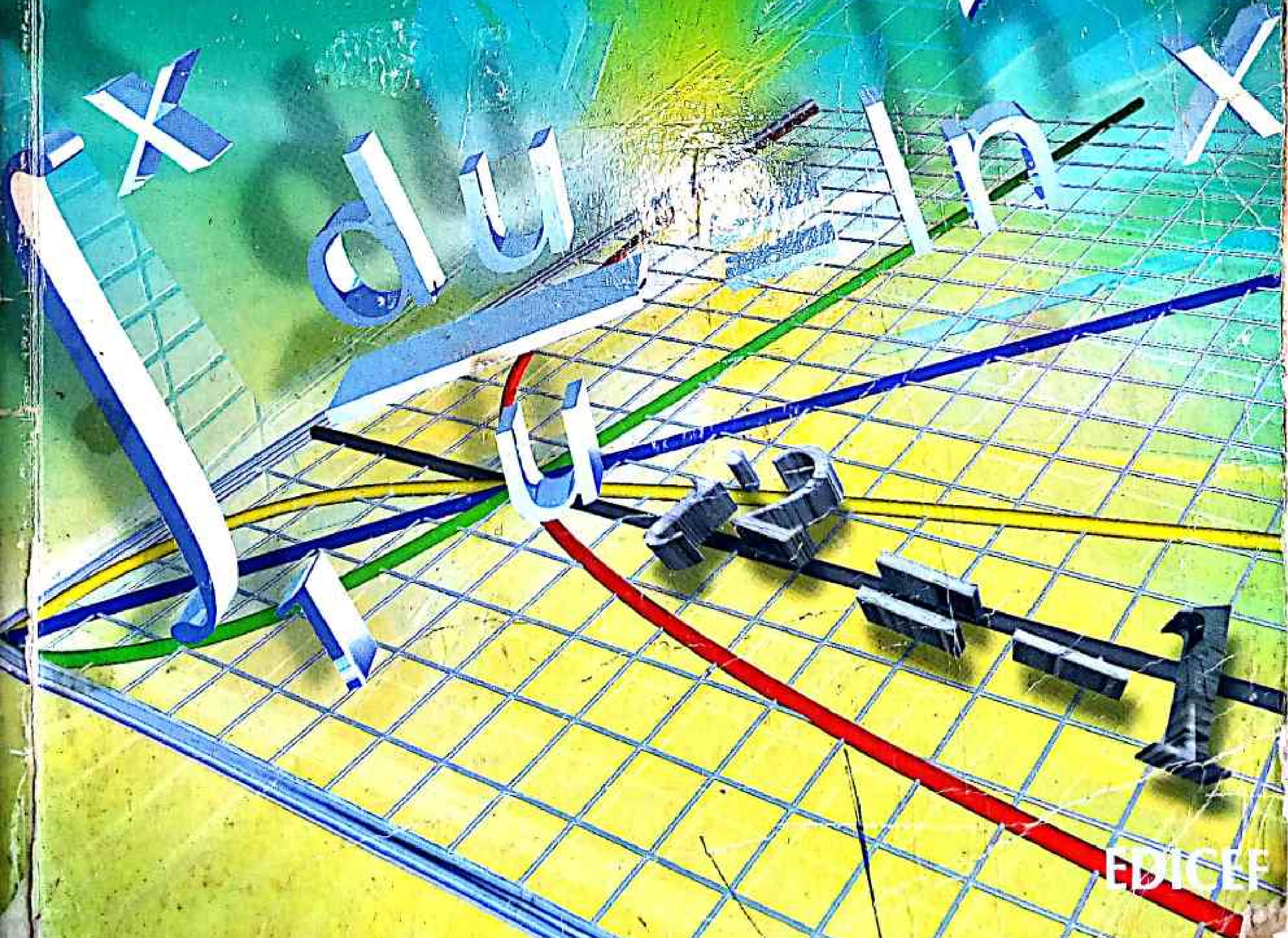
COLLECTION
INTER
AFRICAINE DE
MATHÉMATIQUES

Terminale SE

MATHÉMATIQUES



EDICEF

Collection
Inter
Africaine de
Mathématiques

sous la direction
de Saliou Touré
Professeur à l'Université
d'Abidjan

MATHÉMATIQUES

Terminale scientifique

OPTION SCIENCES EXPÉRIMENTALES

Elméhdi Ag HAMATY
Pierre DAGBEGNON LAWIN ORÈ
Georgette HADDAD-OUÉDRAOGO
Denis OUÉHI
Baye OULD EL HADJ AMAR
Faustin TOUADERA

EDICEF
58, rue Jean-Bleuzen
92178 Vanves Cedex

L'idée d'harmoniser les programmes de mathématiques entre les pays francophones d'Afrique et de l'océan Indien remonte à l'année 1983 où fut organisé par l'IRMA, à Abidjan, le premier séminaire d'harmonisation. Depuis, d'autres séminaires ont suivi : en 1985 à Cotonou, en 1988 à Conakry et en juin 1992 à Abidjan avec la participation de 20 pays.

PARTICIPATION DES DIFFÉRENTS PAYS

BÉNIN	COMORES	GUINÉE	RÉP. DÉM. CONGO
BURKINA FASO	CONGO	MADAGASCAR	RWANDA
BURUNDI	COTE D'IVOIRE	MALI	SÉNÉGAL
CAMEROUN	DJIBOUTI	MAURITANIE	TCHAD
CENTRAFRIQUE	GABON	NIGER	TOGO

La suite logique, souhaitée par tous les participants, est l'élaboration d'une Collection Inter-Africaine de manuels de mathématiques pour l'enseignement secondaire. Des rédacteurs de tous les pays participent à la réalisation de ce projet. Un comité de coordination travaille avec les cellules nationales mises en place dans chaque pays.

COMITÉ DE COORDINATION

Georgette HADDAD-OUÉDRAOGO

Mamadou BINATÉ — Adou NIAMEN — Denis OUÉHI

D'autres séminaires de concertation ont réuni les responsables de ces cellules, à Libreville en 1993, à Ndjaména en 1994, à Yaoundé en 1995, à Antananarivo en 1996, à Dakar en 1997 et à Niamey en 1998, à Nouakchott en 1999, à Ouagadougou en 2000.

ISSN 1248-587-X

ISBN 2-84-129478-1

PRÉFACE

Dans un monde qui évolue rapidement, la maîtrise et l'approfondissement des mathématiques apparaissent comme une condition indispensable au développement des nations, plongées qu'elles sont dans l'ère de la haute technologie et de la mondialisation des marchés.

Voilà pourquoi les mathématiciens africains ont commencé, dès 1983, à organiser des réunions de concertation sur les problèmes posés par l'enseignement des mathématiques qui jouent un rôle essentiel dans la préparation des jeunes aux défis de l'avenir.

La Collection Inter-Africaine de Mathématiques que nous proposons aujourd'hui aux élèves de l'Enseignement Secondaire des pays francophones d'Afrique et de l'Océan Indien est le fruit de cette collaboration franche et fraternelle qui a abouti, au mois de juin 1992, à l'élaboration et à l'adoption par tous ces pays des programmes des premier et second cycles de l'Enseignement Secondaire.

Elle a pour objectifs majeurs :

– l'harmonisation de la pédagogie des mathématiques et la mise à la disposition des élèves et des enseignants africains de manuels de qualité tenant compte du milieu socioculturel africain en tant que support et véhicule privilégiés des concepts mathématiques ;

– l'acquisition par les élèves des bases d'une formation mathématique solide qui leur permettent d'analyser une situation, de conjecturer des hypothèses et de les valider ou non à l'épreuve des faits ou du raisonnement, de recourir aux modèles mathématiques qu'ils connaissent et de dégager une conclusion ;

– la diminution du coût du manuel pour permettre la réalisation d'un vieux rêve : un élève, un livre.

Les ouvrages de la Collection Inter-Africaine de Mathématiques, rédigés par des équipes d'enseignants, de chercheurs et de responsables pédagogiques africains, belges et français, s'appuient sur l'environnement des élèves pour les motiver, les faire agir, les amener à comprendre et à agir de nouveau, de manière autonome et créatrice. Les contenus adoptés et les méthodes pédagogiques préconisées ont été systématiquement expérimentés dans plusieurs pays avant que ne soient entreprises les rédactions définitives.

Conformément à notre conception de l'enseignement des mathématiques, nous n'avons pas voulu présenter les leçons sous forme d'exposés théoriques, mais comme des séances de travail au cours desquelles des activités de calcul, de dessin, de lecture de documents (le plus souvent empruntés au milieu africain) sont mises en œuvre pour solliciter et provoquer constamment la participation active des élèves.

Insérés dans les leçons, des exercices d'application immédiate permettent l'assimilation des notions étudiées. Placés à la fin des chapitres, des exercices d'entraînement et d'approfondissement permettent aux élèves d'éprouver leur compétence et aux professeurs d'évaluer leur enseignement.

Nous exprimons notre gratitude aux différents Ministres chargés de l'Éducation dans les pays francophones d'Afrique et de l'océan Indien, ainsi qu'aux responsables de la Coopération Française et de la Coopération Belge qui, par leur compréhension, leurs encouragements et leur soutien constant tant moral que matériel, nous ont permis de réaliser ces ouvrages dans les meilleures conditions possibles.

Enfin, nous espérons que ce manuel répondra au mieux à l'attente et aux besoins des utilisateurs (professeurs et élèves). Afin d'en améliorer les prochaines éditions, nous accueillerons avec reconnaissance les remarques, les critiques et les suggestions qu'ils voudront bien nous faire et, par avance, nous les en remercions.

Saliou Touré

SOMMAIRE

PRÉSENTATION DU MANUEL

Organisation d'un chapitre

Le cours

permet à l'élève de reprendre seul le travail effectué en classe avec le professeur.

■ **L'essentiel à mémoriser**, constitué des définitions, propriétés, méthodes, tableaux récapitulatifs, est placé sur fond couleur souvent prolongé par un cadre couleur contenant des traductions mathématiques et des illustrations.

■ **Les exemples** sont souvent des exercices commentés et résolus entièrement ou partiellement. L'énoncé de ces exemples est placé sur fond gris afin d'inviter l'élève à le traiter avant de comparer sa démarche à celle proposée.

■ **Les activités** présentent :
- soit l'introduction d'une notion ;
- soit une démarche pour démontrer une propriété ou un problème ;
- soit une démarche pratique pour appliquer une méthode ou une technique.

Pour les mêmes raisons que dans les exemples, la description de la situation mathématique et le problème posé dans ces activités sont placés sur fond gris.

■ **Les exercices** d'applications directes sont placés après chaque paragraphe.

Les exercices

clôturent chacun des chapitres avec en général des différentes parties :
- **Entraînement**
- **Approfondissement**
- **Problèmes**

Les informations

Des informations historiques, scientifiques, technologiques, culturelles... apportent un « plus » au thème du chapitre. Elles se trouvent dans le flash d'ouverture ou dans des encadrés.

Les travaux pratiques

contiennent un zoom sur quelques thèmes.
Ils sont de trois types :

1. **Les exercices commentés** qui présentent :
   - des méthodes de résolution de problèmes
   - des modèles de rédaction de solution de ces problèmes
2. **Le langage et la logique** qui présentent :
   - des différentes méthodes de démonstration
   - des concepts unificateurs sur les opérations (notions de groupe commutatif, de corps commutatif, d'espace vectoriel).
3. **Des élargissements de notions.**

Sommaire des travaux pratiques

Articulation des chapitres – Répartition en modules

Les fondements de l'analyse
- 1 - Limites et continuité
- 2 - Dérivée - primitives
- 3 - Études de fonctions

→

De nouvelles fonctions de référence
- 4 - Fonction logarithme népérien
- 5 - Fonction exponentielle népérienne
- 6 - Fonctions exponentielles – Fonctions Puissance

→

De nouvelles techniques
Des outils de modélisation en analyse
- 7 - Calcul intégral
- 8 - Suites numériques
- 9 - Équations différentielles

De nouveaux nombres
- 10 - Nombres complexes
- 11 - Nombres complexes et géométrie

Organisation des données (des outils de modélisation)
- 14 - Statistique
- 15 - Probabilité
- 16 - Probabilités conditionnelles et variable aléatoire

Vers la géométrie analytique de l'espace (outils de résolution de problèmes)
- 12 - Géométrie dans l'espace
- 13 - Systèmes linéaires

INDEX
des notions abordées

2

Imprimé en Italie par «La Tipografica Varese S.p.A.»
Dépôt legal Edition 69842 - 04/2006
Collection 61 - Edition n° 11
59/4978/9

Fruits de la collaboration entre les mathématiciens des pays francophones d'Afrique et de l'océan Indien, les ouvrages de la Collection Inter-Africaine de Mathématiques (CIAM) reposent sur un profond travail d'investigation et d'expérimentation.

Cette collection a pour objectifs :

- l'harmonisation de la pédagogie des mathématiques et la mise à la disposition des élèves et des enseignants africains de manuels de qualité, tenant compte du milieu socio-culturel africain en tant que support et véhicule privilégiés des concepts mathématiques ;
- l'acquisition par les élèves des bases d'une formation mathématique solide qui leur permettent d'analyser une situation, de conjecturer des hypothèses et de les valider ou non à l'épreuve des faits ou de l'environnement, de recourir aux modèles mathématiques qu'ils connaissent et de dégager une conclusion ;
- la diminution du coût du manuel, pour permettre la réalisation d'un vieux rêve : un élève, un livre.

9 782841 294787

DIFFUSION
R.C.I. : NOUVELLES ÉDITIONS IVOIRIENNES
AUTRES PAYS : EDICEF

59.4978.9

1

Limites et continuité

Les notions de limite et de continuité étaient considérées comme intuitives par les mathématiciens du XVII^e et du XVIII^e siècles.

Certains mathématiciens tels que Gauss, Cauchy et Abel attirèrent l'attention sur la nécessité de produire des définitions et des démonstrations rigoureuses, inaugurant ainsi une ère nouvelle de l'Analyse qui eut son aboutissement au XX^e siècle sur la topologie.

L'Allemand Karl Weierstrass, par les brillants résultats sur ses recherches en analyse, devint l'un des plus célèbres analystes européens de son temps.

À la stupeur de ses contemporains, il définit une courbe continue n'admettant de tangente en aucun point !

© BOYER-VIOLLET

Karl Weierstrass
mathématicien allemand – 1815-1897.

SOMMAIRE

1 Limites et continuité en a

Tableau récapitulatif

① **Limites de référence**

- **a et c étant des nombres réels, $\lim\limits_{x \to a} c = \lim\limits_{x \to +\infty} c = \lim\limits_{x \to -\infty} c = c$**

- **On a :**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

- **a étant un nombre réel et n un nombre entier naturel non nul,**

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} x^n = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to a} (x-a)^n = 0$$

Pour n pair :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$$

Pour n impair :

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1}{x^n} = -\infty \quad ; \quad \lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} \dfrac{1}{(x-a)^n} = -\infty \\[2ex] \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty \quad ; \quad \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \dfrac{1}{(x-a)^n} = +\infty \end{cases}$$

② **Calcul de limite à l'infini de fonctions polynômes et rationnelles**

$$\lim_{x \to -\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \to -\infty} a_n x^n$$

$$\lim_{x \to +\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \to +\infty} a_n x^n$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_q x^q + b_{q-1} x^{q-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \lim_{x \to -\infty} \frac{a_p x^p}{b_q x^q}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_q x^q + b_{q-1} x^{q-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_p x^p}{b_q x^q}$$

③ **Critères de continuité en a**

- **f étant une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a,**
  f est continue en a $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

- **Toute fonction qui est somme, produit ou quotient de fonctions élémentaires est continue en tout élément de son ensemble de définition.**

1.1. Limites de référence et continuité en a

Limite à gauche - Limite à droite

Tableau récapitulatif

① **Définition**

a et l sont des nombres réels, f une fonction d'ensemble de définition D_f.

On dit que f admet une *limite à gauche* en a égale à l lorsque la restriction g de f à $D_f \cap]-\infty\,;a[$ admet en a une limite égale à l.

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = l.$$

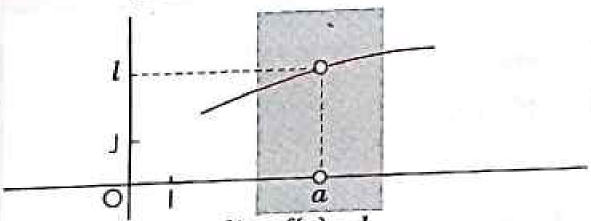
On dit que f admet une *limite à droite* en a égale à l lorsque la restriction g de f à $D_f \cap]a\,;+\infty[$ admet en a une limite égale à l.

$$\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = l.$$

② **Propriété**

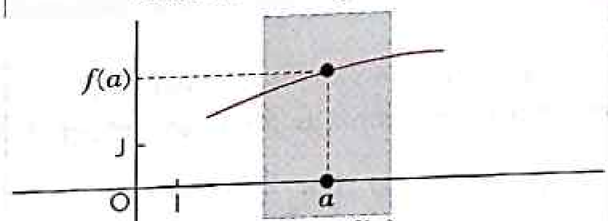
a et l sont des nombres réels, f une fonction définie sur un intervalle ouvert centré en a, sauf éventuellement en a.

Dans le cas où f n'est pas définie en a,
f admet une limite l en a
si et seulement si
f admet en a une limite à gauche et une limite à droite égales à l.



$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$
si et seulement si
$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = l$$

Dans le cas où f est définie en a,
f admet une limite en a
si et seulement si
f admet en a une limite à gauche et une limite à droite égales à $f(a)$.

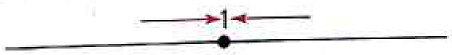


$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$
si et seulement si
$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = f(a)$$

Exemple

Étudions la limite et la continuité en 1 de la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty\,;1],\ f(x) = x^2 - x + 2 \\ \text{pour } x \in]1\,;+\infty[,\ f(x) = x + 1 \end{cases}$$



Calculons la limite à gauche en 1 de f.

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim_{x \to 1} (x^2 - x + 2) = 2$$

Calculons la limite à droite en 1 de f.

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$$

d'où : $\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = 2$ et $f(1) = 2$

donc f admet une limite en 1 égale à $f(1)$; par conséquent la fonction f est continue en 1.

Prolongement par continuité

Exemple introductif

Étudions la limite et la continuité en 1 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x-1}$.

On veut trouver une fonction g définie sur $\mathbb{R}$, continue en 1 et qui coïncide sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ avec f.

Calcul de la limite

Pour tout élément x de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f(x) = x + 2$

donc : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x+2) = 3$.

La fonction f admet une limite en 1, égale à 3.

Étude d'une fonction auxilliaire

Considérons la fonction g définie par : $\begin{cases} \text{pour } x \in \mathbb{R}\setminus\{1\},\ g(x) = f(x) \\ g(1) = 3 \end{cases}$

On a : $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = \lim\limits_{x \to 1} f(x) = g(1)$.

donc g est continue en 1. On dit que g est le **prolongement par continuité de f** en 1.

Définition et propriété

f est une fonction d'ensemble de définition D_f, a un nombre réel n'appartenant pas à D_f.
On suppose que f admet une limite finie l en a.

Alors la fonction g définie par : $\begin{cases} \text{pour } x \in D_f\setminus\{a\},\ g(x) = f(x) \\ g(a) = l \end{cases}$

est continue en a. Elle est appelée *prolongement par continuité de f en a*.

Exemple

On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.
Démontrons que f admet un prolongement par continuité en 0.

On a : $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Donc f admet un prolongement par continuité en 0, la fonction g définie par :

$$\begin{cases} \text{pour } x \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ g(x) = f(x) \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

Exercices

1.a Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$; $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2-x-6}{x+2}$

1.b Dans chacun des cas suivants, étudier la continuité en 2 de la fonction f définie par :

$\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty\,;2[,\ f(x) = 2x^2-4x-4 \\ \text{pour } x \in [2\,;+\infty[,\ f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1} \end{cases}$

$\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty\,;2[,\ f(x) = 2x^2-4x-4 \\ \text{pour } x \in [2\,;+\infty[,\ f(x) = \dfrac{x-6}{x-1} \end{cases}$

1.c Étudier la continuité en 1 de la fonction f définie par :

$\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty\,;1[,\ f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}-1} \\ \text{pour } x \in]1\,;+\infty[,\ f(x) = -x^2+4x-4 \\ f(1) = -1 \end{cases}$

1.d On donne la fonction f définie par :

$f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x-1}$.

Justifier que f admet un prolongement par continuité en 1 et préciser ce prolongement.

1.2. Limites, opérations, composition

Tableau récapitulatif

① Limites d'une somme

f et *g* sont des fonctions ; l et l' des nombres réels ; a un nombre réel, $-\infty$ ou $+\infty$						
Si f a pour limite en a	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si g a pour limite en a	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f+g$ a pour limite en a	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	on ne peut pas conclure

② Limites d'un produit

f et *g* sont des fonctions ; l et l' des nombres réels ; a un nombre réel, $-\infty$ ou $+\infty$									
Si f a pour limite en a	l	l, $l>0$	l, $l<0$	l, $l>0$	l, $l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et si g a pour limite en a	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors fg a pour limite en a	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	on ne peut pas conclure

③ Limites d'un inverse

f est une fonction ; l un nombre réel ; a un nombre réel, $-\infty$ ou $+\infty$				
Si g a pour limite en a	l', $l'\neq 0$	0 (g étant positive sur K) *	0 (g étant négative sur K) *	$-\infty$ ou $+\infty$
alors $\frac{1}{g}$ a pour limite en a	$\frac{1}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	0

④ Limites d'un quotient

f et *g* sont des fonctions ; l et l' des nombres réels ; a un nombre réel, $-\infty$ ou $+\infty$									
Si f a pour limite en a	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
et si g a pour limite en a	l', $l'\neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	l', $l'>0$	l', $l'<0$	l', $l'>0$	l', $l'<0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\frac{f}{g}$ a pour limite en a	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	on ne peut pas conclure	

*

Dans le tableau « **Limite d'un inverse** », K désigne un intervalle contenu dans l'ensemble de définition de g et est l'un des types suivants :

– lorsque x tend vers le nombre réel a

– lorsque x tend vers $-\infty$ (resp. $+\infty$)]$-\infty$; A[(resp.]B ; $+\infty$[)

Exemples d'utilisation des opérations sur les limites

Limite d'une somme

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$	et	$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$	donc	$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + \sqrt{x}) = +\infty.$
$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$	et	$\lim\limits_{x \to -\infty} (-7) = -7$	donc	$\lim\limits_{x \to -\infty} (\frac{1}{x^3} - 7) = -7.$

Limite d'un produit

$\lim\limits_{x \to -\infty} (-2) = -2$	et	$\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$	donc	$\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^3) = +\infty.$
$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$	et	$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$	donc	$\lim\limits_{x \to +\infty} x\sqrt{x} = +\infty.$

Limite d'un inverse

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$			donc	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$
pour $x \neq 1$, $(x-1)^2 > 0$	et	$\lim\limits_{x \to 1} (x-1)^2 = 0$	donc	$\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty.$
pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;0\right[$, $\sin x < 0$	et	$\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$	donc	$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{\sin x} = -\infty.$

Formes indéterminées

Notations

Lorsque les tableaux ci-dessus ne permettent pas de déterminer la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de deux fonctions, connaissant leurs limites respectives, on dit qu'il y a une forme indéterminée.

On relève quatre types de formes indéterminées :

$\boxed{\infty - \infty}$	$\boxed{0 \times \infty}$	$\boxed{\frac{0}{0}}$ $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$
traduit la dernière colonne du tableau « Limite d'une somme »	traduit la dernière colonne du tableau « Limite d'un produit »	traduisent les dernières colonnes du tableau « Limite d'un quotient »

Exemples

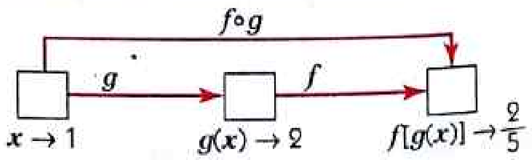
En faisant la somme des limites pour calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} [(3x^2 + 5x - 1) - \sqrt{x}]$ on obtient la forme indéterminée : $\boxed{\infty - \infty}$	En faisant le produit des limites pour calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} [(x^2 + 2x - 5)\left(-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)]$ on obtient la forme indéterminée : $\boxed{0 \times \infty}$	En faisant le quotient des limites pour calculer $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}}{\sin x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x-5}$ on obtient respectivement les formes indéterminées : $\boxed{\frac{0}{0}}$ et $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$

Limite d'une fonction composée

Exemple introductif

On donne les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ et $g(x) = x + 1$.
On veut étudier la limite en 1 de $f \circ g$.

Ensemble de définition de $f \circ g$
$D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}$; donc $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$.
Pour tout nombre réel x, $f \circ g(x) = \frac{x+1}{(x+1)^2+1}$.
On obtient le schéma ci-contre.



On démontre et nous admettons la propriété suivante :

Propriété

f et g sont des fonctions, a, l et l' des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty\,;+\infty\}$.

Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$ **et** $\lim\limits_{x \to l} f(x) = l'$ ***alors*** $\lim\limits_{x \to a} f \circ g(x) = l'$.

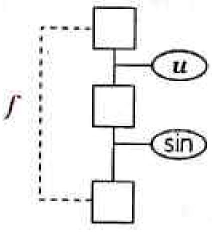
Exemples

Calculons la limite en 1 de la fonction $f : x \mapsto \sin \dfrac{\pi x^2}{x+1}$.

f est la composée de la fonction $u : x \mapsto \dfrac{\pi x^2}{x+1}$ suivie de la fonction sinus.

or : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\pi x^2}{x+1} = \dfrac{\pi}{2} \\ \lim\limits_{X \to \frac{\pi}{2}} \sin X = 1 \end{cases}$

donc : $\lim\limits_{x \to 1} \sin \dfrac{\pi x^2}{x+1} = 1$.



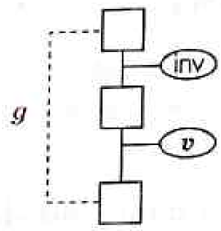
$f = \sin \circ u$

Calculons la limite en $+\infty$ de la fonction $g : x \mapsto x \sin \dfrac{1}{x}$.

g est la composée de la fonction inverse suivie de la fonction $v : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$.

or : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\sin X}{X} = 1 \end{cases}$

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} x \sin \dfrac{1}{x} = 1$.



$g = v \circ \mathrm{inv}$

Limites de $\sqrt{f}$ et $|f|$

Cas particuliers de limites de fonctions composées

Propriété

f est une fonction, a un élément de $\mathbb{R} \cup \{-\infty\,;+\infty\}$, l un nombre réel positif ou nul, l' un nombre réel.

- ***Si*** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ ***alors*** $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$
- ***Si*** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ***alors*** $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{f(x)} = +\infty$
- ***Si*** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l'$ ***alors*** $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |l'|$
- ***Si*** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ***alors*** $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = +\infty$
- ***Si*** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ ***alors*** $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = +\infty$

Exemples

Calculons les limites en $-\infty$ et en 0 de la fonction $h : x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 3}$

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + x + 3) = +\infty$

donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + x + 3} = +\infty$.

On a : $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 + x + 3) = 3$

donc : $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x^2 + x + 3} = \sqrt{3}$.

Calculons les limites en 0 et en $-\infty$ de la fonction $h : x \mapsto |x^3 + x - 5|$

On a : $\lim\limits_{x \to 0} (x^3 + x - 5) = -5$

donc : $\lim\limits_{x \to 0} |x^3 + x - 5| = 5$.

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 + x - 5) = -\infty$

donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} |x^3 + x - 5| = +\infty$.

Exercices

1.e Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{4x^2 + 1} + x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (x - \sqrt{x^2 + 3})$;

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 10}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{x^2}$.

1.f Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{3x}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x^2}{x^2}$;

$\lim\limits_{x \to 1} \cos \dfrac{\pi x^2}{x+1}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 3x}{3x}$.

1.3. Limites et inégalités

Passage à la limite dans une inégalité

Activité introductive

Considérons les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x - 1$.
On vérifie aisément que $f \geq g$.
Comparer les limites de f et g en 0, en $+\infty$ et en $-\infty$.

On démontre et nous admettons la propriété suivante :

Propriété

a est un élément de $\mathbb{R} \cup \{-\infty ; +\infty\}$, f et g deux fonctions admettant des limites en a.

Si $f \geq g$ *alors* $\lim\limits_{x \to a} f(x) \geq \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

Cette propriété ne permet pas de calculer des limites mais de les comparer.

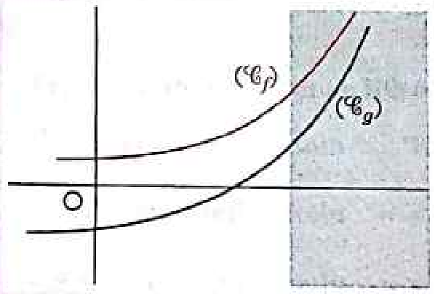
Calcul de limites par comparaison

On démontre et nous admettons les propriétés suivantes. Elles permettent de calculer des limites.

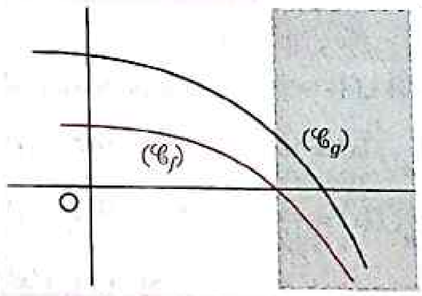
Propriétés

a et l sont des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty ; +\infty\}$, f et g des fonctions.

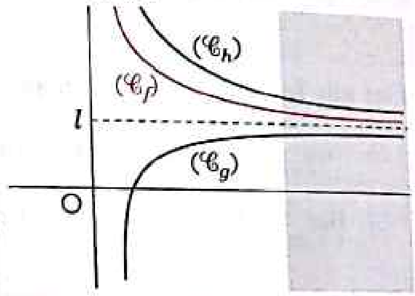
Si $f \geq g$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.



Si $f \leq g$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$ *alors* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.



Si $g \leq f \leq h$ *et* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = l$ *alors* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.



Exemples

Calculons : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x}$.

Soit x un nombre réel strictement positif,

on a : $-1 < \sin x \leq 1$

d'où : $-\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq \dfrac{1}{x}$.

or : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{x} = 0$

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.

Calculons : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - x\cos x)$.

Soit x un nombre réel strictement positif,

on a : $-1 < \cos x \leq 1$

d'où : $x^2 - x \leq x^2 - x\cos x \leq x^2 + x$

or : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + x) = +\infty$

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - x\cos x) = +\infty$.

Exercices

1.g On donne la fonction f définie par :
$f(x) = 2x - E(x)$.
1. Justifier que : pour tout nombre réel x,
$x - 1 < E(x) \leq x$ et $x \leq f(x) < x + 1$.
2. En déduire les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de f.

1.h Calculer la limite en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction f définie par : $f(x) = x + \sin x$.

1.i On considère la fonction f définie par :
$$f(x) = \frac{2x^3}{(1 + x^3)\sqrt{1 + x^4}}.$$
1. Démontrer que :
pour tout nombre réel x, $0 \leq f(x) \leq \dfrac{2}{x^3}$.
2. En déduire la limite en $+\infty$ de f.

1.4. Calcul de limites et formes indéterminées

Les exemples ci-dessous fournissent quelques procédés classiques permettant de calculer une limite dans le cas où les opérations sur les limites conduisent à une forme indéterminée.

Exemples d'utilisation d'une factorisation

Calculons : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x})$.

Pour $x > 0$

on a : $x - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)$

or : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x} - 1) = +\infty$.

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x}) = +\infty$.

Calculons : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x - 1}{\sqrt{x^3 + x^2 + 8}}$.

Pour $x > 0$

on a : $$\frac{3x-1}{\sqrt{x^3+x^2+8}} = \frac{x(3 - \frac{1}{x})}{\sqrt{x^2(x + 1 + \frac{8}{x^2})}} = \frac{3 - \frac{1}{x}}{\sqrt{x + 1 + \frac{8}{x^2}}}$$

or : $$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (3 - \frac{1}{x}) = 3 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x + 1 + \frac{8}{x^2}} = +\infty. \end{cases}$$

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x-1}{\sqrt{x^3+x^2+8}} = 0$.

Exemples d'utilisation de l'expression conjuguée

Calculons : $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$.

Transformation de l'expression $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$.
(On multiplie et on divise par l'expression conjuguée)

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$$

or : $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}) = +\infty$

d'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = 0$

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) = 0$.

Calculons : $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{9x^2 + 7} + 3x)$.

Transformation de l'expression $\sqrt{9x^2+7} + 3x$.
(On multiplie et on divise par l'expression conjuguée)

$$\sqrt{9x^2+7} + 3x = \frac{7}{\sqrt{9x^2+7} - 3x}$$

or : $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{9x^2+7} - 3x) = +\infty$

d'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{7}{\sqrt{9x^2+7} - 3x} = 0$

donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{9x^2+7} + 3x) = 0$.

Exemple d'utilisation de l'expression conjuguée et d'une factorisation

Calculons : $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x - 2} + x)$.

Transformons l'expression $\sqrt{x^2+3x-2} + x$ en multipliant et en divisant par l'expression conjuguée.

On obtient : $\sqrt{x^2+3x-2} + x = \dfrac{3x-2}{\sqrt{x^2+3x-2} - x}$.

La dernière expression donne encore une forme indéterminée.

Poursuivons la transformation en mettant x en facteur au numérateur et au dénominateur.

On obtient : $$\frac{3x-2}{\sqrt{x^2+3x-2} - x} = \frac{x(3 - \frac{2}{x})}{\sqrt{x^2\left(1 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}\right)} - x} = \frac{x(3 - \frac{2}{x})}{|x|\sqrt{1 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}} - x}$$

Pour $x < 0$ $\sqrt{x^2 + 3x - 2} + x = \dfrac{x(3 - \frac{2}{x})}{|x|\sqrt{1 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}} - x} = \dfrac{-3 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}} + 1}$

or : $\lim\limits_{x \to -\infty} (-3 + \frac{2}{x}) = -3$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}} + 1\right) = 2$

donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x - 2} + x) = -\frac{3}{2}$.

Exemples d'utilisation d'un taux de variation

Calculons : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$.

La fonction racine carrée $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable en 1 et on a :

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} = \frac{1}{2}.$$

donc : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \dfrac{1}{2}$.

Calculons : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\cos^2 x - \frac{1}{4}}{x - \frac{\pi}{3}}$.

On a : $\dfrac{\cos^2 x - \frac{1}{4}}{x - \frac{\pi}{3}} = \dfrac{\cos x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{3}} (\cos x + \frac{1}{2})$

or : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\cos x - \cos\frac{\pi}{3}}{x - \frac{\pi}{3}} = (\cos)'(\frac{\pi}{3}) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} (\cos x + \frac{1}{2}) = 1 \end{cases}$

donc : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\cos^2 x - \frac{1}{4}}{x - \frac{\pi}{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Exemples de changement d'écriture

Calculons : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$.

Transformation d'écriture

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \frac{\sin x}{x} \times \sqrt{x}$$

Calcul des limites

or : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$

donc : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0$.

Calculons : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x^3}$.

Transformation d'écriture

$$\frac{\sin x}{x^3} = \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{x^2}$$

Calcul des limites

or : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

donc : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x^3} = +\infty$.

On examinera comme dernier exemple le calcul de $\lim\limits_{x \to +\infty} x \sin\frac{1}{x}$ effectué à l'aide de la décomposition, dans le paragraphe 1.2.

Exercice

1.j Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{1 + x^2} + 2x}{x}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{1 + x^2} + 2x}{x}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x + 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + 1}{\sqrt{x + 3} - 2}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x + 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x + 1}{\sqrt{x + 3} - 2}$ $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$.

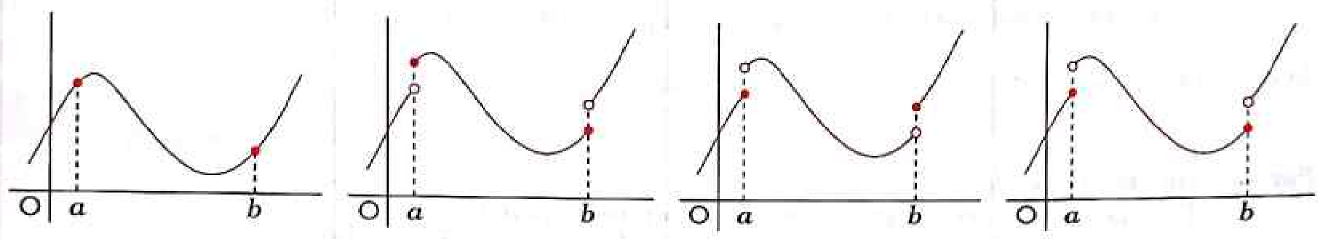
2 Continuité sur un intervalle

2.1. Définition – Propriétés

Continuité d'une fonction sur un intervalle

Propriété

Une fonction f est dite *continue sur un intervalle* K lorsque sa restriction à K est continue en tout élément de K.



f est continue sur $[a\ ;\ b]$	f est continue sur $[a\ ;\ b]$	f n'est pas continue sur $[a\ ;\ b]$ f est continue sur $]a\ ;\ b[$	f n'est pas continue sur $[a\ ;\ b]$ f est continue sur $]a\ ;\ b]$

Image d'un intervalle par une fonction continue

Exemple introductif

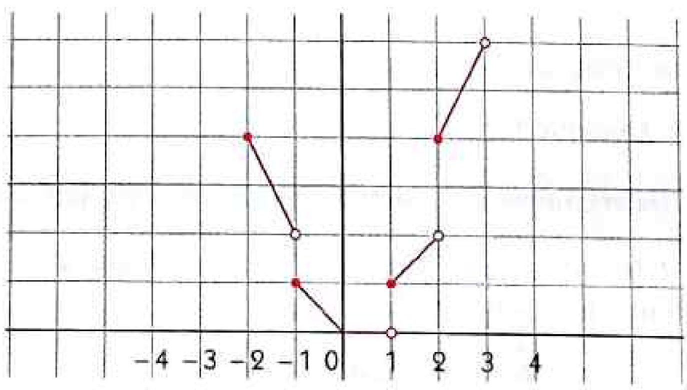
On considère la fonction f définie sur $[-2\ ;\ 3[$ par : $f(x) = x\text{E}(x)$.
Pour chaque intervalle K ci-dessous, étudions graphiquement la continuité de f sur K et déterminons graphiquement l'image $f(\text{K})$ de K par f :
$[-2\ ;-1[$; $[-1\ ;1[$; $]-1\ ;1[$; $]0\ ;1[$; $[-1\ ;0]$; $[1\ ;3[$; $[0\ ;2[$; $[-1\ ;1]$.

Formules explicites de la fonction f

x	-2		-1		0		1		2		3
E(x)	$\boxed{-2}$	-2	$\boxed{-1}$	-1	$\boxed{0}$	0	$\boxed{1}$	1	$\boxed{2}$	2	$\boxed{3}$
$f(x)$	$\boxed{4}$	$-2x$	$\boxed{1}$	$-x$	$\boxed{0}$	0	$\boxed{1}$	x	$\boxed{4}$	$2x$	

$$\begin{cases} \text{pour } x \in [-2\ ;-1[, & f(x) = -2x \\ \text{pour } x \in [-1\ ;0[, & f(x) = -x \\ \text{pour } x \in [0\ ;1[, & f(x) = 0 \\ \text{pour } x \in [1\ ;2[, & f(x) = x \\ \text{pour } x \in [2\ ;3[, & f(x) = 2x \end{cases}$$

Représentation graphique de f
Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J)



Continuité de f sur K et image de K par f

K	$[-2\,;-1[$	$[-1\,;1[$	$]-1\,;1[$	$]0\,;1[$	$[-1\,;0]$	$]1\,;2[$	$]1\,;3[$	$[-1\,;1]$
Continuité de f sur K	f est continue sur K	f est continue sur K	f est continue sur K	f est continue sur K	f est continue sur K	f n'est pas continue sur K	f n'est pas continue sur K	f n'est pas continue sur K
f(K)	$]2\,;4]$	$[0\,;1]$	$[0\,;1[$	$\{0\}$	$[0\,;1]$	$]1\,;2[$	$[1\,;2[\,\cup\,[4\,;6[$	$[0\,;1]$

Conclusion

On constate que :

Si f est continue sur K alors f(K) est un intervalle ou un singleton.

Si f est continue sur K et K fermé alors f(K) est un intervalle fermé ou un singleton.

Les réciproques ne sont pas vraies.

En effet : f n'est pas continue sur $[-1\,;1]$; cependant $f([-1\,;1]) = [0\,;1]$.

f est continue sur $[-1\,;1[$; cependant $f([-1\,;1[) = [0\,;1]$.

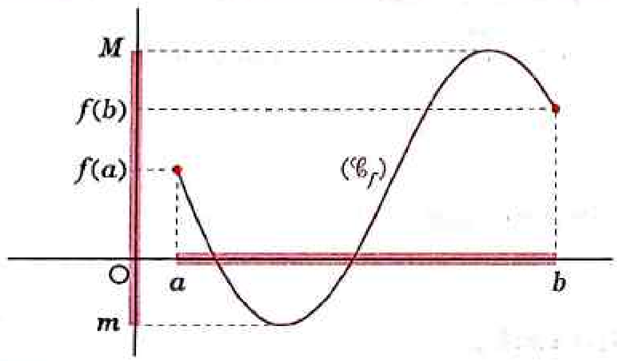
On démontre et nous admettons la propriété fondamentale suivante :

Propriété

Par une fonction continue :

– l'image d'un intervalle est un intervalle ou un singleton.

– l'image d'un intervalle fermé est un intervalle fermé ou un singleton.

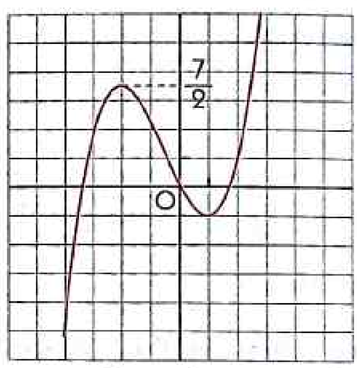


f est continue sur $[a\,;b]$

$f([a\,;b]) = [m\,;M]$

m est le minimum de f sur $[a\,;b]$

M est le maximum de f sur $[a\,;b]$



$f : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{6}$

f est continue sur $\mathbb{R}$

$f([-3\,;2]) = [-1\,;\frac{7}{2}]$

$f([-2\,;+\infty[) = [-1\,;+\infty[$

Cette propriété est très importante. Elle permet,

– d'une part, de déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue dans les cas particuliers où :

l'intervalle est fermé

la fonction est strictement monotone,

– d'autre part, de démontrer l'existence de zéros d'une fonction et de déterminer des valeurs approchées de ces zéros.

Détermination de l'image d'un intervalle fermé par une fonction continue

Exemple 1

Déterminons l'image de l'intervalle $[-1\,;2]$ par la fonction $f : x \mapsto x^2$.

Détermination du maximum et du minimum de f sur $[-1\,;2]$

Soit x un nombre réel.

$-1 \leq x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1$ car f est décroissante sur $]-\infty\,;0]$

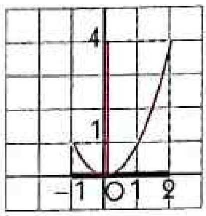
$0 \leq x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 4$ car f est croissante sur $]0\,;+\infty[$

donc : Pour tout nombre réel x, $-1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 4$
d'où : 0 est un minorant de f et 4 un majorant de f sur $[-1 ; 2]$
or : $f(0) = 0$ et $f(2) = 4$,
donc : 0 et 4 sont respectivement le minimum et le maximum de f sur $[-1 ; 2]$.

Détermination de l'image de [– 1 ; 2] par f

$\left\{\begin{array}{l} f \text{ est continue sur } [-1 ; 2] \\ \text{le minimum de } f \text{ sur } [-1 ; 2] \text{ est } 0 \\ \text{le maximum de } f \text{ sur } [-1 ; 2] \text{ est } 4 \end{array}\right.$

donc : $f([-1 ; 2]) = [0 ; 4]$.



Exemple 2

Déterminons l'image de l'intervalle $[-\frac{\pi}{2} ; \pi]$ par la fonction cosinus.

La fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[-\frac{\pi}{2} ; \pi]$.

Détermination du minimum et du maximum de la fonction cosinus sur $[-\frac{\pi}{2} ; \pi]$

Pour tout nombre réel x, $-1 \leq \cos x \leq 1$

donc : -1 est un minorant de la fonction cosinus sur $[-\frac{\pi}{2} ; \pi]$ et 1 est un majorant de la fonction cosinus sur $[-\frac{\pi}{2} ; \pi]$

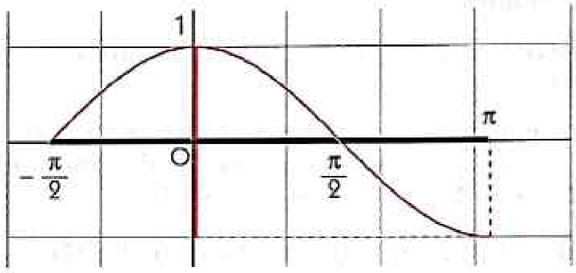
or : $\cos\pi = -1$ et $\cos 0 = 1$.

donc : -1 et 1 sont respectivement le minimum et le maximum de la fonction cosinus sur $[-\frac{\pi}{2} ; \pi]$.

Détermination de l'image de $[-\frac{\pi}{2} ; \pi]$ par cos

$\left\{\begin{array}{l} \cos \text{ est continue sur } [-\frac{\pi}{2} ; \pi] \\ \text{le minimum de cos sur } [-\frac{\pi}{2} ; \pi] \text{ est } -1 \\ \text{le maximum de cos sur } [-\frac{\pi}{2} ; \pi] \text{ est } 1 \end{array}\right.$

donc : $\cos([-\frac{\pi}{2} ; \pi]) = [-1 ; 1]$.



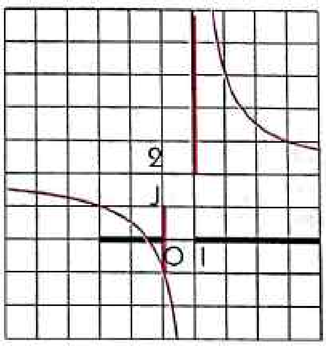
Détermination de l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

Exemple introductif

On donne la fonction $f : x \mapsto \frac{2x+1}{x-1}$.
Déterminons graphiquement l'image par f de chacun des intervalles $[-2 ; 0]$ et $]1 ; +\infty[$.

Tableau de variation et représentation graphique de f

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$-$
$f(x)$	2 ↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘ 2



Détermination graphique de $f([-2 ; 0])$ et de $f(]1 ; +\infty[)$

$f([-2 ; 0]) = [-1 ; 1]$; $f(]1 ; +\infty[) =]2 ; +\infty[$

Conclusion

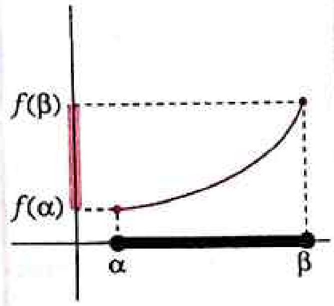
f est continue et strictement décroissante sur $[-2 ; 0]$ donc : $f([-2 ; 0]) = [f(0) ; f(-2)]$;
f est continue et strictement décroissante sur $]1 ; +\infty[$ donc : $f(]1 ; +\infty[) =]\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) ; \lim\limits_{x \to 1} f(x)[$.

On démontre et nous admettons la propriété suivante :

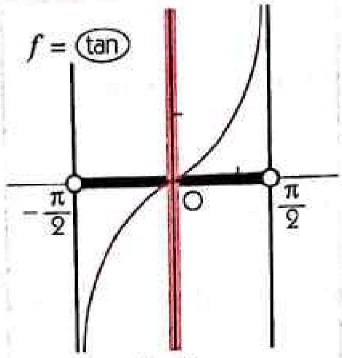
Propriété

α et β sont des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty ; +\infty\}$ tels que $\alpha < \beta$.
f est une fonction admettant une limite à droite en α et une limite à gauche en β.

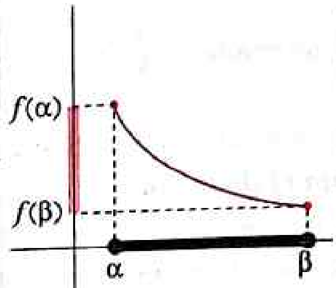
- ***Si** f* **est continue et strictement croissante sur $[\alpha ; \beta]$ *alors* $f([\alpha ; \beta]) = [f(\alpha) ; f(\beta)]$.**
- ***Si** f* **est continue et strictement croissante sur $]\alpha ; \beta[$ *alors* $f(]\alpha ; \beta[) =]\lim\limits_{x \underset{>}{\to} \alpha} f(x) ; \lim\limits_{x \underset{<}{\to} \beta} f(x)[$**
- ***Si** f* **est continue et strictement décroissante sur $[\alpha ; \beta]$ *alors* $f([\alpha ; \beta]) = [f(\beta) ; f(\alpha)]$**
- ***Si** f* **est continue et strictement décroissante sur $]\alpha ; \beta[$ *alors* $f(]\alpha ; \beta[) =]\lim\limits_{x \underset{<}{\to} \beta} f(x) ; \lim\limits_{x \underset{>}{\to} \alpha} f(x)[$**



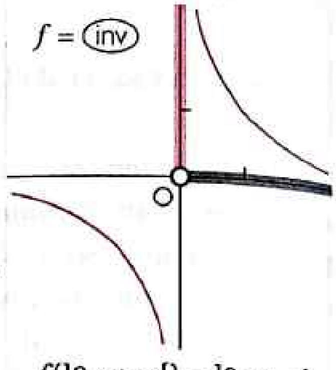
$f([\alpha ; \beta]) = [f(\alpha) ; f(\beta)]$



$f(]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}$



$f([\alpha ; \beta]) = [f(\beta) ; f(\alpha)]$



$f(]0 ; +\infty[) =]0 ; +\infty[$

Exemples

Déterminons l'image de chacun des intervalles $[-2 ; 3]$, $]-1 ; 1[$, $]0 ; +\infty[$ et $]-\infty ; 1]$ par la fonction cube $f : x \mapsto x^3$.

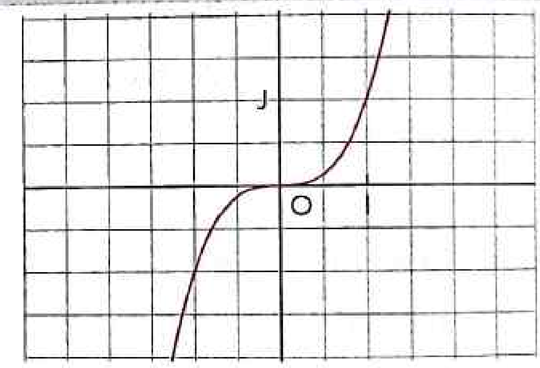
La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, en particulier sur chacun des intervalles $[-2 ; 3]$, $]-1 ; 1[$, $]0 ; +\infty[$ et $]-\infty ; 1]$

donc : $f([-2 ; 3]) = [f(-2) ; f(3)] = [-8 ; 27]$

$f(]-1 ; 1[) =]f(-1) ; f(1)[=]-1 ; 1[$

$f(]0 ; +\infty[) =]f(0) ; \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[=]0 ; +\infty[$

$f(]-\infty ; 1]) =]\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) ; f(1)] =]-\infty ; 1]$



Déterminons l'image de $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ par la fonction tangente.

La fonction tan est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$,

donc :

$\tan(]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[) = \left]\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} \tan x ; \lim\limits_{x \to +\frac{\pi}{2}} \tan x\right[= \mathbb{R}$.

Déterminons l'image de $]0 ; +\infty[$ par la fonction inverse.

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$,

donc :

$f(]0 ; +\infty[) = \left]\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} ; \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \frac{1}{x}\right[=]0 ; +\infty[$.

Exercices

2.a On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{5x}{x^2 + 4}.$$

1. Étudier les variations et dresser le tableau de variation de f.

2. En déduire l'image de chacun des intervalles $[0 ; 4]$ et $[3 ; +\infty[$.

2.b On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^2 + 4x - 1.$$

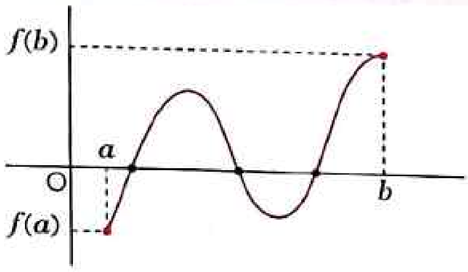
Déterminer l'image par f de chacun des intervalles suivants : $[0 ; \frac{7}{2}]$, $[2 ; +\infty[$, $]-\infty ; 1[$.

2.2. Calcul approché des zéros d'une fonction continue

Propriété

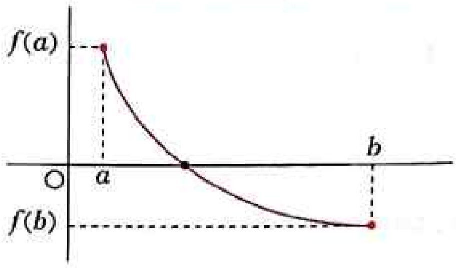
a et b sont des nombres réels tels que $a < b$, f une fonction continue sur $[a\,;b]$, (E) l'équation $f(x) = 0$.

- ***Si*** $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires ***alors*** l'équation (E) admet au moins une solution dans $[a\,;b]$.
- ***Si*** de plus f est strictement monotone sur $[a\,;b]$ ***alors*** l'équation (E) admet une unique solution dans $[a\,;b]$.



L'équation (E) admet trois solutions.

(E) $f(x) = 0$



L'équation (E) admet une seule solution.

Exemple d'utilisation de la méthode par balayage

Démontrons que l'équation $x^3 + x + 1 = 0$ a une seule solution x_0 appartenant à $]-1\,;0[$ et déterminons un encadrement de x_0 d'amplitude 0,001.

Résoudre l'équation $x^3 + x + 1 = 0$ revient à chercher les zéros de la fonction $f : x \mapsto x^3 + x + 1$.

Localisation du zéro de f

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

or : $f(-1) = -1$ et $f(0) = 1$

donc : f a un seul zéro, x_0, appartenant à $]-1\,;0[$.

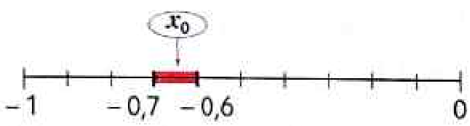
Encadrement de x_0 par la méthode de balayage

Illustrations graphiques

- *Recherche d'un encadrement de x_0 par des décimaux consécutifs d'ordre 1*

Calculons, de proche en proche, les images par f des nombres décimaux d'ordre 1 de l'intervalle $[-1\,;0]$ jusqu'à ce qu'on observe un changement de signe.

x	$-0{,}9$	$-0{,}8$	$-0{,}7$	$-0{,}6$	$-0{,}5$	$-0{,}4$	$-0{,}3$	$-0{,}2$	$-0{,}1$
$f(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$					

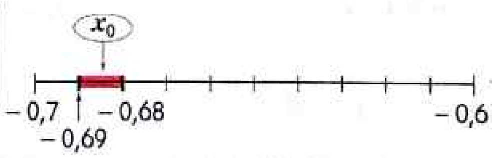


On obtient : $-0{,}7 < x_0 < -0{,}6$ et $-0{,}6 - (-0{,}7) = 0{,}1$.

- *Recherche d'un encadrement de x_0 par des décimaux consécutifs d'ordre 2*

Calculons, de proche en proche, les images par f des nombres décimaux d'ordre 2 de l'intervalle $[-0{,}7\,;-0{,}6]$ jusqu'à ce qu'on observe un changement de signe.

x	$-0{,}69$	$-0{,}68$	$-0{,}67$	$-0{,}66$	$-0{,}65$	$-0{,}64$	$-0{,}63$	$-0{,}62$	$-0{,}61$
$f(x)$	$-$	$+$							

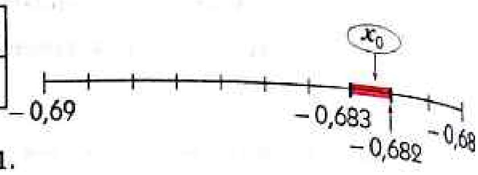


On obtient : $-0{,}69 < x_0 < -0{,}68$ et $-0{,}68 - (-0{,}69) = 0{,}01$.

• *Recherche d'un encadrement de x_0 par des décimaux consécutifs d'ordre 3*

Calculons, de proche en proche, les images par f des nombres décimaux d'ordre 3 de l'intervalle [– 0,69 ; – 0,68] jusqu'à ce qu'on observe un changement de signe.

x	– 0,689	– 0,688	– 0,687	– 0,686	– 0,685	– 0,684	– 0,683	– 0,682	– 0,681
$f(x)$	–	–	–	–	–	–	–	+	



On obtient : $-0{,}683 < x_0 < -0{,}682$ et $-0{,}682 - (-0{,}683) = 0{,}001$.

Exemple d'utilisation de la méthode de dichotomie

On considère l'équation (E) $\cos x = x$. Démontrons que l'équation (E) a une seule solution α et déterminons une valeur approchée de α à 0,1 près.

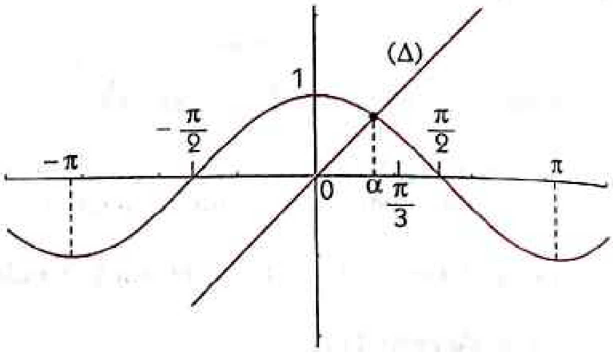
■ ***Approche graphique***

Le plan est muni d'un repère. Désignons par ($\mathscr{C}$) la courbe représentative de la fonction cosinus et par (Δ) la droite d'équation $y = x$.

La courbe ($\mathscr{C}$) coupe (Δ) en un seul point, ce point a pour abscisse α tel que :

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$$

donc l'équation (E) admet une seule solution α et cette solution vérifie $\alpha \in \,]0 ; \pi[$.



■ ***Étude algébrique***

Résoudre l'équation (E) revient à chercher le zéro de la fonction définie sur $[0 ; \frac{\pi}{3}]$ par : $f(x) = \cos x - x$.

Localisation du zéro de f

f est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x élément de $[0 ; \frac{\pi}{3}]$, $f'(x) = -\sin x - 1$

d'où : pour tout x élément de $[0 ; \frac{\pi}{3}]$, $f'(x) < 0$.

f est donc continue et strictement décroissante sur $[0 ; \frac{\pi}{3}]$.

De plus : $f(0) > 0$ et $f(\frac{\pi}{3}) < 0$ (car $f(0) = 1$ et $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{3}$)

d'où : f a un seul zéro α ; ce zéro appartenant à $[0 ; \frac{\pi}{3}]$, l'équation (E) admet donc une seule solution α et $\alpha \in [0 ; \frac{\pi}{3}]$.

Encadrement de α par la méthode de dichotomie

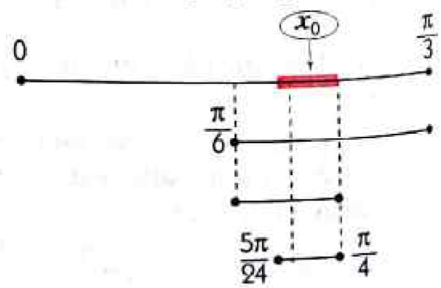
$f(0) > 0$ et $f(\frac{\pi}{3}) < 0$; donc $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$

$f(\frac{\pi}{6}) > 0$ et $f(\frac{\pi}{3}) < 0$; donc $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3}$

$f(\frac{\pi}{6}) > 0$ et $f(\frac{\pi}{4}) < 0$; donc $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{4}$

$f(\frac{5\pi}{24}) > 0$ et $f(\frac{\pi}{4}) < 0$; donc $\frac{5\pi}{24} < \alpha < \frac{\pi}{4}$

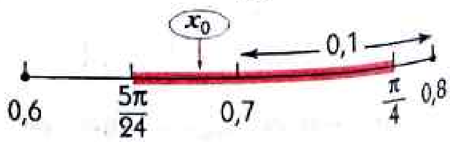
Illustrations graphiques



Conclusion

On a : $0{,}6 < \frac{5\pi}{24} < \alpha < \frac{\pi}{4} < 0{,}8$

donc : 0,7 est une valeur approchée de α à 0,1 près.



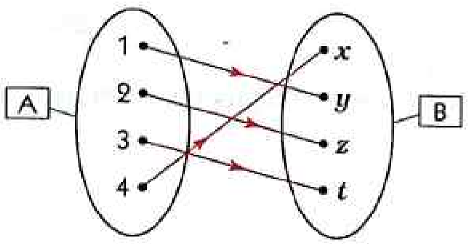
3 Fonctions continues strictement monotones

3.1. Applications bijectives, injectives, surjectives

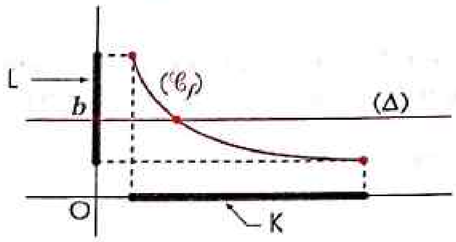
Applications bijectives

Définition

A et B sont des ensembles non vides, f est une application de A dans B.
On dit que f est une *application bijective* lorsque tout élément de B a un unique antécédent dans A.
On dit aussi que f est une *bijection*.



f est une bijection de A dans B
si et seulement si
pour tout élément b de B
l'équation $f(x) = b$
admet $\boxed{\text{une seule}}$ solution dans A.



f est une bijection de K dans L
si et seulement si
pour tout élément b de L
la droite d'équation $y = b$
coupe $(\mathscr{C}_f)$ en $\boxed{\text{un seul}}$ point.

Exemples

On considère l'application

$$f : [2 ; +\infty[\to [-3 ; +\infty[$$
$$x \mapsto x^2 - 4x + 1$$

Démontrons que f est une bijection.

Soit b un élément de $[-3 ; +\infty[$.

Résolvons l'équation (E) d'inconnue x :

(E) $\quad f(x) = b$

Résoudre (E) revient à :

- résoudre l'équation (E') $\; x^2 - 4x + 1 = b$
- ne retenir que les solutions de (E') appartenant à $[2 ; +\infty[$.

Résolution de (E')

(E') $\quad x^2 - 4x + 1 = b \quad [b \geq -3]$

$$(x-2)^2 - (b+3) = 0$$

$$(x - 2 - \sqrt{b+3})\,(x - 2 + \sqrt{b+3}) = 0$$

L'équation (E') admet pour solutions :

$$2 + \sqrt{b+3} \quad \text{et} \quad 2 - \sqrt{b+3}.$$

On considère l'application

$$g : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}\backslash\{2\}$$
$$x \mapsto \frac{2x+1}{x-1}$$

Démontrons que g est une bijection.

Soit b un élément de $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.

Résolvons l'équation (E) d'inconnue x :

(E) $\quad g(x) = b$

Résoudre (E) revient à :

- résoudre l'équation (E') $\; \dfrac{2x+1}{x-1} = b$
- ne retenir que les solutions de (E') appartenant à $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Résolution de (E')

Ensemble de validité : $V = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

(E') $\quad \dfrac{2x+1}{x-1} = b \quad [b \neq 2]$

$$(2-b)x + 1 + b = 0$$

$$x = \frac{b+1}{b-2}$$

Solutions de (E)

– Pour $b > -3$,

$2 + \sqrt{b+3} > 2$ et $2 - \sqrt{b+3} \leq 2$

(E) admet une seule solution : $2 + \sqrt{b+3}$.

– Pour $b = -3$,

(E) admet une seule solution : 2.

Conclusion

Tout élément b de $[-3\,;+\infty[$ admet un antécédent unique par f, le nombre réel $2 + \sqrt{b+3}$.

L'application f est donc bijective.

Sa réciproque est $f^{-1} : [-3\,;+\infty[\;\to\; [2\,;+\infty[$

$x \mapsto 2 + \sqrt{b+3}$

Solutions de (E)

On a : $b + 1 \neq b - 2$;

donc : $\dfrac{b+1}{b-2} \neq 1$

(E) admet une seule solution : $\dfrac{b+1}{b-2}$.

Conclusion

Tout élément b de $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ admet un unique antécédent par g, le nombre réel $\dfrac{b+1}{b-2}$.

L'application g est donc bijective.

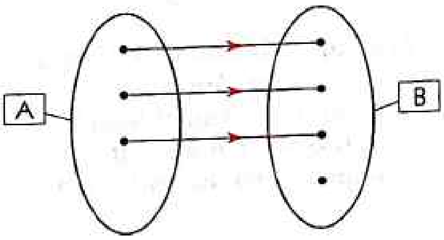
Sa bijection réciproque est $g^{-1} : \mathbb{R}\setminus\{2\} \to \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$x \mapsto \dfrac{x+1}{x-2}$

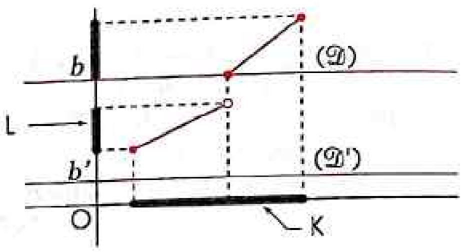
Applications injectives

Définition

A et B sont des ensembles non vides, f une application de A dans B.
On dit que f est une *application injective* lorsque les images de deux éléments distincts de A sont différentes.
On dit aussi que f est une *injection*.



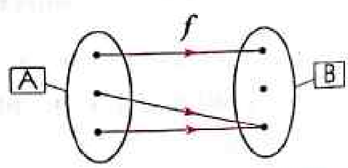
f est une injection de A dans B
si et seulement si
pour tout élément b de B
l'équation $f(x) = b$
admet $\boxed{\text{une ou zéro}}$ solution dans A.



f est une injection de K dans L
si et seulement si
pour tout élément b de L
la droite d'équation $y = b$
coupe $(\mathscr{C}_f)$ en $\boxed{\text{un ou zéro}}$ point.

Remarque

L'application f de A dans B, de diagramme ci-contre, n'est pas injective car deux éléments de A ont la même image.



Propriétés

A et B sont des ensembles non vides, f une application de A dans B.

f est injective *si et seulement si* $\begin{cases} \text{pour tous éléments } x_1 \text{ et } x_2 \text{ de A,} \\ x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2) \end{cases}$

f est injective *si et seulement si* $\begin{cases} \text{pour tous éléments } x_1 \text{ et } x_2 \text{ de A,} \\ f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2 \end{cases}$

Démonstration guidée

La première propriété caractéristique est une traduction de la définition.
La deuxième propriété caractéristique est déduite de la définition à l'aide du raisonnement par l'absurde suivant :

Supposons que f est injective

Soient x_1 et x_2 des éléments de A tels que $f(x_1) = f(x_2)$.

Démontrons par l'absurde que : $x_1 = x_2$.

Supposons que : $x_1 \neq x_2$

or : f est injective

donc : $f(x_1) \neq f(x_2)$;

ceci est absurde car $f(x_1) = f(x_2)$

d'où : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Supposons que :

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Démontrer, en utilisant la définition et un raisonnement par l'absurde, que f est injective.

Exemple

Démontrons que l'application f de $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x-1}{x-3}$ est injective.

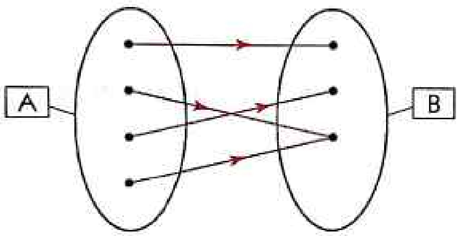
Démontrons que : pour tous éléments x_1 et x_2 de $\mathbb{R}\backslash\{3\}$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
Soient x_1 et x_2 des éléments de $\mathbb{R}\backslash\{3\}$.

On a : $$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1 - 1}{x_1 - 3} = \frac{x_2 - 1}{x_2 - 3}$$
$$\Leftrightarrow x_1x_2 - 3x_1 - x_2 + 3 = x_1x_2 - 3x_2 - x_1 + 3$$
$$\Leftrightarrow x_1 = x_2$$

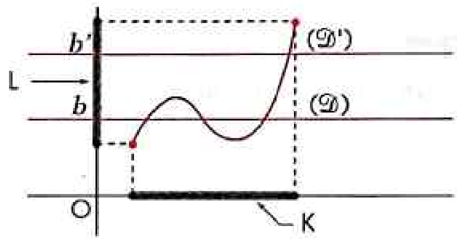
Applications surjectives

Définition

A et B sont des ensembles non vides, f une application de A dans B.
On dit que f est une *application surjective* lorsque l'image de A par f est égale à B.
On dit aussi que f est une *surjection*.



f est une surjection de A dans B
si et seulement si
pour tout élément b de B
l'équation $f(x) = b$
admet $\boxed{\text{une ou plusieurs}}$ solutions dans A.



f est une surjection de K dans L
si et seulement si
pour tout élément b de L
la droite d'équation $y = b$
coupe $(\mathscr{C}_f)$ en $\boxed{\text{un ou plusieurs}}$ points.

Remarque

- *Une application est bijective si et seulement si elle est à la fois injective et surjective.*
- *f étant une application de A dans B, E une partie de A, si la restriction de f à E est injective alors f permet de définir la bijection* $g : E \to f(E)$, $x \mapsto f(x)$

*On dit que f **détermine une bijection** de E dans f(E).*

Exercices

3.a Les applications suivantes sont-elles bijectives, injectives, surjectives ?

$f : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{2x-3}{x+1}$

$g : \mathbb{R} \to [\dfrac{2}{3} ; +\infty[$, $x \mapsto 3x^2 - 2x + 1$

3.b On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x) = \dfrac{1}{1 + |x|}$.

Trouver deux ensembles A et B pour que f détermine une application bijective de A dans B.

3.2. Fonctions continues strictement monotones

Bijection continue strictement monotone

Propriété

Toute application strictement monotone est injective.

Démonstration

Soient A et B des ensembles non vides de $\mathbb{R}$

f une application de A dans B strictement monotone

x_1 et x_2 deux éléments de A

Démontrons que : $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Si f est strictement croissante

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Si f est strictement décroissante

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

d'où : $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

L'application f est donc injective.

On déduit aisément de la propriété précédente la conséquence suivante :

Propriété

Toute fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle K détermine une bijection de K dans f(K).

Remarque

La continuité de f est une hypothèse superflue dans la propriété précédente. Cependant elle permet de déterminer $f(K)$.

Exemples

Démontrons que la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x-1}{2x+3}$ détermine une bijection de $]-\dfrac{3}{2}\,;+\infty[$ dans $]-\infty\,;\dfrac{1}{2}[$.

Étude des variations de f

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$-\dfrac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$\dfrac{1}{2} \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow \dfrac{1}{2}$

f étant continue et strictement croissante sur $]-\dfrac{3}{2}\,;+\infty[$, on a : $f(]-\dfrac{3}{2}\,;+\infty[) =]-\infty\,;\dfrac{1}{2}[$.

Conclusion

f détermine une bijection de $]-\dfrac{3}{2}\,;+\infty[$ dans $]-\infty\,;\dfrac{1}{2}[$.

Démontrons que l'application g de $]-\infty\,;\dfrac{1}{2}[$ dans $]\dfrac{5}{2}\,;+\infty[$ définie par $g(x) = 2x^2 - 2x + 3$ est bijective.

Étude des variations de g

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$\dfrac{1}{2}$
$g'(x)$	$-$	‖
$g(x)$	$+\infty \searrow \dfrac{5}{2}$	‖

g étant continue et strictement croissante sur $]-\infty\,;\dfrac{1}{2}[$, on a : $g(]-\infty\,;\dfrac{1}{2}[) =]\dfrac{5}{2}\,;+\infty[$.

Conclusion

g est une bijection de $]-\infty\,;\dfrac{1}{2}[$ dans $]\dfrac{5}{2}\,;+\infty[$.

Réciproque d'une bijection continue strictement monotone

Activité introductive

Considérons la fonction rationnelle f définie par : $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+2}$.

On veut : – démontrer que f détermine une bijection φ de $]-2\,;+\infty[$ dans $]-\infty\,;3[$.
– étudier la continuité et le sens de variation de f^{-1}.

Pour cela, on peut :
– étudier les variations et dresser le tableau de variation de f ; en déduire que f détermine une bijection φ de $]-2\,;+\infty[$ dans $]-\infty\,;3[$;
– représenter graphiquement φ et φ^{-1} dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) et étudier graphiquement la continuité de φ^{-1} ;
– déterminer la formule explicite de φ^{-1} et étudier son sens de variation.

Propriété

φ est une bijection d'un intervalle K dans un intervalle L.
Si φ est continue et strictement monotone sur K,
alors sa bijection réciproque φ^{-1} est également continue et strictement monotone sur L.
De plus, φ et φ^{-1} ont le même sens de variation.

Démonstration

Admettons la continuité de φ^{-1} et démontrons que φ et φ^{-1} ont le même sens de variation.
Soient x_1 et x_2 deux éléments distincts de K.
Posons : $y_1 = \varphi(x_1)$ et $y_2 = \varphi(x_2)$;
– Si φ est strictement croissante, alors $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \varphi(x_1) < \varphi(x_2)$
d'où $\varphi^{-1}(y_1) < \varphi^{-1}(y_2) \Leftrightarrow y_1 < y_2$
donc φ^{-1} est strictement croissante.
– On prouve de même que si φ est strictement décroissante, alors φ^{-1} est strictement décroissante.
– On en déduit que φ et φ^{-1} ont le même sens de variation.

Exemple

On a vu que l'application g de $]-\infty\,;0{,}5[$ dans $]2{,}5\,;+\infty[$ définie par $g(x) = 2x^2 - 2x + 5$ est bijective.
Déterminons sa bijection réciproque g^{-1}.

Résolution de l'équation (E) $2x^2 - 2x + 5 = y$ $[y > 2{,}5]$

(E) admet deux solutions x_1 et x_2 : $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{2y-9}}{2}$; $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{2y-9}}{2}$.

On vérifie que : $x_1 < \dfrac{1}{2}$; $x_2 > \dfrac{1}{2}$.

L'équation $f(x) = y$ $[y > 2{,}5]$ admet x_1 pour unique solution dans $]-\infty\,;0{,}5[$.

Conclusion

On obtient $g^{-1} :]-\infty\,;0{,}5[\;\to\;]2{,}5\,;+\infty[$

$$y \mapsto \frac{1-\sqrt{2y-9}}{2}$$

Exercices

3.c Dans chacun des cas suivants, f est une fonction définie par sa formule.
Démontrer que f définit une bijection de l'intervalle K sur un intervalle que l'on précisera.

(1) $f(x) = 3x^2 - 7x + 4$, $\quad K = [2\,;+\infty[$.

(2) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$, $\quad K =]1\,;5]$.

(3) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$, $\quad K =]2\,;+\infty[$.

(4) $f(x) = -4x^3 + 6x + 5$, $\quad K = [1\,;+\infty[$.

(5) $f(x) = \dfrac{x-2}{3x^2-2x+8}$, $\quad K = [0\,;2]$.

3.d Déterminer le nombre de solutions de chacune des équations suivantes :

(1) $2x^3 - 24x + 3 = 0$.

(2) $x^3 + 2x + 2 = 0$.

3.3. Fonctions puissances d'exposants rationnels

Fonctions racine $n^{\text{ième}}$

Activité d'approche

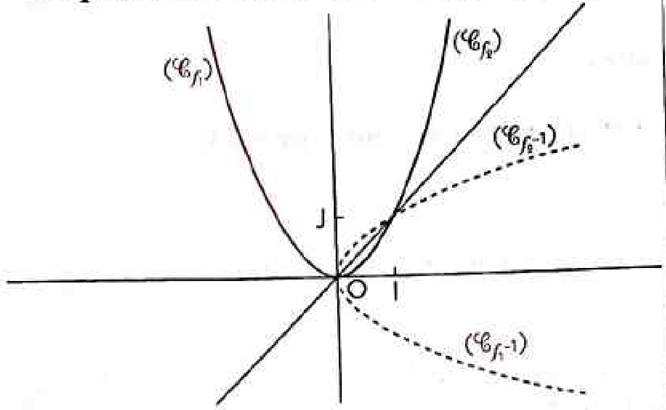
On donne la fonction carrée f et la fonction cube g définies par : $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$.

Démontrer que :

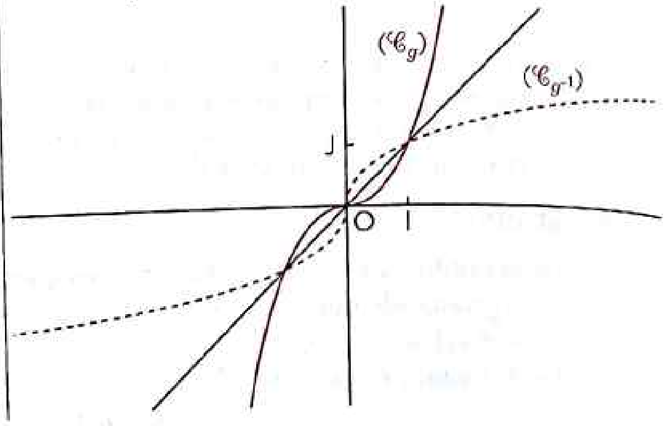
f **détermine** $\begin{cases} \text{une bijection } f_1 \text{ de } \mathbb{R}_+ \text{ dans } \mathbb{R}_+ \\ \text{une bijection } f_2 \text{ de } \mathbb{R}_- \text{ dans } \mathbb{R}_+ \end{cases}$

g **détermine** $\begin{cases} \text{une bijection } g_1 \text{ de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R} \\ \text{une bijection } g_2 \text{ de } \mathbb{R}_+ \text{ dans } \mathbb{R}_+ \\ \text{une bijection } g_3 \text{ de } \mathbb{R}_- \text{ dans } \mathbb{R}_- \end{cases}$

Représentation graphique de f_1, f_1^{-1}, f_2 et f_2^{-1}



Représentation graphique de g et g^{-1}



Présentation

n est un nombre entier naturel non nul, f_n la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f_n(x) = x^n$.
Démontrons que f_n détermine une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

Étude du sens de variation de f_n

f_n est une fonction polynôme. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x, $f_n'(x) = nx^{n-1}$.

n est pair

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_n'(x)$	$-$	0	$+$
$f_n(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

n est impair

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_n'(x)$	$+$	0	$+$
$f_n(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

Recherche de bijections

f_n est continue, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
De plus, $f_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$.
f_n détermine donc :
- une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.
- une bijection de $\mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{R}_+$.

f_n est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus,
$f_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$
f_n détermine donc :
- une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.
- une bijection de $\mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{R}_-$.
- une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Conclusion

D'une manière générale, f_n détermine une bijection f_n de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

Pour tout nombre entier naturel non nul n, l'application $\varphi_n : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^n \end{array}$ est une bijection.

Elle admet donc une bijection réciproque.

Définition

n est un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.
On appelle *fonction racine* $n^{\text{ième}}$ la bijection réciproque de la bijection $\varphi_n : \begin{array}{l}\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^n\end{array}$

Notation

y est un nombre réel positif ou nul.
L'antécédent de y par φ_n est noté :

$\sqrt[n]{y}$ et on lit « racine $n^{\text{ième}}$ de y »

ou bien

$y^{\frac{1}{n}}$ et on lit « y exposant $\frac{1}{n}$ »

– Pour $n = 2$,
on écrit $\sqrt{y}$ et on lit « racine carrée de y »

– Pour $n = 3$,
on écrit $\sqrt[3]{y}$ et on lit « racine cubique de y ».

Les propriétés suivantes sont des conséquences immédiates de la définition.

Propriétés

x et y étant des nombres réels positifs ou nuls et n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2,

$x^n = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[n]{y}$	$x^n = y \quad \Leftrightarrow \quad x = y^{\frac{1}{n}}$
$\sqrt[n]{y} \geq 0$	$y^{\frac{1}{n}} \geq 0$
$\left(\sqrt[n]{y}\right)^n = \sqrt[n]{y^n} = y$	$\left(y^{\frac{1}{n}}\right)^n = \left(y^n\right)^{\frac{1}{n}} = y$

Exemples

$5^2 = 25$ donc $\sqrt{25} = 25^{\frac{1}{2}} = 5$; $2^3 = 8$ donc $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$; $1{,}1^4 = 1{,}4641$ donc $\sqrt[4]{1{,}4641} = 1{,}4641^{\frac{1}{4}} = 1{,}1$.

Calculs avec les racines $n^{\text{ième}}$

Propriétés

a et b étant des nombres réels positifs, m et n deux nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à 2

(1) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ $\qquad a^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$

si $b \neq 0$ alors

(2)	$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$	$\dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$
(3)	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{nm}}$
(4)	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$	$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}$
(5)	$\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$	$a^{\frac{1}{m}} \times a^{\frac{1}{n}} = \left(a^{m+n}\right)^{\frac{1}{nm}}$

Démonstration

(1) $\left(\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \times \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$

donc : $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$.

On démontre de même les propriétés (2), (3) et (4).

(5) $\left(\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{a}\right)^{mn} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^{mn} \times \left(\sqrt[n]{a}\right)^{mn}$

$= \left[\left(\sqrt[m]{a}\right)^m\right]^n \times \left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right]^m$

$= a^n \times a^m = a^{n+m}$

donc : $\sqrt[mn]{a^{m+n}} = \sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{a}$.

Exemples

Simplifier au maximum : $\dfrac{\sqrt[3]{8a^9}}{(2\sqrt{a})^3}$ $[a > 0]$	Simplifier au maximum : $\dfrac{\sqrt[3]{500}}{\sqrt{5}\times\sqrt[3]{4}}$
$\dfrac{\sqrt[3]{8a^9}}{(2\sqrt{a})^3} = \dfrac{\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{a^9}}{8\sqrt{a^3}} = \dfrac{2a^3}{8a\sqrt{a}} = \dfrac{a\sqrt{a}}{4}$	$\dfrac{\sqrt[3]{500}}{\sqrt{5}\times\sqrt[3]{4}} = \dfrac{\sqrt[3]{5^3 2^2}}{\sqrt{5}\times\sqrt[3]{4}} = \dfrac{5\times\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt{5}\times\sqrt[3]{2^2}} = \sqrt{5}$

Fonctions puissances d'exposants rationnels

Convention d'écriture

x étant un nombre réel positif ou nul, p un nombre entier et q un nombre entier supérieur ou égal à 2 :

le nombre réel $\left(x^p\right)^{\frac{1}{q}}$ est noté $x^{\frac{p}{q}}$;

pour $x \neq 0$, $\dfrac{1}{x^{\frac{p}{q}}}$ est noté $x^{-\frac{p}{q}}$.

Exemples

$$64^{\frac{2}{3}} = \left(64^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 4^2 = 16 \quad ; \quad 16^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{16^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\left[(2^4)^{\frac{1}{4}}\right]^3} = \frac{1}{8}.$$

Définition

r étant un nombre rationnel non nul, on appelle *fonction puissance d'exposant r*, la fonction : $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

$x \mapsto x^r$

On démontre aisément les propriétés suivantes :

Propriétés

r et r' étant des nombres rationnels non nuls, x et y des nombres réels strictement positifs,

$$x^r \times y^r = (xy)^r \qquad (x^r)^{r'} = x^{r\times r'}$$

$$\frac{x^r}{y^r} = \left(\frac{x}{y}\right)^r \qquad x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$$

Exemples

$$\left(\frac{2}{13}\right)^{\frac{4}{3}} \times \left(\frac{26}{5}\right)^{\frac{4}{3}} = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{4}{3}} \quad ; \quad \left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{5}{2}} = \frac{7^{\frac{5}{2}}}{9^{\frac{5}{2}}} = \frac{49\sqrt{7}}{243} \quad ; \quad 4^{\frac{3}{4}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2} \quad ; \quad 11^{\frac{2}{3}} \times 11^{\frac{1}{2}} = 11^{\frac{7}{6}}.$$

Exercices

3.e Calculer :

(1) $\sqrt[3]{15625}$ (2) $\sqrt[6]{0{,}000064}$

(3) $\sqrt[3]{1728\times 81}$ (4) $\sqrt[4]{\sqrt{6561}}$.

3.f Simplifier :

(1) $\dfrac{\sqrt[3]{32}\times\sqrt{675}}{\sqrt[3]{4}\times\sqrt{405}}$ (2) $\dfrac{12\times 14^{-\frac{4}{5}}}{7^{-\frac{5}{6}}\times 6^{-\frac{2}{3}}}$.

3.g À l'aide d'une calculatrice, calculer une valeur approchée de chacun des nombres réels suivants :

(1) $5^{0,1}$ (2) $2^{0,142\,857}$

(3) $7^{\frac{1}{3}}$ (4) $8^{\sqrt{3}}$

(5) $\left(\frac{2}{7}\right)^{0,09}$ (6) $\dfrac{3^{-1,4}}{2^{6,2}}$.

TP Travaux pratiques

TP1 Calcul de limite

Ce TP a pour objectif de donner un exemple spécifique de calcul de limite par comparaison.

Exercice commenté

E étant la fonction partie entière, calculer : $\lim\limits_{x \to 0} xE\left(\frac{1}{x}\right)$.

E éatnt la fonction « partie entière », la difficulté de cet exercice pourrait résider dans la recherche d'un « bon encadrement » de $x \mapsto xE\left(\frac{1}{x}\right)$ par deux fonctions affines ayant la même limite en 0.

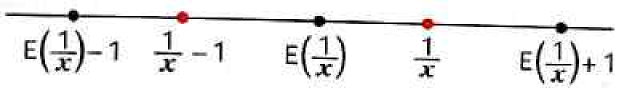
Encadrement de $E\left(\frac{1}{x}\right)$

Soit x un nombre réel non nul, par définition de E,

on a : $E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} < E\left(\frac{1}{x}\right) + 1$

d'où : $E\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \leq \frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right)$

donc : $\frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$.



Encadrement de $xE\left(\frac{1}{x}\right)$ et conclusion

pour $x > 0$: $1 - x < xE\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$

pour $x < 0$: $1 \leq xE\left(\frac{1}{x}\right) < 1 - x$

or : $\lim\limits_{x \to 0}(1 - x) = 1$

donc : $\lim\limits_{x \to 0} xE\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

TP2 Démonstration par implication et par contraposition

L'objet de ce TP est de poursuivre la mise en place des différents types et méthodes de démonstration. Dans le cadre de l'apprentissage à la résolution de problèmes, ce TP doit être consulté tout le long de l'année et tendre à devenir une fiche de référence personnalisée par des annotations individuelles.

Implication

- **Dans un énoncé de propriété,** « l'implication » se traduit par : si (p) alors (q)
  on note : (p) $\Rightarrow$ (q)
  on lit : (p) implique (q)

Cependant, dans certains énoncés de propriété, l'implication est implicite.

- **Dans une démonstration**, l'utilisation d'une « implication » permet de déduire directement une conclusion C à partir d'une donnée D du problème, on évitera alors l'expression : « si D alors C », ce qui pourrait sous-entendre une supposition (ce qui n'est pas le cas d'une donnée D de problème).

En général,on écrit indifféremment :

(1) on a D ; donc C. (2) puisque D ; donc C.

L'implication permet une démonstration par déduction directe d'une conclusion C à partir de la donnée D d'un problème, ou de l'hypothèse H d'une propriété.

Contraposée d'une implication

Définition – Propriété

- **On appelle *contraposée* de l'implication : (p) $\Rightarrow$ (q)**
  l'implication : non (q) $\Rightarrow$ non (p).
- **On admet qu'une implication et sa contraposée sont logiquement équivalentes.**

Lorsqu'il est difficile de démontrer une implication (p) $\Rightarrow$ (q), on peut penser à démontrer sa contraposée : non (q) $\Rightarrow$ non (p).

Exemple

Pour reconnaître une injection, on peut utiliser :

ou bien
- l'implication : $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- sa contraposée : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Exercices

ENTRAÎNEMENT

Limite et continuité en a

Limite à gauche, limite à droite

1 f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty\,;-2[,\ f(x) = \dfrac{3x^2+5x}{x+2} \\ \text{pour } x \in]-2\,;+\infty[,\ f(x) = \dfrac{2x^2+5x+2}{x^2+x-2}. \end{cases}$$

Calculer la limite à gauche et la limite à droite de f en -2.

2 f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{|x-3|-|x+5|}{x^2-4}.$$

Calculer la limite à gauche et la limite à droite de f en 2 et en -2.

3 f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{2x-\sqrt{x+5}}{x^2-1}.$$

Calculer la limite à gauche et la limite à droite de f en 1 et en -1.

4 f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$f(x) = x\mathrm{E}(x)$.
Calculer la limite à gauche et la limite à droite de f en 1, en -1 et en n (n étant un nombre entier).

5 Déterminer les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \left(\frac{1}{x}+1\right)(x^2+1)$ (2) $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 1} \frac{(1-2x)^2}{1-x}$

(3) $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 2} \frac{x^2-4x+1}{x-2}$ (4) $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 3} \frac{1-4x}{x^2-9}$

Prolongement par continuité

6 f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty\,;1[,\ f(x) = \dfrac{6x}{x+2} \\ \text{pour } x \in]1\,;+\infty[,\ f(x) = \sqrt{3x+1}. \end{cases}$$

Peut-on prolonger f par continuité en 1 ?

7 Dans chacun des cas suivants, f est une fonction définie sur $]0\,;1]$.

(1) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ (2) $f(x) = \frac{\tan x}{x}$

(3) $f(x) = \frac{1-\cos x}{x}$ (4) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$

Peut-on prolonger f par continuité en 0 ?

8 Dans chacun des cas suivants, f est une fonction définie sur $[0\,;1[$.

(1) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ (2) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

(3) $f(x) = \frac{|x|-1}{x-1}$ (4) $f(x) = \frac{x(1-x)}{x-1}$

Peut-on prolonger f par continuité en 1 ?

Limites et opérations

9 Déterminer la limite en 0 et en $+\infty$, de la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$.

10 Pour chacune des fonctions suivantes f et g déterminer leur limite en $+\infty$.

(1) $f : x \mapsto 3x\sqrt{x+7}$ (2) $g : x \mapsto 2x^3 + \sqrt{x+4}$

Limites de fonctions polynômes et de fonctions rationnelles

11 Dans chacun des cas suivants, f est une fonction rationnelle.
Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

(1) $f(x) = \frac{7x^2+3x-8}{(x-1)(x-2)}$ (2) $f(x) = \frac{3x^2-5x+1}{x+9}$

12 Dans chacun des cas suivants, f est une fonction polynôme.
Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

(1) $f(x) = -x^3+4x^2+5x-1$ (3) $f(x) = x^2-3x+6$

(2) $f(x) = 2x^3+4x^2+5x-1$ (4) $f(x) = -5x^3-3x+6$

Limites d'une fonction composée

13 **1.** On sait que : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Étudier les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x}$ (2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^2}$ (4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{3x}$

2. Calculer : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{bx}$ $[a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}^*]$.

3. Calculer : $\lim\limits_{x\to +\infty} \sin\frac{1}{x}$.

14 Démontrer que : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}$.

Étudier les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{4x^2}$ (2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{2x}$

15 On sait que : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

1. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1-\cos 2x}{x^2}$.

Démontrer que $f(x) = \frac{2\sin^2 x}{x^2}$ et déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2. Déduire que : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2} = 2$.

Passage à la limite dans une inégalité

16 On considère une fonction f définie sur $]1\,;+\infty[$ admettant une limite ℓ finie en $+\infty$, et vérifiant :

$$1 + \frac{1}{x} \leq f(x) \leq 2 + \frac{1}{x} \quad \text{sur }]1\,;+\infty[.$$

Déterminer un encadrement de la limite ℓ.

Calcul de limites par comparaison

17 Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de chacune des fonctions suivantes :

(1) $x \mapsto x + 2\cos x$ (2) $x \mapsto x^2 - 2\cos(x^3)$

18 Étudier la limite en 0 de chacune des fonctions suivantes :

(1) $x \mapsto x^2 \sin\frac{1}{x}$ (2) $x \mapsto x\sin\frac{1}{x}$

(3) $x \mapsto \sqrt{x}\sin\frac{1}{x}$ (4) $x \mapsto x^3\cos\frac{1}{x}$

19 Étudier les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de chacune des fonctions suivantes :

(1) $x \mapsto x + \sin x$ (2) $x \mapsto \dfrac{1}{x + \cos x}$

(3) $x \mapsto \dfrac{x + \cos x}{2 + \sin x}$ (4) $x \mapsto \dfrac{\sin x}{3x + 2}$

(5) $x \mapsto \dfrac{\cos x}{x - 1}$ (6) $x \mapsto \dfrac{E(x)}{x}$

20 On considère la fonction f définie sur $[2 ; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{2x + \sin x}{x - 1}$.

Encadrer f par deux fonctions rationnelles.
En déduire la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

21 On considère la fonction f définie par :
$f(x) = \dfrac{x\cos x}{1 + x^2}$.

Encadrer f par deux fonctions rationnelles.
En déduire la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

22 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{E(x)}{x}$.

Encadrer f par deux fonctions.
En déduire la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

23 On considère la fonction $f : x \mapsto 2x + E(x)$.

1. En utilisant la définition de E, démontrer que : pour tout x, $x - 1 \leq E(x) \leq x$.
Encadrer f par deux fonctions affines.

2. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Calcul de limites – Utilisation d'une factorisation

24 On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 3} + 8x$.

1. Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2. Démontrer que : pour $x < 0$, $f(x) = x\left(-\sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} + 8\right)$.
En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

25 On considère $f : x \mapsto \sqrt{2x^2 + 1} - 3x$.

1. Calculer : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2. Démontrer que : pour $x > 0$, $f(x) = x\left(\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} - 3\right)$.
En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Calcul de limites – Utilisation de l'expression conjuguée

26 On considère $f : x \mapsto \sqrt{2x^2 + 3} - 5x$.
Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ en utilisant l'expression conjuguée.

27 En utilisant des expressions conjuguées, déterminer les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{\sqrt{x} - 3}{9 - x}$ (2) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} \dfrac{\sqrt{x} - 3}{2 - \sqrt{6x - 2}}$

(3) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x + 7} - 3}{x - 4}$ (4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{5 + x^2} - 5}{4x^2}$

(5) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{\sqrt{x + 3} - \sqrt{2}}{x^2 - 1}$ (6) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt{x + 4} - \sqrt{2}}{x^2 - 4}$

28 On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{3x + 1} - \sqrt{3x} + 1$.

1. Justifier que ni les règles opératoires sur les limites, ni la « mise en facteur » par $\sqrt{3x}$ ne permettent de déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. À l'aide d'une expression conjuguée de $f(x) - 1$, et en s'inspirant de l'exercice précédent, déterminer la limite de f en $+\infty$.

Calcul de limites – Utilisation du taux de variation

29 À l'aide du taux de variation de fonctions bien choisies, calculer les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{3x - 5} - 3}{x - 2}$ (4) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin x - 1}{6x - \pi}$

(2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin \pi x}{x - 1}$ (5) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{2\cos x - 1}{3x - \pi}$

(3) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x - 1}{2x - \pi}$ (6) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\cos x + 1}{x - \pi}$

30 a étant un nombre réel, calculer les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x - a}$ (2) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\cos x - \cos a}{x - a}$

Calcul de limites – Changement d'écriture

31 **1.** Rappeler les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$.

2. Calculer la limite en 0 de chacune des fonctions suivantes :

(1) $x \mapsto \dfrac{\sin^2 x}{x^2}$ (2) $x \mapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$

(3) $x \mapsto x\sin x$ (4) $x \mapsto \sqrt{x}\sin x$

(5) $x \mapsto \dfrac{\tan x}{x^3}$ (6) $x \mapsto \dfrac{\tan x}{\sin x}$

(7) $x \mapsto \dfrac{\tan x - \sin x}{x}$ (8) $x \mapsto \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

32 Sachant que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{x} = 2$

(voir exercice n° 15), calculer les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{\sin^2 x}$ (2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{x\tan x}$

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{1 - \cos 2x}$ (4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\sin x}{1 - \cos 2x}$

Continuité sur un intervalle

Continuité sur un intervalle

33 Dans chacun des cas suivants, étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par :

(1) $\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty\,;0[, & f(x) = 1 - x \\ \text{pour } x \in]0\,;+\infty[, & f(x) = 5x^3 + x + 1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty\,;0], & f(x) = 7x^3 - 3x^2 + 9 \\ & f(0) = 9 \end{cases}$

34 Dans chacun des cas suivants, déterminer a pour que f soit une fonction continue sur $\mathbb{R}$:

(1) $\begin{cases} \text{pour } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, & f(x) = \dfrac{8x - 13}{4x + 1} \\ & f(1) = a \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \text{pour } x \in \mathbb{R} \setminus \{7\}, & f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x - 7} \\ & f(7) = a \end{cases}$

35 Dans chacun des cas suivants, déterminer a et b pour que f soit une fonction continue sur l'intervalle $[-1\,;1]$:

(1) $\begin{cases} \text{pour } x \in [-1\,;1], & f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2} + 2x + 3} \\ & f(-1) = a \\ & f(1) = b \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \text{pour } x \in [-1\,;1] \setminus \{0\,;-\frac{1}{2}\}, & f(x) = \dfrac{|x|}{x} + \dfrac{1}{4x^2 + 3} \\ & f(0) = a \\ & f(-\frac{1}{2}) = b \end{cases}$

Détermination de l'image d'un intervalle par une fonction continue

36 **1.** Construire la courbe d'équation : $y = -x^3$.
En déduire la représentation graphique de la fonction polynôme f définie par : $f(x) = (x - 1)^3 - 2$.
2. Justifier que f est une fonction strictement monotone (on évitera d'utiliser la dérivée de f).
3. Déterminer graphiquement l'image par f de chacun des intervalles suivants : $]-3\,;1]$ et $[0\,;+\infty[$.
Vérifier par le calcul les résultats obtenus.

37 **1.** Construire la courbe d'équation : $y = \frac{1}{x}$.
En déduire la représentation graphique de la fonction rationnelle f définie par : $f(x) = \dfrac{1}{x - 2} + 1$.
2. Justifier que f est une fonction strictement monotone (on évitera d'utiliser la dérivée de f).
3. Déterminer graphiquement l'image par f de chacun des intervalles suivants : $[-2\,;2[$ et $[3\,;+\infty[$.
Vérifier par le calcul les résultats obtenus.

38 f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ admettant le tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$		-4		-3		0		$+\infty$
$f(x)$	1	↗	3	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↘	-2

Quelle est l'image par f de chacun des intervalles suivants ?
$]-4\,;-3[$; $]-3\,;0]$; $]-3\,;+\infty[$; $]-\infty\,;-4]$.

Calcul approché des zéros d'une fonction continue

39 **1.** Construire la courbe d'équation : $y = \cos x$.
En déduire la représentation graphique de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = 1 + \cos(x + \tfrac{\pi}{3}).$$

2. Déterminer graphiquement un encadrement du zéro de f ayant la plus petite partie entière positive par deux nombres entiers consécutifs.
On désigne par α ce zéro de f.
Déterminer par la méthode de balayage (ou de dichotomie) une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

40 f est la fonction polynôme définie par :

$$f(x) = (x + 2)^2 - 47.$$

1. Justifier que f est une fonction continue strictement croissante sur $\mathbb{R}^*$ et qu'elle admet un unique zéro α.
2. À l'aide d'une calculatrice programmable, déterminer un encadrement de α par deux nombres consécutifs.
3. Déterminer par la méthode de balayage (ou de dichotomie) une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Fonctions continues strictement monotones

Applications bijectives, injectives, surjectives

41 Les application suivantes sont-elles bijectives, injectives, surjectives ?
$f : x \mapsto x^4 + 1$; $g : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$; $h : x \mapsto \dfrac{x - 1}{x^2 + 1}$.

Bijection continue strictement monotone

42 f est une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x^2 + \sqrt{x^2 + 1}.$$

Donner des ensembles A et B tels que f détermine une application bijective de A dans B.

43 f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ admettant le tableau de variation ci-dessous.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	3	↘	$-\infty$

Donner les ensembles A, B et C tels que f détermine les applications bijectives :
– de $]-\infty\,;0]$ dans A
– de $[0\,;1]$ dans B
– de $[1\,;+\infty[$ dans C.

Réciproque d'une bijection continue strictement monotone

44 On considère la fonction :

$$f : \;]-1\,;+\infty[\;\to\;]-4\,;+\infty[$$
$$x \mapsto x^2 + 2x - 3$$

1. Justifier que f est une bijection.
2. Déterminer la bijection réciproque de f.
3. Établir le tableau de variation de f^{-1}.
4. Construire la représentation graphique de f, en déduire celle de f^{-1}.

Fonctions puissances à exposants rationnels

45 Écrire sous la forme la plus simple possible chacun des nombres réels suivants :

(1) $\dfrac{\sqrt[3]{36}}{3}$ (2) $\dfrac{\sqrt{2} \times \sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{200}}$ (3) $27^{\frac{2}{3}}$

(4) $8^{-\frac{4}{3}}$ (5) $\dfrac{2 \times \sqrt{3} \times \sqrt[3]{9}}{3\sqrt[4]{3}}$

2

Dérivée – Primitives

On a vu en classe de Première SE que Isaac Newton (1642-1727) en Angleterre et Gottfried Leibniz (1646-1716) en Allemagne créèrent la notion de dérivée, indépendamment l'un de l'autre.

À la fin du XIXe siècle, le problème qui se pose est le suivant : quelles sont les fonctions qui admettent pour dérivée une fonction donnée ?

Le mathématicien français Lebesgue apporta une réponse à cette question, ce qui permit d'introduire la notion de primitive.

Henri Lebesgue
France – 1875-1941.

SOMMAIRE

1 Dérivation

1.1. Dérivabilité en x_0

Propriété – Définition

f est une fonction définie sur un intervalle K contenant x_0.
Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

(1) La fonction $h \mapsto \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ admet une limite finie l en 0.

(2) Il existe un nombre réel l et une fonction φ définie sur un intervalle K contenant 0, tels que :

$$f(x_0+h)=f(x_0)+lh+h\varphi(h)\ \ [x_0+h\in \mathrm{K} \text{ et } \lim_{h\to 0}\varphi(h)=0].$$

Lorsque l'une des deux propriétés est réalisée, on dit que *la fonction f est dérivable en x_0*.

Le nombre réel l est appelé *le nombre dérivé* de f en x_0 et se note $f'(x_0)$.

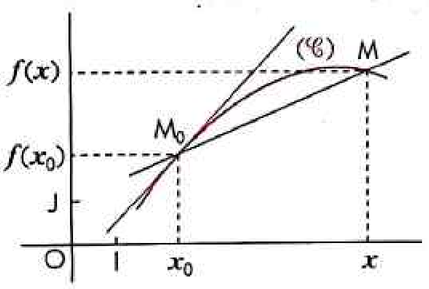
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0) \qquad \text{ou encore} \qquad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0).$$

Interprétation géométrique

Si la fonction f est dérivable en x_0, alors la représentation graphique $(\mathscr{C})$ de f admet une tangente au point $M_0\left(x_0\,;f(x_0)\right)$.

Une équation de cette tangente est :

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0).$$



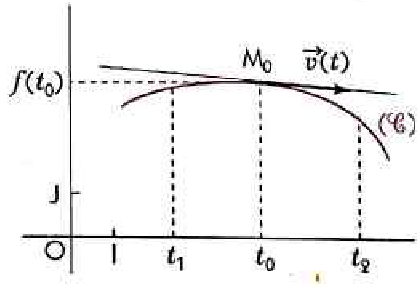
$f'(x_0)$ est *le coefficient directeur* de la tangente à $(\mathscr{C})$ en $M_0\left(x_0\,;f(x_0)\right)$.

Interprétation cinématique

Si la loi horaire d'un mouvement est une fonction f dérivable en t_0, alors la trajectoire $(\mathscr{C})$ admet une tangente au point $M_0\left(t_0\,;f(t_0)\right)$.

La vitesse moyenne entre t et t_0 est :

$$\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$$



$f'(t_0)$ est la *vitesse instantanée* à l'instant t_0.

Interprétation numérique

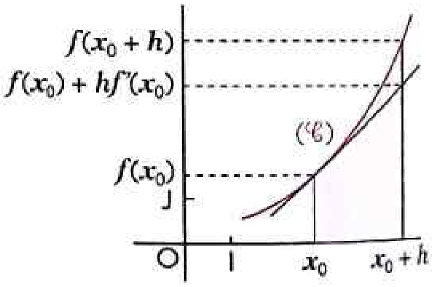
D'après la définition,

$$f(x_0)+hf'(x_0)$$

est une approximation de $f(x_0+h)$, l'erreur étant $h\varphi(h)$.

On a donc :

$$f(x_0+h)\approx f(x_0)+hf'(x_0)\,.$$



$h\mapsto f(x_0)+hf'(x_0)$ est la *meilleure approximation affine* de f en x_0.

Exercices

1.a Dans chacun des cas suivants, f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. En utilisant la définition de la dérivée, étudier la dérivabilité de la fonction f en x_0.

(1) $f(x)=\sqrt{x^2+2}$; $x_0=1$

(2) $f(x)=\sin x^2$; $x_0=0$

1.b Dans chacun des cas suivants, f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Trouver une fonction affine qui permet d'approcher $f(a+h)$ pour h voisin de zéro.

(1) $f(x)=3x^2+1$; $a=3$

(2) $f(x)=\dfrac{2}{x+2}$; $a=1$

1.2. Dérivabilité sur un intervalle

Exemple introductif

On donne la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty\,;1],\ f(x) = x^2 \\ \text{pour } x \in [1\,;+\infty[,\ f(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

Étudions la dérivabilité de f et déterminons la dérivée f'.
Donnons une interprétation graphique des résultats obtenus.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	x^2	$\boxed{1}$	$\frac{1}{x}$

Dérivabilité en tout élément de]$-\infty$; 1[et de]1 ; $+\infty$[

Sur $]-\infty\,;1]$, f coïncide avec $g : x \mapsto x^2$ donc, f est dérivable en tout élément de $]-\infty\,;1[$.
On dit que f est **dérivable sur]$-\infty$; 1[** et :
pour tout x élément de $]-\infty\,;1[$, $f'(x) = g'(x) = 2x$.

Sur $[1\,;+\infty[$, f coïncide avec $h : x \mapsto \frac{1}{x}$ donc, f est dérivable en tout élément de $]1\,;+\infty[$.
On dit que f est **dérivable sur]1 ; $+\infty$[** et :
pour tout x élément de $]1\,;+\infty[$, $f'(x) = h'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Étude de la dérivabilité en 1

Étudions la limite en 1 de la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$$\lim_{\substack{x \to 1\\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1\\ <}} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = g'(1) = 2.$$

On dit que f est **dérivable à gauche en 1.**

$\lim\limits_{\substack{x \to 1\\ <}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ est appelée **le nombre dérivé à gauche** en 1 de f, noté : $f'_g(1)$.

$$\lim_{\substack{x \to 1\\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1\\ >}} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = h'(1) = -1.$$

On dit que f est **dérivable à droite en 1.**

$\lim\limits_{\substack{x \to 1\\ >}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ est appelée **le nombre dérivé à droite** en 1 de f, noté : $f'_d(1)$.

Conclusion

La fonction f est dérivable sur $]-\infty\,;1[$ et dérivable à gauche en 1, on dit que la fonction f est **dérivable sur]$-\infty$; 1]**

et : $\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty\,;1[,\ f'(x) = g'(x) = 2x \\ f'_g(1) = g'(1) = 2. \end{cases}$

La fonction f est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ et dérivable à droite en 1, on dit que la fonction f est **dérivable sur [1 ; $+\infty$[**

et : $\begin{cases} \text{pour } x \in]1\,;+\infty[,\ f'(x) = h'(x) = \frac{1}{x^2} \\ f'_d(1) = h'(1) = -1. \end{cases}$

Interprétation graphique

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).

($\mathscr{C}$), ($\mathscr{P}$), ($\mathscr{H}$) sont les représentations graphiques respectives de f, g, h.

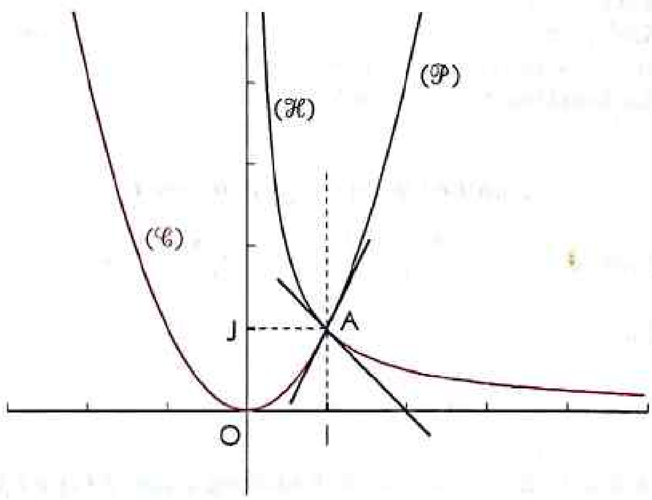
($\mathscr{P}$) et ($\mathscr{H}$) sont sécantes au point A(1 ; 1).

($\mathscr{C}$) coïncide avec($\mathscr{P}$) sur $]-\infty\,;1]$.

($\mathscr{C}$) coïncide avec ($\mathscr{H}$) sur $[1 : +\infty[$.

– La tangente en A à ($\mathscr{P}$) est appelée **la tangente à gauche en A** à ($\mathscr{C}$), c'est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'_g(1)$ égal à 2.

– La tangente en A à ($\mathscr{H}$) est appelée **la tangente à droite en A** à ($\mathscr{C}$), c'est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'_g(1)$ égal à – 1.



Dérivabilité à gauche, dérivabilité à droite en x_0

Définition

f est une fonction définie sur un intervalle K contenant x_0.

On dit que f est ***dérivable à gauche en*** x_0 lorsque $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est finie.

Cette limite est appelée ***le nombre dérivé à gauche*** en x_0 de f.

On note : $f'_g(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

La droite passant par le point $M_0(x_0\,;f(x_0))$ et de coefficient directeur $f'_g(x_0)$ est appelée la ***tangente à gauche*** à la courbe représentative de f au point M_0.

On dit que f est ***dérivable à droite*** en x_0 lorsque $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est finie.

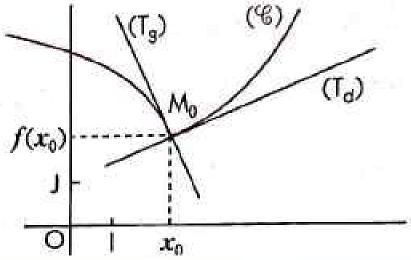
Cette limite est appelée ***le nombre dérivé à droite*** en x_0 de f.

On note : $f'_d(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

La droite passant par le point $M_0(x_0\,;f(x_0))$ et de coefficient directeur $f'_d(x_0)$ est appelée la ***tangente à droite*** à la courbe représentative de f au point M_0.

$f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$

$(T_g) \neq (T_d)$



On dit que M_0 est un point anguleux de $(\mathscr{C})$

À l'aide de ces définitions on démontre la propriété suivante :

Propriété

f est une fonction définie sur un intervalle ouvert K contenant x_0.

f est dérivable en x_0 ***si et seulement*** si f est dérivable à gauche en x_0, dérivable à droite en x_0 et :

$$f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$$

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \iff f'_g(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0)$$

Exemple

On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x|x-1|$.
Calculons le nombre dérivé à gauche et le nombre dérivé à droite en 1.
La fonction f est-elle dérivable en 1 ?

x	$-\infty$	1	$+\infty$
signe de $x-1$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$x(-x+1)$	0	$x(x-1)$

Nombre dérivé à gauche en 1

Pour $x < 1$, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{x(-x+1)}{x-1} = -x$

donc : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = -1$

d'où : $f'_g(1) = -1$

Nombre dérivé à droite en 1

Pour $x > 1$, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{x(x-1)}{x-1} = x$

donc : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 1$

d'où : $f'_d(1) = +1$

La fonction f n'est pas dérivable en 1 car $f'_g(1) \neq f'_d(1)$.

Tangente verticale

Exemple introductif

On donne la fonction racine carrée f ; elle est définie par : $f(x) = \sqrt{x}$.
Son ensemble de définition est $[0 ; +\infty[$. Étudions la dérivabilité de f en 0 .

Étude de la dérivabilité de f en 0

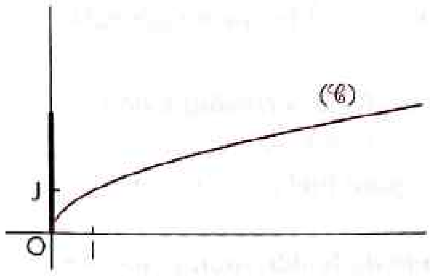
On sait que la fonction f est continue et dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

donc, la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

Interprétation graphique

Le plan est muni du repère (O, I, J). On sait que la courbe représentative de f admet une tangente verticale en 0.



On démontre et nous admettons la propriété suivante :

Propriété

f est une fonction définie sur un intervalle K contenant x_0.

Lorsque la limite à droite ou la limite à gauche de la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est infinie, la représentation graphique de f admet une tangente verticale au point $M_0\big(x_0 ; f(x_0)\big)$.

Exemple

On donne la fonction f définie par : $\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty ; -3], & f(x) = x + \sqrt{x^2+2x-3} \\ \text{pour } x \in [-3 ; +\infty[, & f(x) = x + \sqrt{x^2+10x+21} \end{cases}$

Étudions la dérivabilité de f en -3.

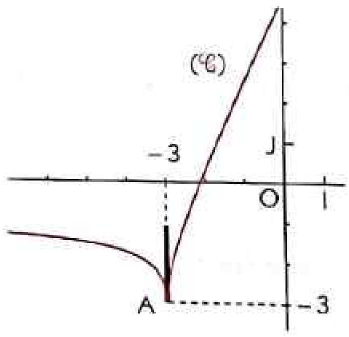
- ***pour $x < -3$,***

$$\frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)} = \frac{x+3+\sqrt{x^2+2x-3}}{x+3}$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{(x+3)(x-1)}}{-x-3} = 1 - \frac{\sqrt{(x+3)(x-1)}}{\left(\sqrt{-x-3}\right)^2}$$

d'où : $\lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)} = 1 - \lim\limits_{x \to -3^-} \sqrt{\dfrac{-x+1}{-x-3}} = -\infty$

- ***pour $x > -3$***, on obtient de même : $\lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)} = -\infty$
- La représentation graphique (𝒞) de f admet donc au point A$(-3 ; -3)$ **une tangente verticale.**



On dit que A est un point de rebroussement

Dérivabilité sur un intervalle

Définition

f est une fonction définie sur un intervalle $]a ; b[$.

On dit que f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a ; b[$ lorsque f est dérivable en tout élément de $]a ; b[$.

f est une fonction définie sur un intervalle $[a ; b]$.

On dit que f est dérivable sur l'intervalle fermé $[a ; b]$ lorsque f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a ; b[$, est dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b.

Exemple 1

Étudions la dérivabilité de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x\sqrt{x}$.

Ensemble de définition de f

$D_f = [0 ; +\infty[$

La fonction f est le produit de la fonction identité $x \mapsto x$ et de la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$.
La fonction identité est dérivable, et la fonction racine carrée est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et non dérivable en 0.

Étude de la dérivabilité de f sur]0 ; + ∞[

La fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et :

pour tout x élément de $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

Étude de la dérivabilité de f en 0

on a : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h\sqrt{h}}{h} = 0$

donc f est dérivable en 0 et : $f'(0) = 0$.

Dérivée de f

La fonction f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et sa dérivée f' est définie par :

$$\begin{cases} \text{pour } x \in]0 ; +\infty[, & f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} \\ & f'(0) = 0 \end{cases}$$

f' est donc définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

Exemple 2

Étudions la dérivabilité de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = |x^2 - 4|$.

Étude de la dérivabilité de f sur]– ∞ ; – 2], sur [2 ; + ∞[et sur [– 2 ; 2]

Considérons donc les fonctions polynômes g et h définies par $g(x) = x^2 - 4$ et $h(x) = 4 - x^2$.

f coïncide avec g sur $]-\infty ; -2] \cup [2 ; +\infty[$

f coïncide avec h sur $[-2 ; 2]$.

x	$-\infty$	0		0	$+\infty$
signe de x^2-4	+	$\boxed{0}$	−	$\boxed{0}$	+
expression de $\lvert x^2-4\rvert$	x^2-4	$\boxed{0}$	$4-x^2$	$\boxed{0}$	x^2-4

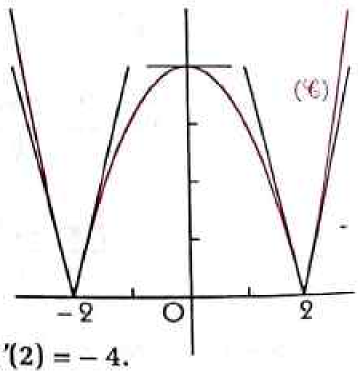
Les fonctions g et h sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 2x$; $h'(x) = -2x$

f est donc dérivable sur $]-\infty ; -2]$, sur $[2 ; +\infty[$, sur $[-2 ; 2]$ et :

pour tout x élément de $]-\infty ; -2[$, $f'(x) = g'(x) = 2x$
et $f'_g(-2) = g'(-2) = -4$

pour tout x élément de $]2 ; +\infty[$, $f'(x) = g'(x) = 2x$
et $f'_d(2) = g'(2) = 4$

pour tout x élément de $]-2 ; 2[$, $f'(x) = h'(x) = -2x$
et $f'_d(-2) = h'(-2) = 4$, $f'_g(2) = h'(2) = -4$.



Exercices

1.c Déterminer la tangente au point d'abscisse a de la représentation graphique de chacune des fonctions f définies ci-dessous.

(1) $f(x) = x^2 + 3x - |x|$; $a = 0$

(2) $\begin{cases} \text{pour } x \in [1 ; +\infty[, f(x) = x^2 \\ \text{pour } x \in]-\infty ; 1[, f(x) = \dfrac{3x^2+1}{3} \end{cases}$; $a = 1$

1.d Dans chacun des cas suivants, déterminer le (ou les) intervalles sur lesquels la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie ci-dessous est dérivable.

(1) $f(x) = 2x - 3 - \frac{5}{x}$ (2) $f(x) = x^2 - \sqrt{x}$

(3) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$ (4) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+x+1}$

(5) $f(x) = \cos^3 x$ (6) $f(x) = 2x \sin x$

2 Fonctions dérivées

2.1. Dérivées successives

Définition

Exemple introductif

Déterminons la dérivée de la dérivée f' de la fonction polynôme f définie par :
$$f(x) = 5x^3 + 4x^2 - 7x + 1.$$

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée f' est la fonction polynôme, définie par :
$$f'(x) = 15x^2 + 8x - 7.$$

f' est donc aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée $(f')'$ est la fonction polynôme définie par :
$$(f')'(x) = 30x + 8.$$

La fonction $(f')'$ est appelée **dérivée seconde** de f ; on note f''.

Définition

f est une fonction dérivable sur un intervalle K.
Si f' est dérivable sur K, sa dérivée est appelée *dérivée seconde* de f, notée f'' ou $f^{(2)}$.
f' est aussi appelée *dérivée première* de f, on la note $f^{(1)}$.

Par itération, la dérivée n^e de la fonction f est la dérivée de la dérivée $(n-1)^e$ de f.
on note : $f^{(1)} = f'$; $f^{(2)} = f''$; ... ; $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$

Notation différentielle

On adopte souvent en physique la notation suivante : $f^{(1)} = \dfrac{df}{dx}$; $f^{(2)} = \dfrac{d^2f}{dx^2}$; ... ; $f^{(n)} = \dfrac{d^nf}{dx^n}$.

Exemple

n est un nombre entier naturel non nul.
Déterminons la dérivée n^e de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \cos x$.

Calculons les dérivées successives de f
f est dérivable ainsi que ses dérivées successives.
Soit x un nombre réel ;

on a : $f(x) = \cos x$

$$f'(x) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$f''(x) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + 2 \times \frac{\pi}{2}\right)$$
$$f'''(x) = -\sin\left(x + 2 \times \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + 3 \times \frac{\pi}{2}\right).$$

On peut alors émettre la conjecture suivante :
$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n \times \frac{\pi}{2}\right) \quad [n \in \mathbb{N}].$$

À l'aide d'une démonstration par récurrence, contrôlons cette conjecture (voir TP p. 55)

– On a bien : $f^{(1)}(x) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

– Supposons que : $f^{(k)}(x) = \cos\left(x + k \times \frac{\pi}{2}\right)$ $[k \in \mathbb{N}]$

on a : $f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)})'(x) = -\sin\left(x + k \times \frac{\pi}{2}\right)$
$$= \cos\left(x + k \times \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \cos\left(x + (k+1) \times \frac{\pi}{2}\right).$$

Conclusion
pour tout nombre entier naturel n,
$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n \times \frac{\pi}{2}\right).$$

Exercices

2.a Dans chacun des cas suivants, déterminer les deux premières dérivées de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par sa formule explicite.

(1) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ (2) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$

(3) $f(x) = \sin 4x$ (4) $f(x) = x\sqrt{2x}$.

2.b n est un nombre entier naturel non nul. Déterminons la dérivée n^e de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sin x$.

2.2. Dérivée d'une fonction composée

Présentation et propriétés

Exemple introductif

Déterminons le nombre dérivé de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = (2x - 5)^3$.

f est une fonction polynôme, donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Considérons la fonction f comme composée de $u : x \mapsto 2x - 5$ suivie de $v : x \mapsto x^3$.

On a : pour tout nombre réel x, $f(x) = 8x^3 - 60x^2 + 150x - 125$ et $f'(x) = 24x^2 - 120x + 150 = 6(2x - 5)^2$

or : pour tout nombre réel x, $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 3x^2$

donc : pour tout nombre réel x, $f'(x) = u'(x) \times v'(u(x))$.

On démontre et nous admettons les propriétés suivantes :

Propriétés

u est une fonction définie sur un intervalle K, et v une fonction définie sur un intervalle L contenant u(K).

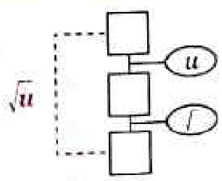
- ***Si*** **la fonction u est dérivable en un élément x_0 de K et la fonction v est dérivable en $u(x_0)$,** ***alors*** **la fonction $v \circ u$ est dérivable en x_0, et : $(v \circ u)'(x_0) = u'(x_0) \times v'(u(x_0))$.**
- ***Si*** **la fonction u est dérivable sur K et la fonction v est dérivable sur L,** ***alors*** **la fonction $v \circ u$ est dérivable sur K, et : $(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$.**

Racine carrée d'une fonction dérivable et strictement positive

Présentation

On donne une fonction u dérivable et strictement positive sur un intervalle K.
Déterminons la dérivée de la fonction $\sqrt{u}$.

Considérons la fonction racine carrée v, elle est définie par : $v(x) = \sqrt{x}$
donc : $\sqrt{u} = v \circ u$.



La fonction v est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et :

pour tout nombre réel x, $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

La fonction $\sqrt{u}$ est donc dérivable sur K et :

pour tout x élément de K, $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = u'(x) \times \dfrac{1}{2\sqrt{u(x)}}$.

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Exemple

Déterminons la dérivée de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

On considère la fonction $u : x \mapsto x^2 + 1$.

Pour tout nombre réel x, $u(x) > 0$.

u est dérivable et pour tout nombre réel x, $u'(x) = 2x$.

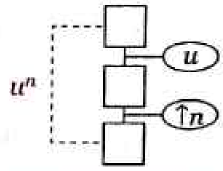
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}$.

Puissance $n^{ième}$ d'une fonction dérivable

■ **Présentation**

On donne une fonction u dérivable sur un intervalle K, n un nombre entier naturel non nul. Déterminons la dérivée de la fonction u^n.

Considérons la fonction v de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $v(x) = x^n$
donc : $u^n = v \circ u$.



La fonction v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

pour tout nombre réel x, $v'(x) = nx^{n-1}$.

La fonction u^n est donc dérivable sur K et :

pour tout x élément de K, $\left([u(x)]^n\right)' = u'(x) \times n[u(x)]^{n-1}$.

$$\boxed{(u^n)' = nu'u^{n-1}}$$

■ **Exemple**

Déterminons la dérivée des fonctions f et g définies par : $f(x) = (5x^2 - 2x + 3)^6$; $g(x) = \sin^5 x$.

Dérivée de f

u est la fonction polynôme définie par :

$u(x) = 5x^2 - 2x + 3$;

d'où : $f = u^6$

donc : $f'(x) = 6u'(x)u^5(x) = 6(10x - 2)(5x^2 - 2x + 3)^5$

Dérivée de g

u est la fonction sinus ;

d'où : $g = u^5$

donc : $g'(x) = 5u'(x)u^4(x) = 5\cos x \sin^4 x$

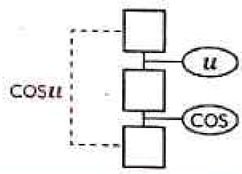
Cosinus ou sinus d'une fonction dérivable

■ **Présentation**

On donne une fonction u dérivable sur un intervalle K. Déterminons la dérivée de $\cos u$ et $\sin u$.

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

pour tout nombre réel x, $\cos' x = -\sin x$ et $\sin' x = \cos x$.



Les fonctions $\cos u$ et $\sin u$ sont donc dérivables sur K et :

pour tout x élément de K, $(\cos u(x))' = u'(x)(-\sin u(x))$
$(\sin u(x))' = u'(x)(\cos u(x))$

$$\boxed{\begin{array}{l}(\cos u)' = -u'\sin u\\(\sin u)' = u'\cos u\end{array}}$$

■ **Exemple**

Déterminons la dérivée de la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \cos(2x^2 - 3)$.

g est la composée de $u : x \mapsto 2x^2 - 3$ suivie de $v : x \mapsto \cos x$; donc : $g = v \circ u$.
u est dérivable sur $\mathbb{R}$, v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'image par u de tout élément de $\mathbb{R}$ est un élément de $\mathbb{R}$.
La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $g(x) = u'(x) \times v'[u(x)] = -4x\sin(2x^2 - 3)$.

Exercice

2.c Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée de f.

(1) $f : x \mapsto \sqrt{3x^2 + 1}$
(2) $f : x \mapsto (4x^2 - x - 1)^4$
(3) $f : x \mapsto 5x^3 - 3 + \sqrt{-x^2 + 2}$
(4) $f : x \mapsto \cos^4 x$
(5) $f : x \mapsto \tan(x^2 - 4)$
(6) $f : x \mapsto 2\sin^2 x + x^2$
(7) $f : x \mapsto 2\cos(1 - 2x)^2$
(8) $f : x \mapsto \sin(1 - 5x)$
(9) $f : x \mapsto 2\sin^2 x$
(10) $f : x \mapsto 1 + \tan^2 x$
(11) $f : x \mapsto \cos^3(4 - x^3)$

2.3. Dérivée de la réciproque d'une fonction continue strictement monotone

Le plan est muni du repère orthonormé (O,I,J).

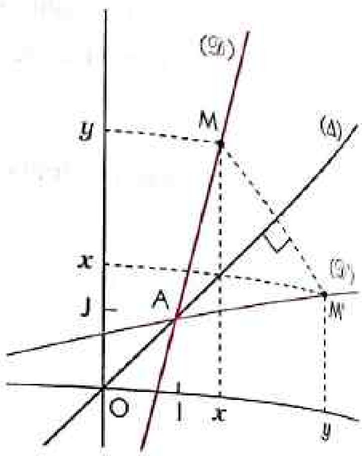
Étude graphique

■ **Étude préliminaire : droites symétriques par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$**

- **Caractérisation analytique de $S_{(\Delta)}$**

M(x ; y) et M'(x' ; y') sont des points.

$$M' = S_{(\Delta)}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$



- **Relation entre les coefficients directeurs de deux droites (𝒟) et (𝒟') symétriques par rapport à (Δ)**

La caractérisation de la symétrie $S_{(\Delta)}$ permet d'obtenir une équation de (𝒟'), image de (𝒟) par $S_{(\Delta)}$.

(𝒟) est la droite d'équation : $y = ax + b$, $[a \neq 0]$.

(𝒟') est la droite d'équation : $x' = ay' + b$ c'est-à-dire $y' = \frac{1}{a}x' - \frac{b}{a}$.

Δ étant la droite d'équation $y = x$,
deux droites distinctes de (OI) et (OJ) symétriques par rapport à (Δ) ont des coefficients directeurs inverses l'un de l'autre.

■ **Exemple**

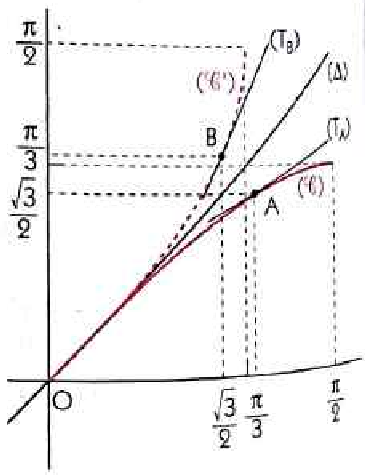
On donne la fonction de $[0 ; \frac{\pi}{2}]$ vers $[0 ; 1]$ définie par : $f(x) = \sin x$
f est une bijection car elle est continue strictement croissante et $[0 ; 1] = [\sin 0 ; \sin\frac{\pi}{2}]$.
On veut déterminer graphiquement le nombre dérivé $(f^{-1})'(\frac{\sqrt{3}}{2})$, f^{-1} étant la bijection réciproque de f.

On a : $\frac{\sqrt{3}}{2} = f(\frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow f^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{3}$.

(𝒞) et (𝒞') sont les représentations graphiques respectives de f et f^{-1}.

(T_A) est la tangente à (𝒞) au point $A(\frac{\pi}{3} ; \frac{\sqrt{3}}{2})$

(T_B) est la tangente à (𝒞') au point $B(\frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{\pi}{3})$.



Les points A et B sont symétriques par rapport à (Δ)
donc (T_A) et (T_B) sont symétriques par rapport à (Δ),
elles ont des coefficients directeurs inverses l'un de l'autre :

– coefficient directeur de $(T_A) = f'(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

– coefficient directeur de $(T_B) = (f^{-1})'(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{f'(\frac{\pi}{3})} = 2$.

Étude algébrique

■ **Exemple 1**

f est une application bijective, dérivable et strictement monotone sur un intervalle K.
On veut calculer le nombre dérivé $(f^{-1})'(\alpha)$, où α est un élément de f(K).

Soit x un élément de l'intervalle K tel que : $f'(x) \neq 0$.

On sait que : $(f^{-1} \circ f)(x) = x$

par suite : $(f^{-1} \circ f)'(x) = 1$

La dérivation d'une composée de fonction donne : $(f^{-1})'\big(f(x)\big) \times f'(x) = 1$

d'où : $(f^{-1})'\big(f(x)\big) = \dfrac{1}{f'(x)}$

Cette étude algébrique donne une méthode de détermination de la dérivée de f^{-1}, réciproque d'une bijection f dérivable et strictement monotone sur un intervalle K.

M ***Pour calculer le nombre dérivé en α de f^{-1}, réciproque d'une fonction f dérivable et strictement monotone sur un intervalle K, on peut procéder comme suit :***

- **on pose :** $f^{-1}(\alpha) = \beta$
- **on écrit :** $f^{-1}(\alpha) = \beta \Leftrightarrow \alpha = f(\beta)$
- **on calcule :** $f'(\beta)$
- **on vérifie que :** $f'(\beta) \neq 0$
- **on conclut :** $(f^{-1})'(\alpha) = \dfrac{1}{f'(\beta)}$

■ **Exemple 2**

On donne un nombre entier naturel non nul n.
Déterminons la dérivée de l'application réciproque de l'application bijective f : $]0\,;+\infty[\to]0\,;+\infty[$, $x \mapsto x^n$

$f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto x^n$

f est dérivable et pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^*$,

$f'(x) = nx^{n-1}$ et $f'(x) \neq 0$.

$f^{-1}: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$

f^{-1} est dérivable et pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^*$,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]} = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n}\,x^{\frac{1}{n}-1}.$$

■ **Exemple 3**

On donne un nombre rationnel r. (On sait qu'il existe p et q tels que : $p \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$, $r = \dfrac{p}{q}$.)
Déterminons la dérivée de l'application bijective g : $]0\,;+\infty[\to]0\,;+\infty[$, $x \mapsto x^r$

Soit x un élément de $]0\,;+\infty[$;

on a : $g(x) = x^r = x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$ $[p \in \mathbb{Z}^*, q \in \mathbb{N}^*]$.

g est donc la composée de la fonction $u : x \mapsto x^{\frac{1}{q}}$ suivie de la fonction $v : x \mapsto x^p$

d'où : $g'(x) = u'(x) \times v'[u(x)]$

$$= \left(\frac{1}{q}\,x^{\frac{1}{q}-1}\right) \times p\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p-1} = \frac{p}{q}\,x^{\frac{p}{q}-1} = r x^{r-1}.$$

Exercices

2.d Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). Démontrer que la fonction f de $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$ vers $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ définie par :
$$f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$$
est une bijection.

Sans expliciter sa bijection réciproque f^{-1}, calculer $(f^{-1})'(1)$.

2.e Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). Démontrer que la fonction f de $[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}]$ vers $[-1\,;1]$ définie par : $f(x) = \cos x$, est une bijection. On désigne par f^{-1} sa bijection réciproque. Représenter graphiquement les applications f et f^{-1} sur le même dessin.

Calculer le nombre dérivé de f^{-1} en $\frac{1}{2}$.

2.4. Tableau récapitulatif

① **Dérivées des fonctions élémentaires**

Fonction f	Fonction f'	f est dérivable sur l'intervalle
$x \mapsto c \ [c \in \mathbb{R}]$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto ax \ [a \in \mathbb{R}]$	$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^r \ [r \in \mathbb{Q}^*]$	$x \mapsto rx^{r-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^r} \ [r \in \mathbb{Q}^*]$	$x \mapsto \frac{-r}{x^{r+1}}$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$	$]-\frac{\pi}{2}+k\,;\frac{\pi}{2}+k[\ [k \in \mathbb{Z}]$
$x \mapsto \text{cotan}x$	$x \mapsto \frac{-1}{\sin^2 x}$	$]k\pi\,;\pi+k\pi[\ [k \in \mathbb{Z}]$

② **Opérations**

Fonction	$u+v$	au	$u \times v$	$\frac{1}{v}$	$\frac{u}{v}$
Dérivée sur K	$u'+v'$	au'	$u' \times v + u \times v'$	$-\frac{v'}{v^2}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
Conditions		$a \in \mathbb{R}$		$v(x) \neq 0$	$v(x) \neq 0$

③ **Compositions**

Fonction	$v \circ u$	u^r	$\sqrt{u}$	$\cos u$	$\sin u$
Dérivée sur K	$u' \times v' \circ u$	$ru'u^{r-1}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$-u'\sin u$	$u'\cos u$
Conditions		$r \in \mathbb{Q}^*$	$u(x) > 0$		

2.5. Application de la dérivée

Dérivée et sens de variation des fonctions – Tableaux récapitulatifs

① **Variations d'une fonction**

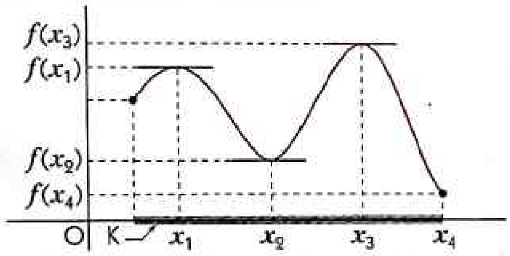
f est une fonction dérivable sur un intervalle K.

- ***Si*** **f' est strictement positive (sauf en des éléments isolés où elle s'annule),** ***alors*** **f est strictement croissante.**
- ***Si*** **f' est strictement négative (sauf en des éléments isolés où elle s'annule),** ***alors*** **f est strictement décroissante.**
- ***Si*** **f' est nulle,** ***alors*** **f est constante.**

② **Extremums d'une fonction**

f est une fonction dérivable sur un intervalle K contenant x_0.

$f(x_0)$ est un extremum relatif de la fonction f ***si et seulement si*** **f' s'annule en x_0 en changeant de signe.**	***Si*** **f admet un extremum relatif en x_0,** ***alors*** **$f'(x_0) = 0$.**

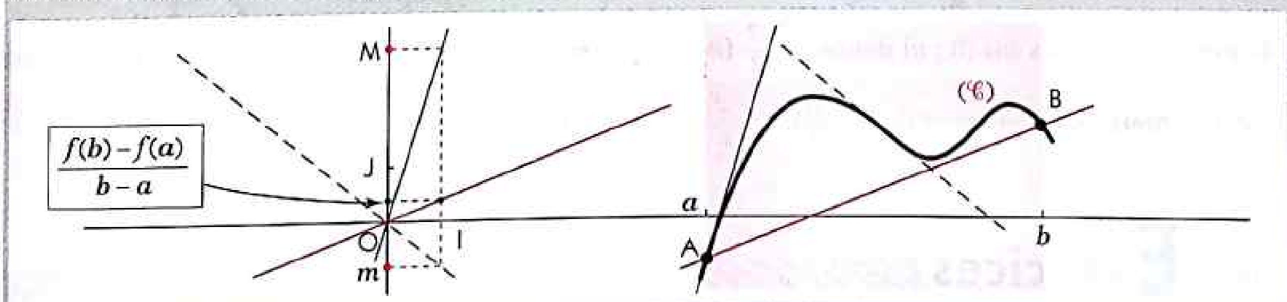


$f(x_1)$, $f(x_2)$ et $f(x_3)$ sont des extremums relatifs de f.
$f(x_1)$ et $f(x_3)$ sont des maximums relatifs de f.
$f(x_2)$ est un minimum relatif de f.
$f(x_4)$est le minimum de f.
$f(x_3)$ est le maximum de f.

Dérivée et encadrements

■ **Activité**

Le plan est muni du repère (O, I, J). On donne une fonction f définie sur $[a ; b]$. On désigne par $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de f sur $[a ; b]$, A et B les points de $(\mathscr{C})$ d'abscisses respectives a et b.
À l'aide du graphique, on veut comparer le coefficient directeur de la droite (AB) avec les coefficients directeurs extrêmes des tangentes à $(\mathscr{C})$.



À l'aide d'une règle qui matérialise la position des tangentes à la représentation graphique $(\mathscr{C})$ de f sur $[a ; b]$, on peut déterminer approximativement les tangentes à $(\mathscr{C})$ dont les coefficients directeurs sont extrêmes, m et M.
On constatera alors que le coefficient directeur de la sécante (AB) est compris entre ces deux extrêmes :

$$m < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < M$$

■ **Point de vue cinématique**

La vitesse moyenne entre t_1 et t_2 d'un point mobile est comprise entre les vitesses instantanées extrêmes.

■ **Inégalités des accroissements finis**

Propriété

f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K, a et b deux éléments de K tels que $a < b$.
S'il existe des nombres M et m tels que : pour tout x élément de $[a\ ;\ b]$, $m \leq f'(x) \leq M$,
***alors* $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.**

Démonstration

– Considérons la fonction g définie sur $[a\ ;\ b]$ par : $g(x) = f(x) - mx$.

g est dérivable sur K et : pour tout x élément de K, $g'(x) = f'(x) - m \geq 0$

donc : g est croissante sur K,

$g(a) < g(b)$ (car $a < b$).

Par conséquent : $f(a) - ma \leq f(b) - mb$

$m(b-a) \leq f(b) - f(a)$.

