé β. Or, d'après le cours, on sait que si g est dérivable en a, alors sa courbe représentative admet en a une tangente d'équation $y = g(a) + (x - a)g'(a)$. On en déduit alors :

$$\boxed{\text{La courbe représentative de g admet pour tangente en a la droite d'équation } y = \alpha + \beta(x - a)}$$

▪ Soit alors f la fonction définie sur I par : $\forall x \in I$, $f(x) = g(x) - \alpha - \beta(x - a)$. On peut alors écrire :

$\forall x \in I$, $f(x) = \gamma(x - a)^n + (x - a)^n \varepsilon(x)$ (avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$).

❑ Supposons alors n pair. Deux cas se présentent :

• Si $\gamma > 0$, d'après la question précédente, f admet un minimum local en a qui est 0, ce qui s'écrit encore :

$\exists \eta > 0$, $\forall x \in (I \cap]a - \eta, a + \eta[)$, $f(x) \geq 0$ soit, d'après l'expression de f :

$\exists \eta > 0$, $\forall x \in (I \cap]a - \eta, a + \eta[)$, $g(x) \geq \alpha + \beta(x - a)$.

La courbe représentative de g est donc située au-dessus de sa tangente en a au voisinage de a.

• Si $\gamma < 0$, d'après la question précédente, f admet un maximum local en a qui est 0, ce qui s'écrit encore :

$\exists \eta > 0$, $\forall x \in (I \cap]a - \eta, a + \eta[)$, $f(x) \leq 0$ soit, d'après l'expression de f :

$\exists \eta > 0$, $\forall x \in (I \cap]a - \eta, a + \eta[)$, $g(x) \leq \alpha + \beta(x - a)$.

La courbe représentative de g est donc située en-dessous de sa tangente en a au voisinage de a.

❑ Supposons maintenant n impair. Deux cas se présentent :

• Si $\gamma > 0$, d'après la question précédente, on peut écrire :

– $\exists \eta > 0$, $\forall x \in (I \cap]a - \eta, a[)$, $f(x) < 0$, d'où : $\exists \eta > 0$, $\forall x \in (I \cap]a - \eta, a[)$, $g(x) < \alpha + \beta(x - a)$, et :

– $\exists \eta > 0$, $\forall x \in (I \cap]a, a + \eta[)$, $f(x) > 0$, d'où : $\exists \eta > 0$, $\forall x \in (I \cap]a, a + \eta[)$, $g(x) > \alpha + \beta(x - a)$.

La courbe représentative de g admet donc un point d'inflexion en a.

• Si $\gamma > 0$, d'après la question précédente, on peut écrire :

– $\exists \eta > 0$, $\forall x \in (I \cap]a - \eta, a[)$, $f(x) > 0$, d'où : $\exists \eta > 0$, $\forall x \in (I \cap]a - \eta, a[)$, $g(x) > \alpha + \beta(x - a)$, et :

– $\exists \eta > 0$, $\forall x \in (I \cap]a, a + \eta[)$, $f(x) < 0$, d'où : $\exists \eta > 0$, $\forall x \in (I \cap]a, a + \eta[)$, $g(x) < \alpha + \beta(x - a)$.

La courbe représentative de g admet donc un point d'inflexion en a.

❑ On peut maintenant conclure :

Si n est pair et si $\gamma > 0$, au voisinage de a, la courbe représentative de g est située au-dessus de sa tangente en a. Si n est pair et $\gamma < 0$, au voisinage de a, la courbe représentative de g est située en-dessous de sa tangente en a. Si n est impair la courbe représentative de g admet un point d'inflexion en a.

☞ Retenir la méthode (et les résultats dans le cas général) pour étudier la position d'une courbe par rapport à sa tangente au voisinage d'un point.

4) a) On a : $\forall u \in \mathbb{R}^*$, $\left(\frac{1}{1+u}\right)^{\frac{1}{u}} = \exp\left[\frac{1}{u}\ln\left(\frac{1}{1+u}\right)\right] = \exp\left[-\frac{1}{u}\ln(1+u)\right]$. Or, au voisinage de 0, on a :

$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + u^3\varepsilon_1(u)$ (avec $\lim\limits_{u \to 0} \varepsilon_1(u) = 0$), d'où :

$-\frac{1}{u}\ln(1+u) = -1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{3} - u^2\varepsilon_1(u)$.

De plus, au voisinage de 0, on a :

$e^v = 1 + v + \frac{v^2}{2} + v^2\varepsilon_2(v)$ (avec $\lim\limits_{v\to 0} \varepsilon_2(v) = 0$) soit, en posant $v = \frac{u}{2} - \frac{u^2}{3} - u^2\varepsilon_1(u)$

(v tend vers 0 lorsque u tend vers 0) :

$\exp\left[\frac{1}{u}\ln\left(\frac{1}{1+u}\right)\right] = e^{v-1}$ soit encore, d'après ce qui précède :

$$= e^{-1}\left[1 + \left(\frac{u}{2} - \frac{u^2}{3}\right) + \frac{u^2}{8} + u^2\varepsilon_3(u)\right] \text{ (avec } \lim_{u\to 0} \varepsilon_3(u) = 0) \quad \text{i.e. :}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{1+u}\right)^{\frac{1}{u}} = e^{-1}\left(1 + \frac{u}{2} - \frac{5u^2}{24}\right) + u^2\varepsilon_4(u) \text{ (avec } \lim_{u\to 0} \varepsilon_4(u) = 0)}$$

b) En posant $u = \frac{1}{x}$ (u tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$), on peut écrire : $\left(\frac{1}{1+u}\right)^{\frac{1}{u}} = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$. On en déduit alors, au voisinage de $+\infty$:

$x\left(\frac{x}{1+x}\right)^x = x\left[e^{-1}\left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{5}{24x^2}\right) + \frac{1}{x^2}\varepsilon(x)\right]$ (avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0$) et donc :

$$\boxed{x\left(\frac{x}{1+x}\right)^x = \frac{1}{e}x + \frac{1}{2e} - \frac{5}{24e}\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0}$$

☞ Noter que cette expression de $x\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$ est un développement asymptotique de $x\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$ au voisinage de $+\infty$.

c) ▪ Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{5}{24e}\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(x)\right) = 0$, on peut écrire : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \frac{1}{e}x = \frac{1}{2e}$. Ainsi,

$$\boxed{\text{La courbe représentative de f admet une asymptote oblique d'équation : } y = \frac{1}{e}x + \frac{1}{2e}}$$

▪ D'après la question précédente, on peut écrire, au voisinage de $+\infty$:

$f(x) - \left[\frac{1}{e}x + \frac{1}{2e}\right] = -\frac{5}{24e}\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(x)$ i.e. :

$f(x) - \left[\frac{1}{e}x + \frac{1}{2e}\right] = \frac{1}{x}\left(\varepsilon(x) - \frac{5}{24e}\right)$.

Or, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0$, on peut écrire (cf. exercice **7.2.1a**) :

$\exists A\in\mathbf{R}, \forall x > A, \varepsilon(x) < \frac{5}{24e}$ i.e. :

$\exists A\in\mathbf{R}, \forall x > A, \varepsilon(x) - \frac{5}{24e} < 0$ et donc, en multipliant par $\frac{1}{x} > 0$ ($x\in\mathbf{R}_+^*$) et en reconnaissant $f(x) - \left[\frac{1}{e}x + \frac{1}{2e}\right]$:

$\exists A\in\mathbf{R}^+, \forall x > A, f(x) - \left[\frac{1}{e}x + \frac{1}{2e}\right] < 0$ soit enfin :

$\exists A\in\mathbf{R}^+, \forall x > A, f(x) < \frac{1}{e}x + \frac{1}{2e}$.

On peut maintenant conclure :

$$\boxed{\text{Au voisinage de } +\infty \text{, la courbe représentative de f est en-dessous de son asymptote}}$$

☞ Se souvenir de la méthode pour obtenir le développement asymptotique d'une fonction à l'aide de développements limités, puis pour déterminer la position relative de la courbe représentative d'une fonction et de son asymptote au voisinage de $\pm\infty$.

S❷ E❷

● 4. Une propriété utile

Soient I un segment de **R** non réduit à point et f une fonction de classe C^4 sur I.

1) Déterminer pour tout $x\in \mathring{I}$, la limite de $h \mapsto \dfrac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$.

2) Déterminer pour tout $x\in \mathring{I}$ et pour tout $h\in \mathbf{R}^*$ tel que $(x+h)\in I$ et $(x-h)\in I$, un majorant de :

$$\left|\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}-f''(x)\right|$$

en fonction de h.

1) ❍ Comme f est de classe C^4 sur I, pour tout $x\in \mathring{I}$ et pour tout $h\in \mathbf{R}^*$ tel que $(x+h)\in I$, elle est de classe C^4 sur le segment d'extrémités x et x + h, noté $[x : x+h]$. Pour tout $x\in \mathring{I}$ et pour tout $h\in \mathbf{R}^*$ tel que $(x+h)\in I$, la formule de Taylor-Young appliquée à l'ordre 4 à f entre x et x + h nous permet alors d'écrire qu'il existe une fonction ε_1 définie sur $I\setminus\{0\}$ telle que :

$$\forall x\in \mathring{I},\ \forall h\in \mathbf{R}^*,\ (x+h)\in I,\ f(x+h)=\sum_{k=0}^{4}\frac{h^k}{k!}f^{(k)}(x)+h^4\varepsilon_1(x)\ \ (\text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x)=0), \text{ d'où :}$$

$$\forall x\in \mathring{I},\ \forall h\in \mathbf{R}^*,\ (x+h)\in I,\ f(x+h)-f(x)=\sum_{k=1}^{4}\frac{h^k}{k!}f^{(k)}(x)+h^4\varepsilon_1(x)\ \ ①.$$

❍ De même, comme f est de classe C^4 sur I, pour tout $x\in \mathring{I}$ et pour tout $h\in \mathbf{R}^*$ tel que $(x-h)\in I$, elle est de classe C^4 sur le segment d'extrémités x et x - h, noté $[x : x-h]$. Pour tout $x\in \mathring{I}$ et pour tout $h\in \mathbf{R}^*$ tel que $(x-h)\in I$, la formule de Taylor-Young appliquée à l'ordre 4 à f entre x et x - h nous permet alors d'écrire qu'il existe une fonction ε_2 définie sur $I\setminus\{0\}$ telle que :

$$\forall x\in \mathring{I},\ \forall h\in \mathbf{R}^*,\ (x-h)\in I,\ f(x-h)=\sum_{k=0}^{4}\frac{(-h)^k}{k!}f^{(k)}(x)+(-h)^4\varepsilon_2(x)\ \ (\text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x)=0), \text{ d'où :}$$

$$\forall x\in \mathring{I},\ \forall h\in \mathbf{R}^*,\ (x-h)\in I,\ f(x-h)-f(x)=\sum_{k=1}^{4}\frac{(-h)^k}{k!}f^{(k)}(x)+h^4\varepsilon_2(x)\ \ ②.$$

❍ En sommant les relations ① et ②, on en déduit alors :

$$\forall x\in \mathring{I},\ \forall h\in \mathbf{R}^*,\ \begin{cases}(x+h)\in I\\(x-h)\in I\end{cases},\ f(x+h)+f(x-h)-2f(x)=h^2f''(x)+\frac{h^4}{12}f^{(4)}(x)+h^4(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(x)$$

soit, en divisant cette relation par $h^2\neq 0$ ($h\in \mathbf{R}^*$) :

$$\forall x\in \mathring{I},\ \forall h\in \mathbf{R}^*,\ \begin{cases}(x+h)\in I\\(x-h)\in I\end{cases},\ \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=f''(x)+\frac{h^2}{12}f^{(4)}(x)+h^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(x)\ \ ③$$

d'où la conclusion :

$$\boxed{\forall x\in \mathring{I},\ \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=f''(x)}$$

b) ❍ Comme f est de classe C^4 sur I, pour tout $x\in \mathring{I}$ et pour tout $h\in \mathbf{R}^*$ tel que $(x+h)\in I$, elle est de classe C^4 sur $[x : x+h]$. Pour tout $x\in \mathring{I}$ et pour tout $h\in \mathbf{R}^*$ tel que $(x+h)\in I$, l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à l'ordre 3 à f entre x et x + h nous permet alors d'écrire :

$$\forall x\in \mathring{I},\ \forall h\in \mathbf{R}^*,\ (x+h)\in I,\ \left|f(x+h)-\sum_{k=0}^{3}\frac{h^k}{k!}f^{(k)}(x)\right|\le \sup_{[x:\,x+h]}\left|f^{(4)}\right|\cdot\frac{h^4}{24}.$$

Intégrales impropres

Fiche de cours

I. Généralités SO EO

■ Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $a < b$ et f une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$ (c'est-à-dire continue par morceaux sur tout segment $[a, c]$ de $[a, b[$). On dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,dt$ converge si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ (définie sur $[a, b[$) admet une limite finie ℓ en b^- et on note alors : $\int_a^b f(t)\,dt = \ell$.

Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et f une fonction continue par morceaux sur $]a, b]$ (c'est-à-dire continue par morceaux sur tout segment $[c, b]$ de $]a, b]$). On dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,dt$ converge si la fonction $x \mapsto \int_x^b f(t)\,dt$ (définie sur $]a, b]$) admet une limite finie ℓ en a^+ et on note alors : $\int_a^b f(t)\,dt = \ell$.

■ ***Intégrales de Riemann.*** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$, et on a alors : $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$.
- $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$, et on a alors : $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1 - \alpha}$.

■ ***Extension aux intégrales plusieurs fois impropres.*** Soient $(a, b) \in (\overline{\mathbb{R}})^2$ ($\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$), $a < b$ et f une fonction continue par morceaux sur $]a, b[$. L'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge si et seulement si pour tout $c \in]a, b[$, $\int_a^c f(t)\,dt$ et $\int_c^b f(t)\,dt$ convergent, et on note alors : $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$.

■ ***Linéarité de l'intégrale.*** Soient $(a, b) \in (\overline{\mathbb{R}})^2$, $a < b$, f et g deux fonctions continues par morceaux sur $]a, b[$ telles que $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ convergent. Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, l'intégrale $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)\,dt$ converge, et on a : $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)\,dt = \alpha \int_a^b f(t)\,dt + \beta \int_a^b g(t)\,dt$.

II. Comparaison des intégrales de fonctions positives SO EO

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $a < b$, f et g deux fonctions continues par morceaux et positives sur $[a, b[$ (valable également *mutatis mutandi* si $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et si f et g sont deux fonctions continues par morceaux et positives sur $]a, b]$).

– Si $\forall x \in [a, b[$, $f(x) \leq g(x)$, alors :

- si $\int_a^b g(t)\,dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge également,
- si $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge, alors $\int_a^b g(t)\,dt$ diverge également.

– Si $f(x) \underset{b^-}{\sim} g(x)$, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ sont de même nature.

III. Intégrales absolument convergentes S● E●

Soient $(a, b) \in (\overline{\mathbb{R}})^2$, $a < b$ et f une fonction continue par morceaux sur $]a, b[$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente si et seulement si l'intégrale $\int_a^b |f(t)|\,dt$ converge.

Si l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente, alors elle converge et on a de plus :

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

IV. Comparaison d'une série à termes positifs et d'une intégrale S● E●

Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue par morceaux, positive et décroissante sur $[a, +\infty[$. L'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est de même nature que la série de terme général $f(n)$ – définie à partir d'un certain rang (théorème dit "de comparaison séries-intégrales").

V. La fonction Γ S●

La fonction gamma, notée Γ, est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt$, et on a :

– $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$,

– $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.

Exercices clefs, méthodes et astuces

Méthodes d'étude de la nature d'une intégrale impropre

■ Pour déterminer la nature d'une intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,dt$, il faut déterminer en premier lieu les points à problème, c'est-à-dire les points où f n'est pas définie et les éventuelles bornes infinies de l'intégrale, puis...

■ Pour montrer que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,dt$ converge en b (resp. en a), il faut :

– soit revenir à la définition et montrer, par calcul de primitive, intégration par parties ou changement de variable, que $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ admet une limite finie en b^- (resp. $x \mapsto \int_x^b f(t)\,dt$ admet une limite finie en a^+), ce qui permet en outre de calculer $\int_a^b f(t)\,dt$ (cf. exercice 1),

– soit montrer (si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$) que f est continue par morceaux sur $[a, b[$ (resp. sur $]a, b]$), puis montrer que f admet une limite finie en b^- (resp. en a^+) ; on dit alors que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,dt$ est "faussement impropre" (cf. exercice 2),

– soit montrer que la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ (resp. $F : x \mapsto \int_x^b f(t)\,dt$) est continue et monotone sur $[a, b[$ (resp. sur $]a, b]$), donc, d'après le théorème de la "limite monotone", admet une limite (finie ou infinie) en b^- (resp. en a^+) ; à l'aide d'un encadrement de $F(x)$ sur $[a, b[$ (resp. sur $]a, b]$), on en déduit alors que F admet une limite finie en b^- (resp. en a^+) et donc que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge (cf. exercice 3),

– soit enfin (c'est le plus souvent le cas) montrer que f est continue par morceaux sur $[a, b[$ (resp. sur $]a, b]$), puis utiliser les règles de comparaison des intégrales de fonctions positives (cf. exercices 4, 5 et 6).

■ Attention, les calculs de primitives, les intégrations par parties et les changements de variables sont "officiellement" interdits dans des intégrales impropres. Pour effectuer ces opérations, il faut toujours se ramener à une intégrale partielle (c'est-à-dire définie sur un segment), puis calculer la limite du résultat.

■ Attention, avant de linéariser une intégrale impropre, il faut toujours s'assurer de la convergence de toutes les intégrales mises en jeu.

SO EO

■ 1. Intégrales impropres étudiées à l'aide de la définition

Déterminer la nature (et la valeur lorsqu'elles convergent) des intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$,

2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln t\,dt$,

3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+2}$.

1) La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et on a :

$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \displaystyle\int_0^x e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_0^x$ soit :

$= 1 - e^{-x}$.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, on en déduit alors que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t}\,dt = 1$, et donc que :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt \text{ converge avec } \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1}$$

2) Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par : $\forall x \in [1, +\infty[,\ f(x) = \displaystyle\int_1^x \ln t\,dt$. Les fonctions $t \mapsto \ln t$ et $t \mapsto t$ étant de classe C^1 sur $[1, +\infty[$, donc pour tout $x \in [1, +\infty[$, de classe C^1 sur $[1, x]$, à l'aide d'une intégration par parties (on intègre $t \mapsto 1$ et on dérive $t \mapsto \ln t$), on peut alors écrire :

$\forall x \in [1, +\infty[,\ \displaystyle\int_1^x 1 \times \ln t\,dt = \left[t \ln t\right]_1^x - \int_1^x dt$ soit :

$\forall x \in [1, +\infty[,\ f(x) = x \ln x - 1 \ln 1 - (x - 1)$ i.e. :

$= x \ln x - x + 1$.

Or, on a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (x \ln x - x) = +\infty$. On en déduit alors que f n'admet pas de limite finie lorsque x tend vers $+\infty$, et donc que :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \ln t\,dt \text{ diverge}}$$

3) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ g(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{t^2+2}$. La fonction $t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{2}}$ étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, de classe C^1 sur $[0, x]$, en effectuant le changement de variable $u = \dfrac{t}{\sqrt{2}}$, $du = \dfrac{dt}{\sqrt{2}}$, on peut alors écrire :

$\forall x \in \mathbb{R}^+, \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{t^2+2} = \sqrt{2}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \frac{du}{2(u^2+1)}$ soit :

$\forall x \in \mathbb{R}^+, g(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[\text{Arctan}\, t\right]_0^{\frac{x}{\sqrt{2}}}$ et comme Arctan 0 = 0 :

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\,\text{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{2}} = +\infty$ et comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \text{Arctan}\, x = \frac{\pi}{2}$, on en déduit alors : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \text{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2}$. En faisant tendre x vers $+\infty$ et en reconnaissant $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+2}$, on en déduit alors, par passage à la limite dans la relation précédente :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+2} \text{ converge et } \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}}$$

☞ Lorsque l'on connaît une primitive de f (où f est une fonction continue par morceaux sur [a, b[), pour démontrer que l'intégrale impropre en b : $\int_a^b f(t)\,dt$ converge et déterminer sa valeur, il faut calculer, pour tout $x \in [a, b[$, $\int_a^x f(t)\,dt$ (par calcul de primitives, intégration par parties ou changement de variable), puis en déterminer la limite lorsque x tend vers b^-. Si celle-ci est finie, on peut conclure que $\int_a^b f(t)\,dt$ converge et que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\,dt$ (on obtient les mêmes résultats en a^+ *mutatis mutandi* si f est une fonction continue par morceaux sur]a, b]).

SO EO

■ 2. Intégrales "faussement impropres"

Montrer que les intégrales suivantes sont convergentes :

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,dt$,

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t\ln t}{t-1}\,dt$.

1) La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est continue sur]0, 1] en tant que quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues sur]0, 1]. De plus, on a : $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$. On en déduit alors que la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est prolongeable par continuité sur [0, 1], et donc que :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,dt \text{ converge}}$$

2) La fonction $t \mapsto \dfrac{t\ln t}{t-1}$ est continue sur]0, 1[en tant que produit et quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues sur]0, 1[. De plus, on a :

– $\displaystyle\lim_{t\to 0} t\ln t = 0$, d'où : $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{t\ln t}{t-1} = 0$, et :

– $\ln t \underset{1}{\sim} t-1$, d'où : $\displaystyle\lim_{t\to 1} \frac{t\ln t}{t-1} = 1$.

La fonction $t \mapsto \frac{t \ln t}{t-1}$ est donc prolongeable par continuité en 0 et en 1, donc sur [0, 1]. On peut désormais conclure :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{t \ln t}{t-1}\, dt \text{ converge}}$$

☞ Se souvenir que si a et b sont deux réels tels que a < b, si f est une fonction continue par morceaux sur [a, b[(resp. sur]a, b]) et si f admet une limite finie en b^- (resp. a^+), alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge.

En notant $\tilde{f}$ la prolongée par continuité de f sur [a, b], on peut alors écrire que : $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \tilde{f}(t)\,dt$.

S❶ E❷

■ 3. Utilisation du théorème de la "limite monotone"

Pour tout réel α strictement positif, on définit la fonction f_α par :

$$\forall x \in]0, 1],\ f_\alpha(x) = \int_x^1 e^{-t} t^{\alpha-1}\, dt.$$

1) Montrer que :

$$\forall \alpha \in \mathbf{R}_+^*,\ \forall x \in]0, 1],\ 0 \le f_\alpha(x) \le \frac{1}{\alpha}.$$

2) En déduire que l'intégrale $\int_0^1 e^{-t} t^{\alpha-1}\, dt$ converge.

1) On a :

$\forall x \in]0, 1],\ \forall t \in [x, 1],\ 0 \le e^{-t} \le 1$ soit, en multipliant cette relation par $t^{\alpha-1} \ge 0$ ($\alpha \in \mathbf{R}_+^*$, $x \in]0, 1]$, $t \in [x, 1]$) :

$\forall \alpha \in \mathbf{R}_+^*,\ \forall x \in]0, 1],\ \forall t \in [x, 1],\ 0 \le e^{-t} t^{\alpha-1} \le t^{\alpha-1}$ soit encore, en intégrant cette relation sur [x, 1], les fonctions en présence continues sur cet intervalle, et en reconnaissant $f_\alpha(x)$:

$\forall \alpha \in \mathbf{R}_+^*,\ \forall x \in]0, 1],\ 0 \le f_\alpha(x) \le \int_x^1 t^{\alpha-1}\, dt$ i.e. :

$\forall \alpha \in \mathbf{R}_+^*,\ \forall x \in]0, 1],\ 0 \le f_\alpha(x) \le \left[\frac{t^\alpha}{\alpha}\right]_x^1$ soit encore :

$\forall \alpha \in \mathbf{R}_+^*,\ \forall x \in]0, 1],\ 0 \le f_\alpha(x) \le \frac{1}{\alpha} - \frac{x^\alpha}{\alpha}$ et donc, comme $\forall \alpha \in \mathbf{R}_+^*,\ \forall x \in]0, 1],\ \frac{x^\alpha}{\alpha} \ge 0$:

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbf{R}_+^*,\ \forall x \in]0, 1],\ 0 \le f_\alpha(x) \le \frac{1}{\alpha}}$$

2) Pour tout $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$, $t \mapsto -e^{-t} t^{\alpha-1}$ est continue sur]0, 1] en tant que produit de fonctions continues sur]0, 1]. Pour tout $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$, f_α étant une primitive de $t \mapsto -e^{-t} t^{\alpha-1}$ (la primitive qui s'annule en 1), on en déduit alors que pour tout $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$, f_α est continue et dérivable sur]0, 1], et on a : $\forall \alpha \in \mathbf{R}_+^*,\ \forall x \in]0, 1],\ f_\alpha'(x) = -e^{-x} x^{\alpha-1}$, d'où :

$\forall \alpha \in \mathbf{R}_+^*,\ \forall x \in]0, 1],\ f_\alpha'(x) \le 0$.

Pour tout $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$, f_α est donc continue et décroissante sur]0, 1]. Le théorème de la limite monotone nous permet alors d'écrire que pour tout $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$, f_α admet une limite (finie ou infinie) en 0.

Hidden page

5) La fonction $t \mapsto \ln t$ est continue sur $[1, +\infty[$. De plus, on a : $\forall t \in [e, +\infty[$, $\ln t \geq 1$.

Les fonctions $t \mapsto \ln t$ et $t \mapsto 1$ étant continues et positives sur $[1, +\infty[$, comme $\int_1^{+\infty} dt$ diverge (intégrale de Riemann), les règles de comparaison des intégrales de fonctions positives nous permettent alors d'écrire que :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \ln t\, dt \text{ diverge}}$$

☞ Se souvenir que si f est une fonction positive qui admet une limite non nulle en $+\infty$, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ diverge ($a \in \mathbb{R}$). En effet, si f admet une limite non nulle en $+\infty$, on peut écrire : $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists A \in \mathbb{R}$, $\forall t > A$, $f(t) \geq \lambda$. Comme $\int_1^{+\infty} \lambda\, dt$ diverge, les règles de comparaison des intégrales de fonctions positives nous permettent alors de conclure que $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ diverge.

S❷ E❷

■ 5. Utilisation des règles de comparaison : intégrales impropres en 0

Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt$,

2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt$,

3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$,

4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\, dt$,

5) $\displaystyle\int_0^1 \ln t\, dt$.

<u>Méthodes de comparaison des intégrales impropres en 0</u>

Soient a un réel et f une fonction continue par morceaux et positive sur $]0, a]$ (ou sur $[a, 0[$).

1) Pour montrer que l'intégrale $\int_0^a f(t)\, dt$ converge, si f n'admet pas de limite finie en 0 (l'intégrale $\int_0^a f(t)\, dt$ est alors "faussement impropre", cf. exercice 2), on utilise les règles de comparaison des intégrales de fonctions positives :

– en recherchant un équivalent de f en 0 de la forme $\frac{1}{t^\alpha}$ (avec $\alpha < 1$), ou bien :

– en montrant (avec $\alpha < 1$) que : $\lim_{t \to 0} t^\alpha f(t) = 0$, d'où : $\exists \varepsilon > 0$, $\forall t \in]0, \varepsilon[$, $f(t) \leq \frac{1}{t^\alpha}$ (le plus souvent avec $\alpha = \frac{1}{2}$).

2) Pour montrer que l'intégrale $\int_0^a f(t)\,dt$ diverge, on utilise les règles de comparaison des intégrales de fonctions positives :

– en recherchant un équivalent de f en 0 de la forme $\frac{1}{t^\alpha}$ (avec $\alpha \geq 1$), ou bien :

– en montrant que $\lim\limits_{t\to 0} t\,f(t) = +\infty$, d'où : $\exists \varepsilon > 0, \forall t \in]0, \varepsilon[, f(t) \geq \frac{1}{t}$.

1) La fonction $t \mapsto \frac{\cos t}{\sqrt{t}}$ est continue sur]0, 1]. De plus, au voisinage de 0, on a : $\frac{\cos t}{\sqrt{t}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$. Les fonctions $t \mapsto \frac{\cos t}{\sqrt{t}}$ et $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ étant continues et positives sur]0, 1], comme $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge (intégrale de Riemann), les règles de comparaison des intégrales de fonctions positives nous permettent alors d'écrire que :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt \text{ converge}}$$

2) La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

▫ De plus, au voisinage de 0, on a : $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$. Les fonctions $t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ et $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ étant continues et positives sur]0, 1], comme $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge (intégrale de Riemann), les règles de comparaison des intégrales de fonctions positives nous permettent alors d'écrire que $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$ converge.

▫ De plus, on a : $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{\frac{3}{2}} e^{-t} = 0$ (croissances comparées). Comme $\forall t \in \mathbb{R}^*, t^{\frac{3}{2}} e^{-t} \geq 0$, on en déduit alors :

$\exists A \in \mathbb{R}^*, \forall t > A, 0 \leq t^{\frac{3}{2}} e^{-t} \leq 1$ soit, en divisant cette relation par $t^2 > 0$ ($t \in \mathbb{R}_+^*$) :

$\exists A \in \mathbb{R}^*, \forall t > A, 0 \leq \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{t^2}$.

Les fonctions $t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ étant continues et positives sur $[1, +\infty[$, comme $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge (intégrale de Riemann), les règles de comparaison des intégrales de fonctions positives nous permettent alors d'écrire que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$ converge également.

▫ Comme les intégrales $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$ convergent, on peut désormais conclure :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt \text{ converge}}$$

3) La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur]0, 1]. De plus, au voisinage de 0, on a : $\frac{e^{-t}}{t} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t}$. Les fonctions $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ et $t \mapsto \frac{1}{t}$ étant continues et positives sur]0, 1], comme $\int_0^1 \frac{dt}{t}$ diverge (intégrale de Riemann), les règles de comparaison des intégrales de fonctions positives nous permettent d'écrire que $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ diverge, et donc que :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \text{ diverge}}$$

S❷ E❷

■ 6. Utilisation des règles de comparaison : intégrales impropres en a ($a \in \mathbb{R}^*$)

Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$,

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\,dt$,

3) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dt}{\ln|t|}$.

Méthode de comparaison des intégrales impropres en a ($a \in \mathbb{R}^*$)

Soient a et b deux réels et f une fonction continue par morceaux et positive sur]a, b]. Pour étudier la nature de l'intégrale impropre en a : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$, il faut effectuer le changement de variable $u = t - a$, $du = dt$ (ou bien $u = a - t$, $du = -dt$) dans l'intégrale $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,dt$ et se ramener alors à une intégrale impropre en 0.

1) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ est continue sur [0, 1[. La fonction $t \mapsto 1 - t$ étant de classe C^1 sur [0, 1[, donc pour tout $x \in [0, 1[$, de classe C^1 sur [0, x[, en effectuant le changement de variable $u = 1 - t$, $du = -dt$, on peut écrire :

$\forall x \in [0, 1[,\ \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = \int_{1-x}^1 \frac{du}{\sqrt{u}}$.

Or, comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u}}$ converge (intégrale de Riemann), la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{1-x}^1 \frac{du}{\sqrt{u}}$ admet une limite finie lorsque x tend vers 1. On en déduit alors que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$ admet également une limite finie lorsque x tend vers 1, et donc que :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}} \text{ converge}}$$

NB : Noter qu'ici, il n'est nul besoin d'utiliser les règles de comparaisons des intégrales de fonctions positives pour montrer la convergence de cette intégrale : on a utilisé la définition de la convergence (cf. exercice 1).

2) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$ est continue sur]0, 1[.

▷ De plus, au voisinage de 0, on a : $\dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$. Les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ étant continues et positives sur]0, 1[, comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge (intégrale de Riemann), les règles de comparaison des intégrales de fonctions positives nous permettent alors d'écrire que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\,dt$ converge.

▫ De même, au voisinage de 1, on a : $\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \underset{1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-t}}$. Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$ et $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ étant continues et positives sur $]0, 1[$, comme $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$ converge (cf. 1), les règles de comparaison des intégrales de fonctions positives nous permettent alors d'écrire que $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\, dt$ converge.

▫ Comme les intégrales $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\, dt$ et $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\, dt$ convergent, on peut désormais conclure :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\, dt \text{ converge}}$$

3) La fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln|t|}$ est continue sur $]-1, 0[$ et sur $]0, 1[$. De plus, comme $\ln t \underset{1}{\sim} t-1$, au voisinage de 1, on a : $\frac{1}{\ln|t|} \underset{1}{\sim} \frac{1}{t-1}$. Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{\ln|t|}$ et $t \mapsto \frac{1}{t-1}$ étant continues et négatives sur $]0, 1[$, les règles de comparaison des intégrales de fonctions de signe constant nous permettent alors d'écrire que les intégrales $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{\ln|t|}$ et $\int_0^1 \frac{dt}{t-1}$ sont de même nature.

Or, la fonction $t \mapsto 1-t$ étant de classe C^1 sur $[0, 1[$, donc pour tout $x \in [0, 1[$, de classe C^1 sur $[0, x[$, en effectuant le changement de variable $u = 1-t$, $du = -dt$, on peut écrire : $\forall x \in [0, 1[$, $\int_0^x \frac{dt}{t-1} = -\int_{1-x}^1 \frac{du}{u}$.

Comme $\int_0^1 \frac{du}{u}$ diverge (intégrale de Riemann), la fonction $x \mapsto \int_{1-x}^1 \frac{du}{u}$ n'admet pas de limite finie lorsque x tend vers 1, donc la fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{t-1}$ n'admet également pas de limite finie lorsque x tend vers 1, donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t-1}$ diverge.

D'après ce qui précède, on peut maintenant écrire que l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{\ln|t|}$ diverge, et donc :

$$\boxed{\int_{-1}^1 \frac{dt}{\ln|t|} \text{ diverge}}$$

S❶ E❷

★ 7. Règles d'utilisation des intégrales impropres : convergence du reste, positivité et croissance de l'intégrale

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $a < b$.

1) Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ telle que l'intégrale $\int_a^b f(t)\, dt$ converge. Montrer que :

$$\lim_{x \to b^-} \int_x^b f(t)\, dt = 0.$$

2) **a)** Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b[$ telle que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge. Montrer que :

$$\int_a^b f(t)\,dt \geq 0.$$

b) Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ et strictement positive sur $]a, b[$ telle que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge. Montrer que :

$$\int_a^b f(t)\,dt > 0.$$

3) **a)** Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b[$ telles que $\forall t \in [a, b[$, $f(t) \leq g(t)$ et telles que les intégrales $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ convergent. Montrer que :

$$\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt.$$

b) Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b[$ telles que $\forall t \in]a, b[$, $f(t) < g(t)$ et telles que les intégrales $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ convergent. Montrer que :

$$\int_a^b f(t)\,dt < \int_a^b g(t)\,dt.$$

4) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) = \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt.$$

a) Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Montrer que F est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Montrer que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

1) Comme f est une fonction continue sur $[a, b[$ telle que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge, on peut écrire que pour tout $x \in [a, b[$, l'intégrale $\int_x^b f(t)\,dt$ converge. D'après la relation de Chasles, on peut alors écrire :

$\forall x \in [a, b[,\ \int_x^b f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt.$

Or, comme l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge, on a : $\lim\limits_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$. On en déduit alors, par passage à la limite dans la relation précédente :

$$\boxed{\lim_{x \to b^-} \int_x^b f(t)\,dt = 0}$$

☞ Se souvenir que le reste d'une intégrale impropre convergente tend vers 0 (démonstration à connaître).

2) **a)** Comme f est une fonction continue et positive sur $[a, b[$, pour tout $x \in [a, b[$, elle est continue et positive sur $[a, x]$. Par positivité de l'intégrale, on peut alors écrire : $\forall x \in [a, b[,\ \int_a^x f(t)\,dt \geq 0$.

Comme $\int_a^b f(t)\,dt$ converge, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers b^-. En faisant tendre x vers b^-, le théorème de prolongement des inégalités appliqué à l'inégalité précédente nous permet alors d'écrire :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt \geq 0}$$

b) Soit $\varepsilon \in]0, b - a[$. Comme f est une fonction continue sur $[a, b[$ et strictement positive sur $]a, b[$, f est continue sur $[a, a + \varepsilon]$ et strictement positive sur $]a, a + \varepsilon]$. D'après les résultats de l'exercice **8**.1.2, on peut alors écrire : $\int_a^{a+\varepsilon} f(t)\,dt > 0$ ①.

De plus, comme f est une fonction continue sur $[a, b[$ et positive sur $]a, b[$, f est continue et positive sur $[a + \varepsilon, b[$. Par positivité de l'intégrale, on peut également écrire : $\forall x \in [a + \varepsilon, b[, \int_{a+\varepsilon}^{x} f(t)\,dt \geq 0$.

Comme $\int_a^b f(t)\,dt$ converge, l'intégrale $\int_{a+\varepsilon}^{b} f(t)\,dt$ converge également. On en déduit alors que la fonction $x \mapsto \int_{a+\varepsilon}^{x} f(t)\,dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers b^-. En faisant tendre x vers b^-, le théorème de prolongement des inégalités appliqué à l'inégalité précédente nous permet alors d'écrire : $\int_{a+\varepsilon}^{b} f(t)\,dt \geq 0$ ②.

① et ② nous permettent désormais de conclure, à l'aide de la relation de Chasles :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt > 0}$$

☞ Se souvenir de la démonstration de la positivité au sens large (**a**) et au sens strict (**b**) des intégrales impropres (hors-programme, démonstrations à connaître).

3) a) Comme f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b[$ telles que $\forall t \in [a, b[, f(t) \leq g(t)$ et telles que les intégrales $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ convergent, on peut écrire que g - f est une fonction continue et positive sur $[a, b[$ telle que l'intégrale $\int_a^b (g - f)(t)\,dt$ converge.

D'après le **2a**, on peut alors écrire : $\int_a^b (g - f)(t)\,dt \geq 0$, et donc, par linéarité de l'intégrale :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt}$$

b) Comme f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b[$ telles que $\forall t \in]a, b[, f(t) < g(t)$ et telles que les intégrales $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ convergent, on peut écrire que g - f est une fonction continue sur $[a, b[$ et strictement positive sur $]a, b[$ telle que l'intégrale $\int_a^b (g - f)(t)\,dt$ converge.

D'après le **2b**, on peut alors écrire : $\int_a^b (g - f)(t)\,dt > 0$, et donc, par linéarité de l'intégrale :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt < \int_a^b g(t)\,dt}$$

☞ Se souvenir de la démonstration de la croissance au sens large (**a**) et au sens strict (**b**) des intégrales impropres (hors-programme, démonstrations à connaître).

NB : Bien entendu, l'ensemble des résultats précédents reste valable pour les intégrales impropres en a, voire impropres en a et en b.

4) a) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est continue sur $[1, +\infty[$. De plus, on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{t \to +\infty} t^{x+1} e^{-t} = 0$ (croissances comparées). Comme $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, t^{x+1} e^{-t} \geq 0$, on en déduit alors :

SO EO

8. Opérations dans les intégrales impropres

1) **a)** Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que l'intégrale $I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-\alpha t}\, dt$ converge. Déterminer alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, une expression de I_k en fonction de I_{k-1}. En déduire enfin, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la valeur de I_k.

b) Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, montrer que l'intégrale $I_{p,q} = \int_0^1 t^p \ln^q t\, dt$ converge. Déterminer alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, une expression de $I_{p,q}$ en fonction de $I_{p,q-1}$. En déduire enfin, pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, la valeur de $I_{p,q}$.

2) **a)** Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2. Après en avoir montré la convergence, déterminer la valeur de $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t \ln^p t}$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Après en avoir montré la convergence, déterminer la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{x^2 \cos^2 t + \sin^2 t}$.

1) **a)** ▪ Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^k e^{-\alpha t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. De plus, on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^{k+2} e^{-\alpha t} = 0$ ($\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, croissances comparées). Comme $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $t^{k+2} e^{-\alpha t} \geq 0$, on en déduit alors :

$\exists A \in \mathbb{R}^+, \forall t > A, 0 \leq t^{k+2} e^{-\alpha t} \leq 1$ soit, en divisant cette relation par $t^2 > 0$ ($t \in \mathbb{R}_+^*$) :

$\exists A \in \mathbb{R}^+, \forall t > A, 0 \leq t^k e^{-\alpha t} \leq \frac{1}{t^2}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, les fonctions $t \mapsto t^k e^{-\alpha t}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ étant continues et positives sur $[1, +\infty[$, comme $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge (intégrale de Riemann), les règles de comparaison des intégrales de fonctions positives nous permettent alors d'écrire que :

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}, \text{ l'intégrale } I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-\alpha t}\, dt \text{ converge}}$$

▪ Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on désigne par g_k la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall y \in \mathbb{R}^+$, $g_k(y) = \int_0^y t^k e^{-\alpha t}\, dt$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $t \mapsto t^k$ et $t \mapsto -\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha}$ étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$, donc pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, de classe C^1 sur $[0, y]$, à l'aide d'une intégration par parties (on intègre $t \mapsto e^{-\alpha t}$ et on dérive $t \mapsto t^k$), on peut écrire :

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall y \in \mathbb{R}^+, g_k(y) = \left[-\frac{t^k e^{-\alpha t}}{\alpha} \right]_0^y + \frac{k}{\alpha} \int_0^y t^{k-1} e^{-\alpha t}\, dt$ soit, en reconnaissant $g_{k-1}(y)$ ($k \in \mathbb{N}^*$, $y \in \mathbb{R}^+$) :

$$= \frac{k}{\alpha} g_{k-1}(y) - \frac{y^k e^{-\alpha y}}{\alpha}.$$

Comme $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{y \to +\infty} \frac{y^k e^{-\alpha y}}{\alpha} = 0$ ($\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, croissances comparées), en faisant tendre y vers $+\infty$ et en reconnaissant I_k et I_{k-1} ($k \in \mathbb{N}^*$), on en déduit alors par passage à la limite dans la relation précédente :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, I_k = \frac{k}{\alpha} I_{k-1}}$$

$\forall p\in\mathbb{N},\ \forall q\in\mathbb{N}^*,\ \forall y\in]0,1],\ g_{p,q}(y)=\left[\dfrac{t^{p+1}\ln^q t}{p+1}\right]_y^1-\dfrac{q}{p+1}\displaystyle\int_y^1 t^p\ln^{q-1}t\,dt$ soit, en reconnaissant $g_{p,q-1}(y)$:

$$=-\frac{q}{p+1}g_{p,q-1}(y)-\frac{y^{p+1}\ln^q y}{p+1}.$$

Comme $\forall p\in\mathbb{N},\ \forall q\in\mathbb{N}^*,\ \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y^{p+1}\ln^q y}{p+1}=0$ (croissances comparées), en faisant tendre y vers 0 et en reconnaissant $I_{p,q}$ ($p\in\mathbb{N}$, $q\in\mathbb{N}^*$), on en déduit alors, par passage à la limite dans la relation précédente :

$$\boxed{\forall p\in\mathbb{N},\ \forall q\in\mathbb{N}^*,\ I_{p,q}=-\frac{q}{p+1}\,I_{p,q-1}}$$

▪ En itérant cette relation, on peut maintenant écrire : $\forall p\in\mathbb{N},\ \forall q\in\mathbb{N}^*,\ I_{p,q}=(-1)^q\dfrac{q!}{(p+1)^q}I_{p,0}$, soit, le cas $q=0$ rejoignant dans le cas général ($\forall p\in\mathbb{N},\ I_{p,0}=(-1)^0\dfrac{0!}{(p+1)^0}I_{p,0}$) : $\forall(p,q)\in\mathbb{N}^2,\ I_{p,q}=(-1)^q\dfrac{q!}{(p+1)^q}I_{p,0}$. Or, on a : $\forall p\in\mathbb{N},\ I_{p,0}=\displaystyle\int_0^1 t^p\,dt=\frac{1}{p+1}$.

On peut désormais conclure :

$$\boxed{\forall(p,q)\in\mathbb{N}^2,\ I_{p,q}=(-1)^q\frac{q!}{(p+1)^{q+1}}}$$

☞ Se souvenir des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty}t^k e^{-\alpha t}dt$ ($\alpha\in\mathbb{R}_+^*$, $k\in\mathbb{N}$) et $\displaystyle\int_0^1 t^p\ln^q t\,dt$ ($(p,q)\in\mathbb{N}^2$) (à savoir recalculer, intégrales très classiques).

2) a) Soit g la fonction définie sur $[e,+\infty[$ par : $\forall y\in[e,+\infty[,\ g(y)=\displaystyle\int_e^y\frac{dt}{t\ln^p t}$. La fonction $t\mapsto\ln t$ étant de classe C^1 sur $[e,+\infty[$, donc pour tout $y\in[e,+\infty[$, de classe C^1 sur $[e,y[$, en effectuant le changement de variable $u=\ln t$, $du=\dfrac{dt}{t}$, on peut écrire :

$\forall y\in[e,+\infty[,\ g(y)=\displaystyle\int_1^{\ln y}\frac{du}{u^p}$ soit :

$=\left[-\dfrac{1}{(p-1)u^{p-1}}\right]_1^{\ln y}$ i.e. :

$=\dfrac{1}{p-1}-\dfrac{1}{(p-1)\ln^{p-1}y}.$

Or, comme p est un entier naturel supérieur ou égal à 2, on peut écrire : $\lim\limits_{y\to+\infty}\ln^{p-1}y=+\infty$, et donc : $\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{1}{(p-1)\ln^{p-1}y}=0$. En faisant tendre y vers $+\infty$ et en reconnaissant $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{dt}{t\ln^p t}$, on en déduit alors, par passage à la limite dans la relation précédente :

$$\boxed{\int_e^{+\infty}\frac{dt}{t\ln^p t}\text{ converge avec }\int_e^{+\infty}\frac{dt}{t\ln^p t}=\frac{1}{p-1}}$$

SO EⓋ

★ 9. Intégrales impropres et suites

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$.

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels qui tend vers $+\infty$ et telle que la suite $\left(\int_0^{u_n} f(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Montrer, à l'aide d'un contre-exemple que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ ne converge pas nécessairement.

2) a) Montrer qu'en revanche, si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, alors, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels qui tend vers $+\infty$, la suite $\left(\int_0^{u_n} f(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.

b) En déduire enfin que s'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels qui tend vers $+\infty$ telle que la suite $\left(\int_0^{u_n} f(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge.

3) Montrer que si f est de signe constant sur $\mathbb{R}^+$ et si la suite $\left(\int_0^{n} f(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ ($\ell\in\mathbb{R}$), alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et : $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \ell$.

1) ❑ Soient a = 0, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = 2n\pi$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t\in\mathbb{R},\ f(t) = \cos t$.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, et :

$\forall n\in\mathbb{N},\ \int_0^{u_n} f(t)\,dt = \int_0^{2n\pi} \cos t\,dt$ soit :

$= \left[\sin t\right]_0^{2n\pi}$ soit encore :

$= \sin(2n\pi) - \sin 0$ i.e. :

$= 0.$

La suite $\left(\int_0^{u_n} f(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc la suite constante égale à 0. Elle converge donc bien.

❑ Or, on a :

$\forall x\in\mathbb{R},\ \int_0^{x} f(t)\,dt = \int_0^{x} \cos t\,dt$ soit :

$= \left[\sin t\right]_0^{x}$ soit encore :

$= \sin x - \sin 0$ i.e. :

$= \sin x.$

Comme la fonction sin n'admet pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$, la fonction $x \mapsto \int_0^{x} f(t)\,dt$ n'admet également pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$. On en déduit alors que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge.

On peut désormais conclure :

> S'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels qui tend vers $+\infty$ telle que la suite $\left(\int_0^{u_n} f(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ ne converge pas nécessairement.

☞ Se souvenir que si f est une fonction continue sur $[a, +\infty[$ $(a\in\mathbb{R})$ et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels qui tend vers $+\infty$ telle que la suite $\left(\int_a^{u_n} f(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ ne converge pas nécessairement (démonstration à connaître). Ainsi, pour montrer que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, montrer que la suite $\left(\int_a^{n} f(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ne suffit pas (contre-exemple à retenir).

2) a) Si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, on peut alors écrire que la fonction $g : x \mapsto \int_0^{x} f(t)\,dt$ admet une limite finie $\ell = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ lorsque x tend vers $+\infty$. Soit maintenant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels qui tend vers $+\infty$. D'après le cours, on peut alors écrire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n) = \ell$, donc que la suite $\left(\int_0^{u_n} f(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. On peut désormais conclure :

> Si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, alors pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels qui tend vers $+\infty$, la suite $\left(\int_0^{u_n} f(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.

☞ Se souvenir que si f est une fonction continue sur $[a, +\infty[$ $(a\in\mathbb{R})$ et si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, alors, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels qui tend vers $+\infty$, la suite $\left(\int_a^{u_n} f(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ (démonstration à connaître).

b) On sait que si une proposition est vraie, alors sa contraposée est vraie. D'après la question précédente, on peut alors écrire :

> S'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels qui tend vers $+\infty$ telle que la suite $\left(\int_0^{u_n} f(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge.

3) Supposons que f soit une fonction positive sur $\mathbb{R}^+$ (le même raisonnement peut s'effectuer si f est une fonction négative sur $\mathbb{R}^+$ *mutatis mutandi*).

On peut alors écrire : $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in[n, n+1[,\ \begin{cases} \int_n^{x} f(t)\,dt \geq 0 \\ \int_x^{n+1} f(t)\,dt \geq 0 \end{cases}$, d'où :

$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in[n, n+1[,\ 0 \leq \int_n^{x} f(t)\,dt \leq \int_n^{x} f(t)\,dt + \int_x^{n+1} f(t)\,dt$ soit, d'après la relation de Chasles :

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in[n, n+1[$, $0 \le \int_n^x f(t)\,dt \le \int_n^{n+1} f(t)\,dt$ et donc, en additionnant $\int_0^n f(t)\,dt$ membre à membre :

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in[n, n+1[$, $\int_0^n f(t)\,dt \le \int_0^x f(t)\,dt \le \int_0^{n+1} f(t)\,dt$ ①.

Or, si la suite $\left(\int_0^n f(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, on peut alors écrire : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n f(t)\,dt = \lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{n+1} f(t)\,dt = \ell$. Soit alors g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall x\in\mathbb{R}^+$, $g(x) = \int_0^{E(x)} f(t)\,dt$. D'après ce qui précède, on peut écrire : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell$.

Or, d'après la relation ①, on peut également écrire :

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in[n, n+1[$, $\int_0^{E(x)} f(t)\,dt \le \int_0^x f(t)\,dt \le \int_0^{E(x)+1} f(t)\,dt$ soit encore, comme $\forall x\in\mathbb{R}$, $E(x)+1 = E(x+1)$:

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in[n, n+1[$, $g(x) \le \int_0^x f(t)\,dt \le g(x+1)$ et donc, comme $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} [n, n+1[= \mathbb{R}^+$:

$\forall x\in\mathbb{R}^+$, $g(x) \le \int_0^x f(t)\,dt \le g(x+1)$.

La fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est donc encadrée par deux fonctions qui tendent vers ℓ lorsque x tend vers $+\infty$. On en déduit alors (théorème de l'encadrement) : $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,dt = \ell$ et on peut maintenant écrire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge avec : $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \ell$.

On peut désormais conclure :

> Si f est de signe constant sur $\mathbb{R}^+$ et si la suite $\left(\int_0^n f(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et : $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \ell$.

☞ Si f est une fonction continue, de signe constant sur $[a, +\infty[$ ($a\in\mathbb{R}$), lorsque l'on connait la limite ℓ de la suite $\left(\int_a^n f(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$, pour montrer que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, il faut déterminer un encadrement de $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ par deux termes (consécutifs) de la suite.

Les théorèmes de prolongement des inégalités et de l'encadrement ne s'appliquant qu'entre suites ou qu'entre fonctions, on définit alors une fonction auxiliaire $G : x \mapsto \int_a^{E(x)} f(t)\,dt$ dont on connait donc la limite ℓ lorsque x tend vers $+\infty$. La fonction F est alors encadrée par la fonction G prise en deux points, ce qui permet d'écrire que F admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$, et donc que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge avec $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \ell$.

☞ Se souvenir que si f est une fonction continue, de signe constant sur $[a, +\infty[$ ($a \in \mathbb{R}$) et si la suite $\left(\int_a^n f(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \ell$ (démonstration à connaître).

Plus généralement, si f est une fonction continue, de signe constant sur $[a, +\infty[$ et s'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels qui tend vers $+\infty$ telle que la suite $\left(\int_a^{u_n} f(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \ell$.

S❷ E❷

● 10. Intégrales de Bertrand

> Soient α et β deux réels. Etudier, en distinguant les cas suivant les valeurs de α et β, la nature de l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha \ln^\beta t}$.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha \ln^\beta t}$ est continue et positive sur $[e, +\infty[$. Trois cas se présentent :

↘ *Le cas $\alpha < 1$*

Comme $\alpha < 1$, on a : $\lim_{t\to+\infty} t^{\alpha-1}\ln^\beta t = 0$ (croissances comparées). De plus, comme $\forall t\in[1, +\infty[$, $t^{\alpha-1}\ln^\beta t \geq 0$, on en déduit alors :

$\exists A\in[1, +\infty[$, $\forall t > A$, $0 \leq t^{\alpha-1}\ln^\beta t \leq 1$ soit, en divisant cette relation par $t^\alpha \ln^\beta t > 0$ ($t\in]1, +\infty[$) :

$\exists A\in[1, +\infty[$, $\forall t > A$, $0 \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{t^\alpha \ln^\beta t}$.

Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha \ln^\beta t}$ et $t \mapsto \frac{1}{t}$ étant continues et positives sur $[e, +\infty[$, comme $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge, les règles de comparaison des intégrales de fonctions positives nous permettent alors d'écrire que l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha \ln^\beta t}$ diverge.