– En utilisant les variations de la fonction h définie sur $[a\ ;\ b]$ par : $h(x) = f(x) - Mx$,

on établit que : $f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.

– Dans le cas particulier où $m = -M$,

on vérifie que : $-M(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

c'est-à-dire : $|f(a) - f(b)| \leq M|a-b|$.

Propriété

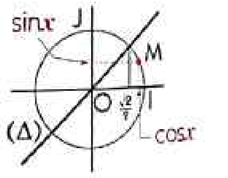
f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K.
S'il existe un nombre réel M tel que : pour tout x de K, $|f'(x)| \leq M$,
***alors*, pour tous éléments a et b de K, $|f(a) - f(b)| \leq M|a-b|$.**

■ **Exemple de recherche d'encadrements**

Démontrons que : pour tout x élément de $[0\ ;\ \frac{\pi}{4}]$, $\frac{\sqrt{2}}{2}x \leq \sin x \leq x$.

La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée la fonction cosinus

or : pour tout x élément de $[0\ ;\ \frac{\pi}{4}]$, $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos x \leq 1$



Soit u un élément de $[0\ ;\ \frac{\pi}{4}]$. L'inégalité des accroissements finis appliqués à la fonction cosinus sur $[0\ ;\ u]$ donne : $\frac{\sqrt{2}}{2}(u-0) \leq \sin u - \sin 0 \leq u$

donc : pour tout x élément de $[0\ ;\ \frac{\pi}{4}]$, $\frac{\sqrt{2}}{2}x \leq \sin x \leq x$.

Exercices

2.f Pour tout x élément de $[0\ ;\ \frac{\pi}{2}]$, appliquer les inégalités des accroissements finis à la fonction cosinus sur l'intervalle $[0\ ;\ x]$.
En déduire que :
$$1 - x^2 \leq \cos x \leq 1.$$

2.g En utilisant les inégalités des accroissements finis, démontrer que :
pour tout nombre réel x positif, $-x \leq \sin x \leq x$.

2.h Démontrer que :
pour tout x de $[0\ ;\ \frac{\pi}{2}[$, $\tan x \geq x$.

3 Primitives

3.1. Notion de primitive

Définition

Position du problème

- Étant donné une fonction f dérivable sur un intervalle K, on sait déterminer sa dérivée f'.
L'opération qui à toute fonction associe sa dérivée est **la dérivation**.
- Inversement, étant donné une fonction f définie sur un intervalle K, peut-on déterminer une fonction F telle que f est la dérivée de F ? Quelles sont les conditions d'existence d'une telle fonction F ? Existe-t-il d'autres fonctions vérifiant la même propriété que F ?

Dérivée et primitives

On donne la fonction cube g. C'est une fonction dérivable. Déterminer sa dérivée.
On donne la fonction carrée f. Peut-on déterminer une fonction F dérivable sur un intervalle K et ayant pour dérivée f ? Peut-on déterminer une autre fonction vérifiant la même condition que F ?

Dérivation
ou détermination de la fonction dérivée d'une fonction dérivable donnée.

$g \xrightarrow{\text{a pour dérivée}} g'$

$x \mapsto x^3$
$x \mapsto x^3 + 5$
$x \mapsto x^3 + k\ [k \in \mathbb{R}]$ ....

« Anti-dérivation »
ou recherche d'une fonction ayant pour dérivée une fonction donnée.

$f \xrightarrow{\text{est la dérivée de}} F$

$x \mapsto x^2$ ....
....
....

On dit que F est **une primitive** sur $\mathbb{R}$ de f.

f définie sur K est la dérivée de F $\Leftrightarrow$ F est une primitive sur K de f.

Définition

f est une fonction définie sur un intervalle K.
On appelle *primitive* sur K de f toute fonction F dérivable sur K telle que f est la dérivée de F.

Condition d'existence d'une primitive

On démontre et nous admettrons la propriété suivante :

Propriété

Toute fonction continue sur un intervalle K admet une primitive sur K.

Les primitives d'une même fonction

Propriété

- ***Si* la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle K,**
***alors*, pour tout nombre réel c, la fonction $x \mapsto F(x) + c$ est une primitive sur K de f.**
- **Toute primitive sur K de f est de cette forme.**

Démonstration

– Soit F une primitive sur K de f. Donc F est dérivable sur K et, pour tout x élément de K, $F'(x) = f(x)$.
Soit k un nombre réel, désignons par G la fonction définie par : $G(x) = F(x) + k$.
G est donc une primitive sur K de f car G est dérivable sur K et $G' = F' = f$.

– Soit H une primitive sur K de f. La fonction $(H - F)$ est dérivable sur K et $(H - F)'$ est la fonction nulle.
La fonction $(H - F)$ est donc une fonction constante sur K et pour tout élément x de K, $(H - F)(x) = k$ $[k \in \mathbb{R}]$.
D'où H est définie par : $H(x) = F(x) + k$ $[k \in \mathbb{R}]$.

Exemples

- Les primitives de la fonction $x \mapsto \cos x$ sont les fonctions $x \mapsto \sin x + k$ $[k \in \mathbb{R}]$.
- Les primitives de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sont les fonctions $x \mapsto 2\sqrt{x} + k$ $[k \in \mathbb{R}]$.

La primitive d'une fonction vérifiant une condition initiale

Propriété

f est une fonction continue sur un intervalle K, x_0 un nombre réel de K et y_0 un nombre réel. Il existe une et une seule primitive de la fonction f sur l'intervalle K qui prend la valeur y_0 en x_0.

Démonstration

f étant continue sur K, elle admet une primitive G sur K.

Toutes les autres primitives sont de la forme G + k.

On cherche les valeurs de k pour que : $(G + k)(x_0) = G(x_0) + k = y_0$.

La primitive cherchée est donc la fonction F, définie sur K par : $F(x) = G(x) + y_0 - G(x_0)$.

Exemple

La primitive de la fonction sinus qui prend la valeur $\sqrt{3}$ en 0 est de la forme : $x \mapsto -\cos x + k$ $[k \in \mathbb{R}]$.

Elle vérifie : $F(0) = -\cos 0 + k = \sqrt{3}$.

On a donc : $F : x \mapsto -\cos x + 1 + \sqrt{3}$.

Représentation graphique des primitives d'une fonction

– Le plan est muni du repère (O, I, J). On désigne par

f la fonction affine définie par : $f(x) = x - 5$,

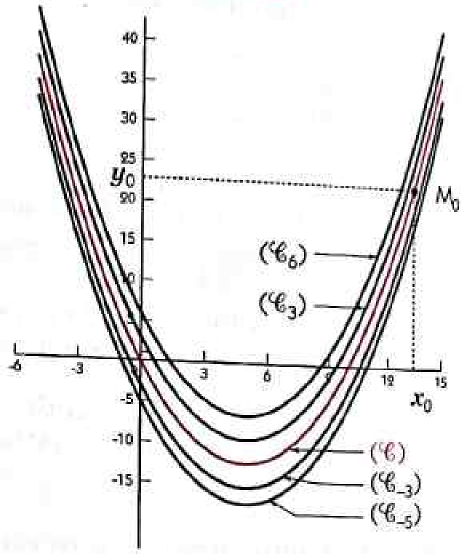
F la fonction polynôme définie par : $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x$

F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de f ;
sa représentation graphique est la parabole $(\mathscr{C})$.

– Une autre primitive sur $\mathbb{R}$ de f est une fonction G_k définie par : $G_k(x) = F(x) + k$ $[k \in \mathbb{R}]$.

Sa représentation graphique $(\mathscr{C}_k)$ se déduit donc de $(\mathscr{C})$ par la translation de vecteur $k\overrightarrow{OJ}$.

– À chaque valeur de k correspond une courbe $(\mathscr{C}_k)$.
Une seule de ces courbes contient le point $M_0(x_0 ; y_0)$.
C'est la représentation graphique de la primitive sur $\mathbb{R}$ de f qui prend la valeur y_0 en x_0.



Exercices

3.a Dans chacun des cas suivants, F et f sont des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Démontrer que F est une primitive sur l'intervalle K de f.

(1) $F(x) = x^5 + 6x - 1999$
$f(x) = 5x^4 + 6$ — $K = \mathbb{R}$

(2) $F(x) = x\sqrt{x} + 2$; $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ — $K = [0 ; +\infty]$

(3) $F(x) = x + \frac{1}{x^2}$; $f(x) = 1 - \frac{2}{x^3}$ — $K = [0, +\infty]$

(4) $F(x) = x\cos x + 56$;
$f(x) = \cos x - x\sin x$ — $K = \mathbb{R}$

(5) $F(x) = \tan x - x$;
$f(x) = \tan^2 x$ — $K =]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$

3.b Dans chacun des cas suivants, f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Déterminer la primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.

(1) $f(x) = 5x^4 + 6$ — $x_0 = 1$, $y_0 = 0$

(2) $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ — $x_0 = -1$, $y_0 = 1$

(3) $f(x) = 1 - \frac{2}{x^3}$ — $x_0 = 2$, $y_0 = -1$

(4) $f(x) = x + 5$ — $x_0 = -2$, $y_0 = 2$

(5) $f(x) = \sin x$ — $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $y_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3.2. Détermination d'une primitive

Recherche de primitives

Nous pouvons utiliser les propriétés qui se déduisent des opérations et des compositions des fonctions dérivables pour rechercher des primitives.

De la propriété de linéarisation de la dérivation, on déduit la propriété suivante :

Propriété

Si **F et G sont des primitives respectives des fonctions f et g sur un intervalle K,** ***alors*** **pour tous nombres réels α et β, la fonction $(\alpha F + \beta G)$ est une primitive sur K de la fonction $(\alpha f + \beta g)$.**

Exemple

La fonction : $x \mapsto \frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x + 1999$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \mapsto x^3 + 3x^2 - 5x + 2$.

De la technique de dérivation de la puissance n^e d'une fonction, on déduit les démarches suivantes :

f est une fonction dérivable sur un intervalle K, f' sa dérivée, n un nombre entier naturel non nul.

- **f^2 est dérivable sur K et $(f^2)' = 2ff'$;** **donc $\frac{1}{2} f^2$ est une primitive sur K de ff'.**
- **f^{n+1} est dérivable sur K et $(f^{n+1})' = (n+1)f^n f'$;** **donc $\frac{1}{n+1} f^{n+1}$ est une primitive sur K de $f^n f'$.**

Exemple 1

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sin^2 x \cos x$.
f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$; elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$.
Déterminons une de ces primitives.

Désignons par u la fonction sinus. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $u'(x) = \cos x$
donc : $f = u^2u'$,
or une primitive de u^2u' est $\frac{1}{3}u^3$;
donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est la fonction : $x \mapsto \frac{1}{3}\sin^3 x$.

f est une fonction dérivable sur un intervalle K qui ne s'annule pas sur K, f' sa dérivée, n un nombre entier naturel plus grand que 1.

- **$\frac{1}{f}$ est dérivable sur K et $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$;** **donc $-\frac{1}{f}$ est une primitive sur K de $\frac{f'}{f^2}$.**
- **$\frac{1}{f^{n-1}}$ est dérivable sur K et $\left(\frac{1}{f^{n-1}}\right)' = -\frac{(n-1)f'}{f^n}$;** **donc $\frac{-1}{(n-1)f^{n-1}}$ est une primitive sur K de $\frac{f'}{f^n}$.**

Exemple 2

On donne la fonction rationnelle f définie par : $f(x) = \dfrac{1}{(\frac{1}{3}x - 1)^4}$.

f est une fonction continue sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$; elle admet donc des primitives sur $]-\infty; 3[$ et sur $]3 ; +\infty[$.
Déterminons une primitive sur $]3 ; +\infty[$ de f.

Désignons par u la fonction affine définie par : $u(x) = \frac{1}{3}x - 1$.
Elle est dérivable et ne s'annule pas sur $]3\,;+\infty[$ et : pour tout x élément de $]3\,;+\infty[$, $u'(x) = \frac{1}{3}$

donc : $f = 3\frac{u'}{u^4}$

or une primitive de $\frac{u'}{u^4}$ est $-\frac{1}{3u^3}$;

donc une primitive sur $]3\,;+\infty[$ de f est la fonction : $x \mapsto \dfrac{-1}{\left(\frac{1}{3}x-1\right)^3}$.

■ **De la technique de dérivation de la racine carrée d'une fonction, on déduit la démarche suivante :**

f est une fonction dérivable sur un intervalle K, de dérivée f' strictement positive sur K.

- **$\sqrt{f}$ est dérivable sur K et $(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$; donc** **$2\sqrt{f}$ est une primitive sur K de $\frac{f'}{\sqrt{f}}$.**

Exemple

On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{5}{\sqrt{2x-1}}$.
f est une fonction continue sur $]\frac{1}{2}\,;+\infty[$; elle admet donc des primitives sur $]\frac{1}{2}\,;+\infty[$.
Déterminons une de ces primitives.

Désignons par u la fonction définie par : $u(x) = 2x - 1$;
u est dérivable, strictement positive sur $]\frac{1}{2}\,;+\infty[$ et, pour tout x élément de $]\frac{1}{2}\,;+\infty[$, $u'(x) = 2$

donc : $f = \frac{5u'}{2\sqrt{u}}$

or une primitive de $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ est $\sqrt{u}$;

donc une primitive de f sur $]\frac{1}{2}\,;+\infty[$ est la fonction : $x \mapsto 5\sqrt{2x-1}$.

■ **Plus généralement, de la dérivation d'une fonction composée, on en déduit la démarche suivante :**

f est une fonction dérivable sur un intervalle K et g une fonction dérivable sur un intervalle L tel que f(K) soit inclus dans L, f' la dérivée de f sur K et g' la dérivée de g sur L.

- **$g\circ f$ est dérivable sur K et $(g\circ f)' = f' \times (g'\circ f)$; donc** **$g\circ f$ est une primitive sur K de $(g'\circ f)\times f'$.**

Exemple

On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \cos(2x - \frac{\pi}{3})$.
f est une fonction continue, elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$.
Déterminons une de ces primitives.

- Désignons par u la fonction affine $x \mapsto 2x - \frac{\pi}{3}$ et par v la fonction sinus

donc : $$f = -\frac{1}{2}u' \times (v'\circ u)$$

or une primitive sur $\mathbb{R}$ de $u' \times (v'\circ u)$ est $(v\circ u)$;
donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est la fonction : $x \mapsto \frac{1}{2}\sin(2x - \frac{\pi}{3})$.

- Ici on aurait pu utiliser la méthode suivante :

– on vérifie qu'une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f est de la forme : $x \mapsto a\sin(2x - \frac{\pi}{3}) + b$ $[b \in \mathbb{R}]$;
– on peut alors déterminer la constante a.
En effet, on a : pout tout nombre réel x, $(a\sin(2x - \frac{\pi}{3}) + b)' = 2a\cos(2x - \frac{\pi}{3})$, d'où : $a = \frac{1}{2}$.

Remarques

– Cette méthode de recherche d'une primitive peut être utilisée lorsque l'on connaît la forme de cette primitive.

– Lorsqu'une primitive est déterminée, il est conseillé de procéder à une vérification en déterminant sa dérivée.

Tableau récapitulatif

① **Primitives des fonctions élémentaires**

Fonction f	Une primitive de f	sur l'intervalle
$x \mapsto a \quad [a \in \mathbb{R}]$	$x \mapsto ax$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^r \quad [r \in \mathbb{Q}]$	$x \mapsto \frac{1}{r+1}x^{r+1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^r} \quad [r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{1\}]$	$x \mapsto \frac{-1}{(r-1)x^{r-1}}$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x}$	$]0\,;+\infty[$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \tan x$	$]-\frac{\pi}{2}+k\,;\frac{\pi}{2}+k[$, $[k \in \mathbb{Z}]$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2 x}$	$x \mapsto -\mathrm{cotan}\,x$	$]k\pi\,;\pi+k\pi[$, $[k \in \mathbb{Z}]$

② **Opérations et compositions**

Fonction f	au'	$u'+v'$	$u^r \times u'$	$\frac{u'}{u^r}$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$u'\cos u$	$u'\sin u$
Une primitive sur l'intervalle K	au	$u+v$	$\frac{1}{r+1}u^{r+1}$	$\frac{-1}{(r-1)u^{r-1}}$	$2\sqrt{u}$	$\sin u$	$-\cos u$
Conditions	$a \in \mathbb{R}^*$		$r \in \mathbb{Q}$	$r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{1\}$ u ne s'annule pas sur K	u est strictement positive sur K		

Détermination pratique des primitives

Utilisation directe des tableaux

Exemples

On donne la fonction
$$f : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 5x + \frac{1}{x^2}.$$
Déterminons une primitive F sur $\mathbb{R}_+^*$ de f.

f est égale à la somme de quatre fonctions. Déterminons les primitives de chacune de ces fonctions ; on a ainsi une primitive de f

$\mathrm{F} : x \mapsto \frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{x} + k \quad [k \in \mathbb{R}]$.

On donne la fonction
$$f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$
Déterminons une primitive F sur $\mathbb{R}$ de f.

u est la fonction polynôme définie par : $u(x) = 1 + x^2$,

on constate que : $f = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = (\sqrt{u})'$.

$\mathrm{F} : x \mapsto \sqrt{1+x^2} + k \quad [k \in \mathbb{R}]$.

Linéarisation ou transformation des fonctions trigonométriques

On donne la fonction
$$f : x \mapsto \sin^3 x \times \cos^2 x.$$
Déterminons une primitive sur $\mathbb{R}$ de f.

Soit x un nombre réel, on a :

$$\begin{aligned} f(x) = \sin^3 x \times \cos^2 x &= \sin x \times \sin^2 x \times \cos^2 x \\ &= \sin x \times (1 - \cos^2 x) \times \cos^2 x \\ &= \sin x \times \cos^2 x - \sin x \times \cos^4 x \end{aligned}$$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est donc la fonction :
$$x \mapsto -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + k \quad [k \in \mathbb{R}].$$

On donne la fonction
$$f : x \mapsto \sin x \times \cos 2x.$$
Déterminons une primitive sur $\mathbb{R}$ de f.

Soit x un nombre réel, on a :

$$\begin{aligned} f(x) = \sin x \times \cos 2x &= \frac{1}{2}[\sin(x + 2x) + \sin(x - 2x)] \\ &= \frac{1}{2}[\sin 3x - \sin x] \end{aligned}$$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est donc la fonction :
$$x \mapsto \frac{1}{2}[-\frac{\cos 3x}{3} + \cos x] + k \quad [k \in \mathbb{R}].$$

Décomposition des fractions rationnelles

On donne la fonction
$$f : x \mapsto \frac{x^3 + x^2 + 2x + 1}{x^3(x+1)^2}.$$
Déterminons une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de f.

Décomposons $f(x)$ sous la forme $\frac{a}{x^3} + \frac{b}{(x+1)^2}$.

On a : $$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a}{x^3} + \frac{b}{(x+1)^2} \\ &= \frac{a(x+1)^2 + bx^3}{x^3(x+1)^2} \\ &= \frac{bx^3 + ax^2 + 2ax + a}{x^3(x+1)^2} \end{aligned}$$

d'où : $b = 1$; $a = 1$.

donc, pour tout x élément de $]0 ; +\infty[$,
$$f(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

Une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de f est donc la fonction :
$$x \mapsto \frac{-1}{2x^2} + \frac{-1}{x+1} + k \quad [k \in \mathbb{R}].$$

On donne la fonction
$$f : x \mapsto \frac{x^4 - 3x + 3}{x^4(x-1)}.$$
Déterminons une primitive sur $]1 ; +\infty[$ de f.

Décomposons $f(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^4 - 3x + 3}{x^4(x-1)} \\ &= \frac{x^4 - 3(x-1)}{x^4(x-1)} \\ &= \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^4} \end{aligned}$$

donc, pour tout x élément de $]1 ; +\infty[$,
$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^4}$$

À ce stade de notre étude, nous ne connaissons pas de primitive à la fonction $x \mapsto \frac{1}{x-1}$.
Pour cela nous attendrons le chapitre 4 pour compléter cet exemple.

Exercices

3.c Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f et préciser le plus grand intervalle sur lequel elle est définie.

(1) $f : x \mapsto x^4 - 2x^3$

(2) $f : x \mapsto \frac{5}{x^2}$

(3) $f : x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x^2}$

(4) $f : x \mapsto \frac{1}{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$

(5) $f : x \mapsto (x+2)^3$

(6) $f : x \mapsto x\sqrt{x^2 + 1}$

3.d Dans chacun des cas suivants, déterminer la primitive sur K de la fonction f prenant la valeur y_0 en x_0.

(1) $f(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{2}{(x-3)^2}$

$x_0 = 0$; $y_0 = -1$; $K =]-\infty ; 3[$

(2) $f(x) = -3x + \frac{2}{x^2}$

$x_0 = 1$; $y_0 = 2$; $K =]0 ; +\infty[$

(3) $f(x) = x - 1 + \frac{5}{x^3}$

$x_0 = 0$; $y_0 = 1$; $K =]0 ; +\infty[$

TP Travaux pratiques

TP Démonstration par récurrence

Ce TP a pour objet d'introduire une nouvelle méthode de démonstration.

Exemple

n étant un nombre entier naturel, déterminons la dérivée n^e de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x-a} \quad [a \in \mathbb{R}]$$

- **Détermination des dérivées f', f'', $f^{(3)}$**

Soit x un élément de $\mathbb{R}\setminus\{a\}$

On a : $f(x) = (x-a)^{-1} = \dfrac{1}{x-a}$

$f'(x) = -(x-a)^{-2} = \dfrac{-1}{(x-a)^2}$

$f''(x) = (-1)(-2)(x-a)^{-3} = \dfrac{(-1)^2 \times 1 \times 2}{(x-a)^3}$

$f^{(3)}(x) = (-1)(-2)(-3)(x-a)^{-4} = \dfrac{(-1)^3 \times 1 \times 2 \times 3}{(x-a)^4}$

En continuant ce calcul de proche en proche, il semble que :

pour tout nombre entier naturel n, $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n\, n!}{(x-a)^{n+1}}$. (1)

On veut contrôler cette conjecture lorsque n prend les valeurs : 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; ...
Cependant, il n'est pas possible de contrôler cette conjecture en procédant à une infinité de calculs !

- **Détermination de $f^{(n)}$**

Pour démontrer que (1) est vraie, utilisons un raisonnement appelé ***démonstration par récurrence***.

Soit x un élément de $\mathbb{R}\setminus\{a\}$, n étant un nombre entier naturel différent de 0.

On considère P_n : $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n\, n!}{(x-a)^{n+1}}$

1re étape : établissement de la condition initiale
On vérifie que P_1 est vraie : $f^{(1)}(x) = \dfrac{-1}{(x-a)^2}$

2e étape : démonstration d'un algorithme récurrent
– On suppose que :
pour un nombre entier naturel, P_k est vraie : $f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k\, k!}{(x-a)^{k+1}}$.

– On en déduit alors que P_{k+1} est vraie : $f^{(k+1)}(x) = \dfrac{(-1)^{k+1}\,(k+1)!}{(x-a)^{k+2}}$

On conclut que (1) est vraie.

Principe de la démonstration par récurrence

La démonstration par récurrence comporte deux étapes avant la conclusion.

Pour démontrer que : pour tout nombre entier naturel supérieur à n_0, P_n, on peut procéder comme suit :

1re étape : **établissement de la condition initiale qui est « l'existence d'un héritage ».**
On vérifie que : P_{n_0} est vraie.

2e étape : **démonstration d'un algorithme récurrent ; c'est « le principe d'un droit de succession »**
On établit que : si pour un nombre entier naturel k supérieur à n_0, P_k est vraie, alors P_{k+1} est vraie.

Conclusion : pour tout nombre entier naturel n supérieur à n_0, P_n.

Exercices

ENTRAÎNEMENT

Dérivation

Dérivabilité en x_0

1 On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+5x}-1}{x}$.

1. Démontrer que f admet un prolongement par continuité en 0.
2. Ce prolongement par continuité est-il dérivable en 0 ? Si oui, quel est son nombre dérivé en 0 ?

Tangente

2 a est un nombre réel et f_a est la fonction définie par : $f_a(x) = \dfrac{x^3+x^2+x+a}{x^2}$.

a) Déterminer les intervalles sur lesquels f_a est dérivable.
b) Calculer f'_a.
c) Déterminer a pour que la représentation graphique de f_a ait, en son point d'abscisse -1, une tangente parallèle à la droite d'équation $y = 0$.

Dérivabilité à gauche et à droite en x_0

3 Dans chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité à gauche et la dérivabilité à droite en x_0.

(1) $f(x) = |x^2-1|$ $\qquad x_0 = 1$

(2) $f(x) = \dfrac{x-2}{2-|x|}$ $\qquad x_0 = 0$

(3) $\begin{cases} \text{pour } x \in [0\,;1], & f(x) = 5x^2-3 \\ \text{pour } x \in [1\,;3], & f(x) = 3x-1 \end{cases}$ $\qquad x_0 = 4$

(4) $\begin{cases} \text{pour } x \in [0\,;1], & f(x) = 5x^2-3 \\ \text{pour } x \in [1\,;3], & f(x) = 3x-1 \end{cases}$ $\qquad x_0 = 4$

Tangente verticale

4 Dans chacun des cas suivants, $(\mathscr{C})$ est la représentation graphique de f.
Étudier l'existence de tangentes verticales au point M_0 d'abscisse x_0 à la courbe $(\mathscr{C})$.

(1) $f(x) = \sqrt{1-x}$ $\qquad x_0 = 1$

(2) $\begin{cases} \text{pour } x \in [0\,;+\infty], & f(x) = \sqrt{x} \\ \text{pour } x \in [-\infty\,;0], & f(x) = \sqrt{-x} \end{cases}$ $\qquad x_0 = 0$

Dérivabilité sur un intervalle

5 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = |x(x-1)|$.
Étudier la dérivabilité de f.
Dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J), construire la représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$ de f et les tangentes (éventuellement la tangente à gauche et la tangente à droite) à $(\mathscr{C}_f)$ aux points O et I.

6 On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$.
Justifier que f est définie sur $[-1\,;1]$ et étudier la dérivabilité de f sur $[-1\,;1]$.
On désigne par $(\mathscr{C}_f)$ la représentation graphique de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).
Préciser les tangentes (éventuellement la tangente à gauche et la tangente à droite) aux points de $(\mathscr{C}_f)$ d'abscisses : -1 ; 1 ; $-\dfrac{1}{2}$; 0.

Fonction dérivée

Détermination de la dérivée

7 Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée de la fonction f après avoir déterminé son ensemble de définition et l'ensemble sur lequel elle est dérivable.

(1) $f : x \mapsto \dfrac{2x^2+5x-12}{7x-1}$ $\qquad$ (2) $f : x \mapsto x + \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$

(3) $f : x \mapsto \dfrac{1}{(3x-8)^3}$ $\qquad$ (4) $f : x \mapsto \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

8 Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée de la fonction f après avoir déterminer son ensemble de définition et l'ensemble sur lequel elle est dérivable.

(1) $f : x \mapsto \sin x + \cos x$ $\qquad$ (2) $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sin x}$

(3) $f : x \mapsto \dfrac{\sin x - 1}{1+\sin x}$ $\qquad$ (4) $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2(x)}$

9 Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée, quand elle existe, de f sur l'intervalle K.

(1) $f : x \mapsto \dfrac{\sin x+1}{\sin x-1}$ $\qquad K =]0\,;\frac{\pi}{6}[$

(2) $f : x \mapsto \dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}$ $\qquad K =]\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{2}[$

Dérivées successives

10 Dans chacun des cas suivants, déterminer les trois premières dérivées de la fonction f.

(1) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ $\qquad$ (2) $f : x \mapsto 2x^5 - 4x^3 + 2$

(3) $f : x \mapsto \dfrac{2x+5}{x+1}$ $\qquad$ (4) $f : x \mapsto \dfrac{4x-5}{3x-1}$

11 Dans chacun des cas suivants, déterminer les deux premières dérivées de la fonction f.

(1) $f : x \mapsto \sin x$ $\qquad$ (2) $f : x \mapsto \cos x$

(3) $f : x \mapsto x\sqrt{x}$ $\qquad$ (4) $f : x \mapsto \cos 2x$

Dérivée d'une fonction composée

12 Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée de la fonction f.

(1) $f : x \mapsto \sin(x-x^2)$ $\qquad$ (2) $f : x \mapsto \cos(x^2+3x)$

(3) $f : x \mapsto \sin(3x - \frac{\pi}{4})$ $\qquad$ (4) $f : x \mapsto \cos^2(3x+\frac{\pi}{4})$

(5) $f : x \mapsto \sqrt{3x^4+7}$ $\qquad$ (6) $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

(7) $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ (8) $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+x^2}{x}}$

(9) $f : x \mapsto \sqrt{\sin x}$ (10) $f : x \mapsto \sqrt{1-\sin x}$

(11) $f : x \mapsto \sqrt{\cos^2 x - 1}$ (12) $f : x \mapsto \dfrac{2\cos x + 1}{\sqrt{\cos x - 1}}$

Dérivée de fonctions réciproques

13 On considère la fonction

$$f :]0\,;\frac{\pi}{2}] \to [1\,;+\infty[$$
$$x \mapsto \frac{1}{\sin x}$$

Démontrer que f est une bijection.

Calculer le nombre dérivé en $\frac{2}{\sqrt{3}}$ de la fonction réciproque f^{-1}.

14 On considère la fonction

$$f : [0\,;\frac{\pi}{2}] \to [0\,;1]$$
$$x \mapsto \cos x$$

Démontrer que f est une bijection.

Calculer le nombre dérivé en $\frac{\sqrt{3}}{2}$ de la fonction réciproque f^{-1}.

Construire la représentation graphique $(\mathscr{C}')$ de f^{-1} et la tangente à $(\mathscr{C}')$ au point d'abscisse $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Sens de variation d'une fonction

15 Dans chacun des cas suivants, étudier les variations de la fonction f puis préciser ses extremums.

(1) $f : x \mapsto x^3 - 3x + 2$ (2) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$

(3) $f : x \mapsto \dfrac{x^2-9}{x^2+9}$ (4) $f : x \mapsto x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$

Dérivée et inégalité

16 Pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, appliquer les inégalités des accroissements finis à la fonction sinus sur $[0\,;x]$.

En déduire que : pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $0{,}85 < \sin x < x$.

Primitives

Détermination d'une primitive

17 Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.

(1) $f(x) = x^3 + x^2 + 3$ (2) $f(x) = (2x-1)^3$

(3) $f(x) = (-2x+3)(x-1)$ (4) $f(x) = x^4 + x^2 - 1$

(5) $f(x) = 5(2x+1)^{14}$ (6) $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 1)^3$

18 Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives sur l'intervalle K de la fonction f.

(1) $f(x) = x^3 - x^2 + \dfrac{1}{x^2} - 2$ $\quad$ $K =]0\,;+\infty[$

(2) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ $\quad$ $K =]1\,;+\infty[$

(3) $f(x) = \dfrac{2x^3 + 3x^2 + 4}{x^2}$ $\quad$ $K =]0\,;+\infty[$

(4) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x^4}$ $\quad$ $K =]0\,;+\infty[$

(5) $f(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^2}$ $\quad$ $K =]-\frac{1}{2}\,;+\infty[$

19 Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives sur l'intervalle K de la fonction f.

(1) $f(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x}}$ $\quad$ $K =]0\,;+\infty[$

(2) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ $\quad$ $K =]1\,;+\infty[$

(3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x}$ $\quad$ $K =]0\,;+\infty[$

(2) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2x+1}}$ $\quad$ $K =]-\frac{1}{2}\,;+\infty[$

20 Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f, sur l'intervalle K.

(1) $f(x) = \sin x \cos^3 x$ $\quad$ $K = \mathbb{R}$

(2) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}$ $\quad$ $K =]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$

(3) $f(x) = \sin^3 x \cos x$ $\quad$ $K = \mathbb{R}$

(4) $f(x) = \sin 2x \cos^2 2x$ $\quad$ $K = \mathbb{R}$

21 Dans chacun des cas suivants, déterminer pour la fonction définie ci-dessous, la primitive sur l'intervalle K qui prend la valeur y_0 en x_0.

(1) $f(x) = (x-1)^4$ $\quad$ $x_0 = 2\,;\,y_0 = 0\,;\,K = [0\,;+\infty[$

(2) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^3}$ $\quad$ $x_0 = 0\,;\,y_0 = 0\,;\,K =]-\infty\,;1[$

22 Dans chacun des cas suivants, déterminer pour la fonction f définie ci-dessous, la primitive sur l'intervalle K qui prend la valeur y_0 en x_0.

(1) $f(x) = \dfrac{x\sin x + \cos x}{x^2}$ $\quad$ $x_0 = y_0 = 1\,;\quad K =]0\,;+\infty[$

(2) $f(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{x^2}$ $\quad$ $x_0 = y_0 = 1\,;\quad K =]0\,;+\infty[$

APPROFONDISSEMENT

Dérivée – Tangente

23 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + 1}.$$

a et b étant deux nombres réels.

1. Déterminer a et b pour que la tangente (T) à la représentation graphique $(\mathscr{C})$ de la fonction f, au point d'abscisse 0, ait pour équation : $y = 3x + 2$.

2. Préciser la position de (T) par rapport à $(\mathscr{C})$.

3. Étudier les variations de f.

24 **1.** Démontrer que les représentations graphiques des fonctions : $x \mapsto \frac{1}{8}x^2 + 5$ et $x \mapsto \frac{2}{x}$ ont une tangente commune.

2. Déterminer une équation de cette tangente commune.

3. Combien y a-t-il de solutions ?

25 Déterminer, de deux manières, la dérivée de la fonction : $x \mapsto \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x$.

26 Déterminer, de deux manières, la dérivée de la fonction : $x \mapsto \sin^6 x + \cos^6 x + 2\sin^3 x \cos^3 x$.

27 Dans chacun des cas suivants, déterminer m pour que la fonction f soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$(1) \begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty\,;1], \ f(x) = \dfrac{x-1}{x+2} \\ \text{pour } x \in [1\,;+\infty[, \ f(x) = m(x^2-1) \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty\,;0], \ f(x) = \dfrac{x-m}{x+1} \\ \text{pour } x \in [0\,;+\infty[, \ f(x) = x^3+x^2+x-m \end{cases}$$

28 **1.** Démontrer que si une fonction dérivable est paire, sa fonction dérivée est impaire.
2. Donner un exemple.

29 Démontrer que chacune des fonctions suivantes ne prend que des valeurs positives ou nulles sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
(1) $x \mapsto x - \sin x$ (2) $x \mapsto \dfrac{x^2}{2} + \cos x$

Dérivées successives

30 **1.** Déterminer la fonction dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction : $x \mapsto \sin x$. *(On exprimera chacune des dérivées successives sous la forme d'un sinus.)*
2. Même question pour la fonction : $x \mapsto \cos x$.

31 Déterminer la fonction dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction : $x \mapsto \sin^2 x$.

32 **1.** Déterminer les dérivées successives, quand elles existent, de la fonction rationnelle f définie par :
$$f(x) = \frac{1}{x+1}.$$
2. On considère la fonction rationnelle g définie par :
$$g(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2}.$$
Déterminer deux nombres réels a et b tels que :
$$g(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}.$$
En déduire les dérivées successives de g, quand elles existent.

33 On considère la fonction rationnelle définie par : $f(x) = \dfrac{3x^2-x-1}{x-1}$.
On désigne par $(\mathscr{C}_f)$ sa représentation graphique.
1. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse 0.
Existe-t-il un autre point de $(\mathscr{C}_f)$ où la tangente est parallèle à (T) ?
2. $(\mathscr{C}_f)$ admet-elle une tangente de coefficient directeur 0 ? 3 ?
3. Existe-t-il des points de $(\mathscr{C}_f)$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $11x + 4y - 1 = 0$?

Primitives

34 f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = \frac{4-(x-2)^2}{(x-2)^2}.$$
Transformer cette expression, puis déterminer une primitive de f sur un intervalle que l'on déterminera.

35 f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = \frac{3x^2-6x+5}{(x-1)^2}.$$
1. Déterminer deux nombres réels a et b tels que : pour tout nombre réel x différent de 1,
$$f(x) = a + \frac{b}{(x-1)^2}.$$
2. En déduire une primitive de f sur $]1\,;+\infty[$.
3. Déterminer la primitive de f sur $]1\,;+\infty[$ prenant la valeur 8 en 3.

36 On donne une fonction f définie sur $[3\,;+\infty[$ par : $f(x) = (x-3)\sqrt{x-3}$.
1. Trouver l'ensemble sur lequel f est dérivable et déterminer la dérivée de f.
2. En déduire la primitive sur $]3\,;+\infty[$ de la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x-3}$ prenant la valeur 0 en 5.

37 **1.** Linéariser $\cos^4 x$.
2. Utiliser cette linéarisation pour déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto \cos^4 x$.

38 **1.** Développer $(1-\cos^2 x)^2$.
2. En remarquant que $\sin^5 x = \sin^4 x \sin x$, déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto \sin^5 x$.
3. Utiliser une méthode analogue pour déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto \cos^5 x$.

PROBLÈMES

39 On donne une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 15\cos x + 6\cos 2x + \cos 3x.$$
1. Calculer la dérivée de f.
2. Vérifier que : $\sin 3x = \sin x\,(4\cos^2 x - 1)$.
Utiliser cette relation pour vérifier que :
$$f'(x) = -12\sin x\,(1+\cos x)^2.$$
3. En déduire que $f(x) = 4(1+\cos x)^3 + k$, k étant un nombre réel que l'on déterminera.

40 On considère les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :
$$f(x) = \sin(3x) \quad \text{et} \quad g(x) = 3\sin x - 4\sin^3 x.$$
1. En utilisant les formules de trigonométrie, démontrer que $f = g$.
2. Déterminer f' et g'. En déduire une expression de $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$.

41 n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2, on considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = \frac{1-x^n}{1-x}.$$
1. Déterminer sa dérivée sur $]-\infty\,;1[$ et sur $]1\,;+\infty[$.
2. Démontrer que pour tout nombre réel x différent de 1, $f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$.
3. En déduire une expression de :
$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n-1)x^{n-1}.$$

3 Études de fonctions

Après la mise au point du concept fonction, la représentation graphique de celle-ci nécessitait au préalable des notations commodes.

C'est alors que, grand philosophe et mathématicien, René Descartes, auteur du Discours sur la méthode, a simplifié les notations algébriques, et Gottfried Leibniz les notations du calcul différentiel.

Un grand nombre de mathématiciens apportèrent leur contribution à l'étude des fonctions.

On peut citer Bernoulli, Leibniz...

René Descartes
France – 1596-1650.

Gottfried Wilhem Leibniz
physicien et mathématicien
allemand – 1646-1716.

SOMMAIRE

1 Quelques généralités sur les fonctions

1.1. Propriétés géométriques d'une représentation graphique

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).

En classe de première, nous avons construit certaines représentations graphiques sans étude préalable de ces fonctions. Ce sont les courbes obtenues à partir de courbes connues, à l'aide d'une transformation du plan.

Pour réaliser ces constructions, on a utilisé les propriétés suivantes :

$(\mathscr{C}_f)$ est la représentation graphique d'une fonction f.
La fonction g, dont la représentation graphique est l'image de $(\mathscr{C}_f)$
- **par la symétrie orthogonale d'axe (OI) est définie par : $g(x) = -f(x)$;**
- **par la symétrie orthogonale d'axe (OJ) est définie par : $g(x) = f(-x)$;**
- **par la symétrie centrale de centre O est définie par : $g(x) = -f(-x)$;**
- **par la translation de vecteur $\vec{v}(\alpha\,;\beta)$ est définie par : $g(x) = f(x-\alpha) + \beta$.**

Centre de symétrie

Activité

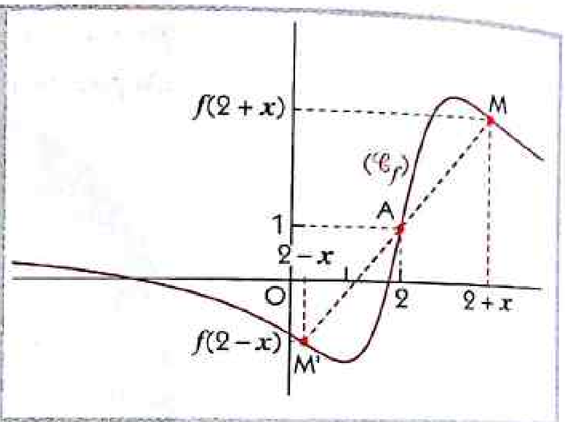
On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 5}{x^2 - 4x + 5}$$

de représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$ ci-contre.

On veut démontrer que le point A(2 ; 1) est un centre de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$. Pour cela, on peut démontrer que la fonction g dont la représentation graphique est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$ est impaire.

En observant le graphique ci-contre, trouver une autre méthode.

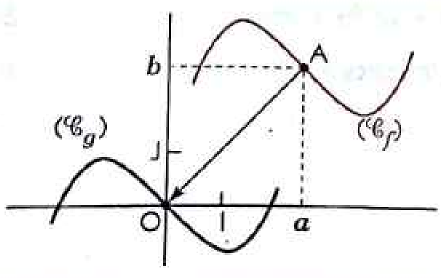


M

Le plan est muni du repère (O, I, J). $(\mathscr{C}_f)$ est la représentation graphique d'une fonction f.
Pour démontrer que le point A(a ; b) est un centre de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$ on peut procéder comme suit :

1^re^ méthode

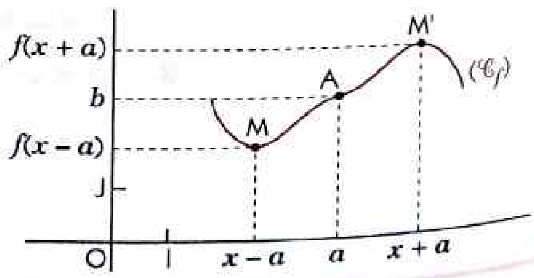
- **on détermine la fonction g dont la représentation graphique est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$, cette fonction g est définie par : $g(x) = f(x + a) - b$;**
- **on démontre que g est impaire.**



2^e^ méthode

- **on vérifie que l'ensemble de définition de f est centré en a, c'est-à-dire :**
  pour tout x élément de $\mathbb{R}$,
  $a - x \in D_f \iff a + x \in D_f$.
- **on vérifie que :**
  pour tout nombre réel x tel que $a + x \in D_f$,

$$\frac{f(a+x) + f(a-x)}{2} = b.$$



■ **Exemple**

Démontrons que le point A(2 ; 3) est un centre de symétrie de la représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction rationnelle définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{x - 2}$.

Première méthode

• La fonction g dont la représentation graphique est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$ est définie par : $g(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

car $\overrightarrow{AO}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$ et $g(x) = f(x - (-2)) + (-3)$.

• g est une fonction impaire ;

donc le point A est un centre de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.

Deuxième méthode

• $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Soit x un nombre réel,

$$2 + x \in D_f \Leftrightarrow 2 - x \in D_f \Leftrightarrow 2 - x \neq 2 \Leftrightarrow x \neq 0$$

• Pour $x \neq 0$, $\dfrac{f(2 + x) + f(2 - x)}{2} = 3$

donc le point A est un centre de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.

Axe de symétrie

■ **Activité**

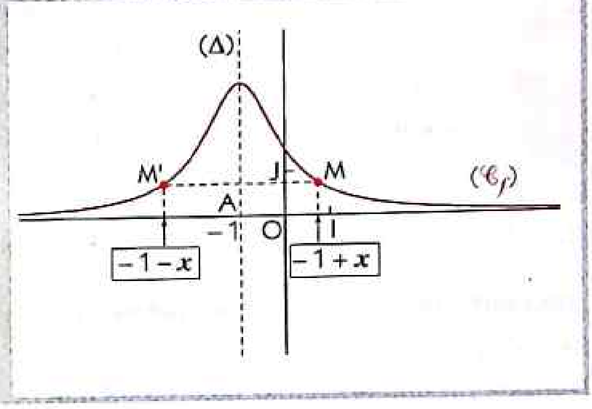
On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{3}{x^2 + 2x + 2}$$

de représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$ ci-contre.

On veut démontrer que la droite (Δ) d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$. Pour cela, on peut démontrer que la fonction g dont la représentation graphique est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$ est paire, A étant le point de coordonnées (– 1; 0).

En observant le graphique ci-contre, trouver une autre méthode.



M

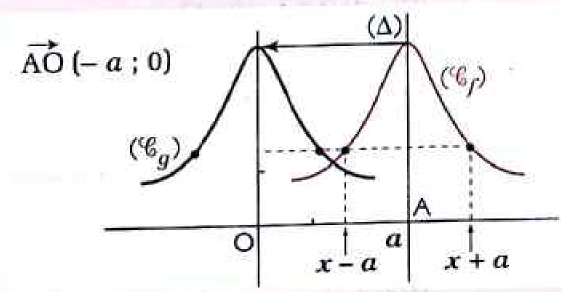
Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
$(\mathscr{C}_f)$ est la représentation graphique d'une fonction f.
Pour démontrer que la droite (Δ) d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$ on peut procéder comme suit :

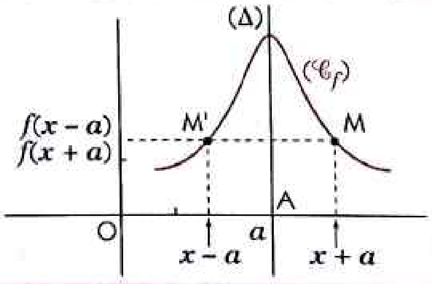
1re méthode

– on détermine la fonction g dont la représentation graphique est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$, A étant le point de coordonnée (a ; 0). Cette fonction g est définie par : $g(x) = f(x + a)$;
– on démontre que g est paire.

2^e méthode

– on vérifie que l'ensemble de définition de f est centré en a, c'est-à-dire :
pour tout x élément de $\mathbb{R}$,
$a - x \in D_f \Leftrightarrow a + x \in D_f$;
– on vérifie que :
pour tout nombre réel x tel que $a + x \in D_f$,
$f(a + x) = f(a - x)$.





■ **Exemple**

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). On considère la fonction polynôme f définie par $f(x) = x^2 - 4x + 7$. On désigne par $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique. Démontrons que la droite (Δ) d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de $(\mathscr{C})$.

Première méthode

A est le point de coordonnées $(2 ; 0)$.

- La fonction g dont la représentation graphique est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$ est définie par : $g(x) = x^2 + 3$, car $\overrightarrow{AO}\,(-2 ; 0)$ et $g(x) = f(x - (-2))$.
- g est une fonction paire ; donc la droite (Δ) est un axe de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.

Deuxième méthode

- $D_f = \mathbb{R}$, donc D_f est centré en 2.
- Pour tout nombre réel x, $f(x) = (x - 2)^2 + 3$

Pour tout nombre réel x, $f(2 + x) = f(2 - x) = x^2 + 3$,

donc la droite (Δ) est un axe de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.

Représentation graphique d'une fonction périodique

M

Pour reconnaître et étudier une fonction périodique de période T, on peut procéder comme suit :

– on vérifie que : pour tout x élément de D_f, $f(x + T) = f(x)$;

– on choisit un ensemble d'étude E tel que $E = Df \cap K$, K étant un intervalle d'amplitude T ;

– on étudie les variations de la restriction de f à E et on construit sa représentation graphique $(\mathscr{C}_0)$;

– on obtient la représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$ de f en prenant les images de $(\mathscr{C}_0)$ par les translations de vecteurs $\vec{v}_k(kT ; 0)$ $[k \in \mathbb{Z}]$.

■ **Exemple**

Le plan est muni du repère (O, I, J). E(x) désigne la partie entière de x. On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = (x - E(x))^2$.

Démontrons que f est périodique de période 1 et construisons sa représentation graphique $(\mathscr{C})$.

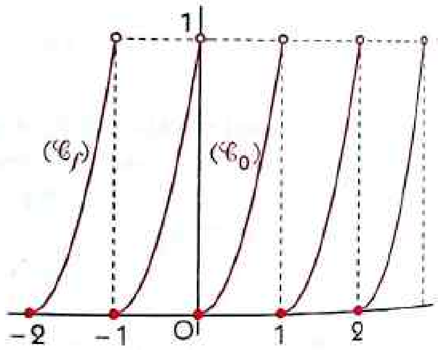
Soit x un nombre réel.

Il existe un nombre entier relatif n tel que :

$$n \leq x < n + 1 \quad \Leftrightarrow \quad n = E(x)$$

donc : $n + 1 \leq x + 1 < n + 2 \quad \Leftrightarrow \quad E(x + 1) = E(x) + 1$

d'où : $f(x + 1) = [x + 1 - E(x + 1)]^2 = [x + 1 - E(x) - 1]^2 = f(x)$.



Désignons par $(\mathscr{C}_0)$ la représentation graphique de la restriction f_0 de f à l'intervalle $[0 ; 1[$.

f_0 est définie sur $[0 ; 1[$ par : $f_0(x) = x^2$.

On obtient la représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$ de f en prenant les images de $(\mathscr{C}_0)$ par les translations de vecteurs $k\,\overrightarrow{OI}$ $[k \in \mathbb{Z}]$.

Exercices

1.a Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J). On considère la fonction rationnelle f définie par : $f(x) = \dfrac{5x + 7}{3x - 2}$.

Démontrer que le point A de coordonnées $\left(\frac{2}{3} ; \frac{5}{3}\right)$ est le centre de symétrie de la représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$ de f.

1.b Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J). On considère la fonction polynôme f définie par : $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

Démontrer que la droite (D) d'équation $x = 3$ est un axe de symétrie de la représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$ de f.

1.c Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J). On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \cos\left(\frac{2x}{3} + \frac{\pi}{2}\right)$.

Démontrer que f est périodique de période 3π.

1.2. Branches infinies d'une représentation graphique

Asymptotes

Tableau récapitulatif

Le plan est muni du repère (O, I, J). ($\mathscr{C}$) est la représentation graphique d'une fonction f.

La droite (D) d'équation $x = a$ est une *asymptote verticale* à ($\mathscr{C}$)

si et seulement si

$$\lim_{x \to a} |f(x)| = +\infty$$

ou

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} |f(x)| = +\infty$$

ou

$$\lim_{\substack{x \to a \\ >}} |f(x)| = +\infty$$

La droite (D) d'équation $x = b$ est une asymptote horizontale à ($\mathscr{C}$) en $+\infty$ (resp. $-\infty$)

si et seulement si

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - b] = 0$$

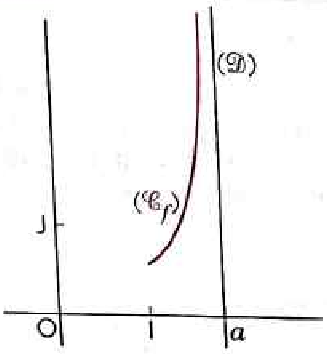
(resp. $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - b] = 0$)

La droite (D) d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à ($\mathscr{C}$) en $+\infty$ (resp. $-\infty$)

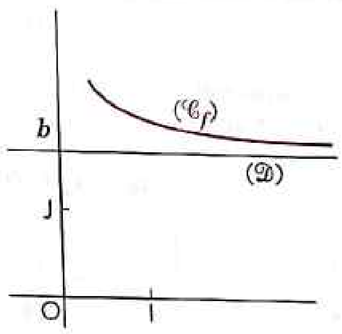
si et seulement si

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

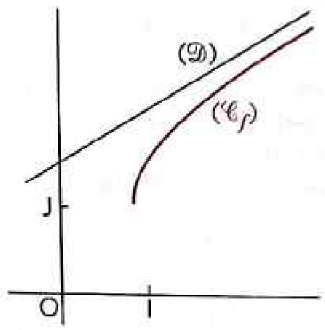
(resp. $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$)



$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} |f(x)| = +\infty$$



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$



$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

Remarque

L'équivalence logique suivante donne deux techniques qui permettent de reconnaître que la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique en $+\infty$ de la représentation graphique de la fonction f.

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \iff \lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = b.$$

Exemples

Démontrons que la représentation graphique ($\mathscr{C}$) de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x - 3}$ d'ensemble de définition $\mathbb{R}\setminus\{3\}$, admet pour asymptote verticale la droite d'équation $x = 3$ et pour asymptote oblique la droite d'équation $y = x - 1$.

Asymptote verticale

On a : $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 3 \\ <}} |f(x)| = +\infty$

Par conséquent, ($\mathscr{C}$) admet une asymptote verticale, la droite d'équation : $x = 3$.

Asymptote oblique

On a : $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} |f(x)| = \lim_{x \to +\infty} |f(x)| = +\infty$

et : $f(x) - (x - 1) = \dfrac{2}{x - 3}$;

or : $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x - 1)] = 0.$

Par conséquent, ($\mathscr{C}$) admet une asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$, la droite d'équation : $y = x - 1$.

Démontrons que la représentation graphique (𝒞) de la fonction $g : x \mapsto \sqrt{4x^2+1} + 2x$ d'ensemble de définition $\mathbb{R}$, admet pour asymptote horizontale la droite d'équation $y = 0$ et pour asymptote oblique, la droite d'équation $y = 4x$.

Asymptote horizontale

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{\sqrt{4x^2+1} - 2x} = 0.$

Par conséquent, (𝒞) admet une asymptote horizontale en $-\infty$, la droite d'équation : $y = 0$.

Asymptote oblique

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{2x^2+1} + 2x) = +\infty$

et : $g(x) - 4x = \sqrt{2x^2+1} - 2x = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2+1} + 2x}$

or : $\lim\limits_{x \to +\infty} [g(x) - 4x] = 0.$

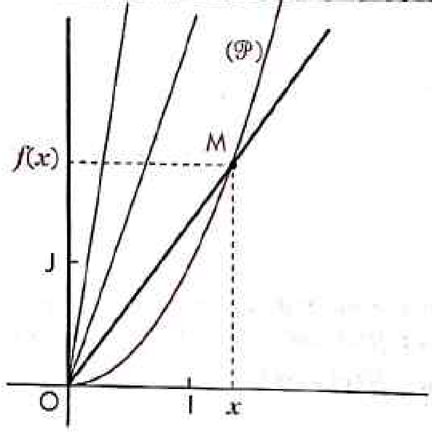
Par conséquent, (𝒞) admet une asymptote oblique en $+\infty$, la droite d'équation : $y = 4x$.

Branches paraboliques

Le plan est muni du repère (O, I, J).

Exemples de deux cas simples

Considérons la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$
$x \mapsto x^2$
de représentation graphique l'arc de parabole (𝒫) ci-dessous. M étant un point de (𝒫) d'abscisse x non nul, déterminons la position limite de la droite (OM) lorsque x tend vers $+\infty$.



Notons que : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

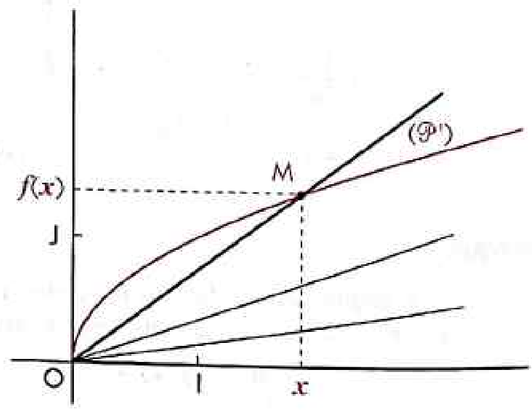
Le coefficient directeur de la droite (OM) est $\dfrac{f(x)}{x}$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$;

donc : la position limite de la droite (OM) est (OJ).

On dit que (𝒞) admet une **branche parabolique de direction (OJ).**

Considérons la fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$
$x \mapsto \sqrt{x}$
de représentation graphique l'arc de parabole (𝒫') ci-dessous. M étant un point de (𝒫') d'abscisse x non nul, déterminons la position limite de la droite (OM) lorsque x tend vers $+\infty$.



Notons que : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Le coefficient directeur de la droite (OM) est $\dfrac{f(x)}{x}$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$;

donc : la position limite de la droite (OM) est (OI).

On dit que (𝒞) admet une **branche parabolique de direction (OI).**

Exemples d'une autre situation

Considérons la fonction $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$
$x \mapsto \dfrac{1}{4}x + \sqrt{x}$
de représentation graphique (𝒞) ci-dessous. M étant un point de (𝒞) d'abscisse x non nul, déterminons la position limite de la droite (OM) lorsque x tend vers $+\infty$.
(𝒞) admet-elle une asymptote oblique ?

Notons que : $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.

Le coefficient directeur de la droite (OM) est $\dfrac{f(x)}{x}$.

et on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = \dfrac{1}{4}$;

La position limite de la droite (OM) est la droite (D) : $y = \dfrac{1}{4}x$.

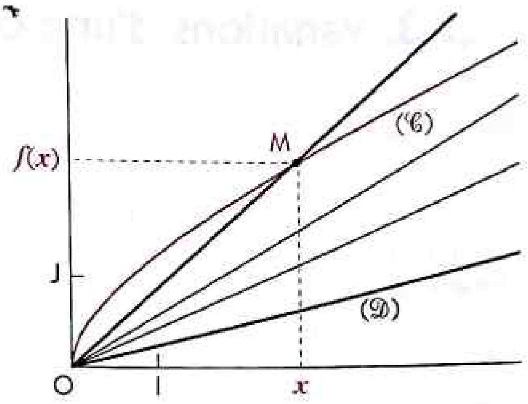
On admet que,

si ($\mathscr{C}$) avait une asymptote oblique, celle-ci aurait pour coefficient directeur $\dfrac{1}{4}$, donc pour équation : $y = \dfrac{1}{4}x + b$.

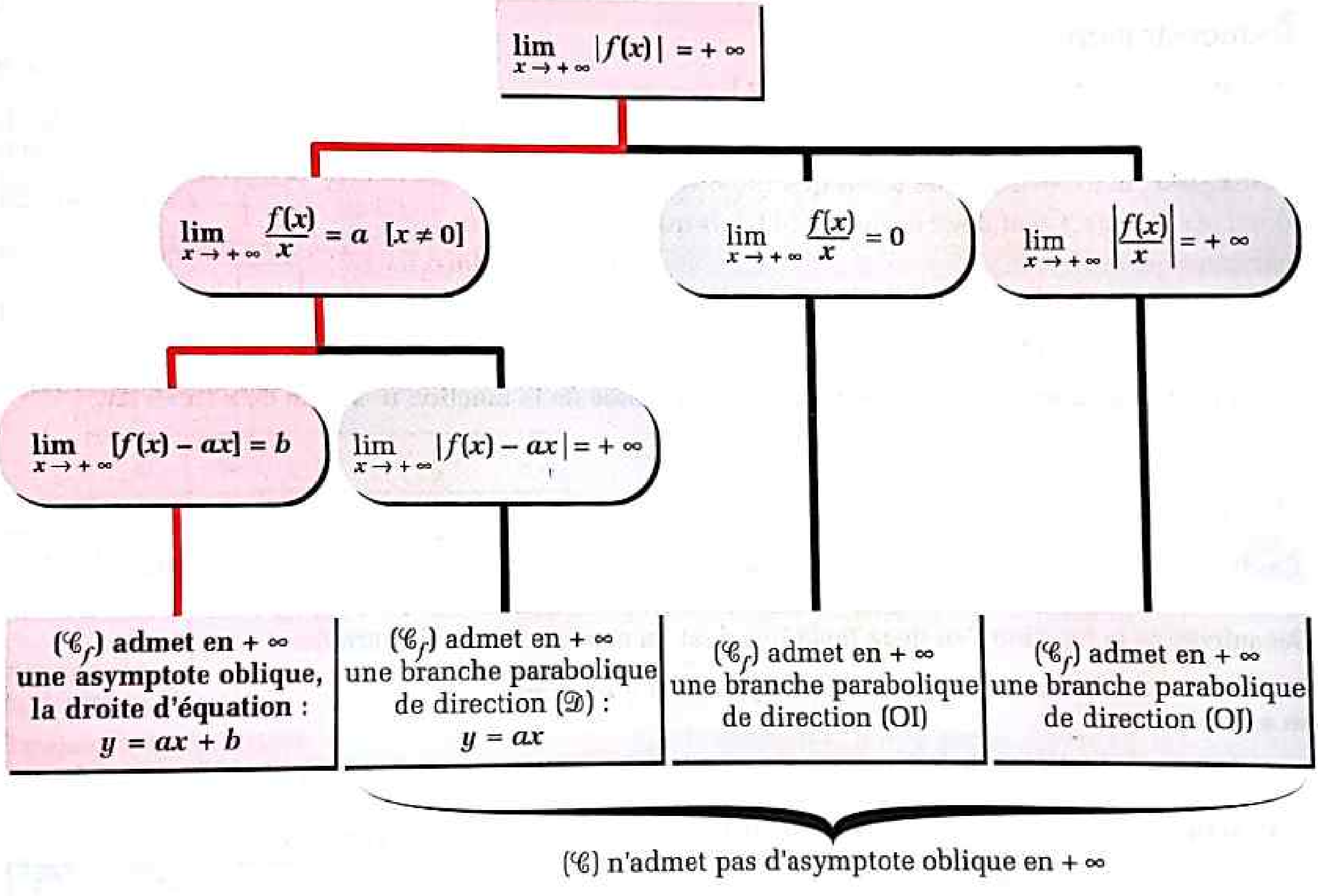
Or : $\lim\limits_{x \to +\infty} [h(x) - (\dfrac{1}{4}x + b)] = \lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x} - b) = +\infty$.

donc ($\mathscr{C}$) n'admet pas une asymptote oblique.

On dit que ($\mathscr{C}$) admet une **branche parabolique de direction (D) d'équation** $y = \dfrac{1}{4}x$.



Organigramme d'étude d'une branche infinie



On obtient un organigramme similaire en $-\infty$.

Exercices

1.d Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J). On considère la fonction rationnelle f définie par : $f(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{(x + 2)^2}$.

Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 4$ est une asymptote horizontale pour la représentation graphique ($\mathscr{C}_f$) de f.

1.e Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J). On considère la fonction rationnelle f définie par : $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x + 1}$.

Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - 1$ est une asymptote pour la représentation graphique ($\mathscr{C}_f$) de f. Par ailleurs ($\mathscr{C}_f$) admet une asymptote verticale ; donner son équation.

1.3. Variations d'une composée de fonctions monotones

Propriétés

v est une fonction définie sur un intervalle L ;
u une fonction définie sur un intervalle K et à valeurs dans L.

Si u et v sont strictement monotones et ont le même sens de variation,	Si u et v sont strictement monotones et ont des sens de variation différents,
alors $v \circ u$ est strictement croissante sur K	alors $v \circ u$ est strictement décroissante sur K

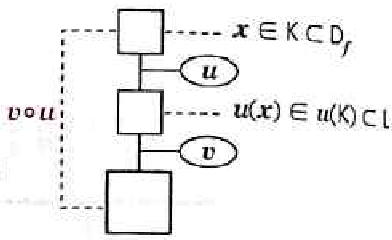
Cas particulier

u étant une fonction strictement monotone sur un intervalle K et α un nombre réel, la fonction αu est strictement monotone sur K. Plus précisemment,

– si α est positif, alors αu et u ont le même sens de variation ;
– si α est négatif, alors αu et u ont des sens de variation différents.

Démonstration

- Supposons u strictement croissante sur L ;
  v strictement décroissante sur K et à valeurs dans L.



Soit x_1 et x_2 deux éléments de K tels que : $x_1 < x_2$
donc $u(x_1)$ et $u(x_2)$ sont deux éléments de L tels que : $u(x_1) < u(x_2)$
par conséquent : $v[u(x_1)] > v[u(x_2)]$

- On examine de même tous les autres cas.
- On peut remarquer que la fonction αu est la composée de la fonction u suivie de $v : x \mapsto \alpha x$.

Exemple 1

Étudions les variations sur $[\frac{\pi}{8} ; \frac{5\pi}{8}]$ de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{4})$.

Décomposons la fonction f en deux fonctions dont on connaît le sens de variation.
En effet, u étant la fonction linéaire définie par : $u(x) = 2x - \frac{\pi}{4}$),
on a : $f = \sin \circ u$;
Des tableaux de variation de la fonction sinus et de la fonction u, on déduit celui de la fonction f.

Fonction u

x	$-\infty$	$\frac{\pi}{8}$		$\frac{3\pi}{8}$		$\frac{5\pi}{8}$	$+\infty$
$2x - \frac{\pi}{4}$	↗	0	↗	$\frac{\pi}{2}$	↗	π	↗

Fonction sinus

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin x$	0	↗	1	↘	0

Fonction f

x	$\frac{\pi}{8}$		$\frac{3\pi}{8}$		$\frac{5\pi}{8}$
$f(x)$	0	↗	1	↘	0

Exemple 2

Fonction f

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		↗	β	↘	

Fonction $-2f$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$-2f(x)$		↘	-2β	↗	

Fonction $5f$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$5f(x)$		↗	5β	↘	

2 Exemples d'études de fonctions

2.1. Plan d'étude d'une fonction

1 – Variations de f	2 – Représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$	3 – Propriétés graphiques de f
Ensemble de définition Ensemble d'étude – parité – périodicité Limites Dérivée – détermination de f' – signe de f' Tableau de variation	Points et droites remarquables – asymptotes – tangentes Construction de $(\mathscr{C}_f)$ – table de valeurs – esquisse de $(\mathscr{C}_f)$ – choix de la fenêtre, du repère et des unités graphiques	Éléments de symétrie – axes de symétrie – centres de symétrie Branches paraboliques

Activités

f et g sont des fonctions rationnelles définies par leurs expressions explicites.
Étudier ces fonctions et contrôler les résultats obtenus avec ceux donnés ci-dessous.

$$f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 5}{x^2 + 1} \qquad\qquad g(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{2x - 4}$$

Ensemble de définition

$D_f = \mathbb{R}$

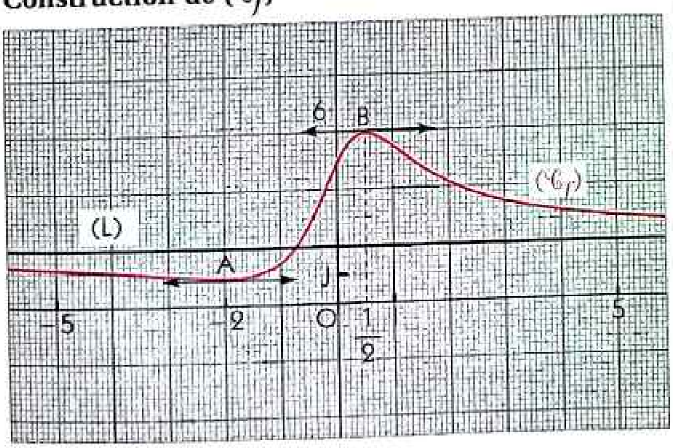
Tableau de variation

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	6	$\searrow$	2

Asymptote
la droite : $y = 2$.

Tangentes horizontales
aux points A et B de $(\mathscr{C}_f)$ d'abscisses respectives -2 et $\frac{1}{2}$.

Construction de $(\mathscr{C}_f)$



Ensemble de définition

$D_g =]-\infty\,;2[\cup]\,2\,;+\infty[$

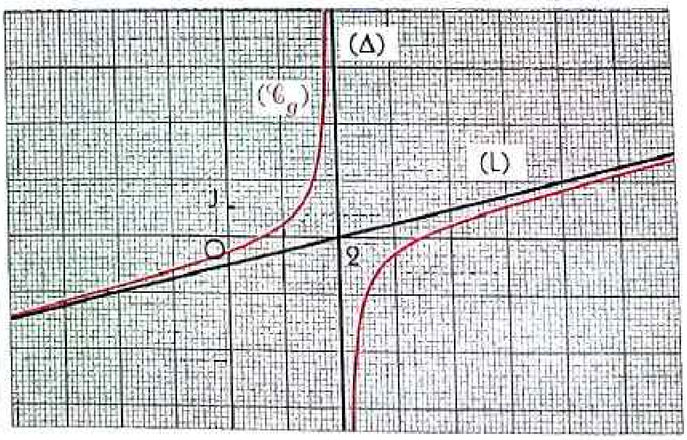
Tableau de variation

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	‖	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Asymptotes
la droite (Δ) : $x = 2$;
la droite (L) : $y = \frac{1}{2}x - 1$.

Centre de symétrie
O' le point d'intersection des asymptotes.

Construction de $(\mathscr{C}_f)$



2.2. Fonctions comportant des radicaux

Exemple

Étudions la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$.

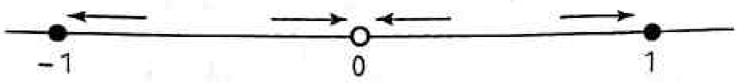
Variations de la fonction f

Ensemble de définition

Soit x un nombre réel.

On a : $x \in D_f \iff 1 - x^2 \geq 0$ *et* $x \neq 0$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1-x^2$	$-$	$\boxed{0}$	$+$	$\boxed{0}$	$-$



(1) $D_f = [-1\,;0[\cup]0\,;1]$

Ensemble d'étude

D_f est symétrique par rapport à 0 et, pour tout x de D_f, $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

(2) La fonction f est impaire. On peut donc étudier f sur $]0\,;1]$.

Limites

Pour tout x élément de D_f, $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} = \dfrac{1}{x}(1+\sqrt{1-x^2})$.

Limite à droite en 0

On a : $\lim\limits_{x \to 0}(1+\sqrt{1-x^2}) = 2$; $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

donc : (3) $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} = +\infty$

Limite en 1

On a : $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 1} \sqrt{1-x^2} = 0$.

donc : (4) $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 1} f(x) = 1$

Dérivée

Dérivabilité en 1

Pour tout x élément de $]0\,;1[$, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} - 1}{x-1} = \dfrac{-(x-1)+\sqrt{1-x^2}}{x(x-1)} = -\dfrac{1}{x} - \dfrac{1+x}{x\sqrt{1-x^2}}$

Or : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-1}{x} = -1 \\ \lim\limits_{x \underset{<}{\to} 1} \dfrac{-1-x}{x\sqrt{1-x^2}} = -\infty \end{cases}$ donc : (5) $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$

Par conséquent f n'est pas dérivable à gauche en 1.

Détermination de la dérivée

On a : (6) pour tout x élément de $]0\,;1[$, $f'(x) = \dfrac{-1-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}$

Tableau de variation

Pour tout x élément de $]0\,;\,1]$,
$f'(x) \leq 0$.

x	0		1	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	‖	
$f(x)$	‖	$+\infty \searrow 1$		

Représentation graphique

Le plan est muni du repère (O, I, J). Désignons par $(\mathscr{C}_f)$ la représentation graphique de f.

Tangente et asymptote

L'étude du sens de variation de f sur $]0\,;\,1]$ permet de déduire les résultats concernant les tangentes et les asymptotes sur $]0\,;\,1]$.

> Sur $]0\,;\,1]$, $(\mathscr{C}_f)$ admet une tangente verticale au point A(1 ; 1) ;
> $(\mathscr{C}_f)$ admet une asymptote verticale, la droite (OJ) [d'après (2)].

Construction de $(\mathscr{C}_f)$

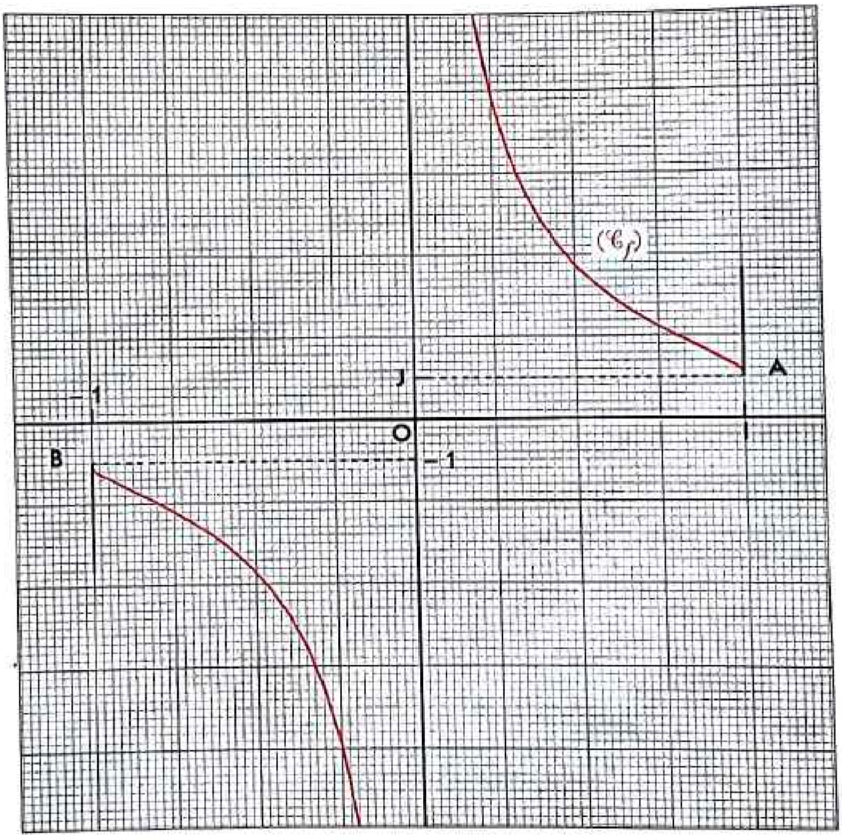
La fonction étant impaire, sa courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ est symétrique par rapport au point O. Par conséquent, pour obtenir $(\mathscr{C}_f)$ on la construit sur $]0\,;\,1]$ puis on procède par une symétrie par rapport à O.

Tableau des valeurs approchées

x	$f(x)$
0,2	9,8
0,4	4,7
0,6	3
0,8	2
1	1

Fenêtre de construction

$x_{\min} = -1$; $y_{\min} = -10$
$x_{\max} = 1$; $y_{\max} = 10$



Propriétés graphiques

Centre de symétrie

> O est un centre de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$ [d'après (2)].

Tangentes verticales

> $(\mathscr{C}_f)$ admet deux tangentes verticales en A(1 ; 1) et en B(– 1 ; – 1) [d'après (5)].

2.3. Fonctions comportant des fonctions trigonométriques

Exemple 1

Étudions la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{1}{2 - \sin x}$.

Variations de la fonction f

Ensemble de définition

Soit x un nombre réel,

on a : $x \in D_f \iff 2 - \sin x \neq 0$.

Or : $-1 \leq -\sin x \leq 1$,

d'où : $1 \leq 2 - \sin x \leq 3$,

donc : $2 - \sin x \neq 0$.

par suite : (1) $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

Ensemble d'étude

On sait que la fonction sinus est périodique et de période 2π, vérifions qu'il en est de même pour f.

Pour tout nombre réel x, $f(x + 2\pi) = \dfrac{1}{2 - \sin(x + 2\pi)} = \dfrac{1}{2 - \sin x} = f(x)$.

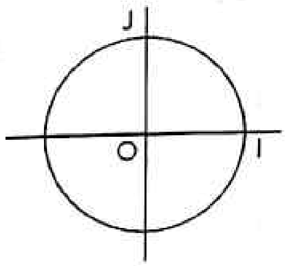
(2) $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est périodique de période } 2\pi\text{. On peut donc étudier } f \text{ sur } [0 ; 2\pi]}$

Dérivée

La fonction f est dérivable et, x étant un élément de D_f, $f'(x) = \dfrac{-(-\cos x)}{(2 - \sin x)^2}$.

d'où : (3) $\boxed{\text{pour tout } x \text{ élément de } D_f,\ f'(x) = \dfrac{\cos x}{(2 - \sin x)^2}}$

Tableau de variation



x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$	1	+	0	−	0	+	1
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↗	1	↘	$\frac{1}{3}$	↗	$\frac{1}{2}$

Représentation graphique

Le plan est muni du repère (O, I, J). Désignons par $(\mathscr{C}_f)$ la représentation graphique de f et par $(\mathscr{C}_0)$ la représentation graphique de la restriction de f à $[0 ; 2\pi]$.

Tangentes

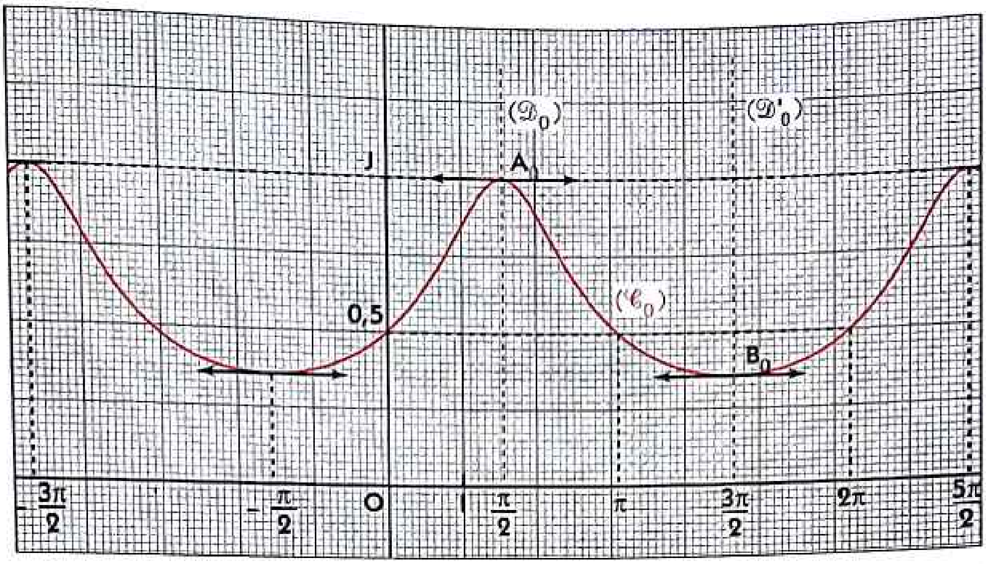
$(\mathscr{C}_0)$ admet deux tangentes horizontales aux points $A_0(\frac{\pi}{2} ; 1)$ et $B_0(\frac{3\pi}{2} ; \frac{1}{3})$ [d'après (3)].

$(\mathscr{C}_f)$ admet des tangentes horizontales aux points $A_k(\frac{\pi}{2} + k2\pi ; 1)$ et $B_k(\frac{3\pi}{2} + k2\pi ; \frac{1}{3})$ $[k \in \mathbb{Z}]$.

■ **Construction de $(\mathscr{C}_0)$ de $(\mathscr{C}_f)$**

Tableau des valeurs approchées

x	$f(x)$
0	0,50
$\frac{\pi}{4}$	0,77
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0,50
$\frac{5\pi}{4}$	0,33
$\frac{3\pi}{2}$	0,36
2π	0,50



Fenêtre de construction

$x_{\min} = -\frac{3\pi}{2}$; $y_{\min} = 0$

$x_{\max} = \frac{5\pi}{2}$; $y_{\max} = 1$

On obtient la représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$ de f en prenant les images de $(\mathscr{C}_0)$ par les translations de vecteurs $k2\pi\ \overrightarrow{OI}$ $[k \in \mathbb{Z}]$.

Propriétés graphiques

■ **Axe de symétrie**

D'après le graphique, il semble que les droites $(\mathscr{D}_0)$ et $(\mathscr{D}'_0)$ d'équations respectives $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$ sont des axes de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$. Contrôlons cette conjecture par le calcul. En effet :

pour tout x élément de D_f, $\frac{\pi}{2} + x \in D_f \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - x \in D_f$ *et* $f(\frac{\pi}{2} + x) = f(\frac{\pi}{2} - x)$;

pour tout x élément de D_f, $\frac{3\pi}{2} + x \in D_f \Leftrightarrow \frac{3\pi}{2} - x \in D_f$ *et* $f(\frac{3\pi}{2} + x) = f(\frac{3\pi}{2} - x)$.

> – Les droites $(\mathscr{D}_0)$ et $(\mathscr{D}'_0)$ sont des axes de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.
> – Les droites $(\mathscr{D}_k)$ et $(\mathscr{D}'_k)$ d'équations respectives $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ $[k \in \mathbb{Z}]$ et $x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi$ $[k \in \mathbb{Z}]$ sont des axes de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$ [d'après (2)].

Exemple 2

Étudions la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$.

Variations de la fonction f

■ **Ensemble de définition**

Soit x un nombre réel,

on a : $x \in D_f \Leftrightarrow 1 - \cos 2x \neq 0$,

or : $1 - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 1$

$\Leftrightarrow 2x = k2\pi$ $[k \in \mathbb{Z}]$

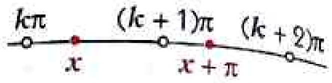
$\Leftrightarrow x = k\pi$ $[k \in \mathbb{Z}]$.

donc : (1) $\boxed{x \in D_f \Leftrightarrow x \neq k\pi \ [k \in \mathbb{Z}]}$

Ensemble d'étude

Périodicité

On sait que la fonction cosinus est périodique et de période 2π.
Vérifions que f est périodique et de période π.



– Démontrons que : $x \in D_f \iff x + \pi \in D_f$

or : $x \in D_f \iff$ il existe un élément k de $\mathbb{Z}$ tel que, $k\pi < x < (k+1)\pi$

d'où : $x \in D_f \iff (k+1)\pi < x + \pi < (k+2)\pi$

par suite : $x \in D_f \iff x + \pi \in D_f$

– On vérifie que : pour tout x élément de D_f, $f(x+\pi) = f(x)$.

Donc : (2) $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est périodique de période } \pi. \text{ On peut donc étudier } f \text{ sur } [-\frac{\pi}{2} ; 0[\cup [0 ; \frac{\pi}{2}]}$

Parité

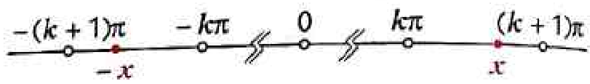
On sait que la fonction cosinus est paire. Vérifions que la fonction f est paire.

– Démontrons que : $x \in D_f \iff -x \in D_f$

or : $x \in D_f \iff$ il existe un élément k de $\mathbb{Z}$ tel que, $k\pi < x < (k+1)\pi$

d'où : $x \in D_f \iff (-k-1)\pi < -x < -k\pi$

par suite : $x \in D_f \iff -x \in D_f$



– On vérifie que : pour tout x élément de D_f, $f(-x) = f(x)$.

Donc : (3) $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est paire.} \quad [0 ; \frac{\pi}{2}] \text{ est un ensemble d'étude}}$

Limites

On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} (1 + \cos 2x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 0} (1 - \cos 2x) = 0 \\ 1 - \cos 2x \geq 0 \end{cases}$ donc : (4) $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} = +\infty}$

Dérivée

Détermination de la dérivée

f est la composée de la fonction $x \mapsto \cos 2x$ et de la fonction rationnelle $x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x}$.

Ces deux fonctions sont dérivables en tout élément de leur ensemble de définition.
Par conséquent, f est dérivable sur chacun des intervalles $]k\pi ; (k+1)\pi]$ $[k \in \mathbb{Z}]$

et on a : (5) $\boxed{\text{pour tout } x \text{ élément de } D_f,\ f'(x) = \dfrac{-4\sin 2x}{(1-\cos 2x)^2}}$

Signe de la dérivée

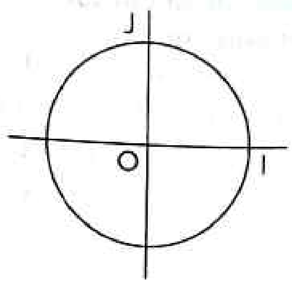
$f'(x)$ est du signe de $-\sin 2x$.

Soit x un élément de D_f tel que : $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$

on a : $0 < 2x \leq \pi$

donc : $\sin 2x \geq 0$.

Par suite : pour tout x élément de $]0 ; \frac{\pi}{2}[$, $f'(x) < 0$.



■ **Tableau de variation**

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$-$	0
$f(x)$	$+\infty \searrow$	0

Représentation graphique

Le plan est muni du repère (O, I, J). Désignons par $(\mathscr{C}_f)$ la représentation graphique de f et par $(\mathscr{C}_0)$ la représentation graphique de la restriction de f à $]0\,;\,\frac{\pi}{2}]$.

■ **Asymptote**

– La droite (OI) est une asymptote verticale à $(\mathscr{C}_0)$ [d'après (4)]
– Toute droite (Δ_k) d'équation $x = k\pi$ $[k \in \mathbb{Z}]$, est une asymptote à $(\mathscr{C}_f)$ [d'après (2)]

■ **Construction de $(\mathscr{C}_0)$ de $(\mathscr{C}_f)$**

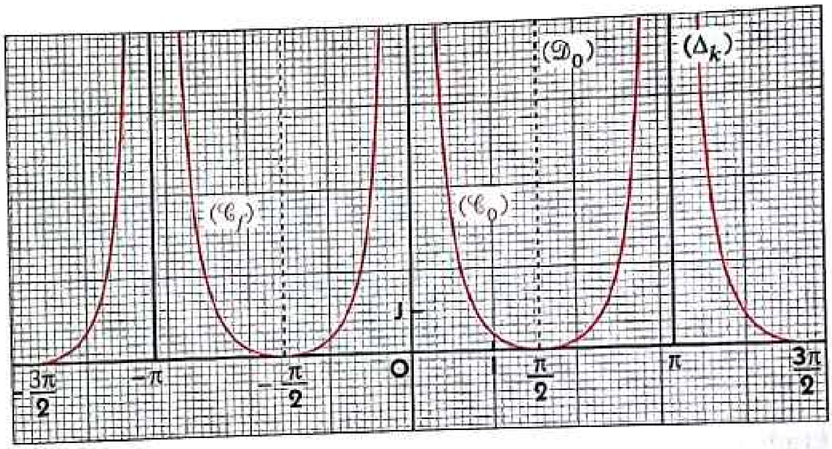
Tableau des valeurs approchées

x	$f(x)$
$\frac{\pi}{6}$	3
$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{3}$	0,33
$\frac{\pi}{2}$	0

Fenêtre de construction

$x_{\min} = -\frac{3\pi}{2}$; $y_{\min} = 0$

$x_{\max} = \frac{3\pi}{2}$; $y_{\max} = 8$



Propriétés géométriques

■ **Axe de symétrie**

– D'après (3) la droite (OJ) est un axe de symétrie pour $(\mathscr{C}_f)$.
– D'après le graphique, il semble que la droite $(\mathscr{D}_0)$ d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.
Contrôlons cette conjecture par le calcul. Pour cela,
on vérifie que : pour tout x élément de D_f, $\frac{\pi}{2} + x \in D_f \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - x \in D_f$ et $f(\frac{\pi}{2} + x) = f(\frac{\pi}{2} - x)$.
La droite $(\mathscr{D}_0)$ d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.

donc : Toute droite (Δ_k) d'équation $x = k\pi$ $[k \in \mathbb{Z}]$, est un axe de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$ [d'après (2)].
Toute droite $(\mathscr{D}_k)$ d'équation $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $[k \in \mathbb{Z}]$, est un axe de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$ [d'après (2)].

■ **Asymptotes**

D'après (4) la droite (OJ) est une asymptote verticale à $(\mathscr{C}_f)$.

donc : Toute droite (Δ_k) d'équation $x = k\pi$ $[k \in \mathbb{Z}]$, est une asymptote verticale $(\mathscr{C}_f)$ [d'après (2)].

TP Travaux pratiques

En général, dans les épreuves du bac, déterminer une asymptote oblique à une courbe (𝒞) revient à vérifier qu'une droite donnée est une asymptote à (𝒞).
Cependant, les exercices commentés des TP1 et TP3 qui sont des applications directes de l'organigramme d'étude d'une branche infinie (page 65) ont pour objectif de satisfaire à des compétences exigibles pour certains concours et examens niveau bac.
L'exercice commenté du TP2 donne une extension à une courbe de la notion d'asymptote.

TP1 Recherche d'asymptotes obliques

Exercice commenté

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{4x^2 + 8x + 5}$.
On désigne par la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère.
Déterminer, si elles existent, les asymptotes obliques de (𝒞).

Étude de la limite en $-\infty$ de la fonction f

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} (4x^2 + 8x + 5) = \lim\limits_{x \to -\infty} (4x^2)$

d'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Étude de la limite en $-\infty$ de : $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$

Soit x un nombre réel strictement négatif.

On a : $f(x) = |x|\sqrt{4 + \dfrac{8}{x} + \dfrac{5}{x^2}}$

$= -x\sqrt{4 + \dfrac{8}{x} + \dfrac{5}{x^2}}$

d'où : $\dfrac{f(x)}{x} = -\sqrt{4 + \dfrac{8}{x} + \dfrac{5}{x^2}}$

donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -2$

Étude de la limite en $-\infty$ de : $x \mapsto f(x) - (-2x)$

On a : $f(x) + 2x = \sqrt{4x^2 + 8x + 5} + 2x$

La somme des limites donne une forme indéterminée.

$$f(x) + 2x = \frac{8x + 5}{\sqrt{4x^2 + 8x + 5} - 2x}$$

Le quotient des limites donne une forme indéterminée.

$$f(x) + 2x = \frac{x(8 + \frac{5}{x})}{-x\sqrt{4 + \frac{8}{x} + \frac{5}{x^2}} - 2x}$$

$$= \frac{8 - \frac{5}{x}}{-\sqrt{4 + \frac{8}{x} + \frac{5}{x^2}} - 2}$$

On obtient : $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) + 2x\right) = -2$

Conclusion

(𝒞) admet en $-\infty$ une asymptote oblique, la droite d'équation : $y = 2x - 2$.

Étude de la limite en $+\infty$ de la fonction f

On obtient de même :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Étude de la limite en $+\infty$ de : $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$

Soit x un nombre réel strictement positif.

On a : $f(x) = |x|\sqrt{4 + \dfrac{8}{x} + \dfrac{5}{x^2}}$

$= x\sqrt{4 + \dfrac{8}{x} + \dfrac{5}{x^2}}$

d'où : $\dfrac{f(x)}{x} = \sqrt{4 + \dfrac{8}{x} + \dfrac{5}{x^2}}$

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$

Étude de la limite en $+\infty$ de : $x \mapsto f(x) - 2x$

On a : $f(x) - 2x = \sqrt{4x^2 + 8x + 5} - 2x$

$$f(x) - 2x = \frac{8x + 5}{\sqrt{4x^2 + 8x + 5} + 2x}$$

On obtient de même :

$$f(x) - 2x = \frac{x(8 + \frac{5}{x})}{x\sqrt{4 + \frac{8}{x} + \frac{5}{x^2}} + 2x}$$

$$= \frac{8 - \frac{5}{x}}{\sqrt{4 + \frac{8}{x} + \frac{5}{x^2}} + 2}$$

On obtient : $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - 2x\right) = +2$

Conclusion

(𝒞) admet en $+\infty$ une asymptote oblique, la droite d'équation : $y = 2x + 2$.

TP2 Recherche de courbes asymptotes

Exercice commenté

f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}$.
On désigne par $(\mathscr{C}_f)$ la représentation graphique de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) ; par g la fonction racine carrée et par $(\mathscr{C}_g)$ sa représentation graphique.
1. Étudier les variations de f.
2. Étudier la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à $(\mathscr{C}_g)$. Donner une interprétation graphique.

1. Étude des variations de f

Dérivée

Soit x un nombre réel strictement positif.

On a : $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-2\sqrt{x}}{2x^2\sqrt{x}}=\dfrac{x\sqrt{x}-2}{2x^2}$

donc : pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^*$, $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^3}-2}{2x^2}$.

Le signe de $f'(x)$ est celui de $\sqrt{x^3}-2$.

La fonction racine carrée et la fonction cube étant strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, on a :

$$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^3}\geq 2$$
$$x^3\geq 2^2$$
$$x\geq 2^{\frac{2}{3}}$$

Limites

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=+\infty$

Tableau de variation

x	0		$2^{\frac{2}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	α	↗	$+\infty$

$$\alpha=f\left(2^{\frac{2}{3}}\right)=\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}$$
$$=2^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}$$

2. Étude de la limite en $+\infty$ de $x\mapsto f(x)-g(x)$

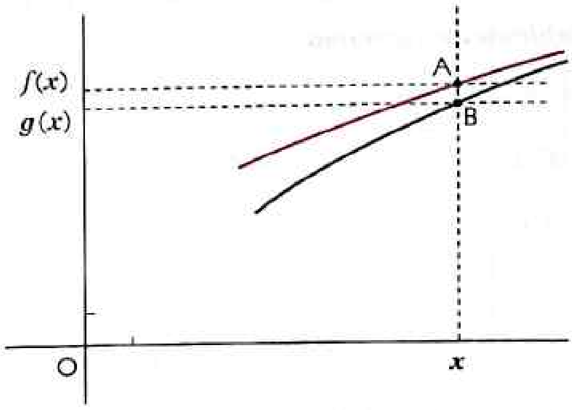
Les fonctions f et g ont toutes deux pour limites $+\infty$ en $+\infty$. Il s'agit de comparer leur comportement en $+\infty$. Pour cela, l'étude du comportement en $+\infty$ de leur écart est un bon indicateur.

Soit x un nombre réel strictement positif.

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{x}.$$

A et B étant respectivement les points de $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ d'abscisse x, on a :

$$AB=f(x)-g(x)>0$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=0$$



On en déduit que, lorsque x devient de plus en plus grand, l'écart AB entre les courbes $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ devient de plus en plus petit.

On dit que $(\mathscr{C}_g)$ est une ***courbe asymptote*** en $+\infty$ à la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

- Tracer $(\mathscr{C}_g)$ et donner une esquisse de $(\mathscr{C}_f)$.

$(\mathscr{C}_g)$ est une courbe connue qui permettra de faire une rapide esquisse de $(\mathscr{C}_f)$ conforme au tableau de variation de f.

TP3 Recherche d'une direction asymptotique

Exercice commenté

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + \sin x$.
On désigne par $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).
1. Démontrer que $(\mathscr{C})$ est située dans une bande limitée par deux droites parallèles (D) et (D').
Déterminer les points de contact de $(\mathscr{C})$ avec ces droites.
2. Démontrer que $(\mathscr{C})$ est symétrique par rapport à O.
3. Étudier les variations de f.
4. Donner une esquisse de $(\mathscr{C})$ sur $[0 ; 2\pi]$.

1. Situation de $(\mathscr{C})$ dans le plan
Encadrement de la fonction f
Soit x un nombre réel.
On a : $\quad -1 \leq \sin x \leq 1$
d'où : $\quad 2x - 1 \leq 2x + \sin x \leq 2x + 1 \quad (1)$
On désigne respectivement par (D) et (D') les droites d'équation : $y = 2x - 1$ et $y = 2x + 1$.
(1) montre que $(\mathscr{C})$ est située dans la bande délimitée par les droites (D) et (D') (de coefficient directeur 2).

Points d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec (D)
$x \in (\mathscr{C}) \cap (D) \Leftrightarrow f(x) = 2x - 1$
$\Leftrightarrow \sin x = -1$
$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + k \times 2\pi \ [k \in \mathbb{Z}]$
$A(\frac{3\pi}{2} ; 3\pi - 1)$ est l'unique point commun de $(\mathscr{C})$ et (D) sur $[0 ; 2\pi]$.

Points d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec (D')
$x \in (\mathscr{C}) \cap (D') \Leftrightarrow f(x) = 2x + 1$
$\Leftrightarrow \sin x = 1$
$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi \ [k \in \mathbb{Z}]$
$B(\frac{\pi}{2} ; \pi + 1)$ est l'unique point commun de $(\mathscr{C})$ et (D') sur $[0 ; 2\pi]$.

2. Étude de la parité
On a : pour tout nombre réel x, $f(-x) = -f(x)$.
f est une fonction impaire donc la courbe $(\mathscr{C})$ est symétrique par rapport au point O.

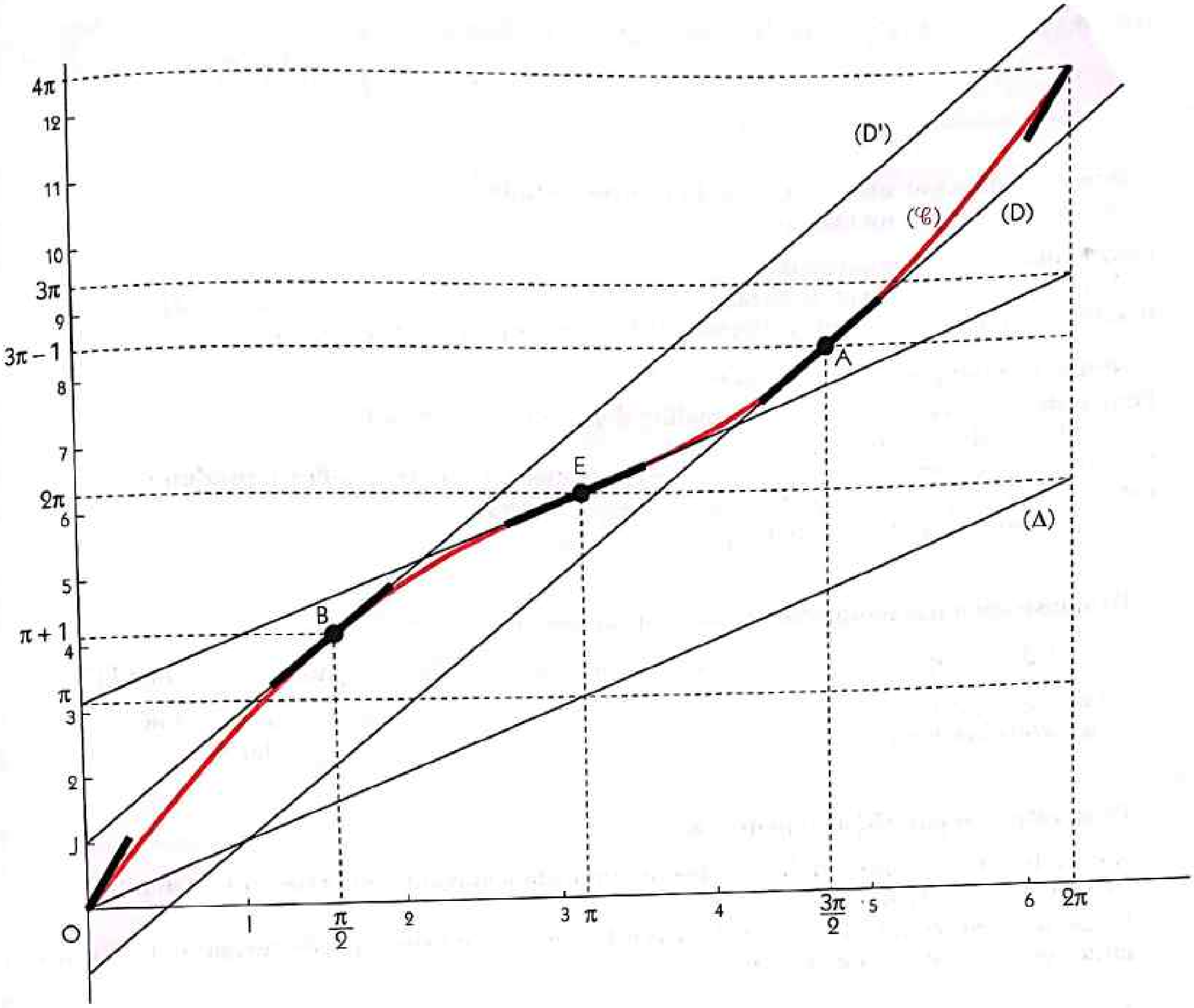
3. Étude des variations de f
Dérivée
Pour tout nombre réel x, $f'(x) = 2 + \cos x$ et $f'(x) > 0$.
car : pour tout nombre réel x, $-1 \leq \cos x \leq 1$.

Limites
On a obtenu,
pour tout nombre réel x, $2x - 1 \leq f(x) \leq 2x + 1$
or : $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} (2x + 1) = +\infty$
donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = = -\infty$.
On a obtenu la limite de f en $-\infty$, en utilisant la parité de f (ou en procèdent comme précédemment)

Tableau de variation

x	$-\infty$		0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π		$+\infty$
$f'(x)$		+	$\boxed{3}$	+	$\boxed{2}$	+	$\boxed{1}$	+	$\boxed{2}$	+	$\boxed{3}$	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\boxed{0}$	↗	$\boxed{\pi + 1}$	↗	$\boxed{2\pi}$	↗	$\boxed{3\pi - 1}$	↗	$\boxed{4\pi}$	↗	$+\infty$

4. Construction de $(\mathscr{C})$ sur $[0 ; 2\pi]$
– On vérifie que 1 est le minimum de f', en effet f'' change de signe en s'annulant pour $x = k\pi$, $[k \in \mathbb{Z}]$.
$(\mathscr{C})$ admet donc un point d'inflexion au point $E(\pi ; 2\pi)$
– $(\mathscr{C})$ est tangente en A et en B respectivement aux droites (D) et (D').



TP4 Types et méthodes de démonstration

L'objet de ce TP est de faire une synthèse sur les différents types et méthodes de démonstrations rencontrés de la classe de sixième à la terminale.
C'est une fiche de référence que l'on pourra compléter tout le long de l'année par des exemples, afin d'en faire un outil de travail de plus en plus performant.

Deux types d'énoncés mathématiques

• On distingue deux types d'énoncés mathématiques liés à une propriété p définie sur un ensemble E.
x_0 étant un élément particulier de E, $p(x_0)$ est une **proposition** ; elle est soit vraie, soit fausse ; on dit qu'elle possède une valeur de vérité.
x étant un élément quelconque de E, $p(x)$ est appelé **fonction propositionnelle** (de la variable x). En général, elle ne fait pas l'objet d'une démonstration car elle ne possède pas une valeur de vérité.

– Les énoncés universels
Ce sont les propositions quantifiées du type : $\underbrace{\textbf{pour tout}}_{\text{quantificateur universel}}$ x élément de E, $p(x)$

– Les énoncés existentiels
Ce sont les propositions quantifiées du type : $\underbrace{\textbf{il existe } x}_{\text{quantificateur existentiel}}$ élément de E, $p(x)$

• On admet que :
– la négation d'un énoncé universel est un énoncé existentiel ;
– la négation d'un énoncé existentiel est un énoncé universel.

Différentes méthodes de démonstrations

TABLEAU RÉCAPITULATIF

① **Démonstration par un exemple ou un contre-exemple**

- **Démonstration par un exemple**

Pour établir un énoncé existentiel,

(1) Il existe x élément de E, p(x)

il suffit d'exhiber un exemple d'élément de E ayant la propriété énoncée p.

- **Démonstration par contre-exemple**

Pour établir un énoncé existentiel, négation d'un énoncé universel :

(2) Il existe x élément de E, non q(x)

il suffit d'exhiber un exemple à cet énoncé existentiel (2) ; on dit que l'on a produit un *contre-exemple* à sa négation, l'énoncé universel ci-dessus :

(3) Pour tout x élément de E, q(x).

② **Démonstration par implication et par contraposition**

$\underbrace{(p) \Rightarrow (q)}$	*si et seulement si*	$\underbrace{\text{non } (q) \Rightarrow \text{non } (p)}$
implication permettant une déduction directe		contraposé de (p) $\Rightarrow$ (q)

③ **Démonstration par disjonction des cas**

- **Naturellement, on convient de dire que la proposition suivante est vraie : (p) *ou* non (p) ; c'est le *principe du tiers exclu*.**
- **La démonstration par disjonction des cas est basée sur ce principe, elle revient donc à examiner exhautivement tous les cas.**

④ **Démonstration par l'absurde**

- **Naturellement, on convient de dire que l'énoncé mathématique suivant est faux : (p) *et* non (p) ; c'est le *principe de non-contradiction*.**

La démonstration par l'absurde est basée sur ce principe ; elle consiste donc, à rejeter toute hypothèse qui conduit à une contradiction.

- **Ainsi pour démontrer que l'énoncé mathématique (p) est vraie :**
  - **on suppose que non (p) est vraie ;**
  - **on en déduit un énoncé (q) que l'on sait être fausse ;**
  - **on conclut que (p) est vraie car il y a contradiction.**

⑤ **Démonstration par récurrence**

P_n est un énoncé mathématique qui dépend d'un nombre entier naturel n.
Pour démontrer *par récurrence* que :

« pour tout n supérieur à n_0, P_n » est vraie.

On procède comme suit,

1re étape :

on vérifie que P_{n_0} est vraie ;

2e étape :

on suppose que : « pour un nombre entier naturel k supérieur à n_0, P_k » est vraie,
on démontre que : P_{k+1} est vraie ;

on conclut.

Exercices

ENTRAÎNEMENT

Dans tous les exercices qui suivent le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J).

Quelque généralités sur les fonctions

Éléments de symétrie

1 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\sin x}{2+\cos^2 x}.$$

$(\mathscr{C})$ est sa représentation graphique.
Vérifier que la droite (D) d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de $(\mathscr{C})$.

2 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos(2x - \tfrac{\pi}{3}).$$

$(\mathscr{C})$ est sa représentation graphique.
Vérifier que le point $A(\frac{5\pi}{12}\,;0)$ est un centre de symétrie de $(\mathscr{C})$.

Fonctions périodiques

3 Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction f est périodique de période T.

(1) $f : x \mapsto \sin(x + \frac{\pi}{6})$; $T = 2\pi$

(2) $f : x \mapsto \sin(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6})$; $T = 6\pi$

(3) $f : x \mapsto \sin(2x + \frac{\pi}{6})$; $T = \pi$

(4) $f : x \mapsto \tan(3x - \frac{\pi}{4})$; $T = \frac{\pi}{3}$

Branches infinies d'une représentation graphique

4 Dans chacun des cas suivants, justifier que la la courbe $(\mathscr{C})$, représentation graphique de la fonction f, admet pour asymptote oblique la droite (Δ).

(1) $f : x \mapsto \dfrac{3x^3 - 2x^2 + 3x - 3}{x^2+1}$; $(\Delta) : y = 3x - 2$

(2) $f : x \mapsto \sqrt{x^2+6x+1}$; $(\Delta) : y = x + 3$

5 Dans chacun des cas suivants, étudier la branche infinie de la courbe $(\mathscr{C})$ représentation graphique de la fonction f ; préciser si $(\mathscr{C})$ admet une asymptote ou une branche parabolique.

(1) $f : x \mapsto \dfrac{2x^2+2x-1}{3x^2-x+1}$

(2) $f : x \mapsto \dfrac{x^3+x^2+x+2}{x^2+1}$

(3) $f : x \mapsto -x + \sqrt{x^2-9}$

(4) $f : x \mapsto x + \dfrac{\sin x}{x}$

(5) $f : x \mapsto \sqrt{x^3+2x^2+1}$

Courbes asymptotes

6 Démontrer que la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = 2x^2 + x$ est une courbe asymptote à la représentation graphique de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x^3+x^2-x+1}{x-1}$$ (voir TP2).

Exemple d'études de fonctions

Fonctions rationnelles

7 1. On considère la fonction polynôme P définie par : $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.
a) Étudier les variations de P.
b) Démontrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une solution réelle et une seule α, et que α appartient à l'intervalle $]1{,}6\,;1{,}7[$.
2. Soit D l'ensemble des nombres strictement supérieurs à -1. On considère la fonction f définie sur D par :

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (on prendra comme unité 4 cm). Construire $(\mathscr{C})$.
Étudier les variations de f (utiliser les résultas du 1.)

D'après Bac

8 On considère la fonction f définie sur $]1\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2-7x+10}{x-1}$.

$(\mathscr{C})$ est la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) (unité graphique : 1 cm).
1. Démontrer que : pout tout x appartenant à $]1\,;+\infty[$,

$$f(x) = x - 6 + \frac{4}{x-1}.$$

2. Déterminer la fonction dérivée f' de f.
En déduire le sens de variation de f.
Déterminer les limites de f aux extrémités de l'intervalle $]1\,;+\infty[$. Dresser le tableau de variation de f.
3. Démontrer que la droite (D_1) d'équation $y = x - 6$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$. Donner une équation de l'autre asymptote à $(\mathscr{C})$, notée (D_2).
4. Déterminer une équation de la droite (T) tangente à la courbe au point d'abscisse 2.
5. Construire sur une feuille de papier millimétré les droites (D_1), (D_2), (T) et la courbe $(\mathscr{C})$.

9 On considère les courbes $(\mathscr{C}_m)$, représentations graphiques des fonctions f_m de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$f_m(x) = \frac{1-mx^2}{1-x}, \ [m \in \mathbb{R}].$$

– Vérifier qu'il existe un point A qui appartient à toutes les courbes $(\mathscr{C}_m)$. Préciser ses coordonnées.
– Tracer les courbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$.
– Étudier le sens de variation de f suivant les valeurs du paramètre réel m.

Fonctions rationnelles par intervalle

10 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x+3}{|x|+2}$$

$(\mathscr{C})$ est sa représentation graphique.
Établir les équations de la tangente à gauche et de la tangente à droite au point A d'abscisse 0 de $(\mathscr{C})$.
Tracer ces droites. Construire $(\mathscr{C})$.

11 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{3|x-1|+1}{2|x-1|-1}.$$

1. Donner l'expression de $f(x)$ sans la valeur absolue et étudier le sens de variation de f.
2. Construire la courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ de f.
3. Démontrer que $(\mathscr{C}_f)$ admet un axe de symétrie que l'on déterminera.
4. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = m$, m étant un paramètre réel quelconque. Indiquer le signe des solutions lorsqu'elles existent.

12 f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = \left|\frac{x-3}{x-2}\right| + 1.$$
1. Étudier le sens de variation de f.
2. Construire la représentation graphgique $(\mathscr{C}_f)$ de f *(on précisera la position de $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à sa tangente à gauche et sa tangente à droite au point A de $(\mathscr{C}_f)$ d'abscisse 3).*

Fonctions irrationnelles

13 Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la fonction f et construire sa representation graphique $(\mathscr{C}_f)$.
(1) $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$
(2) $f : x \mapsto \sqrt{3x+5}$
(3) $f : x \mapsto \sqrt{x^2-4}$
(4) $f : x \mapsto \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$
(5) $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

14 f est la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \sqrt{x(x+1)}.$$
1. Étudier le sens de variation de f. (Étudier la dérivabilité de f en -1 et en 0.)
2. *a)* Vérifier que la droite (D) d'équation $y = x + \dfrac{1}{2}$ est une asymptôte à $(\mathscr{C}_f)$ en $+\infty$.
b) Vérifier que la droite (D') d'équation $y = -x - \dfrac{1}{2}$ est une asymptôte à $(\mathscr{C}_f)$ en $-\infty$.
3. Tracer avec soin la courbe $(\mathscr{C}_f)$ en précisant la tangente à gauche la tangente à droite en -1 et en 0.

15 g est la fonction définie sur $[0\,;1[\,\cup\,]1\,;2]$ par :
$$g(x) = \frac{x + \sqrt{2x - x^2}}{x-1}.$$
1. Étudier les variations de la fonction g.
a) Démontrer que g est dérivable sur $]0\,;1[$ et sur $]1\,;2[$. Déterminer $g'(x)$.
b) Calculer $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(h) - g(2)}{h}$. Que peut-on en déduire ?
c) Calculer $\lim\limits_{\substack{h \to 1 \\ >}} g(x)$. Que peut-on en déduire ?
2. Construire $(\mathscr{C}_g)$.
3. Vérifier que $\Omega(1\,;1)$ est un centre de symétrie de la représentation graphique $(\mathscr{C}_g)$ de g.

16 On considère la fonction f définie sur $[1\,;+\infty[$ par : $f(x) = (1 - \sqrt{x})^2$.
1. Étudier le sens de variation de f.
En déduire que f détermine une bijection de $[1\,;+\infty[$ dans $[0\,;+\infty[$.
2. Résoudre l'équation (E) $f(x) = b$, $[b \in \mathbb{R}_+]$.
En déduire que l'application réciproque g de la bijection déterminée par f est définie par : $g(x) = (1 + \sqrt{x})^2$.
3. Construire la représentation graphique de f ; en déduire celle de g.

Fonctions irrationnelles par intervalle

17 1. f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$f(x) = x + \sqrt{|x^2 - 1|}$.
a) Étudier la dérivabilité de f en -1 et en 1 ; donner une interprétation géométrique des résultats obtenus.
b) Étudier le sens de variation de f.
c) Démontrer que la représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$ de f admet deux asymptotes ; donner des équations de ces asymptotes.
d) Construire $(\mathscr{C}_f)$ dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J).
2. g est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$g(x) = x - \sqrt{|x^2 - 1|}.$$
On désigne par $(\mathscr{C}_g)$ sa représentation graphique dans le plan muni du même repère orthogonal (O, I, J).
a) x étant un nombre réel, on considère les points $M(x\,;f(x))$ et $N(-x\,;g(-x))$. Déterminer le milieu du segment [MN]. Donner une interprétation géométrique et une illustration de ce résultat.
b) En tenant compte de *a)*, donner une méthode de construction de $(\mathscr{C}_g)$. Construire $(\mathscr{C}_g)$.

18 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :
$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{|x^2-1|}}{x}.$$
1. Étudier la parité de f ; en déduire l'intervalle d'étude.
2. *a)* Étudier la dérivabilité de f en 1, et sur les intervalles $]0\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$.
b) Quel est le signe de $f'(x)$. *(On peut poser si nécessaire $u = \sqrt{x^2-1}$.)*
3. *a)* x étant un nombre réel supérieur à 1, mettre $f(x)$ sous la forme : $f(x) = \dfrac{x}{2} - 1 + \varphi(x)$, où $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \varphi(x) = 0$.
b) En déduire une équation d'une asymptote à la représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$ de f.
4. Construire $(\mathscr{C}_f)$.

D'après Bac

Fonctions trigonométriques

19 Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la fonction f et construire sa représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$.
(1) $f : x \mapsto \sin 2x$ (2) $f : x \mapsto \cos 3x$ (3) $f : x \mapsto \sin^2 x$

20 f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = \sin(2x+1).$$
1. Justifier que la fonction f est périodique, de période π.
2. Justifier que la fonction f est la composée de la fonction affixe $u : x \mapsto 2x + 1$ et de la fonction sinus.
a) Donner le tableau de variation de la fonction u et celui de la fonction sinus sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.
b) Déterminer l'intervalle K, image réciproque par u de $[0\,;\pi]$.
c) Déterminer l'antécédent par u de $\dfrac{\pi}{2}$.
d) Reporter les résultats des deux questions précédentes *b)* et *c)* dans le tableau de variation de la fonction u.
En déduire le tableau de variation de f sur l'intervalle K.
4. Construire la représentation graphique de f.

21 f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = 8\sin^4 x - 8\sin^2 x + 4\sin x\cos x + 1$$
1. *a)* Vérifier que :
pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $f(x) = \cos 4x + 2\sin 2x$.
b) Justifier le choix de l'intervalle $[0\,;\pi]$ comme intervalle d'étude de f.
2. Démontrer que :
pour tout nombre réel x, $f'(x) = 4\cos 2x\,(1 - 2\sin 2x)$.
Résoudre dans $[0\,;\pi]$, l'équation $f'(x) = 0$.
Déduire le tableau de variation de f.

4

Fonction Logarithme népérien

John Neper ou Napier (1550-1617), mathématicien écossais, construisit en Europe les premières tables de logarithmes dites naturels de base e.

En vue de rendre ces tables plus performantes dans le calcul numérique, elles furent reprises par Briggs dans la base dix et furent très utilisées jusqu'à l'arrivée en force des calculatrices électroniques.

Le mathématicien français Charles Hermite démontra que le nombre réel e est un nombre transcendant, c'est-à-dire qu'il n'est solution d'aucune équation algébrique entière à coefficient entier.

Charles Hermite
mathématicien français – 1822-1901.

SOMMAIRE

1 Définition – Propriétés

1.1. Définition et ses conséquences immédiates

Exploration par la touche ln d'une calculatrice

La touche ln d'une calculatrice détermine une fonction.

Nous allons utiliser la démarche scientifique ci-dessous pour introduire cette nouvelle fonction élémentaire.

Cette manipulation a pour objectif de réaliser les deux premières étapes de cette démarche ; la troisième étape sera abordée pendant l'exposé du cours :

1. obtenir des résultats par des essais ;
2. émettre des conjectures à partir de ces résultats ;
3. contrôler ces conjectures par des démonstrations.

Une représentation graphique partielle de la fonction

- Compléter la table de valeurs ci-dessous ; observer les résultats et émettre des conjectures sur :
  - l'ensemble de définition de la fonction ;
  - le signe des images.

a	– 10	– 1	– 0,5	0	0,25	0,5	0,75	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a ln																	

- Construire une représentation graphique partielle à partir de la table de valeurs obtenues.
- Émettre des conjectures sur le sens de variation de la fonction.

Comportement de la fonction pour les petites et les grandes valeurs

- Compléter les tableaux ci-dessous ; observer les résultats et émettre des conjectures sur les limites en 0 et en + ∞ de la fonction.

a							10^{-30}	10^{-20}	10^{-10}			10^{10}	10^{20}	10^{30}			
a ln																	

Recherche des propriétés algébriques de la fonction

- Compléter le tableau ci-dessous ; observer les résultats et émettre des conjectures sur la somme des images de deux nombres et l'image du produit de ces deux nombres.

a	2	3	4	5,2	6,3	7	49,8
b	1,8	3,2	4,5	5	6	12,9	104
a ln + b ln							
a × b = ln							

Définition

Position du problème

On sait déterminer les primitives sur]0 ; + ∞[des fonctions numériques f_n de ℝ vers ℝ définies par :

$$f_n(x) = \frac{1}{x^n} \quad [n \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}]$$

Qu'en est-il de la fonction inverse $f_1 : x \mapsto \frac{1}{x}$?

La fonction inverse est continue sur $]0 ; +\infty[$, elle admet donc des primitives sur $]0 ; +\infty[$.
Nous nous proposons de définir l'une de ces primitives et de l'étudier.

Définition

On appelle *fonction logarithme népérien*, la primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction inverse qui prend la valeur 0 en 1.

La fonction logarithme népérien est notée : ln.	On écrira souvent $\ln x$ au lieu de $\ln(x)$.

Calcul d'images

On peut déterminer les valeurs approchées des images par ln de certains nombres réels, dans une table de logarithme népérien. Cependant l'utilisation de la calculatrice a, dans la pratique, remplacé ces tables.

Exemple

$\ln 2 \approx 0{,}693$; $\ln 3 \approx 1{,}098$; $\ln 5 \approx 1{,}609$; $\ln 7 \approx 1{,}946$; $\ln 11 \approx 2{,}398$; $\ln 13 \approx 2{,}565$.

Caractérisation de la fonction ln

De la définition de ln, on déduit la propriété caractéristique suivante :

Propriétés

La fonction ln est caractérisée par les trois propriétés suivantes :

(1) $D_{\ln} =]0 ; +\infty[$; (2) $\ln 1 = 0$; (3) pour tout x élément de $]0 ; +\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Ensemble de définition de fonctions composées avec ln

Fonctions composées $\ln \circ u$ et $\ln \circ |u|$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend right, "\ln\circ u"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "\ln"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$x \in D_{\ln\circ u} \Leftrightarrow x \in D_u$ et $u(x) > 0$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "|u|"] \arrow[rr, bend right, "\ln\circ |u|"'] & \mathbb{R}_+ \arrow[r, "\ln"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$x \in D_{\ln\circ |u|} \Leftrightarrow x \in D_u$ et $u(x) \neq 0$

Exemple

Dans chacun des cas suivants, f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par une formule explicite. Déterminer l'ensemble de définition de f.

(1) $f(x) = \ln(-2x + 1)$ **(2) $f(x) = \ln(3x^2 + 5x - 2)$**

(3) $f(x) = \ln\left(\frac{-x+1}{7x-3}\right)$ **(4) $f(x) = \ln\left|\frac{-x+1}{7x-3}\right|$**

Soit x un nombre réel

(1) $x \in D_f \Leftrightarrow -2x + 1 > 0$

d'où : $D_f =]-\infty ; \frac{1}{2}[$.

Illustrations et justifications

(2) $x \in D_f \Leftrightarrow 3x^2 + 5x - 2 > 0$

D'où : $D_f =]-\infty \,;\, -2\,[\cup]\frac{1}{3} \,;\, +\infty[$.

x	$-\infty$		-2		$1/3$		$+\infty$
$3x^2+5x-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

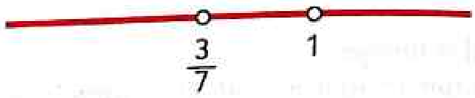
(3) $x \in D_f \Leftrightarrow \dfrac{-x+1}{7x-3} > 0$

D'où : $D_f =]\frac{3}{7} \,;\, 1[$.

x	$-\infty$		$3/7$		1		$+\infty$
$\dfrac{-x+1}{7x-3}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

(4) $x \in D_f \Leftrightarrow \dfrac{-x+1}{7x-3} \neq 0$

D'où : $D_f =]-\infty \,;\, \frac{3}{7}[\cup]\frac{3}{7} \,;\, 1\,[\cup]1 \,;\, +\infty[$



Variations de ln et ses conséquences

Propriété

La fonction ln est strictement croissante.

Conséquences

pour tous a et b éléments de $\mathbb{R}_+^*$,

$a = b \Leftrightarrow \ln a = \ln b$

$a < b \Leftrightarrow \ln a < \ln b$

Cas particuliers

pour tout a élément de $\mathbb{R}_+^*$,

$a < 1 \Leftrightarrow \ln a < 0$

$a > 1 \Leftrightarrow \ln a > 0$

Exemple

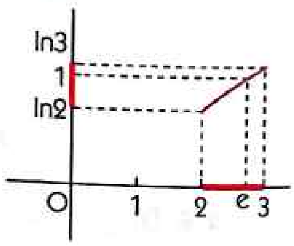
$\ln 1{,}49 < \ln 20{,}7 < \ln 69 < \ln 1040 < \ln 2651$; $\ln 0{,}999 < 0$; $\ln 1{,}001 > 0$.

Le nombre réel e

La fonction ln étant une fonction continue et strictement croissante sur $]0 \,;\, +\infty[$, elle détermine sur tout intervalle $[a \,;\, b]$ contenu dans $]0 \,;\, +\infty[$ une bijection de $[a \,;\, b]$ dans $[\ln a \,;\, \ln b]$.

Or, $\ln 2 < 1 < \ln 3$

donc, il existe un unique nombre réel, noté e, tel que : $2 < e < 3$ et $\boxed{\ln e = 1}$



- Vérifier par la méthode de dichotomie ou par balayage que : $\boxed{e \approx 2{,}718}$

On démontre et nous admettons que : **le nombre réel e est un nombre irrationnel.**

Exercice

1.a Dans chacun des cas suivants, f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie ci-dessous.
Déterminer l'ensemble de définition de f.

(1) $f(x) = \ln(3x + 4)$

(2) $f(x) = \ln|1 - x|$

(3) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{5x-1}\right)$

(4) $f(x) = \ln(x^2 - 4)$

(5) $f(x) = \ln(x^2 + x - 2)$

(6) $f(x) = \ln(1 - x) + \ln(2x + 1)$

(7) $f(x) = \ln(x - 1) + \ln(2x + 1)$

(8) $f(x) = \ln\left|\dfrac{2x-1}{3x+1}\right|$

1.2. Propriétés algébriques de ln

Propriété fondamentale

Propriété

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b, (1) $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Démonstration

Soit a un nombre réel strictement positif. Il s'agit de démontrer que :

Pour tout x élément de $]0\ ;+\infty[$, $\ln ax = \ln a + \ln x$.

Considérons donc la fonction f_a de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f_a(x) = \ln(ax)$.

La fonction f_a est la composée de la fonction linéaire $x \mapsto ax$, suivie de ln.

Soit x un nombre réel strictement positif.

$$f_a'(x) = (ax)' \times \ln'(ax) = a \times \frac{1}{ax} = \frac{1}{x}$$

donc : pour tout x élément de $]0\ ;+\infty[$, $f_a'(x) = \ln'(ax) = \frac{1}{x}$.

Les fonctions ln et f_a sont donc des primitives sur $]0\ ;+\infty[$ de la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Par conséquent, il existe une constante c telle que : $f_a(x) = \ln x + c$

d'où : $c = f_a(1) = \ln a$,

donc : pour tous a et x éléments de $]0\ ;+\infty[$, $\ln ax = \ln x + \ln a$.

Exemples

On a : $\ln 6 = \ln(2 \times 3) = \ln 2 + \ln 3$.
or : $\ln 2 \approx 0{,}693$; $\ln 3 \approx 1{,}098$
donc : $\ln 6 \approx 1{,}791$.

On a : $\ln 35 = \ln(7 \times 5) = \ln 7 + \ln 5$
or : $\ln 7 \approx 1{,}946$; $\ln 5 \approx 1{,}609$
donc : $\ln 35 \approx 3{,}555$.

Conséquences de la propriété fondamentale

Activité

Dans la propriété fondamentale (1), qu'obtient-on,
en remplaçant a par $\frac{1}{b}$? en remplaçant b par $\frac{1}{b}$?

Propriétés

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b, (2) $\ln\frac{1}{b} = -\ln b$; (3) $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$.

Exemples

On a : $\ln 0{,}2 = \ln(\frac{1}{5}) = -\ln 5$
or : $\ln 5 \approx 1{,}609$
donc : $\ln 0{,}2 \approx -1{,}609$

On a : $\ln 1{,}5 = \ln(\frac{3}{2}) = \ln 3 - \ln 2$
or : $\ln 3 \approx 1{,}098$; $\ln 2 \approx 0{,}693$
donc : $\ln 1{,}5 \approx 0{,}405$

Extension de la propriété fondamentale

Activité

- **Dans la propriété fondamentale, en remplaçant b par : a, a^2, a^3,...**

On obtient : $\ln(a^2) = \ln a + \ln a = 2\ln a$; $\ln(a^3) = \ln a + \ln(a^2) = 3\ln a$.
On peut conjecturer que : pour tout nombre entier naturel n, $\ln(a^n) = n\ln a$.
Contrôler cette conjecture à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Pour cela, il reste à vérifier que :

– p étant un nombre entier naturel quelconque, si $\ln(a^p) = p\ln a$ alors $\ln(a^{p+1}) = (p+1)\ln a$.
– Conclure.

- **On veut étendre cette propriété aux puissances d'exposants rationnels de a.**

r étant un nombre rationnel, on sait qu'il existe des nombres entiers relatifs p et q, tels que : $r = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$.

Pour exprimer $\ln(a^r)$ en fonction de $\ln a$, on pourra écrire : $\ln\left[\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q\right] = \ln(a^p) = p\ln a = q\ln\left(a^{\frac{p}{q}}\right)$.

Propriété

Pour tout nombre réel strictement positif a, pour tout nombre rationnel r, (4) $\ln(a^r) = r\ln a$.

Cas particuliers : $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$.

Exemples

On a : $\ln 8 = \ln(2^3) = 3 \times \ln 2$
or : $\ln 2 \approx 0{,}693$
donc : $\ln 8 \approx 2{,}079$

On a : $\ln\sqrt{7} = \frac{1}{2}\ln 7$
or : $\ln 7 \approx 1{,}946$
donc : $\ln\sqrt{7} \approx 0{,}973$

Tableau récapitulatif des propriétés de ln

① **Caractérisation de ln**

$D_{\ln} =]0\,;+\infty[$; $\ln 1 = 0$; pour tout x élément de $]0\,;+\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

② **Variations de ln et ses conséquences**

Pour tous a et b éléments de $\mathbb{R}_+^*$
$a = b \Leftrightarrow \ln a = \ln b$
$a < b \Leftrightarrow \ln a < \ln b$

Pour tout a élément de $\mathbb{R}_+^*$
$a < 1 \Leftrightarrow \ln a < 0$
$a > 1 \Leftrightarrow \ln a > 0$

$\ln e = 1$

③ **Propriété fondamentale de ln et ses conséquences**

Pour tous a et b éléments de $\mathbb{R}_+^*$
$\ln(ab) = \ln a + \ln b$
$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$
$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

Pour tout a élément de $\mathbb{R}_+^*$
Pour tout r élément de $\mathbb{Q}$
$\ln(a^r) = r\ln a$
$\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$

Exercices

1.b Sachant que :
$0{,}693 \leq \ln 2 \leq 0{,}694$
$1{,}098 \leq \ln 3 \leq 1{,}099$
Donner un encadrement de chacun des nombres suivants :
$\ln 6$; $\ln 18$; $\ln 24$; $\ln 27$; $\ln 16$; $\ln 1{,}5$; $\ln 0{,}75$.

1.c On considère les fonctions f, g, h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :
$f(x) = \ln(x-1)(x+2)$
$g(x) = \ln(x-1) + \ln(x+2)$
$h(x) = \ln|x-1| + \ln|x+2|$
A-t-on $f = g$? $f = h$?
Trouver le plus grand ensemble sur lequel f et g coïncident.
Trouver le plus grand ensemble sur lequel f et h coïncident.

1.d On considère les fonctions f, g, h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :
$f(x) = \ln(1-x)(x+2)$
$g(x) = \ln(1-x) + \ln(x+2)$
$h(x) = \ln|1-x| + \ln|x+2|$
Mêmes questions qu'à l'exercice précédent.

1.3. Équations – Inéquations

Équations du type : ln[u(x)] = ln[v(x)]

■ **Exemple 1**

Résolvons dans ℝ l'équation (E) $\ln(-2x+1) = \ln(x+4)$.

Ensemble V de validité de (E)

Soit x un nombre réel.

On a : $x \in V \Leftrightarrow -2x+1>0$ *et* $x+4>0$

d'où : $V =]-4\,;\,\frac{1}{2}[$.

Équations équivalentes à (E)

(E) $\quad \ln(-2x+1) = \ln(x+4)$

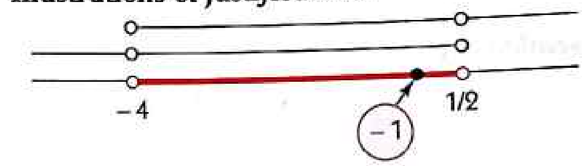
$-2x+1 = x+4$ car ln est strictement croissante

$x = -1$

Ensemble S de solutions de (E)

$S = \{-1\}$ car $-1 \in V$

Illustrations et justifications



■ **Exemple 2**

Résolvons dans ℝ l'équation (E) $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 1$.

Ensemble V de validité de (E)

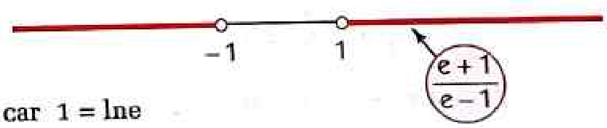
Soit x un nombre réel.

On a : $x \in V \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} > 0$

d'où : $V =]-\infty\,;-1[\, \cup\,]1\,;+\infty[$.

Illustrations et justifications

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$\frac{x+1}{x-1}$		+	$\boxed{0}$	–	‖	+	



Équations équivalentes à (E)

(E) $\quad \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 1$

$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln e$ car $1 = \ln e$

$\frac{x+1}{x-1} = e$ car ln est strictement croissante

$\frac{(e-1)x-(e+1)}{x-1} = 0$

$(e-1)x-(e+1) = 0$ car $x-1 \neq 0$

$x = \frac{e+1}{e-1}$

Ensemble S de solutions de (E)

$S = \left\{\frac{e+1}{e-1}\right\}$ car $\frac{e+1}{e-1} > 1$ $(e+1 > e-1)$

Inéquations du type : $\ln u(x) < \ln v(x)$

■ **Exemple 1**

Résolvons dans ℝ l'inéquation (I) $\ln(-x+2) > \ln(x+3)$.
Quel est l'ensemble des solutions de l'inéquation (I') $\ln(-x+2) \leq \ln(x+3)$?

Ensemble V de validité de (I)

Soit x un nombre réel.

On a : $x \in V \Leftrightarrow -x+2>0$ et $x+3>0$

d'où : $V =]-3\,;2[$.

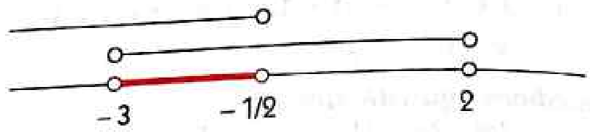
Illustrations et justifications

Inéquations équivalentes à (I)

(I) $\ln(-x+2) > \ln(x+3)$

$-x+2 > x+3$ car ln est strictement croissante

$x < -\dfrac{1}{2}$



Ensemble S de solutions de (I)

$S =]-3\,;-\dfrac{1}{2}[$

Ensemble S' de solutions de (I')

$S' = V \setminus S = [-\dfrac{1}{2}\,;2[$

■ **Exemple 2**

Étudier le signe de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \ln(x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2})$.

Pour étudier le signe de la fonction f, on pourra résoudre l'inéquation (I) : $f(x) \geq 0$.

Ensemble V de validité de (I)

Soit x un nombre réel.

On a : $x \in V \Leftrightarrow x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} > 0$

d'où : $V =]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}[\cup]1\,;+\infty[$.

Illustrations et justifications

x	$-\infty$		$-1/2$		1		$+\infty$
$x^2-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$		+	$\boxed{0}$	–	$\boxed{0}$	+	

Inéquations équivalentes à (I)

(I) $\ln(x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}) \geq 0$

$\ln(x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}) \geq \ln 1$ car $0 = \ln 1$

$x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} \geq 1$ car ln est strictement croissante

$2x^2 - x - 3 \geq 0$

x	$-\infty$		-1		$3/2$		$+\infty$
$2x^2-x-3$		+	$\boxed{0}$	–	$\boxed{0}$	+	

Ensemble S de solutions de (I)

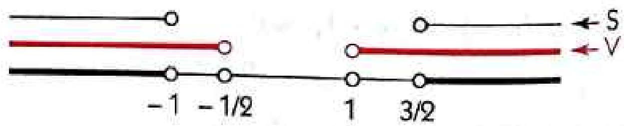
$S =]-\infty\,;-1[\cup]\dfrac{3}{2}\,;+\infty[$.

Signe de la fonction f

Pour $x \in]-\infty\,;-1[\cup]\dfrac{3}{2}\,;+\infty[$ $\quad f(x) > 0$

Pour $x \in \{-1\,;\dfrac{3}{2}\}$ $\quad f(x) = 0$

Pour $x \in]-1\,;-\dfrac{1}{2}[\cup]1\,;\dfrac{3}{2}[$ $\quad f(x) < 0$.



Exercice

1.e Résoudre dans $\mathbb{R}$:

(E) $\ln(2x-1) = \ln(3x+1)$

(F) $\ln(-5x+1) = 1$

(G) $\ln\left(\dfrac{x+2}{-x+1}\right) = 0$

(H) $\ln(-x+3) \leq 1$

(I) $\ln(x-1) < \ln(3-x)$

(J) $\ln(5x^2+9x-1) \geq 0$

(K) $2\ln(x+1) = \ln(5x+1)$

(L) $\ln(1-x) - \ln(2x+3) \geq \ln(-x)$

(M) $\ln(|3x-2|) < 0$

2 Dérivées – Primitives-limites

2.1. Variations et représentation graphique de ln

Variations de la fonction ln

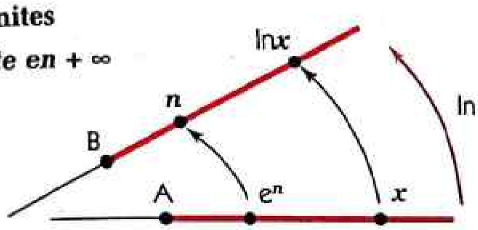
Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). On désignera par $(\mathscr{C}_{\ln})$ la représentation graphique de ln.

Ensemble de définition – Dérivée

On sait que l'ensemble de définition de ln est $]0\,;+\infty[$ et pour tout x élément de $]0\,;+\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Limites

Limite en + ∞



Soit n un nombre entier naturel aussi grand que l'on veut. La fonction ln étant strictement croissante,

on a : $x > e^n \Leftrightarrow \ln x > \ln(e^n)$

d'où : $x > e^n \Leftrightarrow \ln x > n$

$x \in]e^n\,;+\infty[\Leftrightarrow \ln x \in]n\,;+\infty[$.

On admet alors que : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty}$

Limite en 0

On a : $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

$x \mapsto \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ est la composée de la fonction inverse suivie de la fonction ln.

or : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$

d'où : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$

donc : $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty}$

Tableau de variation

x	0	1	e	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	‖ +	$\boxed{1}$ +	$\boxed{1/e}$ +	
ln$x$	‖ $-\infty$	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	$+\infty$

Représentation graphique de la fonction ln

Tangente à $(\mathscr{C}_{\ln})$ aux points I(1 ; 0) et E(e ; 1)

– La tangente (T_1) en I a pour équation : $y = x - 1$

– La tangente (T_e) en E a pour équation : $y = \frac{1}{e}x$.

Asymptotes à $(\mathscr{C}_{\ln})$

La courbe $(\mathscr{C}_{\ln})$ admet une asymptote verticale, (OJ).

Construction de la représentation graphique de ln

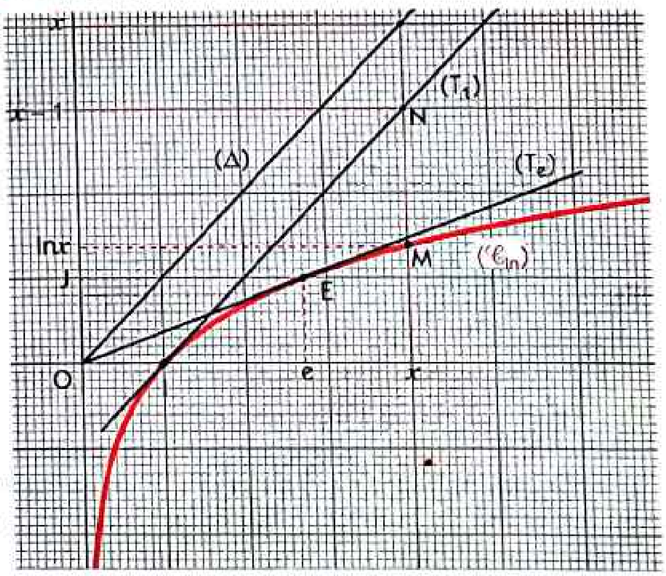
$(\mathscr{C}_{\ln})$ est construite dans la fenêtre :

$x_{\min} = 0$; $x_{\max} = 6$

$y_{\min} = -2$; $y_{\max} = 4$

Dans cette fenêtre, $(\mathscr{C}_{\ln})$ est en dessous de ses tangentes (T_1), (T_e) et de la droite (Δ) d'équation : $y = x$.

En est-il ainsi pour la courbe entière ?



Position relative de $(\mathscr{C}_{\ln})$ par rapport à des droites remarquables

Exemple

Étudions la position relative de $(\mathscr{C}_{\ln})$ par rapport aux droites (T_e) et (Δ) d'équations respectives :

$$y = \frac{x}{e} \quad \text{et} \quad y = x.$$

Il s'agit donc d'étudier, suivant les valeurs strictement positives de x, le signe de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x}{e} - \ln x.$$

Nous ne savons pas résoudre algébriquement l'inéquation : $f(x) \geq 0$.
Étudions donc le sens de variation de la fonction f.

On a : pour tout x de $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{x - e}{ex}$

0 est le minimum de f (voir le tableau de variation).

d'où : pour tout x élément de $]0\,;+\infty[$, $f(x) \geq 0$.

donc : pour tout x élément de $]0\,;+\infty[$, $\ln x \leq \dfrac{x}{e} < x$.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	$\boxed{0}$	+	
$f(x)$	‖	↘	$\boxed{0}$	↗	

Activité

Étudier la position relative de $(\mathscr{C}_{\ln})$ par rapport aux droites (T_1) et (Δ) d'équations respectives :

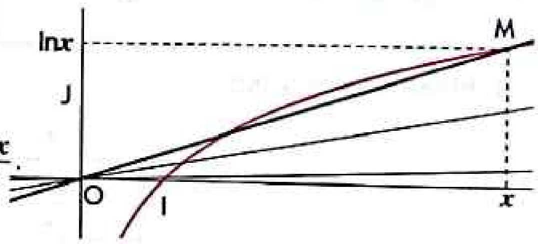
$$y = x - 1 \quad \text{et} \quad y = x.$$

- Vérifier que l'on obtient le résultat suivant : pour tout x élément de $]0\,;+\infty[$, $\ln x \leq x - 1 < x$.