↘ *Le cas $\alpha = 1$*

Soit g la fonction définie sur $[e, +\infty[$, par : $\forall y\in[e, +\infty[$, $g(y) = \int_e^y \frac{dt}{t\ln^\beta t}$. La fonction $t \mapsto \ln t$ étant de classe C^1 sur $[e, +\infty[$, donc pour tout $y\in[e, +\infty[$, de classe C^1 sur $[e, y]$, en effectuant le changement de variable $u = \ln t$, $du = \frac{dt}{t}$, on peut alors écrire : $\forall y\in[e, +\infty[$, $g(y) = \int_1^{\ln y} \frac{du}{u^\beta}$.

Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$ (intégrale de Riemann) et comme $\lim_{y\to+\infty} \ln y = +\infty$, on peut écrire que g admet une limite finie lorsque y tend vers $+\infty$ si et seulement si $\beta > 1$, donc que l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t\ln^\beta t}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

$\forall k \in \mathbb{N}, \int_{k+1}^{k+2} f(t)\,dt \le f(k+1) \le \int_{k}^{k+1} f(t)\,dt$ soit encore, en sommant cette relation pour $k = n$ ($n \in \mathbb{N}$) à $k = N$ ($N \in \mathbb{N}$, $N \ge n$), d'après la relation de Chasles :

$\forall (n, N) \in \mathbb{N}^2, n \le N, \int_{n+1}^{N+2} f(t)\,dt \le \sum_{k=n}^{N} f(k+1) \le \int_{n}^{N+1} f(t)\,dt$ et en effectuant le changement de variable $k' = k + 1$ dans la somme :

$\forall (n, N) \in \mathbb{N}^2, n \le N, \int_{n+1}^{N+2} f(t)\,dt \le \sum_{k=n+1}^{N+1} f(k) \le \int_{n}^{N+1} f(t)\,dt.$

Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, on peut alors écrire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les suites $\left(\int_{n+1}^{N+2} f(t)\,dt\right)_{N \ge n}$ et $\left(\int_{n}^{N+1} f(t)\,dt\right)_{N \ge n}$ convergent de limites respectives $\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\int_{n}^{+\infty} f(t)\,dt$ (cf. exercice 9.2a).

De plus, comme la série de terme $u_n = f(n)$ converge, on peut écrire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $\left(\sum_{k=n+1}^{N+1} f(k)\right)_{N \ge n}$ converge de limite $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

En faisant tendre N vers $+\infty$, le théorème de prolongement des inégalités appliqué deux fois à la double inégalité précédente nous permet alors de conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,dt \le \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \le \int_{n}^{+\infty} f(t)\,dt}$$

☞ Se souvenir que si f est une fonction continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,dt \le \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \le \int_{n}^{+\infty} f(t)\,dt$ (résultat classique, démonstration à connaître).

2) a) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall t \in \mathbb{R}^+, f(t) = \frac{1}{(t+1)^\alpha}$. f est continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

Les fonctions f et $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ étant continues et positives sur $[1, +\infty[$, comme $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^\alpha}$ et comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge (intégrale de Riemann), les règles de comparaison des intégrales de fonctions positives nous permettent alors d'écrire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

En appliquant les résultats du 1, on en déduit alors :

$\forall n \in \mathbb{N}, \int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,dt \le \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \le \int_{n}^{+\infty} f(t)\,dt$ i.e. :

$\forall n \in \mathbb{N}, \int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)^\alpha} \le \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \le \int_{n}^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)^\alpha}$ soit, en écrivant cette relation en $n - 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$) :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_{n}^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)^\alpha} \le \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \le \int_{n-1}^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)^\alpha}$ ①.

Soit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall y \in \mathbb{R}^+$, $g_n(y) = \displaystyle\int_n^y \frac{dt}{(t+1)^\alpha}$. On peut alors écrire :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall y \in \mathbb{R}^+$, $g_n(y) = \left[-\dfrac{1}{(\alpha-1)(t+1)^{\alpha-1}} \right]_n^y$ soit :

$$= \frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\alpha-1)(y+1)^{\alpha-1}}.$$

Or, on a : $\displaystyle\lim_{y \to +\infty} \frac{1}{(\alpha-1)(y+1)^{\alpha-1}} = 0$. En faisant tendre y vers $+\infty$ et en reconnaissant $\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)^\alpha}$ $(n \in \mathbb{N})$, on en déduit alors, par passage à la limite dans la relation précédente : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}}$.

On peut maintenant écrire, d'après la relation ① :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \le \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \le \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ soit enfin, en effectuant le changement de variable $k' = k + 1$ dans la somme :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \le \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \le \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}}$$

b) ▪ Comme la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ $(n \ge 1)$ converge de somme $S(\alpha)$, on peut écrire : $S(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$, on peut également écrire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = S(\alpha) - S_n(\alpha)$.

D'après la question précédente, on en déduit alors :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \le S(\alpha) - S_n(\alpha) \le \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ ②.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \le S(\alpha) - S_n(\alpha) \le \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$, on peut maintenant conclure :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ S_n(\alpha) \text{ constitue une valeur approchée de } S(\alpha) \text{ à } \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \text{ près}}$$

▪ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en retranchant $\dfrac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}}$ membre à membre dans la relation ②, on peut également écrire :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \le S(\alpha) - \left(S_n(\alpha) + \dfrac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}}\right) \le \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}}$ i.e. :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \le S(\alpha) - \left(S_n(\alpha) + \dfrac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}}\right) \le \dfrac{1}{\alpha-1} \dfrac{(n+1)^{\alpha-1} - n^{\alpha-1}}{\left(n(n+1)\right)^{\alpha-1}}$ ③.

Soit alors f_α la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $f_\alpha(t) = \dfrac{t^{\alpha-1}}{\alpha-1}$. Deux cas se présentent :

• Si $1 < \alpha < 2$, f_α est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, continue sur $[n, n+1]$ et dérivable sur $]n, n+1[$. De plus, on a : $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $f_\alpha'(t) = t^{\alpha-2}$.

Comme la fonction $t \mapsto t^{\alpha-2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ (car $\alpha - 2 < 0$), on peut alors écrire :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in]n, n+1[$, $(n+1)^{\alpha-2} \le f_\alpha'(t) \le n^{\alpha-2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité des accroissements finis appliquée à f_α sur $[n, n+1]$ nous permet alors d'écrire :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)^{\alpha-2} \leq f_\alpha(n+1) - f_\alpha(n) \leq n^{\alpha-2}$ d'où :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \dfrac{(n+1)^{\alpha-1} - n^{\alpha-1}}{\alpha - 1} \leq n^{\alpha-2}$ ④.

Or, comme $\forall n \in \mathbb{N}^*, \big(n(n+1)\big)^{\alpha-1} \geq n^{2\alpha-2}$, on peut écrire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \dfrac{1}{\big(n(n+1)\big)^{\alpha-1}} \leq \dfrac{1}{n^{2\alpha-2}}$ ⑤, et donc, en multipliant les relations ④ et ⑤ membre à membre :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{1}{\alpha-1} \dfrac{(n+1)^{\alpha-1} - n^{\alpha-1}}{\big(n(n+1)\big)^{\alpha-1}} \leq \dfrac{1}{n^\alpha}$ soit enfin, à l'aide de la relation ③ :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq S(\alpha) - \left(S_n(\alpha) + \dfrac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}}\right) \leq \dfrac{1}{n^\alpha}$.

• De même, si $\alpha \geq 2$, f_α est continue et dérivable sur $\mathbf{R}^+$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, continue sur $[n, n+1]$ et dérivable sur $]n, n+1[$. De plus, on a : $\forall t \in \mathbf{R}^+, f_\alpha'(t) = t^{\alpha-2}$.

Comme la fonction $t \mapsto t^{\alpha-2}$ est croissante sur $\mathbf{R}^+$ (car $\alpha - 2 \geq 0$), on peut alors écrire :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in]n, n+1[, n^{\alpha-2} \leq f_\alpha'(t) \leq (n+1)^{\alpha-2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité des accroissements finis appliquée à f_α sur $[n, n+1]$ nous permet alors d'écrire :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, n^{\alpha-2} \leq f_\alpha(n+1) - f_\alpha(n) \leq (n+1)^{\alpha-2}$ d'où :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \dfrac{(n+1)^{\alpha-1} - n^{\alpha-1}}{\alpha - 1} \leq (n+1)^{\alpha-2}$.

On en déduit alors, en divisant cette relation par $\big(n(n+1)\big)^{\alpha-1} > 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$) :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{1}{\alpha-1} \dfrac{(n+1)^{\alpha-1} - n^{\alpha-1}}{\big(n(n+1)\big)^{\alpha-1}} \leq \dfrac{(n+1)^{\alpha-2}}{\big(n(n+1)\big)^{\alpha-1}}$ i.e. :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{1}{\alpha-1} \dfrac{(n+1)^{\alpha-1} - n^{\alpha-1}}{\big(n(n+1)\big)^{\alpha-1}} \leq \dfrac{1}{n^{\alpha-1}(n+1)}$ d'où, comme $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{n}$:

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{1}{\alpha-1} \dfrac{(n+1)^{\alpha-1} - n^{\alpha-1}}{\big(n(n+1)\big)^{\alpha-1}} \leq \dfrac{1}{n^\alpha}$ soit enfin, à l'aide de la relation ③ :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq S(\alpha) - \left(S_n(\alpha) + \dfrac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}}\right) \leq \dfrac{1}{n^\alpha}$.

Dans tous les cas de figure, on peut maintenant écrire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq S(\alpha) - \left(S_n(\alpha) + \dfrac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}}\right) \leq \dfrac{1}{n^\alpha}$, d'où la conclusion :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(\alpha) + \dfrac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}}$ constitue une valeur approchée par défaut de $S(\alpha)$ à $\dfrac{1}{n^\alpha}$ près

■ De même, en retranchant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{(\alpha-1)\,n^{\alpha-1}}$ membre à membre dans la relation ②, on peut également écrire :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{(\alpha-1)\,n^{\alpha-1}} \leq S(\alpha) - \left(S_n(\alpha) + \dfrac{1}{(\alpha-1)\,n^{\alpha-1}}\right) \leq 0$ soit :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{1}{\alpha-1} \dfrac{n^{\alpha-1} - (n+1)^{\alpha-1}}{\big(n(n+1)\big)^{\alpha-1}} \leq S(\alpha) - \left(S_n(\alpha) + \dfrac{1}{(\alpha-1)\,n^{\alpha-1}}\right) \leq 0$ ④.

On a vu précédemment que dans tous les cas de figure, on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{1}{\alpha-1}\ \frac{(n+1)^{\alpha-1}-n^{\alpha-1}}{(n(n+1))^{\alpha-1}} \leq \frac{1}{n^\alpha}$. On en déduit alors que :

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ -\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}\ \frac{n^{\alpha-1}-(n+1)^{\alpha-1}}{(n(n+1))^{\alpha-1}}$ et donc, d'après la relation ⑤ :

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ -\frac{1}{n^\alpha} \leq S(\alpha) - \left(S_n(\alpha) + \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}\right) \leq 0$ d'où la conclusion :

> Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n(\alpha) + \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ constitue une valeur approchée par excès de $S(\alpha)$ à $\frac{1}{n^\alpha}$ près

c) Pour $\alpha = 2$, d'après la question précédente, on peut écrire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n(2)$ constitue une valeur approchée de $S(2)$ à $\frac{1}{n}$ près. Ainsi, une condition suffisante pour que $S_n(2)$ constitue une valeur approchée de $S(2)$ à 10^{-6} près est : $\frac{1}{n} \leq 10^{-6}$, soit : $n \geq 10^6$.

De même, toujours pour $\alpha = 2$, d'après la question précédente, on peut écrire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n(2) + \frac{1}{n}$ constitue une valeur approchée de $S(2)$ à $\frac{1}{n^2}$ près. Ainsi, une condition suffisante pour que $S_n(2) + \frac{1}{n}$ constitue une valeur approchée de $S(2)$ à 10^{-6} près est : $\frac{1}{n^2} \leq 10^{-6}$, soit : $n^2 \geq 10^6$, i.e. : $n \geq 10^3$.

On peut désormais conclure :

> $S_n(2)$ et $S_n(2) + \frac{1}{n}$ constituent des valeurs approchées de $S(2)$ à 10^{-6} près respectivement pour $n \geq 10^6$ et $n \geq 10^3$. La suite $\left(S_n(2) + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc plus rapidement que la suite $(S_n(2))_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers $S(2)$.

S❷ E❷

● 13. Intégrales impropres et doubles limites

Soient f une fonction continue, positive, décroissante et non nulle sur $\mathbb{R}^+$ telle que l'intégrale $K = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x\in\mathbb{R}^+,\ g(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-xt}\,dt.$$

1) Montrer que g est bien définie sur $\mathbb{R}^+$.

2) **a)** Montrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R}^+,\ \forall \eta\in\mathbb{R}_+^*,\ 0 \leq g(x) \leq \eta f(0) + Ke^{-x\eta}$$

b) En déduire que :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

1) On a :

$\forall x\in\mathbb{R}^+,\ \forall t\in\mathbb{R}^+,\ 0 \leq e^{-xt} \leq 1$ soit, en multipliant cette relation par $f(t) \geq 0$ ($t\in\mathbb{R}^+$) :

$\forall x\in\mathbb{R}^+,\ \forall t\in\mathbb{R}^+,\ 0 \leq f(t)\,e^{-xt} \leq f(t)$.

Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, les règles de comparaison des intégrales de fonctions positives nous permettent alors d'écrire que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,dt$ converge, et donc que :

$$\boxed{g \text{ est définie sur } \mathbb{R}^*}$$

2) a) ❏ Comme pour tout $x \in \mathbb{R}^*_+$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,dt$ converge et comme $\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall t \in \mathbb{R}^*, f(t)e^{-xt} \geq 0$ (cf. supra), on peut écrire (cf. exercice 7.2a) :

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,dt \geq 0$ ①.

De plus, d'après la relation de Chasles, on peut écrire :

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall \eta \in \mathbb{R}^*_+, \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,dt = \int_0^{\eta} f(t)e^{-xt}\,dt + \int_\eta^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,dt$ ②.

❏ Or, on a (cf. supra) :

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall t \in \mathbb{R}^*, f(t)e^{-xt} \leq f(t)$ soit, comme f est décroissante sur $\mathbb{R}^*$, i.e. $\forall t \in \mathbb{R}^*, f(t) \leq f(0)$:

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall t \in \mathbb{R}^*, f(t)e^{-xt} \leq f(0)$ et donc, en intégrant cette relation sur $[0, \eta]$ ($\eta \in \mathbb{R}^*_+$) :

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall \eta \in \mathbb{R}^*_+, \int_0^{\eta} f(t)e^{-xt}\,dt \leq \eta f(0)$ ③.

❏ De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, la fonction $t \mapsto e^{-xt}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}^*$, on peut écrire :

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall \eta \in \mathbb{R}^*_+, \forall t \in [\eta, +\infty[, 0 \leq e^{-xt} \leq e^{-x\eta}$ soit, en multipliant cette relation par $f(t) \geq 0$ ($t \in \mathbb{R}^*_+$) :

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall \eta \in \mathbb{R}^*_+, \forall t \in [\eta, +\infty[, 0 \leq f(t)e^{-xt} \leq f(t)e^{-x\eta}$.

Comme les intégrales $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,dt$ convergent (cf. supra), on peut écrire que pour tout $\eta \in \mathbb{R}^*_+$, les intégrales $\int_\eta^{+\infty} f(t)\,dt$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\int_\eta^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,dt$ convergent également et on en déduit alors (cf. exercice 7.3a) :

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall \eta \in \mathbb{R}^*_+, \int_\eta^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,dt \leq e^{-x\eta}\int_\eta^{+\infty} f(t)\,dt$ ④.

Or, comme f est positive sur $\mathbb{R}^*$, donc pour tout $\eta \in \mathbb{R}^*_+$, positive sur $[0, \eta]$, par positivité de l'intégrale, on peut écrire :

$\forall \eta \in \mathbb{R}^*_+, \int_0^{\eta} f(t)\,dt \geq 0$ soit, en additionnant $\int_\eta^{+\infty} f(t)\,dt$ membre à membre, d'après la relation de Chasles :

$\forall \eta \in \mathbb{R}^*_+, \int_\eta^{+\infty} f(t)\,dt \leq \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ et donc, d'après la relation ④, en reconnaissant K :

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall \eta \in \mathbb{R}^*_+, \int_\eta^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,dt \leq Ke^{-x\eta}$ ⑤.

❏ Les relations ①, ②, ③ et ⑤ nous permettent alors d'écrire :

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall \eta \in \mathbb{R}^*_+, 0 \leq \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,dt \leq \eta f(0) + Ke^{-x\eta}$ et donc, en reconnaissant g(x) :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall \eta \in \mathbb{R}^*_+, 0 \leq g(x) \leq \eta f(0) + Ke^{-x\eta}} \quad ⑥$$

b) ⊃ Comme f est une fonction continue et non nulle sur $\mathbb{R}^+$, on peut écrire (cf. exercice 7.6.4a) qu'il existe un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}^+$ et non réduit à un point tel que $\forall x \in I$, $f(x) \neq 0$. La fonction f étant positive sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit alors : $\forall x \in I$, $f(x) > 0$.

Soit alors a un élément de I différent de 0 (a existe car I n'est pas réduit à un point). On peut alors écrire : $f(a) > 0$. Comme f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit alors : $\forall x \in [0, a]$, $f(x) > 0$, et donc : $f(0) > 0$.

Comme $\forall x \in [0, a]$, $f(x) > 0$, on peut maintenant écrire (cf. exercice 8.1.2) : $\int_0^a f(t)\,dt > 0$. De plus, comme f est positive sur $\mathbb{R}^+$ (avec $a \in \mathbb{R}^+$) et comme $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, on peut écrire que $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et que (cf. exercice 7.2a) : $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt \geq 0$.

En additionnant ces deux dernières intégrales, on en déduit alors : $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt > 0$, ce qui s'écrit encore : $K > 0$.

⊃ Comme $\forall \eta \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x\eta} = 0$ et comme $K > 0$ (cf. supra), on peut écrire :

$\forall \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}^+, \forall x > A, e^{-x\eta} < \frac{\varepsilon}{K}$ soit, en multipliant cette relation par $K > 0$:

$\forall \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}^+, \forall x > A, Ke^{-x\eta} < \varepsilon$ soit encore, en additionnant $\eta f(0)$ membre à membre :

$\forall \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}^+, \forall x > A, \eta f(0) + Ke^{-x\eta} < \eta f(0) + \varepsilon$ et donc, d'après la relation ⑤ :

$\forall \varepsilon > 0, \forall \eta \in \mathbb{R}_+^*, \exists A \in \mathbb{R}^+, \forall x > A, 0 \leq g(x) < \eta f(0) + \varepsilon$ soit enfin, en posant $\eta = \frac{\varepsilon}{f(0)}$ ($f(0) > 0$, cf. supra) :

$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}^+, \forall x > A, 0 \leq g(x) < 2\varepsilon$ d'où la conclusion :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0}$$

☞ Se souvenir que pour déterminer la limite ℓ en x_0 ($x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$) d'une fonction g définie sur un intervalle I et telle que pour tout $x \in I$, $g(x)$ soit défini par une intégrale (éventuellement impropre), **on ne peut prendre la limite sous le signe intégral** en écrivant une formule du type :

"$\lim\limits_{x \to 0} \int_a^b f(x, t)\,dt = \int_a^b \left(\lim\limits_{x \to 0} f(x, t)\right) dt$".

Si les méthodes de majorations traditionnelles – éventuellement accompagnées d'intégrations par parties ou de changements de variable – échouent, on ne peut plus procéder de façon directe.

On notera que lorsque l'intégrale est impropre, prendre la limite en x_0 de g revient à prendre la "double limite" lorsque x tend vers x_0 et lorsque y tend vers la borne à problème de l'intégrale partielle de l'intégrale impropre définissant pour tout $x \in I$, $g(x) - \ell$. Or, le calcul de "doubles limites" est hors-programme.

La méthode à utiliser pour déterminer cette limite consiste donc à effectuer, pour tout $x \in I$, une majoration de $|g(x) - \ell|$ (ou un encadrement de $g(x) - \ell$) en scindant (en $a + \eta$ ou $b - \eta$) l'intégrale définissant pour tout $x \in I$, $g(x) - \ell$ en deux intégrales que l'on majore : l'une par un réel multiple de η ($M\eta$) et indépendant de x, l'autre par un réel dépendant de la variable x.

En se ramenant à la définition et en écrivant que le second majorant tend vers 0 lorsque x tend vers x_0 (donc inférieur à η pour x suffisamment proche de x_0), on en déduit alors que pour x suffisamment proche de x_0, on obtient : $|g(x) - \ell| < (M + 1)\eta$, d'où la conclusion.

Fonctions de plusieurs variables

Fiche de cours

Soit n un entier naturel non nul (en voie économique, l'étude de ce chapitre est limitée au cas n = 2).

I. Normes et parties remarquables de $\mathbb{R}^n$ SO EO

1. Normes

■ Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle norme sur E toute application N de E dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

– $\forall u \in E$, $N(u) \geq 0$,

– $\forall u \in E$, $N(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$,

– $\forall u \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda u) = |\lambda| N(u)$,

– $\forall (u, v) \in E$, $N(u + v) \leq N(u) + N(v)$.

Pour tout $u \in E$, $N(u)$ est noté généralement $\|u\|$ et N est notée $\|.\|$.

■ ***Distances.*** Soit $\|.\|$ une norme de $\mathbb{R}^n$. On appelle distance associée à la norme N, l'application de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $d(x, y) = \|y - x\|$.

■ ***Normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$.*** Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de $\mathbb{R}^n$. Les applications $\|.\|_{2,\mathcal{B}}$ et $\|.\|_{\infty,\mathcal{B}}$ définies sur $\mathbb{R}^n$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $\begin{cases} \|x\|_{2,\mathcal{B}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \\ \|x\|_{\infty,\mathcal{B}} = \max_{i \in [1,n]} |x_i| \end{cases}$ sont des normes de $\mathbb{R}^n$ par rapport à $\mathcal{B}$.

• Si $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, l'application $\|.\|_2$ définie sur $\mathbb{R}^n$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ est une norme de $\mathbb{R}^n$ par rapport à $\mathcal{B}$. C'est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

• Si $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, l'application $\|.\|_\infty$ définie sur $\mathbb{R}^n$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $\|x\|_\infty = \max_{i \in [1,n]} |x_i|$ est une norme de $\mathbb{R}^n$ par rapport à $\mathcal{B}$. C'est la norme uniforme de $\mathbb{R}^n$.

■ ***Equivalence des normes précédentes sur $\mathbb{R}^n$.*** Les applications $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ vérifient : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\, \|x\|_\infty$. Les normes $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sont dites équivalentes.

2. Parties remarquables de $\mathbb{R}^n$

■ ***Boules.*** Soient $\|.\|$ une norme de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n$.

• On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r ($r \in \mathbb{R}_+^*$), l'ensemble $B_o(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n, \|a - x\| < r\}$.

• On appelle boule fermée de centre a et de rayon r ($r \in \mathbb{R}^+$), l'ensemble $B_f(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n, \|a - x\| \leq r\}$.

■ ***Parties ouvertes, fermées, bornées.*** Soient $\|.\|$ une norme de $\mathbb{R}^n$ et A une partie de $\mathbb{R}^n$.

• A est une partie ouverte (ou un ouvert) de $\mathbb{R}^n$ si $A = \varnothing$ ou si tout point de A est le centre d'une boule ouverte contenue dans A, i.e. : $\forall a \in A$, $\exists r \in \mathbb{R}_+^*$, $B_o(a, r) \subset A$.

• A est une partie fermée (ou un fermé) de $\mathbb{R}^n$ si son complémentaire dans $\mathbb{R}^n$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$.

• A est une partie bornée de $\mathbb{R}^n$ si : $\exists M \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall a \in A$, $\|a\| \leq M$.

■ ***Propriétés :***

– toute boule ouverte est un ouvert,

– toute boule fermée est un fermé,

– toute partie d'une boule est bornée,

– toute réunion d'ouverts est un ouvert, toute intersection finie d'ouverts est un ouvert,

– toute intersection de fermés est un fermé, toute réunion finie de fermés est un fermé,

– toute boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ pour $\|.\|_2$ est contenue dans une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ pour $\|.\|_\infty$, contient une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ pour $\|.\|_\infty$ et inversement.

– toute partie ouverte (resp. fermée, bornée) de $\mathbb{R}^n$ pour $\|.\|_2$ est une partie ouverte (resp. fermée, bornée) de $\mathbb{R}^n$ pour $\|.\|_\infty$ et inversement.

■ ***Voisinage d'un point.*** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}^n$. On appelle voisinage de a toute partie de $\mathbb{R}^n$ qui contient une boule ouverte de centre a.

II. Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ S● E●

1. Fonctions de n variables, applications partielles

■ On appelle fonction de n variables toute application d'une partie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

■ Soient f une fonction de n variables, Ω son ensemble de définition, $a \in \Omega$, $a = (a_i)_{1 \le i \le n}$ et pour tout $i \in [1, n]$, $\Omega_{a,i}$ l'ensemble $\Omega_{a,i} = \{x \in \mathbb{R}, (a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) \in \Omega\}$. Pour tout $i \in [1, n]$, l'application $f_{a,i}$ définie sur $\Omega_{a,i}$ par : $\forall x \in \Omega_{a,i}$, $f_{a,i}(x) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$ est appelée $i^{\text{ème}}$ application partielle de f en a.

2. Limite d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

■ Soient $a \in \mathbb{R}^n$, Ω un voisinage de a (éventuellement privé de a), f une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f tend vers ℓ en a si :

$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall x \in \Omega, \|x - a\| < r \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$, et on note :

– $\lim\limits_a f = \lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, ou bien :

– $\lim\limits_{(a_1, \dots, a_n)} f = \lim\limits_{(x_1, \dots, x_n) \to (a_1, \dots, a_n)} f(x_1, \dots, x_n) = \ell$.

■ ***Théorème dit "de domination".*** Soient $a \in \mathbb{R}^n$, Ω un voisinage de a (éventuellement privé de a), f et g deux fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \Omega$, $|f(x)| \le g(x)$. Si $\lim\limits_a g = 0$, alors : $\lim\limits_a f = 0$.

■ ***Théorème dit "de l'encadrement".*** Soient $a \in \mathbb{R}^n$, Ω un voisinage de a (éventuellement privé de a), f, g et h trois fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \Omega$, $f(x) \le g(x) \le h(x)$. Si $\lim\limits_a f = \lim\limits_a h = \ell$, alors : $\lim\limits_a g = \ell$.

3. Continuité d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

■ Soient Ω une partie de $\mathbb{R}^n$, f une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$, $a \in \Omega$. f est continue en a si : $\lim\limits_a f = f(a)$, c'est-à-dire si : $\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall x \in \Omega, \|x - a\| < r \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

■ Soient Ω une partie de $\mathbb{R}^n$, f une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$ et A un ouvert de Ω, $A \subset \Omega$. f est continue sur A si f est continue en tout point de A.

■ Les fonctions $x \mapsto \|x\|$, pour tout $i \in [1, n]$, $x = (x_k)_{1 \le k \le n} \mapsto x_i$, les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles de n variables sont continues en tout point de leur domaine de définition.

■ Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \Omega$. La somme, le produit, le quotient (si le dénominateur ne s'annule pas) de deux fonctions continues en a (resp. sur Ω) sont continues en a (resp. sur Ω).

Soient également f une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$ et g une fonction de $f(\Omega)$ ($\subset \mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}$. Si f est continue en a (resp. sur Ω) et si g est continue en f(a) (resp. sur $f(\Omega)$), alors $g \circ f$ est continue en a.

■ Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$. La somme, le produit, le quotient (si le dénominateur ne s'annule pas) de deux fonctions de classe C^1 sur Ω sont de classe C^1 sur Ω.

Soient également f une fonction de Ω dans $\mathbf{R}$ et g une fonction de $f(\Omega)$ ($\subset \mathbf{R}$) dans $\mathbf{R}$. Si f est de classe C^1 sur Ω et si g de classe C^1 sur $f(\Omega)$, alors $g \circ f$ est de classe C^1 sur Ω.

■ Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Si f est de classe C^1 sur Ω, alors f est continue sur Ω.

3. Dérivée d'une fonction de la forme $x \mapsto f(u_1(x), \dots, u_n(x))$

■ Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, I un intervalle de $\mathbf{R}$, $(u_i)_{1 \le i \le n}$ n fonctions de I dans $\mathbf{R}$ telles que $\forall x \in I$, $(u_i(x))_{1 \le i \le n} \in \Omega$, f une fonction de classe C^1 sur Ω et g la fonction définie sur I par : $\forall x \in I$, $g(x) = f(u_i(x))_{1 \le i \le n}$.

Si pour tout $i \in [1, n]$, u_i est dérivable en $x \in I$ (resp. sur I), alors g est dérivable en x (resp. sur I) et :

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(u_i(x))_{1 \le i \le n} u_k'(x).$$

Si pour tout $i \in [1, n]$, u_i est de classe C^1 sur I, g est alors de classe C^1 sur I.

■ Plus généralement, soient $p \in \mathbf{N}^*$, Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, O un ouvert de $\mathbf{R}^p$, $(u_i)_{1 \le i \le n}$ n fonctions de O dans $\mathbf{R}$ telles que $\forall x \in O$, $(u_i(x))_{1 \le i \le n} \in \Omega$, f une fonction de classe C^1 sur Ω et g la fonction définie sur O par :
$\forall x \in O$, $g(x) = f(u_i(x))_{1 \le i \le n}$.

Si pour tout $i \in [1, n]$, u_i admet une $j^{\text{ème}}$ ($j \in [1, p]$) dérivée partielle en $x \in O$ (resp. sur O), alors g admet également une $j^{\text{ème}}$ dérivée partielle en x (resp. sur O) et :

$$\forall j \in [1, p], \ \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_k}(u_i(x))_{1 \le i \le n} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}(x).$$

Si pour tout $i \in [1, n]$, u_i est de classe C^1 sur O, g est alors de classe C^1 sur O.

4. Développement limité d'ordre 1 d'une fonction de classe C^1

Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, f une fonction de classe C^1 sur Ω et $a \in \Omega$. Il existe une fonction ε de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$ telle que $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ et $\forall h \in \mathbf{R}^n$, $h = (h_i)_{1 \le i \le n}$, $(a + h) \in \Omega$, $f(a + h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \|h\| \varepsilon(h)$. On dit que f admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de a.

5. Gradient (S0)

■ ***Notation différentielle.*** Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, f une fonction définie sur Ω et $a \in \Omega$. L'application df_a définie sur $\mathbf{R}^n$ par : $\forall h \in \mathbf{R}^n$, $h = (h_i)_{1 \le i \le n}$, $df_a(h) = \sum_{k=1}^{n} h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ est appelée différentielle de f en a.

■ ***Gradient.*** Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, f une fonction de classe C^1 sur Ω et $a \in \Omega$. On appelle gradient de f en a, l'élément de $\mathbf{R}^n$, noté grad(f)(a) et défini par : $\mathrm{grad}(f)(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)_{1 \le i \le n}$.

Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, f et g deux fonctions de classe C^1 sur Ω et $\lambda \in \mathbf{R}$. En tout point a de Ω, on a :

– $\mathrm{grad}(\lambda f)(a) = \lambda\, \mathrm{grad}(f)(a)$,

– $\mathrm{grad}(f + g)(a) = \mathrm{grad}(f)(a) + \mathrm{grad}(g)(a)$,

– $\mathrm{grad}(fg)(a) = f(a)\, \mathrm{grad}(g)(a) + g(a)\, \mathrm{grad}(f)(a)$,

– si $g(a) \neq 0$, $\mathrm{grad}\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{1}{g^2(a)}\left(g(a)\, \mathrm{grad}(f)(a) - f(a)\, \mathrm{grad}(g)(a)\right)$.

IV. Calcul différentiel : ordre 2 S●E●

1. Dérivées partielles d'ordre 2, fonctions de classe C^2, théorème de Schwarz

■ ***Dérivées partielles d'ordre 2.*** Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $a \in \Omega$ et f une fonction définie sur Ω qui admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur un voisinage de a. Pour tout $(i, j) \in [1, n]^2$, on dit que f admet une dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à x_i et x_j en a si $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à x_i en a. Cette dérivée partielle est notée : $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = f_{ij}''(a) = f_{x_i x_j}''(a) = D_{ij}^2 f(a)$ (pour i = j, on note : $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$).

Si f admet une dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à x_i et x_j ($(i, j) \in [1, n]^2$) en tout point de Ω, on note alors : $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f_{ij}'' = f_{x_i x_j}'' = D_{ij}^2 f$ l'application de Ω dans $\mathbf{R}$: $a \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$.

■ ***Fonctions de classe C^2.*** Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et f une fonction définie sur Ω. f est de classe C^2 sur Ω si pour tout $(i, j) \in [1, n]^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ est continue sur Ω.

■ Les fonctions polynômes et rationnelles de n variables sont de classe C^2 en tout point de leur domaine de définition.
Soient également f une fonction de Ω dans $\mathbf{R}$ et g une fonction de $f(\Omega)$ ($\subset \mathbf{R}$) dans $\mathbf{R}$. Si f est de classe C^2 sur Ω et si g de classe C^2 sur $f(\Omega)$, alors $g \circ f$ est de classe C^2 sur Ω.

■ ***Théorème de Schwarz.*** Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, f une fonction définie sur Ω et $a \in \mathbf{R}^n$. Pour tout $(i, j) \in [1, n]^2$, si $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ sont continues en a, alors : $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$.

■ ***Notations de Monge.*** Dans le cas n = 2, (x_1, x_2) est noté (x, y) et on pose : $p = \frac{\partial f}{\partial x}(a)$, $q = \frac{\partial f}{\partial y}(a)$, $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $s = \frac{\partial f}{\partial x \partial y}(a)$ et $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$.

2. Développement limité d'ordre 2 d'une fonction de classe C^2

Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, f une fonction de classe C^2 sur Ω et $a \in \Omega$. Il existe une fonction ε de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$ telle que $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ et :

$$\forall h \in \mathbf{R}^n,\ h = (h_i)_{1 \le i \le n},\ (a + h) \in \Omega,\ f(a + h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) + \sum_{1 \le i < j \le n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + \|h\|^2 \varepsilon(h).$$

On dit que f admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de a.

V. Extrema des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ S●E●

1. Définition et condition nécessaire d'existence d'un extremum

■ ***Définition.*** Soient Ω une partie de $\mathbf{R}^n$, f une fonction de Ω dans $\mathbf{R}$ et $a \in \Omega$. f admet un maximum (resp. minimum) local en a s'il existe un voisinage V de a tel que : $\forall x \in (V \cap \Omega)$, $f(x) \le f(a)$ (resp. $f(x) \ge f(a)$).

f admet un extremum local (ou extremum) en a si f admet un maximum local ou un minimum local en a. f admet un extremum global en a si $\forall x \in \Omega$, $f(x) \le f(a)$ ou si $\forall x \in \Omega$, $f(x) \ge f(a)$.

■ ***Condition nécessaire d'existence d'un extremum pour une fonction de classe C^1.*** Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, f une fonction de classe C^1 de Ω dans $\mathbf{R}$ et $a \in \Omega$. Si f admet un extremum en a, alors : $\forall i \in [1, n]$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ (i.e. $\mathrm{grad}(f)(a) = 0$). a est alors appelé point critique de f.

2. Condition suffisante d'existence d'un extremum pour une fonction de classe C^2

▪ ***Cas particulier n = 2.*** Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, f une fonction de classe C^2 de Ω dans $\mathbb{R}$ et $a\in\Omega$. En utilisant les notations de Monge en a, si p = q = 0 et si $rt - s^2 > 0$, alors f admet un extremum en a.
Si r > 0 (resp. r < 0), cet extremum est un minimum (resp. maximum) pour f en a.

▪ ***Cas général* (S❷).** Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une fonction de classe C^2 de Ω dans $\mathbb{R}$ et $a\in\Omega$. On définit alors, pour tout $h\in\mathbb{R}^n$, $h = (h_i)_{1\le i\le n}$, $Q_a(h) = \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^n h_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) + 2\sum_{1\le i<j\le n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$.
Si $\forall i\in[1, n]$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ et si $\forall h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, $Q_a(h) > 0$ (resp. $Q_a(h) < 0$), alors f admet un minimum (resp. maximum) en a.

▪ ***Méthodes d'étude du signe de $Q_a(h)$* (S❷).** Deux méthodes sont possibles :

• **Méthode de Gauss de réduction en carrés :** On exprime, pour tout $h\in\mathbb{R}^n$, $h = (h_i)_{1\le i\le n}$, $Q_a(h)$ sous forme de somme de carrés : $Q_a(h) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\sum_{j=1}^n \beta_{i,j} x_j\right)^2$ où $\forall i\in[1, n]$, $\alpha_i\in\mathbb{R}$ et $\forall (i, j)\in[1, n]^2$, $\beta_{i,j}\in\mathbb{R}$.

• **Méthode matricielle :** En posant pour tout $H\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $H = (h_i)_{1\le i\le n}$ et $M_a = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$, on obtient :
$Q_a(h) = {}^tHM_aH$.

3. Recherche d'extrema liés par une contrainte linéaire (S❷)

▪ ***Extrema liés par une contrainte.*** Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f et g deux fonctions de classe C^1 de Ω dans $\mathbb{R}$, $A = \{x\in\Omega, x = (x_i)_{1\le i\le n}, g(x) = 0\}$ et $a\in A$. Si la restriction de f à A admet un extremum en a, on dit que f admet un extremum lié par la contrainte g(x) = 0.
La contrainte est dite linéaire si : $\exists (\alpha_i)_{1\le i\le n}\in\mathbb{R}^n$, $\exists j\in[1, n]$, $\alpha_j \ne 0$, $\exists\beta\in\mathbb{R}$, $\forall x\in\Omega$, $g(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i - \beta$.

▪ ***Recherche d'extrema liés par une contrainte linéaire.*** Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une fonction de classe C^1 de Ω dans $\mathbb{R}$, $(\alpha_i)_{1\le i\le n}\in\mathbb{R}^n$, $\exists j\in[1, n]$, $\alpha_j\ne 0$, $A = \left\{x\in\Omega, x = (x_i)_{1\le i\le n}, \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \beta\right\}$ et $a\in A$. Soient alors $j\in[1, n]$, Ω' l'ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$ tel que $\forall x\in\Omega$, $x = (x_i)_{1\le i\le n}$, $(x_i)_{\substack{1\le i\le n\\ i\ne j}}\in\Omega'$ et φ_j la fonction définie sur Ω' par :
$\forall x\in\Omega'$, $x = (x_i)_{\substack{1\le i\le n\\ i\ne j}}$, $\varphi_j(x) = f\left(x_1, \dots, x_{j-1}, \beta - \sum_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^n \frac{\alpha_i}{\alpha_j} x_i, x_{j+1}, \dots, x_n\right)$.
On étudie alors les extrema de φ_j sur Ω' qui sont les extrema de f sur Ω liés par la contrainte linéaire $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \beta$.

Exercices clefs, méthodes et astuces

S❷

1. Parties bornées de $\mathbb{R}^n$

Déterminer dans les cas suivants si A_i ($i\in[1, 4]$) est une partie bornée de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

1) $A_1 = \{(x, y)\in\mathbb{R}^2, 2 < |x - 4| < 6\}$,

2) $A_2 = \{(x, y)\in\mathbb{R}^2, |y + 1| \le 3, 1 \le x \le 3\}$,

3) $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 1 \le 2x - 4y \le 5\}$,

4) $A_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 1 < |x - 1| < 2,\ y^2 < 4,\ 0 < |z| < 3\}$.

1) Lorsque (x, y) décrit A_1, y décrit $\mathbb{R}$. On en déduit alors que y n'est pas borné, donc que A_1 n'est pas bornée. On peut alors conclure :

$$\boxed{A_1 \text{ est une partie non bornée de } \mathbb{R}^2}$$

☞ Se souvenir que lorsqu'une partie A de $\mathbb{R}^n$ est telle que l'une des variables la définissant n'est pas bornée, alors A n'est pas bornée.

2) On a :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} |y + 1| \le 3 \\ 1 \le x \le 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 \le y + 1 \le 3 \\ 1 \le x \le 3 \end{cases} \quad \text{soit :}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4 \le y \le 2 \\ 1 \le x \le 3 \end{cases} \quad \text{soit encore :}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x| \le 3 \\ |y| \le 4 \end{cases}.$$

On en déduit alors : $\forall (x, y) \in A_2,\ \|(x, y)\|_\infty \le 4$, d'où : $\exists M \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall a \in A_2,\ \|a\|_\infty \le M$. On peut désormais conclure :

$$\boxed{A_2 \text{ est une partie bornée de } \mathbb{R}^2}$$

☞ Se souvenir que lorsqu'une partie A de $\mathbb{R}^n$ est telle que toutes les variables la définissant sont bornées, A est également bornée.

☞ Pour montrer qu'une partie de $\mathbb{R}^n$ est bornée, on doit déterminer la norme la plus facile à utiliser puis montrer que : $\exists M \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall a \in A,\ \|a\| \le M$.

3) On a : $\forall k \in \mathbb{R}^*,\ 2(2k + 1) - 4k = 2$, et donc : $\forall k \in \mathbb{R}^*,\ (2k + 1, k) \in A_3$. Or, on a :

$\forall k \in \mathbb{R}^*,\ \|(1 + 2k, k)\|_2 = \sqrt{(1 + 2k)^2 + k^2}$ i.e. :

$\forall k \in \mathbb{R}^*,\ \|(1 + 2k, k)\|_2 > k$.

On en déduit alors : $\forall k \in \mathbb{R}^*,\ \exists a \in A_3,\ \|a\|_2 > k$ et on peut maintenant conclure :

$$\boxed{A_3 \text{ est une partie non bornée de } \mathbb{R}^2}$$

☞ Pour montrer qu'une partie A de $\mathbb{R}^n$ n'est pas bornée, il suffit de montrer que $\forall k \in \mathbb{R}^*,\ \exists a \in A,\ \|a\| > k$.

☞ Se souvenir que l'on a toujours : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} |a| \le \|(a, b)\| \\ |b| \le \|(a, b)\| \end{cases}$ (propriété utile).

4) On a :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{cases} 1 < |x - 1| < 2 \\ y^2 < 4 \\ 0 < |z| < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left| \begin{array}{l} 2 < x < 3 \\ -1 < x < 0 \end{array} \right. \\ \text{ou} \\ y^2 < 4 \\ 0 < |z| < 3 \end{cases} \quad \text{i.e. :}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 < 9 \\ y^2 < 4 \\ z^2 < 9 \end{cases}.$$

On en déduit alors : $\forall(x, y, z) \in A_4$, $\sqrt{x^2+y^2+z^2} < \sqrt{9+4+9}$, et donc : $\forall(x, y, z) \in A_4$, $\|(x, y, z)\|_2 \leq \sqrt{22}$. On peut maintenant écrire : $\exists M \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall a \in A_4$, $\|a\|_2 \leq M$, d'où la conclusion :

$$\boxed{A_4 \text{ est une partie bornée de } \mathbb{R}^3}$$

S❷ E❷

2. Continuité de fonctions de $\mathbb{R}^n$, applications partielles

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\begin{cases} \forall(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (0, 0), f(x, y) = \dfrac{x^3 + xy^3}{x^2 + y^2}. \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\begin{cases} \forall(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (0, 0), f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}. \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$$

a) f est-elle continue en (0, 0) ?

b) Déterminer les applications partielles f_1 et f_2 de f en (0, 0). f_1 et f_2 sont-elles continues en 0 ?

3) Soient $\Omega = (\mathbb{R}_+^*)^2$ et f la fonction définie sur Ω par :

$$\forall(x, y) \in \Omega, f(x, y) = e^x \ln xy.$$

Montrer que f est continue sur Ω et déterminer ses applications partielles f_1 et f_2 en (1, e).

4) Soient $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - y > -1\}$ et f la fonction définie sur Ω par :

$$\begin{cases} \forall(x, y) \in \Omega, x \neq y, f(x, y) = x^2 y \dfrac{\ln(x - y + 1)}{x - y}. \\ \forall x \in \mathbb{R}, f(x, x) = x^3 \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur Ω.

1) f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ en tant que fonction rationnelle de deux variables définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. De plus on a :

$\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $|f(x, y)| = \dfrac{|x^3 + xy^3|}{x^2 + y^2}$ soit, comme la valeur absolue d'une somme est inférieure ou égale à la somme des valeurs absolues :

$$\leq \frac{|x|^3 + |x|\,|y|^3}{x^2 + y^2}.$$

Or, on a : $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \\ |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$. On en déduit alors :

$\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $|f(x, y)| \leq \dfrac{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} + (x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^2}$ i.e. :

$\leq \sqrt{x^2 + y^2} + (x^2 + y^2)$ et donc, en reconnaissant la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$:

$\leq \|(x, y)\|_2 + (\|(x, y)\|_2)^2.$

Comme $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \|(x, y)\|_2 = 0$, on en déduit alors que $|f|$ est majorée par une fonction qui tend vers 0 lorsque (x, y) tend vers $(0, 0)$, d'où (théorème de domination) : $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$.

f est donc également continue en (0, 0), d'où la conclusion :

$$\boxed{\text{f est continue sur } \mathbf{R}^2}$$

☞ Pour montrer qu'une fonction f est continue sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$ (avec problème en $a = (a_i)_{1\le i\le n}$), il faut montrer que :

– f est continue sur $\Omega\setminus\{a\}$ en tant que "cocktail" (somme, produit, quotient dont le dénominateur ne s'annule pas, composée...) de fonctions continues sur $\Omega\setminus\{a\}$, et que :
– $\lim_{(x_1,\dots,x_n)\to(a_1,\dots,a_n)} f(x_1, \dots, x_n) = f(a)$.

☞ Rappelons que les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles (c'est-à-dire les quotients de fonctions polynômes) de n variables sont continues sur leur domaine de définition.

☞ Pour montrer qu'une fonction f de plusieurs variables tend vers une limite ℓ en un point a, on utilise généralement le théorème de domination en majorant $|f(x) - \ell|$ par une fonction qui tend vers 0 en a.

☞ Se souvenir que : $\lim_{(x_1,\dots,x_n)\to(0,\dots,0)} \|(x_i)_{1\le i\le n}\|_2 = \lim_{(x_1,\dots,x_n)\to(0,\dots,0)} \|(x_i)_{1\le i\le n}\|_\infty = 0$.

2) a) Supposons que f soit continue en (0, 0). Comme $x \mapsto x$ est continue en 0 et comme f est continue en (0, 0), on en déduit alors que la fonction g définie sur $\mathbf{R}$ par : $\forall x\in\mathbf{R}$, $g(x) = f(x, x)$ est continue en 0.

Or, on a : $g(0) = f(0, 0) = 0$ et $\forall x\in\mathbf{R}^*$, $g(x) = f(x, x) = \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2}$, d'où : $\lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{x\to0^-} g(x) = \dfrac{1}{2}$. g n'est donc pas continue en 0. On aboutit ainsi à une contradiction et on peut alors conclure :

$$\boxed{\text{f n'est pas continue en } (0, 0)}$$

☞ Pour montrer qu'une fonction composée $g = f(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est continue en $a\in\mathbf{R}^p$, il faut montrer que les fonctions $(u_i)_{1\le i\le n}$ sont continues en a, puis que f est continue en $(u_i(a))_{1\le i\le n}$.

☞ Ainsi, pour démontrer qu'une fonction g n'est pas continue en un point $a\in\mathbf{R}^p$, il suffit de démontrer qu'il existe des applications $(u_i)_{1\le i\le n}$ telles que pour tout $i\in[1, n]$, u_i soit continue en a et f soit continue en $(u_i(a))_{1\le i\le n}$, mais que $g : x \mapsto f(u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x))$ n'est pas continue en a (ici, on a choisi $u_1 = u_2 : x \mapsto x$).

b) En (0, 0), on a clairement :

– $\begin{cases} \forall x\in\mathbf{R}^*, f_1(x) = f(x, 0) = \dfrac{0x}{x^2+0} = 0 \\ f_1(0) = f(0, 0) = 0 \end{cases}$, d'où : $\forall x\in\mathbf{R}$, $f_1(x) = 0$, et :

– $\begin{cases} \forall y\in\mathbf{R}^*, f_2(y) = f(0, y) = \dfrac{0y}{0+y^2} = 0 \\ f_2(0) = f(0, 0) = 0 \end{cases}$, d'où : $\forall x\in\mathbf{R}$, $f_2(x) = 0$.

On peut alors conclure :

Les applications partielles f_1 et f_2 de f en (0, 0) sont définies sur $\mathbf{R}$ par : $\forall x\in\mathbf{R}$, $f_1(x) = f_2(x) = 0$ et sont continues en 0.

☞ Noter que les applications partielles de fonctions de plusieurs variables sont des fonctions d'une seule variable. Pour déterminer la $i^{\text{ème}}$ application partielle f_i de f en $a = (a_j)_{1\le j\le n}$ il faut écrire l'expression de f en fixant pour tout $j\in[1, n]\setminus\{i\}$, la $j^{\text{ème}}$ variable égale à a_j et en remplaçant la $i^{\text{ème}}$ variable par x_i.

☞ Se souvenir que la réciproque du théorème du cours : "Si f est continue en $a = (a_i)_{1 \le i \le n}$, alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, sa $i^{ème}$ application partielle en a est continue en a_i" est fausse : si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la $i^{ème}$ application partielle de f en a est continue en a_i, f n'est pas nécessairement continue en $a = (a_i)_{1 \le i \le n}$.

3) La fonction $(x, y) \mapsto e^x$ est continue sur Ω en tant que composée d'une fonction polynôme de deux variables ($(x, y) \mapsto x$) à valeurs dans $\mathbb{R}$ et d'une fonction (exp) continue sur $\mathbb{R}$. De plus, la fonction $(x, y) \mapsto \ln xy$ est continue sur Ω en tant que composée d'une fonction polynôme de deux variables ($(x, y) \mapsto xy$) à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et d'une fonction (ln) continue sur $\mathbb{R}_+^*$. f est donc continue sur Ω en tant que produit de fonctions continues sur Ω.

Comme f est définie sur Ω, elle admet des applications partielles sur Ω, et en particulier en $(1, e)$. On peut alors écrire :

– $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_1(x) = f(x, e) = e^x \ln ex = e^x (1 + \ln x)$, et :

– $\forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ f_2(y) = f(1, y) = e \ln y$, d'où la conclusion :

$$\boxed{\text{f est continue sur } \Omega \text{ et } \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_1(x) = e^x (1 + \ln x) \\ \forall y \in \mathbb{R}_+^*, f_2(y) = e \ln y \end{cases}}$$

☞ Pour montrer qu'une fonction composée $g = f(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est continue sur un ouvert O de $\mathbb{R}^p$, il faut montrer que les fonctions $(u_i)_{1 \le i \le n}$ sont continues sur O avec $\forall x \in O,\ (u_i(x))_{1 \le i \le n} \in \Omega$ et que f est continue sur Ω.

4) La fonction : $(x, y) \mapsto \dfrac{x^2 y}{x - y}$ est continue sur $\Omega \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}$ en tant que fonction rationnelle de deux variables définie sur $\Omega \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}$.

De plus, la fonction $(x, y) \mapsto \ln(x - y + 1)$ est continue sur $\Omega \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}$ en tant que composée d'une fonction polynôme de deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, donc continue sur $\Omega \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}$, et d'une fonction (ln) continue sur $\mathbb{R}_+^*$. f est donc continue sur $\Omega \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}$ en tant que produit de fonctions continues sur $\Omega \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}$.

Comme $\forall a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{(x,y) \to (a,a)} (x - y) = 0$ et comme $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\ln(1 + z)}{z} = 1$ (croissances comparées), on peut écrire :

$\forall a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{(x,y) \to (a,a)} \dfrac{\ln(x - y + 1)}{x - y} = 1$. Comme on a en outre $\forall a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{(x,y) \to (a,a)} x^2 y = a^3$, on en déduit alors :

$\forall a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{(x,y) \to (a,a)} f(x, y) = \lim\limits_{(x,y) \to (a,a)} x^2 y \dfrac{\ln(x - y + 1)}{x - y} = a^3 = f(a, a)$.

f est donc également continue sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}$, d'où la conclusion :

$$\boxed{\text{f est continue sur } \Omega}$$

☞ Pour déterminer la limite d'une fonction de plusieurs variables en un point, il faut faire tendre **simultanément** toutes les variables vers les coordonnées de ce point. En ne faisant tendre qu'une seule variable vers une coordonnée (ici y vers x), on ne prouverait que la continuité d'une application partielle de f (ici f_2) en ce point, mais pas celle de f.

S❷ E❷

■ 3. Dérivées partielles d'ordre 1

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = x e^{x+y}$$

Déterminer, après en avoir justifié l'existence, les dérivées partielles de f en tout point de $\mathbb{R}^2$.

⊃ Comme f est définie en (0, 0), f admet des applications partielles en ce point et on peut alors écrire :

– $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $f_1(x) = f(x, 0) = 0$ et $f_1(0) = f(0, 0) = 0$, d'où : $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_1(x) = 0$; f_1 est donc dérivable en 0 et f admet ainsi une première dérivée partielle en (0, 0) : $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$,

– $\forall y\in\mathbb{R}^*$, $f_2(y) = f(0, y) = 0$ et $f_2(0) = f(0, 0) = 0$, d'où : $\forall y\in\mathbb{R}$, $f_2(y) = 0$; f_2 est donc dérivable en 0 et f admet ainsi une seconde dérivée partielle en (0, 0) : $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

On peut désormais conclure :

f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ et on a :

$$\begin{cases} \forall (x, y)\in\mathbb{R}^2, (x, y)\neq(0, 0), \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{y^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \forall (x, y)\in\mathbb{R}^2, (x, y)\neq(0, 0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \dfrac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0 \end{cases}$$

☞ Pour montrer l'existence de la $i^{\text{ème}}$ ($i\in[\![1, n]\!]$) dérivée partielle d'ordre 1 d'une fonction f sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ (avec problème en $a = (a_i)_{1\leq i\leq n}$), il faut généralement démontrer que :

– f est de classe C^1 sur $\Omega\setminus\{a\}$ (cf. exercice 4), donc admet des dérivées partielles d'ordre 1 en tout point de $\Omega\setminus\{a\}$,

– f est définie en a, donc admet une $i^{\text{ème}}$ application partielle en a et celle-ci est dérivable en a_i.