Étude de la branche infinie en $+\infty$ de $(\mathscr{C}_{\ln})$

On sait que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

Soit M un point de $(\mathscr{C}_{\ln})$ d'abscisse x suffisamment grand.
Étudions la position limite de (OM) lorsque x tend vers $+\infty$.
Le coefficient directeur de (OM) est $\dfrac{\ln x}{x}$.
Il s'agit donc d'étudier la limite en $+\infty$ de la fonction : $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$.
Le quotient des limites donne la forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$.



La représentation graphique de ln suggère de comparer, pour les grandes valeurs de x, ln à la fonction racine carrée.

Soit x un nombre réel suffisamment grand.

On a : $0 < \ln x < x$ car $x > 1 \Rightarrow \ln x > 0$ et $\ln x < x$ (voir résultats précédents)

$0 < \ln\sqrt{x} < \sqrt{x}$ car $x > 1 \Rightarrow \sqrt{x} > 1$

$0 < \dfrac{1}{2}\ln x < \sqrt{x}$ car $\ln\sqrt{x} = \dfrac{1}{2}\ln x$

d'où : $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ car $\dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

donc : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0}$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$

Par conséquent, lorsque x tend vers $+\infty$, le coefficient directeur de la droite (OM) tend vers 0 ; donc la position limite de la droite (OM) est la droite (OI). $(\mathscr{C}_{\ln})$ admet donc une branche parabolique de direction (OI).

2.2. Dérivées

Dérivée de la fonction composée $\ln \circ u$

La dérivabilité des fonctions composées permet d'obtenir la propriété suivante :

Propriété

Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle K, alors $\ln \circ u$ est dérivable sur K et : $(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}$.

Exemple

Déterminons la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$f : x \mapsto \ln(-3x^2 + 5x + 2)$ $\qquad$ $g : x \mapsto \ln\left(\frac{3x-2}{x+3}\right)$

On a : $D_f =]-\frac{1}{3}\,;2[$

f est dérivable et pour tout x élément de D_f,

$$f'(x) = \frac{(-3x^2+5x+2)'}{-3x^2+5x+2} = \frac{-6x+5}{-3x^2+5x+2}$$

On a : $D_g =]-\infty\,;-3[\cup]\frac{2}{3}\,;+\infty[$

g est dérivable et pour tout x élément de D_g,

$$g'(x) = \frac{\left(\frac{3x-2}{x+3}\right)'}{\frac{3x-2}{x+3}} = \frac{11}{(x+3)^2} \times \frac{x+3}{3x-2} = \frac{11}{(x+3)(3x-2)}$$

Dérivée de la fonction composée $\ln \circ |u|$

Exemple introductif

Déterminons la dérivée de la fonction $h : x \mapsto \ln|5x-1|$.

On a : $D_h =]-\infty\,;\frac{1}{5}[\cup]\frac{1}{5}\,;+\infty[$.

Pour tout x élément de D_h, $h(x) = \frac{1}{2}\ln(5x-1)^2$.

Par conséquent, la fonction h est dérivable et pour tout x élément de D_h.

$$h'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{[(5x-1)^2]'}{(5x-1)^2} = \frac{1}{2} \times \frac{2 \times 5(5x-1)}{(5x-1)^2} = h'(x) = \frac{5}{5x-1}.$$

Plus généralement, on démontre la propriété suivante :

Propriété

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle K sur lequel elle ne s'annule pas, alors $\ln \circ |u|$ est dérivable sur K, et : $(\ln \circ |u|)' = \frac{u'}{u}$.

u étant une fonction numérique, $\ln \circ |u| = \frac{1}{2}\ln \circ u^2$.

Exercice

2.a Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :
(On pourra préciser les intervalles sur lesquels ces fonctions sont dérivables.)

$f : x \mapsto \ln(-3x+1)$ $\qquad$ $h : x \mapsto \ln\left(\frac{2x-7}{3x+4}\right)$ $\qquad$ $j : x \mapsto \ln(\sqrt{2x-1} + 7x)$

$g : x \mapsto \ln|5x^2-3x-2|$ $\qquad$ $i : x \mapsto \ln(5x^2+3x-1)$ $\qquad$ $k : x \mapsto \ln\left|\frac{7x}{8-9x}\right|$

2.3. Primitives

Recherche de primitives comportant ln

Activité

Dans chacun des cas suivants, f et g sont des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par leurs formules explicites. Déterminer la dérivée de f, en déduire une primitive de g et préciser un intervalle sur lequel cette primitive est définie.

(1) $f(x) = \ln(-3x+4)$ et $g(x) = \dfrac{1}{3x-4}$; (2) $f(x) = \ln|7x^2-2x|$ et $g(x) = \dfrac{7x-1}{7x^2-2x}$.

Les dérivées des fonctions $\ln \circ |u|$ permettent de déterminer des primitives comportant la fonction ln.

Propriété

u étant une fonction dérivable sur un intervalle K sur lequel elle ne s'annule pas,

$\dfrac{u'}{u}$ admet pour primitive

$\ln\circ u$, sur tout intervalle contenu dans K sur lequel u est strictement positive ;

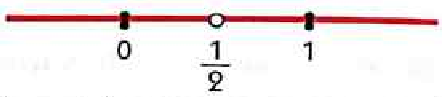
$\ln\circ(-u)$, sur tout intervalle contenu dans K sur lequel u est strictement négative.

Exemples

Déterminons les primitives sur $]-\infty\,;\frac{1}{2}[$ et sur $]\frac{1}{2}\,;+\infty[$ de la fonction rationnelle f définie par :

$f(x) = \dfrac{5}{2x-1}$.

– La fonction f est continue sur $]-\infty\,;\frac{1}{2}[$ et sur $]\frac{1}{2}\,;+\infty[$.
Elle admet donc des primitives sur chacun de ces intervalles.



– La fonction affine $u : x \mapsto 2x-1$ est dérivable et pour tout nombre réel x, $u'(x) = 2$;

pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$, $f(x) = \dfrac{5}{2} \times \dfrac{(2x-1)'}{2x-1} = \dfrac{5}{2}(\ln|2x-1|)'$.

x	$-\infty$	1/2	$+\infty$
$2x-1$	$-$	$\boxed{0}$	$+$
$\|2x-1\|$	$-2x+1$	$\boxed{0}$	$2x-1$

– Par conséquent :
Une primitive de f sur $]-\infty\,;\frac{1}{2}[$ est une fonction du type : $x \mapsto \dfrac{5}{2}\ln(-2x+1)+c$ $[c\in\mathbb{R}]$;

une primitive de f sur $]\frac{1}{2}\,;+\infty[$ est une fonction du type : $x \mapsto \dfrac{5}{2}\ln(2x-1)+c$ $[c\in\mathbb{R}]$.

Déterminons la primitive sur $]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$ de la fonction tangente, qui s'annule en 0.

– La fonction tangente est continue sur $]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$. Elle admet donc des primitives sur cet intervalle.

– On sait que : pour tout x élément de $]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$, $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{-(\cos x)'}{\cos x}$ et $\cos x > 0$.

Les primitives sur $]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$ de la fonction tan sont donc les fonctions : $x \mapsto -\ln(\cos x)+c$ $[c\in\mathbb{R}]$.

Celle qui s'annule en 0 est la fonction $x \mapsto -\ln(\cos x)$ (car elle vérifie : $-\ln(\cos 0)+c = 0$).

Exercice

2.b Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives sur K, de la fonction f définie ci-dessous :

(1) $f(x) = -\dfrac{1}{x}$; $K =]0\,;+\infty[$ (2) $f(x) = \dfrac{5}{3-x}$; $K =]3\,;+\infty[$ (3) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$; $K =]0\,;\pi[$.

2.4. Limites

Les limites de référence

Propriétés

(1)	$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$	(2)	$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$
(3)	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$	(4)	$\lim\limits_{x \to 0} x\ln x = 0$
(5)	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$	(6)	$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$

Démonstration

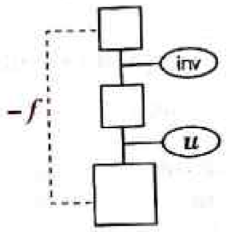
Égalités (1), (2) et (3) (voir paragraphe 2.1)

Égalité (4)

Le produit des limites donne la forme indéterminée $\boxed{0 \times \infty}$. Transformons l'écriture de $x\ln x$:

Pour tout x élément de $]0\,;+\infty[$, $f(x) = x\ln x = -\dfrac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$.

Décomposition de f



$-f = \text{inv} \circ u$

$(-f)$ est la composée de la fonction inverse suivie de la fonction $u : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$

Or : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0$

d'où : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0\,;$ donc : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0.$

Égalités (5) et (6)

Le quotient des limites donne la forme indéterminée $\boxed{\frac{0}{0}}$. On reconnaît le taux de variation en 1 de ln

donc : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x} = \ln'(1)$; $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x) - \ln(1)}{x-1} = \ln'(1).$

Calculs de limites

Exemple d'utilisation de la composition des fonctions ou des opérations sur les fonctions

g est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \dfrac{2+\ln x}{1-\ln x}$.

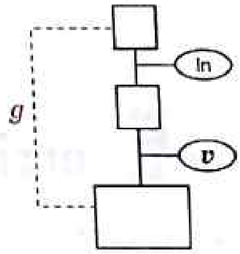
Étudions les limites de g en $+\infty$, en 0 et en e.

Limites en $+\infty$ et en 0 de la fonction g

$D_g =]0\,;e[\cup]e\,;+\infty[$

En effet, x étant un nombre réel, $x \in D_g \Leftrightarrow x > 0$ et $1 - \ln x \neq 0$.

La fonction g est la composée de ln suivie de la fonction $v : x \mapsto \dfrac{2+x}{1-x}$.



$g = v \circ \ln$

Or : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{2+X}{1-X} = -1$

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} \dfrac{2+X}{1-X} = -1$

donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2+\ln x}{1-\ln x} = -1$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2+\ln x}{1-\ln x} = -1.$

Limite en e de la fonction g

Pour tout x élément de D_g : $g(x) = (2 + \ln x) \times \dfrac{1}{1-\ln x}$

et on a : $\lim\limits_{x \to e} (2 + \ln x) = 3$; $\lim\limits_{x \to e} (1 - \ln x) = 0$.

Le signe de $(1 - \ln x)$ permettra donc de calculer la limite à gauche et la limite à droite en e de $x \mapsto \dfrac{1}{1-\ln x}$.

On a : $1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1$

$\Leftrightarrow x < e$

x	0		e		$+\infty$
$1 - \ln x$	||	$+$	0	$-$	

donc : $\lim\limits_{\substack{x \to e \\ <}} \dfrac{1}{1-\ln x} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to e \\ >}} \dfrac{1}{1-\ln x} = -\infty$

d'où : $\lim\limits_{\substack{x \to e \\ <}} \dfrac{2+\ln x}{1-\ln x} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to e \\ >}} \dfrac{2+\ln x}{1-\ln x} = -\infty$.

Exemples d'utilisation de transformations d'écritures pour se ramener à des limites de référence

Calculons : (1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x-1}$; **(2)** $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} \ln x$.

- On peut calculer la limite (1) en utilisant la limite de référence : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

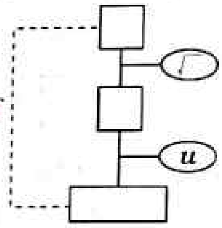
En effet, pour tout x élément de $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, $\dfrac{\ln x}{x-1} = \dfrac{\ln x}{x} \times \dfrac{1}{x-1}$.

- On peut calculer la limite (2) en utilisant la limite de référence : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln x = 0$.

En effet, pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^*$, $\sqrt{x}\ln x = 2\sqrt{x}\ln\sqrt{x}$.

Décomposition de f

$f : x \mapsto \sqrt{x}\ln\sqrt{x}$



La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}\ln\sqrt{x}$ est la composée de la fonction racine carrée suivie de la fonction $u : x \mapsto x\ln x$

Or : $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0} X\ln X = 0$,

donc : $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x}\ln\sqrt{x} = 0$.

d'où : $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x}\ln x = 0$.

Exemple d'utilisation d'une transformation d'écriture pour reconnaître un taux de variation

Calculons : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)$.

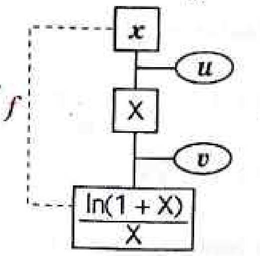
Le produit des limites donne la forme indéterminée $\boxed{\infty \times 0}$. Transformons l'écriture de ce produit.

Pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^*$, $x\ln\left(1 + \dfrac{2}{x}\right) = 2 \times \dfrac{\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}}$

On considère $u : x \mapsto \dfrac{2}{x}$; $v : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$; $f : x \mapsto \dfrac{\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}}$

Décomposition de f

$f : x \mapsto \dfrac{\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}}$



Or : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}} = 1$; d'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln\left(1 + \dfrac{2}{x}\right) = 2$.

Exercice

2.c Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \ln(x^2 + 11x + 2)$; $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{x+1}{\ln x}$; $\lim\limits_{x \mapsto 0} (x^2 + 1)\ln x$; $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{\ln x}{x - \ln x}$.

3 Exemples d'études de fonctions

3.1. Existence d'une asymptote oblique

Étudions la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = 2x + 3 + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

Variations de la fonction f

Ensemble de définition

Soit x un nombre réel.

On a : $x \in D_f \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} > 0$

Donc :

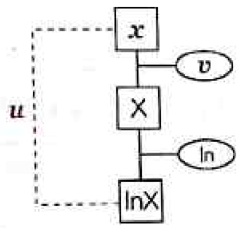
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$\frac{(x+1)}{(x-1)}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

$$D_f =]-\infty\,;-1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$$

Limites

La fonction $u : x \mapsto \ln\frac{x+1}{x-1}$ est la composée de la fonction $v : x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$ suivie de ln.

Limites en $+\infty$ et en 1



$u = \ln \circ v$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln\frac{x+1}{x-1} = 0, \quad \text{car : } \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1 \\ \lim\limits_{X \to 1} \ln X = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \ln\frac{x+1}{x-1} = +\infty, \quad \text{car : } \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{x+1}{x-1} = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$$

Limites en $-\infty$ et en -1

On obtient de même :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = -\infty$$

Dérivée

Détermination de la dérivée

La fonction f est dérivable et, x étant un élément de D_f, $f'(x) = 2 + \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' \times \frac{x-1}{x+1}$

d'où :

$$\text{pour tout } x \text{ élément } D_f,\quad f'(x) = \frac{2(x^2-2)}{x^2-1}$$

Signe de la dérivée

On a : pour tout x élément de D_f, $x^2 - 1 > 0$

donc : $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 2$.

Tableau de variation

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\boxed{0}$	$-$	||	//////	||	$-$	$\boxed{0}$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\boxed{f(-\sqrt{2})}$	$\searrow$	$-\infty$ ||	//////	|| $+\infty$	$\searrow$	$\boxed{f(\sqrt{2})}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} + 3 + \ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \quad ; \quad f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + 3 + \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

On a : $f(-\sqrt{2}) < 0$ car : $-2\sqrt{2} + 3 < 0$ et $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} < 1$.

On a : $f(\sqrt{2}) > 0$ car : $2\sqrt{2} + 3 > 0$ et $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} > 1$.

La fonction f est donc négative sur $]-\infty ; -1[$ et positive sur $]1 ; +\infty[$.

Représentation graphique de la fonction f

Le plan est muni du repère (O, I, J). Désignons par $(\mathscr{C}_f)$ la représentation graphique de f.

Asymptotes

Asymptotes verticales

On a vu que : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$

donc : $(\mathscr{C}_f)$ admet deux asymptotes verticales, les droites d'équations : $x = -1$ et $x = 1$.

Asymptote oblique

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

et : $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (2x+3)] = \lim\limits_{x \to -\infty} \ln\dfrac{x+1}{x-1} = 0$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

et : $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (2x+3)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\dfrac{x+1}{x-1} = 0$

donc : $(\mathscr{C}_f)$ admet une asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$, la droite (L) d'équation : $y = 2x + 3$.

Position de $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à son asymptote oblique (L)

Soit x un élément de D_f. On a : $f(x) - (2x+3) = \ln\dfrac{x+1}{x-1}$ et $x + 1 > x - 1$.

Pour $x > 1$, on a : $x + 1 > x - 1 > 0$

donc : $\dfrac{x+1}{x-1} > 1$; $\ln\dfrac{x+1}{x-1} > 0$

$(\mathscr{C}_f)$ est au-dessus de (L).

Pour $x < -1$, on a : $0 > x + 1 > x - 1$

donc : $\dfrac{x+1}{x-1} < 1$; $\ln\dfrac{x+1}{x-1} < 0$

$(\mathscr{C}_f)$ est en-dessous de (L).

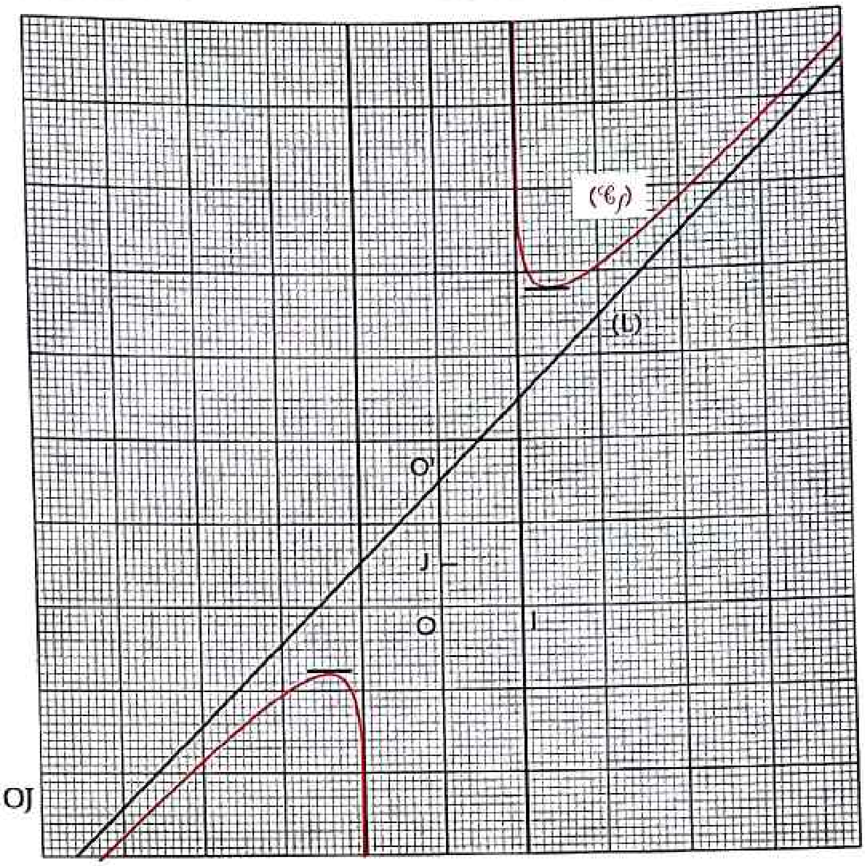
Tangentes

$(\mathscr{C}_f)$ admet deux tangentes horizontales aux points A et B d'abscisses respectives $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.

■ **Construction de $(\mathscr{C}_f)$**

Tableau des valeurs approchées

x	$f(x)$
-5	$-7,4$
-4	$-5,5$
-3	$-2,3$
-2	$-2,1$
$-1,5$	$-1,6$
$-1,25$	$-1,8$
$1,25$	$7,7$
$1,5$	$7,6$
2	$8,1$
3	$9,6$
4	$11,5$
5	$13,4$



Fenêtre de construction

$x_{min} = -5$; $y_{min} = -6$
$x_{max} = 5$; $y_{max} = 14$

Repère orthogonal (O, I, J) ; OI = 2 OJ

Unités graphiques : 1 cm sur (OI)

Propriétés géométriques

■ **Centre de symétrie**

– Les droites (L) et (OJ) sont sécantes au point O'(0 ; 3).
Le point O' semble être un centre de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.
Contrôlons par le calcul cette conjecture.

– Désignons par g la fonction ayant pour représentation graphique, l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{O'O}$.

Or : $\overrightarrow{O'O} = -3\,\overrightarrow{OJ}$

donc : pour tout x élément de $]-\infty\,;-1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$, $g(x) = f(x) + (-3) = 2x + \ln\dfrac{x+1}{x-1}$.

– Étudions la parité de g.
L'ensemble de définition de g est D_f, il est symétrique par rapport à 0.
Soit x un élément de D_g.

On a : $g(-x) = -2x + \ln\dfrac{-x+1}{-x-1} = -2x + \ln\dfrac{x-1}{x+1} = -2x - \ln\dfrac{x+1}{x-1} = -g(x)$.

d'où : pour tout x élément de D_g, $-x \in D_g$ et $g(-x) = -g(x)$.

donc : $\boxed{\text{O'(0 ; 3) est un centre de symétrie de } (\mathscr{C}_f).}$

3.2. Utilisation de la dérivée seconde

Étudions la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^2 - \frac{x}{5} - x\ln x$.

Variations de la fonction f

Ensemble de définition de f

$$\boxed{D_f =]0\,;+\infty[}$$

Limites

Limite en 0

On a : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^2 - \frac{x}{5}) - \lim\limits_{x \to 0} x\ln x = 0$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} f(x) = 0}$$

Limite en $+\infty$

La somme des limites donne une forme indéterminée. Transformons l'écriture de $f(x)$ en mettant x^2 en facteur.

On a : Pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x^2\left(1 - \frac{1}{5x} - \frac{\ln x}{x}\right)$

or : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1 - \frac{1}{5x} - \frac{\ln x}{x}\right) = 1$

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \left(\lim\limits_{x \to +\infty} x^2\right) \times \left(\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1 - \frac{1}{5x} - \frac{\ln x}{x}\right)\right) = +\infty$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$

Dérivée

Détermination de la dérivée

f est une fonction dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $\boxed{\text{pour tout } x \text{ élément de } \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = 2x - \frac{6}{5} - \ln x}$

Signe de la dérivée

Nous ne savons pas résoudre algébriquement l'inéquation : $2x - \frac{6}{5} - \ln x \geq 0$.

Étudions donc le sens de variation de la fonction dérivée f' pour déterminer son signe.

Pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^*$, $f''(x) = \frac{2x-1}{x}$.

x étant strictement positif, $f''(x)$ est du signe de $2x - 1$

x	0		0,5		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	$\boxed{0}$	$+$	
$f'(x)$	‖	$\searrow$	$\ln 2 - 0{,}2$	$\nearrow$	

Du tableau de variation de f' on déduit que :

– la fonction f' admet un minimum en 0,5

– pour tout x élément de $]0\,;+\infty[$, $f'(x) \geq \ln 2 - 0{,}2 > 0$.

Tableau de variation de f

$f'(0{,}5) \approx 0{,}5$

$f(0{,}5) \approx 0{,}5$

x	0		0,5		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	$\ln 2 - 0{,}2$	$+$	
$f(x)$	‖ 0	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

L'étude précédente suggère les remarques suivantes :

f est continue et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$;
elle détermine une bijection de $]0\,;+\infty[$ dans $]0\,;+\infty[$.

À l'aide d'un prolongement par continuité en 0,

on détermine la fonction g définie par : $\begin{cases} \text{pour } x \in \mathbb{R}_+^*, & g(x) = f(x) \\ & g(0) = 0 \end{cases}$

Représentation graphique de la fonction f

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J). Désignons par $(\mathscr{C}_f)$ la représentation graphique de f ; la fonction g a donc pour représentation graphique la courbe $(\mathscr{C}_f) \cup \{O\}$.

Tangente en O à la courbe $(\mathscr{C}_f) \cup \{O\}$

Étudions la dérivabilité à droite en 0 de g ;

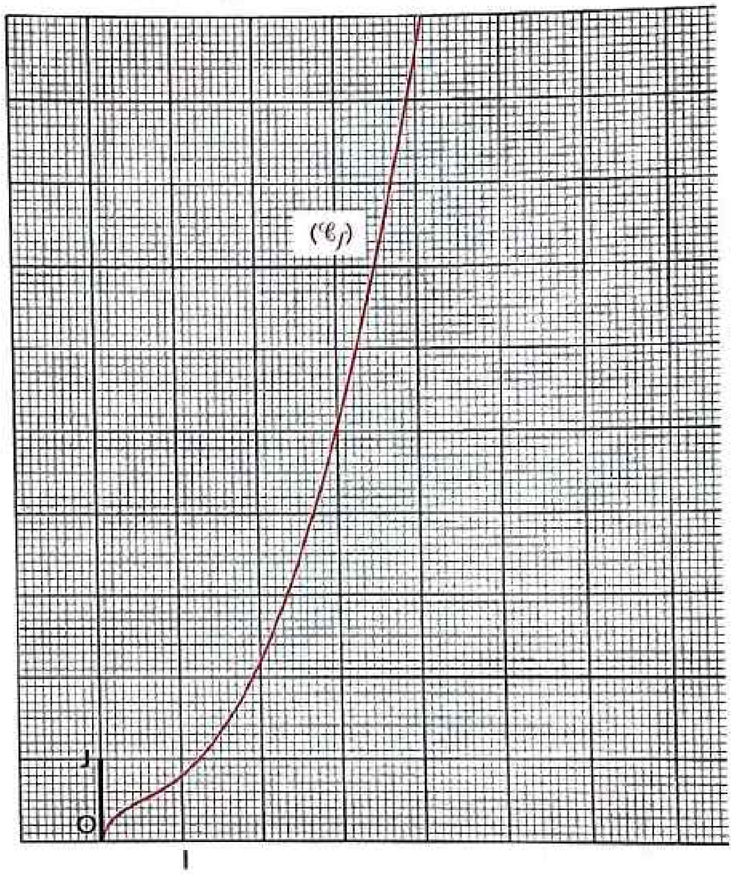
On a : $\lim\limits_{x \to 0, x > 0} \dfrac{g(x) - g(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} (x - \dfrac{1}{5} - \ln x) = +\infty$

donc : $\boxed{\text{La courbe } (\mathscr{C}_f) \cup \{O\} \text{ admet en O une tangente verticale.}}$

Construction de $(\mathscr{C}_f)$

Tableau des valeurs approchées

x	$f(x)$
0,5	0,4
1	0,8
1,5	1,3
2	2,2
2,5	3,4
3	5,1
3,5	7,1
4	9,6



Fenêtre de construction

$x_{min} = 0$; $y_{min} = 0$
$x_{max} = 4$; $y_{max} = 10$

Repère orthogonal (O, I, J)

Unités graphiques : 1 cm sur (OI) et (OJ)

Propriétés géométriques de $(\mathscr{C}_f)$

Point d'inflexion

On a vu que f' admet un minimum en 0,5. Donc, le point B de $(\mathscr{C}_f)$ d'abscisse 0,5 est un point d'inflexion. La tangente à $(\mathscr{C}_f)$ au point B a pour coefficient directeur $\ln 2 - 0{,}2$ (soit environ 0,5).

Branche parabolique

On a vu que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Soit M un point de $(\mathscr{C}_f)$ d'abscisse x suffisamment grand. Étudions la position limite de (OM) lorsque x tend vers $+\infty$.

Le coefficient directeur de la droite (OM) est $\dfrac{f(x)}{x}$.

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} (x - \dfrac{1}{5} - \ln x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x(1 - \dfrac{1}{5x} - \dfrac{\ln x}{x}) = +\infty$.

Par conséquent, $\boxed{\text{La courbe } (\mathscr{C}_f) \text{ admet en } +\infty \text{ une branche parabolique de direction (OJ).}}$

TP Travaux pratiques

TP1 La fonction logarithme décimal

Ce TP a pour objet d'apporter un complément de cours, tout en montrant l'utilisation d'un outil numérique.

Définition – propriété

On appelle fonction logarithme décimal, la fonction notée log définie sur $]0\ ;+\infty[$ par :

$$\log x = \frac{1}{\ln 10} \times \ln x$$

Toutes les propriétés de la fonction ln restent valables pour la fonction log.

• Calculer : $\log 1$; $\log 10$; $\log 10^3$; $\log 10^n$ $[n \in \mathbb{Z}]$.

• Dans le plan muni d'un repère orthonormé, tracer les représentations graphiques des fonctions ln et log pour x élément de $]0\ ;10]$.

Nombre de chiffres d'un nombre entier naturel

N étant un nombre entier naturel non nul, démontrer que le nombre de chiffres de N dans son écriture décimale est égal à :

$$1 + E(\log N)\ ;\ E(x) \text{ est la partie entière de } x.$$

Soit p un nombre entier naturel.

On admet que : p est le nombre de chiffres de N (dans son écriture décimal) $\Leftrightarrow$ $10^{p-1} \leq N < 10^p$.

Par conséquent : p est le nombre de chiffres de N $\Leftrightarrow$ $p-1 \leq \log N < p$

$\Leftrightarrow$ $p - 1 = E(\log N)$.

• Avec combien de chiffres s'écrit le nombre 5^{3000} ?

Informations scientifiques

En Chimie

L'acidité d'une solution est mesurée par son pH :

$$pH = -\log[H_3O^+]$$

$[H_3O^+]$ désignant la concentration de la solution en ions H_3O^+ (en moles par litres).

En Sismologie

La magnitude M d'un séisme d'intensité I est mesurée sur l'échelle de Richter par :

$$M = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

I_0 désignant une intensité de référence.

En Acoustique

L'intensité $\mathcal{I}$ (en décibels) d'un son de puissance $\mathcal{P}$ est définie par :

$$\mathcal{I} = 10\log\left(\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}\right)$$

$\mathcal{P}_0$ désignant la puissance d'un son au-dessous duquel aucun son n'est auditible par l'oreille humaine.

TP2 Fonction logarithme de base a

a est un nombre réel strictement positif et différent de 1.

La fonction logarithme de base a, notée $\log_a$, est définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \times \ln x$$

On veut étudier et représenter graphiquement la fonction $\log_a$.

1. Étude des propriétés algébriques de $\log_a$

a) Calculer : $\log_a(1)$; $\log_a(a)$; $\log_a(a^n)$ $[n \in \mathbb{Z}]$.

b) Démontrer que $\log_a$ vérifie les mêmes propriétés algébriques que ln.

C'est-à-dire : pour tous éléments x et y de $]0\,;+\infty[$,

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$
$$\log_a\sqrt{x} = \frac{1}{2}\log_a x$$
$$\log_a(x^n) = n\log_a x$$

c) Démontrer que :

pour tous éléments a, b et x de $]0\,;+\infty[$,

$\log_a(x) = \log_a(b) \times \log_b(x)$.

En déduire : $\log_b(a) = \dfrac{1}{\log_a(b)}$.

2. Variations de $\log_a$

- Étudier le sens de variation de la fonction log (distinguer les cas $0 < a < 1$ et $a > 1$).
- Justifier que $\log_a$ est une bijection de $]0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

3. Représentations graphiques de $\log_a$ et de $\log_{\frac{1}{a}}$

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).

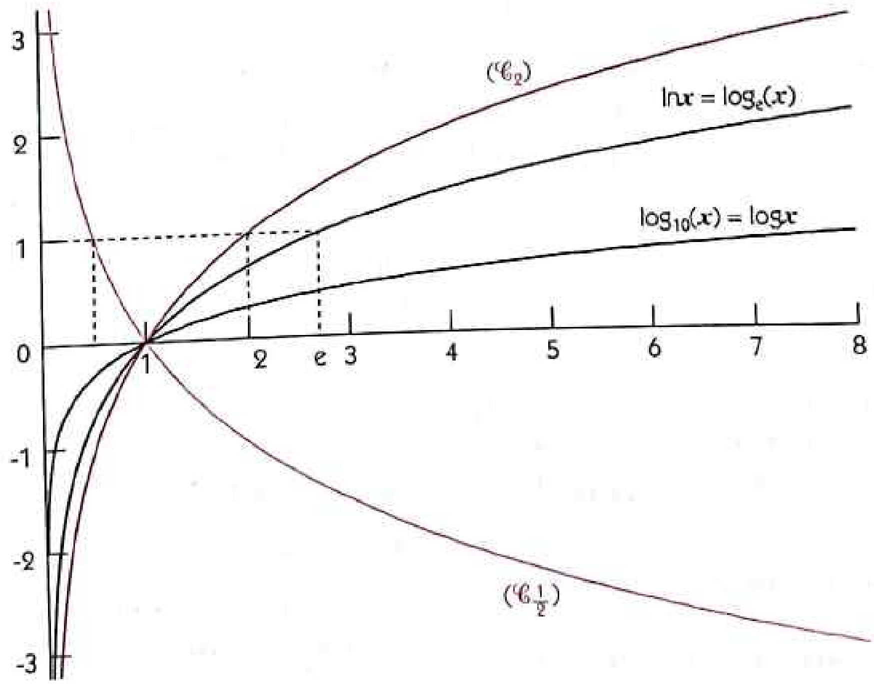
- Démontrer que les représentations graphiques $(\mathscr{C}_a)$ et $(\mathscr{C}_{\frac{1}{a}})$ respectivement des fonctions $\log_a$ et $\log_{\frac{1}{a}}$ sont symétriques par rapport à l'axe (OI).

Pour cela, on justifiera que : pour tout x élément de $]0\,;+\infty[$, $f_{\frac{1}{a}}(x) = -f_a(x)$.

Construire les courbes $(\mathscr{C}_2)$ et $(\mathscr{C}_{\frac{1}{2}})$.

4. Représentations graphiques

La fonction logarithme népérien et la fonction logarithme décimal sont des cas particuliers de la fonction logarithme de base a.



Exercices

ENTRAÎNEMENT

Définition et propriété

Ensemble de définition

1 Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

(1) $f(x) = \ln(2-3x)$ (2) $f(x) = \ln|2-3x|$
(3) $f(x) = \ln[(x+5)^2]$ (4) $f(x) = \ln\sqrt{x+5}$
(5) $f(x) = \ln(2x-3) + \ln(5x-2)$
(6) $f(x) = \ln\left(\frac{2x-3}{5x-2}\right)$ (7) $f(x) = \ln\left|\frac{2x-3}{5x-2}\right|$

Calcul d'images

2 À l'aide d'une calculatrice, donner l'arrondi d'ordre 4 de chacun des nombres suivants :

(1) $\ln(0{,}07)$ (2) $\ln(6{,}928)$
(3) $3\ln(1{,}04)$ (4) $\frac{1}{2}\ln(0{,}432)$

3 Calculer la valeur exacte de chacun des nombres suivants :

(1) $\ln(e^2)$ (2) $\ln\left(\frac{1}{e^3}\right)$ (3) $\ln(\sqrt{e})$
(4) $\ln\left(\frac{e^4}{\sqrt{e}}\right)$ (5) $\ln(e^2\sqrt{e})$ (6) $\ln(\sqrt{e})^3$

Transformation d'écriture

4 Exprimer en fonction de ln2 et ln3 :

(1) $\ln 32$ (2) $\ln\left(\frac{1}{4}\right)$ (3) $2\ln\left(\frac{2}{3}\right)$
(4) $\ln\sqrt{2}$ (5) $\ln(3\sqrt{2})$ (6) $2\ln\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$
(7) $\ln 36 - 2\ln 12$ (8) $\ln 27 + 2\ln 8 - 3\ln 108$

5 Écrire sous forme de lnA chacun des nombres réels suivants :

(1) $3\ln 2 - \ln 7 + \ln 4$ (2) $\ln 5 - 3\ln 3 - \ln 2$
(3) $\ln 4 + \frac{1}{2}\ln 9 - 2\ln 5$ (4) $\ln(0{,}1) + \ln 10 - \ln(0{,}001)$
(5) $\ln(1+\sqrt{2}) + \ln(1-\sqrt{2})$ (6) $\ln\left(\frac{5+\sqrt{3}}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{5+\sqrt{3}}\right)$

6 Simplifier :

(1) $\ln(1-\sqrt{2})^{10} + \ln(1+\sqrt{2})^{10}$
(2) $\ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$

Propriété de fonctions ln∘u

7 Dans chacun des cas suivants, démontrer que la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie ci-dessous est impaire.

(1) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ (2) $f(x) = \ln\left(\frac{a-x}{a+x}\right)$ $[a \in \mathbb{R}]$

Résolution d'équations

8 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(1) $\ln(5-2x) = 0$ (2) $\ln(x-3) = \ln(2+x)$
(3) $\ln(x^2-4) = \ln(1-4x)$ (4) $\ln(x^2-2x+2) = 1$
(5) $\ln(x-1) + \ln(x+1) = \ln(2+x)$
(6) $\ln(5x+2) - \ln(x+2) = \ln(x-2)$

9 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(1) $\ln(2x-3) + 2\ln(x+1) = \ln(x-1)$
(2) $3\ln(x+1) = 1$ (3) $\ln\sqrt{2x-3} = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln x$
(4) $\ln\left|\frac{1}{2}+x\right| = \ln|x|$ (5) $\ln|x-1| + \ln|2x+1| = 0$

Résolution d'inéquations

10 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

(1) $\ln(\ln x) > 0$ (2) $\ln x < 3\ln 2$
(3) $\ln(x^3 - x + 1) \geq \ln(2-x)$ (4) $(1-\ln x)(3+\ln x) \geq 0$
(5) $(\ln x^2) \leq 1$ (6) $\ln(x^2-9) \leq 0$

Résolution de systèmes

11 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

(1) $\begin{cases} x - y = -2 \\ \ln x + \ln y = \ln 2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2\ln x + \ln y = 1 \\ 5\ln x + 3\ln y = 4 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} (\ln x)(\ln y) = -15 \\ \ln(xy) = -2 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ \ln x + \ln y = \ln 10 \end{cases}$

Dérivée – Primitives – Limites

Calcul de limites

12 Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de la fonctions f pour les valeurs indiquées :

(1) $f : x \mapsto \frac{1}{x} - \ln x$, en 0 et en $+\infty$
(2) $f : x \mapsto \frac{1}{\ln x}$, en 1 et en $+\infty$
(3) $f : x \mapsto \frac{1-\ln x}{x}$, en 0 et en $+\infty$
(4) $f : x \mapsto x(1-\ln x)$, en 0 et en $+\infty$

13 Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de la fonctions f pour les valeurs indiquées :

(1) $f : x \mapsto \ln(2+x)$, en -2 et en $+\infty$
(2) $f : x \mapsto \ln(1-x)$, en $-\infty$ et en 1
(3) $f : x \mapsto \ln(x^2+3x-4)$, en 1 et en $+\infty$
(4) $f : x \mapsto \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$, en 0 et en $+\infty$

14 Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de la fonctions f pour les valeurs indiquées :

(1) $f : x \mapsto \ln\left(\frac{x-5}{x+2}\right)$, en 5 et en $+\infty$
(2) $f : x \mapsto \ln\left(\frac{x-1}{2-x}\right)$, en 1 et en 2
(3) $f : x \mapsto (x-2)\ln(x-2)$, en 2 et en $+\infty$

15 Calculer les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \ln x)$ (2) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + \ln|x|)$

(3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{3x+2}$ (4) $\lim\limits_{x \to +\infty} (5x + 3 - 4\ln x)$

(5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ (6) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x + 3}{\ln x + 1}$

(7) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x} + \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$ (8) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)\right)$

16 Calculer les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x \to 0} x^3 \ln x$ (2) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} \ln x$ (3) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right)$

17 Calculer les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$ (2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(2-x)}{x-1}$

(3) $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{\ln x - 1}{x - e}$ (4) $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{x\ln x - e}{x - e}$

18 f est la fonction définie sur $]0 ; 1[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}.$$

Vérifier que :
pour tout x strictement positif, $x(\ln x)^2 = (\sqrt{x} \ln x)^2$.
Déterminer les limites de f en 0 et en 1.

Détermination de dérivée

19 Pour chacune des fonctions f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies ci-dessous :
1. Déterminer l'ensemble de définition D_f.
2. Justifier que f est dérivable en tout élément de D_f et calculer $f'(x)$.

(1) $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 1)$ (2) $f(x) = \ln(|1 - 3x|)$

(3) $f(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{x}$ (4) $f(x) = \dfrac{\ln x + 1}{\ln x - 1}$

(5) $f(x) = \sqrt{\ln x} + 3x$ (6) $f(x) = \ln\sqrt{x} - 5x$

20 1. Déterminer la dérivée f' de la fonction f définie sur $]1 ; +\infty[$ par : $f(x) = (x+1)\,[2\ln(x+1) + 3\,]$.
2. Démontrer que :
pour tout x de $]1 ; +\infty\,[$, $(x+1)f'(x) - f(x) = 2(x+1)$.

21 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}, \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

22 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2, & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = 1 + \dfrac{\ln x}{x}, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 1.

Détermination de primitives

23 Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives sur K de la fonction f.

(1) $f : x \mapsto \dfrac{3}{2-x}$, avec $K =]2 ; +\infty[$

(2) $f : x \mapsto \dfrac{-4x-2}{x^2+x+1}$, avec $K = \mathbb{R}$

(3) $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$, avec $K =]0 ; +\infty[$

(4) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln x}$, avec $K =]1 ; +\infty[$

24 On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x\ln x.$$

Justifier que f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et calculer $f'(x)$.
En déduire une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction ln.

25 On donne une fonction rationnelle f définie par : $f(x) = \dfrac{2x-5}{(x-2)(1-x)}$.
Démontrer qu'il existe deux nombres réels a et b tels que : $f(x) = \dfrac{a}{x-2} + \dfrac{b}{1-x}$.
Déterminer une primitive sur $]2 ; +\infty[$ de la fonction f.

26 On donne une fonction rationnelle f définie par : $f(x) = \dfrac{3x^2+2x-2}{3x-1}$.
Démontrer qu'il existe trois nombres réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{3x+1}$.
Déterminer une primitive sur $]-\infty ; \dfrac{1}{3}[$ et une primitive sur $]\dfrac{1}{3} ; +\infty[$ de la fonction f.

27 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-\dfrac{1}{2}\}$ par :

$$f(x) = \frac{3x+1}{(2x+1)^2}.$$

1. Déterminer les nombres réels a et b tels que :
pour tout x distinct de $-\dfrac{1}{2}$,
$$f(x) = \frac{a}{2x+1} + \frac{b}{(2x+1)^2}.$$
2. En déduire les primitives de f sur $]-\dfrac{1}{2} ; +\infty[$.
3. Déterminer la primitive F de f sur $]-\dfrac{1}{2} ; +\infty[$ vérifiant $F(0) = 1$.

Étude de fonctions

Tracé de courbes

28 Dans chacun des cas ci-dessous, écrire f comme composée de fonctions, l'une étant la fonction logarithme népérien.
En déduire (sans calculer sa dérivée) les variations de f.
Tracer sa courbe représentative dans la plan muni d'un repère orthogonal, en expliquant comment elle se déduit de la courbe de la fonction ln.

(1) $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (2) $f : x \mapsto 3 - \ln x$

(2) $f : x \mapsto |\ln x|$ (3) $f : x \mapsto \ln|x|$

(4) $f : x \mapsto \ln(x+3)$ (5) $f : x \mapsto \ln(x-1) + 2$

Étude de fonctions

29 Dans chacun des cas ci-dessous étudier et représenter graphiquement la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

(1) $f(x) = \ln(2x+1)$ (2) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

(3) $f(x) = \ln(1 - x^2)$ (4) $f(x) = x\ln x - x$

(5) $f(x) = \ln(|x+1|)$ (6) $f(x) = x - \ln x$

30 Étudier et représenter graphiquement la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + \ln x$.

$(\mathscr{C})$ étant la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé, donner une équation de la tangente à $(\mathscr{C})$ au point A de $(\mathscr{C})$ d'abscisse 1.

31 On considère la fonction f définie sur $]-2 ; 2[$ par : $f(x) = \frac{1}{3}x \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$.

1. *a)* Démontrer que f est impaire.
b) Étudier les variations de f sur $[0 ; 2[$.
c) Construire la représentantion graphique $(\mathscr{C})$ de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

2. *a)* Démontrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{3}x$ admet une unique solution dans $]-2 ; 2[$.
b) Déterminer la valeur exacte de cette solution.

32 On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x + \ln|1-x|}{1-x}$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f.
2. On désigne par $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).
Démontrer que $(\mathscr{C})$ admet un centre de symétrie dont on précisera les coordonnées.
Construire $(\mathscr{C})$.

Utilisation d'une fonction auxiliaire

33 1. Étudier le sens de variation de la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = x + 1 - \ln x$.
En déduire le signe de $g(x)$.
2. Étudier la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\ln x.$$
3. Justifier que f détermine une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
4. Étudier le signe de $f(x) - \ln x$ et calculer :
$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - \ln x].$$
5. Dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) construire successivement la représentation graphique de ln, celle de f puis celle de f^{-1}, réciproque de la bijection déterminée par f.

34 1. Étude d'une fonction auxiliaire.
La fonction g est définie sur $]0 ; +\infty[$ par :
$$g(x) = 2x\sqrt{x} - 3\ln x + 6.$$
En utilisant le sens de variation de g, déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
2. Étude de la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{3\ln x}{\sqrt{x}} + x - 1.$$
a) Utiliser le résultat de la question 1. pour déterminer le sens de variation de f. Dresser le tableau de variation de f.
b) La courbe $(\mathscr{C})$ représentation graphique de f admet pour asymptote (Δ) ; donner une équation de (Δ).
Étudier les positions relatives de $(\mathscr{C})$ et (Δ).
3. Recherche de primitives.
a) Déterminer la dérivée de la fonction h définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $h(x) = 6\sqrt{x}\ln x$.
b) En déduire la primitive F de f sur $]0 ; +\infty[$, qui s'annule en 1.

Positions relatives de deux courbes

35 On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x-1}{x}\ln x$, et on désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1. Étude d'une fonction auxiliaire.
a) Étudier les variations de la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = x - 1 + \ln x$.
b) Vérifier que $g(1) = 0$.
c) En déduire le signe de g sur $]0 ; +\infty[$.

2. Étude de f.
a) Démontrer que :
pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
b) Déduire de la question 1. le signe de $f'(x)$ et les variations de f.
c) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
d) Étudier les variations de f.

3. Représentations graphiques.
a) Étudier suivant les valeurs de x la position relative de $(\mathscr{C})$ par rapport à la courbe (Γ) d'équation $y = \ln x$.
b) Déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x) - \ln x$.
Interpréter graphiquement le résultat.
c) Construire la courbe (Γ), puis la courbe $(\mathscr{C})$.

36 A – On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - \ln x$.
1. Étudier les variations de la fonction g.
2. Déduire de l'étude précédente le signe de $g(x)$.

B – On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :
$$f(x) = x + \frac{1 + \ln x}{x}.$$
On désigne par $(\mathscr{C})$ la représentative graphique de f.
1. Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
Justifier que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.
Déterminer la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (D) sur $]0 ; +\infty[$.
Démontrer en particulier que (D) coupe $(\mathscr{C})$ en un point unique A que l'on déterminera.
3. Étudier les variations de la fonction f.
4. Déterminer les valeurs exactes et des valeurs approchées à 10^{-2} près de $f(x)$ pour les valeurs de x suivantes :
$$0{,}3 \quad ; \quad \frac{1}{\mathrm{e}} \quad ; \quad 1 \quad ; \quad 7.$$
5. Déterminer le point A de $(\mathscr{C})$ où la tangente (T) est parallèle à (D).

5 Fonction exponentielle népérienne

Dès l'antiquité, les mathématiciens ont utilisé les exposants pour l'écriture des grands nombres.

Cependant, c'est seulement entre le XVe et le XVIe siècle qu'intervient la création des noms : millions et milliard.

Comment lire le plus grand nombre écrit avec trois chiffres ?

Ce nombre est 9^{9^9} qui a 369 693 100 chiffres !

La notation exponentielle n'a été introduite qu'au XVIe siècle et l'on ne peut oublier l'apport du mathématicien écossais John Neper.

C'est au XVIIIe siècle, après la mise en place du concept de fonction, qu'Euler (1707-1783) définit clairement les fonctions exponentielles et puissances.

Ces fonctions sont depuis très utilisées, car elles décrivent et permettent d'étudier de nombreux phénomènes dans des domaines variés : chimie, biologie, démographie, économie...

Jean Neper
mathématicien écossais – 1550-1617.

SOMMAIRE

1 Définitions – Propriétés algébriques

1.1. Définition et propriétés algébriques

Exploration par les touches ln et e^x d'une calculatrice

La touche e^x comme la touche ln d'une calculatrice détermine une fonction.

Nous allons utiliser la démarche présentée au début du chapitre précédent pour introduire une autre nouvelle fonction élémentaire à partir de la fonction ln.

Ici encore, les conjectures émises à partir des résultats issus des manipulations, seront contrôlées par des démonstrations du cours.

- Compléter les tableaux ci-dessous ; observer les résultats et émettre des conjectures sur la bijectivité des fonctions.

a	0,7	1	3	8,4	15,9	28,3	102	271	465
(a)(ln)(e^x)									

a	– 20	– 16	– 5,3	– 1,9	0	5,4	7,2	8,1	9,6
(a)(e^x)(ln)									

Définition

La fonction ln étant une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, elle admet une bijection réciproque de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Définition

On appelle *fonction exponentielle népérienne*, l'application réciproque de la fonction logarithme népérien. On la note : exp.

Pour tout x élément de $\mathbb{R}$, pour tout y élément de $\mathbb{R}_+^*$, $y = \exp(x) \Leftrightarrow \ln y = x$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}_+^* \arrow[r, "\ln"] \arrow[rr, bend left, "\exp\circ\ln"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_{\mathbb{R}_+^*}"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "\exp"] & \mathbb{R}_+^* \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\exp"] \arrow[rr, bend left, "\ln\circ\exp"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_{\mathbb{R}}"'] & \mathbb{R}_+^* \arrow[r, "\ln"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Conséquences immédiates de la définition – Propriétés algébriques

Activité 1

Les fonctions ln et exp étant des bijections réciproques,
- **calculer exp(0) et exp(1) ;**
- **donner le signe de exp(x), x étant un nombre réel quelconque.**

Activité 2

De la définition de la fonction exp, déduire que la fonction exp est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Traduire cette stricte croissance en complétant l'égalité et l'inégalité suivantes, a et b étant des nombres réels :
$$\exp(a) = \exp(b) \Leftrightarrow \ldots$$
$$\exp(a) < \exp(b) \Leftrightarrow \ldots$$

Activité 3

a et b sont des nombres réels, r un nombre rationnel.

On veut démontrer la propriété fondamentale (1) et ses conséquences (2), (3) et (4) ci-dessous.

(1) $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$; **(2)** $[\exp(a)]^r = \exp(ar)$

(3) $\exp(-b) = \dfrac{1}{\exp(b)}$; **(4)** $\exp(a - b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$

Pour cela, on pourra comparer le logarithme népérien des deux membres de chaque égalité.

Notation e^x

Soit r un nombre rationnel. On a : $\ln e^r = r\ln e = r$.
ln et exp étant des bijections réciproques : pour tout nombre rationnel r, $\ln e^r = r \Leftrightarrow e^r = \exp(r)$.
On convient d'étendre aux nombres réels cette écriture. D'où la notation suivante :

Pour tout nombre réel x, $\exp(x) = e^x$.

Remarques

– Sur la calculatrice, la touche e^x *donne accès à la fonction exp ; elle donne :* $e \approx 2{,}718\ 281\ 828$.

– Avec la notation e^x, les propriétés algébriques se traduisent par les règles de calcul sur les puissances.

Exemples

$e^{2,7} \times \sqrt{e^3} = e^{2,7} \times e^{\frac{3}{2}} = e^{2,7+1,5} = e^{4,2}$; $\dfrac{e^{\pi}}{e^{\sqrt{3}}} = e^{\pi-\sqrt{3}}$.

Tableau récapitulatif des propriétés de ln et de exp

① **Les fonctions ln et exp sont des bijections réciproques**

$\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln x$; $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto e^x$

Pour tout x élément de $\mathbb{R}$, pour tout y élément de $\mathbb{R}_+^*$,
$\ln y = x \Leftrightarrow y = e^x$

Pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $\ln e^x = x$	**Pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^*$, $e^{\ln x} = x$**
$\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$	$e^0 = 1$; $e^1 = e$

② **Les fonctions ln et exp sont strictement croissantes**

Pour tous a et b éléments de $\mathbb{R}_+^*$, $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$; $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$	**Pour tous a et b éléments de $\mathbb{R}$,** $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$; $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$
Pour tous a élément de $\mathbb{R}_+^*$, $\ln a < 0 \Leftrightarrow a < 1$; $\ln a > 0 \Leftrightarrow a > 1$	**Pour tout x élément de $\mathbb{R}$,** $e^x > 0$

③ **Les fonctions ln et exp possèdent les propriétés algébriques suivantes**

Pour tous a et b éléments de $\mathbb{R}_+^*$,	**Pour tous a et b éléments de $\mathbb{R}$,**
$\ln ab = \ln a + \ln b$	$e^{a+b} = e^a \times e^b$
$\ln \dfrac{1}{b} = -\ln b$	$e^{-b} = \dfrac{1}{e^b}$
$\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$	$e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$

Exercice

1. a Écrire sous la forme la plus simple possible :

(1) $\ln\sqrt{e}$ (2) $\frac{1}{2}\ln e^{8,6}$ (3) $e^{\frac{1}{2}\ln 6}$ (4) $e^{-\ln 5}$ (5) $e^{\ln 3 - \ln 7}$ (6) $e^{1-\ln 5}$ (7) $\ln\sqrt{e^5}$ (8) $\ln e^{x^2}$ (9) $e^{\ln x} - \ln e^x$ (10) $e^{\ln(x-1)}\, e^{-\ln x}$

1.2. Équations – Inéquations

Exemples d'équations et d'inéquations des types $e^{u(x)} = a$; $e^{u(x)} < a$

Pour résoudre de telles équations et inéquations, on peut prendre le logarithme népérien de leurs membres.

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation et l'inéquation suivantes :
(E) $e^{x-3} = 4$; (I) $e^{x-3} < 4$

Résolution de (E)	Résolution de (I)
(E) $e^{x-3} = 4$	(I) $e^{x-3} < 4$
$\ln(e^{x-3}) = \ln 4$	$\ln(e^{x-3}) < \ln 4$
$x - 3 = \ln 4$	$x - 3 < \ln 4$
$x = 3 + \ln 4$	$x < 3 + \ln 4$
$S_{(E)} = \{3 + \ln 4\}$	$S_{(I)} =]-\infty ; 3 + \ln 4[$

• Justifier les deux premières étapes de la résolution de l'équation (E) et de l'inéquation (I).

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation et les inéquations suivantes :
(E) $e^{x+6} = -2$; (I) $e^{x+6} < -2$; (J) $e^{x+6} > -2$

On sait que l'exponentielle d'un nombre réel strictement positif est un nombre réel strictement positif, donc,

– l'équation (E) et l'inéquation (I) n'ont pas de solution : $S_{(E)} = \varnothing$ et $S_{(I)} = \varnothing$.

– l'inéquation (J) est vérifiée pour tout nombre réel : $S_{(J)} = \mathbb{R}$.

Exemples d'équations et d'inéquations des types $\ln u(x) = a$; $\ln u(x) < a$

Pour résoudre de telles équations et inéquations, on peut prendre l'exponentielle népérienne de leurs membres.

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation et l'inéquation suivantes :
(E) $\ln(x + 3) = -2$; (I) $\ln(x + 3) < -2$

Résolution de (E)	Résolution de (I)
Ensemble de validité : $]-3 ; +\infty[$	Ensemble de validité : $]-3 ; +\infty[$
(E) $\ln(x + 3) = -2$	(I) $\ln(x + 3) < -2$
$\exp[\ln(x + 3)] = \exp(-2)$	$\exp[\ln(x + 3)] < \exp(-2)$
$x + 3 = e^{-2}$	$x + 3 < e^{-2}$
$x = -3 + e^{-2}$	$x < -3 + e^{-2}$
$S_{(E)} = \{-3 + e^{-2}\}$	$S_{(I)} =]-3 ; -3 + e^{-2}[$

• Justifier les deux premières étapes de la résolution de l'équation (E) et de l'inéquation (I).

Exemples d'équations et d'inéquations polynomiales

Ce sont des équations et inéquations se ramenant aux types :

$a(\ln x)^2 + b \ln x + c = 0$; $a(\ln x)^2 + b \ln x + c < 0$

$a(e^x)^2 + b e^x + c = 0$; $a(e^x)^2 + b e^x + c > 0$

On peut se ramener à la résolution d'équations du second degré à l'aide d'une inconnue auxiliaire.

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation et l'inéquation suivantes :
(E) $3(\ln x)^2 + 5\ln x - 2 = 0$; (I) $3(\ln x)^2 + 5\ln x - 2 < 0$

(E) et (I) ont le même ensemble de validité : $]0 ; +\infty[$.
Pour (E) et (I), on choisit la même inconnue auxiliaire X définie par : $X = \ln x$.

Considérons donc les équations suivantes :
(E) $3(\ln x)^2 + 5\ln x - 2 = 0$
(E') $3X^2 + 5X - 2 = 0$

Le nombre réel a est une solution de (E)
équivaut à
le nombre réel $\ln a$ est une solution de (E')

or, la résolution de (E') donne : $X = -2$; $X = \frac{1}{3}$.
Les solutions de (E) sont celles des équations (1) et (2).

(1) $\ln x = -2$
$x = e^{-2}$

(2) $\ln x = \frac{1}{3}$
$x = e^{1/3}$

donc, l'ensemble des solutions de (E) est :
$\{e^{-2} ; e^{1/3}\}$

Considérons donc les inéquations suivantes :
(I) $3(\ln x)^2 + 5\ln x - 2 < 0$
(I') $3X^2 + 5X - 2 < 0$

Le nombre réel a est une solution de (I)
équivaut à
le nombre réel $\ln a$ est une solution de (I')

or, la résolution de (I') donne : $-2 < X < \frac{1}{3}$.
Les solutions de (I) sont celles du système (Σ).

(Σ) $-2 < \ln x < \frac{1}{3}$
$e^{-2} < x < e^{1/3}$

donc, l'ensemble des solutions de (I) est :
$]e^{-2} ; e^{1/3}[$

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation et l'inéquation suivantes :
(E) $3e^x + 5 - \frac{2}{e^x} = 0$; (I) $3e^x + 5 - \frac{2}{e^x} > 0$

(E) et (I) ont le même ensemble de validité : $\mathbb{R}$.
On transforme l'écriture de (E) et (I) en multipliant leurs membres par e^x (en effet $e^x > 0$).
Pour les équations obtenues, on choisit alors la même inconnue auxiliaire X définie par : $X = e^x$.

Considérons donc les équations suivantes :
(E) $3(e^x)^2 + 5e^x - 2 = 0$
(E') $3X^2 + 5X - 2 = 0$

Le nombre réel a est une solution de (E)
équivaut à
le nombre réel e^a est une solution de (E')

or, la résolution de (E') donne : $X = -2$; $X = \frac{1}{3}$.
Les solutions de (E) sont celles des équations (1) et (2).

(1) $e^x = -2$
(1) n'a pas de solution

(2) $e^x = \frac{1}{3}$
$x = -\ln 3$

donc, l'ensemble des solutions de (E) est :
$\{-\ln 3\}$

Considérons donc les inéquations suivantes :
(I) $3(e^x)^2 + 5e^x - 2 > 0$
(I') $3X^2 + 5X - 2 > 0$

Le nombre réel a est une solution de (I)
équivaut à
le nombre réel e^a est une solution de (I')

or, la résolution de (I') donne : $-2 < X < \frac{1}{3}$.
Les solutions de (I) sont celles des inéquations (1) et (2).

(1) $e^x < -2$
(1) n'a pas de solution

(2) $e^x > \frac{1}{3}$
$x > -\ln 3$

donc, l'ensemble des solutions de (I) est :
$]-\ln 3 ; +\infty[$

Exercices

1. b Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :
(1) $e^{3x-2} = 5$
(2) $e^{2x+1} = -3$
(3) $2e^{2x+2} - 7e^{x+1} + 3 = 0$
(4) $(\ln x)^2 - 3\ln x - 4 = 0$

1. c Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :
(1) $e^{7x+8} > 2$
(2) $e^{4x-1} < -8$
(3) $e^{5x+2} > -2$
(4) $(\ln x)^3 - \ln x \leq 0$

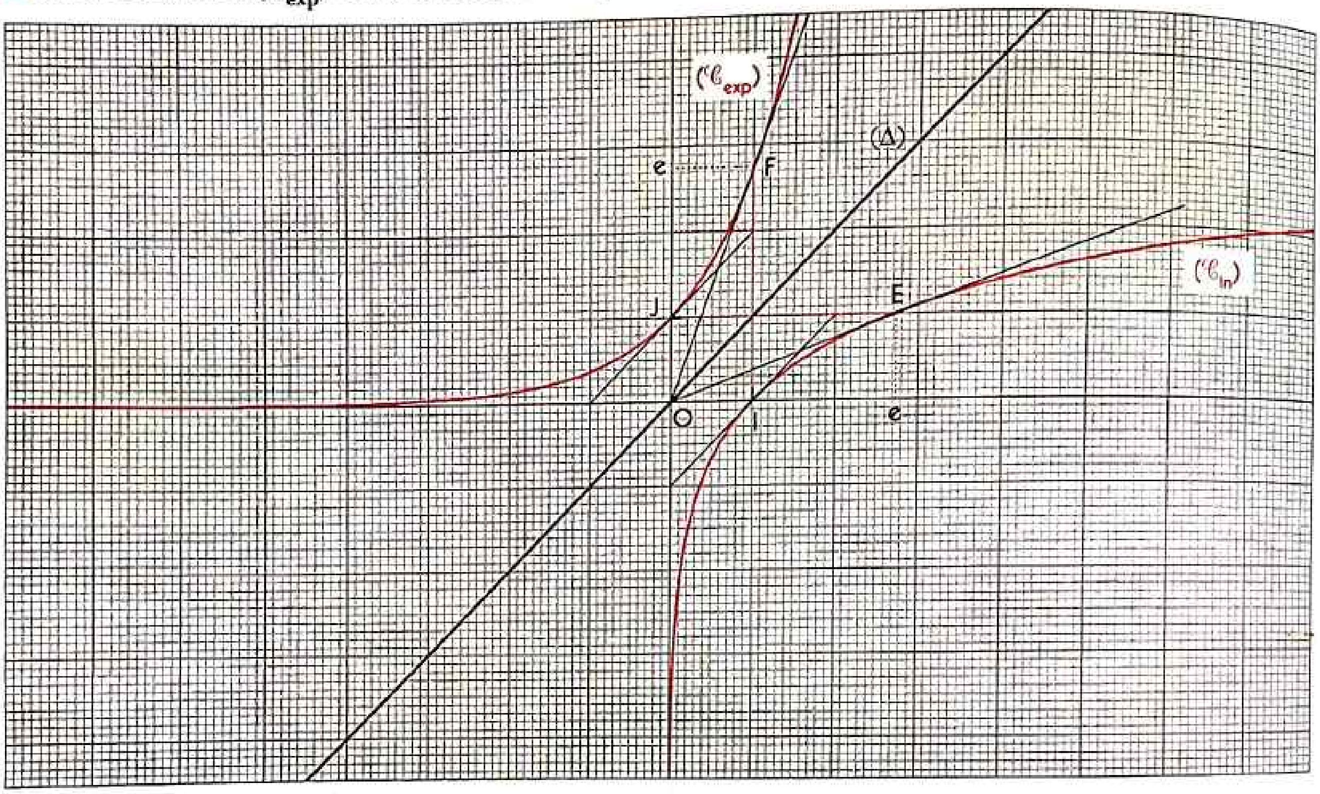
2 Dérivées – Primitives – Limites

2.1. Représentation graphique et variations de la fonction exp

Représentation graphique de exp

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
Les fonctions ln et exp sont des bijections réciproques, leurs représentations graphiques $(\mathscr{C}_{\ln})$ et $(\mathscr{C}_{\exp})$ sont donc symétriques par rapport à la droite (Δ) d'équation : $y = x$.

Construction de $(\mathscr{C}_{\exp})$ et ses droites remarquables



Les droites remarquables de $(\mathscr{C}_{\exp})$

On a vu que la courbe $(\mathscr{C}_{\ln})$ admet :
- une tangente au point I(1 ; 0) de coefficient directeur 1 ;
- une tangente au point E(e ; 1) passant par le point O ;
- une asymptote verticale, la droite (OJ).

On en déduit respectivement que $(\mathscr{C}_{\exp})$ admet :
- une tangente au point J(0 ; 1) de coefficient directeur 1 ;
- une tangente au point F(1 ; e) passant par le point O ;
- une asymptote horizontale, la droite (OI).

- Vérifier graphiquement que : pour tout nombre réel x, $e^x > x + 1$ et $e^x > ex$.

Branche infinie en $+\infty$ de $(\mathscr{C}_{\exp})$

On a vu que la courbe $(\mathscr{C}_{\ln})$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (OI).
On en déduit que la courbe $(\mathscr{C}_{\exp})$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (OJ).

Tableau de variation de exp

Les fonctions ln et exp étant des bijections réciproques, leurs tableaux de variations se déduisent l'une de l'autre.

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln x$	$-\infty$ ↗	0	1	↗ $+\infty$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp(x)$	0 ↗	1	e	↗ $+\infty$

2.2. Dérivées – Primitives – Limites

Dérivée de la fonction exp

Activité

On veut utiliser la représentation graphique ($\mathscr{C}_{\exp}$) et le calcul pour trouver le nombre dérivé en a de la fonction exp.

Pour cela,
- vérifier que le taux de variation en a de la fonction exp est la fonction : $h \mapsto e^a \times \dfrac{e^h - 1}{h}$
- donner une traduction géométrique de la fonction : $h \mapsto \dfrac{e^h - 1}{h}$ et en déduire $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h}$;
- calculer $(\exp)'(a)$.

Propriété

La fonction exponentielle népérienne est dérivable sur $\mathbb{R}$ et elle est égale à sa dérivée.

Pour tout nombre réel x, $(\exp)'(x) = e^x$.

Démonstration

La fonction ln est une fonction dérivable sur $]0 ; +\infty[$. De plus, sa dérivée ne s'annule pas sur $]0 ; +\infty[$. Sa bijection réciproque, la fonction exp, est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminons la dérivée de exp.

Soit x un nombre réel.

– En aplliquant la formule $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$, on obtient : $(\exp)'(x) = \dfrac{1}{\ln'[\exp(x)]} = \dfrac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x$.

– En aplliquant la formule $(f \circ f^{-1})'(x) = x'$, on obtient ; $\ln'(e^x) \times \exp'(x) = 1$.

Dérivée de la fonction composée $\exp \circ u$

Notation

e^u désignera la fonction composée $\exp \circ u$.

La dérivabilité des fonctions composées permet d'obtenir la propriété suivante :

Propriété

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle K, alors e^u est dérivable sur K et $(e^u)' = u'e^u$.

Exemple

Considérons les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = e^{5x+3}$; $g(x) = e^{\cos x}$.
f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et leurs dérivées f', g' sont définies par : $f'(x) = 5e^{5x+3}$; $g'(x) = -\sin x \, e^{\cos x}$.

Recherche de primitives comportant exp

Activité

Dans chacun des cas suivants, f et g sont des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies ci-dessous.
Déterminer la dérivée de f, en déduire une primitive de g.

(1) $f(x) = e^{-3x+7}$; $g(x) = e^{-3x+7}$
(2) $f(x) = e^{\sin x}$; $g(x) = \cos x \, e^{\sin x}$ ·
(3) $f(x) = e^{x^2+2x-1}$; $g(x) = (x+1)e^{x^2+2x-1}$

La dérivée de la fonction e^u permet de déterminer de nouvelles primitives.

Propriété

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle K,
alors la fonction e^u est une primitive sur K de la fonction $u'e^u$.

Les limites de référence

Propriétés

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ (2) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ (3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

(4) $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$ (5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

Démonstration

– **Égalités (1) et (2)** : (voir paragraphe 2.1).

– Utilisons la limite de la composée de fonction pour les égalités (3) et (4).

Égalité (3) :

On a : pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $\dfrac{e^x}{x} = \dfrac{e^x}{\ln e^x}$

or : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X}{\ln X} = +\infty$

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\ln e^x} = +\infty$.

Égalité (4)

On a : pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $x e^x = e^x \times \ln e^x$,

or : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} X \ln X = 0$

donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x \ln e^x = 0$.

– **Égalité (5)** : $\dfrac{e^x - 1}{x}$ est le taux de variation en 0 de exp, donc : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^0}{x.} = \exp'(0)$.

Calculs de limites

Utilisation de la composition des fonctions ou des opérations sur les fonctions

f et g sont des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = e^{|2x-3|}$; $g(x) = \dfrac{2e^x + 3}{e^x - 1}$.
Étudier la limite de f en $-\infty$. Étudier les limites de g en $+\infty$ et en 0.

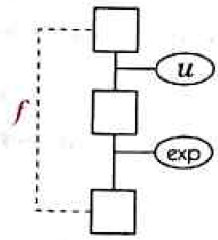
Limite de f en $-\infty$

Considérons la fonction $u : x \mapsto |2x - 3|$.

Décomposons la fonction f (voir schéma) ; $f = \exp \circ u$.

Or : $\lim\limits_{x \to -\infty} |2x - 3| = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$

donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{|2x-3|} = +\infty$.



Limite de g en $+\infty$

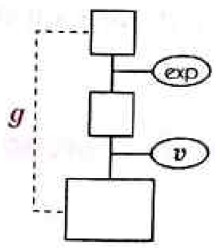
g a pour ensemble de définition $\mathbb{R}^*$ car : $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Considérons la fonction $v : x \mapsto \dfrac{2x + 3}{x - 1}$.

Décomposons la fonction g (voir schéma) ; $g = v \circ \exp$.

Or : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{2X + 3}{X - 1} = 2$

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2e^x + 3}{e^x - 1} = 2$.



Limite de g en 0

Pour tout élément de $\mathbb{R}^*$, $g(x) = \dfrac{2e^x + 3}{e^x - 1} = (2e^x + 3) \times \dfrac{1}{e^x - 1}$

et on a : $\lim\limits_{x \to 0} (2e^x + 3) = 5$; $\lim\limits_{x \to 0} (e^x - 1) = 0$.

Le signe de $(e^x - 1)$ permettra donc de calculer la limite à gauche et la limite à droite en 0 de $x \mapsto \frac{1}{e^x - 1}$.

On a : $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1$

$\Leftrightarrow x > 0,$

on obtient le tableau de signes ci-contre ;

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	$-$	$\boxed{0}$	$+$

donc : $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} \frac{1}{e^x - 1} = -\infty$; $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \frac{1}{e^x - 1} = +\infty$

d'où : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2e^x + 3}{e^x - 1} = -\infty$; $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \frac{2e^x + 3}{e^x - 1} = +\infty.$

Exemples d'utilisation de transformation d'écriture pour se ramener à une limite de référence

Calculons les limites suivantes : **(1)** $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - e^x)$ **(2)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x - 1}$

(3) $\lim\limits_{x \to -\infty} (5 - 3x)e^x$ **(4)** $\lim\limits_{x \to 1} \frac{e^x - e}{x - 1}$

Les opérations sur les limites conduisent à des formes indéterminées. Ramenons-nous à des limites de référence.

- Une transformation d'écriture permet de calculer les limites (1) et (2) en utilisant : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$

En effet,

– pour tout nombre réel x, $x - e^x = x(1 - \frac{e^x}{x})$

– pour tout x élément de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\frac{e^x}{x - 1} = \frac{e^x}{x} \times \frac{x}{x - 1}.$

- Une transformation d'écriture permet de calculer la limite (3) en utilisant : $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0.$

En effet,

– pour tout nombre réel x, $(5 - 3x)e^x = 5e^x - 3xe^x$.

- On remarque que la fonction $x \mapsto \frac{e^x - e}{x - 1}$ est le taux de variation en 1 de la fonction exp,

donc : $\lim\limits_{x \to 1} \frac{e^x - e}{x - 1} = (\exp)'(1) = e.$

Exercices

2. a Dans chacun des cas suivants, f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par une formule explicite.
Déterminer l'ensemble de définition de f et sa dérivée f'.

(1) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; (2) $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 3}$

2. b Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ définie par :

(1) $f(x) = e^{5x}$

(2) $f(x) = (x + 1)e^{x^2 + 2x - 1}$

(3) $f(x) = e^{3x + 4}$

2.c Calculer les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x)$

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{7x - 3}$

(3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x - x}$

(4) $\lim\limits_{x \to +\infty} (9x - 3)e^x$

(5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{5x - 2}$

(6) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3e^{2x} - 1}{5e^x + 4}$

(7) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-5x + 3}$

3 Exemples d'études de fonctions

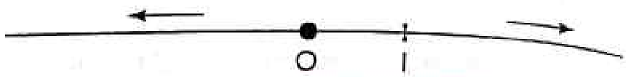
3.1. Fonction impaire

Étudions la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Variations de la fonction f

Ensemble de définition

On a : pour tout nombre réel x, $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$.



d'où : $e^x + e^{-x} \neq 0$ donc : $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

Ensemble d'étude

On vérifie que f est une fonction impaire.
On peut donc prendre pour ensemble d'étude l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Dérivée

– La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, car les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

– Soit x un nombre réel,

$$f'(x) = \frac{(e^x - e^{-x})'(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})'}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2}$$

donc : $\boxed{\text{pour tout nombre réel } x,\ f'(x) = \dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2}}$

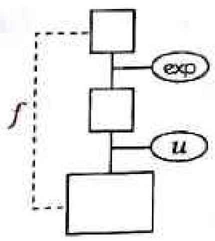
– La dérivée f' est donc positive sur $\mathbb{R}$.

Limite en $+\infty$

Le quotient de la limite en $+\infty$ donne une forme indéterminée.
Transformons l'écriture de $f(x)$ en mettant e^{-x} en facteur au numérateur et au dénominateur.

On a : pour tout nombre réel x, $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

La fonction f est donc la composée de exp suivie de la fonction rationnelle u : $x \mapsto \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$;



$f = u \circ \exp$

or : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X^2 - 1}{X^2 + 1} = 1 \end{cases}$ donc : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1}$

Tableau de variation sur $[0\,;+\infty[$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\boxed{1}$	$+$	
$f(x)$	$\boxed{0}$	$\nearrow$	1

Représentation graphique de la fonction f

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). Désignons par $(\mathscr{C}_f)$ la représentation graphique de f.

Asymptotes à $(\mathscr{C}_f)$ en $+\infty$

On a vu que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

Donc $(\mathscr{C}_f)$ admet en $+\infty$ une asymptots horizontale, la droite d'équation : $y = 1$.

Tangente au point O

La tangente à $(\mathscr{C}_f)$ au point O a pour coefficient directeur 1.

Construction de $(\mathscr{C}_f)$

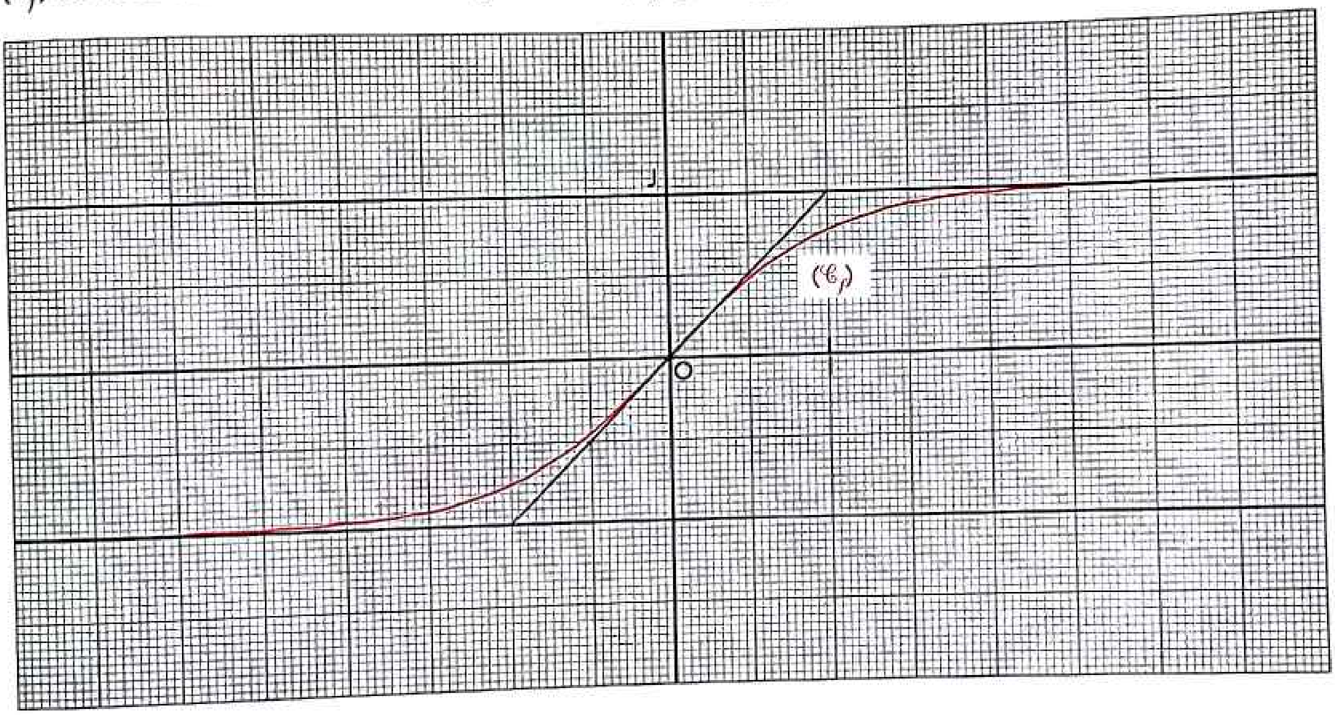
Tableau de valeurs approchées

x	0	0,5	1	1,5	1,9	2,2
$f(x)$	0	0,46	0,76	0,9	0,95	0,97

Fenêtre de construction

$x_{min} = -3$; $y_{min} = -1$
$x_{max} = 3$; $y_{max} = 1$

L'étude précédente permet d'obtenir la représentation graphique $(\mathscr{C}_0)$ de la restriction de f à $[0\,;+\infty[$.
$(\mathscr{C}_f)$ est alors obtenue à l'aide d'une symétrie de $(\mathscr{C}_0)$ par rapport à l'origine O du repère.



Propriétés géométriques de $(\mathscr{C}_f)$

Centre de symétrie

On a vu que f est une fonction impaire, par conséquent le point O est bien un centre de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.

Point d'inflexion

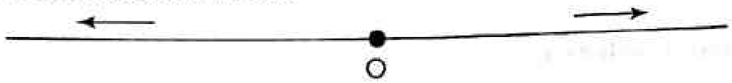
Puisque le centre de symétrie O appartient à $(\mathscr{C}_f)$, la courbe $(\mathscr{C}_f)$ traverse sa tangente en ce point. (On dit que le point O est un point d'inflexion de $(\mathscr{C}_f)$).

3.2. Fonctions définies par intervalles

Étudions la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty\,;0],\ f(x) = x\mathrm{e}^x \\ \text{pour } x \in]0\,;+\infty[,\ f(x) = x\ln x. \end{cases}$

Variations de la fonction f

Ensemble de définition



$D_f = \mathbb{R}$

Limites

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Dérivée

- Sur $]-\infty\,;0]$, f coïncide avec la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = x\mathrm{e}^x$.
g étant une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, f est donc dérivable sur $]-\infty\,;0[$, dérivable à gauche en 0 et on a :

pour tout x élément de $]-\infty\,;0[$, $f'(x) = g'(x) = (1+x)\mathrm{e}^x$
$f'(0) = g'(0) = 1$

d'où : pour tout x élément de $]-\infty\,;0]$, $f'(x)$ est du signe de $(1+x)$.

- Sur $]0\,;+\infty[$, f coïncide avec la fonction h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $h(x) = x\ln x$.
h étant une fonction dérivable sur $]0\,;+\infty[$, f est donc dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on a :

pour tout x élément de $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = h'(x) = 1 + \ln x$

d'où : pour tout x élément de $]0\,;+\infty[$, $1 + \ln x \geq 0 \iff x \geq \mathrm{e}^{-1}$.

- **Étude de la dérivabilité à droite en 0 de f**

La fonction h n'est pas définie en 0. Utilisons donc la définition de la dérivabilité à droite en 0.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{h(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln x = -\infty.$$

f n'est pas dérivable à droite en 0 et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$.

Tableau de variation

x	$-\infty$		-1		0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	1 ‖ $-\infty$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\mathrm{e}^{-1}$	↗	0	↘	$-\mathrm{e}^{-1}$	↗	$+\infty$

Représentation graphique de la fonction f

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J). Désignons par $(\mathscr{C}_f)$ la représentation graphique de f.

Tangentes

– La courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet des tangentes horizontales aux points $\mathrm{E}(-1\,;-\mathrm{e}^{-1})$ et $\mathrm{F}(\mathrm{e}^{-1}\,;-\mathrm{e}^{-1})$.
– La courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet au point O une tangente à gauche de coefficient directeur 1 et une tangente à droite verticale.

■ **Asymptotes**

La courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet en $-\infty$ une asymptote horizontale, la droite (OI).

■ **Construction de $(\mathscr{C}_f)$**

Tableau des valeurs approchées

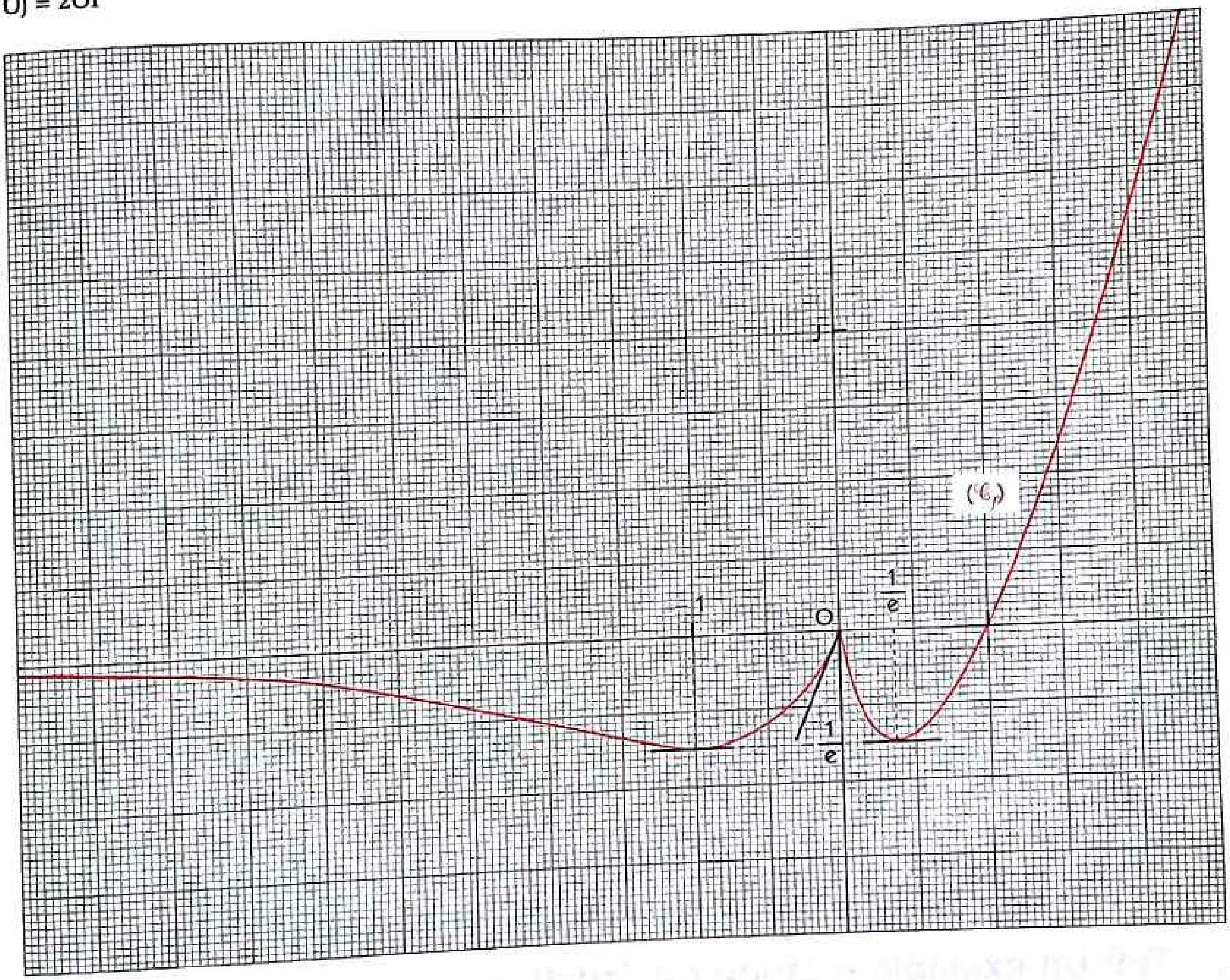
x	-4	-1	$-0,6$	$-0,4$	0	$0,2$	$0,6$	1	$1,2$	$1,4$	2
$f(x)$	$0,07$	$0,36$	$-0,32$	$-0,26$	0	$-0,32$	$-0,30$	0	$0,21$	$0,47$	$1,38$

Fenêtre de construction

$x_{min} = -4$; $y_{min} = -1$
$x_{max} = 2,5$; $y_{max} = 2$

Repère orthogonal

$OJ = 2OI$



Propriétés géométriques de $(\mathscr{C}_f)$

■ **Branches paraboliques**

On a vu que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Soit M un point de $(\mathscr{C}_f)$ d'abscisse x suffisamment grand. Étudions la position limite de (OM) lorsque x tend vers $+\infty$.

Le coefficient de (OM) est $\dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

La courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet donc en $+\infty$ une branche parabolique de direction (OJ).

TP Travaux pratiques

TP1 Étude de la continuité et de la dérivabilité en x_0

Ce TP a pour objet de fournir un exemple de fonction nécessitant une étude spécifique à une extrémité de l'intervalle sur lequel elle est définie.

Exercice commenté

f est la fonction définie sur [0 ; 1] par :

$$\begin{cases} \text{pour } x \in]0\,;1], & f(x) = (1 - e^{-x})\ln x \\ & f(0) = 0 \end{cases}$$

Étudier la continuité et la dérivabilité en 0.

■ **Étude de la continuité en 0**

Il s'agit de calculer $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x)$ et de comparer cette limite à $f(0)$.

En utilisant le produit des limites on obtient la forme indéterminée $\boxed{0 \times \infty}$.

– Transformons l'écriture de $f(x)$ afin d'utiliser des limites de référence.

$$f(x) = (x\ln x)\frac{e^{-x} - 1}{-x}.$$

– On sait que : $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} x\ln x = 0$.

– On constate que : $x \mapsto \dfrac{e^{-x} - 1}{-x}$ est la composée de $x \mapsto -x$ suivie de $x \mapsto \dfrac{e^{x} - 1}{x}$;

or : $\lim\limits_{x \to 0}(-x) = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0} \dfrac{e^{X} - 1}{X} = \exp'(0) = 1$

donc : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x} - 1}{-x} = 1.$

– Par conséquent : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \left(\lim\limits_{x \to 0} x\ln x\right)\left(\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x} - 1}{-x}\right) = 0$

donc : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

f est continue en 0

■ **Étude de la dérivabilité en 0**

Il s'agit de calculer : $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

On a : $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \dfrac{(1 - e^{-x})\ln x}{x} = \left(\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0}(1 - e^{-x})\right)\left(\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \dfrac{\ln x}{x}\right)$

Or : $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0}(1 - e^{-x}) = 0$ et $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

donc : $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$

$f'(0) = 0$

TP2 Un exemple d'étude de fonction

Ce TP a pour objet de présenter un exemple d'étude de fonction comportant des méthodes classiques et astucieuses d'étude de signe, de changement d'écriture, d'étude de limites, etc.

Exercice commenté

Étudier et représenter graphiquement la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \ln(x + 1 + e^{-x})$.

■ **Variations de la fonction f**

Ensemble de définition D_f de f

Soit x un nombre réel.

$$x \in D_f \iff x + 1 + e^{-x} > 0$$

Or nous ne savons pas résoudre algébriquement l'inéquation (I) $x + 1 + e^{-x} > 0$.
Pour cela, étudions le sens de variation de la fonction u de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $u(x) = x + 1 + e^{-x}$.

La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
pour tout nombre réel x, $u'(x) = 1 - e^{-x}$.
Le signe de $1 - e^{-x}$ est donné par la résolution de l'inéquation : $1 - e^{-x} \geq 0$
On obtient : $e^{-x} \leq 1$
$-x \leq 0$ (car exp est croissante)
$x \geq 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$u'(x)$	$-$	0	$+$
$u(x)$	$\searrow$	2	$\nearrow$

Le tableau de variation de u montre que :
pour tout nombre réel x, $u(x) > 0$

Par conséquent, $D_f = \mathbb{R}$.

Décomposition de f
La fonction f est la composée de u suivie de ln : $f = \ln \circ u$.
Cette décomposition de f permettra alors de déterminer la dérivée et de calculer les limites de f.

Limites de f
On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$; d'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Pour le calcul de la limite en $-\infty$ de u, la somme des limites donne la forme indéterminée : $\boxed{\infty - \infty}$.
Ramenons-nous à une limite de référence par une transformation d'écriture.

On a : $u(x) = x + 1 + \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{xe^x + e^x + 1}{e^x}$ (1) ; d'où : $\ln(u(x)) = \ln(xe^x + e^x + 1) - \ln(e^x)$

Pour tout nombre réel x, $f(x) = -x + \ln(xe^x + e^x + 1)$ (2)

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} (xe^x + e^x + 1) = 1$; d'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Dérivée
u étant une fonction strictement positive et dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction f égale à $\ln \circ u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
pour tout nombre réel x, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$
f' est donc du signe de u'.

Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	ln2	$\nearrow$ $+\infty$

■ **Représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$ de f**

Étude de la branche infinie en $-\infty$
L'écriture (2) montre que : $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) + x) = 0$.

La courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet en $-\infty$ une asymptote oblique, la droite (D) d'équation $y = -x$.

Étude de la branche infinie en $+\infty$
L'écriture (1) de $u(x)$ ne permet pas d'étudier la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$

On a : $u(x) = x + 1 + \dfrac{1}{e^x} = x\left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{xe^x}\right)$ (3) ; d'où : $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{1}{x} \times \ln\left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{xe^x}\right)$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{xe^x}\right) = 1$; d'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

La courbe $(\mathscr{C})$ admet en $+\infty$ une direction parabolique de direction (OI).

Position relative de $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à (D)
Soit x un nombre réel. $(f(x) - (-x)) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(xe^x + e^x + 1) \geq 0$
$(x + 1)e^x + 1 \geq 1$
$x + 1 \geq 0$

Par conséquent, $(\mathscr{C}_f)$ et (D) sont sécantes au point A $(-1 ; 1)$

pour $x > -1$, $(\mathscr{C}_f)$ est au-dessus de (D) ; pour $x < -1$, $(\mathscr{C}_f)$ est en dessous de (D).

• Construire $(\mathscr{C}_f)$.

Exercices

ENTRAÎNEMENT

Définition et propriétés algébriques

Simplifications d'écritures

1 x étant un nombre réel, simplifier les expressions suivantes :

(1) $e^{3\ln 5}$ (2) $e^{\ln 2+\ln 5}$ (3) $\ln(e^{3x})$ (4) $\ln(3e^{6x})$

(6) $\frac{e^{x-1}}{e^{2}}\times \ln e^{3}\times e^{\ln e^{3}}+2\ln(\ln e)$ (7) $e^{-\ln 2}$

2 x désigne un nombre réel strictement positif. Simplifier au maximum les expressions suivantes :

(1) $e^{x+\ln x}$ (2) $e^{\ln(x-1)}e^{-\ln x}$ (3) $\frac{e^{\ln x}}{\ln(e^{x})}$ (4) $\frac{e^{\ln x}}{\ln(e^{x^2})}$

Résolution d'équations

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(1) $e^{3x+1}=7$ (2) $e^{x-3}=1$ (3) $e^{2x-1}=6$

(4) $e^{-x-4}-6=0$ (5) $e^{x+3}+2=1$ (6) $e^{x+3}+\frac{3}{2}=2$

4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(1) $3e^{4x}+5e^{2x}-2=0$

(2) $e^{3x+1}+\sqrt{e^{3x+1}}-6=0$

(3) $(\ln x)^3+4(\ln x)^2-\ln x-4=0$

5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(1) $\ln x=-2$ (2) $\ln x=\frac{1}{4}$

(3) $\ln(x^2)=16$ (4) $(\ln x)^2=16$

6 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$X^2-3X+2=0$.

2. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation :
$(\ln x)^2-3\ln x+2=0$.

7 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(\ln x)^2-\ln x=2$.

Résolution d'inéquations

8 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

(1) $e^{-3x-2}>3$ (2) $e^{x-6}>1$ (3) $e^{-2x+3}\geq 6$

(4) $e^{-x+4}-8\geq 0$ (5) $e^{x+2}<8$ (6) $e^{x-3}+\frac{3}{2}\leq 2$

9 1. Factoriser : x^2+x-6.

2. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation :
$(\ln x)^2+\ln x-6\leq 0$.

10 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

(1) $2e^{2x}+5e^{x}-3\leq 0$ (2) $e^{2x}-5e^{x}-6\geq 0$

(3) $e^{2x}+8e^{x}+15\leq 0$ (4) $e^{x}-4e^{x}+3>0$

11 On considère le polynome suivant :
$p(x)=-x^3+7x-6$.

1. Écrire $p(x)$ sous forme d'un produit de trois facteurs du premier degré.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{3x}-7e^{x}+6<0$.

12 Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose :
$P(x)=2x^3-x^2-5x-2$.

1. *a)* Vérifier que $P(-1)=0$.
b) Écrire $P(x)$ sous la forme d'un produit de trois facteurs du premier degré.
c) En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation :
$P(x)\leq 0$.
2. En utilisant les résultats de la question 1., résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
(1) $2(\ln x)^3-(\ln x)^2-5\ln x-2\leq 0$
(2) $2\ln x+\ln(2x-1)\leq \ln(5x+2)$

Système

13 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

(1) $\begin{cases} e^{x}+e^{y}=2 \\ 3e^{x}-2e^{y}=11 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} e^{x}+e^{y}=7 \\ e^{x+y}=10 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 5e^{x}-e^{y}=19 \\ e^{x+y}=30 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} \ln(y+6)-\ln x=3\ln x \\ e^{6x}e^{y}=e^{-6} \end{cases}$

14 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes d'inéquations suivants :

(1) $\begin{cases} e^{x+y}=3 \\ e^{x-y}=2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2e^{x}+3e^{y}=13 \\ e^{x}+e^{y}=5 \end{cases}$

Dérivées

15 Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle K donné.

(1) $f(x)=e^{2x}\ln x$ avec $K=]0\,;+\infty[$

(2) $f(x)=(x^3+4)e^{-x}$ avec $K=\mathbb{R}$

(3) $f(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ avec $K=\mathbb{R}$

(4) $f(x)=\frac{e^{x}-2}{e^{x}+1}$ avec $K=\mathbb{R}$

(5) $f(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$ avec $K=\mathbb{R}$

(6) $f(x)=e^{x^3}$ avec $K=\mathbb{R}$

(7) $f(x)=\frac{1}{x}-e^{\frac{1}{x}}$ avec $K=]0\,;+\infty[$

16 Pour chacun des cas suivants, on considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie ci-dessous.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f.
2. Démontrer que f est dérivable en tout élément de D_f et calculer $f'(x)$.

(1) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ (2) $f(x)=e^{\frac{1}{2x+1}}$

(3) $f(x)=e^{\ln x}$ (4) $f(x)=(3x+2)e^{x}$

(5) $f(x)=\frac{x}{1-e^{x}}$ (6) $f(x)=(2x^2-6x+7)e^{x}$

17 P est une fonction polynôme et a un nombre réel. Démontrer que la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x)=P(x)\,e^{ax}$ est dérivable sue $\mathbb{R}$ et que $f'(x)=Q(x)\,e^{ax}$, Q étant une fonction polynôme de même degré que P.

Application

(1) $f(x)=(2x+3)e^{x}$ (2) $f(x)=(x^2-3)e^{-5x}$.

Primitives

18 Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$, de chacune des fonctions suivants :

(1) $f : x \mapsto e^{-x+3}$ (2) $f : x \mapsto e^{2x}$

(3) $f : x \mapsto (-2x+3)e^{-x^2+3x-1}$

(4) $f : x \mapsto 3x\,e^{x^2-1}$ (5) $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{3e^x+2}$

19 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{e^x+1}.$$

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de f. *(On pourra écrire $f(x) = 1 - g(x)$, où g est une fonction à déterminer.)*

20 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{(e^x+2)^2}.$$

1. (1) Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout x différent de -2 :

$$\frac{1}{(x+2)^2} = a + \frac{bx}{x+2} + \frac{cx}{(x+2)^2}$$

b) En déduire une autre écriture de $f(x)$.

2. Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de f.

21 Déterminer les nombres réels a et b pour que la fonction :

$$F : x \mapsto (ax+b)e^{-x}$$

soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction :

$$f : x \mapsto (2x+1)e^{-x}.$$

22 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2-4)e^{2x}.$$

1. Déterminer les nombres réels α, β, et γ pour que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^{2x}$$

soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de f.

2. Déterminer la primitive sur $\mathbb{R}$ de f qui s'annule en 0.

Calcul de limites

23 Déterminer les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} e^x \ln x$ (2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x\, e^{2x}$

(3) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} e^{\frac{1}{x}}$ (4) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}}$

(5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{e^{x+1}}$ (6) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^{2x} - e^x)$

(7) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x-1}}{e^x - 1}$ (8) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x-1}}{e^x - 1}$

24 Calculer les limites de chacune des fonctions suivantes, aux extrémités de l'intervalle K donné :

(1) $f : x \mapsto e^{-x}$ avec $K = \mathbb{R}$

(2) $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{e^x}$ avec $K =]0\,;+\infty[$

(3) $f : x \mapsto xe^{-x}$ avec $K = \mathbb{R}$

(4) $f : x \mapsto x + 1 - e^x$ avec $K = \mathbb{R}$

(5) $f : x \mapsto e^{-x^2}$ avec $K = \mathbb{R}$

25 Calculer chacune des limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{2+e^x}$ (2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{2e^x - 1}$

(3) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{e^{3x} - e^{2x}}{x}$ (4) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} (x+2)e^{\frac{1}{x-1}}$

26 Calculer les limites de chacune des fonctions suivantes, aux extrémités de l'intervalle K donné :

(1) $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{x+1}$ avec $K =]-1\,;+\infty[$

(2) $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)$ avec $K = \mathbb{R}$

27 Calculer les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{1-3x}$ (2) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{5x+2}$

(3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{5x}}{x}$ (4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x+1}}{x^2}$

(5) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x - e^{3x}}{e^{x+2}}$ (6) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x-5}}{x}$

(7) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x+3)e^x$ (8) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+1}{x} e^x$

28 Calculer les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^x - e}{x-1}$ (2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^{x-1} - 1}{x-1}$

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{xe^{x-1}}{x^3}$ (4) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{e^x - e^2}{x-2}$

(5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sqrt{x}}$ (6) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x} - e^x}{x}$

29 On considère les fonctions f et g définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{x+1} \quad ; \quad g(x) = 2 + e^x.$$

On désigne par (Γ), (Γ_1) et (Γ_2) les représentations graphiques des fonctions exp, f et g dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

Montrer qu'il existe deux transformations t_1 et t_2 du plan telles que :

$$(\Gamma_1) = t_1(\Gamma) \quad \text{et} \quad (\Gamma_2) = t_2(\Gamma).$$

Construire (Γ) puis (Γ_1) et (Γ_2).

D'après bac

Étude de fonctions

30 Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J). Étudier et représenter graphiquement les fonctions f, g, h et k de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

(1) $f(x) = \dfrac{2}{e^x+1}$ (2) $g(x) = e^{3x}$

(3) $h(x) = \dfrac{2}{e^x-1}$ (4) $k(x) = e^{2x+1}$

31 Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).

1. Étudier et représenter graphiquement la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \exp(1 - e^x)$.

2. On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\text{(E)} \quad -e^{2x} + e^x + 2 = 0.$$

Résoudre graphiquement puis algébriquement l'équation (E). Comparer ces deux résultats.

3. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation :

$$\text{(E')} \quad -e^{2x} + e^x + m = 0.$$

32 Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J). Étudier et représenter graphiquement les fonctions f et g définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 + e^{x-2} \quad ; \quad g(x) = e^{-x+2}.$$

On désigne respectivement par $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ les représentation graphique de f et g.
1. Étudier les fonctions f et g.
2. Démontrer que $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ possèdent en commun un unique point A.
3. Déterminer les tangentes à $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ au point A.
4. Démontrer que $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ sont symétriques par rapport à la droite (D) d'équation $x = 2$.
5. Étudier la position de $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à la droite (D') d'équation $y = x$.
6. Construire $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$.

33 On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} - x - 4$.
On désigne par $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. Étudier le comportement de f en $+\infty$ (mettre e^x en facteur dans l'expression de $f(x)$).
3. *a)* Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'(x)$.
b) Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x - 4$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ en $-\infty$.
Construire $(\mathscr{C})$ et la droite (D).

34 On considère la fonction f de $\mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = x + \frac{e^x}{2(e^{2x} - 2)}.$$
On désigne par $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
1. Démontrer que la droite d'équation $y = \ln 2$ est une asymptote verticale à la courbe $(\mathscr{C})$.
2. *a)* Déterminer la limite de f en $-\infty$.
b) Justifier que la droite (D_1) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ en $-\infty$.
3. *a)* Démontrer que : pour tout x distinct de $\ln 2$
$$f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{2x} - 2}.$$
b) En déduire la limite de f en $+\infty$ et justifier que la droite (D_2) d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.
c) Démontrer que : pour tout x distinct de $\ln 2$
$$f'(x) = \frac{(e^x - 1)(e^x - 4)}{(e^{2x} - 2)^2}.$$
4. En déduire les variations de f.
5. *a)* Représenter graphiquement la courbe $(\mathscr{C})$.
b) Étudier graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, l'intersection de $(\mathscr{C})$ avec la droite d'équation $y = x + m$.
c) Retrouver algébriquement ces résultats.

D'après bac

Utilisation d'une fonction auxiliaire

35 On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = e^{2x} - 2e^x$.
1. Étudier le sens de variation de f.
2. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ de f au point d'abscisse $x_0 = -\ln 2$.
3. Soit g la fonction définie par :
$$g(x) = f(x) + \frac{1}{2}(x + \ln 2) + \frac{3}{4}.$$
Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$ et déduire de $g''(x)$ et puis de $g'(x)$ le signe de $g(x)$.
4. Tracer $(\mathscr{C}_f)$ et (T) dans le même repère et déterminer leurs positions respectives.

36 1. On considère la fonction g définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{2x} - 2x - 1$.
a) Étudier le sens de variation de g.
b) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
2. On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = (x + 1)e^{-2x} + x + 1.$$
a) Étudier la fonction f.
(On mettra $f'(x)$ sous la forme $e^{-2x}g(x)$.)
b) On désigne par $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
c) Montrer que $(\mathscr{C})$) admet une asymptote oblique (D) en $+\infty$, en donner une équation.
d) Étudier les positions relatives de $(\mathscr{C})$ et (D).
3. *a)* Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on précisera.
On désigne par f^{-1} la bijection réciproque de f et par $(\mathscr{C}')$ la représentation graphique de f^{-1}.
b) Sur quelle partie de son ensemble de définition, f^{-1} est-elle dérivable ?
c) Construire $(\mathscr{C})$.
4. α est un nombre réel supérieur ou égal à -1. On désigne par $\mathscr{A}(\alpha)$ l'aire de l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que :
$$\begin{cases} -1 \leq x \leq \alpha \\ x + 1 \leq y \leq f(x). \end{cases}$$
a) Calculer $\mathscr{A}(\alpha)$ à l'aide d'une intérgation par parties.
b) Démontrer que $\mathscr{A}(\alpha)$ admet une limite ℓ lorsque x tend vers $+\infty$.
c) Donner une valeur approchée de $\left(\ell - \mathscr{A}(3)\right)$ à 10^{-2} près.

D'après bac

Courbes asymptotes

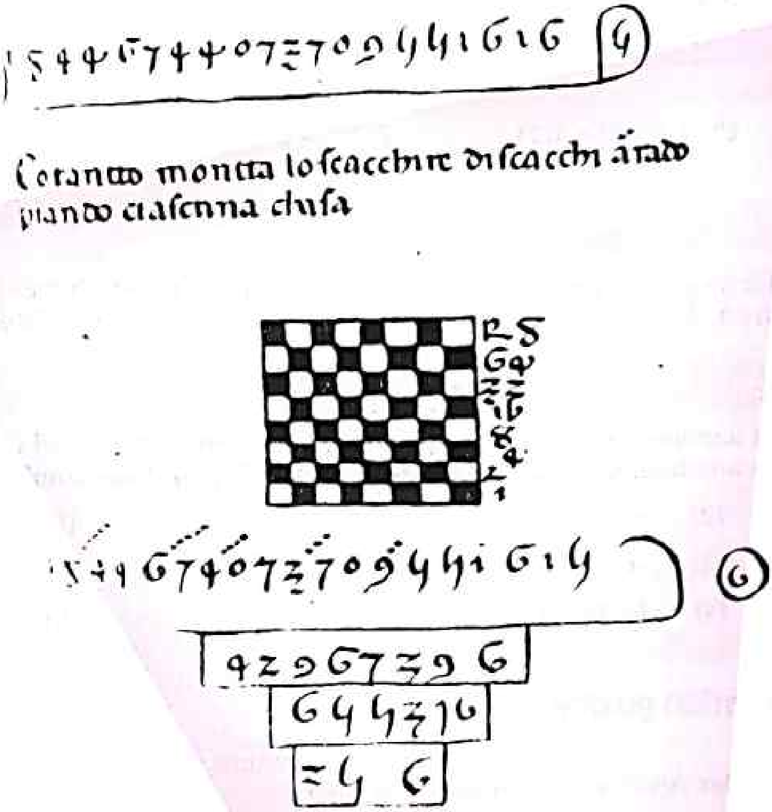
37 On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x + 1}$.
On désigne par $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).
1. Étudier le sens de variation de la fonction f.
2. On considère la courbe (Γ) représentation graphique de la fonction g définie par :
$$g(x) = e^x - 1.$$
a) Démontrer que (Γ) est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.
b) Préciser les positions relatives de $(\mathscr{C})$ et (Γ).
3. Construire (Γ) à partir de la représentation graphique de la fonction exponentielle.
Sur le même graphique, construire $(\mathscr{C})$.

6 Fonctions exponentielles Fonctions puissances

Inde ou Perse ?

La légende dit que l'inventeur du jeu d'échec demanda en récompensé du blé, de sorte que chaque case contienne un nombre double de grains que la précédente : $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{63}$

soit : 18 446 744 073 709 551 615 grains de blé !



© Palais de la Découverte, Paris

Échiquier / histoire du nombre

SOMMAIRE

1 Les nombres réels a^{α}

Définition

Soit a un nombre réel strictement positif et r un nombre rationnel.

On sait que : $a = e^{\ln a}$

donc : $a^r = (e^{\ln a})^r = e^{r\ln a}$

or : $e^{r\ln a}$ a un sens lorsque r est un nombre réel ;

d'où la définition suivante :

Définition

a étant un nombre réel strictement positif et α un nombre réel quelconque, on appelle *puissance de a d'exposant* α le nombre réel, noté a^{α}, défini par : $a^{\alpha} = e^{\alpha\ln a}$.

Pour tout nombre réel a strictement positif, pour tout nombre réel α, $a^{\alpha} > 0$.
a^{α} se lit : a exposant α.

Exemples

On a : $2^{0,3} = e^{0,3\ln 2} \approx 1,23$; $7^{-12,9} = e^{-12,9\ln 7} \approx 1,25$.

Propriétés

• Rappeler les propriétés de la puissance d'un nombre réel strictement positif d'exposant rationnel vues au chapitre 1. Nous allons démontrer que ces propriétés restent valables lorsque l'exposant est réel.

Propriétés

Pour tout nombre réel strictement positif a, pour tout nombre réel α, (1) $\ln(a^{\alpha}) = \alpha\ln a$.
Pour tous nombres réels strictement positifs a et b, pour tous nombres réels α et β,

(2) $a^{\alpha} \times b^{\alpha} = (ab)^{\alpha}$

(3) $a^{\alpha} \times a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}$

(4) $(a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha\beta}$

(5) $\dfrac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\alpha}$

(6) $\dfrac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} = a^{\alpha-\beta}$

Démonstration guidée

Pour établir les égalités, on pourra $\begin{cases} \text{utiliser l'écriture : } a^{\alpha} = e^{\alpha\ln a}, \\ \quad \textit{ou bien} \\ \text{comparer le logarithme népérien des deux membres de l'égalité.} \end{cases}$

Le nombre réel a^{α}, image de deux applications

a étant un nombre réel strictement positif et α un nombre réel quelconque, a^{α} peut être considéré comme :

– L'image de α par l'application : $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto a^x \end{array}$

telle que : $\boxed{a^x = e^{x\ln a}}$

Cette application est constante pour : $a = 1$.

– L'image de a par l'application : $\begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^{\alpha} \end{array}$

telle que : $\boxed{x^{\alpha} = e^{\alpha\ln x}}$

Cette application est constante pour : $\alpha = 0$.

2 Fonctions exponentielles de base a

Définition

On a vu que les nombres réels a^α nous conduisent à la définition de deux applications dont la première est obtenue en fixant a et en faisant varier α.

Définition

a étant un nombre réel strictement positif, différent de 1, on appelle *fonction exponentielle de base a*, l'application

$$\begin{aligned} \exp_a : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto a^x \end{aligned}$$

Pour tout nombre réel x, $\exp_a(x) = a^x = e^{x\ln a}$ $[a > 0 ; a \neq 1]$.

Remarque

La fonction exponentielle népérienne exp est définie par : $\exp(x) = e^x$; c'est la fonction exponentielle de base e.

Propriété

a étant un nombre réel strictement positif et différent de 1, la fonction $\exp_a$ est une bijection strictement monotone de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$;

– si $0 < a < 1$ alors $\exp_a$ est strictement décroissante,

– si $a > 1$ alors $\exp_a$ est strictement croissante.

Démonstration guidée

On sait que : $a^x = e^{x\ln a}$.

Supposons : $a > 0$ et $a \neq 1$,

on peut donc utiliser la décomposition ci-contre pour prouver que $\exp_a$ est bijective.

Par ailleurs, u_a est la fonction linéaire de coefficient $\ln a$; son sens de variation est donc donné par le signe de $\ln a$.

(On peut utiliser la propriété donnant le sens de variation de la composée de deux fonctions strictement monotones pour étudier le sens de variation de $\exp_a$.)

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "u_a"] \arrow[rr, bend left, "\exp_a"] & \mathbb{R} \arrow[r, "\exp"] & \mathbb{R}_+^* \\ x \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, bend right, "\exp\circ u_a"'] & x\ln a \arrow[r, mapsto] & e^{x\ln a} \end{tikzcd}$$

De la propriété précédente, on déduit la propriété suivante :

Propriété

a étant un nombre réel strictement positif et différent de 1, α et β des nombres réels,

			pour tous nombres réels α et β,	$a^\alpha = a^\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$
si	$0 < a < 1$	***alors***	**pour tous nombres réels α et β,**	$a^\alpha < a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$
si	$a > 1$	***alors***	**pour tous nombres réels α et β,**	$a^\alpha < a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$.

Équations – Inéquations

Ces équations et inéquations ont l'inconnue en exposant.

Exemple d'équations et d'inéquations de types $a^{u(x)} = b^{v(x)}$; $a^{u(x)} < b^{v(x)}$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations et inéquations suivantes :
(E) $2^{3x+8} = 5$ (I) $3^{2x+9} \leq 7^{-x+1}$.

On peut procéder par une transformation d'écriture en prenant le logarithme népérien des deux membres.

Résolution de l'équation (E)

$\ln[2^{3x+8}] = \ln 5$

$(3x + 8)\ln 2 = \ln 5$

$x = \dfrac{\ln 5 - 8\ln 2}{3\ln 2}$

$S_{(E)} = \left\{\dfrac{\ln 5 - 8\ln 2}{3\ln 2}\right\}$

Résolution de l'inéquation (I)

$\ln[3^{2x+9}] \leq \ln[7^{-x+1}]$

$(2x + 9)\ln 3 \leq (-x + 1)\ln 7$

$x \leq \dfrac{\ln 7 - 9\ln 3}{\ln 7 + 2\ln 3}$; car $\ln 7 + 2\ln 3 > 0$

$S_{(I)} = \left]-\infty ; \dfrac{\ln 7 - 9\ln 3}{\ln 7 + 2\ln 3}\right]$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations et inéquations suivantes :
(E) $5^{4x-1} = -3$ (I) $5^{4x-1} > -3$.

Puisque la puissance d'un nombre réel strictement positif est un nombre réel strictement positif, on en déduit que :
- l'équation (E) n'a pas de solution ; $S_{(E)} = \varnothing$;
- tout nombre réel est solution de l'inéquation (I) ; $S_{(I)} = \mathbb{R}$.

Exemple d'équations et d'inéquations polynomiales

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E) $3 \times 49^x + 5 \times 7^x - 2 = 0$.

On peut se ramener à la résolution d'une équation du second degré à l'aide d'une inconnue auxiliaire.

L'ensemble de validité de (E) est : $\mathbb{R}$

L'équation (E) peut s'écrire : (E) $3 \times (7^x)^2 + 5 \times 7^x - 2 = 0$

Choix de l'inconnue auxiliaire : $X = 7^x$

Résolvante de (E) : (E') $3X^2 + 5X - 2 = 0$

Le nombre réel a est une solution de (E) $\Leftrightarrow$ le nombre réel 7^a est une solution de (E')

or, la résolution de (E') donne : $X = -2$ et $X = \dfrac{1}{3}$

Les solutions de (E) sont donc les solutions des équations suivantes (1) et (2).

(1) $7^x = -2$

(1) n'a pas de solution.

(2) $7^x = \dfrac{1}{3}$

$x\ln 7 = \ln(\dfrac{1}{3})$

$x = -\dfrac{\ln 3}{\ln 7}$

l'ensemble des solutions de (E) est : $\{-\dfrac{\ln 3}{\ln 7}\}$.

- Résoudre de la même manière l'inéquation : (I) $3 \times 49^x + 5 \times 7^x - 2 > 0$.

Exercice

2.a Résoudre dans $\mathbb{R}$:

(1) $2^{3x} = 5$

(2) $3^x = 3^{1-6x}$

(3) $5^x \leq 25^{3x}$

(4) $7^x < 2$

(5) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^5 \geq 2^{x-1}$

(6) $2^{x+1} > 5^x$

(7) $3^{2x} + 3x - 6 = 0$

(8) $3^{2x} + 3^x - 6 < 0$

(9) $3^x + 1 - 6 \times 3^{-x} = 0$

2.2. Variations et représentations graphiques de la fonction $\exp_a$

Variations de $\exp_a$

Nous avons déjà étudié le sens de variation de la fonction $\exp_a$ à l'aide de sa décomposition.

• Compléter cette étude en utilisant l'écriture : $a^x = e^{x\ln a}$.

On obtient les résultats suivants :

Dérivée

La fonction $\exp_a$ est dérivable, donc continue, sur $\mathbb{R}$ et : pour tout élément x de $\mathbb{R}$, $(a^x)' = \ln a \times a^x$.

Limites

– Si $0 < a < 1$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$

– Si $a > 1$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$

Tableaux de variation

$0 < a < 1$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$a^x \ln a$	−	−	$\ln a$ −	−	
a^x	$+\infty$	$1/a$	1	a	0

$a > 1$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$a^x \ln a$	+	+	$\ln a$ +	+	
a^x	0	$1/a$	1	a	$+\infty$

Représentations graphiques de $\exp_a$

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). On désigne par $(\mathscr{C}_a)$ la représentation graphique de $\exp_a$.

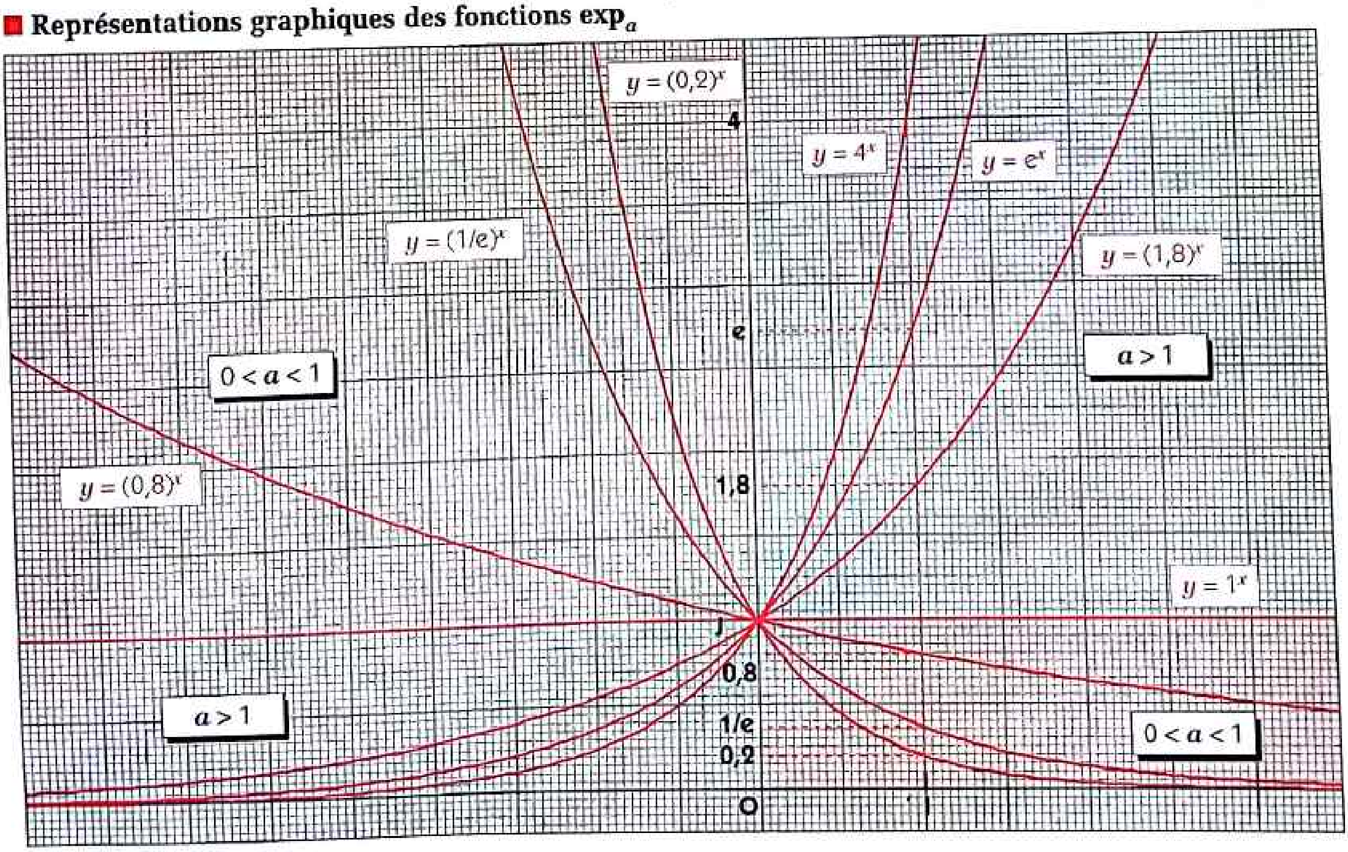
Tangentes

Les courbes $(\mathscr{C}_a)$ passent toutes par le point J, où elles admettent chacune une tangente de coefficient directeur $\ln a$.

Asymptote

La droite (OI) est une asymptote horizontale à $(\mathscr{C}_a)$, $\begin{cases} \text{en } +\infty \text{ lorsque } 0 < a < 1, \\ \text{en } -\infty \text{ lorsque } a > 1. \end{cases}$

Représentations graphiques des fonctions $\exp_a$



3 Les fonctions puissances d'exposant α

3.1. Définition – Propriétés

On a vu que les nombres réels a^α permettent de définir deux applications dont la seconde est obtenue en fixant α et en faisant varier a.

Définition

α étant un nombre réel, différent de 0, on appelle *puissance d'exposant réel* α, l'application

$$f_\alpha : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^\alpha$$

Pour tout nombre réel strictement positif x, $f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ $[\alpha \neq 0]$.

Cas particuliers

n étant un nombre entier naturel non nul et m un nombre entier relatif non nul,

– si $\alpha = n$, f_n coïncide sur $]0\,;+\infty[$ avec la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f_n(x) = x^n$

– si $\alpha = -n$, f_n coïncide sur $]0\,;+\infty[$ avec la fonction de $\mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f_n(x) = \dfrac{1}{x^n}$

– si $\alpha = \dfrac{1}{n}$, f_n coïncide sur $]0\,;+\infty[$ avec la fonction de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$

– si $\alpha = \dfrac{m}{n}$, $f_{m/n}$ coïncide sur $]0\,;+\infty[$ avec la fonction de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f_{m/n}(x) = \sqrt[n]{x^m}$

Propriété

α étant un nombre réel différent de 0, la fonction puissance d'exposant α, est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Si $\alpha < 0$, alors f_α est strictement décroissante.
Si $\alpha > 0$, alors f_α est strictement croissante.

Démonstration guidée

On sait que : $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.

Supposons : $\alpha \neq 0$.

On peut utiliser la décomposition ci-contre pour prouver que f_α est bijective.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}_+^* \arrow[r, "v_\alpha"] \arrow[rr, bend left, "f_\alpha"] \arrow[rr, bend right, "\exp \circ v_\alpha"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "\exp"] & \mathbb{R}_+^* \\
x \arrow[r, mapsto] & \alpha \ln x \arrow[r, mapsto] & e^{\alpha \ln x}
\end{tikzcd}$$

Par ailleurs, v_α est la fonction $\alpha\ln$; son sens de variation est donc donné par le signe de α car ln est strictement croissante.

(On pourra utiliser la propriété donnant le sens de variation du produit d'une fonction par un nombre réel et de la composée de deux fonctions strictement monotones pour étudier le sens de variation de f_α.)

De la propriété précédente, on déduit la propriété suivante :

Propriété

α est un nombre réel différent de 0, a et b des nombres réels strictement positifs.

$a^\alpha = b^\alpha \Leftrightarrow a = b$

si $\alpha < 0$ alors $a^\alpha < b^\alpha \Leftrightarrow a > b$

si $\alpha > 0$ alors $a^\alpha < b^\alpha \Leftrightarrow a < b$

3.2. Variations et représentations graphiques

Variations de f_α

Nous avons déjà étudié le sens de variation de la fonction f_α à l'aide de sa décomposition.

• Compléter cette étude en utilisant l'écriture : $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.

On obtient les tableaux de variation suivants :

Tableaux de variation

$\alpha > 0$

x	0		1		$+\infty$
$\alpha x^{\alpha-1}$	‖	$+$	$\boxed{\alpha}$	$+$	
x^α	‖ 0	↗	$\boxed{1}$	↗	$+\infty$

$\alpha < 0$

x	0		1		$+\infty$
$\alpha x^{\alpha-1}$	‖	$-$	$\boxed{\alpha}$	$-$	
x^α	‖ $+\infty$	↘	$\boxed{1}$	↘	0

Représentation graphique de f_α

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). On désigne par $(\mathscr{C}_\alpha)$ la représentation graphique de f_α.

• Lorsque $\alpha < 0$

La droite (OJ) est une asymptote verticale et la droite (OI) est une asymptote horizontale en $+\infty$ à $(\mathscr{C}_\alpha)$.

• Lorsque $\alpha > 0$

Recherche d'un prolongement par continuité en 0 de f_α

La fonction f_α est continue sur $]0\,;+\infty[$ et $\lim\limits_{x \to 0} f_\alpha(x) = 0$.

f_α admet un prolongement par continuité en 0, la fonction g_α définie par : $\begin{cases} \text{pour } x \in \mathbb{R}_+^*, & g_\alpha(x) = f_\alpha(x) \\ & g_\alpha(0) = 0 \end{cases}$

La représentation graphique de la fonction g_α est donc la courbe $(\mathscr{C}_\alpha) \cup \{0\}$.

Recherche d'une tangente au point O à la courbe $(\mathscr{C}_\alpha) \cup \{0\}$, représentation graphique de g_α

Pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{g_\alpha(x) - g_\alpha(0)}{x} = x^{\alpha-1}$.

Par conséquent :

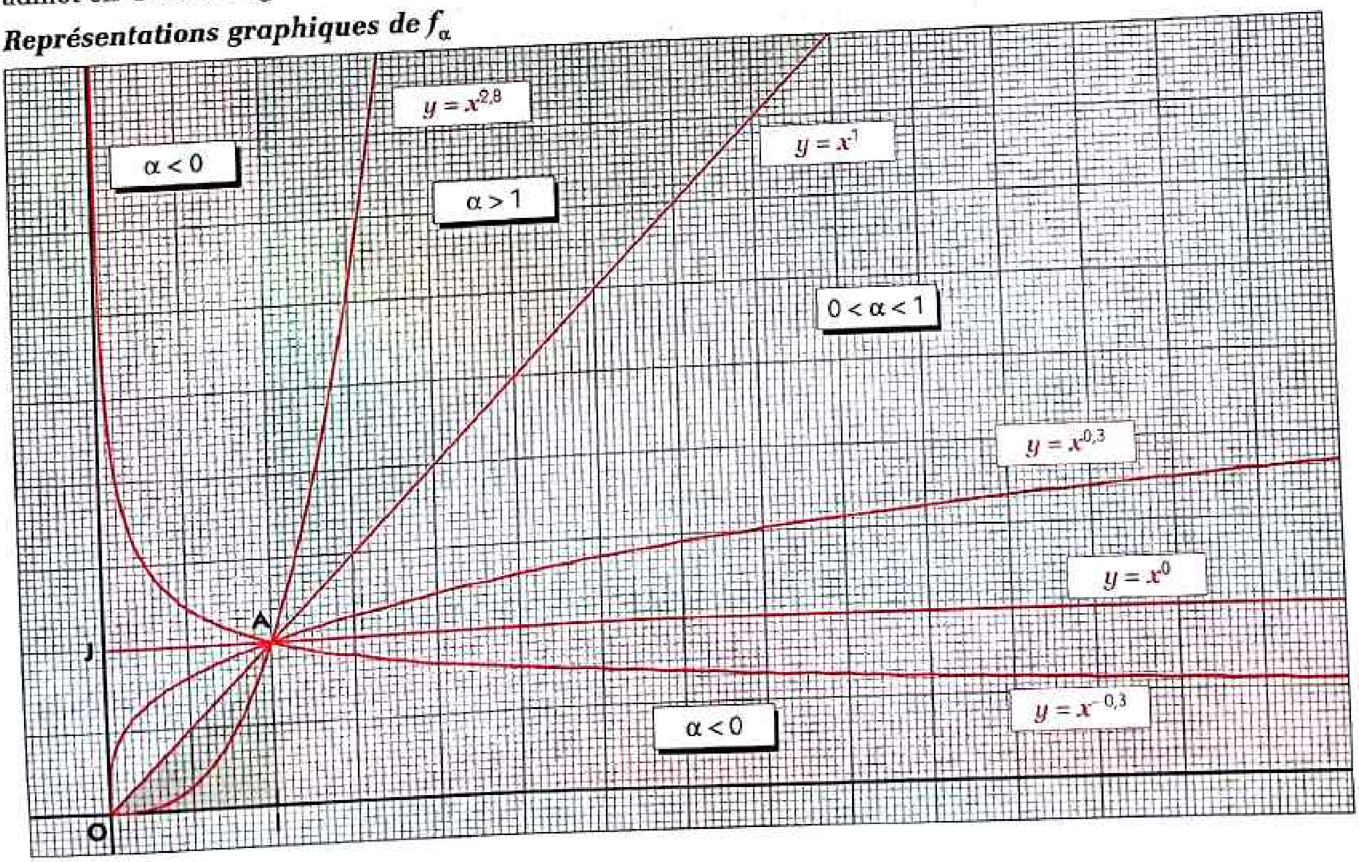
– lorsque $0 < \alpha < 1$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{g_\alpha(x) - g_\alpha(0)}{x} = +\infty$

g_α n'est pas dérivable à droite en 0, et $(\mathscr{C}_\alpha) \cup \{0\}$ admet en O une tangente verticale.

– lorsque $\alpha > 1$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{g_\alpha(x) - g_\alpha(0)}{x} = 0$

g_α a une dérivée à droite en 0 égale à 0, donc $(\mathscr{C}_\alpha) \cup \{0\}$ admet en O une tangente horizontale.

Représentations graphiques de f_α



3.3. Dérivée – Primitives – Limites

On sait que, α étant un nombre réel différent de 0, pour tout nombre réel x strictement positif, $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$*.*
Cette écriture nous a permis d'étudier les variations de la fonction $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$*.*
Récapitulons les résultats et complétons-les.

Dérivée de f_α de la fonction composée u^α

Propriété

α étant un nombre réel différent de 0,
– la fonction $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $\boxed{\text{pour tout élément de } \mathbb{R}_+^*,\ (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}}$

– si u est une fonction strictement positive sur un intervalle K, alors la fonction u^α est dérivable sur K et : $\boxed{(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}}$

Exemple

Considérons la fonction f définie sur $]0{,}6\ ;+\infty[$ par : $f(x) = (5x^3 - 3)^{4/7}$.
La fonction $x \mapsto 5x^3 - 3$ est dérivable et strictement positive sur $]0{,}6\ ;+\infty[$.
La fonction f est donc dérivable sur $]0{,}6\ ;+\infty[$ et on a :

$$f'(x) = \frac{4}{7} \times 15x^2 \times (5x^3 - 3)^{4/7-1} = \frac{60}{7} \times x^2\,(5x^3 - 3)^{-3/7}.$$

Recherche de primitives

De l'expression de la dérivée de la fonction f_α et de la fonction composée u^α, il résulte la propriété suivante donnant de nouvelles primitives.

Propriété

α étant un nombre réel différent de 0 et de – 1,
– une primitive sur $]0\ ;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$,
– si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle K, alors une primitive sur K de la fonction $u'u^\alpha$ est la fonction $\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

Exemples

– Une primitive sur $]0\ ;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto x^{\sqrt{3}}$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+\sqrt{3}}\, x^{1+\sqrt{3}}$.
– La fonction $x \mapsto (2x - 5)$ est dérivable et strictement positive sur $]2{,}5\ ;+\infty[$.
Une primitive sur $]2{,}5\ ;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto 2(2x-5)^{\sqrt{3}}$ est donc la fonction $x \mapsto \dfrac{(2x-5)^{1+\sqrt{3}}}{1+\sqrt{3}}$.

Limites

– Si	$\alpha > 0$	alors	$\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = 0$	et	$\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$
– Si	$\alpha < 0$	alors	$\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$	et	$\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

Exercices

3.a On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = (1-x)^\pi$.
Quel est l'ensemble de définition D de f ?
Déterminer la dérivée de $x \mapsto (1-x)^\pi$.
Déterminer une primitive sur D de la fonction $x \mapsto (1-x)^\pi$.

3.b Déterminer les dérivées de chacune des fonctions f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :
(1) $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$
(2) $f(x) = \sqrt[3]{\cos x}$
(3) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2+1}}$
(4) $f(x) = \sqrt[3]{x^5}$

4 Exemples d'études de fonctions

4.1. Comparaison des fonctions ln, exp et f_α $[\alpha > 0]$

Introduction

Position du problème

On sait que ln, exp et f_α $[\alpha > 0]$ sont des fonctions strictement croissantes qui tendent vers $+\infty$ en $+\infty$.
Pour les grandes valeurs de la variable, quel est le comportement de ces fonctions les unes par rapport aux autres ?
Nous allons, par des approches graphique et numérique, aborder la notion de « croissance comparée » des fonctions.

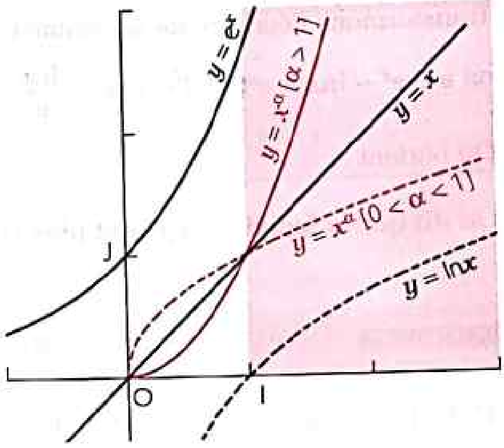
Approche graphique

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).

Ci-contre, on a construit les représentations graphiques des fonctions ln, exp et f_α $[\alpha > 0]$.

Dans la fenêtre de construction de ces graphiques, il semble que : pour $x > 1$, $\ln x < x^\alpha < e^x$.

Contrôlons cette conjecture par une approche numérique.



Activité sur une approche numérique

On considère la fonction ln et la fonction racine carrée. Elles sont strictement croissantes et :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

On veut comparer le comportement de ces deux fonctions pour de grandes valeurs de la variable.

Pour cela,

– Déterminer les valeurs de x à partir desquels on a : $\ln x \geq 10^4$; $\sqrt{x} \geq 10^4$.

– Comparer $\ln x$ et $\sqrt{x}$ pour quelques valeurs de x supérieures à 1.

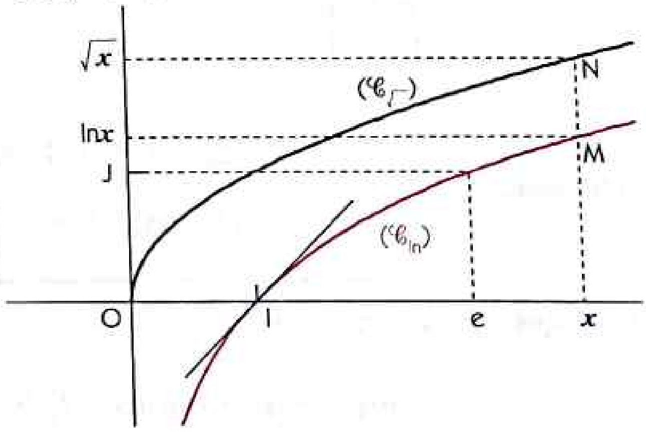
– Étudier la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x} - \ln x$.

Pour calculer $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x} - \ln x)$, on écrit : $\sqrt{x} - \ln x = \sqrt{x}\left(1 - \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$,

on obtient : $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$; $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x} - \ln x) = +\infty$.

– Observer le tableau de variation de f et la représentation graphique de ln et $x \mapsto \sqrt{x}$.

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	$\boxed{0}$	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$\boxed{2 - \ln 4}$	↗	$+\infty$



– Donner une interprétation graphique du tableau de variation de f.
– Aurait-il été possible de conjecturer sur le graphique, la limite en $+\infty$ de la fonction f ?

Remarque

Étudier la croissance comparée de deux fonctions f et g strictement croissantes qui tendent vers $+\infty$ en $+\infty$, revient à étudier la limite en $+\infty$ de leur différence. Or, la différence de leur limite en $+\infty$ donne la forme indéterminée $\boxed{\infty - \infty}$.
Pour calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} [g(x) - f(x)]$, on pourra transformer l'écriture de $g(x) - f(x)$ en mettant en facteur $g(x)$ ou $f(x)$, x étant un nombre réel suffisamment grand ; on obtient :

$$g(x) - f(x) = g(x)\left[1 - \frac{f(x)}{g(x)}\right] = f(x)\left[\frac{g(x)}{f(x)} - 1\right].$$

Croissance comparées des fonctions ln et exp

Calculons : $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - \ln x)$.

Transformons l'écriture de la somme $(e^x - \ln x)$, en mettant l'un des termes en facteur, par exemple e^x :

on a : $e^x - \ln x = e^x\left(1 - \dfrac{\ln x}{e^x}\right)$ et $\dfrac{\ln x}{e^x} = \dfrac{\ln x}{x} \times \dfrac{x}{e^x}$.

On obtient : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{e^x} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - \ln x) = +\infty$

On dit que la fonction exp croît plus vite que la fonction ln.

Croissance comparées des fonctions f_α et ln ; f_α et exp

Calculons : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^\alpha - \ln x)$ $[\alpha > 0]$.

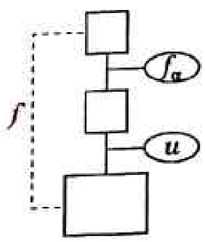
– Transformons l'écriture : $x^\alpha - \ln x$

$$x^\alpha - \ln x = x^\alpha\left(1 - \frac{\ln x}{x^\alpha}\right)$$

$$\frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha} \times \frac{\ln x^\alpha}{x^\alpha}$$

– Décomposons la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x^\alpha}{x^\alpha}$.

Considérons les fonctions $u : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ et $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$.



$f = u \circ f_\alpha$

– On obtient :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad [\alpha > 0]$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^\alpha - \ln x) = +\infty$$

On dit que : f_α $[\alpha > 0]$ croît plus vite que ln.

Calculons : $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x^\alpha)$ $[\alpha > 0]$.

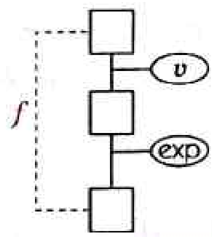
– Transformons l'écriture : $e^x - x^\alpha$

$$e^x - x^\alpha = e^x\left(1 - \frac{x^\alpha}{e^x}\right)$$

$$\frac{x^\alpha}{e^x} = e^{\alpha \ln x - x}$$

– Décomposons la fonction $f : x \mapsto e^{\alpha \ln x - x}$.

Considérons les fonctions $v : x \mapsto \alpha \ln x - x$ et exp.



$f = \exp \circ v$

– On obtient :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0 \quad [\alpha > 0]$$

$$\lim_{x \to +\infty} (e^x - x^\alpha) = +\infty$$

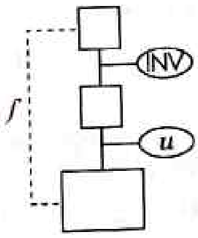
On dit que : exp croît plus vite que f_α $[\alpha > 0]$.

$\boxed{\exp}$ croît plus vite que $\boxed{f_\alpha\ [\alpha > 0]}$ qui croît plus vite que $\boxed{\ln}$.

Conséquences des croissances comparées

Calculons : $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} x^{\alpha}\ln x \quad [\alpha > 0]$.

– Transformons l'écriture : $f(x) = x^{\alpha}\ln x = \dfrac{-\ln\frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha}}$.



– Décomposons la fonction f.

Considérons la fonction $u : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^{\alpha}}$.

On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \dfrac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\ln X}{X^{\alpha}} = 0 \end{cases}$ donc : $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \dfrac{-\ln\frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha}} = 0$

$$\lim_{x \to 0} x^{\alpha}\ln x = 0$$

On démontre et nous admettons que :

$$\lim_{x \to -\infty} |x|^{\alpha} e^{x} = 0 \quad [\alpha > 0]$$

Limites de référence

Propriété

Pour tout nombre réel strictement positif α,

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{\alpha}}{e^{x}} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{e^{x}} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} x^{\alpha}\ln x = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^{\alpha} e^{x} = 0$.

Conséquence

On sait que, a étant un nombre réel supérieur à 1, la fonction $\exp_a$ est strictement croissante et :

$\lim\limits_{x \to +\infty} a^{x} = +\infty$.

On peut donc comparer la croissance de la fonction $\exp_a$ avec celle de chacune des fonctions : exp, ln et f_{α} $[\alpha > 0]$.