☞ Noter qu'une fonction peut admettre des dérivées partielles d'ordre 1 en un point a sans être continue en a.
La fonction définie à l'exercice 2.2, par exemple, n'est pas continue en (0, 0) mais admet des dérivées partielles d'ordre 1 en (0, 0) puisque ses deux applications partielles en (0, 0) sont dérivables en 0.

3) ⊃ Les fonctions $(x, y)\mapsto \sin x^2$ et $(x, y)\mapsto \sin y^2$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0, 0)\}$ en tant que composées de fonctions polynômes de deux variables définies sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0, 0)\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et d'une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$. De plus, la fonction $(x, y)\mapsto\sqrt{x^2+y^2}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0, 0)\}$ en tant que composée d'une fonction polynôme de deux variables définie sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0, 0)\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et d'une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

f est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0, 0)\}$ en tant que quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0, 0)\}$. f admet donc des dérivées partielles d'ordre 1 en tout point de $\mathbb{R}^2\setminus\{(0, 0)\}$ et on peut alors écrire :

$$\forall (x, y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0, 0)\}, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-2x(\cos x^2)\sqrt{x^2+y^2} - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}(\sin x^2+\sin y^2)}{x^2+y^2} \qquad \text{i.e. :}$$

$$= \frac{-2x\cos x^2(x^2+y^2) - x(\sin x^2+\sin y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

x et y jouant des rôles symétriques dans l'expression de f(x, y) ($(x, y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0, 0)\}$), on peut alors conclure :

$$\forall (x, y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0, 0)\}, \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{-2x\cos x^2(x^2+y^2) - x(\sin x^2+\sin y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \dfrac{-2y\cos y^2(x^2+y^2) - y(\sin x^2+\sin y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

▪ Comme f est définie en (0, 0), f admet des applications partielles en ce point et on peut alors écrire :

– $\forall h\in\mathbb{R}$, $f_1(h) = f(h, 0)$, soit, d'après la définition de f : $\begin{cases} \forall h\in\mathbb{R}^*, f_1(h) = \dfrac{\sin h^2}{|h|} \\ f_1(0) = 0 \end{cases}$, d'où :

$\forall h\in\mathbf{R}^*,\ \dfrac{f_1(h)-f_1(0)}{h-0}=\dfrac{\sin h^2}{h|h|}$, et donc, comme $\sin x \underset{0}{\sim} x$: $\dfrac{f_1(h)-f_1(0)}{h-0} \underset{0}{\sim} \dfrac{h}{|h|}$, soit enfin :

$\lim\limits_{h\to0^+} \dfrac{f_1(h)-f_1(0)}{h-0}=1$ et $\lim\limits_{h\to0^-} \dfrac{f_1(h)-f_1(0)}{h-0}=-1$, et :

– x et y jouant des rôles symétriques dans l'expression de $f(x, y)$ ($(x, y)\in\mathbf{R}^2\setminus\{(0, 0)\}$) :

$$\lim_{h\to0^+} \frac{f_2(h)-f_2(0)}{h-0}=\lim_{h\to0^+} \frac{f_1(h)-f_1(0)}{h-0}=1 \text{ et } \lim_{h\to0^-} \frac{f_2(h)-f_2(0)}{h-0}=\lim_{h\to0^-} \frac{f_1(h)-f_1(0)}{h-0}=-1.$$

Les deux applications partielles de f en (0, 0) sont donc dérivables à droite et à gauche en 0 mais pas en 0. On peut alors conclure :

$$\boxed{\text{f n'admet pas de dérivée partielle d'ordre 1 en (0, 0)}}$$

S❷ E❷

■ 4. Fonctions de classe C^1, fonctions composées

1) Soient $\Omega=(\mathbf{R}_+^*)^2$ et f la fonction définie sur Ω par (cf. exercice 2.3) :

$$\forall(x, y)\in\Omega,\ f(x, y)=e^x \ln xy.$$

Montrer que f est de classe C^1 sur Ω et déterminer ses dérivées partielles d'ordre 1 en tout point de Ω.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par :

$$\begin{cases}\forall(x, y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^*,\ f(x, y)=y^3\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)\\ \forall x\in\mathbf{R},\ f(x, 0)=0\end{cases}.$$

Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$.

3) Soient f une fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$, de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$ et g la fonction définie par :

$$\forall x\in\mathbf{R},\ g(x)=f(e^x, \cos x)$$

Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ et calculer g' en fonction de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

1) Les fonctions $(x, y)\mapsto x$ et $(x, y)\mapsto xy$ sont de classe C^1 sur $\Omega=(\mathbf{R}_+^*)^2$ en tant que fonctions polynômes de deux variables définies sur Ω. Comme ces fonctions sont à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$ et comme les fonctions $u\mapsto e^u$ et $u\mapsto \ln u$ sont de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^*$, on en déduit alors que les fonctions $(x, y)\mapsto e^x$ et $(x, y)\mapsto \ln xy$ sont de classe C^1 sur Ω en tant que composées de fonctions de classe C^1 sur Ω à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$ et de fonctions de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^*$.

f est donc de classe C^1 sur Ω en tant que produit de fonctions de classe C^1 sur Ω. f admet donc des dérivées partielles d'ordre 1 en tout point de Ω et on peut écrire :

$$\forall(x, y)\in\Omega,\ \begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)=e^x\left(\ln xy+\dfrac{1}{x}\right)\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)=\dfrac{e^x}{y}\end{cases}.$$

On peut désormais conclure :

$$\boxed{\text{f est de classe } C^1 \text{ sur } \Omega \text{ et } \forall(x, y)\in\Omega,\ \begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)=e^x\left(\ln xy+\dfrac{1}{x}\right)\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)=\dfrac{e^x}{y}\end{cases}}$$

☞ Pour montrer qu'une fonction f est de classe C^1 sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$ (lorsqu'il n'y a pas de problème local), il faut montrer que f est "cocktail" (somme, produit, quotient dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions (f_i) de classe C^1 sur Ω où chacune de ces fonctions (f_i) est :
– soit une fonction polynôme ou rationnelle de n variables (donc de classe C^1 sur Ω),
– soit la composée d'une fonction polynôme ou rationnelle de n variables (donc de classe C^1 sur Ω) à valeurs dans un intervalle I de $\mathbf{R}$ par une fonction de classe C^1 sur I.

2) ❑ Les fonctions $(x, y) \mapsto y^3$ et $(x, y) \mapsto \dfrac{x}{y}$ sont de classe C^1 sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$ en tant que fonctions polynôme et rationnelle de deux variables définies sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$. Comme la fonction $(x, y) \mapsto \dfrac{x}{y}$ est à valeur dans $\mathbf{R}$ et comme la fonction $u \mapsto \sin u$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$, on en déduit alors que la fonction $(x, y) \mapsto \sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$ en tant que composée d'une fonction de classe C^1 sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ et d'une fonction de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.

f est donc de classe C^1 sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$ en tant que produit de fonctions de classe C^1 sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$. f admet donc des dérivées partielles d'ordre 1 en tout point de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$ et on obtient alors, après calculs :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^*, \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2 \cos\left(\dfrac{x}{y}\right) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 \sin\left(\dfrac{x}{y}\right) - xy\cos\left(\dfrac{x}{y}\right) \end{cases}.$$

❑ Soit maintenant $a \in \mathbf{R}$. Comme f est définie en (a, 0), f admet des applications partielles en ce point et on peut alors écrire :

– $\forall h \in \mathbf{R}^*$, $f_1(h) = f(h, 0) = 0$, d'où : $\forall h \in \mathbf{R}^*$, $\dfrac{f_1(h) - f_1(0)}{h - 0} = 0$, et donc : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f_1(h) - f_1(0)}{h - 0} = 0$,

– $\forall h \in \mathbf{R}^*$, $f_2(h) = f(a, h) = h^3 \sin\left(\dfrac{a}{h}\right)$, d'où : $\forall h \in \mathbf{R}^*$, $\dfrac{f_2(h) - f_2(0)}{h - 0} = h^2 \sin\left(\dfrac{a}{h}\right)$. Comme $\forall h \in \mathbf{R}^*$, $-1 \le \sin\left(\dfrac{a}{h}\right) \le 1$, on en déduit alors : $\forall h \in \mathbf{R}^*$, $-h^2 \le \dfrac{f_2(h) - f_2(0)}{h - 0} \le h^2$. La fonction $h \mapsto \dfrac{f_2(h) - f_2(0)}{h - 0}$ est donc encadrée par deux fonctions qui tendent vers 0 lorsque h tend vers 0, d'où (théorème de l'encadrement) : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f_2(h) - f_2(0)}{h - 0} = 0$.

Pour tout $a \in \mathbf{R}$, f admet donc des dérivées partielles d'ordre 1 en (a, 0) et on peut écrire :

$\forall a \in \mathbf{R}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, 0) = 0$ et $\forall a \in \mathbf{R}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, 0) = 0$.

On en déduit alors que f admet des dérivées partielles d'ordre 1 en tout point de $\mathbf{R}^2$ et on a :

$$\begin{cases} \forall (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^*, \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2 \cos\left(\dfrac{x}{y}\right) \\ \forall x \in \mathbf{R}, \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \forall (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^*, \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 \sin\left(\dfrac{x}{y}\right) - xy\cos\left(\dfrac{x}{y}\right) \\ \forall x \in \mathbf{R}, \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = 0 \end{cases}.$$

❑ f étant de classe C^1 sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$, ses dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$. De plus, d'après les expressions de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, on peut écrire :

– $\forall (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right| \le y^2 \left|\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)\right|$ d'où, comme $\forall t \in \mathbf{R}$, $|\cos t| \le 1$:

$\le y^2$ et :

– $\forall (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \le 3y^2 \left|\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)\right| + \left|xy\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)\right|$ d'où, comme $\forall t \in \mathbf{R}$, $|\sin t| \le 1$ et $\forall t \in \mathbf{R}$, $|\cos t| \le 1$:

$\le 3y^2 + |xy|$.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, les fonctions $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|$ et $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ sont donc majorées par deux fonctions qui tendent vers 0 lorsque (x, y) tend vers $(a, 0)$, d'où (théorème de domination) :

– $\forall a \in \mathbb{R}, \lim\limits_{(x,y)\to(a,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(a, 0)$, et :

– $\forall a \in \mathbb{R}, \lim\limits_{(x,y)\to(a,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(a, 0)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont donc continues en $(x, 0)$. On en déduit alors qu'elles sont continues sur $\mathbb{R}^2$ et on peut désormais conclure :

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2}$$

☞ Pour montrer qu'une fonction f est de classe C^1 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ (avec problème en a), il faut montrer successivement que :

- f est de classe C^1 sur $\Omega \setminus \{a\}$ (cf. supra), donc admet des dérivées partielles continues sur $\Omega \setminus \{a\}$,
- f admet des dérivées partielles en a,
- les dérivées partielles de f sont continues en a, donc sur Ω.

3) Les fonctions exp et cos étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et f étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et on peut écrire :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = e^x \frac{\partial f}{\partial x}(e^x, \cos x) - \sin x \frac{\partial f}{\partial y}(e^x, \cos x)}$$

S❷ E❷

■ 5. Développements limités d'ordre 1, gradient, extrema de fonctions de classe C^1

1) a) Déterminer un développement limité d'ordre 1 au voisinage de $(1, 1)$ de la fonction f définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ par (cf. exercices 2.3 et 4.1) :

$$\forall (x, y) \in \Omega,\ f(x, y) = e^x \ln xy.$$

b) Déterminer un développement limité d'ordre 1 au voisinage de $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par (cf. exercice 4.2) :

$$\begin{cases} \forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*,\ f(x, y) = y^3 \sin\left(\frac{x}{y}\right) \\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x, 0) = 0 \end{cases}$$

2) Sans utiliser le fait que f et g sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, étudier les extrema des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

a) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = x^2y^2$.

b) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

1) a) Comme f est de classe C^1 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ (cf. exercice 4.1), f admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de $(1, 1)$ et on peut alors écrire lorsque $h = (h_1, h_2)$ est au voisinage de $(0, 0)$:

$$f(1 + h_1, 1 + h_2) = f(1, 1) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) + \|(h_1, h_2)\|\, \varepsilon_1(h_1, h_2) \ \ (\text{avec} \lim_{h\to(0,0)} \varepsilon_1(h) = 0).$$

On en déduit alors, lorsque $x = (x_1, x_2)$ est au voisinage de $(1, 1)$:

$$f(x) = f(1, 1) + (x_1 - 1) \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) + (x_2 - 1) \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) + \|(x_1 - 1, x_2 - 1)\|\, \varepsilon_1(x_1 - 1, x_2 - 1).$$

On peut alors conclure, d'après les expressions de f et de ses dérivées partielles d'ordre 1 en (1, 1) (cf. exercice 4.1) :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Lorsque } x = (x_1, x_2) \text{ est au voisinage de } (1, 1), \text{ on a :}\\ f(x) = e(x_1 - 1) + e(x_2 - 1) + \|(x_1 - 1, x_2 - 1)\|\, \varepsilon(x) \ \ (\text{avec } \lim\limits_{x \to (1,1)} \varepsilon(x) = 0).\end{array}}$$

☞ Remarquer que toutes les normes étant équivalentes, un développement limité ne dépend pas de la norme utilisée.

b) Comme f est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$ (cf. exercice 4.2), f admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ et on a, lorsque $h = (h_1, h_2)$ est au voisinage de (0, 0) :

$$f\left(\frac{\pi}{4} + h_1, 1 + h_2\right) = f\left(\frac{\pi}{4}, 1\right) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{4}, 1\right) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{4}, 1\right) + \|(h_1, h_2)\|\, \varepsilon(h_1, h_2) \ \ (\text{avec } \lim_{h \to (0,0)} \varepsilon(h) = 0).$$

On peut maintenant écrire, lorsque $x = (x_1, x_2)$ est au voisinage de $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$:

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}, 1\right) + \left(x_1 - \frac{\pi}{4}\right) \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{4}, 1\right) + (x_2 - 1) \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{4}, 1\right) + \left\|\left(x_1 - \frac{\pi}{4}, x_2 - 1\right)\right\| \varepsilon\left(x_1 - \frac{\pi}{4}, x_2 - 1\right).$$

On en déduit alors, d'après les expressions de f et de ses dérivées partielles d'ordre 1 (cf. exercice 4.2) :

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \left(x_1 - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + (x_2 - 1)\left(3 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) + \left\|\left(x_1 - \frac{\pi}{4}, x_2 - 1\right)\right\| \varepsilon\left(x_1 - \frac{\pi}{4}, x_2 - 1\right)$$

et donc, comme $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, après calculs :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Lorsque } x = (x_1, x_2) \text{ est au voisinage de } \left(\frac{\pi}{4}, 1\right), \text{ on a :}\\ f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x_1 - \frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{8}\right)(x_2 - 1) + \left\|\left(x_1 - \frac{\pi}{4}, x_2 - 1\right)\right\| \varepsilon\left(x_1 - \frac{\pi}{4}, x_2 - 1\right) \ (\text{avec } \lim\limits_{h \to (0,0)} \varepsilon(h) = 0).\end{array}}$$

2) a) ▫ f est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$ en tant que fonction polynôme de deux variables et on a :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^2y \end{cases}.$$

On en déduit alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \iff 2x^2y = 2xy^2 = 0 \qquad \text{soit :}$$

$$\iff \left|\begin{array}{l} x = 0 \\ \text{ou} \\ y = 0 \end{array}\right. .$$

Les points critiques de f sont donc les éléments de l'ensemble $\{(x, 0), x \in \mathbf{R}\} \cup \{(0, y), y \in \mathbf{R}\}$.

☞ Se souvenir que les points critiques d'une fonction sont les points qui annulent toutes ses dérivées partielles d'ordre 1. Ce sont les seuls points pour lesquels f peut admettre un extremum local.

▫ Pour tout $x \in \mathbf{R}$, soient $h \in \mathbf{R}_+^*$ et $V_{1,x} = \{(a, b) \in \mathbf{R}^2, |a - x| < h, |b| < h\}$. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $V_{1,x}$ est un voisinage de (x, 0) et on a :

$\forall x \in \mathbf{R}, \forall (a, b) \in V_{1,x}, f(a, b) - f(x, 0) = a^2b^2 - 0$ d'où :

$\forall x \in \mathbf{R}, \forall (a, b) \in V_{1,x}, f(a, b) - f(x, 0) \geq 0$ i.e. :

$\forall x \in \mathbf{R}, \forall (a, b) \in V_{1,x}, f(x, 0) \leq f(a, b)$.

De même, pour tout $y \in \mathbb{R}$, soient $h \in \mathbb{R}_+^*$ et $V_{2,y} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2, |a| < h, |b - y| < h\}$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $V_{2,y}$ est un voisinage de $(0, y)$ et on a :

$\forall y \in \mathbb{R}, \forall (a, b) \in V_{2,y}, f(a, b) - f(0, y) = a^2b^2 - 0$ d'où :

$\forall y \in \mathbb{R}, \forall (a, b) \in V_{2,y}, f(a, b) - f(0, y) \geq 0$ i.e. :

$\forall y \in \mathbb{R}, \forall (a, b) \in V_{2,y}, f(0, y) \leq f(a, b)$.

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un voisinage V de $(x, 0)$ tel que $\forall (a, b) \in V, f(x, 0) \leq f(a, b)$ et comme pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un voisinage de $(0, y)$ tel que $\forall (a, b) \in V, f(0, y) \leq f(a, b)$ avec $\forall h \in \mathbb{R}, f(h, 0) = f(0, h) = 0$, on peut désormais conclure :

> Les éléments de l'ensemble $\{(x, 0), x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, y), y \in \mathbb{R}\}$ sont les extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$ et la valeur de f en ces points est 0.

☞ Pour montrer qu'une fonction f de classe C^1 sur Ω atteint un extremum local en $(x, y) \in \Omega$, il faut montrer qu'il existe un voisinage V de ce point sur lequel $f(a, b) - f(x, y)$ $((a, b) \in V)$ est de signe constant (le voisinage le plus facile à utiliser est une boule ouverte pour la norme uniforme de centre (x, y) : $V = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2, |a - x| < h, |b - y| < h\}, h \in \mathbb{R}_+^*$).

b) g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonction polynôme de deux variables et on a :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3x \end{cases}.$$

On en déduit alors :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \quad \text{soit :}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \quad \text{soit encore :}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 = x \\ y = x^2 \end{cases} \quad \text{et donc :}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (x, y) = (0, 0) \\ (x, y) = (1, 1) \end{array} \right. \text{ou}.$$

Les points critiques de g sont donc les éléments de l'ensemble $\{(0, 0), (1, 1)\}$.

□ Pour tout $h \in \mathbb{R}_+^*$, soit $B_h = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2, |a| < 2h, |b| < 2h\}$. L'ensemble $\{B_h, h \in \mathbb{R}_+^*\}$ est l'ensemble des boules ouvertes de centre $(0, 0)$ pour la norme uniforme de $\mathbb{R}^2$. Soit maintenant V_0 un voisinage de $(0, 0)$. On peut alors écrire : $\exists h \in \mathbb{R}_+^*, B_h \subset V_0$.

Or, on a : $(h, 0) \in B_h$ et $(-h, 0) \in B_h$, d'où : $(h, 0) \in V_0$ et $(-h, 0) \in V_0$, avec :

– $g(h, 0) - g(0, 0) = h^3 - 0 = h^3$, donc : $g(h, 0) - g(0, 0) > 0$, et :

– $g(-h, 0) - g(0, 0) = -h^3 - 0 = -h^3$, donc : $g(-h, 0) - g(0, 0) < 0$.

Sur tout voisinage V_0 de $(0,0)$, $g(a, b) - g(0, 0)$ $((a, b) \in V_0)$ n'est donc pas de signe constant. On en déduit alors que g n'admet pas d'extremum local en $(0, 0)$.

☞ Pour montrer qu'une fonction f définie sur Ω n'admet pas d'extremum local en un point critique $(x, y) \in \Omega$, il faut montrer que pour tout voisinage V de ce point, f n'est pas de signe constant sur V (dans tout voisinage V de ce point, on peut trouver une boule ouverte B de centre (x, y) dans laquelle on trouve deux points (a, b) et (a', b') tels que $f(a, b) - f(x, y)$ et $f(a', b') - f(x, y)$ ne soient pas de même signe).

classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et d'une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On en déduit alors que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ en tant que produit de fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, d'où la conclusion :

$$\boxed{\text{f est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2}$$

↘ f étant de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, elle admet des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 en tout point de $\mathbb{R}^2$ et on a :

$$\boxed{\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=e^{y^2}\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2xy\,e^{y^2}\end{cases} \text{ et } \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=0\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y)=2y\,e^{y^2}\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=xe^{y^2}(4y^2+2)\end{cases}}$$

NB : Pour écrire la deuxième ligne du second système, on a utilisé le théorème de Schwartz.

b) Comme f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, on en déduit alors le développement limité d'ordre 2 de f lorsque $x=(x_1, x_2)$ est au voisinage de $(1, 1)$:

$$f(x)=f(1,1)+(x_1-1)\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)+(x_2-1)\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)+\frac{(x_1-1)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)+\frac{(x_2-1)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)$$

$$+(x_1-1)(x_2-1)\frac{\partial f}{\partial x\,\partial y}(1,1)+\|(x_1-1, x_2-1)\|^2\,\varepsilon_1(x_1-1, x_2-1)\ \ (\text{avec } \lim_{h\to(0,0)}\varepsilon_1(h)=0),$$

ce qui s'écrit encore :

$$f(x)=e+e(x_1-1)+2e(x_2-1)+0+3e(x_2-1)^2+2e(x_1-1)(x_2-1)+\|(x_1-1, x_2-1)\|^2\,\varepsilon_1(x_1-1, x_2-1),$$

d'où la conclusion :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Lorsque } x=(x_1,x_2) \text{ est au voisinage de } (1,1), \text{ on a :}\\ f(x)=e\big(1+(x_1-1)+2(x_2-1)+3(x_2-1)^2+2(x_1-1)(x_2-1)\big)+\|(x_1-1,x_2-1)\|^2\,\varepsilon(x_1-1,x_2-1)\\ \hfill(\text{avec } \lim_{x\to(1,1)}\varepsilon(x)=0).\end{array}}$$

S❷ E❷

■ 7. Extrema de fonctions de deux variables de classe C^2

Déterminer les extrema des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

1) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=x^4+y^4-2(x-y)^2$.

2) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $g(x,y)=x^2y^2+x^2+y^2+4xy$.

1) ↘ f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonction polynôme de deux variables. f admet donc des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 en tout point de $\mathbb{R}^2$. Soit alors $(x, y)\in\mathbb{R}^2$. On peut maintenant écrire, en utilisant les notations de Monge :

– $p=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4x^3-4(x-y)$, et :

– $q=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=4y^3+4(x-y)$.

On en déduit alors :

$$p=q=0 \iff \begin{cases}4x^3-4x+4y=0\\ 4y^3+4x-4y=0\end{cases} \quad \text{soit } (L_1\leftarrow L_1+L_2,\ L_2\leftarrow \tfrac{1}{4}L_2) :$$

$$p = q = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} xy^2 + x + 2y = 0 \\ xy^2 + yx^2 + 3x + 3y = 0 \end{cases} \quad \text{i.e. :}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy^2 + x + 2y = 0 \\ (x+y)(xy+3) = 0 \end{cases} \quad \text{et donc :}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \begin{cases} y = -x \\ x = x^3 \end{cases} \\ \text{ou} \\ \begin{cases} xy = -3 \\ x = y \end{cases} \end{array} \right. \quad \text{soit enfin, le second système étant incompatible :}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x = x^3 \end{cases} \quad \text{i.e. :}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in \{(0, 0), (1, -1), (-1, 1)\}.$$

Les points critiques de g sont donc les éléments de l'ensemble $\{(0, 0), (1, -1), (-1, 1)\}$.

ↄ De plus, en utilisant toujours les notations de Monge, on a :

– $r = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = 2y^2 + 2$,

– $s = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) = 4xy + 4$, et :

– $t = \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = 2x^2 + 2$.

ↄ • En (0, 0), on peut alors écrire : $r = 2$, $s = 4$ et $t = 2$, d'où : $rt - s^2 = 0$. Pour tout $h \in]0, 1[$, notons maintenant $B_h = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2, |a| < 2h, |b| < 2h\}$. L'ensemble $\{B_h, h \in]0, 1[\}$ est l'ensemble des boules ouvertes de centre (0, 0) et de rayon strictement inférieur à 2 pour la norme uniforme de $\mathbb{R}^2$. Soit maintenant V un voisinage de (0, 0). On peut alors écrire : $\exists h \in]0, 1[, B_h \subset V$.

Or, on a : $(h, h) \in B_h$ et $(h, -h) \in B_h$, d'où : $(h, h) \in V$ et $(h, -h) \in V$, avec :

– $g(h, h) - g(0, 0) = h^4 + 6h^2 - 0 = h^2(h^2 + 6)$, donc : $g(h, h) - g(0, 0) > 0$, et :

– $g(h, -h) - g(0, 0) = h^4 - 2h^2 - 0 = h^2(h^2 - 2)$, et donc, comme $h < 1$: $g(h, -h) - g(0, 0) < 0$.

Sur tout voisinage V de (0, 0), $g(a, b) - g(0, 0)$ ($(a, b) \in V$) n'est donc pas de signe constant. On en déduit alors que g n'admet pas d'extremum local en (0, 0).

• De même, en (1, -1), on a : $r = 4$, $s = 0$ et $t = 4$, d'où : $rt - s^2 = 16$, et donc : $rt - s^2 > 0$. Comme $r > 0$, g admet donc un minimum local en (1, -1).

• Enfin, en (-1, 1), on a : $r = 4$, $s = 0$ et $t = 4$, d'où : $rt - s^2 = 16$, et donc : $rt - s^2 > 0$. Comme $r > 0$, g admet donc également un minimum local en (-1, 1).

ↄ Comme $g(1, -1) = g(-1, 1) = -1$, on peut désormais conclure :

$$\boxed{\text{g admet des minima locaux en } (1, -1) \text{ et en } (-1, 1) \text{ qui valent } -1}$$

☞ Pour déterminer les extrema locaux d'une fonction f de deux variables de classe C^2, il faut :
– déterminer les points critiques de f (i.e. les points pour lesquels $p = q = 0$),
– calculer en ces points la valeur de $rt - s^2$.

Soit alors a un point critique de f :

– si en a, on a : $rt - s^2 > 0$, d'après le cours, on peut écrire que f admet un extremum local en a.

– si en a, on a : $rt - s^2 \leq 0$, d'après le cours on ne peut rien conclure ; pour déterminer alors si f admet un extremum local en a, il faut donc appliquer la méthode vue à l'exercice 5.2 (noter néanmoins que si $rt - s^2 < 0$, f n'admet jamais d'extremum local en a).

SO

8. Extrema de fonctions de 3 variables (ou plus...)

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 3z^2 - 2xz.$$

A l'aide de la méthode de Gauss ou la méthode matricielle, déterminer les extrema de f.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} - y + z + xyz.$$

Déterminer les extrema de f sur $\mathbb{R}^3$.

1) f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$ en tant que fonction polynôme de trois variables. f admet donc des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 en tout point de $\mathbb{R}^3$ et on a :

– $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 6x - 2z,$

– $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2y$, et :

– $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 6z - 2x.$

On en déduit alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 2z = 0 \\ 2y = 0 \\ 6z - 2x = 0 \end{cases} \quad \text{soit :}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0).$$

(0, 0, 0) est donc l'unique point critique de f.

De plus, on a :

– $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) = 6$, d'où : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0, 0) = 6,$

– $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) = 2$, d'où : $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0, 0) = 2,$

– $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = 6$, d'où : $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(0, 0, 0) = 6,$

– $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) = 0$, d'où : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0, 0) = 0,$

– $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) = -2$, d'où : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(0, 0, 0) = -2$, et :

– $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) = 0$, d'où : $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(0, 0, 0) = 0.$

i) <u>Première méthode</u> : méthode de Gauss.

Soit maintenant Q la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $Q(x, y, z) = 6x^2 + 2y^2 + 6z^2 - 4xz$. A l'aide de la méthode de Gauss, on peut écrire :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ Q(x, y, z) = 6\left(x^2 - \frac{2}{3}xz\right) + 2y^2 + 6z^2 \quad \text{soit :}$$

$$= 6\left(x - \frac{z}{3}\right)^2 + 2y^2 + \frac{16}{3}z^2 \quad \text{et donc :}$$

$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ Q(x, y, z) \geq 0.$

☞ **Méthode de réduction de Gauss en carrés :** Pour savoir si une fonction f de classe C^2 admet un extremum local en a, on détermine tout d'abord Q_a à l'aide des dérivées partielles d'ordre 2 de f (le coefficient de x_i^2 est $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$, le coefficient de $x_i x_j$ est $2\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$). On cherche alors le signe de Q_a à l'aide de la méthode de réduction de Gauss en carrés :

– on repère dans la somme chacune des variables comprenant un terme "carré", et pour chacune d'entre elles :
– on isole les termes (le carré et les produits) où elle est mis en jeu, termes que l'on exprime sous forme de différence de carrés (par exemple : $x^2 + 2xy + 2xz$ devient : $(x + y + z)^2 - y^2 - z^2 - 2yz$ puis $(x + y + z)^2 - (y + z)^2$).
On en déduit alors une expression de Q_a sous forme de somme et différence de carrés.

Or, d'après la dernière expression de Q, on peut écrire :

$$\forall(x, y, z)\in \mathbb{R}^3,\ Q(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{z}{3} \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{i.e. :}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = 0.$$

On en déduit alors : $\forall(x, y, z)\in \mathbb{R}^3\setminus\{(0, 0, 0)\}$, $Q(x, y, z) > 0$. Comme $f(0, 0, 0) = 0$, on peut désormais conclure :

$$\boxed{\text{f admet un minimum local en } (0, 0, 0) \text{ qui vaut } 0}$$

☞ Lors de la réduction de Q_a en carrés par la méthode de Gauss, noter que :

• Si tous les coefficients des carrés sont positifs (resp. négatifs), Q_a est positif (resp. négatif) sur $\mathbb{R}^n$; on cherche alors les points de $\mathbb{R}^n$ pour lesquels Q_a s'annule (cf. **1**) :

– si Q_a ne s'annule qu'en 0, alors f admet un minimum (resp. maximum) en a,

– sinon, il faut étudier le signe de f - f(a) sur un voisinage de a (si pour tout voisinage de a, f - f(a) n'est pas de signe constant, alors f n'admet pas d'extremum local en a ; s'il existe un voisinage de a non réduit à a sur lequel f - f(a) est de signe constant, alors f admet un extremum local en a).

• Si tous les coefficients des carrés ne sont pas de même signe (cf. **2**), on démontre alors aisément que Q_a n'est pas de signe constant sur $\mathbb{R}^n$ (il suffit de trouver deux points de $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ en lesquels Q_a n'a pas le même signe), puis on démontre que pour tout voisinage de a non réduit à a, f - f(a) n'est pas de signe constant pour conclure que f n'admet pas d'extremum local en a.

☞ Noter que si f est une fonction polynôme de n variables ne regroupant que des carrés d'une variable et des produits de deux variables, f est égale à la partie régulière de son développement limité d'ordre 2 au voisinage de tout point, d'où : Q = 2f.

ii) <u>Deuxième méthode</u> : méthode matricielle.

Soient $M = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Notons alors, pour tout $(x, y, z)\in \mathbb{R}^3$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et Q la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par :
$\forall(x, y, z)\in \mathbb{R}^3$, $Q(x, y, z) = {}^tXMX$.

λ est valeur propre de M si et seulement si $\exists X \neq 0$, $(M - \lambda I)X = 0$. Or, on a :

$$(M - \lambda I)X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 6-\lambda \end{pmatrix} X = 0 \qquad \text{soit } (L_1 \leftrightarrow L_3) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 6-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 6-\lambda & 0 & -2 \end{pmatrix} X = 0 \qquad \text{soit encore } (L_3 \leftarrow 2L_3 + (6-\lambda)L_1) :$$

☞ Lors de la réduction de Q_a en carrés par la méthode matricielle, noter que :

– si toutes les valeurs propres de M_a sont strictement positives, Q_a est strictement positif sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et f admet un minimum en a,

– si toutes les valeurs propres de M_a sont strictement négatives, Q_a est strictement négatif sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et f admet un maximum en a,

– si toutes les valeurs propres de M_a ne sont pas de même signe, on démontre à nouveau que Q_a n'est pas de signe constant sur $\mathbb{R}^n$, puis que pour tout voisinage de a non réduit à a, f - f(a) n'est pas de signe constant pour conclure que f n'admet pas d'extremum local en a.

☞ Avec la méthode de Gauss comme avec la méthode matricielle, il faut déterminer le signe au sens large de Q_a sur $\mathbb{R}^n$ puis montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $Q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ avant de conclure sur le signe de Q_a sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

2) ❍ f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$ en tant que fonction polynôme de trois variables. f admet donc des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 en tout point de $\mathbb{R}^3$ et on a :

– $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = x + yz$,

– $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -1 + xz$, et :

– $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 1 + xy$.

On en déduit alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -yz \\ xz = 1 \\ xy = -1 \end{cases}$$

soit, comme 0 ne peut être élément d'aucun triplet solution de ce système :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{x^2} \\ y = -\frac{1}{x} \\ z = \frac{1}{x} \end{cases}$$

et donc :

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (1, -1, 1).$$

(1, -1, 1) est donc l'unique point critique de f.

❍ De plus, on a :

– $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) = 1$, d'où : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, -1, 1) = 1$,

– $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) = 0$, d'où : $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, -1, 1) = 0$,

– $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = 0$, d'où : $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(1, -1, 1) = 0$,

– $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) = z$, d'où : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, -1, 1) = 1$,

– $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) = y$, d'où : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(1, -1, 1) = -1$, et :

– $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) = x$, d'où : $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(1, -1, 1) = 1$.

Soit maintenant Q la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $Q(x, y, z) = x^2 + 2xy - 2xz + 2yz$. A l'aide de la méthode de Gauss, on peut écrire :

$\forall(x, y, z)\in\mathbf{R}^3$, $Q(x, y, z) = (x + y - z)^2 - y^2 - z^2 + 4yz$ soit :

$$= (x + y - z)^2 - (y - 2z)^2 + 3z^2.$$

Or, on a : $\forall x\in\mathbf{R}_+^*$, $Q(0, x, x) = 2x^2$ et $\forall x\in\mathbf{R}_+^*$, $Q(x, -x, 0) = -x^2$. On en déduit alors : $\forall x\in\mathbf{R}_+^*$, $Q(0, x, x) > 0$ et $\forall x\in\mathbf{R}_+^*$, $Q(x, -x, 0) < 0$. Q n'est donc pas de signe constant sur $\mathbf{R}^3$.

Pour tout $h\in\mathbf{R}_+^*$, soit alors $B_h = \{(a, b, c)\in\mathbf{R}^2, |a - 1| < 2h, |b + 1| < 2h, |c - 1| < 2h\}$. L'ensemble $\{B_h, h\in\mathbf{R}_+^*\}$ est l'ensemble des boules ouvertes de centre $(1, -1, 1)$ pour la norme uniforme de $\mathbf{R}^3$. Soit alors V un voisinage de $(1, -1, 1)$. On peut alors écrire : $\exists h\in\mathbf{R}_+^*$, $B_h\subset V$.

Or, on a : $(1, -1 + h, 1 + h)\in B_h$ et $(1 + h, -1 - h, 1)\in B_h$, d'où : $(1, -1 + h, 1 + h)\in V$ et $(1 + h, -1 - h, 1)\in V$, avec :

– $f(1, -1 + h, 1 + h) - f(1, -1, 1) = h^2$, donc : $f(1, -1 + h, 1 + h) - f(1, -1, 1) > 0$, et :

– $f(1 + h, -1 - h, 1) - f(1, -1, 1) = -\dfrac{h^2}{2}$, donc : $f(1 + h, -1 - h, 1) - f(1, -1, 1) < 0$.

Sur tout voisinage V de $(1, -1, 1)$, $f(a, b, c) - f(1, -1, 1)$ ($(a, b, c)\in V$) n'est donc pas de signe constant. On en déduit alors que f n'admet pas d'extremum local en $(1, -1, 1)$, d'où la conclusion :

$$\boxed{\text{f n'admet pas d'extremum local sur } \mathbf{R}^3}$$

S❷

9. Recherche d'extrema liés par une contrainte linéaire

Déterminer les extrema de la fonction f définie par :

$$\forall(x, y, z)\in\mathbf{R}^3,\ f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

sous la contrainte :

$$x + y + z = 1.$$

› On a : $\forall(x, y, z)\in\mathbf{R}^3$, $x + y + z = 1 \Leftrightarrow z = 1 - x - y$. Soit alors φ la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par : $\forall(x, y)\in\mathbf{R}^2$, $\varphi(x, y) = f(x, y, 1 - x - y)$.

On peut alors écrire :

$\forall(x, y)\in\mathbf{R}^2$, $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 + (1 - x - y)^2$ soit :

$$= 2x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1.$$

› Déterminer les extrema de f sur $\mathbf{R}^3$ sous la contrainte $x + y + z = 1$ revient donc à déterminer les extrema de φ sur $\mathbf{R}^2$. φ étant de classe C^2 sur $\mathbf{R}^2$ en tant que fonction polynôme de deux variables, φ admet des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 en tout point de $\mathbf{R}^2$. Soit alors $(x, y)\in\mathbf{R}^2$. On peut maintenant écrire, en utilisant les notations de Monge :

– $p = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y) = 4x + 2y - 2$, et :

– $q = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y) = 4y + 2x - 2$.

On en déduit alors :

$$p = q = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y - 2 = 0 \\ 4y + 2x - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{i.e. :}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2y + x = 1 \end{cases} \quad \text{et donc } (L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2) :$$

Soit alors $(x, y) \in \Omega$. On peut maintenant écrire, en utilisant les notations de Monge :

– $p = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$, et :

– $q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = 1 - \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$.

On en déduit alors :

$$p = q = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = 0 \\ 1 - \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = 0 \end{cases} \quad \text{soit :}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \\ y = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{cases} \quad \text{i.e. :}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x \geq 0 \\ x^2 = 1 - 2x^2 \end{cases} \quad \text{et donc :}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ est donc l'unique point critique de φ. Or, φ étant de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, en calculant ses dérivées partielles d'ordre 2 en $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, on démontre aisément que $r = t = -2\sqrt{3}$ et $s = -\sqrt{3}$, donc que $rt - s^2 > 0$ avec $r < 0$, donc que φ admet un maximum local en $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Comme $\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3}$, on peut alors conclure :

$$\boxed{\text{f atteint un maximum local en } \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ et celui-ci vaut } \sqrt{3}}$$

❏ En procédant de même pour ψ, on démontre que $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ est l'unique point critique de ψ et que ψ admet un minimum local en $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Comme $\psi\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\sqrt{3}$, on peut alors conclure :

$$\boxed{\text{f atteint un minimum local en } \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ et celui-ci vaut } -\sqrt{3}}$$

☞ Déterminer les extrema locaux d'une fonction f de n variables sous une contrainte quadratique revient à déterminer les extrema locaux des fonctions φ et ψ de $n - 1$ variables obtenues à partir de f en remplaçant une des variables par ses deux expressions possibles en fonction des $n - 1$ autres variables à l'aide de la contrainte quadratique.

Dénombrements

Fiche de cours

I. p-listes d'un ensemble à n éléments SO EO

Nombre de
- p-listes d'un ensemble à n éléments,
- suites de p éléments d'un ensemble à n éléments,
- applications d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments :

$$n^p$$

Eléments **ordonnés** et **non forcément distincts.**
Modèle : tirages successifs de p boules parmi n **avec remise.**

II. p-listes d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments SO EO

Nombre de
- p-listes d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments (arrangements),
- suites de p éléments distincts d'un ensemble à n éléments,
- injections d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments :

$$A_n^p = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si } 0 \leq p \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Eléments **ordonnés** et **distincts.**
Modèle : tirages successifs de p boules parmi n **sans remise.**

III. Permutations d'un ensemble à n éléments SO EO

Nombre de
- permutations d'un ensemble à n éléments,
- bijections d'un ensemble à n éléments vers un ensemble à n éléments :

$$n! = A_n^n$$

Eléments **ordonnés** et **distincts.**
Modèle : tirages successifs de n boules parmi n **sans remise.**

IV. Parties à p éléments d'un ensemble à n éléments SO EO

Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments (combinaisons) :

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!} & \text{si } 0 \leq p \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Eléments **non ordonnés** et **distincts.**
Modèle : tirage de p boules parmi n **simultanément.**

■ Une main contenant deux paires étant constituée de deux fois 2 cartes de même hauteur (les deux hauteurs, distinctes, étant à choisir parmi les 13 hauteurs du jeu) et d'une cinquième carte de hauteur différente (à choisir parmi les $11 \times 4 = 44$ cartes des 11 hauteurs restantes), pour choisir une main de 5 cartes contenant exactement deux paires, il faut et il suffit de :

– choisir les hauteurs des deux paires (C_{13}^2 possibilités),

– choisir les 2 cartes de chacune des paires ($\left(C_4^2\right)^2$ possibilités), et :

– choisir la carte restante parmi les 44 cartes des 11 hauteurs restantes (44 possibilités).

Il y a donc $44\, C_{13}^2 \left(C_4^2\right)^2 = 123\ 552$ mains de 5 cartes contenant exactement deux paires.

■ Une main contenant un brelan étant constituée de 3 cartes de même hauteur et de 2 autres cartes de hauteurs distinctes (à choisir parmi les 12 hauteurs du jeu restantes), pour choisir une main de 5 cartes contenant exactement un brelan, il faut et il suffit de :

– choisir la hauteur du brelan (13 possibilités),

– choisir les 3 cartes du brelan (C_4^3 possibilités),

– choisir les hauteurs de chacune des 2 cartes restantes (C_{12}^2 possibilités), et :

– choisir la couleur de chacune de ces 2 cartes (4 possibilités pour chacune d'entre elles, soit 4^2).

Il y a donc $13\, C_4^3\, C_{12}^2\, 4^2 = 54\ 912$ mains de 5 cartes contenant exactement un brelan.

■ Une main contenant une suite étant constituée de 5 cartes qui se suivent (2, 3, 4, 5, 6 ou 3, 4, 5, 6, 7 ou ... 10, V, D, R, A) mais qui ne sont pas toutes de la même couleur, pour choisir une main de 5 cartes contenant une suite, il faut et il suffit de :

– choisir la hauteur de la suite (9 possibilités : les suites se terminant par 6, 7, ... , R et A), et :

– choisir la couleur de chacune des 5 cartes de la suite ($4^5 - 4$ possibilités : pour chaque hauteur de suite, il existe en effet 4 suites composées exclusivement de cartes de même couleur formant ainsi une quinte flush).

Il y a donc $9\left(4^5 - 4\right) = 9\ 180$ mains de 5 cartes contenant exactement une suite.

■ Une main contenant une couleur étant constituée de 5 cartes de même couleur (cœur, carreau, trèfle ou pique) ne formant pas une suite (2, 3, 4, 5, 6 ou 3, 4, 5, 6, 7 ou ... 10, V, D, R, A), pour choisir une main de 5 cartes contenant exactement une couleur, il faut et il suffit de :

– choisir la couleur de la main (4 possibilités), et :

– choisir les 5 cartes parmi les 13 cartes de la couleur ainsi choisie ($C_{13}^5 - 9$ possibilités : pour chaque couleur, il y a en effet 9 suites possibles formant ainsi une quinte flush).

Il y a donc $4\left(C_{13}^5 - 9\right) = 5\ 112$ mains de 5 cartes contenant exactement une couleur.

■ Une main contenant un full étant constituée d'un brelan et d'une paire, pour choisir une main de 5 cartes contenant un full, il faut et il suffit de :

– choisir les hauteurs du brelan et de la paire (A_{13}^2 possibilités car les deux hauteurs doivent être distinctes et ordonnées, le brelan et la paire ne jouant pas des rôles symétriques),

– choisir les 3 cartes du brelan (C_4^3 possibilités), et :

– choisir les 2 cartes de la paire (C_4^2 possibilités).

Il y a donc $A_{13}^2\, C_4^3\, C_4^2 = 3\ 744$ mains de 5 cartes contenant exactement un full.

■ Une main contenant un carré étant constituée des 4 cartes d'une même hauteur et d'une autre carte d'une hauteur différente, pour choisir une main de 5 cartes contenant un carré, il faut et il suffit de :

– choisir la hauteur du carré (13 possibilités), hauteur dont on prend les 4 cartes, et :

– choisir la cinquième carte de la main parmi les 48 autres cartes du jeu (48 possibilités).

Il y a donc $13 \times 48 = 624$ mains de 5 cartes contenant exactement un carré.

■ Une main contenant une quinte flush étant constituée d'une suite de 5 cartes de même couleur, pour choisir une main de 5 cartes contenant une quinte flush, il faut et il suffit de :

– choisir la couleur de la suite (4 possibilités), et :

– choisir la hauteur de la suite (9 possibilités).

Il y a donc $4 \times 9 = 36$ mains de 5 cartes contenant exactement une quinte flush.

$\sum_{k=n}^{p} C_k^n = \sum_{k=n}^{p} C_{k+1}^{n+1} - \sum_{k=n}^{p} C_k^{n+1}$ et en effectuant le changement de variable $k' = k + 1$ dans la première somme du second membre :

$= \sum_{k=n+1}^{p+1} C_k^{n+1} - \sum_{k=n}^{p} C_k^{n+1}$ soit encore, les termes s'éliminant deux à deux pour $k = n + 1$ à $k = p$ lorsque $p \geq n + 1$, le cas $p = n$ rejoignant le cas général :

$= C_{p+1}^{n+1} - C_n^{n+1}$ et comme par convention $C_n^{n+1} = 0$:

$$\boxed{\sum_{k=n}^{p} C_k^n = C_{p+1}^{n+1}}$$

☞ **Formule d'itération de Pascal** (elle ne fait pas partie du cours, démonstration à connaître par cœur) : $\sum_{k=n}^{p} C_k^n = C_{p+1}^{n+1}$ ou, autre formulation : $\sum_{k=0}^{p} C_{n+k}^n = C_{n+p+1}^{n+1}$.

SO EO

★ 4. Formule de Vandermonde

Soient n, n_1 et n_2 trois entiers naturels non nuls.

1) Montrer de façon combinatoire que :

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n_1}^k C_{n_2}^{n-k} = C_{n_1+n_2}^n.$$

2) En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$.

1) Soient E un ensemble à $n_1 + n_2$ éléments, E_1 et E_2 deux sous-ensembles disjoints de E tels que $\mathrm{Card}(E_1) = n_1$ et $\mathrm{Card}(E_2) = n_2$. On a alors : $E = E_1 \cup E_2$.

Soient alors A l'ensemble des parties à n éléments de E et pour tout $k \in [0, n]$, A_k l'ensemble des parties à n éléments de E dont k appartiennent à E_1 et $n - k$ appartiennent à E_2. On a clairement : $A = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$.

Cette union étant disjointe (dans toute partie à n éléments de E, il ne peut y avoir à la fois k et k' éléments appartenant à E_1 avec $k \neq k'$), on peut alors écrire : $\mathrm{Card}(A) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Card}(A_k)$ ①.

Or, d'après la définition de A, on a clairement : $\mathrm{Card}(A) = C_{n_1+n_2}^n$. De plus, pour tout $k \in [0, n]$, A_k étant l'ensemble des parties à n éléments de E dont k appartiennent à E_1 et $n - k$ appartiennent à E_2, pour choisir un élément de A_k, il faut et il suffit de choisir k éléments de E_1 ($C_{n_1}^k$ possibilités) et $n - k$ éléments de E_2 ($C_{n_2}^{n-k}$ possibilités), d'où : $\forall k \in [0, n]$, $\mathrm{Card}(A_k) = C_{n_1}^k C_{n_2}^{n-k}$.

D'après la relation ①, on peut alors conclure :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} C_{n_1}^k C_{n_2}^{n-k} = C_{n_1+n_2}^n}$$

NB : Il existe une deuxième méthode courante de résolution de cette question qui consiste à identifier le coefficient de X^n dans $(1 + X)^{n_1+n_2}$ et dans $(1 + X)^{n_1}(1 + X)^{n_2}$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.

☞ Pour montrer une identité de nature combinatoire, une méthode très classique consiste à interpréter un des deux membres (le plus simple) comme le cardinal d'un certain ensemble A.

On effectue alors une partition de A en fonction d'un certain critère (qui permettra d'interpréter l'autre membre comme le cardinal du même ensemble) et on écrit ainsi : $A = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$, soit l'union étant disjointe (lorsque $i \neq j$, les événements A_i et A_j ne peuvent se réaliser simultanément) : $\mathrm{Card}(A) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Card}(A_k)$. En déterminant Card(A) et pour tout $k \in [0, n]$, $\mathrm{Card}(A_k)$, on en déduit alors l'identité recherchée.

2) En posant $n_1 = n_2 = n$ dans la dernière relation, on peut alors écrire : $\sum_{k=0}^{n} C_n^k C_n^{n-k} = C_{2n}^n$, soit, en remarquant que $\forall k \in [0, n]$, $C_n^{n-k} = C_n^k$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n}$$

☞ **Formule de Vandermonde** (elle ne fait pas partie du cours, démonstration à connaître par cœur) : $\sum_{k=0}^{n} C_{n_1}^k C_{n_2}^{n-k} = C_{n_1+n_2}^n$ (ou $\sum_{p+q=r} C_n^p C_m^q = C_{n+m}^r$) et sa conséquence : $\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$.

SO EO

★ 5. Calcul de $\sum_{k=0}^{n} k C_n^k$, $\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k$, $\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1}$, $\sum_{k=n}^{p} (k+1) C_k^n$

Soient n et p deux entiers naturels non nuls tels $n \leq p$.

1) Calculer $\sum_{k=0}^{n} k C_n^k$.

2) Calculer $\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k$.

3) Calculer $\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1}$.

4) Calculer $\sum_{k=n}^{p} (k+1) C_k^n$.

1) On a :

$\forall k \in [1, n]$, $k C_n^k = k \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ soit :

$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}$ soit encore :

$= n \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,[(n-1)-(k-1)]!}$ et donc :

$= n C_{n-1}^{k-1}$.

On en déduit alors, en éliminant le terme en $k = 0$ de la somme (terme nul) :

$\sum_{k=0}^{n} k C_n^k = \sum_{k=1}^{n} k C_n^k$ soit, d'après ce qui précède :

$= n \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1}$ et en effectuant le changement de variable $k' = k - 1$:

$= n \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k}$.

Hidden page

S⊙ E⊙

● 6. Calcul de $\sum_{k=0}^{E(n/2)} C_n^{2k}$, $\sum_{k=0}^{E(n/3)} C_n^{3k}$

Soit n un entier naturel non nul.

1) Calculer $\sum_{k=0}^{E(n/2)} C_n^{2k}$.

2) (S⊙) Calculer $\sum_{k=0}^{E(n/3)} C_n^{3k}$.

1) Posons $S_0 = \sum_{k=0}^{n} C_n^{2k}$ et $S_1 = \sum_{k=0}^{n} C_n^{2k+1}$. S_0 étant la somme des $(C_n^k)_{0\le k\le 2n+1}$ de rang pair et S_1 étant la somme des $(C_n^k)_{0\le k\le 2n+1}$ de rang impair, on peut alors écrire :

$S_0 + S_1 = \sum_{k=0}^{2n+1} C_n^k$ soit, en éliminant les termes nuls de la somme (termes pour lesquels k > n) :

$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k$ et donc, à l'aide de la formule du binôme de Newton :

$= 2^n$.

De même, d'après les définitions de S_0 et S_1, on peut également écrire :

$S_0 - S_1 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{2k} C_n^{2k} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^{2k+1} C_n^{2k+1}$ ce qui s'écrit encore :

$= \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k C_n^k$ soit, en éliminant les termes nuls de la somme (termes pour lesquels k > n) :

$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$ et donc, à l'aide de la formule du binôme de Newton :

$= 0$.

S_0 et S_1 vérifient donc le système : $\begin{cases} S_0 + S_1 = 2^n \\ S_0 - S_1 = 0 \end{cases}$, soit : $\begin{cases} 2S_0 = 2^n \\ S_0 = S_1 \end{cases}$. On en déduit alors que $S_0 = S_1 = 2^{n-1}$, d'où : $\sum_{k=0}^{n} C_n^{2k} = 2^{n-1}$. Les termes de la somme pour lesquels 2k > n (soit $k > E\left(\frac{n}{2}\right)$) étant tous nuls, en éliminant ces termes de la somme, on peut alors conclure :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{E(n/2)} C_n^{2k} = 2^{n-1}}$$

☞ Se souvenir des cas particuliers d'utilisation de la formule du binôme de Newton :

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = (1+x)^n$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$.

2) Posons $T_0 = \sum_{k=0}^{n} C_n^{3k}$, $T_1 = \sum_{k=0}^{n} C_n^{3k+1}$ et $T_2 = \sum_{k=0}^{n} C_n^{3k+2}$. En regroupant les termes de $T_0 + T_1 + T_2$ dans une même somme, on peut alors écrire :

$T_0 + T_1 + T_2 = \sum_{k=0}^{3n+2} C_n^k$ soit, en éliminant les termes nuls de la somme (termes pour lesquels k > n) :

$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k$ et donc, à l'aide de la formule du binôme de Newton :

$= 2^n$ ①.

☞ Se souvenir que : $\forall i \in [0, p]$, $C_n^i C_{n-i}^{p-i} = C_n^p C_p^i$ (démonstration à connaître).

2) On en déduit alors, en éliminant les termes nuls de la somme (termes pour lesquels $i > p$) :

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i C_{n-i}^{p-i} = \sum_{i=0}^{p} C_n^i C_{n-i}^{p-i}$$ soit, d'après la question précédente :

$$= C_n^p \sum_{i=0}^{p} C_p^i$$ et donc, d'après la formule du binôme de Newton :

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} C_n^i C_{n-i}^{p-i} = 2^p C_n^p}$$

☞ Se souvenir que : $\sum_{i=0}^{n} C_n^i C_{n-i}^{p-i} = 2^p C_n^p$ (démonstration à connaître).

SO EO

● 9. Calcul de $\sum_{k=p}^{n-q} C_k^p C_{n-k}^q$

Soient n, p et q trois entiers naturels non nuls tels que $n \geq p + q$. Démontrer que :

$$\sum_{k=p}^{n-q} C_k^p C_{n-k}^q = C_{n+1}^{p+q+1}$$

(on pourra dénombrer pour tout $k \in [p, n - q]$, les parties à $(p + q + 1)$ éléments de $[1, n + 1]$ dont le $(p + 1)^{\text{ème}}$ par ordre croissant est égal à $k + 1$).

Notons A l'ensemble des parties à $(p + q + 1)$ éléments de $[1, n + 1]$ et pour tout $k \in [p, n - q]$, A_k l'ensemble des parties à $(p + q + 1)$ éléments de $[1, n + 1]$ dont le $(p + 1)^{\text{ème}}$ par ordre croissant est égal à $k + 1$.

Dans toute partie à $(p + q + 1)$ éléments de $[1, n + 1]$, le $(p + 1)^{\text{ème}}$ par ordre croissant est égal au minimum à $p + 1$. De plus, dans toute partie à $(p + q + 1)$ éléments de $[1, n + 1]$, il y a exactement q éléments supérieurs au $(p + 1)^{\text{ème}}$ par ordre croissant ; le $(p + 1)^{\text{ème}}$ par ordre croissant vaut donc au maximum $(n + 1) - q$, c'est-à-dire : $n - q + 1$.

A est donc l'union des (A_k) lorsque $k + 1$ décrit $[p + 1, n - q + 1]$, donc lorsque k décrit $[p, n - q]$, ce qui s'écrit encore : $A = \bigcup_{k=p}^{n-q} A_k$.

Cette union étant disjointe (le $(p + 1)^{\text{ème}}$ élément par ordre croissant de toute partie de $[1, n + 1]$ ne peut être simultanément égal à deux valeurs distinctes), on peut alors écrire : $\text{Card}(A) = \sum_{k=p}^{n-q} \text{Card}(A_k)$ ①.

Or, d'après la définition de A, on a clairement : $\text{Card}(A) = C_{n+1}^{p+q+1}$. De plus, pour tout $k \in [0, n]$, A_k étant l'ensemble des parties à $(p + q + 1)$ éléments de $[1, n + 1]$ dont le $(p + 1)^{\text{ème}}$ par ordre croissant est égal à $k + 1$, pour choisir un élément de A_k, il faut et il suffit de :

– choisir p éléments de $[1, k]$ (C_k^p possibilités),

– choisir l'élément $k + 1$ (1 possibilité), et :

– choisir q éléments de $[k + 2, n + 1]$ (C_{n-k}^q possibilités car $\text{Card}([k + 2, n + 1]) = n - k$), d'où :

$\forall k \in [p, n - q]$, $\text{Card}(A_k) = C_k^p C_{n-k}^q$.

D'après la relation ①, on peut alors conclure :

$$\boxed{\sum_{k=p}^{n-q} C_k^p C_{n-k}^q = C_{n+1}^{p+q+1}}$$

☞ Se souvenir que : $\sum_{k=p}^{n-q} C_k^p C_{n-k}^q = C_{n+1}^{p+q+1}$ (démonstration à connaître).

Récapitulatif des méthodes de calcul de sommes de C_n^k

1. Si la somme comprend **un seul C_n^k**, il faut voir :

– si la variable de sommation est *en haut* du "C_n^k", la formule du binôme de Newton et son cas le plus remarquable : $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

– si la variable de sommation est *en bas* du "C_n^k", l'itération de la formule de Pascal : $\sum_{k=n}^{p} C_k^n = C_{p+1}^{n+1}$ (cf. exercice 3),

– avec éventuellement des décompositions du type : $k(k-1)\ldots(k-i+1)C_n^k = n(n-1)\ldots(n-i+1)C_{n-i}^{k-i}$ ou bien du type : $(k+1)(k+2)\ldots(k+i)C_k^n = (n+1)(n+2)\ldots(n+i)C_{k+i}^{n+i}$ (cf. exercice 5).

2. Si la somme comprend **deux C_n^k**, il faut voir :

– si la variable de sommation est *en haut* des "C_n^k", la formule de Vandermonde : $\sum_{k=0}^{n} C_{n_1}^k C_{n_2}^{n-k} = C_{n_1+n_2}^n$ (cf. exercice 4),

– si la variable de sommation est *en haut* **et** *en bas* des "C_n^k" : $\sum_{i=0}^{n} C_n^i C_{n-i}^{p-i} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i C_{n-i}^{n-p} = 2^p C_n^p$ (cf. exercice 8),

– si la variable de sommation est *en bas* des "C_n^k" : $\sum_{k=p}^{n-q} C_k^p C_{n-k}^q = C_{n+1}^{p+q+1}$ (cf. exercice 9).

SO EO

★ 10. Equivalent de C_n^k et limite de la suite $(C_n^k x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ($x\in]0,1[$)

Soit k un entier naturel non nul.

1) Déterminer un équivalent de C_n^k lorsque n tend vers $+\infty$.

2) Soit $x\in]0, 1[$. En déduire la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de la suite $(C_n^k x^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

NB : La résolution de cet exercice nécessite la connaissance du cours : 5. Suites.

1) On a :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq k,\ C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$ soit :

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

Or, lorsque n tend vers $+\infty$, on a : $\forall i\in[0, k-1]$, $n-i \sim n$. Le produit $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$ comprenant k facteurs, on peut alors écrire, lorsque n tend vers $+\infty$: $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) \sim n^k$, et donc :

$$\boxed{C_n^k \sim \frac{n^k}{k!}}$$

☞ Se souvenir que pour $k\in\mathbb{N}$: $C_n^k \sim \frac{n^k}{k!}$ (démonstration à connaître).

2) Comme $x \in]0, 1[$, d'après les résultats de l'exercice 5.1.5, on peut écrire : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^k x^n = 0$. Comme $C_n^k x^n \sim \frac{n^k x^n}{k!}$ et comme deux suites équivalentes ont même limite (sous réserve d'existence), on peut alors conclure :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} C_n^k x^n = 0}$$

☞ Se souvenir que pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, 1[$: $\lim\limits_{n \to +\infty} C_n^k x^n = 0$ (démonstration à connaître).

SO EO

● 11. Calcul de $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} C_n^k$

1) Montrer, à l'aide la formule du binôme de Newton que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], \sum_{k=1}^{n} C_n^k (x-1)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k.$$

2) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} C_n^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1) ❑ On a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1[, \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k (x-1)^{k-1} = \frac{1}{x-1} \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k (x-1)^k$ soit :

$= \frac{1}{x-1} \left[\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k (x-1)^k - 1 \right]$ soit encore, à l'aide de la formule du binôme de Newton :

$= \frac{x^n - 1}{x-1}$ et donc, en reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique de raison $x \neq 1$ ($x \in [0, 1[$) :

$= \sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k.$

❑ De plus, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k 0^{k-1} = C_n^1 0^0 = n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} 1^k$. Le cas $x = 1$ rejoignant ainsi le cas général, on peut maintenant conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], \sum_{k=1}^{n} C_n^k (x-1)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k}$$

2) En intégrant cette relation sur $[0, 1]$, les fonctions en présence étant continues sur cet intervalle, on peut alors écrire :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 \left(\sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k (x-1)^{k-1} \right) dx = \int_0^1 \left(\sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k \right) dx$ soit, par linéarité de l'intégrale :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k \int_0^1 (x-1)^{k-1} dx = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \int_0^1 x^k dx$ soit encore :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k \left[\frac{(x-1)^k}{k} \right]_0^1 = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left[\frac{x^{k+1}}{k+1} \right]_0^1$ et donc :

SO EO

★ 13. Nombre de partitions en paires d'un ensemble

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par a_n le nombre de partitions en paires d'un ensemble à 2n éléments, c'est-à-dire le nombre de partitions d'un ensemble à 2n éléments qui ne soient constituées que de paires.

1) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_{n+1} en fonction de a_n.

2) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de a_n en fonction de n.

1) Soient n un entier naturel non nul et A_{n+1} un ensemble à $2n+2$ éléments : $A_{n+1} = \{x_k,\ k \in [\![1,\ 2n+2]\!]\}$. Considérons l'élément x_1. Pour effectuer une partition en paires de A_{n+1}, il faut et il suffit de :
– choisir d'abord le binôme de x_1 (c'est-à-dire l'élément associé à x_1 dans une paire), puis :
– effectuer une partition en paires de l'ensemble constitué par les 2n éléments restants.

Or, le binôme de x_1 se trouve dans l'ensemble $\{x_k,\ k \in [\![2,\ 2n+2]\!]\}$. Cet ensemble étant de cardinal $2n+1$, il y a donc $2n+1$ possibilités pour choisir le binôme de x_1. De plus, par définition de a_n, on sait qu'il existe a_n partitions en paires de l'ensemble constitué par les 2n éléments restants.

On en déduit alors qu'il existe $(2n+1)a_n$ partitions en paires de A_{n+1}, et donc, d'après la définition de a_{n+1} :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = (2n+1)\,a_n}$$

2) On peut maintenant écrire :

$\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ a_n = (2n-1)\,a_{n-1}$ soit, en itérant cette relation :

$= (2n-1)(2n-3)\dots 3\,a_1$ soit encore, en multipliant et en divisant cette relation par $(2n)(2n-2)(2n-4)\dots 2$:

$$= \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)\dots 3\times 2}{(2n)(2n-2)(2n-4)\dots 2}\ a_1.$$

Or, on a :
– $(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)\dots 3\times 2 = (2n)!$, et :
– $(2n)(2n-2)(2n-4)\dots 2 = (2\times n)\times\big(2\times(n-1)\big)\times\big(2\times(n-2)\big)\times\dots\times(2\times 2)\times(2\times 1)$ soit :

$= 2^n\big(n(n-1)(n-2)\dots 2\times 1\big)$ et donc :

$= 2^n n!$.

☞ Se souvenir que : $(2n)(2n-2)(2n-4)\dots 2 = 2^n\, n!$, et que : $(2n-1)(2n-3)(2n-5)\dots 3 = \dfrac{(2n)!}{2^n\, n!}$.

On en déduit alors : $\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ a_n = \dfrac{(2n)!}{2^n\, n!}\, a_1$, et donc, comme $a_1 = 1$ (il n'y a en effet qu'une seule partition en paires possible d'un ensemble à deux éléments) : $\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ a_n = \dfrac{(2n)!}{2^n\, n!}$. Comme $a_1 = 1$, le cas $n = 1$ rejoint le cas général et on peut alors conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{(2n)!}{2^n\, n!}}$$

☞ Se souvenir que le nombre de partitions en paires d'un ensemble à 2n éléments est : $\dfrac{(2n)!}{2^n\, n!}$ (démonstration à connaître).

Les éléments de toute combinaison avec répétition d'ordre p de E étant non ordonnés et non forcément distincts, à toute n-liste d'entiers naturels $(k_i)_{1\leq i\leq n}$ vérifiant l'équation $\sum_{i=1}^{n} k_i = p$ correspond une et une seule combinaison avec répétition d'ordre p de E.

Par exemple, [1, 1, 2] et [1, 2, 1] représentent la même combinaison avec répétition d'ordre 3 de {1, 2}.

Il y a donc clairement bijection entre l'ensemble A des combinaisons avec répétitions d'ordre p de E et l'ensemble B des n-listes d'entiers naturels $(k_i)_{1\leq i\leq n}$ vérifiant l'équation $\sum_{i=1}^{n} k_i = p$. On a donc : Card(A) = Card(B).

Or, on a vu à la question précédente qu'il y a C_{n+p-1}^{p} n-listes d'entiers naturels $(k_i)_{1\leq i\leq n}$ telles que $\sum_{i=1}^{n} k_i = p$. On en déduit alors : Card(B) = C_{n+p-1}^{p}, et donc, d'après ce qui précède : Card(A) = C_{n+p-1}^{p}. On peut maintenant conclure :

Le nombre Γ_n^p de combinaisons avec répétitions d'ordre p de E est : $\Gamma_n^p = C_{n+p-1}^{p}$

☞ Se souvenir que le nombre de combinaisons avec répétitions d'ordre p d'un ensemble à n éléments est : $\Gamma_n^p = C_{n+p-1}^{p}$ (démonstration à connaître).

3) ▪ Toute p-liste d'entiers naturels $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ peut être codée par une succession de "0" et de "1" (un codage binaire) de la façon suivante : x_1 "1" suivi d'un "0", x_2 "1" suivi d'un nouveau "0", ... , x_{p-1} "1" suivi d'un dernier "0" et x_p "1". Ainsi, chaque p-liste d'entiers naturels $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ telle que $\sum_{i=1}^{p} x_i = n$ peut être codée par une succession de n "1" (car $\sum_{i=1}^{p} x_i = n$) et de p - 1 "0" (autant que de passages de x_i à x_{i+1}, $i\in[\![1, p-1]\!]$).

Or, à tout codage composé de n "1" et de p - 1 "0" correspond une et une seule p-liste d'entiers naturels $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ telle que $\sum_{i=1}^{p} x_i = n$ (x_1 est égal au nombre de "1" avant le premier "0", x_2 au nombre de "1" entre le premier et le deuxième "0"...). Il y a donc clairement bijection entre l'ensemble A_n des p-listes d'entiers naturels $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ telle que $\sum_{i=1}^{p} x_i = n$ et l'ensemble C_n des codages binaires composés de n "1" et de p - 1 "0". On en déduit alors : Card(A_n) = Card(C_n).

De plus, il y a autant de codages binaires composés de n "1" et de p - 1 "0" que de façons de placer n "1" parmi n + p - 1 signes, soit $C_{n+p-1}^{n} = C_{n+p-1}^{p-1}$ codages possibles. On peut maintenant écrire : Card(C_n) = C_{n+p-1}^{p-1}, et donc, d'après ce qui précède : Card(A_n) = C_{n+p-1}^{p-1}.

On peut désormais conclure :

Il existe C_{n+p-1}^{p-1} p-listes $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ d'entiers naturels tels que $\sum_{i=1}^{p} x_i = n$

NB : Remarquer que ce nombre n'est jamais que Γ_p^n.

☞ Se souvenir qu'il y a $C_{n+p-1}^{p-1} = \Gamma_p^n$ p-listes $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ d'entiers naturels tels que $\sum_{i=1}^{p} x_i = n$ (démonstration à connaître).

▪ Notons pour tout $k\in\mathbb{N}$, A_k l'ensemble des p-listes d'entiers naturels $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ telle que $\sum_{i=1}^{p} x_i = k$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des p-listes d'entiers naturels $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ telle que $\sum_{i=1}^{p} x_i \leq n$. On a alors : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{A}_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$.

L'union étant disjointe (on ne peut avoir pour une même p-liste $(x_i)_{1\leq i\leq p}$, $\sum_{i=1}^{p} x_i = k$ et $\sum_{i=1}^{p} x_i = k'$ avec $k \neq k'$), on peut alors écrire :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Card}(\mathscr{A}_n) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Card}(A_k)$ soit, d'après la question précédente :

$= \sum_{k=0}^{n} C_{k+p-1}^{p-1}$ et donc, grâce à la formule d'itération de Pascal (cf. exercice **12.3**) :

$= C_{n+p}^{p}$.

On peut désormais conclure :

$$\boxed{\text{Il existe } C_{n+p}^{p} \text{ p-listes } (x_i)_{1\le i\le p} \text{ d'entiers naturels tels que } \sum_{i=1}^{p} x_i \le n}$$

NB : On vient ainsi de démontrer que $\sum_{k=0}^{n} \Gamma_p^k = C_{n+p}^{p} = \Gamma_{p+1}^{n}$.

Eléments ordonnés ou non ordonnés, distincts ou non distincts

Combien existe-t-il de façons de choisir p éléments parmi n ?

1. Les éléments doivent être **ordonnés et distincts** (tirage sans remise) : A_n^p,
2. Les éléments doivent être **non ordonnés et distincts** (tirage sans remise) : C_n^p,
3. Les éléments doivent être **ordonnés et non forcément distincts** (tirage avec remise) : n^p,
4. Les éléments doivent être **non ordonnés et non forcément distincts** (tirage avec remise) : Γ_n^p.

S❶ E❷

● 17. Nombre de permutations de ⟦1, n⟧ laissant k point(s) fixe(s)

Pour tout entier naturel n non nul et pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n, on désigne par $N_{n,k}$ le nombre de permutations de ⟦1, n⟧ laissant k point(s) fixe(s).

1) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; n! = \sum_{k=0}^{n} N_{n,k}.$$

Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in [0, n]$, $N_{n,k}$ en fonction de $N_{n-k,0}$. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; n! = \sum_{k=0}^{n} C_n^k N_{k,0}.$$

2) Montrer enfin, à l'aide de la formule d'inversion de Pascal (cf. exercice **0.4**) que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [0, n], \; N_{n,k} = \frac{n!}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

1) ▪ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons S_n l'ensemble des permutations de ⟦1, n⟧ et pour tout $k \in [0, n]$, $S_{n,k}$ l'ensemble des permutations de ⟦1, n⟧ laissant k point(s) fixe(s). On a clairement : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \bigcup_{k=0}^{n} S_{n,k}$.

L'union étant disjointe (une permutation ne peut avoir à la fois k et k' points fixes avec $k \neq k'$), on peut alors écrire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Card}(S_n) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Card}(S_{n,k})$ ①.

Or, d'après le cours, on sait que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Card}(S_n) = n!$. De plus, d'après la définition des $(S_{n,k})_{n\in\mathbb{N}^*, 0\le k\le n}$, on peut écrire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in [0, n]$, $\mathrm{Card}(S_{n,k}) = N_{n,k}$. D'après la relation ①, on peut alors conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \; n! = \sum_{k=0}^{n} N_{n,k}} \quad ②$$

▪ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in [0, n]$, pour déterminer une permutation de ⟦1, n⟧ laissant k point(s) fixe(s), il faut et il suffit de :

– choisir les k point(s) fixe(s) de $[\![1, n]\!]$ (C_n^k possibilités), et :

– effectuer une permutation sans point fixe des n - k point(s) restant(s) ($N_{n-k,0}$ possibilités en posant par convention $N_{0,0} = 1$).

On en déduit alors :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![0, n]\!], N_{n,k} = C_n^k N_{n-k,0}}$$

■ Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![0, n]\!], C_n^k = C_n^{n-k}$, la relation précédente s'écrit également :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![0, n]\!], N_{n,k} = C_n^{n-k} N_{n-k,0}$ soit, par substitution dans la relation ② :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, n! = \sum_{k=0}^{n} C_n^{n-k} N_{n-k,0}$ et donc, en effectuant le changement de variable $k' = n - k$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, n! = \sum_{k=0}^{n} C_n^k N_{k,0}}$$

2) Comme par convention $N_{0,0} = 1$ (cf. question précédente), la relation précédente est également vérifiée pour n = 0 et on peut alors écrire : $\forall n \in \mathbb{N}, n! = \sum_{k=0}^{n} C_n^k N_{k,0}$.

A l'aide de la formule d'inversion de Pascal, on en déduit alors :

$\forall n \in \mathbb{N}, N_{n,0} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} C_n^i \, i!$ soit, en écrivant cette relation en n - k ($k \in [\![0, n]\!]$) :

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![0, n]\!], N_{n-k,0} = \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^{n-k-i} C_{n-k}^i \, i!$

Or, on a vu à la question précédente que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![0, n]\!], N_{n,k} = C_n^k N_{n-k,0}$. On en déduit alors :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![0, n]\!], N_{n,k} = C_n^k \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^{n-k-i} C_{n-k}^i \, i!$ i.e. :

$= \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^{n-k-i} i! \dfrac{(n-k)!}{(n-k-i)!\,i!}$ soit encore, après simplifications :

$= \dfrac{n!}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \dfrac{(-1)^{n-k-i}}{(n-k-i)!}$ et donc, en effectuant le changement de variable $i' = n - k - i$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![0, n]\!], N_{n,k} = \frac{n!}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}}$$

☞ Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments laissant k point(s) fixe(s) est : $N_{n,k} = \frac{n!}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}$.
Le nombre de dérangements (permutations ne laissant aucun point fixe) d'un ensemble à n éléments est donc : $N_{n,0} = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$ (démonstration à savoir reproduire).

S❶ E❷

● 18. Nombre de surjections

Pour tous entiers naturels non nuls n et p, on désigne par $S_{p,n}$ le nombre de surjections d'un ensemble E_p à p éléments vers un ensemble F_n à n éléments, c'est-à-dire le nombre d'applications f de E_p vers F_n telles que tout élément de F_n admette au moins un antécédent par f dans E_p.

1) **a)** Déterminer la valeur de $S_{p,n}$ lorsque p < n.

b) Montrer que :

$$\forall (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2, n^p = \sum_{k=1}^{n} C_n^k S_{p,k}.$$

2) En déduire, à l'aide de la formule d'inversion de Pascal (cf. exercice **0.4**), que :

$$\forall (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ S_{p,n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k k^p.$$

1) a) Soient n et p deux entiers naturels non nuls, E_p un ensemble à p éléments, F_n un ensemble à n éléments et f une application de E_p vers F_n. Pour que f soit une surjection de E_p vers F_n, il faut et il suffit que tout élément de F_n ait au moins un antécédent par f dans E_p, et donc, f étant une application (tout élément de E_p a donc exactement une image par f dans F_n), pour que f soit une surjection de E_p vers F_n, il faut que $\mathrm{Card}(E_p) \geq \mathrm{Card}(F_n)$.

Or, lorsque $p < n$, on a : $\mathrm{Card}(E_p) < \mathrm{Card}(F_n)$. Lorsque $p < n$, il n'existe donc pas d'application surjective de E_p vers F_n, d'où la conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tous entiers naturels non nuls n et p, lorsque } p < n, \text{ on a : } S_{p,n} = 0}$$

b) Soient n et p deux entiers naturels non nuls, E_p un ensemble à p éléments et F_n un ensemble à n éléments. Soient alors A l'ensemble des applications de E_p vers F_n et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, A_k l'ensemble des applications de E_p vers F_n telles que $\mathrm{Card}\big(f(E_p)\big) = k$. On a alors clairement : $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$.

L'union étant disjointe (on ne peut avoir à la fois $\mathrm{Card}\big(f(E_p)\big) = k$ et $\mathrm{Card}\big(f(E_p)\big) = k'$ avec $k \neq k'$), on peut alors écrire : $\mathrm{Card}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Card}(A_k)$ ①.

Or, d'après la définition de A, on a clairement : $\mathrm{Card}(A) = n^p$. De plus, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, pour déterminer une application f de A_k, c'est-à-dire une application f de E_p vers F_n telle que $\mathrm{Card}\big(f(E_p)\big) = k$, il faut et il suffit de :

– choisir les k éléments de F_n ayant un antécédent dans E_p par f, c'est-à-dire les k éléments de $f(E_p)$ parmi les n éléments de F_n (C_n^k possibilités), et :

– établir une surjection de E_p (ensemble à p éléments) vers $f(E_p)$ (ensemble à k éléments), tout élément de $f(E_p)$ ayant, par définition, au moins un antécédent dans E_p ($S_{p,k}$ possibilités), d'où :

$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{Card}(A_k) = C_n^k S_{p,k}$.

D'après la relation ①, on peut alors conclure :

$$\boxed{\forall (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ n^p = \sum_{k=1}^{n} C_n^k S_{p,k}}$$

2) Comme pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il n'existe aucune application et donc aucune surjection d'un ensemble à p éléments vers l'ensemble vide, on peut écrire : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ S_{p,0} = 0$, et donc, d'après la question précédente : $\forall (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ n^p = \sum_{k=0}^{n} C_n^k S_{p,k}$. Cette relation étant également vérifiée pour $n = 0$, on peut alors écrire :

$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ n^p = \sum_{k=0}^{n} C_n^k S_{p,k}$.

La formule d'inversion de Pascal nous permet alors d'écrire : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ S_{p,n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k k^p$. Le terme en $k = 0$ étant nul, on peut alors conclure :

$$\boxed{\forall (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ S_{p,n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k k^p}$$

☞ Se souvenir que le nombre de surjections d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments est : $S_{p,n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k k^p$ (démonstration à savoir reproduire).

■ On peut maintenant écrire :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} p_n = 1}$$

■ Ce résultat était prévisible car si l'on obtient une infinité de fois 'face' (sans jamais avoir obtenu 'pile'), il est quasi-certain que l'on ait pris la pièce truquée.

☞ Même s'il faut toujours se méfier de son intuition en probabilités, il est souvent bon de s'interroger sur le caractère vraisemblable des résultats obtenus afin de s'assurer que l'on n'a pas commis d'erreur flagrante.

☞ On appelle événement "quasi-certain", tout événement de probabilité 1 (par exemple "obtenir au moins une fois 'face' dans une suite infinie de lancers avec une pièce équilibrée") et événement "quasi-impossible", tout événement de probabilité 0 (par exemple "n'obtenir que des 'piles' dans une suite infinie de lancers avec une pièce équilibrée").

SO EO

■ 2. Tirages dans des urnes

Soit une urne U_0 contenant un jeton numéroté 1, deux jetons numérotés 2 et trois jetons numérotés 3. On tire un jeton au hasard dans U_0. Pour tout $i \in [1, 3]$, si le numéro du jeton tiré est i, on effectue un premier tirage également au hasard dans l'urne U_i où :

– U_1 contient 1 boule rouge, 5 boules vertes et 2 boules bleues,
– U_2 contient 2 boule rouges, 1 boules verte et 5 boules bleues,
– U_3 contient 3 boule rouges, 3 boules vertes et 2 boules bleues.

1) Déterminer la probabilité d'obtenir une boule rouge, une boule verte, une boule bleue.

2) On suppose désormais que l'on a obtenu une boule bleue au premier tirage. Déterminer la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_1, de l'urne U_2, de l'urne U_3.

3) a) On remet la première boule tirée dans l'urne et on effectue alors un deuxième tirage dans la même urne. On obtient à nouveau une boule bleue. Déterminer la probabilité que l'on ait choisi l'urne U_1, l'urne U_2, l'urne U_3.

b) On considère maintenant que l'on ne remet pas la première boule tirée dans l'urne mais que l'on effectue toujours le deuxième tirage dans la même urne. On obtient à nouveau une boule bleue. Déterminer la probabilité que l'on ait choisi l'urne U_1, l'urne U_2, l'urne U_3.

Notons, pour tout $i \in [1, 3]$, U_i l'événement : "tirer un jeton numéroté i dans l'urne U_0" (lorsque l'événement U_i est réalisé, le premier tirage est alors effectué dans l'urne U_i), R, V et B les événements : "tirer une boule rouge au premier tirage", "tirer une boule verte au premier tirage" et "tirer une boule bleue au premier tirage".

Les tirages des différents jetons étant tous équiprobables (car effectués au hasard), d'après les données fournies par l'énoncé, on peut écrire : $p(U_1) = \frac{1}{6}$, $p(U_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $p(U_3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

1) (U_1, U_2, U_3) formant un système complet d'événements, la formule des probabilités totales nous permet d'écrire :

– $p(R) = p(R/_{U_1})\,p(U_1) + p(R/_{U_2})\,p(U_2) + p(R/_{U_3})\,p(U_3)$ soit, les tirages des différentes boules de chaque urne étant tous équiprobables, d'après les données fournies par l'énoncé :

$= \frac{1}{8} \times \frac{1}{6} + \frac{2}{8} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{2}$ et donc :

$= \frac{7}{24}$,

$- p(V) = p\left(V/_{U_1}\right)p(U_1) + p\left(V/_{U_2}\right)p(U_2) + p\left(V/_{U_3}\right)p(U_3)$ soit, les tirages des différentes boules de chaque urne étant tous équiprobables, d'après les données fournies par l'énoncé :

$= \frac{5}{8} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{2}$ et donc :

$= \frac{1}{3}$.

(R, V, B) formant un système complet d'événements, on peut alors écrire : $p(R) + p(V) + p(B) = 1$, soit : $p(B) = 1 - p(R) - p(V) = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$, d'où la conclusion :

$$\boxed{P(R) = \frac{7}{24},\ p(V) = \frac{1}{3} \text{ et } p(B) = \frac{3}{8}}$$

☞ Se souvenir que si la famille d'événements $(A_i)_{i\in I}$ forme un système complet d'événements, alors : $\sum_{i\in I} p(A_i) = 1$ (cela peut parfois éviter de longs calculs inutiles comme ici).

2) (U_1, U_2, U_3) formant un système complet d'événements, comme $p(B) \neq 0$, la formule de Bayes nous permet d'écrire :

$- p\left(U_1/_B\right) = \frac{p(U_1 \cap B)}{p(B)}$ soit :

$= \frac{p\left(B/_{U_1}\right)p(U_1)}{p(B)}$ soit encore, les tirages des différentes boules de chaque urne étant tous équiprobables, d'après les données fournies par l'énoncé et la valeur de p(B) calculée précédemment :

$= \frac{\frac{2}{8} \times \frac{1}{6}}{\frac{3}{8}}$ i.e. :

$= \frac{1}{9}$,

$- p\left(U_2/_B\right) = \frac{p(U_2 \cap B)}{p(B)}$ soit :

$= \frac{p\left(B/_{U_2}\right)p(U_2)}{p(B)}$ soit encore :

$= \frac{\frac{5}{8} \times \frac{1}{3}}{\frac{3}{8}}$ i.e. :

$= \frac{5}{9}$.

(U_1, U_2, U_3) formant un système complet d'événements, on a également : $p\left(U_3/_B\right) = 1 - p\left(U_1/_B\right) - p\left(U_2/_B\right)$, et donc : $p\left(U_3/_B\right) = \frac{1}{3}$, d'où la conclusion :

$$\boxed{p\left(U_1/_B\right) = \frac{1}{9},\ p\left(U_2/_B\right) = \frac{5}{9} \text{ et } p\left(U_3/_B\right) = \frac{1}{3}}$$

☞ Noter que si $(A_i)_{i\in I}$ forme un système complet d'événements et si $p(A) \neq 0$, alors : $\sum_{i\in I} p\left(A_i/_A\right) = 1$.

3) Notons BB l'événement : "on obtient une boule bleue à chacun des deux premiers tirages". (U_1, U_2, U_3) formant un système complet d'événements, la formule des probabilité totales nous permet alors d'écrire :

$p(BB) = p\left(BB/_{U_1}\right)p(U_1) + p\left(BB/_{U_2}\right)p(U_2) + p\left(BB/_{U_3}\right)p(U_3)$ ①.

$- \, p\left({}^{U_2}/_{BB}\right) = \dfrac{p(U_2 \cap BB)}{p(BB)}$ soit :

$= \dfrac{p\left({}^{BB}/_{U_2}\right)p(U_2)}{p(BB)}$ soit encore :

$= \dfrac{\frac{5}{14} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{7}}$ i.e. :

$= \dfrac{5}{6}.$

(U_1, U_2, U_3) formant un système complet d'événements, on a également :

$p\left({}^{U_3}/_{BB}\right) = 1 - p\left({}^{U_1}/_{BB}\right) - p\left({}^{U_2}/_{BB}\right) = \dfrac{3}{24} = \dfrac{1}{8}$, d'où la conclusion :

$$\boxed{p\left({}^{U_1}/_{BB}\right) = \frac{1}{24},\ p\left({}^{U_2}/_{BB}\right) = \frac{5}{6} \text{ et } p\left({}^{U_3}/_{BB}\right) = \frac{1}{8}}$$

☞ **Tirages avec ou sans remise.** Soit une urne contenant initialement N boules (dont b blanches) dans laquelle on effectue n tirages au hasard. On pose, pour tout $k \in [1, n]$, B_k l'événement : "tirer une boule blanche au $k^{ème}$ tirage" :

– si les tirages s'effectuent avec remise, ils sont indépendants et la probabilité de tirer une boule blanche à chacun des n premiers tirages est : $p\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) = \prod_{k=1}^{n} p(B_k) = \left(\frac{b}{N}\right)^n$.

– si les tirages s'effectuent sans remise, à l'aide de la formule des probabilités composées, on peut écrire (pour $n \geq 2$) que : $p\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) = p(B_1) \prod_{k=2}^{n} p\left({}^{B_k}/_{\bigcap_{i=1}^{k-1} B_i}\right) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{b-k}{N-k} = \frac{b!}{(b-n)!} \frac{(N-n)!}{N!} = \frac{C_b^n}{C_N^n}$.

SO EO

■ 3. Tirages successifs dans des urnes à contenus évolutifs

Soient a et b deux entiers naturels non nuls et n un entier supérieur ou égal à 2.

1) On effectue dans une urne contenant initialement b boules blanches et b boules noires une suite de tirages de la façon suivante : si tous les tirages précédents ont donné une boule blanche (cette condition n'étant bien sûr pas à prendre en compte au premier tirage), on procède au tirage suivant.

Si la boule obtenue est noire, ce tirage est le tirage final. Si la boule obtenue est blanche, elle est replacée dans l'urne avec, en plus, a autres boules blanches (et l'urne est alors prête pour le tirage suivant).

Déterminer la probabilité de ne tirer que des boules blanches au cours des n premiers tirages.

2) On dispose maintenant d'une urne contenant initialement a boules blanches et b boules noires. On procède à une suite de n tirages de la façon suivante : si l'on obtient une boule blanche à un tirage donné, on la retire de l'urne ; en revanche, si l'on obtient une boule noire, celle-ci est alors remplacée dans l'urne par une boule blanche.

Déterminer la probabilité de ne tirer que des boules blanches (resp. que des boules noires) au cours des n tirages.

1) Notons, pour tout $k \in [1, n]$, B_k l'événement : "tirer une boule blanche au $k^{ème}$ tirage". D'après la formule des probabilités composées, on peut écrire :

$$p\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) = p(B_1) \prod_{k=2}^{n} p\left({}^{B_k}/_{\bigcap_{i=1}^{k-1} B_i}\right).$$

Hidden page

SO EO

4. Quelques processus stochastiques très classiques

Soient n et N deux entiers naturels non nuls. Une urne contient N boules dont une proportion p ($p \in [0, 1]$) de blanches. On effectue n tirages au hasard dans l'urne.

1) Les tirages s'effectuent avec remise.

a) Pour tout $k \in [1, n]$, déterminer la probabilité de tirer la première boule blanche au $k^{ème}$ tirage.

b) Pour tout $k \in [0, n]$, déterminer la probabilité de tirer k boules blanches au cours des n tirages.

2) Dans cette question, les tirages s'effectuent sans remise et on suppose que $n < N$. Pour tout $k \in [0, n]$, déterminer la probabilité de tirer k boules blanches au cours des n tirages (on suppose que le nombre de boules blanches contenues initialement dans l'urne est supérieur ou égal à k et que le nombre de boules noires contenues initialement dans l'urne est supérieur ou égal à $n - k$).

1) a) Pour tout $k \in [1, n]$, pour tirer la première boule blanche au $k^{ème}$ tirage, il faut et il suffit de ne pas tirer de boule blanche au cours des $k - 1$ premiers tirages, puis de tirer une boule blanche au $k^{ème}$ tirage.

Or, les tirages s'effectuant au hasard et avec remise, ceux-ci sont indépendants. La probabilité de ne pas tirer de boule blanche à un tirage donné étant $1 - p$, pour tout $k \in [1, n]$, la probabilité de ne pas tirer de boule blanche au cours des $k - 1$ premiers tirages est $(1 - p)^{k-1}$. Pour tout $k \in [1, n]$, la probabilité de tirer une boule blanche au $k^{ème}$ tirage étant p, on en déduit alors, les tirages étant indépendants :

Pour tout $k \in [1, n]$, la probabilité de tirer la première boule blanche au $k^{ème}$ tirage est $(1 - p)^{k-1}p$

b) Pour tout $k \in [0, n]$, pour tirer k boules blanches au cours des n tirages, il faut et il suffit de :
- déterminer les k tirages où l'on obtient les boules blanches (C_n^k possibilités),
- tirer des boules blanches à ces tirages (événement de probabilité p^k, les tirages s'effectuant sans remise et étant donc indépendants), et :
- tirer des boules noires aux $n - k$ autres tirages (événement de probabilité $(1 - p)^{n-k}$ pour les mêmes raisons).

On en déduit alors :

Pour tout $k \in [0, n]$, la probabilité de tirer k boules blanches au cours des n tirages est $C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$

2) L'ordre dans lequel les boules sont tirées n'influant pas sur le nombre de boules blanches obtenues à l'issue des n tirages, considérons que les n boules sont tirées simultanément. Il y a alors C_N^n tirages possibles de n boules au hasard parmi N (autant que de parties à n éléments d'un ensemble à N éléments).

☞ Noter que lorsque l'on effectue une suite de tirages avec remise, si l'ordre dans lequel les boules sont tirées n'influe pas sur le résultat final, on peut considérer que les tirages sont effectués simultanément, ce qui simplifie nettement les raisonnements et les calculs.

De plus, la proportion de boules blanches étant p, le nombre de boules blanches contenu initialement dans l'urne est Np et le nombre de boules noires est $N(1 - p)$. Or, pour tout $k \in [0, n]$, pour effectuer un tirage de n boules de l'urne composé de k boules blanches et de $n - k$ boules noires (l'ordre dans lequel les boules sont tirées n'étant pas pris en compte), il faut et il suffit de :
- choisir les k boules blanches (C_{Np}^k possibilités), et :
- choisir les $n - k$ boules noires ($C_{N(1-p)}^{n-k}$ possibilités).

On en déduit alors que pour tout $k \in [0, n]$, il y a $C_{Np}^k C_{N(1-p)}^{n-k}$ tirages sans remise de n boules de l'urne contenant exactement k boules blanches, soit $C_{Np}^k C_{N(1-p)}^{n-k}$ cas favorables à l'événement "tirer k boules blanches au cours des n tirages". Les C_N^n tirages possibles de n boules de l'urne étant tous équiprobables (les tirages s'effectuant au hasard), on peut alors conclure :

Pour tout $k \in [0, n]$, la probabilité de tirer k boules blanches au cours des n tirages est $\dfrac{C_{Np}^k C_{N(1-p)}^{n-k}}{C_N^n}$

On en déduit alors : $\dfrac{p(\overline{E_1}\cap\overline{E_2}\cap\overline{E_3}\cap\overline{E_4}\cap\overline{E_5}\cap E_6)}{p(\overline{E_1}\cap\overline{E_2}\cap\overline{E_3}\cap\overline{E_4}\cap\overline{E_5})} = \dfrac{p(E_6)}{p(\overline{I}\cup E_6)}$. Or, d'après les donnés de l'énoncé, on peut écrire : $p(I) = p(\overline{I}) = \frac{1}{2}$ et $\forall i \in [1, 6]$, $p(E_i/I) = \frac{1}{6}$. De plus, comme $\forall i \in [1, 6]$, $E_i \subset I$, on a également :

$\forall i \in [1, 6]$, $p(E_i) = p(E_i \cap I)$ soit, d'après la définition d'une probabilité conditionnelle :

$= p(E_i/I)\,p(I)$ et donc, d'après ce qui précède :

$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{2}$ i.e. :

$= \frac{1}{12}$.

On peut maintenant écrire :

$p\left(E_6/\overline{E_1}\cap\overline{E_2}\cap\overline{E_3}\cap\overline{E_4}\cap\overline{E_5}\right) = \dfrac{p(E_6)}{p(\overline{I}\cup E_6)}$ soit, les événements $\overline{I}$ et E_6 étant incompatibles (le parapluie ne peut être à la fois à l'extérieur de l'immeuble et au sixième étage)

$= \dfrac{p(E_6)}{p(\overline{I}) + p(E_6)}$ soit encore, les valeurs de $p(E_6)$ et de $p(\overline{I})$ étant connues :

$= \dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{12}}$ et donc :

$$\boxed{p\left(E_6/\overline{E_1}\cap\overline{E_2}\cap\overline{E_3}\cap\overline{E_4}\cap\overline{E_5}\right) = \frac{1}{7}}$$

☞ Se souvenir que si $A \subset B$, alors : $p(A \cap B) = p(A)$ et $p(A \cup B) = p(B)$.

SO EO

7. La ronde

Soit n un entier naturel non nul. n garçons et n filles forment une ronde. Déterminer la probabilité pour qu'il y ait une alternance parfaite entre garçons et filles.

Soit A_n l'événement : "effectuer une alternance parfaite entre garçons et filles dans une ronde comprenant n garçons et n filles". Une ronde étant une succession circulaire d'enfants, elle n'a ni début ni fin. Pour les besoins du raisonnement, considérons alors le plus jeune des garçons et supposons que la ronde "commence" par lui (il est ainsi le premier élément de la 2n-liste des enfants de la ronde).

Pour former la ronde, il faut et il suffit alors de :
– placer les $2n - 1$ autres enfants ($(2n - 1)!$ possibilités, les enfants étant discernables), puis :
– boucler la ronde (1 possibilité).

Il y a donc $(2n - 1)!$ cas possibles pour former une ronde avec les 2n enfants.

De plus, pour qu'il y ait une alternance parfaite entre garçons et filles, il faut et il suffit (avant de boucler la ronde) de :
– placer les $n - 1$ autres garçons aux $n - 1$ places de rangs impairs restantes : 3, 5, 7, ..., $2n - 1$ ($(n - 1)!$ possibilités), et :
– placer les n filles aux n places de rangs pairs : 2, 4, 6, ..., 2n ($n!$ possibilités).

Il y a donc $n!\,(n - 1)!$ possibilités, c'est-à-dire $n!\,(n - 1)!$ cas favorables à la formation d'une ronde où se réalise une alternance parfaite entre garçons et filles.

Toutes les rondes possibles étant équiprobables, on peut désormais conclure :

$$\boxed{p(A_n) = \frac{n!\,(n-1)!}{(2n-1)!}}$$

☞ L'utilisation des séries est très courante en probabilités. Lorsque $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ où l'union est disjointe, on peut écrire : $p(A) = \sum_{i\in\mathbb{N}} p(A_i)$. Pour déterminer $p(A)$, il suffit alors de calculer la somme de la série de terme général $p(A_i)$ (cette série converge nécessairement puisque A est un événement dont la probabilité est égale précisément à la somme de la série).

SO EO

9. Un concours

> A un concours d'une grande Ecole, on sait qu'un tiers des candidats vient d'une classe préparatoire privée. A l'issue de ce concours, on constate que le quart des étudiants ayant intégré l'Ecole vient du privé. De plus, on sait qu'un étudiant sur dix du public a intégré l'Ecole.
>
> Quelle est la probabilité d'intégrer cette Ecole lorsque l'on est issu d'une classe préparatoire privée ?

Notons P l'événement : "venir d'une classe préparatoire privée" et I l'événement : "intégrer l'Ecole". D'après l'énoncé, on sait que : $p(P) = \frac{1}{3}$, $p\left(^P/_I\right) = \frac{1}{4}$ et $p\left(^I/_{\overline{P}}\right) = \frac{1}{10}$.

Comme $p(P) \neq 0$, la formule de Bayes nous permet d'écrire :

$$p\left(^I/_P\right) = \frac{p(I \cap P)}{p(P)} \qquad \text{soit :}$$

$$= \frac{p\left(^P/_I\right) p(I)}{p(P)} \qquad \text{d'où :}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} p(I)}{\frac{1}{3}} \qquad \text{et donc :}$$

$$= \frac{3}{4} p(I).$$

Or, $(P, \overline{P})$ formant un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$p(I) = p\left(^I/_{\overline{P}}\right) p(\overline{P}) + p\left(^I/_P\right) p(P) \qquad \text{soit :}$$

$$= \frac{1}{10} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} p\left(^I/_P\right).$$

On en déduit alors, à l'aide de la relation précédente :

$$p\left(^I/_P\right) = \frac{3}{4}\left[\frac{2}{30} + \frac{1}{3} p\left(^I/_P\right)\right] \qquad \text{soit :}$$

$$= \frac{1}{20} + \frac{1}{4} p\left(^I/_P\right) \qquad \text{d'où :}$$

$$\frac{3}{4} p\left(^I/_P\right) = \frac{1}{20} \qquad \text{et donc :}$$

$$p\left(^I/_P\right) = \frac{1}{15} \qquad \text{d'où la conclusion :}$$

$$\boxed{\text{La probabilité d'intégrer cette Ecole lorsque l'on est issu d'une classe préparatoire privée est } \frac{1}{15}}$$

Pour chaque dé, l'obtention des six faces étant équiprobable et les différents lancers d'un même dé étant indépendants, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité de ne pas amener d'as avec un dé donné au cours des n lancers est $\left(\frac{5}{6}\right)^n$. On en déduit alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité d'amener au moins un as avec un dé donné au cours des n premiers lancers, c'est-à-dire la probabilité pour un dé donné d'amener un as en au plus n lancers est : $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

Les lancers des p dés étant indépendants, on en déduit alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité d'amener un as avec chaque dé en au plus n lancers est : $p(A_n) = \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right]^p$, d'où la conclusion :

> Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité que le nombre de séries de lancers nécessaires à l'obtention de tous les as soit inférieur ou égal à n est : $\left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right]^p$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons maintenant B_n l'événement : "le nombre de séries de lancers nécessaires à l'obtention de tous les as est égal à n" . On a clairement : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si le nombre de séries de lancers nécessaires à l'obtention de tous les as est inférieur ou égal à n - 1, il est inférieur ou égal à n. On en déduit alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A_{n-1} \subset A_n$, et donc :
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p(B_n) = p(A_n) - p(A_{n-1})$ ①.

☞ Noter que lorsque l'on connaît la probabilité pour qu'un événement arrive en au plus n essais, il y a deux façons d'exprimer qu'il arrive en exactement n essais :
- écrire qu'il arrive en "au plus n essais" mais pas en "au plus n - 1 essais" ($B_n = A_n \setminus A_{n-1}$), et on a alors, si $A_{n-1} \subset A_n$: $p(B_n) = p(A_n) - p(A_{n-1})$.
- écrire qu'il arrive en "au plus n essais" et qu'il n'arrive pas en "au plus n - 1 essais" ($B_n = A_n \cap \overline{A_{n-1}}$).

De plus, on a vu à la question précédente que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p(A_n) = \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right]^p$. Comme l'événement "le nombre de séries de lancers nécessaires à l'obtention de tous les as est inférieur ou égal à 0" est impossible, on a en outre : $p(A_0) = 0 = \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^0\right]^p$, et donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $p(A_n) = \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right]^p$.

On en déduit alors, d'après la relation ① : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p(B_n) = \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right]^p - \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right]^p$, d'où la conclusion :

> Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité que l'on obtienne tous les as en exactement n séries de lancers est : $\left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right]^p - \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right]^p$.

SO EO

● 12. Les filles de M. Durand

> M. Durand apprend à MM. Dupont et Dupond qu'il vit seul avec ses deux enfants.
>
> **1)** M. Dupont se rend chez M. Durand alors que ce dernier est absent. Une fille lui ouvre la porte. Quelle est la probabilité, pour M. Dupont, que M. Durand ait deux filles ?
>
> **2)** M. Dupond apprend quant à lui que M. Durand a au moins une fille. Quelle est la probabilité, pour M. Dupond, que M. Durand ait deux filles ?

Notons FF l'événement : "M. Durand a deux filles", F l'événement : "M. Durand a au moins une fille" et V l'événement : "une fille ouvre la porte" (V comme "vlan").

$$p\left({}^{B_{N,n+1}}/_{B_{N,n}}\right) = \frac{p(B_{N,n+1})}{p(B_{N,n})} = \frac{\frac{1}{N+1}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{n+1}}{\frac{1}{N+1}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{n}}$$

soit, d'après les résultats de la question précédente :

et donc :

$$\boxed{p\left({}^{B_{N,n+1}}/_{B_{N,n}}\right) = \frac{\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{n+1}}{\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{n}}}$$

■ D'après la question précédente, on peut écrire : $\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N+1}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{n} = \frac{1}{n+1}$. On en déduit que l'on a également : $\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N+1}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{n+1} = \frac{1}{n+2}$.

D'après l'expression précédente de $p\left({}^{B_{N,n+1}}/_{B_{N,n}}\right)$, on peut désormais conclure :

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} p\left({}^{B_{N,n+1}}/_{B_{N,n}}\right) = \frac{n+1}{n+2}}$$

SO EO

★ 14. Les danseurs de Chicago : le problème des coïncidences

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Sur une piste de danse, n couples (n hommes et n femmes) sont formés puis séparés à l'issue d'une première danse. On reconstitue à nouveau n couples, au hasard, pour une seconde danse.

1) Quelle est la probabilité que tous les couples reconstitués correspondent aux couples initiaux ?

2) Quelle est la probabilité qu'aucun des couples reconstitués ne corresponde à un des couples initiaux ?

3) (SO EO) Plus généralement, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, déterminer la probabilité qu'exactement k couples reconstitués correspondent à des couples initiaux.

Notons, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, A_k l'événement : "l'homme n°k retrouve sa partenaire".

1) L'événement "Tous les couples reconstitués correspondent aux couples initiaux" est réalisé si et seulement si tous les hommes retrouvent leur partenaire, c'est-à-dire si et seulement si l'événement $\left[\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right]$ est réalisé.

Or, les couples étant reconstitués au hasard pour la seconde danse, les différentes formations possibles des couples pour cette seconde danse sont toutes équiprobables. De plus, il y a n! façons de reconstituer les n couples (en effet, si chaque homme est titulaire d'un numéro, il y a n! façons de distribuer n numéros aux n femmes, donc n! façons de former les n couples) – soit n! cas possibles – et une seule façon de reformer tous les couples initiaux – soit 1 cas favorable à l'événement $\left[\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right]$. On en déduit alors : $p\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \frac{1}{n!}$, d'où la conclusion :

$$\boxed{\text{La probabilité que tous les couples reconstitués correspondent aux couples initiaux est } \frac{1}{n!}}$$

2) L'événement "Aucun des couples reconstitués ne correspond à un des couples initiaux" est réalisé si et seulement si aucun homme ne retrouve sa partenaire, c'est-à-dire si et seulement si l'événement $\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k} = \left[\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k}\right]$ est réalisé.

Or, on a vu au **2** que la probabilité qu'aucun des n couples initiaux ne soit reconstitué est $\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$. On déduit alors, pour tout $k \in [1, n-1]$, sachant que les couples initiaux numérotés de 1 à k se sont reformés, que la probabilité qu'aucun des n - k couples numérotés de k + 1 à n ne soit reconstitué (tout se passe alors comme si l'on considérait la piste de danse réduite aux n - k couples numérotés de k + 1 à n) vaut $\sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}$ (on a substitué n - k à n dans la probabilité précédente), et donc que : $\forall k \in [1, n-1]$, $p\left(\bigcap_{i=k+1}^{n} \overline{A_i} / \bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}$.

De plus, on a vu au **2** que : $\forall k \in [1, n-1]$, $\forall (i_j)_{1 \le j \le k} \in [1, n]^k$, $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$, $p\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \frac{(n-k)!}{n!}$. On en déduit alors : $\forall k \in [1, n-1]$, $p\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) = \frac{(n-k)!}{n!}$, et donc, à l'aide des résultats précédents :

$$\forall k \in [1, n-1],\ p_k = C_n^k \frac{(n-k)!}{n!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} \quad \text{soit :}$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

On en déduit alors que pour tout $k \in [1, n-1]$, la probabilité qu'exactement k couple(s) reconstitué(s) correspondent à des couples initiaux est $\frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}$. Les cas k = 0 (cf. **2**) et k = n (cf. **1**) rejoignant le cas général, on peut désormais conclure :

> Pour tout $k \in [0, n]$, la probabilité qu'exactement k couples reconstitués correspondent à des couples initiaux est $\frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}$.

NB : Pour résoudre cette question, on aurait également pu remarquer que pour tout $k \in [0, n]$, le nombre de façons de reconstituer exactement k des couples initiaux est égal au nombre d'applications f de l'ensemble des hommes sur l'ensemble des femmes admettant k "coïncidences", c'est-à-dire au nombre d'applications g de l'ensemble [1, n] sur lui-même (pour tout $k \in [1, n]$, g(k) est le numéro de la femme effectuant la seconde danse avec l'homme n°k) laissant k points fixes.

Or, on a vu à l'exercice **12.17** que pour tout $k \in [0, n]$, le nombre d'applications d'un ensemble à n éléments sur lui-même laissant k points fixes est $\frac{n!}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}$.

Comme il y a n! façons équiprobables de reformer les couples, i.e. n! cas possibles, on en déduit à nouveau que pour tout $k \in [0, n]$, la probabilité qu'exactement k des couples reconstitués correspondent à des couples initiaux est $\frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}$.

☞ Soient $E = \{x_i, i \in [1, n]\}$ et $F = \{y_i, i \in [1, n]\}$ deux ensembles à n éléments. Lorsque l'on effectue des croisements entre les éléments de E et les éléments de F (on établit ainsi une bijection f de E vers F), s'il y a équiprobabilité entre les différentes combinaisons de croisements, pour tout $k \in [0, n]$, la probabilité qu'il y ait exactement k "coïncidences" (le nombre de coïncidences est le nombre d'éléments x_i ($i \in [1, n]$) de E tels que $f(x_i) = y_i$) est : $\frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}$.