Exercice

4.a Calculer les limites suivantes.

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^5}{3^x}$ (2) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-4}\ln x$ (3) $\lim\limits_{x \to +\infty} (7^x - x^{99})$ (4) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x^{99})$

(5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{xe^x}{3^x}$ (6) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{xe^x}{3^x}$ (7) $\lim\limits_{x \to 0} x^{\frac{3}{2}}(\ln x)^2$ (8) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{3}{2}}(\ln x)^2$

4.2. Fonctions comportant une fonction $\exp_a$

Étudions la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x}{3^x}$.

Ensemble de définition

Pour tout nombre réel x, $3^x > 0$,

$D_f = \mathbb{R}$

Dérivée

– La fonction f est dérivable (car les fonctions identité et $\exp_3$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$).

– Soit x un nombre réel

on a : $f(x) = \frac{x}{3^x} = x3^{-x} = xe^{-x\ln 3}$,

d'où : $f'(x) = (1 - x\ln 3)e^{-x\ln 3}$.

– On en déduit que $f'(x)$ est du signe de $(1 - x\ln 3)$.

Pour tout nombre réel x, $f'(x) = \frac{1 - x\ln 3}{3^x}$

Limites

– Limite de f en $-\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{-x\ln 3} = -\infty$

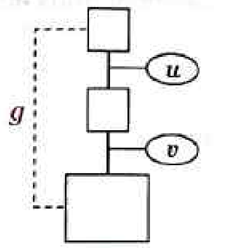
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

– Limite de f en $+\infty$

Transformons l'écriture de $f(x)$: pour tout nombre réel x, $f(x) = \frac{1}{\ln 3} \times \frac{x\ln 3}{e^{x\ln 3}}$.

Considérons les fonctions u et v définies par : $u(x) = x\ln 3$ et $v(x) = \frac{x}{e^x}$

Décomposons $g : x \mapsto \frac{x\ln 3}{e^{x\ln 3}}$



On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x\ln 3 = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{X}{e^X} = 0 \end{cases}$ donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Tableau de variation

$\frac{1}{\ln 3} \approx 0{,}91$; $\frac{1}{e\ln 3} \approx 0{,}33$

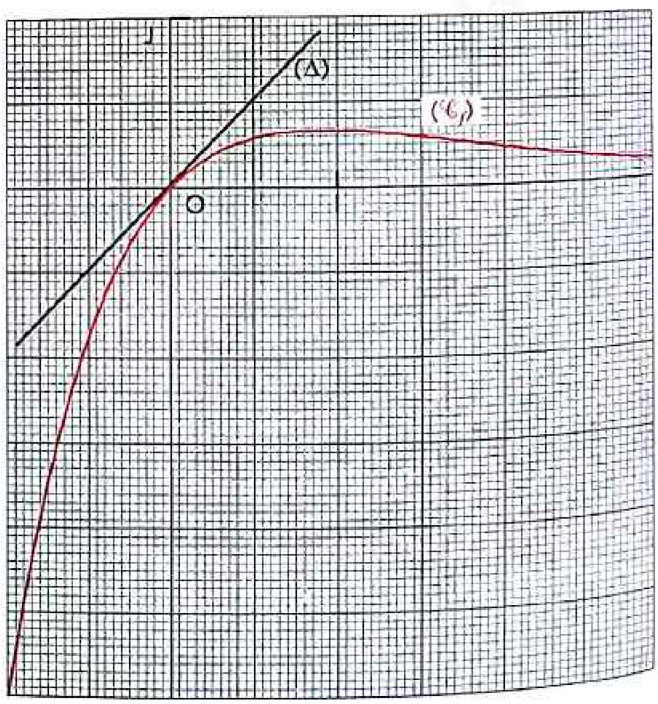
x	$-\infty$		0		$1/\ln 3$		$+\infty$
$f'(x)$		+	$\boxed{1}$	+	$\boxed{0}$	−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\boxed{0}$	↗	$\boxed{1/e\ln 3}$	↘	0

Construction de $(\mathscr{C}_f)$

Tableau des valeurs approchées de $f(x)$

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). Désignons par $(\mathscr{C}_f)$ la représentation graphique de f.

x	−1	−0,5	0,5	1	2	3
$f(x)$	−3	−0,87	0,29	0,33	0,22	0,11



$(\mathscr{C}_f)$ admet au point O une tangente de coefficient directeur 1, c'est la droite (Δ) d'équation $y = x$.

$(\mathscr{C}_f)$ admet en $+\infty$ une asymptote horizontale, la droite (OI).

4.3. Exemple d'étude d'une fonction du type : $x \mapsto [u(x)]^{v(x)}$

Étudions la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^x$.

Variations de la fonction f

Ensemble de définition D_f

On a : $x^x = e^{x\ln x}$.

f est la composée de $u : x \mapsto x\ln x$, suivie de exp, d'où : $f = \exp \circ u$.

$\boxed{D_f =]0\,;+\infty[}$

Limites

On a : $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{X \underset{>}{\to} 0} e^X = 1$; donc : $\boxed{\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = 1.}$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$; donc : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

Dérivée

f est dérivable en tout élément x de $]0\,;+\infty[$ et $f'(x) = u'(x)\exp[u(x)]$.

$\boxed{\text{Pour tout } x \text{ de }]0\,;+\infty[,\ f'(x) = (1+\ln x)e^{x\ln x}}$

On a : $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x \geq 0$.

Tableau de variation

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 1	↘	$e^{-\frac{1}{e}}$	↗	$+\infty$

Représentation graphique de f

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J). On désigne par $(\mathscr{C}_f)$ la représentation graphique de f.

Tangente en des points particuliers

La fonction f est continue sur $]0\,;+\infty[$ et admet une limite en 0. Elle admet donc un prolongement par continuité en 0, la fonction g définie par :

$$\begin{cases} \text{pour tout } x \in]0\,;+\infty[,\ g(x) = f(x) \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

$(\mathscr{C}_f) \cup \{J\}$ est donc la représentation graphique $(\mathscr{C}_g)$ de g.

Contrairement à f, la fonction g est définie en 0 ; on peut donc étudier la dérivabilité de g en 0 et déduire l'existence éventuelle d'une tangente à $(\mathscr{C}_g)$ au point J.

On a : $\dfrac{g(x)-g(0)}{x} = \dfrac{e^{x\ln x}-1}{x} = \ln x \times \dfrac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}$

Or : $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0} \dfrac{e^X - 1}{X} = 1$

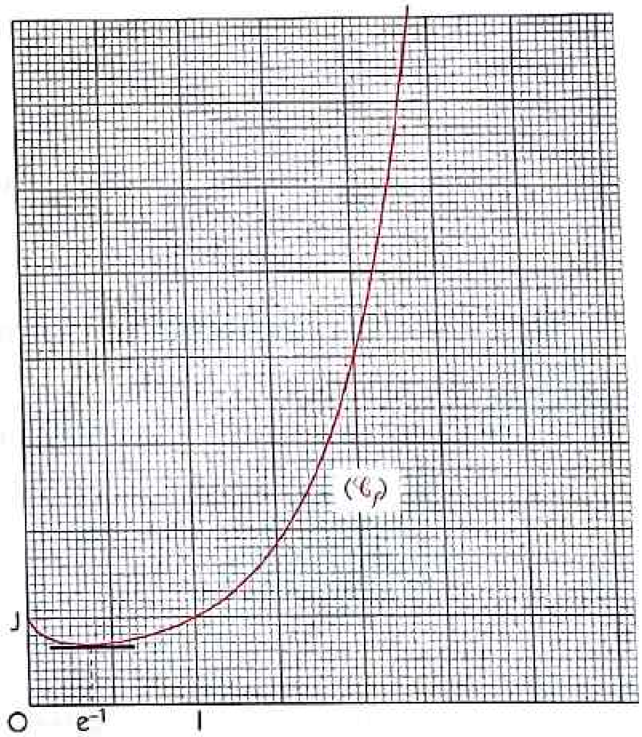
donc : $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x} = -\infty$

$\boxed{(\mathscr{C}_f) \text{ admet une tangente verticale.}}$

Construction de $(\mathscr{C}_f)$

Établir une table de valeurs approchées de $f(x)$.

On obtient la courbe ci-dessous.



Plus généralement, pour étudier la fonction $x \mapsto [u(x)]^{v(x)}$, il est conseillé d'utiliser la définition :

$$[u(x)]^{v(x)} = e^{v(x)\ln[u(x)]}.$$

TP Travaux pratiques

TP1 Recherche de primitives

Il est souvent difficile de reconnaître une expression du type : $\left(u(x)\right)'\left(u(x)\right)^{\alpha}$ $[\alpha \in \mathbb{R}^*]$ lorsque celle-ci contient des radicaux.
Il est donc conseillé, dans la recherche de primitives, de mettre une expression contenant des radicaux sous forme de puissances rationnels

Ce TP a pour objet de donner des exemples pour illustrer cette méthode.

Exemple

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive sur l'intervalle K de la fonction f définie ci-dessous :

(1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^5}$	; $K =]0\ ;+\infty[$	**(3)** $f(x) = x\sqrt{(x^2-1)^5}$	; $K =]1\ ;+\infty[$
(2) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$	; $K =]-\infty\ ;1[$	**(4)** $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{(x^3-1)^3}}$	; $K =]1\ ;+\infty[$

On désigne par F une primitive sur K de la fonction f.

(1) $f(x) = x^{\frac{1}{2}} \times x^{-5} = x^{-\frac{9}{2}}$; $F(x) = \dfrac{x^{-\frac{9}{2}+1}}{-\frac{9}{2}+1} = \dfrac{x^{-\frac{7}{2}}}{-\frac{7}{2}} = -\dfrac{2}{7}\dfrac{1}{\sqrt{x^7}}$

(2) $f(x) = (1-x)^{-\frac{1}{3}}$; $F(x) = \dfrac{-(1-x)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} = \dfrac{-(1-x)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} = -\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{(1-x)^2}$

(3) $f(x) = x(x^2-1)^{\frac{5}{2}}$; $F(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{(x^2-1)^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} = \dfrac{(x^2-1)^{\frac{7}{2}}}{7} = \dfrac{1}{7}\sqrt{(x^2-1)^7}$

(4) $f(x) = x^2(x^3-1)^{-\frac{3}{2}}$; $F(x) = \dfrac{1}{3}\dfrac{(x^3-1)^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} = \dfrac{1}{3}\dfrac{(x^3-1)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = -\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{\sqrt{x^3-1}}$

TP2 Étude d'équations comportant des puissances d'exposants réels

Ce TP a pour objet de trouver le nombre de solutions de certaines équations que nous ne savons pas résoudre.
La méthode exposée dans l'exercice commenté 1 consiste à mettre cette équation sous la forme $f(x) = c$ $[c \in \mathbb{R}]$; puis à procéder par une étude graphique
L'exercice commenté 2 traite d'un cas plus complexe que l'on ramène au cas simple de l'exercice commenté 1. L'unicité de la solution de l'équation $f(x) = c$ $[c \in \mathbb{R}]$ est justifiée graphiquement.

Exercice commenté 1

Déterminer le nombre de solutions de l'équation : (E) $2^x = x^3$.

Transformation de l'équation (E)

– On sait que : pour tout nombre réel x, $2^x > 0$.
Par conséquent, toute solution de (E) est nécessairement strictement positive.

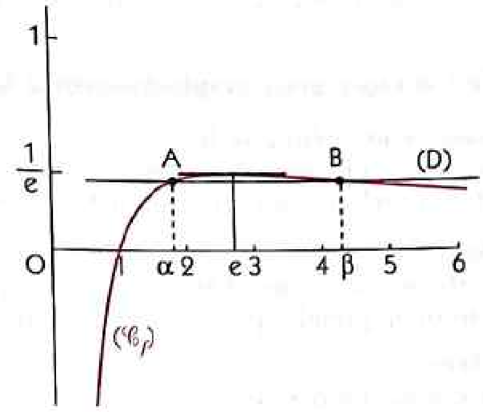
– On sait que : la fonction ln est bijective donc, (E) est équivalente à l'équation : $x\ln 2 = 3\ln x$, donc à l'équation : $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 2}{3}$.

Étude graphique de (E)

Étude de la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$

On a : $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0



Résolution graphique

On sait que : $1 < 2 < e$

donc : $0 < \ln 2 < 1$

$0 < \frac{\ln 2}{3} < \frac{1}{3}$

On sait que : $e < 3$

donc : $\frac{1}{3} < \frac{1}{e}$

On en déduit que : $0 < \frac{\ln 2}{3} < \frac{1}{e}$.

La représentation graphique ($\mathscr{C}_f$) de f et la droite (D) d'équation $y = \frac{\ln 2}{3}$ se coupent en deux points A et B d'abscisses respectives α et β telles que : $1 < \alpha < e$ et $\beta > e$.

Conclusion

L'équation (E) admet donc deux solutions, l'une comprise entre 1 et e, l'autre plus grande que e.

Exercice commenté 2

Déterminer le nombre de solutions strictement positives de l'équation : (E) $2^x + 3^x = 7^x$.

Transformation de l'équation (E)

(E) est équivalente à l'équation : $\left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{3}{7}\right)^x = 1$.

Variations de f définie sur $[0\ ;+\infty[$ par : $f(x) = \left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{3}{7}\right)^x$.

On a : $\frac{2}{7} < 1$ et $\frac{3}{7} < 1$.

– Les fonctions $x \mapsto \left(\frac{2}{7}\right)^x$ et $x \mapsto \left(\frac{3}{7}\right)^x$ sont strictement décroissantes sur $[0\ ;+\infty[$, par suite leur somme f est strictement décroissante sur $[0\ ;+\infty[$.

– Par ailleurs : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^x = 0$; donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

– Tableau de variation de f

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$	2	↘	1	↘	0

Nombre de solutions de l'équation (E)

f est une fonction continue et strictement décroissante sur $[0\ ;+\infty[$ et $f\big([0\ ;+\infty[\big) = \,]0\ ;2]$; elle détermine donc une bijection de $[0\ ;+\infty[$ dans $]0\ ;2]$.

Puisque 1 est élément de $]0\ ;2]$, il existe un unique nombre réel α tel que :

$$\alpha \in [0\ ;+\infty[\quad \text{et} \quad f(\alpha) = 1.$$

TP3 Étude d'une fonction du type u^v

Dans le cours, l'étude de la fonction $x \mapsto x^x$ apporte un premier exemple de ce type de fonction. Ce TP a pour objet l'étude d'un exemple plus riche.

Exercice commenté

Étudier et représenter graphiquement la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = |4x^2 - 1|^{3/4}$.

Ensemble de définition D_f

Considérons la fonction $u : x \mapsto |4x^2 - 1|$.
Pour tout nombre réel x, $x \in D_f \Leftrightarrow 4x^2 - 1 \neq 0$; donc :

$$\boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\}}$$

Ensemble d'étude

On vérifie aisément que f est une fonction paire.
On peut donc prendre pour ensemble d'étude l'ensemble E défini par :

$$\boxed{E = [0 ; \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2} ; +\infty[}$$

Dérivée

f est une fonction définie par intervalle. Sur $[0 ; +\infty[$, on a :

– pour $x \in [0 ; \frac{1}{2}[$, $f(x) = (-4x^2 + 1)^{3/4}$ et $f'(x) = -6x(-4x^2 + 1)^{-1/4}$

– pour $x \in]\frac{1}{2} ; +\infty[$, $f(x) = (4x^2 - 1)^{3/4}$ et $f'(x) = 6x(4x^2 - 1)^{-1/4}$

Limites

– Limites en $+\infty$

On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} |4x^2 - 1| = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} X^{3/4} = +\infty \end{cases}$

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

– Limites en $\frac{1}{2}$

On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x \underset{>}{\to} \frac{1}{2}} (4x^2 - 1) = 0 \\ \lim\limits_{X \underset{>}{\to} 0} X^{3/4} = 0 \end{cases}$

donc : $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} \frac{1}{2}} f(x) = 0$

de même : $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} \frac{1}{2}} f(x) = 0$.

Tableau de variation

x	0		1/2		$+\infty$
$f'(x)$	$\boxed{0}$	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$\boxed{1}$	↘ 0	‖	0 ↗	$+\infty$

Le plan est muni du repère (O, I, J). On désigne par $(\mathscr{C}_0)$ la représentation graphique de la restriction de f à $[0 ; \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2} ; +\infty[$ et par $(\mathscr{C}_f)$ la représentation graphique de f.

Recherche de tangente à gauche et de tangente à droite au point A$(-\frac{1}{2} ; 0)$

– La fonction f est dérivable, donc continue, sur $[0 ; -\frac{1}{2}[$ et sur $]\frac{1}{2} ; +\infty[$; mais non définie en $\frac{1}{2}$.
La courbe $(\mathscr{C}_0)$ admet un prolongement par continuité en $\frac{1}{2}$, la fonction g définie par :

Pour $x \in [0 ; \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2} ; +\infty[$, $g(x) = f(x)$ et $g(\frac{1}{2}) = 0$

Étudions l'existence de tangentes à la représentation graphique $(\mathscr{C}) \cup \{A\}$ en A$(\frac{1}{2} ; 0)$.

– Dérivabilité de g en $\frac{1}{2}$

• Soit x un élément de $]\frac{1}{2} ; +\infty[$,

On a : $\dfrac{g(x) - g(\frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}} = \dfrac{(4x^2 - 1)^{3/4}}{x - \frac{1}{2}} = \dfrac{2(2x - 1)^{3/4} \times (2x + 1)^{3/4}}{2x - 1}$

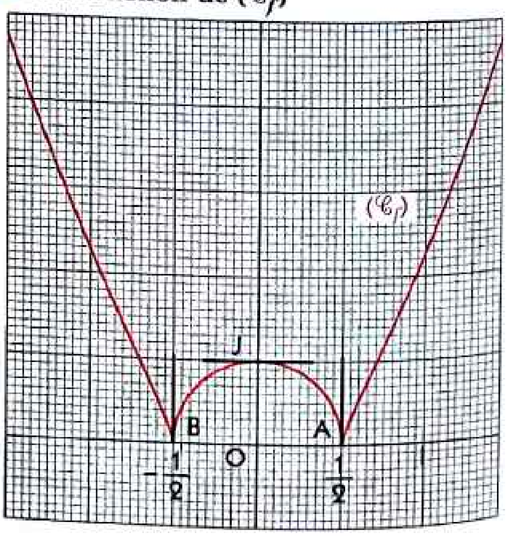
donc : $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} \frac{1}{2}} \dfrac{g(x) - g(\frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}} = +\infty$.

• Soit x un élément de $[0 ; \frac{1}{2}[$,

on démontre de même que : $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} \frac{1}{2}} \dfrac{g(x) - g(\frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}} = -\infty$.

Par conséquent, la courbe $(\mathscr{C}) \cup \{A\}$, admet une tangente verticale au point A.

Construction de $(\mathscr{C}_f)$



Exercices

ENTRAÎNEMENT

Les nombres réels a^α

1 Simplifier l'écriture de chacun des nombres réels suivants, a étant un nombre réel strictement positif :

(1) $a^3 \times a^{-2}$ (2) $a^{\frac{1}{2}} \times a^5$ (3) $a^{0,7} \times a^{4,9}$

(4) $a^{-22} \times \sqrt{a}$ (5) $(a^{-9})^{0,5}$ (6) $(a^{2,3})^{\frac{1}{4}}$

(7) $\dfrac{a^{2,01}}{a^{6,1}}$ (8) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{a^2}$

2 Simplifier :

(1) $8^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{5}}$ (2) $3^{0,7} \times 3^{-4,6} \times 3^{1,2}$

(3) $\dfrac{2^{\frac{3}{2}}}{16^4}$ (4) $\dfrac{9^{-1,7}}{3^{4,8}}$

3 Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de :

(1) $2^{3,8}$ (2) $5^{\frac{1}{3}}$ (3) $7^{-0,9}$

(4) $(1{,}03)^{\frac{3}{4}}$ (5) $2\,709^{1,3}$ (6) $6\,992^{-\frac{2}{3}}$

Fonctions exponentielles de base a

Équations – Inéquations – Systèmes

4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(1) $3^x = 1$ (2) $2^{x+1} = 8$ (3) $2^x = 3^{x+1}$

(4) $3^{2x} = 2^{3x}$ (5) $3 + \dfrac{2}{3^{-x}} = 9^x$ (6) $3^{2x} = 2^{3x}$

(7) $3x + 1 + 9^{x-2} = 90$ (8) $(x+3)^x = 1$

(9) $3 + \dfrac{2}{3^{-x}} = 9x$

5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(1) $2 \times 10^{2x} + 3 \times 10^x - 5 = 0$

(2) $3 \times 10^{2x} + 7 \times 10^x - 6 = 0$

6 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

(1) $4^{3+x} \geq 3^{5x}$ (2) $10^{6x} - 10^{3x} < 2$

(3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (4) $7^x \leq 7^{-x+1}$

7 Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes suivants :

(1) $\begin{cases} 2^x - 2^y = 8 \\ 2^x + 2^y = 2\sqrt{2} \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2^x 2^{2y} = 64 \\ \ln x + 2\ln y = \ln 4 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 4^x = 4^y \\ 4^x + 1 = y^{x+4} \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 8^x + (\sqrt{2})^y = 2^{2x+1} \\ 3^x + 27^y = 9^{y+1} \end{cases}$

Dérivées

8 Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée de la fonction f définie ci-dessous :

(1) $f(x) = 2^x$ (2) $f(x) = 3^x \ln x$

(3) $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1$

Primitives

9 Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie ci-dessous :

(1) $f : x \mapsto 5^x + 2x$ (2) $f : x \mapsto (\sqrt{5})^x$

(3) $f : x \mapsto \dfrac{1}{3^x}$ (4) $f : x \mapsto -\dfrac{3x}{2^{x+1}}$

Limites

10 Calculer les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{xe^x}{5^x}$ (2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{xe^x}{5^x}$

(3) $\lim\limits_{x \to +\infty} x3^x$ (4) $\lim\limits_{x \to -\infty} x3^x$

(5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(\frac{1}{5}\right)^x + \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x - 5\right]$

(6) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\left(\frac{1}{5}\right)^x + \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x - 5\right]$

(7) $\lim\limits_{x \to +\infty} x4^{-x}$ (8) $\lim\limits_{x \to -\infty} x4^{-x}$

Fonctions puissances

Dérivées

11 Calculer les dérivées des fonctions numériques f définies par :

(1) $f(x) = x\sqrt{x}$ (2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (3) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

(4) $f(x) = \sqrt[3]{1 + \sin x}$ (5) $f(x) = \sqrt[4]{1 + x^2}$

12 Dans chacun des cas suivants, écrire $f(x)$ sous la forme x^α $[\alpha \in \mathbb{R}]$ et déterminer la dérivée de f.

(1) $f : x \mapsto \sqrt[3]{x^2}$ (2) $f : x \mapsto x^e\sqrt{x}$

(3) $f : x \mapsto \dfrac{x^{0,5}}{\sqrt[4]{x^3}}$ (4) $f : x \mapsto \dfrac{x^{-\ln 3}}{x^{1-e}}$

Primitives

13 Trouver les primitives des fonctions numériques f définies par :

(1) $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$ (2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

(3) $f(x) = x\sqrt{x}$ (4) $f(x) = (1 + x^2)^{\sqrt{2}}$

(5) $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

Limites

14 Calculer les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^\pi \sqrt[3]{x})$ (2) $\lim\limits_{x \to 0} (x^\pi \sqrt[3]{x})$

(3) $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + x^3)^{-\frac{1}{4}}$ (4) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} (1 - x)^{\sqrt{2}}$

Étude de fonctions

Comparaison de ln, exp et f_α $(\alpha > 0)$

15 Calculer les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{e^x}$ (2) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x^2)$

(3) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x - x^2)$ (4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2^x}{x}$

(5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{\ln x}$ (6) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)^2 e^x$

(7) $\lim\limits_{x \to +\infty} x(\ln x)^3$ (8) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 e^x$

(9) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 2x)$ (10) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^3+1}$

Fonctions comportant $\exp_a$

16 Dans chacun des cas suivants, étudier et représenter graphiquement la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

(1) $f(x) = 2^{x-3}$ (2) $f(x) = 2^{|x|}$

(3) $f(x) = \dfrac{2^x - 2^{-x}}{2}$ (4) $f(x) = 4^x$

17 On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{5^x}{5^{2x} - 1}$.

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}^*$.
2. Démontrer que f est impaire.
3. Étudier les variations de f sur $]0 ; +\infty[$.
En déduire les variations de f sur $]-\infty ; 0[$.
4. *a)* Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = \dfrac{2}{3}$.
b) En déduire les solutions de l'équation : $f(x) = -\dfrac{2}{3}$.

Fonctions comportant f_α $(\alpha > 0)$

18 Dans chacun des cas suivants, étudier et représenter graphiquement la fonction f définie par :

(1) $f : x \mapsto x^{0,3}$ (2) $f : x \mapsto x^{-1,7}$

(3) $f : x \mapsto x^{5,2}$ (4) $f : x \mapsto x^{-3,9}$

APPROFONDISSEMENT

19 On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x3^{-x}$.
On désigne par $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).
1. *a)* Déterminer la limite de f en $-\infty$.
b) Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction définie par :
$$x \mapsto \frac{x\ln 3}{e^{x\ln 3}}.$$
En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction f.
2. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Construire la courbe $(\mathscr{C})$.

20 Étudier et représenter graphiquement chacune des fontions numériques f, g et h définies par :

a) $f(x) = |x|^x$ *b)* $g(x) = (1+x)^x$ *c)* $f(x) = x^{\ln x}$

21 a et b sont des nombres réels strictement positifs. On considère les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = ax$; $g(x) = b\sqrt{x}$
On désigne respectivement $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ les représentations graphiques de f et de g dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J).
1. Trouver une relation entre a et b pour que $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ aient une tangente commune.
On désigne par $A_{a,b}$ le point de contact de ces deux courbes et par E l'ensemble des couples (a, b) vérifiant la relation obtenue entre a et b.
2. Trouver l'ensemble décrit par le point $A_{a,b}$ lorsque le couple (a, b) décrit E.
3. Démontrer que la tangente commune en $A_{a,b}$ aux courbes $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ passe par le même point A de (OJ).

22 L'objet de ce problème est la résolution de l'équation :
$$(E_1) \quad x^{10} = (1{,}1)^x \quad x \in]0 ; +\infty[.$$

1re partie
1. Étudier le sens de variation des fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par :
$$f(x) = x^{10} \quad ; \quad g(x) = (1{,}1)^x.$$
2. Représenter graphiquement, dans le plan muni d'un repère orthonormé, les restrictions à $[0 ; 1{,}1]$ des fonctions f et g.
3. On considère la fonction d de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$d(x) = (1{,}1)^x - x^{10}.$$
a) Calculer $d(1)$ et donner une valeur approchée à 10^{-2} près de $d(1{,}1)$.
b) Montrer que l'équation (E_1) admet au moins une solution α qui appartient à l'intervalle $[1 ; 1{,}1]$.

2e partie
On considère l'équation :
$$(E_2) \quad x\ln(1{,}1) - 10\ln x = 0.$$
1. Montrer que (E_2) est une équation équivalente à (E_1).
2. On considère la fonction numérique φ définie par :
$$\varphi(x) = x\ln(1{,}1) - 10\ln x.$$
Étudier et représenter graphiquement φ. *(On désigne par (Γ) la courbe obtenue.)*
3. Montrer que l'équation (E_2) admet une solution unique β et que : $\beta \in [685 ; 686[$.
4. Trouver un meilleur encadrement de β, en déduire une valeur approchée de β.

D'après bac

7

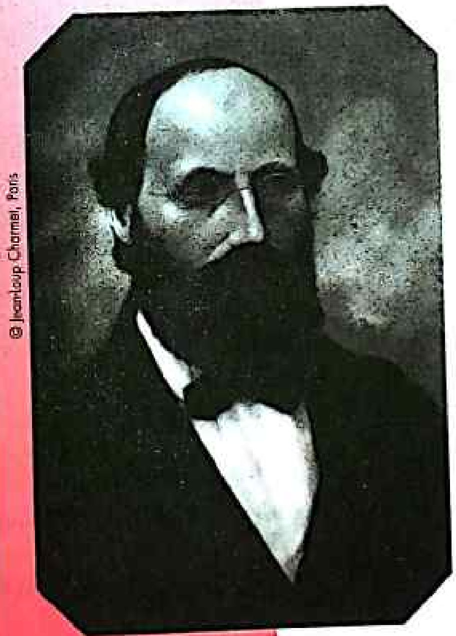
Calcul intégral

Du calcul d'aires à la notion d'intégrale

Les premiers calculs d'aires sont dus à Eudoxe (406-359 av. J.-C.) et à Archimède (287-212 av. J.-C.). Leur méthode, qui consistait à encadrer la surface par deux polygones, fut développée par les Arabes au IXe siècle.

Fermat (1601-1665) introduisit la méthode des rectangles et, par passage à la limite, donna les approches intuitives essentielles à la notion d'intégrales, née à la même époque que le calcul différentiel.

C'est Cauchy et Riemann qui firent de l'intégrale une théorie précise (définition, notation). Cette théorie fut achevée par deux Français : Lebesgue (1875-1941) et Denjoy (1884-1974).



De nos jours, le calcul intégral intervient dans plusieurs sciences telles que la physique, la statistique...

Riemann est considéré comme le plus grand mathématicien de son siècle.

« Sa grandeur réside dans le caractère puissant de généralité et la partie illimitée de ses méthodes ».

Bernhard Riemann
mathématicien allemand – 1826-1866.

SOMMAIRE

1 Intégrale d'une fonction continue

1.1. Notion d'intégrale d'une fonction continue

Définition

Position du problème et définition

Nous avons défini les primitives d'une fonction continue. Pour certaines fonctions continues, il ne nous a pas été possible d'exprimer algébriquement une primitive, bien que celle-ci existe ! C'est le cas de la fonction inverse.

On peut se poser les questions suivantes.

- Quelle est la primitive qui prend la valeur $\frac{\pi}{3}$ en 0 de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$?
- Quelle est la distance parcourue en t heures par un mobile dont la vitesse v est définie par : $v(t) = e^t$?

Pour résoudre de tels problèmes, nous utilisons une nouvelle notion : **l'intégrale d'une fonction continue.**

La définition d'une primitive permet de démontrer la propriété suivante :

Propriété – Définition

f est une fonction continue sur un intervalle K, F une primitive sur K de f, a et b des éléments de K. Le nombre réel $F(b) - F(a)$ est indépendant du choix de la primitive F ; il est appelé *intégrale de a à b de f.*

On note :	$F(b) - F(a) =$	$\left[F(x)\right]_a^b$	$=$	$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
on lit :		$F(x)$ pris entre a et b		somme de a à b de $f(x)\mathrm{d}x$

Variable muette dans une intégrale

La lettre x n'intervient pas dans le résultat de l'intégrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$; on peut donc la remplacer par n'importe quelle autre lettre différente de a et b ; on dit que x est une **variable muette.**

On a : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = ... = F(b) - F(a)$.

Conséquences immédiates de la définition d'une intégrale

Propriété

f est une fonction continue sur un intervalle K, a et b des nombres réels quelconques de K, F une primitive de f sur K. On a :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x \quad ; \quad \int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$$

Intégrale et primitive

f est une fonction continue sur K contenant a, F est une primitive sur K de f qui s'annule en a.

Soit x un nombre réel élément de K ; on a : $F(x) = F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$;

donc F est la fonction définie sur K par : $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

Propriété

**f étant une fonction continue sur un intervalle K contenant a,
la primitive sur K de f qui s'annule en a est la fonction F définie sur K par : $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.**

Exemples

• La primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1 est la fonction ln ;

donc pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^*$, $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t$.

• Un mobile part d'un point A à l'instant 0 et a une vitesse v en km/h définie par : $v(t) = \mathrm{e}^t$.

La distance parcourue x (en km) après t heures est donnée par : $x(t) = \int_0^t v(u)\mathrm{d}u = \int_0^t \mathrm{e}^u\mathrm{d}u = \left[\mathrm{e}^u\right]_0^t = \mathrm{e}^t - 1$.

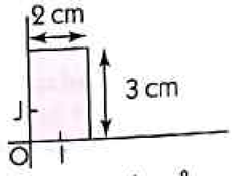
Intégrale et aire

Unité d'aire, unité graphique d'aire

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).

– L'**unité d'aire**, noté u.a, est l'aire du rectangle construit sur OIJ.

– Lorsque l'unité graphique sur chaque axe du repère, est exprimé en cm, en m, ..., l'**unité graphique d'aire** s'exprime en cm^2, en m^2...



1 u.a vaut 6 cm²

Exemple introductif

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).

f est une fonction continue, croissante et positive sur un intervalle $[a ; b]$.

On désigne par :

$(\mathscr{C}_f)$ la représentation graphique de f ;

$(\mathscr{D}_x)$, $(\mathscr{D}_a)$ et $(\mathscr{D}_b)$ les droites parallèles à (OJ) et passant respectivement par les points de coordonnées $(x ; 0)$, $(a ; 0)$ et $(b ; 0)$;

Δ_x la partie du plan limitée par : $(\mathscr{C}_f)$, (OI), $(\mathscr{D}_a)$ et $(\mathscr{D}_x)$;

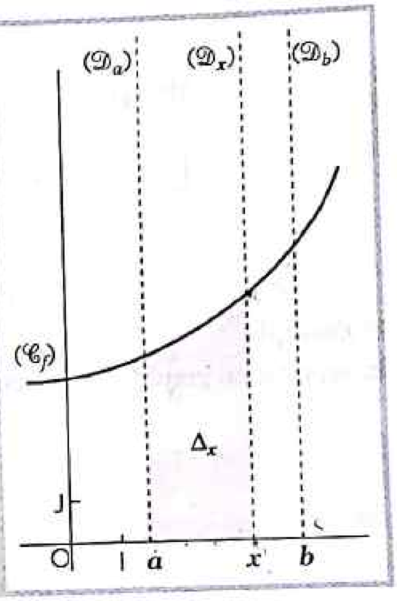
Δ la partie du plan limitée par : $(\mathscr{C}_f)$, (OI), $(\mathscr{D}_a)$ et $(\mathscr{D}_b)$.

On considère la fonction $\mathscr{A}$ définie sur $[a ; b]$ par :

$$\begin{cases} \text{pour } x \text{ élément de } [a ; b],\ \mathscr{A}(x) = \text{Aire de } \Delta_x \\ \mathscr{A}(a) = 0 \end{cases}$$

Démontrons que la fonction $\mathscr{A}$ est une primitive sur $[a ; b]$ de f.

On en déduira alors une interprétation graphique de $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.



Démontrons que la fonction $\mathscr{A}$ est une primitive sur $[a ; b]$ de f.

x_0 est un élément de $[a ; b]$.

– Soit h un nombre réel strictement positif tel que : $x_0 + h \in [a ; b]$.

Désignons par E la partie du plan tramée sur le graphique ci-contre.

$\mathscr{A}(x_0 + h) - \mathscr{A}(x_0) =$ aire de E

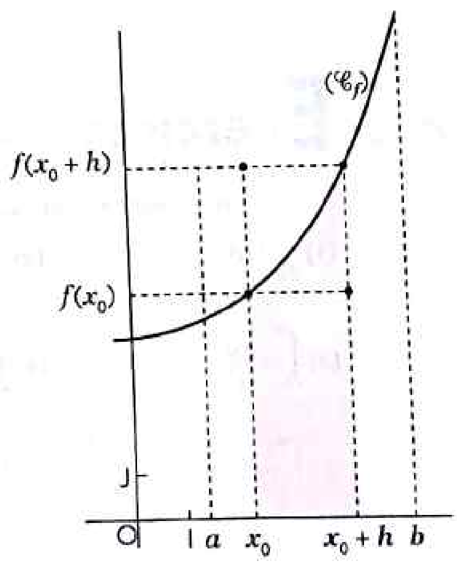
Cette aire est comprise entre les aires de deux rectangles :

on a : $h \times f(x_0) \leq \mathscr{A}(x_0 + h) - \mathscr{A}(x_0) \leq h \times f(x_0 + h)$

d'où : $f(x_0) \leq \dfrac{\mathscr{A}(x_0 + h) - \mathscr{A}(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h)$

or : $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$ (f étant continue en x_0)

donc : $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ >}} \dfrac{\mathscr{A}(x_0 + h) - \mathscr{A}(x_0)}{h} = \mathscr{A}'_{\mathrm{d}}(x_0) = f(x_0)$.



– Lorsque h est strictement négatif, on démontre de même que :

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{\mathscr{A}(x_0 + h) - \mathscr{A}(x_0)}{h} = \mathscr{A}'_{\mathrm{g}}(x_0) = f(x_0).$$

– Par conséquent, la fonction $\mathscr{A}$ est dérivable en x_0 et $\mathscr{A}'(x_0) = f(x_0)$.

Donnons une interprétation graphique de f.

La fonction $\mathcal{A}$ étant une primitive sur $[a\ ;\ b]$ de f, $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \mathcal{A}(b) - \mathcal{A}(a) = \mathcal{A}(b) =$ aire de Δ.

Propriété

– En utilisant la même situation que l'exemple introductif précédent, avec une fonction **continue**, **décroissante** et **positive**, on obtient le même résultat.

– Lorsque la fonction f est **continue, positive** et **quelconque**, on examine la fonction sur chaque intervalle où la fonction est monotone. On obtient encore le même résultat.

On démontre et nous admettons la propriété suivante :

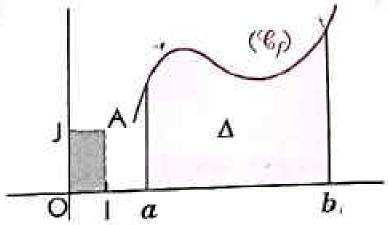
Propriété

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J) .
f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ tel que $a < b$,
$(\mathscr{C}_f)$ la représentation graphique de f,

$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est l'aire de la partie Δ du plan limitée par : $(\mathscr{C}_f)$, (OI), les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

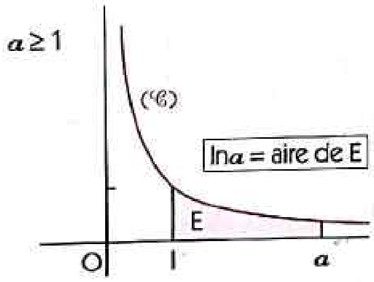
$$M(x,y) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} a \le x \le b \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$$

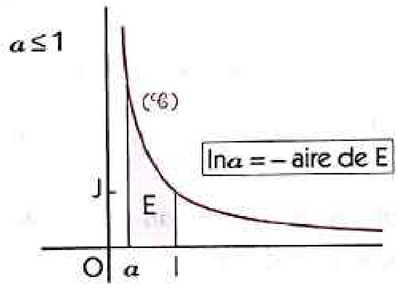
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \text{aire de } \Delta.$$



Exemple

Interprétation graphique du nombre réel $\ln a$, $(\mathscr{C})$ étant la représentation graphique de la fonction : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.





Exercices

1.a Calculer les intégrales suivantes.

(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t$ (2) $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{t^3}{4}\,\mathrm{d}t$

(3) $\displaystyle\int_1^2 -\frac{\mathrm{d}u}{u^2}$ (4) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} -\sin x\,\mathrm{d}x$

(5) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x$ (6) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x)\mathrm{d}x$

(7) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ (8) $\displaystyle\int_0^1 e^x\mathrm{d}x.$

1.b Les égalités suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \Big[\ln x + 2\Big]_1^2$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos 3x\,\mathrm{d}x = \Big[\sin 4x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

1c On considère les fonctions f, g, h définies par :
$f(x) = \dfrac{3}{1 + x^2}$; $g(x) = \tan x$; $h(x) = \dfrac{1}{1 + x}$.

Peut-on calculer l'intégrale de f sur $[-2\ ;\ 2]$?
Peut-on calculer l'intégrale de g sur $[-\pi\ ;\ \pi]$?
Peut-on calculer l'intégrale de h sur $[-2\ ;\ 0]$?

1.2. Propriétés de l'intégrale

Égalité de Chasles

Propriété

f étant une fonction continue sur un intervalle K et a, b, c des éléments de K,

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x.$$

Cette égalité est une conséquence directe de la définition de l'intégrale.

Exemple

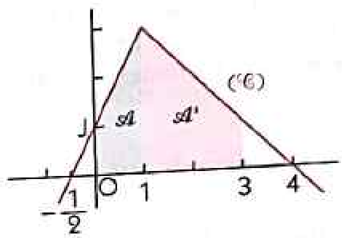
Considérons la fonction définie par : $\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty\,;1],\ f(x) = 2x+1 \\ \text{pour } x \in [1\,;+\infty[,\ f(x) = -x+4 \end{cases}$

f est continue sur $\mathbb{R}$. Calculons $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$.

Calcul de l'intégrale

$$\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (2x+1)\mathrm{d}x + \int_1^3 (-x+4)\mathrm{d}x$$

$$= \left[x^2 + x\right]_0^1 + \left[-\frac{x^2}{2} + 4x\right]_1^3 = 6.$$



Interprétation graphique

La fonction f étant positive sur [0 ; 3], le calcul précédent peut être interprété comme somme des aires $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ ci-contre.

Linéarité

Propriété

f et g étant des fonctions continues sur un intervalle K, a et b des éléments de K, α un nombre réel quelconque,

$$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \quad ; \quad \int_a^b \alpha f(x)\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Démonstration

Soit F une primitive de f sur K et G une primitive de g sur K. On a :

$$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\mathrm{d}x = (F+G)(b) - (F+G)(a) = [F(b) - F(a)] + [G(b) - G(a)] = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

$$\int_a^b \alpha f(x)\mathrm{d}x = (\alpha F)(b) - (\alpha F)(a) = \alpha[F(b) - F(a)] = \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Exemple

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = 6x + \frac{7}{2\sqrt{x}}.$$

f est continue sur [3 ; 4]. Calculons $\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x$.

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \cos^2 x \quad ; \quad \left(\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}\right).$$

f est continue sur $[0\,;\frac{\pi}{3}]$. Calculons $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\mathrm{d}x$.

On désigne par u et v les fonctions définies par :

$$u(x) = 2x \quad \text{et} \quad v(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

on a : pour tout x élément de $[3 ; 4]$,
$f(x) = 3u(x) + 7v(x)$

donc : $\displaystyle\int_3^4 (6x + \frac{7}{2\sqrt{x}})\mathrm{d}x = 3\int_3^4 u(x)\mathrm{d}x + 7\int_3^4 v(x)\mathrm{d}x$

$= 3\left[x^2\right]_2^3 + 7\left[\sqrt{x}\right]_2^3 = 3 \times 5 + 7(\sqrt{3} - \sqrt{2}).$

On désigne par u et v les fonctions définies par :

$$u(x) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad v(x) = \frac{\cos 2x}{2}.$$

on a : pour tout x élément de $[0 ; \frac{\pi}{3}]$,
$f(x) = u(x) + v(x)$

donc : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{3}} u(x)\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{3}} v(x)\mathrm{d}x$

$= \left[\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{4}\left[\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}.$

Inégalités et intégration

Propriété

f et g étant des fonctions continues sur un intervalle $[a ; b]$,

si $f \geq 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$

si $f \geq g$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Démonstration

Soit f une fonction continue et positive sur $[a ; b]$,
F une primitive de f sur $[a ; b]$.
On a : pour tout x élément de $[a ; b]$, $F'(x) = f(x)$

d'où : F est croissante sur $[a ; b]$

donc : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \geq 0$

Soient f et g des fonctions continues sur $[a ; b]$, telles que :
pour tout x élément de $[a ; b]$, $f(x) \geq g(x)$

or : $f(x) \geq g(x) \iff f(x) - g(x) \geq 0.$

d'où : $\displaystyle\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\mathrm{d}x \geq 0$

donc : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

Exemple

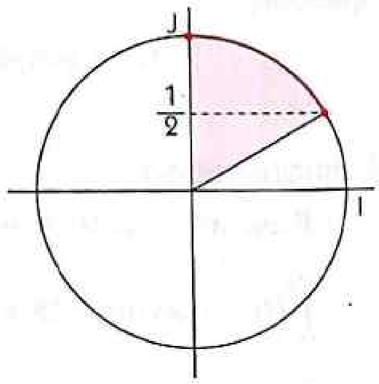
Déterminer un encadrement de $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \,\mathrm{d}x$.

Soit x un élément de $[\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{2}]$; on a : $\frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1$

donc : $\frac{x^2}{2} \leq x^2 \sin x \leq x^2$

d'où : $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2}{2}\mathrm{d}x \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \mathrm{d}x \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \mathrm{d}x$

$\displaystyle\frac{13\pi^3}{648} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \mathrm{d}x \leq \frac{13\pi^3}{324}.$

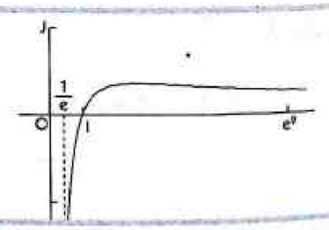


Remarque

On peut avoir $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$ sans que la fonction f soit positive sur $[a ; b]$;

pour s'en convaincre, faire l'activité suivante :

f est la fonction définie sur $[\frac{1}{e} ; e^2]$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.
La représentation graphique ci-contre de f montre que f ne garde pas un signe constant sur $[\frac{1}{e} ; e^2]$. Calculons $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e^2} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$.



Pour cela vérifier que $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ a pour primitive $x \mapsto \frac{1}{2}(\ln x)^2$.

Inégalité de la moyenne

Cette propriété est une conséquence de l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction F définie sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ par : $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

On peut aussi obtenir cette propriété à partir de la précédente.

Propriété

f est une fonction continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ tel que $a < b$, m et M sont des nombres réels.

- Si pour tout x élément de $[a\ ;\ b]$, $m \leq f(x) \leq M$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a)$.

- Si pour tout x élément de $[a\ ;\ b]$, $|f(x)| \leq M$ alors $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq M(b-a)$.

Démonstration

Les fonctions constantes $x \mapsto m$ et $x \mapsto M$ sont continues sur $[a\ ;\ b]$,

donc : pour tout x élément de $[a\ ;\ b]$,

$$m \leq f(x) \leq M \Rightarrow \int_a^b m\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b M\mathrm{d}x$$

d'où : $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a)$.

or : pour tout x élément de $[a\ ;\ b]$,

$$|f(x)| \leq M \iff -M \leq f(x) \leq M$$

d'où : $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq M(b-a)$.

Valeur moyenne d'une fonction

Présentation

De la propriété précédente, on peut faire la remarque suivante :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a) \quad \iff \quad m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M.$$

Si f est continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, f atteint son minimum m et son maximum M sur $[a\ ;\ b]$ et il existe un élément c de $[a\ ;\ b]$ tel que : $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Définition

f est une fonction continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ tel que $a < b$.

On appelle *valeur moyenne de la fonction f sur* $[a\ ;\ b]$, le nombre réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Interprétations graphique et cinématique

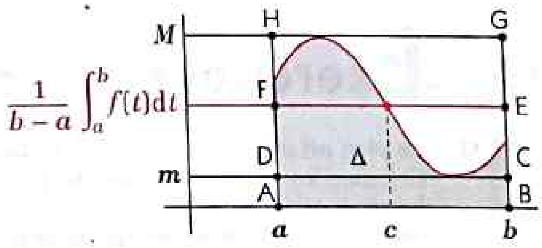
- Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).

On désigne par Δ la partie du plan limitée par $(\mathscr{C}_f)$, (OI), les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Sur le graphique ci-contre on constate que :

(1) aire de ABCD $\leq$ aire de $\Delta \leq$ aire de ABGH

(2) aire de Δ = aire de ABEF



- La vitesse moyenne d'un mobile est la valeur moyenne de sa vitesse v. En effet :

$$\text{Vitesse moyenne} = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{durée du trajet}} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t = \text{valeur moyenne de } v.$$

■ **Exemple 1**

Calculons la valeur moyenne sur [0 ; π] de la fonction f de ℝ vers ℝ définie par : $f(x) = x - \sin x$.

La fonction f est continue sur [0 ; π], car elle est la somme de deux fonctions continues sur [0 ; π].

Par conséquent, la valeur moyenne sur [0 ; π] de la fonction f est $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x - \sin x)\mathrm{d}x$,

or : $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x - \sin x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}x^2 + \cos x\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} - 2\right) = \frac{\pi^2 - 4}{2\pi}$.

■ **Exemple 2**

Donnons un encadrement du nombre réel $\int_1^3 \ln(4 + t^2)\mathrm{d}t$.

Considérons la fonction $f : t \mapsto \ln(4 + t^2)$.

La fonction f est continue et strictement croissante sur [1 ; 3] car elle est la composée de la fonction $t \mapsto 4 + t^2$ qui est croissante sur [1 ; 3], suivie de la fonction croissante ln. Par conséquent,

on a : $f(1) \leq f(t) \leq f(3)$

c'est-à-dire : $\ln 5 \leq \ln(4 + t^2) \leq \ln 13$

d'où : $2 \times \ln 5 \leq \int_1^3 \ln(4 + t^2)\mathrm{d}t \leq 2 \times \ln 13$

donc : $3{,}21 \leq \int_1^3 \ln(4 + t^2)\mathrm{d}t \leq 5{,}13$.

■ **Exemple 3**

f est la fonction numérique définie sur [a ; b] par : $f(x) = x^3$.
Déterminer en fonction de a et b le nombre réel c tel que f(c) soit la valeur moyenne de f sur [a ; b].
Quelle est la valeur de c si $a = 1$ et $b = 3$?

$f(c)$ étant la valeur moyenne de f sur [a ; b] on a : $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = c^3$

or : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(b^4 - a^4) = \frac{1}{4}(b^2 + a^2)(b^2 - a^2) = \frac{1}{4}(b^2 + a^2)(b - a)(b + a)$

d'où : $\frac{1}{4}(b^2 + a^2)(b + a) = c^3$.

La fonction f est continue et strictement croissante sur [a ; b], elle détermine donc une bijection de [a ; b] dans [$f(a)$; $f(b)$].

Par conséquent il existe une et une seule valeur de c telle que : $f(c) = \frac{1}{4}(b^2 + a^2)(b + a)$.

$$c^3 = \frac{1}{4}(b^2 + a^2)(b + a) \iff c = \sqrt[3]{\frac{1}{4}(b^2 + a^2)(b + a)}.$$

Pour $a = 1$ et $b = 3$, on a : $c = \sqrt[3]{10}$.

Exercices

1.d Le plan est muni du repère orthogonal (O,I,J)
Calculer la valeur moyenne sur [1 ; 3] de la fonction exponentielle.
Donner une interprétation graphique.

1.e Le plan est muni du repère orthogonal (O,I,J).
Calculer la valeur moyenne sur [0 ; π] de la fonction cosinus.
Donner une interprétation graphique.

1.f On pose : $A(x) = -8x^3 + 24x^2 + 3x - 9$.
a) Vérifier que : $A(3) = 0$.
Déterminer le signe de $A(x)$ sur [1 ; 3].
b) f et g sont des fonctions numériques définies par : $f(x) = 26x^2 - 3x$ et $g(x) = 8x^3 + 9$.
On pose : $I = \int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$ et $J = \int_1^3 g(x)\mathrm{d}x$.
Sans calculer les valeurs de I et J, prouver que $I \geq J$.

2 Techniques du calcul d'intégrales

2.1. Exemples d'utilisation de primitives

Intégrale des fonctions du type : $u'(x) \times u^{\alpha}(x)$ $[\alpha \in \mathbb{R}^*]$

Exemple

On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{\sqrt[4]{(x^3 - 2x^2 + x - 5)^3}}.$$

f est continue sur $[3 ; 4]$. Calculons $\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x$.

On désigne par u la fonction polynôme définie par :

$u(x) = x^3 - 2x^2 + x - 5$.

On a : pour tout x élément de $[3 ; 4]$,

$f(x) = u'(x)\left[u(x)\right]^{-\frac{3}{4}}$

$u' \times u^{\alpha}$ $[\alpha \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1\}]$ a pour primitive $\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$,

donc : $\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x = \int_3^4 u'(x)u^{-\frac{3}{4}}(x)\mathrm{d}x = 4 \times \left[u^{\frac{1}{4}}(x)\right]_3^4$

$= 4 \times \left[(x^3 - 2x^2 + x - 5)^{\frac{1}{4}}\right]_3^4$

$= 4(\sqrt[4]{7} - \sqrt[4]{31})$.

On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \sin x \cos^3 x.$$

f est continue sur $[0 ; \frac{\pi}{3}]$. Calculons $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\mathrm{d}x$.

On désigne par u la fonction cosinus.

On a : pour tout x élément de $[0 ; \frac{\pi}{3}]$,

$f(x) = -u'(x)u^3(x)$.

$u' \times u^{\alpha}$ $[\alpha \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1\}]$ a pour primitive $\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$,

donc : $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} u'(x)u^3(x)\mathrm{d}x$

$= \left[\frac{u^4(x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{4}\left[\cos^4 x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$= \frac{15}{64}$.

Intégrale des fonctions du type : $u'(x)e^{u(x)}$

Exemple

On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = (x - 3)e^{x^2 - 6x + 5}$$

f est continue sur $[1 ; 4]$. Calculons $\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x$.

On désigne par u la fonction définie par :

$u(x) = e^{x^2 - 6x + 5}$.

On a : pour tout x élément de $[1 ; 4]$,

$f(x) = \frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$

or : la fonction $u'e^u$ a pour primitive e^u

donc : $\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^4 u'(x)e^{u(x)}\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2}\left[e^{x^2 - 6x + 5}\right]_1^4$

$= \frac{e^{-3} - 1}{2}$.

On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \left(2x - \frac{1}{\cos^2 x}\right)e^{\tan x - x^2}$$

f est continue sur $[0 ; \frac{\pi}{4}]$. Calculons $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$.

On désigne par u la fonction définie par :

$u(x) = \tan x - x^2$.

On a : pour tout x élément de $[0 : \frac{\pi}{4}]$,

$f(x) = -u'(x)e^{u(x)}$

or : la fonction $u'e^u$ a pour primitive e^u

donc : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} u'(x)e^{u(x)}\mathrm{d}x$

$= -\left[e^{\tan x - x^2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= 1 - e^{\frac{16 - \pi^2}{16}}$.

Intégrale des fonctions du type : $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

Exemple

On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+5}.$$

f est continue sur $[-1\,;0]$. Calculons $\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x$.

On désigne par u la fonction polynôme définie par :

$$u(x) = x^2 + 3x + 5.$$

On a : pour tout x élément de $[-1\,;0]$,

$$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \quad \text{et} \quad u(x) > 0$$

or : la fonction $\frac{u'}{u}$ a pour primitive $\ln u$ ou $\ln(-u)$

donc :
$$\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \frac{u'(x)}{u(x)}\mathrm{d}x$$
$$= \Big[\ln(x^2+3x+5)\Big]_{-1}^{0}$$
$$= \ln\frac{5}{3}.$$

On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \mathrm{cotan}x \;;\; \left(\mathrm{cotan}x = \frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

f est continue sur $[0\,; \frac{\pi}{3}]$. Calculons $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\mathrm{d}x$.

On désigne par u la fonction sinus.

On a : pour tout x élément de $[0\,; \frac{\pi}{3}]$,

$$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \quad \text{et} \quad u(x) > 0$$

or : la fonction $\frac{u'}{u}$ a pour primitive $\ln u$ ou $\ln(-u)$

donc :
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{u'(x)}{u(x)}\mathrm{d}x$$
$$= \Big[\ln(\sin x)\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}$$
$$= \ln\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Intégrale d'une fonction rationnelle

Exemple

On donne la fonction rationnelle f définie par :

$$f(x) = \frac{2x^3+9x^2+5}{(x-1)^2(x+1)^3}.$$

f est continue sur $[2\,;4]$. Calculons $\int_{2}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

On établit que : $f(x) = \dfrac{2}{(x-1)^2} + \dfrac{3}{(x+1)^3}$.

On désigne par u et v les fonctions polynômes définies par : $u(x) = (x-1)$; $v(x) = (x+1)$.

On a : pour tout x élément de $[2\,;4]$,

$$f(x) = \frac{2u'(x)}{[u(x)]^2} + \frac{3v'(x)}{[v(x)]^3}$$

or : la fonction $\frac{u'}{u^n}$ a pour primitive $\dfrac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$

donc :
$$\int_{2}^{4} f(x)\mathrm{d}x = \int_{2}^{4} \frac{2}{(x-1)^2}\mathrm{d}x + \int_{2}^{4} \frac{3}{(x+1)^3}\mathrm{d}x$$
$$= 2 \times \left[\frac{-1}{(x-1)}\right]_2^4 + 3 \times \left[\frac{-1}{2(x+1)^2}\right]_2^4$$
$$= \frac{108}{75} = 1{,}44.$$

On donne la fonction rationnelle f définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2+x-1}{(x-1)(x+3)^2}.$$

f est continue sur $[2\,;3]$. Calculons $\int_{2}^{3} f(x)\mathrm{d}x$.

On établit que : $f(x) = \dfrac{1}{8(x-1)} + \dfrac{15}{8(x+3)} - \dfrac{7}{2(x+3)^2}$.

On désigne par u et v les fonctions polynômes définies par : $u(x) = (x-1)$; $v(x) = (x+3)$.

On a : pour tout x élément de $[2\,;3]$,

$$f(x) = \frac{1}{8}\frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{15}{8}\frac{v'(x)}{v(x)} - \frac{7}{2}\frac{v'(x)}{v'(x)}$$

$$u(x) > 0 \quad \text{et} \quad v(x) > 0$$

or : la fonction $\frac{u'}{u}$ a pour primitive $\ln u$ ou $\ln(-u)$

donc : $\int_{2}^{3} f(x)\mathrm{d}x$
$$= \frac{1}{8}\int_2^3 \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x + \frac{15}{8}\int_2^3 \frac{1}{x+3}\mathrm{d}x - \frac{7}{2}\int_2^3 \frac{1}{(x+3)^2}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{8}\Big[\ln(x-1)\Big]_2^3 + \frac{15}{8}\Big[\ln(x+3)\Big]_2^3 - \frac{7}{2}\left[\frac{1}{x+3}\right]_2^3$$
$$= \frac{1}{8}\ln 2 + \frac{15}{8}\ln 5 - \frac{15}{8}\ln 5 - \frac{7}{60}.$$

Intégrale d'une fonction trigonométrique

Exemple 1

On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$f(x) = \cos^6 x$.
f est continue sur $[\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}]$. Calculons $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

En linéarisant $\cos^6 x$,

on a : $\cos^6 x = \frac{\cos 6x}{32} + \frac{6\cos 4x}{32} + \frac{15\cos 2x}{32} + \frac{20}{32}$.

donc : $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \frac{1}{32}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 6x dx + \frac{3}{16}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 4x dx + \frac{15}{32}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx + \frac{5}{8}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx$

$= \left[\frac{1}{192}\sin 6x + \frac{3}{64}\sin 4x + \frac{15}{64}\sin 2x + \frac{5x}{8}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{5\pi}{64} - \frac{15}{64}$.

On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$f(x) = \cos^3 x$.
f est continue sur $[\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}]$. Calculons $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx$.

On a : $f(x) = \cos^3 x = \cos^2 x \cos x = (1 - \sin^2 x)\cos x$

donc : $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x\, dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \cos x\, dx$

$= \left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{3}\left[\sin^3 x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$

$= \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{5\sqrt{2}}{12}$.

Exemple 2

On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$f(x) = \cos^2 x \sin^3 x$.
f est continue sur $[\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{3}]$. Calculons $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx$.

On a : $f(x) = \cos^2 x \sin^3 x = \cos^2 x \sin x(1 - \cos^2 x)$

$= \sin x \cos^2 x - \sin x \cos^4 x$

donc :

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos^2 x dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos^4 x dx$

$= \left[-\frac{1}{3}\cos^3 x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{5}\left[\cos^5 x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$

On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$f(x) = \sin^3 x \cos^3 x$.
f est continue sur $[\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{3}]$. Calculons $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx$.

On a : $f(x) = \sin^3 x \cos^3 x = \sin^3 x \cos x(1 - \sin^2 x)$

$= \sin^3 x \cos x - \cos x \sin^5 x$

donc :

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 x \cos x\, dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x \sin^5 x\, dx$

$= \left[\frac{1}{4}\sin^4 x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} - \left[\frac{1}{6}\sin^6 x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$

Remarque

Dans la recherche d'une primitive de la fonction f définie par $x \mapsto \sin^p x \cos^q x$, on peut éviter de linéariser lorsque p ou q est impaire.

Exercices

2.a On donne les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$; $g(x) = \frac{2x^2 + 3x + 4}{x^2 - 1}$.

Vérifier que f est de la forme :

$$ax + \frac{b}{x - 2} + \frac{c}{x + 2}$$

et que g est de la forme : $a + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{x + 1}$.

Calculer les intégrales : $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ et $\int_{0}^{\frac{1}{2}} g(x)dx$.

2.b Calculer les intégrales.

(1) $\int_0^2 (2x - 1)e^{x^2 - x}dx$ (2) $\int_1^2 (1 - 2x)(x^2 - x)^{\frac{7}{2}}dx$

(3) $\int_1^3 \frac{-2x + 5}{(-x^2 + 5x + 3)^5}$ (4) $\int_{e^5}^{e^8} \frac{\sqrt{\ln x - 1}}{x}dx$

(5) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x}dx$ (6) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \cos^2 x\, dx$

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^6 x\, dx$ (8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^7 x\, dx$.

2.2. Intégrale d'une fonction paire, impaire, périodique

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).

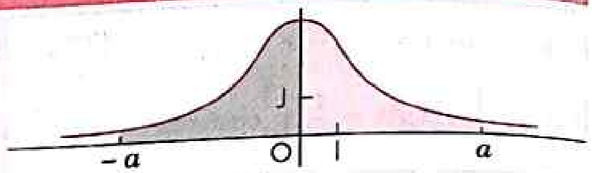
On pourra expliquer les résultats suivants en considérant l'aire de deux parties du plan qui se correspondent par la symétrie d'axe (OJ), la symétrie de centre O ou la translation de vecteur $T\,\overrightarrow{OI}$.

On démontre et nous admettons les propriétés suivantes :

Propriété

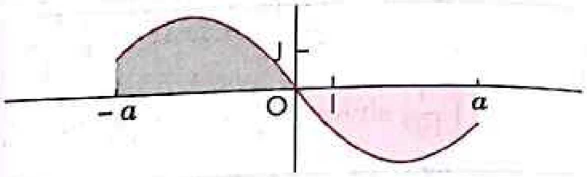
Si **f est paire**

alors $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$ **et** $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$



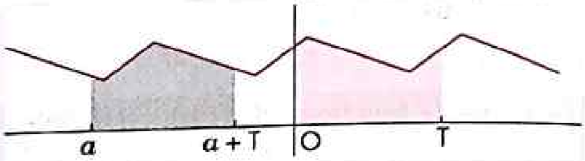
Si **f est impaire**

alors $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = -\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$ **et** $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$



Si **f est périodique de période T**

alors $\displaystyle\int_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x$



Exemple 1

Calculons l'intégrale $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 3x}$.

$x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 3x}$ est continue et paire sur $[-\frac{\pi}{9}\,;\,\frac{\pi}{9}]$.

donc : $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 3x} = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{9}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 3x} = \frac{2}{3}\Big[\tan 3x\Big]_0^{\frac{\pi}{9}}$.

Calculons l'intégrale $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

$x \mapsto \dfrac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$ est continue et impaire sur $[-3\,;\,3]$.

donc : $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x = 0$.

Exemple 2

Calculons l'intégrale $\displaystyle\int_{a}^{a+\frac{\pi}{3}} \sin^2 3x\,\mathrm{d}x$ $[a \in \mathbb{R}]$; $(\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2})$

$x \mapsto \sin^2 3x$ est continue et périodique de période $\frac{2\pi}{3}$.

donc : $\displaystyle\int_{a}^{a+\frac{2\pi}{3}} \sin^2 3x\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{2\pi}{3}} \sin^2 3x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{2\pi}{3}} (1-\cos 6x)\mathrm{d}x = \Big[\frac{1}{2}x - \frac{\sin 6x}{12}\Big]_0^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}$.

Exercices

2.c On considère les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = x^4\sin x$; $g(x) = (1+x^2)\tan x$.

Calculer : $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$; $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} g(x)\mathrm{d}x$.

2.d On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \ln(\cos x)$.

Démontrer que :

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \ln(1-\sin^2 x)\mathrm{d}x.$$

2.3. Intégration par parties

Propriété

f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a\,;b]$.
Si les fonctions dérivées f' et g' sont continues sur $[a\,;b]$
alors $\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b g'(x)f(x)\mathrm{d}x$

Démonstration

f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a\,;b]$.
Pour tout x élément de $[a\,;b]$, $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$.
Si les fonctions f' et g' sont continues sur $[a\,;b]$ alors les fonctions $f'g, f'g', f'g + f'g'$ sont continues sur $[a\,;b]$,
donc : $\int_a^b (fg)'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g'(x)f(x)\mathrm{d}x = \left[f(x)g(x)\right]_a^b$.

Exemple 1

On considère la fonction f définie par :
$$f(x) = (2x+3)e^x$$
f est continue sur $[0\,;1]$. Calculons $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Posons : $\begin{cases} u(x) = 2x+3 \\ v'(x) = e^x \end{cases}$; on a : $\begin{cases} u'(x) = 2 \\ v(x) = e^x \end{cases}$

On calcule cette intégrale en posant :
$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \left[(2x+3)e^x\right]_0^1 - 2\int_0^1 e^x\mathrm{d}x.$$

On considère la fonction f définie par :
$$f(x) = x\ln x$$
f est continue sur $[1\,;2]$. Calculons $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Posons : $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x \end{cases}$; on a : $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

On calcule cette intégrale en posant :
$$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x\mathrm{d}x.$$

Exemple 2

On considère la fonction h définie par : $h(x) = x^2\sin x$.
h est continue sur $[0\,;\frac{\pi}{3}]$. Calculons $\int_0^{\frac{\pi}{3}} h(x)\mathrm{d}x$.

Posons : $\begin{cases} f(x) = x^2 \\ g'(x) = \sin x \end{cases}$; on a : $\begin{cases} f'(x) = 2x \\ g(x) = -\cos x \end{cases}$

On calcule cette intégrale en posant :
$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} h(x)\mathrm{d}x = \left[-x^2\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos x\,\mathrm{d}x.$$

Calculons : $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos x\,\mathrm{d}x$.

Posons : $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \cos x \end{cases}$; on a : $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \sin x \end{cases}$

On calcule cette intégrale en posant :
$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos x = \left[x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,\mathrm{d}x.$$

Exercices

2.e Utiliser une intégration par parties pour calculer :

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x$ (2) $\int_0^1 x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$

(3) $\int_1^2 x\ln x\,\mathrm{d}x$ (4) $\int_1^2 \ln t\,\mathrm{d}t$

2.f Utiliser deux intégrations par parties pour calculer :

(1) $\int_0^2 x^2e^x\,\mathrm{d}x$ (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,\mathrm{d}x$

(3) $\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$ (4) $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$.

3 Calcul de grandeurs

3.1. Calcul d'aires

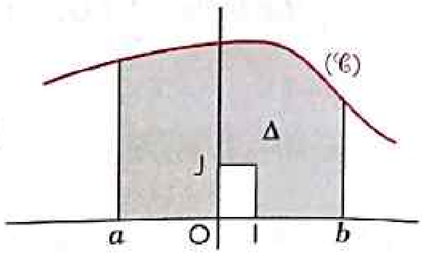
Calcul de l'aire d'une partie du plan limitée par l'axe des abscisses et une courbe

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
f étant une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$, de représentation graphique $(\mathscr{C})$, nous nous proposons de calculer l'aire de la partie Δ du plan limitée par $(\mathscr{C})$, (OI), les droites d'équations respectives : $x = a$ et $x = b$.

Cas où f est une fonction continue et positive

On sait que,
Si f est une fonction continue et positive sur $[a\,;\,b]$,
Δ la partie du plan définie par : $M(x,y) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$

alors $\boxed{\text{aire de } \Delta = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x}$



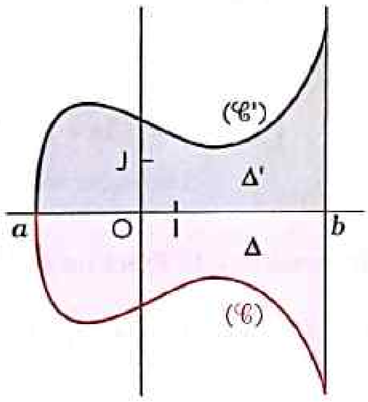
Cas où f est une fonction continue et négative

Si f est une fonction continue et négative sur $[a\,;\,b]$ on pourra considérer l'opposée de f, la fonction $-f$. C'est une fonction continue et positive sur $[a\,;\,b]$. Sa représentation graphique $(\mathscr{C}')$ est le symétrique de $(\mathscr{C})$ par rapport à (OI).
Les parties du plan Δ et Δ' définies ci-dessous sont symétriques par rapport à l'axe (OI), elles sont donc superposables.

$$M(x,y) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases} \;;\; M(x,y) \in \Delta' \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq (-f)(x) \end{cases}$$

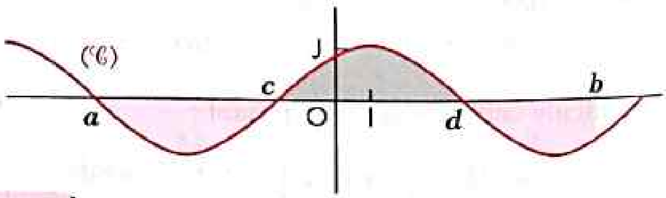
On a : $\text{aire}(\Delta') = \int_a^b (-f)(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

donc : $\boxed{\text{aire}(\Delta) = \text{aire}(\Delta') = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}$



Cas où f est fonction continue et quelconque

Les résultats précédents permettent de calculer l'aire de la partie du plan Δ limitée par la représentation graphique $(\mathscr{C})$ d'une fonction continue, l'axe (OI), les droites d'équations : $x = a$ et $x = b$.



Dans le cas de figure ci-contre,

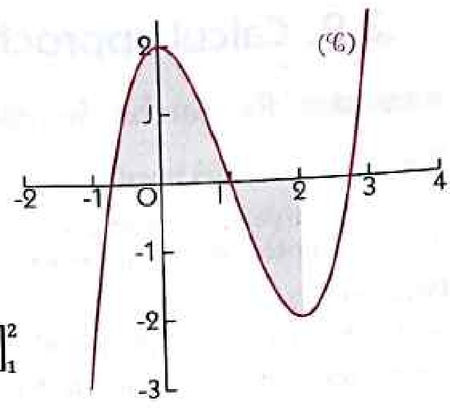
on a : $\boxed{\text{aire}(\Delta) = -\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^d f(x)\mathrm{d}x - \int_d^b f(x)\mathrm{d}x}$

Exemple

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
$(\mathscr{C})$ est la représentation graphique de la fonction polynôme f définie par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.
Calculons l'aire de la partie Δ du plan limitée par $(\mathscr{C})$, (OI), les droites d'équations : $x = -1$ et $x = 2$.

Étude du signe de f

x	$-\infty$	-1		$1-\sqrt{3}$		1		2		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f(x)$			$-$	0	$+$	0	$-$			0	$+$	



Calcul d'aire

On a : $\text{aire}(\Delta) = -\int_{-1}^{1-\sqrt{3}} f(x)\mathrm{d}x + \int_{1-\sqrt{3}}^{1} f(x)\mathrm{d}x - \int_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$

$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2x\right]_{-1}^{1-\sqrt{3}} + \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 2x\right]_{1-\sqrt{3}}^{-1} + \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2x\right]_{1}^{2}$

D'où : $\text{aire}(\Delta) \cong 5{,}75$.

Calcul de l'aire d'une partie du plan limitée par deux courbes

On veut calculer l'aire de la partie (Δ) du plan limitée par les courbes $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$, représentations graphiques des fonctions f et g continues sur $[a\,;b]$, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Soit k un nombre réel tel que :

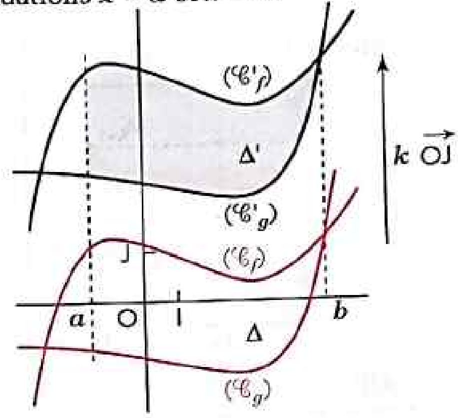
pour tout x élément de $[a\,;b]$, $f(x) + k \geq 0$ et $g(x) + k \geq 0$.

Désignons par Δ' l'image de Δ par la translation de vecteur $k\,\overrightarrow{OJ}$.

Δ' est limité par les représentations graphiques de $x \mapsto f(x) + k$, $x \mapsto g(x) + k$, les droites d'équations : $x = a$ et $x = b$.

donc : $\text{aire}(\Delta) = \text{aire}(\Delta') = \int_a^b [f(x) + k]\mathrm{d}x - \int_a^b [g(x) + k]\mathrm{d}x$.

d'où : $$\boxed{\text{aire}(\Delta) = \int_a^b [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x}$$



Exemple

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J). $(\mathscr{C})$ est la représentation graphique de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x - 2}$.

Calculons l'aire de la partie Δ du plan limitée par $(\mathscr{C})$, la droite $(\mathscr{D})$ asymptote de $(\mathscr{C})$, les droites d'équation $x = -3$ et $x = -1$.

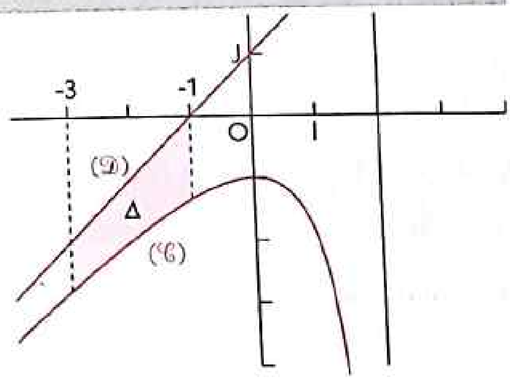
On a : $f(x) = x + 1 + \dfrac{4}{x-2}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x-2} = 0$;

donc : $(\mathscr{D})$ est la droite d'équation $y = x + 1$.

Dans l'intervalle $[-3\,;-1]$, la droite $(\mathscr{D})$ est au-dessus de la courbe $(\mathscr{C})$.

Donc : $\text{aire}(\Delta) = \int_{-3}^{-1} [f(x) - (x+1)]\mathrm{d}x = \int_{-3}^{-1} \dfrac{4}{x-2}$

$= \left[4\ln(2-x)\right]_{-3}^{-1} = 4\ln\dfrac{3}{5}$.



Exercices

3.a Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J), l'unité graphique étant 2 cm.
On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x - x\ln(-x)$. $(\mathscr{C})$ est la représentation graphique de la fonction f.
Calculer l'aire de la partie Δ du plan limitée par $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses, les droites d'équations : $x = -4$ et $x = -1$.

3.b Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
On considère la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = \dfrac{x}{2} - 1$, la courbe $(\mathscr{C})$ d'équation : $y = -x^2 - 4x - 2$.
Déterminer les points d'intersection de $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{C})$.
Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les courbes $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{C})$.

3.2. Calcul approché d'une intégrale

Recherche de méthodes de calcul approché

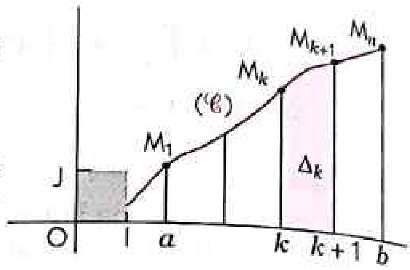
Il n'est pas toujours possible de calculer l'intégrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Cependant, lorsque la fonction f est continue et positive, nous nous proposons de donner des méthodes de calcul approché de l'aire de la partie du plan limitée par la représentation graphique $(\mathscr{C})$ de f, (OI), les droites d'équations : $x = a$ et $x = b$.

Pour cela,

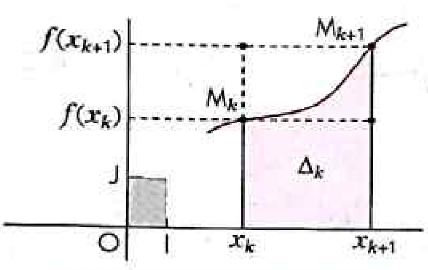
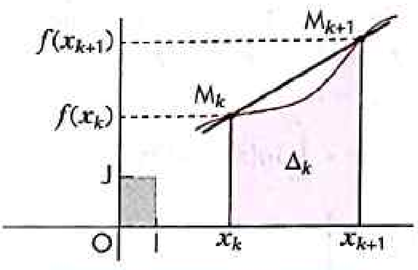
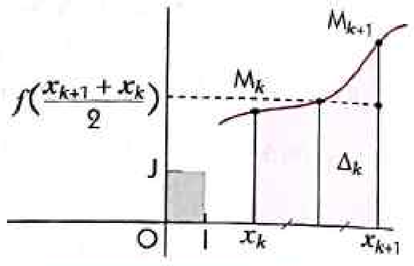
– on subdivise l'intervalle $[a\,;\,b]$ en n intervalles de même amplitude ;

– on calcule une valeur approchée de $\mathscr{A}(\Delta_k)$ l'aire de Δ_k ;

– on fait la somme de toutes les valeurs approchées des aires des Δ_k.



Pour calculer l'aire de Δ_k, on utilise habituellement l'une des méthodes suivantes. Les figures ci-dessous permettent de déterminer les rectangles R_k, R_{k+1}, R'_k et le trapèze T_k.)

Méthode du rectangle	*Méthode du trapèze*	*Méthode du point milieu*
		
$\mathscr{A}(R_k) \leq \mathscr{A}(\Delta_k) \leq \mathscr{A}(R_{k+1})$	$\mathscr{A}(\Delta_k) \simeq \mathscr{A}(T_k)$	$\mathscr{A}(\Delta_k) \simeq \mathscr{A}(R'_k)$

Exemple d'utilisation de la méthode des rectangles

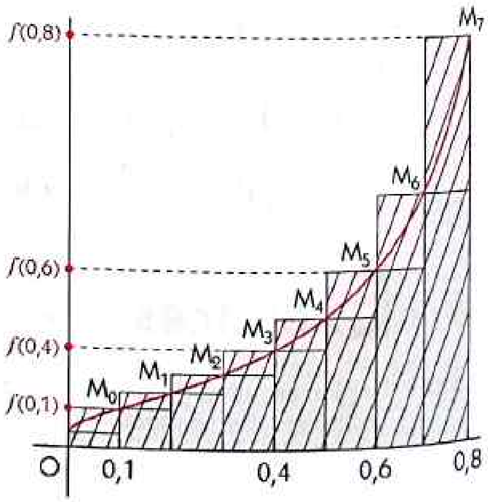
Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J). f est une fonction continue, positive et croissante sur l'intervalle $[0{,}1\,;\,0{,}8]$ définie par : $f(x) = \dfrac{-1}{\ln x}$.

Sans calculer l'intégrale, cherchons une valeur approchée du nombre $\displaystyle\int_{0,1}^{0,8} \frac{-1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$.

Pour cela,

partageons $[0{,}1\,;\,0{,}8]$ en 7 intervalles d'amplitude 0,1.

L'intégrale $\displaystyle\int_{0,1}^{0,8} \frac{-1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$ est l'aire de la partie du plan limitée par $(\mathscr{C})$, (OI), les droites d'équations : $x = 0{,}1$ et $x = 0{,}8$.



Désignons par S_1 la somme des aires des rectangles tramés gris et par S_2 la somme des aires des rectangles hachurés.

On a : $\quad S_1 \leq \displaystyle\int_{0,1}^{0,8} \frac{-1}{\ln x}\,\mathrm{d}x \leq S_2$;

$S_1 = 0{,}1[f(0{,}1) + f(0{,}2) + f(0{,}3) + f(0{,}4) + f(0{,}5) + f(0{,}6) + f(0{,}7)]$

$S_2 = 0{,}1[f(0{,}2) + f(0{,}3) + f(0{,}4) + f(0{,}5) + f(0{,}6) + f(0{,}7) + f(0{,}8)]$

Le calcul des valeurs approchées de S_1 et S_2 donne :

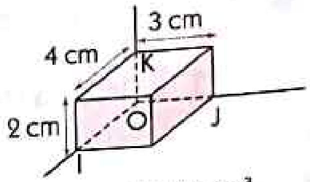
$$0{,}918 \leq \int_{0,1}^{0,8} \frac{-1}{\ln x}\,\mathrm{d}x \leq 1{,}323$$

• Déterminer une valeur approchée de l'intégrale, calculer l'erreur $S_2 - S_1$ et donner une interprétation graphique de cette erreur.

3.3. Calcul de volumes

L'espace est muni du repère orthogonal (O, I, J).

Unité de volume, unité graphique de volume



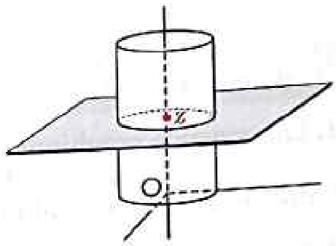
1 u.v. vaut 24 cm³

- **L'unité de volume**, noté u.v., est le volume du parallélépipède construit à partir des points O, I, J, K.
- Lorsque l'unité graphique sur chaque axe du repère est exprimée en cm, en m..., **l'unité graphique de volume** s'exprime en cm³, en m³...

Exemple introductif

Volume d'un cylindre droit exprimé par une intégrale

On considère un cylindre droit d'axe (OK), dont les bases sont contenues dans deux plans parallèles au plan (OIJ) et ayant respectivement pour équation : $z = a$ et $z = b$ $[a < b]$.



On désigne par :

$\mathscr{B}$ l'aire d'une base

$\mathscr{V}$ le volume

$\mathscr{S}$ l'application : $[a\,;b] \to \mathbb{R}$

$z \mapsto \mathscr{S}(z)$, $\mathscr{S}(z)$ étant l'aire de la section du cylindre avec un plan parallèle à (OIJ) et de côté z.

On a donc : $\mathscr{S}(z) = \mathscr{B}$.

On obtient : $\mathscr{V} = (b - a)\mathscr{B} = \displaystyle\int_a^b \mathscr{S}(z)\mathrm{d}z$.

On démontre et nous admettons la propriété suivante.

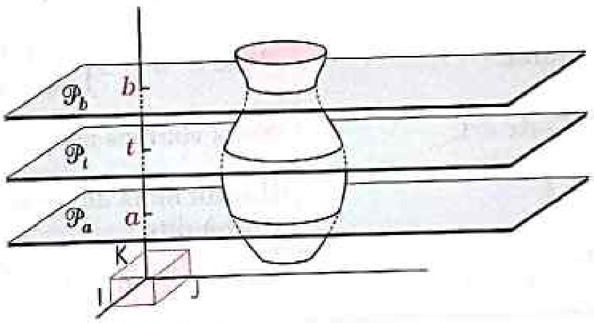
Propriété

Le volume $\mathscr{V}$ de la partie d'un solide limitée par les plans $\mathscr{P}_a$ et $\mathscr{P}_b$ d'équations respectives :

$$z = a \quad \text{et} \quad z = b \quad [a < b]$$

est déterminé (en u.v.) par : $\mathscr{V} = \displaystyle\int_a^b \mathscr{S}(t)\mathrm{d}t$,

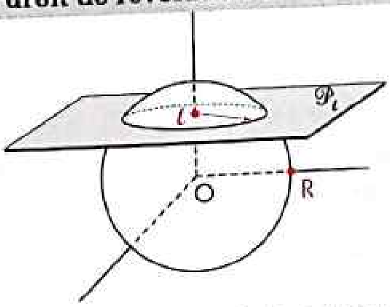
$\mathscr{S}(t)$ étant l'aire de la section du solide par le plan $\mathscr{P}_t$ d'équation $z = \mathscr{S}(t)$ $[a \le t \le b]$.



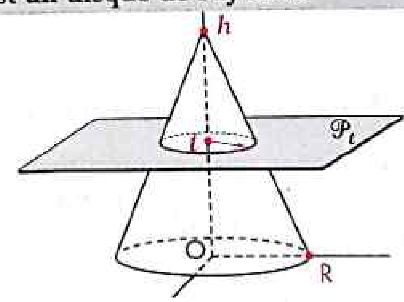
Volume de la boule et du cône

Activité

On veut retrouver par la propriété précédente, la formule du volume d'une boule de rayon R et celui d'un cône droit de révolution de hauteur h et dont la base est un disque de rayon R.



Le plan $\mathscr{P}_t$ d'équation $z = t$ $[-\mathrm{R} \le t \le \mathrm{R}]$ coupe la boule suivant un disque de rayon $r(t)$ et d'aire $\mathscr{S}(t)$.
- Exprimer $\mathscr{S}(t)$en fonction de R et t.



Le plan $\mathscr{P}_t$ d'équation $z = t$ $[0 \le t \le h]$ coupe le cône suivant un disque de rayon $r(t)$ et d'aire $\mathscr{S}(t)$.
- Exprimer $\mathscr{S}(t)$en fonction de R, h et t.

- Dans les deux cas, exprimer $\mathscr{V}$ à l'aide d'une intégrale ; calculer cette intégrale. Comparer les résultats ainsi obtenus avec les formules usuelles.

TP Travaux pratiques

TP1. Encadrementd'une intégrale comportant ln

Exercice commenté 1

1. Étudier la position relative des représentations graphiques des fonctions ln et $x \mapsto \sqrt{x}$.
En déduire un encadrement de la fonction ln sur $[1\,;+\infty[$.
2. Utiliser les résultats précédents pour encadrer les intégrales suivantes :

$$a)\ \int_1^{\alpha} \frac{\ln x}{x\sqrt{x}}\,dx \quad ; \quad b)\ \int_1^{\alpha} \frac{x^2 \ln x}{x^4+x^2+1}\,dx$$

α étant un nombre réel strictement supérieur à 1.
Trouver α pour que dans chacun des cas, l'intégrale soit inférieure à 1.

1. On constate graphiquement que :

pour tout x élément de $[1\,;+\infty[$, $0 \le \ln x < \sqrt{x}$ (1)

Cette constatation graphique est confirmée par l'étude des variations de la fonction $x \mapsto \ln x - \sqrt{x}$.

2. Soit x un élément de $[1\,;+\infty[$;

on a : $0 \le \ln x < \sqrt{x}$ d'après (1)

d'où : $0 \le \dfrac{\ln x}{x\sqrt{x}} < \dfrac{1}{x}$

or : $\displaystyle\int_1^{\alpha} \frac{dx}{x} = \ln\alpha$

donc : $0 \le \displaystyle\int_1^{\alpha} \frac{\ln x}{x\sqrt{x}}dx < \ln\alpha.$

Nous voulons avoir : $\displaystyle\int_1^{\alpha} \frac{\ln x}{x\sqrt{x}}dx < 1$

il suffit alors de poser : $\ln\alpha = 1$
c'est-à-dire : $\alpha = e.$

D'où : $\displaystyle\int_1^{e} \frac{\ln x}{x\sqrt{x}}dx < 1.$

on a : $0 \le \dfrac{1}{x^4+x^2+1} < \dfrac{1}{x^4}$

d'où : $0 \le \dfrac{x^2\ln x}{x^4+x^2+1} < \dfrac{x^2\sqrt{x}}{x^4}$ d'après (1)

$0 \le \dfrac{x^2\ln x}{x^4+x^2+1} < \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

or : $\displaystyle\int_1^{\alpha} \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \left[\frac{-2}{\sqrt{x}}\right]_1^{\alpha}$

donc : $0 \le \displaystyle\int_1^{\alpha} \frac{x^2\ln x}{x^4+x^2+1}dx < 2(1-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}).$

Nous voulons avoir : $\displaystyle\int_1^{\alpha} \frac{x^2\ln x}{x^4+x^2+1}dx < 1$

il suffit alors de poser : $2(1-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}) = 1$
c'est-à-dire : $\alpha = 4.$

D'où : $0 \le \displaystyle\int_1^{4} \frac{x^2\ln x}{x^4+x^2+1}dx < 1.$

TP2. Calcul d'une intégrale comportant ln

Exercice commenté 2

Calculer : $\displaystyle\int_2^3 (4x+1)\ln x\,dx.$

Cette intégrale est du type : $\displaystyle\int_2^3 f(x)\ln x\,dx.$

Nous ne connaissons pas une primitive sur $[2\,;3]$ de la fonction $f(x)\ln x$. Néanmoins, en utilisant judicieusement une intégration par parties, nous pouvons nous ramener à l'intégration d'une fonction ne contenant pas la fonction ln.

Posons : $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = 4x+1 \end{cases}$ donc : $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = 2x^2+x \end{cases}$

d'où : $\displaystyle\int_2^3 (4x+1)\ln x\,dx = \left[(2x^2+x)\ln x\right]_2^3 - \int_2^3 (2x+1)dx = \left[(2x^2+x)\ln x - (x^2+x)\right]_2^3$

donc : $\displaystyle\int_2^3 (4x+1)\ln x\,dx = 21\ln(3) - 10\ln(2) - 6$

TP3 Fonction définie par une intégrale

Ce TP a pour objectif d'étudier une fonction définie par une intégrale en utilisant la définition d'une primitive et les propriétés géométriques d'une intégrale.

Exercice commenté 3

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J). f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x^2}$.

1. Étudier sommairement et représenter graphiquement f.

2. On considère la primitive F sur $[0\ ;+\infty[$ de f qui s'annule en 0.

– Écrire F(x) sous forme d'intégrale ; justifier que la fonction F est bien définie sur $[0\ ;+\infty[$.

– Donner une interprétation de F(x) pour les valeurs positives et les valeurs négatives de x ; en déduire la parité de F.

– Étudier le sens de variation de F (on ne calculera pas les limites).

1. Étude sommaire et esquisse de la représentation graphique de f

$D_f = \mathbb{R}$

f est une fonction paire ;

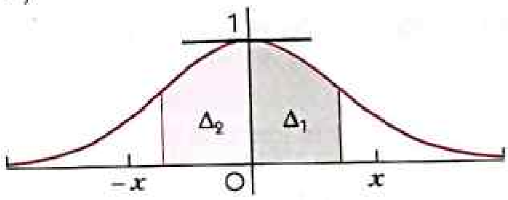
f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\text{pour tout nombre réel } x,\ f'(x) = -2xe^{-x^2}}$$

on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x^2} = 0$; car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (-x^2) = -\infty \\ \lim\limits_{X \to -\infty} e^{X} = 0 \end{cases}$

On en déduit le tableau de variation de f et l'esquisse de $(\mathscr{C}_f)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	–
$f(x)$	0 ↗	1	↘ 0



2. Étude de la fonction F

Expression de F(x) sous forme d'intégrale

La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, elle admet sur $[0\ ;+\infty[$ des primitives.

Désignons par F celle qui s'annule en 0.

Par définition :

$$\boxed{\text{pour tout } x \text{ élément de } [0\ ;+\infty[,\ F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt.}$$

Interprétation graphique de F(x)

Soit x un nombre réel strictement positif.

Par définition (voir graphique),

on a : Aire de $\Delta_1 = F(x)$; Aire de $\Delta_2 = F(-x)$

or : Aire de Δ_1 = Aire de $\Delta 2$

d'où : F est une fonction paire.

Sens de variation de F

Par définition, la fonction F est dérivable sur $[0\ ;+\infty[$ et

$$\boxed{\text{pour tout } x \text{ élément de } [0\ ;+\infty[,\ F'(x) = e^{-x^2}}$$

On en déduit que F est une fonction strictement croissante sur $[0\ ;+\infty[$.

TP4 Détermination de primitives

Ce TP a pour objet de compléter les TP2 et TP3 par une méthode de détermination de primitives de certaines fonctions du type fg.

Cette méthode consiste à :
– définir la primitive sous forme d'intégrale ;
– expliciter cette primitive en calculant l'intégrale à l'aide d'une ou de deux intégrations par parties.

Exemple 1

À l'aide d'une intégration par parties, déterminer la primitive F sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$, de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x\sin x.$$

- La primitive F est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$F(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} t\sin t\,\mathrm{d}t.$$

- Calcul de cette intégrale par une intégration par parties :

on pose : $\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = \sin t \end{cases}$; on a : $\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -\cos t \end{cases}$

on obtient : $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} t\sin t\,\mathrm{d}t = -\left[t\cos t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \cos t\,\mathrm{d}t$

d'où : $F(x) = -x\cos x + \sin x - 1.$

Exemple 2

À l'aide de deux intégrations par parties, déterminer la primitive G sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$, de la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = x^2\cos x.$$

- La primitive G est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$G(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} t^2\cos t\,\mathrm{d}t.$$

- Calcul de cette intégrale par deux intégrations par parties :

on pose : $\begin{cases} u(t) = t^2 \\ v'(t) = \cos t \end{cases}$; on a : $\begin{cases} u'(t) = 2t \\ v(t) = \sin t \end{cases}$

on obtient : $G(x) = \left[t^2\sin t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{x} - 2\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} t\sin t\,\mathrm{d}t$

d'où : $G(x) = x^2\sin x - \frac{\pi^2}{4} - 2F(x)$

$G(x) = x^2\sin x - \frac{\pi^2}{4} + 2(x\cos x - \sin x + 1).$

Exercices

ENTRAÎNEMENT

Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle

1 Calculer les intégrales suivantes :

(1) $\int_0^3 (-x^2 + 4x + 1)dx$ (2) $\int_1^e \frac{dx}{x}$

(3) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ (4) $\int_1^2 \frac{dx}{x^3}$

(5) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx$ (6) $\int_0^{\ln 3} e^x dx$

2 On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + |1 - e^{-x}|$.

Calculer $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

3 On considère les intégrales I et J ci-dessous :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^4 x\, dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \sin^4 x\, dx.$$

1. Calculer I + J et I – J.
2. En déduire I et J.

4 On considère les intégrales I et J ci-dessous :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x+1)\cos^2 x\, dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x+1)\sin^2 x\, dx.$$

1. Calculer I + J et I – J.
2. En déduire I et J.

5 On considère la fonction f de $[0 ; \frac{\pi}{4}]$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$.

1. Démontrer que f est dérivable sur $[0 ; \frac{\pi}{4}]$ et que : pour tout élément x de $[0 ; \frac{\pi}{4}]$, $f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} + \frac{2}{\cos^2 x}$.

2. Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$.

3. En déduire une relation entre les intégrales I et J, $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} dx$. Calculer J.

Inégalités et intégrales

6 Démontrer que : pour tout x élément de $[0 ; 1]$ et pour tout entier naturel non nul n,

$$\frac{x^n}{2} \leq \frac{x^n}{1+x^4} \leq x^n.$$

En déduire que : $\frac{1}{2(n+1)} \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^4}dx \leq \frac{1}{n+1}$.

7 Démontrer que : pour tout nombre réel positif t,

$$1 - t \leq \frac{1}{t+1} \leq 1.$$

En déduire que : pour tout nombre réel positif x,

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

8 Dans chacun des cas suivants, calculer la valeur moyenne sur l'intervalle K de la fonction f définie ci-dessous.

(1) $f : x \mapsto e^{-x}$ $K = [\ln 2 ; \ln 3]$

(2) $f : x \mapsto x^3 + x - 3$ $K = [1 ; 3]$

(3) $f : x \mapsto \frac{\sin \pi x}{2}$ $K = [0 ; \frac{1}{2}]$

(4) $f : x \mapsto \frac{e^x}{1+e^x}$ $K = [0 ; 3]$

9 Dans chacun des cas suivants, calculer la valeur moyenne sur l'intervalle K de la fonction f définie ci-dessous.

(1) $f(x) = x^2$ $K = [1 ; 2]$

(2) $f(x) = 2\sin 2x$ $K = [1 ; \frac{\pi}{2}]$

(3) $f(x) = \tan x$ $K = [-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{3}]$

10 1. Démontrer que pour tout $t \geq 0$,

$$1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1 - t + t^2.$$

En déduire : que pour tout $x \geq 0$,

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

2. Trouver un encadrement analogue pour $-1 \leq t \leq 0$.

En déduire que : $\lim_{x \to 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

11 On sait que : pour tout $t \geq 0$, $1 \leq e^t$.

1. Démontrer que : pour tout $t \geq 0$, $1 + t \leq e^t$.
(Utiliser une intégration.)
2. Démontrer que :
pour tout $t \geq 0$, $1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} \leq e^t$.
(Utiliser la démonstration par récurrence.)

12 Démontrer que pour tout t élément de $[0 ; 1]$,

$$0 \leq e^t - 1 \leq e \times t.$$

(On pourra intégrer e^t sur $[0 ; 1]$.)

En déduire que :

pour tout u élément de $[0 ; 1]$,

$$1 + u \leq e^u \leq 1 + u + \frac{e}{2}u.$$

Techniques du calcul d'intégrales

Utilisation d'une primitive pour calculer une intégrale

13 Calculer chacune des intégrales suivantes :

(1) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ (2) $\int_2^4 \frac{1+x}{x^2+2x+3}dx$

(3) $\int_0^2 x\sqrt{x^2+1}dx$ (4) $\int_1^3 x^3\sqrt{x}\, dx$

(5) $\int_0^2 e^{-3x}dx$ (6) $\int_0^{\frac{1}{3}} \sin x\, dx$

(7) $\int_{-1}^{1} e^{3x+1}dx$ (8) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$

14 Calculer chacune des intégrales suivantes :

(1) $\int_2^3\left(x^2+\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

(2) $\int_0^3\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{1+x}+\frac{2}{2x+2}\right)dx$

15 Calculer chacune des intégrales suivantes :

(1) $\int_0^\pi \cos 2x\,dx$ (2) $\int_0^\pi \sin 2x\,dx$ (3) $\int_0^\pi \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$

16 Calculer chacune des intégrales suivantes :

(1) $\int_0^1 (2x-5)(x^2-5x+1)dx$

(2) $\int_{-3}^0 \frac{x+3}{(x^2+6x-1)^3}\,dx$ (3) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx$

(4) $\int_2^5\left(2x-1-\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$ (5) $\int_3^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$

(6) $\int_{-3}^{-2} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$ (7) $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

(8) $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$ (9) $\int_{e^{-1}}^1\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{\ln^2 x}{x}\right)dx$

17 Calculer les intégrales suivantes :

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin 2x\,dx$ (2) $\int_{\frac{\pi}{6}}^0 \cos x\,dx$

(3) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} ue^{u^2+1}du$ (4) $\int_0^2 u\sqrt{2u^2+1}\,du$

(5) $\int_0^2 \frac{2dt}{\sqrt{4t+1}}$ (6) $\int_2^1 \frac{1}{u^2}\,e^{\frac{1}{u}}du$

(7) $\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$ (8) $\int_0^1 \frac{x+1}{2x^2+4x+5}\,dx$

(9) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$ (10) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} e^{2\cos x}\sin x\,dx$

18 Calculer les intégrales :

(1) $\int_{-1}^0 \frac{x^2+3x+1}{2x+3}\,dx$ (2) $\int_{-1}^1 \frac{5x^5+3x^3\sqrt{3}}{x^4+x^2+1}\,dx$

19 On considère le polynôme $f(x)$ défini par : $f(x)=(1+x)^n$ ($n\in\mathbb{N}$).

1. Calculer $\int_0^1 f(x)dx$.

2. Après avoir transformé f par la formule du binôme, donner une autre expression de $\int_0^1 f(x)dx$.

3. En déduire la valeur de :

$$1+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+\dots+\frac{1}{n+1}C_n^n.$$

Utilisation de la linéarisation dans le calcul d'une intégrale

20 Linéariser $\sin^4 x$.

Calculer l'intégrale $\int_0^\pi \sin^4 x\,dx$.

21 Linéariser $\sin^2 x\cos^4 x$.

Calculer l'intégrale $\int_0^{2\pi} \sin^2 x\cos^4 x\,dx$.

Calculer de même $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\sin^4 x\,dx$.

22 Calculer les intégrales suivantes en linéarisant :

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 5x\,dx$ (2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x\,dx$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\cos^4 x\,dx$ (4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2(2x)\cos^2(3x)dx$

23 Calculer les intégrales ci-dessous en évitant la linéarisation :

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx$ (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\,dx$.

(3) $\int_0^\pi \sin^3 x\cos^2 x\,dx$ (4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos x\,dx$

(5) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\sin^2 x\cos x\,dx$ (6) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x\cos x\,dx$

24 1. Transformer en une somme $\cos x\cos 2x\cos 3x$.

2. Calculer les intégrales I et J définies ci-dessous :

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sin^2 x\cos 3x\,dx$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\cos 3x\,dx$.

Utilisation de la parité ou de la périodicité dans le calcul d'une intégrale

25 Utiliser la parité ou la périodicité pour calculer les intégrales suivantes :

(1) $\int_{-2\pi}^{2\pi} (x-\sin x)dx$ (2) $\int_{-2\pi}^{2\pi} (x^2-\cos x)dx$

(3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x-\sin x)dx$ (4) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x\,dx$

Intégration par parties

26 Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

(1) $\int_1^2 \ln x\,dx$ (2) $\int_1^2 \ln(4x-1)dx$

(3) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ (4) $\int_3^5 \ln\frac{x-1}{x}\,dx$

27 Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'intégrations par parties :

(1) $\int_{-2}^1 x\,e^x dx$ (2) $\int_{-1}^1 (1+x)e^x dx$ (3) $\int_{-1}^1 \frac{2x+1}{e^x}dx$

(4) $\int_0^2 (2x+4)e^{x-1}dx$ (5) $\int_{-1}^2 (x+2)e^{x+1}dx$

28 Calculer les intégrales ci-dessous à l'aide d'intégrations par parties ;

(1) $\int_0^\pi x\cos x\,dx$ (2) $\int_0^\pi (2x^2-1)\cos 3x\,dx$

(3) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} x^2\sin x\,dx$ (4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,dx$

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2\sin^2 x\,dx$ (6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,dx$

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\,dx$

29 Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'intégration(s) par parties.

(1) $\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$ (2) $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x}\,dx$

30 1. Déterminer les nombres réels a, b, c tels que :

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}.$$

2. Calculer $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x(x^2+1)}dx$.

3. À l'aide d'une intégration par parties,

calculer $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln x}{x(x^2+1)}dx$.

31 1. Démontrer que pour tout nombre réel x :

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + 3\cos x.$$

2. À l'aide d'une intégration par parties,

calculer $\int_{\frac{1}{2}}^{1} (2x+1)\cos^2 x\sin x\,dx$.

32 On considère la fonction f définie sur $[\frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{3}]$ par : $f(x) = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. À l'aide d'un intégration par parties, déterminer la valeur exacte du nombre $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\cos t\sin t}$.

33 On considère les intégrales I et J ci-dessous :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 x\,dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2 x\,dx.$$

1. Calculer I + J.
2. Calculer I − J à l'aide d'une intégration par partie.
3. En déduire I et J.

34 Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'intégrations par parties.

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{2x}\cos x\,dx$ (2) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{2x}x^2\sin 3x\,dx$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\,dx$ (4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\sin x\,dx$

35 Calculer les intégrales suivantes à l'aide de deux intégrations par parties.

(1) $\int_{-1}^{2} (x^2+2x+3)e^x\,dx$ (2) $\int_1^2 \ln^2 x\,dx$

(3) $\int_0^1 x^2 e^{\frac{x}{2}}\,dx$ (4) $\int_{-2}^{1} (x^2+1)e^x\,dx$

(5) $\int_1^2 x\ln^2 x\,dx$ (6) $\int_0^{\pi} e^x\sin x\,dx$

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3x}\cos 3x\,dx$ (8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3x}\sin 3x\,dx$

Calculs de grandeurs

Fonction définie par une intégrale

36 f est la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \int_1^x \frac{5t}{1+t}\,dt.$$

1. Calculer $f(1)$.
2. Déterminer la dérivée f' de f.

37 On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \int_0^x (e^t + 3e^{-t})dt$.

1. Indiquer sans calcul $f'(x)$ et $f(0)$.
2. Étudier les variations de f.
3. m étant un nombre réel donné, déterminer dans $\mathbb{R}$ le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = m$.

38 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \int_0^x \frac{e^t}{1+e^t}\,dt.$$

1. Indiquer sans calcul $f'(x)$ et $f(0)$.
2. Étudier les variations de f.
3. Démontrer que : pour tout nombre réel x,
$$f(x) = x + \ln(e^{-x}+1) - \ln 2.$$
En déduire que la droite d'équation $x - \ln 2$ est une asymptote à la représentation graphique $(\mathscr{C})$ de f.
4. Construire $(\mathscr{C})$.

D'après BAC

39 On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{3x^3 - 5x^2 + 2x - 1}{x^2 - 4x + 4}$.

1. Préciser l'ensemble D_f de définition de f.
2. Déterminer les nombres réels a, b, c et d tels que, pour tout nombre réel x :
$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2} + \frac{d}{(x-2)^2}.$$
3. Donner une primitive de f sur $[-1\,;1]$.

Calculer $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

PROBLÈMES

40 Le plan est muni du repère (O, I, J). On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x + \ln\frac{3-x}{1+x}.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de f.

1. Étudier les variations de f et construire $(\mathscr{C})$.
2. Calculer à l'aide d'une intégration par parties les intégrales : $\int_1^2 \ln(x+1)dx$ et $\int_1^2 \ln(-x+3)dx$.
3. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par $(\mathscr{C})$, (OI), les droites d'équations : $x = 1$ et $x = 2$.

41 Le plan est muni du repère (O, I, J). On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x|x|.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de f.

1. Étudier les variations de f et construire $(\mathscr{C})$.
2. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par $(\mathscr{C})$, (OI), les droites d'équations : $x = 0$ et $x = -2$.

42 Le plan est muni du repère (O, I, J).
On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = x + 1 + \frac{4}{(x-2)^2}.$$
On désigne par $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de f.
1. Étudier les variations de f et construire $(\mathscr{C})$.
2. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par $(\mathscr{C})$, les droites d'équations : $y = x + 1$, $x = 3$ et $x = 15$.

43 Le plan est muni du repère (O, I, J).
On considère la fonction f de $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \tan^2 x$.
On désigne par $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de f.
1. Étudier les variations de f et construire $(\mathscr{C})$.
2. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par $(\mathscr{C})$, (OI), (OJ) et la droite d'équation : $x = \frac{2\pi}{5}$.

44 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = x - e^{3x}.$$
1. Étudier les variations de f.
2. Construire la représentation graphique $(\mathscr{C})$ de f (unité graphique : OI = OJ = 3 cm).
3. Calculer l'aire (en cm²) de la partie du plan limitée par $(\mathscr{C})$, (OI) et les droites d'équations : $x = -4$ et $x = -1$.

45 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$
1. Étudier les variations de f.
2. Construire la représentation graphique $(\mathscr{C})$ de f (unité graphique : OI = OJ = 4 cm).
3. Déterminer deux nombres réels a et b tels que :
$$f(x) = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}.$$
4. Calculer l'aire (en cm²) de la partie limitée par $(\mathscr{C})$, (OI) et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = \frac{3}{4}$.

46 On se propose de calculer une valeur approchée de l'intégrale A définie par : $A = \int_5^{50} \frac{dx}{1+x^6}$.
On considère pour cela les deux intégrales B et C définies par :
$$B = \int_5^{50} \frac{dx}{x^6} \quad \text{et} \quad C = \int_5^{50} \frac{dx}{x^{12}}.$$
1. Démontrer que : $A \leq B$.
2. Démontrer que : $B - A \leq C$.
3. Déduire un encadrement de A.

47 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = e^x(1 - e^x).$$
On désigne par $(\mathscr{C}_f)$ la représentation graphique de f.
1. Étudier les variations de f et construire $(\mathscr{C}_f)$.
2. Calculer l'aire $\mathscr{A}(k)$ de la partie du plan limitée par $(\mathscr{C}_f)$, (OI), (OJ) et la droite d'équation : $x = k$ $[k < 0]$.
3. Déterminer une valeur approchée de $\mathscr{A}(-3)$ à 5.10^{-3}.
4. Calculer $\lim_{k \to -\infty} \mathscr{A}(k)$.

48 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
On considère la fonction f définie sur $]-1 ; +\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{1}{1+x} - \ln(1+x).$$
On désigne par $(\mathscr{C}_f)$ la représentation graphique de f.
1. Étudier les variations de f et construire $(\mathscr{C}_f)$.
2. Démontrer que f détermine une bijection de $]-1 ; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique notée α.
3. Prouver que : $0{,}7 \leq \alpha \leq 0{,}8$.
4. Calculer en fonction de l'aire de la partie du plan limitée par $(\mathscr{C}_f)$, (OI) et (OJ).

49 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = e^{-x}\cos x.$$
On désigne par $(\mathscr{C}_f)$ la représentation graphique de f.
1. Étudier les variations de f et construire $(\mathscr{C}_f)$ sur $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$.
2. Déterminer deux nombres réels a et b tels que : $(a\cos x + b\sin x)e^{-x}$ soit une primitive de f.
3. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par $(\mathscr{C}_f)$ et les droites d'équations : $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$.

50 On considère la fonction :
$$f(x) = \ln(1 + e^x).$$
On se propose de calculer : $\int_0^\lambda f(x)dx$ $[\lambda \in \mathbb{R}]$.
1. On désigne par $I(\lambda)$ cette intégrale. Quel est le signe de $I(\lambda)$?
2. *a)* Trouver deux nombres réels a et b tels que :
pour tout nombre réel x, $\frac{e^x}{1+e^x} = a + \frac{b}{1+e^x}$.
Calculer : $\int_0^\lambda \frac{1}{1+e^x}\, dx$.
b) f' étant la fonction dérivé de f, calculer $f + f'$.
c) Calculer : $I(\lambda)$.

51 **1.** x est un nombre réel.
On pose : $F(x) = \int_0^x 10^t dt$.
Calculer $F(x)$. *(Mettre 10^t sous la forme $e^{\lambda t}$.)*
2. Résoudre l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = 6$.

52 On considère la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = 1 - e^{2x} - 2xe^{2x}$.
1. Démontrer que : $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 1$.
2. Étudier le sens de variation de g. Calculer $g(0)$. Déduire des variations de g le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
3. *a)* Calculer $\int_0^x 2te^{2t}dt$ à l'aide d'une intégration par parties.
b) En déduire la primitive de la fonction g qui prend la valeur 3 en 0.
4. On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x + 3 - xe^{2x}$. $(\mathscr{C})$ est la représentation graphique de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) (unité 2 cm).
a) Étudier les variations de f.
b) Démontrer que la courbe $(\mathscr{C})$ admet pour asymptote en $-\infty$ la droite (D) d'équation : $y = x + 3$.
Étudier suivant les valeurs de x les positions relatives de (D) et de $(\mathscr{C})$.
c) Démontrer que $(\mathscr{C})$ coupe l'axe des abscisses en deux points que l'on désignera par A et B (A ayant une abscisse inférieure à celle de B).
d) Déterminer et justifier un encadrement d'amplitude 0,1 de l'abscisse de B.
5. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite (D).
a) α est un nombre réel négatif. Exprimer en cm² l'aire $\mathscr{A}(\alpha)$ de la partie du plan limitée par $(\mathscr{C})$, (D), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \alpha$.
b) Calculer : $\lim_{\alpha \to -\infty} \mathscr{A}(\alpha)$.

8 Suites numériques

Les « suites de nombres » engendrent l'idée de récurrence, dont Blaise Pascal (1654) tire le raisonnement par induction complète.

C'est le mathématicien Augustin Cauchy qui montra à Laplace la nécessité d'une étude précise des notions de convergence ou de divergence d'une suite.

Son œuvre est très riche. Il reconstruit en particulier l'analyse avec des concepts de base précisément définis et reste ainsi, pour le début du XIX^{e} siècle, le plus grand rénovateur de l'analyse.

Augustin Louis Cauchy
mathématicien français – 1789-1857.

SOMMAIRE

1 Généralités

1.1. Détermination et sens de variation d'une suite

Tableau récapitulatif

① **Détermination d'une suite**

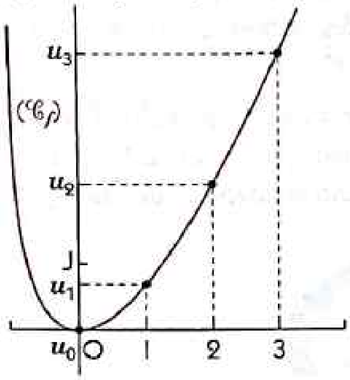
On appelle suite numérique, toute fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.

Suite définie par une formule explicite

$u_n = n\ln(n+1) = f(n)$

f étant la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x) = x\ln(x+1)$

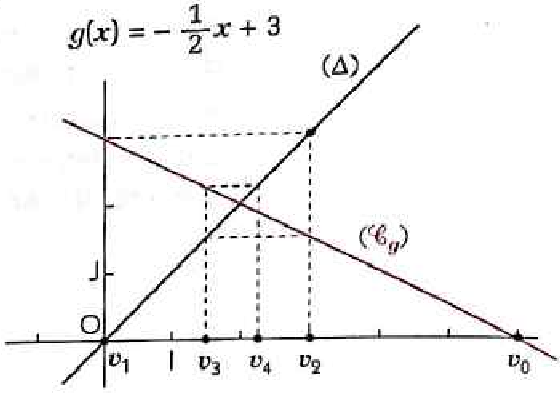


Suite définie par une formule de récurrence

$$\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n + 3 = g(v_n) \end{cases}$$

g étant la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$g(x) = -\frac{1}{2}x + 3$



② **Sens de variation**

u est une suite numérique, n_0 un nombre entier naturel.

- **u est croissante à partir de l'indice n_0**
  si et seulement si
  pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à n_0, $u_n \leq u_{n+1}$

- **u est décroissante à partir de l'indice n_0**
  si et seulement si
  pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à n_0, $u_n \geq u_{n+1}$

- **u est strictement croissante à partir de l'indice n_0**
  si et seulement si
  pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à n_0, $u_n < u_{n+1}$

- **u est strictement décroissante à partir de l'indice n_0**
  si et seulement si
  pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à n_0, $u_n > u_{n+1}$

u est dite *monotone* lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante.
u est dite *strictement monotone* lorsqu'elle est soit strictement croissante, soit strictement décroissante.

M

Pour étudier le sens de variation d'une suite numérique u, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

– on compare u_n et u_{n+1}, ce qui revient aussi à étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$;

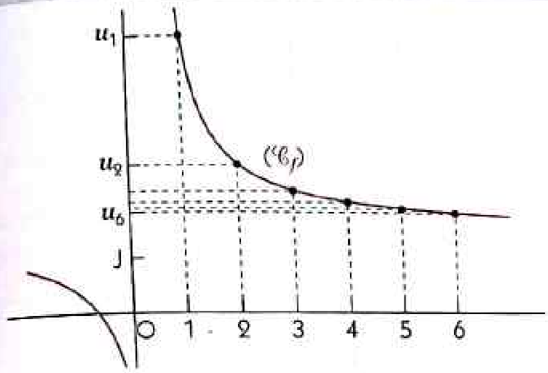
– pour une suite à termes positifs, on compare $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1 ;

– lorsque u est définie par une formule explicite : $u_n = f(n)$
on étudie le sens de variation de la fonction f.

– lorsque u est définie par une formule de récurrence : $u_{n+1} = g(u_n)$
on utilise un raisonnement par récurrence (éventuellement le sens de variation de g).

Exemples

Étudions le sens de variation de la suite u définie par : $u_n = \dfrac{3n+2}{2n-1}$.



Étudions, de deux manières, le sens de variation de u.

Signe de $u_{n+1} - u_n$

Pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-7}{(2n+1)(2n-1)} < 0$$

d'où : u est strictement décroissante à partir de l'indice 1.

Utilisation de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

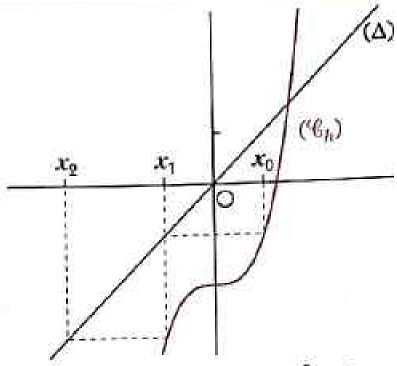
$$x \mapsto \frac{3x+2}{2x-1}$$

Pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, $u_n = f(n)$.

On vérifie, par le signe de sa dérivée f', que f est strictement décroissante sur $[1\,;+\infty[$.

La suite u est donc strictement décroissante à partir de l'indice 1.

Étudions le sens de variation de la suite x définie par : $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = x_n^3 - 2 \end{cases}$



Considérons la fonction $h : x \mapsto x^3 - 2$.

Pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $x_{n+1} = h(x_n)$.

On vérifie que h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démontrons par récurrence que : pour tout nombre entier naturel n, $x_n > x_{n+1}$

– On a : $x_0 > x_1$

– Supposons que :

pour un nombre entier naturel k, $x_k > x_{k+1}$

donc : $h(x_k) > h(x_{k+1})$

d'où : $x_{k+1} > x_{k+2}$

– Par conséquent :

pour tout nombre entier naturel n, $x_n > x_{n+1}$

La suite x est donc décroissante.

Étudions le sens de variation de la suite w définie par : $w_n = \dfrac{1}{3^n}$.

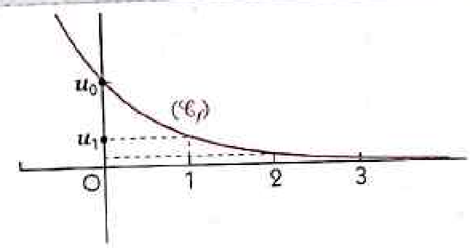
Soit n un élément de $\mathbb{N}$.

On a : $w_n > 0$

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} < 1$$

La suite w est donc strictement décroissante.



Exercices

1.a On considère la suite v définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 2v_n - 2 \end{cases}$$

Calculer les quatre premiers termes de v.

Représenter graphiquement sur l'axe des abscisses les premiers termes de cette suite.

Émettre une conjecture sur le sens de variation de v.

Contrôler cette conjecture.

1.b On considère la suite x définie par :

$$x_n = \frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{2+n^2} + \dots + \frac{1}{n+n^2}$$

Calculer les cinq premiers termes.

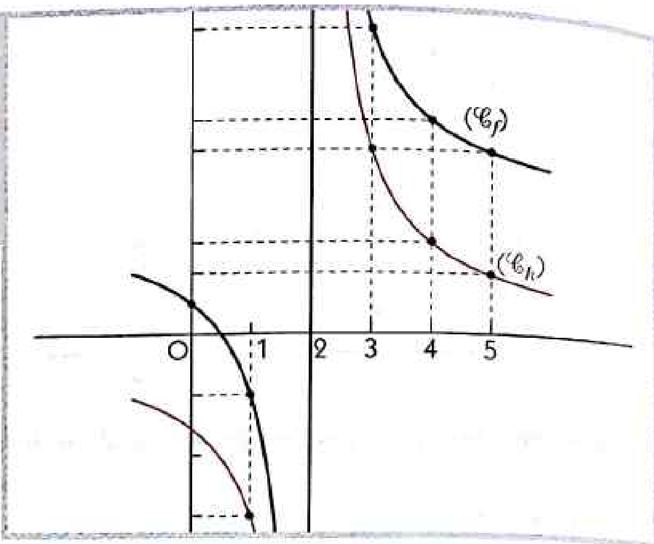
Étudier le sens de variation de cette suite.

1.2. Comparaison

Comparaison de deux suites

Activité

On veut comparer les suites u et v définies par :
$u_n = \frac{2n-1}{n-2} = f(n)$; $v_n = \frac{3}{n-2} = h(n)$,
f et h étant les fonctions définies par :
$f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$; $h(x) = \frac{3}{x-2}$.



Pour cela,

– déterminer les cinq premiers termes de chacune de ces suites par le calcul ou par le graphique ;

– comparer les termes de même indice et émettre une conjecture ;

– contrôler cette conjecture en étudiant le signe de $u_n - v_n$.

Définition

u et v sont des suites de même ensemble de définition, n_0 un nombre entier naturel.
Lorsque pour tout nombre entier naturel n supérieur à n_0, $u_n \geq v_n$,
on dit que : u est *supérieure à v* à partir de l'indice n_0.
On dit aussi que : v est *inférieure à u* à partir de l'indice n_0.

Exemple

Comparons les suites u et v définies respectivement par : $u_n = \frac{1}{n^2}$ et $v_n = \frac{1}{2n+1}$.

Approche numérique

n	1	2	3	4	5	6	7
u_n	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{49}$
v_n	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{15}$

D'après cette table de valeurs, il semble que :
pour tout n supérieur à 3, $u_n < v_n$.
Contrôlons cette conjecture par le calcul.

Étude algébrique

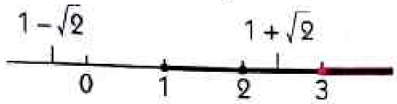
Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$,

On a : $v_n - u_n = \frac{n^2 - 2n - 1}{n^2(2n+1)}$

donc : $(v_n - u_n)$ est toujours du signe de $n^2 - 2n - 1$
donc de $(n - 1 + \sqrt{2})(n - 1 - \sqrt{2})$

d'où : pour tout n supérieur à 3, $v_n - u_n > 0$

v est donc supérieure à u à partir de l'indice 3.



Suites majorées, minorées, bornées

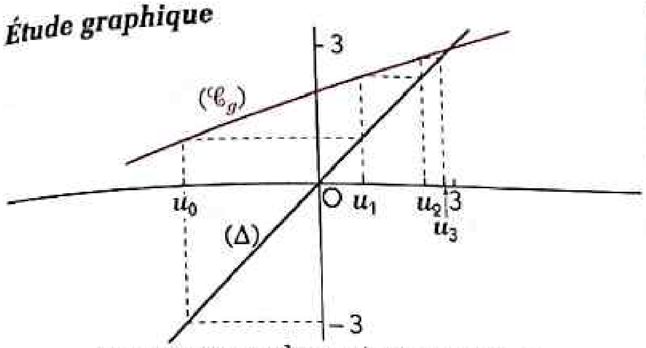
Exemple introductif

La suite u est définie par : $\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 = g(u_n) \end{cases}$

g étant la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \frac{1}{3}x + 2$.

Démontrons que : pour tout nombre entier naturel n, $-3 \leq u_n < 3$.

Étude graphique



Ce graphique permet de conjecturer que :
la suite u est croissante et $u_0 \leq u_n \leq 3$.
Contrôlons cette conjecture par le calcul.

Étude algébrique

• Démontrons par récurrence que :
pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $-3 \leq u_n < 3$.

– On a : $-3 \leq u_0 < 3$ (car $u_0 = -3$)

– Supposons que :
pour un nombre entier naturel k, $-3 \leq u_k < 3$

donc : $1 \leq \frac{1}{3} u_k + 2 < 3$

d'où : $1 \leq u_{k+1} < 3$; $-3 \leq u_{k+1} < 3$

– Conclusion :
pour tout nombre entier naturel n, $-3 \leq u_n < 3$.

• On dit que : la suite u est **minorée** par -3 et **majorée** par 3 ; c'est une suite **bornée**.

Définition

On dit qu'une suite numérique u définie sur une partie E de $\mathbb{N}$ est :

**– *minorée* s'il existe un nombre réel m tel que :
pour tout n élément de E, $u_n \geq m$.**

– *positive* si elle est minorée par 0.

**– *majorée* s'il existe un nombre réel M tel que :
pour tout n élément de E, $u_n \leq M$.**

– *négative* si elle est majorée par 0.

– *bornée* si elle est à la fois minorée et majorée.

Exemple 1

w est la suite définie par : $w_n = \dfrac{n^2 - 10n + 21}{n^2 - 6n + 11}$.

Démontrons que w est minorée par -1 et majorée par 2.

Désignons par f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 10x + 21}{x^2 - 6x + 11}.$$

L'étude des variations de f donne le tableau ci-contre.
On déduit de ce tableau de variation que :
f est minorée par -1 et majorée par 2.
La suite w est donc minorée par -1 et majorée par 2.

x	0		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		–	0	–	0	+	
$f(x)$	$\frac{21}{11}$	↗	2	↘	-1	↗	1

Exemple 2

t est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $t_n = \dfrac{1}{1+n^2} + \dfrac{1}{2+n^2} + \ldots + \dfrac{1}{n+n^2}$.

Démontrons que la suite t est bornée.

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$; t_n est égal à la somme des n termes : $\frac{1}{1+n^2}, \frac{1}{2+n^2}, \ldots, \frac{1}{n+n^2}$.

Chaque terme de cette somme est inférieur ou égal à $\frac{1}{1+n^2}$ et supérieur ou égal à $\frac{1}{n+n^2}$;

donc : $\dfrac{n}{n+n^2} \leq \dfrac{1}{1+n^2} + \dfrac{1}{2+n^2} + \ldots + \dfrac{1}{n+n^2} \leq \dfrac{n}{1+n^2}$

or : $\dfrac{n}{n+n^2} = \dfrac{1}{1+n} \geq \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{n}{1+n^2} \leq 1$

d'où : $0{,}5 \leq t_n \leq 1$. La suite t est majorée par 1 et minorée par $\frac{1}{2}$, elle est donc bornée.

Exercices

1.c Démontrer que les suites suivantes sont bornées.

(1) $u_n = \dfrac{2n-3}{5n-2}$ (2) $u_n = \ln(n+1) - \ln n$

(3) $u_n = \sqrt{n^2+2} - n$ (4) $u_n = \dfrac{2n + \cos n}{n^2}$

1.d On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par :
$u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{9}{6 - u_n}$

Démontrer par récurrence que :
pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $u_n < 3$.
Étudier le sens de variation de la suite u.

2 Convergence

2.1. Notion de convergence d'une suite numérique

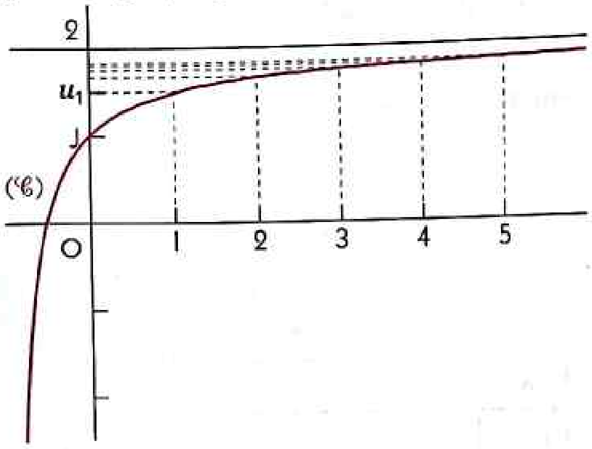
Approche de la notion de convergence

■ **Exemples introductifs**

Étudions, pour les grandes valeurs de n, le comportement de la suite u définie par :

$$u_n = \frac{2n+1}{n+1}$$

Approches graphique et numérique



• Compléter la table de valeurs approchées suivante :

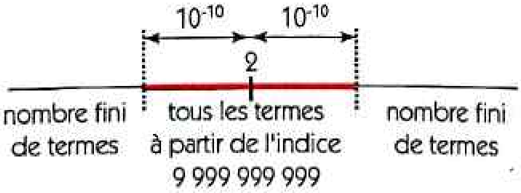
n	10	10^2	10^3	2×10^3	5×10^3	10^4	10^5
u_n							

Les termes de la suite deviennent de plus en plus proches de 2, lorsque n devient de plus en plus grand.

Étude de la distance $|u_n - 2|$

– On a : $|u_n - 2| = \dfrac{1}{n+1}$

– On démontre que :
à partir de l'indice 9 999 999 999, $|u_n - 2| < 10^{-10}$.



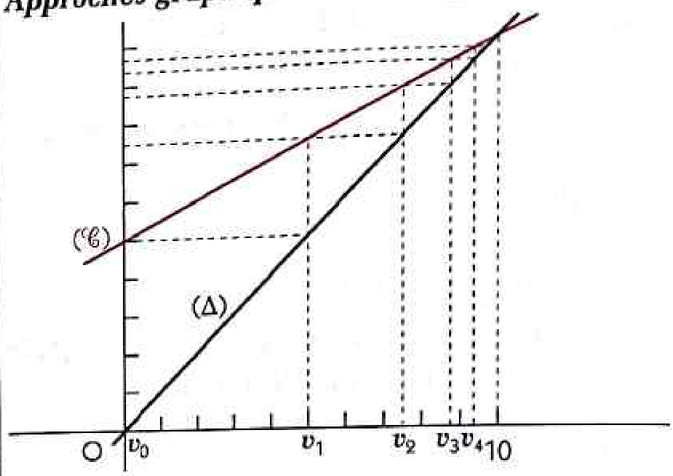
Conclusion

La distance entre u_n et 2 devient aussi petite que l'on veut à partir d'un certain indice.
On dit que la suite u **converge vers 2**.
On écrit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$
ou plus simplement : $\lim u_n = 2$.

Étudions, pour les grandes valeurs de n, le comportement de la suite v définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n + 5 \end{cases}$$

Approches graphique et numérique



• Compléter la table de valeurs approchées suivante :

n	5	8	10	11	12	13	14	15
v_n								

Les termes de la suite deviennent de plus en plus proches de 10, lorsque n devient de plus en plus grand.

Étude de la distance $|v_n - 10|$

– On multiplie membre à membre les égalités suivantes,

$$v_1 - 10 = 0{,}5\,(v_0 - 10)$$
$$v_2 - 10 = 0{,}5\,(v_1 - 10)$$
$$\dots$$
$$v_n - 10 = 0{,}5\,(v_{n-1} - 10)$$

On obtient l'égalité suivante :

$$v_n - 10 = (0{,}5)^n \times (v_0 - 10)$$

donc : $|v_n - 10| = \dfrac{10}{2^n}$

– On démontre que :
à partir de l'indice 37, $|v_n - 10| < 10^{-10}$.

Conclusion

La distance entre v_n et 10 devient aussi petite que l'on veut à partir d'un certain indice.

La suite v converge vers 10.
On écrit : $\lim v_n = 10$.

Suites divergentes

Exemples introductifs

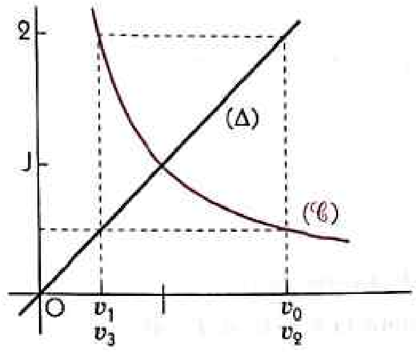
Étudions, pour les grandes valeurs de n, le comportement de la suite v définie par : $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{v_n} \end{cases}$.

Approche graphique

Les termes d'indices pairs sont égaux à 2 et les termes d'indices impairs sont égaux à $\frac{1}{2}$.

La suite v n'a donc pas de limite.

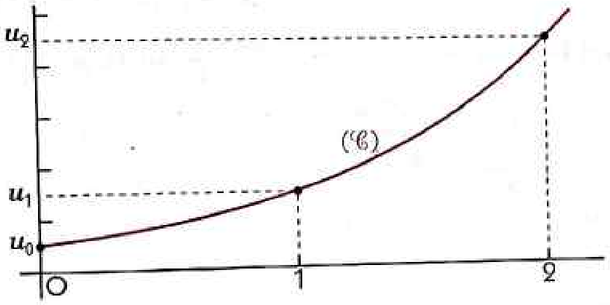
La suite v n'est pas convergente, on dit qu'elle est **divergente**.



Exemple

Étudions, pour les grandes valeurs de n, le comportement de la suite u définie par : $u_n = 5 \times 3^n$.

Approche graphique



Approche numérique

n	10	30	50	60
u_n	295245	$1,3 \times 10^{15}$	$3,59 \times 10^{24}$	$2,12 \times 10^{29}$

Ces approches montrent que les termes de la suite u deviennent très grands lorsque n devient de plus en plus grand. Contrôlons ce résultat par le calcul.

Étude algébrique

Déterminons n pour que u_n soit supérieur à 10^{20}.

On a : $5 \times 3^n > 10^{20} \iff n > \dfrac{\ln \frac{10^{20}}{5}}{\ln 3}$

donc : $n > 42 \implies u_n > 10^{20}$

On démontre de même que : $n > 105 \implies u_n > 10^{50}$.

Conclusion

Pour tout nombre réel strictement positif A, aussi grand que l'on veut, il existe un indice n_0 tel que :

$$n > n_0 \implies u_n > A.$$

La suite numérique n'est pas convergente, elle est donc **divergente**.

On dit aussi que la suite u **diverge vers $+\infty$** et on écrit : $\lim u_n = +\infty$.

Lorsqu'une suite u est telle que $-u$ diverge vers $+\infty$, on dit que u **diverge vers $-\infty$** et on écrit :

$$\lim u_n = -\infty.$$

2.2. Limite d'une suite numérique

Limite d'une suite définie par une formule explicite

Propriété

f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, u la suite définie par la formule explicite $u_n = f(n)$.
Si f admet une limite en $+\infty$ alors u admet la même limite.

■ **Exemple**

Étudions la limite de chacune des suites u, v, w, t définies respectivement par :

$$u_n = \frac{1-2n}{n+1} \quad ; \quad v_n = \frac{\ln(1+n)}{n^2} \quad ; \quad w_n = \frac{2n^2+n-3}{5n+4} \quad ; \quad t_n = \exp\left(\frac{-2n+3}{n-1}\right).$$

$$y_n = \ln\left(\frac{n^2-n+1}{n^3}\right) \quad ; \quad z_n = \sqrt{\frac{5n^2-4n-5}{3n^2+2}}.$$

Étude de la limite de u

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1-2x}{x+1}$$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$

or : $u_n = f(n)$

donc : $\lim u_n = -2$

La suite u converge vers -2.

Étude de la limite de v

On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x^2}$$

On a : $g(x) = \dfrac{\ln\left[x(1+\frac{1}{x})\right]}{x^2}$

$= \dfrac{\ln x}{x^2} + \dfrac{1}{x^2}\ln(1+\frac{1}{x})$

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

or : $v_n = g(n)$

donc : $\lim v_n = 0$

La suite v converge vers 0.

Étude de la limite de y

On considère la fonction $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \ln\left(\frac{x^2-x+1}{x^3}\right)$$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2-x+1}{x^3}\right) = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0} \ln X = -\infty$

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{x^2-x+1}{x^3}\right) = -\infty$

or : $y_n = p(n)$

donc : $\lim y_n = -\infty$

La suite y diverge vers $-\infty$.

Étude de la limite de w

On considère la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{2x^2+x-3}{5x+4}$$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

or : $w_n = h(n)$

donc : $\lim w_n = +\infty$

La suite w diverge vers $+\infty$.

Étude de la limite de t

On considère la fonction $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \exp\left(\frac{-2x+3}{x-1}\right)$$

k est la composée de $x \mapsto \dfrac{-2x+3}{x-1}$ suivi de exp.

On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x+3}{x-1} = -2 \\ \lim\limits_{X \to -2} e^X = e^{-2} \end{cases}$

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} k(x) = e^{-2}$

or : $t_n = k(n)$

donc : $\lim t_n = e^{-2}$

La suite t converge vers e^{-2}.

Étude de la limite de z

On considère la fonction $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sqrt{\frac{5x^2-4x-5}{3x^2+2}}$$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{5x^2-4x-5}{3x^2+2}} = \sqrt{\dfrac{5}{3}}$

or : $z_n = q(n)$

donc : $\lim z_n = \sqrt{\dfrac{5}{3}}$

La suite z converge vers $\sqrt{\dfrac{5}{3}}$.

Remarque

Lorsque la fonction f n'admet pas de limite en $+\infty$, on ne peut rien conclure sur la convergence de la suite u définie par : $u_n = f(n)$.

Propriétés fondamentales

Une suite numérique étant une fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$, on démontre et nous admettons que les propriétés permettant l'étude des limites des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ restent valables pour les suites numériques.

Tableau récapitulatif

Limite et opérations

Les propriétés sur la limite d'une somme, la limite d'un produit, la limite d'un quotient de suites sont les mêmes que celles sur les limites de fonctions en $+\infty$.

Les indéterminations sont étudiées cas par cas.

Passage à la limite dans une inégalité

u et v sont des suites numériques convergentes,
si à partir d'un certain indice, $u_n \leq v_n$ alors $\lim u_n \leq \lim v_n$.

Cette propriété ne permet pas de calculer des limites, donc de reconnaître des suites convergentes, mais de comparer leurs limites.

Calcul de limites par comparaison

l est un nombre réel ; u, v, w sont des suites numériques

Si à partir d'un certain indice, $u_n \geq v_n$ **et** $\lim v_n = +\infty$ **alors** $\lim u_n = +\infty$	**Si à partir d'un certain indice,** $u_n \leq v_n$ **et** $\lim v_n = -\infty$ **alors** $\lim u_n = -\infty$	**Si à partir d'un certain indice,** $v_n \leq u_n \leq w_n$ **et** $\lim v_n = \lim w_n = l$ **alors** $\lim u_n = l$

Exemples

Étudions la convergence de la suite u définie par : $u_n = n^2 + \sin 2n$.

Soit n un nombre entier naturel.

On a : $-1 \leq \sin 2n$

$n^2 - 1 \leq n^2 + \sin 2n$

donc : $n^2 - 1 \leq u_n$

or : $\lim(n^2 - 1) = +\infty$

d'où : $\lim u_n = +\infty$

La suite u diverge vers $+\infty$.

Étudions la convergence de la suite v définie par : $v_n = \cos^2 n - n\ln n$.

Soit n un nombre entier naturel.

On a : $\cos^2 n \leq 1$

$\cos^2 n - n\ln n \leq 1 - n\ln n$

donc : $v_n \leq 1 - n\ln n$

or : $\lim(1 - n\ln n) = -\infty$

d'où : $\lim v_n = -\infty$

La suite v diverge vers $-\infty$.

Étudions la convergence de la suite w définie par :

$$w_n = \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2}.$$

Soit n un nombre entier naturel.

On a : $\dfrac{n^2 - 1}{n^2} \leq \dfrac{n^2 + (-1)^n}{n^2} \leq \dfrac{n^2 + 1}{n^2}$

or : $\lim \dfrac{n^2 - 1}{n^2} = 1$ et $\lim \dfrac{n^2 + 1}{n^2} = 1$

d'où : $\lim w_n = 1$

La suite w converge vers 1.

u étant une suite à termes positifs convergeant vers 0, calculons la limite de chacune des suites v et w définies par :

$$v_n = \frac{1 - 3u_n}{u_n + 2} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{2}{u_n}.$$

On a : $\lim u_n = 0$ et $u_n > 0$

d'où : $\lim v_n = \dfrac{1}{2}$

$\lim w_n = +\infty$.

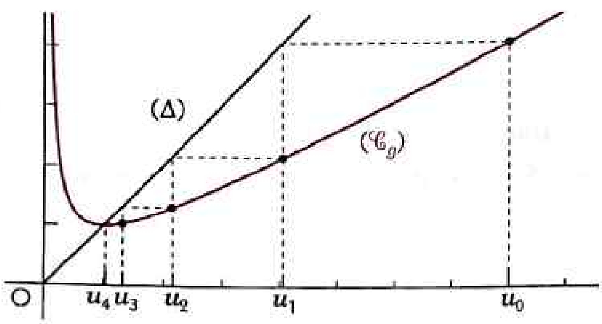
Convergence d'une suite monotone

Exemple introductif

u est la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \dfrac{1 + u_n^2}{2u_n} \end{cases}$.

On veut étudier le sens de variation et la convergence de la suite u.

Par le graphique, il semble que u est décroissante et minorée par 1 ; contrôlons cette conjecture.