SO E❷

★ 15. Les allumettes de Banach

Soit n un entier naturel non nul. Banach, fumeur invétéré (quoique distrait), a dans chacune de ses deux poches n allumettes. A chaque fois qu'il désire fumer, il prend une allumette dans une poche choisie au hasard. Il s'arrête de fumer lorsque, essayant de retirer la $(n+1)^{ème}$ allumette d'une de ses deux poches, il se rend compte que celle-ci est vide.

Pour tout $k \in [0, n]$, déterminer la probabilité qu'il lui reste k allumettes lorsqu'il s'arrête de fumer.

Pour tout $k \in [0, n]$, pour que Banach s'arrête de fumer alors qu'il lui reste k allumettes, il faut et il suffit qu'il tire $n - k$ fois dans une poche et $n + 1$ fois (dont la dernière) dans l'autre. Pour tout $k \in [0, n]$, pour déterminer le nombre de tirages favorables à l'événement "Banach s'arrête de fumer alors qu'il lui reste k allumettes", il faut et il suffit de :

– choisir la poche qui va être vidée, c'est-à-dire dans laquelle Banach va essayer de retirer une hypothétique $(n+1)^{ème}$ allumette (2 possibilités),
– choisir les n tirages (parmi les $2n - k$ premiers) où Banach va tirer une allumette dans cette poche (C_{2n-k}^n possibilités),
– choisir les $n - k$ tirages où Banach va tirer une allumette dans l'autre poche (1 possibilité),
– effectuer le $(2n - k + 1)^{ème}$ tirage dans la première poche (1 possibilité).

On peut maintenant écrire que pour tout $k \in [0, n]$, il y a $2C_{2n-k}^n$ suites de $(2n - k + 1)$ tirages telles que Banach s'arrête de fumer alors qu'il lui reste k allumettes, c'est-à-dire $2C_{2n-k}^n$ cas favorables à l'événement : "Banach s'arrête de fumer alors qu'il lui reste k allumettes".

Or, à chaque tirage, Banach choisissant au hasard l'une de ses deux poches pour prendre une allumette, à chaque tirage, chacune des deux poches a une probabilité $\frac{1}{2}$ d'être "visitée".

Les différents tirages effectués dans les poches étant indépendants, on en déduit alors que pour tout $k \in [0, n]$, toute suite de $(2n - k + 1)$ tirages a une probabilité d'apparition de $\frac{1}{2^{2n-k+1}}$.

Notons alors, pour tout $k \in [0, n]$, A_k l'événement : "il reste k allumettes à Banach lorsqu'il s'arrête de fumer" et $\{\omega_{k,i},\ i \in [1, 2C_{2n-k}^n]\}$ l'ensemble des $2C_{2n-k}^n$ suites de $(2n - k + 1)$ tirages telles que Banach s'arrête de fumer alors qu'il lui reste k allumettes. On peut alors écrire :

$\forall k \in [0, n],\ A_k = \bigcup_{i=1}^{2C_{2n-k}^n} \omega_{k,i}$ soit, l'union étant disjointe (deux suites différentes de $2n - k + 1$ tirages ne peuvent survenir simultanément) :

$\forall k \in [0, n],\ p(A_k) = \sum_{i=1}^{2C_{2n-k}^n} p(\omega_{k,i})$ et donc, comme $\forall k \in [0, n],\ \forall i \in [1, 2C_{2n-k}^n],\ p(\omega_{k,i}) = \frac{1}{2^{2n-k+1}}$:

$= \frac{2C_{2n-k}^n}{2^{2n-k+1}}$ i.e. :

$= \frac{C_{2n-k}^n}{2^{2n-k}}$ d'où la conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in [0, n], \text{ la probabilité qu'il reste k allumettes à Banach lorsqu'il s'arrête de fumer est } \frac{C_{2n-k}^n}{2^{2n-k}}}$$

☞ **Attention !!!** Il n'y a pas toujours équiprobabilité entre les différents cas favorables d'un événement. Dans ce cas, il faut alors éviter de calculer le nombre de cas possibles, calcul qui ne peut conduire qu'à des erreurs... Ici, le nombre de cas possibles est : $\sum_{k=0}^{n} 2C_{2n-k}^n = 2C_{2n+1}^{n+1}$ (cf. exercice **12**.3), mais **la probabilité recherchée n'est pas :** $\frac{2C_{2n-k}^n}{2C_{2n+1}^{n+1}} = \frac{C_{2n-k}^n}{C_{2n+1}^{n+1}}$.

Remarquer également que le nombre de cas possibles n'est pas $2^{2n-k+1} = 2 \times 2^{2n-k}$ comme cela apparaît dans certains ouvrages (même si cela conduit au final au même résultat) car si tel était le cas, l'univers des possibles serait alors l'ensemble des suites de $2n - k + 1$ tirages (ce qui est manifestement faux car celui-ci serait alors dépendant de la probabilité recherchée, cf. exercice **14**.9).

Exercices clefs, méthodes et astuces

Méthodes générales d'étude de variables aléatoires

▪ Pour déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

– lorsque l'on reconnaît une loi usuelle, il faut la donner **en explicitant le modèle** suivi par X, sans oublier de préciser $X(\Omega)$ et pour tout $k \in X(\Omega)$, $p(X = k)$

– si l'on ne reconnaît pas une loi usuelle, il faut déterminer $X(\Omega)$ puis expliciter, pour tout $k \in X(\Omega)$, $p(X = k)$ (en cas de doute, on peut vérifier que $\sum_{k \in X(\Omega)} p(X = k) = 1$).

▪ Pour déterminer l'espérance d'une variable aléatoire X :

– si l'on reconnaît une loi usuelle, on se reporte au cours (à moins que l'énoncé n'impose de recalculer l'espérance),

– si $X(\Omega)$ est fini : $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$, on calcule la somme : $E(X) = \sum_{i \in I} x_i\, p(X = x_i)$,

– si $X(\Omega)$ est infini (et dénombrable) : $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$, après s'être assuré de la **convergence absolue** de la série de terme général $x_i\, p(X = x_i)$, on calcule la somme de la série : $E(X) = \sum_{i \in I} x_i\, p(X = x_i)$ (toute formulation du type "sous réserve de convergence absolue" n'est pas rigoureuse).

S0 E0

1. Les Rapetou et le coffre-fort de Picsou

Soit n un entier naturel non nul. Pour cambrioler le coffre-fort de Picsou, les Rapetou disposent d'un trousseau de n clefs distinctes dont une seule permet de l'ouvrir.

Lorsqu'ils opèrent de nuit, ils mélangent les clefs après chaque essai, alors que de jour, ils retirent la mauvaise clef du lot après chaque tentative infructueuse.

Soient X le nombre de clefs utilisées de jour et Y le nombre de clefs utilisées de nuit pour parvenir à ouvrir le coffre. Déterminer la loi et l'espérance des variables aléatoires X et Y.

▪ De jour, comme les Rapetou retirent la mauvaise clef du lot après chaque tentative infructueuse, pour ouvrir le coffre-fort de Picsou, ils utilisent au minimum une clef et au maximum n clefs. Toutes les valeurs intermédiaires étant possibles, on en déduit alors : $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

De plus, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'événement $[X = k]$ est réalisé si et seulement si la bonne clef est utilisée en $k^{\text{ème}}$ position.

Or, il y a n! permutations des n clefs, c'est-à-dire n! ordres possibles d'utilisation des n clefs. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, il y a également $(n - 1)!$ ordres possibles d'utilisation des n clefs tels que la bonne clef soit utilisée en $k^{\text{ème}}$ position. Les n! ordres possibles d'utilisation des n clefs étant tous équiprobables, on en déduit alors : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $p(X = k) = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$.

On peut maintenant conclure :

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!]), \text{ i.e. : } X(\Omega) = [\![1, n]\!],\ \forall k \in [\![1, n]\!],\ p(X = k) = \frac{1}{n} \text{ et } E(X) = \frac{n+1}{2}}$$

▪ De nuit, comme les Rapetou mélangent les clefs après chaque essai, Y représente le temps d'attente du premier succès lors de la réalisation d'essais indépendants (tenter d'ouvrir le coffre avec une clef donnée) d'une expérience à deux issues possibles (ouvrir ou ne pas ouvrir le coffre) dont la probabilité d'un succès (ouvrir le coffre) est $\dfrac{1}{n}$.

On peut alors conclure :

$$\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{n}\right), \text{ i.e. : } Y(\Omega) = \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*, p(Y = k) = \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} \text{ et } E(Y) = n}$$

SO EO

2. Une devinette

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Daniel et Valérie jouent à un jeu dans lequel l'un pense au hasard à un nombre compris entre 1 et 2^n et l'autre doit le deviner en posant des questions auxquelles les seules réponses possibles sont "oui" et "non", la dernière question étant nécessairement : "Est-ce que le nombre auquel tu penses est k ?" ($k \in [\![1, 2^n]\!]$), k étant le nombre à deviner.

1) Daniel essaie de deviner le nombre en demandant successivement pour chaque élément de $[\![1, 2^n]\!]$ (les nombres sont choisis au hasard et sans remise) si c'est le nombre à deviner, et ce jusqu'à ce que Valérie lui réponde "oui".

Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de questions posées par Daniel pour deviner le nombre. Déterminer la loi de X_n ainsi que son espérance.

2) Valérie, pour sa part, essaie de deviner le nombre en procédant par dichotomie : elle demande tout d'abord à Daniel si le nombre à deviner est inférieur ou égal à 2^{n-1}. En fonction de sa réponse, elle demande ensuite si le nombre à deviner est inférieur ou égal à 2^{n-2} ou à $3 \cdot 2^{n-2}$, et ainsi de suite, en procédant par dichotomie, jusqu'à ce qu'elle soit sûre de connaître le nombre à deviner. Une fois celui-ci connu, elle demande enfin à Daniel si le nombre à deviner est bien celui-ci.

Soit Y_n la variable aléatoire égale au nombre de questions posées par Valérie pour deviner le nombre. Déterminer la loi de Y_n ainsi que son espérance.

1) Pour que Valérie réponde "oui", Daniel doit poser au minimum une question (le premier nombre qu'il propose est le nombre choisi par Valérie) et au maximum 2^n (c'est le dernier nombre qu'il propose qui est le nombre choisi par Valérie). Toutes les valeurs intermédiaires étant possibles, on en déduit alors :
$X_n(\Omega) = [\![1, 2^n]\!]$.

Considérons maintenant que Daniel pose la totalité de ses 2^n questions (en effet, poser la totalité des 2^n questions ne modifie pas le rang X_n de la question où Valérie répond "oui").

Pour tout $k \in [\![1, 2^n]\!]$, l'événement $[X_n = k]$ est réalisé si et seulement Daniel devine le nombre à sa $k^{\text{ème}}$ question.

Or, il y a $(2^n)!$ permutations des entiers de $[\![1, 2^n]\!]$, c'est-à-dire $(2^n)!$ ordres possibles des questions de Daniel. Pour tout $k \in [\![1, 2^n]\!]$, il y a également $(2^n - 1)!$ ordres possibles des questions de Daniel tels que le nombre choisi par Valérie soit proposé à la $k^{\text{ème}}$ question. Comme les $(2^n)!$ ordres possibles des questions de Daniel sont équiprobables, on en déduit alors : $\forall k \in [\![1, 2^n]\!],\ p(X_n = k) = \dfrac{(2^n - 1)!}{(2^n)!} = \dfrac{1}{2^n}$.

On peut maintenant conclure :

$$\boxed{X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 2^n]\!]), \text{ d'où : } X_n(\Omega) = [\![1, 2^n]\!], \forall k \in [\![1, 2^n]\!], p(X_n = k) = \frac{1}{2^n} \text{ et } E(X_n) = \frac{2^n + 1}{2}}$$

2) Initialement, Valérie sait que le nombre qu'elle doit deviner est élément de $[\![1, 2^n]\!]$. Chaque question posée (jusqu'à la $n^{\text{ème}}$) restreint son intervalle de recherche de moitié (après la première question, Valérie sait que le nombre qu'elle doit deviner est élément de $[\![1, 2^{n-1}]\!]$ ou de $[\![2^{n-1} + 1, 2^n]\!]$, intervalles contenant 2^{n-1} éléments).

On en déduit alors, par une récurrence immédiate, que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, lorsque Valérie a posé k questions, elle sait que l'intervalle dans lequel se situe le nombre qu'elle doit deviner contient 2^{n-k} éléments. Or, Valérie est sûre de connaître le nombre à deviner si et seulement si cet intervalle contient un seul élément, c'est-à-dire si et seulement si k = n. Valérie doit donc poser exactement n questions pour deviner le nombre choisi par Daniel, puis la question finale afin de valider sa "découverte".

On peut maintenant conclure que Y_n est la variable aléatoire certaine égale à n + 1, et donc que :

$$\boxed{Y_n(\Omega) = \{n+1\}, \text{ d'où : } p(Y_n = n+1) = 1 \text{ et } E(Y_n) = n+1}$$

☞ On dit qu'une variable aléatoire X est certaine lorsque $X(\Omega)$ est un singleton : $X(\Omega) = \{p\}$. Son espérance est alors égale à p et sa variance est nulle.

SO EO

■ 3. Recherche par élimination

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On considère n boîtes numérotées $(B_i)_{1\le i\le n}$. Un objet est caché dans l'une de ces boîtes (de façon équiprobable) et on cherche à le localiser, c'est-à-dire à connaître le numéro de la boîte qui le contient. Pour cela, on ouvre successivement les boîtes B_1, B_2 ..., jusqu'à ce que l'on puisse déterminer à coup sûr dans quelle boîte se trouve l'objet.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boîtes ouvertes.

1) Déterminer la loi de X.

2) Calculer E(X) et V(X).

1) Pour déterminer à coup sûr la boîte dans laquelle se trouve l'objet, on doit, soit ouvrir la boîte qui le contient, soit avoir ouvert les n - 1 premières boîtes sans succès (et on sait alors que l'objet se trouve dans la boîte B_n).

Ainsi, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, si l'objet est dans la boîte B_k, il faut ouvrir exactement k boîtes pour le trouver. S'il se trouve dans la boîte B_n, il suffit d'en ouvrir n - 1. Toutes les valeurs intermédiaires étant possibles, on en déduit alors : $X(\Omega) = [\![1, n-1]\!]$.

De plus, l'objet se trouvant de façon équiprobable dans les boîtes $B_1, B_2, \dots, B_n$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la probabilité qu'il se trouve dans la boîte B_k est $\frac{1}{n}$.

On peut maintenant écrire que pour tout $k \in [\![1, n-2]\!]$, l'événement [X = k] est réalisé si et seulement si on ouvre k boîtes, c'est-à-dire si et seulement si l'objet se trouve dans la boîte B_k (événement de probabilité $\frac{1}{n}$) et que l'événement [X = n - 1] est réalisé si et seulement si on ouvre n - 1 boîtes, c'est-à-dire si et seulement si l'objet se trouve dans la boîte B_{n-1} ou dans la boîte B_n (événement de probabilité $\frac{2}{n}$, les événements "l'objet se trouve dans la boîte B_{n-1}" et "l'objet se trouve dans la boîte B_n" étant incompatibles), d'où la conclusion :

$$\boxed{X(\Omega) = [\![1, n-1]\!] \text{ et } \begin{cases} \forall k \in [\![1, n-2]\!],\ p(X = k) = \dfrac{1}{n} \\ p(X = n-1) = \dfrac{2}{n} \end{cases}}$$

☞ Cette loi est très classique. Il faut éviter ici de se précipiter trop rapidement sur la loi uniforme.

2) ■ On peut maintenant écrire :

$E(X) = \sum_{k=1}^{n-1} k\,p(X = k)$ soit, en distinguant les cas $k \in [\![1, n-2]\!]$ et $k = n-1$:

$= \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k}{n} + \frac{2(n-1)}{n}$ et comme $\sum_{k=1}^{n-2} k = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$:

$= \frac{(n-1)(n-2)}{2n} + \frac{2(n-1)}{n}$ et donc :

$$\boxed{E(X) = \frac{(n-1)(n+2)}{2n}}$$

■ De même, on a :

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 p(X = k)$$ soit, en distinguant les cas $k \in [1, n-2]$ et $k = n-1$:

$$= \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k^2}{n} + \frac{2(n-1)^2}{n}$$ et comme $\sum_{k=1}^{n-2} k^2 = \frac{(n-1)(n-2)(2n-3)}{6}$:

$$= \frac{(n-1)(n-2)(2n-3)}{6n} + \frac{2(n-1)^2}{n}$$ et donc :

$$= \frac{(n-1)(2n^2+5n-6)}{6n}.$$

On en déduit alors :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$ soit, d'après les résultats précédents :

$$= \frac{(n-1)(2n^2+5n-6)}{6n} - \left(\frac{(n-1)(n+2)}{2n}\right)^2$$ et donc, après calculs :

$$\boxed{V(X) = \frac{(n-1)(n-2)(n^2+3n-6)}{12n^2}}$$

☞ Pour calculer la variance d'une variable aléatoire X, on calcule généralement $E(X)$ et $E(X^2)$, avant de conclure : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

☞ Remarquer que la variance d'une variable aléatoire X est toujours un réel positif (ou nul si X est une variable aléatoire certaine). Cela peut éviter parfois d'écrire des inepties.

SO EO

■ 4. Tirages dans une urne : lois du plus grand numéro et du plus petit numéro obtenus

Soit n et p deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 tels que $n \geq p$. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n dans laquelle on effectue un tirage de p boules.

1) On suppose dans cette question que les tirages s'effectuent sans remise. Soient X la variable aléatoire égale au plus grand numéro obtenu et Y la variable aléatoire égale au plus petit numéro obtenu.

a) Déterminer la loi de X, ainsi que son espérance et sa variance.

b) Déterminer la loi de Y, ainsi que son espérance.

2) On suppose dans cette question que les tirages s'effectuent avec remise. Soient Z la variable aléatoire égale au plus grand numéro obtenu. Déterminer la loi de Z, ainsi que son espérance.

1) a) ■ Lorsque l'on tire p boules au hasard et sans remise de l'urne, le plus grand numéro obtenu est égal au minimum à p (on obtient alors toutes les boules numérotées de 1 à p) et au maximum à n (on obtient alors la boule numérotée n et p - 1 autres boules). Toutes les valeurs intermédiaires étant possibles, on en déduit alors : $X(\Omega) = [p, n]$.

L'ordre dans lequel les boules sont tirées n'influant pas sur la valeur de X, considérons que les p boules sont tirées simultanément. Il y a alors C_n^p tirages possibles de p boules au hasard et sans remise parmi n.

De plus, pour tout $k \in [p, n]$, l'événement $[X = k]$ est réalisé si et seulement si le plus grand des numéros obtenus est égal à k. Or, pour tout $k \in [p, n]$, pour déterminer une suite de p tirages pour laquelle le plus grand des numéros obtenus est égal à k, il faut et il suffit de :

– tirer la boule numérotée k (1 possibilité),

– tirer p - 1 boules numérotées entre 1 et k - 1 au cours des p - 1 autres tirages (C_{k-1}^{p-1} possibilités).

Pour tout $k \in [p, n]$, il y a donc C_{k-1}^{p-1} tirages pour lesquels le plus grand des numéros obtenus est égal à k. Les C_n^p tirages possibles étant tous équiprobables, on en déduit alors : $\forall k \in [p, n]$, $p(X = k) = \dfrac{C_{k-1}^{p-1}}{C_n^p}$, d'où la conclusion :

$$\boxed{X(\Omega) = [p, n] \text{ et } \forall k \in [p, n],\ p(X = k) = \frac{C_{k-1}^{p-1}}{C_n^p}}$$

■ On peut maintenant écrire :

$E(X) = \sum_{k=p}^{n} k\,p(X = k)$ soit :

$= \dfrac{1}{C_n^p} \sum_{k=p}^{n} k\,C_{k-1}^{p-1}$ soit encore, comme $\forall k \in [p, n]$, $k\,C_{k-1}^{p-1} = p\,C_k^p$:

$= \dfrac{p}{C_n^p} \sum_{k=p}^{n} C_k^p$ et donc, par itération de la formule de Pascal (cf. exercice **12**.3) :

$= \dfrac{p\,C_{n+1}^{p+1}}{C_n^p}$ soit enfin, comme $C_{n+1}^{p+1} = \dfrac{n+1}{p+1} C_n^p$:

$$\boxed{E(X) = \frac{p(n+1)}{p+1}}$$

■ De même, on a :

$E(X^2) = \sum_{k=p}^{n} k^2 p(X = k)$ soit :

$= \dfrac{1}{C_n^p} \sum_{k=p}^{n} k^2 C_{k-1}^{p-1}$ soit encore, comme $\forall k \in [p, n]$, $k^2 = k(k+1) - k$:

$= \dfrac{1}{C_n^p} \left[\sum_{k=p}^{n} k(k+1) C_{k-1}^{p-1} - \sum_{k=p}^{n} k\,C_{k-1}^{p-1} \right]$ et donc, comme $\forall k \in [p, n]$, $\begin{cases} k(k+1)C_{k-1}^{p-1} = p(p+1)C_{k+1}^{p+1} \\ k\,C_{k-1}^{p-1} = p\,C_k^p \end{cases}$:

$= \dfrac{1}{C_n^p} \left[p(p+1) \sum_{k=p}^{n} C_{k+1}^{p+1} - p \sum_{k=p}^{n} C_k^p \right]$ d'où, par itération de la formule de Pascal (cf. exercice **12**.3) :

$= \dfrac{1}{C_n^p} \left(p(p+1) C_{n+2}^{p+2} - p\,C_{n+1}^{p+1} \right)$ soit enfin, comme $C_{n+1}^{p+1} = \dfrac{n+1}{p+1} C_n^p$ et $C_{n+2}^{p+2} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{(p+1)(p+2)} C_n^p$:

$= \dfrac{p(n+1)(n+2)}{p+2} - \dfrac{p(n+1)}{p+1}$.

On en déduit alors :

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ soit, d'après les résultats précédents :

$= \dfrac{p(n+1)(n+2)}{p+2} - \dfrac{p(n+1)}{p+1} - \left[\dfrac{p(n+1)}{p+1} \right]^2$ et donc, après simplifications :

$$\boxed{V(X) = \frac{p(n+1)(n-p)}{(p+1)^2(p+2)}}$$

☞ Se souvenir que lors du calcul de $E(X^2)$, on utilise généralement les décompositions : $k^2 = k(k-1) + k$ (si l'on est en présence d'un C_n^k) et $k^2 = k(k+1) - k$ (si l'on est en présence d'un C_{k-1}^{n-1}).

b) ■ Lorsque l'on tire p boules au hasard et sans remise de l'urne, le plus petit numéro obtenu est égal au minimum à 1 (on obtient alors la boule numérotée 1 et p - 1 autres boules) et au maximum à n - p + 1 (on obtient alors toutes les boules numérotées de n - p + 1 à n). Toutes les valeurs intermédiaires étant possibles, on en déduit alors : $Y(\Omega) = [1, n - p + 1]$.

Or, il y a toujours C_n^p tirages de p boules au hasard parmi n. De plus, pour tout $k \in [1, n-p+1]$, l'événement $[Y = k]$ est réalisé si et seulement si le plus petit des numéros obtenus est égal à k. Or, pour tout $k \in [1, n-p+1]$, pour déterminer une suite de p tirages pour laquelle le plus petit des numéros obtenus est égal à k, il faut et il suffit de :

– tirer la boule numérotée k (1 possibilité),

– tirer p - 1 boules numérotées entre k + 1 et n au cours des p - 1 autres tirages (C_{n-k}^{p-1} possibilités).

Pour tout $k \in [1, n-p+1]$, il y a donc C_{n-k}^{p-1} tirages pour lesquels le plus petit des numéros obtenus est égal à k. Les C_n^p tirages possibles étant tous équiprobables, on en déduit alors : $\forall k \in [1, n-p+1],\ p(Y = k) = \dfrac{C_{n-k}^{p-1}}{C_n^p}$, d'où la conclusion :

$$\boxed{Y(\Omega) = [1, n-p+1] \text{ et } \forall k \in [1, n-p+1],\ p(Y = k) = \frac{C_{n-k}^{p-1}}{C_n^p}}$$

■ On peut maintenant écrire :

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{n-p+1} kp(Y = k) \qquad \text{soit, comme } \forall k \in [1, n-p+1],\ k = (n+1) - (n-k+1) :$$

$$= \frac{1}{C_n^p}\left[(n+1)\sum_{k=1}^{n-p+1} C_{n-k}^{p-1} - \sum_{k=1}^{n-p+1}(n-k+1)C_{n-k}^{p-1}\right] \qquad \text{soit encore, comme } \forall k \in [1, n-p+1],\ (n-k+1)C_{n-k}^{p-1} = pC_{n-k+1}^{p} :$$

$$= \frac{1}{C_n^p}\left[(n+1)\sum_{k=1}^{n-p+1} C_{n-k}^{p-1} - p\sum_{k=1}^{n-p+1} C_{n-k+1}^{p}\right] \qquad \text{et donc, par itération de la formule de Pascal (cf. exercice } \mathbf{12.3}) :$$

$$= \frac{1}{C_n^p}\left((n+1)C_n^p - pC_{n+1}^{p+1}\right) \qquad \text{soit enfin, comme } C_{n+1}^{p+1} = \frac{n+1}{p+1}C_n^p :$$

$$= (n+1) - \frac{p(n+1)}{p+1} \qquad \text{i.e. :}$$

$$\boxed{E(Y) = \frac{n+1}{p+1}}$$

☞ Noter ces décompositions utiles pour le calcul d'une espérance : $k = (n+1) - (n-k+1)$ (lorsque l'on est en présence d'un C_{n-k}^{p}) ou $k = n - (n-k)$ (lorsque l'on est en présence d'un C_{n-k-1}^{p-1})...

NB : Le calcul de la variance de Y, compliqué et sans grand intérêt, aurait nécessité une décomposition de k^2 dans la base $\big(1, (n-k+1), (n-k+1)(n-k+2)\big)$: $k^2 = (n-k+1)(n-k+2) - (2n+3)(n-k+1) + (n+1)^2$.

2) a) ■ Lorsque l'on tire p boules au hasard et avec remise de l'urne, le plus grand numéro tiré est égal au minimum à 1 (on tire alors p fois la boule numérotée 1) et au maximum à n (on tire alors la boule numérotée n et p - 1 autres boules). Toutes les valeurs intermédiaires étant possibles, on en déduit alors : $Z(\Omega) = [1, n]$.

Or, il y a n^p tirages de p boules au hasard et avec remise parmi n. De plus, pour tout $k \in [1, n]$, l'événement $[Z \leq k]$ est réalisé si et seulement si le plus grand des numéros obtenus est inférieur ou égal à k, c'est-à-dire si et seulement si les p tirages sont effectués parmi les boules numérotées entre 1 et k (k^p possibilités).

Pour tout $k \in [1, n]$, il y a donc k^p tirages pour lesquels le plus grand des numéros obtenus est inférieur ou égal à k. Les n^p tirages possibles étant tous équiprobables, on en déduit alors :

$$\forall k \in [1, n],\ p(Z \leq k) = \frac{k^p}{n^p} \qquad \text{soit, comme } \forall k \in [2, n],\ p(Z = k) = p(Z \leq k) - p(Z \leq k-1)$$

$$\forall k \in [2, n],\ p(Z = k) = \frac{k^p - (k-1)^p}{n^p} \qquad \text{et donc, le cas } k = 1 \text{ rejoignant le cas général } \left(p(Z = 1) = p(Z \leq 1) = \frac{1^p}{n^p}\right) :$$

$$\boxed{Z(\Omega) = [1, n] \text{ et } \forall k \in [1, n],\ p(Z = k) = \frac{k^p - (k-1)^p}{n^p}}$$

NB : Attention à ne pas écrire ici que l'événement $[Z = k]$ est réalisé si et seulement si on obtient la boule numérotée k à l'un des p tirages (p possibilités) et p - 1 boules numérotées entre 1 et k aux p - 1 autres tirages (k^{p-1} possibilités). Procéder ainsi reviendrait en effet à compter plusieurs fois (en fait i fois) au lieu d'une, chacun des événements : "on obtient i fois la boule numérotée k et p - i boules numérotées entre 1 et k - 1 aux p - 1 autres tirages" ($i \in [1, p]$) dans le décompte des cas favorables à l'événement $[Z = k]$.

■ On peut maintenant écrire :

$E(Z) = \sum_{k=1}^{n} k\,p(Z = k)$ soit :

$= \frac{1}{n^p}\left[\sum_{k=1}^{n} k^{p+1} - \sum_{k=1}^{n} k(k-1)^p\right]$ soit encore, comme $\forall k \in [1, n]$, $k = (k-1) + 1$:

$= \frac{1}{n^p}\left[\sum_{k=1}^{n} \left(k^{p+1} - (k-1)^{p+1}\right) - \sum_{k=1}^{n} (k-1)^p\right]$ et donc, les termes s'éliminant deux à deux dans la première somme et en effectuant le changement de variable $k' = k - 1$ dans la seconde :

$= \frac{1}{n^p}\left[n^{p+1} - \sum_{k=0}^{n-1} k^p\right]$ d'où la conclusion :

$$\boxed{E(Z) = n - \frac{1}{n^p} \sum_{k=0}^{n-1} k^p}$$

SO EO

★ 5. Espérance d'une variable aléatoire à partir de sa fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} k\,p(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} p(X > k) - n\,p(X > n).$$

2) a) En déduire que si X admet une espérance, cette espérance vaut :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(X > k).$$

b) Réciproquement, montrer que si la série de terme général $p(X > k)$ converge, alors X admet une espérance et cette espérance vaut : $E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(X > k)$.

1) On a clairement :

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $p(X = k) = p(X > k - 1) - p(X > k)$ soit, en multipliant cette relation par k et en sommant pour $k = 1$ à $k = n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k\,p(X = k) = \sum_{k=1}^{n} k\,p(X > k-1) - \sum_{k=1}^{n} k\,p(X > k)$ et en effectuant le changement de variable $k' = k - 1$ dans la première somme :

$= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,p(X > k) - \sum_{k=1}^{n} k\,p(X > k)$ i.e. :

$= \sum_{k=0}^{n-1} k\,p(X > k) + \sum_{k=0}^{n-1} p(X > k) - \sum_{k=1}^{n} k\,p(X > k)$ soit encore, les termes des première et troisième sommes s'éliminant deux à deux (lorsque $n \geq 2$) pour $k = 1$ à $k = n - 1$:

$= 0\,p(X > 0) + \sum_{k=0}^{n-1} p(X > k) - n\,p(X > n)$ i.e. :

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k\,p(X=k)=\sum_{k=0}^{n-1} p(X>k)-n\,p(X>n)$ et donc, en additionnant $0p(X=0)=0$ membre à membre :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} k\,p(X=k)=\sum_{k=0}^{n-1} p(X>k)-n\,p(X>n)} \quad ①$$

☞ Se souvenir, lorsque X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, que :
- $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ p(X=k)=p(X\le k)-p(X\le k-1)=p(X<k+1)-p(X<k)$,
- $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ p(X=k)=p(X\ge k)-p(X\ge k+1)=p(X>k-1)-p(X>k)$.

☞ Se souvenir, lorsque X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, que :
$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} k\,p(X=k)=\sum_{k=0}^{n-1} p(X>k)-n\,p(X>n)$ (démonstration à connaître).

2) a) Supposons que X admette une espérance. D'après la définition d'une fonction de répartition, on peut écrire : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ n\,p(X>n)=n\sum_{k=n+1}^{+\infty} p(X=k)=\sum_{k=n+1}^{+\infty} n\,p(X=k)$.

Or, on a :

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall k\in[n+1,+\infty[,\ 0\le n\,p(X=k)\le k\,p(X=k)$ soit, en sommant cette relation pour $k=n+1$ à $k=N$ ($N\in[n+1,+\infty[$) :

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall N\in[n+1,+\infty[,\ 0\le \sum_{k=n+1}^{N} n\,p(X=k)\le \sum_{k=n+1}^{N} k\,p(X=k)$.

Or, comme X admet une espérance, on peut écrire que la série de terme général $k\,p(X=k)$ ($k\ge 0$) converge de somme E(X), donc que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la suite $\left(\sum_{k=n+1}^{N} k\,p(X=k)\right)_{N\ge n+1}$ converge de limite $E(X)-\sum_{k=0}^{n} k\,p(X=k)$.
De plus, comme $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ n\,p(X>n)=\sum_{k=n+1}^{+\infty} n\,p(X=k)$, on peut également écrire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la suite $\left(\sum_{k=n+1}^{N} n\,p(X=k)\right)_{N\ge n+1}$ converge de limite $n\,p(X>n)$.

Le théorème de prolongement des inégalités appliqué (deux fois) à la double inégalité précédente nous permet alors d'écrire : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\le n\,p(X>n)\le E(X)-\sum_{k=0}^{n} k\,p(X=k)$.

Or, comme X admet une espérance, on peut écrire : $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} k\,p(X=k)=E(X)$. La suite $\big(n\,p(X>n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc encadrée par la suite nulle et par une suite qui tend vers 0. On en déduit alors (théorème de l'encadrement) : $\lim_{n\to+\infty} n\,p(X>n)=0$.

Comme la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} k\,p(X=k)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge de limite E(X) et comme $\lim_{n\to+\infty} n\,p(X>n)=0$, par passage à la limite dans ①, on peut alors écrire que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n-1} p(X>k)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que : $E(X)=\sum_{k=0}^{+\infty} p(X>k)$, d'où la conclusion :

$$\boxed{\text{Si X admet une espérance, alors : } E(X)=\sum_{k=0}^{+\infty} p(X>k)}$$

☞ Se souvenir que si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui admet une espérance, alors cette espérance vaut : $E(X)=\sum_{k=0}^{+\infty} p(X>k)$ (résultat extrêmement classique, démonstration à connaître).

2) Comme X est à valeurs dans $[\![0, n]\!]$, X admet une espérance et cette espérance vaut :

$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k\,p(X = k)$.

Or, on a :

$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} p(X = k)\,t^k$ d'où, en dérivant cette relation (fonction polynôme) :

$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X'(t) = \sum_{k=1}^{n} k\,p(X = k)\,t^{k-1}$ soit, en prenant cette relation en 1 :

$G_X'(1) = \sum_{k=1}^{n} k\,p(X = k)$ soit encore, en additionnant $0 = 0\,p(X = 0)$ membre à membre :

$G_X'(1) = \sum_{k=0}^{n} k\,p(X = k)$ et donc, en reconnaissant E(X) :

$$\boxed{E(X) = G_X'(1)}$$

3) Comme X est à valeurs dans $[\![0, n]\!]$, X admet une espérance et un moment d'ordre 2, et on a :

– $E(X) = \sum_{k=0}^{n} k\,p(X = k)$, et :

– $E(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 p(X = k)$ soit, comme $\forall k \in [\![0, n]\!],\ k^2 = k(k-1) + k$:

$= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\,p(X = k) + \sum_{k=0}^{n} k\,p(X = k)$.

Or, on a vu à la question précédente que : $\forall t \in \mathbb{R},\ G_X'(t) = \sum_{k=1}^{n} k\,p(X = k)\,t^{k-1}$ et $G_X'(1) = \sum_{k=0}^{n} k\,p(X = k)$. En dérivant cette expression de G_X', on en déduit alors :

$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X''(t) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\,p(X = k)\,t^{k-2}$ soit, en prenant cette relation en 1 :

$G_X''(1) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\,p(X = k)$ soit encore, en additionnant $0 = 0\,p(X = 0) + 0\,p(X = 1)$ membre à membre :

$G_X''(1) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\,p(X = k)$.

D'après les expressions précédentes de $E(X^2)$, $G_X'(1)$ et $G_X''(1)$, on peut alors écrire : $E(X^2) = G_X''(1) + G_X'(1)$. Comme $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$, on peut désormais conclure, d'après les expressions de $E(X^2)$ et E(X) (cf. question précédente) :

$$\boxed{V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - \left(G_X'(1)\right)^2}$$

☞ Soit X une variable aléatoire réelle discrète telle que $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$. On appelle fonction génératrice de X, l'application : $t \mapsto G_X(t) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} p(X = x_i)\,t^{x_i}$.

☞ Se souvenir que si X est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ ($n \in \mathbb{N}$), alors en notant G_X sa fonction génératrice, on a (démonstrations à connaître) :

– $\forall i \in [\![0, n]\!],\ p(X = i) = \dfrac{G_X^{(i)}(0)}{i!}$,

– $E(X) = G_X'(1)$,

– $V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - \left(G_X'(1)\right)^2$.

Ces relations permettent de déterminer la loi, l'espérance et la variance de variables aléatoires à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ ($n \in \mathbb{N}$) dont on ne connaît que la fonction génératrice.

☞ Dans la pratique, pour déterminer la loi d'une variable aléatoire discrète X à partir de sa fonction génératrice, deux méthodes sont possibles :
– on calcule, pour tout $k \in X(\Omega)$, $G_X^{(k)}(0)$ afin de déterminer $p(X = k)$,
– on identifie l'expression calculée de G_X avec : $G_X = \sum_{k \in X(\Omega)} p(X = k) X^k$.

SO EO

● 7. Fonctions génératrices (2)

Où l'on généralise aux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, un résultat de l'exercice précédent.

Soient X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et pour tout $t \in [-1, 1]$, $G_X(t)$ le nombre :

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(X = k)\, t^k.$$

1) Montrer que G_X est bien définie sur $[-1, 1]$.

2) On suppose dans cette question que X admet une espérance.

a) Déterminer, pour tout $t \in [0, 1[$, une expression de $\dfrac{G_X(t) - G_X(1)}{t - 1}$.

b) Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{G_X(t) - G_X(1)}{t - 1}$ est croissante et bornée sur $[0, 1[$.

c) En déduire que G_X est dérivable en 1.

3) On suppose dans cette question que G_X est dérivable en 1.

a) Montrer que :

$$\forall t \in [0, 1[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}\left[p(X = k) \sum_{i=0}^{k-1} t^i\right] \leq \frac{G_X(t) - G_X(1)}{t - 1}.$$

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k\, p(X = k) \leq G_X'(1),$$

puis que X admet une espérance.

4) Montrer enfin que X admet espérance si et seulement si G_X est dérivable en 1 et que :

$$E(X) = G_X'(1).$$

NB : La résolution de cet exercice nécessite la connaissance du cours : 7. Fonctions : limites, continuité, dérivabilité.

1) On a :

$\forall t \in [-1, 1],\ \forall k \in \mathbb{N},\ \left|t^k\right| \leq 1$ soit, en multipliant cette inégalité par $\left|p(X = k)\right| = p(X = k)$:

$\forall t \in [-1, 1],\ \forall k \in \mathbb{N},\ \left|p(X = k)\, t^k\right| \leq p(X = k)$.

Comme $\forall t \in [-1, 1],\ \forall k \in \mathbb{N}, \begin{cases} \left|p(X = k)\, t^k\right| \geq 0 \\ p(X = k) \geq 0 \end{cases}$ et comme la série de terme général $p(X = k)$ converge (de somme 1 pour $k \geq 0$, X étant une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$), les règles de comparaison des séries à termes positifs nous permettent alors d'écrire que pour tout $t \in [-1, 1]$, la série de terme général $\left|p(X = k)\, t^k\right|$ converge, donc que pour tout $t \in [-1, 1]$, la série de terme général $p(X = k)\, t^k$ converge absolument et donc converge, d'où la conclusion :

$$\boxed{G_X \text{ est bien définie sur } [-1, 1]}$$

☞ Se souvenir que si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors sa fonction génératrice G_X est définie au moins sur $[-1, 1]$ (démonstration à connaître).

2) a) ▪ D'après la définition de G_X, on peut écrire :

$\forall t \in [0, 1],\ G_X(t) = p(X = 0) + \sum_{k=1}^{+\infty} p(X = k)\, t^k$ d'où, comme $G_X(1) = p(X = 0) + \sum_{k=1}^{+\infty} p(X = k)$:

$\forall t \in [0, 1],\ G_X(t) - G_X(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(X = k)\,(t^k - 1)$ soit, en divisant cette relation par $t - 1 \neq 0$ ($t \in [0, 1[$) :

$\forall t \in [0, 1[,\ \dfrac{G_X(t) - G_X(1)}{t - 1} = \sum_{k=1}^{+\infty} p(X = k)\, \dfrac{t^k - 1}{t - 1}$ et donc, en reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique de raison $t \neq 1$ ($t \in [0, 1[$) :

$$\boxed{\forall t \in [0, 1[,\ \frac{G_X(t) - G_X(1)}{t - 1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[p(X = k) \sum_{i=0}^{k-1} t^i \right]} \quad ①$$

b) ▪ Une somme finie de fonctions croissantes sur un intervalle étant croissante sur cet intervalle, comme pour tout $i \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^i$ est croissante sur $[0, 1[$ et comme $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ p(X = k) \geq 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto p(X = k) \sum_{i=0}^{k-1} t^i$ est croissante sur $[0, 1[$, i.e. :

$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall (t_1, t_2) \in [0, 1[^2,\ t_1 < t_2,\ p(X = k) \sum_{i=0}^{k-1} t_1^{\,i} \leq p(X = k) \sum_{i=0}^{k-1} t_2^{\,i}$.

Or, d'après les résultats de la question précédente, on peut écrire que pour tout $t \in [0, 1[$, la série de terme général $p(X = k) \sum_{i=0}^{k-1} t^i$ ($k \geq 1$) est convergente de somme $\dfrac{G_X(t) - G_X(1)}{t - 1}$. On en déduit alors (cf. exercice 6.4.3) :

$\forall (t_1, t_2) \in [0, 1[^2,\ t_1 < t_2,\ \dfrac{G_X(t_1) - G_X(1)}{t_1 - 1} \leq \dfrac{G_X(t_2) - G_X(1)}{t_2 - 1}$ d'où la conclusion :

$$\boxed{\text{La fonction } t \mapsto \frac{G_X(t) - G_X(1)}{t - 1} \text{ est croissante sur } [0, 1[}$$

▪ On a : $\forall t \in [0, 1[,\ \forall i \in \mathbb{N},\ 0 \leq t^i \leq 1$. On en déduit alors, en sommant cette relation pour $i = 0$ à $i = k - 1$ ($k \in \mathbb{N}^*$) puis en la multipliant par $p(X = k) \geq 0$: $\forall t \in [0, 1[,\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq p(X = k) \sum_{i=0}^{k-1} t^i \leq k p(X = k)$ ②.

Or, comme X admet une espérance, on peut écrire que la série de terme général $kp(X = k)$ ($k \geq 1$) converge de somme $E(X)$. De plus, comme pour tout $t \in [0, 1[$, la série de terme général $p(X = k) \sum_{i=0}^{k-1} t^i$ ($k \geq 1$) converge également de somme $\dfrac{G_X(t) - G_X(1)}{t - 1}$, on en déduit alors (cf. exercice 6.4.3) :

$\forall t \in [0, 1[,\ 0 \leq \dfrac{G_X(t) - G_X(1)}{t - 1} \leq E(X)$ ③ d'où la conclusion :

$$\boxed{\text{La fonction } t \mapsto \frac{G_X(t) - G_X(1)}{t - 1} \text{ est bornée sur } [0, 1[}$$

c) Comme la fonction $t \mapsto \dfrac{G_X(t) - G_X(1)}{t - 1}$ est croissante sur $[0, 1[$, elle admet une limite (finie ou infinie) en 1. Comme elle est en outre bornée sur cet intervalle, on en déduit alors que cette limite est nécessairement finie, et donc, d'après la définition de la dérivabilité d'une fonction en un point :

$$\boxed{\text{Si X admet une espérance, alors } G_X \text{ est dérivable en } 1}$$

3) **a)** On a vu au **2a** que : $\forall t \in [0, 1[$, $\dfrac{G_X(t) - G_X(1)}{t - 1} = \sum_{k=1}^{+\infty}\left[p(X = k)\sum_{i=0}^{k-1} t^i\right]$. Or, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, 1[, \sum_{k=1}^{+\infty}\left[p(X = k)\sum_{i=0}^{k-1} t^i\right] = \sum_{k=1}^{n}\left[p(X = k)\sum_{i=0}^{k-1} t^i\right] + \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left[p(X = k)\sum_{i=0}^{k-1} t^i\right].$$

Comme $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [0, 1[$, $p(X = k)\sum_{i=0}^{k-1} t^i \geq 0$, et comme pour tout $t \in [0, 1[$, la série de terme général $p(X = k)\sum_{i=0}^{k-1} t^i$ converge, on peut écrire (cf. exercice **6**.4.2) :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, 1[, \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left[p(X = k)\sum_{i=0}^{k-1} t^i\right] \geq 0$ soit, d'après la relation précédente :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, 1[, \sum_{k=1}^{n}\left[p(X = k)\sum_{i=0}^{k-1} t^i\right] \leq \sum_{k=1}^{+\infty}\left[p(X = k)\sum_{i=0}^{k-1} t^i\right]$ et donc, en reconnaissant $\dfrac{G_X(t) - G_X(1)}{t - 1}$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, 1[, \sum_{k=1}^{n}\left[p(X = k)\sum_{i=0}^{k-1} t^i\right] \leq \frac{G_X(t) - G_X(1)}{t - 1}}$$

b) ■ Comme G_X est dérivable en 1, par définition de la dérivabilité en un point, on peut écrire que la fonction $t \mapsto \dfrac{G_X(t) - G_X(1)}{t - 1}$ admet une limite finie en 1 : $G_X'(1)$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto \sum_{k=1}^{n}\left[p(X = k)\sum_{i=0}^{k-1} t^i\right]$ admet également une limite finie en 1 : $\sum_{k=1}^{n} k\,p(X = k)$ (pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la somme $\sum_{i=0}^{k-1} t^i$ est une somme de k fonctions admettant pour limite 1 en 1). En faisant tendre t vers 1, le théorème de prolongement des inégalités appliqué à l'inégalité précédente nous permet alors d'écrire :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k\,p(X = k) \leq G_X'(1)} \quad ④$$

■ Comme $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $k\,p(X = k) \geq 0$, la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} k\,p(X = k)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante. Comme elle est en outre majorée (par $G_X'(1)$), elle est convergente. Sa limite étant la somme de la série de terme général $k\,p(X = k)$, on peut alors conclure :

$$\boxed{\text{Si } G_X \text{ est dérivable en 1, alors X admet une espérance}}$$

4) Les résultats du **2c** et du **3b** nous permettent de conclure que X admet une espérance si et seulement si G_X est dérivable en 1.

Sous ces deux hypothèses, G_X étant dérivable en 1, on peut écrire que la fonction $t \mapsto \dfrac{G_X(t) - G_X(1)}{t - 1}$ admet une limite finie en 1. En faisant tendre t vers 1, le théorème de prolongement des inégalités appliqué à la partie droite de la relation ③ nous permet alors d'écrire que : $G_X'(1) \leq E(X)$.

De même, toujours sous ces deux hypothèses, comme X admet une espérance, la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} k\,p(X = k)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente de limite E(X). En faisant tendre n vers $+\infty$, le théorème de prolongement des inégalités appliqué à l'inégalité ④ nous permet alors d'écrire que : $E(X) \leq G_X'(1)$.

A l'aide de ces deux dernières relations, on peut désormais conclure :

$$\boxed{\text{X admet une espérance si et seulement si } G_X \text{ est dérivable en 1 et cette espérance vaut : } E(X) = G_X'(1)}$$

Or, on a :

– $\forall x\in]-1, 1[$, $f_1''(x) = 0$, d'où, comme $\forall t\in]-1, 1[$, $\forall h\in\mathbb{R}^*$, $|t+h| \leq s_t$, $[t:t+h] \subset [-s_t, s_t] \subset]-1, 1[$:

$\forall t\in]-1, 1[$, $\forall h\in\mathbb{R}^*$, $|t+h| \leq s_t$, $\forall x\in[t:t+h]$, $|f_1''(x)| \leq 1(1-1)s_t^{1-2}$ $(s_t > 0)$, et :

– $\forall n\in[2, +\infty[$, $\forall x\in]-1, 1[$, $f_n''(x) = n(n-1)x^{n-2}$, d'où, comme $\forall t\in]-1, 1[$, $\forall h\in\mathbb{R}^*$, $|t+h| \leq s_t$, $[t:t+h] \subset [-s_t, s_t]$:

$\forall t\in]-1, 1[$, $\forall h\in\mathbb{R}^*$, $|t+h| \leq s_t$, $\forall n\in[2, +\infty[$, $\forall x\in[t:t+h]$, $|f_n''(x)| \leq n(n-1)s_t^{n-2}$.

On en déduit alors : $\forall t\in]-1, 1[$, $\forall h\in\mathbb{R}^*$, $|t+h| \leq s_t$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sup\limits_{[t:t+h]} |f_n''| \leq n(n-1)s_t^{n-2}$, d'où la conclusion :

$$\boxed{\forall t\in]-1, 1[, \exists s_t\in]0, 1[, \forall h\in\mathbb{R}^*, |t+h| \leq s_t, \forall n\in\mathbb{N}^*, \left|(t+h)^n - t^n - nht^{n-1}\right| \leq \frac{n(n-1)}{2} h^2 s_t^{n-2}}$$

b) ▪ ❍ D'après ce qui précède, on peut alors écrire :

$\forall t\in]-1, 1[$, $\forall h\in\mathbb{R}^*$, $|t+h| \leq s_t$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\left|(t+h)^k - t^k - hkt^{k-1}\right| \leq \frac{h^2}{2} k(k-1)s_t^{k-2}$

soit, en multipliant membre à membre cette inégalité par $|p(X=k)| = p(X=k)$:

$\forall t\in]-1, 1[$, $\forall h\in\mathbb{R}^*$, $|t+h| \leq s_t$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\left|p(X=k)(t+h)^k - p(X=k)t^k - hk\,p(X=k)t^{k-1}\right| \leq \frac{h^2}{2} k(k-1)s_t^{k-2}p(X=k)$

soit encore, en sommant cette relation pour $k = 1$ à $k = n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$:

$\forall t\in]-1, 1[$, $\forall h\in\mathbb{R}^*$, $|t+h| \leq s_t$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \left|p(X=k)(t+h)^k - p(X=k)t^k - hk\,p(X=k)t^{k-1}\right| \leq \frac{h^2}{2} \sum_{k=1}^{n} k(k-1)s_t^{k-2}p(X=k)$$

et donc, la somme de valeurs absolues étant supérieure ou égale à la valeur absolue de la somme :

$\forall t\in]-1, 1[$, $\forall h\in\mathbb{R}^*$, $|t+h| \leq s_t$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \left(p(X=k)(t+h)^k - p(X=k)t^k - hk\,p(X=k)t^{k-1}\right)\right| \leq \frac{h^2}{2} \sum_{k=1}^{n} k(k-1)s_t^{k-2}p(X=k) \qquad \text{i.e. :}$$

$\forall t\in]-1, 1[$, $\forall h\in\mathbb{R}^*$, $|t+h| \leq s_t$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} p(X=k)(t+h)^k - \sum_{k=1}^{n} p(X=k)t^k - h\sum_{k=1}^{n} k\,p(X=k)t^{k-1}\right| \leq \frac{h^2}{2} \sum_{k=1}^{n} k(k-1)s_t^{k-2}p(X=k)$$

et donc, en additionnant les termes en $k = 0$, tous deux égaux à $p(X = 0)$, aux deux premières sommes :

$\forall t\in]-1, 1[$, $\forall h\in\mathbb{R}^*$, $|t+h| \leq s_t$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} p(X=k)(t+h)^k - \sum_{k=0}^{n} p(X=k)t^k - h\sum_{k=1}^{n} k\,p(X=k)t^{k-1}\right| \leq \frac{h^2}{2} \sum_{k=1}^{n} k(k-1)s_t^{k-2}p(X=k) \quad (*)$$

soit enfin, comme $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $p(X=k) \leq 1$:

$\forall t\in]-1, 1[$, $\forall h\in\mathbb{R}^*$, $|t+h| \leq s_t$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} p(X=k)(t+h)^k - \sum_{k=0}^{n} p(X=k)t^k - h\sum_{k=1}^{n} k\,p(X=k)t^{k-1}\right| \leq \frac{h^2}{2} \sum_{k=1}^{n} k(k-1)s_t^{k-2} \quad ①.$$

❍ Or, G_X étant définie sur $[-1, 1]$, pour tout $t\in]-1, 1[$ et pour tout $h\in\mathbb{R}^*$ tels que $|t+h| \leq s_t$ $(s_t\in]0, 1[)$, G_X est définie en t et en $t + h$. On en déduit alors que pour tout $t\in]-1, 1[$ et pour tout $h\in\mathbb{R}^*$ tels que $|t+h| \leq s_t$, les suites $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} p(X=k)(t+h)^k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} p(X=k)t^k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes de limites respectives $G_X(t+h)$ et $G_X(t)$.

De plus, on a :

$\forall t\in]-1, 1[$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $|t^{k-1}| \leq 1$ soit, en multipliant cette inégalité par $|k\,p(X=k)| = k\,p(X=k)$ $(k\in\mathbb{N}^*)$:

$\forall t\in]-1, 1[$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $|k\,p(X=k)t^{k-1}| \leq k\,p(X=k)$.

❑ De plus, comme $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$, on peut écrire :

$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0\in\mathbb{N}^*, \forall k \geq n_0, |R_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ d'où, comme $\forall i\in\mathbb{N}, ip(X = i) \geq 0$, i.e. : $\forall k\in\mathbb{N}, R_k \geq 0$:

$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0\in\mathbb{N}^*, \forall k \geq n_0, 0 \leq R_k < \frac{\varepsilon}{2}$ soit, en multipliant par $t^{k-1} - t^k \geq 0$ ($t\in[0, 1[$, $k \geq n_0$) :

$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0\in\mathbb{N}^*, \forall k \geq n_0, \forall t\in[0, 1[, 0 \leq R_k(t^{k-1} - t^k) < \frac{\varepsilon}{2}(t^{k-1} - t^k)$.

Or, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0 et pour tout $t\in[0, 1[$, les séries de terme général $R_k(t^{k-1} - t^k)$ et $\frac{\varepsilon}{2}(t^{k-1} - t^k)$ ($k \geq n + 1$) convergent de sommes respectives $\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k(t^{k-1} - t^k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} kp(X = k)(1 - t^{k-1}) - R_n(1 - t^n)$ (cf. question précédente) et $\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}(t^{k-1} - t^k) = \frac{\varepsilon}{2}t^n$. On en déduit alors (cf. exercice 6.4.3) :

$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0\in\mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, \forall t\in[0, 1[, 0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k(t^{k-1} - t^k) \leq \frac{\varepsilon}{2}t^n$ ③.

Comme on a en outre : $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0\in\mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, 0 \leq R_n < \frac{\varepsilon}{2}$ (cf. supra), on peut également écrire en multipliant cette dernière relation par $1 - t^n \geq 0$ ($t\in[0, 1[$, $n \geq n_0$) :

$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0\in\mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, \forall t\in[0, 1[, 0 \leq R_n(1 - t^n) < \frac{\varepsilon}{2}(1 - t^n)$ ④.

En additionnant les relations ③ et ④, on en déduit alors :

$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0\in\mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, \forall t\in[0, 1[, 0 \leq R_n(1 - t^n) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k(t^{k-1} - t^k) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et donc, d'après la relation ② :

$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0\in\mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, \forall t\in[0, 1[, 0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} kp(X = k)(1 - t^{k-1}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ ⑤.

❑ De plus, on a clairement : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \lim_{t\to1} \sum_{k=1}^{n} kp(X = k)(1 - t^{k-1}) = 0$, ce qui s'écrit encore :

$\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall\varepsilon > 0, \exists\alpha\in]0, 1], \forall t\in]1 - \alpha, 1[, \left|\sum_{k=1}^{n} kp(X = k)(1 - t^{k-1})\right| < \frac{\varepsilon}{2}$

soit, comme $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall t\in[0, 1[, \sum_{k=1}^{n} kp(X = k)(1 - t^{k-1}) \geq 0$:

$\forall\varepsilon > 0, \forall n\in\mathbb{N}^*, \exists\alpha\in]0, 1], \forall t\in]1 - \alpha, 1[, 0 \leq \sum_{k=1}^{n} kp(X = k)(1 - t^{k-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$ ⑥.

❑ En additionnant les relations ⑤ et ⑥, on peut maintenant écrire :

$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0\in\mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, \exists\alpha\in]0, 1], \forall t\in]1 - \alpha, 1[, 0 \leq \sum_{k=1}^{n} kp(X = k)(1 - t^{k-1}) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} kp(X = k)(1 - t^{k-1}) < \varepsilon$ i.e. :

$\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha\in]0, 1], \forall t\in]1 - \alpha, 1[, 0 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} kp(X = k)(1 - t^{k-1}) < \varepsilon$ et donc, en scindant la somme en deux et en reconnaissant $E(X)$ et $G_X'(t)$ ($t\in]-1, 1[$) :

$\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha\in]0, 1], \forall t\in]1 - \alpha, 1[, 0 \leq E(X) - G_X'(t) < \varepsilon$ ce qui s'écrit encore :

$\lim_{t\to1^-} G_X'(t) = E(X)$.

❑ Or, comme G_X est dérivable sur $]-1, 1[$ (cf. 1), on peut écrire que G_X est dérivable, donc continue sur $[0, 1[$. Soit maintenant $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n\in\mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} p(X = k)$. En procédant comme à la question précédente, on peut écrire que : $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in[0, 1[,\ \sum_{k=n+1}^{+\infty} p(X = k)(1 - t^k) = S_n(1 - t^{n+1}) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} S_k(t^k - t^{k+1})$.

De plus, comme la série de terme général $p(X = k)$ $(k \geq 0)$ converge de somme 1 (X étant une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$), on a : $G_X(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(X = k) = 1$ et on peut alors écrire :

$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in[0, 1[,\ G_X(1) - G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(X = k) - \sum_{k=0}^{+\infty} p(X = k)\, t^k$ soit, en procédant comme précédemment :

$$= \sum_{k=0}^{n} p(X = k)(1 - t^k) + S_n(1 - t^{n+1}) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} S_k(t^k - t^{k+1}).$$

En procédant à nouveau comme précédemment, on en déduit alors que $\lim_{t\to 1^-} G_X(t) = G_X(1)$, donc que G_X est continue à gauche en 1. Comme G_X n'est définie que sur $[-1, 1]$, on peut maintenant écrire que G_X est continue en 1, donc sur $[0, 1]$.

Comme G_X est continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $[0, 1[$ et comme $\lim_{t\to 1^-} G_X'(t) = E(X)$, on en déduit alors (cf. exercice **7.10.1**, théorème de prolongement) que G_X est également dérivable à gauche en 1. Comme G_X n'est définie que sur $[-1, 1]$, on en déduit alors que G_X est dérivable en 1 et que :

$$\boxed{E(X) = G_X'(1)}$$

NB : On démontrerait également, en procédant de même, que si X admet une variance, alors :
$V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2$.

☞ Se souvenir à nouveau que si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance, en notant G_X sa fonction génératrice, on peut alors écrire (démonstration à savoir reproduire) :

– $E(X) = G_X'(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\,p(X = k)$, et si X admet une variance :

– $V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2$ avec $G_X''(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k - 1)\,p(X = k)$.

NB : Le lecteur attentif aura certainement remarqué l'extrême complexité de cette démonstration que l'on aurait pu s'épargner si l'on avait supposé que X admettait un moment d'ordre 2 afin de déterminer son espérance (simplification que nous nous sommes bien entendu refusés), puis si l'on avait substitué 1 à s_i au **1a**, le résultat final découlant alors aisément de la proposition (•) du **1b**.

SO EO

● 9. Etude d'une collection (1)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On y effectue une suite de tirages au hasard et avec remise. Soit X la variable aléatoire indiquant le numéro du tirage où, pour la première fois, chacune des boules a été obtenue au moins une fois. Pour tout $p\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $i\in[1, n]$, on considère l'événement $B_{p,i}$ défini par : "la boule numérotée i n'est pas apparue au cours des p premiers tirages".

1) Pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, pour tout $k\in[1, n]$ et pour tout k-uplet $(i_j)_{1\leq j\leq k}$ d'éléments distincts de $[1, n]$, calculer $p\left(\bigcap_{j=1}^{k} B_{p,i_j}\right)$. En déduire, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, $p\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_{p,i}\right)$.

2) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, déterminer la valeur de $p(X > p)$. En déduire la loi de X, puis établir que :

$$\forall p \in [\![1, n-1]\!], \ \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_{n-1}^{k-1} \left(\frac{n-k}{n}\right)^{p-1} = 0.$$

3) Montrer enfin que X admet une espérance et calculer E(X).

1) ■ Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et pour tout k-uplet $(i_j)_{1 \le j \le k}$ d'éléments distincts de $[\![1, n]\!]$, l'événement $\left[\bigcap_{j=1}^{k} B_{p,i_j}\right]$ est réalisé si et seulement si les boules numérotées $i_1, i_2, \dots, i_k$ ne sont pas apparues au cours des p premiers tirages.

Or, à chaque tirage, l'urne étant constituée de n boules et les tirages s'effectuant avec remise parmi les n boules de l'urne, ils sont donc indépendants et on en déduit alors que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, le nombre total de suites de p tirages possibles est n^p.

De plus, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et pour tout k-uplet $(i_j)_{1 \le j \le k}$ d'éléments distincts de $[\![1, n]\!]$, pour ne pas obtenir les boules numérotées $i_1, i_2, \dots, i_k$ à l'un des p premiers tirages, il faut et il suffit de choisir une boule parmi les n - k restantes (n - k possibilités). Les tirages s'effectuant au hasard et avec remise, ils sont donc indépendants et on en déduit alors que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, le nombre total de suites de p tirages telles que les boules numérotées $i_1, i_2, \dots, i_k$ n'apparaissent pas au cours de ces tirages est $(n-k)^p$.

Toutes les suites de tirages de boules étant équiprobables, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et pour tout k-uplet $(i_j)_{1 \le j \le k}$ d'éléments distincts de $[\![1, n]\!]$, la probabilité que les boules numérotées $i_1, i_2, \dots, i_k$ n'apparaissent pas au cours des p premiers tirages est $\left(\frac{n-k}{n}\right)^p$, et donc, en notant, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $A_{n,k}$ l'ensemble des k-listes d'éléments distincts de $[\![1, n]\!]$:

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![1, n]\!], \forall (i_j)_{1 \le j \le k} \in A_{n,k}, \ p\left(\bigcap_{j=1}^{k} B_{p,i_j}\right) = \left(\frac{n-k}{n}\right)^p}$$

☞ Se souvenir (résultat très classique) que lorsque l'on dispose de n objets et que l'on effectue p tirages avec remise parmi ces n objets, la probabilité que k objets **donnés** n'apparaissent pas au cours de ces p tirages est : $\left(\frac{n-k}{n}\right)^p$.

■ La formule du crible nous permet alors d'écrire :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \ p\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_{p,i}\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left[\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n} p\left(\bigcap_{j=1}^{k} B_{p,i_j}\right)\right]$$

soit, à l'aide du résultat précédent :

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left[\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n} \left(\frac{n-k}{n}\right)^p\right]$$

et donc, la somme en $(i_j)_{1 \le j \le k}$ comprenant C_n^k termes égaux (il y a en effet C_n^k k-listes strictement croissantes de $[\![1, n]\!]$, cf. exercice **12.14.1**) :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, \ p\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_{p,i}\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^p}$$

2) ■ Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'événement $[X > p]$ est réalisé si et seulement si au cours des p premiers tirages, au moins l'une des boules de l'urne n'a jamais été obtenue, c'est-à-dire si et seulement si l'événement $\left[\bigcup_{i=1}^{n} B_{p,i}\right]$ est réalisé.

☞ Pour montrer que deux événements A et B sont égaux, on écrit "A est réalisé si et seulement si..." et on détermine ensuite des conditions nécessaires et suffisantes à la réalisation de A qui nous conduisent à B.

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \sum_{p=0}^{N} p(X>p) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}C_n^k\,\frac{1-\left(\frac{n-k}{n}\right)^{N+1}}{1-\frac{n-k}{n}} \qquad \text{i.e. :}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{n}{k}C_n^k\left[1-\left(\frac{n-k}{n}\right)^{N+1}\right].$$

Or, comme $\forall k\in[1, n]$, $\left(\frac{n-k}{n}\right)\in[0, 1[$, on a : $\forall k\in[1, n]$, $\lim\limits_{N\to+\infty}\left(\frac{n-k}{n}\right)^{N+1} = 0$. On en déduit alors que la suite $\left(\sum_{p=0}^{N} p(X>p)\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{n}{k}C_n^k$, donc que la série de terme général $p(X > p)$ $(p \geq 0)$ converge de somme $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{n}{k}C_n^k$. A l'aide des résultats de l'exercice 5.2b, on en déduit alors que X admet une espérance et que : $E(X) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{n}{k}C_n^k$, et donc, d'après les résultats de l'exercice **12**.11 :

$$\boxed{\text{X admet une espérance et cette espérance vaut } E(X) = n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$$

NB : Dans cette question, on aurait également pu calculer E(X) à partir de la loi de X en considérant, pour tout $k\in[1, n]$, la série de terme général $p\left(\frac{n-k}{n}\right)^{p-1}$.

S❷ E❷

● 10. Etude d'une collection (2)

Soit n un entier naturel non nul. On effectue des tirages sans remise dans une urne contenant n boules blanches et n boules noires jusqu'à ce que l'on ait tiré la $p^{\text{ème}}$ boule blanche ($p\in[1, n]$). Soit alors X_p le nombre de tirages effectués.

1) Déterminer la loi de X_n, son espérance et sa variance.

2) Déterminer, pour tout entier $p\in[1, n]$, la loi, l'espérance et la variance de X_p.

1) ▪ Comme l'urne est composée de n boules blanches et de n boules noires et comme les tirages s'effectuent sans remise, le nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la $n^{\text{ème}}$ boule blanche est égal au minimum à n et au maximum à 2n. Tous les valeurs intermédiaires étant possibles, on en déduit alors : $X_n(\Omega) = [n, 2n]$.

Or, pour tout $k\in[n, 2n]$, la probabilité d'effectuer exactement k tirages pour obtenir la $n^{\text{ème}}$ boule blanche est égale à la probabilité de tirer la $n^{\text{ème}}$ boule blanche au $k^{\text{ème}}$ tirage lorsque l'on effectue un tirage "complet" des 2n boules de l'urne (en effet, une fois obtenue la $n^{\text{ème}}$ boule blanche, il y a une seule et unique façon de terminer la suite des 2n tirages : obtenir toutes les boules noires restantes).

☞ **Eviter impérativement** de raisonner sur un univers des possibles à taille variable (c'est-à-dire dont le cardinal dépend de l'événement dont on recherche la probabilité : ici, en considérant que l'on effectue exclusivement k tirages).
Lorsque l'univers des possibles semble dépendre de l'événement dont on cherche la probabilité, il faut raisonner en "tirages complets" : considérer que l'on "complète" les expériences (ici, terminer la suite des tirages) et s'intéresser ensuite au résultat obtenu (cf. exercice 2, mais aussi **13**.11 et **13**.15).

Considérons alors l'ensemble des tirages possibles des 2n boules de l'urne (on considèrera que les boules blanches d'une part et les boules noires d'autre part sont indiscernables, le même raisonnement, avec bien entendu le même résultat, pouvant être conduit en considérant toutes les boules comme discernables).

L'urne étant constituée de 2n boules dont n blanches, pour déterminer un tirage sans remise des 2n boules de l'urne, il faut et il suffit de choisir les n tirages où l'on obtient une boule blanche (C_{2n}^n possibilités). On en déduit alors que le nombre de tirages possibles des 2n boules de l'urne est égal à C_{2n}^n.

De plus, pour tout $k \in [n, 2n]$, pour effectuer une suite de tirages des 2n boules de l'urne de telle sorte que la $n^{\text{ème}}$ boule blanche soit obtenue au $k^{\text{ème}}$ tirage, il faut et il suffit de :
– tirer n - 1 boules blanches au cours des k - 1 premiers tirages (C_{k-1}^{n-1} possibilités : choix des n - 1 tirages parmi les k - 1 premiers où l'on obtient une boule blanche),
– tirer une boule blanche (la $n^{\text{ème}}$) au $k^{\text{ème}}$ tirage (1 possibilité),
– tirer les 2n - k boules noires restantes au cours des 2n - k derniers tirages (1 possibilité).

Pour tout $k \in [n, 2n]$, il y a donc C_{k-1}^{n-1} suites de tirages des 2n boules de l'urne tels que la $n^{\text{ème}}$ boule blanche soit obtenue au $k^{\text{ème}}$ tirage, c'est-à-dire C_{k-1}^{n-1} suites de tirages favorables à l'événement $[X_n = k]$.

Les C_{2n}^n suites de tirages des boules étant équiprobables, on en déduit alors : $\forall k \in [n, 2n]$, $p(X_n = k) = \dfrac{C_{k-1}^{n-1}}{C_{2n}^n}$,

d'où la conclusion :

$$\boxed{X_n(\Omega) = [n, 2n] \text{ et } \forall k \in [n, 2n],\ p(X_n = k) = \frac{C_{k-1}^{n-1}}{C_{2n}^n}}$$

■ On peut maintenant écrire :

$$E(X_n) = \sum_{k=n}^{2n} k\,p(X_n = k) \qquad \text{soit :}$$

$$= \frac{1}{C_{2n}^n} \sum_{k=n}^{2n} k\,C_{k-1}^{n-1} \qquad \text{soit encore, comme } \forall k \in [n, 2n],\ k\,C_{k-1}^{n-1} = n\,C_k^n :$$

$$= \frac{n}{C_{2n}^n} \sum_{k=n}^{2n} C_k^n \qquad \text{soit enfin, par itération de la formule de Pascal (cf. exercice 12.3) :}$$

$$= \frac{n\,C_{2n+1}^{n+1}}{C_{2n}^n} \qquad \text{et donc, comme } C_{2n+1}^{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} C_{2n}^n :$$

$$\boxed{E(X_n) = \frac{n(2n+1)}{n+1}}$$

■ On a :

$$E\big(X_n(X_n+1)\big) = \sum_{k=n}^{2n} k(k+1)\,p(X_n = k) \qquad \text{soit :}$$

$$= \frac{1}{C_{2n}^n} \sum_{k=n}^{2n} k(k+1)\,C_{k-1}^{n-1} \qquad \text{soit encore, comme } \forall k \in [n, 2n],\ k(k+1)\,C_{k-1}^{n-1} = n(n+1)\,C_{k+1}^{n+1},$$

$$= \frac{n(n+1)}{C_{2n}^n} \sum_{k=n}^{2n} C_{k+1}^{n+1} \qquad \text{d'où, par itération de la formule de Pascal (cf. exercice 12.3) :}$$

$$= \frac{n(n+1)\,C_{2n+2}^{n+2}}{C_{2n}^n} \qquad \text{et donc, comme } C_{2n+2}^{n+2} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+2)} C_{2n}^n :$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+2)} \qquad \text{soit enfin :}$$

$$= \frac{2n(n+1)(2n+1)}{n+2}.$$

On en déduit alors :

$$V(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2$$ i.e. :

$$= E\big(X_n(X_n+1)\big) - E(X_n) - E(X_n)^2$$ soit, d'après les résultats précédents :

$$= \frac{2n(n+1)(2n+1)}{n+2} - \frac{n(2n+1)}{n+1} - \frac{n^2(2n+1)^2}{(n+1)^2}$$ et donc, après simplifications :

$$\boxed{V(X_n) = \frac{n^2(2n+1)}{(n+1)^2(n+2)}}$$

☞ Pour calculer la variance d'une variable aléatoire X, au lieu de calculer $E(X^2)$ (et d'écrire alors que $k^2 = k(k-1)+k$ ou $k^2 = k(k+1)-k$), il est généralement plus rapide de calculer au préalable $E\big(X(X-1)\big)$ ou $E\big(X(X+1)\big)$ en fonction de la forme générale de $p(X = k)$, puis d'en déduire $V(X)$.

2) ▪ Comme l'urne est composée de n boules blanches et de n boules noires et que les tirages s'effectuent sans remise, pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, le nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la $p^{\text{ème}}$ boule blanche est égal au minimum à p et au maximum à n + p (on obtient alors les n boules noires avant d'obtenir la $p^{\text{ème}}$ boule blanche). Toutes les valeurs intermédiaires étant possibles, on en déduit alors :
$\forall p \in [\![1, n]\!],\ X_p(\Omega) = [\![p, n+p]\!]$.

Or, pour tout $p \in [\![1, n]\!]$ et pour tout $k \in [\![p, n+p]\!]$, la probabilité d'effectuer exactement k tirages pour obtenir la $p^{\text{ème}}$ boule blanche est égale à la probabilité de tirer la $p^{\text{ème}}$ boule blanche au $k^{\text{ème}}$ tirage lorsque l'on effectue un tirage "complet" des 2n boules de l'urne. Considérons alors l'ensemble des suites de tirages possibles des 2n boules de l'urne.

L'urne étant toujours constituée de 2n boules dont n blanches, le nombre de suites de tirages possibles des 2n boules de l'urne est toujours égal à C_{2n}^n.

De plus, pour tout $p \in [\![1, n]\!]$ et pour tout $k \in [\![p, n+p]\!]$, pour effectuer une suite de tirages des 2n boules de l'urne de telle sorte que la $p^{\text{ème}}$ boule blanche soit obtenue au $k^{\text{ème}}$ tirage, il faut et il suffit de :
– tirer p - 1 boules blanches au cours des k - 1 premiers tirages (C_{k-1}^{p-1} possibilités),
– tirer une boule blanche (la $p^{\text{ème}}$) au $k^{\text{ème}}$ tirage (1 possibilité),
– tirer les n - p boules blanches restantes au cours des 2n - k derniers tirages (C_{2n-k}^{n-p} possibilités).

Pour tout $p \in [\![1, n]\!]$ et pour tout $k \in [\![p, n+p]\!]$, il y a donc $C_{k-1}^{p-1} C_{2n-k}^{n-p}$ suites de tirages des 2n boules de l'urne telles que la $p^{\text{ème}}$ boule blanche soit obtenue au $k^{\text{ème}}$ tirage, c'est-à-dire $C_{k-1}^{p-1} C_{2n-k}^{n-p}$ suites de tirages favorables à l'événement $[X_p = k]$.

Les C_{2n}^n suites de tirages des boules de l'urne étant équiprobables, on en déduit alors :

$$\forall p \in [\![1, n]\!],\ \forall k \in [\![p, n+p]\!],\ p(X_p = k) = \frac{C_{k-1}^{p-1} C_{2n-k}^{n-p}}{C_{2n}^n}$$ d'où la conclusion :

$$\boxed{\forall p \in [\![1, n]\!],\ X_p(\Omega) = [\![p, n+p]\!] \text{ et } \forall p \in [\![1, n]\!],\ \forall k \in [\![p, n+p]\!],\ p(X_p = k) = \frac{C_{k-1}^{p-1} C_{2n-k}^{n-p}}{C_{2n}^n}}$$

▪ On peut maintenant écrire :

$$\forall p \in [\![1, n]\!],\ E(X_p) = \sum_{k=p}^{n+p} k\, p(X_p = k)$$ soit :

$$= \frac{1}{C_{2n}^n} \sum_{k=p}^{n+p} k\, C_{k-1}^{p-1} C_{2n-k}^{n-p}$$ soit encore, comme $\forall p \in [\![1, n]\!],\ \forall k \in [\![p, n+p]\!],\ k\,C_{k-1}^{p-1} = p\,C_k^p$:

b) En déduire la limite s_r de la suite $(s_n(r))_{n\in\mathbb{N}}$.

c) A l'aide des résultats de la question précédente, calculer l'espérance et la variance de X.

3) Soit maintenant Y le nombre de fois où l'on a obtenu face avant d'obtenir le $r^{ème}$ 'pile'. Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

1) X étant le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du $r^{ème}$ 'pile', on a clairement : $X(\Omega) = [\![r, +\infty[\![$. De plus, pour tout $k\in\mathbb{N}$, l'événement $[X = k + r]$ est réalisé si et seulement si le $r^{ème}$ 'pile' est obtenu au $(k + r)^{ème}$ lancer. Or, pour tout $k\in\mathbb{N}$, pour déterminer une série de lancers de la pièce telle que le $r^{ème}$ 'pile' soit obtenu au $(k + r)^{ème}$ lancer, il faut et il suffit de :

– choisir les r - 1 lancers, parmi les k + r - 1 premiers lancers, au cours desquels on obtient les r - 1 premiers 'pile' (C_{k+r-1}^{r-1} possibilités),

– obtenir 'pile' à ces r - 1 lancers et 'face' à chacun des k lancers restants parmi les k + r - 1 premiers lancers, (événement de probabilité $p^{r-1}q^k$, les lancers étant indépendants),

– obtenir 'pile' au $(k + r)^{ème}$ lancer (événement de probabilité p).

On en déduit alors : $\forall k\in\mathbb{N},\ p(X = k + r) = C_{k+r-1}^{r-1}p^{r-1}q^k\cdot p$, d'où la conclusion :

$$\boxed{X(\Omega) = [\![r, +\infty[\![\text{ et } \forall k\in\mathbb{N},\ p(X = k + r) = C_{k+r-1}^{r-1}p^r q^k}$$

2) a) cf. exercice 6.9.1.

b) cf. exercice 6.9.2 où l'on trouve :

$$\boxed{s_r = \frac{1}{(1-q)^{r+1}}}$$

c) ▪ On a : $\forall k\in\mathbb{N},\ (k + r)C_{k+r-1}^{r-1} = rC_{k+r}^{r}$. Comme la suite $(s_n(r))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite s_r, on peut écrire que la série de terme général $C_{k+r}^{r}q^k$ $(k \geq 0)$ converge de somme s_r. On en déduit alors que X admet une espérance et que cette espérance vaut :

$E(X) = \sum_{k=r}^{+\infty} k\,p(X = k)$ soit, en effectuant le changement de variable $k' = k - r$:

$= \sum_{k=0}^{+\infty} (k + r)p(X = k + r)$ soit encore, d'après les résultats précédents :

$= \sum_{k=0}^{+\infty} (k + r)C_{k+r-1}^{r-1}p^r q^k$ et comme $\forall k\in\mathbb{N},\ (k + r)C_{k+r-1}^{r-1} = rC_{k+r}^{r}$:

$= rp^r \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+r}^{r}q^k$ et en reconnaissant la somme s_r de la série de terme général $C_{k+r}^{r}q^k$ $(k \geq 0)$:

$= rp^r s_r$ soit enfin, comme $s_r = \dfrac{1}{(1-q)^{r+1}} = \dfrac{1}{p^{r+1}}$:

$$\boxed{E(X) = \frac{r}{p}}$$

▪ On a : $\forall k\in\mathbb{N},\ (k + r)(k + r + 1)C_{k+r-1}^{r-1} = r(r + 1)C_{k+r+1}^{r+1}$. Comme la suite $(s_n(r + 1))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite s_{r+1}, la série de terme général $C_{k+r+1}^{r+1}q^k$ converge de somme s_{r+1}. On en déduit alors que X(X + 1) admet une espérance et que cette espérance vaut :

Vecteurs aléatoires

Fiche de cours

I. Vecteurs aléatoires discrets à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ 50 E0

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé et X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, p)$.

■ ***Vecteurs aléatoires discrets à valeurs dans R^2.*** L'application $(X, Y) : \left| \begin{array}{l} \Omega \to \mathbb{R}^2 \\ \omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{array} \right.$ est un vecteur aléatoire discret à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ (ou couple de variables aléatoires réelles discrètes).

■ ***Loi de probabilité ou loi conjointe de (X, Y).*** On appelle loi de probabilité (ou loi conjointe) de (X, Y), l'application $p : \left| \begin{array}{l} (X, Y)(\Omega) \to \mathbb{R} \\ (i, j) \mapsto p([X = i] \cap [Y = j]) \end{array} \right.$.

■ ***Loi marginale de X.*** On appelle loi marginale de X, l'application $p : \left| \begin{array}{l} X(\Omega) \to \mathbb{R} \\ i \mapsto \displaystyle\sum_{j \in Y(\Omega)} p([X = i] \cap [Y = j]) \end{array} \right.$.

■ ***Loi conditionnelle de X sachant [Y = j].*** Soit j un élément de $Y(\Omega)$ tel que $p(Y = j) \neq 0$. On appelle loi conditionnelle de X sachant $[Y = j]$, l'application : $p : \left| \begin{array}{l} X(\Omega) \to \mathbb{R} \\ i \mapsto p\left(X = i /_{Y = j}\right) = \dfrac{p([X = i] \cap [Y = j])}{p(Y = j)} \end{array} \right.$.

■ ***Indépendance de deux variables aléatoires.*** X et Y sont indépendantes si :
$\forall (i, j) \in (X, Y)(\Omega)$, $p([X = i] \cap [Y = j]) = p(X = i)\,p(Y = j)$.

II. Vecteurs aléatoires discrets à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ 50 E0

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé, n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $(X_i)_{1 \le i \le n}$ n variables aléatoires réelles discrètes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, p)$.

■ ***Vecteurs aléatoires discrets à valeurs dans R^n.*** L'application $(X_i)_{1 \le i \le n} : \left| \begin{array}{l} \Omega \to \mathbb{R}^n \\ \omega \mapsto (X_i(\omega))_{1 \le i \le n} \end{array} \right.$ est un vecteur aléatoire discret à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

■ ***Loi de probabilité de $(X_i)_{1 \le i \le n}$.*** On appelle loi du vecteur aléatoire discret $(X_i)_{1 \le i \le n}$, l'application $p : \left| \begin{array}{l} (X_i)_{1 \le i \le n}(\Omega) \to \mathbb{R} \\ (k_i)_{1 \le i \le n} \mapsto p\left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} [X_i = k_i]\right) \end{array} \right.$.

3) **a)** ▪ Comme $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, N]\!])$, d'après le cours, on peut écrire que :

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!],\ E(X_i) = \frac{N+1}{2}}$$

▪ Comme $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, par passage à l'espérance, on en déduit alors :

$E(S) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$ et par linéarité de l'espérance :

$= \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$ et donc, la somme comprenant n termes égaux à $\frac{N+1}{2}$:

$$\boxed{E(S) = \frac{n(N+1)}{2}}$$

b) Comme $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, N]\!])$, d'après le cours, on peut écrire que :

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!],\ V(X_i) = \frac{N^2-1}{12}}$$

▪ Comme pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $i \neq j$, les variables aléatoires X_i et X_j sont indépendantes, on peut également écrire :

$$\boxed{\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i \neq j,\ \text{cov}(X_i, X_j) = 0}$$

▪ Comme $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, par passage à la variance, on en déduit alors :

$V(S) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$ soit :

$= \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j)$ et donc, d'après les résultats précédents, la première somme comprenant n termes égaux à $\frac{N^2-1}{12}$:

$$\boxed{V(S) = \frac{n(N^2-1)}{12}}$$

☞ Pour calculer l'espérance (ou la variance) d'une variable aléatoire X, il est très courant d'avoir à exprimer X comme somme de variables aléatoires dont on connaît l'espérance (ou la variance et les covariances), et d'en déduire alors son espérance (ou sa variance).

☞ Noter que si $\text{cov}(X, Y) = 0$, alors X et Y ne sont pas nécessairement indépendantes. On dit qu'elles ne sont pas corrélées.

SO EO

■ 2. Tirages sans remise

Soient n et N deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 tels que $n \leq N$. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire au hasard, successivement et sans remise n boules de l'urne.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au numéro de la boule extraite au $i^{\text{ème}}$ tirage et on pose $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

1) Déterminer, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la loi de X_i.

2) Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $i \neq j$, les variables aléatoires X_i et X_j sont-elles indépendantes ?

3) a) Déterminer, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $E(X_i)$. En déduire $E(S)$.

b) Calculer, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $V(X_i)$, puis, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $i \neq j$, $\text{cov}(X_i, X_j)$. En déduire $V(S)$.

1) A chaque tirage, chacune des boules de l'urne pouvant être obtenue, on a clairement :
$\forall i \in [\![1, n]\!], X_i(\Omega) = [\![1, N]\!]$.

De plus, toutes les boules jouant des rôles symétriques, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, au $i^{\text{ème}}$ tirage, elles ont toutes la même probabilité d'être tirées. On en déduit alors : $\forall i \in [\![1, n]\!], \forall k \in [\![1, N]\!], p(X_i = k) = \frac{1}{N}$, soit, en reconnaissant la loi uniforme de paramètre $[\![1, N]\!]$:

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!], X_i \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, N]\!]), \text{ i.e. : } \forall i \in [\![1, n]\!], X_i(\Omega) = [\![1, N]\!] \text{ et } \forall i \in [\![1, n]\!], \forall k \in [\![1, N]\!], p(X_i = k) = \frac{1}{N}}$$

NB : On aurait également pu remarquer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, il y a autant de suites de tirages pour lesquels la boule numérotée k est tirée au $i^{\text{ème}}$ tirage que de n-listes d'éléments distincts de $[\![1, N]\!]$ telles que le $i^{\text{ème}}$ élément de la n-liste soit égal à k, c'est-à-dire que de (n - 1)-listes d'éléments distincts de $[\![1, N]\!] \setminus \{k\}$, soit A_{N-1}^{n-1}. Comme il y a A_N^n n-listes d'éléments distincts de $[\![1, N]\!]$, c'est-à-dire A_N^n suites possibles de tirages équiprobables, on en déduit alors : $\forall i \in [\![1, n]\!], \forall k \in [\![1, N]\!], p(X_i = k) = \frac{A_{N-1}^{n-1}}{A_N^n} = \frac{1}{N}$.

2) Comme les différents tirages s'effectuent sans remise, on ne peut pas tirer deux fois la même boule dans la suite des n tirages. On en déduit alors : $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, i \neq j, \forall k \in [\![1, N]\!], p([X_i = k] \cap [X_j = k]) = 0$.

Or, d'après la question précédente, on a : $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, i \neq j, \forall k \in [\![1, N]\!], p(X_i = k)\, p(X_j = k) = \frac{1}{N^2}$. On en déduit alors : $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, i \neq j, \forall k \in [\![1, N]\!], p([X_i = k] \cap [X_j = k]) \neq p(X_i = k)\, p(X_j = k)$, et donc :

$$\boxed{\text{Pour tout } (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, i \neq j, \text{ les variables aléatoires } X_i \text{ et } X_j \text{ ne sont pas indépendantes}}$$

☞ Pour montrer que deux variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes, il suffit de montrer que : $\exists (i, j) \in (X, Y)(\Omega), p([X = i] \cap [Y = j]) \neq p(X = i)\, p(Y = j)$.

3) a) ▪ Comme $\forall i \in [\![1, n]\!], X_i \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, N]\!])$, d'après le cours, on peut écrire que :

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!], E(X_i) = \frac{N+1}{2}}$$

▪ Comme $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, par passage à l'espérance, on en déduit alors :

$E(S) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$ et par linéarité de l'espérance :

$= \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$ et donc, la somme comprenant n termes égaux à $\frac{N+1}{2}$:

$$\boxed{E(S) = \frac{n(N+1)}{2}}$$

b) Comme $\forall i \in [\![1, n]\!], X_i \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, N]\!])$, d'après le cours, on peut écrire que :

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!], V(X_i) = \frac{N^2 - 1}{12}}$$

■ Par définition de la covariance, on a : $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ i\neq j,\ \mathrm{cov}(X_i,X_j)=E(X_iX_j)-E(X_i)E(X_j)$ avec :

$$\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ i\neq j,\ E(X_iX_j)=\sum_{x=1}^{N}\left(\sum_{y=1}^{N}xy\,p\big([X_i=x]\cap[X_j=y]\big)\right).$$

Or, comme on ne peut pas obtenir la même boule à deux tirages différents (les tirages s'effectuant sans remise), on a clairement :

$\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ i\neq j,\ \forall x\in[\![1,N]\!],\ p\big([X_i=x]\cap[X_j=x]\big)=0.$

De plus, pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $i\neq j$ et pour tout $(x,y)\in[\![1,N]\!]^2$, $x\neq y$, il y a autant de suites de tirages pour lesquels la boule numérotée x est tirée au $i^{\text{ème}}$ tirage et la boule numérotée y au $j^{\text{ème}}$ tirage que de n-listes d'éléments distincts de $[\![1,N]\!]$ telles que le $i^{\text{ème}}$ élément de la n-liste soit égal à x et le $j^{\text{ème}}$ élément de la n-liste soit égal à y, c'est-à-dire que de (n - 2)-listes d'éléments distincts de $[\![1,N]\!]\setminus\{x,y\}$, soit A_{N-2}^{n-2}. Comme il y a A_N^n n-listes d'éléments distincts de $[\![1,N]\!]$, c'est-à-dire A_N^n suites possibles de tirages équiprobables, on peut également écrire :

$$\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ i\neq j,\ \forall(x,y)\in[\![1,N]\!]^2,\ x\neq y,\ p\big([X_i=x]\cap[X_j=y]\big)=\frac{A_{N-2}^{n-2}}{A_N^n}=\frac{1}{N(N-1)}.$$

D'après les résultats précédents, on en déduit alors :

$$\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ i\neq j,\ E(X_iX_j)=\frac{1}{N(N-1)}\sum_{x=1}^{N}\left(\sum_{\substack{y=1\\y\neq x}}^{N}xy\right)\quad\text{soit :}$$

$$=\frac{1}{N(N-1)}\sum_{x=1}^{N}\left(\sum_{y=1}^{N}xy-x^2\right)\quad\text{soit encore :}$$

$$=\frac{1}{N(N-1)}\left[\sum_{x=1}^{N}\left(\sum_{y=1}^{N}xy\right)-\left(\sum_{x=1}^{N}x^2\right)\right]\quad\text{i.e. :}$$

$$=\frac{1}{N(N-1)}\left[\left(\sum_{x=1}^{N}x\right)\left(\sum_{y=1}^{N}y\right)-\left(\sum_{x=1}^{N}x^2\right)\right]$$

et en reconnaissant la somme des N premiers entiers naturels non nuls et de leurs carrés :

$$=\frac{1}{N(N-1)}\left[\left(\frac{N(N+1)}{2}\right)^2-\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}\right]\quad\text{et donc :}$$

$$=\frac{N(N+1)^2}{4(N-1)}-\frac{(N+1)(2N+1)}{6(N-1)}\quad\text{soit encore :}$$

$$=\frac{(N+1)}{12(N-1)}\big(3N(N+1)-2(2N+1)\big)\quad\text{i.e. :}$$

$$=\frac{(N+1)}{12(N-1)}(N-1)(3N+2)\quad\text{soit enfin :}$$

$$=\frac{(N+1)(3N+2)}{12}.$$

Comme $\forall i\in[\![1,n]\!],\ E(X_i)=\dfrac{N+1}{2}$, on en déduit alors :

$$\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ i\neq j,\ \mathrm{cov}(X_i,X_j)=\frac{(N+1)(3N+2)}{12}-\left(\frac{N+1}{2}\right)^2\quad\text{soit :}$$

$$=\frac{(N+1)\big((3N+2)-3(N+1)\big)}{12}\quad\text{et donc :}$$

$$\boxed{\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ i\neq j,\ \mathrm{cov}(X_i,X_j)=-\frac{N+1}{12}}$$

■ Comme $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, par passage à la variance, on en déduit alors : $V(S) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$, soit :

$V(S) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \operatorname{cov}(X_i, X_j)$.

Or, d'après les résultats précédents, la première somme comprend n termes égaux à $\frac{N^2-1}{12}$ et la seconde $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ termes (il y a autant de termes dans la somme que de 2-listes strictement croissantes de $[\![1, n]\!]$, cf. exercice **12**.14.1) égaux à $-\frac{N+1}{12}$. On peut maintenant écrire :

$V(S) = \frac{n(N^2-1)}{12} - n(n-1)\frac{N+1}{12}$ i.e. :

$= \frac{n(N+1)}{12}\big((N-1)-(n-1)\big)$ soit enfin :

$$\boxed{V(S) = \frac{n(N+1)(N-n)}{12}}$$

SO EO

■ 3. Le marchand de fruits et légumes

Soient $\lambda \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. On suppose qu'un jour donné, le nombre N de clients d'un marchand de fruits et légumes suit une loi de Poisson de paramètre λ et que chaque client achète des fruits avec une probabilité p et des légumes avec une probabilité $q = 1 - p$ (on suppose que les clients ne peuvent acheter à la fois des fruits et des légumes).

Soit X le nombre de clients achetant des fruits et Y le nombre de clients achetant des légumes.

1) Déterminer la loi conjointe de (X, Y).

2) **a)** Déterminer les lois marginales de X et de Y.

b) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? En déduire cov(X, Y) et E(XY).

1) D'après l'énoncé, on a clairement : $(X, Y)(\Omega) = \mathbb{N}^2$. De plus, comme $X + Y = N$ (chacun des N clients achetant des fruits ou des légumes), on a également :

$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2,\ p\big([X = i] \cap [Y = j]\big) = p\big([X = i] \cap [N - X = j]\big)$ d'où :

$= p\big([X = i] \cap [N = i + j]\big)$ soit, d'après la formule des probabilités composées :

$= p\left(X = i / N = i + j\right) p(N = i + j)$.

Or, comme chaque client achète des fruits avec une probabilité p, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, sachant que le nombre total de clients N est égal à $i + j$, X suit une loi binomiale de paramètres $i + j$ et p. On peut alors écrire :

$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2,\ p\left(X = i / N = i + j\right) = C_{i+j}^{i} p^i q^j$.

De plus, comme N suit une loi de Poisson de paramètre λ, on peut également écrire :

$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2,\ p(N = i + j) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!}$.

On en déduit alors :

$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2,\ p\big([X = i] \cap [Y = j]\big) = C_{i+j}^{i} p^i q^j \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!}$ soit :

$= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \frac{(\lambda q)^j}{j!}$.

On peut désormais conclure :

$$\boxed{(X, Y)(\Omega) = \mathbb{N}^2 \text{ et } \forall (i, j) \in \mathbb{N}^2,\ p([X = i] \cap [Y = j]) = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \frac{(\lambda q)^j}{j!}}$$

2) a) ❑ On a : $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Comme on a également $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, on peut écrire :

$\forall i \in \mathbb{N},\ [X = i] = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} ([X = i] \cap [Y = j])$ soit, en passant aux probabilités :

$\forall i \in \mathbb{N},\ p(X = i) = p\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} ([X = i] \cap [Y = j])\right)$ soit encore, l'union étant disjointe (il ne peut y avoir simultanément un jour donné j et j' clients achetant des légumes avec $j \neq j'$) :

$= \sum_{j \in \mathbb{N}} p([X = i] \cap [Y = j])$ et donc, d'après les résultats de la question précédente :

$= \sum_{j \in \mathbb{N}} e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \frac{(\lambda q)^j}{j!}$ i.e. :

$= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^j}{j!}$ soit enfin, en reconnaissant la somme d'une série exponentielle :

$= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^i}{i!} e^{\lambda q}$ et donc :

$= e^{-\lambda(1-q)} \frac{(\lambda p)^i}{i!}$ d'où, comme $1 - q = p$:

$= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!}$.

❑ X et Y munis de leurs paramètres respectifs p et q jouant des rôles symétriques, on peut également écrire : $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall i \in \mathbb{N},\ p(Y = i) = e^{-\lambda q} \frac{(\lambda q)^i}{i!}$. On peut maintenant conclure que X et Y suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs λp et λq, i.e. :

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p) \text{ et } X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda q), \text{ i.e. : } X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall i \in \mathbb{N}, \begin{cases} p(X = i) = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \\ p(Y = i) = e^{-\lambda q} \frac{(\lambda q)^i}{i!} \end{cases}}$$

b) ▪ On en déduit alors :

$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2,\ p(X = i)p(Y = j) = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \cdot e^{-\lambda q} \frac{(\lambda q)^j}{j!}$ i.e. :

$= e^{-\lambda(p+q)} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \frac{(\lambda q)^j}{j!}$ soit, comme $p + q = 1$:

$= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \frac{(\lambda q)^j}{j!}$ i.e. :

$= p([X = i] \cap [Y = j])$ d'où la conclusion :

$$\boxed{\text{X et Y sont indépendantes}}$$

☞ Pour démontrer que deux variables aléatoires X et Y (ou une suite de variables aléatoires) sont indépendantes, deux méthodes sont possibles :

– soit on remarque que X et Y représentent des événements indépendants (cf. exercice 1.2) ou plus généralement **des suites disjointes d'événements indépendants** (cf. exercice 7).

– soit on démontre que : $\forall (i, j) \in (X, Y)(\Omega),\ p(X = i)p(Y = j) = p([X = i] \cap [Y = j])$.

■ Comme X et Y sont indépendantes, on peut alors écrire : cov(X, Y) = 0 et E(XY) = E(X)E(Y). Or, comme X et Y suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs λp et λq, on peut écrire : $E(X) = \lambda p$ et $E(Y) = \lambda q$, d'où la conclusion :

$$\boxed{\operatorname{cov}(X, Y) = 0 \text{ et } E(XY) = \lambda^2 pq}$$

SO EO

★ 4. Fonctions génératrices (4)

Pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, on note G_X la fonction $G_X : t \mapsto G_X(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} p(X = k)\, t^k$ (lorsque $X(\Omega)$ est fini, G_X est définie sur $\mathbb{R}$ et lorsque $X(\Omega)$ est infini, G_X est au moins définie sur [-1, 1], cf. exercices **14**.6 et **14**.7).

1) Soient p un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $(X_i)_{1 \le i \le p}$ une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ ($n \in \mathbb{N}$). En remarquant que pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $[\![0, n]\!]$, on a : $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = E(t^X)$, montrer que :

$$G_{\sum_{i=1}^{p} X_i} = \prod_{i=1}^{p} G_{X_i}.$$

2) Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. En remarquant que pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a : $\forall t \in [-1, 1]$, $G_X(t) = E(t^X)$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [-1, 1], G_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(t).$$

1) Comme pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto t^x$ est définie en tout point de $\mathbb{N}$, donc en tout point de $[\![0, n]\!]$, pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $[\![0, n]\!]$, on a (théorème de transfert) : $\forall t \in \mathbb{R}$, $E(t^X) = \sum_{k=0}^{n} p(X = k)\, t^k$.

Or, pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $[\![0, n]\!]$, on a également : $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} p(X = k)\, t^k$, soit, en reconnaissant $E(t^X)$: $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = E(t^X)$.

☞ Se souvenir que si X est une variable aléatoire réelle discrète, alors : $E(t^X) = \sum_{k \in X(\Omega)} p(X = k)\, t^k$ (théorème "de transfert" appliqué à la fonction $f : x \mapsto t^x$).

Montrons par montée finie, que si les variables aléatoires $(X_i)_{1 \le i \le p}$ à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ sont mutuellement indépendantes, alors : $\forall k \in [\![2, p]\!]$, $G_{\sum_{i=1}^{k} X_i} = \prod_{i=1}^{k} G_{X_i}$.

• Au rang k = 2, les variables aléatoires $(X_i)_{1 \le i \le p}$ étant mutuellement indépendantes, les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, les variables aléatoires t^{X_1} et t^{X_2} sont indépendantes. On peut alors écrire : $\forall t \in \mathbb{R}$, $E(t^{X_1} t^{X_2}) = E(t^{X_1}) E(t^{X_2})$, soit : $\forall t \in \mathbb{R}$, $E(t^{X_1+X_2}) = E(t^{X_1}) E(t^{X_2})$.

En utilisant la remarque précédente, on en déduit alors : $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_{X_1+X_2}(t) = G_{X_1}(t)\, G_{X_2}(t)$, ce qui s'écrit encore : $G_{X_1+X_2} = G_{X_1} G_{X_2}$.

La propriété est donc bien vérifiée au rang k = 2.

• Soit $k \in [\![2, p-1]\!]$ (si $p \geq 3$), supposons $G_{\sum_{i=1}^{k} X_i} = \prod_{i=1}^{k} G_{X_i}$.

Les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq p}$ étant mutuellement indépendantes, les variables aléatoires $\sum_{i=1}^{k} X_i$ et X_{k+1} sont indépendantes, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, les variables aléatoires $t^{\sum_{i=1}^{k} X_i}$ et $t^{X_{k+1}}$ sont indépendantes, d'où :

$\forall t \in \mathbb{R},\ E\left(t^{\sum_{i=1}^{k} X_i} t^{X_{k+1}}\right) = E\left(t^{\sum_{i=1}^{k} X_i}\right) E\left(t^{X_{k+1}}\right)$ i.e. :

$\forall t \in \mathbb{R},\ E\left(t^{\sum_{i=1}^{k+1} X_i}\right) = E\left(t^{\sum_{i=1}^{k} X_i}\right) E\left(t^{X_{k+1}}\right)$ ce qui s'écrit encore, d'après la remarque précédente :

$\forall t \in \mathbb{R},\ G_{\sum_{i=1}^{k+1} X_i}(t) = G_{\sum_{i=1}^{k} X_i}(t)\, G_{X_{k+1}}(t)$ et donc, d'après l'hypothèse :

$= \left(\prod_{i=1}^{k} G_{X_i}(t)\right) G_{X_{k+1}}(t)$ i.e. :

$= \prod_{i=1}^{k+1} G_{X_i}(t)$ ce qui s'écrit encore :

$G_{\sum_{i=1}^{k+1} X_i} = \prod_{i=1}^{k+1} G_{X_i}$.

• Ainsi, on a bien : $\forall k \in [\![2, p]\!],\ G_{\sum_{i=1}^{k} X_i} = \prod_{i=1}^{k} G_{X_i}$.

On peut alors conclure, pour $k = p$:

> Si $(X_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $[\![0, n]\!]$, alors : $G_{\sum_{i=1}^{p} X_i} = \prod_{i=1}^{p} G_{X_i}$.

2) Comme pour tout $t \in [-1, 1]$, l'application $x \mapsto t^x$ est définie en tout point de $\mathbb{N}$ et comme pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ et pour tout $t \in [-1, 1]$, la série de terme général $p(X = k)\,t^k$ est absolument convergente (cf. exercice **14.7.1**), on peut écrire (théorème de transfert) que pour tout $t \in [-1, 1]$, t^X admet une espérance et que : $\forall t \in [-1, 1],\ E\left(t^X\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(X = k)\,t^k$.

Or, pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, G_X est au moins définie sur $[-1, 1]$ (cf. exercice **14.7.1**) et on peut écrire : $\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(X = k)\,t^k$, soit, en reconnaissant $E\left(t^X\right)$: $\forall t \in [-1, 1],\ G_X(t) = E\left(t^X\right)$.

Montrons alors par récurrence, que si les variables aléatoires $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ sont mutuellement indépendantes, alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [-1, 1],\ G_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(t)$.

• Au rang $n = 1$, on a clairement : $\forall t \in [-1, 1],\ G_{X_1}(t) = G_{X_1}(t)$. La propriété est donc bien vérifiée au rang 1.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\forall t \in [-1, 1],\ G_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(t)$.

Les variables aléatoires $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ étant mutuellement indépendantes, on peut écrire que pour tout $t \in [-1, 1]$, les variables aléatoires $t^{\sum_{i=1}^{n} X_i}$ et $t^{X_{n+1}}$ sont également indépendantes, d'où :

$\forall t \in [-1, 1],\ E\left(t^{\sum_{i=1}^{n} X_i} t^{X_{n+1}}\right) = E\left(t^{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right) E\left(t^{X_{n+1}}\right)$ i.e. :

$\forall t\in[-1, 1], E\left(t^{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}\right) = E\left(t^{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right)E(t^{X_{n+1}})$ ce qui s'écrit encore, d'après la remarque précédente :

$\forall t\in[-1, 1], G_{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}(t) = G_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t)\, G_{X_{n+1}}(t)$ et donc, d'après l'hypothèse de récurrence :

$\forall t\in[-1, 1], G_{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}(t) = \left(\prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(t)\right) G_{X_{n+1}}(t)$ i.e. :

$= \prod_{i=1}^{n+1} G_{X_i}(t).$

• Ainsi, on a bien : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall t\in[-1, 1], G_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(t)$, d'où la conclusion :

> Si $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall t\in[-1, 1], G_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(t).$

☞ Se souvenir que si (X_i) forme une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors : $G_{\sum X_i} = \prod G_{X_i}$ (démonstrations à connaître : par montée finie lorsque la suite de VAR est finie, par récurrence lorsqu'elle est infinie ; sur $\mathbb{R}$ lorsque $X(\Omega)$ est un ensemble fini d'entiers relatifs, sur [-1, 1] lorsque $X(\Omega)$ est un ensemble infini dénombrable d'entiers relatifs ; la démonstration pouvant dans tous les cas s'effectuer à partir du rang 1 ou 2).

S0 E0

● 5. Somme de deux variables aléatoires complémentaires

Soit n un entier naturel non nul et $p\in]0, 1[$. Une secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts. On admet que les appels constituent n expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre p. Soit X le nombre de correspondants obtenus.

1) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

2) La secrétaire rappelle une seconde fois, et dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pu joindre au cours de la première série d'appels. Soient alors Y le nombre de personnes jointes au cours de cette seconde série d'appels et $Z = X + Y$ le nombre total de correspondants obtenus lors de ces deux séries d'appels.

a) Déterminer, pour tout $i\in[\![0, n]\!]$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = i]$.

b) Déterminer la loi de Z et montrer que Z suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

1) Comme X est le nombre de correspondants obtenus, X représente le nombre de succès (obtenir un correspondant) lors de la réalisation de n essais indépendants (n coups de téléphone) d'une expérience à deux issues possibles (joindre ou ne pas joindre le correspondant) dont la probabilité de succès est p. X suit donc une loi binomiale de paramètres n et p.

On en déduit alors :

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p), \text{ i.e. : } X(\Omega) = [\![0, n]\!] \text{ et } \forall k\in[\![0, n]\!],\ p(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \text{ d'où : } E(X) = np \text{ et } V(X) = np(1 - p)}$$

2) a) Pour tout $i\in[\![0, n]\!]$, si $X = i$, lors de la seconde série d'appels, la secrétaire rappelle les $n - i$ correspondants qu'elle n'a pas réussi à joindre lors de la première série, et ce dans les mêmes conditions que précédemment.