Démontrons par récurrence que : pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $u_n \geq 1$

– On a : $u_0 \geq 1$, (car $u_0 = 8$)

– Supposons que pour un élément k de $\mathbb{N}$, $u_k \geq 1$,

donc : $u_{k+1} - 1 = \dfrac{1 + u_k^2 - 2u_k}{2u_k} = \dfrac{(u_k - 1)^2}{2u_k} \geq 0$

d'où : $u_{k+1} \geq 1$

– Par conséquent, pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.

La suite u est donc minorée par 1.

Étudions le sens de variation de u

Soit n un élément de $\mathbb{N}$, on a :

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1 - u_n^2}{2u_n} = (1 - u_n) \times \dfrac{1 + u_n}{2u_n} \leq 0.$

La suite u est donc décroissante.

La suite u est décroissante et minorée ; est-elle convergente ?

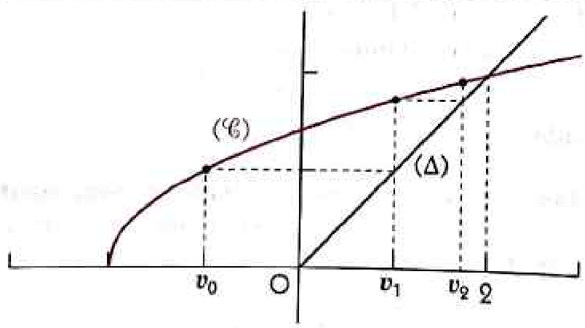
On démontre et nous admettons les propriétés suivantes :

Propriétés

- **Toute suite décroissante et minorée est convergente.**
- **Toute suite croissante et majorée est convergente.**
- **Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.**
- **Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.**

Exemples

Étudions le sens de variation et la convergence de la suite v définie par : $\begin{cases} v_0 = -1 \\ v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n} \end{cases}$.



Démontrons par récurrence que : pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, $0 < v_n \leq 2$

– On a : $0 < v_1 \leq 2$

– Supposons que :

pour un élément p de $\mathbb{N}^*$, $0 < v_p \leq 2$.

d'où : $2 < 2 + v_p \leq 4$

$0 < \sqrt{2} < \sqrt{2 + v_p} \leq 2$

donc : $0 < v_{p+1} \leq 2$.

– Par conséquent,

pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $0 < v_n \leq 2$.

Démontrons par récurrence que v est croissante

– On a : $v_1 - v_0 > 0$

– Supposons que :

pour un élément p de $\mathbb{N}$, $v_{p+1} - v_p > 0$

donc : $v_{p+2} - v_{p+1} = \sqrt{2 + v_{p+1}} - \sqrt{2 + v_p}$

$= \dfrac{v_{p+1} - v_p}{\sqrt{2 + v_{p+1}} + \sqrt{2 + v_p}} > 0$

– Par conséquent,

pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} > v_n$.

la suite v est donc croissante

Conclusion

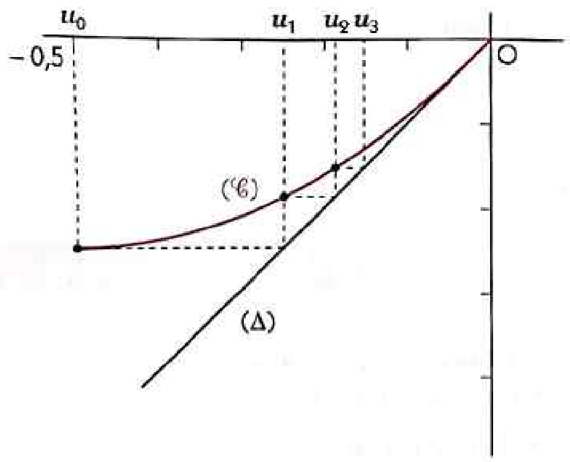
v étant croissante et majorée, elle est donc convergente.

Étudions le sens de variation et la convergence des suites u et w, définies respectivement par :

$$\begin{cases} u_0 = -0{,}5 \\ u_{n+1} = u_n(1+u_n) \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} w_0 = 12 \\ w_{n+1} = 0{,}25w_n + 3. \end{cases}$$

L'étude graphique de ces suites permet d'émettre des conjectures qui seront contrôlées par le calcul.

Étude de la suite u



Démontrons par récurrence que :
pour tout n élément de ℕ, $-0{,}5 < u_n \le 0$

– On a : $-0{,}5 < u_0 \le 0$

– Supposons que :

pour un élément p de ℕ, $-0{,}5 < u_p \le 0$

On a : $0{,}5 < 1 + u_p \le 1$

$0 < -u_p \le 0{,}5$

donc : $0 \le -u_p(1+u_p) \le 0{,}5$

d'où : $-0{,}5 \le u_p(1+u_p) \le 0$

$-0{,}5 \le u_{p+1} \le 0$

– Par conséquent,

pour tout n élément de ℕ, $-0{,}5 \le u_n \le 0$.

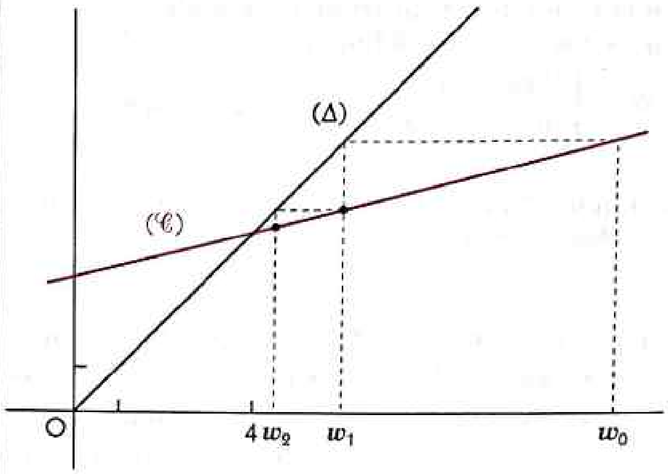
Sens de variation de u

pour tout n élément de ℕ, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \ge 0$,
la suite u est donc croissante.

Conclusion

La suite u étant croissante et majorée, elle est donc convergente.

Étude de la suite w



Démontrons par récurrence que :
pour tout n élément de ℕ, $w_n \ge 4$

– On a : $w_1 \ge 4$

– Supposons que :

pour un élément p de ℕ, $w_p \ge 4$

donc : $w_{p+1} \ge 4$ (car $w_{p+1} = \frac{1}{4}w_p + 3$)

– Par conséquent,

pour tout n élément de ℕ, $w_n \ge 4$.

Sens de variation de w

pour tout n élément de ℕ, $w_{n+1} - w_n = \frac{3}{4}(4 - w_n)$

$w_{n+1} - w_n \le 0$,

la suite w est donc décroissante.

Conclusion

La suite w étant décroissante et minorée, elle est donc convergente.

Étudions le sens de variation et la convergence de la suite t définie par : $\begin{cases} t_0 = 1 \\ t_{n+1} = 2t_n + n. \end{cases}$

Démontrons par récurrence que :
pour tout n élément de ℕ, $t_n \ge 0$

– On a : $t_0 \ge 0$ (car $t_0 = 1$)

– Supposons que :

pour un élément k de ℕ, $t_k \ge 0$

On a : $t_{k+1} = 2t_k + k > 0$

– Par conséquent,

pour tout n élément de ℕ, $t_n \ge 0$.

Démontrons que la suite t est croissante

Pour tout n élément de ℕ, $t_{n+1} - t_n \ge 0$
(car $t_{n+1} - t_n = t_n + n$)

La suite t est donc croissante.

Démontrons que t n'est pas majorée

Pour tout n élément de ℕ, $t_{n+1} \ge n$;
donc la suite t n'est pas majorée.

Conclusion

La suite t étant croissante et non majorée, elle diverge vers $+\infty$.

Convergence d'une suite définie par une formule de récurrence

Limite de la composée d'une suite suivie d'une fonction

Nous admettons que la propriété donnant la limite de la composée de deux fonctions reste valable pour la composée d'une suite suivie d'une fonction. On obtient alors l'énoncé ci-dessous :

Propriété

a et l sont des éléments de l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty ; +\infty\}$,
g est une fonction définie sur un intervalle K, u une suite à valeurs dans K

Si $\begin{cases} \lim u_n = a \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = l \end{cases}$ ***alors*** $\lim f(u_n) = l.$

Limite d'une suite définie par une formule de récurrence

On démontre et nous admettons la propriété suivante :

Propriété

g est une fonction continue sur un intervalle K,

u une suite à valeurs dans K définie par la formule de récurrence : $u_{n+1} = g(u_n)$.

Si **u est convergente** ***alors*** **sa limite est une solution α de l'équation $g(x) = x$.**

On dit que α est un point fixe de la fonction g.

– Cette propriété ne permet pas de démontrer qu'une suite est convergente, mais de calculer la limite d'une suite sachant qu'elle est convergente (voir TP p. 186).

– Cette propriété est une implication ; sa contraposée donne la remarque suivante :

Remarque

g est une fonction continue sur un intervalle K,
u une suite à valeurs dans K définie par la formule de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$;
si l'équation $g(x) = x$ n'admet pas de solution dans K, alors la suite u est divergente.

Exemple

Étudions la convergence de la suite u définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$.

Ce graphique permet de conjecturer que u diverge.

Contrôlons cette conjecture par la remarque précédente.

Considérons la fonction $g : x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$

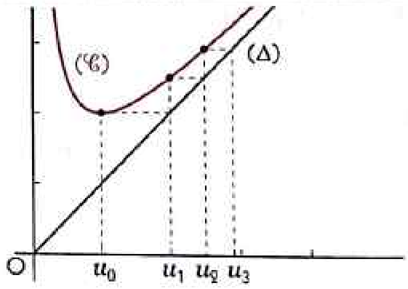
on a : $u_{n+1} = g(u_n)$.

Résolvons l'équation : $g(x) = x$

c'est-à-dire : $\dfrac{1}{x} = 0$

Cette équation n'admet pas de solution.

La suite u est donc divergente.



Exercices

2.a On sait que les suites u, v, w définies ci-dessous sont convergentes. Calculer leurs limites.

(u) $\begin{cases} u_0 = -0,5 \\ u_{n+1} = u_n(1 + u_n) \end{cases}$

(w) $\begin{cases} w_0 = 12 \\ w_{n+1} = 0,25(1 + w_n) \end{cases}$

(v) $\begin{cases} v_0 = -1 \\ v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n} \end{cases}$

2.b On sait que la suite u définie ci-dessous est divergente.

(u) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$

Démontrer que la suite u est strictement croissante.

Par un raisonnement par l'absurde, en déduire qu'elle diverge vers $+\infty$.

3 Suites arithmétiques, géométriques

3.1. Suites arithmétiques

Tableau récapitulatif

① **Définition**

Une suite est dite *arithmétique* lorsqu'il existe un nombre réel r appelé *raison* tel que :

pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$.

Détermination

Une suite arithmétique est entièrement déterminée par la donnée d'un terme et de sa raison.

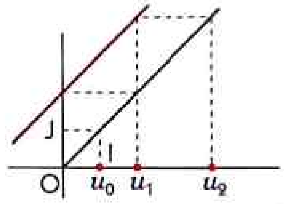
Formule explicite

La suite arithmétique de raison r et de premier terme u_p est définie par :

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

Représentation graphique

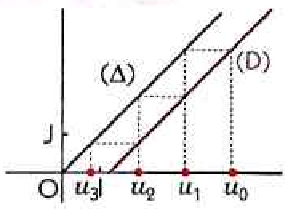
Suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 0



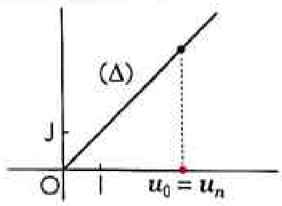
② **Sens de variation**

u est une suite arithmétique de raison r. On sait que :
Pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$ et $u_{n+1} - u_n = r$.
Par conséquent,

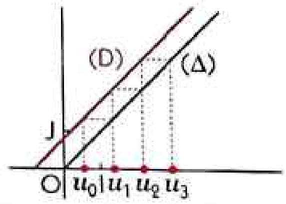
si **$r < 0$**
alors **u est strictement décroissante**



si **$r = 0$**
alors **u est constante**



si **$r > 0$**
alors **u est strictement croissante**



③ **Somme de termes consécutifs**

u est une suite arithmétique,

– pour tout nombre entier naturel n, $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = n\,\dfrac{u_1 + u_n}{2}$;

– somme de n termes consécutifs *égale à* $n \times \dfrac{\text{premier terme + dernier terme}}{2}$.

premier terme de la somme — dernier terme de la somme

$$u_k + u_{k+1} + \ldots + u_{k+p} = p\,\frac{u_k + u_{k+p-1}}{2}$$

nombre de termes de la somme

④ **Convergence**

u est la suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0. On sait que :
pour tous nombres entiers naturels n et p tels que $p < n$, $u_n = u_p + (n - p)r$.
Par conséquent,

si **$r < 0$**
alors **u diverge vers $-\infty$**

si **$r = 0$**
alors **u converge vers u_0**

si **$r > 0$**
alors **u diverge vers $+\infty$**

Exemples

Calcul de termes et des éléments caractéristiques

Calculons les cinq premiers termes de la suite arithmétique u de raison 3 et telle que $u_5 = 10$.	Donnons l'expression des n premiers termes puis déterminons la formule explicite de la suite u de premier terme ln2 et de raison 3.	Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de la suite v définie par : $v_n = -\frac{n}{2} - 1{,}5$.
On a : $u_5 = u_4 + 3$; d'où : $u_4 = u_5 - 3 = 7$. De même : $u_3 = u_4 - 3 = 4$ $u_2 = u_3 - 3 = 1$ $u_1 = u_2 - 3 = -2$ $u_0 = u_1 - 3 = -5$.	Soit n un nombre entier naturel. On a : $u_1 = \ln 2 + 3$ $u_2 = u_1 + 3$ $\vdots$ $u_n = u_{n-1} + 3$ d'où : $u_n = \ln 2 + 3n$ (en additionnant membre à membre.)	$v_0 = -1{,}5$ Soit n un élément de $\mathbb{N}$; on a : $v_{n+1} - v_n = -\frac{n+1}{2} - 1{,}5 - (-\frac{n}{2} - 1{,}5)$ $= -0{,}5$ donc : v est la suite arithmétique de premier terme $-1{,}5$ et de raison $-0{,}5$.

Calcul de la somme de termes consécutifs et son utilisation

Exemple 1

u est une suite arithmétique de raison r. On pose $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$ $[n \in \mathbb{N}^*]$.

Sachant que : $u_0 = 2$; $r = 6$, calculons u_{29} et S_{30}.	Sachant que : $u_{19} = 2$; $r = -25$, calculons u_0 et S_{20}.	Sachant que : $u_0 = 7$; $u_{94} = -181$, calculons r et S_{95}.
$u_{29} = u_0 + 29r = 176$ $S_{30} = 30 \times \frac{u_0 + u_{29}}{2} = 2670$	$u_{19} = u_0 + 19r$ $u_0 = u_{19} - 19r = 477$ $S_{20} = 20 \times \frac{u_0 + u_{19}}{2} = 4790$	$u_{94} = u_0 + 94r$ $r = \frac{u_{94} - u_0}{94} = -2$ $S_{95} = 95 \times \frac{u_0 + u_{94}}{2} = -8265$

Exemple 2

u est une suite arithmétique de raison r. On pose $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$ $[n \in \mathbb{N}^*]$.

Sachant que $S_{10} = 10\sqrt{2} + 45\sqrt{3}$; $r = \sqrt{3}$, calculons u_0 et u_9.	Sachant que $u_{27} = 9{,}5$; $S_{28} = 140$, calculons u_0 et r.	Sachant que : $u_0 = -3$; $u_{n-1} = 69$ et $S_n = 330$, calculons n et r.
On a : $S_{10} = 10 \times \frac{u_0 + u_9}{2}$ $u_9 = u_0 + 9\sqrt{3}$ $S_{10} = 10 \times \frac{2u_0 + 9\sqrt{3}}{2}$ donc : $u_0 = \frac{S_{10} - 45\sqrt{3}}{10} = \sqrt{2}$ $u_9 = u_0 + 9r = \sqrt{2} + 9\sqrt{3}$	On a : $S_{28} = 28 \times \frac{u_0 + u_{27}}{2}$ donc : $u_0 = \frac{2S_{28}}{28} - u_{27} = 0{,}5$ On a : $u_{27} = u_0 + 27r$ donc : $r = \frac{u_{27} - u_0}{27} = \frac{1}{3}$	On a : $S_n = n \times \frac{u_0 + u_{n-1}}{2}$ donc : $n = \frac{2S_n}{u_0 + u_{n-1}} = 10$ On a : $u_{n-1} = u_0 + (n-1)r$ donc : $r = \frac{u_{n-1} - u_0}{n-1} = 8$

Exemple 3

Calculons la somme des multiples de 11 compris entre 1420 et 1600.

Les nombres entiers naturels multiples de 11 sont les termes d'une suite arithmétique de raison 11 ;
On a : $129 \times 11 < 1420 < 130 \times 11$ et $145 \times 11 < 1600 < 146 \times 11$;
les multiples de 11 compris entre 1420 et 1600 sont donc : 130×11 ; 131×11 ; ... ; 144×11 ; 145×11.

Désignons par S leur somme.

premier terme de la somme :	130×11	$= 1430$
dernier terme de la somme :	145×11	$= 1595$
nombre de termes de la somme :	$145 - 129$	$= 16$

Par conséquent :
$$S = 16 \times \frac{1430 + 1595}{2} = 24\,200.$$

■ Étude d'une suite définie par une formule de récurrence homographique

Soit u la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3} \end{cases}$

Calculons u_1, u_2, u_3 et u_4. Prouvons que, pour tout entier naturel n, $u_n > -1$.

Démontrons que la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{1}{u_n + 1}$ est une suite arithmétique.

Exprimons v_n puis u_n en fonction de n et étudions la convergence de la suite u.

Calcul des premiers termes de u

$$u_1 = 0 \ ; \ u_2 = -\frac{1}{3} \ ; \ u_3 = -\frac{1}{2} \ ; \ u_4 = -\frac{3}{5}.$$

Démontrons par récurrence que :
pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $u_n > -1$.

– On a : $u_0 > -1$ (car $u_0 = 1$)

– Supposons que :
pour un nombre entier naturel k, $u_k > -1$;

on a : $u_{k+1} = 1 - \dfrac{4}{u_k + 3}$ et $u_k > -1$

donc :
$$u_k + 3 > 2$$
$$\frac{1}{u_k + 3} < \frac{1}{2}$$
$$1 - \frac{4}{u_k + 3} > -1$$
$$u_{k+1} > -1$$

– Conclusion :
pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $u_n > -1$.

Démontrons que v est une suite arithmétique

Soit n un élément de $\mathbb{N}$;

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} + 1} = \frac{1}{\dfrac{u_n - 1}{u_n + 3} + 1}$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{u_n + 3}{u_n + 1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{u_n + 1} = \frac{1}{2} + v_n \ ;$$

donc v est une suite arithmétique de raison 0,5 et de premier terme 0,5 ;

d'où :
$$v_n = \frac{1}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n+1}{2}$$
$$u_n = \frac{1}{v_n} - 1 = \frac{1-n}{1+n}.$$

Convergence de la suite u

Pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1-n}{1+n}$;
on en déduit que : $\lim u_n = -1$.

Exercices

3.a On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par :
$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n + 2} \end{cases}$
Démontrer que la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ est une suite arithmétique.
Préciser sa raison et son premier terme.
Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
Calculer $v_0 + v_1 + ... + v_n$ en fonction de n.
Étudier la convergence de u.

3.b Dans chacun des cas suivants, (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.
Exprimer le terme général u_n en fonction de u_0 et de r.

(1) $u_0 = 40$; $r = -6$
(2) $u_0 = -2$; $r = 1$
(3) $u_0 = 4$; $r = 3$
(4) $u_0 = -5$; $r = -3$

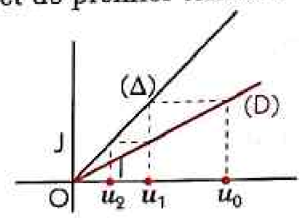
3.2. Suites géométriques

Tableau récapitulatif

① **Définition**

Une suite est dite *géométrique* lorsqu'il existe un nombre réel q appelé *raison* tel que :

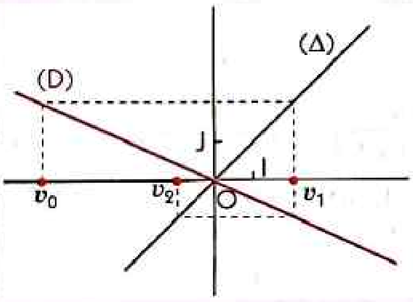
pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = qu_n$.

Détermination	*Formule explicite*	*Représentation graphique*
Une suite géométrique est entièrement déterminée par la donnée d'un terme et de sa raison.	La suite géométrique de raison q et de premier terme v_p est définie par : $v_n = q^{n-p}v_p$	Suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 4 

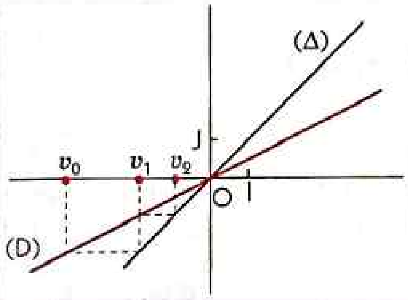
② **Sens de variation**

v est la suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q $[q \neq 0 ; q \neq 1 ; v_0 \neq 0]$.
On sait que :
pour tout nombre entier naturel n, $v_{n+1} = qv_n$ et $v_n = q^n v_0$ et $v_{n+1} - v_n = q^n(q-1)v_0$.
Par conséquent,

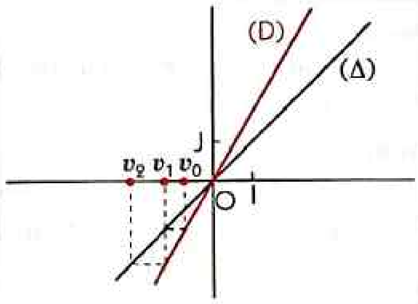
si **$v_0 < 0$ et $q < 0$**
alors **v n'est pas monotone**



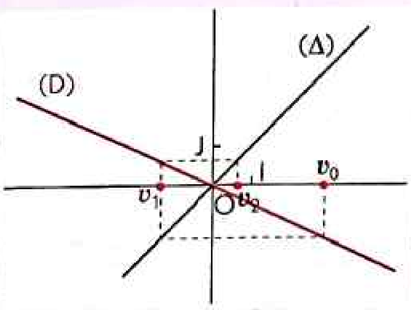
si **$v_0 < 0$ et $0 < q < 1$**
alors **v est strictement croissante**



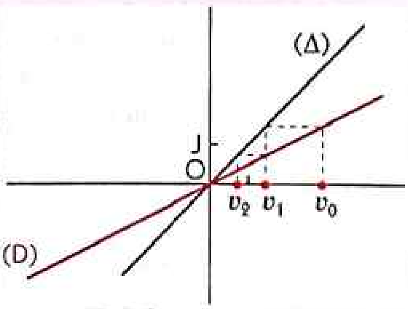
si **$v_0 < 0$ et $q > 1$**
alors **v est strictement décroissante**



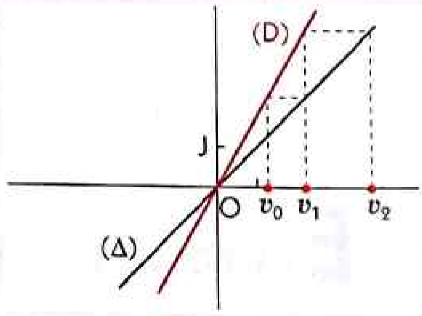
si **$v_0 > 0$ et $q < 0$**
alors **v n'est pas monotone**



si **$v_0 > 0$ et $0 < q < 1$**
alors **v est strictement décroissante**



si **$v_0 > 0$ et $q > 1$**
alors **v est strictement croissante**



③ **Somme de termes consécutifs**

v est une suite géométrique de raison q $[q \neq 1]$,

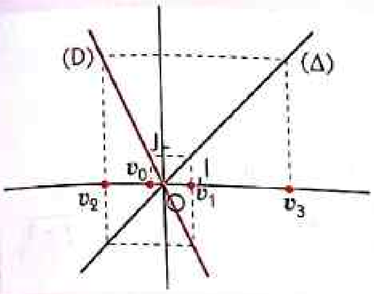
– pour tout nombre entier naturel n, $v_1 + v_2 + \ldots + v_n = \dfrac{q^n - 1}{q - 1} v_1$;

– somme de n termes consécutifs *égale à* $\dfrac{q^{\text{nombre de termes}} - 1}{q - 1} \times$ premier terme.

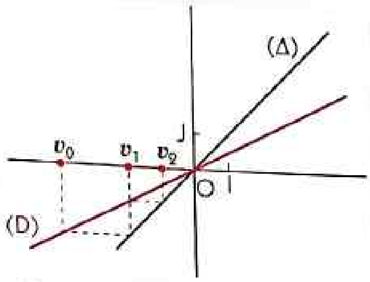
④ Convergence

v est une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q $[q \neq 0 ; q \neq 1 ; v_0 \neq 0]$.
On sait que : pour tout nombre entier naturel n, $v_n = q^n v_0$.
Par conséquent,

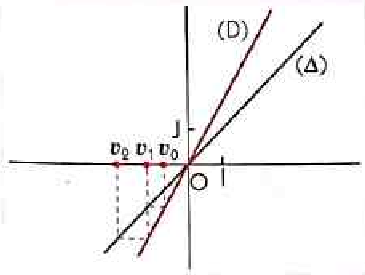
si $v_0 < 0$ et $q < -1$
alors v n'a pas de limite



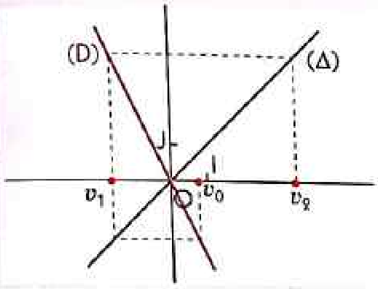
si $v_0 < 0$ et $-1 < q < 1$
alors v converge vers 0



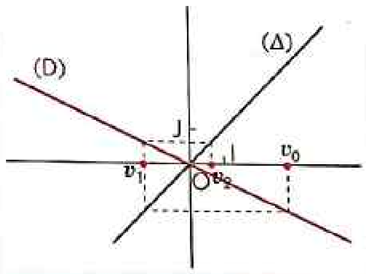
si $v_0 < 0$ et $q > 1$
alors v diverge vers $-\infty$



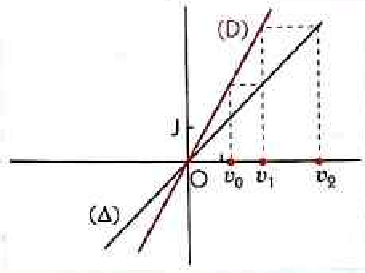
si $v_0 > 0$ et $q < -1$
alors v n'a pas de limite



si $v_0 > 0$ et $-1 < q < 1$
alors v converge vers 0



si $v_0 > 0$ et $q > 1$
alors v diverge vers $+\infty$



Exemples

Exemple 1

Calculons le premier terme de la suite géométrique v de raison -3 et telle que $v_4 = 81$.	Donnons l'expression des n premiers termes et déterminons la formule explicite de la suite géométrique de raison ln2 et de premier terme 1.	Déterminons la nature de la suite v définie par : $v_n = \frac{3^{n-1}}{2^n}$.
$v_3 = \frac{v_4}{-3} = -27$ $v_2 = \frac{v_3}{-3} = 9$ $v_1 = \frac{v_2}{-3} = -3$ $v_0 = \frac{v_1}{-3} = 1$	Soit n un élément de $\mathbb{N}$. On a : $v_1 = v_0 \ln 2$ $v_2 = v_1 \ln 2$ . . $v_n = v_{n-1} \ln 2$ d'où : $v_n = v_0 (\ln 2)^n = (\ln 2)^n$ (en multipliant membre à membre.)	$v_0 = \frac{1}{3}$ Soit n un élément de $\mathbb{N}$; on a : $v_{n+1} = \frac{3^n}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} \times \frac{3^{n-1}}{2^n}$ $v_{n+1} = \frac{3}{2} v_n$ donc : v est la suite géométrique de premier terme $\frac{1}{3}$ et de raison 1,5.

Exemple 2

v est une suite géométrique de raison q. On pose : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$ $[n \in \mathbb{N}^*]$.

Sachant que : $v_0 = 2$; $q = 5$, calculons v_3 et S_4.	Sachant que : $v_0 = 343$; $v_3 = 1$, calculons q et S_4.	Sachant que : $v_9 = \frac{1}{625}$; $q = \frac{1}{5}$, calculons v_0 et S_9.
$v_3 = v_0 q^3 = 250$ $S_4 = v_0 \frac{q^4 - 1}{q - 1} = 312.$	$v_{n-1} = v_0 q^{n-1}$ $q = \frac{1}{7}$ $S_4 = v_0 \frac{q^4 - 1}{q - 1} = 400.$	$v_{n-1} = v_0 q^{n-1}$ $v_0 = \frac{v_9}{q^9} = 5^5$ $S_n = v_0 \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{488281}{625}.$

■ **Exemple 3**

v est une suite géométrique de raison q. On pose $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$ $[n \in \mathbb{N}^*]$.

Sachant que :	**Sachant que :**	**Sachant que :**
$q = \frac{1}{3}$; $n = 10$ et $S_n = \frac{59048}{19683}$	$q = 2$; $v_0 = 7$ et $S_n = 1785$	$q = \frac{1}{3}$; $S_n = 3267$ et $v_{n-1} = 27$
calculons v_0 et v_{n-1}.	calculons n et v_{n-1}.	calculons n et v_0.

$S_n = v_0 \frac{q^n - 1}{q - 1}$;

$v_0 = S_n \frac{q-1}{q^n - 1} = 2.$

$v_{n-1} = v_0 q^{n-1} = \frac{2}{19683}$.

$S_n = v_0 \frac{q^n - 1}{q - 1}$;

$q^n = \frac{S_n(q-1)}{v_0} + 1 = 256.$

Or : $256 = 2^8 = q^8$;

donc : $n = 8$.

$v_{n-1} = v_0 q^{n-1} = 896.$

$S_n = v_0 \frac{q^n - 1}{q - 1}$;

$v_{n-1} = v_0 q^{n-1}$;

donc : $\frac{S_n}{v_{n-1}} = \frac{q^n - 1}{q^{n-1}} \times \frac{1}{q-1}$

$q^{n-1} = \frac{1}{81}$ et $n = 5$.

d'où : $v_0 = \frac{v_{n-1}}{q^{n-1}} = 2187$.

■ **Exemple 4 : Étude d'une suite définie par une formule de récurrence affine**

On considère la suite numérique u définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3} u_n + 1 \end{cases}$

On considère la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 3$.

Démontrons que v est une suite géométrique. Exprimons v_n puis u_n en fonction de n.

Étudions la convergence de u.

Démontrons que v est une suite géométrique

Soit n un élément de $\mathbb{N}$; $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = (\frac{2}{3}u_n + 1) - 3 = \frac{2}{3}(u_n - 3) = \frac{2}{3} v_n$;

donc v est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$;

pour tout élément de $\mathbb{N}$, $v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n v_0 = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$ et $u_n = 3 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Convergence de la suite u

v est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$; or : $0 < \frac{2}{3} < 1$; donc $\lim v = 0$; par conséquent $\lim u = 3$.

Exercices

3.c On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{2u_n + 5} \end{cases}$

Démontrer que la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \frac{2u_n + 1}{u_n + 1}$ est une suite géométrique.

Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
Étudier la convergence de u.

3.d Dans chacun des cas suivants, (v_n) est une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q. Exprimer le terme général v_n en fonction de v_0 et de q.

(1) $v_0 = 3$; $q = \frac{1}{2}$
(2) $v_0 = -3$; $q = 5$
(3) $v_0 = \frac{2}{3}$; $q = -\frac{1}{3}$
(4) $v_0 = \frac{1}{2}$; $q = -3$

4 Résolution de problèmes concrets

Les suites constituent un outil puissant qui permet la résolution de problèmes relevant de phénomènes discrets aussi variés que la variation d'une population d'individus, la constitution ou l'amortissement d'un capital...

Pour résoudre de tels problèmes, nous procéderons suivant les étapes ci-dessous :

1. **la modélisation du problème**, qui consiste ici à rechercher une suite permettant de décrire la situation ;
2. **la résolution mathématique du problème** ;
3. **l'interprétation des résultats obtenus mathématiquement**, d'où la solution du problème posé.

Problèmes divers

Exemple 1

Un jeune planteur décide de créer une cacaoyère dans une vaste forêt. Il décide de mettre en valeur deux hectares la première année et, chacune des années suivantes, un hectare et demi de plus que l'année précédente. Calculons la superficie totale de la plantation au bout de six années.

Recherche d'une suite permettant de décrire la situation

Désignons par u_n la superficie (en hectare) défrichée la n^ième^ année.

On a : $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 1{,}5$.

Les superficies défrichées année après année sont déterminées par la suite arithmétique u de premier terme 2 et de raison 1,5.

Calcul de la superficie totale S défrichée au bout de 6 ans

On a : $S = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6$; $u_6 = u_1 + 5 \times 1{,}5$; $u_1 = 2$.

donc : $S = \dfrac{6 \times [2u_1 + 5 \times 1{,}5]}{2} = 34{,}5$.

Le jeune planteur aura mis en valeur 34,5 hectares au bout de six années.

Exemple 2

L'appartenance à une association de mathématiciens est assujettie aux conditions suivantes :
- **un droit d'adhésion de 8 000 francs ;**
- **et une cotisation annuelle de 5 000 francs.**

Quelle est la somme totale déboursée par dix membres sachant que le premier a 10 ans d'ancienneté, le deuxième a 9 ans d'ancienneté, le troisième a 8 ans d'ancienneté, et ainsi de suite jusqu'au dernier qui a un an d'ancienneté ?

Recherche d'une suite permettant de décrire la situation

Posons : $u_0 = 8\,000$;

désignons par u_n la somme déboursée par un membre après n année(s) de présence à l'association ($n \geq 1$).

On a : $u_n = u_0 + 5\,000n$.

La suite arithmétique de premier terme 8 000 et de raison 5 000 permet de calculer la somme déboursée par chacun des dix membres.

Somme totale déboursée par les dix membres

On a : $u_1 = 8\,000 + 5\,000 = 13\,000$; $u_{10} = 13\,000 + 9 \times 5\,000 = 58\,000$.

d'où : $S = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9 + u_{10} = 10 \times \dfrac{u_1 + u_{10}}{2} = 355\,000$.

Les dix membres ont déboursé la somme de 355 000 francs.

■ **Exemple 3**

Une balle rebondit en avançant chaque fois d'une longueur égale à la moitié de la précédente. Sachant que le premier bond mesurait 1 m, quelle est la distance parcourue au bout de 10 rebonds ?

Recherche d'une suite permettant de décrire la situation

Désignons par v_n la longueur du $n^{\text{ième}}$ bond.

On a : $\quad v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$;

la suite v ainsi définie est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Calcul de la distance S parcourue après 10 rebonds

On a : $\quad S = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8 + v_9 + v_{10} = \dfrac{(0{,}5)^{10} - 1}{0{,}5 - 1} v_1 \approx 1{,}998.$

Au bout de dix rebonds, la balle aura parcourue environ 2 m.

Démographie

Un pays A a un taux de croissance démographique de 0,4 % par an. Un pays B a un taux de croissance de 3%.

Au 1er janvier 1999, le pays A compte 40 millions d'habitants et le pays B, 30 millions.

1°) Quel sera le nombre d'habitants de chacun des pays A et B au 1er janvier 2009 ?

2°) En quelle année la population doublera dans chacun des pays ?

Recherche d'une suite permettant de décrire la situation de la population dans le pays A

Posons : $u_0 = 40\ 000\ 000$ et désignons par u_n la population dans le pays A au 1er janvier 1999 + n $(n \geq 1)$.

On a : $\quad u_1 = u_0 + \dfrac{0{,}4\, u_0}{100} = u_0(1 + \dfrac{0{,}4}{100}) = 1{,}004\, u_0.$

$\quad u_{n+1} = 1{,}004\, u_n$

Les nombres réels u_n sont donc les termes de la suite géométrique de raison 1,004 et de premier terme u_0.

d'où : $\quad u_n = (1{,}004)^n u_0.$

Population en 2009 dans le pays A

$u_{10} = (1{,}004)^{10} \times 40\ 000\ 000 = 41\ 629\ 109.$

Nombre n d'années nécessaires pour que la population de A double

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$(1{,}004)^x \times 40\ 000\ 000 = 80\ 000\ 000$$
$$(1{,}004)^x = 2$$
$$x\ln(1{,}004) = \ln 2$$
$$x = \frac{\ln 2}{\ln(1{,}004)}$$

or : $\quad 173 < \dfrac{\ln 2}{\ln(1{,}004)} < 174$

d'où : $\quad n = 174.$

La population de A doublera en 2173.

Recherche d'une suite permettant de décrire la situation de la population dans le pays B

Posons : $v_0 = 30\ 000\ 000$ et désignons par v_n la population dans le pays B au 1er janvier 1999 + n $(n \geq 1)$.

On a : $\quad v_1 = v_0 + \dfrac{3\, u_0}{100} = u_0(1 + \dfrac{3}{100}) = 1{,}003\, v_0.$

$\quad v_{n+1} = 1{,}004\, v_n$

Les nombres réels v_n sont donc les termes de la suite géométrique de raison 1,03 et de premier terme v_0.

d'où : $\quad v_n = (1{,}03)^n v_0.$

Population en 2009 dans le pays B

$v_{10} = (1{,}03)^{10} \times 30\ 000\ 000 = 40\ 317\ 491.$

Nombre n d'années nécessaires pour que la population de B double

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$(1{,}03)^x \times 30\ 000\ 000 = 60\ 000\ 000$$
$$(1{,}03)^x = 2$$
$$x\ln(1{,}03) = \ln 2$$
$$x = \frac{\ln 2}{\ln(1{,}03)}$$

or : $\quad 24 < \dfrac{\ln 2}{\ln(1{,}03)} < 25$

d'où : $\quad n = 25.$

La population de B doublera en 2023.

Amortissement de capital

Un véhicule coûte 80 millions de francs en 1998. Il se déprécie de 20 % par an ; (c'est-à-dire que son prix de revente baisse de 20 % par an).

1°) Quelle est la valeur du véhicule au bout de cinq ans ?

2°) On suppose que pendant la même période les prix des véhicules neufs de ce type augmentent de 4 % par an.

Quelle somme d'argent l'entreprise doit-elle prévoir pour remplacer le véhicule dans cinq ans ?

Recherche d'une suite permettant de déterminer la valeur du véhicule d'année en année

Posons : $u_0 = 80\ 000\ 000$;

désignons par u_n la valeur du véhicule après n année(s) ($n \geq 1$).

On a : $u_1 = u_0 - 0{,}20u_0 = u_0(1-0{,}2) = 0{,}8u_0$.

$u_{n+1} = u_n - 0{,}2u_n = 0{,}8u_n$.

Les nombres réels u_n sont les termes d'une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme 80 000 000.

donc : $u_n = (0{,}8)^n u_0$.

Valeur du véhicule après 5 ans

$$u_5 = (0{,}8)^5 \times 80\ 000\ 000 = 26\ 214\ 400.$$

Recherche d'une suite permettant de déterminer la valeur du véhicule neuf d'année en année

Posons : $v_0 = 80\ 000\ 000$;

désignons par v_n le prix du véhicule neuf après n année(s) ($n \geq 1$).

On a : $v_1 = v_0 + 0{,}04u_0 = u_0(1+0{,}04) = 1{,}04v_0$.

$v_{n+1} = v_n + 0{,}04v_n = 1{,}04v_n$.

Les nombres réels v_n sont les termes d'une suite géométrique de raison 1,04 et de premier terme 80 000 000.

Vérifier que : $v_n = (1{,}04)^n v_0$.

Valeur du véhicule neuf après 5 ans

$$v_5 = (1{,}04)^5 \times 80\ 000\ 000 = 97\ 332\ 232{,}16.$$

Somme d'argent à prévoir pour remplacer ce véhicule

$$S = v_5 - u_5 = 97\ 332\ 232{,}16 - 26\ 214\ 400 = 71\ 117\ 832{,}16.$$

Remboursement de prêts bancaires

Monsieur ACQUAH emprunte un capital de 4 millions de francs à sa banque au taux d'intérêt annuel de 14 %.

Il décide de rembourser cet argent en effectuant quatre paiements annuels constants.

Calculer le montant de ces paiements annuels.

Posons : $u_0 = 4\ 000\ 000$;

désignons par u_n la somme que M. Acquah doit à la $n^{\text{ième}}$ année et x le montant fixe de ce paiement annuel.

Capital + intérêt	Capital restant dû	échéance
$u_0 = 4\ 000\ 000$	4 000 000	année 0
$u_1 = 1{,}14u_0$	$u_1 - x$	année 1
$u_2 = 1{,}14(u_1 - x)$	$u_2 - x$	année 2
$u_3 = 1{,}14(u_2 - x)$	$u_3 - x$	année 3
$u_4 = 1{,}14(u_3 - x)$	$u_4 - x = 0$	année 4

$$\begin{aligned} u_4 - x = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 1{,}14(u_3 - x) - x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 1{,}14 \times \left[1{,}14(u_2 - x) - x\right] - x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 1{,}14 \times \left[1{,}14[1{,}14(u_1 - x) - x] - x\right] - x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 1{,}14 \times \left[1{,}14[1{,}14(1{,}14u_0 - x) - x] - x\right] - x = 0 \end{aligned}$$

En développant, on a : $1{,}14^4 u_0 - x(1{,}14^3 + 1{,}14^2 + 1{,}14 + 1) = 0$

donc : $x = \dfrac{1{,}14^4 u_0}{1{,}14^3 + 1{,}14^2 + 1{,}14 + 1} = 1\ 372\ 819{,}13.$

TP Travaux pratiques

TP Limite d'une suite monotone du type : $u_{n+1} = g(u_n)$

Deux propriétés du cours se complètent et permettent de calculer la limite d'une suite convergente du type : $u_{n+1} = g(u_n)$.
L'objet de ce TP est de faire la synthèse de ces propriétés en une méthode pratique utilisée pour calculer la limite de telles suites numériques.

Une méthode pratique

u est une suite monotone à valeurs dans un intervalle K et définie par : $u_{n+1} = g(u_n)$.
Pour calculer la limite de u, on peut procéder comme suit :

1. on étudie le sens de variation de la suite u ;

2. on cherche à majorer ou minorer la suite u ;

- **On conclut immédiatement dans les deux cas suivants :**
  - **si u est croissante et non majorée alors : $\lim u = +\infty$;**
  - **si u est décroissante et non minorée alors : $\lim u = -\infty$.**
- **Dans les deux autres cas, la suite u est convergente car elle est,**
  soit croissante et majorée,
  soit décroissante et minorée.
  - **On vérifie alors que g est continue sur K.**
  - **On résout l'équation (E) $g(x) = x$.**
  - **On conclut : u a pour limite une solution de (E).**

Exercice commenté

On donne la suite numérique v définie par : $\begin{cases} v_0 = -1 \\ v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n}. \end{cases}$

Démontrer que la suite v est convergente, calculer sa limite.

La suite v est une suite de récurrence du type $v_{n+1} = g(v_n)$
où g est la fonction définie sur $[-2 ; +\infty[$ par : $g(x) = \sqrt{2 + x}$.
On contaste que : pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, $v_n > 0$.

Étude de la convergence de v
On a vu à la page 174 que v est une suite croissante et majorée, elle est donc convergente.

Calcul de la limite de v
Résolution de l'équation (E) $g(x) = x$.

$$g(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{2 + x} = x.$$

Sur $[0 ; +\infty[$, l'équation (E) est équivalente à l'équation : $2 + x = x^2$ dont l'unique solution dans $[0 ; +\infty[$ est 2.

Conclusion
Puisque :
- la fonction g est continue sur $[0 ; +\infty[$,
- la suite v est convergente et à valeurs dans $[0 ; +\infty[$,
- le nombre réel 2 est la solution dans $[0 ; +\infty[$ de l'équation $g(x) = x$,

On déduit que : $\lim v = 2$.

Application

On donne les suites numériques u et v définies par :

$$\begin{cases} u_0 = -0{,}5 \\ u_{n+1} = u_n(1 + u_n) \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 = 12 \\ v_{n+1} = 0{,}25v_n + 3. \end{cases}$$

On a vu que ces limites sont convergentes (voir page 175).
Calculer leurs limites.

Exercices

ENTRAÎNEMENT

Généralités

Sens de variation d'une suite

1 Étudier le sens de variation de la suite u dans chacun des cas suivant :

(1) $u_n = \dfrac{2n-1}{3n-2}$; $n \geq 1$

(2) $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dots + \dfrac{1}{2n} - n$; $n \geq 1$

(3) $u_n = \dfrac{5}{(-2)^n}$; $n \geq 0$

(4) $u_n = \dfrac{2^{2n}}{3^{n+2}}$; $n \geq 0$

(5) $u_n = e^{1-2n^2}$; $n \geq 0$

2 La suite u est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \dfrac{9}{6-u_n} \end{cases} [n \in \mathbb{N}]$$

1. Démontrer par récurrence que :

pour tout nombre entier naturel n, $u_n < 3$

2. Étudier le sens de variation de la suite (u).

Comparaison

3 Dans chacun des cas suivants, démontrer que la suite u définie ci-dessous est bornée.

(1) $u_n = \dfrac{2n-3}{5n-2}$; $n \geq 1$

(2) $u_n = \ln(n + i) - \ln(n)$; $n \geq 1$

(3) $u_n = \sqrt{n^2 + 2} - n$; $n \geq 0$

(4) $u_n = \dfrac{2n + \cos n}{n^2}$; $n \geq 1$

4 u est la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_n = \dfrac{1}{2}u_{n-1} - 4 \end{cases} [n \in \mathbb{N}].$$

Démontrer par récurrence que :

a) la suite u est minorée par -6.

b) la suite u est décroissante.

5 On considère la suite u définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 35} \end{cases} [n \in \mathbb{N}].$$

Démontrer par récurrence que :

a) la suite u est majorée par 7.

b) la suite u est croissante.

6 La suite u est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n} \end{cases} [n \in \mathbb{N}].$$

Démontrer par récurrence que la suite u est minorée par $\dfrac{3}{2}$ est majorée par 2.

Suite périodique

7 On dit qu'une suite numérique u est périodique lorsqu'il existe un nombre entier naturel p non nul, tel que :

pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+p} = u_n$.

On dit alors que p est une période de la suite u.

Dans chacun des cas suivants, la suite u a pour terme général u_n. Vérifier si la suite u est périodique et donner sa période.

(1) $u_n = \sin\left(\dfrac{2n}{5}\right) + \cos\left(\dfrac{2n}{5}\right)$ $[n \geq 0]$

(2) u_n est la $n^{\text{ième}}$ décimale de $\dfrac{22}{7}$ $[n \geq 1]$

(3) $\begin{cases} u_0 = 2,\ u_1 = 25 \\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n \end{cases}$ $[n \in \mathbb{N}]$

(4) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{1-u_n}$ $[n \geq 0]$

Convergence

Convergence

8 v est la suite numérique définie par :

$$v_n = \frac{\ln 1}{1^2} + \frac{\ln 2}{2^2} + \dots + \frac{\ln n}{n^2} \quad [n \geq 1].$$

1. Établir que : $\dfrac{\ln k}{k^2} \leq \dfrac{1}{k\sqrt{k}}$ $[k \geq 1]$.

2. Justifier que : $\dfrac{1}{2k\sqrt{k}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{k-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ $[k > 1]$.

3. En déduire que : $v_n \leq 2 - \dfrac{2}{\sqrt{n}}$ $[n \geq 1]$.

4. Démontrer que la suite v est convergente.

9 u est la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_1 = -5 \\ u_{n+1} = \dfrac{-7u_n - 8}{2u_n + 1} \end{cases} [n \in \mathbb{N}^*].$$

1. Dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J) étudier graphiquement le sens de variation et la convergence de la suite u.

2. On se propose de démontrer les résultats observés. Démontrer, en utilisant le raisonnement par récurrence que :

pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, $u_n \neq -2$.

10 u est la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} \end{cases} [n \in \mathbb{N}].$$

1. Dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J) étudier graphiquement le sens de variation et la convergence de la suite u.

2. Calculer u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 et conclure intuitivement quant à l'expression de u_n en fonction de n.

3. Démontrer le résultat observé au **2.** et conclure quant à la convergence de la suite u.

11 u est une suite numérique croissante.
Démontrer que :
si u est divergente, alors : $\lim u_n = +\infty$.

12 v est une suite numérique décroissante.
Démontrer que :
si v est divergente, alors : $\lim v_n = -\infty$.

13 v est une suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} \end{cases} [n \in \mathbb{N}].$$

1. Dans le plan muni du repère (O, I, J), étudier graphiquement les propriétés de cette suite.
2. Démontrer que :
pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $u_n > 0$.
3. Démontrer que la suite u est croissante.
4. Démontrer que la suite u est divergente.

Limite

14 Dans chacun des cas suivants, u est la suite de terme général u_n.
Étudier la limite de la suite u.

(1) $u_n = 2n - \sqrt{4n^2+1}$; $n \geq 0$

(2) $u_n = \ln n + \sin n$; $n \geq 0$

(3) $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^{2n}$; $n \geq 1$

(4) $u_n = \dfrac{e^{4n+4}}{4n}$; $n \geq 1$

(5) $u_n = \dfrac{n^3}{e^{n^2} - 1}$; $n \geq 0$

15 u est la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \dfrac{1 + u_n^2}{2u_n} \end{cases} [n \in \mathbb{N}].$$

1. Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), étudier graphiquement les propriétés de cette suite.
2. Démontrer que :
pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $u_n > 1$.
4. Démontrer que u est une suite décroissante.
5. La suite u est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

16 u est la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 - 3u_n + 6}{u_n - 1} \end{cases}.$$

1. Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), étudier graphiquement les propriétés de cette suite.
2. Démontrer que :
pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $u_n \geq 3$.
3. Démontrer que la suite u est décroissante.
4. La suite u est-elle convergente ?
Si oui, quelle est sa limite ?

17 u est la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 3} \end{cases} [n \in \mathbb{N}].$$

1. Dans le plan muni du repère (O, I, J), étudier graphiquement les propriétés de cette suite.
2. Démontrer que :
pour tout n, $u_n \geq 0$.
3. Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de $u_n - u_{n-1}$. En déduire que u est monotone.
4. Justifier que :
pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $u_n < 2$.
5. Démontrer que la suite u est convergente et donner sa limite.

18 (u_n) est la suite définie par :

$$u_n = \frac{1}{n} \quad [n \in \mathbb{N}^*].$$

p est un nombre entier naturel non nul ;
$S_{1,p}$ est la somme $u_1 + u_2 + \ldots + u_p$.

1. *a)* En utilisant la méthode des rectangles avec des intervalles d'amplitude 1, donner un encadrement de l'intégrale : $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x}dx$.
b) En déduire : $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x}dx < S_{1,4}$.
2. Démontrer que :
pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{1}{x}dx < S_{1,n}$.
3. En remarquant que : $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{x}dx = I_n$,
déduire que : $\lim S_{1,n} = +\infty$
$\lim \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}\right) = +\infty$.

19 u est la suite numérique définie par :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad [n \in \mathbb{N}^*].$$

1. Quelle est la limite de la suite u ?
2. p est un nombre entier naturel non nul.
$S_{1,p}$ est la somme $u_1 + u_2 + \ldots + u_p$.
a) En utilisant la méthode des rectangles avec des intervalles d'amplitude 1, donner un encadrement de l'intégrale : $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{n}}dx$.
b) En déduire : $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{n}}dx < S_{1,4}$.
3. Démontrer que :
pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{1}{x}dx < S_{1,n}$.
4. *a)* On pose : $v_n = \displaystyle\int_1^{n+1} \frac{1}{x}dx \quad [n \in \mathbb{N}^*]$.
Exprimer v_n en fonction de u.
b) Quelle est la limite de la suite (v_n) ?
c) Quelle est la limite de la suite $(S_{1,n})$?
5. (w_n) est la suite numérique définie par :

$$w_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \quad [n \in \mathbb{N}^*].$$

a) Démontrer que :
pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.
2. En déduire que :
pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, $2\sqrt{n+1} - 2 < w_n$.
3. Déterminer la limite de la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

20 Dans chacun des cas suivants u est la suite de terme générale u_n définie ci-dessous.
En utilisant la croissance comparée des fonctions logarithme exponentielle et puissance, étudier la limite de la suite u.

(1) $u_n = \dfrac{3^n + n^3}{5^n + 7}$; $n \geq 0$

(2) $u_n = \dfrac{5^n + 4n}{3^n + 2}$; $n \geq 0$

(3) $u_n = \dfrac{(\ln n)^{10}}{n^{0,1}}$ (4) $u_n = \dfrac{5^n + (\ln n)^{50}}{7^{3n} + n^{1000}}$

(5) $u_n = \dfrac{10^{2n} + (2n)^{10}}{6^{6n} + (2n)^{1000}}$ (6) $u_n = \dfrac{3n^{1/5} + 3^n}{n^{7/3} + 5^n}$

(7) $u_n = 2^n - n\ln n$

21 **1.** En étudiant le sens de variation des fonctions f et g définies sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \sin x - x \quad \text{et} \quad g(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6},$$

justifier que :
pour tout nombre réel strictement positif x :

$$x + \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x.$$

2. Dans chacun des cas suivants, u est une suite de terme générale u_n ; étudier la limite de la suite u.

(1) $u_n = \sin\dfrac{1}{n}$; $n \geq 1$

(2) $u_n = n\sin\dfrac{1}{n}$; $n \geq 1$

(3) $u_n = \sin\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n}$; $n \geq 1$

(4) $u_n = n^2\sin\dfrac{1}{n} - n$; $n \geq 1$

22 u est la suite numérique définie par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \quad [n \in \mathbb{N}^*].$$

1. Justifier que :
pour tout k élément de $\mathbb{N}^*$, $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$.

2. En déduire que :
pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, $2\sqrt{n-1} - 2 \leq u_n$.

3. Étudier la limite de la suite u.

23 u est la suite définie par :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \quad [n \in \mathbb{N}^*].$$

1. Justifier que :
pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

2. Étudier la limite de la suite u_n.

Suites arithmétiques et suites géométriques

Suite arithmétique

24 u est une suite arithmétique de raison r.
On pose : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$ $[n \geq 1]$.

1. On donne : $u_0 = 2$, $r = 6$ et $n = 30$.
Calculer u_{n-1} et S_n.

2. On donne : $n = 20$, $u_{n-1} = 62$ et $r = 5$.
Calculer u_0 et S_n.

3. On donne : $u_0 = 7$, $n = 95$ et $u_{n-1} = -181$.
Calculer r et S_n.

4. On donne : $r = \sqrt{3}$, $n = 10$ et $S_n = 10\sqrt{2} + 45\sqrt{3}$.
Calculer u_0 et u_{n-1}.

5. On donne : $n = 28$, $u_{n-1} = \dfrac{19}{2}$ et $S_n = 140$.
Calculer u_0 et r.

6. On donne : $u_0 = -3$, $u_{n-1} = 69$ et $S_n = 330$.
Calculer n et r.

7. On donne : $u_0 = 35$, $r = 13$ et $S_n = 1\,100$.
Calculer n et u_{n-1}.

8. On donne : $u_{n-1} = -53$, $r = -2$ et $S_n = -585$.
Calculer n et u_0.

Suite géométrique

25 u et v sont les suites numériques définies par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{5}{4} \\ u_{n-1} = \dfrac{1}{3}u_n - n - \dfrac{4}{3} \quad [n \geq 1]. \end{cases}$$

Pour tout naturel n, $v_n = u_n + a_n + b$, a et b sont des nombres réels.

1. Déterminer les nombre réels a et b sachant que la suite (v_n) est géométrique. En déduire v_n puis u_n en fonction de n.

2. On pose : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ $[n \in \mathbb{N}]$
$T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ $[n \in \mathbb{N}]$.
Calculer S_n et T_n en fonction de n.

26 u et v sont les suites numériques définies par :

$$\begin{cases} u_1 = 12 \\ u_{n-1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \quad [n \in \mathbb{N}^*] \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n-1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \quad [n \in \mathbb{N}^*]. \end{cases}$$

1. On pose : $w_n = v_n - u_n$ $[n \in \mathbb{N}^*]$.
Démontrer que la suite w de terme général w_n est géométrique et exprimer w_n en fonction de n.

2. Démontrer que la suite u est décroissante et que la suite v est croissante.

3. Démontrer que :
pour tout nombre entier naturel n non nul, $u_n \geq v_n$
et en déduire que : $u_1 \geq u_n \geq v_n \geq v_1$.

4. On pose : $t_n = 3u_n + 8v_n$ $[n \geq 1]$.
Démontrer que la suite t de terme général t_n est croissante.

27 On considère la suite u définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \ ; \ u_1 = 3 \\ u_{n+1} = a^2u_{n+1} + 2(a-3)u_n, \ a \text{ étant un nombre réel.} \end{cases}$$

v est la suite définie par $v_n = u_{n+1}$ $[n \in \mathbb{N}]$.

1. On pose : $a = 2$ et $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.
Vérifier que la suite v est constante. En déduire que u est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.
Exprimer u_n et S_n en fonction de n.

2. On pose : $a = -4$ et $T_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.
Vérifier que la suite v est une suite géométrique.
Exprimer v_n et T_n en fonction de n.
Démontrer que : pour tout entier naturel n, $T_n = u_{n+1}$.

3. Démontrer que -4 est la seule valeur de a telle que la suite v soit une suite géométrique non constante.

28 La suite numérique v est définie par :

$$\begin{cases} v_1 = 6 \\ 5v_{n+1} = v_n + 16 \quad [n \in \mathbb{N}^*]. \end{cases}$$

1. Démontrer que la suite v est minorée par 4 et décroissante.

2. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on pose $w_n = v_n - a$, a étant un nombre réel donné.

a) Déterminer le nombre réel a tel que la suite w de terme général w_n soit une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) On pose : $a = 4$.
Calculer w_n puis v_n en fonction de n.
Sachant que : $S_n = w_1 + w_2 + \ldots + w_n$
$T_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$,
calculer S_n puis T_n en fonction de n.

29 u est la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 1}{2u_n + 5} \end{cases} \quad [n \in \mathbb{N}].$$
On se propose d'étudier la limite de la suite u par deux méthodes.
1^re méthode
1. Justifier que :
pour tout nombre entier naturel n, $u_n \geq -\dfrac{1}{2}$.
2. Étudier les variations de la suite u.
3. Déduire des questions précédentes que la suite u est convergente.
Déterminer sa limite.
2^e méthode
v est la suite définie par : $v_n = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 1}$ $[n \in \mathbb{N}]$.
1. Démontrer que v est une suite géométrique et exprimer v_n en fonction de n.
2. Calculer u_n en fonction de n et étudier la convergence de la suite u_n.

30 u est la suite numérique définie par :
$$u_n = e^{2n+1} \quad [n \in \mathbb{N}].$$
1. Démontrer que la suite u est une suite géométrique dont on précisera la raison.
2. *a)* $S_{0,n}$ désigne la somme : $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.
Exprimer $S_{0,n}$ en fonction de n.
b) Démontrer que : $\lim(S_{0,n}) = +\infty$.
c) Déterminer la valeur minimale de n pour que :
$$S_{0,n} \geq 10^6.$$
3. v est la suite numérique définie par :
$$v_n = \ln(u_n) \quad [n \in \mathbb{N}].$$
a) Exprimer la somme $v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ en fonction de n.
b) Exprimer le produit $u_0 u_1 u_2 \ldots u_n$ en fonction de n.

D'après bac

31 u est la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n + 3}{u_n + 3} \end{cases} \quad [n \in \mathbb{N}^*].$$
1. Dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J) étudier graphiquement le sens de variation et la convergence de la suite u.
2. v est la suite numérique définie par :
$$v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 1} \quad [n \in \mathbb{N}^*].$$
a) Démontrer que :
pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, $u_n \neq -1$.
b) Démontrer que v est une suite géométrique dont on précisera le terme v_1 et la raison.
c) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
d) En déduire la limite de la suite u.
Étudier les variations et la convergence de la suite w définie par :
$$\begin{cases} w_1 = 3 \\ w_{n+1} = \dfrac{5w_n + 3}{w_n + 3} \end{cases} \quad [n \in \mathbb{N}^*].$$
Étudier les variations et la convergence de la suite z_n définie par :
$$\begin{cases} z_1 = -3 \\ z_{n+1} = \dfrac{5z_n + 3}{z_n + 3} \end{cases} \quad [n \in \mathbb{N}^*].$$

32 u est la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{2}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{n+2}{2\sqrt{2}} \end{cases} \quad [n \in \mathbb{N}].$$
1. Calculer u_1 et u_2.
2. v est la suite définie par :
pour tout nombre entier naturel n, $v_n = u_n\sqrt{2} - n$.
Démontrer que la suite v est une suite géométrique dont on précisera le terme v_0 et la raison.
3. Calculer v_n puis u_n en fonction de n. Étudier la convergence de la suite u.
4. $S_{0,n}$ désigne la somme : $u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.
Exprimer $S_{0,n}$ en fonction de n.
Étudier $\lim S_{0,n}$.

D'après bac

33 (I) est la suite numérique définie par :
$$I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx \quad [n \in \mathbb{N}].$$
1. En utilisant la technique d'intégration par parties, exprimer I_n en fonction de n.
2. Démontrer que la suite (I_n) est une suite géométrique dont on précisera le terme I_0 et la raison.
3. $S_{0,n}$ désigne la somme $I_0 + I_1 + \ldots + I_n$. Exprimer $S_{0,n}$ en fonction de n puis calculer $\lim S_{0,n}$.
4. Dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J), représenter graphiquement les fonctions f, g et h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :
$$f(x) = e^{-x} \quad ; \quad g(x) = -e^{-x} \quad ; \quad h(x) = -e^{-x}\sin x.$$
Interpréter graphiquement les résultats obtenus aux questions **2.** et **3.**

34 **1.** Dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J), représenter graphiquement la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = 2^{-x}.$$
2. u_n est la suite numérique définie par :
$$u_n = \int_{n-1}^{n} 2^{-x} dx \quad [n \in \mathbb{N}^*].$$
Démontrer que la suite u_n est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
Interpréter graphiquement ce résulat.
3. $S_{1,n}$ désigne la somme : $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.
Calculer $S_{1,n}$ en fonction de n :
a) en utilisant la suite u ;
b) en utilisant l'égalité de Chasles.
4. Calculer $\lim S_{1,n}$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

9

Équations différentielles

Les équations différentielles tirent leur origine dans la résolution de problèmes de physique et de mécanique proposés aux mathématiciens par des physiciens. Elles se sont développées au fil des ans et se sont détachées de leur carcan originel pour atteindre les sommets de la théorie. Des mathématiciens illustres ont élaboré la théorie des équations différentielles et donné des théorèmes généraux d'existence et d'unicité de solutions de telles équations satisfaisant à des conditions initiales.

Nous citerons tout particulièrement Clairaut, Ricatti, Bernoulli, Lagrange, Maxwell, d'Alembert, Cauchy, Lipschitz dont les travaux s'appliquent à différents domaines tels que :

l'électromagnétisme,
la relativité restreinte ou généralisée,
la recherche opérationnelle,
la mécanique générale,
la mécanique quantique,
l'astronomie,
l'astronautique...

Jean le Rond d'Alembert
physicien et mathématicien français – 1717-1783.

SOMMAIRE

1 Résolution d'équations différentielles

1.1. Notion d'équation différentielle

Présentation

Activité introductive 1

On donne la fonction rationnelle g définie par : $g(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$.

On veut déterminer la primitive f sur $]-1\,;+\infty[$ de g qui prend la valeur 3 en 1.

Le plan étant muni d'un repère, construire cette primitive f.

• Le problème revient à déterminer une fonction f dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ telle que : $\begin{cases} f' = g & \text{(E)} \\ f(1) = 3 & (1) \end{cases}$

– (E) définit une équation ayant pour inconnue une fonction. Dans cette équation figure la dérivée première de la fonction inconnue. On dit que (E) est **une équation différentielle du premier ordre.**

– On appelle **conditions initiales du problème,** les conditions $\begin{cases} f' \text{ est dérivable sur }]-1\,;+\infty[\\ f(1) = 3 \;\; (1) \end{cases}$

• Ce problème admet une fonction solution unique, c'est la primitive f sur $]-1\,;+\infty[$ de g qui prend la valeur 3 en 1, car la fonction g est continue sur $]-1\,;+\infty[$.

• Dans le plan muni d'un repère, la représentation graphique de la fonction solution f est appelée **courbe intégrale** de (E) avec les conditions initiales (I).

Activité introductive 2

On donne la fonction rationnelle g définie par : $g(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$.

On veut déterminer une fonction f deux fois dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ telle que : $f'' = g$.

• Le problème revient à déterminer toutes les fonctions f deux fois dérivables sur $]-1\,;+\infty[$ telles que : $f'' = g$ (E). (E) définit une équation ayant pour inconnue une fonction. Dans cette équation figure la dérivée seconde de la fonction inconnue. On dit que (E) est **une équation différentielle du second ordre.**

• Ce problème admet une infinité de solutions. En effet,

une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{2}{(x+1)^2}$ est du type : $x \mapsto \dfrac{-2}{(x+1)} + a$ $[a \in \mathbb{R}]$,

une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{-2}{(x+1)} + a$ est du type : $x \mapsto -\ln(x+1)^2 + ax + b$ $[b \in \mathbb{R}]$.

Ainsi on obtient la famille de fonctions solution f_{ab} définies sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$f_{ab}(x) = -\ln(x+1)^2 + ax + b \quad [a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}].$$

• Dans le plan muni d'un repère, les représentations graphiques des fonctions f_{ab}, solutions de l'équation différentielle (E), constituent une famille de courbes intégrales $(\mathscr{C}_{ab})$.

Définition

On appelle *équation différentielle*, toute équation ayant pour inconnue une fonction, dans laquelle figure au moins une des dérivées successives de la fonction inconnue.

1. 2. Équations différentielles du type $f' + af = 0$

Présentation

Définition

On appelle *équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants sans second membre*, toute équation différentielle qui peut s'écrire : $f' + af = 0$ $[a \in \mathbb{R}^*]$.

L'exposant de f' et de f est 1, (E) est dite **linéaire.**

(E) $\quad 1 \times f' + a \times f = 0$

Le second membre de (E) est nul, (E) est dite **sans second membre.**

1 et a sont des constantes, (E) est dite **à coefficients constants.**

Exemple

$f' - f = 0$; $f' + 2f = 0$; $5f' - 3f = 0$ sont des équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants sans second membre.

Activité

On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = ae^{2x}$ $[a \in \mathbb{R}]$.
Déterminer une équation différentielle du premier ordre qui a pour solution la fonction f.

Résolution

Activité

On donne l'équation différentielle (E) : $f' - 4f = 0$.
On donne les fonctions g et h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $g(x) = e^{4x}$; $h(x) = ke^{4x}$ $[k \in \mathbb{R}]$.
Vérifier que g et h sont des solutions de (E).

Démontrons la propriété suivante :

Propriété

(E) est l'équation différentielle : $f' + af = 0$ $[a \in \mathbb{R}^*]$.

Les seules solutions de (E) sont les fonctions f_k de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$f_k(x) = k\,e^{-ax} \quad [k \in \mathbb{R}].$$

Démonstration

On a : $[f' + af = 0] \Leftrightarrow$ pour tout nombre réel x, $f'(x) + af(x) = 0$.

Soit x un nombre réel ; on obtient donc les égalités ci-dessous qui sont équivalentes :

$f'(x) + af(x) = 0$

$[f'(x) + af(x)]\,e^{ax} = 0$ $\qquad$ car : $e^{ax} \neq 0$

$[f(x)\,e^{ax}]' = 0$ $\qquad$ car : $[f(x)\,e^{ax}]' = [f'(x) + af(x)]\,e^{ax}$

$f(x)\,e^{ax} = k$ $[k \in \mathbb{R}]$

$f(x) = k\,e^{-ax}$ $[k \in \mathbb{R}]$ $\qquad$ car : $e^{ax} \neq 0$

Exemples

Résolvons chacune des équations différentielles suivantes :
(1) $f' - f = 0$; (2) $f' + 6f = 0$; (3) $5f' - 3f = 0$

– Les solutions de l'équation (1) sont les fonctions $x \mapsto k\,e^{x}$ $[k \in \mathbb{R}]$.

– Les solutions de l'équation (2) sont les fonctions $x \mapsto k\,e^{-6x}$ $[k \in \mathbb{R}]$.

– Les solutions de l'équation (3) sont les fonctions $x \mapsto k\,e^{\frac{3}{5}x}$ $[k \in \mathbb{R}]$.

Résolvons l'équation différentielle (E) $f' + 2f = 0$.
On désigne par φ la solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale (I) $\varphi(1) = -1$.
Dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J), construisons en noir les représentations graphiques de quatre solutions de (E), traçons en couleur celle de φ.

Résolution de l'équation différentielle (E)

Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions f_k de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$f_k(x) = k\,e^{-2x} \quad [k \in \mathbb{R}].$$

Désignons par $(\mathscr{C}_k)$ la représentation graphique de f_k.

Détermination de la solution

On sait que : $\begin{cases} \varphi(x) = k\,e^{-2x} & [k \in \mathbb{R}] \\ \varphi(1) = -1 \end{cases}$

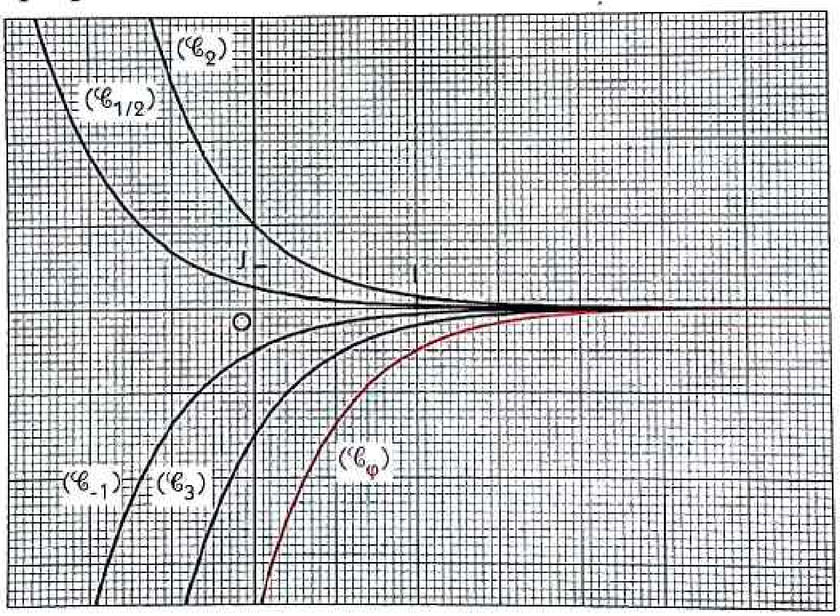
donc : $k\,e^{-2} = -1$

$k = \dfrac{-1}{e^{-2}} = -e^{2}$

d'où : $\varphi(x) = -e^{2}\,e^{-2x}$

Désignons par $(\mathscr{C}_\varphi)$ la représentation graphique de φ.

Représentations graphiques



Exercices

1. a Dans chacun des cas suivants, déterminer la famille solution f de l'équation différentielle.

(1) $f' + 2f = 0$ (2) $f' - 3f = 0$

(3) $f' - \frac{3}{2}f = 0$ (4) $f' - f\ln 2 = 0$

(5) $4f' + 3f = 0$ (6) $6f' = f$

1. b Dans chacun des cas suivants, déterminer la solution f de l'équation différentielle vérifiant la condition initiale donnée.

(1) $f' - 3f = 0$ et $f(0) = 1$

(2) $f' + 3f = 0$ et $f(1) = 2$

(3) $4f' - 3f = 0$ et $f(-1) = 1$

1. 2. Équations différentielles du type $f'' + af' + bf = 0$

Présentation

Définition

On appelle *équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre*, toute équation différentielle qui peut s'écrire : $f'' + af' + bf = 0$ $[(a\ ,\ b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}]$.

L'exposant de f'', de f' et de f est 1,
(E) est dite **linéaire.**

$$\text{(E)} \qquad 1 \times f'' + a \times f' + b \times f = 0$$

Le second membre de (E) est nul,
(E) est dite **sans second membre.**

1, a et b sont des constantes,
(E) est dite **à coefficients constants.**

Exemple

$f'' - 3f' + 5f = 0$; $f'' - 5f = 0$; $f'' + 4f = 0$ sont des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre.

Activité

On donne les fonctions g et h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$g(x) = a\,e^{3x} \quad ; \quad h(x) = a\sin 4x + b\cos 4x \quad [a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}].$$

- **Déterminer une équation différentielle du second ordre qui a pour solution la fonction g.**
- **Même question pour la fonction h.**

Équation caractéristique d'une équation différentielle

Activité 1

On donne les équations différentielles : (1) $f'' + 25f = 0$ (2) $f'' - 3f' - 4f = 0.$

– Vérifier que la fonction $x \mapsto e^{4x}$ est solution de (2).

– Vérifier que la fonction $x \mapsto \sin 5x$ est solution de (1).

– Vérifier que la fonction $x \mapsto \cos 5x + \sin 5x$ est solution de (1).

Activité 2

On considère une équation différentielle (E) $f'' + af' + bf = 0$.

On veut trouver une solution de l'équation (E) de la forme $x \mapsto e^{rx}$ $[r \in \mathbb{R}]$.

La fonction U de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $U(x) = e^{rx}$ est deux fois dérivable.

On a : $U' = rU$, $U'' = r^2U$,

d'où : $U'' + aU' + bU = 0 \iff (r^2 + ar + b)U = 0$,

donc : $r^2 + ar + b = 0$ (car $U \neq 0$),

L'équation $r^2 + ar + b = 0$ d'inconnue r est appelée **équation caractéristique** de l'équation différentielle $f'' + af' + bf = 0$.

Exemples

– L'équation différentielle : $f'' - 2f' + 5f = 0$ a pour équation caractéristique : $r^2 - 2r + 5 = 0$.

– L'équation différentielle : $f'' - 25f = 0$ a pour équation caractéristique : $r^2 - 25 = 0$.

– L'équation différentielle : $f'' + f = 0$ a pour équation caractéristique : $r^2 + 1 = 0$.

Famille de solutions d'une équation différentielle

L'équation caractéristique admet deux solutions réelles

On démontre et nous admettons la propriété suivante :

Propriété

(E) est l'équation $f'' + af' + bf = 0$ $[a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}]$.
Si **l'équation caractéristique de (E) admet deux solutions réelles r_1 et r_2,**
alors **les seules solutions de cette équation différentielle sont les fonctions :**

$$x \mapsto Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} \quad [A \in \mathbb{R} \text{ et } B \in \mathbb{R}].$$

Cas particulier

(E) est l'équation différentielle $f'' - w^2 f = 0$, $[w \in \mathbb{R}]$.
Les seules solutions de cette équation différentielle sont les fonctions :

$$x \mapsto Ae^{wx} + Be^{-wx} \quad [A \in \mathbb{R} \text{ et } B \in \mathbb{R}].$$

Exemple

Résolvons chacune des équations différentielles suivantes :

$$(1) \quad f'' - 9f = 0 \quad ; \quad (2) \quad f'' - 4f' + 3f = 0.$$

(1) $f'' - 9f = 0$

L'équation caractéristique de (1) est :
$r^2 - 9 = 0$.

Elle admet deux solutions réelles : 3 et -3.
Les solutions de (1) sont donc les fonctions :
$x \mapsto Ae^{3x} + Be^{-3x}$ $[A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}]$.

(2) $f'' - 4f' + 3f = 0$

L'équation caractéristique de (2) est :
$r^2 - 4r + 3 = 0$.

Elle admet deux solutions réelles : 1 et 3.
Les solutions de (2) sont donc les fonctions :
$x \mapsto Ae^{x} + Be^{3x}$ $[A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}]$.

L'équation caractéristique admet une solution réelle unique

On démontre et nous admettons la propriété suivante :

Propriété

(E) est l'équation $f'' + af' + bf = 0$ $[a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}]$.
Si **l'équation caractéristique de (E) admet une solution réelle unique r,**
alors **les seules solutions de cette équation différentielle sont les fonctions :**

$$x \mapsto (Ax + B)e^{rx} \quad [A \in \mathbb{R} \text{ et } B \in \mathbb{R}].$$

Exemple

Résolvons chacune des équations différentielles suivantes :

$$(1) \quad f'' - 4f' + 4f = 0 \quad ; \quad (2) \quad f'' + \frac{12}{5}f' + \frac{36}{25}f = 0.$$

(1) $f'' - 4f' + 4f = 0$

L'équation caractéristique de (1) est :

$r^2 - 4r + 4 = 0$.

Elle admet une solution réelle : -2.

Les solutions de (1) sont donc les fonctions :

$x \mapsto (Ax + B)e^{-2x}$ $[A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}]$.

(2) $f'' + \frac{12}{5}f' + \frac{36}{25}f = 0$.

L'équation caractéristique de (2) est :

$r^2 + \frac{12}{5}r + \frac{36}{25} = 0$.

Elle admet une solution réelle : $-\frac{6}{5}$.

Les solutions de (2) sont donc les fonctions :

$x \mapsto (Ax + B)e^{-\frac{6}{5}x}$ $[A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}]$.

■ **L'équation caractéristique admet deux solutions complexes**

On démontre et nous admettons la propriété suivante :

Propriété

(E) est l'équation différentielle $f'' + af' + bf = 0$ $[a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}]$.

Si **l'équation caractéristique de (E) admet deux solutions complexes conjuguées $\alpha + \beta i$ et $\alpha - \beta i$,**

alors **les seules solutions de cette équation différentielle sont les fonctions :**

$$x \mapsto (A\cos\beta x + B\sin\beta x)e^{\alpha x} \quad [A \in \mathbb{R} \text{ et } B \in \mathbb{R}].$$

Cas particulier

(E) est l'équation différentielle $f'' + w^2 f = 0$ $[w \in \mathbb{R}]$.

Les seules solutions de cette équation différentielle sont les fonctions :

$$x \mapsto A\cos wx + B\sin wx \quad [A \in \mathbb{R} \text{ et } B \in \mathbb{R}].$$

Exemple

Résolvons chacune des équations différentielles suivantes :

(1) $f'' + 25f = 0$; (2) $f'' + f' + f = 0$.

(1) $f'' + 25f = 0$

L'équation caractéristique de (1) est :

$r^2 + 25 = 0$.

Elle admet deux solutions complexes conjuguées : $5i$ et $-5i$.

Les solutions de (1) sont donc les fonctions :

$x \mapsto A\cos 5x + B\sin 5x$ $[A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}]$.

(2) $f'' + f' + f = 0$.

L'équation caractéristique de (2) est :

$r^2 - r + 1 = 0$.

Elle admet deux solutions complexes conjuguées :

$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Les solutions de (2) sont donc les fonctions :

$$x \mapsto \left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{1}{2}x}$$

$[A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}]$.

Tableau récapitulatif

Équation différentielle du type : $f'' + af' + bf = 0$ $[a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}]$	
Si **l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ admet :**	***alors*** **la solution générale est la fonction f définie par :**
deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2	$f_{AB}(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ $[A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}]$
une unique solution réelle r	$f_{AB}(x) = (Ax + B)e^{rx}$ $[A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}]$
deux solutions complexes conjuguées $\alpha + \beta i$ et $\alpha + \beta i$	$f_{AB}(x) = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)e^{\alpha x}$ $[A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}]$

Solution vérifiant des conditions initiales

On démontre et nous admettons la propriété suivante :

Propriété

x_0, y_0 et z_0 étant trois nombres réels donnés, l'équation différentielle $f'' + af' + bf = 0$, $[a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}]$ admet une solution unique φ telle que : $\varphi(x_0) = y_0$ et $\varphi'(x_0) = z_0$.

Exemple 1

Résolvons l'équation différentielle : (E) $f'' + 4f' + 7f = 0$,
avec les conditions initiales (1) $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

L'équation caractéristique de (E) est : $r^2 + 4r + 7 = 0$.
Elle admet deux solutions complexes conjuguées : $-2 + i\sqrt{3}$ et $-2 - i\sqrt{3}$.
Les fonctions solutions de l'équation différentielle (E) sont donc les fonctions f définies par :

$$f_{AB}(x) = (A\cos\sqrt{3}x + B\sin\sqrt{3}x)e^{-2x} \quad [A \in \mathbb{R} \text{ et } B \in \mathbb{R}].$$

Cherchons celle qui vérifie $f_{AB}(0) = 0$ et $f'_{AB}(0) = 1$.

Elle vérifie donc le système $\begin{cases} A = 0 \\ -2A + B\sqrt{3} = 1 \end{cases}$; d'où $\begin{cases} A = 0 \\ B = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$

Les solutions de l'équation différentielle (E) qui s'annule en 0 et dont la dérivée prend la valeur 1 en 0 est la fonction : $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{3}} e^{-2x} \sin\sqrt{3}x$.

Exemple 2

Résolvons l'équation différentielle : (E) $f'' - 4f' + 4f = 0$,
avec les conditions initiales (1) $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

L'équation caractéristique de (E) est : $r^2 - 4r + 4 = 0$.
Elle admet une unique solution réelle : 2.
Les fonctions solutions de l'équation différentielle (E) sont donc les fonctions f définies par :

$$f_{AB}(x) = (Ax + B)e^{2x} \quad [A \in \mathbb{R} \text{ et } B \in \mathbb{R}].$$

Cherchons celle qui vérifie $f_{AB}(0) = 1$ et $f'_{AB}(0) = 0$.

Elle vérifie donc le système $\begin{cases} A + 2B = 0 \\ B = 1 \end{cases}$; d'où $\begin{cases} A = -2 \\ B = 1 \end{cases}$

Les solutions de l'équation différentielle (E) qui prend la valeur 1 en 0 et dont la dérivée s'annule en 0 est la fonction : $x \mapsto (-2x + 1)e^{2x}$.

Exercices

1.c Déterminer les solutions de chacune des équations différentielles (E).

(1) $9f'' - 64f = 0$ (2) $f'' + 4f' - 5f = 0$
(3) $2f'' - 5f' - 3f = 0$ (4) $f'' - 4f' + 4f = 0$
(5) $\frac{1}{3}f'' - 2f' + 3f = 0$ (6) $9f'' + 6f' + f = 0$
(7) $9f'' - 6f' + 2f = 0$ (8) $f'' + f' + 6f = 0$

1.d Déterminer la solution f de chacune des équations différentielles (E) vérifiant les conditions initiales données.

(1) $2f'' + f = 0$; $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$
(2) $9f'' + 64f = 0$; $f(\pi) = 0$ et $f'(2\pi) = -\frac{1}{3}$
(3) $f'' + 4f' + 5f = 0$; $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$
(4) $4f'' + 4f' + f = 0$; $f(1) = 0$ et $f'(1) = 5$.

2 Résolution de problèmes

De nombreux problèmes, en démographie, en électricité... relevant de phénomènes continus satisfaisant à une loi d'évaluation et à une condition initiale sont décrits par une fonction solution d'une équation différentielle.

Pour résoudre de tels problèmes, nous procédons suivant les étapes ci-dessous :

1. **la modélisation du problème**
   qui consiste à la mise en équation, c'est-à-dire ici la recherche d'une équation différentielle permettant de décrire la situation ;
2. **la résolution mathématique du problème**
   c'est-à-dire la résolution de l'équation différentielle avec la condition initiale ;
3. **l'interprétation du résultat obtenu**
   d'où la solution du problème posé.

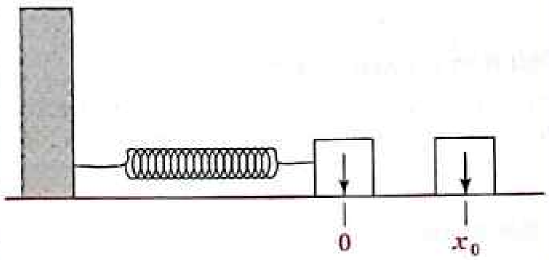
Oscillations non amorties

On fixe un solide de masse m à l'extrémité d'un ressort à spires non jointives de dureté k ; on fixe l'autre extrémité à un mur.

Le solide peut se déplacer horizontalement sans frottement sur une droite (D). Le repère de (D) est tel que, lorsque le ressort n'est pas tendu, la marque sur le solide a une abscisse nulle.

On tire le ressort jusqu'à amener la marque sur le solide à l'abscisse x_0.

On abandonne le système et on demande de trouver la position x du solide en fonction du temps t. *(On négligera la masse du ressort.)*



Mise en équation

Désignons par f la fonction définie par : $x = f(t)$.

L'accélération à la date t est $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ et la force qui s'exerce sur la masse est $-kx$.

D'après la loi de Newton, on a : $m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + kx = 0$.

On définit une équation différentielle du type : $f'' + af = 0$ $[a = \frac{k}{m}]$,

avec les conditions initiales $f(0) = x_0$ et $f'(0) = 0$.

Résolution

Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions :

$$x \mapsto A\cos wx + B\sin wx \quad [A \in \mathbb{R} \text{ et } B \in \mathbb{R}].$$

Les conditions initiales permettent d'obtenir la fonction solution f définie par :

$$f(t) = x_0\cos wt, \quad [w = \sqrt{\frac{k}{m}}].$$

Accroissement d'une population

En 1990, la population du Bénin était d'environ 4 750 000 d'habitants et d'environ 5 500 000 en 1995. On suppose que la vitesse d'accroissement $h'(t)$ de cette population à l'instant t est proportionnelle au nombre $h(t)$ d'habitants à cet instant.

Dans ces conditions, en quelle année la population du Bénin sera-t-elle de 10 millions d'habitants ? de 20 millions d'habitants ?

Mise en équation
La vitesse d'accroissement $h'(t)$ de cette population à l'instant t étant proportionnelle au nombre $h(t)$ d'habitants à cet instant, on peut écrire que : $h'(t) = ah(t)$ $[a \in \mathbb{R}]$.

Résolution
– Cette équation étant du type $h' - ah = 0$, la fonction solution est définie par : $h(t) = k\,e^{at}$.
– Déterminons k et a à l'aide des conditions initiales :
En 1990, la population du Bénin étant d'environ 4 750 000 d'habitants et d'environ 5 500 000 en 1995,
on a : $4\,750\,000 = k\,e^{1990a}$
$5\,500\,000 = k\,e^{1995a}$

d'où : $\dfrac{5\,500\,000}{4\,750\,000} = \dfrac{k\,e^{1995a}}{k\,e^{1990a}}$, c'est-à-dire $\dfrac{550}{475} = e^{5a}$

donc : $5a = \ln \dfrac{550}{475}$

et $a = 0{,}03$

par suite $h(t) = 5500000e^{0,03(t-1995)}$.

Déterminons l'année à laquelle la population du Bénin sera de 10 millions d'habitants.

$$10\,000\,000 = 5\,500\,000e^{0,03(t-1995)}$$

$$\frac{10\,000\,000}{5\,500\,000} = e^{0,03(t-1995)}$$

d'où : $\ln \dfrac{100}{55} = 0{,}03(t - 1995)$

$20 = t - 1995$

$t = 2015$

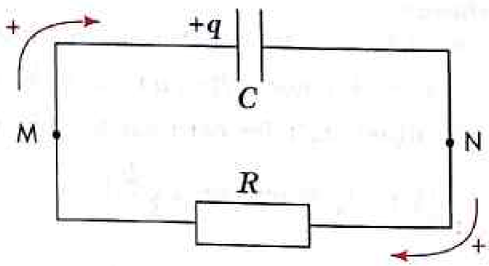
Solution du problème
En 2015 la population du Bénin sera de 10 millions d'habitants.
Pour 20 millions d'habitants, on trouve : $t = 2039$; en 2039 la population du Bénin sera de 20 millions d'habitants.

Décharge dans un circuit RC

Étudions la variation de la charge du condensateur au cours du temps.

Mise en équation
M et N sont les armatures d'un condensateur de capacité C initialement neutre. Chargeons-le sous une différence de potentiel U_0 et relions ses armatures à un resistor de résistance R. Le condensateur décharge à travers la résistance R.

Désignons par q_0 la charge du condensateur à l'instant initial où commence la décharge, l'intensité i_0 du courant dans le circuit étant nulle.
À un instant t quelconque de la décharge, q est la charge de l'armature M du condensateur, i l'intensité du courant dans le circuit.
q est une fonction du temps et on a : $i = \dfrac{dq}{dt} = q'$.



La définition de la capacité du condensateur donne la différence de potentiel entre ses armatures :

$$U_{NM} = \frac{q}{C}.$$

La loi d'Ohm exprimée aux bornes du résistor donne :

$$U_{NM} = Ri = -U_{MN}$$

donc : $Ri = -\dfrac{q}{C}$

d'où : $R\dfrac{dq}{dt} = -\dfrac{q}{C}$

q est donc solution de l'équation différentielle : $\dfrac{dq}{dt} = -\dfrac{1}{RC}q$, avec $q(0) = q_0$.

Résolution
Cette équation différentielle est du type : $q' + aq = 0$.
- Donner sa solution générale.

TP Travaux pratiques

TP. Courbes paramétrées

Ce TP a pour objectif de fournir un complément de cours, qui est un outil souvent utilisé en physique.
À partir d'une représentation paramétrique d'une courbe ($\mathscr{C}$), savoir :
- *déterminer une tangente de ($\mathscr{C}$),*
- *construire ($\mathscr{C}$).*

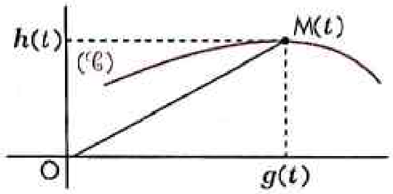
Notion de courbe paramétrée

En cinématique

Description du mouvement du point M par la position de M à chaque instant t :

$\overrightarrow{OM}(x\,;\,y)$

$\overrightarrow{F(t)}\big(g(t)\,;\,h(t)\big)$



$$(\Sigma)\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \\ t \in \mathrm{K} \end{cases}$$

En analyse

M est un point de la courbe ($\mathscr{C}$) de coordonnées $(x\,;\,y)$:

$\mathrm{M}(x\,;\,y)$

$\mathrm{M}\big(g(t)\,;\,h(t)\big)\quad [t \in \mathrm{K}]$

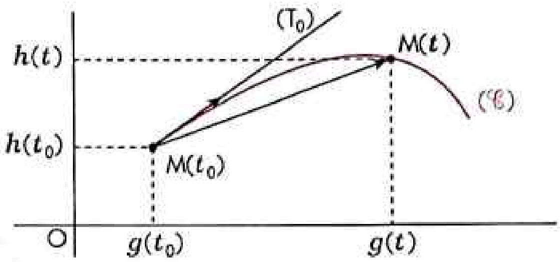
($\mathscr{C}$) est une courbe paramétrée.
(Σ) définie une représentation paramétrique de ($\mathscr{C}$).

Supposons f et g dérivables sur l'intervalle K.
Considérons le vecteur :

$$\frac{1}{t-t_0}\,\overrightarrow{\mathrm{M_0M}_t}\left(\frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0}\;;\;\frac{h(t)-h(t_0)}{t-t_0}\right).$$

Lorsque t tend vers t_0, à la limite, on obtient :

$$\overrightarrow{\mathrm{V}_0}\,\big(g'(t_0)\,;\,h'(t_0)\big).$$



Lorsque $\big(g'(t_0)\,;\,h'(t_0)\big) \neq (0\,;\,0)$, $\overrightarrow{\mathrm{V}_0}$ est un vecteur directeur d'une droite (T_0), position limite des sécantes $\overrightarrow{\mathrm{M_0M}_t}$ $[t \in \mathrm{K}]$.
La droite (T_0) est appelée **tangente** à ($\mathscr{C}$) au point $\mathrm{M}_0\big(g(t_0)\,;\,h(t_0)\big)$; le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{V}_0}\,\big(g'(t_0)\,;\,h'(t_0)\big)$ est appelé **vecteur dérivée** en t_0.

Construction d'une courbe paramétrée

Exercice commenté

Construire la courbe paramétrée définie par : $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = t^2 - 2t + 2 \end{cases}\quad [t \in \mathbb{R}]$.

Considérons les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par : $g(t) = t^2 + 1$ et $h(t) = t^2 - 2t + 2$.

Étude de la fonction g

$g'(t) = 2t$

$\lim\limits_{t \to -\infty} g(t) = +\infty$

$\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = +\infty$

Tableau de variation de g

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Étude de la fonction h

$h'(t) = 2(t-1)$

$\lim\limits_{t \to -\infty} h(t) = +\infty$

$\lim\limits_{t \to +\infty} h(t) = +\infty$

Tableau de variation de h

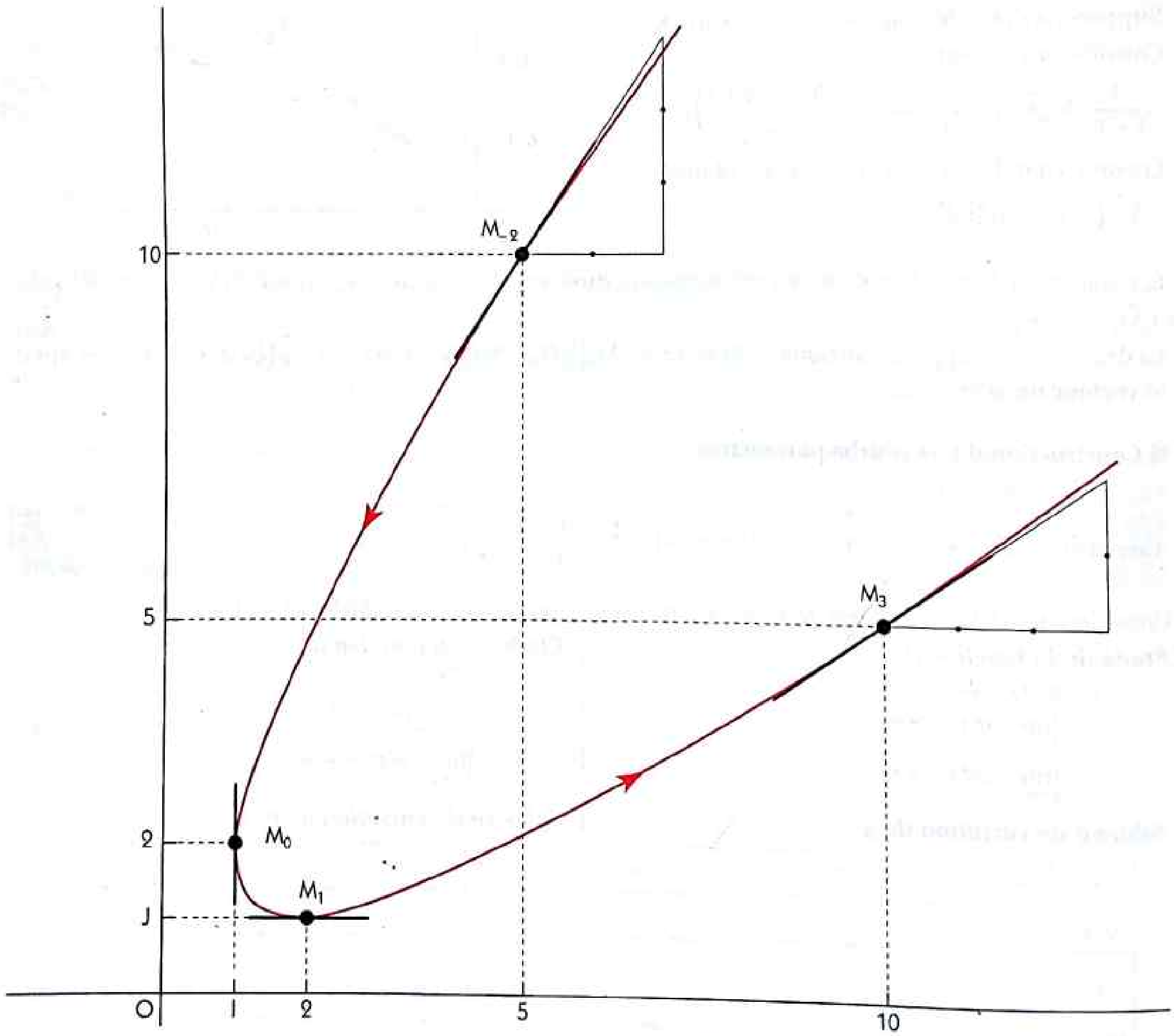
t	$-\infty$		1		$+\infty$
$h'(t)$		$-$	0	$+$	
$h(t)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

t	$-\infty$		-2		0		1		3		$+\infty$
$g(t)$	$+\infty$	↘	$\boxed{5}$	↘	$\boxed{1}$	↗	$\boxed{2}$	↗	$\boxed{10}$	↗	$+\infty$
$h(t)$	$+\infty$	↘	$\boxed{10}$	↘	$\boxed{2}$	↘	$\boxed{1}$	↗	$\boxed{5}$	↗	$+\infty$
$g'(t)$		$-$	$\boxed{-4}$	$-$	$\boxed{0}$	$+$	$\boxed{2}$	$+$	$\boxed{6}$	$+$	
$h'(t)$		$-$	$\boxed{-6}$	$-$	$\boxed{-2}$	$-$	$\boxed{0}$	$+$	$\boxed{4}$	$+$	

Valeurs remarquables et vecteurs dérivées

t	-2	0	1	3
coordonnées du point M_t	$(5 ; 10)$	$(1 ; 2)$	$(2 ; 1)$	$(10 ; 5)$
coordonnées du vecteur $\overrightarrow{V_t}$	$(-4 ; -6)$	$(0 ; -2)$	$(2 ; 0)$	$(6 ; 4)$
coordonnées d'un vecteur directeur de la tangente (T_t)	$(2 ; 3)$	$(0 ; 1)$	$(1 ; 0)$	$(3 ; 2)$

Construction de $(\mathscr{C})$ sur les intervalles où g et h sont monotones



Exercices

ENTRAÎNEMENT

Équations différentielles du type $f' + af = 0$

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

(1) $f' + 3f = 0$
(2) $2f' - 3f = 0$
(3) $f' + 2f = 0$
(4) $f' - 4f = 0$
(5) $f' + \sqrt{2}f = 0$
(6) $2f' + f = 0$

2 Résoudre les équations différentielles ci-dessous avec les conditions initiales imposées

(1) $f' + 3f = 0$; $f(1) = 1$
(2) $f' + 3f = 0$; $f(-2) = 2$
(3) $-f' + 2f = 0$; $f(3) = -2$
(4) $3f' + 6f = 0$; $f(4) = 2$
(5) $5f' + f = 0$; $f(-5) = 0$
(6) $2f - 5f' = 0$; $f(1) = -1$

Équations différentielles du type $f'' + af' + bf = 0$

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

(1) $f'' - f' - 2f = 0$
(2) $3f'' + 3f' - f = 0$
(3) $-f'' - f' + 2f = 0$
(4) $f'' - 4f' - 4f = 0$
(5) $2f'' - 12f' + 18f = 0$
(6) $4f'' + 6f = 0$

4 Résoudre les équations différentielles ci-dessous avec les conditions initiales imposées.

(1) $2f'' + 3f' - 2f = 0$; $f(0) = 1$, $f'(0) = 3$
(2) $f'' + 2f' + f = 0$; $f(0) = -1$, $f'(0) = 0$
(3) $f'' - 2f' + 5f = 0$; $f(0) = 1$, $f'(0) = 3$
(4) $3f'' - 2f' + 3f = 0$; $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$
(5) $3f'' - 2f' + 7f = 0$; $f(0) = 1$, $f'(0) = -1$

5 Dans chacun des cas suivants, déterminer la solution de l'équation différentielle vérifiant les conditions initiales données.

(1) $25f'' + f = 0$ avec $f(\pi) = 2$ et $f'(\pi) = \sqrt{3}$
(2) $f'' + f = 0$ avec $f(\frac{\pi}{2}) = 3$ et $f'(\frac{\pi}{2}) = 2$

PROBLÈMES

6 Déterminer la fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $2g'(x) + g(x) = 0$ et dont la courbe représentative $(\mathscr{C})$ admet en son point d'abscisse -2 une tangente de coefficient directeur $\frac{3}{5}$.

7 f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout nombre réel x on a : $f(x) = -3f'(x)$.
La représentation graphique $(\mathscr{C})$ de f dans le plan muni du repère (O, I, J) passe par le point de coordonnées $(-2 ; 1)$.
Déterminer f et construire $(\mathscr{C})$.

8 On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = 3e^{-\frac{3}{2}x}.$$
Déterminer une équation linéaire du premier ordre dont f est solution.
Déterminer la solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $f' + \ln 2 = 0$ qui prend la valeur 4 en 1.

9 1. Résoudre l'équation différentielle :
$$f' - \frac{1}{2} \times f = 0.$$
Déterminer la solution qui prend la valeur $\frac{1}{e}$ en 1.

10 On considère l'équation différentielle :
$$f'' + 2f' = 0.$$
1. On pose $g = f'$.
Justifier que g est solution de l'équation différentielle :
$$g' + 2g = 0$$
2. Résoudre l'équation différentielle : $g' + 2g = 0$.
En déduire les solutions de l'équation différentielle :
$$f'' + 2f' = 0.$$

11 On donne l'équation différentielle :
$$f'' + 2f' + f = 0 \quad (E)$$
On pose : pour tout nombre réel x : $h(x) = e^{x}k(x)$.
1. Démontrer que k est solution de (E) si et seulement si, pour tout nombre réel x, $h''(x) = 0$.
2. Résoudre l'équation différentielle : $h'' = 0$.
3. En déduire les solutions (E).

12 Déterminer la solution f de l'équation différentielle $f'' - f' + \frac{1}{4}f = 0$ sachant que sa représentation graphique passe par le point A(0 ; 4) et la tangente à cette courbe au point d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses.

13 Déterminer la solution f de l'équation différentielle $9f'' + f = 0$ sachant que :
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = 3.$$

14 Déterminer la solution f de l'équation différentielle $f'' - f = 0$ sachant que f est une fonction paire et $f(0) = 1$.

15 1. Résoudre l'équation différentielle :
(E) $16f'' + f = 0$
2. Déterminer la solution f de (E) vérifiant :
$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f(2\pi) = -\sqrt{3}.$$
3. Démontrer que :
pour tout nombre réel x, $f(x) = 2\cos(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{3})$.

16 Déterminer la fonction positive u définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\frac{u'}{u}$ est -2 en tout x de $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 10 en 0.

17 1. Résoudre l'équation différentielle :
(E) $f'' - 2f' + 5f = 0$

Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$

2. On pose :

pour tout nombre réel x, $F(x) = -\frac{1}{5}[f'(x) - 2f(x)]$.

Justifier que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

18 On considère l'équation différentielle :

(E) $f'' - f' + \frac{1}{4}f = 0$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E).

2. Déterminer la solution de (E) qui vérifie les deux conditions suivantes :

– sa représentation graphique ($\mathscr{C}$) passe par le point M(0 : 4) ;

– la tangente à ($\mathscr{C}$) au point d'abscisse 2 a pour coefficient directeur 0.

3. Représentez ($\mathscr{C}$) et sa tangente au point d'abscisse 2 dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).

4. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par ($\mathscr{C}$), (OI) et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = 4$.

19 On se propose de chercher les fonctions f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telles que : pour tout nombre réel x,

(E) $f''(x) - 4f'(x) + 3f(x) = 6x^2 + 5x$.

1. On désigne par g un polynôme défini par :

$g(x) = ax^2 + bx + c$

où a, b, c sont des nombres réels.

Déterminer a, b, c pour que, pour tout nombre réel x, g soit solution de (E).

2. On pose : $F = f - g$.

a) Démontrer que si f est solution de l'équation (E) alors F est solution de l'équation :

(E') $F'' - 4F' + 3F = 0$.

Réciproquement établissez que si F est solution de (E') alors f est définie par $f = F + g$.

20 On considère l'équation différentielle :

(E) $y'' + 2y' + 5y = 0$.

1. Vérifier que les fonctions f_1 et f_2 définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x) = e^{-x}\cos 2x$ et $f_2(x) = e^{-x}\sin 2x$ sont des solutions de l'équations (E).

On admettra que toute solution de (E) est de la forme $k_1f_1 + k_2f_2$ où k_1 et k_2 sont des nombres réels quelconques.

2. Démontrer qu'il existe une solution f, de (E), dont la courbe représentative dans un plan muni d'un repère, passe par le point A(0 ; 1) et admet en ce ponit une tangente de coefficient directeur – 3.

21 Une population a une croissante instantanée relative constante à tout instant t égale à 1,5 %.

À l'instant 0, la population est de 3,5 millions d'habitants.

Déterminer la population $p(t)$ en fonction de t.

22 Dans un pays, la consommation d'un produit a diminué régulièrement, la variation relative instantanée à tout instant t étant de – 2 %.

Déterminer l'expression $f(t)$ de cette consommation en kg par habitant en fonction du temps t exprimé en année, sachant que cette consommation est de 12 kg à l'instant $t = 15$.

(On donnera $f(t)$ sous forme $k\,e^{mt}$.)

23 A – **1.** Résoudre l'équation différentielle :

(E) $f' + kf = 0$.

où f est une fonction dépendant du temps t ($t \geq 0$) et k une constante réelle strictement positive.

Préciser la solution particulière f_1 correspondant à la condition initiale : $f_1(0) = 2$

B – Application

Après une injection intraveineuse de glucose, la glycémie (taux de glucose sanguin) décroît à partir d'un certain instant choisi comme origine des temps selon la loi :

$g' + kg = 0$.

où g désigne la fonction glycémique dépendant du temps t ($t \geq 0$) et k une constante strictement positive. appelée coefficient d'assimilation glucidique.

1. À l'aide de la première question, déterminer l'expression de $g(t)$ à l'instant t sachant que $g(0) = 2$.

Étudier les variations de g et donner l'allure de sa représentation graphique.

2. Calculer en fonction de k l'abscisse T du point d'intersection de la tangente à la courbe au point M(0 ; 2) avec l'axe des temps.

3. On pose : $g_1 = g(t_1)$, g_1 étant le taux de glycémie à l'instant t_1 donné et positif.

Déterminer la formule donnant le coefficient k en fonction de g_1.

10 Nombres complexes

Le XIX^e^ siècle s'est émerveillé sur « ces nombres qui mêlent le réel et l'imaginaire ! »

La construction des nombres complexes a enregistré la contribution d'éminents mathématiciens à qui s'est posée la nécessité de trouver une racine carrée de – 1 !

Citons Euler, Hamilton, Cauchy…

Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) conjectura, sans pouvoir le prouver, que « dans l'ensemble des nombres complexes, tout polynôme de degré n a exactement n racines. »

Niels Henrik Abel et Évariste Galois apportèrent la preuve de cette base fondamentale de l'algèbre.

Niels Henrik Abel
mathématicien norvégien – 1802-1829.

William Rowan Hamilton
mathématicien et astronome irlandais – 1805-1865.

Évariste Galois
mathématicien français – 1811-1832.

SOMMAIRE

1 Nombres complexes, forme algébrique

1.1. Présentation de l'ensemble des nombres complexes

Introduction historique

Des équations du 3ᵉ degré aux « quantités imaginaires »

• Après la résolution des équations du 1er et du 2nd degré par les Babiloniens vers le IIᵉ millénaire av. J.-C. et transmise à l'occident au IXᵉ siècle par Al-Khwarizmi, la résolution d'une équation du 3ᵉ degré est longtemps restée une énigme pour les mathématiciens.

• C'est au IXᵉ siècle que les mathématiciens de Bagdad étudient les équations du 3ᵉ degré.
Au XVIᵉ siècle l'étude de ces équations est reprise en Occident par les mathématiciens italiens de la Renaissance : Cardan, Bombelli...

– Dans le cadre de concours entre savants, l'équation du 3ᵉ degré est résolue algébriquement par Cardan (1501 - 1576) qui donne en 1547, par une « formule » décrite littéralement, une méthode de résolution de l'équation du type : $x^3 + px + q = 0$ $[p \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{R}]$ (1).

– Pour résoudre une telle équation par la méthode de Cardan, Bombelli introduit des « quantités imaginaires » qui ne sont pas des nombres réels, les « racines carrées » des nombres réels négatifs. À l'aide d'une comptine, il énonça en 1572, dans son *Algèbre* les règles de multiplication de ces « quantités imaginaires ».

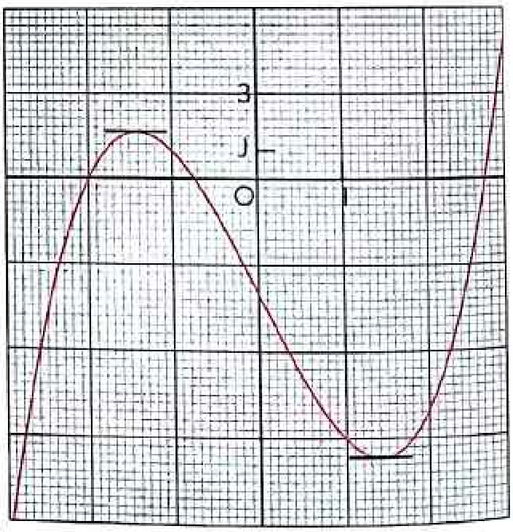
L'activité suivante donne, dans un cadre moderne, les principales étapes de cette méthode.

Résolution d'une équation dans $\mathbb{R}$ du type : $x^3 + px + q = 0$

Activité

On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^3 - 6x - 4 = 0$ (E).

Pour cela,
- vérifier graphiquement que (E) admet trois solutions dans $\mathbb{R}$;
- utiliser la méthode suivante pour résoudre algébriquement (E).



[1] Introduction de deux inconnues auxiliaires

• Vérifier que si u et v sont deux nombres réels tels que :
$u^3 + v^3 = 4$ et $uv = 2$,
alors $u + v$ est une solution de l'équation (E).

La résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation (E) conduit donc à la résolution dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ du système (Σ), donc aussi du système (Σ').

$$(\Sigma) \begin{cases} u^3 + v^3 = 4 \\ uv = 2 \end{cases} \qquad (\Sigma') \begin{cases} u^3 + v^3 = 4 \\ u^3v^3 = 8 \end{cases}$$

S'ils existent, les nombres réels u et v sont solutions de l'équation (F) : $X^2 - 4X + 8 = 0$.

• Vérifier que (F) n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$, cependant l'équation (E) admet trois solutions dans $\mathbb{R}$!

[2] Introduction d'un nombre imaginaire noté i tel que : $i^2 = -1$

On suppose qu'on peut encore appliquer les règles de calcul de l'addition et de la multiplication des nombres réels.

• Vérifier que l'équation (F) admet deux solutions $2 + 2i$ et $2 - 2i$ et que :
$$(-1 + i)^3 = 2 + 2i \quad \text{et} \quad (-1 - i)^3 = 2 - 2i.$$
$(-1 + i)$ et $(-1 - i)$ sont donc les solutions de l'équation (F).
-2 est la somme de $(-1 + i)$ et $(-1 - i)$; c'est donc une solution de l'équation (E).

• Achever la résolution de E.

3 Expression de certains nombres réels contenant des « quantités imaginaires »

• Les mathématiciens ont ainsi montré que certains nombres réels peuvent être écrits par des expressions contenant des « quantités imaginaires ».
Cependant, l'utilisation de ces « quantités imaginaires» reste controversée pendant deux siècles !

• On peut remarquer que :
– toute équation du type $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ peut se ramener à l'équation $X^3 + pX + q = 0$ (il suffit de poser $x = X - \frac{a}{3}$).
– toute équation du 3e degré admet dans $\mathbb{R}$ au moins une solution (car sa fonction polynôme f associée à une équation du type précédent est continue et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$).

Des « quantités imaginaires » aux nombres complexes

• Au milieu du XVIIIe siècle,
– Euler propose en 1777 de remplacer la « racine carrée » de – 1 par i ; d'où l'introduction de i tel que $i^2 = -1$.
– D'Alembert (1717-1783) montre que toutes les « quantités imaginaires » sont de la forme $a + ib$ avec a et b réels.

• Au XIXe siècle,
À la suite d'Argand, Gauss désigne en 1811 ces « quantités imaginaires » par **nombres complexes** et décrit leur représentation géométrique, ce qui confère à ces « quantités imaginaires » le statut de nombres.

Calcul avec ces nombres

Exemples

$(5 - i\sqrt{2}) + (-\sqrt{3} + 4i) = 5 - \sqrt{3} + (4 - \sqrt{2})i$.
$(5 - i\sqrt{2}) \times (-\sqrt{3} + 4i) = -5\sqrt{3} - 4\sqrt{2}\,i^2 + (20 + \sqrt{6})i = -5\sqrt{3} + 4\sqrt{2} + (20 + \sqrt{6})i$.

Activité

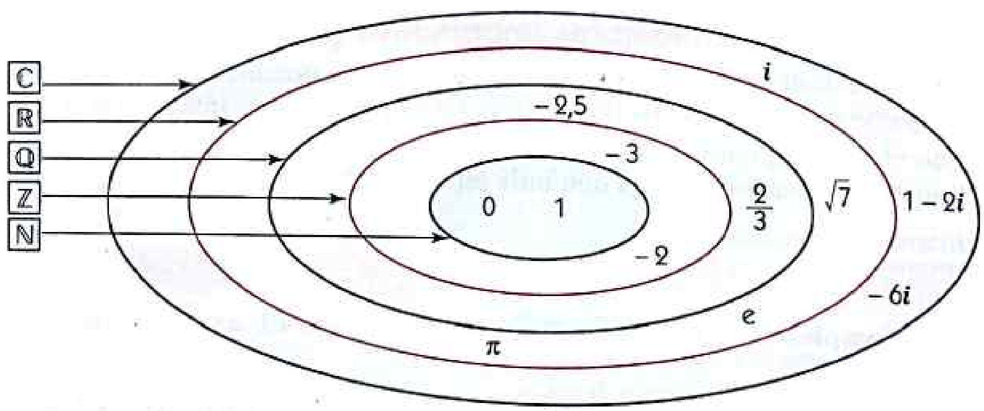
a, b, a', b' étant des nombres complexes, calculer la somme et le produit suivant :
$$(a + ib) + (a' + ib') \quad ; \quad (a + ib) \times (a' + ib')$$

Ensemble des nombres complexes

Nous admettons la propriété suivante :

Propriété – Définition

- **Il existe un nombre imaginaire noté i, vérifiant : $i^2 = -1$;**
- **Tout nombre de la forme $a + ib$ [$a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$] est appelé *nombre complexe* ;**
- **L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$;**
- **Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ sont définies une addition et une multiplication ayant respectivement les mêmes règles de calcul que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$.**



1.2. Forme algébrique d'un nombre complexe

Égalité de deux nombres complexes

Propriétés

a, b, a', b' sont des nombres réels.

$$[a + ib = a' + ib'] \Leftrightarrow [a = a' \text{ et } b = b']$$
$$[a + ib = 0] \Leftrightarrow [a = 0 \text{ et } b = 0]$$

Démonstration

- $a + ib$ et $a' + ib'$ sont des nombres complexes.

Démontrons que $[a + ib = a' + ib'] \Leftrightarrow [a = a' \text{ et } b = b']$.

– Supposons $a = a'$ et $b = b'$; on en déduit : $a + ib = a' + ib'$.

– Supposons $a + ib = a' + ib'$; on obtient : $a - a' = i(b' - b)$

À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, démontrons que : $b' - b = 0$

Supposons $b' - b \neq 0$

on obtient $i = \frac{a - a'}{b' - b}$; or $\frac{a - a'}{b' - b} \in \mathbb{R}$; donc $i \in \mathbb{R}$ (ce qui est faux).

Par suite $b' - b = 0$; c'est-à-dire $b = b'$

Par conséquent $a - a' = 0$; c'est-à-dire $a = a'$.

- La deuxième propriété est un cas particulier de la première.

Notation

On désigne par $\mathbb{C}^*$ l'ensemble de nombres complexes non nuls.

Forme algébrique d'un nombre complexe

Propriété – Définition

Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique : $z = a + ib$ $[a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}]$.

a est appelé la *partie réelle* de z et est noté $\mathcal{R}e(z)$

b est appelé la *partie imaginaire* de z et est noté $\mathcal{I}m(z)$.

On appelle *forme algébrique* du nombre complexe z l'écriture : $a + ib$.

Exemple

z écrit sous la forme algébrique	$\mathcal{R}e(z)$	$\mathcal{I}m(z)$
$-9 + 2i$	-9	2
$5{,}6 + i\sqrt{3}$	$5{,}6$	$\sqrt{3}$
12	12	0
i	0	1

Nombres réels – Nombres imaginaires purs

– Un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle est un **nombre réel**.

– Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle est appelé **nombre imaginaire pur**.

L'ensemble des nombres imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

L'ensemble des nombres imaginaires purs non nuls est noté $i\mathbb{R}^*$.

La propriété suivante est immédiate :

Propriété

z étant un nombre complexe, $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{I}m(z) = 0$; $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{R}e(z) = 0$.

Exemple

x étant un nombre réel, $2x - 1 - i(x + 1) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = -1$; $2x - 1 - i(x + 1) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

1.3. Calcul dans $\mathbb{C}$

Somme et produit de nombres complexes

• On vérifie que :

Pour tous nombres complexes de formes algébriques $a + ib$ et $a' + ib'$,

$$(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$$
$$(a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb' + i(ab' + a'b)$$

• z et z' étant des nombres complexes, on pose : $z + (-z') = z - z'$.

Exemples

$(3 + 2i) + (2 - 5i) = 2 + 3 + (2 - 5)i = 5 - 3i$

$3i(3 + 2i) = 3 \times 3i + 3 \times 2i^2 = -6 + 9i$

$(4 + i)(3 - 2i) = 4 \times 3 + (-2i^2) + (3 - 2 \times 4)i = 14 - 5i$

Opposé et inverse d'un nombre complexe

Opposé d'un nombre complexe

Soient des nombres complexes de formes algébriques $a + ib$ et $x + iy$.

$x + iy$ est l'opposé de $a + ib \Leftrightarrow (a + ib) + (x + iy) = 0$
$\Leftrightarrow (x + a) + i(y + b) = 0$
$\Leftrightarrow x = -a$ et $y = -b$.

L'opposé du nombre complexe $(a + ib)$ est noté $-(a + ib)$ et on a :

Pour tout nombre complexe de forme algébrique $a + ib$,

$$-(a + ib) = -a - ib$$

Inverse d'un nombre complexe non nul

• Soient des nombres complexes de formes algébriques $a + ib$ et $x + iy$.

$x + iy$ est inverse de $a + ib \Leftrightarrow (x + iy) \times (a + ib) = 1$
$\Leftrightarrow (ax - by) + i(ay + bx) = 1.$

On est amené à résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système suivant : $\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$

on obtient : $x = \dfrac{a}{a^2 + b^2}$ et $y = -\dfrac{b}{a^2 + b^2}$

Ce système admet donc une solution unique car $a^2 + b^2$ est non nul (en effet, $a + ib \neq 0$).

L'inverse du nombre complexe non nul $a + ib$ est noté $\dfrac{1}{a + ib}$ et on a :

Pour tout nombre complexe non nul de forme algébrique $a + ib$,

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{1}{a^2 + b^2}(a - ib)$$

• z étant un nombre complexe et z' un nombre complexe non nul, on pose : $z \times \dfrac{1}{z'} = \dfrac{z}{z'}$.

Produit nul

Propriété

Pour tous nombres complexes z et z', $z \times z' = 0 \Leftrightarrow z = 0$ *ou* $z' = 0$.

Démonstration

Soient z et z' deux nombres complexes.

Démontrons que $z \times 0 = 0$

on a : $zz' = z \times (z' + 0)$

$zz' = zz' + z \times 0$

d'où : $z \times 0 = 0$

Supposons $z \times z' = 0$

si $z = 0$, la propriété est vérifiée quel que soit z' ;

si $z \neq 0$, $\dfrac{1}{z}$ existe et : $z' = \dfrac{1}{z}(z \times z') = \dfrac{1}{z} \times 0$

donc : $z' = 0$.

Exemple

On veut résoudre dans ℂ l'équation (E) : $(z + 2 - 3i)(z - 3 + 5i) = 0$.

On sait que : $(z + 2 - 3i)(z - 3 + 5i) = 0 \Leftrightarrow [z + 2 - 3i = 0]$ *ou* $[z - 3 + 5i = 0]$
$\Leftrightarrow [z = -2 + 3i]$ *ou* $[z = 3 - 5i]$

donc : $-2 + 3i$ et $3 - 5i$ sont les solutions de (E).

Puissance entière d'un nombre complexe

Puissance entière d'un nombre complexe quelconque

Par analogie avec l'ensemble des nombres réels, on définit les puissances à exposant entier d'un nombre complexe.

Définition

z étant un nombre complexe non nul, n un nombre entier naturel non nul,

$$(1)\ z^0 = 1 \quad ; \quad (2)\ 0^n = 0 \quad ; \quad (3)\ z^{n+1} = z^n \times z \quad ; \quad (4)\ z^{-n} = \frac{1}{z^n}$$

Puissances entières de i

- Calculer i^3 ; i^4 ; i^5 ; i^6 ; i^7 ; i^8 ; i^9 ; i^{10}.

Plus généralement, on démontre que :

Pour tout nombre entier naturel n,

$$i^{4n} = 1 \quad ; \quad i^{4n+1} = i \quad ; \quad i^{4n+2} = -1 \quad ; \quad i^{4n+3} = -i$$

Formule du binôme de Newton

Les règles de calcul sur les puissances à exposants entiers des nombres réels non nuls sont les mêmes que celles sur les puissances à exposants entiers des nombres complexes non nuls, d'où la propriété suivante :

Propriété

Pour tous nombres complexes non nuls u et v, pour tout nombre entier naturel n plus grand que 1,

$$(u + v)^n = C_n^0 u^n + C_n^1 u^{n-1} v + \dots + C_n^k u^{n-k} v^k + \dots + C_n^n v^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{n-k} v^k.$$

Exemples

$$\begin{aligned}(3 - i)^4 &= C_4^4 3^4 + C_4^3 3^3(-i) + C_4^2 3^2(-i)^2 + C_4^1 3(-i)^3 + C_4^0(-i)^4 \\ &= 1 \times 81 + 4 \times 27(-i) + 6 \times 9 - 4 \times 3i + 1 \\ &= 81 + 54 + 1 + i(-108 - 12) \\ &= 136 - 120i.\end{aligned}$$

Triangle de Pascal (voir p 295)

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

Exercices

1.a Donner la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :
$(2 + i)(1 - i) - (3 - 2i)^2 + (5 - i)(5 + i)$;
$3i(2 + 8i) - 7(5 - 2i) + (7 - 3i)(1 + 5i)$.

1.b Donner la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :
$\dfrac{1}{3 + 2i}$; $\dfrac{1}{2 - i\sqrt{3}}$; $\dfrac{5 + 7i}{1 + i}$; $\dfrac{4 - 3i}{i}$.

1.c z et z' étant deux nombres complexes quelconques,
– calculer : $(z + z')^2$; $(z - z')^2$ $(1 - i)^2$; $(1 + i)^7$.
– factoriser : $z^2 - z'^2$; $z^3 - z'^3$; $z^3 + 1$; $z^3 - 1$.

1.d Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants.
$(5 + i)^3$; $(2 + i)^4$; $(-3 + 2i)^3$;
$(1 + i)^6$; $(1 + 2i)^5$; $(1 - 2i)^6$.

1.4. Module et conjugué d'un nombre complexe

Pour écrire sous forme algébrique l'inverse du nombre complexe non nul de forme algébrique $a + ib$, on a mis en évidence le nombre complexe $a - ib$ et le nombre réel $a^2 + b^2$. Étudions ces deux nombres.

Conjugué d'un nombre complexe

Définition

On appelle *conjugué* du nombre complexe z, le nombre complexe noté $\overline{z}$ tel que :

$$\mathcal{R}e(\overline{z}) = \mathcal{R}e(z) \quad \text{et} \quad \mathcal{I}m(\overline{z}) = -\mathcal{I}m(z)$$

z étant un nombre complexe de forme algébrique $a + ib$, $\overline{z} = a - ib$.

Exemple

$3 + 2i$ a pour conjugué : $3 - 2i$
$-5 + i$ a pour conjugué : $-5 - i$
$-2 - 3i$ a pour conjugué : $-2 + 3i$

$6 - 4i$ a pour conjugué : $6 + 4i$
$12i$ a pour conjugué : $-12i$
10 a pour conjugué : 10

La propriété suivante est une conséquence immédiate de la définition.

Propriété – Définition

Pour tout nombre complexe z, $\overline{\overline{z}} = z$.
On dit que les nombres complexes z et $\overline{z}$ sont *conjugués*.

Les propriétés (1) à (5) se démontrent aisément, les propriétés (6), (7) et (8) sont des conséquences.

Propriétés

Pour tout nombre complexe z,

(1) $z + \overline{z} = 2\,\mathcal{R}e(z)$
(2) $z - \overline{z} = 2i\,\mathcal{I}m(z)$
(3) $z \times \overline{z} = [\mathcal{R}e(z)]^2 + [\mathcal{I}m(z)]^2$

Pour tout nombre complexe z,

(4) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$
(5) $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$

z étant un nombre complexe de forme algébrique $a + ib$,
$z + \overline{z} = 2a$; $z - \overline{z} = 2b$; $z \times \overline{z} = a^2 + b^2$.

Pour tous nombres complexes z et z', (6) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; **(7)** $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.
Pour tout nombre complexe z, pour tout nombre complexe non nul z', (8) $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Démonstration guidée

Soient z et z' deux nombres complexes de formes algébriques respectives $a + ib$ et $a' + ib'$.

- Calculer et comparer $\overline{z + z'}$ et $\overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{z \times z'}$ et $\overline{z} \times \overline{z'}$.
- Démontrer que : $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Pour cela, justifier que : $\left(\frac{z}{z'}\right) \times z' = z$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right) \times z'} = \overline{z}$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} \times \overline{z'} = \overline{z}$.

Exemples

$48(3 - i\sqrt{2})$ a pour conjugué : $48(3 + i\sqrt{2})$.
$\frac{7}{2 + i\sqrt{3}}$ a pour conjugué : $\frac{7}{2 - i\sqrt{3}}$.

$(7 - i\sqrt{3})(\sqrt{2} + 3i)$ a pour conjugué : $(7 + i\sqrt{3})(\sqrt{2} - 3i)$.
$\frac{2 + 3i}{9 - 5i}$ a pour conjugué : $\frac{2 - 3i}{9 + 5i}$.

Exemples d'utilisation du conjugué d'un nombre complexe

z étant un nombre complexe de forme algébrique $a + ib$, $z = a + ib$; $\overline{z} = a - ib$; $z\overline{z} = a^2 + b^2$.

$z\overline{z}$ est un nombre réel, d'où l'utilisation de $\overline{z}$ pour écrire $\frac{1}{z}$ sous forme algébrique : $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}}$.

Exemples

Écrivons la forme algébrique du nombre complexe : $\frac{1}{2+4i}$.	Écrivons la forme algébrique du nombre complexe : $\frac{3+2i}{1-5i}$.
$\frac{1}{2+4i} = \frac{2-4i}{(2-4i)(2+4i)} = \frac{2-4i}{4+16} = \frac{1}{10} - \frac{1}{5}i$	$\frac{3+2i}{1-5i} = \frac{(3+2i)(1+5i)}{(1-5i)(1+5i)} = \frac{-7+17i}{1+25} = \frac{-7}{26} + \frac{17}{26}i$

Module d'un nombre complexe

Définition

On appelle *module* du nombre complexe z, le nombre réel positif $\sqrt{z\overline{z}}$.
On le note $|z|$.

z étant un nombre complexe de forme algébrique $a + ib$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Exemple

$3 + 2i$ a pour module : $\sqrt{13}$
$4 - 3i$ a pour module : 5
i a pour module : 1
12 a pour module : 12

Les propriétés (1), (2), (3), et (4) sont des conséquences immédiates de la définition.
Les propriétés (5), (6), (7) et (8) seront démontrées ultérieurement.

Propriétés

Pour tout nombre complexe z,
(1) $|\overline{z}| = |z|$; (3) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
(2) $|\mathcal{R}e(z)| \leq |z|$; (4) $|\mathcal{I}m(z)| \leq |z|$.

Pour tous nombres complexes z et z',
(5) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
(6) $|z \times z'| = |z| \times |z'|$

Pour tous nombres complexes z, pour tout nombre complexe non nul z',
(7) $\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$; (8) $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.

Exercices

1.e Quel est le nombre complexe conjugué de chacun des nombres complexes suivants ?

$2 + 4i$; $1 - 5i$; $2i(4 - i)$; $(3 + i)(-5i + 3)$

$\frac{1}{2+i}$; $\frac{3-i}{6i-2}$; $\frac{-5i}{i}$; $\frac{2+i}{8-i}$.

1.f Donner la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

$\frac{1}{-5i}$; $\frac{2}{3i}$; $\frac{1}{\sqrt{2}+5i}$; $\frac{3-i}{4+3i}$; $\frac{1}{4-2i}$; $\frac{2+5i}{9-4i}$.

1.g Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants :

$2 + 4i$; $1 - 5i$; $-7 + i$;
$-1 - 3i$; $-6i$; -8.

1.5. Nombre complexe et représentation géométrique

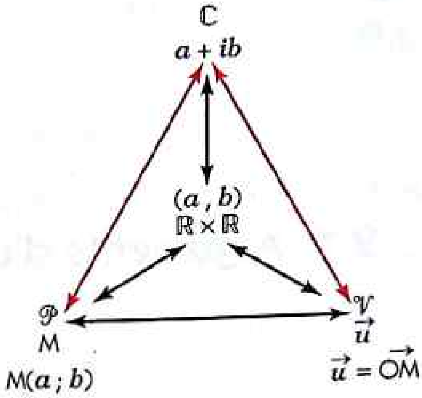
Le plan $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé direct (O, I, J).

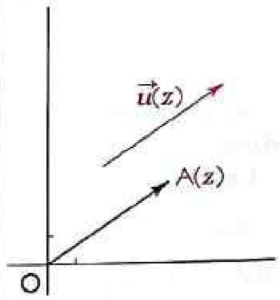
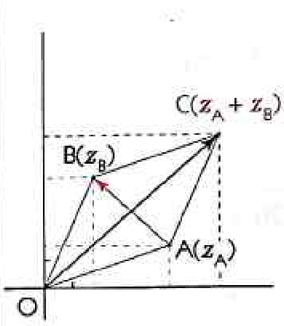
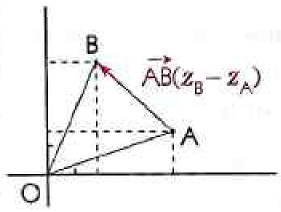
L'ensemble $\mathcal{V}$ des vecteurs du plan est muni de la base orthonormée $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

On sait que tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme : $z = a + ib$.

En tenant compte des bijections entre les ensembles $\mathcal{P}$, $\mathcal{V}$ et $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on en déduit les six bijections ci-contre.

Ces bijections permettent d'établir ou de justifier les résultats essentiels.



	Dans $\mathbb{C}$	Dans $\mathcal{P}$ ou dans $\mathcal{V}$	Illustrations
Affixe Point-image Vecteur-image	$z = x + iy$, $[(x ; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}]$ z est *l'affixe du point* A noté z_A z est *l'affixe du vecteur* $\overrightarrow{OA}$ noté $z_{\overrightarrow{OA}}$ $z_A \in \mathbb{R} \iff A \in (OI)$ $z_A \in i\mathbb{R} \iff A \in (OJ)$	A est le point-image de z noté A(z) On pose $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ $\vec{u}$ est le vecteur-image de z noté $\vec{u}(z)$	
Somme Différence Opposé	On pose $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ $z_A + z_B$ est l'affixe du point $C(x_A + x_B ; y_A + y_B)$ $\boxed{z_C = z_A + z_B}$ $z_A - z_B$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A)$ $\boxed{z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A}$ $-z_A$ est l'affixe du vecteur $-\overrightarrow{OA}(-x_A ; -y_B)$		
Module	Le module de z est la norme du vecteur-image de z $\boxed{\lvert z \rvert = \sqrt{a^2 + b^2} = \lVert \vec{u}(z) \rVert}$ On sait que : OC ≤ OA + OB d'où : $\boxed{\lvert z + z' \rvert \leq \lvert z \rvert + \lvert z' \rvert}$		

$\mathcal{P}$ *est appelé le* ***plan complexe****, (OI) est l'****axe réel****, (OJ) l'****axe imaginaire****.*

Exercices

1.h Le plan est muni du repère (O, I, J). Placer le point-image de chacun des nombres complexes suivants : $1 - i$; $1 + i$; $2 + 4i$; $-1 + i$; $-2 + i$; $1 - 2i$; $-i$; 5.

1.i Le plan est muni du repère (O, I, J). Dans chacun des cas suivants,déterminer l'ensemble des points-images des nombres complexes z tels que : (1) $z \in \mathbb{R}_+$; (2) $z \in \mathbb{R}_-$; (3) $z \in i\mathbb{R}$; (4) Re(z) = Im(z).

1.j Le plan est muni du repère (O, I, J). On considère un nombre complexe z et son point-image M. Placer les points-images M_1, M_2 et M_3 respectifs des nombres complexes : $-z$; $\bar{z}$ et $-\bar{z}$.

2 Formes trigonométriques Formes exponentielles

Le plan $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé direct (O, I, J) ; $\mathcal{V}$ est muni de la base orthonormée directe $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

2.1. Arguments d'un nombre complexe non nul

Définition

Activité

Dans chacun des cas suivants, construire le point-image M du nombre complexe z et déterminer la mesure principale et deux autres mesures de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$:

(1) $z = 1 - i$ (2) $z = -2 + 2i$ (3) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$.

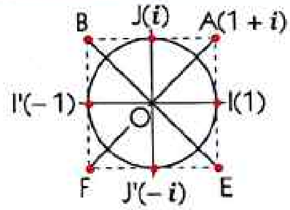
Définition

z est un nombre complexe non nul, M le point-image de z dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).
– La mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$ est appelée l'*argument principal* de z, noté : ARG(z).
– Toute mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$ est appelée *un argument* de z, noté arg(z).

θ étant un argument d'un nombre complexe non nul z, tout autre argument de z est de la forme :
$$\theta + k2\pi \quad [k \in \mathbb{Z}].$$

Exemple

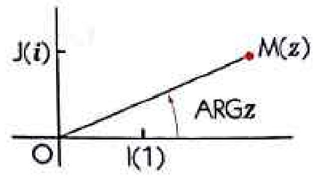
z	1	i	-1	$-i$	$1+i$
ARG(z)	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$



On n'attribue pas d'argument au nombre complexe 0.

Égalité de nombres complexes non nuls

z étant un nombre complexe non nul, M son point-image peut être repéré par la distance OM et l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$.
Par conséquent, le nombre complexe non nul z est déterminé par son module et un de ses arguments.



On en déduit l'égalité de nombres complexes non nuls :

Propriété

z et z' sont des nombres complexes non nuls.

$$z = z' \Leftrightarrow |z| = |z'| \text{ et } \mathrm{ARG}(z) = \mathrm{ARG}(z')$$
$$\Leftrightarrow |z| = |z'| \text{ et } \arg(z) = \arg(z') + k2\pi \quad [k \in \mathbb{Z}].$$

Exercices

2.a Le plan est muni du repère orthonormé direct (O, I, J). Déterminer l'ensemble des nombres complexes z dans chacun des cas ci-dessous :
ARG(z) = 0 ; ARG(z) = π ; ARG(z) = $\frac{\pi}{2}$; ARG(z) = $-\frac{\pi}{2}$.

2.b Le plan est muni du repère orthonormé direct (O, I, J). On considère un nombre complexe z d'argument principal θ.
Exprimer en fonction de θ l'argument principal des nombres complexes suivants : $-z$; $\bar{z}$; $-\bar{z}$.

2.2. Formes trigonométriques, formes exponentielles d'un nombre complexe non nul

Formes trigonométriques

Présentation

z est un nombre complexe non nul, M son point-image, θ un de ses arguments, $a + ib$ sa forme algébrique.

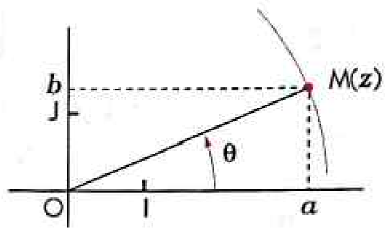
On a : $\vec{OI}.\vec{OM} = a$ et $\vec{OJ}.\vec{OM} = b$

or : $\vec{OI}.\vec{OM} = \|\vec{OI}\| \|\vec{OM}\| \cos(\widehat{\vec{OI}, \vec{OM}}) = \text{OM} \cos\theta$

$\vec{OJ}.\vec{OM} = \|\vec{OJ}\| \|\vec{OM}\| \cos(\widehat{\vec{OJ}, \vec{OM}}) = \text{OM} \sin\theta$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \text{OM}$

d'où : $z = \text{OM}(\cos + i\sin\theta)$.



Propriété – Définition

Tout nombre complexe non nul z, de module r et d'argument θ peut s'écrire :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

On appelle *forme trigonométrique* du nombre complexe non nul z l'écriture :

$$r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad [r \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \theta \in \mathbb{R}]$$

Exemples

Dans chacun des cas suivants, déterminons une forme trigonométrique du nombre complexe z :

$z = 1 + i$	$z = i$	$z = 1$
On a : $\lvert 1 + i\rvert = \sqrt{2}$; $\text{ARG}(1 + i) = \frac{\pi}{4}$; donc : $1 + i = \sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$.	On a : $\lvert i\rvert = 1$; $\text{ARG}(i) = \frac{\pi}{2}$; donc : $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$.	On a : $\lvert 1\rvert = 1$; $\text{ARG}(1) = 0$; donc : $1 = \cos 0 + i\sin 0$.

Remarquons que le nombre complexe $-2(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ $[\alpha \in \mathbb{R}]$, n'est pas écrit sous forme trigonométrique. En effet : $-2 \notin \mathbb{R}_+^*$.

On a : $-2(\cos\alpha + i\sin\alpha) = 2(-\cos\alpha - i\sin\alpha) = 2(\cos(\alpha + \pi) + i\sin(\alpha + \pi))$.

Forme algébrique – Formes trigonométriques

Passage d'une forme à l'autre

Forme algébrique

$z = a + ib$ $[(a\,;b) \in \mathbb{R}^2 - \{0, 0\}]$

▼

Détermination du module r et d'un argument θ

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$

θ est une solution du système :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{r} \end{cases}$$

▼

Formes trigonométriques

$r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $[r \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \theta \in \mathbb{R}]$

Formes trigonométriques

$r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $[r \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \theta \in \mathbb{R}]$

▼

Détermination de la partie réel a et de la partie imaginaire b

$a = r\cos\theta$

$b = r\sin\theta$

▼

Forme algébrique

$z = a + ib$ $[(a\,;b) \in \mathbb{R}^2 - \{0, 0\}]$

Exemples

Dans chacun des cas suivants, écrivons le nombre complexe non nul z sous forme trigonométrique :

$z = 1 + i\sqrt{3}$	$z = -\sqrt{3} + 3i$	$z = 1 - i$
On a : $r = \sqrt{4} = 2$	On a : $r = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$	On a : $r = \sqrt{2}$
$z = 2(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2})$	$z = 2\sqrt{3}(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2})$	$z = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2})$
θ est une solution du système :	θ est une solution du système :	θ est une solution du système :
$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$	$\begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$	$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$
donc : $\theta = \frac{\pi}{3}$	donc : $\theta = \frac{2\pi}{3}$	donc : $\theta = -\frac{\pi}{4}$
$z = 2(\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3})$	$z = 2\sqrt{3}(\cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3})$	$z = \sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + \sin(-\frac{\pi}{4})\right)$

Formes exponentielles

Présentation

– On pose : $\boxed{\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}}$

– Considérons un nombre complexe non nul z de module r et d'argument θ, on peut donc écrire :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,e^{i\theta}$$

– Nous verrons que cette notation est cohérente avec les propriétés des puissances et la forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul ($e^{i0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1$).

Propriété – Définition

Tout nombre complexe non nul z, de module r et d'argument θ peut s'écrire :

$$z = r\,e^{i\theta}$$

On appelle *forme exponentielle* du nombre complexe non nul z l'écriture :

$$r\,e^{i\theta} \quad [r \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \theta \in \mathbb{R}]$$

Exemples

Dans chacun des cas suivants, déterminons une forme exponentielle du nombre complexe z :

$z = 1 + i$	$z = i$	$z = -1$
$1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$	$i = (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = e^{i\frac{\pi}{2}}$	$-1 = \cos\pi + i\sin\pi = e^{i\pi}$

Information historique

– L'écriture d'un nombre complexe non nul sous forme exponentielle est due à Euler.

Elle facilite les calculs dans $\mathbb{C}$ car elle transforme les règles de calcul sur les produits et les quotients en règles de calcul sur les puissances.

– La formule $e^{i\pi} + 1 = 0$, qui aurait été écrite pour la première fois par Euler, a frappé les imaginations du fait qu'elle lie entre eux, de façon simple, cinq nombres fondamentaux, dont trois (i, e et π) restaient, à l'époque, quelque peu mystérieux.

© Photo B.N., Paris

Leonhard EULER
mathématicien suisse
1707-1783

Propriétés des modules et des arguments

Produit, quotient et puissance entière d'un nombre complexe non nul

on donne : $z = re^{i\theta}$ $[r \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \theta \in \mathbb{R}]$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ $[r' \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \theta' \in \mathbb{R}]$

On obtient : $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$; $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$ | $z^n = r^n e^{in\theta}$ $[n \in \mathbb{R}]$; $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$.

Puisque les nombres réels r et r' sont strictement positifs, il en est de même des nombres réels rr', $\frac{1}{r}$, r^n.

Par conséquent,

$rr' = |zz'|$ et $\theta + \theta'$ est un argument de zz'

$\frac{1}{r} = \left|\frac{1}{z}\right|$ et $-\theta$ est un argument de $\frac{1}{z}$

$r^n = |z|^n$ et $n\theta$ est un argument de z^n.

$\frac{r}{r'} = \left|\frac{z}{z'}\right|$ et $\theta - \theta'$ est un argument de $\frac{z}{z'}$.

On en déduit les propriétés suivantes.

Propriétés

Pour tous nombres complexes non nuls z et z', pour tout nombre entier relatif n,

$|zz'| = |z| \times |z'|$ et $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + k \times 2\pi$ $[k \in \mathbb{Z}]$

$\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$ et $\arg(\frac{1}{z'}) = -\arg(z') + k \times 2\pi$ $[k \in \mathbb{Z}]$

$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ et $\arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z') + k \times 2\pi$ $[k \in \mathbb{Z}]$

$|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n\arg(z) + k \times 2\pi$ $[k \in \mathbb{Z}]$

Exemple

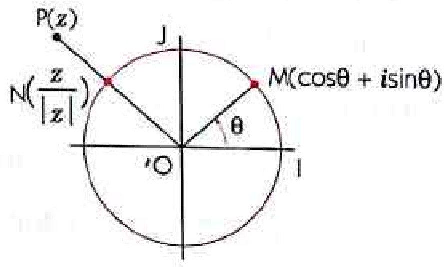
On donne : $z_1 = 5(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$; $z_2 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$.
Écrivons sous forme exponentielle chacun des nombres complexes suivants : $z_1 z_2$; z_2^4 ; $\frac{1}{z_1}$; $\frac{z_1}{z_2}$.

On a : $z_1 z_2 = 5\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})}$; $z_2^4 = 4e^{\frac{4\pi}{3}i}$; $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{5}e^{-\frac{\pi}{4}i}$; $\frac{z_1}{z_2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3})}$.

Nombres complexes de module 1

- θ étant un nombre réel, $\cos\theta + i\sin\theta$ est un nombre complexe de module 1 et d'argument θ.

Donc : $\boxed{e^{-i\theta} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta - i\sin\theta}$



- z étant un nombre complexe non nul, $\frac{z}{|z|}$ est un nombre complexe de module 1 et de même argument principal que z.

Exercices

2.c Déterminer une forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :

(1) $1 + \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})$ (2) $\frac{1-\sqrt{3}}{1-i}$

(3) $-2(1+i)$ (4) $(1-i)e^{i\frac{\pi}{4}}$

2.d Déterminer le module et l'argument principal θ, puis donner une forme exponentielle de chacun des nombres complexes suivants :

5 ; $\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$; $-\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}$; $\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$; $-2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

2.3. Nombres complexes et trigonométrie

Formules de Moivre

■ **Propriété**

θ étant un nombre réel et n un nombre entier relatif,

on a : $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$; $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = e^{in\theta}$.

On en déduit la propriété suivante.

Formules de Moivre

Pour tout nombre réel θ, pour tout nombre entier relatif n,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

■ **Exemple**

θ étant un nombre réel, exprimons $\cos 4\theta$ et $\sin 4\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

On a : $\cos 4\theta + i\sin 4\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^4$

$= \cos^4\theta + 4\cos^3\theta(i\sin\theta) + 6\cos^2\theta(i\sin\theta)^2 + 4\cos\theta(i\sin\theta)^3 + (i\sin\theta)^4$

$= \cos^4\theta + \sin^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + 4i(\cos^3\theta\sin\theta - \cos\theta\sin^3\theta)$

donc : $\cos 4\theta = \cos^4\theta + \sin^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta$

$= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2 - 8\cos^2\theta\sin^2\theta$

$= 1 - 8\cos^2\theta\sin^2\theta = 1 - 8\cos^2\theta + 8\cos^4\theta$

$\sin 4\theta = 4(\cos^3\theta\sin\theta - \cos\theta\sin^3\theta)$

$= 4\cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$.

Formules d'Euler

■ **Propriété**

θ étant un nombre réel, n un nombre entier relatif :

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$; $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$; $e^{in\theta} = \cos n\theta + i\sin n\theta$; $e^{-in\theta} = \cos n\theta - i\sin n\theta$.

On en déduit les formules suivantes.

Formules d'Euler

Pour tout nombre réel θ, pour tout nombre entier relatif n,

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad ; \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad ; \quad \cos n\theta = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} \quad ; \quad \sin n\theta = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}.$$

■ **Exemple**

θ étant un nombre réel, linéarisons $\cos^5\theta$, c'est à dire exprimons $\cos^5\theta$ en fonction de $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$, n étant un nombre entier relatif.

On a : $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$

donc : $\cos^5\theta = \frac{1}{2^5}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^5$

$= \frac{1}{2^5}[e^{5i\theta} + 5e^{4i\theta}e^{-i\theta} + 10e^{3i\theta}e^{-2i\theta} + 10e^{2i\theta}e^{-3i\theta} + 5e^{i\theta}e^{-4i\theta} + e^{-5i\theta}]$

$= \frac{1}{2^5}[(e^{5i\theta} + e^{-5i\theta}) + 5(e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}) + 10(e^{i\theta} + e^{-i\theta})] = \frac{1}{2^4}(\cos 5\theta + 5\cos 3\theta + 10\cos\theta)$.

Exercices

2.e θ étant un nombre réel, linéariser $\cos^3\theta$ et $\sin^3\theta$.
En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \cos^3 x$ et $g(x) = \sin^3 x$.

2.f θ étant un nombre réel, exprimer $\sin^2 3\theta\cos^2\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.
En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin^2 3x\cos^2 x$.

2.g Démontrer que z étant un nombre complexe de module 1 et d'argument θ, n un nombre entier relatif,
$\cos n\theta = \frac{1}{2}(z^n + \frac{1}{z^n})$; $\sin n\theta = \frac{1}{2i}(z^n - \frac{1}{z^n})$.
Utiliser ces formules pour linéariser chacune des expressions trigonométriques suivantes : $\sin^5\theta$ et $\cos^5\theta$.

3 Résolution d'équations

3.1. Racines n^e d'un nombre complexe

Définition

Exemple introductif 1

Utilisons la forme algébrique et la forme trigonométrique pour résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) $z^2 = \sqrt{3} + i$.
Comparons les résultats obtenus. Quelle conséquence peut-on en tirer ?

Utilisation de la forme algébrique

On pose : $z = x + iy$

d'où : $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = \sqrt{3} + i$

$|z|^2 = |\sqrt{3} + i| = 2 = x^2 + y^2$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) revient à résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système :

$$(\Sigma) \begin{cases} x^2 - y^2 = \sqrt{3} \\ x^2 + y^2 = 2 \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

(Σ) est équivalent au système :

$$(\Sigma') \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{3}) \\ y^2 = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{3}) \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

or : $(1 + \sqrt{3})^2 = 2(2 + \sqrt{3})$; $(1 - \sqrt{3})^2 = 2(2 - \sqrt{3})$.

(E) a donc deux solutions opposées : z' et z''.

$$z' = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} - \frac{1 - \sqrt{3}}{2} i$$

$$z'' = -\frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} i = -z'$$

Utilisation de la forme trigonométrique

Forme trigonométrique de $\sqrt{3} + i$ et de l'inconnue z

$$\sqrt{3} + i = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$$

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) revient donc à déterminer tous les nombres réels r et α tels que : $r > 0$ et $r^2(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha) = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$.

On obtient successivement :

$$\begin{cases} r^2 = 2 \text{ et } r > 0 \\ 2\alpha = \frac{\pi}{6} + k2\pi \ [k \in \mathbb{Z}] \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \alpha = \frac{\pi}{12} + k\pi \ [k \in \mathbb{Z}] \end{cases}$$

Les solutions de l'équation (E) sont les nombres complexes z_k de la forme :

$$z_k = \sqrt{2}[\cos(\frac{\pi}{12} + k\pi) + i\sin(\frac{\pi}{12} + k\pi)], \ [k \in \mathbb{Z}]$$

On obtient deux solutions opposées :

$$z_0 = \sqrt{2}[\cos(\frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{\pi}{12})]$$

$$z_1 = \sqrt{2}[\cos(\frac{\pi}{12} + \pi) + i\sin(\frac{\pi}{12} + \pi)] = -z_0$$

On remarque que : $\frac{1 + \sqrt{3}}{2} > 0$; $-\frac{1 - \sqrt{3}}{2} > 0$; $\cos(\frac{\pi}{12}) > 0$; $\sin(\frac{\pi}{12}) > 0$;

on en déduit que : $z' = z_0$ et $z'' = z_1$

donc : $\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\frac{\pi}{12}) = -\frac{1 - \sqrt{3}}{2}$.

Exemple introductif 2

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) $z^6 = 4\sqrt{2}(-1 + i)$.

Remarquons d'une part, que 0 n'est pas solution de l'équation (E), d'autre part, que la forme trigonométrique donne une résolution facile de cette équation, ce qui n'est pas le cas avec la forme algébrique.

Forme trigonométrique de $4\sqrt{2}(-1 + i)$ et de l'inconnue z

On a : $4\sqrt{2}(-1 + i) = 8(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$

d'où : $\begin{cases} z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \ [r \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}] \\ z^6 = r^6(\cos 6\alpha + i\sin 6\alpha). \end{cases}$

Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) revient donc à déterminer tous les nombres réels r et α tels que :

$$r > 0 \quad \text{et} \quad r^6(\cos 6\alpha + i\sin 6\alpha) = 8(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}).$$

On obtient successivement : $\begin{cases} r^6 = 8 \text{ et } r > 0 \\ 6\alpha = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \ [k \in \mathbb{Z}] \end{cases}$; $\begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \alpha = \frac{\pi}{8} + k\frac{2\pi}{6} \ [k \in \mathbb{Z}] \end{cases}$

Les solutions de l'équation (E) sont donc les nombres complexes z_k de la forme suivante :

$$z_k = \sqrt{2}[\cos(\frac{\pi}{8} + k\frac{2\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{8} + k\frac{2\pi}{6})] \quad [k \in \mathbb{Z}]$$

• Vérifier que l'équation (E) admet exactement six solutions z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 qui correspondent respectivement aux valeurs 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 de k.

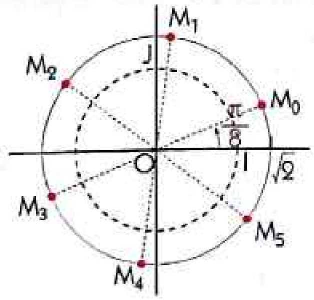
Représentation géométrique des solutions de (E)

Désignons par M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 les points-images des nombres complexes z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5.

$$\text{MES } (\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM_0}}) = \frac{\pi}{8} ;$$

$$\text{MES } (\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}}) = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{3} ;$$

$$\text{MES } (\widehat{\overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OM_3}}) = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \text{ ; etc.}$$



Les points M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 sont les sommets d'un hexagone régulier inscrit dans un cercle de centre 0 et de rayon $\sqrt{2}$.

Définition

n étant un nombre entier naturel non nul et Z un nombre complexe, on appelle racine n^e de Z tout nombre complexe z tel que : $z^n = Z$.

Recherche des racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe

n étant un nombre entier naturel non nul et Z un nombre complexe, rechercher les racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe Z revient à résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^n = Z$.

• Supposons $Z = 0$; 0 est alors l'unique solution de (E).

• Supposons $Z \neq 0$;

Forme trigonométrique de Z et de l'inconnue z

On a : $Z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ $[\rho \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \theta \in \mathbb{R}]$

$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ $[r \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}]$

d'où : $z^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$.

Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) revient donc à déterminer tous les nombres réels r et α tels que :

$$r > 0 \text{ et } r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) ;$$

on obtient successivement : $\begin{cases} r^n = \rho \text{ et } r > 0 \\ n\alpha = \theta + k2\pi \ [k \in \mathbb{Z}] \end{cases}$; $\begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \alpha = \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n} \ [k \in \mathbb{Z}] \end{cases}$

Les solutions de l'équation (E) sont les nombres complexes z_k de la forme :

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n})\right) \quad [k \in \mathbb{Z}].$$

En donnant à k les valeurs 0, 1, 2, ..., $n-1$, n, $n+1$, on vérifie que : $z_n = z_0$; $z_{n+1} = z_1$...

Propriétés

n étant un nombre entier naturel non nul,
- **0 est la seule racine n^e de 0,**
- **tout nombre complexe non nul de forme trigonométrique $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ admet n racines n^e qui sont les différentes valeurs de :**

$$\sqrt[n]{\rho}\left(\cos(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n})\right) \quad [k \in \{0, 1, 2, ..., (n-1)\}].$$

Le plan étant muni du repère orthonormé direct (O, I, J), les points-images des n racines n^e sont sur le cercle ($\mathscr{C}$) de centre O et de rayon $\sqrt[n]{\rho}$.

– Lorsque $n = 2$, les points-images des deux racines carrées sont diamétralement opposés sur ($\mathscr{C}$).

– Lorsque $n > 2$, les points-images des n racines n^e sont les sommets d'un polygone régulier de n côtés, inscrit dans le cercle ($\mathscr{C}$).

Racines cubiques de l'unité

Présentation

Calculons et représentons géométriquement les racines cubiques de 1.

On sait que 1 admet trois racines cubiques qui sont solutions de l'équation (E) $z^3 = 1$.
On vérifie que : $|z| = 1$.

Formes trigonométriques de 1 et de l'inconnue z

On a : $1 = \cos 0 + i\sin 0$;
$z = \cos\alpha + i\sin\alpha \quad [\alpha \in \mathbb{R}]$.
d'où : $z^3 = \cos 3\alpha + i\sin 3\alpha$.

Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E)

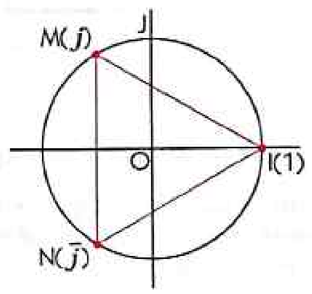
Les trois racines cubiques de 1 sont de la forme : $z_k = \left(\cos(k\frac{2\pi}{3}) + i\sin(k\frac{2\pi}{3})\right) \quad [k \in \{0, 1, 2\}]$

donc : $z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

$$z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

on note : $\boxed{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = j}$



Les racines cubiques de 1 sont donc : $1, j, \bar{j}$.
On vérifie que : $\bar{j} = j^2$ et $1 + j + \bar{j} = 0$.

Exemple

Calculons les racines cubiques de $8i$.

On vérifie que : $-2i$ est une racine cubique de $8i$: $(-2i)^3 = 8i$

or : $z^3 = 8i \Leftrightarrow \left(\frac{z}{-2i}\right)^3 = 1$

donc : z est une racine cubique de $8i \Leftrightarrow \frac{z}{-2i}$ est une racine cubique de 1.

Les racines cubiques de $8i$ sont donc : $-2i$; $-2i \times j$; $-2i \times \bar{j}$.

Exercices

3.a Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 = 1$.

3.b Quel est le nombre complexe z dont le carré est égal à son inverse ?

3.c Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

(1) $1 + i$ (2) $-4i$
(3) $1 - i\sqrt{3}$ (4) $7 + 24i$

3.d Déterminer les racines cubiques des nombres complexes suivants :

(1) $1 + i$ (2) $-4i$
(3) $1 - i\sqrt{3}$ (4) $7 + 24i$

3.2. Résolution de l'équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Étude du cas général

On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) du second degré associé au polynôme P(z), de discriminant Δ :

(E) $az^2 + bz + c = 0$; $P(z) = az^2 + bz + c = a[(z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]$; $\Delta = b^2 - 4ac$

M **Pour résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$, on peut procéder comme suit,**

- **On calcule le discriminant Δ**
- **On détermine les racines carrées de Δ suivant que Δ est réel ou non,**
- **On calcule les solutions.**

Plus généralement, on obtient les résultats consignés dans le tableau récapitulatif suivant :

TABLEAU RÉCAPITULATIF

	$\Delta \in \mathbb{R}$			$\Delta \notin \mathbb{R}$	Nature de Δ
	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$	$\Delta < 0$	$\Delta \neq 0$	
(E) $az^2 + bz + c = 0$ $a \neq 0$ $\Delta = b^2 - 4ac$	Δ admet une seule racine carrée 0	Δ admet deux racines carrées opposées : $\sqrt{\Delta}$; $-\sqrt{\Delta}$	Δ admet deux racines carrées opposées : $i\sqrt{\Delta}$; $-i\sqrt{\Delta}$	Δ admet deux racines carrées opposées : δ ; $-\delta$	Racines carrées de Δ
	(E) admet une solution double : $\boxed{-\frac{b}{2a}}$	(E) admet deux solutions : $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	(E) admet deux solutions : $\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$; $\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$	(E) admet deux solutions : $\frac{-b-\delta}{2a}$; $\frac{-b+\delta}{2a}$	Solutions de (E)

Exemples

Résolvons dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes : (1) $z^2 + 4 = 0$; (2) $z^2 + (2 + 3i)z - 2(1 - 2i) = 0$.

- **Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (1)**

Factorisation du premier membre

(1) $z^2 + 4 = 0$

$(z - 2i)(z + 2i) = 0$

Détermination des solutions

$z_1 = 2i$; $z_2 = -2i$

- **Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (2)**

Calcul du discriminant Δ

$\Delta = 3 - 4i$

Calcul des racines carrées du discriminant

Le discriminant est un nombre complexe non nul, il admet donc deux racines carrées, solutions de l'équation : (E) $\delta^2 = 3 - 4i$

On pose : $\delta = x + iy$ $[(x ; y) \mathbb{R} \times \mathbb{R}]$

d'où : $\delta^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = 3 - 4i$

or : $|\delta^2| = |3 - 4i| = 5 = x^2 + y^2$

Résoudre l'équation (E) revient à résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système : $(\Sigma) \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \\ 2xy = -4 \end{cases}$

(Σ) est équivalent au système : $(\Sigma') \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \\ xy = -2 \end{cases}$

doù : $x = 2$ *et* $y = -1$; $x = -2$ *et* $y = 1$.

Les deux racines carrées du discriminant sont :

$(2 - i)$; $-(2 - i)$.

Calcul des solutions de l'équation (2)

$$z_1 = \frac{-(2 + 3i) + (2 - i)}{2} = -2i$$

$$z_2 = \frac{-(2 + 3i) - (2 - i)}{2} = -2 - i$$

Exercices

3.d Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(1) $z^2 - 5z + 9 = 0$ (2) $z^2 - z - 2 = 0$

(3) $z^2 - 6z + 9 = 0$ (4) $z^2 + iz + 1 + 3i = 0$

3.e Calculer $(1 - i)^2$. En déduire la factorisation de $z^2 + 2i$.

Résoudre danc $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 2i = 0$.

TP Travaux pratiques

TP Formules d'Euler et calcul trigonométrique

Dans le cours, nous avons utilisé les formules d'Euler pour linéariser certaines expressions trigonométriques, c'est-à-dire transformer un produit du type $\cos^p x \sin^q x$, (avec p et q éléments de $\mathbb{N}$) en une somme de termes du type : $a\cos\alpha x$ ou $b\sin\beta x$.

Ce TP a pour objectif de présenter des exemples d'utilisation des formules d'Euler à d'autres calculs trigonométriques.

Exercice commenté 1

n est un nombre entier naturel supérieur à 1.

On pose :

$$S_n = 1 + \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \dots + \cos\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)$$

$$S'_n = \sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + \dots + \sin\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)$$

Calculer S_n et S'_n.

Les termes des sommes S_n et S'_n suggèrent de calculer l'expression $S_n + iS'_n$ pour faire apparaître des expressions du type e^{ix}.

On a : $S_n + iS'_n = 1 + e^{i\frac{2\pi}{n}} + e^{i\frac{4\pi}{n}} + \dots + e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}$

posons : $q = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

d'où : $S_n + iS'_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$

$S_n + iS'_n$ est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique (complexe) de premier terme 1 et de raison q différent de 1.

donc : $S_n + iS'_n = \dfrac{1-q^n}{1-q} = \dfrac{1-e^{i2\pi}}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}} = 0.$

Pour tout nombre entier naturel n supérieur à 1 :

$$1 + \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \dots + \cos\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = 0$$

$$\sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + \dots + \sin\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = 0$$

Application

– Examiner les résultats obtenus avec S_n et S'_n en donnant à n les valeurs 2, 3, 4, …
En déduire des formules trigonométriques.

– Pour $n = 5$,
on pourra exprimer les termes de la somme S_5 en fonction de $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5}$ et conclure.

De même, exprimer les termes de la somme S'_5 en fonction de $\sin\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{4\pi}{5}$ et conclure.

α est un nombre réel élément de $]0\ ;\pi[$.
Déterminer le module et un argument de :

$$1-e^{i\alpha} \quad ; \quad 1+e^{i\alpha}.$$

En déduire le module et un argument de :

$$\frac{1-e^{i\alpha}}{1+e^{i\alpha}} \quad ; \quad (1-e^{i\alpha})(1+e^{i\alpha}).$$

On a vu que la mise en facteur de $e^{\frac{i\alpha}{2}}$ dans l'expression $1-e^{i\alpha}$ utilise les formules d'Euler.

Factorisation de $1-e^{i\alpha}$ et de $1+e^{i\alpha}$

Soit α un nombre réel,

$$1-e^{i\alpha}=e^{\frac{i\alpha}{2}}\left(e^{-\frac{i\alpha}{2}}-e^{\frac{i\alpha}{2}}\right)=-2i\,e^{\frac{i\alpha}{2}}\times\frac{e^{\frac{i\alpha}{2}}-e^{-\frac{i\alpha}{2}}}{2i}$$

$$1+e^{i\alpha}=e^{\frac{i\alpha}{2}}\left(e^{-\frac{i\alpha}{2}}+e^{\frac{i\alpha}{2}}\right)=2e^{\frac{i\alpha}{2}}\times\frac{e^{\frac{i\alpha}{2}}+e^{-\frac{i\alpha}{2}}}{2}$$

Par conséquent,

Pour tout nombre réel α,

$$1-e^{i\alpha}=-2i\,e^{\frac{i\alpha}{2}}\times\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$1+e^{i\alpha}=2e^{\frac{i\alpha}{2}}\times\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Calcul du module

On a : $|1-e^{i\alpha}|=\left|-2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right|\times|i|\times\left|e^{\frac{i\alpha}{2}}\right|=2$

$|1+e^{i\alpha}|=\left|2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right|\times\left|e^{\frac{i\alpha}{2}}\right|=2$

Par conséquent,

$$\left|\frac{1-e^{i\alpha}}{1+e^{i\alpha}}\right|=1 \quad ; \quad |(1-e^{i\alpha})(1+e^{i\alpha})|=4.$$

Détermination d'un argument

$\arg(1-e^{i\alpha})=\arg\left[-2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]+\arg(i)+\arg\left(e^{\frac{i\alpha}{2}}\right)+k2\pi$ $[k\in\mathbb{Z}]$

$\arg(1+e^{i\alpha})=\arg\left[2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]+\arg\left(e^{\frac{i\alpha}{2}}\right)+k2\pi$ $[k\in\mathbb{Z}]$.

$\frac{\alpha}{2}$ est un élément de $]0\ ;\frac{\pi}{2}[$, on a :

$\arg(1-e^{i\alpha})=\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}+k\times2\pi$ $[k\in\mathbb{Z}]$

$\arg(1+e^{i\alpha})=0+\frac{\alpha}{2}+k\times2\pi$ $[k\in\mathbb{Z}]$.

Par conséquent,

$$\arg(1-e^{i\alpha})=\frac{3\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}+k\times2\pi \quad [k\in\mathbb{Z}]$$
$$\arg(1+e^{i\alpha})=\frac{\alpha}{2}+k\times2\pi \quad [k\in\mathbb{Z}]$$

x est un nombre réel différent de $k\times2\pi$ $[k\in\mathbb{Z}]$, n est un nombre entier naturel supérieur à 1.
On pose :

$$S_n=1+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx$$
$$S'_n=\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx$$

Factoriser S_n et S'_n.

Calcul de $S_n+iS'_n$

On a : $S_n+iS'_n=1+e^{ix}+e^{i2x}+\ldots+e^{inx}$

or : $e^{ix}\neq1\Leftrightarrow x\neq k2\pi$ $[k\in\mathbb{Z}]$

d'où : $S_n+iS'_n=\dfrac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}$

Pour déterminer la valeur de S_n et celle de S'_n à partir de cette égalité, il faut écrire $\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}$ sous forme algébrique.

– Une première méthode consiste à multiplier numérateur et dénominateur de ce quotient par le conjugué du dénominateur.

Ici cette méthode paraît fastidieuse !

– Une deuxième méthode consiste à factoriser directement le numérateur et le dénominateur de ce quotient puis à procéder à une simplification d'écriture.

Simplification d'écriture de $S_n+iS'_n$

On obtient :

$$S_n+iS'_n=\frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}\left(e^{-i\frac{n+1}{2}x}-e^{i\frac{n+1}{2}x}\right)}{e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{-\frac{ix}{2}}-e^{\frac{ix}{2}}\right)}$$

$$=e^{i\frac{n}{2}x}\times\frac{e^{-i\frac{n+1}{2}x}-e^{i\frac{n+1}{2}x}}{2i}\times\frac{2i}{e^{\frac{ix}{2}}-e^{-\frac{ix}{2}}}$$

$$=\left(\cos\left(\frac{nx}{2}\right)+i\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\right)\times\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Conclusion

Pour tout nombre entier naturel n supérieur à 1, pour tout nombre réel x différent de $k2\pi$ $[k\in\mathbb{Z}]$,

$$1+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=\cos\left(\frac{nx}{2}\right)\times\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx=\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\times\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Exercices

ENTRAÎNEMENT

Nombre complexe – Forme algébrique

Somme – produit

1 Écrire sous forme algébrique les nombres complexes ci-dessous :
(1) $(2-i)(3+i)$ (2) $(4+3i)(2-5i)$
(3) $3i(5-2i)$ (4) $(2+i)^2$

2 Donner la forme algébrique de chacun des nombres suivants :
(1) $z+z'$ (2) $z-z'$
(3) $4z-3z'$ (4) zz'
sachant que : $z=2-5i$ et $z'=-3+4i$.

3 Écrire sous forme algébrique chacun des nombres complexes définis ci-dessous :

$z_1=(2+i\sqrt{3})(1+i)$ $z_7=(\frac{1}{2}-i)(12+i)$

$z_2=(2-5i)^2$ $z_8=(\frac{5}{3}i-7)(1-2i)$

$z_3=(\frac{1}{2}-3i)^2$ $z_9=(i-2)^2+(3+4i)$

$z_4=(3+4i)(3-4i)$ $z_{10}=\sqrt{2}+i+2\sqrt{2}-3i)^2$

$z_5=(1-i)(5+8i)(1-i)$ $z_{11}=(1+3i)+(2-i)$

$z_6=(4+3i)3$ $z_{12}=(5-i)(7+4i)$

4 On donne $z_1=\dfrac{5-i}{3+2i}$ et $z_2=\dfrac{5+i}{3-2i}$.
Vérifier que z_1+z_2 est réel et z_1-z_2 est imaginaire pur.

Module – conjugué

5 Déterminer le module de chacun des nombres complexes définis ci-dessous.
(1) $1-3i$ (2) $3+4i$ (3) $1-7i$ (4) $5+3i$
(5) $1-5i$ (6) $3+4i$ (7) $-1+i\sqrt{2}$

6 Dans chacun des cas suivants, déterminer, puis construire, l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant :
(1) $|z-2|=|z+i|$ (2) $|iz+3|=|z+4+i|$
(3) $|\overline{z}+\frac{1}{3}i|=3$ (4) $|1+iz|=2$.

7 Pour chacun des nombres complexes suivants, déterminer le module et le conjugué.
(1) $(\sqrt{2}+i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i\sqrt{5})(\sqrt{2}+i\sqrt{5})$
(2) $\dfrac{1+i}{1-i}$ (3) $\dfrac{3-2i}{2-3i}$ (4) $\dfrac{(2-3i)(3+4i)}{(6+4i)(15-8i)}$

Inverse – Quotient

9 Écrire sous forme algébrique l'inverse de chacun des nombres complexes suivants :
$z_1=1-i$ $z_2=\sqrt{3}+2i$
$z_3=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $z_4=2-7i$

10 Écrire sous forme algébrique les nombres complexes ci-dessous :
(1) $\dfrac{1+i}{1-i}$ (2) $\dfrac{2+3i}{5+3i}(2-3i)$

11 On donne $z_1=2-3i$ et $z_2=5+i$.
Écrire sous forme algébrique les nombres complexes :
(1) $z_1-z_2^2$ (2) $\dfrac{z_1}{z_2}$ (3) $\dfrac{z_2}{z_1}$ (4) $\dfrac{z_1-1}{z_2-4i}$

12 Écrire sous forme algébrique chacun des nombres complexes donnés :

$z_1=\dfrac{8i-1}{2-3i}$ $z_2=2i-\dfrac{5}{i}$

$z_3=\left(\dfrac{1+i}{2-i}\right)^2$ $z_4=\dfrac{4-i}{2+3i}-\dfrac{i}{3+i}$

Nombre complexe et représentation géométrique

13 Le plan est muni du repère orthonormé direct (O, I, J). A est le point d'affixe z_A et OAB est un triangle isocèle de sommet O, tel que :

$$\operatorname{mes}(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})=\theta+k2\pi,\ [k\in\mathbb{Z}].$$

Faire la figure et déterminer l'affixe de B dans chacun des cas suivants :
(1) $z_A=3+2i,\ \theta=\frac{5\pi}{6}$ (2) $z_A=5,\ \theta=-\frac{7\pi}{3}$
(3) $z_A=4i-5,\ \theta=\frac{13\pi}{3}$ (4) $z_A=1-i,\ \theta=\frac{7\pi}{2}$

14 On considère les points A, B et C d'affixes définies ci-dessous :
$z_A=1+i,\ z_B=2-i$ et $z_C=2-2i$.
Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

15 On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(1\,;-3)$, $(4\,;5)$ et $(-3\,;2)$.
1. Quelles sont les affixes des points A, B et C et des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. On définit les points D et E par :
$$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\quad\text{et}\quad 3\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}.$$
Déterminer l'affixe de chacun des points D et E.
3. Démontrer que A, D et E sont alignés.

16 1. Dans le plan complexe, placer les points A, B, C et D d'affixes définies ci-dessous :
$z_A=\frac{3}{2}i,\ z_B=2+\frac{1}{2}i,\ z_C=1-\frac{3}{2}i,\ z_D=-1-\frac{1}{2}i.$
2. Déterminer la nature du quadrilatère ABCD.

17 Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z pour que :
(1) $z-\frac{9}{z}\in\mathbb{R}$ (2) $\dfrac{z+4}{z-i}+2\in\mathbb{R}$
(3) $\dfrac{z+2}{z-5}-3\in\mathbb{R}$ (4) $z+\overline{z}-1=|z|$
(5) $z+\overline{z}=|z|^2-1$ (6) $|z|^2+z+\overline{z}=8$.
(7) Les points d'affixes i, z et iz sont alignés.
(8) $|z-2|=|4-3i|$ (9) $\dfrac{|z-12|}{|z-8i|}=\dfrac{5}{3}$

Forme trigonométrique – notation exponentielle

Argument

18 Déterminer un argument de chacun des nombres complexes définis par :

$z_1 = 1 + i$ $\qquad z_2 = i$

$z_3 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$ $\qquad z_4 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_5 = (2 - 2i)(1 - i)$ $\qquad z_6 = i(\sqrt{6} - i\sqrt{2})$

19 Déterminer un argument de chacun des nombres complexes définis par :

$z_1 = \frac{\sqrt{3} + i}{2i}$ $\qquad z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{1 + i}$

$z_3 = (-1 - i)^4$ $\qquad z_4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{1 + i}\right)^4$

20 a est un nombre réel tel que $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$.
On donne le nombre complexe X défini par :

$$X = \sin 2a - 2i\sin^2 a.$$

1. Déterminer le module de X.
2. Déterminer un argument de X si possible.

Forme trigonométrique

21 Écrire sous la forme trigonométrique les nombres complexes suivants et représenter dans le plan complexe les points images.

(1) $-4 + 4i$ $\quad$ (2) $1 - i\sqrt{3}$ $\quad$ (3) $-3 - i\sqrt{3}$
(4) $-7i - 10$ $\quad$ (5) $1 + i$ $\quad$ (6) $2 - \sqrt{3} - i$
(7) $(1 - i)(\sqrt{3} + i)$ $\quad$ (8) $(\sqrt{3} + i)^3$

22 On donne $z = (1 + i)(1 - i\sqrt{3})$. Calculer z.
Écrire sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants :

(1) $1 + \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3})$ $\qquad$ (2) $\frac{1 - i\sqrt{3}}{1 - i}$

23 On donne $z = 1 + i\sqrt{3}$. Calculer z^{10}.

24 Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_1, z_2, z définie par :

$z_1 = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2}$; $z_2 = 1 - i$; $z = \frac{z_1}{z_2}$.

En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.

25 On pose : $a = \sqrt{2}(1 + i)$, $b = \sqrt{3} + i$, $c = a^2 b$.
1. Déterminer le module et un argument pour chacun des nombres complexes a et b.
En déduire le module et un argument de c.
2. Déduire des questions précédentes les valeurs de $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$.

D'après BAC D Maur 98

26 On donne les deux nombres complexes définis ci-dessous :

$$z_1 = -1 - i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

1. Écrire $\frac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique.
2. En déduire le module et un argument de $\frac{z_1}{z_2}$.
3. Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$.

Forme exponentielle

27 Écrire sous forme exponentielle chacun des nombres complexes définis ci-dessous :

$z_1 = 5 - 5i$ $\qquad z_2 = 2 + 2i\sqrt{3}$

$z_3 = (\sqrt{3} + i)(-1 + \sqrt{3})$ $\qquad z_4 = (-1 - i)i$

28 On donne $z = \sqrt{3} + i$.
Écrire z sous forme exponentielle.
En déduire $z^{1\,996}$.

29 On considère les nombres complexes z_1, z_2 et z_3 définis ci-dessous

$$z_1 = -\sqrt{2}, \quad z_2 = 1 + i \quad \text{et} \quad z_3 = 1 - i.$$

1. Déterminer un nombre réel θ tel que $z_2 = e^{i\theta} z_1$.
Interpréter géométriquement ce résultat.
2. *a)* Calculer $z_2 - z_1$ et $z_3 - z_1$ en fonction de z_1 et $e^{i\theta}$.
b) Donner le module et un argument du nombre réel X défini par : $X = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$.

Nombre complexe et trigonométrie

30 Écrire $f(x)$ sous forme de produit dans chacun des cas suivants :

(1) $f(x) = \sin^2 2x - \sin^2 3x$
(2) $f(x) = \cos^2(x - \frac{\pi}{4}) - \cos^2(2x + \pi)$
(3) $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 4x$.
(4) $f(x) = 1 - \cos 3x + 2\sin\frac{3x}{2}$
(5) $f(x) = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x$
(6) $f(x) = \sin x - \sin 2x + \sin 3x - \sin 4x$.

31 Linéariser chacune des expressions suivantes :

(1) $\cos^4 x$ $\quad$ (2) $\sin^5 x$ $\quad$ (3) $\cos^3 2x$
(4) $\sin^3\frac{x}{2}$ $\quad$ (5) $\cos^2 x + \sin^3 x$ $\quad$ (6) $\cos^3 x \sin^3 x$

32 Développer : $(\cos x + i\sin x)^3$.
En déduire les expressions de $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

33 Calculer en fonction de $\sin x$ et $\cos x$ pour tout nombre réel x :

(1) $\cos 4x$ $\quad$ (2) $\sin 7x$ $\quad$ (3) $\sin 4x$ $\quad$ (4) $\cos 6x$

Résolution d'équations

34 Quel est le nombre complexe dont le carré est égal à son inverse ?

35 **1.** Vérifier que $(1 + i)^8$ est un nombre réel.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(1) $2iz - 3 = z + i$
(2) $3z(z + i) = -iz$
(3) $3z - 5 + 2iz = 2i - 3z + 4iz$
(4) $-i(1 + 5i)z + (z - 1)(i - 2) - 2 = 3z - i$

36 Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

(1) $-z^2 + 4z - 53 = 0$ $\qquad$ (2) $z^2 - (1 + \sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$

37 Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, les équations suivantes d'inconnue z :

(1) $2\bar{z} = i - 4$ $\qquad$ (2) $\bar{z} - 2i = 2 - 3i$
(3) $-2z + i\bar{z} = 3$ $\qquad$ (4) $(3z + i)(\bar{z} - 1 + 2i) = 0$

38 On considère l'équation :

(E) $(6+3i)z^2+(21+19i)z-26(1+i)=0$.

Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution réelle.
Résoudre l'équation (E).

39 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

(E) $z^3-4iz^2-(6+i)z+3i-1=0$.

Démontrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure. Soit z_0 cette solution.
Résoudre l'équation (E).

40 a est un élément de $[0\,;\pi]$.
1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

(E) $z^2-2z\sin^2 a+\sin^2 a=0$.

2. Préciser le module et un argument (lorsqu'il en existe) des solutions de (E).

41 1. Déterminer, sous forme algébrique, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : (E) $z^2+z+1=0$.
2. On note j la solution de (E) dont la partie imaginaire est positive. Vérifier que : $j^2=-j-1$.
3. Vérifier que $j^2=\overline{j}=\frac{1}{j}$ et que $j^3=1$.

42 a un réel appartenant à $[-\pi\,;\pi]$.
1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-4z\sin a+4=0$.
Désignons par z_1 et z_2 les deux solutions de cette équation. Calculer le module et un argument de chacune d'elles.
2. Calculer : $S=\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}$ et $S'=z_1^4+z_2^4$.

Bac D, Poitiers 1981

43 On considère l'équation :

(E) $z^3+9iz^2+2(6i-11)z-3(4i+12)=0$.

1. Démonter que l'équation (E) admet une solution réelle z_1 et une solution imaginaire pure z_2.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) (on notera z_3 la troisième solution).
3. Démontrer que les points images des solutions de l'équation (E) sont alignés.

44 On donne les nombres complexes z et u définis par :

$z=-8\sqrt{3}+8i$

$u=(\sqrt{6}-\sqrt{2})+i(\sqrt{6}+\sqrt{2})$.

1. Écrire le nombre complexe z sous forme trigonométrique.
Déterminer les racines carrées de z sous la forme trigonométrique.
2. Calculer u^2.
Utiliser ce résultat pour exprimer les racines carrées de z sous leur forme algébrique.
En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et de $\sin\frac{5\pi}{12}$.

45 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$-\left(\frac{z-3i}{z+2}\right)^2+6\left(\frac{z-3i}{z+2}\right)-13=0.$$

(On posera $Z=\frac{z-3i}{z+2}$ et on résoudra $-Z^2+6Z-13=0$.)

46 Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3-2\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2+\left(\frac{z-1}{z+1}\right)-2=0.$$

47 On considère l'équation :

(E) $z^4-\sqrt{2}z^3-4\sqrt{2}z=16$.

1. Déterminer deux nombres réels a et b tels que pour tout nombre complexe z,

$z^4-\sqrt{2}z^3-4\sqrt{2}z-16=(z^2+4)(z^2+az+b)$.

2. En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E).

48 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

(1) $\begin{cases}2z_1-z_2=i\\-2z_1+3iz_2=17\end{cases}$ (2) $\begin{cases}iz_1-\frac{\sqrt{3}}{2}z_2=-1\\2z_1+z_2=2\sqrt{3}\end{cases}$

49 Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacun des systèmes suivants :

(1) $\begin{cases}z_1z_2=17\\z_1+z_2=2\end{cases}$ (3) $\begin{cases}2z_1z_2=3\\\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\end{cases}$

(2) $\begin{cases}z_1+z_2=1\\z_1z_2=\frac{37}{4}\end{cases}$

PROBLÈMES

50 On considère une suite géométrique de nombres réels dont le premier terme est 1 et la raison est q $(q\neq 1)$.
1. Calculer la somme $1+q+q^2+q^3+q^4$.
2. *a)* z étant un nombre complexe différent de 1, calculer la somme $Z=1+z+z^2+z^3+z^4$.
b) On suppose dans cette question que :

$$z=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}.$$

Déduire les valeurs de :

$X=\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}$

et

$Y=\sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{4\pi}{5}+\sin\frac{6\pi}{5}+\sin\frac{8\pi}{5}$.

51 Calculer : $S=1+i+i^2+\ldots+i^{1\,999}$
et $S'=1-i+i^2+\ldots+(-i)^{1\,999}$.

52 On considère le nombre complexe :

$z=(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)$.

1. Déterminer le module et un argument de z^2.
En déduire le module et un argument de z.
2. Déduire de ce qui précède les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

(E) $(\sqrt{3}+1)\cos x+(\sqrt{3}-1)\sin x=\sqrt{2}$.

Placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

53 On considère le nombre complexe z défini par :

$$z=\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}.$$

Calculer de deux façons différentes z.
En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

54 1. On donne les points B et C d'affixes définies ci-dessous.

$z_B=2+2i\sqrt{3}$ et $z_C=2-2i\sqrt{3}$.

Vérifier que B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 4.
2. On considère le point A d'affixe définie par :

$$z_A=\frac{z_C-z_B}{2}.$$

Calculer z_A.
3. Déterminer la nature du triangle ABC.

55 z est un nombre complexe différent de 1.
1. Calculer le nombre complexe Z défini par :
$$Z = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4.$$
2. On suppose maintenant que :
$$z = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}.$$
Déduire les valeurs des nombres ci-dessous :
$$X = \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5}.$$
$$Y = \sin\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{4\pi}{5} + \sin\frac{6\pi}{5} + \sin\frac{8\pi}{5}.$$

56 Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes ci-dessous :
a) $(1 + i\sqrt{3})^{10}$ *b)* $(1 - i)^{12}(\sqrt{3} - 3i)$.
(3) $\left(\frac{3 - 2i}{-2 - 3i}\right)^{12}$ (4) $\left(\frac{\sqrt{3} - i}{1 + i}\right)^{20}$

57 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2\bar{z} = 0$.
2. Le plan étant rapporté au repère orthonormé (O, I, J), O, A, B, C sont les images des solutions obtenues.
Représenter O, A, B, C et montrer que A, B, C sont situés sur un cercle.

D'après Bac

58 On considère le nombre complexe a défini par :
$$a = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}(1 + i).$$
1. Déterminer le module du nombre complexe $a - 1$.
2. On considère la suite (z) définie par :
$z_0 = 1$, et pour tout nombre entier n strictement supérieur à 0, $z_n = a^n$.
On désigne par M_n le point d'affixe z_n.
Placer dans le plan complexe les points M_0, M_1, M_2, M_3, M4, M_5, M_6, M_7 (unité : 5 cm).
3. Pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1, on considère la suite (u) définie par :
$$u_n = |z_n - z_{n-1}|.$$
Vérifier que : $u_n = |a|^{n-1}|a - 1|$.
Démontrer que la suite (u) de terme général u_n est une suite géométrique dont on précisera le premier terme u_1 et la raison.
4. *a)* Calculer la somme $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ notée S_n.

59 1. Vérifier que $(1 + i)^2 = 2i$.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = 2i$.
2. Déterminer toutes les suites géométriques (u) telles que : $u_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $u_4 = -\sqrt{3} + i$.
On considère celle de ces suites dont la raison a une partie réelle positive. Calculer u_{19} donner son module, un arguments et sa forme algébrique.

60 1. Linéariser : $\sin^2 3\theta \cos^2\theta$.
2. Calculer : $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 3\theta \cos^2\theta \, d\theta$.

D'après Bac

61 1. *a)* Résoudre dans C l'équation :
$$z^2 - 2z + 4 = 0.$$
On désigne par z_1 la solution de partie imaginaire positive et par z_2 l'autre solution.
b) Donner un argument et le module de chacune des solutions z_1 et z_2, puis écrire ces deux nombres sous forme algébrique.
2. *a)* Placer dans le plan complexe les points A, B, A' et B' d'affixes respectives :
$$1 + i\sqrt{3},\quad 1 - i\sqrt{3},\quad -2 + 2i\sqrt{3} \quad\text{et}\quad -2 - 2i\sqrt{3}.$$
b) Déterminer la nature du quadrilatère AA'B'B.
c) Montrer que le triangle AA'B' est rectangle et qu'il en est de même du triangle BB'A'.

62 1. Le polynôme P est tel que : pour tout z,
$$P(z) = z^3 + (-9 + 4\sqrt{3})z^2 + (43 - 24\sqrt{3})z - 75 + 36\sqrt{3}.$$
a) Vérifier que : $P(3) = 0$.
b) Déterminer les nombres réels α et β tels que :
pour tout z de $\mathbb{C}$: $P(z) = (z - 3)(z^2 + \alpha z + \beta)$.
c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
2. On désigne par U, V et W les points du plan complexe d'affixes définies respectivement par :
$$U = 3 - 2\sqrt{3} + 2i,\quad V = 3 - 2\sqrt{3} - 2i,\quad W = 3.$$
a) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\frac{V - W}{U - W}$.
b) En déduire la nature du triangle UVW.

D'après Bac

63 On considère la fonction polynôme P de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :
$$P(z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 4z + 8.$$
1. Comparer $P(\bar{z})$ et $\overline{P(z)}$, $\bar{z}$ étant le conjugué de z et $\overline{P(z)}$ le conjugué de $P(z)$.
Calculer $P(i)$.
En déduire une, puis deux solutions de l'équation :
(E) $P(z) = 0$.
2. Mettre $P(z)$ sous la forme d'un produit de deux polynômes du second degré à coefficient réels.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
Calculer la somme et le produit des solutions de l'équation (E).

D'après Bac

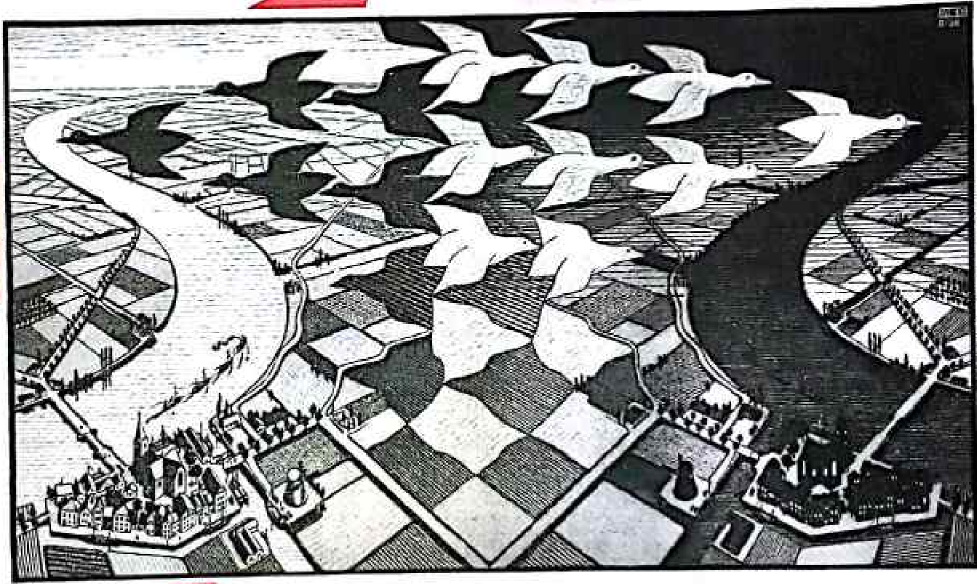
64 Déterminer les nombres complexes z tels que les points A, A' et A'' d'affixes respectives z, $\frac{1}{z}$ et $z - 1$ soient sur un même cercle de centre O.

65 z est un nombre complexe différent de 1. On considère le nombre complexe Z défini par :
$$Z = \frac{z - 2}{2z - 1}.$$
1. *a)* Déterminer la partie réelle X et la partie imaginaire Y du nombre complexe Z en fonction de la partie réelle x et de et la partie imaginaire y du nombre complexe z.
b) Dans le plan complexe, construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que :
Z soit un nombre réel ;
Z soit un nombre imaginaire pur.
2. *a)* Démontrer que, si le module de z est égal à 1, alors les modules des nombres $z - 2$ et $2z - 1$ sont égaux.
b) Dans la suite on suppose que le module de z est égal à 1. θ et φ désignent argument respectifs de z et Z.
Calculer $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

11 Nombres complexes et géométrie

Ce beau tableau d'Escher présente l'envol d'oiseaux blancs et d'oiseaux noirs issus, par des transformations successives, de carrés blancs et de carrés noirs.

Ces transformations du plan peuvent-elles être associées à des bijections dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes ?



Day and night, par **Escher.**

SOMMAIRE

1 Nombres complexes et configurations du plan

Le plan est muni du repère orthonormé direct (O, I, J)

1.1. Vecteurs du plan – Angle orienté de vecteurs

Vecteurs du plan

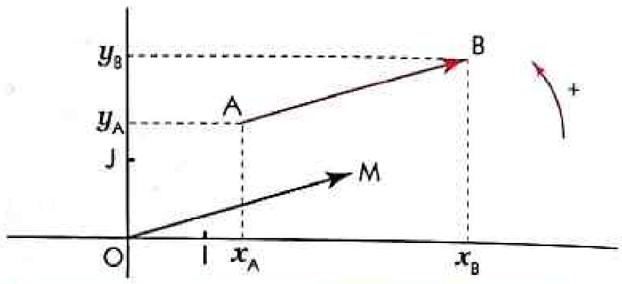
- A et B sont deux points du plan.

Les points A et B sont repérés par :
– leurs coordonnées : $(x_A\,;y_A)\,;(x_B\,;y_B)$
– leurs affixes : $z_A\,;z_B$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est repéré par :
– ses coordonnées : $(x_B - x_A\,;y_B - y_A)$
– son affixe : $z_{\overrightarrow{AB}}$

de plus on a : $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_{\overrightarrow{AB}}|$; donc $\boxed{z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A\,;\ AB = |z_B - z_A|}$

- A et B étant deux points du plan, il existe un unique point M tel que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$



donc : $\widehat{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{AB})} = \widehat{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM})}$

$\text{mes}\widehat{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{AB})} = \text{mes}\widehat{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM})} + k2\pi\ \ [k \in \mathbb{Z}]$

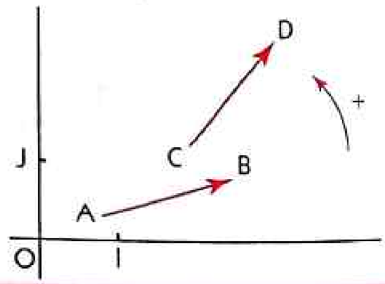
$= \arg(z_M) + k2\pi\ \ [k \in \mathbb{Z}]$

or : $z_M = z_{\overrightarrow{OM}} = z_{\overrightarrow{AB}}$

donc : $\boxed{\text{mes}\widehat{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{AB})} = \arg(z_{\overrightarrow{AB}}) + k2\pi\ \ [k \in \mathbb{Z}]}$ $\boxed{\text{mes}\widehat{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{AB})} = \arg(z_B - z_A) + k2\pi\ \ [k \in \mathbb{Z}]}$

Angle orienté de vecteurs

A, B, C, D sont quatre points du plan.



On a : $\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})} = \widehat{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{CD})} - \widehat{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{AB})}$

donc : $\text{mes}\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})} = \text{mes}\widehat{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{CD})} - \text{mes}\widehat{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{AB})} + k2\pi\ \ [k \in \mathbb{Z}]$

$= \arg(z_{\overrightarrow{CD}}) - \arg(z_{\overrightarrow{AB}}) + k2\pi\ \ [k \in \mathbb{Z}]$

donc : $\boxed{\text{mes}\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})} = \arg\dfrac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} + k2\pi\ \ [k \in \mathbb{Z}]}$ $\boxed{\text{mes}\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})} = \arg\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} + k2\pi\ \ [k \in \mathbb{Z}]}$

Exemple

A, B, C, D étant des points d'affixes respectives : $\sqrt{3} + 2i$; $\sqrt{3} + i$; $-2i$; $1 - i$, calculons $\text{mes}\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})}$.

On a : $\dfrac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} = \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \dfrac{1+i}{-i} = -1 + i$

donc : $\text{mes}\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})} = \arg(1 - i) + k2\pi\ \ [k \in \mathbb{Z}]$

$= -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi\ \ [k \in \mathbb{Z}]$.

1.2. Quelques configurations de base

Égalité de vecteurs

A, B, C, D étant des points du plan,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \quad \Leftrightarrow \quad z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{CD}}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \quad \Leftrightarrow \quad z_B - z_A = z_D - z_C$$

Exemple

A, B, C, D étant des points d'affixes respectives $-\sqrt{3} + 3i$; $2i$; $-i$; $\sqrt{3} - 2i$.
Démontrons que ABCD est un parallélogramme.

On a : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 2i - (-\sqrt{3} + 3i) = \sqrt{3} - i$

$z_{\overrightarrow{CD}} = z_D - z_C = (\sqrt{3} - 2i) - (-i) = \sqrt{3} - i$

donc : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{CD}}$

d'où : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Égalité de distances

A, B, C, D étant des points du plan,

$$AB = CD \quad \Leftrightarrow \quad |z_{\overrightarrow{AB}}| = |z_{\overrightarrow{CD}}|$$

$$AB = CD \quad \Leftrightarrow \quad |z_B - z_A| = |z_D - z_C|$$

Exemple

A, B, C étant des points d'affixes respectives $-i$; $1+i$; $1-3i$, démontrons que le triangle ABC est isocèle en A.

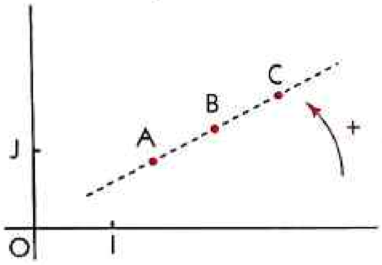
On a : $AB = |z_B - z_A| = |1 + 2i| = \sqrt{5}$

$AC = |z_C - z_A| = |1 - 2i| = \sqrt{5}$

donc : $|z_B - z_A| = |z_C - z_A|$

d'où : AB = CD.

Alignement de trois points



$$\left[\begin{array}{c}\text{Trois points}\\ \text{distincts}\\ \text{A, B, C}\\ \text{sont alignés}\end{array}\right] \Leftrightarrow \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = k\pi \ [k \in \mathbb{Z}]$$

$$\Leftrightarrow \arg \frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} = k\pi \ [k \in \mathbb{Z}]$$

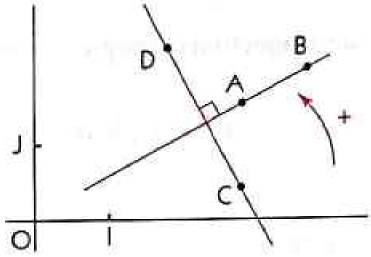
$$\left[\begin{array}{c}\text{Trois points distincts}\\ \text{A, B, C sont alignés}\end{array}\right] \Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$$

Exemple

A, B, C étant des points d'affixes respectives $-1-i$; $2+3i$; $-10-13i$, démontrons que les points A, B, C sont alignés.

On a : $\dfrac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{-9-12i}{3+4i} = -3$

Orthogonalité de deux droites



$$(AB) \perp (CD) \quad \Leftrightarrow \quad \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}) = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ [k \in \mathbb{Z}]$$

$$\Leftrightarrow \arg \frac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ [k \in \mathbb{Z}]$$

$$(AB) \perp (CD) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$$

Exemple

A, B, C étant des points d'affixes respectives $-1-i$; $4+i$; $-2+1{,}5i$, démontrons que (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

On a : $\dfrac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{-1+2{,}5i}{5+2i} = \dfrac{14{,}5}{29}\,i$

Exercices

1.a Le plan est muni du repère (O, I, J). On considère deux points A et B d'affixes respectives $1 + i$ et $-1 + i\sqrt{3}$.
Déterminer L'ensemble des points M d'affixe z_M tel que les points A, B, M soient alignés.

1.b Le plan est muni du repère (O, I, J). On considère deux points A et B d'affixes respectives $1 + 2i$ et $4 + 5i$.
Déterminer l'affixe z_C du point C tel que le triangle ABC soit rectangle isocèle en A.

1.c A, B, C étant des points d'affixes respectives $-\sqrt{3} + i$; $-\sqrt{3} - i$; $2i$, démontrons que A,B,C sont sur le cercle de centre O et de rayon 2.

2 Nombres complexes et transformations du plan

Le plan est muni du repère orthonormé direct (O, I, J).

2.1. Transformations élémentaires du plan

Transformations du plan et bijection de $\mathbb{C}$

On sait que l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{C}$ qui à un point fait correspondre son affixe est une bijection.
On en déduit les schémas ci-contre et le vocabulaire suivant.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P} & \mathcal{P} \\ M(z) \arrow[r, "F"] \arrow[d, leftrightarrow] & M'(z') \arrow[d, leftrightarrow] \\ z \arrow[r, "f"] & z' \\ \mathbb{C} & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Vocabulaire

On dit que la transformation $F : \begin{array}{l} \mathcal{P} \to \mathcal{P} \\ M(z) \mapsto M'(z') \end{array}$

a pour **bijections complexe associée** f : $\begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z' \end{array}$

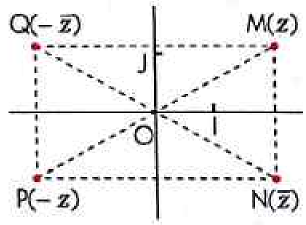
ou

a pour **écriture complexe** $z' = f(z)$

Transformations élémentaires du plan

Symétries

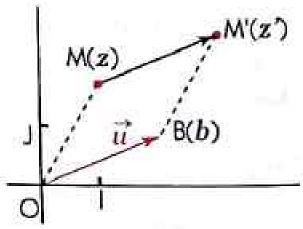
Par simple lecture du graphique ci-contre, M et M' sont des points d'affixes respectives z et z'sur lequel on obtient les résultats suivants :



La symétrie d'axe (OI) a pour écriture complexe : $z' = \bar{z}$
La symétrie de centre O a pour écriture complexe : $z' = -z$
La symétrie d'axe (OJ) a pour écriture complexe : $z' = -\bar{z}$

Translation

$t_{\vec{u}}$ est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b.
M et M' sont des points du plan d'affixes respectives z et z'.
On a : $M' = t_{\vec{u}}(M) \iff \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$,



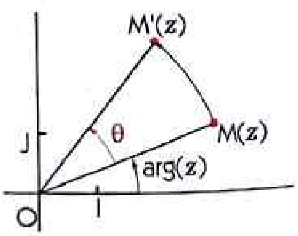
La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b a pour écriture complexe : $z' = z + b$

Exemples

La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $-2 + i$ a pour écriture complexe : $z' = z - 2 + i$.
$z' = z + 3 - 2i$ est l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{v}$ d'affixe $3 - 2i$.

Rotation de centre O

$r_{(O,\theta)}$ est la rotation de centre O et d'angle orienté $\hat{\theta}$.
M et M' sont des points du plan d'affixes respectives z et z'.
– On a : $r_{(O,\theta)}(O) = O$.
– Supposons $M \neq O$ ($z \neq 0$)
On a : $M' = r_{(O,\theta)}(M) \iff OM' = OM$ *et* $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) = \theta + k2\pi \; [k \in \mathbb{Z}]$



d'où : $M' = r_{(O,\theta)}(M) \Leftrightarrow |z| = |z'|$ *et* $\arg(z') - \arg(z) = \theta + k2\pi \; [k \in \mathbb{Z}]$

$\Leftrightarrow |z| = |z'|$ *et* $\arg(z') = \arg(z) + \theta + k2\pi \; [k \in \mathbb{Z}]$

$\Leftrightarrow z' = (\cos\theta + i\sin\theta)z$

La rotation de centre O et d'angle orienté $\widehat{\theta}$ a pour écriture complexe $z' = e^{i\theta}z$.

Exemples

La rotation de centre O et d'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{3}$ a pour écriture complexe :

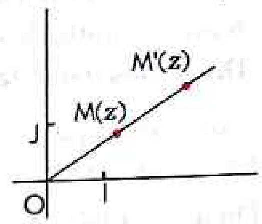
$$z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z \quad \text{ou} \quad z' = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)z .$$

Homothétie de centre O

$h_{(O,\alpha)}$ est l'homothétie de centre O et de rapport α.

M et M' sont des points du plan d'affixes respectives z et z'.

On a : $M' = h_{(O,\alpha)}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = \alpha\overrightarrow{OM}$



L'homothétie de centre O et de rapport α a pour notation complexe $z' = \alpha z$.

Exemples

- L'homothétie de centre O et de rapport 0,5 a pour écriture complexe : $z' = 0{,}5z$.
- $z' = -2z$ est l'écriture complexe de l'homothétie de centre O et de rapport -2.

Tableau récapitulatif

Transformation du plan	Caractérisation géométrique / Écriture complexe	Bijection complexe associée
Translation de vecteur $\vec{u}(b)$	$M' = t_{\vec{u}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = \vec{u}$ $\boxed{M' = t_{\vec{u}}(M) \Leftrightarrow z' = z + b}$	$b \in \mathbb{C}$
Rotation de centre O et d'angle orienté $\widehat{\theta}$	– On a : $r_{(O,\theta)}(O) = O$ – Pour $M \neq O$ $M' = r_{(O,\theta)}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} OM' = OM \\ \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) = \theta + k2\pi \; [k \in \mathbb{Z}] \end{cases}$ $\boxed{M' = r_{(O,\theta)}(M) \Leftrightarrow z' = e^{i\theta}z}$	$\theta \in \mathbb{R}$
Homothétie de centre O et de rapport α	$M' = h_{(O,\alpha)}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = \alpha\overrightarrow{OM}$ $\boxed{M' = h_{(O,\alpha)}(M) \Leftrightarrow z' = \alpha z}$	$\alpha \in \mathbb{R}$

Exercices

2.a Le plan est muni du repère (O, I, J).

On donne un vecteur $\vec{u}$ d'affixe $1 + i$, A est un point d'affixe $2 - 3i$ et M un point d'affixe z.

Construire les points I', J', A' et M' images respectives des points I, J, A et M par la translation de vecteur $\vec{u}$.

Déterminer par le calcul l'affixe de chacun des points I', J', A' et M'.

2.b Le plan est muni du repère (O, I, J).

On donne un point A d'affixe $(-3 - i)$ et M un point d'affixe z.

Construire les points I', J', A' et M' images respectives des points I, J, A et M par la rotation r de centre O et d'angle orienté de mesure principale $\frac{\pi}{3}$.

Déterminer par le calcul l'affixe de chacun des points I', J', A' et M'.

2.2. Transformations usuelles du plan

Composées de transformations du plan et bijections complexes

On démontre et nous admettons la propriété suivante :

Propriété

Si f et g sont des bijections complexes associées respectivement aux transformations du plan F et G, alors $f \circ g$ est la bijection complexe associée à la transformation du plan $F \circ G$.

Exemple 1

r est une rotation d'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{4}$ et de centre le point A d'affixe $2i$,
h une homothétie de rapport -2 et de centre le point B d'affixe $-i$.
Désignons par F la transformation $h \circ r$ du plan. Déterminons la bijection complexe f associée à F.

• Désignons par f_1, f_2 et f les bijections complexes associées respectivement à r, h et F.
Soit z un nombre complexe.

On a : $f_1(z) = e^{i\frac{\pi}{4}} z + b_1$ et $f_1(2i) = 2i$ (1)

$f_2(z) = -2z + b_2$ et $f_2(-i) = -i$ (2)

$f = f_2 \circ f_1$ (3)

Des égalités (1) on obtient : $b_1 = \sqrt{2} + (2 - \sqrt{2})i$;

des égalités (2) on obtient : $b_2 = -3i$;

et de l'égalité (3) on obtient : $f(z) = -2e^{i\frac{\pi}{4}} z - 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2} - 7)i$.

• Conclusion
La bijection complexe f associée à la composée d'une homothétie et d'une rotation est définie par :

$$f(z) = az + b \quad [a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b \in \mathbb{C}].$$

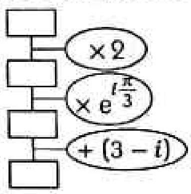
Exemple 2

Déterminons la transformation F du plan *associée* à la bijection complexe f définie par :

$$f(z) = (1 + i\sqrt{3})z + 3 - i.$$

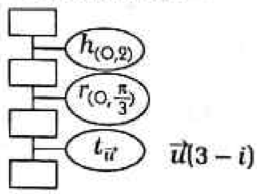
• La bijection complexe f est définie par : $f(z) = 2e^{i\frac{\pi}{3}} z + 3 - i$.

Schéma de calcul de $f(z)$



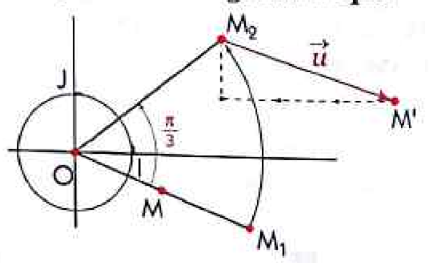
$f(z) = 2e^{i\frac{\pi}{3}} z + 3 - i$

Schéma de F



$F = t_{\vec{u}} \circ r_{(O,\frac{\pi}{3})} \circ h_{(O,2)}$, avec $\vec{u}(3 - i)$

Représentation géométrique



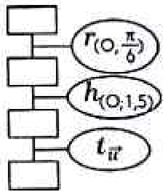
• Conclusion
La transformation F du plan associée à la bijection complexe f définie par $f(z) = az + b$ est la composée d'une translation, d'une rotation de centre O et d'une homothétie de centre O.

Exemple 3

$r_{(O,\frac{\pi}{6})}$ est une rotation de centre O et d'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{6}$; $h_{(O;1,5)}$ est une homothétie de centre O et de rapport 1,5 ; $t_{\vec{u}}$ est une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $-1 + i$.
Déterminons la bijection complexe f associée à $t_{\vec{u}} \circ h_{(O;1,5)} \circ r_{(O,\frac{\pi}{6})}$.

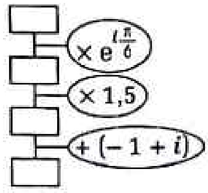
On désigne par F la transformation du plan $t_{\vec{u}} \circ h_{(O;1,5)} \circ r_{(O,\frac{\pi}{6})}$.

Schéma de F



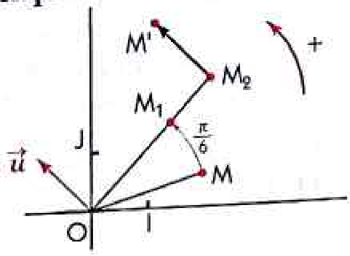
$F = t_{\vec{u}} \circ h_{(O;1,5)} \circ r_{(O,\frac{\pi}{6})}$

Schéma de calcul de $f(z)$



$f(z) = 1{,}5e^{i\frac{\pi}{6}} z - 1 + i$

Représentation géométrique



La bijection complexe f associée à $t_{\vec{u}} \circ h_{(O;1,5)} \circ r_{(O,\frac{\pi}{6})}$ est de la forme $f(z) = az + b$, $[a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}]$.

Rotations de centre quelconque

Bijection complexe associée à une rotation de centre quelconque

θ étant un nombre réel et ω un nombre complexe, pour déterminer la bijection complexe f associée à une rotation d'angle orienté de mesure et de centre le point Ω d'affixe ω, on peut traduire à l'aide de bijections complexes la décomposition de cette rotation.

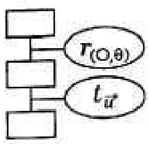
On sait que toute rotation d'angle orienté $\hat{\theta}$ est la composée d'une translation et d'une rotation de centre O et d'angle orienté $\hat{\theta}$ (et réciproquement), d'où la proposition suivante :

Propriété

θ est un nombre réel et ω un nombre complexe. La bijection complexe f associée à la rotation d'angle orienté $\hat{\theta}$ et de centre le point Ω d'affixe ω est de la forme :

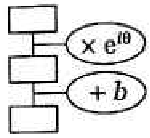
$$f : z \mapsto e^{i\theta} z + b, \text{ avec } f(\omega) = \omega.$$

Décomposition de $r_{(\omega,\theta)}$



$r_{(\omega,\theta)} = t_{\vec{u}} \circ r_{(O,\theta)} = r_{(O,\theta)} \circ t_{\vec{u}}$

Schéma de calcul de $f(z)$



$f(z) = e^{i\theta} z + b$, avec $f(\omega) = \omega$

Exemples

Déterminons la bijection complexe f associée à la rotation r d'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{6}$ et de centre le point Ω d'affixe $1 - i$.

La bijection complexe f associée à $r_{(\Omega,\frac{\pi}{6})}$ est définie par :

$$f(z) = e^{i\frac{\pi}{6}} z + b \quad \text{avec} \quad f(1-i) = 1 - i$$

d'où : $f(1-i) = e^{i\frac{\pi}{6}}(1-i) + b = 1 - i$

$$b = (1-i)(1 - e^{i\frac{\pi}{6}})$$

donc : $f(z) = e^{i\frac{\pi}{6}} z + \frac{1-\sqrt{3}}{2} - \frac{3-\sqrt{3}}{2} i$

$$f(z) = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)z + \frac{1-\sqrt{3}}{2} - \frac{3-\sqrt{3}}{2} i$$

Déterminons la transformation F du plan associée à la bijection complexe f définie par :

$$f(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)z - i.$$

On peut encore écrire : $f(z) = e^{-i\frac{\pi}{4}} z - i$

F est une rotation d'angle orienté de mesure $-\frac{\pi}{4}$.

Désignons son centre par le point Ω d'affixe ω.

On a : $F(\Omega) = \Omega \iff f(\omega) = \omega$

$$\iff \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\omega - i = \omega$$

$$\iff \omega = \frac{-\sqrt{2} + (\sqrt{2} - 2)i}{2(2 - \sqrt{2})}$$

F est la rotation d'angle orienté de mesure $-\frac{\pi}{4}$ et de centre le point d'affixe $\frac{-\sqrt{2} + (\sqrt{2} - 2)i}{2(2 - \sqrt{2})}$.

Homothétie de centre quelconque

Bijection complexe associée à une homothétie de centre quelconque

a étant un nombre réel et w un nombre complexe, pour déterminer la bijection complexe f associée à une homothétie de rapport a et de centre le point Ω d'affixe ω, on peut traduire à l'aide de bijections complexes la décomposition de cette homothétie.

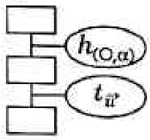
On sait que toute homothétie de rapport a est la composée d'une translation et d'une homothétie de centre O et de rapport a (et réciproquement), d'où la propriété suivante :

Propriété

α est un nombre réel et ω un nombre complexe. La bijection complexe f associée à l'homothétie de rapport α et de centre le point Ω d'affixe ω est de la forme :

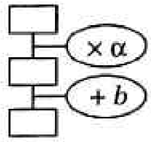
$$f : z \mapsto \alpha z + b, \quad \text{avec } f(\omega) = \omega.$$

Décomposition de $h_{(\Omega,\alpha)}$



$$h_{(\Omega,\alpha)} = t_{\vec{u}} \circ h_{(O,\alpha)} = h_{(O,\alpha)} \circ t_{\vec{u}}$$

Schéma de calcul de $f(z)$



$$f(z) = \alpha z + b, \quad \text{avec } f(\omega) = \omega$$

Exemples

Déterminons la bijection complexe f associée à l'homothétie h de rapport -3 et de centre le point Ω d'affixe $2 + i$.

La bijection complexe f associée à $h_{(\Omega,-3)}$ est définie par :

$$f(z) = -3z + b, \text{ avec } f(2 + i) = 2 + i$$

d'où : $-3(2 + i) + b = 2 + i$

$$b = 4(2 + i)$$

donc : $f(z) = -3z + 4(2 + i)$

Déterminons la transformation F du plan associée à la bijection complexe f définie par :

$$f(z) = 2z - 3 + i.$$

F est l'homothétie de rapport 2.

Désignons son centre par le point Ω d'affixe ω.

On a : $F(\Omega) = \Omega \Leftrightarrow f(\omega) = \omega$

$\Leftrightarrow 2\omega - 3 + i = \omega$

$\Leftrightarrow \omega = 3 - i$

F est l'homothétie de rapport 2 et de centre le point Ω d'affixe $3 - i$.

Remarque

Le TP p. 239 présente une méthode qui permet de déterminer l'écriture complexe d'une rotation et d'une homothétie à partir des caractérisations géométriques de ces transformations du plan.

Exercices

2.c On désigne par F la transformation du plan $t_{\vec{u}} \circ h_{(O;1,5)} \circ r_{(O,\frac{\pi}{6})}$ et f la bijection complexe associée à F. Déterminer f ; donner le schéma de F et le schéma de calcul de $f(z)$.

2.d Le plan est muni du repère (O, I, J). Déterminer la transformation F du plan associée à la bijection définie ci-dessous.

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)z.$$

Construire l'image par F du point A d'affixe $3 - i$.

2.e r est une rotation d'angle orienté de mesure principale $\frac{\pi}{6}$ et de centre le point d'affixe $2 - 2i$. Déterminer la bijection complexe associée à r.

2.3. Similitudes directes du plan

Définition et propriété fondamentale

TABLEAU RÉCAPITULATIF

① **Similitude**

- α est un nombre réel strictement positif.

On appelle *similitude* de rapport α toute transformation du plan telle que :

pour tous points M et N d'images respectives M' et N', $M'N' = \alpha MN$.

Toute similitude de rapport α est la composée d'une isométrie et d'une homothétie de rapport α.

- α est un nombre réel.

Toute composée d'une isométrie et d'une homothétie de rapport α est une similitude de rapport $|\alpha|$.

② **Similitude directe**

α est un nombre réel strictement positif.

- On appelle *similitude directe* de rapport α toute similitude qui conserve l'orientation des angles.
- Toute similitude directe de rapport α est :
  - une translation ;
  - une rotation ;
  - ou une homothétie de rapport α ;
  - la composée d'une rotation et d'une homothétie de rapport α.
- Toute similitude directe de rapport α est aussi la composée de l'homothétie de centre O et de rapport α, d'une rotation de centre O et d'une translation.

③ **Similitude indirecte**

α est un nombre réel strictement positif.

On appelle *similitude indirecte* de rapport α toute similitude qui ne conserve pas l'orientation des angles.

La décomposition fondamentale d'une similitude directe donne la propriété suivante :

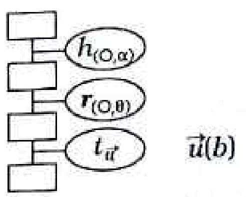
Propriété

– Toute similitude directe de rapport α est associée à une bijection complexe f définie par :

$$f(z) = az + b \quad [a \in \mathbb{C}^*,\ |a| = \alpha \text{ et } b \in \mathbb{C}]$$

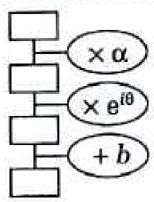
– Réciproquement, toute bijection complexe f définie par : $f(z) = az + b$ $[a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}]$ est associée à une similitude directe S de rapport $|a|$.

Schéma de S



$S = t_{\vec{u}} \circ r_{(O,\omega)} \circ h_{(O,\alpha)}$

Schéma de calcul associé à f



$f(z) = az + b$, avec $a = \alpha e^{i\theta}$

Caractérisation géométrique d'une similitude directe

Centre, angle orienté, rapport

Propriété

– α étant un nombre réel strictement positif, toute similitude directe S de rapport α qui n'est pas une translation admet un unique point invariant Ω et S s'écrit de manière unique sous la forme :

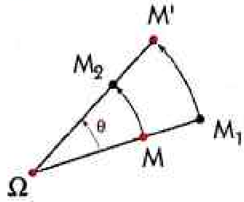
$$S = h_{(\Omega,\alpha)} \circ r_{(\Omega,\theta)} = r_{(\Omega,\theta)} \circ h_{(\Omega,\alpha)}.$$

– Cette forme est appelée *décomposition canonique* de S.

– Le point Ω est appelé le centre de S, α son rapport, $(\hat{\theta})$ son angle orienté.

S est caractérisé par : Ω, α et $(\hat{\theta})$

On peut écrire : $S_{(\Omega,\alpha,\theta)}$



Démonstration guidée

Détermination de la bijection complexe associée à S

S étant une similitude directe de rapport α, il existe un angle orienté $(\hat{\theta})$ et un nombre complexe b tel que : $S = t_{\vec{u}} \circ h_{(O,\alpha)} \circ r_{(O,\theta)}$ avec $\vec{u}(b)$

S est donc associée à une bijection complexe f définie par $f(z) = \alpha e^{i\theta} z + b$ (On pose $a = \alpha e^{i\theta}$).

Recherche de l'ensemble des points invariants de S

Déterminer la décomposition canonique.

Considérons la similitude directe S' : $S' = h_{(\Omega,\alpha)} \circ r_{(\Omega,\theta)}$.

Désignons par f' la bijection complexe associée à S'.

Démontrer que S et S' sont associées à la même bijection de $\mathbb{C}$; en déduire qu'elles sont égales.

Exemples

S est une similitude directe associée à la bijection complexe f définie par : $f(z) = (1 + i)z + 3 - i$.
Déterminons le centre Ω de S, son angle orienté $(\hat{\theta})$ et son rapport α.

Détermination du rapport et de l'angle orienté

La bijection complexe f associée à S est définie par :

$$f(z) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} z + 3 - i$$

S a donc pour rapport $\sqrt{2}$ et pour angle orienté $\frac{\pi}{4}$.

Détermination du centre

$$\begin{aligned} S(M) = M \quad &\Leftrightarrow \quad f(z) = z \\ &\Leftrightarrow \quad (1 + i)z + 3 - i = z \\ &\Leftrightarrow \quad -iz = 3 - i \\ &\Leftrightarrow \quad z = 1 + 3i \end{aligned}$$

Le centre de S est le point Ω d'affixe $1 + 3i$.

Similitude directe et bijection complexe associée

S est la similitude directe de rapport α [$\alpha \in \mathbb{R}_+^*$] d'angle orienté $(\hat{\theta})$ et de centre le point Ω d'affixe ω ;
f est la bijection complexe définie par : $f(z) = az + b$ [$a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$] ;

$$S \text{ et } f \text{ sont associées} \quad \Leftrightarrow \quad a = \alpha e^{i\theta} \text{ et } f(\omega) = \omega.$$

Exercices

2.f Quelle est la bijection complexe associée à la similitude directe d'angle orienté $(-\frac{\pi}{6})$, de rapport 3 et de centre le point Ω d'affixe $(2 - 3i)$?

2.g r est une rotation d'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{6}$ et de centre le point d'affixe $2 - 2i$.
Déterminer la bijection complexe associée à r.
En déduire la représentation analytique de r.

TP Travaux pratiques

TP. Caractérisation géométrique et écriture complexe d'une rotation et d'une homothétie

Présentation

Ω est un point du plan d'affixe ω, θ un nombre réel non nul, α un nombre réel non nul différent de 1. $r_{(\Omega,\theta)}$ est la rotation de centre Ω et d'angle orienté $\widehat{\theta}$, $h_{(\Omega,\alpha)}$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport α. On veut déterminer l'écriture complexe de $h_{(\Omega,\alpha)}$ et celle de $r_{(\Omega,\theta)}$ à partir de leurs caractérisations géométriques.

Soient M et M' des points du plan d'affixes respectives z et z'.

Écriture complexe de $h_{(\Omega,\alpha)}$

On a : $\quad M' = h_{(\Omega,\alpha)}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = \alpha \overrightarrow{\Omega M}$

d'où : $\quad M' = h_{(\Omega,\alpha)}(M) \Leftrightarrow z' - \omega = \alpha(z - \omega)$.

Écriture complexe de $r_{(\Omega,\theta)}$

On a :
- $r_{(\Omega,\theta)}(\Omega) = \Omega$
- pour $M \neq \Omega$

$$M' = r_{(\Omega,\theta)}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \text{et} \\ \text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = \theta + k\,2\pi \quad [k \in \mathbb{Z}] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \|z' - \omega\| = \|z - \omega\| \\ \text{et} \\ \arg(z' - \omega) - \arg(z - \omega) = \theta + k\,2\pi \quad [k \in \mathbb{Z}] \end{cases}$$

d'où : $\quad \boxed{M' = r_{(\Omega,\theta)}(M) \Leftrightarrow z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)}$

Exemple

On veut déterminer l'écriture complexe de la rotation de centre A d'affixe $2 + i$ et d'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{6}$.

On a : $\quad z' - (2 + i) = e^{i\frac{\pi}{6}}[z - (2 + i)]$

d'où : $\quad z' = \dfrac{\sqrt{3} + i}{2}\, z + \dfrac{5 - 2\sqrt{3} - i\sqrt{3}}{2}$.

On veut déterminer l'écriture complexe de l'homothétie de centre B d'affixe $1 - i$ et de rapport -3.

On a : $\quad z' - (1 - i) = -3\,[z - (1 - i)]$

d'où : $\quad z' = -3z + 4 - 4i$.

Exercices

ENTRAÎNEMENT

Le plan est muni du repère orthonormé directe (O, I, J).

Nombres complexes et configurations du plan

Vecteurs du plan, angles orienté de vecteur

1 Dans chacun des cas suivants, A, B, C, D sont des points d'affixes z_A, z_B, z_C et z_D définis ci-dessous.

Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})$.

(1) $z_A = \sqrt{2} + 5i$; $z_B = \sqrt{2} + 3i$
$z_C = 6i$; $z_D = \sqrt{3} + 5i$

(2) $z_A = 2i$; $z_B = \sqrt{3} + 3i$
$z_C = 5 - 2i$; $z_D = 7 - 2i$

Quelques configurations de base

2 On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D définie par :
$z_A = -1 - 5i$; $z_B = 4 - 3i$; $z_C = 3 + 3i$ et $z_D = -2 + i$.
1. *a)* Justifier que ABCD est un parallélogramme.
b) Déterminer l'affixe du point A', symétrique de A par rapport au point B.
c) Déterminer l'affixe du point A'' vérifiant :
$$\overrightarrow{DA''} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$$
2. Quelle est la nature du quadrilatère A''BC'D ?

Nombres complexes et transformations du plan

3 Dans chaque cas ci-dessous, reconnaître l'application dont l'écriture complexe est :

(1) $z' = z + 2i + 1$ (2) $z' = e^{-i\frac{\pi}{3}}z$ (3) $z' = -z$.
(4) $z' = z - 3i$ (5) $z' = iz$ (6) $z' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)z$.

4 A$(2 - i)$ et B$(1 - 3i)$ sont deux points du plan.
Quelle est la translation t qui applique A sur B.
Quelle est l'écriture complexe de t ?

5 Quelle est la transformation F du plan dont l'écriture complexe est $z' = z + 2 - 3i$.
Quelle est l'image par F de la droite d'équation :
$$y = 2x - 1.$$

6 $\vec{v}$ est un vecteur d'affixe $-3 - i$, A est le point d'affixe $2 + i$. t est la translation de vecteur $\vec{v}$; r est la rotation de centre O et d'angle orienté $\frac{\pi}{2}$.
Déterminer t(A) et r(A). Comparer ces deux nombres complexes. Tracer la figure.

7 On considère le vecteur $\vec{v}$ d'affixe $(1 + i)$, le point A d'affixe $(1 - i)$ et un point M quelconque du plan d'affixe z.
1. Construire les points I', J', A' et M', image respectives des point I, J, A et M par la translation t de vecteur $\vec{v}$.
2. Déterminer l'affixe de chacun des points I', J', A' et M' et de chacun des vecteurs $\overrightarrow{I'A'}$ et $\overrightarrow{J'M'}$.
3. Donner une mesure de chacun des angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IM}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{I'A'}, \overrightarrow{I'M'}})$, comparer ces angles.

8 On considère le point A d'affixe $(1 + i)$ et M un point quelconque d'affixe z.
1. Construire les points I', J', A' et M', image respectives des points I, J, A et M par l'homothétie h de centre O et de rapport 2.
2. Déterminer l'affixe de chacun des points I', J', A' et M' et de chacun des vecteurs $\overrightarrow{I'A'}$ et $\overrightarrow{J'M'}$.
3. Donner une mesure de chacun des angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IM}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{I'A'}, \overrightarrow{I'M'}})$, comparer ces angles.

9 On considère le point A d'affixe $(-1 - 3i)$ et M un point quelconque d'affixe z.
1. Construire les points I', J', A' et M', image respectives des point I, J, A et M par la rotation r de centre O et d'angle orienté $\frac{2\pi}{3}$.
2. Déterminer l'affixe de chacun des points I', J', A' et M' et de chacun des vecteurs $\overrightarrow{I'A'}$ et $\overrightarrow{J'M'}$.
3. Donner une mesure de chacun des angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IM}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{I'A'}, \overrightarrow{I'M'}})$, comparer ces angles.

X **10** On donne les points A et B d'affixes respectives z_A et z_B définies par :
$$z_A = 6 + 3i \quad \text{et} \quad z_B = 2 + 4i.$$
1. Déterminer la nature du triangle OAB.
2. Déterminer l'affixe du point B' image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et celle de A' image de A par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
Tracer la figure.
4. Calculer l'affixe du point M, milieu de [A'B'].
5. Vérifier que les droites (OM) et (AB sont perpendiculaires.
Que représente la droite (OI) pour le triangle OAB ?

11 1. Déterminer l'écriture complexe de la symétrie orthogonale d'axe (Δ) d'équation $y = x$.
2. Déterminer l'écriture complexe de la symétrie centrale de centre A d'affixe $1 + i$.

12 Quelle est la transformation F du plan dont l'écriture complexe est $z' = \frac{1}{2}(1 + i)z$.
Quelle est l'image par F de la droite d'équation $y = x$?

13 Dans chacun des cas suivants, déterminer la transformation du plan qui a pour écriture complexe :

(1) $z' = z + 3i$
(2) $z' = 2z + 3i$
(3) $z' = z - 3i$
(4) $z' = 21z - 6i$
(5) $z' = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}z$
(6) $z' = iz + 5$
(7) $z' = -2iz + 3i$
(8) $z' = -iz + 1$

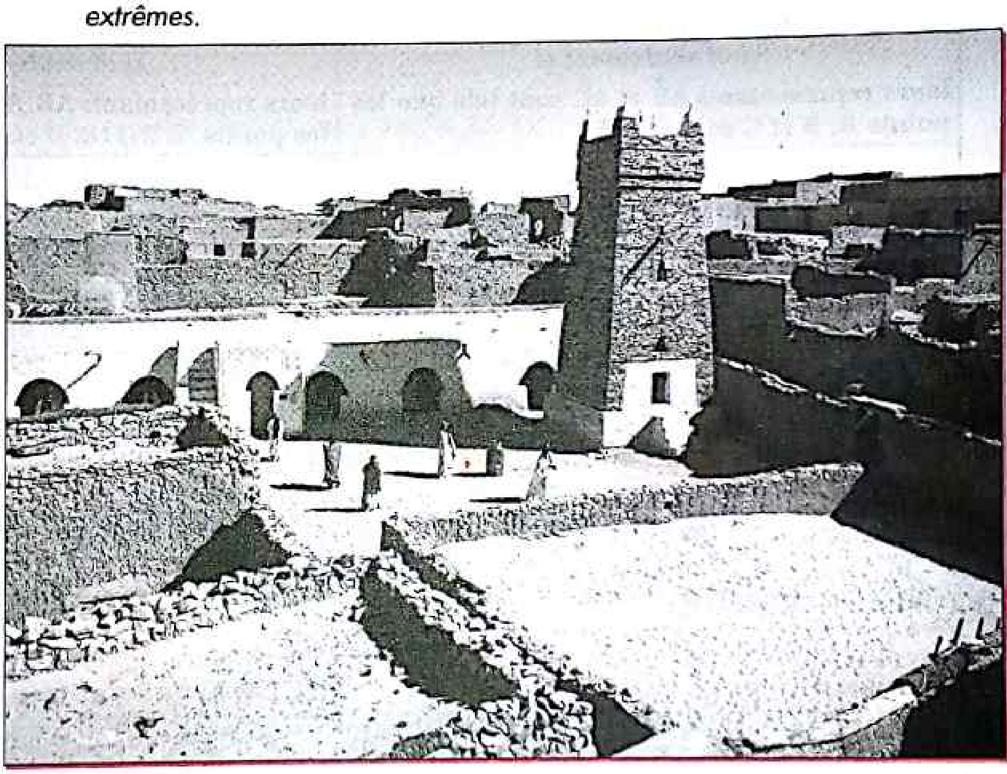
X **14** A$(1 + i)$ et B$(-1 + i\sqrt{3})$ sont deux points du plan.
1. Vérifier que les points O, A et B sont alignés.
2. Déterminer le rapport et l'angle orienté de la similitude directe S de centre O qui transforme A en B.
3. Quelle est l'écriture complexe de S ?

12

Géométrie dans l'espace

Chinguetti (déclarée patrimoine mondial par l'UNESCO).

Ville de la Mauritanie construite vers le XIIe siècle, Chinguetti voit son prestige religieux et culturel s'étendre jusqu'à La Mecque.
La mosquée ancienne, dont l'imposant minaret constitue le repère spatial et culturel, est d'apparence sobre et s'harmonise avec le paysage.
L'architecture obéit aux règles de la culture arabo-musulmane, à celles de la défense dans le désert ainsi qu'à celle des climats extrêmes.



Mosquée ancienne de Chinguetti, Mauritanie.

SOMMAIRE

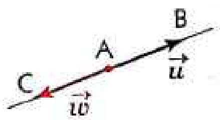
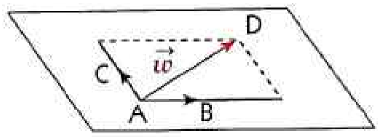
1 Vecteurs et points de l'espace

1.1. Vecteurs de l'espace

En classe de première SE, nous avons admis que l'on peut étendre à l'espace la notion de vecteur du plan. On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des points de l'espace, $\mathscr{V}$ l'ensemble des vecteurs du plan et $\mathscr{W}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace.

TABLEAU RÉCAPITULATIF

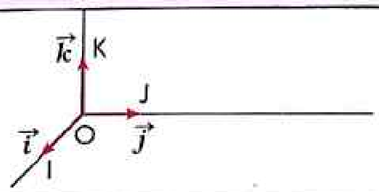
① Vecteurs colinéaires – Vecteurs coplanaires

– Des vecteurs non nuls sont dits *colinéaires* lorsqu'ils ont la même direction. **– On convient de dire que le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.** **– Deux vecteurs sont colinéaires *si et seulement si* leurs représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont tels que les points A, B et C sont alignés.**	**– Trois vecteurs sont dits coplanaires lorsque l'un d'eux est combinaison linéaire des deux autres.** **– On remarque que trois vecteurs sont coplanaires lorsque deux d'entre eux sont colinéaires.** **– Trois vecteurs sont coplanaires *si et seulement si* leurs représentants $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont tels que les points A, B, C et D sont coplanaires.**
$\vec{w} = x\vec{u}$ $[x \in \mathbb{R}]$ 	$\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ $[(x\,;\,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}]$ 

② Caractérisation vectorielle d'une droite et d'un plan

A et B sont deux points de $\mathscr{E}$. **Pour tout point M,** $\mathrm{M} \in (\mathrm{AB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$ $[x \in \mathbb{R}]$	**A, B et C sont trois points de $\mathscr{E}$.** **Pour tout point M,** $\mathrm{M} \in (\mathrm{ABC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ $[(x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2]$

③ Base $\mathscr{W}$ – Repère de $\mathscr{E}$

On appelle *base* de $\mathscr{W}$ tout triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de vecteurs non coplanaires de $\mathscr{W}$.	**On appelle *repère* de $\mathscr{E}$ tout quadruplet (O, I, J, K) de points non coplanaires de $\mathscr{E}$.**
	$\left[\begin{array}{c}(\mathrm{O, I, J, K})\\ \text{est un repère}\\ \text{de } \mathscr{E}\end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})\\ \text{est une base}\\ \text{de } \mathscr{W}\end{array}\right]$

④ Coordonnées d'un point – Coordonnées d'un vecteur

(O, I, J, K) est un repère de $\mathscr{E}$.

– Pour tout point M de $\mathscr{E}$, il existe un triplet unique de nombres réels $(x\,;\,y\,;\,z)$ tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ} + z\overrightarrow{OK}$$

– $(x\,;\,y\,;\,z)$ est appelé le triplet de coordonnées $\begin{cases}\textbf{du point M, dans le repère (O, I, J)}\\ \textbf{du vecteur } \overrightarrow{OM}\textbf{, dans la base } (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})\end{cases}$

1.2. Barycentre

Définition et propriétés

Nous étendons à l'espace la définition et les propriétés du barycentre de points pondérés, tout en généralisant à n points ce qui a été fait en classe de Première.

TABLEAU RÉCAPITULATIF

① **Propriétés – Définition**

A_1, A_2, ..., A_n sont n points de l'espace $\mathscr{E}$; a_1, a_2, ..., a_n, n nombres réels de somme non nulle.

– Il existe un unique point G tel que : $\sum_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{MA_i} = \vec{0}$.

– Ce point G est appelé *barycentre des n points pondérés* : (A_1, a_1), (A_2, a_2),... (A_n, a_n).

② **Propriété caractéristique**

a_1, a_2, ..., a_n, sont des nombres réels de somme non nulle.

G est le barycentre des points pondérés : (A_1, a_1), (A_2, a_2),... (A_n, a_n)

si et seulement si **pour tout point M de $\mathscr{E}$, $\sum_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{MA_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\overrightarrow{MG}$.**

③ **Homogénéité**

G est le barycentre des points pondérés : (A_1, a_1), (A_2, a_2),... (A_n, a_n).

Si k est un nombre réel non nul, alors G est le barycentre de (A_1, ka_1), (A_2, ka_2),... (A_n, ka_n).

④ **Propriété des barycentres partiels**

On ne change pas le barycentre de plusieurs points pondérés en remplaçant certains d'entre eux par leur barycentre affecté de la somme non nulle des coefficients correspondants.

Exemple d'utilisation du barycentre

ABCD est un tétraèdre ; I et J sont respectivement les milieux de [AC] et [DB] ; P, Q, R et S des points tels que : (1) $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AP}$; (2) $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AQ}$; (3) $\overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{CR}$; (4) $\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{CS}$.

Démontrons que les droites (PS), (QR) et (IJ) sont concourantes.

On déduit de l'énoncé que :

I est l'isobarycentre de A et C

J est l'isobarycentre de D et B.

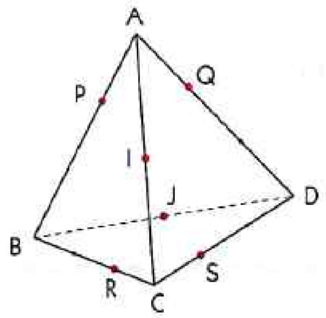
Les égalités vectorielles (1), (2), (3), (4) permettent de considérer :

P comme barycentre de (A, 2) et (B, 1)

Q comme barycentre de (A, 2) et (D, 1)

R comme barycentre de (C, 2) et (B, 1)

S comme barycentre de (C, 2) et (D, 1)



Désignons par G le barycentre de (A, 2), (B, 1), (C, 2) et (D, 1).

On peut déterminer le barycentre G en utilisant les barycentres partiels P, Q, R, S, I, J. On obtient :

$$\underbrace{\underbrace{(A,2)\quad(B,1)}_{(P,3)}\qquad\underbrace{(C,2)\quad(D,1)}_{(S,3)}}_{\boxed{G}}\qquad\Bigg|\qquad\underbrace{\underbrace{(A,2)\quad(D,1)}_{(Q,3)}\qquad\underbrace{(C,2)\quad(B,1)}_{(R,3)}}_{\boxed{G}}\qquad\Bigg|\qquad\underbrace{\underbrace{(A,2)\quad(C,2)}_{(I,4)}\qquad\underbrace{(B,1)\quad(D,1)}_{(J,2)}}_{\boxed{G}}$$

d'où : $G \in (PS)$; $G \in (QR)$; $G \in (IJ)$

Par conséquent, les droites (PS), (QR) et (IJ) sont concourantes en G.

2 Produit scalaire

2.1. Définition – Propriétés

Puisque deux vecteurs de $\mathcal{W}$ sont nécessairement coplanaires, on étend à $\mathcal{W}$ la définition du produit scalaire dans $\mathcal{V}$, ainsi que toutes ses propriétés qui ne font intervenir qu'un ou deux vecteurs.

On examinera les propriétés qui font intervenir trois vecteurs, car ceux-ci peuvent être non coplanaires.

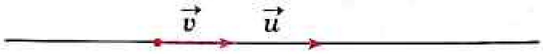
On démontre et nous admettons que le produit scalaire de deux vecteurs ne dépend pas de ses représentants choisis.

Expressions du produit scalaire

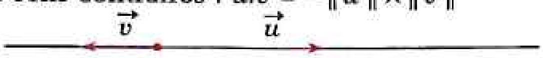
Produits scalaires remarquables

- Lorsque les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires,

– de même sens : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$



– de sens contraires : $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$



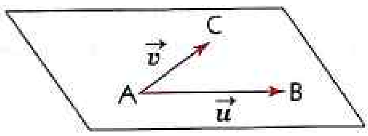
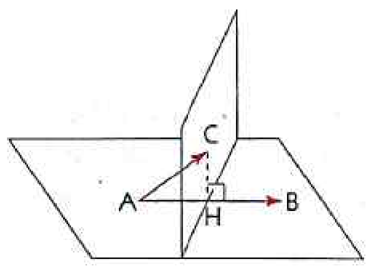
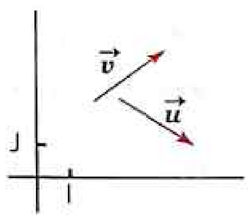
- Lorsque les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux, le produit scalaire $\vec{u}.\vec{u}$ est appelé **carré scalaire**, et noté : $\vec{u}^2$

- Lorsque les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux,

$$\vec{u}.\vec{v} = 0$$

Différentes expressions du produit scalaire

TABLEAU RÉCAPITULATIF

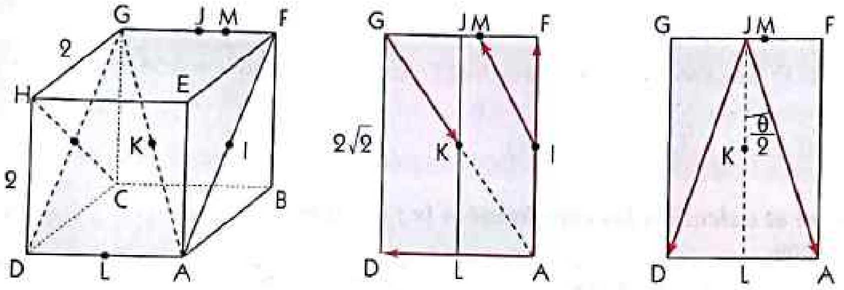
① Expression trigonométrique (normes et angle des vecteurs)	② Expression vectorielle (projection orthogonale d'un vecteur)	③ Expression analytique (dans une base orthonormée)
		
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, **alors** $\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}.\vec{v}})}$	**Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls,** $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ **H le projeté orthogonal de C sur (AB).** **alors** $\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}}$	**Si $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ et $(x'\ ;\ y'\ ;\ z')$ sont les coordonnées respectives des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans une base orthonormée,** **alors** $\boxed{\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'}$

Exemple

ABCDEFGH est un cube de côté 2. On désigne par I, J, K, L les milieux respectifs des segments [AF], [FG], [GA], [AD] et par M un point quelconque de [JF].

Calculons les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{IM}$; $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{GK}$; $\overrightarrow{JA}.\overrightarrow{JD}$.

Ces produits scalaires peuvent se calculer dans le plan (AFG).



AFGD est un rectangle.
On a :
$AD = 2$
$AF = \sqrt{2 \times 4} = 2\sqrt{2}$
$JA = JD = \sqrt{8+1} = 3$

Utilisation de l'expression vectorielle

1) $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{IF}$
$= AF \times IF$
$= 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4$

car F est le projeté orthogonal de M sur (AF), $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{IF}$ sont colinéaires et de même sens.

2) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{GK} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DL}$
$= -AD \times DL$
$= -2 \times 1 = -2$

car D et L sont respectivement les projetés orthogonaux sur (AD) de G et K.
$\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DL}$ sont colinéaires et de sens contraires.

Utilisation de l'expression trigonométrique

3) $\overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{JD} = JA \times JD \times \cos(\widehat{AJD})$

Désignons par θ la mesure de l'angle $\widehat{AJD}$ et calculons $\cos\frac{\theta}{2}$ dans le triangle rectangle AJL.

On a : $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{JL}{JA} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Or : $\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$

donc : $\cos\theta = 2 \times \frac{8}{9} - 1 = \frac{7}{9}$

$\overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{JD} = 9 \times \frac{7}{9} = 7.$

Vecteurs orthogonaux

TABLEAU RÉCAPITULATIF

① **Vocabulaire**

- **On convient de dire que le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur de l'espace.**
- **Deux vecteurs non nuls de l'espace sont dits orthogonaux lorsque leurs directions sont orthogonales.**

② **Caractérisation des vecteurs orthogonaux**

$\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ **sont des vecteurs orthogonaux** $\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0.$

Exemple 1

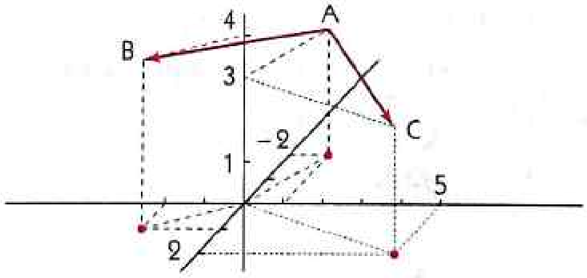
L'espace est muni du repère orthonormé (O, I, J, K).
Les points A, B, C ont respectivement pour coordonnées (– 2 ; 1 ; 3), (1 ; – 2 ; 4), (a ; 5 ; 3).
Déterminer le nombre réel a pour que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient orthogonaux. Faire une figure.

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(3 ; -3 ; 1)$

$\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(a+2 ; 4 ; 0)$

donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 3(a+2) - 12 = 3a - 6$

d'où : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow a = 2.$



■ **Exemple 2**

ABCDEFGH est un cube de côté 1. P et Q sont les points vérifiant : $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AQ} = 3\overrightarrow{AD}$.
On désigne par K le projeté orthogonal de A sur le plan (EPQ).
Démontrer que le point K est l'orthocentre du triangle EPQ.

Choisissons un repère orthonormé et calculons les coordonnées (x ; y ; z) de K

(A, B, D, E) est un repère orthonormé.

$\overrightarrow{AK}$ est orthogonal à chacun des vecteurs $\overrightarrow{EK}, \overrightarrow{PK}$ et $\overrightarrow{QK}$.

Par conséquent :

(1) $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{EK} = 0$; (2) $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{PK} = 0$; (3) $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{QK} = 0$.

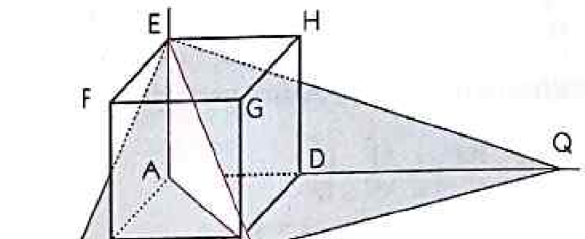
On obtient le système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z(z-1) = 0 & (1) \\ x(x-2) + y^2 + z^2 = 0 & (2) \\ x^2 + y(y-3) + z^2 = 0 & (3) \end{cases}$$

ou encore : $x^2 + y^2 + z^2 = z = 2x = 3y$

d'où : $x = \frac{z}{2}$; $y = \frac{z}{3}$; $z = (\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + 1)\, z^2$

z étant non nul, on en déduit : $K(\frac{18}{49} ; \frac{12}{49} ; \frac{36}{49})$.



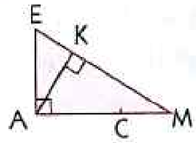


figure de (ACE)

Démontrons que K est l'orthocentre du triangle EPQ

À l'aide des coordonnées des vecteurs, on obtient : $\overrightarrow{EP}.\overrightarrow{QK} = 0$; $\overrightarrow{EQ}.\overrightarrow{PK} = 0$; $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{EK} = 0$.

• Donner une autre démonstration géométrique.

Propriétés algébriques

■ **Règles de calcul**

Les propriétés algébriques suivantes donnent les règles de calcul du produit scalaire.

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, pour tout nombre réel α,

(1) $\vec{u}^{\,2} = \|\vec{u}\|^2$

(2) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

(3) $(\alpha\vec{u}).\vec{v} = \alpha(\vec{u}.\vec{v})$

(4) $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

Démonstration guidée

– Les propriétés (1), (2) et (3) concernent des vecteurs coplanaires ; elles sont vraies dans $\mathcal{V}$ donc aussi dans $\mathcal{W}$.

– Pour démontrer la propriété (4), on pourrait utiliser les coordonnées des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ pour calculer $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w})$ et $\vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$, puis comparer ces nombres réels.

■ **Exemple 1**

ABCDEFGH est un cube de côté 2 (voir 1[er] exemple du 2.1, p. 244).
Calculons les produits scalaires suivants : $(2\overrightarrow{AD}).(-3\overrightarrow{GK})$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EH}$; $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BM}$.

(1) $(2\overrightarrow{AD}).(-3\overrightarrow{GK}) = -6(\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{GK})$

or : $(\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{GK}) = -2$ (voir 1[er] exemple du 2.1)

donc : $(2\overrightarrow{AD}).(-3\overrightarrow{GK}) = 12$.

(2) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EF}$

$= \|\overrightarrow{EF}\|^2$

$= 4$.

(3) $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AF}.(\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IB})$

$= \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{IB}$

or : $\overrightarrow{AF} \perp \overrightarrow{IB}$

$\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{IM} = 4$ (voir 1[er] exemple du 2.1)

donc : $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BM} = 4$

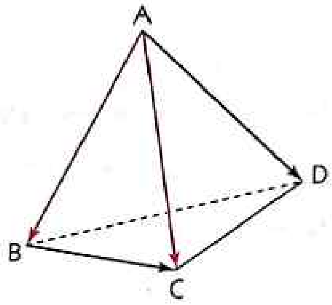
■ **Exemple 2**

ABCD est un tétraèdre régulier de côté a. Calculer $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$.
En déduire les positions relatives des supports des côtés d'un tétraèdre régulier.

Les faces d'un tétraèdre régulier sont des triangles équilatéraux.
Par conséquent,

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} = AD \times AB \times \cos\frac{2\pi}{3} = \frac{a^2}{2}$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$



(AD) et (BC) n'appartiennent pas à la même face.
Pour calculer $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$, décomposons l'un de ces vecteurs.

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$

$= \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} = 0$

donc : $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}$

On démontre de la même manière que les supports des côtés opposés d'un tétraèdre régulier sont orthogonaux.

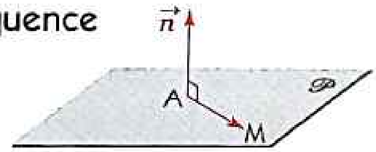
Vecteur normal à un plan

■ **Définition et conséquence immédiate**

Définition

On appelle vecteur normal à un plan tout vecteur directeur d'une droite perpendiculaire à ce plan.

Conséquence



A étant un point de l'espace $\mathscr{E}$, $\vec{n}$ un vecteur non nul, l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ vérifiant : $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

■ **Exemple**

ABCDEFGH est un cube. Démontrons que le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est normal au plan (ABE) et le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est normal au plan (BCE).

– La droite (BC) est orthogonale à (BH) et à (AB), d'où : (BC) ⊥ (ABE)

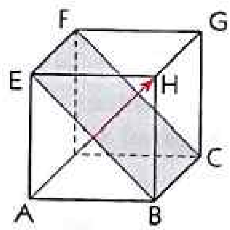
donc : $\overrightarrow{BC}$ est normal à (ABE), par suite (BC) est orthogonale à toute droite du plan (ABE),

d'où : (BC) ⊥ (AH).

– On sait que (AH) est orthogonale à (BE) (diagonale du carré ABHE) par suite (AH) est orthogonale à (BC) et à (BE)

donc : $\overrightarrow{AH}$ est normal à (BCE).

– Remarquons que (BCE) est le plan médiateur du segment [AH].



Exercices

2.a ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que : AB = 6 ; AD = 3 ; AE = 4.
On désigne par I, J, K les milieux respectifs de [FC], [CD], [DF].
Calculer : $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{ID}$; $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{FC}$; $\overrightarrow{KE}.\overrightarrow{KF}$.

2.b ABCDS est une pyramide régulière à base carrée et de sommet S tel que :
AB = SA = 2.
Calculer : $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$; $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}$; $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AC}$.

2.2. Utilisations du produit scalaire

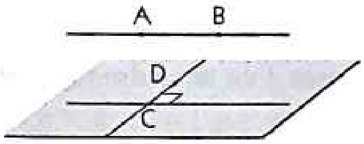
Orthogonalité et parallélisme dans l'espace

Les propriétés suivantes proviennent des vecteurs orthogonaux et des vecteurs colinéaires. Ce sont de interprétations vectorielles de l'orthogonalité et du parallélisme dans l'espace.

TABLEAU RÉCAPITULATIF

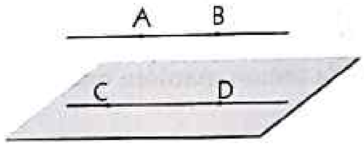
① **Droites orthogonales – Droites parallèles**

Deux droites sont orthogonales
si et seulement si
leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux



$(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$

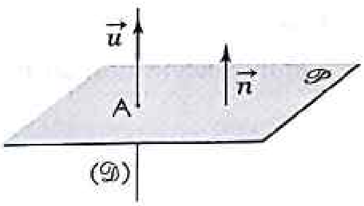
Deux droites sont parallèles
si et seulement si
leurs vecteurs directeurs sont colinéaires



$(AB) \,//\, (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{CD} \quad [\alpha \in \mathbb{R}^*]$

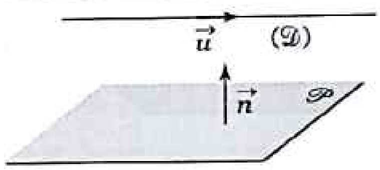
② **Droite et plan perpendiculaires – Droites et plan parallèles**

Une droite est perpendiculaire à un plan
si et seulement si
un vecteur directeur de la droite
est un vecteur normal au plan



$(\mathcal{D}) \perp \mathcal{P} \Leftrightarrow \vec{u} = \alpha\vec{n} \quad [\alpha \in \mathbb{R}^*]$

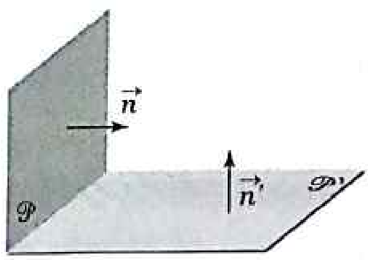
Une droite est parallèle à un plan
si et seulement si
un vecteur directeur de la droite
est orthogonal à un vecteur normal au plan



$(\mathcal{D}) \,//\, (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{n} = 0$

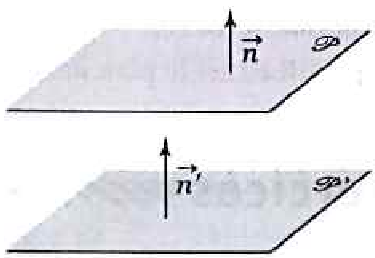
③ **Plans perpendiculaires – Plans parallèles**

Deux plans sont perpendiculaires
si et seulement si
un vecteur normal à l'un des plans est
orthogonal à un vecteur normal à l'autre plan



$\mathcal{P} \perp \mathcal{P}' \Leftrightarrow \vec{n}.\vec{n}' = 0$

Deux plans sont parallèles
si et seulement si
un vecteur normal à l'un des plans est
colinéaire à un vecteur normal à l'autre plan



$\mathcal{P} \,//\, \mathcal{P}' \Leftrightarrow \vec{n} = \alpha\vec{n}' \quad [\alpha \in \mathbb{R}^*]$

Équations d'un plan

L'espace est muni d'un repère.

Détermination d'une équation du plan

• $\mathcal{P}$ est un plan.

A est un point de $\mathcal{P}$ de coordonnées $(x_0 ; y_0 ; z_0)$.
$\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ de coordonnées $(a ; b ; c)$.
Soit $M(x ; y ; z)$ un point quelconque de l'espace,

$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AM} = 0$

$\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$

avec $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$.

• $\mathcal{Q}$ est l'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ vérifiant :
(1) $ax + by + cz + d = 0$ $[(a ; b ; c) \neq (0 ; 0 ; 0)]$.
Supposons $a \neq 0$
Peut-on trouver un point A de $\mathcal{Q}$ de coordonnées $(x_0 ; y_0 ; z_0)$? C'est-à-dire, peut-on trouver x_0, y_0, z_0 tels que $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$?
Il suffit de poser par exemple :

$$y_0 = z_0 = 0 \quad \text{et} \quad x_0 = -\frac{d}{a}$$

(1) devient : $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.
Désignons par $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(a ; b ; c)$
(1) se traduit par : $\vec{n}.\overrightarrow{AM} = 0$
d'où : $M \in \mathcal{P}$.

Propriétés

• **$\vec{n}$ est un vecteur non nul de coordonnées $(a ; b ; c)$.**
Tout plan normal au vecteur $\vec{n}$ a pour équation : $ax + by + cz + d = 0$ $[d \in \mathbb{R}]$.
• **Réciproquement, a, b, c étant des nombres réels non tous nuls, l'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a ; b ; c)$.**

M

Pour déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$, passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(a ; b ; c)$, on peut procéder de l'une des deux manières suivantes.

1re méthode	2e méthode
– écrire qu'une équation de $\mathcal{P}$ est de la forme : $ax + by + cz + d = 0$ **– déterminer d sachant que : $A \in \mathcal{P}$**	**– traduire analytiquement que $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points M tels que :** $\vec{n}.\overrightarrow{AM} = 0$

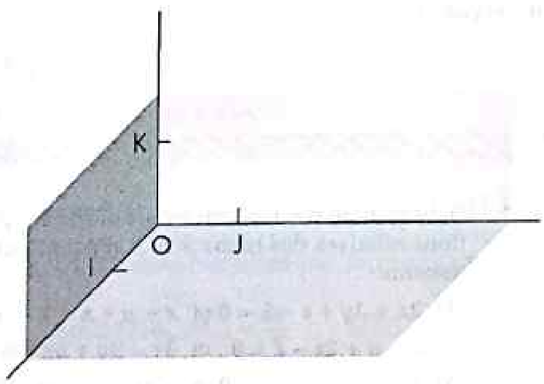
Cas particuliers

L'espace est muni du repère (O, I, J, K).

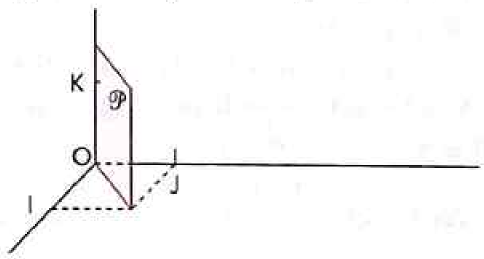
$z = 0$ est une équation du plan (OIJ)

$x = 0$ est une équation du plan (OJK)

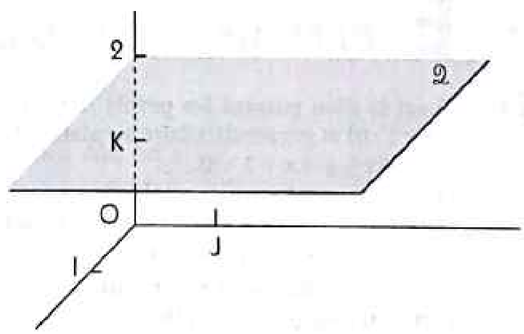
$y = 0$ est une équation du plan (OKI)



$x = y$ est une équation du plan $\mathcal{P}$



$z = 2$ est une équation du plan $\mathcal{Q}$



■ **Exemple 1**

Déterminons une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par le point A(1 ; 2 ; – 3) et perpendiculaire à la droite passant par les points B(3 ; – 5 ; 1) et C(–1 ; 1 ; 3).

On a : $\overrightarrow{BC}$ (– 4 ; 6 ; 2), le vecteur $\vec{n}$ (– 2 ; 3 ; 1) est colinéaire à $\overrightarrow{BC}$, il est donc normal à $\mathcal{P}$.

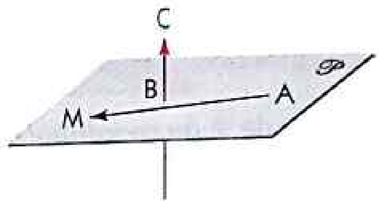
1re méthode

Soit M(x ; y ; z) un point de l'espace.

$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AM} = 0$

$\Leftrightarrow -2(x-1) + 3(y-2) + (z+3) = 0.$

Une équation de $\mathcal{P}$ est donc : $-2x + 3y + z - 1 = 0$.



2e méthode

$\vec{n}$ (– 2 ; 3 ; 1) étant un vecteur normal à $\mathcal{P}$, une équation de $\mathcal{P}$ est de la forme : $-2x + 3y + z + d = 0$.

A (1 ; 2 ; – 3) étant un point de $\mathcal{P}$, on obtient : $-2 \times 1 + 3 \times 2 - 3 + d = 0$ ou encore $d = -1$.

Une équation de $\mathcal{P}$ est donc : $-2x + 3y + z - 1 = 0$.

■ **Exemple 2**

$\mathcal{P}$ est le plan d'équation : $2x - 3y + z - 4 = 0$.
Donner deux points de $\mathcal{P}$ et un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

– Les points A(0 ; 0 ; 4) et B(1 ; 1 ; 5) appartiennent à $\mathcal{P}$.
– Le vecteur $\vec{n}$ (2 ; – 3 ; 1) est normal à $\mathcal{P}$.

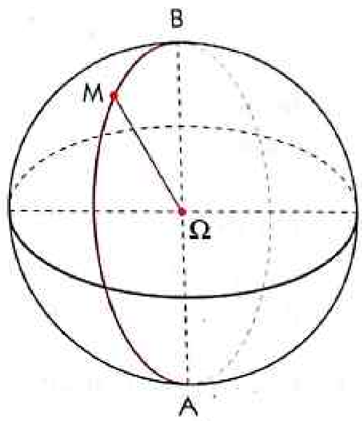
Équation d'une sphère

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

■ **Détermination d'une équation de sphère**

On vérifie aisément les résultats suivants :

- La sphère de centre Ω et de rayon r ($r \in \mathbb{R}_+^*$) est l'ensemble des points M de l'espace, tels que : $\Omega M^2 = r^2$.
- La sphère de diamètre [AB] (A ≠ B) est l'ensemble des points M de l'espace, tels que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.



■ **Exemple**

M(x ; y ; z) est un point de l'espace.

- S est la sphère de centre Ω(a, b, c) et de rayon r ($r \in \mathbb{R}_+^*$).

$M \in S \Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2$

$\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$

- S' est la sphère de diamètre [AB] avec A(3 ; 1 ; 1) et B(1 ; 2 ; 3)

$M \in S' \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

$\Leftrightarrow (3-x)(1-x) + (1-y)(2-y) + (1-z)(3-z) = 0.$

- Vérifier que S' est la sphère de centre Ω(2 ; 1,5 ; 2) et de rayon 3.

Exercices

2.c $\mathcal{P}$ est le plan passant les points A(1 ; 0 ; 0) et B(0 ; 1 ; 0) et perpendiculaire au plan $\mathcal{Q}$ d'équation : $2x - y + z - 1 = 0$.
Donner un vecteur $\vec{u}$ normal à $\mathcal{Q}$.
Déterminer des nombres réels a, b, c pour que le vecteur $\vec{v}$ (a, b, c) soit normal à $\mathcal{P}$.
(On pourra calculer $\vec{u}.\vec{v}$ et $\vec{v}.\overrightarrow{AB}$.)
Écrire une équation du plan $\mathcal{P}$.

2.d Dans chacun des cas suivants, étudier les positions relatives des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ d'équations ci-dessous :

(1) $2x + 3y + z - 5 = 0$ et $x + y + z - 1 = 0$
(2) $x - y + 2z - 2 = 0$ et $3x - 3y + 6z - 6 = 0$
(3) $x - 2y + 3z - 2 = 0$ et $-3x - 5y - 9z - 5 = 0$
(4) $x + y + z - 4 = 0$ et $x - 2y + z - 3 = 0$

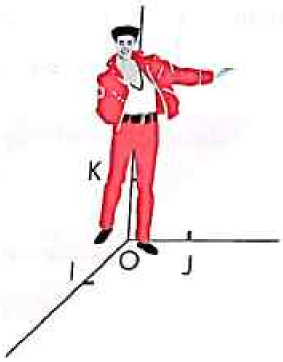
3 Produit vectoriel

3.1. Orientation de l'espace

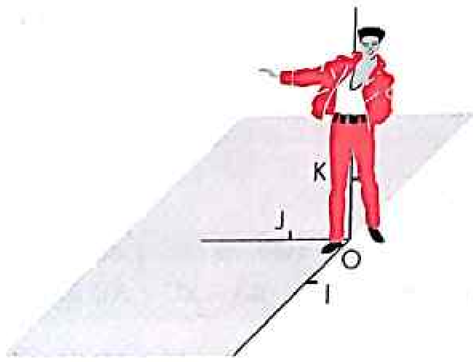
Repères de $\mathscr{E}$ – Base de $\mathscr{W}$

Orienter l'espace, c'est distinguer deux types de repères de $\mathscr{E}$
Cette classification peut se faire de la manière suivante :
(O, I, J, K) étant un repère de l'espace, on imagine un observateur, appelé **observateur d'Ampère**, ayant les pieds vers O, la tête vers K et regardant I.

– Si J est à gauche de l'observateur d'Ampère, le repère (O, I, J, K) est dit **direct**.



– Si J est à droite de l'observateur d'Ampère, le repère (O, I, J, K) est dit **indirect**.



Orienter l'espace revient aussi à distinguer deux types de bases de $\mathscr{W}$
En effet, (O, I, J, K) étant un repère de $\mathscr{E}$,
on sait que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$ est une base de $\mathscr{W}$ et (O, I, J) un repère du plan (OIJ).
On admet que :

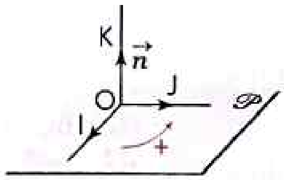
$$[(O, I, J, K) \text{ est un repère direct de } \mathscr{E}] \iff [(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK}) \text{ est une base directe de } \mathscr{W}]$$

Orientation d'un plan

$\mathscr{P}$ étant un plan, $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathscr{P}$, (O, I, J) un repère de $\mathscr{P}$,

$$[(O, I, J) \text{ est un repère direct de } \mathscr{P}] \iff [(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \vec{n}) \text{ est une base directe de } \mathscr{W}]$$

Un plan dans l'espace orienté ne peut être orienté que par le choix d'un vecteur normal à ce plan.

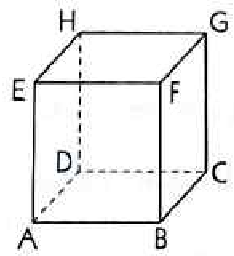


Exemples

ABCDEFGH est un cube.

– Les repères (D, A, C, H), (F, B, E, G) et (A, D, E, B) sont directs.

– Les bases $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CG})$; $(\overrightarrow{HG}, \overrightarrow{HE}, \overrightarrow{HD})$ et $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EH}, \overrightarrow{EF})$ sont directes.



Le plan (ABC) étant orienté par le choix de son vecteur normal $\overrightarrow{AE}$, on a :

$$\text{MES}\,(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad \text{MES}\,(\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}}) = -\frac{\pi}{2}.$$

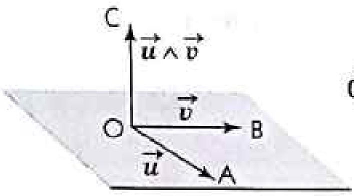
3.2. Produit vectoriel

Présentation du produit vectoriel

Définition

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant des vecteurs de l'espace, on appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ défini de la manière suivante :

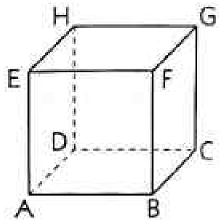
- **lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$**
- **lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires,**
  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$
  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe
  $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$



$\vec{OA} \wedge \vec{OB} = \vec{OC}$ *si et seulement si* $\begin{cases} \vec{OC} \text{ est un vecteur normal à (OAB)} \\ (\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}) \text{ est une base directe} \\ \|\vec{OC}\| = OA \times OB \sin \widehat{AOB} \end{cases}$

■ **Exemple**

ABCDEFGH est un cube de côté 1 de l'espace orienté.
Calculer : $\vec{AB} \wedge \vec{AD}$; $\vec{BA} \wedge \vec{BC}$; $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$; $\vec{AC} \wedge \vec{BD}$.



On constate que tous les vecteurs qui interviennent dans ces produits vectoriels ont des représentants dans le plan (ABC).
De plus $\vec{AE}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
On pourra donc exprimer chacun de ces produits vectoriels en fonction de $\vec{AE}$.

(1) on a : $\|\vec{AB} \wedge \vec{AD}\| = AB \times AD \times \sin\frac{\pi}{2} = 1$
$(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ est une base directe
donc : $\vec{AB} \wedge \vec{AD} = \vec{AE}$

(2) on a : $\|\vec{BA} \wedge \vec{BC}\| = BA \times BC \times \sin\frac{\pi}{2} = 1$
$(\vec{BA}, \vec{BC}, \vec{BF})$ est une base indirecte
donc : $\vec{BA} \wedge \vec{BC} = -\vec{AE}$

(3) on a : $\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = AB \times AC \times \sin\frac{\pi}{4}$
$= 1 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$
$(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AE})$ est une base directe
donc : $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{AE}$

(4) on a : $\|\vec{AC} \wedge \vec{BD}\| = AC \times BD \times \sin\frac{\pi}{2}$
$= \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 1 = 2$
$(\vec{AC}, \vec{BD}, \vec{AE})$ est une base directe
donc : $\vec{AC} \wedge \vec{BD} = 2\vec{AE}$

Vecteurs colinéaires – Propriétés algébriques

■ **Vecteurs colinéaires**

La propriété suivante concernant la colinéarité des vecteurs est une conséquence immédiate de la définition du produit vectoriel. De cette propriété résulte celle concernant l'alignement des points.

Propriété

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant des vecteurs de $\mathcal{W}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

Règles de calcul

Les propriétés algébriques suivantes que nous admettons sont les règles de calcul du produit vectoriel.

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de l'espace, pour tout nombre réel k,

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$
$$(k\vec{u}) \wedge \vec{v} = k(\vec{u} \wedge \vec{v})$$
$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$$

Exemples

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant des vecteurs de $\mathcal{W}$, on a :
$(\vec{u} + 3\vec{v}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{v} + 3\vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{v}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant des vecteurs de $\mathcal{W}$, on a :
$2\vec{u} \wedge (5\vec{u} - 3\vec{v}) = (2\vec{u}) \wedge (5\vec{u}) + (2\vec{u}) \wedge (-3\vec{v})$
$= -6(\vec{u} \wedge \vec{v})$

Expression analytique d'un produit vectoriel dans une base orthonormée

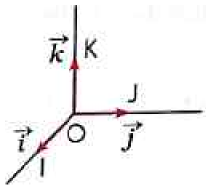
Produit vectoriel des vecteurs d'une base orthonormée

(O, I, J, K) est un repère orthonormé direct.

On pose : $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$; $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$; $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$.

D'après la définition du produit vectoriel, on obtient :

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \quad ; \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \quad ; \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$



Coordonnées du produit vectoriel dans une base orthonormée

Activité

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe.

On veut déterminer les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dans chacun des cas suivants :

(1) $\vec{u}(1 ; 5 ; -2)$ et $\vec{v}(0 ; 3 ; 0)$

(2) $\vec{u}(-3 ; 5 ; 1)$ et $\vec{v}(2 ; -4 ; -1)$

(3) $\vec{u}(x ; y ; z)$ et $\vec{v}(x' ; y' ; z')$ x, y, z, x', y', z' étant des nombres réels.

Pour cela, on pourra exprimer chacun des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonction de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Propriété

Dans une base orthonormée directe,

si **les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont respectivement pour coordonnées $(x ; y ; z)$ et $(x' ; y' ; z')$,**

alors **le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour coordonnées $(yz' - zy' ; zx' - xz' ; xy' - yx')$.**

Disposition pratique pour calculer les coordonnées d'un produit vectoriel

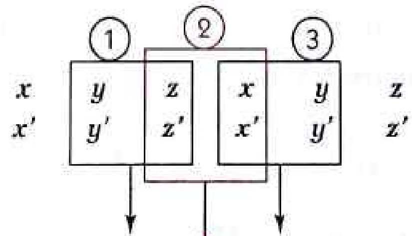
On donne $\vec{u}(x ; y ; z)$ et $\vec{v}(x' ; y' ; z')$.

Pour calculer les coordonnées (p, q, r) de $\vec{u} \wedge \vec{v}$, on peut utiliser la disposition pratique suivante :

– Ligne 1 : on écrit 2 fois les coordonnées de $\vec{u}$

– Ligne 2 : on écrit 2 fois les coordonnées de $\vec{v}$

– On calcule les déterminants des tableaux ① ② ③

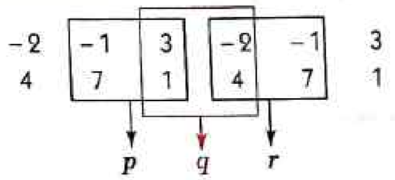


$p = yz' - zy'$ $\quad q = zx' - xz'$ $\quad r = xy' - yx'$

(p, q, r) sont les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

■ **Exemple**

Calculons les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ avec : $\vec{u}\,(-2\,;-1\,;3)$ et $\vec{v}\,(4\,;7\,;1)$.



$p = -1 - 21 = -22$

$q = 12 + 2 = 14$

$r = -14 + 4 = -10$

$\vec{u} \wedge \vec{v}\,(-22\,;14\,;-10)$

Exemples d'utilisations du produit vectoriel

■ **Propriétés géométriques**

A, B et C sont trois points non alignés de l'espace. Ils définissent donc le plan (ABC). De plus, on sait que :

aire du triangle ABC = $\frac{1}{2}$ AB × AC × sin $\widehat{BAC}$

aire du parallélogramme construit sur [AB] et [CD] = 2 aires du triangle ABC

Il en résulte les propriétés géométriques suivantes du produit vectoriel :

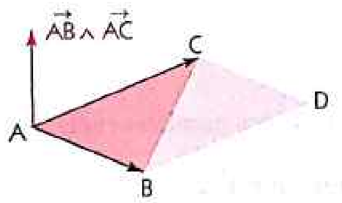
Propriétés

A, B, C sont des points de l'espace orienté.

A, B et C sont alignés ⇔ $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

L'aire du parallélogramme construit sur [AB] et [CD] est $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$



ABDC étant le parallélogramme construit sur [AB], [AC],

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$ est une base directe,

$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$ = Aire de ABDC.

■ **Exemple**

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.
On donne les points : A(−1 ; 5 ; 3), B(2 ; − 2 ; 1), C(0 ; 4 ; 7)
Démontrer que les points A, B, C ne sont pas alignés.
Quelle est l'aire du triangle ABC ? Déterminer une équation du plan (ABC).

Calcul de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

On a : $\overrightarrow{AB}\,(3\,;-7\,;-2)$; $\overrightarrow{AC}\,(1\,;-1\,;4)$; $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\,(-30\,;-14\,;4)$.

Aire du triangle ABC

Les points A, B et C ne sont pas alignés car $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est non nul, ils déterminent un plan (ABC) et :

$$\text{Aire de ABC} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2}\sqrt{(-30)^2 + 4^2 + (-14)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1\,112}$$

Équation du plan (ABC)

Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est normal au plan (ABC) ; il en est de même du vecteur $\vec{n}\,(-15\,;-7\,;2)$.

On obtient : $-15x + 2y - 7z + 14 = 0$.

TP Travaux pratiques

TP Corps commutatif – Espace vectoriel

Ce TP a pour objet de regrouper, par des concepts unificateurs, des ensembles de référence muni « d'opérations » étudiés tout le long du secondaire.
Ce sont d'une part : $(\mathbb{R}, +, \times)$ et $(\mathbb{C}, +, \times)$, d'autre part : $(\mathcal{V}, +, \bullet)$ et $(\mathcal{W}, +, \bullet)$.

Notion de corps commutatif

Loi de composition interne

Définition

L'addition des nombres réels, notée +, est une application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; on dit que c'est une **loi de composition interne** définie dans $\mathbb{R}$.

Exemples

– L'addition des nombres complexes, des vecteurs du plan, des vecteurs de l'espace, sont des lois de composition interne définies respectivement dans $\mathbb{C}$, dans $\mathcal{V}$, dans $\mathcal{W}$.

add +

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x\,;y) \mapsto x+y$ $\qquad$ $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $(z\,;t) \mapsto z+t$ $\qquad$ $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, $(\vec{u}\,;\vec{v}) \mapsto \vec{u}+\vec{v}$ $\qquad$ $\mathcal{W} \times \mathcal{W} \to \mathcal{W}$, $(\vec{u}\,;\vec{v}) \mapsto \vec{u}+\vec{v}$

– La multiplication des nombres réels, des nombres complexes, notée ×, est une loi de composition interne définie respectivement dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$.

mul ×

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x\,;y) \mapsto x \times y$ $\qquad$ $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $(z\,;t) \mapsto z \times t$

Notion de groupe commutatif

- L'addition possède les mêmes propriétés dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{C}$, dans $\mathcal{V}$, dans $\mathcal{W}$.

	a, b et c sont des éléments de $\mathbb{R}$ (resp. de $\mathbb{C}$)	**$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des éléments de $\mathcal{V}$ (resp. de $\mathcal{W}$)**
(1) L'addition est commutative	$a+b=b+a$	$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
(2) L'addition est associative	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$
(3) L'addition admet un élément neutre	$a+0=a$	$\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$
(4) Tout élément admet un opposé	$a+(-a)=0$	$\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$

On résume les propriétés (1), (2), (3) et (4) en disant que $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathcal{V}, +)$, $(\mathcal{W}, +)$ sont des **groupes commutatifs.**

- La multiplication possède les mêmes propriétés dans $\mathbb{R}^*$, dans $\mathbb{C}^*$.

	a, b et c sont des éléments de $\mathbb{R}^*$ (resp. de $\mathbb{C}^*$)
(5) La multiplication est commutative	$a \times b = b \times a$
(6) La multiplication est associative	$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
(7) La multiplication admet un élément unitaire	$a \times 1 = a$
(8) Tout élément admet un inverse	$a \times \dfrac{1}{a} = 1$

On résume les propriétés (5), (6), (7) et (8) (qui sont analogues aux propriétés (1), (2), (3) et (4)) en disant que $(\mathbb{R}^*, \times)$ et $(\mathbb{C}^*, \times)$ sont des groupes commutatifs.

■ **Notion de corps commutatif**

• Propriété concernant la multiplication et l'addition des nombres réels (respectivement des nombres complexes)

	a et b sont des éléments de $\mathbb{R}$ (resp. de $\mathbb{C}$)
(9) La multiplication est distributive par rapport à l'addition	$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

On résume les propriétés (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8) et (9) en disant que $(\mathbb{R}, +, \times)$ et $(\mathbb{C}, +, \times)$ sont des **corps commutatifs.**

Notion d'espace vectoriel

■ **Loi de composition externe**

Définition

La multiplication d'un vecteur du plan par un nombre réel, notée •, est une application de $\mathbb{R} \times \mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$. On dit que c'est une loi de composition externe définie dans $\mathcal{V}$ et à scalaires dans $\mathbb{R}$.

Exemple

La multiplication d'un vecteur de l'espace par un nombre réel est une loi de composition externe définie dans $\mathcal{W}$ et à scalaires dans $\mathbb{R}$.

mul • $\quad \begin{array}{l} \mathbb{R} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V} \\ (a\,;\vec{u}) \mapsto a\vec{u} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \mathbb{R} \times \mathcal{W} \to \mathcal{W} \\ (a\,;\vec{u}) \mapsto a\vec{u} \end{array}$

■ **Notion d'espace vectoriel**

La multiplication d'un vecteur par un nombre réel possède les mêmes propriétés dans $\mathcal{V}$ et dans $\mathcal{W}$.

a et b sont des nombres réels $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs de $\mathcal{V}$ (respectivement de $\mathcal{W}$)
(10) $1\,\vec{u} = \vec{u}$
(11) $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$
(12) $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$
(13) $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$

On résume les propriétés (1), (2), (3), (4), (10), (11), (12) et (13) en disant que $(\mathcal{V}, +, \bullet)$ et $(\mathcal{W}, +, \bullet)$ sont des **espaces vectoriels** sur $\mathbb{R}$.

Exercices

ENTRAÎNEMENT

Vecteurs et points de l'espace

Vecteurs de l'espace

1 L'ensemble $\mathcal{W}$ est muni de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Démontrer que les vecteurs :

$$\frac{5}{2}\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k} \quad \text{et} \quad -\frac{5}{3}\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$$

sont colinéaires.

2 L'ensemble $\mathcal{W}$ est muni d'une base. Dans chacun des cas suivants, on donne les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

(1) $\vec{u}(1 ; 2 ; 3)$ et $\vec{v}(a ; 5 ; 0)$

(2) $\vec{u}(1 ; 5 ; 3)$ et $\vec{v}(2 + a ; 2a + 1 ; a)$

(3) $\vec{u}(2a - 5 ; 19 - 4a ; -3)$ et $\vec{v}(6 ; 15 ; -6(\frac{a}{7} + 2))$

Peut-on déterminer a pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires ?