On déduit alors que si $X = i$ ($i\in[\![0, n]\!]$), Y suit une loi binomiale de paramètres $n - i$ et p, d'où la conclusion :

$$\boxed{\forall i\in[\![0, n]\!], \forall k\in[\![0, n - i]\!],\ p\left(Y = k / X = i\right) = C_{n-i}^k p^k (1 - p)^{n-i-k}}$$

b) ▪ Comme Z est le nombre total de correspondants joints à l'issue de la seconde série d'appels, on a clairement : $Z(\Omega) = [0, n]$. De plus, comme $Z = X + Y$, on peut écrire :

$\forall k \in [0, n],\ [Z = k] = \bigcup_{i=0}^{k} ([X = i] \cap [Y = k - i])$ d'où, en passant aux probabilités :

$\forall k \in [0, n],\ p(Z = k) = p\left(\bigcup_{i=0}^{k} ([X = i] \cap [Y = k - i])\right)$ soit, l'union étant disjointe (on ne peut avoir simultanément $[X = i]$ et $[X = i']$ avec $i \neq i'$) :

$= \sum_{i=0}^{k} p([X = i] \cap [Y = k - i])$ soit encore, d'après la formule des probabilités composées :

$= \sum_{i=0}^{k} p\left(Y = k - i /_{X = i}\right) p(X = i)$ et donc, d'après les résultats précédents :

$= \sum_{i=0}^{k} C_{n-i}^{k-i} p^{k-i} (1 - p)^{n-k} \times C_n^i p^i (1 - p)^{n-i}$ i.e. :

$= \sum_{i=0}^{k} C_n^i C_{n-i}^{k-i} p^k (1 - p)^{2n-k-i}$ et comme $\forall k \in [0, n],\ \forall i \in [0, k],\ C_n^i C_{n-i}^{k-i} = C_n^k C_k^i$ (cf. exercice **12.8.1**) :

$= C_n^k p^k (1 - p)^{2n-2k} \sum_{i=0}^{k} C_k^i (1 - p)^{k-i}$ soit encore, à l'aide de la formule du binôme de Newton :

$= C_n^k p^k (1 - p)^{2n-2k} (2 - p)^k$ d'où la conclusion :

$$\boxed{Z(\Omega) = [0, n] \ \text{ et } \ \forall k \in [0, n],\ p(Z = k) = C_n^k \left(p(2 - p)\right)^k \left((1 - p)^2\right)^{n-k}}$$

▪ Comme $p(2 - p) + (1 - p)^2 = 1$, on peut maintenant écrire que Z suit une loi binomiale de paramètres n et $p(2 - p)$, i.e. :

$$\boxed{Z \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p(2 - p))}$$

SO EO

● 6. Loi multinomiale

Soient n et r deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 tels que $n \geq r$. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à r (au moins une par numéro) avec, pour tout $i \in [1, r]$, une proportion p_i de boules numérotées i (et donc $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$).

On effectue alors une suite de n tirages avec remise dans l'urne et pour tout $i \in [1, r]$, on désigne par X_i la variable aléatoire égale au nombre de boules numérotées i ainsi tirées.

1) Déterminer la loi du vecteur $(X_i)_{1 \leq i \leq r}$.

2) Déterminer les lois marginales des variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq r}$.

1) Lorsque l'on effectue n tirages avec remise dans l'urne, pour tout $i \in [1, r]$, le nombre de boules numérotées i tirées est compris entre 1 et n. On en déduit alors : $(X_i)_{1 \leq i \leq r}(\Omega) \subset [0, n]^r$.

De plus, pour effectuer un tirage comprenant, pour tout $i \in [1, r]$, k_i boules ($k_i \in [0, n]$) numérotées i avec $\sum_{i=1}^{r} k_i = n$ (événement $\left[\bigcap_{i=1}^{r} [X_i = k_i]\right]$), il faut et il suffit de :

– choisir, pour tout $i \in [\![1, r-1]\!]$, les k_i tirages où l'on obtient des boules numérotées i (les k_r tirages où l'on obtient des boules numérotées r sont alors entièrement déterminés) : $C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} C_{n-(k_1+k_2)}^{k_3} \dots C_{n-(k_1+\dots+k_{r-2})}^{k_{r-1}}$ possibilités, soit, en posant $k_0 = 0$: $\prod_{i=1}^{r-1} C_{n-\sum_{j=0}^{i-1} k_j}^{k_i} = \prod_{i=1}^{r} C_{n-\sum_{j=0}^{i-1} k_j}^{k_i}$ possibilités (le terme en $i = r$ étant égal à $C_{k_r}^{k_r} = 1$),

– tirer à chacun des tirages une boule dont le numéro a été choisi précédemment (événement de probabilité $\prod_{i=1}^{r} p_i^{k_i}$, les tirages étant mutuellement indépendants).

On en déduit alors la loi du vecteur $(X_i)_{1 \le i \le r}$:

$$\boxed{(X_i)_{1 \le i \le r}(\Omega) \subset [\![0, n]\!]^r \text{ et } \forall (k_i)_{1 \le i \le r} \in [\![0, n]\!]^r,\ k_0 = 0,\ \sum_{i=1}^{r} k_i = n,\ p\left(\bigcap_{i=1}^{r} [X_i = k_i]\right) = \prod_{i=1}^{r} C_{n-\sum_{j=0}^{i-1} k_j}^{k_i} p_i^{k_i}}$$

2) Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, X_i représente le nombre de boules numérotées i obtenues dans la suite des n tirages avec remise, c'est-à-dire le nombre de succès (tirer une boule numérotée i) lors de la réalisation de n essais indépendants (tirer une boule dans l'urne) d'une expérience à deux issues possibles (tirer ou non une boule numérotée i), la probabilité d'un succès étant p_i (proportion de boules numérotées i dans l'urne).

On en déduit alors que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, X_i suit une loi binomiale de paramètres n et p_i, d'où :

$$\boxed{\forall i \in [\![1, r]\!],\ X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_i), \text{ i.e. : } X_i(\Omega) = [\![0, n]\!] \text{ et } \forall i \in [\![1, r]\!],\ \forall k \in [\![0, n]\!],\ p(X_i = k) = C_n^k p_i^k (1 - p_i)^{n-k}}$$

S0 E0

● 7. Etude d'une collection (3)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Un enfant désirant posséder une collection complète de n images achète tous les jours chez son marchand de journaux une image au hasard parmi les n.

On désigne alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, par X_k la variable aléatoire égale au nombre d'achats nécessaires pour obtenir k images distinctes. On pose $Y_1 = X_1$ et pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $Y_k = X_k - X_{k-1}$.

1) Déterminer, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la loi de Y_k.

2) En déduire $E(X_n)$ et $V(X_n)$.

1) Comme $Y_1 = X_1$, Y_1 représente le nombre d'achat(s) nécessaire(s) pour obtenir une image distincte, c'est-à-dire la première image. On en déduit alors que Y_1 est la variable aléatoire certaine égale à 1, i.e. : $Y_1 = 1$.

De plus, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, comme $Y_k = X_k - X_{k-1}$, Y_k représente le nombres d'achats nécessaires à l'obtention de la $k^{\text{ème}}$ image, la $(k-1)^{\text{ème}}$ une fois obtenue.

Pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, Y_k représente donc le temps d'attente d'un premier succès (l'obtention de la première image distincte des $k - 1$ déjà obtenues) lors de la réalisation d'essais indépendants (l'achat d'une image) d'une expérience à deux issues possibles (obtenir ou ne pas obtenir une image distincte des $k - 1$ images déjà obtenues), la probabilité d'un succès étant $\frac{n-k+1}{n}$ (parmi les n images équiprobables que peut acheter l'enfant, il y en a $n - k + 1$ qu'il ne possède pas encore).

On en déduit alors que pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, Y_k suit une loi géométrique de paramètre $\frac{n-k+1}{n}$, d'où :

$$\boxed{\begin{array}{c} Y_1 = 1 \text{ et } \forall k \in [\![2, n]\!],\ Y_k \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{n-k+1}{n}\right), \text{ i.e. :} \\ \forall k \in [\![2, n]\!],\ Y_k(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \forall k \in [\![2, n]\!],\ \forall i \in \mathbb{N}^*,\ p(Y_k = i) = \left(\frac{k-1}{n}\right)^{i-1} \frac{n-k+1}{n} \end{array}}$$

2) ❏ Comme $\forall k\in[2, n]$, $Y_k = X_k - X_{k-1}$, en sommant cette relation pour $k = 2$ à $k = n$, on peut écrire :

$\displaystyle\sum_{k=2}^{n} Y_k = \sum_{k=2}^{n} (X_k - X_{k-1})$ soit, les termes s'éliminant deux à deux dans la somme de droite :

$= X_n - X_1$ et donc, en additionnant $Y_1 = X_1$ membre à membre :

$\displaystyle X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$ ①.

NB : On aurait également pu remarquer que pour tout $k\in[1, n]$, Y_k représentant le temps d'attente de la $k^{\text{ème}}$ image, la $(k-1)^{\text{ème}}$ une fois obtenue, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$ représente le temps d'attente de la $n^{\text{ème}}$ image, d'où : $\displaystyle X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.

❏ Or, comme $Y_1 = 1$ et $\forall k\in[2, n]$, $Y_k \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{n-k+1}{n}\right)$, on peut écrire $E(Y_1) = 1$ et $\forall k\in[2, n]$, $E(Y_k) = \dfrac{n}{n-k+1}$, soit, le cas $k = 1$ rejoignant le cas général : $\forall k\in[1, n]$, $E(Y_k) = \dfrac{n}{n-k+1}$.

Par passage à l'espérance dans la relation ①, on peut alors écrire :

$\displaystyle E(X_n) = E\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)$ soit, par linéarité de l'espérance :

$\displaystyle = \sum_{k=1}^{n} E(Y_k)$ soit encore, d'après ce qui précède :

$\displaystyle = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n-k+1}$ et donc, en effectuant le changement de variable $k' = n - k + 1$:

$$\boxed{E(X_n) = n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$$

❏ De même, comme $Y_1 = 1$ et $\forall k\in[2, n]$, $Y_k \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{n-k+1}{n}\right)$, on peut écrire :

– $V(Y_1) = 0$, et :

– $\forall k\in[2, n]$, $V(Y_k) = \dfrac{\frac{k-1}{n}}{\left(\frac{n-k+1}{n}\right)^2} = \dfrac{n(k-1)}{(n-k+1)^2}$, soit, le cas $k = 1$ rejoignant dans le cas général :

$\forall k\in[1, n]$, $V(Y_k) = \dfrac{n(k-1)}{(n-k+1)^2}$.

Par passage à la variance dans la relation ①, on peut alors écrire :

$\displaystyle V(X_n) = V\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)$ i.e. :

$\displaystyle = \sum_{k=1}^{n} V(Y_k) + 2\sum_{1\le i<j\le n} \mathrm{cov}(Y_i, Y_j)$.

Or, comme, pour tout $(i, j)\in[1, n]^2$, $i < j$, Y_i est le temps d'attente de la $i^{\text{ème}}$ image, la $(i-1)^{\text{ème}}$ une fois obtenue et Y_j est le temps d'attente de la $j^{\text{ème}}$ image, la $(j-1)^{\text{ème}}$ une fois obtenue, et comme les différents achats d'images sont indépendants, pour tout $(i, j)\in[1, n]^2$, $i < j$, les variables aléatoires Y_i et Y_j représentent des suites disjointes d'expériences indépendantes. Elles sont donc indépendantes.

On en déduit alors :

$\forall(i, j)\in[1, n]^2$, $i < j$, $\mathrm{cov}(Y_i, Y_j) = 0$ soit, d'après la relation précédente :

$\displaystyle V(X_n) = \sum_{k=1}^{n} V(Y_k)$ et donc, comme $\forall k\in[1, n]$, $V(Y_k) = \dfrac{n(k-1)}{(n-k+1)^2}$:

$\displaystyle = n\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{(n-k+1)^2}$ soit encore, en effectuant le changement de variable $k' = n - k + 1$:

$V(X_n) = n \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k}{k^2}$ d'où la conclusion :

$$\boxed{V(X_n) = n^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$$

☞ Noter ces résultats très classiques dans les problèmes de collection : si X_n est le temps d'attente de la réalisation d'une collection complète de n objets (dans les conditions décrites par l'énoncé), alors :

– $E(X_n) = n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (et donc : $E(X_n) \sim n \ln n$),

– $V(X_n) = n^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (et donc : $V(X_n) \sim \frac{\pi^2 n^2}{6}$).

☞ Noter également que l'on vient d'obtenir l'espérance et la variance de X_n sans en connaître la loi.

SO EO

● 8. Etude d'une collection (4) : objets discernables

Soient n et p deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 tels que $n \geq p$. On considère n boules numérotées que l'on place au hasard dans p tiroirs $(T_i)_{1 \leq i \leq p}$.

On note alors, pour tout $i \in [1, p]$, X_i la variable aléatoire égale au nombre de boules placées dans le tiroir T_i et Y_n le nombre de tiroirs vides.

1) a) Déterminer, pour tout $i \in [1, p]$, la loi de X_i, son espérance et sa variance.

b) Déterminer, pour tout $(i, j) \in [1, p]^2$, $i \neq j$, la loi de $X_i + X_j$, son espérance et sa variance. En déduire, pour tout $(i, j) \in [1, p]^2$, $i \neq j$, $\text{cov}(X_i, X_j)$.

2) En remarquant que $\sum_{i=1}^{p} X_i = n$ et en élevant cette relation au carré, retrouver pour tout $(i, j) \in [1, p]^2$, la valeur de $\text{cov}(X_i, X_j)$.

3) a) Exprimer Y_n sous forme de somme. En déduire son espérance.

b) A l'aide des résultats de l'exercice **12.18**, déterminer la loi de Y_n.

4) a) Montrer que :

$$\forall k \in [0, p-1],\ p(Y_{n+1} = k) = \frac{p-k}{p}\, p(Y_n = k) + \frac{k+1}{p}\, p(Y_n = k+1).$$

b) En déduire une relation entre $E(Y_{n+1})$ et $E(Y_n)$. retrouver alors les résultats du **3a**.

1) a) Pour tout $i \in [1, p]$, X_i représente le nombre de boules placées dans le tiroir T_i, c'est-à-dire le nombre de succès (placer une boule dans le tiroir T_i) lors de la réalisation de n essais indépendants (placer une boule dans un tiroir) d'une expérience à deux issues possibles (placer ou non la boule dans le tiroir T_i), la probabilité d'un succès étant $\frac{1}{p}$ (chaque boule est placée au hasard dans un des p tiroirs).

On en déduit alors, que pour tout $i \in [1, p]$, X_i suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{p}$, et donc :

$\forall i \in [1, p]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{p}\right)$, i.e. : $\forall i \in [1, p]$, $X_i(\Omega) = [0, n]$ et $\forall i \in [1, p]$, $\forall k \in [0, n]$, $p(X_i = k) = C_n^k \left(\frac{1}{p}\right)^k \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{n-k}$, d'où :

$\forall i \in [1, p]$, $E(X_i) = \frac{n}{p}$ et $\forall i \in [1, p]$, $V(X_i) = \frac{n}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$.

b) ■ Pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$, $i \neq j$, $X_i + X_j$ représente le nombre de boules placées dans les tiroirs T_i et T_j, c'est-à-dire le nombre de succès (placer une boule dans les tiroirs T_i ou T_j) lors de la réalisation de n essais indépendants (placer une boule dans un tiroir) d'une expérience à deux issues possibles (placer ou non la boule dans les tiroirs T_i ou T_j), la probabilité d'un succès étant $\frac{2}{p}$ (les événements : "placer une boule dans T_i" et "placer une boule dans T_j" étant incompatibles).

On en déduit alors, que pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$, $i \neq j$, $X_i + X_j$ suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{2}{p}$, et donc :

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2,\ i \neq j,\ (X_i + X_j) \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{2}{p}\right), \text{ i.e. :} \\ \forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2,\ i \neq j,\ (X_i + X_j)(\Omega) = [\![0, n]\!] \text{ et } \forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2,\ i \neq j,\ \forall k \in [\![0, n]\!],\ p(X_i + X_j = k) = C_n^k \left(\frac{2}{p}\right)^k \left(1 - \frac{2}{p}\right)^{n-k}, \text{ d'où :} \\ \forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2,\ i \neq j,\ E(X_i + X_j) = \frac{2n}{p} \text{ et } \forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2,\ i \neq j,\ V(X_i + X_j) = \frac{2n}{p}\left(1 - \frac{2}{p}\right). \end{array}}$$

■ On peut maintenant écrire :

$\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2$, $i \neq j$, $V(X_i + X_j) = V(X_i) + V(X_j) + 2\,\mathrm{cov}(X_i, X_j)$ d'où :

$\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2$, $i \neq j$, $\mathrm{cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{2}\left(V(X_i + X_j) - V(X_i) - V(X_j)\right)$ et donc, comme $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $V(X_i) = \frac{n}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$ et $\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2$, $i \neq j$, $V(X_i + X_j) = \frac{2n}{p}\left(1 - \frac{2}{p}\right)$:

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2n}{p}\left(1 - \frac{2}{p}\right) - \frac{2n}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right]$$ d'où la conclusion :

$$\boxed{\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2,\ i \neq j,\ \mathrm{cov}(X_i, X_j) = -\frac{n}{p^2}}$$

2) Comme, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, X_i représente le nombre de boules placées dans le tiroir T_i, $\sum_{i=1}^{p} X_i$ représente le nombre de boules placées dans les différents tiroirs $(T_i)_{1 \leq i \leq p}$, c'est-à-dire le nombre total de boules, soit n. On en déduit alors : $\sum_{i=1}^{p} X_i = n$.

En élevant cette relation au carré, on peut alors écrire :

$$\left(\sum_{i=1}^{p} X_i\right)^2 = n^2$$ ce qui s'écrit encore :

$$\sum_{i=1}^{p} X_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} X_i X_j = n^2$$ soit, en passant à l'espérance (opérateur linéaire) :

$$\sum_{i=1}^{p} E(X_i^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p} E(X_i X_j) = n^2$$ soit encore, comme $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $E(X_i^2) = V(X_i) + E(X_i)^2$

et comme $\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2$, $i < j$, $E(X_i X_j) = \mathrm{cov}(X_i, X_j) + E(X_i)E(X_j)$:

$$\sum_{i=1}^{p} \left(V(X_i) + E(X_i)^2\right) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p} \left(\mathrm{cov}(X_i, X_j) + E(X_i)E(X_j)\right) = n^2$$ et donc, d'après les résultats du **1a** :

$$\sum_{i=1}^{p} \left(\frac{n}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{n^2}{p^2}\right) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p} \left(\mathrm{cov}(X_i, X_j) + \frac{n^2}{p^2}\right) = n^2$$ d'où, la première somme comprenant p termes égaux :

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq p} \left(\mathrm{cov}(X_i, X_j) + \frac{n^2}{p^2}\right) = n^2 - \frac{n(p-1)}{p} - \frac{n^2}{p}.$$

☞ Se souvenir (formules découlant directement du cours) que si X et Y sont deux variables aléatoires :
- $E(X^2) = V(X) + E(X)^2$, et :
- $E(XY) = \mathrm{cov}(X, Y) + E(X)E(Y)$.

■ Par passage à l'espérance, on en déduit alors : $E(Y_n) = \sum_{i=1}^{p} E(B_i)$. Or, comme pour tout $i \in [1, p]$, B_i est la variable aléatoire égale à 1 si le tiroir T_i est vide et 0 sinon, on peut écrire :

$\forall i \in [1, p],\ p(B_i = 1) = p(X_i = 0)$ soit, d'après les résultats du **1a** :

$= \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n$ et donc, comme $\forall i \in [1, p],\ E(B_i) = p(B_i = 1)$:

$\forall i \in [1, p],\ E(B_i) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n$.

On en déduit alors : $E(Y_n) = \sum_{i=1}^{p} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n$, et donc, la somme comprenant p termes égaux :

$$\boxed{E(Y_n) = p\left(1 - \frac{1}{p}\right)^n}$$

☞ Se souvenir que si X suit une loi de Bernoulli, alors $E(X) = p(X = 1)$.

b) En plaçant n boules au hasard dans p tiroirs ($n \geq p$), le nombre minimum de tiroirs laissés vide est 0 (on place au moins une boule dans chaque tiroir) et le nombre maximum de tiroirs laissés vide est p - 1 (toutes les boules sont placées dans un même tiroir). Toutes les valeurs intermédiaires étant possibles, on en déduit alors : $Y_n(\Omega) = [0, p - 1]$.

Or, pour tout $k \in [0, p - 1]$, l'événement $[Y_n = k]$ est réalisé si et seulement si k tiroirs exactement sont laissés vides.

De plus, il y a p^n façons de placer n boules discernables dans p tiroirs discernables, et pour tout $k \in [0, p - 1]$, pour placer n boules discernables dans p tiroirs discernables tels que k d'entre eux exactement soient laissés vides, il faut et il suffit de :

– choisir k tiroirs parmi p (C_p^k possibilités), puis :

– établir une surjection de l'ensemble des n boules vers l'ensemble des p - k tiroirs qui ne sont pas laissés vides ($S_{n,p-k}$ possibilités).

Or, pour tout $k \in [0, p - 1]$, le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments vers un ensemble à p - k éléments est : $S_{n,p-k} = \sum_{i=1}^{p-k} (-1)^{p-k-i} C_{p-k}^i\, i^n$ (cf. exercice **12.18**). On en déduit alors, que pour tout $k \in [0, p - 1]$, il y a $C_p^k \sum_{i=1}^{p-k} (-1)^{p-k-i} C_{p-k}^i\, i^n$ façons de placer n boules discernables dans p tiroirs discernables tels que k d'entre eux exactement soient laissés vides. Les p^n façons de placer n boules discernables dans les p tiroirs étant équiprobables, on en déduit alors :

$\forall k \in [0, p - 1],\ p(Y_n = k) = \dfrac{C_p^k \sum_{i=1}^{p-k} (-1)^{p-k-i} C_{p-k}^i\, i^n}{p^n}$ d'où la conclusion :

$$\boxed{Y_n(\Omega) = [0, p - 1] \text{ et } \forall k \in [0, p - 1],\ p(Y_n = k) = C_p^k \sum_{i=1}^{p-k} (-1)^{p-k-i} C_{p-k}^i \left(\frac{i}{p}\right)^n}$$

☞ Noter ce résultat très classique dans les problèmes de collection. Noter également que ces problèmes peuvent se ramener dans de nombreux cas à des surjections.

4) a) Comme $Y_n(\Omega) = [0, p - 1]$, la famille $([Y_n = i])_{0 \leq i \leq p-1}$ forme un système complet d'événements. Comme $Y_{n+1}(\Omega) = [0, p - 1]$, la formule des probabilités totales nous permet alors d'écrire :

$\forall k \in [0, p - 1],\ p(Y_{n+1} = k) = \sum_{i=0}^{p-1} p\left(Y_{n+1} = k / Y_n = i\right) p(Y_n = i)$.

d) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit par Π_k le vecteur-colonne :

$$\Pi_k = \begin{pmatrix} p(X_k = 0) \\ p(X_k = 1) \\ \vdots \\ p(X_k = n) \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'il existe une matrice M que l'on déterminera telle que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\Pi_{k+1} = M\Pi_k$. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'expression de Π_k en fonction de Π_0.

e) Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $E(X_k)$ et $V(X_k)$ en fonction de k, M et Π_0.

2) On suppose désormais que $n = 2$, $p = \frac{1}{2}$ et que les deux boules sont placées initialement dans U_1.

a) Calculer M. Déterminer alors ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

b) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $D = P^{-1}MP$. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, une expression de M^k en fonction de P, P^{-1} et D, puis pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, une expression de M^k en fonction de k.

c) Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le vecteur-colonne Π_k. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi de X_k.

d) Déterminer enfin la matrice Π_∞ dont les éléments sont ceux de la matrice Π_k lorsque k tend vers $+\infty$. Conclure.

NB : La résolution du **1** nécessite la connaissanc du cours **2. Espaces vectoriels, applications linéaires et calcul matrciel** et la résolution du **2** nécessite la connaissance du cours : **3. Diagonalisation.**

1) a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$, sachant que l'événement $[X_k = j]$ est réalisé, c'est-à-dire sachant que l'urne U_1 contient j boules après k expériences, après k + 1 expériences, elle peut en contenir :
– soit j + 1 (on tire une boule de U_2 qui change d'urne),
– soit j (on tire une boule quelconque qui est maintenue dans la même urne),
– soit j - 1 (on tire une boule de U_1 qui change d'urne).

De même, pour tout $k \in \mathbb{N}$, sachant que l'événement $[X_k = 0]$ est réalisé, c'est-à-dire sachant que l'urne U_1 contient 0 boule après k expériences, après k + 1 expériences, elle peut en contenir :
– soit 1 (on tire une boule de U_2 qui change d'urne),
– soit 0 (on tire une boule de U_2 qui est maintenue dans la même urne),

Enfin, pour tout $k \in \mathbb{N}$, sachant que l'événement $[X_k = n]$ est réalisé, c'est-à-dire sachant que l'urne U_1 contient n boules après k expériences, après k + 1 expériences, elle peut en contenir :
– soit n (on tire une boule de U_1 qui est maintenue dans la même urne),
– soit n - 1 (on tire une boule de U_1 qui change d'urne).

On peut maintenant conclure :

Pour tout $k \in \mathbb{N}$,
– sachant que l'événement $[X_k = 0]$ est réalisé, X_{k+1} prend ses valeurs dans {0, 1},
– pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$, sachant que l'événement $[X_k = j]$ est réalisé, X_{k+1} prend ses valeurs dans {j - 1, j, j + 1},
– sachant que l'événement $[X_k = n]$ est réalisé, X_{k+1} prend ses valeurs dans {n - 1, n}.

b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on peut alors écrire :

• Si j = 0 :
– $p\left(X_{k+1} = 0 / X_k = 0\right) = 1 - p$ (la boule tirée est maintenue dans l'urne U_2),
– $p\left(X_{k+1} = 1 / X_k = 0\right) = p$ (la boule, tirée nécessairement dans U_2, est placée dans l'urne U_1).

• Si $j \in [\![1, n-1]\!]$:

– $p\left(X_{k+1} = j-1 / X_k = j\right) = \frac{j}{n} p$ (on tire l'une des j boules de l'urne U_1, événement de probabilité $\frac{j}{n}$, et on la change d'urne, événement de probabilité p, ces deux événements étant indépendants),

– $p\left(X_{k+1} = j / X_k = j\right) = 1 - p$ (la boule tirée est maintenue dans son urne initiale),

– $p\left(X_{k+1} = j+1 / X_k = j\right) = \frac{n-j}{n} p$ (on tire l'une des n - j boules de l'urne U_2, événement de probabilité $\frac{n-j}{n}$, et on la change d'urne, événement de probabilité p, ces deux événements étant indépendants).

• Si j = n :

– $p\left(X_{k+1} = n-1 / X_k = n\right) = p$ (la boule, tirée nécessairement dans U_1, est placée dans l'urne U_2),

– $p\left(X_{k+1} = n / X_k = n\right) = 1 - p$ (la boule tirée est maintenue dans l'urne U_1).

Ainsi,

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall k \in \mathbb{N}, \begin{cases} p\left(X_{k+1} = 0 / X_k = 0\right) = 1 - p \\ p\left(X_{k+1} = 1 / X_k = 0\right) = p \\ \forall i \in [\![2, n]\!], p\left(X_{k+1} = i / X_k = 0\right) = 0 \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \begin{cases} \forall i \in [\![0, n-2]\!], p\left(X_{k+1} = i / X_k = n\right) = 0 \\ p\left(X_{k+1} = n-1 / X_k = n\right) = p \\ p\left(X_{k+1} = n / X_k = n\right) = 1 - p \end{cases} \\ \forall k \in \mathbb{N}, \forall j \in [\![1, n-1]\!], \begin{cases} p\left(X_{k+1} = j-1 / X_k = j\right) = \frac{j}{n} p \\ p\left(X_{k+1} = j / X_k = j\right) = 1 - p \\ p\left(X_{k+1} = j+1 / X_k = j\right) = \frac{n-j}{n} p \\ \forall i \in [\![0, n]\!] \setminus \{j-1, j, j+1\}, p\left(X_{k+1} = i / X_k = j\right) = 0 \end{cases} \end{array}}$$

c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, comme $X_k(\Omega) = [\![0, n]\!]$, la famille $\left([X_k = j]\right)_{0 \le j \le n}$ forme un système complet d'événements. La formule de probabilités totales nous permet alors d'écrire :

• $p(X_{k+1} = 0) = \sum_{j=0}^{n} p\left(X_{k+1} = 0 / X_k = j\right) p(X_k = j)$ soit, en éliminant les termes nuls :

$= p\left(X_{k+1} = 0 / X_k = 0\right) p(X_k = 0) + p\left(X_{k+1} = 0 / X_k = 1\right) p(X_k = 1)$ et donc :

$= (1 - p) p(X_k = 0) + \frac{p}{n} p(X_k = 1)$,

• $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $p(X_{k+1} = i) = \sum_{j=0}^{n} p\left(X_{k+1} = i / X_k = j\right) p(X_k = j)$ soit, en éliminant à nouveau les termes nuls :

$= p\left(X_{k+1} = i / X_k = i-1\right) p(X_k = i-1) + p\left(X_{k+1} = i / X_k = i\right) p(X_k = i)$

$+ p\left(X_{k+1} = i / X_k = i+1\right) p(X_k = i+1)$ i.e. :

$= \frac{(n-i+1)p}{n} p(X_k = i-1) + (1-p) p(X_k = i) + \frac{(i+1)p}{n} p(X_k = i+1)$,

• $p(X_{k+1} = n) = \sum_{j=0}^{n} p\left(X_{k+1} = n / X_k = j\right) p(X_k = j)$ soit encore :

$= p\left(X_{k+1} = n / X_k = n-1\right) p(X_k = n-1) + p\left(X_{k+1} = n / X_k = n\right) p(X_k = n)$ et donc :

$= \frac{p}{n} p(X_k = n-1) + (1-p) p(X_k = n)$.

Ainsi,

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Pour tout } k\in\mathbb{N} : \\ - p(X_{k+1}=0) = (1-p)\,p(X_k=0) + \frac{p}{n}\,p(X_k=1), \\ - \forall i\in[\![1, n-1]\!],\ p(X_{k+1}=i) = \frac{(n-i+1)p}{n}\,p(X_k=i-1) + (1-p)\,p(X_k=i) + \frac{(i+1)p}{n}\,p(X_k=i+1), \\ - p(X_{k+1}=n) = \frac{p}{n}\,p(X_k=n-1) + (1-p)\,p(X_k=n). \end{array}}$$

d) ▪ On a vu à la question précédente que pour tout $k\in\mathbb{N}$ et pour tout $i\in[\![0, n]\!]$, $p(X_{k+1} = i)$ s'exprimait en fonction des $\big(p(X_k = j)\big)_{0\leq j\leq n}$. On en déduit alors qu'il existe bien une matrice M telle que : $\forall k\in\mathbb{N},\ \Pi_{k+1} = M\Pi_k$.

D'après les résultats de la question précédente, on peut alors conclure :

$$\boxed{\text{Il existe une matrice M telle que : } \forall k\in\mathbb{N},\ \Pi_{k+1} = M\Pi_k \text{ et } M = \begin{pmatrix} 1-p & \frac{p}{n} & & & & \\ p & 1-p & \frac{2p}{n} & & 0 & \\ & \frac{(n-1)p}{n} & 1-p & \frac{3p}{n} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \frac{2p}{n} & 1-p & p \\ & & & & \frac{p}{n} & 1-p \end{pmatrix}}$$

▪ Comme $\forall k\in\mathbb{N},\ \Pi_{k+1} = M\Pi_k$, à l'aide d'une récurrence immédiate, on peut écrire :

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ \Pi_k = M^k\Pi_0}$$

e) En posant $L_1 = (0\ 1\ 2\ \ldots\ n)$ et $L_2 = (0^2\ 1^2\ 2^2\ \ldots\ n^2)$, d'après la définition de Π_k ($k\in\mathbb{N}$), on peut alors écrire : $\forall k\in\mathbb{N},\ L_1\Pi_k = E(X_k)$ et $\forall k\in\mathbb{N},\ L_2\Pi_k = E(X_k^2)$. Comme $\forall k\in\mathbb{N},\ V(X_k) = E(X_k^2) - E(X_k)^2$ et comme $\forall k\in\mathbb{N},\ \Pi_k = M^k\Pi_0$, on peut alors conclure :

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ E(X_k) = L_1M^k\Pi_0 \ \text{ et } \ \forall k\in\mathbb{N},\ V(X_k) = L_2M^k\Pi_0 - \big(L_1M^k\Pi_0\big)^2}$$

2) a) ▪ Pour $n = 2$ et $p = \frac{1}{2}$, d'après la question précédente, on peut écrire :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

▪ λ est valeur propre de M si et seulement si $\exists X \neq 0,\ (M - \lambda I)X = 0$. Or, on a :

$$(M-\lambda I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}-\lambda \end{pmatrix} X = 0 \qquad \text{d'où } (L_1 \leftrightarrow L_2) :$$

d) En prenant la limite de chacun des termes de Π_k lorsque k tend vers $+\infty$, on peut alors conclure :

$$\boxed{\Pi_\infty = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}}$$

▪ Ainsi, après un très grand nombre d'expériences, la probabilité que U_1 ne contienne aucune boule est proche de $\frac{1}{4}$, la probabilité que U_1 contienne une boule est proche de $\frac{1}{2}$ et la probabilité que U_1 contienne deux boules est proche de $\frac{1}{4}$.

☞ Noter que la matrice M est une matrice stochastique (cf. *exercice* **3**.8) et que les vecteurs $(\Pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ forment une "chaîne de Markov". Leur utilisation est très courante en probabilités. Ils sont en effet utilisés afin de connaître l'état d'un système à un instant k donné ($k\in\mathbb{N}$) ou en $+\infty$.

Si M est la matrice des probabilités conditionnelles $\left(p\left(X_{k+1}=i/X_k=j\right)\right)_{\substack{0\le i\le n\\0\le j\le n}}$ et pour tout $k\in\mathbb{N}$, Π_k le vecteur-colonne $\left(p(X_k=i)\right)_{0\le i\le n}$, on a alors :

– $\forall k\in\mathbb{N}$, $\Pi_k = M^k\Pi_0$ où pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, M^k s'obtient après diagonalisation,

– $\forall k\in\mathbb{N}$, $E(X_k) = L_1\Pi_k$ et $\forall k\in\mathbb{N}$, $E(X_k^2) = L_2\Pi_k$ où $L_1 = (0\ 1\ 2\ \dots\ n)$ et $L_2 = (0^2\ 1^2\ 2^2\ \dots\ n^2)$.

▪ Soient X une variable aléatoire à densité, f une densité de X et Y = exp(X). Y admet pour densité la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^{-}, g(x) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = \frac{1}{x} f(\ln x) \end{cases}$.

III. Espérance, moments, variance, écart-type SO EO

1. Définitions

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire à densité définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, p)$, de densité f.

▪ ***Moment d'ordre k*** ($k \in \mathbb{N}^*$). Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\,dx$ converge, alors X admet un moment d'ordre k et ce moment d'ordre k vaut : $m_k(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\,dx$.

▪ ***Espérance.*** Si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$ converge, alors X admet une espérance et cette espérance vaut : $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$.

▪ ***Variance.*** Si X admet une espérance et si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)\,dx$ converge, alors X admet une variance et cette variance vaut : $V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)\,dx$.

▪ X admet une variance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ converge et on a alors : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ (où $E(X^2) = m_2(X)$).

▪ ***Ecart-type.*** Si X admet une variance, on appelle écart-type de X le nombre : $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$.

2. Théorèmes

▪ Soient $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire à densité définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ de densité f, g une fonction de classe C^1 et strictement monotone sur $X(\Omega)$ et $Y = g(X)$. Y est une variable aléatoire à densité. Si elle admet une espérance, cette espérance vaut : $E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx$ (théorème "de transfert").

▪ Soient X et Y deux variables aléatoires à densité admettant une espérance et une variance. On a :
- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $E(aX + b) = aE(X) + b$,
- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$,
- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $V(aX + b) = a^2 V(X)$,
- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\sigma_{aX+b} = |a|\,\sigma_X$.

IV. Densité d'une somme de deux variables à densité indépendantes SO

Soient X et Y deux variables aléatoires à densité indépendantes, de densités respectives f et g. La variable aléatoire Z = X + Y est une variable aléatoire à densité qui admet pour densité la fonction h définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,g(x - t)\,dt$.

V. Lois usuelles S● E●

Loi	Notation	$X(\Omega)$	Densité	$E(X)$	$V(X)$
Loi uniforme	$X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$	$[a, b]$	$\begin{cases} \forall x \in [a,b],\ f(x) = \dfrac{1}{b-a} \\ \forall x \notin [a,b],\ f(x) = 0 \end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
Loi exponentielle Processus sans mémoire.	$X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$	$\mathbb{R}^+$	$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \\ \forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ f(x) = 0 \end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
Loi gamma (S●)	$X \hookrightarrow \Gamma(b, \tau)$ $(b > 0, \tau > 0)$	$\mathbb{R}^+$	$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \dfrac{e^{-\frac{x}{b}} x^{\tau-1}}{\Gamma(\tau)\, b^{\tau}} \\ \forall x \in \mathbb{R}^-,\ f(x) = 0 \end{cases}$	$b\tau$	$b^2\tau$
Loi normale (ou de Laplace-Gauss)	$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$ $(\sigma > 0)$	$\mathbb{R}$	$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2
Loi normale centrée réduite	$X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$	$\mathbb{R}$	$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	0	1
Loi de Pareto (S●)	$X \hookrightarrow \mathcal{VP}(\alpha, a, x_0)$ $(\alpha > 0, a > 0)$	$[a + x_0, +\infty[$	$\begin{cases} \forall x \in [a + x_0, +\infty[,\ f(x) = \dfrac{\alpha}{a}\left(\dfrac{a}{x - x_0}\right)^{\alpha+1} \\ \forall x \in]-\infty, a + x_0[,\ f(x) = 0 \end{cases}$	$x_0 + \dfrac{\alpha a}{\alpha - 1}$	$\dfrac{\alpha a^2}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}$

■ Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction de répartition de $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^+,\ F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \\ \forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ F(x) = 0 \end{cases}$.

■ Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. La loi $\mathcal{E}(\lambda)$ est la loi $\Gamma\left(\dfrac{1}{\lambda}, 1\right)$.

■ Soient m et σ deux réels tels que $\sigma > 0$, $\Phi_{m,\sigma}$ la fonction de répartition de $\mathcal{N}(m, \sigma)$ et Φ la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0, 1)$. On a :

– $\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$,

– $\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi_{m,\sigma}(x) = \Phi\left(\dfrac{x - m}{\sigma}\right)$.

NB : On a : $\Phi(1) \approx 0{,}841\,345$ à 10^{-6} près.

VI. Stabilité pour la somme des lois exponentielle, Γ et normale S●

■ Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}^*$, $(X_k)_{1 \le k \le n}$ n variables aléatoires à densité indépendantes suivant une loi exponentielle de même paramètre λ et $Y = \sum_{k=1}^{n} X_k$. On a : $Y \hookrightarrow \Gamma\left(\dfrac{1}{\lambda}, n\right)$.

■ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, b et $(\tau_k)_{1 \le k \le n}$ $(n+1)$ réels strictement positifs, $(X_k)_{1 \le k \le n}$ n variables aléatoires à densité indépendantes telles que $\forall k \in [1, n]$, $X_k \hookrightarrow \Gamma(b, \tau_k)$ et $Y = \sum_{k=1}^{n} X_k$. On a : $Y \hookrightarrow \Gamma\left(b, \sum_{k=1}^{n} \tau_k\right)$.

■ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(m_k, \sigma_k)_{1 \le k \le n} \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)^n$, $(X_k)_{1 \le k \le n}$ n variables aléatoires à densité indépendantes telles que $\forall k \in [1, n]$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{N}(m_k, \sigma_k)$ et $Y = \sum_{k=1}^{n} X_k$. On a : $Y \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\sum_{k=1}^{n} m_k, \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2}\right)$.

☞ Pour montrer qu'une fonction f est une densité de probabilité, il faut montrer que :
- f est continue sur $\mathbb{R}$ (privé éventuellement d'un ensemble fini de points),
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$, et :
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$.

☞ Pour déterminer le réel $A \in \mathbb{R}$ tel qu'une fonction f dépendante de A, continue sur $\mathbb{R}$ (privé éventuellement d'un ensemble fini de points) et positive sur $\mathbb{R}$ soit une densité de probabilité, il suffit de déterminer la valeur de A pour laquelle on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$.

b) X prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}$ et la fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, $Y = e^X$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On peut alors écrire :

- $\forall x \in \mathbb{R}^-$, $p(Y \leq x) = 0$ et :
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $p(Y \leq x) = p(e^X \leq x)$ soit, la fonction ln étant croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:
$= p(X \leq \ln x)$.

En notant F la fonction de répartition de X et G la fonction de répartition de Y, on peut alors écrire :

- $\forall x \in \mathbb{R}^-$, $G(x) = 0$.
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $G(x) = F(\ln x)$.

G est donc dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ avec $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $G'(x) = 0$. De plus, comme ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\ln(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$ et comme F est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car f est continue sur $\mathbb{R}$) de dérivée f, on peut également écrire que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $G'(x) = \frac{1}{x} F'(\ln x) = \frac{1}{x} f(\ln x)$.

En notant g une densité de Y, on peut alors écrire :

- $\forall x \in \mathbb{R}^-$, $g(x) = 0$ et :
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = \frac{1}{x} f(\ln x)$ i.e. :
$= \frac{1}{\pi x(1 + \ln^2 x)}$.

On peut désormais conclure :

Une densité de Y est la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^-, g(x) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = \dfrac{1}{\pi x(1 + \ln^2 x)} \end{cases}$

☞ Se souvenir que si f est une densité d'une VAR à densité et si g coïncide avec f sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points, g est également une densité de X (c'est la raison pour laquelle on attribue la valeur positive que l'on désire à g(0)).

☞ Pour déterminer une densité de $Y = f(X)$ lorsque l'on connaît la fonction de répartition de X, on écrit (en distinguant les cas suivant les valeurs de x si besoin est) : $p(Y \leq x) = p\big(f(X) \leq x\big)$ avant de se ramener à la fonction F de répartition de X. En dérivant F, on détermine alors une densité de Y.

2) H est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ en tant que somme et quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

De plus, la fonction $x \mapsto 1 + e^{-x}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}$, on peut écrire que H est croissante sur $\mathbb{R}$. Enfin, on a clairement : $\lim_{x \to -\infty} H(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} H(x) = 1$.

On en déduit alors que H est la fonction de répartition d'une variable aléatoire Z dont une densité h est :

$\forall x\in \mathbb{R}$, $h(x) = H'(x)$ soit :

$$= \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}.$$

On peut désormais conclure :

> H est la fonction de répartition d'une variable aléatoire Z dont une densité est la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x\in \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$.

☞ Pour montrer qu'une fonction F est une fonction de répartition, il faut et il suffit de montrer que :
- F est continue sur $\mathbb{R}$,
- F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (privé éventuellement d'un ensemble fini de points),
- F est croissante sur $\mathbb{R}$,
- $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

S❷ E❷

■ 2. Autour de la loi normale centrée réduite

1) Montrer que l'intégrale $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} x^2 e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}\,dx$ converge et en déterminer la valeur.

2) Soit $A\in\mathbb{R}$. Déterminer pour quelle valeur de A, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \forall x\in\,]-\infty, 1],\ f(x) = 0 \\ \forall x\in\,]1, +\infty[,\ f(x) = Ax^2 e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} \end{cases}$$

est une densité de probabilité.

1) ❏ Soit h la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par : $\forall y\in[1, +\infty[$, $h(y) = \displaystyle\int_1^y x^2 e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}\,dx$. La fonction $x \mapsto x - 1$ étant de classe C^1 sur $[1, +\infty[$, donc pour tout $y\in[1, +\infty[$, de classe C^1 sur $[1, y]$, en effectuant le changement de variable $t = x - 1$, $dt = dx$, on peut écrire :

$\forall y\in[1, +\infty[$, $h(y) = \displaystyle\int_0^{y-1} (t+1)^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ soit, en développant $(t+1)^2$, par linéarité de l'intégrale :

$$= \int_0^{y-1} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + 2\int_0^{y-1} t\, e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + \int_0^{y-1} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \quad ①.$$

❏ Or, par calcul de primitives, on peut écrire :

$\forall y\in[1, +\infty[$, $\displaystyle\int_0^{y-1} t\, e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^{y-1}$ soit :

$$= 1 - e^{-\frac{(y-1)^2}{2}}.$$

Or, on a : $\lim\limits_{y\to+\infty} e^{-\frac{(y-1)^2}{2}} = 0$. En faisant tendre y vers $+\infty$ et en reconnaissant J, on en déduit alors, par passage à la limite dans la relation précédente : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\, e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = 1$.

❑ Soit maintenant X une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. On peut alors écrire : $m_2(X) = E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = 1 + 0 = 1$.

Or, par définition du moment d'ordre 2, on peut également écrire :

$$m_2(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$ soit, la fonction $t \mapsto t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}$ étant paire :

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$ et donc, comme $m_2(X) = 1$:

$$\int_{0}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

❑ De plus, la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ étant la densité de probabilité de la loi normale centrée réduite, on peut écrire :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$$ soit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$$ et donc, la fonction $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$ étant paire :

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

❑ Les intégrales $\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, $\int_{0}^{+\infty} t\, e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ et $\int_{0}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ étant convergentes, en faisant tendre y vers $+\infty$ et en reconnaissant J, on en déduit alors, par passage à la limite dans la relation ① que J converge et que $J = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} + 2 \times 1 + \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = 2 + \sqrt{2\pi}$, d'où la conclusion :

$$\boxed{J \text{ converge avec } J = 2 + \sqrt{2\pi}}$$

☞ Se souvenir que l'on peut calculer la valeur de certaines intégrales impropres en se ramenant à des variables aléatoires à densité, et ce en reconnaissant la densité d'une loi classique (le plus souvent celle de la loi normale centrée réduite).

Se souvenir en particulier de la méthode utilisée pour déterminer la valeur des intégrales $\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ et $\int_{0}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

2) Pour que f soit une densité de probabilité, il faut que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$. Or, comme $\forall x \in]1, +\infty[$, $x^2 e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} \geq 0$, pour que f soit une densité de probabilité, il faut donc que $A \geq 0$.

Soit alors A un réel positif ou nul. On peut maintenant écrire que f est continue sur $]-\infty, 1[$ (évident) et sur $]1, +\infty[$ en tant que somme et quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.

De plus, comme $\forall x \in]-\infty, 1]$, $f(x) = 0$, on peut écrire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = \int_{1}^{+\infty} f(t)\, dt$$ soit :

$$= A\int_{1}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{(t-1)^2}{2}} dt$$ et donc, en reconnaissant J, d'après la question précédente :

$$= A\left(2 + \sqrt{2\pi}\right).$$

$- \forall x \in]0, 1[, h(x) = \frac{1}{2}\left(\int_{x-1}^{0} e^{-u}\,du + \int_{0}^{x} e^{u}\,du\right)$ soit :

$= \frac{e^{1-x} + e^{x}}{2} - 1$ et :

$- \forall x \in [1, +\infty[, h(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x} e^{u}\,du$ i.e. :

$= \frac{e^{x} - e^{x-1}}{2}.$

On peut désormais conclure :

La fonction h définie par : $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^{-}, h(x) = \frac{e^{1-x} - e^{-x}}{2} \\ \forall x \in]0, 1[, h(x) = \frac{e^{1-x} + e^{x}}{2} - 1 \\ \forall x \in [1, +\infty[, h(x) = \frac{e^{x} - e^{x-1}}{2} \end{cases}$ est une densité de X + Y

S❷

● 5. Temps d'attente à un guichet

Soit λ un réel strictement positif. On considère un guichet auquel se présentent des clients et on suppose que pour tout $d \in \mathbb{R}_+^*$, le nombre de clients se présentant à ce guichet au cours d'une période de temps donnée d suit une loi de Poisson de paramètre λd, les arrivées des différents clients étant indépendantes.

1) **a)** Pour tout $d \in \mathbb{R}_+^*$, on note X_d la variable aléatoire égale au nombre de clients se présentant à ce guichet entre les instants $t = 0$ et $t = d$. Déterminer, pour tout $d \in \mathbb{R}_+^*$, la loi de X_d.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par T_n la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ égale au temps d'attente de l'arrivée au guichet du $n^{\text{ème}}$ client de la journée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, comparer les événements $[T_n > t]$ et $[X_t \leq n - 1]$.

2) **a)** Déterminer la loi de T_1. Montrer que T_1 suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

b) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de T_n (on précisera la fonction de répartition et une densité de T_n). Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n suit une loi gamma de paramètres $\frac{1}{\lambda}$ et n.

c) Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on désigne par Z_i le temps d'attente entre l'arrivée du $(i-1)^{\text{ème}}$ et du $i^{\text{ème}}$ client au guichet (on conviendra que le "$0^{\text{ème}}$ client" arrive à l'instant $t = 0$). Déterminer, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, la loi de Z_i. Exprimer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n en fonction des $(Z_i)_{1 \leq i \leq n}$, puis retrouver la loi de T_n.

1) **a)** D'après l'énoncé, pour tout $d \in \mathbb{R}_+^*$, le nombre de clients se présentant au guichet au cours d'une période de temps donnée d suivant une loi de Poisson de paramètre λd, on peut écrire :

$$\boxed{\forall d \in \mathbb{R}_+^*, X_d \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda d), \text{ i.e. : } X_d(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, p(X_d = k) = e^{-\lambda d}\frac{(\lambda d)^k}{k!}}$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, l'événement $[T_n > t]$ est réalisé si et seulement si le $n^{\text{ème}}$ client de la journée se présente après l'instant t, c'est-à-dire si et seulement si au plus n - 1 clients se sont présentés au guichet entre les instants 0 et t, i.e. si et seulement si l'événement $[X_t \leq n - 1]$ est réalisé.

$\forall n \in [2, +\infty[$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n(t) = \lambda e^{-\lambda t}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n-2}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\right]$ et donc, les termes s'éliminant deux à deux pour $k = 0$ à $k = n - 2$:

$= \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$ soit enfin, en reconnaissant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$:

$= \dfrac{e^{-\frac{t}{1/\lambda}}t^{n-1}}{\Gamma(n)\left(\frac{1}{\lambda}\right)^n}$ et donc, le cas $n = 1$ rejoignant le cas général :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, f_n(t) = \frac{e^{-\frac{t}{1/\lambda}}t^{n-1}}{\Gamma(n)\left(\frac{1}{\lambda}\right)^n}.$$

En posant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0) = 0$ et en reconnaissant la loi gamma de paramètres $\frac{1}{\lambda}$ et n, on peut désormais conclure :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n \hookrightarrow \Gamma\left(\frac{1}{\lambda}, n\right)$, i.e. :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, p(T_n \le t) = 1 - e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}_+^*, f_n(t) = \dfrac{e^{-\frac{t}{1/\lambda}}t^{n-1}}{\Gamma(n)\left(\frac{1}{\lambda}\right)^n} \\ \forall t \in \mathbb{R}^-, f_n(t) = 0 \end{cases}$$

c) ▪ Comme pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, Z_i est le temps d'attente entre l'arrivée du $(i-1)^{\text{ème}}$ et du $i^{\text{ème}}$ client au guichet, Z_i représente le temps d'attente du $i^{\text{ème}}$ client, le $(i-1)^{\text{ème}}$ une fois arrivé.

Soit alors $i \in \mathbb{N}^*$ et considérons une nouvelle origine des temps à l'instant $t' = 0$ où le $(i-1)^{\text{ème}}$ client arrive au guichet. Z_i représente alors le temps d'attente de l'arrivée d'un nouveau "premier" client au guichet.

Comme les arrivées des différents clients sont indépendantes, Z_i suit donc la même loi que T_1, et donc :

$$\boxed{\text{Pour tout } i \in \mathbb{N}^*, Z_i \text{ suit une loi exponentielle de paramètre } \lambda}$$

▪ Comme pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, Z_i représente le temps d'attente entre l'arrivée du $(i-1)^{\text{ème}}$ et du $i^{\text{ème}}$ client au guichet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{i=1}^{n} Z_i$ représente le temps d'attente de l'arrivée au guichet du $n^{\text{ème}}$ client de la journée, c'est-à-dire T_n. On en déduit alors :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, T_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i}$$

▪ Comme le nombre de clients arrivant au guichet sur une période donnée est indépendant du nombre de clients arrivant au guichet sur une période donnée disjointe, les variables aléatoires $(Z_i)_{1 \le i \le n}$ sont indépendantes. Comme pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, Z_i suit une loi exponentielle de paramètre λ et comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$, d'après le cours, on en déduit alors la loi de T_n $(n \in \mathbb{N}^*)$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, T_n \hookrightarrow \Gamma\left(\frac{1}{\lambda}, n\right)}$$

☞ Ce type d'exercice, utilisant des temps d'attente continus à partir de lois discrètes (et donc, des lois exponentielle et gamma) est très classique. A savoir reproduire.

S❷

6. Autour de la loi de Pareto

Soient α et a deux réels strictements positifs, $x_0 \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire suivant une loi de Pareto de paramètres α, a et x_0.

1) Déterminer la fonction de répartition de X.

2) Déterminer pour quelles valeurs de α, X admet une espérance et une variance. Les calculer dans ces cas.

1) Soient f une densité de X et F sa fonction de répartition. Comme X suit une loi de Pareto de paramètres α, a et x_0, on peut écrire : $\begin{cases} \forall x \in [a + x_0, +\infty[, f(x) = \dfrac{\alpha}{a}\left(\dfrac{a}{x - x_0}\right)^{\alpha+1} \\ \forall x \in]-\infty, a + x_0[, f(x) = 0 \end{cases}$.

On en déduit alors :

– $\forall x \in]-\infty, a + x_0[$, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ soit, d'après la définition de f :

$= 0$ et :

– $\forall x \in [a + x_0, +\infty[$, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ soit encore, d'après la définition de f :

$$= \int_{a+x_0}^{x} \frac{\alpha}{a}\left(\frac{a}{t - x_0}\right)^{\alpha+1} dt \qquad \text{i.e. :}$$

$$= \left[-a^{\alpha}\left(\frac{1}{t - x_0}\right)^{\alpha}\right]_{a+x_0}^{x} \qquad \text{soit encore :}$$

$$= -a^{\alpha}\left[\frac{1}{(x - x_0)^{\alpha}} - \frac{1}{a^{\alpha}}\right] \qquad \text{et donc :}$$

$$= 1 - \left(\frac{a}{x - x_0}\right)^{\alpha}.$$

On peut désormais conclure :

> La fonction de répartition de X est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty, a + x_0[, F(x) = 0 \\ \forall x \in [a + x_0, +\infty[, F(x) = 1 - \left(\dfrac{a}{x - x_0}\right)^{\alpha} \end{cases}$

☞ Se souvenir que la fonction de répartition F de la loi $\mathcal{VP}(\alpha, a, x_0)$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty, a + x_0[, F(x) = 0 \\ \forall x \in [a + x_0, +\infty[, F(x) = 1 - \left(\dfrac{a}{x - x_0}\right)^{\alpha} \end{cases}$.

2) ▪ La fonction $t \mapsto \dfrac{\alpha t}{a}\left(\dfrac{a}{t - x_0}\right)^{\alpha+1}$ est continue sur $[a + x_0, +\infty[$ en tant que quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues sur $[a + x_0, +\infty[$. De plus, on a : $\dfrac{\alpha t}{a}\left(\dfrac{a}{t - x_0}\right)^{\alpha+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha a^{\alpha}}{t^{\alpha}}$.

Les fonctions $t \mapsto \dfrac{\alpha t}{a}\left(\dfrac{a}{t - x_0}\right)^{\alpha+1}$ et $t \mapsto \dfrac{\alpha a^{\alpha}}{t^{\alpha}}$ étant continues et positives sur $[a + x_0, +\infty[$, les règles de comparaison des intégrales de fonctions positives nous permettent alors d'écrire que les intégrales

■ La fonction $t \mapsto \frac{\alpha t^2}{a}\left(\frac{a}{t-x_0}\right)^{\alpha+1}$ est continue sur $[a + x_0, +\infty[$ en tant que quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues sur $[a + x_0, +\infty[$. De plus, on a : $\frac{\alpha t^2}{a}\left(\frac{a}{t-x_0}\right)^{\alpha+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha a^\alpha}{t^{\alpha-1}}$.

Les fonctions $t \mapsto \frac{\alpha t^2}{a}\left(\frac{a}{t-x_0}\right)^{\alpha+1}$ et $t \mapsto \frac{\alpha a^\alpha}{t^{\alpha-1}}$ étant continues et positives sur $[a + x_0, +\infty[$, les règles de comparaison des intégrales de fonctions positives nous permettent alors d'écrire que les intégrales $\int_{a+x_0}^{+\infty} \frac{\alpha t^2}{a}\left(\frac{a}{t-x_0}\right)^{\alpha+1} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\alpha a^\alpha}{t^{\alpha-1}} dt$ sont de même nature. Or, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha-1}}$ (intégrale de Riemann) et donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\alpha a^\alpha}{t^{\alpha-1}} dt$ convergent si et seulement si $\alpha - 1 > 1$, i.e. $\alpha > 2$.

On en déduit alors que l'intégrale $\int_{a+x_0}^{+\infty} \frac{\alpha t^2}{a}\left(\frac{a}{t-x_0}\right)^{\alpha+1} dt = \int_{a+x_0}^{+\infty} t^2 f(t)\, dt$ converge si et seulement si $\alpha > 2$. Comme on a en outre $\int_{-\infty}^{a+x_0} t^2 f(t)\, dt = 0$, on en déduit alors que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\, dt$ converge si et seulement si $\alpha > 2$, et donc que X admet un moment d'ordre 2 si et seulement si $\alpha > 2$.

Dans ce cas, on a alors :

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\, dt \qquad \text{soit, comme } \forall t \in]-\infty, a + x_0[,\ f(t) = 0 :$$

$$= \int_{a+x_0}^{+\infty} t^2 f(t)\, dt \qquad \text{soit encore, d'après l'expression de f sur } [a + x_0, +\infty[:$$

$$= \int_{a+x_0}^{+\infty} \frac{\alpha t^2}{a}\left(\frac{a}{t-x_0}\right)^{\alpha+1} dt \qquad \text{i.e. :}$$

$$= \alpha a^\alpha \int_{a+x_0}^{+\infty} \frac{t^2}{(t-x_0)^{\alpha+1}} dt.$$

Soit alors h la fonction définie sur $[a + x_0, +\infty[$ par : $\forall y \in [a + x_0, +\infty[$, $h(y) = \int_{a+x_0}^{y} \frac{t^2}{(t-x_0)^{\alpha+1}} dt$. La fonction $t \mapsto t - x_0$ étant de classe C^1 sur $[a + x_0, +\infty[$ donc, pour tout $y \in [a + x_0, +\infty[$, de classe C^1 sur $[a + x_0, y]$, en effectuant le changement de variable $u = t - x_0$, $du = dt$, on peut écrire :

$$\forall y \in [a + x_0, +\infty[,\ h(y) = \int_a^{y-x_0} \frac{(u+x_0)^2}{u^{\alpha+1}} du \qquad \text{i.e. :}$$

$$= \int_a^{y-x_0} \left(\frac{1}{u^{\alpha-1}} + \frac{2x_0}{u^\alpha} + \frac{x_0^2}{u^{\alpha+1}}\right) du \qquad \text{et donc :}$$

$$= \left[-\frac{1}{(\alpha-2)u^{\alpha-2}} - \frac{2x_0}{(\alpha-1)u^{\alpha-1}} - \frac{x_0^2}{\alpha u^\alpha}\right]_a^{y-x_0} \qquad \text{i.e. :}$$

$$= \frac{1}{(\alpha-2)a^{\alpha-2}} + \frac{2x_0}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}} + \frac{x_0^2}{\alpha a^\alpha} - \frac{1}{(\alpha-2)(y-x_0)^{\alpha-2}} - \frac{2x_0}{(\alpha-1)(y-x_0)^{\alpha-1}} - \frac{x_0^2}{\alpha(y-x_0)^\alpha}.$$

Comme $\alpha > 2$, on a : $\lim_{y \to +\infty}\left(-\frac{1}{(\alpha-2)(y-x_0)^{\alpha-2}} - \frac{2x_0}{(\alpha-1)(y-x_0)^{\alpha-1}} - \frac{x_0^2}{\alpha(y-x_0)^\alpha}\right) = 0$. En faisant tendre y vers $+\infty$ et en reconnaissant $\int_{a+x_0}^{+\infty} \frac{t^2}{(t-x_0)^{\alpha+1}} dt$, on en déduit alors, par passage à la limite dans la relation précédente :

Or, les variables aléatoires $(X_i)_{1\le i\le n}$ étant indépendantes, les variables aléatoires $(X_i^2)_{1\le i\le n}$ le sont également. Comme $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$, d'après le cours, on peut désormais conclure :

$$\boxed{Y_n \text{ suit une loi } \Gamma\left(2, \frac{n}{2}\right)}$$

☞ Se souvenir que si $(X_i)_{1\le i\le n}$ est une suite de n variables aléatoires indépendantes suivant une loi normale centrée réduite, alors $\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ suit une loi $\Gamma\left(2, \frac{n}{2}\right)$ qui est la loi du χ^2 à n degrés de libertés, notée $\chi^2(n)$.

b) Comme Y_n suit une loi $\Gamma\left(2, \frac{n}{2}\right)$, d'après le cours, on peut conclure :

$$\boxed{E(Y_n) = n \text{ et } V(Y_n) = 2n}$$

S❷ E❷

● 8. Le coureur de haies

> Un "hurdler" s'élance pour un 110 m haies. S'il ne renverse aucune haie, il effectue son parcours en X secondes où $X \hookrightarrow \mathcal{N}(13.2, 0.2)$. Il peut renverser chacune des dix haies avec une probabilité de 0.1 (les différents passages de haies étant indépendants), ce qui lui fait perdre 0.2 seconde à chaque fois.
>
> Quelle est la probabilité qu'il batte (ou égale) le record du monde (12"91) ?

Notons T le nombre de haies renversées par ce "hurdler" au cours du parcours et Y son temps final. Comme T représente le nombre de succès (renverser une haie) lors de la réalisation de 10 essais indépendants (passer une haie) d'une expérience à deux issues possibles (renverser ou ne pas renverser la haie), la probabilité d'un succès étant de 0.1, on peut écrire que $T \hookrightarrow \mathcal{B}(10, 0.1)$.

De plus, d'après l'énoncé, on peut également écrire que : $Y = X + 0.2T$.

Comme $T \hookrightarrow \mathcal{B}(10, 0.1)$, on a : $T(\Omega) = [\![0, 10]\!]$. La famille $([T = k])_{0\le k\le 10}$ formant ainsi un système complet d'événements, la formule des probabilités totales nous permet alors d'écrire :

$p(Y \le 12.91) = \sum_{k=0}^{10} p\left(Y \le 12.91 / T = k\right) p(T = k)$ soit, comme $X = Y - 0.2T$:

$= \sum_{k=0}^{10} p(X \le 12.91 - 0.2k)\, p(T = k)$ soit encore, en notant F la fonction de répartition de X :

$= \sum_{k=0}^{10} F(12.91 - 0.2k)\, p(T = k)$ et donc, comme $X \hookrightarrow \mathcal{N}(13.2, 0.2)$, en notant Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite :

$= \sum_{k=0}^{10} \Phi\left(\frac{12.91 - 0.2k - 13.2}{0.2}\right) p(T = k)$ ce qui s'écrit encore :

$= \sum_{k=0}^{10} \Phi(-1.45 - k)\, p(T = k)$ soit enfin, d'après les propriétés de Φ :

$= \sum_{k=0}^{10} \left(1 - \Phi(1.45 + k)\right) p(T = k)$ et donc, à la lecture d'une table indiquant les valeurs de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et de la loi $\mathcal{B}(10, 0.1)$:

$\approx 0{,}028$.

On peut désormais conclure :

$$\boxed{\text{La probabilité que ce hurdler batte (ou égale) le record du monde est proche de } 2{,}8\%}$$

☞ Noter qu'il arrive fréquemment que des problèmes lient ainsi des variables aléatoires discrètes et des variables aléatoires à densité (à savoir reproduire).

Convergence et approximations

Fiche de cours

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé.

I. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev **SO EO**

Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ ayant une espérance m ($m \in \mathbb{R}$) et un écart-type σ ($\sigma \in \mathbb{R}_+^*$).
On a : $\forall \varepsilon > 0,\ p(|X - m| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$.

II. Loi faible des grands nombres **SO EO**

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, p)$, deux à deux indépendantes, de même loi, ayant une espérance m ($m \in \mathbb{R}$) et un écart-type σ ($\sigma \in \mathbb{R}_+^*$). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $Y_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$. On a :
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall \varepsilon > 0,\ p(|Y_n - m| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$.

III. Convergence en loi **SO EO**

■ ***Cas des variables aléatoires discrètes.*** Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes et X une variable aléatoire discrète définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ et prenant leurs valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers X si $\forall k \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{n \to +\infty} p(X_n = k) = p(X = k)$.

■ ***Cas général* (SO EO).** Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ de fonctions de répartition respectives $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et F. On dit que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers X si en tout point x de $\mathbb{R}$ où F est continue, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = F(x)$.

IV. Approximations **SO EO**

1. Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson

■ Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$. La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

■ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. Si $n \geq 30$, $p \leq 0.1$ et $np \leq 10$, la loi $\mathcal{B}(n, p)$ peut être approchée par la loi $\mathcal{P}(np)$.

2. Approximation de la loi hypergéométrique par la loi binomiale

Soient n et N deux entiers naturels non nuls et $p \in [0, 1]$. Si $N \geq 10n$, la loi $\mathcal{H}(N, n, p)$ peut être approchée par la loi $\mathcal{B}(n, p)$.

3. Approximation de la loi binomiale par la loi normale (SO EO)

Soient n un entier naturel non nul et $p \in [0, 1]$. Si $n \geq 30$ et $p \approx \frac{1}{2}$, la loi $\mathcal{B}(n, p)$ peut être approchée par la loi $\mathcal{N}\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right)$, c'est-à-dire, si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, en notant Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a \leq b$, $p(a \leq X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$.

4. Approximation de la loi de Poisson par la loi normale (SO EO)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Si $\lambda \geq 15$, la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ peut être approchée par la loi $\mathcal{N}\left(\lambda, \sqrt{\lambda}\right)$, c'est-à-dire, si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, en notant Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite :

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a \leq b$, $p(a \leq X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) - \Phi\left(\frac{a - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$.

V. Théorème de la limite centrée SO EO

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, p)$, mutuellement indépendantes, de même loi, ayant une espérance m ($m \in \mathbb{R}$) et un écart-type σ ($\sigma \in \mathbb{R}_+^*$). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $S_n^* = \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}$. La suite de variables aléatoires $(S_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 1)$, c'est-à-dire :

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a \leq b$, $\lim_{n \to +\infty} p(a \leq S_n^* \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

Dans la pratique, on considère que l'on peut approcher S_n^* par la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ lorsque $n \geq 30$.

Exercices clefs, méthodes et astuces

SO EO

1. Un QCM

A des QCM de langues de 60 questions, un étudiant fait en moyenne 5% d'erreurs. En effectuant une approximation que l'on justifiera, déterminer la probabilité qu'un jour donné (le jour J ?), il effectue exactement 6 fautes, plus de 12 fautes.

Soit X le nombre d'erreurs effectuées par cet étudiant dans ce QCM. X représentant le nombre de succès (faire une erreur) lors de la réalisation de 60 essais indépendants (les 60 questions) d'une expérience à deux issues possibles (faire ou ne pas faire d'erreur), la probabilité de succès étant 0,05, on peut écrire que : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(60, 0.05)$.

Comme $60 \geq 30$, $0,05 \leq 0,1$ et $60 \times 0,05 \leq 10$, on peut approcher X par une variable aléatoire Y suivant une loi de Poisson de paramètre $60 \times 0,05 = 3$. On en déduit alors :
– $p(X = 6) \approx p(Y = 6)$, soit, à l'aide d'une table indiquant les valeurs d'une loi de Poisson : $p(X = 6) \approx 0,05$,
– $p(X \geq 12) = 1 - p(X \leq 11)$, soit : $p(X \geq 12) = 1 - p(Y \leq 11)$, soit à nouveau, à l'aide d'une table indiquant les valeurs d'une loi de Poisson : $p(X \geq 12) \approx 7 \cdot 10^{-5}$.

On peut désormais conclure :

La probabilité qu'un jour donné cet étudiant effectue exactement 6 fautes est approximativement de 0,05, et qu'il effectue plus de 12 fautes, de $7 \cdot 10^{-5}$.

☞ Avant d'approcher une loi par une autre, il faut toujours veiller à ce que les conditions du cours soient bien remplies (à moins que l'énoncé ne stipule explicitement que cette approximation est réalisable).

S❷ E❷

2. Une élection

Au second tour d'un scrutin uninominal à deux tours auquel participent plusieurs millions d'électeurs, M. Legrand obtient 51% des suffrages contre 49% pour M. Legros. On suppose que les votes des différents électeurs sont indépendants.

1) On dépouille les 10 000 premiers bulletins. En faisant une approximation que l'on jutifiera, donner un majorant de l'erreur commise en affirmant que M. Legrand obtient entre 50% et 52% des suffrages exprimés.

2) A l'aide de la loi faible des grands nombres dont on justifiera l'utilisation, déterminer le nombre de bulletins qu'il suffit de dépouiller pour que l'on puisse affirmer avec moins de 5% de risque d'erreurs que M. Legrand obtient entre 50% et 52% des suffrages exprimés.

3) Dans un bureau de vote donné représentatif de l'ensemble des électeurs, il y a eu 817 suffrages exprimés. Quelle est la probabilité que M. Legrand y ait obtenu plus de suffrages que M. Legros.

Notons tout d'abord, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, X_i la variable aléatoire égale à 1 si le $i^{\text{ème}}$ bulletin dépouillé est en faveur de M. Legrand et 0 sinon. D'après l'énoncé, on peut écrire que $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(1, 0.51)$.

1) Soient N le nombre d'électeurs participant à ce scrutin (d'après l'énoncé, on a : $N \geq 2\,000\,000$), X la variable aléatoire égale au nombre de bulletins (parmi les 10 000 premiers) favorables à M. Legrand et $Y = \frac{X}{10\,000}$.

Comme le dépouillement des 10 000 premiers bulletins s'apparente à un tirage sans remise de 10 000 bulletins parmi N dont une proportion de 0.51 favorable à M. Legrand, on peut écrire : $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, 10\,000, 0.51)$. Comme $N \geq 10 \times 10\,000$, on peut alors approcher X par la loi $\mathcal{B}(10\,000, 0.51)$.

De plus, on a :

$$\begin{aligned} p(0,5 \leq Y \leq 0,52) &= p(5\,000 \leq X \leq 5\,200) && \text{i.e. :} \\ &= p(|X - 5\,100| \leq 100) && \text{et donc, comme X ne prend que des valeurs entières :} \\ &= 1 - p(|X - 5\,100| \geq 101). \end{aligned}$$

Comme $X \hookrightarrow \mathcal{B}(10\,000, 0.51)$, on peut maintenant écrire : $E(X) = 5\,100$ et $V(X) = 10\,000 \times 0,51 \times 0,49 = 2\,499$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on en déduit alors :

$$\begin{aligned} p(|X - 5100| \geq 101) &\leq \frac{2499}{101^2} \quad \text{soit :} \\ &\leq 0,245. \end{aligned}$$

On peut désormais conclure :

> Un majorant de l'erreur commise en affirmant que M. Legrand obtient entre 50% et 52% des suffrages exprimés est 24,5%.

NB : Les variables aléatoires $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ ne sont pas indépendantes. En effet, les tirages s'effectuant sans remise, ceux-ci ne sont pas indépendants et les variables aléatoires $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ ne le sont donc pas non plus.

2) Comme la somme de n ($n \in \mathbb{N}^*$) variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de même paramètre p ($p \in [0, 1]$) suit une loi binomiale de paramètres n et p, comme $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(1, 0.51)$ et comme pour $n \leq 200\,000$, on peut en outre effectuer l'approximation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 0.51)$ où $X = \sum_{k=0}^{n} X_i$ (car $N \geq 10n$), on peut donc écrire, **par approximation**, que les variables aléatoires $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ sont indépendantes.

De plus, comme $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(1,\ 0.51)$, on peut écrire que $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} E(X_i) = 0,51 \\ V(X_i) = 0,2499 \end{cases}$. Notons alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. D'après la loi faible des grands nombres, on en déduit alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p\left(\left|Y_n - 0,51\right| \geq 0,01\right) \leq \frac{0,2499}{n \cdot 0,01^2}.$$

Ainsi, une condition suffisante pour que l'erreur commise en affirmant que M. Legrand obtient entre 50% et 52% des suffrages exprimés soit inférieure ou égale à 5% est donc : $\frac{0,2499}{n \cdot 0,01^2} \leq 0,05$, i.e. : $n \geq 49\ 980$. On peut désormais conclure :

> Pour pouvoir affirmer que M. Legrand obtient entre 50% et 52% des suffrages exprimés avec moins de 5% de risque d'erreurs, il suffit donc de dépouiller 49 980 bulletins.

☞ Les élèves de voie scientifique pourront remarquer en se référant au chapitre **19**, que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et la loi faible des grands nombres ne donnent que des résultats médiocres (majorant de l'erreur commise ou valeur de n très importants : dans ce dernier exemple, en utilisant la notion d'estimation par intervalle d'une proportion, on démontrerait que 9 604 bulletins suffiraient).

3) Soit Z le nombre de suffrages exprimés en faveur de M. Legrand dans ce bureau de vote. Comme dans ce bureau de vote, il y a eu 817 suffrages exprimés, l'événement "M. Legrand y a obtenu plus de suffrages que M. Legros" est l'événement $[409 \leq Z \leq 817]$.

Or, d'après la définition de Z, Z est le nombre de bulletins favorables à M. Legrand au cours d'un tirage sans remise de 817 bulletins parmi N dont une proportion de 0.51 favorable à M. Legrand (le bureau de vote étant représentatif du pays). On en déduit alors : $Z \hookrightarrow \mathcal{H}(N,\ 817,\ 0.51)$.

Comme $N \geq 10 \times 817$, on peut approcher Z par la loi $\mathcal{B}(817,\ 0.51)$. Comme $817 \geq 20$ et $0,51 \approx \frac{1}{2}$, on peut désormais approcher Z par la loi normale de paramètres $817 \cdot 0,51 = 416,67$ et $\sqrt{817 \cdot 0,51 \cdot 0,49} \approx 14,29$. En notant F la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, on en déduit alors, en effectuant une correction de continuité :

$p(409 \leq Z \leq 817) \approx \Phi\left(\frac{817 - 416,67}{14,29}\right) - \Phi\left(\frac{408,5 - 416,67}{14,29}\right)$ soit :

$\approx \Phi(28,015) - \Phi(-0,572)$ et comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$:

$\approx \Phi(28,015) - \left(1 - \Phi(0,572)\right)$ soit encore, à l'aide d'une table indiquant les valeurs de la loi normale centrée réduite :

$\approx 1 - (1 - 0,716)$ i.e. :

$\approx 0,716$ d'où la conclusion :

> La probabilité que M. Legrand ait obtenu dans ce bureau de vote plus de suffrages que M. Legros est donc approximativement de 0,716.

☞ Lorsque l'on approche une variable aléatoire discrète X (ici une loi binomiale) qui prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ (ici, $[\![0,\ n]\!]$) par une loi normale, il convient d'effectuer une **correction de continuité.** En notant F la fonction de répartition de cette loi normale :

– pour tout $k \in [\![1,\ n-1]\!]$, on approche $p(X = k)$ par $F(k + 0,5) - F(k - 0,5)$,

– pour tout $k = 0$, on approche $p(X = 0)$ par $F(0,5) - F(0)$,

– pour tout $k = n$, on approche $p(X = n)$ par $F(n) - F(n - 0,5)$.

Ainsi, pour tous $(i,\ j) \in [\![1,\ n-1]\!]^2$, $i \leq j$, $p(i \leq X \leq j) \approx F(j + 0,5) - F(i - 0,5)$ (si $i = 0$, on remplace $F(i - 0,5)$ par $F(0)$ dans la relation, si $j = n$, on remplace $F(j + 0,5)$ par $F(n)$).

S❷ E❷

■ 3. Métro, boulot, dodo

> Pour se rendre à son travail (et en revenir le soir), M. Martin prend deux fois par jour, cinq jour par semaine et 47 semaines par an le métro (M. Martin ignore les jours fériés). Soit X la variable aléatoire égale au temps qu'il passe dans le métro lors de chaque trajet. X suit une loi d'espérance 30 et d'écart-type 10 (le temps est exprimé en minutes). On suppose que les durées des différents trajets sont indépendantes.
>
> Déterminer la probabilité que M. Martin passe plus de 240 h dans le métro au cours de l'année.

Comme M. Martin effectue $47 \times 5 \times 2 = 470$ trajets en métro au cours de l'année, notons, pour tout $i \in [1, 470]$, T_i le temps passé dans le métro par M. Martin lors de son $i^{\text{ème}}$ trajet de l'année.

D'après l'énoncé, les variables aléatoires $(T_i)_{1 \leq i \leq 470}$ sont mutuellement indépendantes, de même loi, d'espérance 30 et d'écart-type 10.

Soit alors T le temps total passé dans le métro par M. Martin au cours d'une année. On a clairement : $T = \sum_{i=1}^{470} T_i$. Posons alors $T^* = \dfrac{T - 470 \times 30}{10\sqrt{470}} = \dfrac{T - 14\,100}{10\sqrt{470}}$. Comme $470 \geq 30$, d'après le théorème de la limite centrée, on peut approcher la loi de T^* par la loi normale centrée réduite. En notant Φ sa fonction de répartition, on peut alors écrire :

$p(T \geq 240 \times 60) = p(T \geq 14\,400)$ soit :

$= p\left(T^* \geq \dfrac{14\,400 - 14\,100}{10\sqrt{470}}\right)$ i.e. :

$\approx p(T^* \geq 1{,}384)$ soit encore :

$\approx 1 - p(T^* \leq 1{,}384)$ et donc, à l'aide d'une table indiquant les valeurs de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite :

$\approx 1 - 0{,}917$ i.e. :

$\approx 0{,}083$ d'où la conclusion :

> La probabilité que M. Martin passe plus de 240 h dans le métro au cours de l'année est approximativement de 0,083.

Statistiques

Fiche de cours

A) Analyse statistique élémentaire d'une variable

I. Généralités SO EO

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une statistique simple quelconque. Notons $X(\Omega) = \{x_i, i \in [\![1, p]\!]\}$ (on suppose les $(x_i)_{1 \le i \le p}$ rangés dans l'ordre croissant).

■ ***Série statistique discrète.*** Soit $i \in [\![1, p]\!]$. On appelle :

– effectif de la valeur x_i, le cardinal noté n_i de l'ensemble $X^{-1}(\{x_i\})$,

– effectif cumulé en x_i, le nombre : $\sum_{j=1}^{i} n_j$,

– effectif total : $n = \sum_{j=1}^{p} n_j$,

– fréquence de la valeur x_i : $f_i = \frac{n_i}{n}$,

– fréquence cumulée en x_i : $\sum_{j=1}^{i} f_j$.

La famille $(x_i, n_i)_{1 \le i \le p}$ ou $(x_i, f_i)_{1 \le i \le p}$ est une série statistique discrète.

■ ***Série statistique groupée (ou continue).*** Soit $]a, b] \subset \mathbb{R}$. On appelle :

– effectif de la classe $]a, b]$, le cardinal de l'ensemble $X^{-1}(]a, b])$,

– effectif cumulé en b, le cardinal de l'ensemble $X^{-1}(]-\infty, b])$,

– effectif total : $\mathrm{Card}(\Omega)$,

– fréquence de la classe $]a, b]$: $\dfrac{\mathrm{Card}\left(X^{-1}(]a, b])\right)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$,

– fréquence cumulée en b : $\dfrac{\mathrm{Card}\left(X^{-1}(]-\infty, b])\right)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$.

Soit $q \in \mathbb{N}^*$. En regroupant les données de la statistique en classes $(]a_i, a_{i+1}])_{1 \le i \le q}$ d'effectifs respectifs $(n_i)_{1 \le i \le q}$ et de fréquences respectives $(f_i)_{1 \le i \le q}$ (on suppose les $(a_i)_{1 \le i \le q+1}$ rangés dans l'ordre croissant) avec $X(\Omega) \subset \bigcup_{i=1}^{q}]a_i, a_{i+1}]$, la famille $(]a_i, a_{i+1}], n_i)_{1 \le i \le q}$ ou $(]a_i, a_{i+1}], f_i)_{1 \le i \le q}$ est une série statistique groupée (ou continue).

II. Représentations graphiques SO EO

■ ***Série statistique discrète :***

– diagramme en bâtons des effectifs (ou des fréquences),

– diagramme en bâtons des effectifs (ou des fréquences) cumulé(e)s,

– polygone des effectifs (ou des fréquences),

– polygone des effectifs (ou des fréquences) cumulé(e)s.

▪ ***Série statistique groupée :***

– histogrammes (rectangles dont les aires sont proportionnelles aux effectifs ou aux fréquences),

– polygone des effectifs (ou des fréquences),

– polygone des effectifs (ou des fréquences) cumulé(e)s.

III. Caractéristiques de position (ou de tendance centrale) SO EO

1. Moyenne (espérance)

▪ Si $(x_i, n_i)_{1\le i\le p}$ est une série statistique discrète, on appelle moyenne (ou espérance) de cette série, le nombre $\bar{x}$ ou E(X) défini par : $E(X) = \bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i}{n}$.

▪ Si la série statistique est groupée, on se ramène à une série discrète en concentrant les effectifs de chaque classe au milieu de chacune d'entre elles.

▪ On a : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $E(aX + b) = aE(X) + b$.

2. Médiane

On appelle médiane d'une série statistique la valeur du caractère qui partage les fréquences, et donc les effectifs en deux parties égales.

▪ ***Cas d'une série statistique discrète.*** Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une statistique simple quelconque. Notons $\Omega = \{\omega_i, i \in [1, p]\}$ (on suppose les $\left(X(\omega_i)\right)_{1\le i\le p}$ rangés dans l'ordre croissant) :

– si p est impair, la médiane de la statistique est le nombre $X\left(\omega_{\frac{p+1}{2}}\right)$,

– si p est pair, la médiane de la statistique est le nombre $\dfrac{1}{2}\left[X\left(\omega_{\frac{p}{2}}\right) + X\left(\omega_{\frac{p}{2}+1}\right)\right]$.

▪ ***Cas d'une série statistique groupée.*** La médiane est le réel μ correspondant à 50% des fréquences cumulées, c'est-à-dire l'abscisse du point d'ordonnée $\dfrac{1}{2}$ du polygone des fréquences cumulées (on suppose que les effectifs de chaque classe sont distribués uniformément à l'intérieur de celle-ci).

3. Mode, classe modale

▪ Si $(x_i, n_i)_{1\le i\le p}$ est une série statistique discrète, on appelle mode la (ou les) valeur(s) x_j ($j \in [1, p]$) d'effectif maximal.

▪ Si $([a_i, a_{i+1}[, n_i)_{1\le i\le p}$ est une série statistique groupée, on appelle classe modale, toute classe des valeurs du caractère correspondant à un rectangle de hauteur maximale sur l'histogramme.

IV. Caractéristiques de dispersion SO EO

1. Variance et écart-type

▪ Si $(x_i, n_i)_{1\le i\le p}$ est une série statistique discrète, on appelle variance de cette série, le nombre V(X) défini par :

$$V(X) = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i \left(x_i - E(X)\right)^2}{n} = E(X^2) - E(X)^2 \text{ avec } E(X^2) = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2}{n}.$$

▪ On appelle écart-type le nombre $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$.

■ On a :

– $\forall(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $V(aX + b) = a^2V(X)$,

– $\forall(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\sigma_{aX+b} = |a|\sigma_X$.

2. Quartiles, déciles

■ Pour tout $k \in [1, 3]$, on appelle $k^{\text{ème}}$ quartile de toute statistique, la valeur du caractère correspondant à $k \times 25\%$ des fréquences cumulées, c'est-à-dire l'abscisse du point d'ordonnée $\frac{k}{4}$ du polygone des fréquences cumulées (le deuxième quartile correspond donc à la médiane).

■ Pour tout $k \in [1, 9]$, on appelle $k^{\text{ème}}$ décile de toute statistique, la valeur du caractère correspondant à $k \times 10\%$ des fréquences cumulées, c'est-à-dire l'abscisse du point d'ordonnée $\frac{k}{10}$ du polygone des fréquences cumulées (le cinquième décile correspond donc à la médiane).

B) Analyse statistique élémentaire de deux variables

I. Généralités SO EO

Soient X et Y deux statistiques simples. On appelle statistique double, l'application $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$, notée $\left((x_i, y_j), n_{i,j}\right)_{\substack{1\le i\le p \\ 1\le j\le q}}$.

■ ***Effectifs.*** On appelle :

– effectif total, le nombre : $\mathrm{Card}(\Omega) = \sum\limits_{\substack{1\le i\le p \\ 1\le j\le q}} n_{i,j} = n$,

– pour tout $(i, j) \in [1, p] \times [1, q]$, effectif du couple (x_i, y_j) : $n_{i,j}$,

– pour tout $i \in [1, p]$, effectif marginal de x_i : $n_{i,\bullet} = \sum\limits_{j=1}^{q} n_{i,j}$.

■ ***Fréquences.*** On appelle :

– pour tout $(i, j) \in [1, p] \times [1, q]$, fréquence du couple (x_i, y_j) : $f_{i,j} = \frac{n_{i,j}}{n}$,

– pour tout $i \in [1, p]$, fréquence marginale de x_i : $f_{i,\bullet} = \sum\limits_{j=1}^{q} f_{i,j}$.

– pour tout $(i, j) \in [1, p] \times [1, q]$, fréquence conditionnelle de x_i sachant que Y vaut y_j : $\frac{n_{i,j}}{n_{\bullet,j}}$.

II. Covariance, coefficient de corrélation linéaire SO EO

Soit $(X, Y) = \left((x_i, y_j)\, n_{i,j}\right)_{\substack{1\le i\le p \\ 1\le j\le q}}$ une statistique double.

■ ***Espérance de XY.*** On a : $E(XY) = \frac{1}{n} \sum\limits_{\substack{1\le i\le p \\ 1\le j\le q}} n_{i,j}\, x_i y_j$.

■ ***Covariance de (X, Y).*** On a : $\mathrm{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

■ ***Variance de X + Y.*** On a : $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{cov}(X, Y)$.

■ ***Coefficient de corrélation linéaire de (X, Y).*** On appelle coefficient de corrélation linéaire de (X, Y), et on note $\rho_{X,Y}$ le nombre : $\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$.

On en déduit alors :

$$p = q = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2aE(X^2) - 2E(XY) + 2bE(X) = 0 \\ 2b - 2E(Y) + 2aE(X) = 0 \end{cases}$$ soit $(L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1, L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2)$:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} aE(X^2) = E(XY) - bE(X) \\ b = E(Y) - aE(X) \end{cases}$$ ce qui s'écrit encore, en substituant $E(Y) - aE(X)$ à b dans la première équation :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} aE(X^2) = E(XY) - E(X)E(Y) + aE(X)^2 \\ b = E(Y) - aE(X) \end{cases}$$ et donc :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\left(E(X^2) - E(X)^2\right) = E(XY) - E(X)E(Y) \\ b = E(Y) - aE(X) \end{cases}$$ soit encore, en reconnaissant $V(X) \neq 0$ et cov(X, Y) $(L_1 \leftarrow \frac{1}{V(X)}L_1)$:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} \\ b = E(Y) - aE(X) \end{cases}$$ et donc :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} \\ b = E(Y) - \dfrac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)}E(X) \end{cases}$$

$\left(\frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)}, E(Y) - \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)}E(X)\right)$ est donc l'unique point critique de f.

⊃ De plus, on a, en utilisant toujours les notations de Monge :

– $r = \frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(a, b) = 2nE(X^2)$,

– $s = \frac{\partial^2 f}{\partial a\, \partial b}(a, b) = 2nE(X)$,

– $t = \frac{\partial^2 f}{\partial b^2}(a, b) = 2n$.

En $\left(\frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)}, E(Y) - \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)}E(X)\right)$, on peut maintenant écrire :

$rt - s^2 = 4n^2E(X^2) - 4n^2E(X)^2$ soit :

$= 4n^2V(X)$ et donc, une variance étant toujours positive, comme $V(X) \neq 0$:

> 0.

Comme un moment d'ordre 2 est toujours positif et comme $E(X^2) \neq 0$, on a : $r > 0$. Comme $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, on peut maintenant écrire que f admet un minimum en $\left(\frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)}, E(Y) - \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)}E(X)\right)$, d'où la conclusion :

$\boxed{\delta_{a,b} \text{ admet donc un minimum sur } \mathbb{R}^2 \text{ et ce minimum est atteint pour } a = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} \text{ et } b = E(Y) - \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)}E(X)}$

2) En considérant le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$, on peut écrire : $\delta_{a,b} = \|AZ - B\|^2$.

Supposons que $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall i \in [1, n], x_i = \lambda$. On peut alors écrire : $V(X) = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i\lambda^2}{\sum_{i=1}^{p} n_i} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{p} n_i\lambda}{\sum_{i=1}^{p} n_i}\right)^2 = 0$. Comme $V(X) \neq 0$, on en déduit alors que : $\nexists \lambda \in \mathbb{R}, (x_i)_{1\leq i\leq n} = \lambda(1)_{1\leq i\leq n}$, et donc que $\text{rg}\, A = 2$. Il existe donc une unique matrice Z rendant minimale $\|AZ - B\|$: c'est l'unique solution de l'équation $({}^tAA)Z = {}^tAB$.

Or, on a :

$${}^tAA = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{pmatrix} \qquad \text{i.e. :}$$

$$= n\begin{pmatrix} E(X^2) & E(X) \\ E(X) & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{d'où :}$$

$$({}^tAA) = I({}^tAA) \Leftrightarrow n\begin{pmatrix} E(X^2) & E(X) \\ E(X) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}({}^tAA) \qquad \text{soit, comme } E(X^2) \neq 0 \ (L_2 \leftarrow E(X^2)L_2 - E(X)L_1) :$$

$$\Leftrightarrow n\begin{pmatrix} E(X^2) & E(X) \\ 0 & E(X^2) - E(X)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -E(X) & E(X^2) \end{pmatrix}({}^tAA) \qquad \text{i.e. :}$$

$$\Leftrightarrow n\begin{pmatrix} E(X^2) & E(X) \\ 0 & V(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -E(X) & E(X^2) \end{pmatrix}({}^tAA) \qquad \text{et donc, comme } V(X) \neq 0 \ (L_1 \leftarrow V(X)L_1 - E(X)L_2) :$$

$$\Leftrightarrow n\begin{pmatrix} V(X)E(X^2) & 0 \\ 0 & V(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V(X) + E(X)^2 & -E(X)E(X^2) \\ -E(X) & E(X^2) \end{pmatrix}({}^tAA) \qquad \text{i.e. :}$$

$$\Leftrightarrow n\begin{pmatrix} V(X)E(X^2) & 0 \\ 0 & V(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(X^2) & -E(X)E(X^2) \\ -E(X) & E(X^2) \end{pmatrix}({}^tAA) \qquad \text{d'où, comme } E(X^2) \neq 0 \ (L_1 \leftarrow \frac{1}{E(X^2)}L_1) :$$

$$\Leftrightarrow n\begin{pmatrix} V(X) & 0 \\ 0 & V(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -E(X) \\ -E(X) & E(X^2) \end{pmatrix}({}^tAA) \qquad \text{i.e. :}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{nV(X)}\begin{pmatrix} 1 & -E(X) \\ -E(X) & E(X^2) \end{pmatrix}({}^tAA) = I \qquad \text{soit enfin :}$$

$$\Leftrightarrow ({}^tAA)^{-1} = \frac{1}{nV(X)}\begin{pmatrix} 1 & -E(X) \\ -E(X) & E(X^2) \end{pmatrix}.$$

De plus, on a :

$${}^tAB = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \end{pmatrix} \qquad \text{i.e. :}$$

$$= n\begin{pmatrix} E(XY) \\ E(Y) \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors que $\delta_{a,b}$ est minimale pour $Z = ({}^tAA)^{-1}({}^tAB)$, soit :

$$Z = \frac{1}{V(X)}\begin{pmatrix} 1 & -E(X) \\ -E(X) & E(X^2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E(XY) \\ E(Y) \end{pmatrix} \qquad \text{i.e. :}$$

$$= \frac{1}{V(X)}\begin{pmatrix} E(XY) - E(X)E(Y) \\ -E(X)E(XY) + E(X^2)E(Y) \end{pmatrix} \qquad \text{et donc :}$$

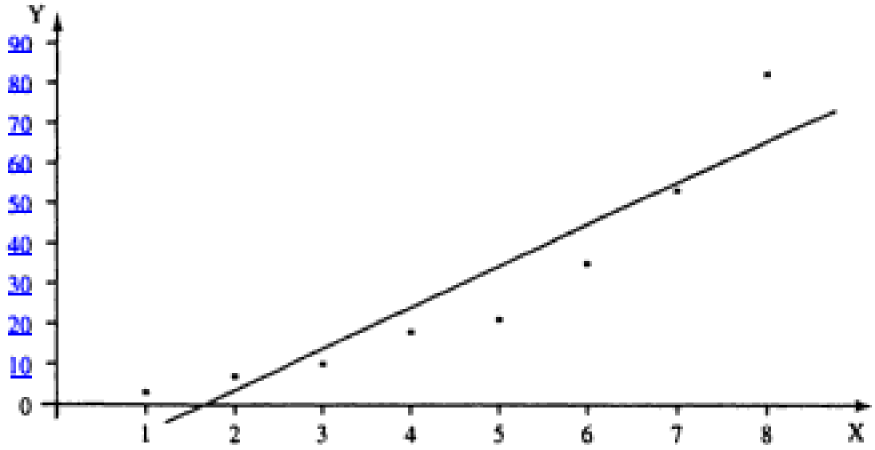
$$= \frac{1}{V(X)}\begin{pmatrix} \operatorname{cov}(X, Y) \\ -E(X)\big(E(XY) - E(X)E(Y)\big) - E(X)^2E(Y) + E(X^2)E(Y) \end{pmatrix} \qquad \text{soit enfin, en reconnaissant } \operatorname{cov}(X, Y) \text{ et } V(X) :$$

$$= \frac{1}{V(X)}\begin{pmatrix} \operatorname{cov}(X, Y) \\ V(X)E(Y) - E(X)\operatorname{cov}(X, Y) \end{pmatrix}.$$

On peut désormais conclure :

$\delta_{a,b}$ est minimale pour $Z = \frac{1}{V(X)}\begin{pmatrix} \operatorname{cov}(X, Y) \\ E(Y)V(X) - E(X)\operatorname{cov}(X, Y) \end{pmatrix}$, c'est-à-dire pour $a = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{V(X)}$ et $b = E(Y) - \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{V(X)}E(X)$.

1) **a)** On a la représentation suivante :



b) Les données nécessaires à l'obtention des résultats demandés se trouvent dans le tableau :

	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
	1	3	1	9	3
	2	7	4	49	14
	3	10	9	100	30
	4	18	16	324	72
	5	21	25	441	105
	6	35	36	1225	210
	7	53	49	2809	371
	8	82	64	6724	656
Total	**36**	**229**	**204**	**11 681**	**1 461**

On en déduit alors :

– $E(X) = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i}{8} = \frac{36}{8} = 4{,}5,$

– $E(Y) = \frac{\sum_{i=1}^{8} y_i}{8} = \frac{229}{8} = 28{,}625,$

– $E(X^2) = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i^2}{8} = \frac{204}{8} = 25{,}5$, d'où :

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 25{,}5 - 4{,}5^2 = 5{,}25,$

– $E(Y^2) = \frac{\sum_{i=1}^{8} y_i^2}{8} = \frac{11\,681}{8} = 1\,460{,}125$, d'où :

$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 1\,460{,}125 - 28{,}625^2 = 640{,}734,$

– $E(XY) = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i y_i}{8} = \frac{1461}{8} = 182{,}625$, et enfin :

– $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 182{,}625 - 4{,}5 \times 28{,}625 = 53{,}813.$

La droite de régression de Y en X est la droite d'équation $Y = aX + b$ où : $a = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{53{,}813}{5{,}25} = 10{,}25$ et $b = E(Y) - aE(X) = 28{,}625 - 10{,}25 \times 4{,}5 = -17{,}5$. On peut maintenant conclure :

$\boxed{\text{La droite de régression de Y en X est donc la droite d'équation } y = 10{,}25x - 17{,}5}$

c) Le coefficient de corrélation de X et Y est : $\rho_{X,Y} = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \approx \dfrac{53{,}813}{\sqrt{5{,}25 \times 640{,}734}} \approx 0{,}928$. Comme $0{,}928 \geq 0{,}75$, on peut désormais conclure :

$$\boxed{\text{L'ajustement } Y = 10{,}25X - 17{,}5 \text{ est acceptable}}$$

2) a) On peut dresser le tableau suivant :

	x_i	y_i'	x_i^2	$y_i'^2$	$x_i y_i'$
	1	0,477	1	0,228	0,477
	2	0,845	4	0,714	1,690
	3	1,000	9	1,000	3,000
	4	1,255	16	1,576	5,021
	5	1,322	25	1,748	6,611
	6	1,544	36	2,384	9,264
	7	1,724	49	2,973	12,070
	8	1,914	64	3,663	15,311
Total	**36**	**10,082**	**204**	**14,286**	**53,444**

On en déduit alors :

– $E(Y') = \dfrac{\sum_{i=1}^{8} y_i'}{8} \approx \dfrac{10{,}082}{8} \approx 1{,}260$,

– $E(Y'^2) = \dfrac{\sum_{i=1}^{8} y_i'^2}{8} \approx \dfrac{14{,}286}{8} \approx 1{,}786$, d'où :

$V(Y') = E(Y'^2) - E(Y')^2 \approx 1{,}786 - 1{,}260^2 \approx 0{,}198$,

– $E(XY') = \dfrac{\sum_{i=1}^{8} x_i y_i'}{8} \approx \dfrac{53{,}444}{8} \approx 6{,}681$,

– $\text{cov}(X, Y') = E(XY') - E(X)E(Y') \approx 6{,}681 - 4{,}5 \times 1{,}260 \approx 1{,}009$, et enfin :

– $\rho_{X,Y'} = \dfrac{\text{cov}(X,Y')}{\sigma_X \sigma_{Y'}} \approx \dfrac{1{,}009}{\sqrt{5{,}25 \times 0{,}198}} \approx 0{,}991$.

La droite de régression de Y' en X est la droite d'équation $Y' = aX + b$ où : $a = \dfrac{\text{cov}(X,Y')}{V(X)} = \dfrac{1{,}009}{5{,}25} \approx 0{,}192$ et $b = E(Y') - aE(X) \approx 1{,}260 - 0{,}192 \times 4{,}5 \approx 0{,}395$, et donc :

$$\boxed{Y' \approx 0{,}192\,X + 0{,}395 \quad \text{avec } \rho_{X,Y'} \approx 0{,}991}$$

■ Comme $Y' = \log Y$, on en déduit alors que :

$\log Y \approx 0{,}192\,X + 0{,}395$ soit, en composant par la fonction $\exp_{10}$:

$Y \approx 10^{0{,}395}\left(10^{0{,}192}\right)^X$ i.e. :

$$\boxed{Y \approx 2{,}483 \cdot 1{,}557^X}$$

SO EO

■ 4. Statistique à deux variables (2)

Après une épreuve de philosophie aux concours, on s'intéresse au lien existant, pour une centaine de candidats pris au hasard, entre le temps consacré à la philosophie durant leur année scolaire et le résultat obtenu à cette épreuve.

En notant X leur note (sur 20) et Y leur temps de travail (en heures) en philosophie durant l'année, on obtient les résultats suivants :

X \ Y	[0, 20[	[20, 50[	[50, 100[	[100, 200[
[0, 4[	6	6	2	5
[4, 8[	7	17	15	3
[8, 12[	6	7	6	2
[12, 16[	2	7	6	2
[16, 20[	0	1	0	0

1) Déterminer la moyenne en philosophie de cet échantillon ainsi que le temps moyen consacré par cet échantillon à la philosophie au cours de l'année scolaire.

2) a) Déterminer la droite de régression de X en Y.

b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de (X, Y). Conclure.

NB : On dressera tous les tableaux nécessaires à l'obtention des résultats demandés. On effectuera en outre tous les calculs avec la précision donnée par la calculatrice, mais on présentera les résultats arrondis à 10^{-3} près.

1) On peut dresser le tableau suivant :

x_i	y_i	n_i	$n_i x_i$	$n_i y_i$	$n_i x_i^2$	$n_i y_i^2$	$n_i x_i y_i$
2	10	6	12	60	24	600	120
2	35	6	12	210	24	7 350	420
2	75	2	4	150	8	11 250	300
2	150	5	10	750	20	112 500	1 500
6	10	7	42	70	252	700	420
6	35	17	102	595	612	20 825	3 570
6	75	15	90	1 125	540	84 375	6 750
6	150	3	18	450	108	67 500	2 700
10	10	6	60	60	600	600	600
10	35	7	70	245	700	8 575	2 450
10	75	6	60	450	600	33 750	4 500
10	150	2	20	300	200	45 000	3 000
14	10	2	28	20	392	200	280
14	35	7	98	245	1 372	8 575	3 430
14	75	6	84	450	1 176	33 750	6 300
14	150	2	28	300	392	45 000	4 200
18	35	1	18	35	324	1 225	630
	Total	**100**	**756**	**5 515**	**7 344**	**481 775**	**41 170**

On peut maintenant écrire :

– $E(X) = \frac{756}{100} = 7{,}56$, et :

– $E(Y) = \frac{5\,515}{100} = 55{,}15$, d'où la conclusion :

> La moyenne en philosophie de cet échantillon est $E(X) = 7{,}56$ et le temps moyen consacré à la philosophie au cours de l'année scolaire $E(Y) = 55{,}15$ h.

2. Estimation par intervalle de la moyenne d'une loi normale d'écart-type donné

Soient $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$, P une population qui possède une caractéristique Θ, X la variable aléatoire égale à la valeur de Θ pour chaque élément de P (on suppose que X suit une loi normale de paramètres $m \in \mathbb{R}$ et σ), Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, $\alpha \in [0, 1]$, t_α le réel tel que $\Phi(t_\alpha) = \frac{\alpha + 1}{2}$ et m_n la moyenne de la valeur observée de Θ dans un échantillon de n individus ($n \in \mathbb{N}^*$) extraits de P.

L'intervalle $\left[m_n - t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, m_n + t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ est appelé intervalle de confiance à 100α % (ou au niveau de confiance α) de m.

NB : On a : $t_{0,95} \approx 1,9600$ et $t_{0,99} \approx 2,5758$ à 10^{-4} près.

Exercices clefs, méthodes et astuces

S❷

1. Estimation d'une moyenne

Au sein d'une population donnée, on suppose que la consommation de cigarettes suit une loi normale. Un sondage portant sur 100 fumeurs choisis au hasard (et avec remise) au sein de cette population permet de constater que leur consommation moyenne est de $\mu = 9,37$ cigarettes par jour avec un écart-type $\sigma = 2,14$.

Déterminer un intervalle de confiance à 95% et à 99% de la consommation moyenne de cigarettes par jour au sein de cette population.

- L'intervalle de confiance à 95% de μ s'écrit : $\left[\mu - t_{0,95} \frac{\sigma}{\sqrt{100}}, \mu + t_{0,95} \frac{\sigma}{\sqrt{100}}\right]$, soit, comme $\mu = 9,37$, $\sigma = 2,14$ et $t_{0,95} \approx 1,96$, après calculs :

> Un intervalle de confiance à 95% de la consommation moyenne de cigarettes par jour au sein de cette population est [8,95, 9,89].

- De même, l'intervalle de confiance à 99% de μ s'écrit : $\left[\mu - t_{0,99} \frac{\sigma}{\sqrt{100}}, \mu + t_{0,99} \frac{\sigma}{\sqrt{100}}\right]$, soit, comme $\mu = 9,37$, $\sigma = 2,14$ et $t_{0,99} \approx 2,5758$, après calculs :

> Un intervalle de confiance à 99% de la consommation moyenne de cigarettes par jour au sein de cette population est [8,82, 9,92].

S❷

2. Estimation d'une proportion : une élection présidentielle

A la veille du second tour d'une élection présidentielle opposant, auprès d'un très grand nombre d'électeurs, deux candidats A et B d'importances comparables, un institut de sondage désire estimer la probabilité que le candidat A soit élu.

On effectue l'hypothèse que les suffrages des différents électeurs sont indépendants et que chacun d'entre eux a une probabilité p de voter pour A à ce second tour.

Hidden page

$t_\alpha = \dfrac{0{,}015\, t_\alpha}{\sigma}$ et donc, comme $\alpha \neq 0$, i.e. $t_\alpha \neq 0$, en divisant par t_α :

$\dfrac{0{,}015}{\sigma} = 1$ i.e. :

$\sigma = 0{,}015$.

On peut désormais conclure :

$\boxed{\text{P suit une loi normale de paramètres 0,517 et 0,015}}$

☞ Noter la méthode employée pour déterminer les paramètres de la loi normale T que suit θ.
On obtient tout d'abord clairement $E(T) = \theta$. On détermine ensuite un intervalle de confiance à $100\alpha\%$ de θ en fonction de t_α et de σ. En se ramenant alors à la variable aléatoire centrée réduite $T^* = \dfrac{T - \theta}{\sigma}$ associée à T et en considérant sa fonction de répartition Φ, on montre que $\Phi\left(\dfrac{t_\alpha}{2\sigma\sqrt{n}}\right) = \dfrac{\alpha + 1}{2} = \Phi(t_\alpha)$, soit, Φ étant bijective (car $T^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$) : $t_\alpha = \dfrac{t_\alpha}{2\sigma\sqrt{n}}$, i.e. : $\sigma = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

b) Soit π_A la probabilité que A gagne cette élection. On a clairement : $\pi_A = p(P > 0{,}5) = 1 - p(P \leq 0{,}5)$, soit, comme P suit une loi normale de paramètres 0,517 et 0,015, en notant P^* la variable aléatoire centrée réduite associée à P ($P^* = \dfrac{P - 0{,}517}{0{,}015}$), de fonction de répartition Φ : $\pi_A = 1 - \Phi\left(\dfrac{0{,}5 - 0{,}517}{0{,}015}\right)$, soit : $\pi_A = 1 - \Phi(-1{,}11)$, i.e. : $\pi_A = \Phi(1{,}11)$.

On peut désormais conclure, à l'aide de la table donnant les valeurs de la loi normale centrée réduite :

$\boxed{\text{Au vu de ce sondage, la probabilité que A gagne cette élection est de 86,7\%}}$

JOUVE
11, Bd de Sébastopol - 75001 PARIS - Imprimé sur presse rotative numérique
N°453686T - Dépôt légal : Mars 2008 - Imprimé en France
Réf 1081808/15

MÉTHODES
SAVOIR-FAIRE ET ASTUCES

Méthodes, Savoir-faire et Astuces est l'ouvrage de référence en mathématiques en prépa HEC. En effet, véritable « bible » pour les élèves de prépa, cet ouvrage synthétise l'ensemble des connaissances nécessaires à la réussite en mathématiques aux concours commerciaux. Il comprend :

- **des fiches de cours** qui représentent la substantifique moelle des connaissances exigées par le programme ;
- **500 exercices** regroupés autour de **200 thèmes** qui recouvrent la quasi-totalité des questions apparaissant aux concours ;
- **tous les exercices classiques** posés régulièrement à l'écrit comme à l'oral qui doivent être parfaitement maîtrisés par les préparationnaires ;
- plus de **400 méthodes, savoir-faire et astuces**, soit autant d'outils et de clefs pour résoudre tous les sujets de concours.

Méthodes, Savoir-faire et Astuces :
UN OUVRAGE DE RÉFÉRENCE INCONTOURNABLE

OPTION SCIENTIFIQUE **OPTION ÉCONOMIQUE**

La réussite par l'expérience

9 782853 948319

Réf. 108.1808 Dépôt à Paris : Librairie des Prépas - 34, rue Serpente 75006 Paris ISBN 2 85394 831 5