3 Dans chacun des cas suivants, dire s'il existe un nombre réel λ tel que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colnéaires. Préciser cette valeur.

(1) $\vec{u}(1 ; -2 ; 5)$ et $\vec{v}(\lambda ; 1 ; 0)$

(2) $\vec{u}(5 ; 1 ; 3)$ et $\vec{v}(4 + \lambda ; \lambda ; 2\lambda + 1)$

(3) $\vec{u}(7 ; 0 ; 4)$ et $\vec{v}(\lambda ; 2\lambda ; 1)$

(4) $\vec{u}(\lambda ; 1 ; 4)$ et $\vec{v}(8 ; 2 ; \lambda)$

4 L'ensemble $\mathcal{W}$ est muni de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Dans chacun des cas suivants, trouver les nombres réels λ et μ pour lesquels les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

(1) $\vec{u}(1 ; 3 ; \lambda)$ et $\vec{v}(2 ; \mu ; 5)$

(2) $\vec{u}(\lambda ; +2 ;)$ et $\vec{v}(-1 ; 3 ; 2)$

5 L'ensemble $\mathcal{W}$ est muni d'une base.
Dans chacun des cas suivants, trouver les nombres a et b pour lesquels les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

(1) $\vec{u}(-3 ; 2 ; a)$ et $\vec{v}(1 ; b ; 1)$

(2) $\vec{u}(a ; (a-1) ; b)$ et $\vec{v}(-2 ; -3 ; 1)$

6 L'ensemble $\mathcal{W}$ est muni de la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne quatre points A, B, C et D de l'espace $\mathcal{E}$, tels que :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \quad ; \quad \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$$
$$\overrightarrow{AD} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

Déterminer les points P tels que (DP) appartienne au plan (OAB) et $\overrightarrow{AP}$ soit un vecteur unitaire orthogonal à $\overrightarrow{AD}$.

7 L'ensemble $\mathcal{W}$ est muni d'une base.
Dans chacun des cas suivants, trouver le nombre réel a pour lequel les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient coplanaires.

(1) $\vec{u}(-1 ; -1 ; 1)$ $\vec{v}(1 ; -1 ; 1)$ $\vec{w}(-1 ; 0 ; a)$

(2) $\vec{u}(1 ; -1 ; 1)$ $\vec{v}(1 ; 1 ; -1)$ $\vec{w}(2 ; 1 + a ; -3)$

Barycentre

8 Dans l'espace $\mathcal{E}$, on donne un triangle ABC.
On désigne par A', B', C', les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB].
Démontrer que pour tout point M de l'espace $\mathcal{E}$,

$$MA + MB + MC = MA' + MB' + MC'$$

Produit scalaire

9 L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé.
On donne les points :

$$A(-1 ; 1 ; -1), \quad B(0 ; 1 ; 0), \quad C(2 ; 1 ; 1).$$

1. Calculer les produits scalaires :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \;;\; \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} \;;\; \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}.$$

2. Déterminer une valeur approchée, en degré, des angles : $\widehat{BAC}$; $\widehat{CBA}$; $\widehat{ACB}$.

10 L'espace $\mathcal{E}$ est muni du repère orthonormé (O, I, J, K).

1. Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D tels que AJOIBCKD soit un cube.

2. Déterminer le centre Ω de ce cube.

3. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{\Omega B}$.

4. Déterminer une valeur approchée, en degré, de l'angle $\widehat{A\Omega B}$.

11 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de $\mathcal{W}$. Donner une expression plus simple de chacun des nombres réels suivants :

(1) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$

(2) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v}$

(3) $\|\vec{u}\|^2 - 6\vec{u}.\vec{v} + 9\|\vec{v}\|^2$

(4) $\|\vec{u} + 2\vec{v}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

12 Dans chacun des cas suivants, déterminer les coordonnées d'un vecteur normal au plan P :

(1) P : $2x + y - 4z = 0$

(2) P : $3x - 5y + 2z - 1 = 0$

(3) P : $x + y = 0$

(4) P : $x - z + 1 = 0$

(5) P : $x = -1$

13 Dans chacun des cas suivants, établir une équation du plan P passant par le point A, dont $\vec{n}$ est un vecteur normal.

(1) $A(1 ; 1 ; 0)$; $\vec{n}(-1 ; 1 ; 1)$

(2) $A(2 ; 1 ; -1)$; $\vec{n}(1 ; 0 ; 0)$

(3) $A(1 ; 0 ; 1)$; $\vec{n}(0 ; 1 ; -1)$

14 On donne les points $A(1 ; 2 ; -1)$ et $B(0 ; 1 ; 3)$.
Établir une équation du plan médiateur de segment [AB].

15 On donne le point $A(1 ; 2 ; 3)$ et le vecteur $\vec{u}(1 ; 2 ; -1)$.
Déterminer une équation de l'ensemble des points M tels que : $\vec{u}.\overrightarrow{AM} = 2$.
Quelle est la nature de cet ensemble ?

16 L'espace $\mathscr{E}$ est muni de la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points :

$A(1 ; 2 ; 1)$, $B(2 ; 1 ; 2)$, $C(4 ; 5 ; 1)$.

1. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.
2. Trouver les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :
$\vec{u}$ soit unitaire, colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ et de même sens que $\overrightarrow{AB}$;
$\vec{v}$ soit unitaire, colinéaire à $\overrightarrow{AC}$ et de même sens que $\overrightarrow{AC}$.
3. Déterminer le vecteur unitaire $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base orthonormée directe.
Déterminer le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$.
Placer dans l'espace $\mathscr{E}$ les points A, B, C et D.

17 L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct.
1. Trouver un vecteur normal au plan déterminé par les points : $A(1 ; -1 ; 2)$, $B(2 ; 0 ; -1)$, $C(0 ; 2 ; 1)$.
2. Calculer l'aire du triangle ABC.

18 L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J, K).
On considère les points :

$A(1 ; 2 ; 1)$, $B(2 ; 3 ; 2)$, $C(2 ; 0 ; 2)$.

1. Vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.
2. Trouver les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :
$\vec{u}$ soit unitaire, colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ et de même sens que $\overrightarrow{AB}$;
$\vec{v}$ soit unitaire, colinéaire à $\overrightarrow{AC}$ et de même sens que $\overrightarrow{AC}$.
3. Trouver le vecteur unitaire $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base orthonormée directe.
Quel est l'extrémité du représentant d'origine A de $\vec{w}$.
Quelle est l'extrémité D du représentant d'origine A de $\vec{w}$?
4. Placer les points A, B, C, D.

19 L'espace $\mathscr{E}$ est muni de la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Déterminer un vecteur normal au plan déterminé par les points : $A(2 ; -1 ; 1)$; $B(1 ; 0 ; -2)$; $C(3 ; 4 ; 1)$.
Trouver l'aire du triangle ABC.
Faire une figure.

20 L'ensemble $\mathscr{W}$ est muni de la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On donne les vecteurs $\vec{u}(0 ; 3 ; 2)$ et $\vec{v}(5 ; 0 ; 2)$.
1. Vérifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.
2. Déterminer un vecteur non nul $\vec{n}$ qui soit orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
3. Montrer qu'un vecteur $\vec{w}$ de $\mathscr{W}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement si, il est colinéaire à $\vec{n}$.

21 L'ensemble $\mathscr{W}$ est muni de la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Dans chacun des cas suivants, trouver le nombre réel λ pour lequel les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient coplanaires.

(1) $\vec{u}(-1 ; -1 ; 1)$, $\vec{v}(1 ; -1 ; 1)$ et $\vec{w}(-1 ; 0 ; \lambda)$

(2) $\vec{u}(1 ; -1 ; 1)$, $\vec{v}(1 ; 1 ; -1)$ et $\vec{w}(2 ; 1 + \lambda ; -3)$

Produit vectoriel

22 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.
Dans chacun des cas suivants, calculer le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

(1) $\vec{u}(1 ; 5 ; 3)$ et $\vec{v}(0 ; 4 ; -1)$

(2) $\vec{u}(7 ; 9 ; 0)$ et $\vec{v}(-1 ; 2 ; -4)$

(3) $\vec{u}(-2 ; -2 ; -1)$ et $\vec{v}(3 ; 5 ; 7)$

(4) $\vec{u}(5 ; 0 ; 1)$ et $\vec{v}(-2 ; 8 ; 0)$

23 Dans un espace $\mathscr{E}$, on donne deux parallélogrammes ABCD et tels que les droites (AP), (BQ), (CR) et (DS) soient parallèles.
On désigne par $\vec{n}$ un vecteur directeur unitaire de la droite (PP').
On pose : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$; $\vec{u'} = \overrightarrow{PQ}$; $\vec{v'} = \overrightarrow{PS}$.
1. Faire la figure et démontrer que :
$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{n} = (\vec{u'} \wedge \vec{v'}) \wedge \vec{n}.$$
2. Donner un interprétation géométrique de l'égalité précédente.

24 L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct.
On donne trois points $P(1 ; 2 ; -1)$, $Q(3 ; -1 ; 4)$ et $R(2 ; 6 ; 2)$.
S est un point de $\mathscr{E}$ tel que PQRS est un parallélogramme.
1. Construire le parallélogramme PQRS.
2. Trouver les coordonnées du point S.
3. Trouver l'aire du parallélogramme PQRS.

25 L'ensemble $\mathscr{W}$ est muni de la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Trouver un vecteur unitaire orthogonal aux vecteurs $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{j} + \vec{k}$.

26 L'espace $\mathscr{E}$ est muni de la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On donne trois points :

$A(1 ; 1 ; 2)$, $B(2 ; 1 ; 3)$ et $C(0 ; 2 ; 1)$.

D est un point de E tel que ABCD soit un parallélogramme.
1. Construire le parallélogramme ABCD.
2. Trouver les coordonnées du point D.
3. Calculer l'aire du parallélogramme ABCD.

27 L'ensemble $\mathscr{W}$ est muni d'une base orthonormée directe.
On donne les vecteurs :

$\vec{u}(4 ; 8 ; 1)$, $\vec{v}(2 ; 1 ; -2)$ et $\vec{w}(3 ; -4 ; 12)$.

1. Calculer $(\vec{u} \cdot \vec{v}).\vec{w}$ et $(\vec{u} \cdot \vec{w}).\vec{u}$.
2. Calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$ puis $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$.
3. Calculer $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$.
Comparer $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ et $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

28 L'ensemble $\mathscr{W}$ est muni de la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On donne le vecteur $\vec{n}(1 ; -3 ; 2)$.
1. Déterminer deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathscr{W}$ qui soient orthogonaux à $\vec{n}$.
2. Démontrer qu'un vecteur $\vec{w}$ de $\mathscr{W}$ est orthogonal à $\vec{n}$ si et seulement si, il est coplanaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

13 Systèmes linéaires

La méthode de pivot due à Gauss, longtemps délaissée, fut réhabilitée, aidée en cela par son caractère de calcul automatique parfaitement adapté à l'utilisation de l'informatique.

Cependant, l'étude des systèmes linéaires a débuté avant l'utilisation des vecteurs.

Ils étaient résolus par la méthode des déterminants auxquels le mathématicien allemand Carl Jacobi donna leur forme définitive.

Jacobi fut reconnu comme le plus grand calculateur de son temps.

© Palais de la Découverte, Paris

Carl Jacobi
mathématicien allemand – 1804-1851.

SOMMAIRE

1 Résolution d'un système linéaire par la méthode de Gauss

1.1. Principe de la méthode de Gauss

Exemple introductif

Résolvons le système linéaire suivant d'inconnue $(x\,;y\,;z)$: (Σ) $\begin{cases} 2x + y + z = 0 & (E_1) \\ -x + 3y + z = 1 & (E_2) \\ 4x - 2y + 5z = 2 & (E_3) \end{cases}$

Transformons le système (Σ) en un système triangulaire équivalent.

Élimination de x dans (E_2) et dans (E_3)

On remplace : (E_2) par $(E_1) + 2(E_2)$
(E_3) par $-2(E_1) + (E_3)$

On obtient le système équivalent suivant :

$$(\Sigma')\begin{cases} 2x + y + z = 0 & (E_1) \\ 7y + 3z = 2 & (E'_2) \\ -4y + 3z = 2 & (E'_3) \end{cases}$$

Élimination de y dans (E'_3)

On remplace : (E'_3) par $4(E'_2) + 7(E'_3)$.

On obtient le système triangulaire équivalent suivant :

$$(\Sigma'')\begin{cases} 2x + y + z = 0 & (E_1) \\ 7y + 3z = 2 & (E_2) \\ 33z = 22 & (E''_3) \end{cases}$$

(Σ'') admet une seule solution : $(-\frac{1}{3}\,;0\,;\frac{2}{3})$.

Principe de la méthode de Gauss

Vocabulaire

– Les équations d'un système sont appelées les **lignes** de ce système et sont notées : L_1, L_2,...

– Comme le montre l'exemple introductif, des opérations élémentaires sur les lignes permettent de transformer un système linéaire en un système triangulaire équivalent.

Opérations élémentaires	Codage
Échange de deux lignes L_i et L_j	$L_i \leftrightarrow L_j$
Remplacement de la ligne L_i par la combinaison λL_i obtenue en multipliant chaque coefficient de L_i par le nombre réel λ supposé non nul.	$L_i \leftarrow \lambda L_i$
Remplacement de la ligne L_i par la combinaison $\alpha L_i + \beta L_j$ obtenue en additionnant membre à membre les lignes αL_i et βL_j, α étant un nombre réel non nul et β un nombre réel quelconque.	$L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$

Exemple

Chacun des systèmes obtenus est équivalent au système donné.

Systèmes donnés	Systèmes obtenus	Opérations élémentaires effectuées
$\begin{cases} 3x + y - z - u = 2 & L_1 \\ 2x - 2y + z + u = -2 & L_2 \\ 2x - 2y + 4z + 6u = 4 & L_3 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - 2y + z + u = -2 \\ 3x + y - z - u = 2 \\ 2x - 2y + 4z + 6u = 4 \end{cases}$	$L_1 \leftrightarrow L_2$
	$\begin{cases} 3x + y - z - u = 2 \\ 2x - 2y + z + u = -2 \\ x - y + 2z + 3u = 2 \end{cases}$	$L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3$
	$\begin{cases} 3x + y - z - u = 2 \\ 8y - 5z - 5u = 10 \\ 2x - 2y + 4z + 6u = 4 \end{cases}$	$L_2 \leftarrow 2L_1 - 3L_2$

Méthode de GAUSS

La méthode de Gauss consiste à transformer un système linéaire en un système triangulaire équivalent en exécutant des opérations élémentaires sur les lignes.

M

Pour résoudre un système linéaire par la méthode de GAUSS, on procède comme suit :
– on vérifie que, dans la ligne L_1, le coefficient de la première inconnue est non nul, sinon on échange L_1 avec une ligne dont le coefficient de la première inconnue est non nul ;
– à l'aide de l'opération élémentaire $[L_i \leftarrow \lambda L_i + \beta L_j]$ on annule tous les coefficients de la première inconnue dans les autres lignes ;
– on recommence le procédé pour la deuxième inconnue, la troisième inconnue, ..., jusqu'à obtention d'un système triangulaire.

Exemple

Résolvons le système linéaire suivant d'inconnue $(x\,;\,y\,;\,z\,;\,t)$: (Σ) $\begin{cases} y + z - 2t = 1 \\ x - y + z + t = 1 \\ 3x + 3y - z - t = 3 \\ 2x - 3y + 2z + 3t = 4 \end{cases}$

	Opérations élémentaires	Systèmes équivalents obtenus
Le 1[er] coefficient de L_1 est nul Échange de L_1 et L_2	$L_1 \leftrightarrow L_2$	$\begin{cases} x - y + z + t = 1 \\ y + z - 2t = 1 \\ 3x + 3y - z - t = 3 \\ 2x - 3y + 2z + 3t = 4 \end{cases}$
Élimination de x dans la ligne L_3 Élimination de x dans la ligne L_4	$L_3 \leftarrow -3L_1 + L_3$ $L_4 \leftarrow -2L_1 + L_4$	$\begin{cases} x - y + z + t = 1 \\ y + z - 2t = 1 \\ 6y - 4z - 4t = 0 \\ -y + t = 2 \end{cases}$
Élimination de y dans la ligne L_3 Élimination de y dans la ligne L_4	$L_3 \leftarrow -6L_2 + L_3$ $L_4 \leftarrow L_2 + L_4$	$\begin{cases} x - y + z + t = 1 \\ y + z - 2t = 1 \\ -10z + 8t = -6 \\ z - t = 3 \end{cases}$
Élimination de z dans la ligne L_4	$L_4 \leftarrow L_3 + 10L_4$	$\begin{cases} x - y + z + t = 1 \\ y + z - 2t = 1 \\ -10z - 8t = -6 \\ -2t = 4 \end{cases}$

Le système triangulaire obtenu conduit à la solution unique : $(-\frac{32}{5}\,;\,-\frac{36}{5}\,;\,\frac{11}{5}\,;\,-2)$.

Remarque

Dans le cas d'un système linéaire d'inconnue $(x\,;\,y\,;\,z)$, l'étude faite dans le chapitre précédent sur les positions relatives des plans permet de donner une interprétation géométrique d'un système linéaire dans $\mathbb{R}^3$.

Exercices

1.a Le triplet (1 ; 1 ; 1) est-il solution du système :
$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y - z = 4 \\ x + 3z = 2 \end{cases}$?

1.b Dans chacun des cas suivants, dire si les systèmes (Σ) et (Σ') sont équivalents :

(1) $(\Sigma)\begin{cases} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{cases}$ $(\Sigma')\begin{cases} L_2 \\ L_2 - L_3 \\ L_2 + L_3 \end{cases}$

(2) $(\Sigma)\begin{cases} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{cases}$ $(\Sigma')\begin{cases} L_1 \\ L_1 + L_3 \\ L_3 \end{cases}$

(3) $(\Sigma)\begin{cases} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{cases}$ $(\Sigma')\begin{cases} L_2 \\ L_1 + L_3 \\ L_3 - L_1 \end{cases}$

(4) $(\Sigma)\begin{cases} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{cases}$ $(\Sigma')\begin{cases} L_2 \\ L_1 - L_3 \\ L_2 + L_3 \end{cases}$

1.2. Exemples de résolution de systèmes

Dans ce paragraphe, l'espace est muni d'un repère orthonormé.

Exemple 1

Résolvons le système linéaire suivant, d'inconnue $(x ; y ; z)$: (Σ) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ -x + y + 2z = -2 \end{cases}$

Résolution

Choisissons l'une des trois inconnues, par exemple z comme paramètre. On ramène le système (Σ) à un système (Σ') de deux équations à deux inconnues : (Σ') $\begin{cases} 2x + y = 1 + z \\ -x + y = -2 - 2z \end{cases}$

La résolution de (Σ') conduit à la solution définie par : $x = 1 + \lambda$; $y = -1 - \lambda$; $z = \lambda$ $[\lambda \in \mathbb{R}]$.
Le système (Σ) a donc une infinité de solutions constituées des triplets $(1 + \lambda ; -1 - \lambda ; \lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Interprétation géométrique

$\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont les plans d'équations respectives :

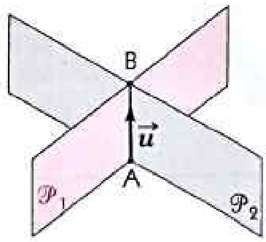
$$2x + y - z - 1 = 0$$
$$-x + y + 2z + 2 = 0$$

$\vec{n}(2 ; 1, -1)$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}_1$

$\vec{n}'(-1 ; 1, 2)$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}_2$

$\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas coplanaires, ce qui justifie que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.
Tout point commun à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ a pour coordonnées $(1 + \lambda ; -1 - \lambda ; \lambda)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
Donc $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécantes suivant la droite $(\mathcal{D})$ passant par le point $A(1, -1, 0)$ (et le point $B(0 ; 0 ; -1)$) et de vecteur directeur $\vec{u}(1 ; -1 ; 1)$.

Illustration graphique



Exemple 2

Résolvons le système linéaire suivant, d'inconnue $(x ; y ; z)$: (Σ) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 & (L_1) \\ -x + y + 2z = -2 & (L_2) \\ x + 2y + z = -1 & (L_3) \end{cases}$

Résolution

	Opérations élémentaires	Systèmes équivalents obtenus
Conservation de L_1 Élimination de x dans L_2 Élimination de x dans L_3	$L_2 \leftarrow L_1 + 2L_2$ $L_3 \leftarrow -L_1 + 2L_3$	$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3y + 3z = -3 \\ 3y + 3z = -3 \end{cases}$
Élimination de y dans L_3	$L_3 \leftarrow -L_2 + L_3$	$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3y + 3z = -3 \\ 0 = 0 \end{cases}$

– Le dernier système obtenu est équivalent au système suivant de deux équations linéaires :

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3y + 3z = -3. \end{cases}$$

– Choisissons l'une des trois inconnues, par exemple z comme paramètre. On ramène (Σ) au système suivant de deux équations linéaires à deux inconnues : $\begin{cases} 2x + y = z + 1 \\ 3y = -3z - 3 \end{cases}$

La résolution de ce système conduit à la solution $(z + 1, -z - 1)$.

– Le système (Σ) admet donc une infinité de solutions : les triplets de la forme $(z + 1 ; -z - 1 ; z)$, avec $z \in \mathbb{R}$.

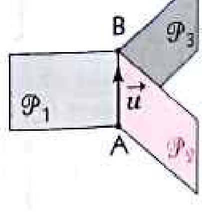
Interprétation géométrique

$\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont les plans d'équations respectives :

$$2x + y - z - 1 = 0$$
$$-x + y + 2z + 2 = 0$$
$$x + 2y + z + 1 = 0$$

$\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont sécants suivants la droite passant par le point $A(1 ; -1 ; 0)$ (et le point $B(0 ; 0 ; -1)$) et de vecteur directeur $\vec{u}(1, -1, 1)$.

Illustration graphique



Exemple 3

Résolvons le système linéaire suivant, d'inconnue $(x ; y ; z)$: (Σ) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3x + 3y - z = 2 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$

Résolution

	Opérations élémentaires	Systèmes équivalents obtenus
Conservation de L_1 Élimination de x dans L_2 Élimination de x dans L_3	$L_2 \leftarrow -3L_1 + 2L_2$ $L_3 \leftarrow -L_1 + L_3$	$\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ 3y + z = 1 \\ 3y + z = 2 \end{cases}$
Élimination de y dans L_3	$L_3 \leftarrow -L_2 + L_3$	$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3y + z = 1 \\ 0 = 1 \end{cases}$

Le système triangulaire obtenu n'admet pas de solution ; donc le système (Σ) n'a pas de solution.

Interprétation géométrique

$\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont les plans d'équations respectives :

$$2x + y - z - 1 = 0$$
$$3x + 3y - z - 2 = 0$$
$$2x + 4y - 3 = 0$$

$\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ n'ont aucun point commun.

Étudions leurs positions relatives

$\vec{n}_1(2 ; 1 ; -1)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$

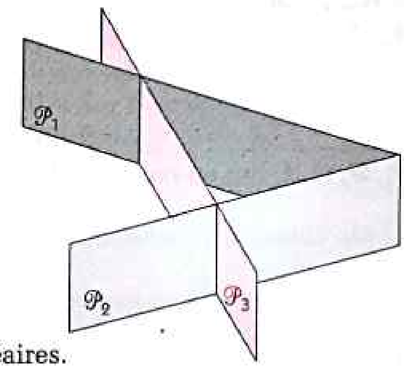
$\vec{n}_2(3 ; 3 ; -1)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_2$

$\vec{n}_3(2 ; 4 ; 0)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_3$

Parmi les vecteurs $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ et $\vec{n}_3$, il n'en existe pas deux qui soient colinéaires.

Donc parmi les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$, il n'en existe pas deux qui soient parallèles.

Illustration graphique



Exemple 4

Résolvons le système linéaire suivant, d'inconnue $(x ; y ; z)$: (Σ) $\begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ -6x + 3y + 3z = 1 \\ x + y = -3 \end{cases}$

Résolution

	Opérations élémentaires	Systèmes équivalents obtenus
Conservation de L_1 Élimination de x dans L_2 Élimination de x dans L_3	$L_2 \leftarrow 3L_1 + L_2$ $L_3 \leftarrow L_1 - 2L_3$	$\begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ 0 = 7 \\ -3y - z = 8 \end{cases}$

Le système obtenu n'admet pas de solution ; donc le système (Σ) n'a pas de solution.

Interprétation géométrique

$\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont les plans d'équations respectives :

$$2x - y - z - 2 = 0$$
$$-6x + 3y + 3z - 1 = 0$$
$$x + y + 3 = 0$$

$\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ n'ont aucun point commun.

Étudions leurs positions relatives

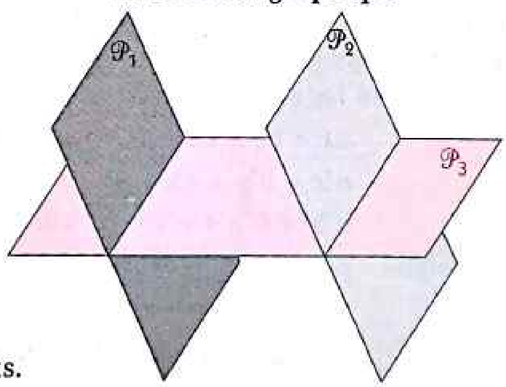
$\vec{n}_1(2 ; -1 ; -1)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$

$\vec{n}_2(-6 ; 3 ; 3)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_2$

$\vec{n}_3(1 ; 1 ; 0)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_3$

On en déduit que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles, $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$ sont sécants.

Illustration graphique



Exemple 5

Résolvons le système linéaire suivant d'inconnue $(x\,;\,y\,;\,z)$: (Σ) $\begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ -x + 3y - 2z = 7 \\ 5x - 2y - z = -8 \end{cases}$

Résolution

	Opérations élémentaires	Systèmes équivalents obtenus
Conservation de L_1 Élimination de x dans L_2 Élimination de x dans L_3	$L_2 \leftarrow L_1 + 2L_2$ $L_3 \leftarrow -5L_1 + 2L_3$	$\begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ 5y - 3z = 19 \\ y - 7z = -41 \end{cases}$
Élimination de y dans L_3	$L_3 \leftarrow L_2 - 5L_3$	$\begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ 5y - 3z = 19 \\ 32z = 224 \end{cases}$

La résolution du système triangulaire conduit à la solution unique : $(3\,;\,8\,;\,7)$.

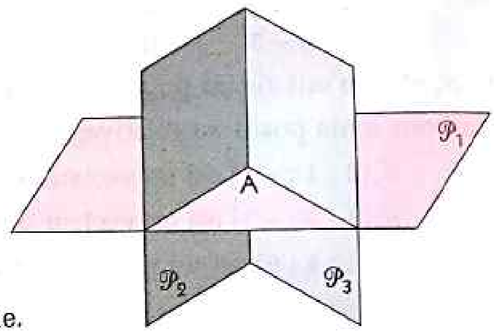
Interprétation géométrique

$\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont les plans d'équations respectives :

$$2x - y + z - 5 = 0$$
$$-x + 3y - 2z - 7 = 0$$
$$5x - 2y - z - 8 = 0$$

$\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ ont en commun l'unique point A $(3\,;\,8\,;\,7)$.

Illustration graphique



- Les systèmes ci-dessous admettent chacun une solution unique.
Résoudre ces systèmes par la méthode de Gauss.

$(\Sigma_1)\begin{cases} x - y + z = 2 \\ -x + y + z = -1 \\ -x + 2y - z = 1 \end{cases}$ $\quad(\Sigma_2)\begin{cases} x + y + z = -2 \\ 2x + 3y - z = 2 \\ x + 3y + z = 1 \end{cases}$ $\quad(\Sigma_3)\begin{cases} -3x + 2y - z = 1 \\ x + y + z = 0 \\ 4x + 3y - 2z = 3 \end{cases}$ $\quad(\Sigma_4)\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y - z = 4 \\ x + 3z = 2 \end{cases}$

Interprétations géométriques d'un système dans $\mathbb{R}^3$

– L'interprétation géométrique de l'exemple 1, fournit un cas de positions relatives de deux plans non parallèles.

– Les interprétations géométriques des exemples 2, 3, 4 et 5 fournissent des cas de positions relatives de trois plans non parallèles.

- Compléter ces exemples afin qu'ils fournissent tous les cas possibles traduisant les positions relatives de deux plans, de trois plans.

Le tableau récapitulatif suivant décrit le cas général :

$(a, b, c, d, a', b', c', d', a'', b'', c''$ et d'' sont des nombres réels tels que (a,b,c), (a',b',c') et (a'',b'',c'') sont différents de $(0,0,0)$.

On a considéré les équations :

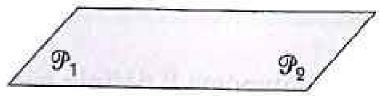
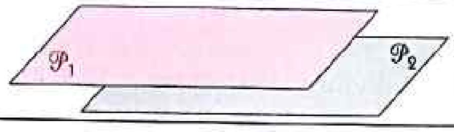
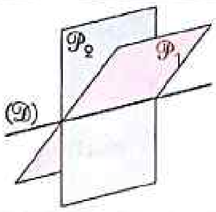
$$ax + by + cz + d = 0 \quad L_1\ ;$$
$$a'x + b'y + c'z + d' = 0 \quad L_2\ ;$$
$$a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \quad L_3.$$

On a désigné par $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ les plans d'équations respectives L_1, L_2, L_3 ;
par (Σ) le système L_1 *et* L_2,
par (Σ') le système L_1 *et* L_2 *et* L_3.

TABLEAU RÉCAPITULATIF

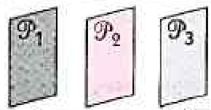
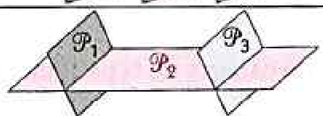
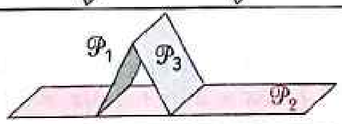
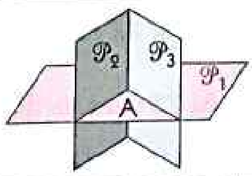
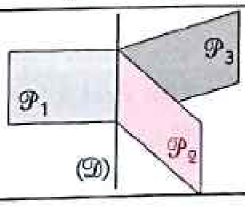
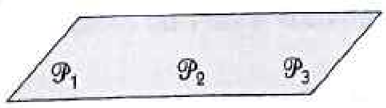
① Système de deux équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$

L'ensemble S des solutions de (Σ) est l'ensemble des triplets de coordonnées des points de $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

Positions relatives de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$	Illustration graphique	Ensemble S des solutions de (Σ)
$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$		(Σ) a un infinité de solutions ; S est l'ensemble des triplets $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que : $ax + by + cz = d$
$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \varnothing$		(Σ) n'a pas de solution ; $S = \varnothing$
$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = (\mathcal{D})$		(Σ) a un infinité de solutions ; S est l'ensemble des triplets de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ des points de $(\mathcal{D})$

② Système de trois équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$

L'ensemble S' des solutions de (Σ') est l'ensemble des triplets de coordonnées des points de $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$.

Positions relatives de $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$	Illustration graphique	Ensemble S' des solutions de (Σ')
$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \varnothing$	  	(Σ') n'a pas de solution ; $S' = \varnothing$
$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \{A\}$		(Σ') a une seule solution : $(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$
$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = (\mathcal{D})$		(Σ') a un infinité de solutions ; S' est l'ensemble des triplets de coordonnées des points de $(\mathcal{D})$
$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_3$		(Σ') a un infinité de solutions ; S' est l'ensemble des triplets de coordonnées des points de $\mathcal{P}_1$

2 Résolution de problèmes

Exemple 1

Déterminons la fonction polynôme P de degré inférieur ou égal à 2 vérifiant les conditions :
$P(-1) = -2$; $P(2) = 7$ et $P'(1) = 4$.

Choix des inconnues
Désignons par a, b, c les coefficients de la fonction polynôme P définie par : $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Mise en équation
On a : $P'(x) = 2ax + b$

Les conditions $P(-1) = -2$; $P(2) = 7$; $P'(1) = 4$ donnent le système : $(\Sigma) \begin{cases} a - b + c = -2 \\ 4a + 2b + c = 7 \\ 2a + b = 4 \end{cases}$

La résolution du système (Σ) permet d'obtenir : $a = 1$; $b = 2$; $c = -1$.

Solution
La fonction polynôme P est définie par : $P(x) = x^2 + 2x - 1$.

Exemple 2

Un potier fabrique trois types différents A, B, C de canaris.
Pour fabriquer un canari du type A, le potier a besoin de : 40 kg d'argile, 60 litres d'eau et 15 kg de bois de chauffage.
Pour fabriquer un canari du type B, le potier a besoin de : 18 kg d'argile, 20 litres d'eau et 7 kg de bois de chauffage.
Pour fabriquer un canari du type C, le potier a besoin de : 70 kg d'argile, 110 litres d'eau, 35 kg de bois de chauffage.
En une semaine, le potier utilise pour la fabrication de ces canaris : 3 656 kg d'argile, 5 040 litres d'eau et 1 494 kg de bois de chauffage.
Déterminer le nombre de canaris de chaque type que ce potier fabrique ainsi en une semaine.

Choix des inconnues
Soit x le nombre de canaris de type A, y le nombre de canaris de type B et z le nombre de canaris du type C fabriqués en une semaine.

Mise en équation
La traduction de l'énoncé conduit au système : $(\Sigma) \begin{cases} 40x + 18y + 70z = 3\,656 \\ 60x + 20y + 110z = 5\,040 \\ 15x + 7y + 35z = 1\,494 \end{cases}$

La résolution du système (Σ) permet d'obtenir : $x = 38$; $y = 72$; $z = 12$.

Solution
En une semaine, le potier fabrique 38 canaris de type A, 72 canaris de type B et 12 canaris de type C.

Exemple 3

Déterminer une fonction polynôme f de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant les conditions :
$f(0) = 0$; pour tout nombre réel x, $f(x) = x + f(x - 2)$.

Choix des inconnues
Désignons par a, b, c, d les nombres réels tels que la fonction polynôme f est définie par :
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Mise en équation
– La condition (1) : $f(0) = 0$ se traduit par (1') : $d = 0$.
– La condition (2) : pour tout nombre réel x, $f(x) = x + f(x - 2)$
se traduit par (2') : pour tout nombre réel x, $a[x^3 - (x - 2)^3] + b[x^2 - (x - 2)^2] + 2c = x$.

Pour déterminer les nombres réels a, b, c formons trois équations contenant ces trois inconnues.
Il suffit pour cela d'attribuer dans (2') au nombre réel x trois valeurs : $x = 2$; $x = 3$; $x = 4$.

On obtient le système : $(\Sigma) \begin{cases} 8a + 4b + 2c = 2 \\ 26a + 8b + 2c = 3 \\ 56a + 12b + 2c = 4 \end{cases}$

La résolution du système (Σ) permet d'obtenir : $a = 0$; $b = \frac{1}{4}$; $c = \frac{1}{2}$.

Solution

La fonction polynôme f est définie par : $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$.

Exemple 4

Une usine fabrique trois produits différents A, B et C. La fabrication d'une unité de produit nécessite 5 heures de travail pour A, 3 heures pour B et $\frac{1}{3}$ heure pour C.
L'usine fabrique 100 unités de ces produits pendant 100 heures de travail, le nombre d'unités du produit B étant le tiers du nombre d'unités de A. Parmi ces 100 unités, combien d'unités de chaque produit l'usine fabrique-t-elle ?

Choix des inconnues et mise en équation

Désignons par :
a le nombre d'unités du produit A fabriquées en 100 heures de travail
b le nombre d'unités du produit B fabriquées en 100 heures de travail
c le nombre d'unités du produit C fabriquées en 100 heures de travail

Contrainte sur le temps

Temps de fabrication, en heures du produit A : $5a$
Temps de fabrication, en heures du produit B : $3b$
Temps de fabrication, en heures du produit C : $\frac{1}{3}c$
On a : $5a + 3b + \frac{1}{3}c = 100$

Contrainte sur la production

Production totale de l'usine en 100 heures de travail : $a + b + c = 100$
La production de B est le tiers de la production de A : $a = 3b$

Système de contrainte

Les nombres réels a, b et c sont solutions du système d'équations :

$$(\Sigma) \begin{cases} 5a + 3b + \frac{1}{3}c = 100 \\ a + b + c = 100 \\ a - 3b = 0 \end{cases}$$

Résolution

	Opérations élémentaires	Systèmes équivalents obtenus
Élimination de a dans L_2 Élimination de a dans L_3	$L_2 \leftarrow -L_1 + 5L_2$ $L_3 \leftarrow -L_1 + 5L_3$	$\begin{cases} 5a + 3b + \frac{1}{3}c = 100 \\ 2b + \frac{14}{3}c = 400 \\ -18b - \frac{1}{3}c = -100 \end{cases}$
Élimination de b dans L_3	$L_3 \leftarrow 9L_2 + L_3$	$\begin{cases} 5a + 3b + \frac{1}{3}c = 100 \\ 2b + \frac{14}{3}c = 400 \\ \frac{125}{3}c = 3\,500 \end{cases}$

Le système triangulaire obtenu admet une seule solution : (12 ; 4 ; 84).

Solution du problème

L'usine fabrique 12 unités du produit A, 4 unités du produit B et 84 unités du produit C en 100 heures de travail.

Exercices

ENTRAÎNEMENT

1 L'espace est muni d'un repère orthonormé.
Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes linéaires suivants et donner une interprétation géométrique des résultats obtenus.

(1) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - 3y + z = 2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x - 4y + 6z = 3 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x + 2\sqrt{3}y - z = 3\sqrt{3} \\ \sqrt{3}x + 2y + \frac{\sqrt{3}}{3}z = 9 \end{cases}$

2 L'espace est muni d'un repère orthonormé.
Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes linéaires suivants et donner une interprétation géométrique des résultats obtenus. *(On utilisera la méthode de Gauss.)*

(1) $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -x + y + 2z = 1 \\ 3x - 3y - 5z = 2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 5x - y + z = 6 \\ 2x + 4y + 2z = 2 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -x - y + 3z = -3 \\ -2x - 3y + 4z = -4 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ 2x - y - z = 7 \\ -x + y - 2z = 2 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 2x - y + 3z = -2 \\ 2x - 2y + 4z = -3 \\ -4x + 3y - 7z = 1 \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ 3x - 6y - 3z = 3 \\ -2x + 4y + 2z = -2 \end{cases}$

3 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes linéaires d'inconnue $(x ; y)$ suivants :

(1) $\begin{cases} 2\ln x - \ln y = 0 \\ 4\ln x + \ln y = 3 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \ln x - 2\ln y = 3 \\ 3\ln x - \ln y = 1 \end{cases}$

4 On considère dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes linéaires suivants :

(1) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = 4 \\ x + 2y = m \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x - y = 2 \\ x - y = m \end{cases}$

où m est un paramètre réel.
Déterminer m pour que chacun de ces systèmes linéaires admettent au moins une solution.

5 Déterminez les valeurs du nombre réel m telles que chacun des systèmes suivants ait une seule solution, puis aucune solution, enfin plusieurs solutions.

(1) $\begin{cases} mx + y + z = 3 \\ x + my + z = 1 \\ x + y + mz = 1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ 3x + 4y + 2z = m \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$

6 Une section d'un jardin Zoologique contient des rhinocéros, des antilopes et des serpents. On compte 13 têtes, 14 cornes et 32 pattes. Combien de bêtes de chaque espèce y a-t-il ?

7 On considère le système linéaire suivant :

$\begin{cases} x - y + z = 4 \\ 2x + y - 2z = 1 \end{cases}$

Dans l'ensemble des solutions de ce système existe-t-il :
a) des solutions dont les deux premières composantes sont égales ?
b) des solutions dont les premières composantes sont égales à la troisième ?
c) des solutions dont les trois composantes sont positives ?

8 Déterminer des nombres réels a et b tels que : pour tout nombre réel x différent de 2,

$$\frac{x+1}{(x-2)^2} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{(x-2)^2}.$$

9 Déterminer trois réels a, b et c tels que : pour tout nombre réel x différent de -1,

$$\frac{1}{(1+x)^2} = a + \frac{bx}{1+x} + \frac{cx}{(1+x)^2}.$$

10 Déterminer une fonction polynôme P du troisième degré tel que :

$$P(1) = P(2) = P'(1) = -1 \quad \text{et} \quad P(3) = 8.$$

11 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 1}.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.
Déterminer les nombres réels a, b et c tels que $f'(3) = \frac{1}{2}$ et que $(\mathscr{C})$ admette pour asymptôte la droite (D) d'équation $y = x + 1$.

12 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
On considère les points A$(-1 ; 2)$, B$(2 ; 4)$ et C$(4 ; 2)$.
1. Déterminer les nombres réels a, b et c pour que le cercle d'équation

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

soit circonscrit au triangle ABC.
2. Préciser le centre de ce cercle.

14

Statistique

La corrélation entre deux variables statistiques a une très grande importance car son utilisation permet de mettre à jour les liens cachés de causalité dans certains domaines comme la génétique, l'épistémologie, l'offre et la demande...

Un domaine privilégié d'application des séries statistiques à deux variables est celui où l'une des variables est le temps. On obtient ainsi des séries chronologiques dont l'importance est considérable en économie.

Deux variables statistiques étant en corrélation linéaire, on utilise plusieurs méthodes d'ajustement.

La méthode d'ajustement par moindres carrés est attribuée à Carl Friedrich Gauss et au mathématicien français Adrien Marie Le Gendre.

Carl Fiedrich Gauss
mathématicien, physicien
et astronome allemand – 1777-1855.

Adrien Marie Le Gendre
mathématicien français –
1752-1833.

SOMMAIRE

1 Séries statistiques doubles Nuage de points

1.1. Séries statistiques doubles

L'étude des séries statistiques à un seul caractère s'avère insuffisante lorsqu'il s'agit de certains phénomènes aléatoires dépendant d'au moins deux caractères. Dans ces cas, on est contraint de considérer simultanément les caractères mis en exergue.

Toutefois, dans le cadre du programme de la terminale SE, nous allons cibler notre étude sur les séries statistiques à deux caractères quantitatifs appelés **variables statistiques**. Ces couples de variables statistiques sont représentés sous forme de tableaux statistiques à deux dimensions souvent dénommés tableaux à double entrée.

Donnons deux types de représentation de séries statistiques à deux caractères ou **séries statistiques doubles**.

Série statistique double (cas discret)

Exemple 1

On considère les notes obtenues en Mathématiques et en Physique par 25 candidats au concours d'admission en première année de BTS Électrotechnique Appliquée.

Tableaux linéaires

Le dépouillement et la mise en ordre des données nous fournissent une première représentation de la série statistique à deux caractères sous forme de **tableaux linéaires**.

TABLEAU I

Candidat	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Note de maths	6	9	13	9	10	11	9	11	12	14	16	11	14	7	9	12	14	16	11	12	12	10	8	9	12
Note de physique	11	13	12	13	9	10	13	10	9	7	8	13	9	4	13	11	14	8	13	16	11	9	17	13	11

2 candidats ont 10 en mathématiques et 9 en physique

Désignons par :

- $\mathcal{P}$ la population étudiée c'est-à-dire l'ensemble des 25 candidats.
- X le caractère « note obtenue en Mathématiques »
- Y le caractère « note obtenue en Physique »
- M_X l'ensemble des modalités du caractère X
- M_Y l'ensemble des modalités du caractère Y

On a alors :

- $M_X = \{6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 ; 16\}$; $M_Y = \{4 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 ; 16 ; 17\}$
- $X(B) = 9$; $X(F) = 11$; $Y(A) = 11$; $Y(C) = 12$
- l'effectif de la modalité 9 du caractère X est 5
- la distribution ou série statistique associée au caractère Y est définie par le tableau ci-dessous.

Candidat	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Note de physique	11	13	12	13	9	10	13	10	9	7	8	13	9	4	13	11	14	8	13	16	11	9	17	13	11

- Déterminer :
  - $X(H)$; $X(T)$; $Y(L)$; $Y(O)$
  - l'effectif de la modalité 16 du caractère Y.
  - la distribution statistique associée au caractère X.

Tableau à double entrée

Le tableau linéaire I suggère un deuxième type de représentation de la série statistique à deux caractères par un tableau à double entrée qui supprime l'identité des candidats c'est-à-dire des éléments de la population étudiée.

TABLEAU II

M_Y \ M_X	6	7	8	9	10	11	12	13	14	16
4	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
9	0	0	0	0	2	0	1	0	1	0
10	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0
11	1	0	0	0	0	0	3	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
13	0	0	0	5	0	2	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
16	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
17	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0

2 candidats ont 10 en mathématiques et 9 en physique

Interprétation du tableau à double entrée

Point de vue algébrique

– Dans le langage des ensembles, le tableau II représente le produit cartésien $M_X \times M_Y$ des deux ensembles M_X et M_Y.

– Dans le langage fonctionnel, l'application $\varphi : \mathcal{P} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\alpha \mapsto \big(X(\alpha)\,;Y(\alpha)\big)$$

génère le tableau II qui représente l'image de $\mathcal{P}$ par l'application φ c'est-à-dire $\varphi(\mathcal{P})$.

Point de vue statistique

Dans chaque case du tableau à double entrée est inscrit le nombre d'antécédents du couple correspondant, par l'application φ. En statistique, ce nombre d'antécédents est appelé l'**effectif** du couple considéré.

- l'effectif du couple (10 ; 9) est 2
- l'effectif du couple (16, 17) est nul
- l'effectif du couple (9, 13) est 5
- l'effectif du couple (11, 13) est 2.

Remarque

Les tableaux linéaires I ont permis d'obtenir le tableau à double entrée II. Réciproquement, nous verrons plus loin que l'on peut déduire du tableau II, à double entrée, la série statistique associée au caractère X et celle associée au caractère Y.

Séries statistiques marginales

À partir du tableau II, on déduit par simple lecture que :

- le nombre de couples ayant pour premier élément 10 est 2, ce qui signifie que l'effectif de la modalité 10 du caractère X est 2.
- le nombre de couples ayant pour second élément 13 est 7, ce qui signifie que l'effectif de la modalité 13 du caractère Y est 7.

Il est donc possible, à partir du tableau à double entrée II, de reconstituer les séries associées respectivement aux caractères X et Y.

Il nous suffit de compléter le tableau à double entrée II en mettant en évidence d'une part les effectifs des modalités du caractère X, d'autre part, les effectifs des modalités du caractère Y.

On obtient le tableau III d'où l'on pourra déduire la distribution statistique associée à X et celle associée à Y.

Ces séries sont appelées respectivement **série marginale associée à X ou de caractère X** et **série marginale associée à Y ou de caractère Y**.

TABLEAU III

M_y \ M_x	6	7	8	9	10	11	12	13	14	16	
4	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	2
7	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
9	0	0	0	0	2	0	1	0	1	0	4
10	0	0	0	0	0	2	0	1	0	0	3
11	1	0	0	0	0	0	3	0	0	0	5
12	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
13	0	0	0	5	0	2	0	0	0	0	7
14	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
16	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
17	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
	1	1	1	6	2	4	5	2	3	1	

Tableau linéaire associé à X

x_i	6	7	8	9	10	11	12	13	14	16
n_i	1	1	1	6	2	4	5	2	3	1

Tableau linéaire associé à Y

y_i	4	7	8	9	10	11	12	13	14	16	17
n_i	2	1	1	4	3	4	1	7	1	1	1

Série statistique double (cas du regroupement en classes)

Exemple 2

Le service du personnel d'une entreprise a fourni la répartition suivant l'âge et la rémunération mensuelle en FCFA de ses employés en janvier 1990.

On désigne par X le caractère « âge » et par Y le caractère « rémunération mensuelle ».

Tableau à double entrée (avec regroupement en classes)

Les résultats sont regroupés :
- en classes d'amplitude 5 ans pour l'âge ;
- en classes d'amplitude 10 000 F CFA pour la rémunération mensuelle.

Ces résultats sont alors représentés dans le tableau à double entrée ci-dessous.

TABLEAU IV

M_y \ M_x	[20 ; 24[	[25 ; 30[	[30 ; 35[	[35 ; 40[	[40 ; 45[	[45 ; 50[	[50 ; 55[	[55 ; 60[
[70 000 ; 80 000[	207	121	38	17	10	2	7	3
[80 000 ; 90 000[	302	461	513	103	86	6	10	2
[90 000 ; 100 000[	18	526	682	567	613	431	105	60
[100 000 ; 110 000[	0	111	342	298	416	480	226	37
[110 000 ; 120 000[	0	1	3	182	227	263	98	18
[120 000 ; 130 000[	0	0	0	18	22	13	12	5
[130 000 ; 140 000[	0	0	0	1	14	6	7	5

■ **Séries statistiques marginales**

En indiquant par une colonne et une ligne supplémentaires le centre de chaque classe et en procédant comme précédemment, on obtient le tableau V.

TABLEAU V

centre de chaque classe →		22	27,5	32,5	37,5	42,5	47,5	52,5	57,5	
↓	M_Y \ M_X	[20 ; 24[	[25 ; 30[	[30 ; 35[	[35 ; 40[	[40 ; 45[	[45 ; 50[	[50 ; 55[	[55 ; 60[	
75 000	[70 000 ; 80 000[	207	121	38	17	10	2	7	3	**405**
85 000	[80 000 ; 90 000[	302	461	513	103	86	6	10	2	**1483**
95 000	[90 000 ; 100 000[	18	526	682	567	613	431	105	60	**3002**
105 000	[100 000 ; 110 000[	0	111	342	298	416	480	226	37	**1910**
115 000	[110 000 ; 120 000[	0	1	3	182	227	263	98	18	**792**
125 000	[120 000 ; 130 000[	0	0	0	18	22	13	12	5	**70**
135 000	[130 000 ; 140 000[	0	0	0	1	14	6	7	5	**33**
		527	1220	1578	1186	1388	1201	465	130	

Ce tableau donne les deux séries statistiques marginales :

– Série statistique marginale associée au caractère X (en tramé couleur clair)

– Série statistique marginale associée au caractère Y (en tramé couleur foncé)

Définition

$\mathcal{P}$ est une population d'effectif N, sur laquelle sont définis deux caractères X et Y,

$\{x_1 ; x_2 ; ... ; x_p\}$ l'ensemble des modalités du caractère X, noté M_X,

$\{y_1 ; y_2 ; ... ; y_m\}$ l'ensemble des modalités du caractère Y, noté M_Y,

φ l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par $\varphi(\alpha) = \big(X(\alpha) ; Y(\alpha)\big)$,

x_i et y_j deux modalités respectives de X et Y.

On appelle *effectif du couple* $(x_i ; y_j)$ le nombre d'antécédents de ce couple par l'application φ. Cet effectif est noté n_{ij}.

On appelle *série statistique double* de caractère (X ; Y) l'ensemble des triplets $(x_i ; y_j ; n_{ij})$.

Exercice

1.a Au cours du dernier trimestre 1998, un supermarché d'une capitale d'Afrique a dénombré les téléviseurs de marque A et de marque B qu'il a vendus dans six secteurs de la ville.

Les résultats obtenus sont consignés dans les tableaux linéaires ci-dessous :

Numéro du secteur	1	2	3	4	5	6
Nombre de téléviseurs de marque A vendus x_i	6 000	3 000	9 000	4 500	4 500	9 000
Nombre de téléviseurs de marque B vendus y_i	3 600	1 800	4 500	2 250	1 800	4 050

1. *a)* Écrire l'ensemble des modalités du caractère X noté M_X.
b) Écrire l'ensemble des modalités du caractère Y noté M_Y.

2. *a)* Déterminer la série marginale associée au caractère X.
b) Déterminer la série marginale associée au caractère Y.

3. Écrire la série double de caractère (X ; Y), chaque couple de modalités ayant pour effectif 1.

4. Donner la représentation statistique double dans laquelle figurent les séries statistiques marginales associées à X et à Y.

5. Calculer la moyenne $\overline{X}$ de X et la moyenne $\overline{Y}$ de Y.

1.2. Nuage de points associé à une série statistique double

Reprenons l'exemple 1 et considérons les ensembles M_X et M_Y des modalités de X et Y :

$$M_X = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16\} \quad ; \quad M_Y = \{4, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17\}$$

Désignons par $\mathcal{F}$ la représentation graphique du produit cartésien $M_X \times M_Y$ dans le plan muni d'un repère orthogonal.

On sait que l'effectif d'un élément quelconque de $M_X \times M_Y$ est fourni par le tableau II.

Considérons alors la partie de $\mathcal{F}$ telle que chaque élément correspond à un couple de coordonnés d'effectif non nul. Cet ensemble de points constitue un « nuage de points » dont nous allons donner trois représentations.

Définition

X et Y sont deux caractères définis sur une population $\mathcal{P}$,

$\{x_1 ; x_2 ; ... ; x_p\}$ l'ensemble M_X des modalités du caractère X,

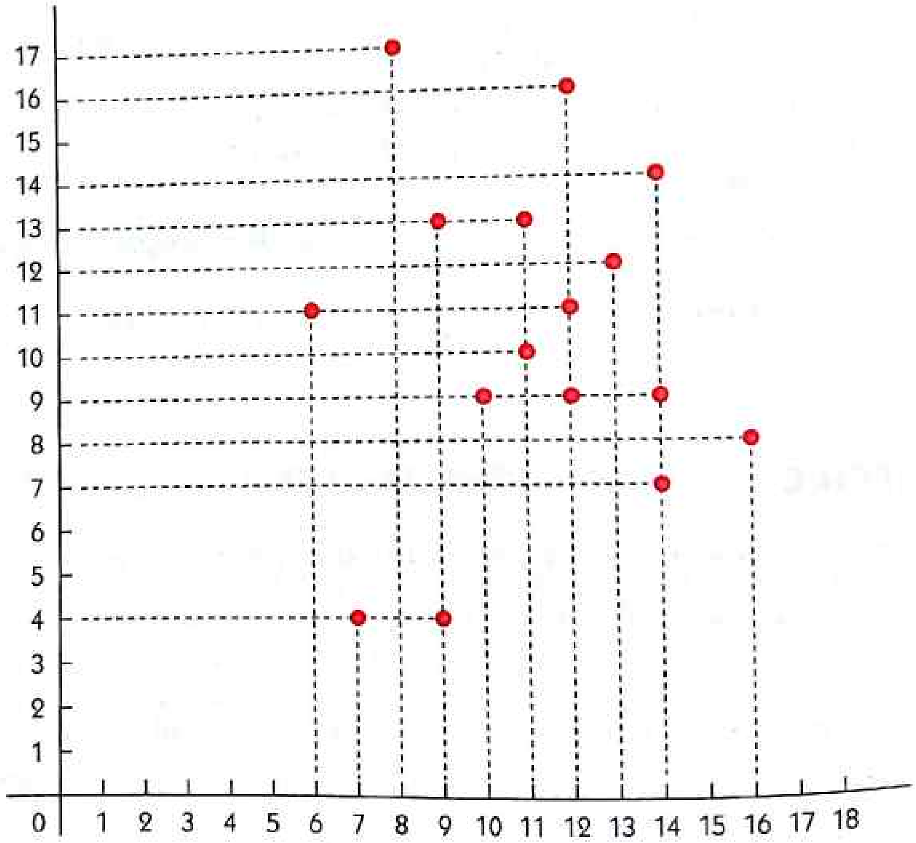
$\{y_1 ; y_2 ; ... ; y_m\}$ l'ensemble M_Y des modalités du caractère Y,

$\mathcal{F}$ la représentation graphique de $M_X \times M_Y$ dans le plan muni d'un repère orthogonal,

on appelle *nuage de points* associé à la série statistique double de caractère (X ; Y) la partie de $\mathcal{F}$ dont tous les points ont un couple de coordonnées $(x_i ; y_j)$ d'effectif non nul.

Représentation du nuage par un diagramme cartésien

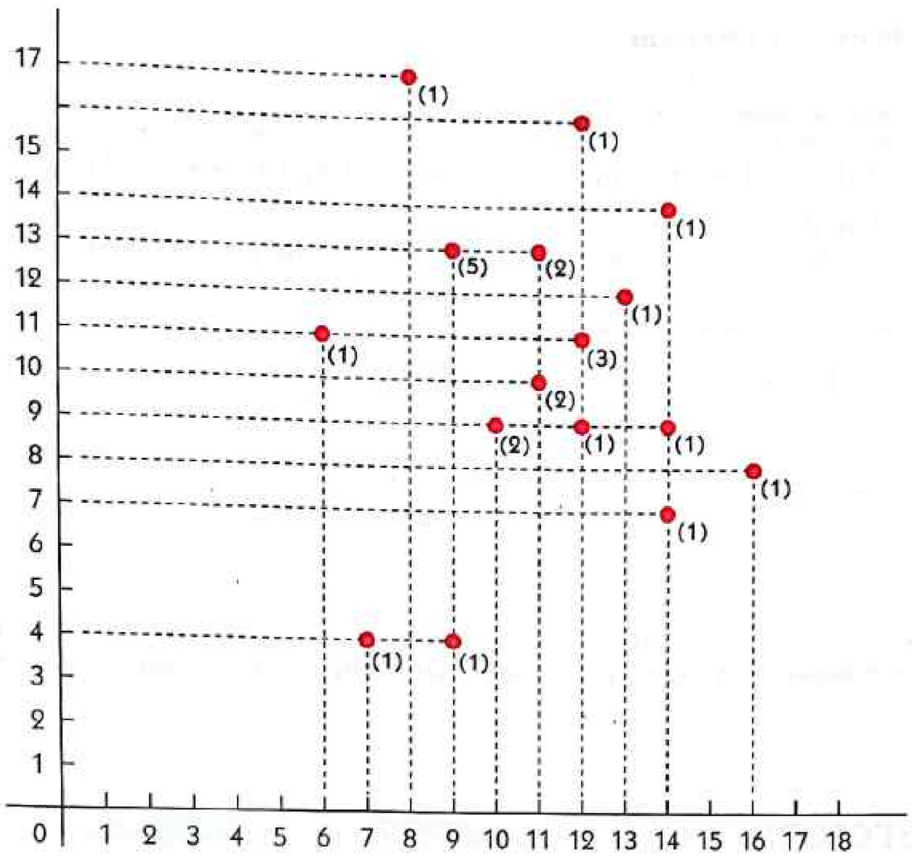
Dans notre étude, nous faisons la convention de ne représenter que les points dont les couples de coordonnées ont des effectifs non nuls. On obtient alors une première représentation de cet ensemble de points du plan appelé « **nuage de points** » associé à la série statistique double de caractère (X ; Y).



Représentation du nuage par un ensemble de points pondérés

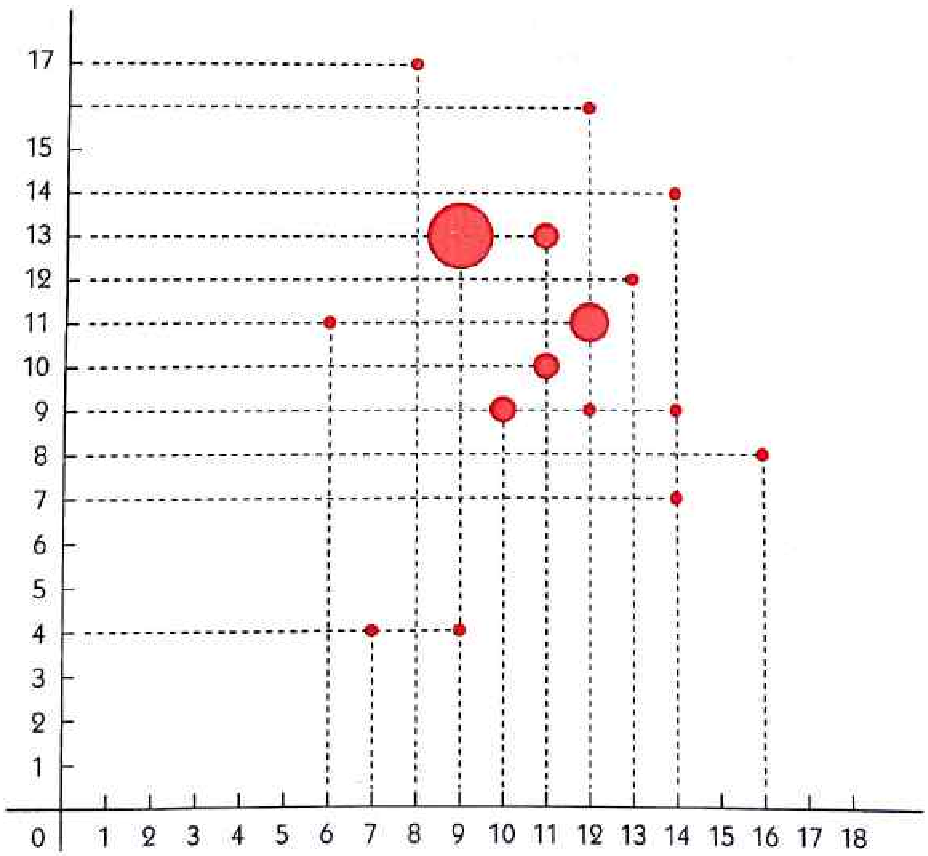
La première représentation du nuage ne tient pas compte du « poids » de chaque point, c'est-à-dire de l'effectif du couple de coordonnées.

Par convention, on indiquera à droite de chaque point du nuage l'effectif de son couple de coordonnées l'ensemble de points obtenus est appelé **ensemble de points pondérés.**



Représentation du nuage par des taches

On peut aussi mettre en évidence le poids de chaque couple de coordonnées en représentant les points du nuage par des taches.
Chaque point du nuage est alors le centre d'un disque dont l'aire est proportionnelle à l'effectif du couple considéré.



Calcul pratique du rayon d'un disque

• Choix du rayon du plus grand disque

On choisit le rayon du disque centré aux points dont les couples de coordonnées ont l'effectif le plus élevé. Dans le cas présent, c'est le couple (9 ; 13) dont l'effectif est 5 qui convient.

Pour ce couple (9 ; 13) on a choisi 0,8 cm comme rayon du disque centré en ce point.

• Calcul du rayon d'un disque (exprimé en cm)

Soit r le rayon du disque centré sur le point dont le couple de coordonnées a pour effectif n.

L'aire de ce disque est πr^2.

Les aires étant proportionnelles aux effectifs , on a : $\frac{\pi(0{,}8)^2}{5} = \frac{\pi r^2}{n}$, d'où : $r = 0{,}8\sqrt{\frac{n}{5}}$.

• Dressons le tableau donnant les rayons des différentes taches :

Effectif	1	2	3	4	5
Rayon du disque (en cm)	0,36	0,51	0,62	0,72	0,80

Remarque

Le choix du rayon du disque centré au point dont le couple de coordonnées a l'effectif le plus élevé se fait en fonction de la répartition des points du nuage de façon que deux disques quelconques soient disjoints.

Exercices

1.b Reprendre l'exemple 2 du paragraphe 1.1. Chaque classe étant remplacée par son centre, représenter le nuage de points associé à la série statistique double,

a) par un ensemble de points pondérés ;

b) par un ensemble de taches.

1.c Le tableau suivant présente trois séries statistiques (x_i), (y_i) et (z_i). On considère les séries statistiques doubles $(x_i ; y_i)$ et $(x_i ; z_i)$.

x_i	1,7	1,9	2,5	2,7	3,2
y_i	105	95	80	75	62
z_i	110	85	75	90	57

1. Déterminer le nuage de points associé à chacune des deux séries doubles.
2. Calculer les coordonnées de leurs points moyens respectifs G_1 et G_2.

2 Ajustement et corrélation linéaire

2.1. Ajustement

Présentation

Dans notre étude, les variables statistiques considérées sont discrètes. Ce choix est justifié par le fait que tous les raisonnements effectués sur celles-ci s'étendent sans difficulté aux séries doubles regroupées en classes ; il suffit, dans ce cas, tant pour les calculs que pour les représentations graphiques, de remplacer les classes par leurs centres respectifs.

Objectif général de l'ajustement

Lors des représentations graphiques des séries statistiques à deux variables, les nuages de points associés peuvent revêtir une configuration assez régulière (droite, parabole, etc.)

Dans ce cas, le statisticien essaie d'**ajuster** la série statistique représentée c'est-à-dire de substituer aux effectifs (ou fréquences) effectivement observés des effectifs (ou fréquences) **calculés** à l'aide de certains procédés que nous allons développer.

Ajustement graphique

Il s'agit de tracer une courbe simple et régulière qui épouse le mieux la forme du nuage associé à la série statistique double étudiée.

Exemples

• Dans la figure 1, on peut penser en première approximation qu'il est possible de tracer une droite qui passe le plus près possible de ces points.
On dit alors que l'on a un **ajustement affine** ou plus communément un **ajustement linéaire**.

• Dans la figure 2, un ajustement affine ne convient pas ; on a pensé à « approcher » le nuage par une parabole.

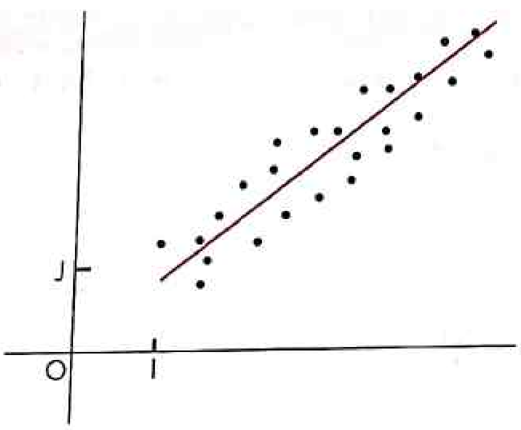


figure 1

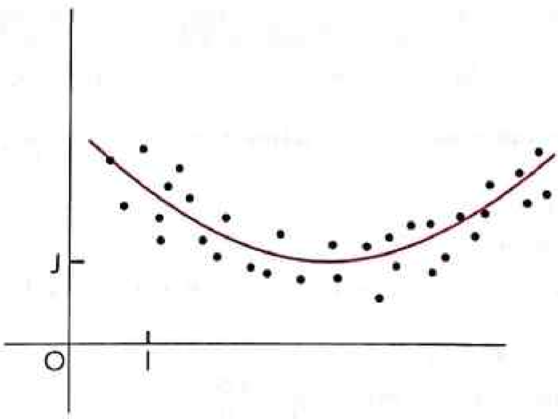


figure 2

Dans les exemples précédents, on constate l'existence d'un lien (en statistique on dit une **corrélation**) entre les points, donc entre leurs coordonnées $(x_i\ ;\ y_i)$.

Il n'en est pas toujours ainsi car il existe des nuages dont les points sont dispersés de façon quelconque, c'est notamment le cas où il n'existe aucun lien entre x_i et y_i, par exemple x_i est la taille et y_i le nombre de frères et sœurs d'un individu d'un groupe donné.

On dit que les deux variables sont **indépendantes.**

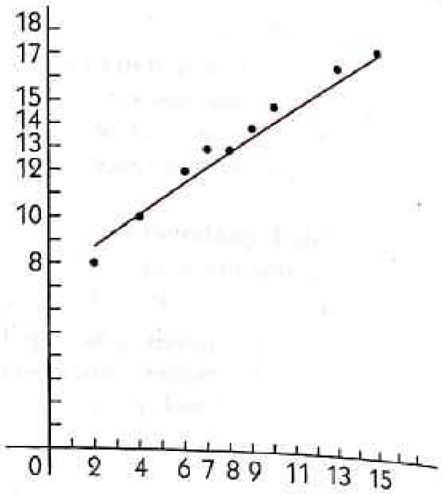
Les deux exemples ci-dessus suggèrent, pour l'objectif visé, les deux démarches suivantes :
- rechercher la forme générale de la courbe d'ajustement ;
- déterminer une équation de cette courbe d'ajustement.

■ Ajustement graphique affine ou linéaire

Exemple

Considérons le tableau statistique ci-dessous dans lequel les effectifs sont désignés par y_i, ces effectifs étant, sur les représentations graphiques, portés en ordonnées.

x_i	2	4	6	7	8	9	11	13	15
y_i	8	10	12	13	13	14	15	17	18



La représentation graphique de cette série statistique est constituée de neuf points et un ajustement affine semble indiqué.

Traçons une droite (Δ) passant « le plus près possible » des points de ce nuage puis déterminons-en une équation de la forme $y = ax + b$.

En écrivant que (Δ) passe par les points M(8 ; 13) et N(15 ; 18) on obtient le système :

$$\begin{cases} 8a + b = 13 \\ 15a + b = 18 \end{cases}$$

Une équation de (Δ) est donc : $5x - 7y + 51 = 0$.

Conclusion

Étant donné une série statistique double, lorsqu'il est possible de trouver une équation cartésienne d'une droite (Δ) qui passe « le plus près possible » de tous les points du nuage représentant cette série, on dit que (Δ) est **une droite d'ajustement du nuage de points** ou que l'on a effectué **un ajustement affine** (ou linéaire) du nuage de points à la droite (Δ).

Point moyen d'un nuage représentant une série double

Lorsque la forme du nuage permet de conjecturer un ajustement affine de ce nuage, il est intéressant, avant de tracer cette droite, de placer le point dont l'abscisse est la moyenne arithmétique des abscisses x_i et l'ordonnée la moyenne arithmétique des ordonnées y_i.

Définition

On appelle *point moyen* d'un nuage de n points M_i de coordonnées (x_i ; y_i) le point G de coordonnées (x_G ; y_G) telles que : $x_G = \bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $y_G = \bar{y} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$.

Exemple

Reprenons l'exemple précédent.

On a : $x_G = \dfrac{1}{9}(2 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 + 11 + 13 + 15) = \dfrac{75}{9}$;

$y_G = \dfrac{1}{9}(8 + 10 + 12 + 13 + 13 + 14 + 15 + 17 + 18) = \dfrac{120}{9}$.

Le point moyen est G $\left(\dfrac{75}{9} ; \dfrac{120}{9}\right)$.

Exercice

2.a Le tableau suivant donne les résultats à partir de 10 essais de laboratoire concernant la charge de rupture d'un acier en fonction de sa teneur en carbone.

Teneur en carbone x_i	70	60	68	64	66	64	62	70	74	62
Charge de rupture y_i (en kg)	87	71	79	74	79	80	75	86	95	70

1. Représenter graphiquement le nuage de points de coordonnées (x_i ; y_i) dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine le point représentant le couple (60 ; 71) du tableau et d'unité graphique le centimètre.

2. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage.

2.2. Ajustement affine par la méthode de MAYER

Principe de la méthode

L'ensemble des points à ajuster est partagé en deux parties disjointes E_1 et E_2 de même effectif dans l'ordre où les points se présentent. Les deux parties E_1 et E_2 sont alors remplacées respectivement par les points moyens G_1 et G_2 des nuages qu'ils représentent. (G_1G_2) est une droite d'ajustement dont il est facile de déterminer une équation cartésienne, on l'appelle **la droite de MAYER**.

Remarque

La droite de MAYER passe par le point moyen du nuage.

Exemple

Une entreprise fabrique et vend des lots de pompes à injection.
Le tableau ci-dessous donne le pourcentage y de pompes à injection d'un lot qui ont une panne au cours de x années d'utilisation.
(Chaque couple de modalités $(x_i\ ;\ y_i)$ a pour effectif 1).
Déterminons la droite de MAYER ajustant le nuage de points qui représente cette série double.

Nombre x_i de semestres	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Pourcentage y_i	0	2	4	8	11	14	17	20	23	27

Nous avons un ensemble de dix points à ajuster que nous partageons en deux parties E_1 et E_2.
E_1 : ensemble des cinq premiers points de coordonnées (1 ; 0), (2 ; 2), (3 ; 4) ; (4 ; 8), (5 ; 11) de point moyen G_1.
E_2 : ensemble des cinq autres points de coordonnées (6 ; 14), (7 ; 17), (8 ; 20), (9 ; 23), (10 ; 27) de point moyen G_2.

Calcul des coordonnées $(x_1\ ;\ y_1)$ de G_1

$$x_1 = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$$

$$y_1 = \frac{0+2+4+8+11}{5} = 5$$

Calcul des coordonnées $(x_2\ ;\ y_2)$ de G_2

$$x_2 = \frac{6+7+8+9+10}{5} = 8$$

$$y_2 = \frac{14+17+20+23+27}{5} = 20{,}2$$

Calcul des coordonnées $(x_G\ ;\ y_G)$ de G, point moyen du nuage.

$$x_G = \frac{3+8}{2} = 5{,}5 \quad ; \quad y_G = \frac{5+20{,}2}{2} = 12{,}6$$

Les points moyens partiels G_1 et G_2 des deux nuages partiels E_1 et E_2 sont :

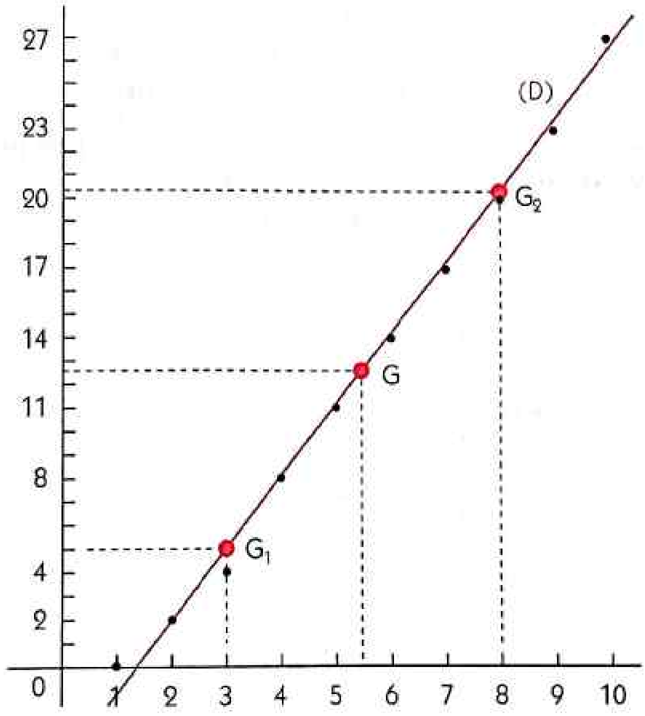
G_1 (3 ; 5) et G_2 (8 ; 20,2).

La droite de MAYER est la droite (G_1G_2) dont une équation cartésienne est :

$y = 3{,}04x - 4{,}12.$

La droite de MAYER passe par le point moyen G(5,5 ; 12,6) du nuage.

• Justifier.



2.3. Ajustement affine par la méthode des moindres carrés

Meilleur ajustement affine

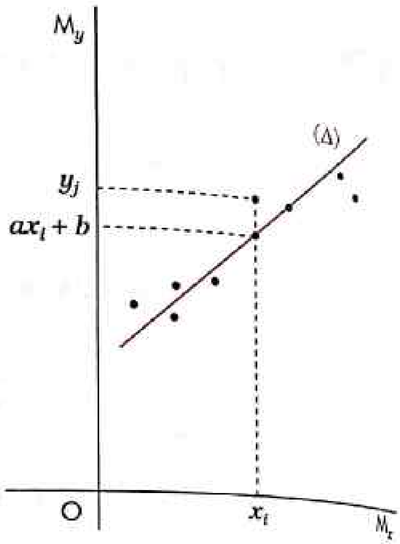
L'étude précédente montre qu'il existe plusieurs droites d'ajustement d'un nuage donné.
Cela pose le problème suivant : de toutes les droites d'ajustement du nuage donné, quelle est celle qui réalise le « meilleur ajustement » ?

Mesure de l'efficacité d'un ajustement affine

(Δ) est une droite d'ajustement d'un nuage d'équation $y = ax + b$.
À chaque modalité x_i du caractère X correspondent :
- une modalité y_j du caractère Y telle que le point de coordonnées $(x_i\,;\,y_j)$ appartienne au nuage.
- un point de (Δ) de coordonnées $(x_i\,;\,ax_i + b)$.

Si le point considéré n'appartient pas à (Δ) alors le nombre $[y_j - (ax_i + b)]$ est non nul.

• On dit que la somme de tous les nombres $n_{ij}[y_j - (ax_i + b)]^2$ où $(x_i\,;\,y_j)$ est le couple de coordonnées d'un point du nuage et n_{ij} l'effectif de ce couple, est une mesure de l'efficacité de l'ajustement.



Meilleur ajustement affine

De toutes les droites d'ajustement d'un nuage de points associé à une série statistique double, celle qui réalise le meilleur ajustement est telle que la somme des nombres $n_{ij}[y_j - (ax_i + b)]^2$ est minimale.
Comment déterminer les coefficients (ou paramètres) a et b qui minimisent les nombres $n_{ij}[y_j - (ax_i + b)]^2$?
La méthode d'ajustement que nous allons exposer nous fournira la solution du problème posé.

Ajustement et corrélation linéaire par la méthode des moindres carrés

Droites de régression

Définition

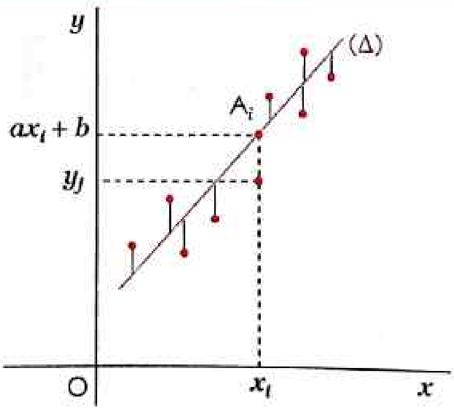
• **(Δ) est une droite d'ajustement, $M_i(x_i\,;\,y_i)$ un point du nuage, A_i le point de même abscisse x_i que M_i situé sur la droite (Δ) d'équation $y = ax + b$.**

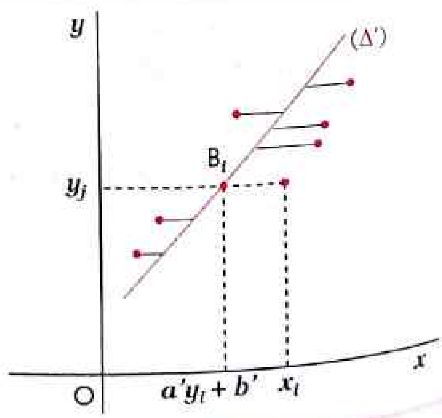
On dit que (Δ) est *la droite de régression de Y en X* lorsque la somme $\sum_{i=1}^{n} M_iA_i^2$ est minimale

$$\left(\text{avec } \sum_{i=1}^{n} M_iA_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i + b)]^2\right).$$

• **(Δ') est une droite d'ajustement, $M_i(x_i\,;\,y_i)$ un point du nuage, B_i le point de même ordonnée y_i que M_i situé sur la droite (Δ') d'équation $x = a'y + b'$.**

On dit que (Δ') est *la droite de régression de X en Y* lorsque la somme $\sum_{i=1}^{n} M_iB_i^2$ est minimale.





■ **Covariance d'une série statistique double**

La définition de la covariance permet de donner une écriture simplifiée de la droite de régression.

Définition

$\mathcal{P}$ est une population d'effectif N.

X et Y deux caractères étudiés sur la population $\mathcal{P}$,

$\{x_1 ; x_2 ; ... ; x_n\}$ l'ensemble des modalités de X,

$\{y_1 ; y_2 ; ... ; y_p\}$ l'ensemble des modalités de Y,

$\bar{x}$ la moyenne de la série de caractère X,

$\bar{y}$ la moyenne de la série de caractère Y,

n_{ij} l'effectif du couple de modalités $(x_i ; y_j)$.

On appelle *covariance* de la série statistique double de caractère (X, Y) le nombre réel :

$$\frac{\sum n_{ij} x_i y_i}{N} - \bar{x}\bar{y}, \text{ noté COV(X,Y).}$$

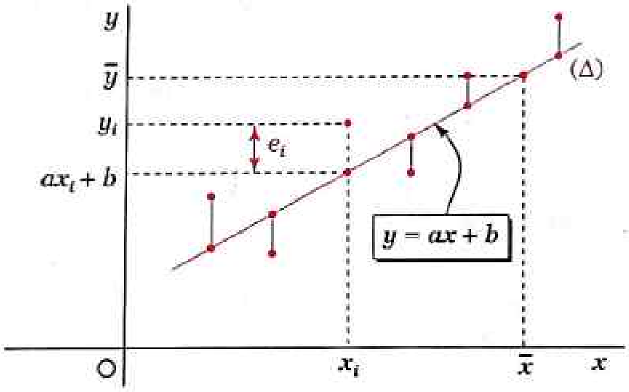
On a : $\mathrm{COV}(X ; Y) = \frac{1}{N} \sum n_{ij}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{\sum n_{ij} x_i y_i}{N} - \bar{x}\bar{y}$, on note aussi $\mathrm{COV}(X ; Y) = \sigma_{XY}$.

■ **Principe de la méthode des moindre carrés**

On considère une série statistique à deux variables X et Y que nous supposons être a priori en corrélation linéaire.

L'ajustement de la droite de régression de Y en X par **la méthode des moindres carrés** consiste à retenir parmi toutes les droites du plan celle pour laquelle la somme des carrés des écarts e_i est minimale.

(Voir le graphique ci-contre.)



Remarque

*L'ajustement est d'autant meilleur que les points M_i seront proches des points A_i d'où l'appellation « **méthode des moindres carrés** ».*

■ **Équation de la droite des moindres carrés**

Nous allons montrer qu'il existe une seule droite (Δ), (donc un couple unique $(a ; b)$) telle que la somme des nombres $n_{ij}[y_j - (ax_i + b)]^2$ soit minimale.

• ***Recherche d'une fonction de a et b à minimiser***

Considérons la droite (Δ) d'équation $y = ax + b$.

Calculons la valeur des écarts e_i des points observés à cette droite, mesurés parallèlement à l'axe des ordonnées :

$$e_i = y_i - ax_i - b \text{ pour } i = 1, 2,..., N.$$

En désignant par $S(a ; b)$ la somme des carrés de e_i on obtient : $S(a ; b) = \sum_{i=1}^{N} e_i^2 = \sum_{i=1}^{N} (y_i - ax_i - b)^2$.

La notation $S(a ; b)$ adoptée pour la somme des carrés des écarts atteste que cette somme est une fonction des coefficients a et b de la droite (Δ). La droite des moindres carrés correspond aux valeurs des coefficients a et b qui rendent minimale cette quantité. Déterminons ces valeurs de a et b.

• ***Déterminons pour a fixé la valeur de b qui minimise S(a ; b)***

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$b \mapsto f(b) ; \; f(b) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - ax_i - b)^2$$

f est une fonction polynôme du second degré donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Si f admet un minimum, alors $f'(b) = 0$.

On a : $f'(b) = -2\sum_{i=1}^{N}(y_i - ax_i - b)$

$$f'(b) = 0 \iff \sum_{i=1}^{N} y_i - a\sum_{i=1}^{N} x_i - \sum_{i=1}^{N} b = 0$$

$$f'(b) = 0 \iff \sum_{i=1}^{N} y_i - a\sum_{i=1}^{N} x_i - \mathrm{N}b = 0$$

$$\iff \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{N} y_i = \frac{a}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{N} x_i + b$$

d'où : $$\boxed{b = \overline{y} - a\overline{x} \quad \text{avec } \overline{y} = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{N} y_i,\ \overline{x} = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{N} x_i} \qquad (1)$$

Ce résultat prouve que la droite des moindre carrés passe par le point moyen $G(\overline{x}\,;\overline{y})$ du nuage de points.

Substituons cette valeur de b dans l'expression de $S(a\,;b)$, on obtient :

$$g(a) = \sum_{i=1}^{N}\left[y_i - ax_i - (\overline{y} - a\overline{x})\right]^2 = \sum_{i=1}^{N}\left[(y_i - \overline{y}) - a(x_i - \overline{x})\right]^2$$

$g(a)$ est la valeur du minimum partiel de S lorsque a est fixé.

• ***Déterminons maintenant la valeur de a qui minimise g(a)***

g est une fonction polynôme du second degré donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
Si g admet un minimum alors $g'(a) = 0$.

On a : $g'(a) = -2\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})\left[(y_i - \overline{y}) - a(x_i - \overline{x})\right]$

$$g'(a) = 0 \iff \sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})\left[(y_i - \overline{y}) - a(x_i - \overline{x})\right] = 0$$

$$\iff \sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) - a\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2 = 0$$

donc : $$\boxed{a = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2} = \frac{\sigma_{XY}}{(\sigma_X)^2} = \frac{\mathrm{COV(X,Y)}}{\mathrm{V(X)}}} \qquad (2)$$

Propriété

$\mathcal{P}$ est une population d'effectif N.
X et Y deux caractères étudiés sur la population $\mathcal{P}$,
$\{x_1\,;x_2\,;\dots;x_n\}$ l'ensemble des modalités de X,
$\{y_1\,;y_2\,;\dots;y_p\}$ l'ensemble des modalités de Y,
$\overline{x}$ la moyenne de la série de caractère X,
$\overline{y}$ la moyenne de la série de caractère Y,
n_{ij} l'effectif du couple de modalités $(x_i\,;y_j)$,
V(X) la variance de la série de caractère X,
Cov(X ; Y) la covariance de la série double de caractères X et Y.

Si le nuage de points associé à la série double où M_X est en abscisse et M_Y en ordonnée, les variables X et Y étant en corrélation linéaire,
alors, il existe une droite d'ajustement (Δ) du nuage et une seule qui constitue le meilleur ajustement de ce nuage. Elle a pour équation :

$$y = ax + b \quad \text{avec : } a = \frac{\sigma_{XY}}{(\sigma_X)^2}\ ;\ b = \overline{y} - a\overline{x}.$$

Cette droite (Δ) est la droite des moindres carrés ou droite de régression de Y en X ; elle passe par le point moyen $G(\overline{x}\,;\overline{y})$ du nuage.

Une démarche analogue montre l'existence d'une droite d'ajustement (Δ') du nuage et une seule d'équation $x = a'y + b'$ avec : $a' = \frac{\sigma_{XY}}{(\sigma_Y)^2}$; $b' = \overline{x} - a'\overline{y}$.

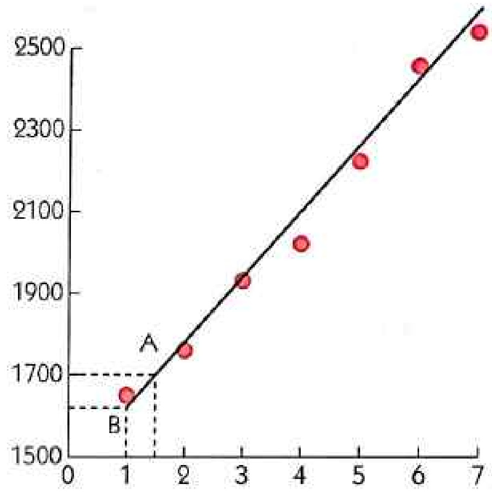
Cette droite (Δ') est la droite de régression de X en Y ; c'est la droite pour laquelle la mesure de l'efficacité de l'ajustement est minimale, elle passe par le point moyen $G(\overline{x}\,;\overline{y})$ du nuage.

■ **Exemple**

L'évolution de 1985 à 1989 du salaire horaire moyen d'un ouvrier, dans un pays en voie de développement donné, est consignée dans le tableau ci-dessous.
1) Représentons graphiquement les variations de ce salaire horaire moyen.
2) Ajustons à la règle le nuage de points obtenu par une droite dont on déterminera une équation cartésienne.
3) Ajustons le nuage de points par la méthode des moindres carrés.
4) En admettant que cette évolution se poursuive, donnons une estimation du salaire horaire moyen d'un tel ouvrier en l'an 2001.

Années	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991
Salaire horaire moyen en FCFA	1650	1760	1930	2020	2220	2450	2530

1) Représentation graphique des variations de ce salaire horaire moyen
On désigne les années par leurs rangs ; l'année 1985 aura le rang 1, l'année 1986 le rang 2, et ainsi de suite...



2) La droite d'ajustement passe par les points
$A(\frac{3}{2} ; 170)$ et $B(1 ; 162)$.
On obtient une équation de la droite (AB) : $y = 16x + 146$.

3) Tableau des calculs

x_i	y_i	$x_i-\overline{x}$	$y_j-\overline{y}$	$(x_i-\overline{x})(y_j-\overline{y})$	$(x_i-\overline{x})^2$
1	1650	−3	−430	1290	9
2	1760	−2	−320	640	4
3	1930	−1	−150	150	1
4	2020	0	−60	0	0
5	2220	1	140	140	1
6	2450	2	370	740	4
7	2530	3	450	1350	9
28	14560	0	0	4310	28

On a : $\overline{x} = \frac{28}{7} = 4$; $\overline{y} = \frac{14\,560}{7} = 2\,080$;

d'où : $a = \dfrac{\Sigma(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\Sigma(x_i-\overline{x})^2} = \dfrac{4\,310}{28} \approx 153{,}92$; $b = \overline{y} - a\overline{x} = 2080 - (4 \times 153{,}92) = 1464{,}32$.

La droite de régression a pour équation : $y = 153{,}92x + 1464{,}32$.

4) La droite des moindres carrés est la droite de régression de Y en fonction de X,
c'est aussi la droite d'estimation de Y à partir de X. L'an 2001 aura le rang 17, d'où l'estimation obtenue en remplaçant dans l'équation (1) x par 17. On obtient : $y = 4\,083{,}6 \approx 4\,084$.

Donc, 4 084 FCFA est une estimation du salaire horaire moyen de cet ouvrier en l'an 2001.

Exercice

2.b Le tableau suivant donne pour une année déterminée le nombre de touristes entrant dans les pays indiqués ainsi que les recettes totales correspondantes.

Pays visités	A	B	C	D	E
Nombre de touristes (en millions) x_i	7,5	4,5	4,2	3,5	3,1
Recette totale (en milliards de F) y_i	10	4	4,5	3,9	4,3

Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en X.

2.4. Corrélation linéaire

Objectif de l'étude de la corrélation

Lorsqu'une variable Y est en corrélation avec une variable X, deux problèmes se posent :

– établir la forme de la liaison statistique existant entre Y et X, en déterminant la courbe de régression de Y en X ;

– dans le cas où celle-ci est une droite, mesurer l'intensité de la liaison par un indice approprié : le coefficient de corrélation linéaire.

Définition et propriétés

Définitions

- **Deux variables statistiques X et Y sont dites *en corrélation linéaire* lorsque la courbe de régression de Y en X et la courbe de régression de X en Y sont des droites.**
- **On appelle *coefficient de corrélation linéaire* d'une série statistique double de caractère (X ; Y) le nombre réel r défini par :**

$$r = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \times \sigma_Y} = \frac{\mathrm{cov}(X\,;\,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} .$$

Propriétés

- **Le coefficient de corrélation linéaire r est un nombre réel de même signe que COV (X ; Y).**
- **Les coefficients directeurs a et a' des droites de régression de Y en X et de X en Y sont définis par :**

$$a = \frac{\sigma_{XY}}{(\sigma_X)^2} \quad ; \quad a' = \frac{\sigma_{XY}}{(\sigma_Y)^2}$$

- **On a :** $aa' = r^2$

Démonstration

On sait que : $r = \dfrac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \times \sigma_Y}$; $a = \dfrac{\sigma_{XY}}{(\sigma_X)^2}$; $a' = \dfrac{\sigma_{XY}}{(\sigma_Y)^2}$; d'où : $aa' = \dfrac{(\sigma_{XY})^2}{(\sigma_X)^2 \times (\sigma_Y)^2} = r^2$.

Définition

On appelle valeur absolue du coefficient de corrélation linéaire la racine carrée du produit du coefficient directeur de la droite de régression de Y en X par le coefficient directeur de la droite de régression de X en Y.

$$|r| = \sqrt{aa'}$$

Remarques

– *Si* $a > 0$ *et* $a' > 0$ *alors* $r = \sqrt{aa'}$
Si $a < 0$ *et* $a' < 0$ *alors* $r = -\sqrt{aa'}$

– *On admet que :* $|r| \leq 1$

– *Si* $r^2 = 1$ *alors* $a = \dfrac{1}{a'}$ *(car* $aa' = 1$*)*

Les deux droites de régression (D) et (D') sont alors confondues, on dit que ***l'ajustement linéaire*** *est parfait.*

– *Si* $|r|$ *est proche de 1 alors (D) et (D') sont proches l'une de l'autre, on dit qu'il y a une* ***bonne corrélation*** *ou* ***une forte corrélation*** *entre les deux variables.*

En général on considère que la corrélation linéaire entre les deux variables est forte lorsqu'on a :

$$0{,}87 \leq r \leq 1.$$

TP Travaux pratiques

TP1. Exemple d'ajustement se ramenant à un ajustement affine

Un exemple d'ajustement exponentiel se ramenant à un ajustement affine ou linéaire.

Exercice commenté

Une entreprise a dressé une statistique de son chiffre d'affaires (C.A.) semestriel du 1^{er} janvier 1989 au 30 juin 1993 comme l'indique le tableau statistique ci-dessous :

1. Montrer l'existence d'une liaison entre le rang du semestre et le C.A. semestriel.
Représenter graphiquement le nuage de points associé à la série double dans le plan muni d'un repère orthogonal :
1 cm pour unité en abscisse ; 8 mm pour 1000.10^5 FCFA en ordonnée ; origine O (0 ; 4000.10^5 FCFA).

2. Montrer par la méthode graphique l'existence d'une liaison entre le rang du semestre et le logarithme décimal (log) du C.A. semestriel.

3. Déterminer par la méthode des moindres carrés l'équation de la droite d'ajustement qui donnerait le logarithme décimal du C.A. en fonction du rang du semestre correspondant.

4. On pose : Y = log$y$. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et Y. La corrélation entre x et Y est-elle faible ? forte ?

5. À partir de l'équation de la droite d'ajustement de Y en x déterminer l'équation de la fonction qui donnerait le C.A. de l'entreprise en fonction du rang du semestre.

6. En supposant que les résultats obtenus puissent s'étendre aux années à venir, essayer de prévoir quels seront les C.A des périodes :
- ***a)* 1er janvier 1994 - 30 juin 1994 ;**
- ***b)* 30 janvier 1995 - 31 décembre 1995.**

Semestre	Rang du semestre x_i	C.A. semestre (en 10^5 FCFA) y_i
1er semestre 1989	1	4 100
2e semestre 1989	2	4 700
1er semestre 1990	3	5 100
2e semestre 1990	4	5 700
1er semestre 1991	5	6 400
2e semestre 1991	6	7 200
1er semestre 1992	7	8 000
2e semestre 1992	8	8 900
1er semestre 1993	9	10 000

1. La forme du nuage de points associé à la série double de variables x et y suggère une courbe d'ajustement de type exponentiel que nous conjecturons.

2. La forme du nuage de points associé à la série de variables x et Y (Y = log$y$), où log est la fonction logarithme décimal, suggère une courbe d'ajustement affine, ce qui justifie, a postériori, la conjecture que nous avons faite au **1**.

En effet : $y = e^{ax+b} \quad \Leftrightarrow \quad \ln y = ax + b$

or : $\log y = \dfrac{\ln y}{\ln 10} = \dfrac{ax+b}{\ln 10} = \dfrac{a}{\ln 10}x + \dfrac{b}{\ln 10}$

d'où : $\log y = Ax + B$ est une équation de droite, avec $A = \dfrac{a}{\ln 10}$ et $B = \dfrac{b}{\ln 10}$.

3. Il s'agit de trouver une équation de la droite de régression de Y en x avec Y = log$y$ par la méthode des moindres carrés.

Compléter le tableau de calculs ci-dessous :

Semestre	Rang du semestre x_i	C.A. semestre (en 10^5 FCFA) y_i	$\log y_i$ Y_i	Y_i^2	x_i^2	$x_i Y_i$
1er semestre 1989	1	4 100	3,61	13,03	1	3,61
2e semestre 1989	2	4 700	3,67	13,46	4	7,34
1er semestre 1990	3	5 100	3,71	13,76	9	11,13
2e semestre 1990	4	5 700	3,76	14,13	16	15,04
1er semestre 1991	5	6 400	3,81	14,51	25	19,05
2e semestre 1991	6	7 200	3,86	14,89	36	23,16
1er semestre 1992	7	8 000	3,90	15,21	49	27,30
2e semestre 1992	8	8 900	3,95	15,60	64	31,60
1er semestre 1993	9	10 000	4	16	81	36
TOTAUX	45		34,27	136,59	285	174,23

Des calculs élémentaires donnent :

$\bar{x} = \frac{45}{9} = 5$; $\overline{Y} = \frac{34,27}{9} \approx 3,81$ à 10^{-2} près par excès.

$$A = \frac{174,23 - (5 \times 34,27)}{285 - (5 \times 45)} = \frac{2,88}{60} = 0,048$$

$B = \overline{Y} - A\bar{x} = 3,81 - (0,048 \times 5) = 3,57.$

Une équation de la droite d'ajustement de Y en fonction de x ou droite de régression de Y en x est :

$$\boxed{Y = 0,048x + 3,57 \quad (1)}$$

L'égalité (1) donnerait le logarithme décimal du chiffre d'affaires en fonction du rang du semestre correspondant.

4. *a)* Calcul du coefficient de corrélation linéaire r entre x et Y.

Par définition $r = \frac{\text{cov}(x, Y)}{\sigma_x \sigma_Y}$

Des calculs classiques donnent :

$\text{cov}(x ; Y) = 0,308$; $V(x) = 6,666$; $V(Y) = 0,66$;

d'où : $\boxed{r = \frac{\text{cov}(x ; Y)}{\sqrt{V(x)V(y)}} = \frac{0,308}{2,097} = 0,14.}$

b) Il y a une faible corrélation entre x et Y.

5. Il s'agit d'exprimer y en fonction de x.

Or : $\log y = 0,048x + 3,57$ et $0,048 = \log(1,117)$; $3,57 = \log 3715$

d'où : $\log y = \log(1,117)^x + \log 3715$

$\log y = \log[3715(1,117)^x]$

$$\boxed{y = 3715(1,117)^x \quad (3)}$$

L'égalité (3) définit la fonction qui donnerait le chiffre d'affaires de l'entreprise en fonction du rang du semestre.

6. *a)* Le rang du 1er semestre 1994 est 11

d'où : $Y = (0,048 \times 11) + 3,57 = 4,098$ [d'après (1)]

or : $4,098 = \log(12\,530)$

donc : $\boxed{\text{le chiffre d'affaires prévu est égal à } 12\,530 \times 10^5 \text{ FCFA.}}$

b) Le rang du 2e semestre 1995 est 14 ; en utilisant l'équation précédente, on a :

$Y = (0,048 \times 14) + 3,57 = 4,242$;

or : $4,242 = \log(17\,460)$

donc : $\boxed{\text{le chiffre d'affaires prévu est égal à } 17\,460 \times 10^5 \text{ FCFA.}}$

TP2 Ajustement affine et ajustement exponentiel

Exercice commenté

Le tableau ci-contre donne le cours moyen d'une action donnée à la bourse d'Abidjan :

Année	Rang de l'année x_i	Prix (en FCFA) y_i
1991	0	550
1992	1	580
1993	2	640
1994	3	850
1995	4	1 050
1996	5	1 120

Première partie : Représentation

1. *a)* Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\,;\,y_i)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unités : 1 cm pour une année en abscisse et 1 cm pour 100 FCFA en ordonnée.

b) Calculer les coordonnées du point moyen, G $(\bar{x}\,;\bar{y})$ et le placer sur la figure précédente.

On décide d'effectuer deux ajustements successifs en vue de faire des prévisions.

Deuxième partie : Ajustement affine

1. *a)* Calculer à 10^{-3} près par excès, le coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i\,;\,y_i)$. En déduire qu'un ajustement affine est justifié.

b) Écrire une équation de la droite de régression $(\mathscr{D})$ de y en x par la méthode des moindres carrés. On donnera les coefficients à 10^{-1} près par excès.

c) Tracer cette droite sur le graphique de la première partie.

2. En supposant que la tendance constatée se maintienne, estimer :

a) le cours moyen de cette action au 1er janvier 2000 ;

b) à partir de quelle année, le cours moyen de l'action considérée dépassera-t-il 2 000 FCFA ?

Troisième partie : Ajustement exponentiel

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ab^x$, où a et b sont deux nombres réels strictement positifs.

1. On impose à la courbe représentative de f de passer par les points A(0 ; 550) et B(5 ; 1 120). En déduire les valeurs exactes de a et b, puis la valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de b.

2. Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = 550 \times (1{,}15)^x$.

a) Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

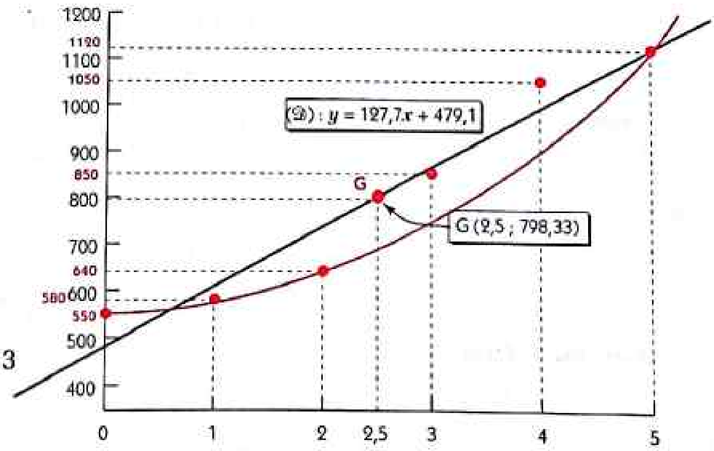
b) Dresser le tableau de variations de f.

c) Tracer la courbe représentative de f sur le graphique de la première partie.

3. Résoudre l'inéquation : $f(x) > 2\,000$. Donner une interprétation du résultat.

• ***Première partie : Représentation***

1. *a)* ***Représentation du nuage de points***



b) ***Coordonnées du point G***

On a : $x_G = \bar{x} = \dfrac{0+1+2+3+4+5}{6} = 2{,}5$

$y_G = \bar{y} = \dfrac{550 + \ldots + 1\,120}{6} = 798{,}33$

$x_G = 2{,}5 = \bar{x}\ ;\ y_G = 798{,}33 = \bar{y}$

• ***Deuxième partie : Ajustement affine***

1. *a)* ***Calcul du coefficient de corrélation linéaire r***

• *Effectuer soi-même les calculs puis les confronter avec ceux du tableau suivant.*

Tableau de calculs

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
0	550	– 2,5	– 248,3	320,76	6,25	61 652,89
1	580	– 1,5	– 218,3	327,45	2,25	47 654,89
2	640	– 0,5	– 158,3	79,15	0,25	25 058,89
3	850	0,5	51,7	25,85	0,25	2 672,89
4	1 050	1,5	251,7	377,55	2,25	63 352,89
5	1 120	2,5	321,7	804,25	6,25	103 490,89
15	4 790	0	– 0,2	2 235	17,5	303 883,34

Pour calculer r on peut :
– soit utiliser directement la formule $\dfrac{\text{cov}(x, y)}{\sqrt{V(x)V(y)}}$
– soit calculer au préalable $\text{cov}(x ; y)$, σ_x, σ_y.

On obtient : $r = 0{,}970$ à 10^{-3} près par excès.

Il y a une très forte corrélation entre x et y, ce qui justifie l'usage d'un ajustement affine car $0{,}97 > 0{,}95$.

b) Équation de la droite de régression de y en x

L'équation de $(\mathcal{D})$ s'écrit sous la forme : $y = ax + b$

avec : $a = \dfrac{\text{cov}(x ; y)}{\sigma_x} = \dfrac{2\,235}{17{,}5} = 127{,}7$; $b = \bar{y} - a\bar{x} = 798{,}33 - 127{,}7 \times 2{,}5 = 798{,}33 - 319{,}25 = 479{,}1$.

donc : $a = 127{,}7$ à 10^{-1} près par excès ; $b = 479{,}1$ à 10^{-1} près par excès

D'où l'équation de la droite $(\mathcal{D})$: $y = 127{,}7x + 479{,}1$

c) Tracé de la droite $(\mathcal{D})$

Une droite étant définie par deux points il suffit de choisir deux valeurs de x pour lesquelles les ordonnées correspondantes sont faciles à placer sur le graphique. (Voir figure.)

2. *a)* L'an 2000 aura le rang 9 d'où : $y_9 = 127{,}7 \times 9 + 479{,}1 = 1\,628{,}4$; $y_9 = 1\,629$.

Le cours moyen de l'action sera, en l'an 2000, de 1 629 F CFA.

b) Résolution de l'inéquation 127,7x + 479,1 > 2000

On a : $127{,}7x + 479{,}1 > 2000 \Leftrightarrow 127{,}7x > 1\,520{,}90 \Leftrightarrow x > 11{,}90$.

D'où il résulte que le plus petit nombre entier naturel x pour lequel l'inéquation est vérifiée est 12.

Le cours moyen de l'action considérée dépassera 2 000 F CFA à partir de l'an 2003 inclus.

- ***Troisième partie : Ajustement exponentiel***

1. ***a) Calcul des valeurs exactes de a et b.***

Écrire que la courbe représentative de f passe par les points A et B ; cela fournira un système de deux équations à deux inconnues a et b ; vérifier que a et b satisfont aux égalités :

$$a = 550 \text{ (valeur exacte de } a) \ ; \ b = \left(\frac{112}{55}\right)^{1/5} \text{ (valeur exacte de } b).$$

b) Valeur approchée de b à 10^{-2} près par défaut.

La calculatrice donne immédiatement : $b = 1{,}15$ à 10^{-2} près par défaut.

2. ***a) Calcul de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.***

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 550 \times (1{,}15)^x$ et $1{,}15 > 1$

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} 550 \times (1{,}15)^x = 550 \lim\limits_{x \to +\infty} (1{,}15)^x = +\infty$; $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

b) Tableau de variation de f.

$\boxed{f'(x) = 550 \ln(1{,}15)(1{,}15)^x}$

D'où le tableau de variation de f ci-contre.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	550 ↗	$+\infty$

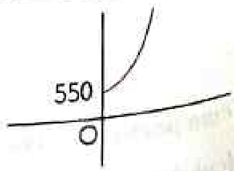
c) Tracé de la courbe représentative de f (voir figure).

3. ***Résolution de l'inéquation : f(x) > 2000.***

$f(x) = 550 \times (1{,}15)x > 2000 \Leftrightarrow (1{,}15)x > \dfrac{2000}{550} = 3{,}63$

$\Leftrightarrow x\ln(1{,}15) > \ln(3{,}63)$

$\Leftrightarrow x > \dfrac{\ln(3{,}63)}{\ln(1{,}15)} = \dfrac{1{,}2891}{0{,}1398} = 9{,}2225.$



À partir du rang 10, le cours moyen de l'action dépassera 2000 FCFA.

Exercices

ENTRAÎNEMENT ET PROBLÈMES

1 Nuage de points et droites de régression

Diverses sociétés de gardiennage pour des immeubles résidentiels proposent différents salaires : soit X le salaire proposé et Y le nombre de candidats qui se sont présentés à l'embauche pour postuler une place. Les observations sont données dans le tableau ci-dessous.

Société	Salaire x (en FCFA)	Nombre de candidats y
1	44 000	10
2	45 000	13
3	46 000	17
4	47 000	19
5	48 000	21
6	49 000	25

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique double :
– le salaire x figurant en abscisse ;
– le nombre de candidats y figurant en ordonnée.
2. Trouver une équation de la droite de régression de y en fonction de x et représenter cette droite sur le graphique précédent.
3. On a appris qu'une septième société de gardiennage s'était ouverte sur la place et que 30 candidats s'y étaient présentés. À combien peut-on estimer le salaire que l'on a proposé dans cette nouvelle société ?

D'après bac

2

Une compagnie d'assurances d'un pays de l'UEMOA garantit à ses clients trois types principaux de risques : VIE, ACCIDENTS, INCENDIE.
Elle a établi le tableau statistique suivant :

Années x_i	Risques y_i			Total T
	VIE y_1	ACCIDENTS y_2	INCENDIE y_3	
1980	280	180	90	550
1981	325	210	100	635
1982	405	230	108	743
1983	485	270	122	877

1. *a)* Tracer y_1, y_2, y_3 et T sur le même graphique.
b) Une droite peut-elle ajuster de façon satisfaisante chacun de ces risques ?
(Sur l'axe des abscisses l'année 1980 aura le rang 1, l'année 1981 le rang 2 et ainsi de suite).
2. Écrire les équations des droites y_1, y_2, y_3 et T sous la forme : $y_i = m_i x + P_i$, $1 \leq i \leq 3$ et $T = mx + P$.
3. *a)* Vérifier que : $m = m_1 + m_2 + m_3$; $P = P_1 + P_2 + P_3$.
b) Établir ces deux égalités.
4. Calculer les valeurs probables de y_1, y_2, y_3 et T pour 1990.

3 Droite de Mayer et changement d'origine

On considère un conducteur dont la résistance électrique R, exprimée en ohms (Ω), est une fonction affine de la température θ exprimée en degrés Celsius (°C).
On a : $R = a\theta + b$ où a et b sont des constantes réelles.
L'objet de cet exercice est de fournir une estimation de R pour θ donné.

1. On pose : $x = \frac{\theta}{4} - 5$ et $y = 10R - 21$, puis on effectue une série de mesures.
On obtient ainsi le tableau statistique ci-dessous.

x_i	3	27	51	70	97	116	156	184
y_i	12,1	20,2	27,5	37,6	47,3	50,7	66,6	76,5

a) Représenter le nuage de points associé à la série (x_i, y_i) dans le plan muni d'un repère orthonormé.
b) G_1 désigne le point moyen des quatre premiers points du nuage et G_2 celui des quatre derniers points du nuage. *(Pour les calculs utiliser les coordonnées de G_1 et G_2 arrondis à 10^{-2} près par excès.)*
c) Déterminer une équation de la droite (G_1G_2).
d) Placer les points G_1 et G_2 puis tracer la droite (G_1G_2) sur la figure.
2. *a)* Utiliser le résultat précédent pour calculer les valeurs des constantes a et b.
b) En déduire une estimation de R à 10^{-2} près par excès lorsque $\theta = 40$.

4 Ajustement affine par la méthode de Mayer et par la méthode des moindres carrés

Une entreprise de fabrication de matériels informatiques a conçu et réalisé un nouveau logiciel destiné aux petites et moyennes entreprises. Une étude de marché a permis de trouver six cents entreprises susceptibles d'acheter ce logiciel. Afin de déterminer à quel prix chacune d'elles accepterait d'acquérir ce logiciel on mène une enquête dont les résultats ont généré le tableau statistique ci-dessous.

Prix proposé x_i	Nombre y_i d'entreprises disposées à acheter le logiciel au prix proposé
4 000 000	70
3 600 000	80
3 200 000	150
2 800 000	220
2 400 000	250
2 000 000	260
1 600 000	400
1 200 000	440
1 000 000	450
800 000	520

1. *a)* Représenter le nuage de points $M_i(x_i ; y_i)$ associé à la série double ci-dessus.
b) Utiliser la méthode de Mayer pour déterminer une équation d'une droite d'ajustement (Δ_1) du nuage de la forme $y = Ax + B$. Les coefficients A et B seront donnés par leurs valeurs approchées respectivement à 10^{-4} près et à 10^{-1} près. Tracer (Δ_1) sur le graphique.
2. Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près par excès du coefficient de corrélation linéaire r.
3. Déterminer une équation de la forme $y = ax + b$ de la droite de régression (Δ_2) de y en x par la méthode des moindres carrés.

5 Ajustement affine et prévision de vente

Le tableau statistique suivant indique le prix de vente en FCFA d'un magnétoscope de marque donnée ainsi que le nombre d'exemplaires vendus sur six années consécutives :

Rang de l'année	1	2	3	4	5	6
Prix de vente x_i (en FCFA)	200 000	140 000	180 000	250 000	260 000	270 000
Nombre y_i d'exemplaires vendus	196	242	220	160	150	140

1. Représenter le nuage de points associé à la série double $(x_i ; y_i)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal. On prendra pour origine du repère le point de coordonnées (140 000 ; 160), pour unités : 1 cm pour 10 000 F CFA sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 10 unités sur l'axe des ordonnées. Vérifier qu'un ajustement affine du nuage semble approprié.

2. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage, puis le placer sur la figure.

3. *a)* Déterminer une équation de la droite D de régression de y en x par la méthode des moindres carrés. On donnera les coefficients à 10^{-3} près par excès.

b) Tracer la droite D sur le graphique de la question **1.**

4. Déterminer l'année où le chiffre d'affaires est maximum ainsi que ce maximum.

5. On suppose dorénavant que, pour chaque année le nombre y d'exemplaires vendus et le prix de vente x sont liés par la relation : $2y + 0{,}16x - 698 = 0$.

On note $f(x)$ le chiffre d'affaires réalisé en vendant y magnétoscopes au prix de x FCFA l'unité.

a) Donner l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

b) Étudier les variations de la fonction f sur [140 000 ; 250 000].

c) En déduire le prix de vente d'un tel magnétoscope l'année de rang 8 si l'on veut que la somme encaissée $f(x)$ soit maximale. Quel sera le nombre d'exemplaires vendus à l'unité près ? Quelle sera la somme encaissée ?

6 Ajustement affine par moindres carrés

Une entreprise fabrique un logiciel. Une enquête menée auprès de 100 sociétés intéressées par l'acquisition de ce logiciel donne les résultats suivants :

N° i	Prix x_i proposé pour le logiciel (en F CFA)	Nombre y_i de sociétés disposées à acheter le logiciel
1	100 000	100
2	160 000	86
3	220 000	82
4	320 000	80
5	400 000	70
6	480 000	46
7	560 000	40
8	640 000	25
9	720 000	15
10	800 000	10

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique ci-dessus dans le plan muni d'un repère orthogonal. (Unités graphiques : sur l'axe des abscisses 1 cm pour 100 000 F, sur l'axe des ordonnées 1 cm pour 20 sociétés).

2. *a)* Déterminer une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront donnés à 10^{-2} près par défaut.

b) Tracer cette droite sur le graphique de la question **1.**

3. *a)* Le fabricant du logiciel engage deux sortes de frais :
– les frais fixes se montent à 8 000 000 FCFA.
– les frais de fabrication montent à 50 000 FCFA par logiciel.

x désignant le prix de vente d'un logiciel, utiliser l'équation obtenue au **2.** pour donner l'estimation du bénéfice $b(x)$ en fonction de x.

b) Prouver que la fonction b atteint son maximum en x_0 élément de [100 000 ; 800 000] que l'on déterminera. Calculer alors $b(x_0)$.

7 Droite de Mayer, corrélation linéaire et moindres carrés

Dans 10 exploitations agricoles d'une même région, on a mesuré la taille de l'exploitation (en dizaines d'hectares) et le bénéfice annuel net (en milliers de F CFA) :

taille x_i	1	2	3	4	5
bénéfice y_i	1 200	3 000	4 200	− 600	4 800
taille x_i	6	7	8	9	10
bénéfice y_i	5 400	4 200	1 800	8 100	9 600

1. *a)* Représenter le nuage de points correspondant, ainsi que le point moyen G du nuage.

b) Écrire l'équation de la droite de Mayer.

2. *a)* Calculer le coefficient de corrélation linéaire ; justifier l'existence d'un lien entre le bénéfice et la taille de l'exploitation.

b) Utiliser la méthode des moindres carrés pour déterminer l'équation de la droite d'ajustement affine sous la forme $y = ax + b$. Tracer cette droite. Réalise-t-elle un bon ajustement ?

c) Lire, sur cette droite d'ajustement, la taille de l'exploitation réalisant un bénéfice nul.

3. Si on considère une exploitation de 0,5 ha, quel serait le bénéfice d'après cet ajustement ?

8 Ajustement et corrélation linéaire

Un hypermarché dispose du tableau statistique ci-dessous :

Années	Nombre x_i de téléviseurs vendus	Nombre y_i de colis livrés
1982	63 000	85 000
1983	65 000	83 000
1984	64 000	95 000
1985	66 000	105 000
1986	69 000	116 000
1987	71 000	117 000
1988	75 000	125 000
1989	76 000	133 000
1990	80 000	129 000
1991	81 000	137 000

1. Donner une équation de la droite d'ajustement qui permet d'estimer le nombre de téléviseurs vendus à partir du rang de l'année 11 (1982 aura le rang 1, 1983 le rang 2, ainsi de suite).

2. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre le nombre de téléviseurs vendus et le nombre de colis livrés par l'hypermarché.

3. Déterminer une équation de la droite de régression qui permet d'estimer le nombre de colis livrés à partir de la connaissance du nombre de téléviseurs vendus.

4. Utiliser les résultats précédents pour prévoir le nombre de colis livrés par l'hypermarché en 2002.

9 Ajustement affine par moindres carrés

Le tableau ci-après donne l'évolution du nombre total d'actifs à temps partiel dans un pays P. x_i est le rang de l'année (tous les 4 ans) et y_i le nombre d'actifs à temps partiel, en millions.

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i ; y_i)$, dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques 1 cm pour 4 années sur l'axe des abscisses et 5 cm pour un million d'actifs sur l'axe des ordonnées, en commençant la graduation verticale à 1 million.

Année	x_i	y_i
1972	0	1,2
1976	1	1,7
1980	2	1,8
1984	3	2,2
1988	4	2,6
1992	5	2,8
1996	6	3,6

2. *a)* Déterminer une équation de la droite ($\mathcal{D}$) de régression de y en x par la méthode des moindres carrés (on prendra les valeurs approchées à 0,01 près par excès pour les coefficients).
b) Tracer la droite ($\mathcal{D}$) sur le graphique précédent.
3. En supposant que l'évolution se poursuive de la même façon pour les années suivantes, donner une estimation du nombre d'actifs à temps partiel en 2004.

10 Étude d'une série double avec regroupement en classes

Le tableau suivant donne la répartition d'un échantillon de 100 candidats bacheliers suivant leurs notes d'histoire (H) et de sciences économiques et sociales (S.E.S.). On ne dispose pas d'observation individuelle. Les notes ont été regroupées par classe.

S(y) \ H(x)	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 14[	[14 ; 18]
[0 ; 4[	2	1	0	0	0
[4 ; 8[	2	15	5	0	0
[8 ; 12[	0	4	40	10	0
[12 ; 14[	0	0	5	6	5
[14 ; 18]	0	0	0	4	1

On note x_i les centres de classes des notes d'histoire et y_i les centres de classes des notes S.E.S.
1. Calculer la moyenne $\overline{x}$ des notes d'histoire.
Calculer la moyenne $\overline{y}$ des notes de S.E.S.
2. Pour chaque classe de centre x_i, calculer la moyenne $\overline{y_i}$ des notes de S.E.S. Dans un repère bien choisi, représenter la série $(x_i, \overline{y_i})$. Donner une équation de la droite de régression de $\overline{y}$ en x, par la méthode des moindres carrés, sous la forme $\overline{y} = ax + b$. La tracer.
3. Pour chaque classe de centre y_i calculer la moyenne de $\overline{x_i}$ des notes d'histoire. Avec le même repère que ci-dessus représenter la série $(\overline{x_i}, y_i)$.
Donner une équation de la droite de régression de $\overline{x}$ en y, par la méthode des moindres carrés sous la forme $\overline{x} = a'y + b'$. La tracer.
4. Pour mesurer l'intensité de la corrélation linéaire entre les variables x et y, on calcule le coefficient de corrélation linéaire r tel que $r^2 = aa'$, r étant positif si a et a' sont positifs.
Calculer r. La corrélation linéaire semble-t-elle bonne ?

11 Les dépenses x_i et les chiffres d'affaires y_i bimensuels d'une grande entreprise ont donné en 1982 la nomenclature suivante, après une étude statistique ; les montants étant exprimés en dizaines de millions de francs CFA.

x_i	12	17	11	13	31	20
y_i	99	130	92	108	232	150

1. Placer le nuage de points $M_i(x_i ; y_i)$ pour $1 \leq i \leq 6$ dans un plan muni d'un repère orthogonal.
2. Déterminer une équation de la droite de régression de y en x par la méthode de Mayer.
3. Déterminer les deux droites de régression de y en x et de x en y par la méthode des moindres carrés.
4. Calculer le coefficient de corrélation linéaire r de la série statistique. Que peut-on en déduire ? Quelle est en deux mois :
a) La dépense si le chiffre d'affaires bimensuel est 2 milliards de FCFA ?
b) Le chiffre d'affaires si la dépenses bimensuelle est 300 millions ?

D'après bac

12 Le tableau suivant donne l'âge X et la moyenne Y des maxima de tension artérielle en fonction de l'âge d'une population féminine.

X	36	42	48	54	60	69
Y	11,8	14,0	12,6	15,0	15,5	15,1

1. Représenter graphiquement le nuage de points dans un plan muni du repère orthogonal (O, I, J) (0,5 cm pour 1 an et 3 cm pour l'unité de tension artérielle).
2. Calculer la moyenne et la variance des séries statistiques associées aux variables X et Y.
3. *a)* Trouver une équation de la droite de régression de Y en fonction de X.
b) Trouver une équation de la droite de régression de X en fonction de Y.
c) Représenter ces deux droites sur le même graphique que celui utilisé pour le nuage de points.
4. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre les variables X et Y.
5. Une personne de 70 ans a une tension maximale de 16,2. Cela vous paraît-il normal ?

D'après bac

13 Corrélation linéaire et moindres carrés
(Étude de l'évolution du stock d'une entreprise commerciale et ajustement exponentiel.)

Année i	1989	1990	1991	1992	1993	1994
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6
Nbre d'articles y_i	6 400	7 200	8 700	10 400	12 600	15 000

1. On note $z = \log(y_i)$, (logarithme décimal). Calculer le coefficient de corrélation linéaire des variables x et z ; (les logarithmes décimaux seront arrondis à 10^{-4} près ; les calculs seront présentés sous forme de tableau et, en dehors des valeurs de x_i et de x_i^2, tous les nombres de ce tableau seront arrondis à 10^{-4} près).
2. Déterminer par la méthode des moindres carrés, l'équation de la droite ajustant les valeurs de y à celles de x. En déduire, sous la forme $y = k \times \lambda x$, l'ajustement des valeurs de y à celles de x. *(λ sera arrondi au plus proche à 10^{-3} près et k à une unité près).*

Recommandation

Les calculs seront effectués en conservant les résultats en mémoire dans une calculatrice.
3. Si l'évolution du stock se poursuit de la même manière dans le temps, peut-on prévoir le nombre d'articles en stock en 2002 ?

14 Distance d'arrêt

La mesure de la distance d'arrêt effectuée pour sept automobiles roulant à des vitesses différentes a fourni les résultats consignés dans le tableau suivant :

Numéro de la voiture	1	2	3	4
Vitesse x_i (en km/h)	35	50	68	35
Distance d'arrêt y_i (en m)	5,35	14,50	20,32	6,50
Numéro de la voiture	5	6	7	
Vitesse x_i (en km/h)	80	50	95	
Distance d'arrêt y_i (en m)	38,55	11,52	50,50	

1. Représenter le nuage de points de coordonnées $(x_i\,;\,y_i)$ dans un plan muni d'un repère orthogonal.
2. La forme du nuage ne permet pas de conjecturer un ajustement affine. On pose :

$$u^2 = y \text{ (c'est-à-dire } u = \sqrt{y}\text{, car } u > 0\text{)}.$$

a) Établir le tableau statistique de la série double de caractères $(x\,;\,u)$.
b) Représenter le nuage de points de coordonnées $(x_i\,;\,u_i)$ dans le plan muni d'un second repère orthogonal.
c) Le nuage associé à la série statistique double de caractère $(x,\,u)$ se prête-t-il à un ajustement affine ? Si oui calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique de caractère $(x,\,u)$.
d) Utiliser la méthode des moindres carrés pour déterminer une équation de la droite de régression de u en x.
e) Déduire de ce qui précède une estimation de la distance nécessaire à l'arrêt d'une voiture lancée à 100 km/h.
N.B. : Tous les résultats numériques seront donnés à 10^{-2} près par défaut.

15 Ajustement quadratique

Le tableau ci-contre fournit l'évolution de la production d'énergie nucléaire dans un pays P. On souhaite estimer la production future et pour cela on hésite entre deux ajustements possibles de la série double $(x_i\,;\,y_i)$.

Années	Rang x_i de l'année	Production y_i en TW.h
1985	0	213
1990	5	298
1991	6	315
1992	7	322
1993	8	350
1994	9	342
1995	10	359
1996	11	378

Première partie : ajustement affine
1. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i\,;\,y_i)$, (le résultat sera donné à 10^{-3} près par défaut). Interpréter ce résultat.
2. Déterminer par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression (D) de y en x (on donnera les coefficients à 10^{-1} près par défaut).
3. Dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unités 1 cm pour une année sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 10 TW.h sur l'axe des ordonnées, en commençant la graduation à 200 TW.h, représenter le nuage de points $M_i(x_i\,;\,y_i)$, associé à la série statistique double donnée et la droite (D).
4. *a)* À partir de ce graphique, déterminer en quelle année la production en énergie nucléaire dépassera 420 TW.h.
b) Retrouver le résultat précédent par le calcul.

Deuxième partie : ajustement à l'aide d'une parabole
On ajuste à main levée par une parabole ($\mathcal{P}$) passant par A(0 ; 213), B(5 ; 298) et C(10 ; 363).
1. *a)* $y = ax^2 + bx + c$ est une équation de la parabole ($\mathcal{P}$). Déterminer les nombres réels a, b et c.
b) Tracer ($\mathcal{P}$) sur le graphique précédent.
2. *a)* Estimer, à l'aide de la parabole ($\mathcal{P}$), en quelle année la production dépassera 420 TW.h.
b) Retrouver le résultat précédent par le calcul.

16 Ajustement logarithmique

On s'intéresse à l'évolution du parc automobile dans un pays P.

Années	Rang x_i de l'année	Nombre y_i de voitures (en millions)
1970	1	11,8
1974	5	14,6
1980	11	18,4
1985	16	24,7
1990	21	26,7
1996	27	27,8
1997	28	25,5

1. Représenter le nuage de points $M_i(x_i,\,y_i)$, associé à la série statistique double $(x_i\,;\,y_i)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal, où 0,5 cm représente une année en abscisse et 1 cm représente 1 million de voitures en ordonnée (en commençant la graduation à 10 millions).
2. *a)* Calculer le coefficient de corrélation linéaire à 10^{-3} près par défaut.
Justifier un ajustement affine.
b) Par la méthode des moindres carrés, déterminer une équation de la droite de régression de y en x ; on donnera les coefficients à 10^{-1} près par excès. Tracer cette droite sur le graphique du **1**.
c) En supposant que ce modèle mathématique reste valable jusqu'en l'an 2000, faire une estimation du nombre de véhicules en l'an 2000 dans le pays P.
3. La forme du nuage s'inscrivant dans les dernières années, on se propose de faire un autre type d'ajustement. Pour cela, on considère un ajustement logarithmique par la courbe ($\mathcal{C}$) de la fonction f définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = a + b\ln x$.
On impose à la courbe ($\mathcal{C}$) de passer par les points A(1 ; 9,5) et B(25 ; 26).
a) En déduire les valeurs exactes de a et b, puis la valeur approchée de b à 10^{-1} près par défaut.
En déduire l'expression de $f(x)$ (on prendra pour b la valeur approchée précédemment trouvée).
b) Etudier les variations de f et tracer ($\mathcal{C}$) sur le segment $[1\,;\,35]$ dans le graphique déjà utilisé, .
c) Se servir de ce nouvel ajustement pour estimer le nombre de véhicules en 2000 dans le pays P.

17 Ajustement « puissance »

Une grande entreprise multinationale lancée sur le marché des Jeux électroniques, dispose, sur cinq années consécutives de l'évolution de sa production x (en milliers) et de son résultat net y (en millions de F CFA) (résultats arrondis) :

x_i (en milliers)	200	400	1 600	2 000	2 800
y_i (en millions de FCFA)	18	84	1 188	1 800	6 600

1. Représenter cette série dans un repère bien choisi. L'allure du nuage suggère-t-elle une liaison statistique entre les variables x et y ? De quelle forme ?
2. Calculer les coefficients de corrélation linéaire des séries $(x_i\,;\,y_i)$; $(x_i\,;\,\ln y_i)$ et $(\ln x_i\,;\,\ln y_i)$ à 10^{-4} près. Quel ajustement semble être le meilleur ?
3. Donner une équation de la droite de régression de $\ln y$ en $\ln x$ (coefficients arrondis à 10^{-2} près). En déduire un « ajustement puissance » de y en x.
4. Quelle estimation peut-on faire de la variation relative du résultat de cette entreprise pour une production qui passerait de 4 000 à 4 400 ?

15

Probabilité

Le calcul de probabilités prend de plus en plus d'importance, tant du point de vue théorique en physique mathématique, que du point de vue pratique en économie.

Son développement est dû aux réflexions de Blaise Pascal et de Pierre de Fermat sur les jeux et s'appuyait alors sur la combinatoire.

De nombreux mathématiciens tels que Bernoulli, Laplace, Gauss, Cauchy, Borel, Lebesgue, ... ont contribué à faire du calcul des probabilités un outil aujourd'hui utilisé dans tous les domaines.

De nos jours, le champ immense de leurs applications à la totalité des activités humaines semble donner raison au physicien et mathématicien Maxwell : « La vraie logique du monde est celle du calcul des probabilités. »

Pierre de Fermat
mathématicien français – 1601-1665.

Blaise Pascal
physicien et savant français – 1623-1662.

SOMMAIRE

1 Analyse combinatoire

1.1. Les nombres A_n^p, $n!$, C_n^p

Définitions

En classe de Première SE la mise en place des outils de dénombrement a conduit à l'introduction des nombres entiers naturels A_n^p, $n!$, C_n^p,

– lorsque n et p sont des nombres entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$:

$$A_n^p = n(n-1) \dots (n-p+1) \; ; \; n! = A_n^n \; ; \; C_n^p = \frac{A_p^n}{p!}$$

– par convention, on a posé :

$$A_n^1 = n \text{ et } A_n^0 = 1 \quad ; \quad 1! = 1 \text{ et } 0! = 1 \quad ; \quad C_n^1 = n \text{ et } C_n^0 = 1.$$

Propriétés

Exemple introductif

On donne un ensemble A contenant 12 objets.
Pour choisir 8 objets parmi 12, il y a C_{12}^8 possibilités.
Mais choisir 8 objets parmi 12 revient à choisir 4 objets parmi 12 que l'on va laisser de côté, il y a donc autant de façons de choisir 8 objets que 4 objets parmi 12.

On en déduit que : $C_{12}^8 = C_{12}^4$.

On démontre la propriété suivante à l'aide de l'expression de C_n^p.

Propriété

Pour tous nombres entiers naturels n et p tels que $n \geq p$, $C_n^{n-p} = C_n^p$.

Activité introductive

On donne : E = {a , b , c , d}.
Quel est le nombre de parties de E à trois éléments ?
Quel est le nombre de parties de E à trois éléments contenant a ?
Quel est le nombre de parties de E à trois éléments ne contenant pas a ?
En déduire que $C_4^3 = C_3^2 + C_3^3$.

On démontre la propriété suivante à l'aide de l'expression de C_n^p.

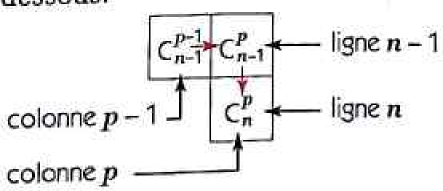
Propriété

Pour tous nombres entiers naturels n et p tels que $1 \leq p \leq n-1$, $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$.

Calculs successifs des nombres C_n^p

Disposition pratique

On peut calculer successivement les nombres C_n^p en utilisant l'égalité $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$.
L'utilisation d'un tableau faisant correspondre n aux lignes et p aux colonnes donne la disposition pratique ci-dessous.



– La ligne 1 est constituée de 1 car : $C_n^0 = 1$
– La diagonale est constituée de 1 car : $C_n^n = 1$

Le tableau ainsi obtenu est appelé **triangle de Pascal**.

Triangle de Pascal

$C_7^3 = C_6^2 + C_6^3 = 15 + 20 = 35.$

Information historique

Ce triangle était déjà connu de Tartaglia (1558), Stiefel (1543 et des Chinois (1303). Mais c'est Blaise Pascal qui donna des applications très intéressantes de ce triangle dans son traité du **Triangle arithmétique** (1654).

Pascal
(1623 – 1662)

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	7	8...
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1
...									

ligne 7

colonne 3

Formule du binôme de Newton

Activité introductive

a et b étant des nombres complexes, le développement de $(a + b)^2$, $(a + b)^3$, permet de conjecturer que : pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, $(a + b)^n = C_n^0\, a^n + C_n^1\, a^{n-1}b + \dots + C_n^p\, a^{n-p}b^p + \dots + C_n^n\, b^n$. (1)

On veut contrôler cette conjecture par une démonstration par récurrence.

Pour cela, on peut procéder comme suit :

1 vérifier l'égalité pour $n = 1$

2 supposer établie cette égalité pour un nombre entier naturel k supérieur à 1

$$(a + b)^k = C_k^0\, a^k + C_k^1\, a^{k-1}b + \dots + C_k^p\, a^{k-p}b^p + \dots + C_k^k\, b^k$$

établir alors cette égalité pour $k + 1$; pour cela,

– écrire : $(a + b)^{k+1} = (a + b) \times (a + b)^k$

– développer : $(a + b)^{k+1} = (a + b)[C_k^0\, a^k + C_k^1\, a^{k-1}b + \dots + C_k^p\, a^{k-p}b^p + \dots + C_k^n\, b^k]$

– regrouper les termes semblables en utilisant les propriétés :

$$C_n^0 = C_{n-1}^0 = 1 \quad ; \quad C_n^n = C_{n+1}^n = 1 \quad ; \quad C_{n+1}^p = C_n^{p-1} + C_n^p$$

3 conclure.

Propriété

Pour tous nombres complexes a et b, pour tout entier naturel n non nul,

$$(a + b)^n = C_n^0\, a^n + C_n^1\, a^{n-1}b + \dots + C_n^p\, a^{n-p}b^p + \dots + C_n^n\, b = \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p\, a^{n-p}b^p.$$

C_n^0, C_n^1, C_n^p, ..., C_n^n sont appelés **coefficients binomiaux.**

Exemple

- $(a + b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$.
- $(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^p x^p + \dots + C_n^n x^n$.

Exercices

1.a Calculer les nombres entiers naturels :

A_n^1 ; $A_n^p - A_n^{p-1}$; $(1 \le p \le n)$

1.b Développer les expressions suivantes :

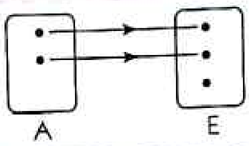
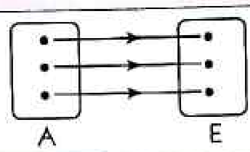
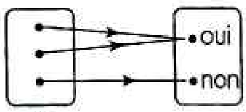
$(1 + x)^8$; $(1 - x)^7$; $(1 - x)^n$; $(3x - 2)^9$.

1.c Calculer les nombres entiers naturels définis par : $A = \dfrac{(n + 1)!}{n!}$; $B = \dfrac{n!}{p!}$;

$C = (n + p)! - n!$ $[p \le n]$.

1.2. Des outils pour dénombrer

TABLEAU RÉCAPITULATIF

	Définitions	Propriétés	Formules
Arrangement	On appelle ***arrangement*** de p éléments de E, tout p-uplet $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ d'éléments de E deux à deux distincts $(1 \leq p \leq n)$. 	Le nombre d'arrangements de p éléments de E est : $\boxed{A_n^p}$ C'est le nombre d'injections d'un ensemble A de p éléments dans un ensemble E de n éléments.	$A_n^p = \underbrace{n(n-1)\dots(n-p+1)}_{p \text{ facteurs}}$ $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ $A_n^1 = n \quad A_n^0 = 1$
Permutation	On appelle ***permutation*** des éléments de E, tout arrangement des n éléments de E $(n > 1)$. 	Le nombre de permutations de n éléments de E est : $\boxed{n!}$ C'est le nombre de bijections d'un ensemble A de n éléments dans un ensemble E de n éléments.	$n! = n(n-1)\dots \times 3 \times 2 \times 1$ $1! = 1 \quad 0! = 1$
Combinaison	On appelle ***combinaison*** de p éléments de E, toute partie de E qui possède p éléments $(1 \leq p \leq n)$. 	Le nombre de combinaisons de p éléments de E est : $\boxed{C_n^p}$ Le nombre de parties d'un ensemble non vide de n éléments est : $\boxed{2^n}$ c'est le nombre d'applications de E dans l'ensemble {oui, non}	$C_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!\,p!}$ $C_n^1 = n \quad C_n^0 = 1$ $C_n^{n-p} = C_n^p$ $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$

Exercices

1.d Combien de mots de 4 lettres peut-on former avec notre alphabet de 26 lettres :
a) avec répétition des lettres ?
b) sans répétition des lettres ?
(On admet que les mots ainsi formés peuvent ne pas avoir de sens.)

1.e On veut constituer un nombre de 5 chiffres en utilisant les chiffres 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 sans qu'il y ait deux ou plusieurs chiffres identiques.
a) Combien peut-on former de nombres ?
b) Combien y en a-t-il qui ont le chiffre 9 comme chiffre des centaines ?
c) Combien y en a-t-il qui commencent par 56 ?

1.f Dix personnes sont assises autour d'une table ronde.
De combien de façons peut-on disposer ces personnes :
a) lorsque les chaises sont numérotées ?
b) lorsque les chaises ne sont pas numérotées ?

1.g Une équipe de football est constituée de 11 joueurs. Combien d'équipes de football peut-on composer lorsqu'il faut choisir les joueurs parmi 20 personnes ?

2 Probabilités d'un évènement

2.1. Évènements d'un univers d'éventualités

De la statistique aux probabilités

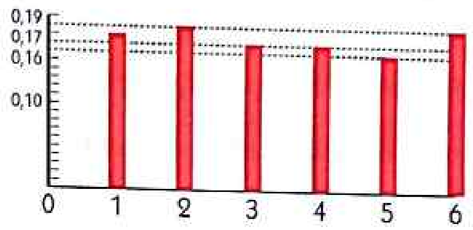
Exemple introductif 1

On considère un dé cubique parfaitement équilibré, dont les six faces sont numérotées de 1 à 6. On a lancé ce dé cent fois de suite et relevé à chaque lancer le chiffre inscrit sur la face supérieure. On a relevé dans un tableau tous les chiffres obtenus pendant les cent lancers. Étudions la série statistique associée à ce relevé.

Tableau des fréquences observées

Modalité du caractère	1	2	3	4	5	6	Totaux
Effectif	17	18	16	16	15	18	100
Fréquence	0,17	0,18	0,16	0,16	0,15	0,18	1

Diagramme en bâton des fréquences



Analyse des résultats

– On constate que les fréquences des différentes modalités sont sensiblement égales.

– Intuitivement, on peut dire qu'en lançant un dé parfaitement équilibré on a « autant de chances » de voir apparaître sur la face supérieure n'importe lequel des six chiffres: 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6.

– Calculons la moyenne des **fréquences observées** :

$$\frac{0{,}17 + 0{,}18 + 0{,}16 + 0{,}16 + 0{,}15 + 0{,}18}{6} \approx 0{,}166$$

– Remarquons que 0,166 est une valeur approchée de $\frac{1}{6}$ c'est-à-dire « une chance sur six ».

Nous pouvons considérer $\frac{1}{6}$ comme **fréquence théorique** pour chacune des six modalités. Les fréquences observées 0,15 ; 0,16 : 0,17 ; 0,18 sont proches de cette fréquence théorique.

L'objet de cette leçon est de présenter cette fréquence théorique par un modèle mathématique.

En renouvelant ce lancer mille fois, on obtient pour chacune des modalités une fréquence environ égale à celle du tableau précédent, la moyenne des fréquences observées étant plus proche de la fréquence théorique $\frac{1}{6}$.

En effet, selon le mathématicien Jacques BERNOULLI (1654 - 1705), dans son livre *L'art de conjecturer* : « si l'on répète un grand nombre de fois, dans les mêmes conditions, une centaine d'« expériences aléatoires », la fréquence observée semble se rapprocher d'une fréquence théorique. »

Exemple introductif 2

Deux personnes décident de jouer ensemble en lançant deux dés cubiques parfaitement équilibrés dont les faces sont numérotés de 1 à 6.
Le joueur A propose au joueur B la règle suivante :
« Si la somme des chiffres obtenus est 7, tu me donnes 100 F, si la somme des chiffres obtenus est 9, je te donne 100 F. »
Après 300 parties, le joueur A a gagné 2 300 F.
Savait-il qu'il aurait de « fortes chances » de gagner ?
Un observateur a relevé dans un tableau toutes les sommes de chiffres obtenus pendant les 300 parties. L'étude de la série statistique associée à ce relevé a permis d'établir le tableau des fréquences observées et le diagramme en bâton de ces fréquences observées.
Quelles analyses peut-on faire de ces résultats ?

Tableau des fréquences observées

Modalité du caractère	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Totaux
Effectif	8	13	20	29	38	51	48	27	24	17	10	300
Fréquence	0,027	0,050	0,100	0,096	0,125	0,170	0,160	0,090	0,080	0,056	0,033	1

Analyse des résultats

La fréquence de la modalité 7 du caractère est, comme l'avait prévu le joueur A, supérieur à la fréquence de la modalité 9 ; le joueur A savait donc qu'il y avait « plus de chance » d'obtenir un total 7 plutôt qu'un total 9 !

La réponse de ce problème sera donné ultérieurement.

Vocabulaire

Pour chacune des deux expériences décrites ci-dessous, nous allons observer les résultats et dégager progressivement le vocabulaire propre à notre étude ultérieure.

Univers des éventualités d'une expérience aléatoire

Expérience $\mathcal{E}_1$

On considère un dé cubique parfaitement équilibré dont les six faces sont numérotées de 1 à 6. On lance ce dé et on note le chiffre inscrit sur la face supérieure.

Expérience $\mathcal{E}_2$

On considère une pièce de monnaie parfaitement équilibrée.
On lance trois fois de suite cette pièce de monnaie et on note par ordre d'apparition le côté visible: P pour PILE et F pour FACE.

Pour chacune de ces deux expériences $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$, il n'est pas possible d'en prévoir les résultats. Ces expériences donnent des résultats aléatoires dus essentiellement au hasard,on dit que ce sont des **expériences aléatoires ou épreuves aléatoires**. Cependant, pour chacune de ces expériences aléatoires, on peut prévoir tous les résultats possibles ou **éventualités**.

L'ensemble des éventualités d'une expérience aléatoire est appelé **univers** et noté $\mathcal{U}$.

Pour $\mathcal{E}_1$

5 est un résultat possible :

$\mathcal{U}_1$ désignant l'univers des éventualités, on a :

$\mathcal{U}_1 = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$.

Pour $\mathcal{E}_2$

PPF est un résultat possible ;

$\mathcal{U}_2$ désignant l'univers des éventualités, on a :

$\mathcal{U}_2 = \{PPP ; PPF ; PFP ; FPP ; PFF ; FPF ; FFP ; FFF\}$.

Définition

$\mathcal{E}$ étant une expérience aléatoire donnant un nombre fini de résultats possibles appelés *éventualités*, l'ensemble de ces résultats possibles est appelé *univers* des éventualités de $\mathcal{E}$, on le note $\mathcal{U}$.

Évènements, évènements élémentaires

Pour $\mathcal{E}_1$

– « le chiffre obtenu est pair », c'est avoir comme résultat : 2 ou bien 4 ou bien 6.

On dit que l'**évènement** A_1 « le chiffre obtenu est pair » est réalisé lorsqu'on obtient l'une des éventualités : 2 ; 4 ; 6.

On écrit : $A_1 = \{ 2 ; 4 ; 6 \}$; donc : $A_1 \subset \mathcal{U}_1$.

– On dit alors que l'évènement « le chiffre obtenu est 3 » est un **évènement élémentaire**.

$\mathcal{E}_1$ a pour évènements élémentaires : $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$.

– Il n'est pas possible de réaliser l'évènement « le chiffre obtenu est 9 », cet évènement est dit **impossible**.

Cependant, il est toujours possible de réaliser l'évènement « le chiffre obtenu est compris entre 1 et 6 », cet évènement est dit **certain**.

Pour $\mathcal{E}_2$

L'évènement « les trois côtés visibles contiennent exactement un PILE » est la partie ci-dessous de $\mathcal{U}_2$:

$\{PFF ; FPF ; FFP\}$

- Traduire en langage courant l'évènement : $\{PPF ; PFP ; FPP\}$
- Traduire en langage des probabilités l'évènement : « Les trois côtés visibles sont les mêmes ».
- Écrire tous les évènements élémentaires.
- Quel est l'évènement certain ?

Définition

$\mathcal{U}$ étant l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire, on appelle *évènement* de $\mathcal{U}$ toute partie de l'ensemble $\mathcal{U}$.

- Lorsque cet évènement est un singleton, on l'appelle *évènement élémentaire* ;
- lorsque cet évènement est l'ensemble vide, on l'appelle *évènement impossible* ;
- lorsque cet évènement est l'ensemble $\mathcal{U}$, on l'appelle *évènement certain*.

Réunion, intersection de deux évènements

Pour $\mathscr{E}_1$

Considérons les évènements suivants :

A_1 « le chiffre obtenu est pair » ;
B_1 « le chiffre obtenu est multiple de 3 ».

On a : $A_1 = \{2 ; 4 ; 6\}$, $B_1 = \{3 ; 6\}$.

– Réaliser l'évènement A_1 ou l'évènement B_1 c'est obtenir un chiffre pair ou un multiple de 3 ; on dit que l'on a réalisé l'évènement (A_1 *ou* B_1).
Cet évènement est noté $A_1 \cup B_1$.

$$A_1 \cup B_1 = \{2 ; 3 ; 4 ; 6\}.$$

– Réaliser l'évènement A_1 et l'évènement B_1 c'est obtenir un chiffre pair multiple de 3 ; on dit que l'on a réalisé l'évènement (A_1 *et* B_1).
Cet évènement est noté $A_1 \cap B_1$.

$$A_1 \cap B_1 = \{6\}.$$

Pour $\mathscr{E}_2$

Considérons les évènements suivants :

A_2 : « Les trois figures obtenues contiennent au moins deux PILE ».
B_2 : « Les trois figures obtenues contiennent **au plus** deux PILE ».

– Réaliser l'évènement A_2 c'est obtenir deux PILE ou trois PILE.
A_2 = {PPF ; PFP ; FPP ; PPP}.

– Réaliser l'évènement B_2 c'est obtenir zéro PILE ou un PILE ou deux PILE.
B_2 = {FFF ; PFF ; FPF ; FFP ; PPF ; PFP ; FPP }

- Quel est l'évènement (A_2 *ou* B_2) ?
- Quel est l'évènement (A_2 *et* B_2) ?

Définition

$\mathcal{U}$ étant l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire, A, B des évènements de $\mathcal{U}$,

– on appelle évènement (A *ou* B) la partie $A \cup B$ de $\mathcal{U}$;

– on appelle évènement (A *et* B) la partie $A \cap B$ de $\mathcal{U}$.

Évènements contraires – Évènements incompatibles

Pour $\mathscr{E}_1$

– A_1 est l'évènement « le chiffre obtenu est pair ».
On a : $A_1 = \{ 2 ; 4 ; 6 \}$; $\overline{A_1} = \{ 1 ; 3 ; 5 \}$.
$\overline{A_1}$ est donc l'évènement « le chiffre obtenu est impair ».
$\overline{A_1}$ est le complémentaire de A_1 dans $\mathcal{U}_1$.
On dit que $\overline{A_1}$ est l'**évènement contraire** de A_1 ou que A_1 et $\overline{A_1}$ sont des **évènements contraires.**

– Considérons les deux évènements suivants :
C_1 « le chiffre obtenu est plus petit que 4 ».
D_1 « le chiffre obtenu est plus grand que 4 ».
Il n'est pas possible de réaliser simultanément ces deux évènements.
On dit ces deux **évènements sont incompatibles.**
On a : $C_1 = \{1 ; 2 ; 3\}$, $D_1 = \{5 ; 6\}$,
d'où : $C_1 \cap D_1 = \varnothing$.
Deux évènements contraires sont incompatibles.

Pour $\mathscr{E}_2$

A_2 est l'évènement « les trois côtés visibles contiennent au moins deux PILE ».

- Donner le contraire de l'évènement A_2.

– Considérons les deux évènements suivants :
C_2 « les trois côtés visibles contiennent zéro PILE ».
D_2 « les trois côtés visibles contiennent zéro FACE ».

- Ces deux évènements sont-ils incompatibles ?

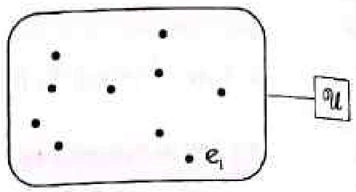
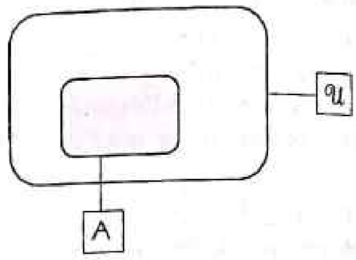
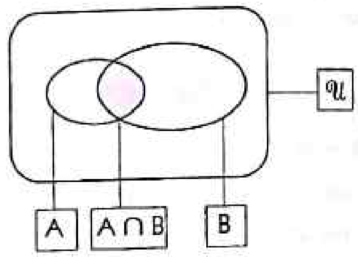
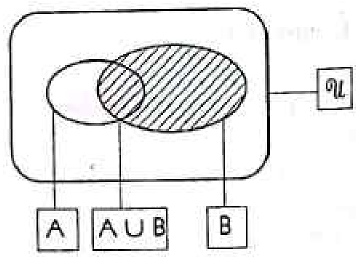
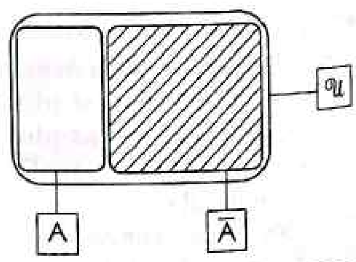
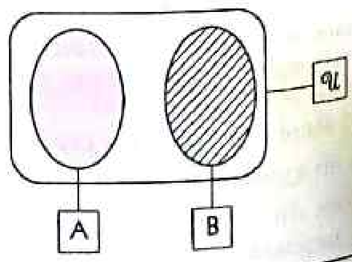
Définition

$\mathcal{U}$ étant l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire, A, B des évènements de $\mathcal{U}$,

– on appelle évènement *contraire* de A la partie $\overline{A}$ de $\mathcal{U}$ complémentaire de A dans $\mathcal{U}$;

– on dit que l'évènement A et l'évènement B sont *incompatibles* lorsque l'évènement (A *et* B) est impossible, c'est-à-dire lorsque $A \cap B = \varnothing$.

Tableau récapitulatif

	Langage des ensembles	Langage des probabilités	Illustrations
Univers	$\mathcal{U}$ est un ensemble $e_i \in \mathcal{U}$	$\mathcal{U}$ est l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire e_i est une éventualité	
Évènements	$A \subset \mathcal{U}$ $e_i \in A$ $\{e_i\} \subset A$ $A = \varnothing$ $A = \mathcal{U}$	A est un évènement de $\mathcal{U}$ e_i réalise l'évènement A $\{e_i\}$ est un évènement élémentaire l'évènement A est impossible l'évènement A est certain	
Intersection de deux évènements	$A \cap B$ $e_i \in A \cap B$	l'évènement (A *et* B) e_i réalise l'évènement A *et* e_i réalise l'évènement B	
Réunion de deux évènements	$A \cup B$ $e_i \in A \cup B$	l'évènement (A *ou* B) e_i réalise l'évènement A *ou* e_i réalise l'évènement B	
Contraire d'un évènement	$\overline{A} = C_{\mathcal{U}}A$ $e_i \in A \Leftrightarrow e_i \notin \overline{A}$	$\overline{A}$ est l'évènement contraire de A A et $\overline{A}$ sont des évènements contraires e_i réalise l'évènement A *si et seulement si* e_i ne réalise pas l'évènement $\overline{A}$	
Évènements incompatibles	$A \cap B = \varnothing$ A et B sont disjoints	l'évènement (A *et* B) est impossible l'évènement A et l'évènement B sont incompatibles	

2.2. Probabilité d'un évènement

Définition

Les exemples introductifs du paragraphe 2.1 suggèrent la présentation d'un modèle mathématique pour la fréquence théorique d'un évènement, c'est la probabilité de cet évènement ; celle-ci permet de mesurer les chances de réalisation de l'évènement.

Définition

$\mathcal{U}$ étant l'univers des évènements d'une expérience aléatoire,

on dit que l'on a défini *une probabilité* P sur $\mathcal{U}$ lorsque, à tout évènement A de $\mathcal{U}$, on peut associer un nombre réel appelé *probabilité* de A et noté P(A) vérifiant les conditions suivantes :

- **la probabilité d'un évènement est comprise entre 0 et 1 ;**
- **la probabilité de l'évènement certain est 1, celle de l'évènement impossible est 0 ;**
- **la probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des évènements élémentaires qui le composent.**

P est une probabilité sur $\mathcal{U}$ *signifie que* $\begin{cases} \text{Pour tout évènement A de } \mathcal{U},\ 0 \le P(A) \le 1 \\ P(\mathcal{U}) = 1\ ;\ P(\varnothing) = 0 \\ \text{Si } A = \{e_1 ; \dots ; e_n\} \text{ alors } P(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(\{e_i\}) \end{cases}$

Exemple 1

$\mathcal{U}$ étant l'univers des éventualités a, b, c, d, e d'une expérience aléatoire, déterminons la probabilité sur $\mathcal{U}$ telle que :

$$P(\{a\}) = 2\,P(\{b\}) = 2\,P(\{c\}) = 4\,P(\{d\}) = 4\,P(\{e\})$$

Calculons la probabilité des évènements A, B, C définis par : $A = \{a\ ;\ b\}$, $B = \{c\ ;\ e\}$, $C = \{b\ ;\ c\ ;\ d\}$.

Détermination de la probabilité P

On a : $\mathcal{U} = \{a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d\ ;\ e\}$

d'où :

$P(\mathcal{U}) = P(\{a\}) + P(\{b\}) + P(\{c\}) + P(\{d\}) + P(\{e\}) = 1$

$10\,P(\{e\}) = 1$

donc : $P(\{e\}) = 0{,}1$; $P(\{a\}) = 0{,}4$; $P(\{b\}) = 0{,}2$; $P(\{c\}) = 0{,}2$; $P(\{d\}) = 0{,}1$.

Calcul de P(A), P(B), P(C)

On a : $A = \{a\ ;\ b\}$, $B = \{c\ ;\ e\}$, $C = \{b\ ;\ c\ ;\ d\}$

d'où : $P(A) = P(\{a\}) + P(\{b\}) = 0{,}6$

$P(B) = P(\{c\}) + P(\{e\}) = 0{,}3$

$P(C) = P(\{b\}) + P(\{c\}) + P(\{d\}) = 0{,}5$.

Propriétés

$\mathcal{U}$ étant l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire, P une probabilité définie sur $\mathcal{U}$, la définition des probabilités et les opérations sur les ensembles permettent de démontrer les propriétés suivantes.

Probabilité de la réunion de deux évènements incompatibles

Propriété

Si A et B sont deux évènements incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Démonstration guidée

- Poser $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ et $B = \{b_1, \dots, b_m\}$, déterminer $A \cup B$.
- Exprimer P(A), P(B) et $P(A \cup B)$ en fonction des probabilités des évènements élémentaires.
- Illustrer par un diagramme.

Exemple 2

Revenons à l'exemple 1 et déduisons $P(A \cup B)$.

On a : $A \cap B = \varnothing$

d'où : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$= 0{,}6 + 0{,}3 = 0{,}9$.

■ **Probabilité de la réunion de deux évènements**

Propriété

Si A et B sont deux évènements quelconques, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Démonstration guidée

– Vérifier que les évènements $(\overline{A} \cap B)$, $(A \cap \overline{B})$, $(A \cap B)$ sont incompatibles et ont pour réunion B.
– Illustrer par un diagramme.

Exemple 3

Revenons à l'exemple 1 et déduisons $P(A \cup C)$.

On a : $A \cap C = \{b\}$ et $P(\{b\}) = 0{,}2$
donc : $P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$
$= 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}9$.

■ **Probabilité du contraire d'un évènement**

Propriété

Si $\overline{A}$ est le contraire d'un évènement A, alors $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Démonstration guidée

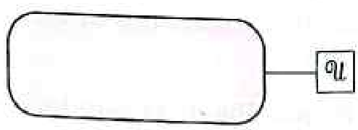
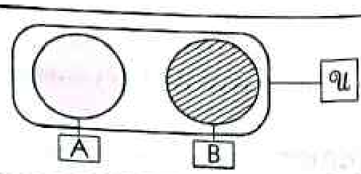
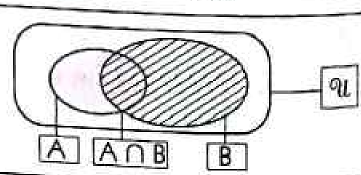
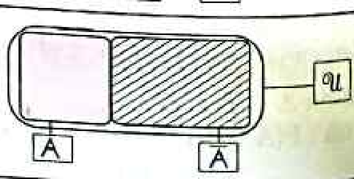
L'évènement A et l'évènement $\overline{A}$ sont incompatibles et leur réunion est $\mathcal{U}$.

Exemple 4

Revenons à l'exemple 1 et déduisons $P(\{c\,;d\,;e\})$.

On a : $\{a\,;b\} = A$ et $\{c\,;d\,;e\} = \overline{A}$
donc : $P(\{c\,;d\,;e\}) = P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
$= 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.

TABLEAU RÉCAPITULATIF

	Propriétés des probabilités	Illustrations
Évènement impossible **Évènement certain**	$P(\varnothing) = 0$; $P(\mathcal{U}) = 1$	
Réunion d'évènements incompatibles	si $A \cap B = \varnothing$ *alors* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	
Réunion d'évènements quelconques	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	
Contraire d'un évènement	$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$	

2.3. Calcul des probabilités

Équiprobabilité des évènements élémentaires

Définition – Propriété

$\mathcal{U}$ est l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire, P une probabilité définie sur $\mathcal{U}$.
– On dit que cette expérience aléatoire a lieu dans un cadre d'équiprobabilité des évènements élémentaires lorsque tous les évènements élémentaires de $\mathcal{U}$ ont la même probabilité.
– Dans ce cas, pour tout évènement A de $\mathcal{U}$, $P(A) = \dfrac{\text{card } A}{\text{card } \mathcal{U}}$.

Remarque

Une expérience aléatoire qui a lieu dans le cadre de l'équiprobabilité des évènements élémentaires doit être explicitement mentionnée.
Cependant, la tradition veut que le dispositif et la description de l'expérience aléatoire permettent de reconnaître celle qui a lieu dans le cadre de l'équiprobabilité des évènements élémentaires.
Ce cadre est suggéré dans un énoncé de problème par certaines expressions.
– **Pour les lancers**, les dés, les pièces de monnaie... sont supposés parfaitement équilibrés et leur face porte des signes.
– **Pour les tirages**, les boules, les jetons, les cartes... sont indiscernables au toucher, de plus « on tire au hasard ».

Des modèles de références en calcul des probabilités

Tirage d'une boule – Lancer d'un dé parfait

Exemple

Une urne contient six boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 6. On tire une boule de cette urne et on note son numéro.

On lance un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 ; on lit le numéro inscrit sur la face supérieure.

Quelle est la probabilité d'avoir un chiffre pair ?
Quelle est la probabilité d'avoir un chiffre plus grand que 4 ?

L'univers des éventualités

Tirer d'une urne une boule indiscernable au toucher et lire son numéro est une expérience aléatoire dont l'univers $\mathcal{U}$ des éventualités est défini par :

Lancer un dé cubique et lire le numéro de la face supérieure est une expérience aléatoire dont l'univers $\mathcal{U}$ est défini par :

$$\mathcal{U} = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}.$$

Les boules étant indiscernables au toucher, cette expérience aléatoire a lieu dans le cadre de l'équiprobabilité des évènements élémentaires.

Le dé étant parfaitement équilibré, cette expérience aléatoire a lieu dans le cadre de l'équiprobabilité des évènements élémentaires.

Le calcul des probabilités

A est l'évènement « le chiffre obtenu est pair » ; B l'évènement « le chiffre obtenu est plus grand que 4 ».

On a : $A = \{2 ; 4 ; 6\}$; $B = \{5 ; 6\}$.

$$\text{d'où : } P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \mathcal{U}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad ; \quad P(B) = \frac{\text{card } B}{\text{card } \mathcal{U}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Tirage d'une carte

Exemple

On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes comprenant quatre « couleurs » : Pique, Trèfle, Carreau, Cœur.
Chaque « couleurs » est composée de 8 cartes : l'As, le Roi, la Dame, le Valet, le 10, le 9, le 8, le 7.
Quelle est la probabilité de tirer un Trèfle ? Un As ? La Dame de Cœur ? une carte rouge ?
(Le Pique et le Trèfle sont noirs, le Carreau et le Cœur sont rouges).

L'univers des éventualités

Tirer au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes est une expérience aléatoire dont l'univers $\mathcal{U}$ des éventualités contient 32 éléments. Les cartes étant indiscernables, cette expérience a lieu dans le cadre de l'équiprobabilité des évènements élémentaires.

Le calcul des probabilités

A est l'évènement « la carte tirée est un Trèfle », $P(A) = \dfrac{\text{card } A}{\text{card } \mathcal{U}} = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$

B est l'évènement « la carte tirée est un As », $P(B) = \dfrac{\text{card } B}{\text{card } \mathcal{U}} = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$

C est l'évènement « la carte tirée est la Dame de Cœur », $P(C) = \dfrac{\text{card } C}{\text{card } \mathcal{U}} = \dfrac{1}{32}$

D est l'évènement « la carte tirée est rouge », $P(D) = \dfrac{\text{card } D}{\text{card } \mathcal{U}} = \dfrac{16}{32} = \dfrac{1}{2}$.

Tirages simultanés

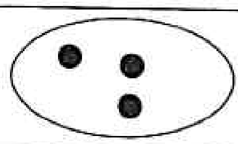
Exemple

Un sac contient dix boules indiscernables au toucher dont six rouges R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6 et quatre noires N_1, N_2, N_3, N_4. On tire simultanément, au hasard, trois boules du sac et on note leurs couleurs. Calculons la probabilité de chacun des évènements suivants :

A « les trois boules tirées contiennent au moins une rouge » ;

B « les trois boules tirées contiennent au plus une rouge ».

Les évènements de l'épreuve

	Le dispositif de l'épreuve	Description de l'épreuve	Une éventualité de l'épreuve
Lecture de l'énoncé	Un sac contient 10 boules indiscernables au toucher dont : 6 rouges et 4 noires	– On tire simultanément (au hasard) trois boules – On note les couleurs	– Un ensemble de 3 boules
Modélisation	E : ensemble des boules $E = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, N_1, N_2, N_3, N_4\}$		– Une partie de 3 éléments de E (c'est une combinaison de 3 éléments de E) : $\{R_1, N_2, N_3\}$; $\{N_2, R_3, R_4\}$...

L'univers des éventualités

Désignons par $\mathcal{U}$ l'univers des éventualités. On a : $\text{card } \mathcal{U} = C_{10}^3 = \dfrac{10!}{7!\,3!} = \dfrac{8 \times 9 \times 10}{2 \times 3} = 120.$

Le calcul des probabilités

Les boules étant indiscernables au toucher et tirées au hasard, on a l'équiprobabilité des évènements élémentaires.

– Évènement A

« les trois boules tirées contiennent au moins une rouge »

Un élément de A est une partie de E constituée par :

soit $\begin{cases} \text{une boule rouge et deux boules noires} & (1) \\ \text{deux boules rouges et une boule noire} & (2) \\ \text{trois boules rouges} & (3) \end{cases}$

Pour obtenir un élément de A de type (1) à chacune des 6 boules rouges, on associe deux des quatre boules noires ; leur nombre est $C_6^1 \times C_4^2$.

De même, le nombre d'éléments de A de type (2) est $C_4^1 \times C_6^2$.

Un élément de A de type (3) est une combinaison de 3 éléments de l'ensemble des 6 boules rouges ; leur nombre est C_6^3.

d'où : $\text{card } A = C_6^1 \times C_4^2 + C_4^1 \times C_6^2 + C_6^3 = 116$

donc : $P(A) = \dfrac{\text{card } A}{\text{card } \mathcal{U}} = \dfrac{116}{120} = \dfrac{29}{30}$.

– Évènement B

« les trois boules tirées contiennent au plus une rouge »

Un élément de B est une partie de E constituée par :

soit $\begin{cases} \text{trois boules noires} \\ \text{une boule rouge et deux boules noires} \end{cases}$

d'où : $\text{card } B = C_4^3 + C_6^1 \times C_4^2 = 4 + 6 \times 6 = 40$

donc : $P(B) = \dfrac{\text{card } B}{\text{card } \mathcal{U}} = \dfrac{40}{120} = \dfrac{1}{3}$.

Tirages successifs avec remise

Exemple

Un sac contient huit boules indiscernables au toucher dont cinq rouges R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 et trois noires N_1, N_2, N_3. On tire au hasard une boule du sac, on note sa couleur, on la remet dans le sac, puis on tire au hasard une deuxième boule, on note sa couleur.
Calculons les probabilités de chacun des évènements suivants :
A « les deux boules tirées sont de couleurs différentes ».
B « les deux boules tirées sont de la même couleur ».

Les évènements de l'épreuve	Le dispositif de l'épreuve	Description de l'épreuve	Une éventualité de l'épreuve
Lecture de l'énoncé	Un sac contient 8 boules indiscernables au toucher dont : 5 rouges et 3 noires	– On tire une boule (au hasard) – On note sa couleur – On la remet – On tire une 2^e boule – On note sa couleur	– Un ensemble ordonné de 2 boules
Modélisation	E : ensemble des boules $E = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, N_1, N_2, N_3\}$	**1^{er} tirage** : 1 boule tirée parmi 8 **2^e tirage** : 1 boule tirée parmi 8	– Un couple d'éléments de E (c'est un élément de $E \times E$) : (R_1, N_2) ; (R_2, R_2) ...

L'univers des éventualités

Désignons par $\mathcal{U}$ l'univers des éventualités. On a : $\mathcal{U} = E \times E$; $\text{card}\,\mathcal{U} = 8^2 = 64$.

Le calcul des probabilités

Ici encore, l'épreuve a lieu dans le cadre de l'équiprobabilité des évènements élémentaires.

– Évènement A

« les deux boules tirées sont de couleurs différentes »
A est constitué par les éléments des ensembles suivants : $\{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\} \times \{N_1, N_2, N_3\}$;
$\{N_1, N_2, N_3\} \times \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\}$

d'où : $\text{card}\,A = 5 \times 3 + 3 \times 5 = 30$

donc : $P(A) = \dfrac{\text{card}\,A}{\text{card}\,\mathcal{U}} = \dfrac{30}{64} = \dfrac{15}{32}$.

– Évènement B

« les deux boules tirées sont de la même couleur »
B est constitué par les éléments des ensembles suivants : $\{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\} \times \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\}$;
$\{N_1, N_2, N_3\} \times \{N_1, N_2, N_3\}$

d'où : $\text{card}\,B = 5^2 + 3^2 = 34$

donc : $P(B) = \dfrac{\text{card}\,B}{\text{card}\,\mathcal{U}} = \dfrac{34}{64} = \dfrac{17}{32}$.

- Vérifier que l'évènement B est le contraire de l'évènement A.

Tirages successifs sans remise

Exemple

Un sac contient huit boules indiscernables au toucher dont cinq rouges R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 et trois noires N_1, N_2, N_3. On tire au hasard une boule du sac, on note sa couleur, on ne la remet pas dans le sac puis on tire au hasard une deuxième boule, on note sa couleur.
Calculons les probabilités de chacun des évènements suivants :
A « les deux boules tirées sont de couleurs différentes »
B « les deux boules tirées sont de la même couleur ».

Les évènements de l'épreuve	Le dispositif de l'épreuve	Description de l'épreuve	Une éventualité de l'épreuve
Lecture de l'énoncé	Un sac contient 8 boules indiscernables au toucher dont : 5 rouges et 3 noires	– On tire une boule (au hasard) – On note sa couleur – On tire une 2^e boule (au hasard) – On note sa couleur	– Un ensemble ordonné de 2 boules différentes
Modélisation	E : ensemble des boules $E = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, N_1, N_2, N_3\}$	**1^{er} tirage** : 1 boule tirée parmi 8 **2^e tirage** : 1 boule tirée parmi 7	– Un couple d'éléments différents de E : (R_1, N_2) ; (R_1, R_2) ...

L'univers des éventualités
Désignons par $\mathcal{U}$ l'univers des éventualités. On a : card $\mathcal{U} = A_8^2 = 7 \times 8 = 56$.

Le calcul des probabilités
Ici encore, l'épreuve a lieu dans le cadre de l'équiprobabilité des évènements élémentaires.

– Évènement B
« les deux boules tirées sont de la même couleur »
B est constitué par les arrangements de 2 éléments de $\{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\}$ et ceux de 2 éléments de $\{N_1, N_2, N_3\}$.
d'où : card B $= A_5^2 + A_3^2 = \dfrac{5!}{3!} + \dfrac{3!}{1!} = 4 \times 5 + 2 \times 3 = 26$
donc : $P(B) = \dfrac{\text{card B}}{\text{card } \mathcal{U}} = \dfrac{26}{56} = \dfrac{13}{28}$.

– Évènement A
« les deux boules tirées sont de couleurs différentes »
l'évènement A est le contraire de l'évènement B,
donc : $P(A) = 1 - P(B)$
$= 1 - \dfrac{13}{28} = \dfrac{15}{28}$.

Autres exemples de calcul des probabilités

Lancer d'un dé cubique truqué

Exemple

On lance un dé cubique parfaitement équilibré dont une face est marquée (*a*), deux faces sont marquées (*b*) et trois faces sont marquées (c) ; un tel dé est dit *truqué*. On note la lettre marquée sur la face supérieure du dé immobilisé.
Quelle est la probabilité pour que la face supérieure soit marquée (*a*) ? soit marquée (*b*) ? soit marquée (c) ?

L'univers des éventualités
Pour cette expérience, tous les résultats possibles constituent l'ensemble {(*a*) ; (*b*) ; (c)}. Pour un tel univers, les évènements élémentaires {(*a*)}, {(*b*)}, {(c)} ne sont pas équiprobables. Le dé étant parfaitement équilibré, nous pouvons nous placer dans le cadre de l'équiprobabilité des évènements élémentaires en prenant pour univers l'ensemble des six faces du cube. $\mathcal{U} = \{f_1 ; f_2 ; f_3 ; f_4 ; f_5 ; f_6\}$,
la face f_1 étant marquée : (*a*) ; les faces f_2 et f_3 étant marquées : (*b*) ; les faces f_4, f_5 et f_6 étant marquées : (c).

Le calcul des probabilités
A est l'évènement « la face supérieure est marquée (*a*) », $\quad P(A) = \dfrac{\text{card A}}{\text{card } \mathcal{U}} = \dfrac{1}{6}$

B est l'évènement « la face supérieure est marquée (*b*) », $\quad P(B) = \dfrac{\text{card B}}{\text{card } \mathcal{U}} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

C est l'évènement « la face supérieure est marquée (c) », $\quad P(C) = \dfrac{\text{card C}}{\text{card } \mathcal{U}} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

Remarque

Dans certains cas, le choix d'un univers correspondant à l'équiprobabilité des évènements élémentaires est toujours possible, le calcul des probabilités est alors plus aisé.

Lancer d'un dé cubique pipé

Exemple

On lance un dé cubique dont les six faces sont numérotées de 1 à 6. Le centre de gravité de ce dé ne coïncide pas avec son centre, on dit que ce dé est *pipé*.
Ce dé est tel que les évènements élémentaires {1}, {2}, {3} ont la même probabilité, cette probabilité étant le double de la probabilité de chacun des autres évènements élémentaires.
Quelle est la probabilité p définie sur l'univers $\mathcal{U}$ de cette expérience aléatoire ?
Quelle est la probabilité d'avoir un chiffre pair ?

L'univers des éventualités
L'univers $\mathcal{U}$ de cette expérience aléatoire est défini par : $\mathcal{U} = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.
Le dé n'étant pas parfaitement équilibré, les évènements élémentaires ne sont pas équiprobables.

Le calcul des probabilités
– Évènements élémentaires
On a : $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = 2\,P(\{4\}) = 2\,P(\{5\}) = 2\,P(\{6\})$
or : $P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) = 1$
d'où : $9\,P(\{6\}) = 1$
donc : $P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \dfrac{1}{9}$; $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = \dfrac{2}{9}$.

– Désignons par A l'évènement « le numéro de la face supérieure est un chiffre pair ».

$A = \{2 ; 4 ; 6\}$

$P(A) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$.

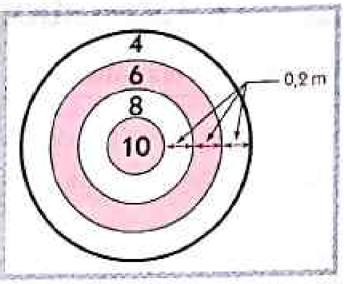
Probabilité et proportionnalité

Exemple

On considère une cible de tir à l'arc de rayon 0,8 m comme indiqué ci-contre.

Lorsque la flèche atteint la cible, le tireur note le nombre de points inscrits dans la couronne où se trouve la flèche.

Sachant que la probabilité d'atteindre une couronne est proportionnelle à l'aire de cette couronne, trouver la probabilité des événements élémentaires.



L'univers des éventualités

L'univers $\mathcal{U}$ des événements est tel que : $\mathcal{U} = \{4, 6, 8, 10\}$

i étant un élément de $\mathcal{U}$, notons $p(i)$ la probabilité d'atteindre la couronne marquée i.

Le calcul des probabilités

– Calculons les aires des couronnes de la cible :

numéros	10	8	6	4
aire (m²)	0,125	0,377	0,628	0,879

– Examinons la proportionnalité entre la probabilité d'atteindre chaque couronne et l'aire de cette couronne :

$$\frac{p(10)}{0{,}125} = \frac{p(8)}{0{,}377} = \frac{p(6)}{0{,}628} = \frac{p(4)}{0{,}879}$$

– Utilisons la somme des probabilités des événements élémentaires $p(10) + p(8) + p(6) + p(4) = 1$

– On obtient : $p(10) + \frac{0{,}377}{0{,}125}p(10) + \frac{0{,}628}{0{,}125}p(10) + \frac{0{,}879}{0{,}125}p(10) = 1$,

d'où : $16{,}07\ p(10) = 1$; $p(10) = 0{,}062$.

donc : $p(8) = 0{,}188$; $p(6) = 0{,}313$; $p(4) = 0{,}437$.

Pourcentage et probabilité

Exemple

Dans une population E, 15 % des individus ont une maladie M_a. Parmi les individus atteints de la maladie M_a, 20 % ont une maladie M_b. Parmi les individus non atteints de la maladie M_a, 4 % ont la maladie M_b.

On prend au hasard un individu de la population E. A et B désignant respectivement les évènements suivants : « l'individu est atteint de la maladie M_a », « l'individu est atteint de la maladie M_b ».

Quelle est la probabilité pour qu'un individu de E soit atteint :

(1) de M_a et M_b ? (2) uniquement de M_a ? (3) uniquement de M_b ? (4) d'aucune de M_a et M_b ?

Traduisons cette situation par :

des pourcentages — LECTURE DE L'ÉNONCÉ

(1) éléments de E ayant M_a et M_b

$$\frac{15}{100} \times \frac{20}{100} = \frac{3}{100}$$

(2) éléments de E ayant M_a et n'ayant pas M_b

$$\frac{15}{100} \times \frac{80}{100} = \frac{12}{100}$$

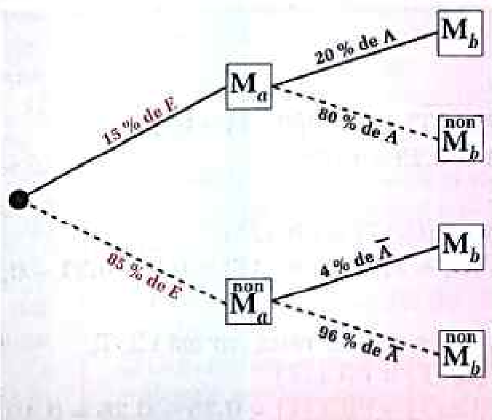
(3) éléments de E n'ayant pas M_a et ayant M_b

$$\frac{85}{100} \times \frac{4}{100} = \frac{3{,}4}{100}$$

(4) éléments de E n'ayant ni M_a ni M_b

$$\frac{85}{100} \times \frac{96}{100} = \frac{81{,}6}{100}$$

un arbre de choix — ATTEINTE DE M_a — ATTEINTE DE M_b



une probabilité — LES RÉSULTATS

(1) $P(A \cap B) = 0{,}03$

(2) $P(A \cap \overline{B}) = 0{,}12$

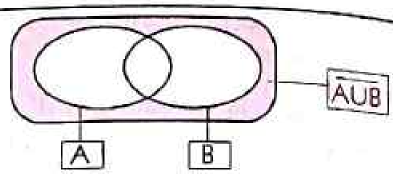
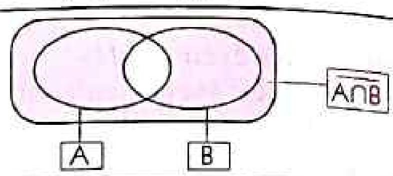
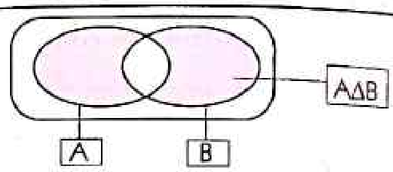
(3) $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}034$

(4) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}816$

TP Travaux pratiques

TP Opérations sur les ensembles finis et calcul des probabilités

Tableau récapitulatif

Complémentaire de la réunion	$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$	
Complémentaire de l'intersection	$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$	
Différence symétrique	$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$	

Exercice commenté

Une enquête menée auprès des familles d'une commune en 1999 à propos de l'équipement de leur foyer, donne le résultat suivant :
- **80% ont une cuisinière à gaz**
- **21% ont un téléviseur**
- **25% n'ont ni cuisinière à gaz, ni téléviseur.**

On interroge une famille de cette commune, prise au hasard.
Quelle est la probabilité qu'elle ait :
- **(1) une cuisinière à gaz**
- **(2) un téléviseur**
- **(3) une cuisinière à gaz et un téléviseur**
- **(4) une cuisinière à gaz ou bien un téléviseur.**

Évènements

On désigne par :

C, l'évènement « a une cuisinière à gaz »
T, l'évènement « a un téléviseur »

On en déduit que :

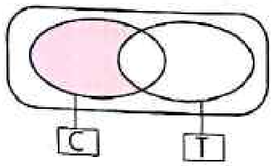
$\bar{C}\cap\bar{T}$ est l'évènement « a ni cuisinière à gaz, ni téléviseur »
$C\cap T$ est l'évènement « a une cuisinière à gaz et un téléviseur »
$C\cup T$ est l'évènement « a une cuisinière à gaz ou un téléviseur »
$C\Delta T$ est l'évènement « a une cuisinière à gaz ou bien un téléviseur »

Calcul des probabilités

Des données du problème, on déduit les résultats suivants :

$P(C)=\frac{80}{100}=0,80$; $P(T)=\frac{21}{100}=0,21$

$P(\bar{C}\cap\bar{T})=\frac{25}{100}=0,25.$



Calcul de P(C∪T)

On a : $P(\bar{C}\cap\bar{T})=P(\overline{C\cup T})=1-P(C\cup T)=0,25$
donc : $P(C\cup T)=1-0,25=0,75.$

$\boxed{P(C\cup T)=0,75}$

Calcul de P(C∩T)

On a : $P(C)+P(T)-P(C\cap T)=P(C\cup T)$
d'où : $P(C\cap T)=P(C)+P(T)-P(C\cup T)=0,8+0,21-0,75=0,26.$

$\boxed{P(C\cap T)=0,26}$

Calcul de P(CΔT)

$C\Delta T$ et $C\cap T$ sont disjoints et leur réunion est $C\cup T$,
donc : $P(C\Delta T)+P(C\cap T)=P(C\cup T)$
d'où : $P(C\Delta T)=P(C\cup T)-P(C\cap T)=0,75-0,26=0,49.$

$\boxed{P(C\Delta T)=0,49}$

Exercices

ENTRAÎNEMENT

Analyse combinatoire

1 On désire répartir 6 journaux dans 11 casiers nominatifs. De combien de façons peut-on le faire dans chacun des cas suivants.

1. Chaque casier peut contenir au plus un journal et :
a) les journaux sont distincts ;
b) les journaux sont identiques.

2. Chaque casier peut contenir un nombre quelconque de journaux et :
a) les journaux sont distincts ;
b) les journaux sont identiques.

2 Une enquête a été réalisée auprès d'un échantillon de 800 personnes sur leurs pratiques culturelles. Les résultats suivants ont été obtenus :
- 400 personnes sont allées au cinéma au moins une fois au cours du trimestre précédent (ensemble C) ;
- 155 sont allées au théâtre (ensemble T) ;
- 110 sont allées au cinéma et au concert (ensemble (C∩T) ;
- 65 sont allées au théâtre et au concert (ensemble (T∩M) ;
- 20 sont allées au cinéma, au théâtre et au concert (ensemble (C∩T∩M).

1. Combien de personnes ne vont qu'au cinéma ?
2. Combien de personnes n'ont aucune activité culturelle ?
On utilisera un diagramme de VENN et les opérations logiques sur les ensembles pour trouver et justifier les résultats obtenus.

3 Une enquête comporte dix questions. À chacune d'elles, on peut répondre soit par oui, soit par non, soit s'abstenir.
Quel est le nombre de fiches réponses différentes possibles ?

4 Un touriste européen veut visiter trois villes de l'Ouest de la Côte d'Ivoire parmi les cinq suivantes : Danané, Man, Biankouma, Duékoué, Guiglo.
Combien d'itinéraires peut-il concevoir ?

5 Une classe de 30 élèves qui décident de désigner un chef de classe, deux adjoints, deux responsables de l'entretien. Ces cinq élèves forment un comité.
Cette classe est composée de 12 garçons internes, 12 garçons externes, 3 filles externes et 3 filles internes.
De combien de façons différentes peut-on composer le comité si l'on veut que :
a) le chef soit interne ?
b) les adjoints soient de sexes différents ?

6 On rappelle qu'en numération décimale, un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
a) Combien y-a-t-il de nombres de deux chiffres dont la somme de ses chiffres est 9 ? Même question pour 12 ?
b) Dénombrer ainsi les nombres à deux chiffres divisibles par 3.
c) Comparer avec le nombre de multiples de 3 qui s'écrivent avec exactement deux chiffres.

7 On lance simultanément deux dés non truqués dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et l'on note les deux numéros obtenus sur les faces supérieures.
Calculer les probabilités des évènements suivants :
a) la somme des numéros obtenus est égale à 6 ;
b) la somme des numéros obtenus est impair ;
c) la somme des numéros obtenus est pair ;
d) la somme des numéros obtenus est supérieure à 8 ;
e) la somme des numéros obtenus est inférieure à 4.

8 n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2, on considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = (1 + x)^n.$$
a) En utilisant la formule du binôme de Newton et en dérivant $f(x)$, démontrer que pour tout nombre réel x :
$$C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n = n(1 + x)^{n-1}.$$
b) En déduire que :
$$C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n = n2^{n-1}$$
et que : $C_n^1 - 2C_n^2 + \ldots + (-1)^{n-1}nC_n^n = 0.$

Probabilité d'un événement

9 Un centre de réunions comporte deux salles numérotées 1 et 2.
On note S_1 l'événement « la salle numéro 1 est occupée » et S_2 l'événement « la salle 2 est occupée ».
On sait que :
- les deux salles ont autant de chance d'être occupées l'une que l'autre ;
- la probabilité que l'une des deux salles soit occupée est égale à 0,9 ;
- la probabilité que les deux salles soient occupées en même temps est égale à 0,5.

1. Les évènements S_1 et S_2 sont-ils indépendants ?
2. Exprimer chacun des évènements suivants à l'aide des évènements S_1 et S_2, puis calculer leur probabilité :
a) la salle numéro 1 est libre ;
b) les deux salles soient libres ;
c) l'une des salles au moins est libre ;
d) une seule salle est libre ;
e) la salle numéro 2 est libre, sachant que la salle numéro 1 est occupée.

10 Un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 est truqué de telle manière que l'apparition du numéro 5 est deux fois « plus probable » que l'apparition des autres numéros.
a) Calculer la probabilité de l'apparition de chaque numéro.
b) Calculer les probabilités des évènements suivants :
– obtenir un nombre pair ;
– obtenir un nombre impair.

11 Un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 est truqué de telle manière que la probabilité d'obtenir chaque numéro de 1 à 6 est proportionnelle à ce numéro.
a) Quelle est la probabilité de sortie de chaque numéro.
b) On lance une fois ce dé, quelle est la probabilité d'obtenir un numéro supérieur à 3 ?

12 On lance deux fois de suite un dé cubique parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6 de façon à former un nombre de deux chiffres : le résultat du premier lancer donne le chiffre des dizaines, celui du second lancer celui des unités.
Calculer la probabilité des évènements suivants :
A « Le nombre obtenu est pair » ;
B « Les deux chiffres du nombre obtenu sont identiques » ;
C « Le nombre obtenu est supérieur ou égale à 51 » ;
D « Le nombre obtenu contient au moins un 6 ».

13 On lance deux fois de suite un dé cubique parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et l'on note a le résultat du premier lancer et b le résultat du second lancer.
On considère alors l'équation du second degré :

$$x^2 + ax + b = 0.$$

Calculer la probabilité pour que cette équation admette des solutions (distinctes ou confondues.)

14 On considère un dé cubique parfait dont une face porte le chiffre 1, deux faces le chiffre 2 et trois faces le chiffre 3.
On lance une fois ce dé et on désigne par p_1, p_2 et p_3 les probabilités d'obtenir respectivement 1, 2 et 3.
a) Déterminer p_1, p_2 et p_3.
b) On lance trois fois ce dé ; déterminer la probabilité d'obtenir :
– deux fois le chiffre deux ;
– aucune fois le chiffre 3 ;
– une somme égale à 4.

15 Un dé est lancé 160 fois.
1. Calculer la probabilité que le point 1 se présente 25 fois, 26 fois, 27 fois.
2. Calculer la probabilité que le point 1 se présente un nombre de fois compris entre 25 et 27.
3. Le total des probabilités obtenues en **1.** diffère de la probabilité obtenue en **2.** Pourquoi ?
4. Quelle est la probabilité, avec six jets d'un dé, d'obtenir à chaque fois un résultat différent ?

16 Une urne contient trois boules rouges et deux boules noires indiscernables au toucher. L'expérience aléatoire consiste à tirer une boule, deux fois de suite, lors de tirages avec remise.
a) Quels sont les évènements élémentaires de cette expérience ? Combien y a-t-il ?
b) Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :
R_1 « tirer une boule rouge au premier tirage » ;
R_2 « tirer une boule rouge au second tirage » ;
$R_1 \cap R_2$; $R_1 \cup R_2$.

17 On considère un sac contenant trois boules blanches et trois boules noires. On tire au hasard et simultanément trois boules.
1. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
A « on obtient au moins une boule blanche » ;
B « on obtient au moins deux boules noires » ;
C « on obtient au moins une boule de chaque couleur ».
2. Définir l'événement $A \cap B$ par une phrase simple, puis calculer sa probabilité.

18 On tire deux cartes dans un jeu de 52 cartes.
1. La seconde carte est tirée après remise de la première dans le jeu (tirages indépendants).
a) Quelle est la probabilité de tirer deux as ?
b) Quelle est la probabilité de tirer au moins un as ?
c) Quelle est la probabilité que la seconde carte tirée soit un as ?
2. La seconde carte est tirée sans qu'on ait préalablement remis la première dans le jeu (tirage exhaustif).
a) Quelle est la probabilité de tirer deux as ?
b) Quelle est la probabilité de tirer au moins un as ?
c) Quelle est la probabilité que la seconde carte tirée soit un as ?

19 Une urne contient quatre jetons marqués respectivement 1, 2, 3 et m [$m \in \mathbb{R}^*$]. On tire au hasard un jeton dans l'urne. On note P_1, P_2, P_3 et P_m les probabilités respectives de tirer le jeton marqué 1, 2, 3 et m.
P_1, P_2, P_3 et P_m constituent dans cet ordre une suite arithmétique de raison $\frac{1}{8}$.
1. *a)* Montrer que : $P_1 = \frac{1}{16}$.
b) Calculer P_2, P_3 et P_m.
2. On considère X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre marqué sur le jeton tiré
a) Définir la loi de probabilité de la variable X.
b) Calculer m sachant que l'espérance mathématique de X vaut 2.

D'après Bac

20 Deux boules de couleurs différentes, rouge et noire, sont réparties dans trois cases de couleurs différentes, rouge, noire et jaune.
1. On suppose que chaque case ne peut contenir plus d'une boule.
a) Combien y a-t-il de répartitions possibles des deux boules dans les trois cases ?
b) En supposant toutes ces répartitions équiprobables, calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
A « chaque boule est dans la case de sa couleur » ;
B « la case jaune est vide » ;
C « la boule rouge est la seule dans la case ayant sa couleur ».
2. On suppose que chaque case peut contenir plus d'une boule.
a) Combien y a-t-il de répartitions possibles des deux boules dans les trois cases ?
b) En supposant toutes ces répartitions équiprobables, calculer la probabilité de chacun des évènements A et B définis au **1.** *b)*.

21 On lance 100 fois une pièce en l'air et on note les côtés (pile P et face F) obtenus successivement.
Quelle est la probabilité pour qu'on obtienne 50 fois pile ?

PROBLÈMES

22 Deux joueurs, Pigna et Gouanda, lancent simultanément chacun un dé dont les faces numérotées de 1 à 6 ont la même probabilité de sortie. Le gagnant est celui qui obtient un nombre strictement supérieur à celui de l'autre. La partie est nulle si les deux joueurs obtiennent le même numéro.
1. Quelle est la probabilité que Pigna gagne ?
2. Quelle est la probabilité que Gouanda gagne ?

23 On sait, par des enquêtes médicales, qu'un individu appartenant à la population d'un certain pays a la probabilité 0,01 d'être atteint par une maladie A et la probabilité 0,05 d'être atteint par une maladie B.
1. Si ces deux affections sont indépendantes, combien de sujets atteints de l'une au moins des deux affections doit-on s'attendre à trouver dans un échantillon de 10 000 sujets pris au hasard dans la population ?
2. Combien de sujets atteints de la maladie B doit-on s'attendre à trouver sur 500 sujets atteints de la maladie A.

24 Considérons une population où le nombre de mâles est la moitié du nombre de femelles. Des études statistiques ont montré que dans cette population 6% des mâles avaient le caractère albinos et 0,36 % des femelles avaient ce caractère.
1. Quelle est la probabilité pour qu'un individu pris au hasard soit albinos ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'un albinos de cette population soit mâle ?

25 Cinq individus ont été témoins d'un fait donné. Parmi eux, on sait que deux seulement sont menteurs mais on ignore lesquels. On questionne deux témoins au hasard sur le fait considéré de façon indépendante.
Quelle probabilité a-t-on :
a) d'obtenir à chaque fois une description véridique des faits ?
b) d'obtenir deux versions contradictoires ?
c) d'obtenir deux versions fausses ?

26 Deux clubs de football A et B ont respectivement 18 et 15 joueurs susceptibles de jouer dans leurs équipes. Le joueur X appartient au club A et le joueur Y appartient au club B.
Pour le prochain match, les joueurs sont tirés au sort dans chaque équipe.
Quelle est la probabilité d'avoir X et Y qui jouent au cours de ce prochain match ?

27 Une caisse contient pêle-mêle 10 cubes oranges, 20 cubes blancs et 5 cubes verts, tous de la même taille.
1. Quelle est la probabilité de pouvoir faire le drapeau de la Côte d'Ivoire :
a) en prenant simultanément 3 cubes ?
b) en prenant simultanément 4 cubes ?
2. Quelle est la probabilité, en prenant simultanément 3 cubes l'un après l'autre sans remise, d'obtenir dans l'ordre le drapeau de la Côte d'Ivoire ?

28 Un parachutiste saute d'un avion et atterrit nécessairement sur un terrain déboisé de 1 hectare entouré d'une forêt.
Dans ce terrain il y a :
- un espace cultivé rectangulaire de 50 mètres de long et 30 mètres de large ;
- un plan d'eau formant un triangle rectangle isocèle de 100 mètres sur les côtés de l'angle droit ;
- une cible circulaire de 20 mètres de diamètre qui représente son objectif.

On suppose que la probabilité pour qu'il tombe sur une partie donnée du terrain est proportionnelle à l'aire de cette partie.
1. Définir l'ensemble des éventualités et calculer la probabilité de chaque événement élémentaire.
2. Calculer la probabilité qu'il rate la cible mais n'atterrisse ni dans l'espace cultivé ni dans le plan d'eau.
3. Calculer la probabilité qu'il atterrisse dans l'espace cultivé ou dans le plan d'eau.

29 Un père et son fils achètent un cadenas. Le vendeur du cadenas communique à l'acheteur une combinaison sécrète à quatre chiffres permettant d'ouvrir le cadenas. Cette combinaison est un nombre compris entre 0000 et 9999.
1. Arrivé chez lui, le fils ne se souvient plus de la combinaison communiquée par le vendeur.
Quelle est la probabilité qu'il ouvre le cadenas au premier essai ? au deuxième essai ?
2. Le père se souvient seulement que la combinaison du cadenas comporte deux fois le chiffre 2 et deux fois le chiffre 4.
Soit k un élément de $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.
Déterminer la probabilité p_k pour que le père arrive à ouvrir le cadenas au $k^{\text{ième}}$ essai.

30 Un autobus rencontre sur son trajet sept feux tricolores. Pour chacun de ces feux, le rouge dure 30 secondes, l'orange dure 10 secondes et le vert dure 20 secondes. Les sept feux ne sont pas synchronisés et les aléas de la circulation font que l'état d'un feu devant lequel se présente l'autobus ne dépend pas de l'état des feux précédents.
1. Calculer la probabilité pour que sur son trajet l'autobus rencontre exactement trois feux verts.
2. Calculer la probabilité pour que sur son trajet l'autobus rencontre au moins un feu vert.

31 Dans une population vulnérable, la probabilité pour qu'une personne quelconque contracte une maladie au cours d'une année est de 0,4 pour une maladie M et de 0,6 pour une maladie M'.
« Contracter la maladie M » et « contracter la maladie M' » sont deux évènements indépendants. Pour une personne choisie au hasard, calculer la probabilité des évènements suivants :
A « contracter les deux maladies M et M' » ;
B « contracter au moins une de ces deux maladies au cours de la même année » ;
C « ne contracter aucune de ces deux maladies au cours de la même année ».

32 Deux cars A et B doivent arriver à la gare routière à la même heure. Leurs arrivées sont considérées comme des évènements indépendants.
1. Sachant que ces deux cars ont des probabilités de 0,9 pour le car A et de 0,8 pour le car B d'arriver à l'heure, quelle est la probabilité pour qu'au moins un des deux cars soit ponctuel ?

2. Quelle est, dans les mêmes conditions, la probabilité pour qu'au moins un des deux cars soit en retard ?

33 Une machine à écrire comporte 42 touches parmi lesquelles se trouvent 8 chiffres, 26 lettres et 8 symboles divers.

1. On considère une enfant qui ne sait pas lire sur une touche et on admet alors que la probabilité qu'elle frappe une touche déterminée est la même quelle que soit cette touche.

a) Quelle est la probabilité pour qu'elle frappe une lettre ?

b) Cette enfant se prénomme Nongba. Quelle est la probabilité pour qu'elle frappe une lettre de son prénom ? Même question si cette enfant se prénomme Mariam.

c) Quelle est la probabilité pour que Nongba frappe la dernière lettre de son prénom ?

2. Nongba frappe successivement 6 touches. Quelle est la probabilité pour qu'elle frappe son prénom ?

34 On admet que pour un avion a plusieurs réacteurs la probabilité (risque) de panne de l'un de ses réacteurs en vol est indépendante de l'état (panne ou non) des autres réacteurs, et qu'elle est la même pour chacun d'eux.

On note q cette probabilité ; elle est égale à $1-p$, où p est la probabilité qu'un réacteur soit en état de fonctionnement.

On admet aussi que l'avion peut poursuivre son vol si au moins la moitié des réacteurs sont en état de fonctionnement.

Comparer la sécurité offerte par un biréacteur par rapport à celle offerte par un quadriréacteur en fonction de la valeur de p.

35 Onze couples, dont le couple Koné, doivent tirer au sort quatre personnes pour présenter leur mutuelle de développement aux responsables de la commune. Les tirages sont supposés équiprobables.

1. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A « aucun homme n'est désigné » ;
B « monsieur Koné est désigné » ;
C « le couple Koné est désigné » ;
D « deux hommes et deux femmes sont désignés » ;
E « deux couples sont désignés ».

2. Les évènements A et B sont-ils indépendants ? incompatibles ?

3. Les évènements B et E sont-ils indépendants ? incompatibles ?

36 Paradoxe du Chevalier de Méré

(Problème posé à Blaise Pascal par le Chevalier de Méré en 1654.)

« A-t-on plus de chances d'obtenir un six (au moins une fois) en lançant un dé équilibré 4 fois ou d'obtenir un double six (au moins une fois) en lançant deux dés équilibrés 24 fois ? »

1. Première situation : on lance un dé équilibré 4 fois de suite. Calculer la probabilité d» l'événement A « on obtient au moins un six ».

2. Deuxième situation : on lance deux dés équilibrés 24 fois de suite. Calculer la probabilité de l'événement B « on obtient au moins une fois un double six ».

3. Conclure.

37 Probabilité et fonctions numériques

Une urne contient 42 boules indiscernables au toucher. Il y a n boules blanches et n boules rouges (n est un entier naturel) ; toutes les autres boules sont vertes. Il y a au moins une boule de chaque couleur dans l'urne.

On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.

1. Déterminer l'ensemble A des valeurs que peut prendre le nombre n.

2. On suppose que $n = 8$ dans cette question. On donnera les résultats à 10^{-3} près par défaut.

a) Quelle est la probabilité P_1 de tirer une boule de chaque couleur (c'est-à-dire d'obtenir une boule blanche, une boule rouge et une boule verte) ?

b) Quelle est la probabilité P_2 de tirer 3 boules vertes ?

3. On considère la fonction f de la variable x définie sur $[1\ ;\ 20]$ par :

$$f(x) = -2x^3 + 42x^2.$$

Étudier les variations de f. (On montrera que f possède un maximum sur $[1\ ;\ 20]$ pour $x = 14$.)

4. Dans cette question, on suppose que n appartient à A défini à la question 1. On note $P(n)$ la probabilité d'obtenir une boule de chaque couleur.

a) Déterminer $P(n)$.

b) En utilisant les résultats obtenus au 3., déterminer la valeur n_0 de n pour que $P(n)$ soit maximum.

Calculer $P(n_0)$ à 10^{-3} par défaut.

D'après Bac

38 Probabilité et suites numériques

1. U_1 et U_2 sont deux urnes. U_1 contient 6 boules blanches et 4 boules noires ; U_2 contient 8 boules blanches et 2 boules noires. D'une des deux urnes choisie au hasard (il y a équiprobabilité pour ce choix), on extrait une boule que l'on remet dans l'urne. Si la boule était blanche, on recommence le tirage dans la même urne ; si la boule était noire, on recommence le tirage dans l'autre urne. Cette règle est appliquée à chaque tirage et on suppose qu'à l'intérieur de chaque urne les tirages sont équiprobables.

On désigne par P_n la probabilité pour que le $n^{\text{ième}}$ tirage se fasse dans l'urne U_1 (n est un entier naturel non nul).

a) Déterminer P_1.

b) Déterminer P_2.

On se rappellera que le second tirage s'est fait dans U_1 soit parce que le premier tirage a été une boule blanche dans U_1, soit parce que le premier tirage a été une boule noire dans U_2.

c) Démontrer qu'il existe une relation de récurrence vérifiée par la suite (P_n) de la forme :

pour tout entier naturel n $[n \geq 2]$, $P_n = aP_{n-1} + b$

où a et b sont des nombres réels que l'on déterminera.

2. (u_n) est la suite réelle définie par :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_n = \dfrac{2}{5}u_{n-1} + \dfrac{1}{5} \quad [n \geq 2]. \end{cases}$$

a) Déterminer le nombre réel α pour que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \alpha$ $[n \in \mathbb{N}^*]$ soit une suite géométrique.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Trouver alors la limite de P_n quand n tend vers $+\infty$.

D'après bac

16 Probabilités conditionnelles et variable aléatoire

Pour des événements soumis à des contraintes causales (en génétique, en économie, ...) l'avènement des variables aléatoires réelles a permis la modélisation et l'élaboration de lois de probabilité.

Grâce au concept déterministe du hasard, développé depuis le XVII^e siècle par des savants tels que Jacques 1^er Bernoulli, Euler, Cauchy et Bernstein, les probabilités ont connu un essor prodigieux en s'appuyant sur des bases mathématiques solides établies par les travaux du mathématicien russe Kolmogorov en 1933.

Jacques 1^er Bernoulli
mathématicien suisse – 1654-1705.

SOMMAIRE

1 Probabilités conditionnelles

1.1. Définition – Propriétés

Probabilités conditionnelles

Exemple introductif 1

Une classe de Terminale SE est constituée de 45 élèves dont 9 filles et 36 garçons.
On demande des volontaires pour former une équipe de football mixte. On obtient 3 filles et 30 garçons.
– Parmi les 45 élèves, on choisit un (ou une) au hasard.
Calculons la probabilité de chacun des évènements suivants :
« l'élève choisi est une fille »
« l'élève choisi est un volontaire »
« l'élève choisi est une fille volontaire »
– Parmi les élèves, on choisit une fille au hasard.
Calculons la probabilité de l'évènement « la fille choisie est une volontaire ».

• **Première expérience aléatoire**

Évènements

Parmi les 45 élèves, on choisit un (ou une) au hasard.
L'univers des éventualités de cette expérience aléatoire est représenté par le tableau ci-contre.

	Filles	Garçons	Totaux
Volontaires	3	30	33
Non volontaires	6	6	12
Totaux	9	36	45

Désignons par : F l'évènement « l'élève choisi est une fille »
G l'évènement « l'élève choisi est un garçon »
V l'évènement « l'élève choisi est un (ou une) volontaire »
N l'évènement « l'élève choisi est un (ou une) non volontaire »
donc, $F \cap V$ est l'évènement « l'élève choisi est une fille volontaire ».

Calcul des probabilités

Cette expérience a bien entendu lieu dans le cadre de l'équiprobabilité des évènements élémentaires.
d'où : $P(F) = \dfrac{\text{card } F}{\text{card } \mathcal{U}} = \dfrac{9}{45} = \dfrac{1}{5}$; $P(V) = \dfrac{\text{card } V}{\text{card } \mathcal{U}} = \dfrac{33}{45} = \dfrac{11}{15}$; $P(F \cap V) = \dfrac{\text{card } (F \cap V)}{\text{card } \mathcal{U}} = \dfrac{3}{45} = \dfrac{1}{15}$.

• **Enchaînement de deux expériences aléatoires**

Évènements

« la fille choisie est une volontaire » est un évènement de l'univers $\mathcal{U}$.
Cependant cet évènement peut être considéré comme provenant de l'enchaînement des deux expériences aléatoires suivantes :

– *1^re^ expérience* Parmi les 45 élèves, on en choisit un (ou une) au hasard ;
– *2^e^ expérience* Parmi les 9 filles, on en choisit une au hasard.

Calcul des probabilités

Désignons par $P_F(V)$ la probabilité d'avoir une volontaire, sachant que l'élève choisi est une fille.
On dit que $P_F(V)$ est **la probabilité de V sachant que F est réalisé** ou plus simplement $P_F(V)$ est la **probabilité de V sachant F.**

On a : $P_F(V) = \dfrac{\text{card } (F \cap V)}{\text{card } F} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$; $P_F(V) \neq P(F \cap V)$.

Expression de $P_F(V)$ en fonction de $P(F \cap V)$ et $P(F)$

On a : $P_F(V) = \dfrac{\text{card } (F \cap V)}{\text{card } F} = \dfrac{\dfrac{\text{card } (F \cap V)}{\text{card } \mathcal{U}}}{\dfrac{\text{card } F}{\text{card } \mathcal{U}}} = \dfrac{P(F \cap V)}{P(F)}$; $P_F(V) = \dfrac{P(F \cap V)}{P(F)}$ (1)

P_F est une probabilité sur $\mathcal{U}$

En effet, à l'aide de la formule (1) et de la définition d'une probabilité, on vérifie que P_F est une probabilité sur $\mathcal{U}$.

Propriété – Définition

$\mathcal{U}$ est l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire,
B un évènement de $\mathcal{U}$ de probabilité non nulle.
L'application P_B qui à tout évènement A de $\mathcal{U}$ associe le nombre réel $\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ est une probabilité sur $\mathcal{U}$; elle est appelée *probabilité conditionnelle* sachant que B est réalisé ;
$P_B(A)$ (encore noté $P(A/B)$) est appelé la probabilité de A sachant que B est réalisé ou simplement la *probabilité de A sachant B.*

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad ; \; P_B(A) \text{ est la probabilité de A sachant B.}$$

$$P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B) = P_A(B) \times P(A) \; ; \; (\, P(B) \neq 0 \; ; \; P(A) \neq 0).$$

Exemple des deux machines

Une usine de conditionnement de café abrite deux machines qui travaillent en chaîne. Les fèves de café décortiquées et séchées passent dans la 1re machine pour torréfaction, la 2e machine a alors pour fonction de moudre les fèves de café grillées.

Des experts ont estimé à :
0,002 la probabilité pour que la 1re machine tombe en panne,
0,003 la probabilité pour que la 2e machine tombe en panne,
0,6 la probabilité pour que la 2e machine tombe en panne lorsque la 1re est en panne.

Calculons :
– la probabilité pour que les deux machines tombent simultanément en panne ;
– la probabilité pour que la 1re machine tombe en panne lorsque la 2e est en panne.

Évènements

Désignons par : T l'évènement « la première machine tombe en panne »
M l'évènement « la deuxième machine tombe en panne »
donc : $T \cap M$ est l'évènement « les deux machines tombent simultanément en panne ».

Calcul des probabilités

On a : $P(T) = 0{,}002$; $P(M) = 0{,}003$; $P_T(M) = 0{,}6$

or : $P(T \cap M) = P_T(M) \times P(T) = P_M(T) \times P(M)$

d'où : $P(T \cap M) = P_T(M) \times P(T) = 0{,}6 \times 0{,}002 = 0{,}0012$

$$P_M(T) = \frac{P(T \cap M)}{P(M)} = \frac{0{,}0012}{0{,}003} = 0{,}4.$$

Évènements indépendants en probabilité

Activité

– On considère l'expérience aléatoire suivante :
On tire (au hasard) une carte dans un jeu de 32 cartes et on note sa couleur et sa valeur.
– On désigne par : A l'évènement « la carte tirée est un Trèfle»
B l'évènement « la carte tirée est un Roi »
E l'évènement « la carte tirée est un As noir ».
– Calculer : $P_B(A)$; $P_A(B)$; $P_E(A)$; $P_A(E)$.
– Comparer : $P(A)$ et $P_B(A)$; $P(B)$ et $P_A(B)$; $P(A \cap B)$ et $P(A) \times P(B)$;
$P(A)$ et $P_E(A)$; $P(E)$ et $P_A(E)$; $P(A \cap E)$ et $P(A) \times P(E)$.

On peut constater que la probabilité « la carte tirée est un Trèfle » n'est pas modifiée par la réalisation de l'évènement « la carte tirée est un As ».

On dit que ces deux évènements sont **indépendants** en probabilité.

La probabilité de l'évènement « la carte tirée est un Trèfle » est modifiée par la réalisation de l'évènement « la carte tirée est un As noir ».

On dit que ces deux évènements **ne sont pas indépendants** en probabilité.

Définition

On dit que deux évènements d'un univers sont *indépendants en probabilité*, lorsque la probabilité de l'un n'est pas modifiée par la réalisation de l'autre.

A et B sont deux évènements d'un univers.

A et B sont indépendants *si et seulement si* $\begin{cases} (1)\ P_B(A) = P(A), \text{ lorsque } P(B) \neq 0 \\ (2)\ P_A(B) = P(B), \text{ lorsque } P(A) \neq 0 \\ (3)\ P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \end{cases}$

Exemple

On peut aisément vérifier que :

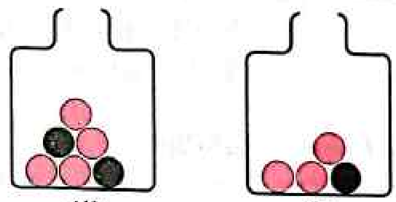
– dans l'exemple introductif du 1.1 (croisement des deux critères : être une fille ou non ; être volontaire ou non), l'évènement F et l'évènement V ne sont pas indépendants ;

– dans l'exemple du 1.1 (panne de deux machines), l'évènement M et l'évènement T ne sont pas indépendants.

Probabilités totales

Exemple introductif 2

Deux urnes indiscernables (1) et (2) contiennent des boules indiscernables au toucher.
L'urne (1) contient 4 boules rouges et 2 boules noires.
L'urne (2) contient 3 boules rouges et 1 boule noire.
On choisit une urne (au hasard), on tire (au hasard) une boule de cette urne et on note la couleur de la boule.
Calculons la probabilité pour que la boule tirée soit rouge.



L'univers des éventualités

– L'épreuve décrite est un enchaînement de deux expériences aléatoires :

choisir une urne ; tirer une boule de cette urne.

– L'univers $\mathcal{U}$ de cette épreuve est constitué des 10 boules des deux urnes.

– Désignons par :

$\mathcal{U}_1$ l'évènement « la boule tirée provient de l'urne (1) » ; $\mathcal{U}_2$ « la boule tirée provient de l'urne (2) »

R l'évènement « la boule tirée est rouge » ; N « la boule tirée est noire ».

On remarque que : $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ et $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \varnothing$.

Calcul des probabilités

– L'évènement R est la réunion des deux évènements disjoints suivants :

$R \cap \mathcal{U}_1$ « la boule tirée est rouge et provient de l'urne (1) »

$R \cap \mathcal{U}_2$ « la boule tirée est rouge et provient de l'urne (2) »

d'où : $P(R) = P(R \cap \mathcal{U}_1) + P(R \cap \mathcal{U}_2)$

or : $P(R \cap \mathcal{U}_1) = P_{\mathcal{U}_1}(R) \times P(\mathcal{U}_1)$; $P(R \cap \mathcal{U}_2) = P_{\mathcal{U}_2}(R) \times P(\mathcal{U}_2)$.

– L'évènement $\mathcal{U}_1$ et l'évènement $\mathcal{U}_2$ sont équiprobables et forment une partition de $\mathcal{U}$, donc : $P(\mathcal{U}_1) = P(\mathcal{U}_2) = \frac{1}{2}$ (car $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \varnothing$ et $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 = \mathcal{U}$).

– Par ailleurs,

$P_{\mathcal{U}_1}(R)$ est la probabilité de tirer une boule rouge de l'urne (1), donc $P_{\mathcal{U}_1}(R) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

$P_{\mathcal{U}_2}(R)$ est la probabilité de tirer une boule rouge de l'urne (2), donc $P_{\mathcal{U}_2}(R) = \frac{3}{4}$.

d'où : $P(R) = P_{\mathcal{U}_1}(R) \times P(\mathcal{U}_1) + P_{\mathcal{U}_2}(R) \times P(\mathcal{U}_2)$

$$P(R) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{17}{24}.$$

– Notons que : $R \cap N = \varnothing$ et $R \cup N = \mathcal{U}$.

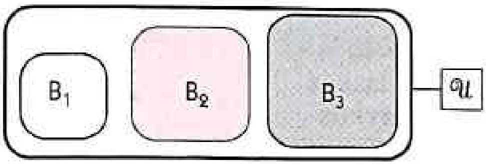
Partition d'un ensemble

Définition

$B_1, B_2, \dots, B_n$ forment une *partition* de $\mathcal{U}$.

signifie que

$B_1, B_2, \dots, B_n$ sont deux à deux disjoints et $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \mathcal{U}$.



B_1, B_2, B_3 forment une partition de $\mathcal{U}$.

signifie que

$B_1 \cap B_2 = \varnothing$; $B_2 \cap B_3 = \varnothing$; $B_1 \cap B_3 = \varnothing$;

$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \mathcal{U}$.

Formules des probabilités totales

Plus généralement, en utilisant la définition de la partition d'un ensemble et la propriété des probabilités conditionnelles, on obtient la propiété suivante :

Propriété

$B_1, B_2, \dots, B_n$ forment une partition de l'univers $\mathcal{U}$.

- **pour tout évènement A, $P(A) = P(A \cap B_1) + \dots + P(A \cap B_n)$**
- **pour tout i $(1 \le i \le n)$, $P(A \cap B_i) = P_{B_i}(A) \times P(B_i)$**

Exercices

1.a On considère deux jetons indiscernables au toucher. L'un de ces jetons a deux faces numérotées 1 ; l'autre jeton a une face numérotée 1 et une face numérotée 2.
On place les jetons dans un sac, on tire au hasard un jeton et on lit le chiffre inscrit sur la face visible puis le chiffre inscrit sur l'autre face.
Sachant que le premier chiffre lu est 1, quelle est la probabilité pour que la deuxième face soit numérotée 1 ?

1.b On lance successivement deux dés cubiques parfaits dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Sachant que le chiffre lu sur le premier dé est 3, quelle est la probabilité pour que la somme des deux chiffres soit paire ?

1.c On lance une pièce de monnaie truquée, telle que la probabilité d'obtenir PILE est $\frac{1}{3}$.

– Si l'on obtient FACE, on tire au hasard un jeton d'un sac contenant neuf jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à 9.

– Si l'on obtient PILE, on tire au hasard un jeton d'un autre sac contenant cinq jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à 5.

1. Calculer la probabilité pour que le nombre obtenu soit impair.

2. Quelle est la probabilité pour que l'on ait obtenu PILE en lançant la pièce, sachant que le nombre obtenu est pair ?

1.2. Calculs des probabilités conditionnelles

Utilisation d'arbres de probabilité

Exemple introductif 3

Revenons à l'exemple introductif du paragraphe 1.1.

- La situation aléatoire de ce problème peut être traduit par les tableaux suivants :

L'univers $\mathcal{U}$ des éventualités

	Filles	Garçons	Totaux
Volontaires	3	30	33
Non volontaires	6	6	12
Totaux	9	36	45

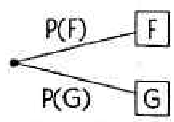
Les probabilités des évènements

	Filles	Garçons	Totaux
Volontaires	$\frac{1}{15}$	$\frac{10}{15}$	$\frac{11}{15}$
Non volontaires	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$
Totaux	$\frac{3}{15}$	$\frac{12}{15}$	1

- La situation aléatoire de ce problème provient d'un enchaînement de deux expériences aléatoires conduisant à des probabilités conditionnelles.
Une telle situation peut être traduite de manière performante par un arbre.

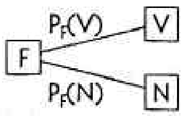
– Le premier niveau de l'arbre

Il traduit la première expérience aléatoire et donne la partition F, G de $\mathcal{U}$.
L'évènement F et l'évènement G sont représentés par deux branches issues d'un même point. Sur chaque branche est inscrit la probabilité de l'évènement correspondant.
Le premier niveau possède un seul nœud, l'origine.



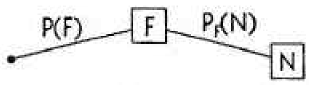
– Le deuxième niveau de l'arbre

Il traduit la deuxième expérience aléatoire et donne la partition V, N de $\mathcal{U}$.
les probabilités des branches sont des probabilités conditionnelles.
Ce niveau possède deux nœuds, un en $\boxed{F}$ l'autre en $\boxed{G}$.



– Un chemin aléatoire de l'arbre

Un chemin est constitué d'une branche à chacun des niveaux.
Par exemple, le chemin •—$\boxed{F}$—$\boxed{N}$ ci-contre représente l'évènement $F \cap N$ « l'élève choisi est une fille non volontaire ».

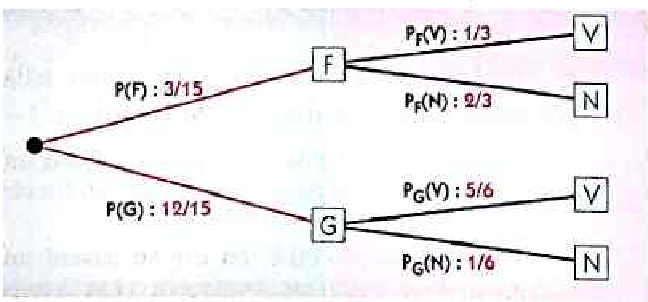


On calcule la probabilité d'un chemin en appliquant la propriété des probabilités conditionnelles :

$$P(F \cap N) = P(F) \times P_F(N)$$

– L'arbre de probabilité

1^er^ niveau *(1^re^ expérience)* — 2^e^ niveau *(2^e^ expérience)*



Probalité — Probalité conditionnelle

Probabilités des chemins aléatoires

$$P(F \cap V) = P(F) \times P_F(V) = \frac{1}{15}$$

$$P(F \cap N) = P(F) \times P_F(N) = \frac{2}{15}$$

$$P(G \cap V) = P(G) \times P_G(V) = \frac{10}{15}$$

$$P(G \cap N) = P(G) \times P_G(N) = \frac{2}{15}$$

Construction et utilisation d'un arbre de probabilité

La construction et l'utilisation d'un arbre pondéré, utilisent les principes suivants :
- à chaque niveau, les évènements forment une partition de l'univers ;
- à partir du 2^e^ niveau, les probabilités des branches sont des probabilités conditionnelles ;
- la probabilité d'un chemin est égal au produit des probabilités des branches ;
- la probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des chemins qui y conduisent.

Des modèles de référence en probabilité conditionnelle

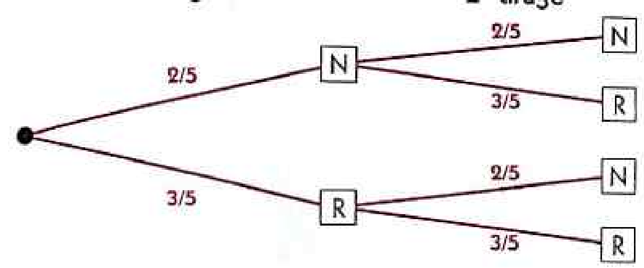
Tirages successifs

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher dont trois rouges et deux noires.
On tire successivement (et au hasard) deux boules de cette urne et on note leurs couleurs dans l'ordre des tirages effectués.
On considère les deux cas suivants : 1) Les tirages successifs sont avec remise ;
2) Les tirages successifs sont sans remise.
Calculons : la probabilité de tirer une boule noire en premier et une boule rouge en second,
la probabilité de tirer une boule rouge en second.
Pour chacun des cas, construisons un arbre de probabilité.

Ces deux tirages successifs s'effectuent dans le cadre de l'équiprobabilité des évènements élémentaires (lorsque l'on suppose les boules numérotées).

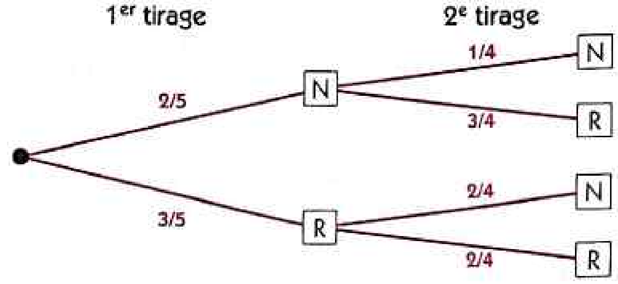
Tirages successifs avec remise

1er tirage — 2^{e} tirage

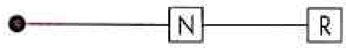


Tirages successifs sans remise

1er tirage — 2^{e} tirage



– Tirer une boule noire en premier et une boule rouge en second a pour probabilité celle du chemin :



d'où : $P(NR) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$. | d'où : $P(NR) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

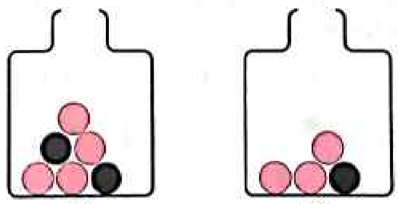
– Tirer une boule rouge en second a pour probabilité la somme des probabilités des chemins correspondants :

;

d'où : $P(NR) + P(RR) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$. | d'où : $P(NR) + P(RR) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{10}$.

Choix d'une urne puis tirage d'une boule

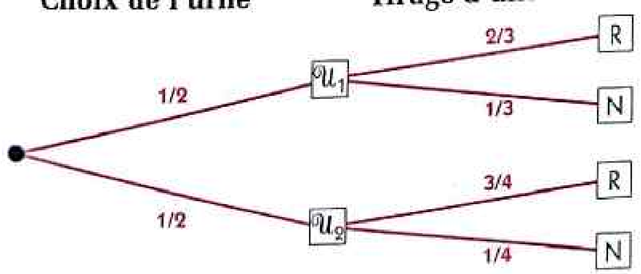
Revenons à l'exemple introductif des probabilités totales.
Deux urnes indiscernables contiennent des boules indiscernables au toucher,
– l'urne (1) contient 4 boules rouges et 2 boules noires,
– l'urne (2) contient 3 boules rouges et 1 boule noire.
On choisit une urne, on tire une boule de cette urne et on note la couleur de la boule tirée.
Représentons cette situation aléatoire par un arbre de probabilité.



(1) (2)

Utilisons les mêmes notations que précédemment.

Choix de l'urne — **Tirage d'une boule**



Probabilités des chemins aléatoires

$P(\mathcal{U}_1 \cap R) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$P(\mathcal{U}_1 \cap N) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$P(\mathcal{U}_2 \cap R) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$

$P(\mathcal{U}_2 \cap N) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

On a : $R = (\mathcal{U}_1 \cap R) \cup (\mathcal{U}_2 \cap R)$ et $(\mathcal{U}_1 \cap R) \cap (\mathcal{U}_2 \cap R) = \varnothing$

d'où : $P(R) = P(\mathcal{U}_1 \cap R) + P(\mathcal{U}_2 \cap R) = \frac{1}{3} + \frac{3}{8} = \frac{17}{24}$; $P(N) = 1 - P(R) = \frac{7}{24}$.

2 Variable aléatoire

2.1. Loi de probabilité – Fonction de répartition

Un exemple introductif sera traité en plusieurs étapes, ce qui nous permettra de dégager progressivement des nouvelles notions.

Variable aléatoire numérique

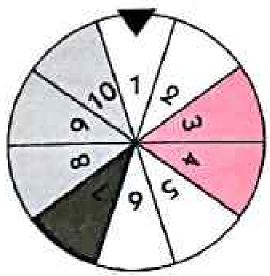
Exemple introductif 4 – 1re étape

Une roue mobile autour d'un axe est partagée en dix secteurs de même aire et est coloriée en quatre zones comme l'indique la figure ci-contre.

1re expérience aléatoire

On tourne la roue, après immobilisation de celle-ci, on note la zone indiquée par le repère. (Voir figure.)

Déterminons une probabilité P définie sur l'univers $\mathcal{U}$ des éventualités de cette expérience aléatoire.



L'univers $\mathcal{U}$ de l'expérience aléatoire – 1

Les éventualités de cette expérience aléatoire sont : zone noire, zone rouge, zone blanche, zone grise. Nous notons respectivement ces zones par : N ; R ; B ; G ;
d'où : $\mathcal{U} = \{N ; R ; B ; G\}$.

Une probabilité P définie sur $\mathcal{U}$

La roue étant divisée en secteurs de même aire, on peut admettre raisonnablement que cette expérience aléatoire a lieu dans le cadre de l'équiprobabilité d'évènements élémentaires liés à l'univers suivant :

$$\{B_1 ; B_2 ; R_3 ; R_4 ; B_5 ; B_6 ; N_7 ; G_8 ; G_9 ; G_{10}\}.$$

Nous admettons donc que la probabilité P définie sur $\mathcal{U}$ est telle que la probabilité d'une zone est proportionnelle à l'aire de cette zone.

Or : $P(N) + P(R) + P(B) + P(G) = P(\mathcal{U}) = 1$

d'où : $P(N) = \frac{1}{10} = 0{,}1$

$P(R) = 2\,P(N) = 0{,}2$

$P(B) = 4\,P(N) = 0{,}4$

$P(G) = 3\,P(N) = 0{,}3.$

Exemple introductif 4 – 2e étape

Complétons par une règle de jeu la situation aléatoire décrite dans l'exemple introductif – 1.

2e expérience aléatoire

Un joueur qui tourne la roue perd ou gagne une certaine somme d'argent suivant la règle de jeu ci-contre.

Examinons l'univers des éventualités numériques lié à cette règle de jeu.

Zone repérée	Gain algébrique
N	1 000 F
R	500 F
B	0 F
G	– 500 F

L'univers de l'expérience aléatoire – 2

À chaque éventualité e_i de $\mathcal{U}$, on associe le gain algébrique x_i du joueur.

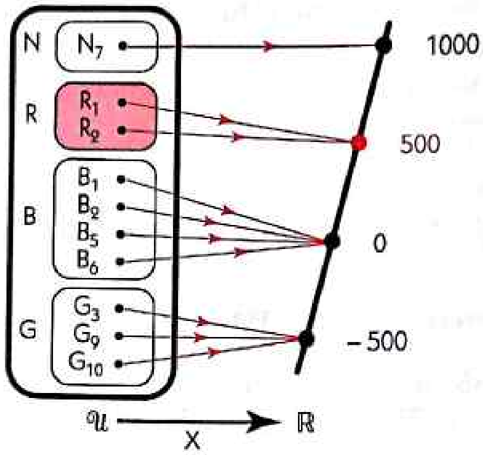
On dit que l'on a défini une **variable aléatoire** ; on la note X (X est une application de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$).

On a : $X(\mathcal{U}) = \{ 1\,000 ; 500 ; 0 ; -500 \}$.

$X(\mathcal{U})$ est l'univers des éventualités de cette 2ᵉ expérience aléatoire (il dépend de la règle de jeu introduite).

Les évènements de l'univers $X(\mathcal{U})$

« Le joueur gagne 500 F » est un évènement de l'univers $X(\mathcal{U})$; il est noté : $(X = 500)$ (c'est l'image par X de l'évènement « La zone indiquée par le repère est rouge »).



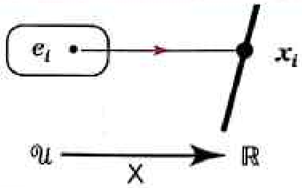
Définition

Lorsque à chaque éventualité e_i d'une expérience aléatoire, on associe un nombre réel x_i on dit que l'on a défini une *variable aléatoire numérique* X.

$\mathcal{U}$ est l'univers des éventualités de l'expérience aléatoire,

X est une application de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$.

L'évènement « X prend la valeur x_i » est noté : $(X = x_i)$.



Loi de probabilité – Fonction de répartition

Exemple introductif 4 – 3ᵉ étape

L'objectif de cette 3ᵉ étape de l'exemple introductif est de définir sur l'univers $X(\mathcal{U})$ une probabilité P' à partir de la probabilité P définie sur $\mathcal{U}$.

Une probabilité définie sur $X(\mathcal{U})$

Il s'agit, pour tout évènement E de $X(\mathcal{U})$, de déterminer P'(E) à l'aide de P et de X ;

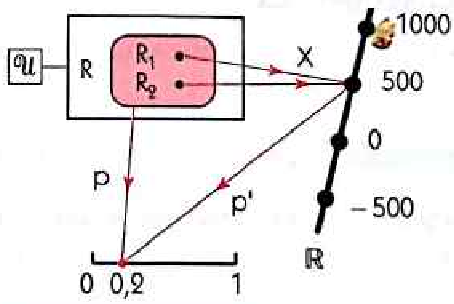
pour cela, on pose : $P'(\{500\}) = P(\{R_1 ; R_2\})$

$P'(\{500\})$ sera donc noté : $P(X = 500)$.

On fait de même pour chaque évènement élémentaire de $X(\mathcal{U})$. On vérifie que P' est une probabilité définie sur $X(\mathcal{U})$.

Illustration de la situation aléatoire

Zone repérée	G	B	R	N
Gain algébrique x_i	-500	0	500	1 000
$P(X = x_i)$	0,3	0,4	0,2	0,1



Définition

Lorsque à chaque valeur x_i prise par une variable aléatoire X, on associe la probabilité p_i de l'évènement $(X = x_i)$, on dit que l'on a défini la *loi de probabilité de* X (ou *la distribution de* X).

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X peut être présentée par un tableau.

Valeur de X x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$ p_i	p_1	p_2	...	p_n

■ Exemple introductif 4 – 4e étape

Revenons à la situation aléatoire de l'exemple introductif.
– Par un diagramme en bâtons représentons graphiquement la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
– Désignons par $(X \leq x)$ l'évènement « X prend des valeurs inférieures ou égales à x », x étant un nombre réel.
Étudions l'application $F : \mathbb{R} \to [0\,;1]$
$x \mapsto P(X \leq x)$.

Détermination de $P(X = x_i)$ où $x_i \in X(\mathcal{U})$

Tableau de la loi de probabilité

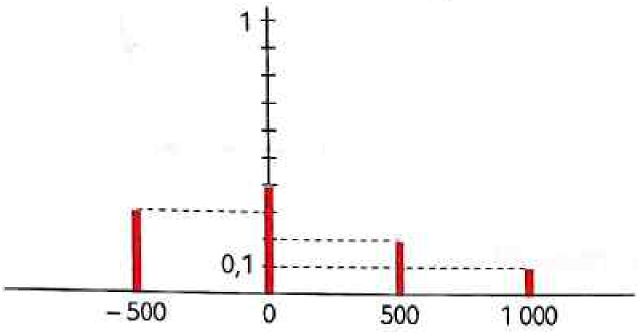
x_i	– 500	0	500	1 000
$P(X = x_i)$	0,3	0,4	0,2	0,1

Détermination de $P(X \leq x_i)$ où $x_i \in X(\mathcal{U})$
Formules explicite de F

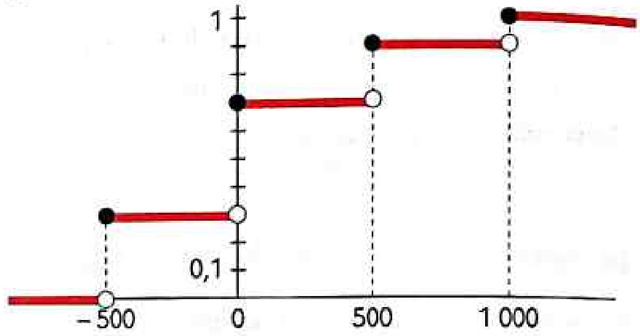
$x < -500$	$F(x) = 0$
$-500 \leq x < 0$	$F(x) = P(X = -500) = 0{,}3$
$0 \leq x < 500$	$F(x) = F(-500) + P(X = 0) = 0{,}7$
$500 \leq x < 1\,000$	$F(x) = F(0) + P(X = 500) = 0{,}9$
$1\,000 \leq x$	$F(x) = 1$

F est appelée la **fonction de répartition** de X.

Diagramme en bâtons de la loi de probabilité de X



Représentation graphique de F



Définition

On appelle ***fonction de répartition de la variable aléatoire*** **X l'application** $F : \mathbb{R} \to [0\,;1]$
$x \mapsto P(X \leq x)$.

F est définie par les formules explicites suivantes :

pour $x < x_1$, $F(x) = 0$
pour $x_i \leq x < x_{i+1}$, $F(x) = F(x_{i-1}) + P(X = x_i)$
pour $x_n \leq x$, $F(x) = 1$

Conséquences

F est une fonction croissante en escalier.

Exemple du lancer trois fois de suite d'une pièce de monnaie équilibrée

Un joueur lance trois fois de suite une pièce de monnaie parfaitement équilibrée. Il gagne 200 F pour chaque apparition de PILE et il perd 100 F pour chaque apparition de FACE.
– Déterminer la probabilité P sur l'univers $\mathcal{U}$ des évènements de l'expérience aléatoire : *lancer trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée.*
– Définir par un tableau la variable aléatoire X donnant le gain pour chaque éventualité de $\mathcal{U}$.
– Déterminer la loi de probabilité de X.
– Déterminer la fonction de répartition F de X.
– Construire le diagramme en bâton de la loi de probabilité de X et la représentation graphique de la fonction de répartition F de X.

Probabilité P sur l'univers $\mathcal{U}$ des événements de l'expérience aléatoire : *lancer trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée.*

$\mathcal{U}$ = {PPP ; PPF ; PFP ; FPP ; PFF ; FPF ; FFP ; FFF}

La pièce de monnaie était supposée parfaitement équilibrée, cette expérience a lieu dans le cadre de l'équiprobabilité des évènements élémentaires.
Donc la probabilité d'un événement élémentaire de $\mathcal{U}$ est $\frac{1}{8}$.

Variable aléatoire X donnant le gain pour chaque éventualité de $\mathcal{U}$.

Éventualité de $\mathcal{U}$	PPP	PPF	PFP	FPP	PFF	FPF	FFP	FFF
Valeurs prises par X	600	300	300	300	0	0	0	– 300

d'où : $X(\mathcal{U}) = \{-300 ; 0 ; 300 ; 600\}$

Probabilité sur l'univers X($\mathcal{U}$) ou loi de probabilité de la variable aléatoire X

$p_1 = P(X = -300) = \frac{1}{8}$; $p_3 = P(X = 300) = \frac{3}{8}$

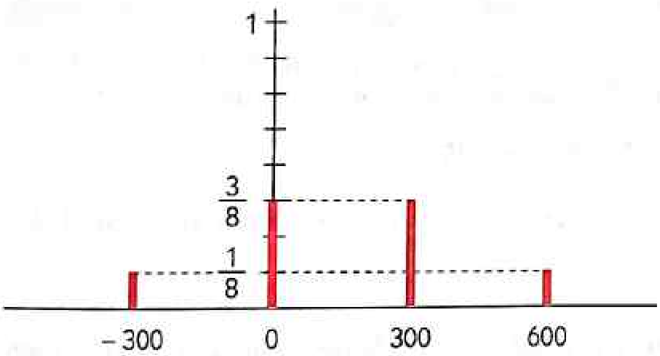
$p_2 = P(X = 0) = \frac{3}{8}$; $p_4 = P(X = 600) = \frac{3}{8}$

x_i	– 300	0	300	600
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

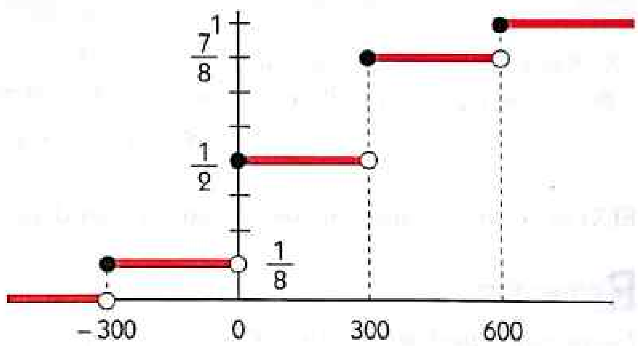
Fonction de répartition F de la variable aléatoire X
Du tableau précédent donnant la loi de probabilité de X, on déduit le tableau ci-dessous qui détermine la fonction de répartition F de X.

x_i	– ∞	– 300		0		300		600	+ ∞
$P(X \leq x_i)$	0	$\boxed{\frac{1}{8}}$	$\frac{1}{8}$	$\boxed{\frac{4}{8}}$	$\frac{4}{8}$	$\boxed{\frac{7}{8}}$	$\frac{7}{8}$	$\boxed{1}$	1

Diagramme en bâtons de la loi de probabilité de X



Représentation graphique de la fonction de répartition F de X



Exercices

2.a X est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau ci-dessous.

x_i	– 3	0	2	5
p_i	0,1	0,4	0,3	0,2

Compléter la tableau qui détermine la fonction de répartition F de X et représenter graphiquement F.

x	– ∞	– 3	0	2	5	+ ∞
$F(x)$		$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	

2.b X est une variable aléatoire dont la fonction de répartition F est donnée par les formules explicites suivantes :

pour $x < -2$ $F(x) = 0$
pour $-2 \leq x < 1$ $F(x) = 0,2$
pour $1 \leq x < 3$ $F(x) = = 0,4$
pour $3 \leq x < 5$ $F(x) = = 0,7$
pour $5 \leq x$ $F(x) = = 1$

Représenter graphiquement F.
Déterminer la loi de probabilité de X.

2.2. Espérance mathématique – Variance – Écart-type

Définition – Propriété

Exemple introductif 4 – 5^e étape

Sachant que la probabilité d'un évènement est la fréquence théorique de cet évènement, déterminons une estimation du gain moyen sur un grand nombre n de parties exécutées par le joueur.

Gain algébrique moyen du joueur

Pour un grand nombre n de parties exécutées par un joueur, on obtient le tableau suivant :

	G	B	R	N	Totaux
Nombres de sorties	$0{,}3n$	$0{,}4n$	$0{,}2n$	$0{,}1n$	n
Gain algébrique	$-500 \times 0{,}3n$	$0 \times 0{,}4n$	$500 \times 0{,}2n$	$1\,000 \times 0{,}1n$	$50n$

Le gain algébrique moyen du joueur est donc de 50 F ; c'est l'**espérance mathématique** de la variable aléatoire X, on la note E(X).

Calcul pratique de E(X)

x_i	-500	0	500	1 000	Totaux
p_i	0,3	0,4	0,2	0,1	1
$x_i p_i$	-150	0	100	100	50

E(X) = 50

Interprétation en terme de jeu

Lorsque $E(X) > 0$, le jeu est avantageux pour le joueur.
Lorsque $E(X) < 0$, le jeu est désavantageux pour le joueur.
Lorsque $E(X) = 0$, le jeu est dit **équitable**.

Définition

X étant une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots x_n$, avec les probabilités respectives $p_1, p_2, \ldots, p_n$, on appelle *espérance mathématique* de X le nombre réel noté E(X) définie par :

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

E(X) est donc la moyenne des valeurs x_i pondérées par les nombres réels p_i, d'où la notation pour E(X).

Remarque

L'espérance mathématique est un indicateur de tendance centrale, mais elle ne donne aucune information sur la façon dont sont groupées les valeurs de la variable aléatoire autour de l'espérance mathématique.

Exemple des deux loteries

Au cours d'une kermesse de la commune, deux loteries comportant chacune 1 000 numéros sont mises en place.

Chacun des 1 000 numéros de la 1re loterie gagne 100 F.

Désignons par X la variable aléatoire mesurant le gain dans cette 1re loterie.

On a : $x_1 = x_2 = \ldots = x_{1000} = 100$

$p_1 = p_2 = \ldots = p_{1000} = \dfrac{1}{1\,000}$

or : $E(X) = \sum_{i=1}^{1000} x_i p_i$

d'où : $E(X) = 100 \times \dfrac{1}{1\,000} \times 1\,000 = 100.$

Un seul des 1 000 numéros de la 2^e loterie gagne un gros lot de 100 000 F.

Désignons par Y la variable aléatoire mesurant le gain dans cette 2^e loterie.

On a : $y_1 = 1\,000$; $y_2 = \ldots = y_{1000} = 0$

$p_1 = p_2 = \ldots = p_{1000} = \dfrac{1}{1\,000}$

or : $E(Y) = y_1p_1 + \sum_{i=2}^{1000} y_i p_i$

d'où : $E(Y) = 100\,000 \times \dfrac{1}{1\,000} + 0 \times \dfrac{999}{1\,000} = 100.$

On en déduit que : E(X) = E(Y).

Cependant la dispersion des valeurs prises par une variable aléatoire autour de son espérance mathématique n'est pas la même pour X et pour Y. Pour rendre compte de cette dispersion, on introduit la notion de variance.

Définition

X étant une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$, avec les probabilités respectives $p_1, p_2, ..., p_n$, E(X) étant noté m,

– On appelle *variance* de X le nombre réel noté V(X) définie par :

$$V(X) = E(X - m)^2 = p_1(x_1 - m)^2 + ... + p_n(x_n - m)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - m)^2.$$

– On appelle *écart-type* de X, le nombre réel noté σ(X) définie par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Autre expression de la variance

On a : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - m)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - 2m \sum_{i=1}^{n} p_i x_i + m^2 \sum_{i=1}^{n} p_i.$

Or : $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = m = E(X)$; $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$; $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 = E(X^2)$

donc : $\boxed{V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2}$

Exemples de calcul de E(X), V(X), σ(X)

Exemple des deux loteries

On a : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$= \sum_{i=1}^{1000} x_i^2 p_i - 100^2$

$= \left(100^2 \times \frac{1}{1\,000}\right) \times 1000 - 100^2$

$= 0$

La 1^re loterie est un jeu équitable.

On a : $V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$

$= y_i^2 p_i - 100^2$

$= \left(100\,000^2 \times \frac{1}{1\,000}\right) - 100^2$

$= 10^7 - 10^4 > 0$

La 2^e loterie est un jeu avantageux pour le joueur.

Exemple du lancer trois fois de suite d'une pièce de monnaie équilibrée

Calcul de l'espérance mathématique

x_i	– 300	0	300	600		
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	Total	
$x_i p_i$	$\frac{-300}{8}$	0	$\frac{900}{8}$	$\frac{600}{8}$	150	E(X) = 150

Calcul de la variance et de l'écart-type

On a : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

x_i^2	90 000	0	90 000	360 000		
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	Total	
$x_i^2 p_i$	$\frac{90\,000}{8}$	0	$\frac{270\,000}{8}$	$\frac{360\,000}{8}$	90 000	$E(X^2) = 90\,000$

d'où : $V(X) = 90\,000 - 150^2 = 67\,500$; $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{67\,500}$.

Exercices

2.c Un dé cubique pipé dont les faces sont numérotés de 1 à 6 est tel que :

P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = 0,175 ; P(5) = 0,2 ; P(6) = 0,1.

On lance le dé deux fois de suite ; on note à chaque lancer le numéro de la face supérieure.

On désigne par X la variable aléatoire qui donne la somme des deux chiffres obtenus.

1. Déterminer la loi de probabilité de X et construire son diagramme en bâtons.

2. Calculer E(X), V(X), σ(X).

3. Déterminer la fonction de répartition de X et construire sa représentation graphique.

2.3 Épreuve de Bernoulli – Loi binomiale

Définition – Propriétés

Exemple introductif 5 – 1re étape

Lors d'un lancer d'un dé parfait numéroté de 1 à 6, on convient d'appeler SUCCÈS l'évènement « le 6 sort » et ÉCHEC « le 6 ne sort pas ».
Déterminons la probabilité P_1 définie sur l'univers des deux éventualités de cette épreuve aléatoire.

On désigne par : S l'évènement « le 6 sort », E l'évènement « le 6 ne sort pas », P_1 la probabilité définie sur l'univers des éventualités {S ; E}.

En tenant compte de l'équiprobabilité des évènements élémentaires liés à la sortie de chacune des six faces du dé parfait, on obtient : $p = P_1(S) = \frac{1}{6}$; $q = P_1(E) = \frac{5}{6}$.

Une telle épreuve est appelée **épreuve de Bernoulli** de paramètre p.

Définition

On appelle *épreuve de Bernoulli*, toute épreuve aléatoire ne conduisant qu'à deux éventualités appelées SUCCÈS noté S et ÉCHEC noté E ou $\overline{S}$.

La probabilité p du succès est appelée **paramètre** de l'épreuve de Bernouilli.

Exemple introductif 5 – 2e étape

On lance cinq fois de suite le dé et on note dans l'ordre de parution S ou E selon que le 6 sort ou non.
Déterminons la probabilité d'obtenir exactement 2 SUCCÈS.

Cette nouvelle expérience aléatoire est la répétition cinq fois de suite de l'épreuve précédente de Bernoulli. Ces répétitions sont faites de manière indépendante puisque le résultat d'un lancer n'influe pas sur celui du suivant.

Cette expérience aléatoire est appelée **schéma de Bernoulli** de paramètres 5 et p.

Désignons par : P la probabilité définie sur l'univers des éventualités de ce schéma de Bernoulli,
A l'évènement « le 6 sort exactement deux fois ».

– Déterminons la probabilité d'un évènement élémentaire de A.
Considérons l'évènement élémentaire ESEES ; il est contenu dans A. Compte tenu de l'indépendance des lancers,
on a : $P(ESEES) = P_1(E) \times P_1(S) \times P_1(E) \times P_1(E) \times P_1(S)$
$= p^2 \times q^3 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3$.

On en déduit que les évènements élémentaires de A sont équiprobables et ont chacun pour probabilité $p^2 \times q^3$.

– Déterminons le nombre d'évènements élémentaires qui composent A.
ESEES peut être illustré par les cases ci-contre :

E	S	E	E	S

Former ESEES revient à choisir 2 cases parmi les 5.
Or on sait qu'il y a C_5^2 manières de faire ce choix, d'où : $P(A) = C_5^2 \times p^2 \times q^3$.

Définition

On appelle *schéma de Bernoulli* une suite de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Le nombre n des épreuves de Bernoulli et la probabilité p du succès sont appelés **paramètres** du schéma de Bernoulli.

Exemple introductif 5 – 3e étape

On considère la variable aléatoire X, qui à chaque éventualité du schéma de Bernoulli défini ci-dessus, associe le nombre k de SUCCÈS ($0 \leq k \leq 5$).
Déterminons la loi de probabilité de X.

On a : $P(X = 2) = P(A) = C_5^2 \times p^2 \times q^3$.
De la même manière, on établit que : $P(X = k) = C_5^k \times p^k \times q^{5-k}$, $[0 \leq k \leq 1]$.

On démontre et nous admettons les propriétés suivantes :

Propriétés

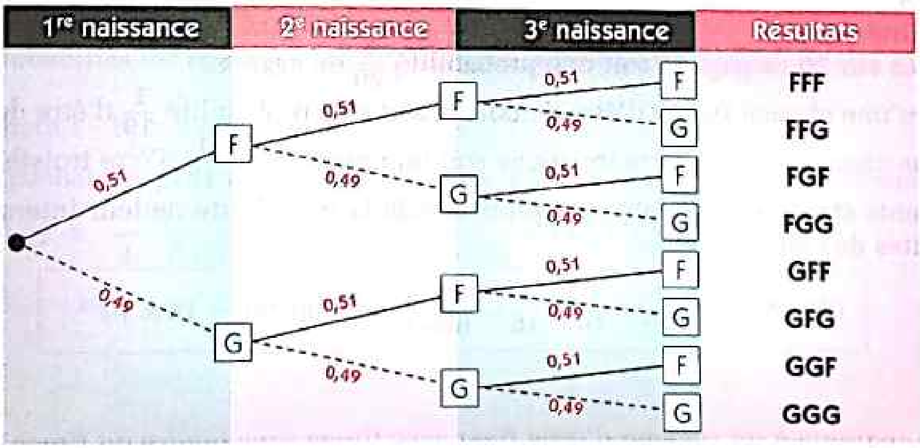
$\mathscr{E}$ est un schéma de Bernoulli, suite de n épreuves,
p la probabilité d'avoir un SUCCÈS, q celle d'avoir un ÈCHEC,
X la variable aléatoire qui à chaque éventualité de $\mathscr{E}$ associe le nombre k de SUCCES ($0 \leq k \leq n$).
– La loi de probabilité de X est définie par : $P(X = k) = C_n^k \times p^k \times q^{n-k}$.
Cette loi de probabilité de X est appelée *loi binomiale* à paramètres n et p.
– L'espérance mathématique et la variance de X sont définies par : $E(X) = np$; $V(X) = npq$.

Exemple d'étude d'une loi binomiale

Une étude statistique dans un pays d'Afrique montre que lors d'une naissance, la probabilité d'avoir une fille est de 51 %.
Considérons dans ce pays une famille de trois enfants sans jumeaux. On s'intéresse au nombre possible de filles de cette famille. Étudions pour cela la succession des trois naisances.

Schéma de Bernoulli
Dans cette famille de trois enfants sans jumeaux, la naissance d'un enfant est une épreuve de Bernoulli, car elle n'a que deux éventualités : Fille (notée F) et Garçon (notée G).
Considérons le schéma de Bernoulli constitué par la succession des trois naissances que l'on suppose identiques et indépendantes.
Chaque éventualité de ce schéma de Bernouilli est un triplet formé par F ou G.

Univers des éventualités du schéma de Bernoulli



Loi binomiale
Désignons par X la variable aléatoire qui à chacune de ces éventualités associe le nombre k avec $0 \leq k \leq 3$.

On a : $P(X = k) = C_3^k p^k q^{3-k}$, avec $p = 0,51$; $q = 0,49$;

d'où :
$P(X = 0) = C_3^0 p^0 q^3 = (0,49)^3 \approx 0,1176$
$P(X = 1) = C_3^1 p^1 q^2 = 3 \times 0,51 \times (0,49)^2 \approx 0,3673$
$P(X = 2) = C_3^2 p^2 q^1 = 3 \times (0,51)^2 \times 0,49 \approx 0,3823$
$P(X = 3) = C_3^3 p^3 q^0 = (0,51)^3 \approx 0,1326$.

Espérance mathématique, variance, écart-type de X
$E(X) = np = 3 \times 0,51 = 1,53$; $V(X) = npq = 3 \times 0,51 \times 0,49 \approx 0,7497$; $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0,7497} \approx 0,8656$.

TP Travaux pratiques

TP1. Très faible probabilité de gagner au tiercé !

Exercice commenté

Il y aura vingt (20) chevaux au départ du grand Prix de l'Arc de Triomphe dimanche prochain à l'hypodrome de Lonpchamp. Cette course servira de support aux Paris Mutuels Urbains (P.M.U.) : Tiercé, Quarté et Quinté +. Seule nous intéresse l'arrivée des trois (3) premiers chevaux ,c'est-à-dire le Tiercé.
Gagner le tiercé dans l'ordre consiste à trouver le nom et l'ordre d'arrivée des trois premiers chevaux ; gagner le tiercé dans le désordre consiste seulement à trouver les noms des trois premiers. Dans cette partie on admet, à priori, que les vingt chevaux ont la même chance de gagner la course (hypothèse d'équiprobabilité).

1. Un turfiste (joueur) joue dans l'ordre les chevaux numérotés 3 ; 5 ; 7.
***a)* Calculer la probabilité pour que le joueur gagne le tiercé dans l'ordre.**
***b)* Sachant que la mise du joueur est 300 FCFA. Calculer le montant du tiercé gagnant en supposant le jeu équitable.**
***c)* Le P.M.U. supporte des frais estimés à 20% des recettes.**
Calculer dans ce cas le montant du tiercé gagnant sachant que le P.M.U. veut réaliser un bénéfice de 10% sur les recettes.

2. Un turfiste a joué dans l'ordre les chevaux numérotés 9 ; 10 ; 11. Calculer la probabilité qu'à ce joueur de gagner le tiercé dans le désordre.

3. On suppose dorénavant que les vingt chevaux sont de valeurs inégales :
– Les chevaux numérotés 11 à 14 ont une probabilité individuelle de gagner égale à 0,8.
– Les chevaux numérotés 15 à 20 ont chacun la même probabilité de gagner.
Calculer la probabilité que le triplet (4 ; 11 ; 18) soit le tiercé dans l'ordre.

1. Un turfiste joue dans l'ordre les numéros 3 ; 5 ; 7
a) Probabilité pour que le joueur gagne le tiercé dans l'ordre

Première solution
Il y a équiprobabilité donc :
– le 4 a une chance sur 20 de gagner, soit une probabilité $\frac{1}{20}$ de gagner
– le 11 n'a plus qu'une chance sur 19 d'être deuxième soit une probabilité $\frac{1}{19}$ d'être deuxième.
– enfin le 18 a une chance sur 18 d'être troisième soit une probabilité $\frac{1}{18}$ d'être troisième.
Ces trois événements étant indépendants (en probabilité), la probabilité de leur intersection est le produit des probabilités de chacun d'eux,

d'où : $$\boxed{P(3\ ;5\ ;7) = \frac{1}{20} \times \frac{1}{19} \times \frac{1}{18} = \frac{1}{6840} = 0{,}000\,146 \approx 15 \times 10^{-5}}$$

Remarque

Cette question s'apparente à un schéma d'urne finie avec tirage sans remise ou tirage exhaustif.

Deuxième solution *(utilisation de l'analyse combinatoire)*
Désignons par Ω l'ensemble des tiercés dans l'ordre. On a : $\text{Card}\Omega = A_{20}^3 = 20 \times 19 \times 18 = 6\,840$.
Désignons par E l'évènement « (3 ; 5 ; 7) est le tiercé gagnant ».
Comme il y a équiprobabilité des tiercés, on a :

$$P(3\ ;5\ ;7) = \frac{1}{20 \times 19 \times 18} = \frac{1}{6840} = 0{,}000146 \ \#\ 0{,}000\,15$$

$$\boxed{P(3\ ;5\ ;7) = 15 \times 10^{-5}}$$

*b) **Le jeu est équitable. Montant S du tiercé gagnant en FCFA.***

On a : $300P(\Omega) = S \times P(3\ ;\ 5\ ;\ 7)$

$$\boxed{S = 300 \text{ FCFA} \times 6840 = 2\ 052\ 000 \text{ F CFA}}$$

c) Le P.M.U. ne verse au joueur que (100 – 20 – 10)% des recettes, c'est-à-dire 70% des recettes.
Le gagnant recevra alors :

$$\frac{2\ 052\ 000 \text{ FCFA} \times 70}{100} = 1\ 436\ 400 \text{ FCFA}$$

$$\boxed{\text{Montant du tiercé gagnant : } 1\ 436\ 400 \text{ FCFA}}$$

2. Calcul de la probabilité que les numéros 9 ; 10 ; 11 donnent le tiercé dans le désordre.

– Le 9 peut occuper la 1re, la 2e ou la 3e place, donc le 9 a 3 chances sur 20 de figurer dans le tiercé, c'est-à-dire une probabilié de $\frac{3}{20}$.

– Un raisonnement analogue donne 2 chances sur 19 au 10, c'est-à-dire une probabilié de $\frac{2}{19}$ de figurer dans le tiercé.

– Le 11 n'a plus qu'une chance sur 18 d'être placé, c'est-à-dire une probabilié de $\frac{1}{18}$ d'être troisième à l'arrivée.

Donc la probabilié que 9 ; 10 ; 11 soit la « combinaison gagnante » ou non est :

$$\frac{3}{20} \times \frac{2}{19} \times \frac{1}{18} = \frac{6}{6840}.$$

La probabilité que 9 ; 10 ; 11 soit le tiercé gagnant étant $\frac{1}{6840}$ d'après ce qui précède, la probabilité que 9 ; 10 ; 11 soit le tiercé dans le désordre est :

$$\frac{6}{6840} - \frac{1}{6840} = \frac{5}{6840}.$$

3. Les chavaux sont de valeurs inégales.

Calcul de la probabilité que (4 ; 11 ; 18) soit le tiercé gagnant.

– Déterminer la probabilié P_1 de chaque cheval numéroté de 15 à 20.
Dans chaque sous-ensemble {1, 2, 3, ..., 10}, {11, 12, 13, ..., 14}, {15, 16, ..., 20}, il y a équiprobabilité des évènements élémentaires, d'où : $(0{,}05 \times 10) + (0{,}08 \times 4) + 6P_1 = 1$
(la somme des probabiliés est égale à 1, où P_1 désigne la probabilié de chacun des chevaux numérotés de 15 à 20).
On a immédiatement : $P_1 = 0{,}03$

• Justifier que la probabilié pour que (4 ; 11 ; 18) soit le tiercé dans l'ordre est obtenue par :

$$0{,}05 \times \frac{0{,}08}{1 - 0{,}05} \times \frac{0{,}03}{1 - (0{,}05 + 0{,}08)} = 145{,}1 \times 10^{-6}$$

TP2 Loi binomiale et contrôle de qualité

Exercice commenté

Une usine fabrique des pièces dont 1,8% sont défectueuses. Le contrôle des pièces s'effectue selon les probabilités conditionnelles suivantes :

– sachant qu'une pièce est bonne, on l'accepte avec une probabilité de 0,97.

– sachant qu'une pièce est mauvaise on la refuse avec une probabilité de 0,99.

1. Quelle est la probabilité qu'une pièce soit défectueuse ?

2. *a)* Démontrer que la probabilité qu'une pièce soit défectueuse et acceptée est 0,00018.

***b)* Démontrer que la probabilité qu'une pièce soit bonne et réfusée est 0,02946**

***c)* Calculer la probabilité qu'il y ait une erreur dans le contrôle.**

3. Si on contrôle 5 pièces de façon indépendante qu'elle est la probabbilité qu'il y ait exactement deux erreurs de contrôle ? 3 erreurs de contrôle ?

Désignons par : A l'événement « la pièce est défectueuse » et B l'événement « la pièce est refusée »

on obtient : $\bar{A}$ l'événement « la pièce est bonne » et $\bar{B}$ l'événement « la pièce est acceptée »

On a : $P_A(B) = 0{,}99$ et $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0{,}97$.

1. Probabilité qu'une pièce soit défectueuse : $P(A) = 0{,}018$.

2. *a) Probabilité qu'une pièce soit défectueuse et acceptée* : $P(A \cap \bar{B}) = P_A(\bar{B}) \times P(A)$.

On applique la formule des probabilités conditionnelles.

On a : $P_A(\bar{B})\,) = 1 - P_A(B) = 1 - 0{,}99 = 0{,}01$

d'où : $P(A \cap \bar{B}) = 0{,}01 \times 0{,}018 = 0{,}00018$ $\boxed{P(A \cap \bar{B}) = 0{,}00018}$

b) Probabilité qu'une pièce soit bonne et refusée : $P(\bar{A} \cup B) = P_{\bar{A}}(B) \times P(\bar{A})$.

Or : $P_{\bar{A}}(B) = 1 - P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 1 - 0{,}97 = 0{,}03$

d'où : $P(\bar{A} \cap B) = 0{,}03 \times 0{,}982 = 0{,}02946$ $\boxed{P(\bar{A} \cap B) = 0{,}02946}$

c) Il y a une erreur dans le contrôle si :

– soit la pièce est bonne et refusée i.e. l'événement $(\bar{A} \cap B)$ est réalisé,

– soit la pièce est mauvaise et acceptée i.e. l'événement $(A \cap \bar{B})$ est réalisé.

Désignons par E l'événement « avoir une erreur dans le contrôle ».

On a : $P(E) = P[(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B})] = P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = 0{,}0018 + 0{,}02946$

car $(\bar{A} \cap B)$ et $(A \cap \bar{B})$ sont incompatibles.

$\boxed{P(E) = 0{,}02964}$

3. Probabilité d'avoir des erreurs

Désignons par D l'événement « il y a exactement deux erreurs dans le contrôle ». On a ici une variable binomilale de paramètres 5 et 0,02964, car soit il y a une erreur dans le contrôle avec une probabilité de 0,02964, soit il n'y a aucune erreur de contrôle, d'où :

$P(D) = C_5^2\,(0{,}02964)^2\,(1 - 0{,}02964)^3$ $\boxed{P(D) = 8{,}02.10^{-3}}$

• Calculer de même la probabilité qu'il y ait 3 erreurs de contrôle.

Cette probabilité vaut : $C_5^3\,(0{,}02964)^3\,(1 - 0{,}02964)^2$.

TP3. Probabilité conditionnelle et suite arithmético-géométrique

Exercice commenté

1. **a est un nombre réel. On considère la suite (u_n) de nombres réels définie par :**

pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+1} = -\frac{3}{10}u_n + \frac{4}{10}$ et la condition initiale $u_1 = a$.

a) **(v_n) est la suite de nombres réels définie par :**

pour tout nombre entier naturel non nul n, $v_n = 13u_n - 4$.

Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison k. Exprimer v_n en fonction de n et a.

b) **Prouver que : pour tout nombre entier naturel non nul n, $u_n = \frac{4}{13} + (a - \frac{4}{13})\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}$.**

c) **Déterminer la limite de la suite (u_n).**

2. **Un professeur oublie fréquemment les clés de sa salle de classe.**

Pour tout nombre entier naturel non nul n, on note E_n l'événement « le professeur oublie ses clés le jour n », $\overline{E_n}$ l'événement contraire de E_n, P_n la probabilité de E_n et q_n celle de $\overline{E_n}$.

On note a la probabilité P_1 qu'il oublie ses clés le premier jour. On suppose en outre que les deux conditions suivantes sont réalisées :

– si le jour n, il oublie ses clés, la probabilité qu'il les oublie encore le jour suivant $(n + 1)$ est $\frac{1}{10}$.

– si le jour n, il n'oublie pas ses clés, la probabilité qu'il les oublie le jour suivant $(n + 1)$ est $\frac{4}{10}$.

a) **Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $P_{n+1} = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}q_n$.**

Pour cela, on pourra d'abord calculer les probabilités conditionnelles $P_{E_n}(E_{n+1})$ et $P_{\overline{E_n}}(E_{n+1})$.

En déduire l'expression de P_{n+1} en fonction de P_n.

b) **À l'aide des résultats de la question 1. donner l'expression de P_n en fonction de a et n. La limite p de P_n dépend-elle de la condition initiale a ?**

D'après Bac

1. Étude de la suite (u_n)

(u_n) est la suite définie par :

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = -\frac{3}{10}u_n + \frac{4}{10} \quad [n \in \mathbb{N}^*] \end{cases}$$

a) Démontrons que la suite (v_n) définie par : $v_n = 13u_n - 4$, est une suite géométrique.

- Calculer : $v_{n+1} = 13u_n - 4$
- Démontrer que : $v_{n+1} = \frac{3}{10}(13u_n - 4)$

$$v_{n+1} = \frac{3}{10}v_n$$

- Conclure en utilisant la définition que (v_n) est une suite géométrique de 1[er] terme v_1 et de raison k

$$v_1 = 13u_1 - 4 = 13a - 4 \quad \text{et} \quad k = -\frac{3}{10}$$

On obtient : $v_n = (13a - 4)\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}$

b) Prouvons que : $u_n = \frac{4}{13} + (a - \frac{4}{13})\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}$.

On a : $v_n = 13u_n - 4$; $u_n = \frac{1}{13}(v_n + 4)$

donc : $u_n = \frac{4}{13} + (a - \frac{4}{13})\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}$

c) Calculons $\lim u_n$

On a : $\lim\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1} = 0$ (car $\left|-\frac{3}{10}\right| < 1$).

donc : $\lim u_n = \frac{4}{13}$

Par conséquent la suite (u_n) converge vers $\frac{4}{13}$.

2. Un professeur oublie ses clés.

a) Démontrons que :

pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $P_{n+1} = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}q_n$

On a : $P_{E_n}(E_{n+1}) = \frac{1}{10}$ et $P_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) = \frac{4}{10}$.

Appliquons la formule des probabilités totales à E_n et $\overline{E_n}$.

On a : $P_{n+1} = P(E_{n+1})$ $[n \geq 1]$

$$P_{n+1} = P_{E_n}(E_{n+1}) \times P(E_n) + P_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) \times P(\overline{E_n})$$

$$= \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}q_n = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}(1 - P_n).$$

Donc : $P_{n+1} = -\frac{3}{10}P_n + \frac{4}{10}$

b) Déterminons une expression de P_n en fonction de a et n

Puisque $P_1 = a = u_1$ et que (P_n) et (u_n) vérifient la même formule de récurrence,

alors, pour tout $n \geq 1$, $P_n = u_n$.

donc : $P_n = = \frac{4}{13} + (a - \frac{4}{13})\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}$

** La question **1.** prouve que (P_n) converge vers $P = \lim u_n = \frac{4}{13}$, limite qui est indépendante de la condition initiale $P_1 = u_1 = a$.

Exercices

ENTRAÎNEMENT

Probabilités conditionnelles

1 Un sondage effectué dans une région montagneuse à propos de la construction d'un barrage donne les résultats suivants :

- 65 % des personnes interrogées sont contre la construction de ce barrage ;
- parmi les personnes qui sont contre cette construction, 70 % sont des écologistes ;
- parmi les personnes favorables à la construction, 30 % sont des écologistes.

On note C l'événement « la personne interrogée est contre la construction » et $\overline{C}$ l'événement contraire.
On note E l'événement « la personne interrogée est écologiste ».
Calculer les probabilités $p(C)$, $p(E/C)$, $p(C/E)$.

D'après Bac

2 Une usine fabrique des stylos à bille. Une étude statistique a montré que 90 % de la production ne présente pas de défaut.
Chaque stylo est soumis à un contrôle de fabrication. Ce contrôle refuse 94 % des stylos avec défaut et accepte 92 % des stylos sans défaut.
On choisit au hasard un stylo avant son passage au contrôle.
On désigne par D l'événement « le stylo est accepté à l'issue du contrôle ».
Calculer les probabilités des évènements suivants :
E_1 « le stylo est accepté et n'a pas de défaut » ;
E_2 « le style est accepté et a un défaut ».

D'après Bac

3 Dans cet exercice, les résultats demandés seront donnés sous forme de fractions irréductibles.
On dispose d'un dé à 6 faces, parfaitement équilibré, dont 2 faces sont bleues, les autres faces étant rouges.
On le lance 5 fois de suite, les lancers sont indépendants.
1. Quelle est la probabilité d'obtenir 4 fois une face bleue et une fois une face rouge, dans cet ordre ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir 4 fois une face bleue et une face rouge ?

D'après Bac

4 Paul aime le chocolat, mais il doit suivre un régime pendant une année.
Le premier jour, il ne mange pas de chocolat. Si un jour donné n, $(1 \leq n \leq 364)$, Paul ne mange pas de chocolat, il y a une chance sur 5 qu'il n'en mange pas le lendemain. Si ce même jour, Paul mange du chocolat, il y a une chance sur 2 qu'il n'en mange pas le lendemain.
Pour $n \geq 1$, on désigne par F_n l'événement « Paul ne mange pas de chocolat le jour n » et par P_n la probabilité de F_n.
Chaque affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?
a) $P(F_2/F_1) = \frac{1}{5}$.
b) Pour $n \geq 3$, on a $P(F_n/F_{n-1}) = \frac{1}{5}$ et $P(F_n/\overline{F_{n-1}}) = \frac{1}{2}$.
c) Pour $n \geq 2$, on a $P_n = -\frac{3}{10}P_{n-1} + \frac{1}{2}$.
d) Pour $n \geq 1$, on a $P_n - \frac{5}{13} = \frac{8}{13} \times (-0{,}3)^{n-1}$.

D'après Concours FESIC, 1995

Variable aléatoire

5 Une association organise une tombola. Tous les billets, au nombre de 500, sont vendus.
L'un des billets permet de gagner un lot d'une valeur de 62 000 francs, 9 billets permettent chacun de gagner un lot d'une valeur de 7 000 francs, 50 billets permettent chacun de gagner un lot d'une valeur de 500 francs, les autres sont perdants.
1. On choisit au hasard un billet. Tous les billets ont la même probabilité d'être choisis.
Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :
A « le billet choisi gagne un lot d'une valeur de 7 000 francs » ;
B « le billet choisi est perdant ».
2. Les billets sont vendus 500 francs. Que rapportera la tombola au trésorier de l'association ?
3. On appelle gain d'un billet la différence entre le montant du lot et le prix d'achat du billet.
On désigne par X la variable aléatoire qui associe à chaque billet choisi au hasard le gain de ce billet.
a) Donner les différentes valeurs de X.
b) Donner la loi de probabilité de X.
c) Calculer l'espérance mathématique E(X).

6 On jette en même temps un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et une pièce de monnaie parfaitement équilibrés. On convient d'associer à cette expérience le nombre indiqué sur la face supérieure du dé si la pièce de monnaie marque pile, et le double de ce nombre si la pièce marque face.
On considère X la variable aléatoire « nombre ainsi obtenu ».
1. Donner la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X.

7 On jette successivement et indépendamment sur une table 2 dés tétraédriques réguliers dont les faces sont numérotées de 1 à 4. On considère la variable aléatoire Z égale à XY où X est le nombre lu sur la face supérieure du premier dé et Y le nombre lu sur la face supérieur du deuxième dé.
1. Donner la loi de probabilité de Z.
2. Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de Z.

8 Un tournoi de football se déroule entre 5 équipes. Chaque équipe doit rencontrer une fois et une fois seulement les 4 autres.

1. Combien y-a-t-il de matchs joués ?
Combien chaque équipe joue-t-elle de matchs ?

2. À chaque rencontre, on admet que chaque équipe a la même probabilité de gagner, de faire match nul ou de perdre.
À chaque rencontre, on attribue :
– 2 points à l'équipe victorieuse ;
– 1 point à chaque équipe s'il y a match nul ;
– 0 point à l'équipe perdante.
On considère X la variable aléatoire « le nombre de points obtenus par une équipe à la fin du tournoi ».
Donner la loi de probabilité de X.

3. Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X.

9 On tire au hasard 3 cartes d'un jeu de 32 cartes. On considère la variable aléatoire X « nombre d'as tirés ».

1. Donner la loi de probabilité de X et calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X dans les cas suivants :
a) on tire les trois cartes simultanément ;
b) on remet dans le jeu la carte tirée avant d'en tirer une autre.

2. Comparer ces deux résultats.

10 Un jeu consiste à lancer deux fois de suite un dé cubique non pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On considère la variable aléatoire X « somme des numéros sortis ».

1. Donner la loi de probabilité de X.

2. Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X.

3. Donner et représenter la fonction de répartition de X.
En déduire la probabilité des évènements :
$$X \le 4 \quad ; \quad 5 \le X \le 8 \quad \text{et} \quad X \ge 9$$

4. Le joueur perd 1000 F si $X \le 4$, n francs si $5 \le X \le 8$ et gagne 2000 F si $X \ge 9$.
Déterminer n pour que l'espérance mathématique du gain soit nulle.

11 Une urne contient deux boules noires et une boule blanche. On tire une boule. Si la boule est blanche, le jeu est terminé. Si la boule est noire, on la remet dans l'urne et on procède à un nouveau tirage d'une boule. Le jeu est terminé si la boule est blanche, la boule est remise dans l'urne si elle est noire, et on procède à un nouveau tirage d'une boule, et ainsi de suite.
Le nombre de tirages à effectuer pour voir apparaître une boule blanche, et donc pour voir se terminer le jeu, est une variable aléatoire.

1. Donner la loi de probabilité de cette variable aléatoire. Vérifier que la somme des probabilités correspondantes est égale à 1.

2. On désigne par X la variable aléatoire ainsi définie. Calculer :
a) la probabilité que $X > 5$;
b) la probabilité que $X \le 7$;
c) la probabilité que $5 \le X \le 8$.

3. Calculer l'espérance mathématique de X.

12 On dispose d'un dé pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Lorsqu'on lance ce dé, on suppose que la probabilité d'apparition d'une face dont le numéro est pair est le double de la probabilité d'apparition d'une face dont le numéro est impair.

1. Calculer les probabilités d'obtenir chaque face.

2. Une personne qui lance le dé obtient les résultats suivants :
– si la face 1 ou la face 6 apparaît, elle gagne 1000 F ;
– si la face 3 apparaît, elle ne gagne rien ;
– si une autre face apparaît, elle gagne 500 F.
On considère la variable aléatoire X « gain du joueur ».
a) Donner la loi de probabilité de X.
b) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X.
c) Donner et représenter la fonction de répartition de X.

13 Dans une urne, il y a 18 boules blanches et 10 boules rouges, indiscernables au toucher. On considère l'épreuve qui consiste à extraire au hasard, l'une après l'autre et sans remise deux boules de l'urne.
On est dans une situation d'équiprobabilité. On donnera pour chaque résultat la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-2} près.

1. Déterminer la loi de probabilité de l'événement E « la première boule tirée est blanche ».

2. On répète cinq fois de suite l'épreuve précédente ; après chaque épreuve les deux boules tirées sont remises dans l'urne. Les dix épreuves élémentaires sont donc indépendantes.
On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque partie de dix épreuves associe le nombre de fois que se produit l'événement E.
a) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale ; préciser les paramètres de cette loi.
b) Calculer la probabilité de l'événement F « E se produit exactement deux fois ».

14 On considère une épreuve aléatoire débouchant sur deux éventualités, succès et échec, de probabilités respectives 0,8 et 0,2.
On désigne par X la variable aléatoire qui associe à n épreuves aléatoires indépendantes le nombre k de succès.
On désigne par Y la variable aléatoire qui associe à n épreuves aléatoires indépendantes le nombre k d'échecs.

1. Quelles sont les lois suivies par X et Y ?
Donner, en fonction de n, l'expression de :
$P(X = k)$; $P(Y = k)$; $P(X = 0)$; $P(X \ge 1)$; $P(Y = n)$.

2. On suppose $n = 10$. Calculer :
$P(X = 0)$; $P(X = 2)$; $P(X \le 2)$; $P(X > 2)$;
l'espérance mathématique $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$.
Tous les résultats seront donnés à 10^{-6} près par défaut.

Problèmes

15 Dans une entreprise, on fait appel à un technicien lors de ses passages hebdomadaires, pour l'entretien des machines. Chaque semaine, on décide donc, pour chaque appareil, de faire appel ou non au technicien. Pour un certain type de machines, le technicien constate :

– qu'il doit intervenir la première semaine ;
– que s'il est intervenu la $n^{ième}$ semaine, la probabilité qu'il intervienne la $(n + 1)^{ième}$ semaine est égale à $\frac{3}{4}$;
– que s'il n'est pas intervenu la $n^{ième}$ semaine, la probabilité qu'il intervienne la $(n + 1)^{ième}$ semaine est égale à $\frac{1}{10}$.
On désigne par E_n l'événement « le technicien intervient la $n^{ième}$ semaine » et par P_n la probabilité de l'événement E_n.
1. Déterminer les nombres :

$$P(E_1),\ P(E_{n+1}/E_n) \text{ et } P(E_{n+1}/\overline{E_n})$$

puis en fonction de P_n :

$$P(E_{n+1} \cap E_n) \text{ et } P(E_{n+1} \cap \overline{E_n})$$

2. En déduire que pour tout nombre entier naturel n non nul :

$$P_{n+1} = \frac{3}{20} P_n + \frac{1}{10}.$$

3. On pose : $q_n = P_n - \frac{2}{7}$.
a) Montrer que la suite (q_n) est une suite géométrique.
b) En déduire l'expression de P_n en fonction de n.
c) Pour quelles valeurs de l'entier n, la probabilité que le technicien intervienne la $n^{ième}$ semaine est-elle inférieure à $\frac{3}{10}$.

D'après Bac

16 Problème des trois portes
Vous êtes sur un plateau de télévision, à un jeu dont le prix est une voiture. Devant vous, il y a 3 portes fermées et un animateur. Derrière l'une de ces 3 portes se trouve la voiture à gagner.
L'animateur, qui sait où se trouve la voiture, vous demande de désigner l'une des 3 portes. Votre choix fait, il n'ouvre pas la porte que vous lui avez désignée, mais l'une des 2 autres, derrière laquelle ne se trouve pas la voiture (il peut en effet toujours ouvrir une porte derrière laquelle il n'y a pas la voiture et que vous n'avez pas désignée).
Dès lors, il vous permet de changer d'avis, c'est-à-dire qu'il vous demande si vous maintenez votre choix initial ou si vous changez votre choix initial en désignant l'autre porte encore fermée. Votre choix est maintenant décisif car il ouvrira la porte que vous désignerez finalement : si la voiture est derrière, vous gagnez, sinon, vous avez perdu.
Que faites-vous ? C'est-à-dire maintenez-vous votre choix initial ou le changez-vous, votre but étant bien sûr d'avoir la plus grande probabilité de gagner la voiture !
N.B. : Ne vous méprenez pas, car ce problème est bel et bien un problème de probabilité conditionnelle !

17 Une usine de montage fabrique une série de cellulaires. La fabrication comporte deux phases.
La première phase fait apparaître un défaut α dans 2 % des cas ; la seconde phase fait apparaître un défaut β dans 12 % des cas.
1. Un cellulaire est tiré au hasard. On définit les évènements suivants :
A « le cellulaire tiré présente le défaut α » ;
B « le cellulaire tiré présente le défaut β ».
Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
C « le cellulaire tiré présente les deux défauts » ;
D « le cellulaire tiré ne présente aucun des deux défauts ».
2. Au cours de la fabrication, on prélève au hasard et successivement huit cellulaires. On considère que le nombre de cellulaires fabriqués est assez grand pour que l'on puisse supposer que les tirages sont indépendants. On admet que la probabilité qu'un cellulaire choisi au hasard dans la production ne présente aucun des deux défauts α et β est 0,885.
On désigne par X la variable aléatoire qui associe à chaque prélèvement de huit cellulaires le nombre de cellulaires sans aucun des deux défauts α et β.
a) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale ; préciser les paramètres de cette loi.
b) Déterminer la probabilité de l'événement F « quatre cellulaires au moins n'ont aucun des deux défauts α et β ». On donnera la valeur exacte de cette probabilité puis une valeur approchée au millième près par défaut.

18 Une entreprise de transport de matériaux de construction utilise dix camions. Pour chacun d'eux la probabilité de l'événement « tomber en panne un jour donné » est 0,036 quel que soit le jour. On suppose que les éventuelles pannes sont indépendantes et réparties dans la journée.
On désigne par X la variable aléatoire qui à tout jour ouvrable associe le nombre de camions tombés en panne ce jour-là.
1. X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.
2. Calculer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X. Que représente E(X) ?
3. On choisit un jour au hasard. Déterminer une valeur approchée à 10^{-5} près de la probabilité de l'événement A « 5 camions au moins tombent en panne ce jour-là ».
4. Les bureaux de l'entreprise sont ouverts 250 jours par an. On désigne par Y la variable aléatoire qui à toute *année* de 250 jours associe le nombre de jours où se produit l'événement A.
Dans ce qui suit, on prend P(A) = 0,009.
a) Déterminer la loi de la variable Y.
b) Calculer l'espérance mathématique E(Y) de la variable aléatoire Y.
c) Calculer $\sigma^2(X)$ et $\sigma^2(Y)$, variance de X et variance de Y.
d) Calculer la covariance σ_{XY} des variables aléatoires X et Y, notée aussi cov(X ; Y).

19 p est un nombre réel $(0 < p < 1)$. Un coureur s'entraîne sur un parcours comportant n haies numérotées de 1 à n. Pour chaque nombre entier naturel i tel que $1 \leq i \leq n$, la probabilité de renverser la $n^{ième}$ haie est p. Le coureur poursuit son parcours jusqu'à la $n^{ième}$ haie quel que soit le nombre de haies renversées. On désigne par X la variable aléatoire définie comme suit :
$X = n + 1$, si aucune haie n'est renversée ;
$X = k$, si k est le numéro de la première haie renversée.
a) Calculer en fonction de p et k la probabilité $P(X = k)$.
Préciser $P(X = 1)$ et $P(X = n + 1)$. Vérifier que l'on a :

$$P(X = 1) + P(X = 2) + \ldots + P(X = n + 1) = 1.$$

b) Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de n et p.

D'après Bac